UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas -PPGECE

PATRÍCIA RODRIGUES DA SILVA ROSSI

Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática

SÃO CARLOS
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PATRÍCIA RODRIGUES DA SILVA ROSSI

Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas à Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, sob orientação do Professor Doutor Roberto Ribeiro Paterlini.

São Carlos
2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

R831le

Rossi, Patrícia Rodrigues da Silva.
Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática / Patrícia Rodrigues da Silva Rossi. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
219 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Sequência didática. 3. Aprendizagem. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
DM - UFSCar

Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva
IBILCE - UNESP

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
DM - UFSCar

Dedicatória

A meu marido Renato, pelo amor, dedicação e compreensão durante toda a realização deste trabalho, aos meus filhos Bruno e Leonardo, meus tesouros, mas especialmente a duas pessoas a quem devo minha vida e todas as minhas realizações, meus pais Osvaldo e Angela.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado forças para a realização desse trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor Roberto Ribeiro Paterlini, pela paciência, dedicação, apoio e competência. Sua contribuição foi essencial para a realização deste trabalho.

A todos os Professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar, que com seus ensinamentos deram contribuição significativa para minha formação.

A todos os colegas do mestrado, Clóvis, Danilo, Jayme, Luciano, Mário, Renato, Santinho e Thiago, nossa convivência e nosso companheirismo foram marcantes em minha vida. Mas em especial ao Rodrigo, à Rita, à Thais e ao Toninho, meus inseparáveis amigos.

Ao secretário do PPGECE, Júnior, que sempre esteve pronto para nos ajudar.

Às minhas colegas de profissão, as professoras, Lucy de Fátima Montezuma, Maria Fernanda Canato e Maria Silvia Real Toledo Piza, que principalmente no início da minha carreira me apoiaram, incentivaram e dividiram comigo muito de sua experiência.

Aos alunos das primeiras séries (2009) do Ensino Médio do COEDUCAR, que desenvolveram as atividades propostas neste trabalho.

Às amigas Adriana, Kátia e Luciana, pelo carinho e apoio que vocês sempre me deram.

Aos meus pais, Osvaldo e Angela, por sempre me ensinar o caminho correto para percorrer as trilhas da vida.

A meu irmão Alexandre, que sempre me incentivou e me apoiou principalmente nos momentos mais difíceis.

A todas as pessoas da minha família, em especial, Thereza, Silvia, Carlos, Juliana, Flávia, Geraldo Henrique, Luciana, Giovanni, Eva e Ana Clara, que de uma forma ou de outra sempre me ajudaram muito e me apoiaram, sem eles esse sonho jamais seria realizado.

Ao meu marido Renato pelo amor e pela paciência com os meus descontroles durante esses dois anos.

Aos meus filhos Bruno e Leonardo, tenho certeza que não foi fácil, mas vocês compreenderam minha ausência mesmo sem aceitá-la.

Muito obrigada a todos.

RESUMO:

O objetivo desta dissertação é descrever o trabalho que realizamos na elaboração de material didático que tornasse o ensino de logaritmos mais significativo para os estudantes do Ensino Médio. Para isso construímos uma sequência didática utilizando recursos da Educação Matemática. Para organizar nossa pesquisa usamos princípios da Engenharia Didática. Essa sequência didática inclui Folhas de Atividades que foram elaboradas com a preocupação de fazer com que o estudante tivesse o máximo de autonomia possível para resolvê-las. Nossa sequência também inclui aulas expositivas, atividades com o uso do computador e da calculadora. A sequência foi aplicada para 42 estudantes de duas salas de primeira série do Ensino Médio, em uma escola cooperativa da cidade de Araraquara – SP. Para isso foram utilizadas 15 aulas de 50 minutos cada. Em sua grande maioria, as atividades foram desenvolvidas em duplas. Os resultados foram obtidos através da análise das atividades resolvidas pelos estudantes e também da observação e das anotações que fizemos durante a aplicação da sequência. De acordo com esses resultados consideramos que nossos objetivos foram alcançados, pois as atividades foram desenvolvidas com sucesso e a análise *a posteriori* nos mostrou que a sequência aplicada contribuiu para que o aprendizado dos estudantes ocorresse de forma significativa.

Palavras chave: Ensino de Matemática. Logaritmo. Sequência Didática.

ABSTRACT:

The objective of this dissertation is to describe the work that we carry through in the elaboration of didactic material that became the teaching of logarithms more significant for the students of high school level. For this we constructed a didactic sequence using resources of mathematical education. To organize our research we use principles of Didactic Engineering. Our sequence also includes exposing lessons, activities with the use of the computer and the calculator. This didactic sequence includes Worksheets elaborated with the concern to make the student had the maximum autonomy as possible to decide them. As well as these activities, exposing lessons, activities with the use of computer and calculator are also part of our sequence. The sequence was applied to 42 students of two classrooms of first grade of high school level, in a cooperative school of the city of Araraquara - SP. For that, 15 lessons of 50 minutes each were used. Most of the activities was developed in pairs. The results were gotten through the analysis of the activities solved by the students and also through the comment and the notes that we made during the application of the sequence. According to these results we consider that our objectives were reached, because the activities were developed successfully and *a posteriori* analysis showed us that the applied sequence contributed for the learning of the students to occur of significant form.

Keywords: Mathematics Education. Logarithms. Didactic Sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES:

LISTA DE FOTOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No estudo da Matemática no Ensino Médio o conceito de funções exponenciais e logarítmicas está entre os mais importantes. Elas constituem as funções mais representativas de fenômenos diversos abordados nesse nível de ensino. A construção epistemológica dessas funções, realizada desde os tempos da antiga matemática grega, é um exemplo da evolução e amadurecimento das ideias matemáticas.

Por outro lado é consenso a importância dessas funções no ensino básico. Neste trabalho propomos uma sequência didática para o ensino da função logarítmica com atividades que podem ser utilizadas diretamente em sala de aula.

A ideia de realizar este trabalho surgiu a partir de nossa experiência profissional. Trabalhamos desde o ano 2000 como professora do Ensino Médio, na rede particular e na rede pública do Estado de São Paulo. Durante todos esses anos buscamos diversificar as técnicas de ensino, principalmente em alguns temas que percebíamos que os estudantes aprendiam mecanicamente. Um deles, o ensino de logaritmos, é apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio com textos que nos parecem pouco explicativos, com excesso de fórmulas e exercícios repetitivos. Assim após ingressar no mestrado profissional do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar - SP), em 2008, resolvemos elaborar uma sequência didática que utilizasse técnicas variadas da Educação Matemática para produzir um material didático mais atraente. Sequência didática essa, que construída sobre os pilares da Engenharia Didática constitui o produto final do nosso curso de mestrado.

Nosso objetivo nesta sequência é facilitar a construção do conceito de logaritmo e de função logarítmica, incluindo formas de representação, estudo de propriedades e aplicações a fenômenos abordados por outras ciências, como modelos biológicos, escalas para mensuração de grandezas químicas, físicas e geológicas. Para isso, fizemos um estudo preliminar das dificuldades de aprendizado dos logaritmos. Formulamos a hipótese cognitiva de que é importante utilizar a gênese histórica dos conceitos, a diversificação das tarefas matemáticas propostas, assim como o uso de recursos tecnológicos.

A sequência didática é constituída de dez etapas. Foram elaboradas folhas de atividades que trabalham a gênese dos logaritmos, a construção do conceito, das propriedades e suas aplicações; para que o estudante compreenda a criação, o conceito e o uso dos logaritmos. Além das folhas, aulas explicativas e de exercícios trabalham com o conceito de função logarítmica e de suas propriedades através da construção de gráficos. Atividades na sala de informática e com a calculadora científica proporcionam a oportunidade do uso das novas tecnologias para essa aprendizagem. A avaliação foi feita durante toda a aplicação da sequência didática e também em dois momentos específicos.

A sequência foi aplicada em duas classes de primeira série do Ensino Médio em uma escola cooperativa da cidade de Araraquara – SP. De posse das atividades feitas pelos estudantes e das anotações que fizemos durante a aplicação, analisamos todo o material para verificar se era necessário fazer a reelaboração de atividades da sequência e também se nossos objetivos tinham sido alcançados.

Nesse momento faremos uma descrição resumida dessa dissertação. O Capítulo 1 trabalha com o conceito matemático dos logaritmos. Descrevemos certos aspectos históricos dos logaritmos, sua origem, seu desenvolvimento e também sua utilidade na época. Além disso, definimos a função logarítmica e apresentamos algumas de suas propriedades, partindo do pressuposto que ela é a inversa da função exponencial. Finalmente consideramos aspectos da matemática contemporânea para mostrar que os logaritmos permanecerão sempre como parte importante no ensino da matemática. Nossa preocupação neste capítulo é descrever tecnicamente os logaritmos, sem fazer neste momento a transposição de conceitos e técnicas para o ensino.

No Capítulo 2 trazemos aspectos gerais sobre o ensino atual do logaritmo no Ensino Médio. Trabalhamos com documentos oficiais para analisar o que é proposto pelos especialistas. Em seguida fazemos uma breve análise de alguns livros didáticos do Ensino Médio para verificar a abordagem feita pelos autores. Analisamos algumas dissertações sobre o assunto e abordamos também a dificuldade encontrada pelos professores para o ensino de logaritmos.

Apresentamos no Capítulo 3 pressupostos epistemológicos e pedagógicos do trabalho realizado. Falamos sobre alguns aspectos da Engenharia Didática, pilar da elaboração de nossa sequência didática e do ensino de Matemática utilizando tarefas exploratórias, que norteou a elaboração das atividades da sequência. No final comentaremos sobre a estrutura e os objetivos das Folhas de Atividades elaboradas.

Fazemos no Capítulo 4 uma síntese explicativa de todos os momentos da sequência didática elaborada. Descrevemos os procedimentos da aplicação e da análise dessas atividades.

Nos Capítulos 5 a 14 fazemos a descrição minuciosa de todas as atividades da sequência didática, a descrição da aplicação e também a análise *a priori* e *a posteriori* das atividades. Cada capítulo traz a descrição e a análise de um momento da sequência didática. Adotamos esse formato em nossa dissertação, para facilitar sua leitura, já que a sequência é composta de dez momentos.

A conclusão de nosso trabalho se encontra no Capítulo 15.

As Folhas de Atividades são disponibilizadas no Apêndice A como foram aplicadas aos estudantes. No Apêndice B apresentamos a Folha de Atividades 2 com uma pequena modificação que foi feita após a aplicação e análise da sequência didática. Por fim no Apêndice C disponibilizamos as Folhas de Atividades resolvidas.

Esperamos com esse trabalho colocar à disposição dos colegas professores um material didático para o ensino de logaritmos construído com muita dedicação e que, segundo nossas pesquisas, funcionou muito bem. A experiência que adquirimos na elaboração e execução desta pesquisa contribuiu para o aperfeiçoamento de nosso trabalho como profissional da educação.

CAPÍTULO 1

Presença do logaritmo na Matemática

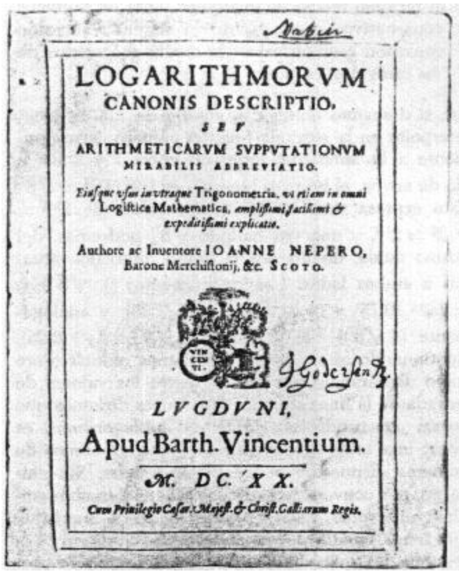
1.1 GÊNESE HISTÓRICA

Nos séculos XVI e XVII as nações européias empreenderam grandes navegações pelos mares do mundo. Nessas viagens um problema era a orientação dos navios, que era feita com a ajuda da posição dos astros. Isso exigiu o desenvolvimento da Astronomia, sendo necessário especificar com precisão o movimento das estrelas e a posição do Sol nas diferentes estações do ano. A posição dos astros é dada por cálculos trigonométricos em que é necessário ter o valor dos arcos trigonométricos para valores pequenos dos ângulos. Para isso eram necessários cálculos numéricos muito precisos. Como não existiam máquinas de calcular, a procura por métodos que simplificassem esses cálculos era muito grande. Três notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas: o uso do sistema decimal de numeração juntamente com a notação indo-arábica, as frações decimais e os logaritmos.

Os principais inventores dos logaritmos foram o suíço Joost Bürgi (1552-1632) e o escocês John Napier (1550-1617), cujos trabalhos são independentes. Décadas antes de Napier elaborar suas tábuas de logaritmos, Michel Stifel (1486-1567) já vinha trabalhando com tabelas numéricas para redução de cálculos. Mas segundo Boyer (1974), essa ideia, a de reduzir as operações, surgiu muito antes disso, com Arquimedes.

Arquimedes elaborou um método para contar os grãos de areia que preencheriam uma esfera imaginária com raio igual á distância entre a Terra e o Sol. Esse método está descrito em sua carta ao Rei Gelão. De acordo com Boyer (1974), Arquimedes, incidentalmente, mencionou em seu trabalho sobre números imensos, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos, a relação os expoentes dos números.

Segundo Boyer (1974) a idéia dos logaritmos provavelmente foi desenvolvida primeiro por Bürgi e depois por Napier. Mas isso aconteceu quase simultaneamente com apenas alguns anos de diferença. A invenção é creditada a Napier, pois foi dele a primeira publicação que era dedicada aos logaritmos: *Logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa lei dos logaritmos).



LOGARITHMORVM
CANONIS DESCRIPTIO,
SEV
ARITHMETICARVM SVPPVTATIONVM
MIRABILIS ABBREVIATIO.
Eiusque usus in utraque Trigonometria, *ut etiam in omni* Logistica Mathematica, *amplissimi facillimi & expeditissimi explicatio.*
Authore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonij, &c. SCOTO.
LVGDVNI,
Apud Barth. Vincentium.
M. DC. XX.
Cum Privilegio Cæsar. Majest. & Christ. Galliarum Regis.

Ilustração 1: Capa do livro *Logarithmorum canonis descriptio* de John Napier. Figura extraída do livro *El universo de los números: historia y evolución de las Matemáticas* de Lancelot Hogben, s/d, p. 179. (apud Miorim)

Além dessa publicação foi Napier quem realmente extraiu todas as propriedades operatórias dos logaritmos e vantagens para a simplificação de cálculos usando as tabelas que associavam elementos de Progressões Geométricas e Progressões Aritméticas.

Para construir sua primeira tábua de logaritmos Napier tomou uma progressão geométrica com razão um pouco menor que um $(1-10^{-7})$, enquanto Bürgi usou uma razão um pouco maior que um $(1+10^{-4})$.

Foi Napier quem criou a palavra *logaritmo*. De fato logaritmo é a combinação de duas palavras gregas – *logos* e *arithmos* – a primeira significa *razão* e a segunda, *número*.

Após a publicação dos trabalhos de Napier e Bürgi, muitos matemáticos e astrônomos aperfeiçoaram suas propostas e foram construídas muitas tábuas. Essas tábuas foram extensamente utilizadas no cálculo numérico até a invenção das calculadoras digitais, quando então foram aposentadas.

1.2 LOGARITMO COMO FUNÇÃO

A função logarítmica está entre as mais importantes da Matemática e tem origem em ideias simples, a correspondência entre elementos de progressões geométricas e de progressões aritméticas.

Para defini-la lembremos inicialmente que, dada uma função $f: A \to B$, sua inversa, quando existe, é uma função $g: B \to A$, tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$. É claro, que g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.

Notemos que uma função $f: A \to B$ possui inversa se, e somente se, f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre A e B.

Se $f: A \to B$ é uma correspondência biunívoca entre A e B sua inversa $g: B \to A$ é definida da seguinte maneira. Sendo f sobrejetiva, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Além disso, como f é injetiva, este x é único. Fazemos então $g(y) = x$. Assim, $g: B \to A$ é a função que associa a cada $y \in B$ o único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. É imediato que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y))=y$ para $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer.

A função exponencial $f: R \to R^+$, $f(x) = a^x$, para cada a positivo e diferente de 1, é uma correspondência biunívoca entre R e R^+, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade fundamental:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{ou} \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

Segue-se que f possui uma função inversa. A inversa da função exponencial da base a é a função $\log_a : R^+ \to R$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado *logaritmo* de x na base a. Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log(a^x) = x$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Segue-se imediatamente da relação $a^{u} \cdot a^{v} = a^{u+v}$ que

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

para x e y positivos quaisquer. Com efeito, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$, então $x = a^u$ e $y = a^v$ *e* $x\,y = a^u\, a^v = a^{u+v}$. Daí:

$$\log_a (xy) = \log_a (a^u\ a^v) = \log_a (a^{u+v}) = u + v = \log_a x + \log_a y$$

Outras propriedades dos logaritmos podem ser facilmente demonstradas:

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^z = z \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

para x e y positivos quaisquer, z um número real qualquer e a e b positivos e diferentes de um.

A função logarítmica $f : R^+ \to R$, $f(x) = \log_a x$, para todo a positivo e diferente de 1, é uma correspondência biunívoca entre R^+ e R, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Essas são as principais notações e propriedades das funções logarítmicas conforme propõe a matemática acadêmica. Observamos, para finalizar essa seção, que a transposição didática dessa linguagem e técnicas constitui um problema difícil. A definição que apresentamos de logaritmo implica na construção prévia da função exponencial, construção essa muito complicada para o nível do Ensino Médio.

1.3 LOGARITMO NA MATEMÁTICA CONTEMPORÂNEA

No século XVII, os matemáticos achavam que os logaritmos eram muito importantes, pois reduziam operações como divisão e multiplicação à subtração e adição, respectivamente. Naquela época, na Astronomia e nas Navegações os cálculos para determinar as posições dos astros ou de um navio eram muito trabalhosos, já que era necessário usar um grande número de casas decimais. Hoje, com o uso das calculadoras e dos computadores, não precisamos dos logaritmos para simplificar cálculos, mas o usamos na modelagem de fenômenos e na resolução de equações exponenciais, imprescindível no estudo de muitas funções.

Segundo Eves (2004, p. 327) "a função logaritmo nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise".

Os estudos feitos sobre a função logarítmica mostraram que, além de simplificar cálculos através da redução de operações, elas também têm conexão com muitos fenômenos naturais. Seu desenvolvimento proporcionou um crescimento significativo em outras áreas da Matemática como a Análise e Cálculo Diferencial e Integral. Além de sua utilidade na Matemática, os logaritmos também são utilizados em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na Física e na Química, para medição de nível sonoro, na escala de *pH* de substâncias, etc.

Uma característica da função logarítmica é sua lenta taxa de crescimento ou decrescimento. Por exemplo, $\log_{10} 10000 = 4$. Essa característica tem importantes aplicações, pois podemos utilizar essas funções para construir escalas para representação de dados e para aproximação assintótica de funções, com importantes aplicações em Complexidade Computacional. Além disso, as funções logarítmicas são utilizadas em modelagem de fenômenos naturais e sociais em que aparece para descrever a variação de grandezas.

CAPÍTULO 2

O logaritmo no Ensino Médio

2.1 PRESENÇA DO LOGARITMO NO ENSINO MÉDIO

Um dos principais temas abordados no Ensino Médio, em Matemática, é o estudo das funções. De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM Plus, p. 121):

> O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática.

O estudante, ao final do Ensino Médio deve, entre outras coisas, saber usar a Matemática para resolver problemas e para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento. Para isso deve reconhecer a linguagem algébrica relacionando grandezas, modelar situações, associar diferentes funções aos seus gráficos, identificar regularidades e associar o conceito de função a exemplos reais.

As funções exponenciais e logarítmicas têm fundamental importância nesse estudo, pois são usadas para descrever muitos fenômenos, sendo aplicadas em matemática financeira, crescimento populacional, intensidade sonora, *pH* de substâncias, etc.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM Plus) diz que o logaritmo é uma operação matemática, mas que é também uma linguagem de representação em todas as ciências. Por isso é necessário que o estudante saiba sua importância e conheça técnicas para seu uso.

A presença do logaritmo no currículo escolar brasileiro não é recente. De acordo com Miorim (2001), no período de 1856 a 1912, a teoria dos logaritmos esteve quase sempre presente nos programas oficiais brasileiros de ensino no campo da Aritmética. De 1893 a 1915 os programas oficiais tratam o tema também no terreno da Álgebra. A partir daí os programas oficiais situam o tema exclusivamente no campo da Álgebra.

Com o uso generalizado das calculadoras as tábuas de logaritmos, que eram usadas para facilitar os cálculos através da redução de operações, perderam o sentido. Além delas não se aborda mais o estudo de característica e mantissa. A justificativa do estudo dos logaritmos está no fato dela ser uma importante função que, segundo Lima (1997), está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

Com isso, o material didático disponível para o Ensino Médio não traz mais as tábuas e também não faz referências à característica e à mantissa. Estamos numa fase de transição no ensino de logaritmos. Alguns livros didáticos recentes já começam a trazer alguns problemas aplicados da função logarítmica, atividades com o uso da calculadora científica e abordam de maneira mais significativa os logaritmos naturais, como veremos mais adiante.

O estudante do Ensino Médio, quando chega do Ensino Fundamental, ainda não teve nenhum contato com os logaritmos. É necessário, então, para resolver situações-problema que envolvam funções logarítmicas, que ele saiba trabalhar com elas, aprendendo sua definição e suas propriedades.

Na atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008) o ensino da função logarítmica aparece inicialmente na primeira série do Ensino Médio e é retomado na terceira série.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio do MEC (2006) diz que é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. Diante dessa afirmação sugere que o estudo dos logaritmos não seja exaustivo nesse nível de ensino, mas que priorize sua aplicação em situações reais e também em outras áreas do conhecimento.

2.2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

O objetivo com esta análise não é fazer nenhum tipo de julgamento, mas sim, verificar qual a linha adotada por cada autor para o ensino de logaritmos.

A descrição e a análise dos livros serão feitas levando em consideração aspectos como: abordagem histórica, como é dada a definição, se há problemas aplicados, se existem atividades com o uso da calculadora e se o material aborda os logaritmos naturais.

Analisamos quatro livros didáticos, entre eles o livro adotado pela escola em que foi aplicada a sequência didática, que é o primeiro de nossa lista. Os livros analisados foram:

L1: *Matemática - Construção e Significado*. Volume único. Coordenação técnica José Luiz Pastore Mello (vários autores). Editora Moderna, 2005.

L2: *Matemática Completa*. Volume 1 dos autores: José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno. FTD, 2005.

L3: *Matemática - Volume Único*, dos autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn e Roberto Périgo. Atual Editora, 2007.

L4: *Matemática - Contextos e Aplicações*. Volume único do autor Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2009.

No livro *Matemática – Construção e Significado*, os autores começam o capítulo de logaritmos com uma situação problema que, de acordo com os dados fornecidos, o estudante se depara com uma equação exponencial de bases diferentes. Nesse ponto os autores dizem que para resolver esse tipo de equação precisamos da teoria dos logaritmos.

A primeira definição de logaritmos é dada como sendo o expoente de uma potência, em seguida tem-se a notação e a definição formal dos logaritmos. Neste momento são propostos alguns exercícios para o estudante calcular alguns logaritmos, ainda sem nenhuma contextualização. A seguir são dadas as condições de existência dos logaritmos e algumas propriedades básicas que os autores chamam de conseqüências da definição. Em seguida mais alguns exercícios são propostos.

Em seguida são apresentadas as propriedades operatórias dos logaritmos e a mudança de base com a explicação. As propriedades aparecem já definidas e, depois de um exemplo numérico, elas são demonstradas. São propostos mais exercícios que exploram de maneira direta a aplicação dessas propriedades.

Num tópico chamado cálculo de logaritmos os autores mencionam que, além da base decimal, também é muito usada a base ***e*** e os autores definem ***e*** como um número irracional e dão seu valor aproximado. Logo em seguida mostram como usar a calculadora científica no cálculo de logaritmos e trazem exercícios resolvidos com o auxílio da calculadora.

O próximo tópico, que tem como título Problemas envolvendo logaritmos, traz um problema de matemática financeira e um problema com uma fórmula pronta, sendo necessário apenas fazer algumas substituições. São propostos alguns exercícios e três problemas aplicados, cuja fórmula já é dada no enunciado.

O logaritmo como função é apresentado no próximo tópico. A abordagem é feita de maneira direta, já se dá a definição da função e constrói-se gráficos a partir de tabelas numéricas. Depois é feita uma construção do gráfico de uma função logarítmica e sua inversa a exponencial.

Trabalha-se um pouco com equações e inequações e depois nos exercícios complementares são propostos problemas aplicados da função logarítmica.

No livro *Matemática Completa* os autores dão início ao capítulo com uma situação-problema que envolve a exponencial e dizem que para resolver problemas desse tipo precisaremos dos logaritmos. A seguir dão uma breve justificativa histórica para a definição dos logaritmos, trazem uma tabela dos logaritmos decimais e depois a definição formal. Um pequeno texto fala sobre o número ***e*,** definindo-o através do limite de uma sequência e dá seu valor aproximado. Esse texto traz também um pouco da origem dos logaritmos. São propostos exercícios em que os estudantes tem que resolver equações exponenciais de bases diferentes, calcular logaritmos através de sua definição e também resolver situações-problema que envolvem os logaritmos.

É dada a condição de existência dos logaritmos e algumas propriedades imediatas. Depois de mais alguns exercícios já são dadas as equações para só depois trabalhar com as propriedades operatórias. São propostos muitos problemas. A abordagem da função logarítmica se dá a partir de sua inversa, a exponencial. Em seguida são exploradas as inequações logarítmicas.

Os autores falam ainda sobre o cálculo de logaritmos decimais, característica e mantissa e trazem uma tabela de mantissas. Falam, em um texto, como se constrói uma tábua de logaritmos, como é utilizada a calculadora para o cálculo de logaritmos e traz ainda um texto que fala sobre a estimativa da idade pelo método do carbono radioativo. Para encerrar traz uma grande quantidade de exercícios, nos quais, a maioria são problemas aplicados sobre logaritmos.

No livro *Matemática - Volume Único*, os autores introduzem o capítulo com um problema de matemática financeira que se reduz a uma equação exponencial de bases diferentes e dizem que para resolvê-la será necessário o estudo dos logaritmos. A seguir já dão a definição formal de logaritmos e as propriedades que são conseqüências dessa definição. A definição do número ***e*** é feita no capítulo anterior, o de funções exponenciais, como o limite de uma sequência. Os autores falam sobre os logaritmos de base 10 e de base ***e*** e sobre seu cálculo com o uso de calculadoras. São propostos exercícios que exploram a definição e as propriedades imediatas da definição.

As propriedades operatórias são definidas e demonstradas e são propostos exercícios diretos de aplicação dessas propriedades. Após esses exercícios um texto traz o uso de logaritmos na Química no estudo do *pH* de substâncias.

Para falar da função logarítmica são abordados os conceitos de função sobrejetora, injetora, bijetora e inversa. Antes da definição formal de função é apresentada uma situação problema que usa a matemática financeira para despertar o interesse dos estudantes pelo assunto. Após todo o estudo são propostos exercícios que incluem problemas aplicados. Um texto que aborda a escala Richter é colocado nesse momento do capítulo. Após isso são colocadas as equações e inequações logarítmicas.
O capítulo traz ainda, um texto sobre a medida da intensidade sonora e é encerrado com muitos exercícios de vestibular com alguns problemas aplicados.

No livro *Matemática - Contextos e Aplicações*, o capítulo se inicia com um problema de crescimento populacional que também se reduz a uma equação exponencial de bases diferentes, tendo aí, a justificativa para o estudo dos logaritmos. É feita uma abordagem histórica em que o autor traz a origem dos logaritmos e sua utilidade na época e justifica que atualmente os logaritmos não têm o mesmo papel de quando foi criado, mas continua sendo muito importante para a resolução de equações exponenciais.

A primeira definição dada não é formal, ele traz o logaritmo como um expoente para depois apresentar sua definição formal. São propostos exercícios que exploram a definição, mas com grau de dificuldade crescente. A seguir são dadas as condições de existência dos logaritmos e as consequências imediatas da definição. São propostos exercícios e em seguida são abordadas as propriedades operatórias dos logaritmos. São propostos exercícios que trabalham com as propriedades de maneira direta. Há uma abordagem sobre o uso das calculadoras científicas e são propostos exercícios.

A função logarítmica é abordada como sendo a inversa da exponencial. A seguir temos equações, inequações e problemas aplicados dos logaritmos. O número ***e*** é definido no capítulo anterior, funções exponenciais, como o limite de uma sequência.

Podemos perceber com essa análise que os livros apresentam programas semelhantes e as diferenças aparecem na abordagem de problemas aplicados em maior ou menor número. Alguns são um pouco mais tradicionais, dando definições sem apresentar um problema como ponto de partida e outros já usam essa abordagem, que é recomendada pelo PCNEM.

Não encontramos em nenhum desses livros a ligação entre sequências e logaritmos, talvez porque, em todos eles, as sequências numéricas estão no capítulo seguinte aos logaritmos. Nenhum deles aborda a escala logarítmica de maneira mais significativa, o que julgamos ser necessário para justificar os problemas aplicados.

2.3 ANÁLISE DOS DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS

Neste momento vamos analisar mais detalhadamente os documentos curriculares oficiais. Faremos uma descrição das sugestões de abordagem do ensino de logaritmos. Os documentos analisados foram a Proposta Pedagógica Curricular do Estado de São Paulo, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (MEC) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (MEC).

2.3.1 Proposta Pedagógica Curricular do Estado de São Paulo

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008, p. 41),

> O objetivo principal de uma proposta curricular é mapear as informações relevantes e organizá-las em narrativas significativas, em cada território disciplinar. Por meio das diversas disciplinas, os alunos adentram de maneira ordenada – disciplinarmente – o fecundo e complexo universo do conhecimento, em busca do desenvolvimento das competências básicas para sua formação pessoal.

Desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais em 1999 há uma busca pela contextualização e aproximação dos conteúdos com o universo do estudante para formá-lo como cidadão e como pessoa. É claro que isso não acontece da noite para o dia, mas esforços estão sendo feitos, desde então, para modificar o ensino tradicional que privilegiava as técnicas de algoritmos e mecanização do ensino.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo trabalha com quatro grandes eixos para o ensino da Matemática: Números, Geometria, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. No Ensino Médio o estudo de sequências numéricas, números irracionais e a ampliação do campo numérico para os complexos constituem o mote central para o desenvolvimento do eixo Números. No eixo Geometria, os tópicos devem ser trabalhados de forma espiral desde o Ensino Fundamental, mas no Ensino Médio deve-se aprofundar a abordagem e tem-se um espaço privilegiado para a Geometria Analítica. No eixo Grandezas e Medidas a ampliação de ideias se dá de forma significativa, principalmente com o estudo sistematizado das funções. A ideia de proporcionalidade direta ou inversa deve ser estendida a outros tipos de relações como as que associam uma potência ao seu expoente. O eixo Tratamento da Informação traz, no Ensino Médio, assuntos de extrema importância como Probabilidade, Matrizes, Estatística e Contagem.

A profundidade com que será tratado cada tema, dentro da disciplina, é deixada a cargo do professor, de acordo com as possibilidades cognitivas do grupo de estudantes. Contudo, a proposta diz que até mesmo em temas que julgamos ser desnecessário o aprofundamento, podem se constituir em importante pretexto para articular uma discussão, desde que haja um projeto que mobilize os interesses do grupo envolvido. De acordo com a proposta (p. 50):

> Os logaritmos, por exemplo, que inicialmente eram instrumentos fundamentais para a simplificação de cálculos, hoje não se destinam precipuamente a isso, sendo imprescindíveis no estudo das grandezas que variam exponencialmente.

A proposta sugere que os temas sejam abordados, sempre que possível, com metodologias alternativas ao tratamento tradicional dos conteúdos, de maneira criativa e que favoreça o uso da tecnologia, da modelagem matemática, de materiais concretos e de problematizações de fenômenos reais. Sugere ainda que seja usada a História da Matemática, pois é na história que buscamos a compreensão dos significados dos conceitos fundamentais.

Além da proposta curricular a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo disponibilizou para os professores cadernos com os temas propostos que devem ser estudados em cada bimestre. Nesse caderno há orientações de como devem ser trabalhados esses temas. No ano de 2009, os estudantes também receberam esse caderno bimestralmente.

No caderno do terceiro bimestre da primeira série do Ensino Médio são abordadas as funções exponenciais e logarítmicas. A orientação é que o ensino de logaritmos se dê de forma contextualizada, para mostrar quais são as utilidades atuais dos logaritmos, mas sem deixar a história de lado. Para isso são apresentadas situações de aprendizagens com problemas e atividades que ajudam e orientam o professor. Essas situações de aprendizagem trazem escalas logarítmicas para a construção de gráficos, situações-problema envolvendo diversas contextualizações (escala Richter, *pH* de substâncias, intensidade sonora, cálculo de juros, etc.).

No caderno do terceiro bimestre da terceira série do Ensino Médio é feita uma retomada no estudo das funções para que o estudante tenha um panorama mais abrangente desse estudo e consiga fazer comparações entre elas. São propostas situações de aprendizagem que abordam construção, análise de gráficos e análise da variação das diversas funções: polinomiais, exponencial, logarítmica e trigonométricas.

2.3.2 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, PCNEM Plus)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PNCEM) foram publicados em 1999 com o objetivo de ajudar a melhorar a qualidade do ensino em nosso país, partindo de princípios definidos pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96).

Propõe um currículo baseado em competências e habilidades e não em acúmulo de informações, busca dar significado ao conhecimento escolar mediante a contextualização, incentiva o raciocínio e a interdisciplinaridade para mostrar que há ligação entre muitos conceitos aprendidos em diversas disciplinas.

No PCN, a descrição das competências e habilidades e também dos conhecimentos em cada disciplina se divide em três grandes áreas, a saber: Linguagens, Código e suas Tecnologias, que abrange as disciplinas de Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Educação Física, Artes e Informática; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias com as disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática; e finalmente Ciências Humanas e suas Tecnologias com as disciplinas de História, Geografia, Sociologia e Filosofia.

Uma questão abordada pelo PCN é que devemos tratar os conteúdos com um significado e para isso devemos partir de elementos do domínio do estudante, sua escola, sua comunidade, não precisando necessariamente de fatos que sejam de sua vizinhança física ou social, mas de conteúdos que abrangem problemáticas ambientais globais ou questões econômicas continentais, por exemplo.

Na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias existem três grandes eixos que dividem as principais competências e habilidades necessárias para a formação do estudante:

- ✓ Representação e comunicação, que visa desenvolver a capacidade de comunicação do estudante.
- ✓ Investigação e compreensão, que visa desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções e também desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender.
- ✓ Contextualização sócio cultural, que visa compreender e utilizar a ciência como elemento de interpretação e intervenção, e a tecnologia como conhecimento sistemático de sentido prático.

No ensino da Matemática devemos destacar que uma das finalidades do ensino é aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência e estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e o conhecimento de outras áreas.

É proposto no PCN que o ensino de funções não seja conduzido de maneira isolada, mas sim analisando o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento.

O estudo dos números e da álgebra não deve ser feito de maneira isolada dos outros conceitos, deve-se levar em conta a perspectiva sócio-histórica da origem desses temas e sua aplicação em situações-problema.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM Plus) é uma publicação que complementa o PCNEM. São apresentadas orientações educacionais aos professores, sem pretensão normativa. Ele delimita o papel atual do Ensino Médio no Brasil. O Ensino Médio faz parte da Educação Básica, mas não é mais simplesmente preparador para o Ensino Superior nem é estritamente profissionalizante.

De acordo com o PCNEM Plus (p. 8), o Ensino Médio deve "preparar o estudante para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho".

Por isso é necessário que os conteúdos tenham um significado, pois para que o estudante tenha uma boa formação, é necessário que ele saiba quais são os objetivos dos conteúdos que se aprende no Ensino Médio. Isso deve ser feito de forma articulada nas diversas disciplinas das três áreas. Para isso deve-se dar ênfase às linguagens comuns usadas nas diferentes disciplinas da área. Um exemplo dado é o uso do logaritmo, operação que dá origem a funções matemáticas, mas que também é linguagem de representação em todas as ciências. De acordo com os PCNEM Plus, o ensino dos logaritmos só se justifica atualmente se for mostrada a sua importância em questões tecnológicas e em outras ciências, para expressar grandezas cujo intervalo de variação é exponencial. Um exemplo citado é a escala logarítmica de decibéis, para medir a intensidade sonora. Usando-a podemos situar sons com intensidades variando de 1 a 1 trilhão em um gráfico com só treze divisões, e não um trilhão delas. Outro exemplo citado pelos PCNEM Plus é a escala Richter dos abalos sísmicos. Para compreender sua pontuação e a diferença de energia liberada entre um terremoto e outro, é necessário que se conheça os logaritmos.

Na análise do PCNEM Plus (p. 121) “a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções”. Ele propõe que os conteúdos sejam introduzidos com problemas aplicados para motivar o estudante, principalmente no estudo das funções, que tem um vasto campo de aplicações para serem exploradas.

São abordados, em Matemática, três eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries: 1.Álgebra: números e funções; 2.Geometria e Medidas; 3.Análise de dados.

No Tema 1- Álgebra: números e medidas – é proposto que o ensino das funções exponencial e logarítmicas seja feito priorizando sua aplicação em matemática financeira, por exemplo, e também em outras áreas do conhecimento. A resolução de equações, propriedades de característica e mantissa podem ser deixadas de lado, se necessário.

É proposta uma divisão de temas nas três séries do Ensino Médio, de forma que o ensino de logaritmos se situa na primeira série juntamente com o estudo de outras funções. Abaixo temos o quadro que mostra esta divisão:

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Quadro I: Quadro extraído do PCNEM Plus, p. 128. Mostra a distribuição dos temas e assuntos nas três séries do Ensino Médio.

Os parâmetros ainda citam a importância da resolução de problemas, do trabalho em grupo e da diversificação na avaliação.

Mas para que todas essas propostas sejam efetivadas é necessário que o estudante tenha oportunidade de trabalhar de forma diversificada para adquirir as competências e habilidades esperadas. Cabe ao professor conduzir essa proposta de formação.

2.3.3 Orientações Curriculares para o Ensino Médio

Em meados de 2006 foi publicada pelo MEC as Orientações Curriculares para o Ensino Médio com o objetivo de contribuir com o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. É um instrumento de apoio para o professor em sua prática pedagógica.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 69), "o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural".

Diferente dos PCNEM, as orientações dividem o ensino da Matemática em quatro eixos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. Mas mesmo tendo eixos diferenciados os assuntos devem ser tratados de forma articulada.

A orientação que é dada em relação ao ensino de Funções é que sejam apresentados diferentes modelos para que o estudante perceba sua utilidade nas diversas áreas do conhecimento além da matemática. A sugestão para introduzir as funções exponenciais é que se comece analisando a descrição de fenômenos de crescimento no modelo linear, para aí introduzir o modelo de crescimento/decrescimento exponencial. Isso porque enquanto o crescimento linear é constante, o crescimento exponencial apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Nos problemas aplicados, quase sempre é necessário resolver uma equação exponencial e para isso precisamos trabalhar também com sua função inversa – a função logarítmica. É recomendado que se ensine as equações exponenciais e logarítmicas associadas a problemas aplicados em outras áreas do conhecimento. O documento deixa claro que não é necessário fazer um estudo exaustivo dos logaritmos nesse nível de ensino, um estudo sem que haja um propósito aplicativo.

Vale destacar dentre as várias questões metodológicas tratadas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 86) que:

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática.

Sabemos da importância do uso da História no ensino da Matemática, e essa observação do documento é muito pertinente, pois não adianta apenas contar a história de determinado assunto, é necessário, quando possível, usá-la para a construção do conhecimento, com isso o estudante passa a ter uma visão mais abrangente do tema que está sendo tratado.

A importância do uso da tecnologia também é abordada neste documento. Essa abordagem é feita de maneira recíproca, ou seja, deve utilizar a Matemática como base para o aprendizado da tecnologia e também a tecnologia como base para o aprendizado em Matemática. Destacam-se três diferentes recursos tecnológicos: o uso de calculadoras, o uso de planilhas eletrônicas e o uso de softwares.

São apresentados nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, temas complementares, que podem ser usados para projetos, feira de ciências, atividades em laboratórios de Matemática e até em aplicações matemáticas. Destacamos aqui a sugestão de abordar a interdisciplinaridade com o estudo de fenômenos que têm registro em escala logarítmica, são exemplos: idade fóssil, intensidade de abalo sísmico, intensidade de som, etc.

É necessário que se ensine Matemática em articulação com temas atuais da ciência e da tecnologia, assim o estudante será capaz de atribuir significado aos diversos conteúdos aprendidos.

2.4 ANÁLISE DE DISSERTAÇÕES CORRELATAS

Apresentamos uma breve análise de dissertações correlatas ao nosso tema. São raras as dissertações encontradas que trabalham com o ensino de logaritmos. Analisaremos os trabalhos de Karrer (1999), Oliveira, A. J. (2005) e Ferreira (2006).

Na dissertação de Karrer (PUC-SP, 1999) - *LOGARITMOS, Proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora* – o objetivo é elaborar uma sequência de ensino partindo de problemas exponenciais, para o ensino de logaritmos usando a calculadora como instrumento de aprendizagem.

A pesquisa foi feita com um grupo experimental e um grupo de referência. O grupo experimental realizou as atividades elaboradas por Karrier e o grupo de referência seguiu a abordagem tradicional. Foram feitos pré-testes e pós-testes iguais para verificar o nível de aprendizado dos dois grupos, depois da realização da pesquisa. O estudo foi realizado em duas escolas particulares do Estado de São Paulo. Numa das escolas trabalhou-se com o grupo experimental e na outra com o grupo de referência.

A sequência tem atividades com problemas exponenciais, contextualizados por crescimento populacional e matemática financeira, tem ainda atividades que abordam potências para o posterior estudo dos logaritmos.

O resultado da pesquisa, segundo Karrier, foi satisfatório, pois o grupo experimental teve mais sucesso no pós-teste que o grupo referencial. Conclui que sua sequência de ensino surtiu efeito positivo no ensino de logaritmos.

A dissertação de Oliveira, A. J. (UFRN, 2005) - *O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica* – tem o objetivo de elaborar uma sequência de atividades para o ensino de logaritmos, conduzida pela história da matemática e mostrando a relação da matemática com a música.

A pesquisa foi realizada com 5 estudantes do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Esses estudantes foram escolhidos após uma avaliação diagnóstica sobre os logaritmos, pois revelaram um conhecimento prévio sobre as utilizações dos logaritmos.

Em sua sequência didática, Oliveira, A.J, traz atividades relacionando progressões geométricas e progressões aritméticas. Traz ainda atividades elaboradas com a visão cinemática dos logaritmos, proposta por Napier. E para encerrar a sequência são propostas atividades que mostram a relação dos logaritmos com a música.

Os resultados da pesquisa, segundo Oliveira, A.J., traz pontos positivos e negativos. Positivos, pois houve uma reelaboração do conceito apresentado durante a realização das atividades e apesar das dificuldades apresentadas, em sua maioria as atividades foram realizadas. E negativos, pois os estudantes tiveram dificuldades em relacionar o conceito de logaritmos com as progressões, não estavam familiarizados com a parte musical, entre outras coisas.

Na dissertação de Ferreira (UNIFRA, 2006) – *Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática* – o objetivo é a utilização de uma sequência didática privilegiando situações reais e o surgimento dos logaritmos, para contribuir com a construção do conceito de logaritmos.

A sequência foi aplicada no Colégio Militar de Santa Maria – RS para 27 estudantes organizados em trios. Ela foi elaborada a partir de uma avaliação diagnóstica feita com os estudantes.

A sequência tem atividades relacionadas com a retomada da função exponencial e construção do modelo matemático de cada situação descrita nos diversos problemas apresentados; traz também a relação entre o gráfico da exponencial e de sua inversa, a função logarítmica; relação entre as propriedades dessas duas funções e a utilização dessas propriedades na resolução de problemas; construção de escalas logarítmicas e utilização de software para construção de gráficos.

De acordo com Ferreira, com a aplicação da sequência didática os estudantes mostraram uma melhor compreensão do conceito de logaritmo. Com isso considerou atingido o objetivo da pesquisa.

2.5 DIFICULDADES NO ENSINO DE LOGARITMO

Depois de analisar todos os documentos oficiais, livros didáticos e dissertações neste capítulo, podemos perceber claramente, que os esforços para melhorar a qualidade do Ensino Médio tem sido feitos de maneira sistemática, já há algum tempo.

O ensino de logaritmos que antes era repetitivo, mecanizado, cheio de regras e sem significado, agora está começando a ser trabalhado de maneira mais significativa, contextualizada, para que o estudante perceba a real utilidade dos logaritmos na Matemática e em outras ciências.

Mas mesmo com todo esse esforço para melhorar a qualidade de ensino encontramos ainda uma grande dificuldade por parte da maioria dos professores para trabalhar com o ensino dos logaritmos, por vários motivos.

Um dos motivos é que mesmo com o avanço tecnológico existente e com os estudos para a melhoria da qualidade da educação ser algo constante, a formação dos professores não acompanhou o mesmo ritmo. Infelizmente, muitos ainda trabalham de forma tradicional seguindo, muitas vezes, livros didáticos que não trazem nenhuma contextualização. Isso ocorre por inúmeros motivos, sua formação, como já foi citado, falta de tempo, já que a maioria dos professores, devido a questões salariais, precisam trabalhar em várias escolas.

Outro motivo é que, dependendo da escola e mesmo da classe, o ritmo dos estudantes não permite que o professor avance nos conteúdos necessários para trabalhar com logaritmos. Assim muitos estudantes só vêem mesmo a definição dos logaritmos, sem estudar a função, as propriedades e principalmente suas aplicações.

Esperamos que mesmo com todas essas dificuldades, o ensino de logaritmo melhore com essas medidas que estão sendo tomadas para modificar a abordagem do ensino. Assim os estudantes poderão ter garantido um aprendizado realmente satisfatório.

CAPÍTULO 3

Pressupostos epistemológicos e pedagógicos

3.1 INTRODUÇÃO

Descrevemos neste momento a fundamentação teórica de nosso trabalho. Nossa intenção aqui não é esgotar nenhum pressuposto teórico, mas sim delinear um referencial para o nosso trabalho.

Após observações gerais sobre a Didática da Matemática, falamos sobre tarefas exploratórias, já que essa metodologia constitui a base das folhas de atividades que fazem parte de nossa sequência didática. Os momentos didáticos de nossa sequência são enfeixados pelos pressupostos da Engenharia Didática, de acordo com a qual realizamos sua preparação e aplicação antecedida da análise prévia do problema de ensino que é objeto de nosso trabalho. Já comentamos a importância do dos logaritmos e as dificuldades que os professores e estudantes encontram no seu ensino e aprendizado. Aqui descrevemos com mais detalhes os recursos da Educação Matemática que utilizamos na construção da sequência didática para o ensino dos logaritmos.

3.2 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Uma forma de falar sobre a Didática da Matemática é nos guiar na Didática Francesa, mais especificamente na teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

Nossa escolha se fundamenta no fato de Brousseau dar início ao desenvolvimento de uma teoria específica para o saber matemático. Até então as teorias abordavam apenas aspectos gerais da aprendizagem.

A situação didática de acordo com Brousseau apud Gálvez (1996, p.28) é:

> um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição.

Para Brousseau (apud Gálvez, 1996), o processo de aprendizagem envolve professor, aluno e saber matemático. As situações devem produzir modificações no comportamento dos estudantes pela aquisição de conhecimento e de uma aprendizagem significativa através do meio que deve ser criado e organizado pelo professor.

De acordo com Gálvez (1996), o professor deve participar da produção das situações didáticas que analisa em sala de aula e não somente observá-las e analisá-las, já que seu objetivo é determinar as condições de apropriação do saber pelos estudantes.

Para que existam essas situações didáticas é necessário que sejam estabelecidas relações de negociação entre professor e estudante para definir as regras que determinam explicitamente ou implicitamente o papel de cada um. Essas relações de negociação foram denominadas por Brousseau de contrato didático.

Na aplicação de nossa sequência didática o contrato será modificado de acordo com a atividade que estiver sendo desenvolvida. A relação didática existente entre professor, aluno e saber se altera de acordo com a natureza da atividade, folhas de atividades, aula expositiva com o uso de recurso tecnológico ou lousa, aula no laboratório de informática.

Outro aspecto relevante colocado por Brousseau é que é preciso criar situações didáticas em que o saber não seja dissociado de seu significado. O saber tem que ser contextualizado, para que os estudantes consigam aplicar o saber não só naquele momento.

Através desse pequeno estudo percebemos que é necessário criar um ambiente de aprendizagem em que os estudantes consigam construir e adquirir o saber e também associá-lo a diversas situações.

Assim nossa sequência didática foi construída, com o intuito de fazer com que o estudante se aproprie do conceito logaritmo e função logarítmica guiados pelas atividades elaboradas em nossa sequência, mas de forma mais autônoma possível.

3.3 TAREFAS MATEMÁTICAS

O papel do professor no processo ensino-aprendizagem em Matemática, segundo Ponte (2003), implica numa (re)construção do currículo feita por atividades de ensino e por reflexões sobre estas atividades. Para desenvolver estas atividades é necessário que o estudante realize tarefas. As tarefas podem ser elaboradas pelo professor, pelos estudantes ou resultar de uma negociação entre os dois. Várias são as estratégias de ensino utilizadas pelo professor em um determinado assunto e é muito importante, que dentro do possível, sejam realizadas tarefas diferentes para uma mesma atividade, pois assim o estudante poderá ter uma visão mais abrangente do assunto trabalhado naquele momento.

Ainda segundo Ponte (2003), várias são as tarefas características da matemática: exercícios, problemas, investigações, tarefas de modelação, projetos. Essas tarefas são caracterizadas por quatro dimensões básicas: dificuldade, estrutura, conteúdo referencial e o tempo requerido para sua resolução. O grau de dificuldade constitui uma dimensão usada há muito tempo, podemos ter dificuldades em vários graus, de baixo a elevado. Uma outra dimensão, que é recente, é o grau de estrutura da tarefa, que pode ser “aberta” ou “fechada”. A tarefa fechada deixa claro o que é dado e o que é pedido. Já a tarefa aberta tem um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido ou em ambos.

O quadro abaixo ilustra os quatro tipos básicos de tarefa:

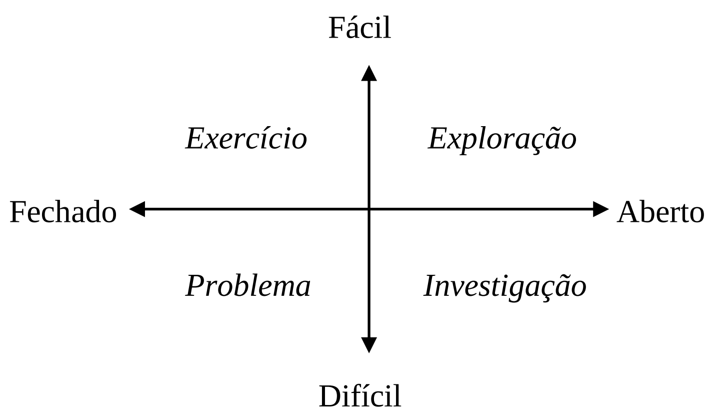


Ilustração 2 : Os diversos tipos de tarefa (In: Ponte, 2003)

Os exercícios que estão no segundo quadrante, são tarefas sem grande dificuldade e têm a estrutura fechada. Os problemas são tarefas também fechadas, mas com dificuldade elevada. As investigações têm estrutura aberta e grau de dificuldade elevado. Já as tarefas de exploração são fáceis e têm estrutura aberta.

Desde a antiguidade os problemas têm lugar de extrema importância no ensino da matemática, mas foi George Polya que ajudou a estabelecer seu papel educativo. Os problemas sempre têm um grau de dificuldade apreciável, mas se forem demasiadamente difíceis, o estudante pode desistir de resolvê-los. Se for demasiadamente fácil, não será um problema e sim um exercício. Para que a tarefa seja classificada como exercício, o estudante deve ter um processo imediato de resolução, tenha contexto ou não. Se o processo de resolução não for imediato, a tarefa será classificada como um problema.

A investigação é uma tarefa que traz informações para o estudante, mas faz com que ele tenha mais trabalho para desenvolvê-la, quer seja na busca de estratégias, quer seja na própria questão a resolver. As tarefas investigativas têm extrema importância no processo de aprendizagem, pois o estudante tem um papel ativo em sua realização.

As tarefas de exploração são caracterizadas pela facilidade de trabalho imediato do estudante sem necessidade de muito planejamento. O professor não explica tudo o que é necessário, mas deixa uma parte importante de descoberta e de construção do conhecimento para os estudantes realizarem.

Tanto nas tarefas investigativas como nas tarefas exploratórias podem ser propostos exercícios, problemas e outros tipos de atividades. O que faz com tenham essas caracterização é a forma com que são elaboradas e conduzidas.

Ao desenvolver nossa pesquisa para produzir um material para o ensino do conceito de logaritmos, resolvemos iniciar, a título de motivação, com o problema histórico da redução das operações aritméticas. Explicamos aos estudantes a necessidade que existia no século XVI de resolver essa questão. Percebemos que não seria possível deixar para os estudantes a solução desse problema, pois isso requer muita experiência Resolvemos então que as folhas de atividades, depois da apresentação e contextualização do problema inicial, deveriam prosseguir com tarefas exploratórias. Fizemos isso até que o estudante percebesse como foi resolvido esse problema e como surgiu o conceito de logaritmo. Por outro lado ao abordar as propriedades dos logaritmos, optamos em apresentar atividades de percepção de padrões permitindo ao estudante entrar em contato com essas propriedades antes que fossem apresentadas as fórmulas gerais. Na quarta folha de atividades, no final apresentamos ao estudante problemas fechados sobre aplicações dos logaritmos.

Considerando toda a sequência didática elaborada da qual as folhas de atividade constituem uma parte procuramos diversificar as tarefas, utilizando problemas, exercícios e tarefas exploratórias.

Concluímos que na elaboração desse material, tivemos que utilizar, em cada momento, a estratégia adequada para atingir os objetivos esperados.

3.4 ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática apareceu no contexto da Didática da Matemática criada na França na década de 80. Segundo Artigue (apud ALMOULOUD, 2008), a Engenharia Didática se assemelha ao trabalho de um engenheiro, que além de seus conhecimentos científicos, também leva em consideração os problemas que aparecem na prática, os quais precisam de solução, que às vezes, não se acha na teoria científica. Essa proposta pode e deve ser aplicada na sala de aula.

A origem dessa teoria está relacionada com a preocupação de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula não suprem totalmente as necessidades na transformação do ensino. Dessa forma é necessário relacionar-se com a valorização da prática do professor.

Segundo Artigue (apud ALMOULOUD, 2008), a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa caracterizada por realizações didáticas em sala de aula e é composta de quatro fases: a) análises prévias; b) construção e análise *a priori*; c) experimentação; d) análise *a posteriori* e validação. Apesar de serem fases distintas cada uma delas pode ser retomada ao longo de todo o trabalho, se necessário. Uma das principais características é que a validação pode ser interna, comparando-se a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, sem aplicação de pré-teste ou pós-teste.

Na análise prévia deve-se analisar o funcionamento do ensino em questão para propor uma intervenção na melhoria desse ensino. Segundo Almouloud (2008) os aspectos que devem ser analisados nesta fase são: epistemológica dos conteúdos, do ensino usual e seus efeitos, das dificuldades que são um obstáculo para o aprendizado dos estudantes, dos fatores da construção das atividades, os objetivos da pesquisa. Fizemos um estudo teórico inicial, o qual deu fundamentação à nossa pesquisa. Após esse estudo levando em consideração nossa experiência em sala de aula no ensino de logaritmos e a análise de livros didáticos e das propostas curriculares oficiais, propomos uma intervenção no ensino de logaritmos com o objetivo de melhorá-lo. Essa intervenção se deu com a elaboração de uma sequência didática.

Na segunda fase, a construção e análise *a priori*, elabora-se o plano de ação, descrevem-se as escolhas efetuadas e também cada atividade proposta. Em nossa sequência didática foram elaboradas Folhas de Atividades, das quais falaremos mais adiante, que usam a construção histórica do conceito de logaritmo, a construção do conceito, das propriedades e suas aplicações. Além das folhas há aulas explicativas e atividades na sala de informática e uso da calculadora.

A fase da experimentação é o momento de colocar em prática as atividades elaboradas. Se for necessário pode haver uma correção nas atividades, desde que se faça uma complementação na *análise a priori*. Em nosso trabalho a aplicação se deu em duas salas de primeira série do Ensino Médio que me foram atribuídas no início de 2009, de uma escola cooperativa em Araraquara onde dou aulas desde 2002.

A quarta e última fase descrita pela Engenharia Didática consiste na análise *a posteriori* e validação da proposta. A análise *a posteriori* é feita utilizando-se todas as ferramentas usadas na experimentação, que no nosso caso, são o material produzido pelos estudantes e as anotações feitas durante a aplicação de nossa sequência.

Nos capítulos seguintes essas fases são apresentadas com mais detalhes.

3.5 AS FOLHAS DE ATIVIDADES

Em nossa sequência didática foram elaboradas, dentro das atividades propostas, Folhas de Atividades, para que o estudante não ficasse preso a atividades no caderno e no livro.

As Folhas de Atividades são uma ótima alternativa para o ensino de Matemática. Sua estrutura consiste em apresentar inicialmente algumas informações sobre o assunto em questão e propor atividades que sejam direcionadas de acordo com as necessidades e os objetivos do professor naquela atividade. Essas atividades, que serão resolvidas pelos estudantes, podem se iniciar de maneira simples e aumentar seu grau de dificuldade conforme a necessidade do tema. As folhas podem ser elaboradas para que o estudante trabalhe em grupo ou individualmente, de acordo com as intenções do professor que a elabora. Se o trabalho for em grupo tem-se a oportunidade do diálogo entre os estudantes, o que pode enriquecer sensivelmente o aprendizado.

O principal propósito das Folhas de Atividades é que o estudante tenha o máximo de autonomia possível na sua resolução, que trabalhe com pouca interferência do professor para participar ativamente da aquisição do conhecimento.

Para elaborar essas Folhas de Atividades o professor precisa dispor de tempo para a construção das atividades, de conhecimento sobre o assunto que está sendo tratado e de muito cuidado para direcionar de forma correta as atividades, o que constitui um aspecto problemático das folhas. Mas temos também aspectos positivos, o professor pode aplicar muitas vezes a mesma Folha de Atividades, que podem ser adaptadas de acordo com as necessidades de cada turma e do planejamento pedagógico dele e da escola. Outro aspecto positivo é que o professor terá seu próprio material didático, não precisando ficar apenas usando um único livro didático em suas aulas.

Na aplicação desta sequência o trabalho com as Folhas de Atividades que elaboramos foi extremamente satisfatório. Os estudantes responderam muito bem a essa metodologia e se acostumaram facilmente com sua estrutura. Na primeira Folha de Atividades, que foi uma novidade na classe, houve muitas perguntas sobre o que fazer. A partir da segunda Folha de Atividades o trabalho fluiu tranquilamente, pois os estudantes realmente tiveram autonomia durante o processo, só solicitando nossa ajuda quando era realmente necessário. Outro aspecto de extrema importância que devemos ressaltar é que as Folhas de Atividades proporcionam a oportunidade de avaliação contínua dos estudantes.

Nossas Folhas de Atividades, que foram elaboradas para a sequência didática, estão disponibilizadas nos apêndices dessa dissertação.

Esses pressupostos epistemológicos e pedagógicos, adotados em acordo com as orientações da Educação Matemática se mostraram acertados quando implementamos em sala de aula nossa sequência didática.

CAPÍTULO 4

Construção e aplicação da sequência didática

4.1 INTRODUÇÃO

Apresentamos neste Capítulo a sequência didática que elaboramos para o ensino de logaritmos, assim como os passos que seguimos para construí-la. Fazemos a descrição resumida da sequência, de modo a proporcionar uma visão geral.

Em seguida descrevemos os aspectos gerais da aplicação da sequência em uma escola cooperativa da cidade de Araraquara, SP.

4.2 CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA

Sou professora do Ensino Médio há 10 anos. Dou aulas em uma escola estadual da cidade de Araraquara como professora efetiva desde 2000 e em uma cooperativa de ensino desde 2002.

Desde que comecei a trabalhar como professora sempre me interessei em proporcionar aos estudantes um aprendizado significativo dos conceitos e técnicas da Matemática. É preocupante quando um estudante só aprende a trabalhar mecanicamente com os conteúdos através de regras e fórmulas decoradas, sem entender o que está fazendo.

Durante minha experiência profissional percebi que existiam vários assuntos que os estudantes aprendiam mecanicamente. Um deles era o de logaritmos. A maioria dos materiais didáticos disponíveis apresentam os logaritmos com textos pouco explicativos, excesso de fórmulas e exercícios repetitivos. Depois de ingressar no Mestrado Profissional da UFSCar, conversando com meu orientador, resolvi trabalhar com a construção de uma sequência didática que utilizasse técnicas variadas da Educação Matemática para o ensino de logaritmos. Decidi, então, produzir um material didático mais atraente e que facilitasse para os estudantes a construção dos conceitos e a compreensão das técnicas.

No início do ano de 2009 participei do planejamento escolar na escola cooperativa. Entre as classes que me foram atribuídas, duas eram de primeira série do Ensino Médio. Estava programado que ensinaria logaritmos nestas classes no segundo semestre. Conversei com a coordenadora pedagógica da escola falando do meu projeto. Ela gostou da ideia de fazer um ensino diferenciado sobre logaritmos. Ficou combinado que eu aplicaria aulas diferentes misturadas com aulas tradicionais, de modo que os estudantes não perdessem a conexão com o livro didático adotado pela escola.

No planejamento da escola estadual, foi me atribuído, dentre outras, uma classe de primeira série do Ensino Médio, no período noturno. Nesse momento ainda não estava claro se devia aplicar nesta escola a sequência didática que estava construindo. Por se tratar de uma classe com muitos estudantes repetentes, não sabia se conseguiria estudar logaritmos até o final do ano. De fato, somente no final do quarto bimestre consegui abordar com essa classe o tema logaritmos. Apenas a primeira Folha de Atividades foi aplicada. Não houve tempo hábil para a aplicação da sequência didática completa nesta classe. Considerei então esse trabalho uma amostra não significativa, de modo que não o incluí nesta dissertação.

Durante o primeiro semestre de 2009 preparei a sequência didática completa. Para isso utilizei toda a minha experiência como professora, assim como metodologias que estava estudando nas disciplinas do mestrado. Resolvi incluir na sequência didática o uso de “Folhas de Atividades” por entender que esse recurso proporciona a oportunidade do estudante desenvolver sua autonomia e pela facilidade que traz para o professor. É verdade que esse recurso exige do professor muito tempo e cuidado na preparação. Mas depois de pronto e analisado, esse recurso fica disponível para uso imediato de qualquer professor. É isso que estamos produzindo nesta dissertação: a construção e análise de uma sequência didática para uso imediato do professor.

Nas folhas de atividades utilizamos recursos propostos pela Educação Matemática, como o uso da História da Matemática e da Metodologia Ensino da

Matemática através de Problemas, tudo enfeixado segundo as orientações da Engenharia Didática. Essas metodologias já foram sumariamente comentadas no Capítulo 3 dessa dissertação.

Além das folhas de atividades nossa sequência didática contém outros elementos como aulas de resolução de problemas, atividades em laboratório de informática e aulas expositivas.

4.3 SÍNTESE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segue uma descrição sumária de toda a sequência didática. Ela foi dividida em dez momentos, de acordo com as características pedagógicas das atividades. Planejamos antecipadamente a duração de cada momento, prevendo também os recursos necessários como laboratório, calculadoras científicas, papel quadriculado, etc.

A avaliação também foi planejada antecipadamente. Nesse ponto as Folhas de Atividades oferecem uma facilidade, pois a avaliação dos assuntos ali tratados é imediata. Basta analisar as respostas dos estudantes. Como apliquei quatro folhas de atividades em momentos diversos e uma folha de problemas, tive a oportunidade de construir uma avaliação contínua. Além disso, o momento quatro foi reservado para uma avaliação dos trabalhos, feita em conjunto com os estudantes. Como a escola tem um método padronizado de avaliação incluímos em nossa sequência didática essa avaliação.

Segue a descrição sumária da sequência didática.

Momento 1: Aplicação da Folha de Atividades 1: "Simplificando cálculos"
Duração: 1 aula de 50 minutos.

Nessas folhas de atividades iniciamos o estudo do conceito de logaritmos através de sua gênese histórica. Apresentamos a relação entre as progressões aritméticas e geométricas, observada primeiro por Arquimedes, como recurso para reduzir a operação de divisão à subtração. Fazemos o mesmo com a multiplicação e a adição, depois com a potenciação e a multiplicação e, por último, com a radiciação e a divisão. Terminamos a atividade com as explicações do funcionamento dessas reduções.

Momento 2: Aplicação da Folha de Atividades 2: "Uma invenção interessante "
Duração: 1 aula de 50 minutos.

Fazemos aqui a primeira definição de logaritmo, ainda restrita aos números da tabela da atividade anterior. Em seguida construímos tabelas com progressões geométricas de razão 3 e 1,1 para trazer a ideia de que existem logaritmos em outras bases e não apenas na base dois. Depois é dada a definição formal do logaritmo. A atividade termina com a percepção de algumas propriedades simples através de regularidades.

Momento 3: Folha de exercícios
Duração: 1 aula de 50 minutos.

Atividades de diversos livros didáticos, trabalhados em sala, propostos pelo professor em folha à parte. Esses exercícios têm como objetivo a familiarização dos estudantes com a notação dos logaritmos.

Momento 4: Momento de parada para reflexão.
Duração: 1 aula de 50 minutos.

Nessa aula conversamos com os estudantes sobre as atividades e comentamos as Folhas de Atividades 1 e 2 e os exercícios da aula anterior.

Momento 5: Aplicação da Folha de Atividades 3: "Uma propriedade importante"
Duração: 1 aula de 50 minutos.

Elaboramos essa Folha de Atividades para que o estudante, através das regularidades encontradas na Folha de Atividades 2, construa as propriedades operatórias dos logaritmos. Usamos como recurso a observação de regularidades obtidas com o cálculo de logaritmos em diversas situações operatórias. No final exploramos a mudança de base.

<u>Momento 6:</u> Aulas expositivas sobre a função logarítmica, utilizando o livro texto.
Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Aula expositiva sobre função logarítmica, utilizando lousa, projetor multimídia e o livro didático adotado pela escola. Nesse momento da sequência didática, exploramos as propriedades e características da função logarítmica através da construção de gráficos, tendo como base que a função logarítmica é a inversa da exponencial.

<u>Momento 7:</u> Atividades na sala de informática e com calculadora científica.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Prevemos que na primeira aula as atividades sejam desenvolvidas na sala de informática da escola utilizando um programa de planilha eletrônica. Planejamos resolver um problema que envolve o cálculo do número *e*.

Na segunda aula prevemos realizar atividades que constam do livro didático adotado pela escola, utilizando calculadora científica para o cálculo de logaritmos.

<u>Momento 8:</u> Aplicação da Folha de Atividades 4: "<u>Para que servem os logaritmos</u>?"
Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade elaborada para que o estudante conheça as escalas logarítmicas e também exemplos práticos de seu uso. Incluímos o estudo da escala Richter para medição de terremotos e a escala do *pH* de substâncias, utilizada pela Química. Apresentamos também um problema como exemplo do uso da função logarítmica na modelagem de fenômenos que ocorrem na natureza.

Após essa Folha de Atividades os alunos trabalharão com outros problemas de aplicação de logaritmos que constam do livro didático.

Momento 9: Aulas expositivas e de resolução de problemas sobre equações logarítmicas.
Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Como o projeto foi aplicado no Ensino Médio de uma escola que tem como um dos objetivos que o estudante ingresse em Universidade, não se pode deixar de lado a preparação para o vestibular. Assim, dando continuidade à sequência, será utilizado o livro didático e aulas expositivas para a resolução de equações logarítmicas.

Momento 10: Aplicação de avaliação dissertativa.
Duração: 1 aula de 50 minutos.

Este momento foi dedicado à aplicação de uma avaliação dissertativa nos moldes da escola onde a sequência foi aplicada. A avaliação de nossa sequência não consistiu apenas desta prova escrita, mas foi feita durante todo o processo de aplicação da sequência didática.

4.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Conforme previsto no nosso planejamento do início do ano, aplicamos a sequência didática no segundo semestre de 2009. Vamos descrever como foi a aplicação nos seus aspectos gerais.

A sequência didática foi aplicada em duas classes da Cooperativa Educacional de Araraquara – COEDUCAR, onde dou aulas há 8 anos. As classes, primeiras séries do Ensino Médio, têm 22 estudantes no 1ºM1 e 20 no 1ºM2. Considero que são classes pequenas, com a quantidade adequada de estudantes para fazer um bom trabalho. Nestas salas temos estudantes que fizeram Ensino Fundamental na própria escola e estudantes que vieram de outras escolas particulares e públicas. A escola é bem organizada e atende estudantes da Educação Infantil ao Ensino Médio. Dispõe de laboratórios de Química, Ciências, Biologia, Física, Artes, Inglês e Informática, duas salas com projetor multimídia, quadra poliesportiva, campo de futebol e biblioteca. Tem ainda um amplo espaço de área livre, onde os estudantes circulam nos intervalos entre as aulas.

O ano letivo é dividido em três trimestres, e a avaliação é padronizada. Para compor a média trimestral são feitas três avaliações de 10 pontos cada: duas provas e uma terceira atividade que fica a critério de cada professor. As provas são sempre às terças e quintas das 07:15h às 08:05h e há um rodízio de disciplinas que é estabelecido pela coordenação no início de cada trimestre. A terceira nota é composta por diversas atividades. Alguns professores têm aulas semanais no laboratório e deixam a terceira nota como uma avaliação do relatório dessas aulas. Outros dão avaliação com consulta ou em dupla e alguns pedem seminários para os estudantes ou ainda algum trabalho realizado em sala de aula.

Sou professora das duas salas desde o início do ano. Quando apliquei a sequência didática, os estudantes já tinham visto toda a parte inicial de funções: definição, representações, domínio, imagem, função inversa, função composta, função afim, função quadrática, função exponencial. Viram ainda progressões aritméticas e geométricas. O livro texto adotado na escola é: *MATEMÁTICA: Construção e Significado; José Luiz Pastore – volume único - Editora Moderna – 1ª edição*. O conteúdo do livro é explicado através de aulas expositivas. Após a explicação os estudantes fazem as atividades propostas pelo livro didático, ora individualmente, ora em duplas e, quando necessário, complemento com algumas atividades extras, como listas de exercícios e problemas.

Para aplicar as atividades da sequência didática achamos melhor dividir os estudantes de cada classe em grupos com dois componentes. Permitimos que os estudantes escolhessem à vontade seu grupo. Optamos colocar dois estudantes por grupo com o objetivo de evitar as dispersões que costumam ocorrer quando o grupo tem três ou mais componentes. As Folhas de Atividades foram distribuídas aos estudantes e apesar deles estarem trabalhando em duplas, cada um recebeu as suas próprias folhas.

Ao dar início à aplicação da sequência didática colocamos como seria a dinâmica das aulas sobre logaritmo. Explicamos aos estudantes que fariam as atividades propostas em duplas, para poderem discutir sua resolução. Ficou combinado que, em caso de dúvidas poderiam chamar a professora. Combinamos também que o uso de calculadora só seria permitido quando solicitado nas atividades.

A aplicação da sequência didática teve a duração de um mês. No planejamento inicial estava previsto um pouco menos, mas ocorreram feriados em alguns dias de aula.

4.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO

Após a aplicação de toda a sequência didática, de posse do material produzido pelos grupos, iniciamos sua análise. A primeira coisa que observamos é que os estudantes de várias duplas fizeram respostas independentes das do parceiro do grupo. Tendo isso em vista decidimos analisar cada folha de resposta separadamente ao fazer a contagem de acertos e erros.

Para fazer a análise procedemos da seguinte forma: separamos as folhas de atividades e as dividimos por classe. Fizemos inicialmente uma análise quantitativa, com a contagem do número de acertos e do número de erros cometidos pelos estudantes em cada atividade da sequência didática, separando a contagem por classe. Depois fizemos uma tabela para organizar essa contagem em cada atividade das folhas. Após a contagem e de posse das anotações feitas durante toda a aplicação da sequência didática fizemos uma análise qualitativa desses dados, percebendo os erros mais comuns dos estudantes, que são apresentados logo após a tabela com os dados quantitativos.

Uma das coisas que me impressionou ao analisar as folhas de respostas foi que, quando examinamos mais detidamente o trabalho dos estudantes, nos surpreendemos com a quantidade de detalhes que podemos observar. Percebi que no exercício de minha profissão isso não ocorre em condições normais. Espero adquirir, com meu curso de mestrado, a habilidade extra de perceber melhor os obstáculos que o estudante está encontrando e assim ajustar com mais precisão meu método de ensino.

4.6 CONCLUSÕES GERAIS

Na aplicação desta sequência didática observamos que, em relação aos anos anteriores, em que trabalhávamos com o ensino de logaritmos usando apenas o livro texto, os estudantes tiveram um aprendizado diferenciado, entendendo melhor os conceitos e suas aplicações.

O trabalho com as Folhas de Atividades facilitou o aprendizado dos estudantes. Eles se acostumaram com a metodologia e após a primeira Folha de Atividades sempre esperavam qual seria o próximo conceito que aprenderiam e também quais seriam as atividades propostas. Os estudantes gostaram muito do trabalho utilizando essa metodologia.

Outro ponto positivo da aplicação da sequência didática foi observarmos a facilidade que as Folhas de Atividades proporcionaram para o professor. Ao mesmo tempo que os estudantes aprendiam os conceitos ali propostos, o professor fazia uma avaliação contínua, podendo assim detectar imediatamente as dificuldades dos estudantes e corrigi-las. Outra vantagem das Folhas de Atividades é que elas são preparadas para que o estudante tenha o máximo possível de autonomia na hora de resolvê-las. Observamos isso pelo fato dos estudantes não terem feito muitas perguntas no desenvolvimento das atividades e também porque o índice de acertos nas atividades em média foi muito bom.

Além disso, as Folhas de Atividades podem ser aplicadas sem precisar de outros recursos.

A preparação das Folhas de Atividades é trabalhosa, mas depois de pronta, pode ser aplicada por várias vezes, precisando eventualmente de pequenas adaptações, poupando tempo para o professor na preparação de suas aulas.

CAPÍTULO 5

Descrição e análise do momento 1 da sequência didática

5.1 INTRODUÇÃO

Nesse momento aplicamos a Folha de Atividades "*Simplificando Cálculos*". Esta atividade foi elaborada utilizando a gênese histórica dos logaritmos, com as idéias de Arquimedes, Michael Stifel e John Napier. Foram montadas tabelas fazendo corresponder progressões geométricas e aritméticas.

Esta folha procura facilitar a construção do conceito de logaritmo passo a passo. Seguindo a história, iniciamos chamando a atenção do estudante para a dificuldade de se fazer cálculos no tempo em que não havia calculadora. Trazemos a idéia de Arquimedes de utilizar uma tabela composta por uma progressão aritmética (PA) e uma progressão geométrica (PG) para reduzir operações. O conceito de logaritmo fica implícito.

Neste Capítulo descrevemos essa folha de atividades. Ela é composta de textos explicativos entremeados por atividades que devem ser respondidas pelos estudantes. Quando se tratar de texto, fazemos apenas uma descrição. No caso de atividade, fazemos também a descrição colocando em seguida a análise dos resultados da aplicação.

Dessa forma, neste Capítulo e nos seguintes, fazemos simultaneamente a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Escolhemos esse formato em nossa descrição para facilitar sua leitura. Dessa forma o leitor não precisa ficar se deslocando de um local para outro do texto.

De qualquer forma disponibilizamos no Apêndice A todas as Folhas de Atividades e as folhas de problemas conforme foram aplicadas em sala de aula. No Apêndice B disponibilizamos a Folha de Atividades 2 depois de feitas as adaptações necessárias. Essas adaptações foram feitas depois que, aplicando as folhas, percebemos que algumas atividades ficariam melhor se fossem feitas pequenas mudanças. Para maior facilidade do leitor, disponibilizamos ainda no Apêndice C as folhas de atividades resolvidas.

O momento 1 foi realizado nas duas classes de primeira série do Ensino Médio já descritas acima, participaram das atividades os 22 estudantes da classe 1 e os 20 estudantes da classe 2. A Folha foi aplicada no dia 19/09/2009, totalizando 21 grupos com dois estudantes cada um e a aplicação teve a duração de 50 minutos conforme o previsto.

5.2 RESUMO DO MOMENTO 1

Iniciamos a Folha de Atividades 1 chamando a atenção do estudante para a dificuldade de se fazer cálculos sem o uso de calculadora. Em seguida apresentamos uma tabela com uma progressão geométrica na primeira linha e uma progressão aritmética na segunda linha. Utilizamos essa tabela para mostrar como podemos reduzir operações aritméticas. Assim, ele pode perceber a utilidade desse tipo de tabela para simplificar cálculos no tempo em que não havia calculadora. Com essa idéia inicial, a atividade já trabalha com logaritmos, mas sem citar esse nome. Iniciamos a construção da função logarítmica pela sua caracterização fundamental que é reduzir a multiplicação à adição.

5.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

A primeira dificuldade esperada é no início da folha. Quando os estudantes têm que fazer a divisão de 8192 por 256, geralmente eles não olham a conta como um todo, olham apenas quantos algarismos têm no divisor, isso faz com que o estudante não perceba o real sentido da divisão.

Como a Folha de Atividades foi elaborada com exemplos explicativos o estudante não terá grandes dificuldades nas outras atividades propostas. Pode ser que ele cometa alguns erros na justificativa da redução de operações no final da atividade, pois terá que usar algumas propriedades da potenciação.

5.4 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DO MOMENTO 1

Começamos com duas contas e uma pequena explicação com algumas observações históricas.

SIMPLIFICANDO CÁLCULOS

I) No tempo em que não havia calculadora, não era fácil fazer contas. Vamos tentar!

a) 8 1 9 2 | 2 5 6

b) 4 0 9 6
x 1 2 8

Nos séculos XVI e XVII o uso da Trigonometria para o estudo da Astronomia exigia uma necessidade de precisão em cálculos com números grandes, com 8 ou mais casas decimais. Era preciso multiplicar, dividir, extrair raízes desses números grandes. Como não existiam calculadoras e computadores, isso dava muito trabalho. Em meados do século XVI, o monge e matemático Michael Stifel, partindo de uma antiga idéia de Arquimedes, começou a usar algumas tabelas numéricas para facilitar cálculos. Vejamos uma dessas tabelas:

Michael Stifel

Ilustração 3: Primeira atividade proposta na Folha de Atividades 1

Pretendemos com essa atividade inicial que o estudante sinta dificuldade em fazer essas contas, e ao mesmo tempo, obtenha dois resultados que vão ser utilizados adiante.

Seguem os resultados obtidos na aplicação da atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	22	12
Cometeram algum erro	0	8

Dos estudantes que cometeram algum erro, cinco erraram em um dígito na conta de multiplicação e seis não fizeram a conta de divisão completa, colocando apenas o resultado. Provavelmente usaram uma calculadora ou copiaram de algum colega que já havia feito.

Durante a aplicação da atividade os estudantes reclamaram bastante dessas contas. Perguntaram várias vezes se podiam usar uma calculadora. Orientamos que, nesse momento, não poderiam usá-la.

Temos abaixo trechos das atividades de dois estudantes.

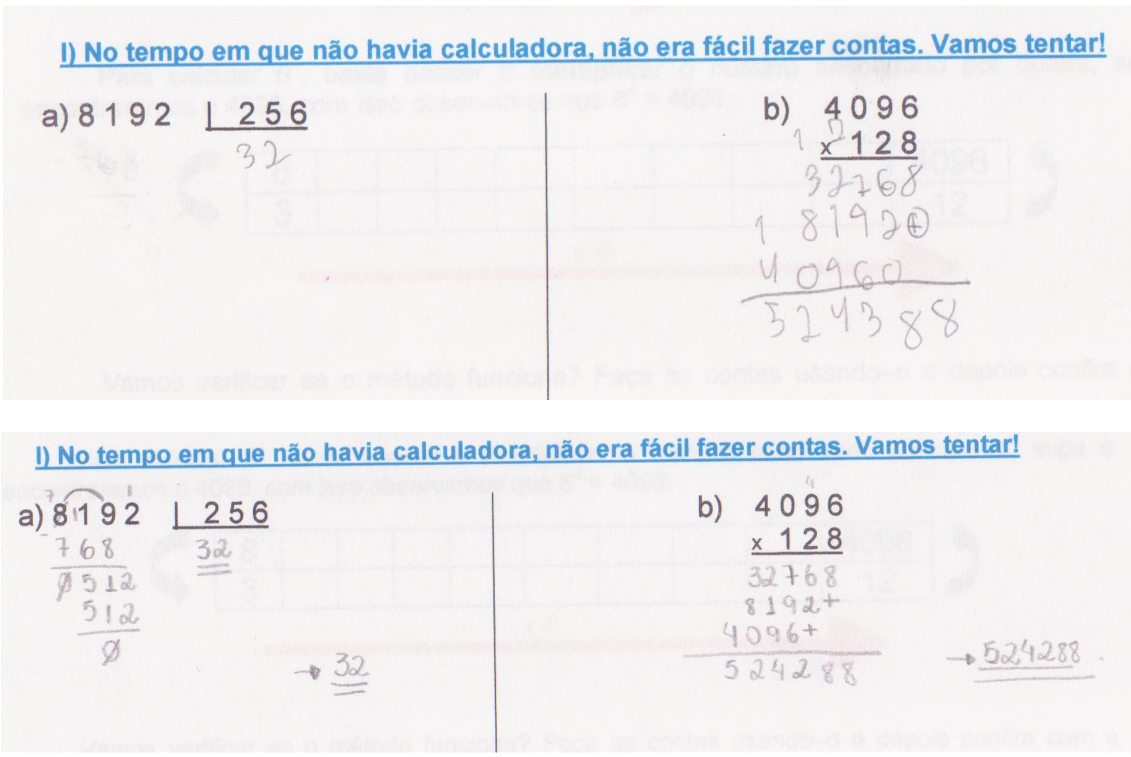


Ilustração 4: Digitalização de atividades realizadas por estudantes

Na próxima atividade apresentamos ao estudante a tabela que traduz a idéia central dessa folha. Seguem duas perguntas para o estudante reconhecer que na primeira linha da tabela temos uma progressão geométrica de razão 2 e na segunda linha temos uma progressão aritmética de razão 1.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Você reconhece essas sequências numéricas?

A sequência da 1ª linha é uma ______________________________ de razão____.

A sequência da 2ª linha é uma ______________________________ de razão___.

Ilustração 5: Segunda atividade proposta na Folha de Atividades 1

O objetivo desta atividade é fazer com que o estudante perceba que está trabalhando com sequências já conhecidas porque no final da folha de atividades iremos usá-las para explicar a redução das operações.

Os resultados da atividade foram:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	21	20
Cometeram algum erro	1	0

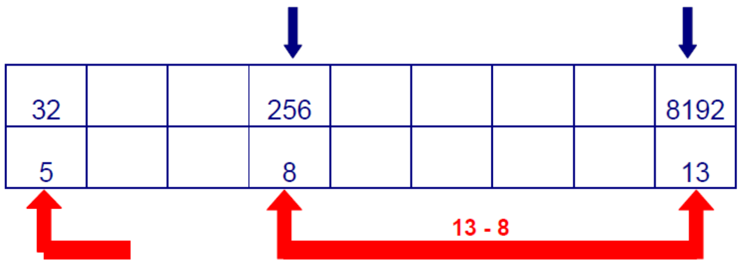
O estudante que cometeu erro escreveu que a sequência da primeira linha era uma multiplicação e da segunda linha uma sequência numérica. Alguns estudantes não se lembraram dessas sequências e só fizeram este item após a intervenção do professor.

O próximo passo da folha de atividades traz um exemplo de como reduzir uma divisão em subtração usando a tabela. O estudante deve observar que, para realizar uma divisão é necessário encontrar o dividendo e o divisor na linha de cima da tabela e em seguida localizar os números correspondentes na linha de baixo da tabela. Fazemos a subtração com os números encontrados na segunda linha e obtendo o resultado dessa subtração, observa-se o correspondente na primeira linha, que é o quociente da divisão.

II) Vamos usar essa relação para fazer umas contas. Observe:

Para calcular **8192** ÷ **256** olhamos esses números na 1ª linha da tabela e procuramos os seus correspondentes na 2ª linha, que são 13 e 8.

Com os números encontrados na 2ª linha fazemos uma subtração, **13 – 8** que é igual a **5** e vemos que o correspondente do número **5** na 1ª linha é **32**, com isso temos que 8192 ÷ 256 = 32.



8192 ÷ 256 desça na tabela e faça: 13 - 8 = 5 suba e veja o resultado: **32**

Confere? Para fazer uma divisão, fizemos uma subtração, não é melhor?
Vimos que 8192 ÷ 256 é 32 será isso coincidência?

Ilustração 6: Texto explicativo da Folha de Atividades 1

O objetivo é mostrar ao estudante que com o auxílio da tabela podemos reduzir uma divisão a uma subtração.

A seguir propomos algumas divisões para que o estudante use o método proposto. Pretendemos verificar se ele entendeu como funciona essa redução de operações.

Usando a tabela, você pode economizar cálculos. Faça as operações propostas usando esse método e depois confira com uma calculadora:

a) **512** ÷ **64** → 9 – 6 = 3 → **8**	b) 1024 ÷ 16 →	c) 4096 ÷ 128 →
512 ÷ 64 = 8	1024 ÷ 16 =	
d) 65536 ÷ 128 →	e) 131072 ÷ 4096 →	f) 1048576 ÷ 512 →

Ilustração 7: Terceira atividade proposta na Folha de Atividades 1

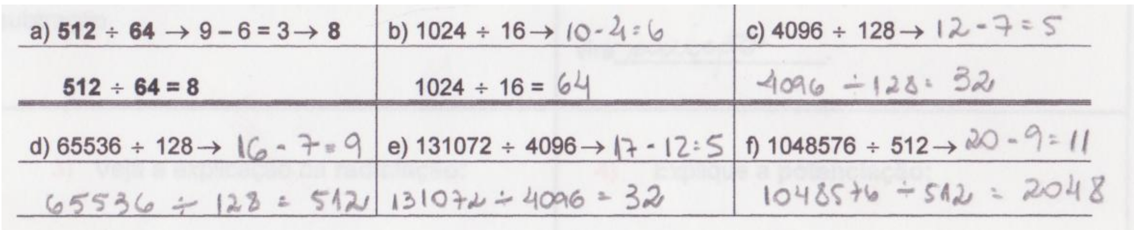
Seguem os resultados desta atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	20	17
Cometeram algum erro	2	3

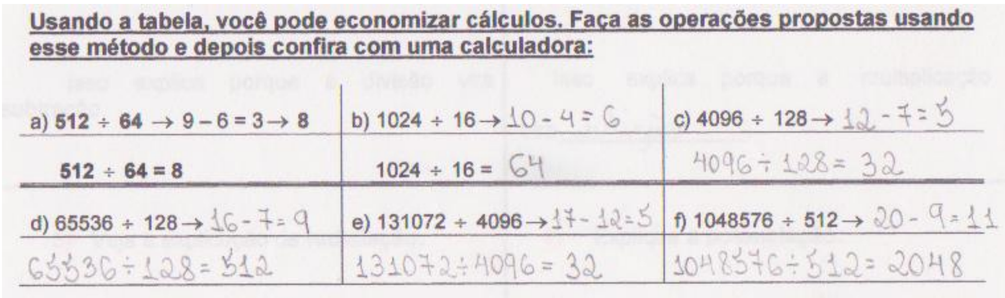
Dos estudantes que cometeram algum erro, um errou a conta de subtração em uma das divisões e quatro fizeram a subtração e esqueceram de voltar na primeira linha da tabela para dar o resultado da divisão em algum item.

Os comentários dos estudantes nessa atividade foram positivos. Eles gostaram muito do método de divisão proposto pela atividade e perguntaram se sempre poderiam usá-lo. Um aluno da classe 2 perguntou como faríamos se os números da divisão não estivessem naquela tabela, antecipando uma questão que seria considerada mais adiante.

Abaixo temos trechos da atividade de estudantes.



a) 512 ÷ 64 → 9 – 6 = 3→ 8	b) 1024 ÷ 16→ 10-4=6	c) 4096 ÷ 128→ 12-7=5
512 ÷ 64 = 8	1024 ÷ 16 = 64	4096 ÷ 128 = 32
d) 65536 ÷ 128→ 16-7=9	e) 131072 ÷ 4096→ 17-12=5	f) 1048576 ÷ 512→ 20-9=11
65536 ÷ 128 = 512	131072 ÷ 4096 = 32	1048576 ÷ 512 = 2048

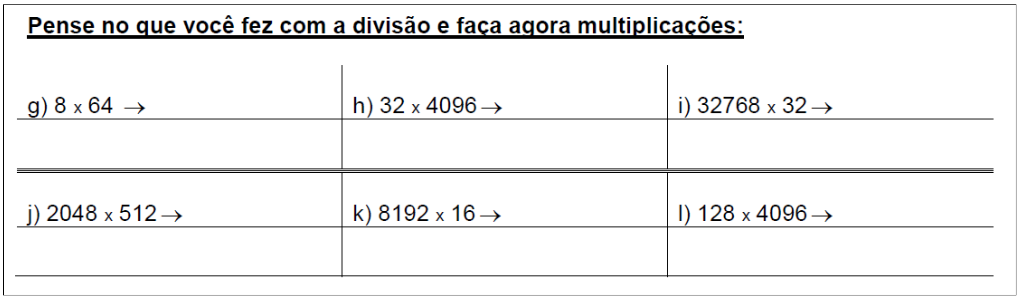


Usando a tabela, você pode economizar cálculos. Faça as operações propostas usando esse método e depois confira com uma calculadora:

a) 512 ÷ 64 → 9 – 6 = 3→ 8	b) 1024 ÷ 16→ 10-4=6	c) 4096 ÷ 128→ 12-7=5
512 ÷ 64 = 8	1024 ÷ 16 = 64	4096÷128= 32
d) 65536 ÷ 128→ 16-7=9	e) 131072 ÷ 4096→ 17-12=5	f) 1048576 ÷ 512→ 20-9=11
65536÷128=512	131072÷4096= 32	1048576÷512= 2048

Ilustração 8: Digitalização de atividades realizadas por estudantes

Após as atividades de divisão, que têm alguns exemplos, propomos ao estudante que ele faça agora multiplicações, utilizando o mesmo método, mas não são dados exemplos. A intenção é que ele verifique que, se na divisão usou subtração, na multiplicação usará adição aparecendo mais uma vez a redução de operações.



Pense no que você fez com a divisão e faça agora multiplicações:

g) 8 x 64 →	h) 32 x 4096→	i) 32768 x 32→
j) 2048 x 512→	k) 8192 x 16→	l) 128 x 4096→

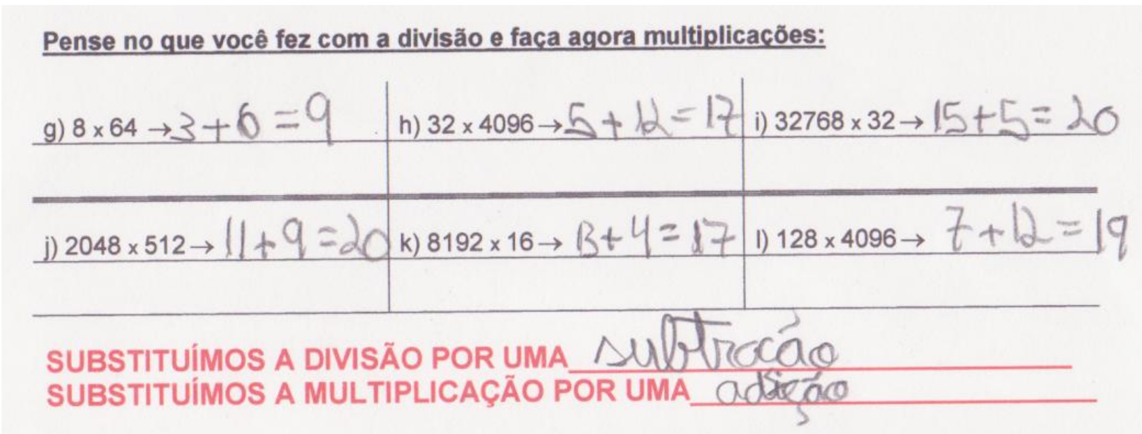
Ilustração 9: Quarta atividade proposta na Folha de Atividades 1

Os resultados da atividade estão abaixo:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	17
Cometeram algum erro	1	3

Dos estudantes que cometeram algum erro, um não voltou na primeira linha da tabela para dar o resultado da multiplicação, dois erraram na soma e um colocou como correspondente do número 64, o 5, e na realidade é o 6.

Abaixo temos um trecho da atividade do estudante que não voltou na tabela para dar o resultado final das operações e também de um estudante que acertou a atividade.



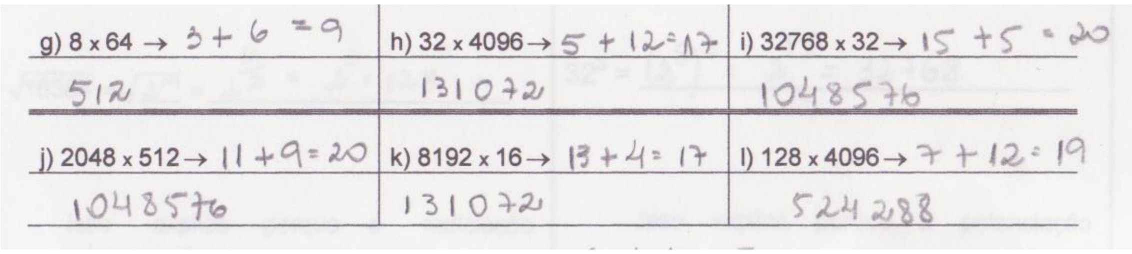
Pense no que você fez com a divisão e faça agora multiplicações:

g) 8 x 64 →3+6=9	h) 32 x 4096→5+12=17	i) 32768 x 32→15+5=20
j) 2048 x 512→11+9=20	k) 8192 x 16→13+4=17	l) 128 x 4096→7+12=19

SUBSTITUÍMOS A DIVISÃO POR UMA subtração

SUBSTITUÍMOS A MULTIPLICAÇÃO POR UMA adição

Ilustração 10: Digitalização de atividades realizadas por estudantes



g) 8 x 64 → 3 + 6 = 9	h) 32 x 4096 → 5 + 12 = 17	i) 32768 x 32 → 15 + 5 = 20
512	131072	1048576
j) 2048 x 512 → 11 + 9 = 20	k) 8192 x 16 → 13 + 4 = 17	l) 128 x 4096 → 7 + 12 = 19
1048576	131072	524288

Ilustração 11: Digitalização de atividades realizadas por estudantes

De maneira geral, os estudantes gostaram da atividade e acharam bem interessante esse novo método. Eles tiveram facilidade e concluíram rapidamente que se na divisão usaram a subtração na multiplicação só poderia ser a adição.

No final dessas atividades damos ênfase à redução de operações, o estudante tem que completar uma frase, dizendo qual foi a substituição de operações que ele fez. Mais uma vez temos a intenção de fazer com que o estudante perceba a redução de operações, que é uma das características fundamentais da função logarítmica.

SUBSTITUÍMOS A DIVISÃO POR UMA______________________________
SUBSTITUÍMOS A MULTIPLICAÇÃO POR UMA_________________________

Ilustração 12: Quinta atividade proposta na Folha de Atividades 1

Todos os estudantes preencheram corretamente essas frases.

Em seguida é solicitado ao estudante que calcule algumas potências sem o uso da calculadora. Novamente, pretendemos que o estudante sinta dificuldades ao fazer essas contas para perceber a utilidade das tabelas.

IV) Calcule sem usar a calculadora $4^3 =$ $8^4=$

Ilustração 13: Sexta atividade proposta na Folha de Atividades 1

Nesta atividade os resultados foram os seguintes:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	19	10
Não fizeram	3	10

Durante esta atividade alguns perguntaram se era necessário fazer a conta, já que ela estava resolvida logo abaixo. Como eles tinham trabalhado com as multiplicações e as divisões, reduzindo-as à adição e subtração, já esperavam uma redução também na potenciação. Por esse motivo alguns estudantes não fizeram a atividade.

Depois de uma pequena explicação exemplificamos como calcular potências, usando a tabela e reduzindo a operação para multiplicação. Mais uma vez mostramos ao estudante que é possível reduzir operações com o uso da tabela.

Para calcular 4^3, basta descer na tabela e **multiplicar** o número encontrado por três, suba e encontraremos o 64, com isso teremos $4^3 = 64$.

4				64
2				6

x 3

Para calcular 8^4, basta descer e **multiplicar** o número encontrado por quatro, suba e encontraremos o 4096, com isso observamos que $8^4 = 4096$.

8									4096
3									12

x 4

Ilustração 14: Texto explicativo na Folha de Atividades 1

Em seguida são propostas atividades de cálculos de potências, usando a redução de operações conforme visto no exemplo. Pretendemos com essa atividade verificar se o aluno compreendeu a redução da potenciação.

Vamos verificar se o método funciona? Faça as contas usando–o e depois confira com a calculadora:

a) **16^3** → 4 x 3 = 12 → **4096**	b) 8^5 →	c) 4^6 →
16^3 = 4096		
d) 32^3 →	e) 512^2 →	f) 1024^2 →

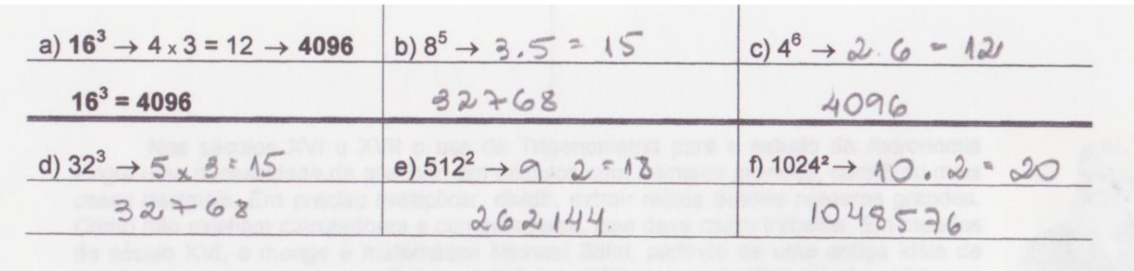
Ilustração 15: Sétima atividade proposta na Folha de Atividades 1

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	19	18
Cometeram algum erro	3	2

Dos estudantes que cometeram algum erro, um realizou a operação de multiplicação e não olhou na linha de cima para dar o resultado da potência; fez isso em todos os itens. Um dos estudantes, em apenas um dos itens, ao invés de multiplicar os expoentes, somou, mas acertou todos os outros itens. Os outros estudantes que cometeram erros usaram o método corretamente, mas olharam o número da tabela errado. Isso aconteceu, para cada estudante em apenas um item.

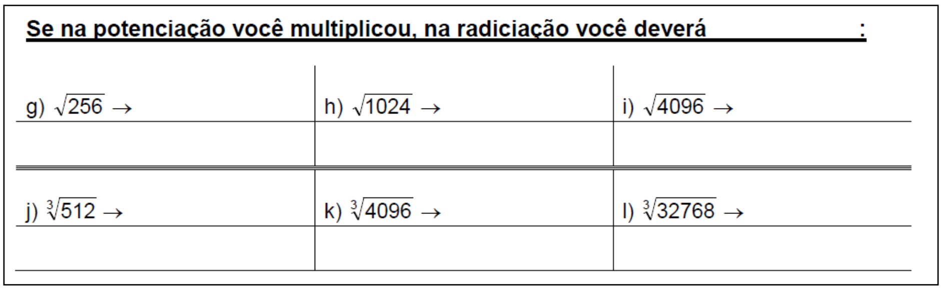
Minha interpretação é que os estudantes que cometeram erros o fizeram por falta de atenção. Abaixo, a atividade resolvida por um estudante.



a) $16^3 \to 4 \times 3 = 12 \to 4096$	b) $8^5 \to 3.5 = 15$	c) $4^6 \to 2.6 = 12$
$16^3 = 4096$	32768	4096
d) $32^3 \to 5 \times 3 = 15$	e) $512^2 \to 9 \cdot 2 = 18$	f) $1024^2 \to 10 \cdot 2 = 20$
32768	262144	1048576

Ilustração 16: Digitalização da atividade realizada por estudantes

Após as atividades de potenciação, são propostas atividades de radiciação, sem nenhum exemplo. A intenção é que o estudante perceba que se a potenciação foi reduzida à multiplicação, a radiciação deverá ser reduzida para a divisão. Seguem algumas atividades para que o estudante pense na situação proposta e trabalhe sozinho com o que aprendeu.



Se na potenciação você multiplicou, na radiciação você deverá ______:

g) $\sqrt{256} \to$	h) $\sqrt{1024} \to$	i) $\sqrt{4096} \to$
j) $\sqrt[3]{512} \to$	k) $\sqrt[3]{4096} \to$	l) $\sqrt[3]{32768} \to$

Ilustração 17: Oitava atividade proposta na Folha de Atividades

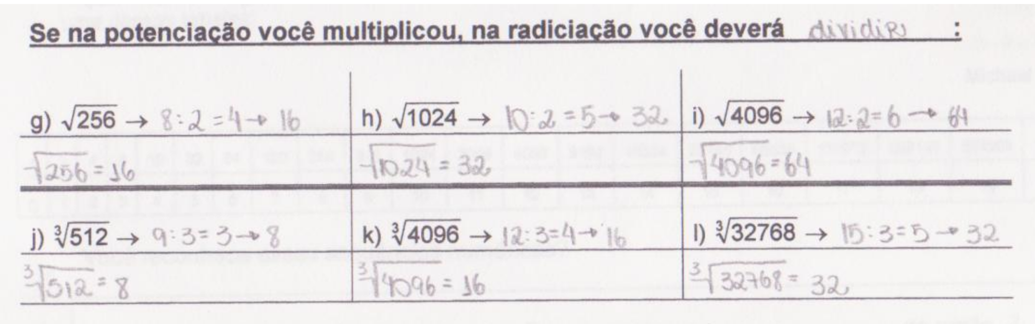
Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	20	18
Cometeram algum erro	2	2

Um dos estudantes errou na conta de divisão em apenas um item. Outro, em apenas um item também, não subiu na tabela para olhar o resultado da raiz. Outro estudante não olhou na linha de cima em nenhuma conta e outro não olhou na linha de cima em dois itens.

Provavelmente esses estudantes que não colocaram os resultados das raízes e só colocaram os resultados da divisão fizeram isso por falta de atenção, pois acertaram a grande maioria de todas as contas feitas até então.

Temos abaixo a atividade feita por um estudante.


Se na potenciação você multiplicou, na radiciação você deverá dividir :

g) $\sqrt{256} \rightarrow 8:2=4 \rightarrow 16$	h) $\sqrt{1024} \rightarrow 10:2=5 \rightarrow 32$	i) $\sqrt{4096} \rightarrow 12:2=6 \rightarrow 64$
$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{1024}=32$	$\sqrt{4096}=64$
j) $\sqrt[3]{512} \rightarrow 9:3=3 \rightarrow 8$	k) $\sqrt[3]{4096} \rightarrow 12:3=4 \rightarrow 16$	l) $\sqrt[3]{32768} \rightarrow 15:3=5 \rightarrow 32$
$\sqrt[3]{512}=8$	$\sqrt[3]{4096}=16$	$\sqrt[3]{32768}=32$

Ilustração 18: Digitalização da atividade realizada pelos estudantes

No final das atividades com potenciação e radiciação, novamente é dado ênfase à redução de operações. O estudante tem que completar uma frase, dizendo qual foi a substituição de operações que ele fez.

SUBSTITUÍMOS A POTENCIAÇÃO POR UMA____________________________

SUBSTITUÍMOS A RADICIAÇÃO POR UMA____________________________

Ilustração 19: Nona atividade proposta na Folha de Atividades 1

Os estudantes não cometeram nenhum erro nesta atividade.

Para finalizar a Folha de Atividades 1, a tabela inicial foi reescrita, mas agora com uma linha a mais, onde o estudante deve colocar a fatoração dos números que estão em PG na linha de cima. A intenção é que o estudante perceba que os elementos da PG são potências de dois e que os elementos da PA são os expoentes dessas potências.

1 2^0	2	4	8 2^3	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Ilustração 20: Décima atividade proposta na Folha de Atividades 1

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	20	17
Não fizeram	2	3

Nesta atividade os alunos tinham que fatorar os números da PG para perceberem porque houve a redução de operações. Por falta de atenção alguns estudantes não completaram a tabela e consequentemente tiveram algumas dificuldades na explicação da redução de operações que vinha a seguir.

A próxima atividade tem o objetivo de explicar a redução das operações feitas anteriormente. Usando as propriedades da potenciação mostramos que a divisão foi reduzida à subtração, porque na realidade trabalhávamos com os expoentes de potências de mesma base. E na divisão de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes. Ao final da explicação de cada redução há uma frase que o estudante precisa completar.

1) Agora podemos explicar a conta:

$$4096 \div 16 = \frac{4096}{16} = \frac{2^{12}}{2^4}$$

$$\frac{2^{12}}{2^4} = 2^{12-4} = 2^8 = 256$$

Isso explica porque a divisão vira subtração.

2) Agora você vai explicar a **multiplicação:**

512 x 64 = ____________________

256 x 128 = ____________________

Isso explica porque a multiplicação vira_______________.

3) Veja a explicação da **radiciação:**

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$$\sqrt{16384} = \sqrt{\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Isso explica porque a radiciação vira_________________.

4) Explique a **potenciação:**

$8^4 = (2^3)^4 =$ ____________________

$32^3 =$ ____________________

Isso explica porque a potenciação vira__________________

Ilustração 21: Décima primeira atividade proposta na Folha de Atividades 1

Em seguida propomos ao estudante que, seguindo o mesmo raciocínio usado na explicação da redução da divisão, explique a redução de operação na multiplicação e na potenciação.

Seguem os resultados dessa atividade:

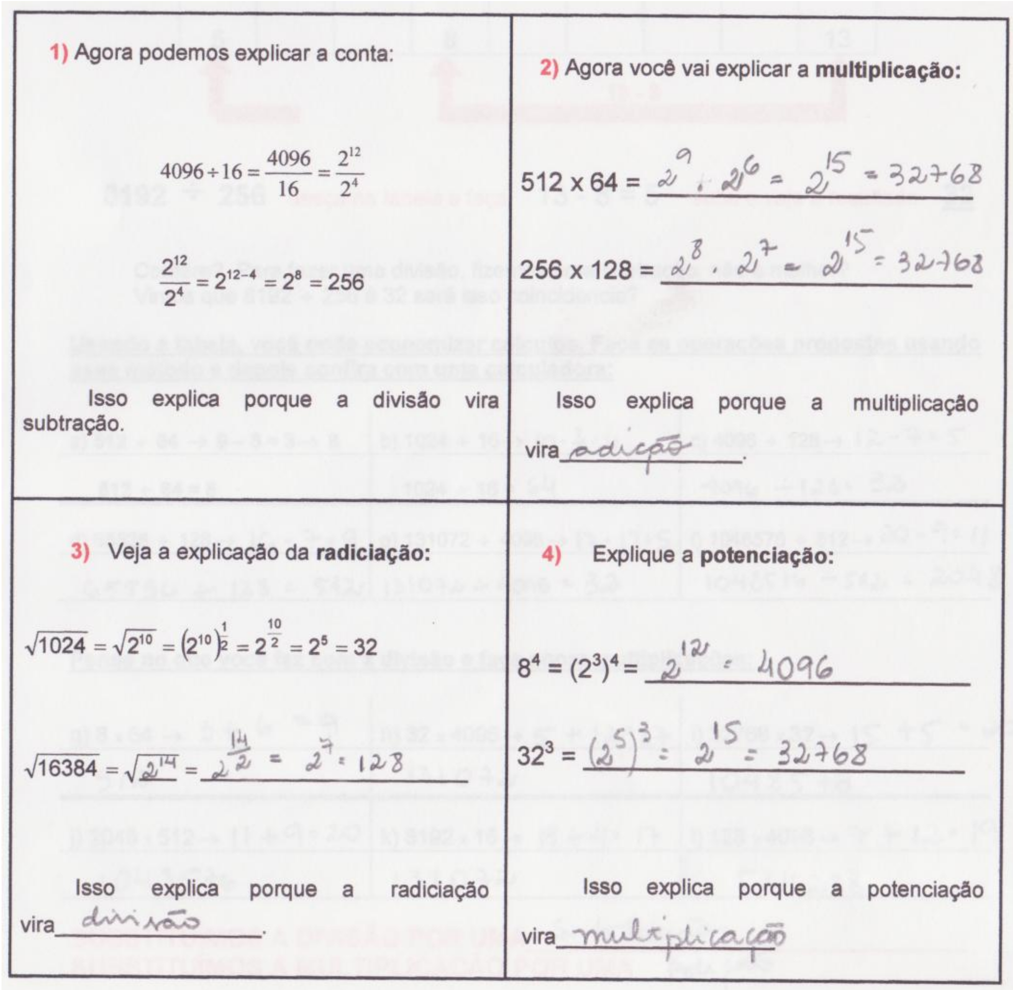
	Classe 1	Classe 2
Acertaram	20	11
Cometeram algum erro	2	9

Na classe 1 o erro cometido pelos dois estudantes foi apenas não colocar o resultado final da multiplicação de 512 x 64. Eles transformaram o número em potência, somaram os expoentes e deixaram apenas 2^{15}.

Na classe 2 dois estudantes cometeram o mesmo erro citado anteriormente; dois estudantes não preencheram as frases; dois estudantes colocaram o resultado da multiplicação direto, sem fazer a explicação com expoentes, conforme solicitado; um estudante, na explicação da potenciação, colocou que $32^3=(2^5)^3=32+68$; um dos estudantes errou na soma dos expoentes colocou que $2^{8+7}=2^{14}$; um dos estudantes colocou que $32^3 = (2^8)^3=2048$, ele errou no expoente do 32, colocou o número 8 e somou os expoentes ao invés de multiplicá-los, mas a primeira potenciação ele acertou, além disso esse último estudante colocou que a radiciação vira radiciação e a potenciação vira potenciação.

Nesta atividade muitos estudantes solicitaram ajuda do professor. Alguns não se lembravam das propriedades das potências que tinham visto há algumas semanas antes.

Abaixo temos trechos da atividade, feita por estudantes.



1) Agora podemos explicar a conta:

$$4096 \div 16 = \frac{4096}{16} = \frac{2^{12}}{2^4}$$

$$\frac{2^{12}}{2^4} = 2^{12-4} = 2^8 = 256$$

Isso explica porque a divisão vira subtração.

2) Agora você vai explicar a **multiplicação:**

$512 \times 64 = 2^9 \cdot 2^6 = 2^{15} = 32768$

$256 \times 128 = 2^8 \cdot 2^7 = 2^{15} = 32768$

Isso explica porque a multiplicação vira adição.

3) Veja a explicação da **radiciação:**

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = (2^{10})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$\sqrt{16384} = \sqrt{2^{14}} = 2^{\frac{14}{2}} = 2^7 = 128$

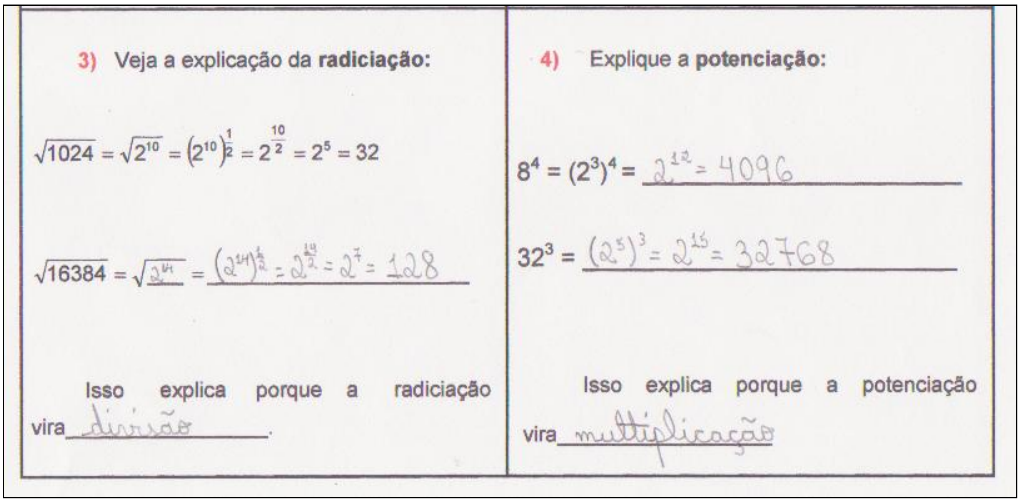
Isso explica porque a radiciação vira divisão.

4) Explique a **potenciação:**

$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} = 4096$

$32^3 = (2^5)^3 = 2^{15} = 32768$

Isso explica porque a potenciação vira multiplicação



3) Veja a explicação da **radiciação:**

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = (2^{10})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$\sqrt{16384} = \sqrt{2^{14}} = (2^{14})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{14}{2}} = 2^7 = 128$

Isso explica porque a radiciação vira divisão.

4) Explique a **potenciação:**

$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} = 4096$

$32^3 = (2^5)^3 = 2^{15} = 32768$

Isso explica porque a potenciação vira multiplicação

Ilustração 22: Digitalização da atividade realizada por estudantes

Assim a Folha de Atividades 1 é finalizada, o estudante trabalha com a redução das operações, dando início ao conceito de logaritmos.

5.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 1.

Depois de apresentar as Folhas de Atividades e as análises detalhadas da produção dos estudantes, concluímos que nosso objetivo na Folha de Atividades 1 foi alcançado. Os estudantes perceberam que usando expoentes de potências conseguimos reduzir operações, o que facilita muito os cálculos que foram propostos nas atividades.

Abaixo trazemos algumas fotos desse momento da sequência.

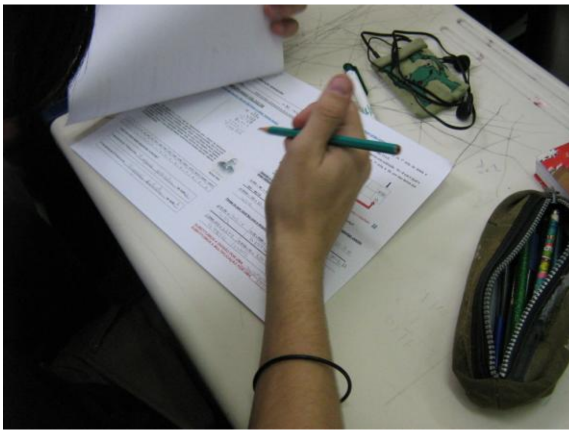


Foto 1: Aplicação da Folha de Atividades 1

Foto 2: Aplicação da Folha de Atividades 1

CAPÍTULO 6

Descrição e análise do momento 2 da sequência didática

6.1 INTRODUÇÃO

A Folha de Atividades 2, "*Uma invenção interessante*" foi elaborada dando continuidade à primeira Folha de Atividade. Nessa folha introduzimos o conceito de logaritmo e algumas de suas propriedades. Usamos ainda as tabelas de sequências numéricas para mostrar que o logaritmo é o expoente das potências.

Abordamos a notação de logaritmo, bem como a leitura e algumas propriedades que são percebidas através de regularidades propostas nos exercícios.

Aplicamos as atividades para as duas classes no dia 19/09/2009, para 42 estudantes totalizando 21 grupos. A atividade durou aproximadamente 50 minutos.

6.2 RESUMO DO MOMENTO 2

Nesta Folha de Atividades são usadas as tabelas de PA e PG para definir formalmente o logaritmo. Na primeira parte da atividade temos um pequeno texto dizendo como foram feitas as primeiras tábuas de logaritmos, retomando as atividades da Folha de Atividades 1. Repetimos a tabela usada na Folha de Atividades 1 com suas respectivas potências. Aparece aí a primeira definição de logaritmo: o logaritmo é o expoente de uma potência. Para explorar bem o conceito mudamos a razão da progressão geométrica, com isso o estudante percebe que não existem apenas tabelas com PG de razão 2.

São propostas algumas atividades de escrita e cálculo de logaritmos para que o estudante se familiarize com o novo conceito aprendido. No final da folha temos atividades para que o estudante perceba algumas propriedades dos logaritmos.

6.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Nesta atividade esperamos que alguns estudantes tenham dificuldade com a passagem da notação de potência para a notação de logaritmo, já que é o primeiro contato do estudante com esse conceito. Para isso foram propostas atividades de cálculo e de escrita. Pode ser que o estudante tenha dificuldades também no momento de escrever as regularidades encontradas na última atividade da folha. Os estudantes têm dificuldades em escrever a linguagem matemática usando a língua materna.

6.4 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DO MOMENTO 2

Iniciamos a folha de atividades com a origem histórica dos logaritmos e retomando a tabela da Folha de Atividades 1. Damos a primeira definição de logaritmo.

UMA INVENÇÃO INTERESSANTE

Os matemáticos e os astrônomos perceberam que se trabalhassem com os expoentes dos números, quando escritos em forma de potência, seus cálculos seriam simplificados. Com isso criaram tabelas de duas colunas (ou duas linhas) em que se colocava os termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 (potências de um certo número) em correspondência com os termos de uma progressão aritmética (na verdade os expoentes dos números) e chamou-as tábuas de logaritmos.

1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**	**4096**	**8192**	**16384**	**32768**	**65536**	**131072**
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**

Na tabela, o número de baixo chama-se **logaritmo** do número de cima. Assim:

128
7 **O logaritmo de 128 é 7**
Pois $2^7 = 128$

512
9 **O logaritmo de 512 é 9**
Pois $2^9 = 512$

8192
13 **O logaritmo de 8192 é 13**
Pois $2^{13} = 8192$

OBSERVE QUE O **LOGARITMO** É O **EXPOENTE** DE UMA POTÊNCIA.

Ilustração 23: Texto explicativo da Folha de Atividades 2

Este texto tem como objetivo definir os logaritmos através da atividade trabalhada no momento anterior da sequência didática. Esperamos que os estudantes percebam que ao reduzir as operações, na verdade estavam trabalhando com os logaritmos dos números dados.

São dadas algumas atividades para que os estudantes, observando a tabela, calculem alguns logaritmos. Nesse momento ainda não é feita a diferenciação de bases dos logaritmos. O objetivo dessa atividade é que o estudante tenha o primeiro contato com a notação de logaritmo.

Complete a tabela:

	Abreviando:		Abreviando:
O logaritmo de 2048 é 11	log (2048) = 11	O logaritmo de 4096 é_____.	log (4096) =____
O logaritmo de 256 é _____.	log (256) = ____	O logaritmo de 8 é________.	
O logaritmo de 32 é_______.		O logaritmo de 16384 é____.	

Ilustração 24: Primeira atividade proposta na Folha de Atividades 2

Seguem os resultados da análise:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	15
Cometeram algum erro	1	5

Um estudante errou no logaritmo de 8 (na base dois); ele disse que era 256. Os outros estudantes completaram a tabela corretamente com os valores dos logaritmos, mas não escreveram sua notação, deixaram esse espaço em branco.

A atividade transcorreu tranquilamente, os estudantes não tiveram dificuldade nenhuma em trabalhar nesta atividade. E em nenhum momento solicitaram ajuda.

Abaixo temos essa atividade resolvida por um estudante.

Complete a tabela:

	Abreviando:		Abreviando:
O logaritmo de 2048 é 11	log (2048) = 11	O logaritmo de 4096 é 12.	log (4096) = 12
O logaritmo de 256 é 8.	log (256) = 8	O logaritmo de 8 é 3.	log(8): 3
O logaritmo de 32 é 5.	log(32): 5	O logaritmo de 16384 é 14.	log(16384): 14

Ilustração 25: Digitalização de atividade realizada por estudantes

Depois dessas atividades temos uma tabela com PG de razão 3. Essa tabela é colocada na atividade para que os estudantes percebam que não existem apenas tabelas com potências de dois. Em seguida são propostas mais algumas atividades, usando a definição de logaritmos.

Vamos trabalhar com uma PG de razão 3:

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

81 → 4 **O logaritmo de 81 é 4**

Pois $3^4 = 81$

2187 → 7 **O logaritmo de 2187 é 7**

Pois $3^7 = 2187$

Complete a tabela:

	Abreviando:		Abreviando:
O logaritmo de 81 é 4	log (81) = 4	O logaritmo de 2187 é_____.	log
O logaritmo de 6561 é _____.	log (6561) = ____	O logaritmo de 177147 é________.	

Ilustração 26: Segunda atividade proposta na Folha de Atividades 2

Os resultados dessa atividade foram os seguintes:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	14
Cometeram algum erro	1	6

Dos estudantes que cometeram erros, seis completaram os logaritmos e não escreveram sua notação e um aluno escreveu a notação errada. Entendo que esses erros foram cometidos por falta de atenção dos estudantes.

Dando continuidade à Folha de Atividades 2 um pequeno texto explica que se existissem apenas potências de base 2 ou 3 muitos números ficariam de fora, por isso, John Napier, um lorde escocês, propôs tabelas com progressões geométricas de razão menor.

Em seguida, temos uma tabela com PG de razão 1,1 para mostrar que conseguimos trabalhar com logaritmos de números não inteiros.

Vemos que quando a base das potências é 2 ou 3 muitos números ficam de fora. Por exemplo nenhuma das tabelas anteriores permite fazer 9571 x 111275. Por isso, em meados do século XVII John Napier, um rico e inteligente lorde escocês que tinha tomado conhecimento das tabelas de Michael Stifel, propôs tabelas de razões menores para abranger uma quantidade maior de números.

Se tivermos uma tabela em que a PG tem razão (1,1), os termos estão mais próximos

1 $(1,1)^0$	**1,1** $(1,1)^1$	**1,21** $(1,1)^2$	**1,331** $(1,1)^3$	**1,4641** $(1,1)^4$	**1,61051** $(1,1)^5$	**1,771561** $(1,1)^6$	**1,9487171** $(1,1)^7$	**2,14358881** $(1,1)^8$	**2,357947691** $(1,1)^9$	**2,5937424601** $(1,1)^{10}$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

1,331

3

O logaritmo de (1,331) é 3

Pois $(1,1)^3 = 1,331$

1,771561

6

O logaritmo de (1,771561) é 6

Pois $(1,1)^6 = 1,771561$

Assim podemos montar qualquer tabela e fazer redução de cálculos com quaisquer números.

Ilustração 27: Texto explicativo da Folha de Atividades 2

Nas duas atividades propostas anteriormente não há diferenciação quanto à base das potências usadas nas tabelas. Após essas atividades a notação de logaritmo é dada, usando a base para diferenciá-las.

COMO DIFERENCIAR AS TABELAS? Usaremos a seguinte notação:

128

7

$2^7 = (128) \iff \log_2 (128) = 7$

Se o log vem de uma tabela de base 2, dizemos LOGARITMO DE 128 **NA BASE DOIS** É SETE.

81

4

$3^4 = (81) \iff \log_3 (81) = 4$

Portanto o LOGARITMO DE 81 **NA BASE TRÊS** É QUATRO.

Ilustração 28: Quadro explicativo da Folha de Atividades 2

Em seguida são propostas atividades que usam o logaritmo e sua expressão equivalente em potência. A intenção é que o estudante se familiarize com a notação.

LOGARITMOS

Já vimos nas atividades anteriores que o logaritmo é um expoente que foi criado para facilitar cálculos. Para nos familiarizar com os logaritmos vamos fazer algumas atividades:

PARTE I) PREENCHA A CAIXA AZUL COM O NÚMERO CORRETO:

a) $2^{\square} = (16) \leftrightarrow \log_2 (16) = \square$ b) $3^{\square} = (243) \leftrightarrow \log_3 (243) = \square$

c) $\log_6 (36) = \square \leftrightarrow 6^{\square} = (36)$ d) $\log_7 (1) = \square \leftrightarrow 7^{\square} = (1)$

e) $\log_2 (8) = \square$ f) $\log_{10} (1000) = \square$ g) $\log_5 (125) = \square$

Ilustração 29: Terceira atividade proposta na Folha de Atividades 2

Após a análise das atividades, os resultados foram os seguintes:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	15	17
Cometeram algum erro	7	13

Dos erros cometidos, três estudantes colocaram que o *log 1000* era 100, um estudante colocou que o $\log_6 36 = 6$, dois estudantes colocaram que $\log_2 8 = 4$, dois estudantes colocaram que $\log_7 1 = 1$, um estudante colocou que $\log_5 125 = 5$ e um estudante colocou $\log_5 125 = 25$.

Podemos perceber claramente que os erros cometidos foram os esperados, já que é o primeiro contato dos estudantes com os logaritmos.

Depois das atividades, há a seguinte pergunta: o que acontece se for feita uma tabela com a PG de razão 1? Pede-se aos estudantes que calculem alguns logaritmos de base 1. Esse questionamento é proposital, para que o estudante chegue à conclusão de que não há logaritmo de base 1.

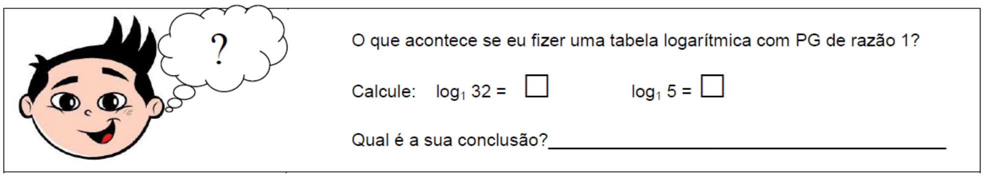


Ilustração 30: Quarta atividade proposta na Folha de Atividades 2

Seguem os resultados dessa atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	12	15
Cometeram algum erro	10	5

Dos estudantes que cometeram erros, onze colocaram que o $\log_1 32 = 32$ e que $\log_1 5 = 5$, três estudantes colocaram que esses logaritmos eram igual a 1, pois qualquer número elevado a um dá ele mesmo, e um estudante deixou em branco.

Nessa atividade a maior dificuldade dos estudantes foi não conseguir dizer porque era impossível calcular logaritmos na base 1. Abaixo temos um trecho da atividade de um estudante.

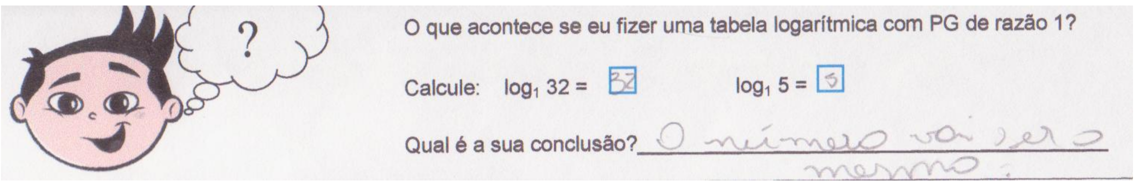


Ilustração 31: Digitalização de atividade realizado por estudantes

Em seguida temos a definição formal de logaritmo, inclusive com as restrições necessárias. Para que o estudante se acostume com a notação, são propostas mais algumas atividades nas quais o estudante tem que resolver o logaritmo e escrevê-lo por extenso.

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com **a** ≠ 1, se **b** = **a**^{c}, então o expoente **c** chama-se **LOGARITMO** de **b** na base **a**.

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b, \text{ com a e b positivos e a} \neq 1.$$

PARTE II) AGORA CALCULE OS LOGARITMOS E PREENCHA A TABELA:

h) $\log_2 (16)$=	Logaritmo de 16 na base dois é ____________
i) $\log_3 (9)$=	Logaritmo de 9 na base três é ____________
j) $\log_4 (16)$=	Logaritmo de
k) $\log_3 (27)$=	
l) $\log_5 (125)$=	
m) $\log_4 (64)$=	
n) $\log_9 (9)$=	
o) $\log_{10} (100)$=	
p) $\log_{10} (10000)$=	

Ilustração 32: Quinta atividade proposta na Folha de Atividades 3

Seguem os resultados dessa atividade:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	16	16
Cometeram algum erro	6	4

Dois estudantes na hora de escrever por extenso o logaritmo cometeram erro em um item, três estudantes escreveram que o *logaritmo de 125 na base cinco é igual a 5*, dois estudantes calcularam todos os itens corretamente mas não os escreveram por extenso, dois estudantes erraram apenas um dos logaritmos propostos, um estudante errou 4 dos 9 logaritmos propostos, ele colocou o número que quando multiplicado pelo número da base dava o logaritmando e não o expoente.

Para finalizar a Folha de Atividades 2, temos cálculos de logaritmos que fazem com que o estudante perceba algumas propriedades através de regularidades. Pedimos para que o estudante escreva as particularidades percebidas, para no final fazer um resumo geral.

PARTE III) CALCULE OS LOGARITMOS ABAIXO:

a) $\log_2(2)=$ b) $\log_5(5)=$ c) $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}\right)=$ d) $\log_9(9)=$

Nos itens a a d, você percebeu alguma particularidade? Qual?

e) $\log_7(1)=$ f) $\log_8(1)=$ g) $\log_{10}(1)=$ h) $\log_2(1)=$

O que você observou nos logaritmos dos itens e a h? Justifique.

i) $\log_2(2^5)=$ j) $\log_3(3^2)=$ k) $\log_5(5^3)=$ l) $\log_{10}(10^4)=$

Você encontrou alguma regularidade nos logaritmos dos itens i a l? Qual?

m) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=$ n) $\log_{\frac{1}{5}}(5)=$ o) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)=$ p) $\log_{\frac{1}{2}}(2)=$

Há alguma regularidade nos itens de m a p?

q) $2^{\log_2(16)}$ r) $3^{\log_3(27)}$ s) $5^{\log_5(625)}$ t) $7^{\log_7(49)}$

O que você observou nos itens q a t?

Faça um pequeno resumo das regularidades encontradas:

Ilustração 33: Sexta atividade proposta na Folha de Atividades 2

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	11
Cometeram algum erro	1	9

Temos abaixo trechos da atividade de dois estudantes:

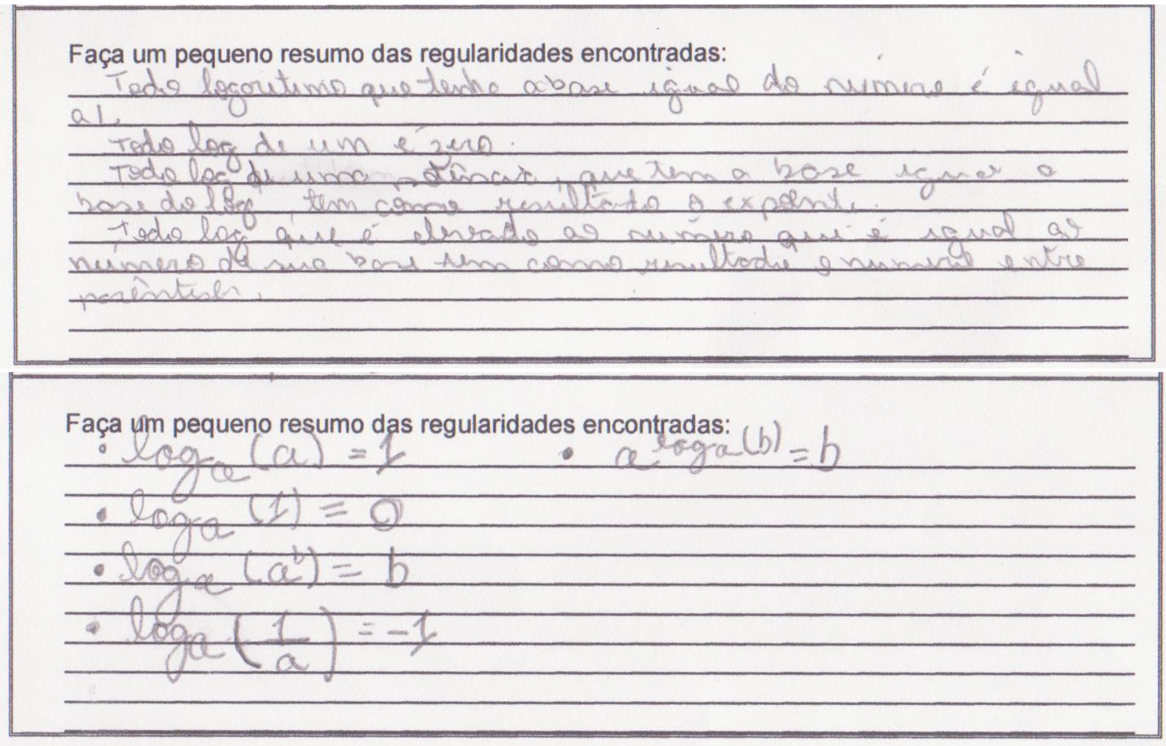


Ilustração 34: Digitalização de atividade realizado por estudantes

Na aplicação desta atividade não havíamos definido o logaritmando, os estudantes tiveram dificuldade em se expressar, pois não sabiam o nome deste termo. Por isso fizemos uma pequena modificação na folha de atividades que está disponibilizada no apêndice B.

6.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 2

Na aplicação desta Folha de Atividades percebemos que os estudantes, de maneira geral, acertaram e entenderam a definição de logaritmo. Mas como era o primeiro contato com a definição e a notação, alguns erros foram cometidos como já era esperado. Os estudantes tiveram dificuldades na atividade que antecedia a definição formal de logaritmos, onde pedíamos que eles calculassem $\log_1 32$ *e* $\log_1 5$. Eles não conseguiam calcular, mas também não diziam que não era possível. Muitos estudantes solicitaram ajuda nesta atividade. Além disso, os estudantes tiveram dificuldades em escrever as regularidades percebidas no final da atividade, principalmente porque não havíamos trabalhado com os nomes de cada termo no logaritmo. Essas dificuldades nos levaram a fazer modificações na proposta final.

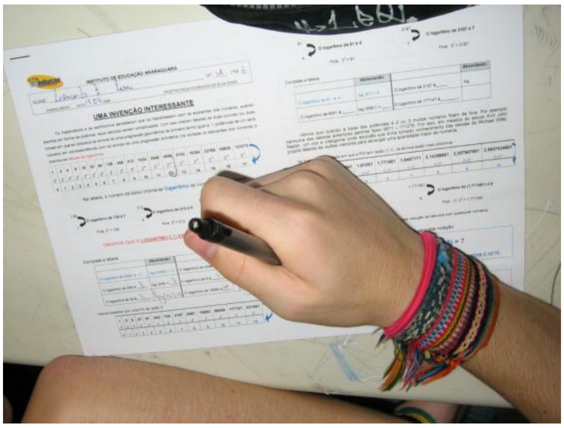
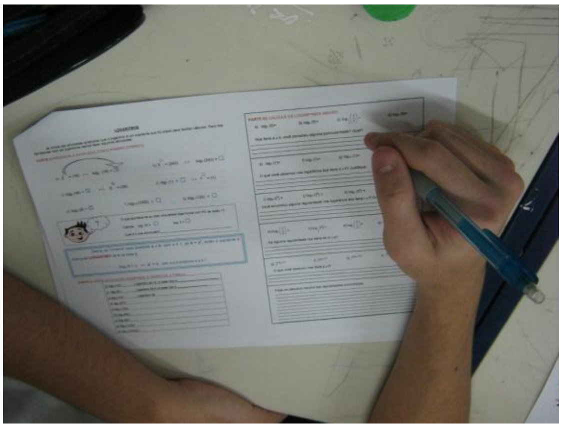



Foto 3: Aplicação da Folha de Atividades 2

CAPÍTULO 7

Descrição e análise do momento 3 da sequência didática

7.1 INTRODUÇÃO

Neste momento da sequência didática elaboramos atividades retiradas de diversos livros didáticos para que o estudante se familiarize com a notação de logaritmos.

Achamos que esse é o momento apropriado para o estudante trabalhar alguns problemas sobre o que aprendeu com as Folhas de Atividades aplicadas anteriormente em que foram vistos a redução de operações e o conceito de logaritmos.

Aplicamos as atividades para as duas classes no dia 21/09/2009, para 42 estudantes totalizando 21 grupos. A atividade durou aproximadamente 50 minutos.

7.2 RESUMO DO MOMENTO 3

As atividades propostas neste momento da sequência didática exploram a notação de logaritmos, o fato de ele ter ação inversa à da potência, ou seja, escrever potências usando logaritmos e vice-versa. Explora ainda o cálculo em que as incógnitas são bases ou logaritmandos, ou mesmo logaritmos.

7.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Esperamos que na atividade 5 os estudantes tenham algumas dúvidas pois os logaritmos que ali aparecem tem frações, raízes e resultados negativos. São atividades um pouco diferente das propostas na Folha de Atividades 2, mas como os estudantes já trabalharam com todos os tipos de equações exponenciais pensamos que essas dúvidas não serão muito difíceis pois o próprio professor poderá ajudar.

7.4 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DO MOMENTO 3

As duas primeiras atividades exploram o conceito de logaritmo como função inversa da exponencial. Na primeira, o estudante precisa calcular o resultado de algumas potências e em seguida escrevê-las em forma de logaritmo. Nesta atividade temos a intenção de que o estudante perceba que para calcular logaritmos, precisará da ajuda das potências correspondentes.

01)Calcule cada potência e depois escreva o logaritmo correspondente.

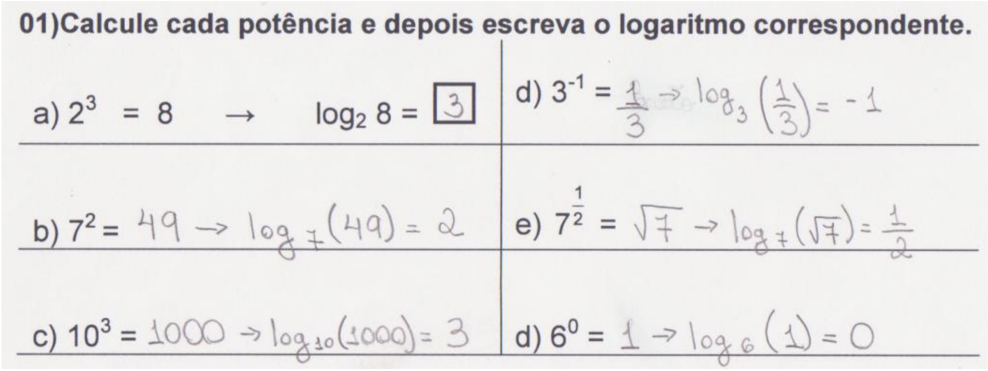
a) $2^3 = 8 \quad \rightarrow \quad \log_2 8 = \square$	d) $3^{-1} =$
b) $7^2 =$	e) $7^{\frac{1}{2}} =$
c) $10^3 =$	d) $6^0 =$

Ilustração 35: Primeira atividade proposta na Folha de Exercícios

Seguem os resultados obtidos na análise das respostas dos estudantes:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	17	9
Cometeram algum erro	5	11

Dois estudantes colocaram a resposta do logaritmo correspondente, mas não usaram a notação de logaritmo como no exemplo, um estudante acertou apenas um logaritmo e os demais erraram apenas um item da atividade.



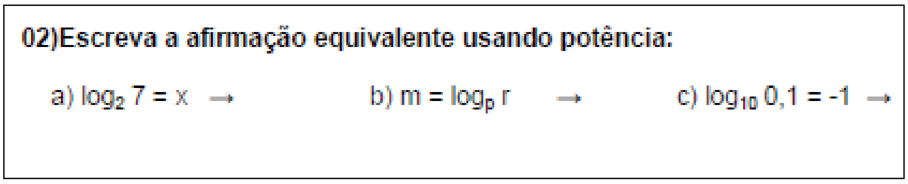
01)Calcule cada potência e depois escreva o logaritmo correspondente.

a) $2^3 = 8 \rightarrow \log_2 8 = \boxed{3}$	d) $3^{-1} = \frac{1}{3} \rightarrow \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$
b) $7^2 = 49 \rightarrow \log_7(49) = 2$	e) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} \rightarrow \log_7(\sqrt{7}) = \frac{1}{2}$
c) $10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10}(1000) = 3$	d) $6^0 = 1 \rightarrow \log_6(1) = 0$

Ilustração 36: Digitalização de atividade realizada por estudante

Percebemos que, como os erros são poucos, os estudantes estão se familiarizando com a notação e o cálculo dos logaritmos.

Na segunda atividade ocorre o contrário da primeira. O estudante deve escrever alguns logaritmos em forma de potência. A intenção é a mesma da primeira atividade.



02)Escreva a afirmação equivalente usando potência:

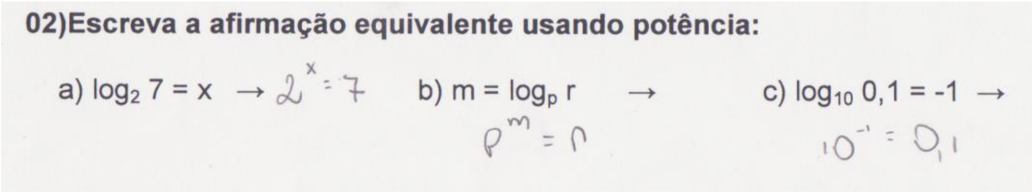
a) $\log_2 7 = x \rightarrow$ b) $m = \log_p r \rightarrow$ c) $\log_{10} 0{,}1 = -1 \rightarrow$

Ilustração 37: Segunda atividade proposta na Folha de Exercícios

Os resultados foram os seguintes:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	16	14
Cometeram algum erro	6	6

Quatro estudantes erraram em apenas um item, cinco estudantes erraram em todos os itens, um estudante não fez essa atividade, dois estudantes erraram dois itens. Percebemos que sem exemplos nas atividades os estudantes ainda se confundem um pouco ao transformar logaritmo em potência, o que é considerado normal, pois ainda estamos no início das atividades.



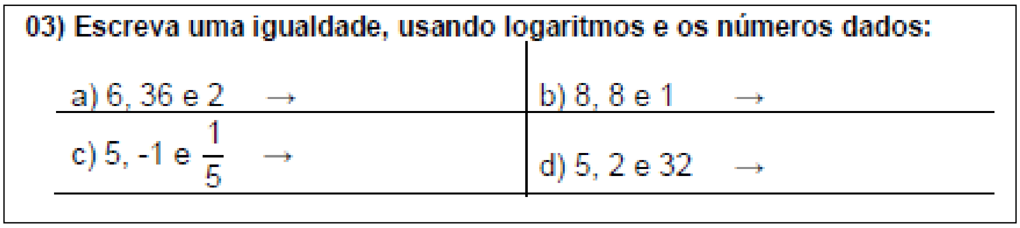
02)Escreva a afirmação equivalente usando potência:

a) $\log_2 7 = x \rightarrow 2^x = 7$ b) $m = \log_p r \rightarrow p^m = r$ c) $\log_{10} 0{,}1 = -1 \rightarrow 10^{-1} = 0{,}1$

Ilustração 38: Digitalização de atividade realizada por estudante

Abaixo temos a atividade resolvida por um estudante.

Na terceira atividade são dados três números. O estudante deve montar uma igualdade com os três números usando a notação de logaritmo. Esta atividade tem o objetivo de fazer com que o estudante, mais uma vez, perceba que o logaritmo é o expoente de uma potência. Esperamos que o estudante inicialmente monte uma potência usando os números para, em seguida, trabalhar com a notação de logaritmo.



03) Escreva uma igualdade, usando logaritmos e os números dados:

a) 6, 36 e 2 $\rightarrow$	b) 8, 8 e 1 $\rightarrow$
c) 5, -1 e $\frac{1}{5}$ $\rightarrow$	d) 5, 2 e 32 $\rightarrow$

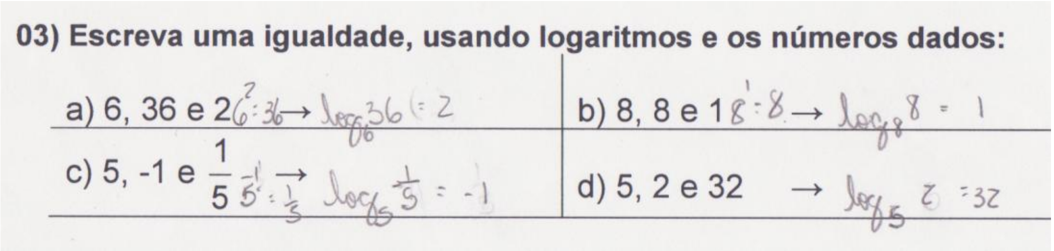
Ilustração 39: Terceira atividade proposta ma Folha de Exercícios

Os resultados foram os seguintes:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	13	16
Cometeram algum erro	9	4

Sete estudantes erraram em apenas um item da atividade, quatro estudantes escreveram uma potência envolvendo os três números dados e não usaram a notação de logaritmo, um estudante errou todos os itens, ele montou três logaritmos errados em cada item.

Abaixo temos a atividade resolvida por um estudante. Ele errou no último item apenas.


03) Escreva uma igualdade, usando logaritmos e os números dados:

a) 6, 36 e 2 $6^2 = 36 \rightarrow \log_6 36 = 2$	b) 8, 8 e 1 $8^1 = 8 \rightarrow \log_8 8 = 1$
c) 5, -1 e $\frac{1}{5}$ $5^{-1} = \frac{1}{5} \rightarrow \log_5 \frac{1}{5} = -1$	d) 5, 2 e 32 $\rightarrow \log_5 2 = 32$

Ilustração 40: Digitalização de atividade resolvida pro estudante

Na atividade de número 4, a base dos logaritmos é desconhecida. Esperamos que o estudante encontre o valor da base em cada logaritmo, escrevendo-os em forma de potência.

04) Determine o valor da base a:

a) $\log_a 8 = 3$ b) $\log_a 5 = 1$ c) $\log_a 36 = 2$

d) $\log_a 4 = -2$ e) $\log_a 1 = 0$ f) $\log_a 5 = 2$

Ilustração 41: Quarta atividade proposta na Folha de Exercícios

Seguem os resultados da aplicação da atividade:

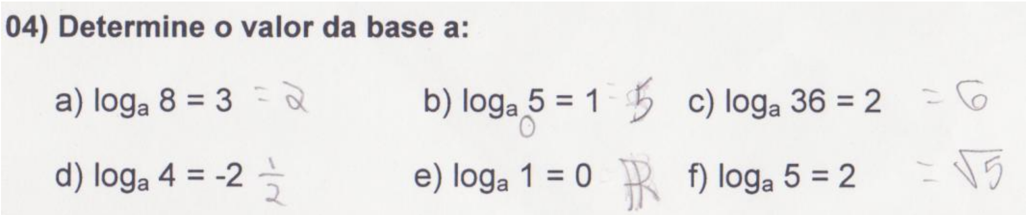
	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	11	9
Cometeram algum erro	11	11

Na classe 1, dos onze estudantes que cometeram algum erro, quatro erraram em apenas um item ($\log_a 1 = 0$ ou $\log_a 4 = -2$). Os outros estudantes erraram em dois itens (todos em $\log_a 1 = 0$ e alguns em $\log_a 4 = -2$). E outros em $\log_a 5 = 2$.

Na classe 2, três estudantes erraram em apenas um item ($\log_a 1 = 0$ ou $\log_a 4 = -2$). Os demais estudantes erraram em dois itens ($\log_a 1 = 0$ ou $\log_a 4 = -2$ ou $\log_a 5 = 2$).

Percebemos que as dificuldades dos estudantes são em logaritmos que envolvem raízes, frações e logaritmos com resultado igual a zero.

Os estudantes que acertaram o item *e*, disseram que podia ser qualquer número real a base do logaritmo, esta resposta foi considerada correta na análise dos resultados, mesmo eles não tendo colocado que seriam os reais positivos. Abaixo temos a atividade de um estudante.



04) Determine o valor da base a:

a) $\log_a 8 = 3$ $= 2$	b) $\log_a 5 = 1$ 5	c) $\log_a 36 = 2$ $= 6$
d) $\log_a 4 = -2$ $\frac{1}{2}$	e) $\log_a 1 = 0$ $\mathbb{R}$	f) $\log_a 5 = 2$ $= \sqrt{5}$

Ilustração 42: Digitalização de atividade realizado por estudante

Lembramos que na Folha de Atividades 2 foi estudada a definição de logaritmo, sua leitura, a diferenciação de bases e foram feitos alguns cálculos para percepção de algumas propriedades. Para complementar esse estudo, a atividade 5 da Folha de Exercícios propõe o cálculo de alguns logaritmos em diversas bases. Esperamos que o estudante calcule esses logaritmos, transformando-os em potência para facilitar seu cálculo.

05) Calcule:

a) $\log_3 27 =$	b) $\log_{10} 10000 =$
c) $\log_{\frac{1}{2}} 32 =$	d) $\log_2 \sqrt{8} =$
e) $\log_{\frac{1}{4}} 16 =$	f) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} =$
g) $\log_2 0{,}25 =$	h) $\log_7 7=$

Ilustração 43: Quinta atividade proposta na Folha de exercícios

Os resultados foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	10	7
Cometeram algum erro	12	13

Dos estudantes que cometeram erro, 14 erraram em apenas um item ($\log_{\frac{1}{4}} 16$ ou $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$ ou $\log_2 0{,}25$). Dez estudantes erraram em dois itens ($\log_{\frac{1}{4}} 16$ ou $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$ ou $\log_{\frac{1}{2}} 32$ ou $\log_2 \sqrt{8}$). E um estudante acertou apenas dois itens. Podemos observar que a maioria dos erros cometidos aconteceu em logaritmos que envolviam frações em seu cálculo.

05) Calcule:

a) $\log_3 27 =$ 3	b) $\log_{10} 10000 =$ 4
c) $\log_{\frac{1}{2}} 32 =$ -5	$2^x = \sqrt{8}$ $2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}}$ $x = \frac{3}{2}$ $2^x = 8^{\frac{1}{2}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}$ d) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$
e) $\log_{\frac{1}{4}} 16 =$ -2	f) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} =$ 3
g) $\log_2 0{,}25 =$ $x = -2$ $2^x = \frac{1}{4}$ $2^x = 4^{-1}$ $2^x = (2^2)^{-1} = 2^x = 2^{-2}$	h) $\log_7 7 =$ 1

Ilustração 44: Digitalização de atividade realizado por estudante

A atividade de número 6 traz ora como valor desconhecido o logaritmando, ora o logaritmo. Mais uma vez, o estudante tem que recorrer à notação de potência para perceber que o logaritmando é o resultado da potência correspondente ao logaritmo.

06) Calcule o valor que falta em cada expressão:

a) $\log_2 \square = 5$ b) $3 = \log_4 \square$ c) $\log(\square + 1) = 2$

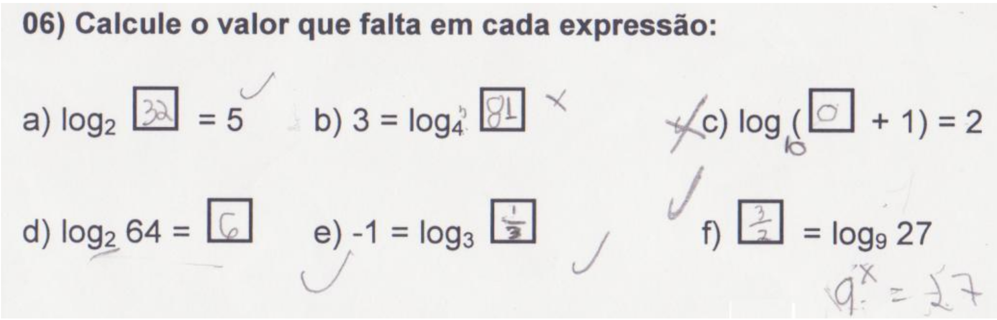
d) $\log_2 64 = \square$ e) $-1 = \log_3 \square$ f) $\square = \log_9 27$

Ilustração 45: Sexta atividade proposta na Folha de Exercícios

Os resultados foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	12	6
Cometeram algum erro	10	14

Dos estudantes que cometeram algum erro, dez erraram em apenas um item, sete erraram em dois itens e seis erraram três itens. Nesta atividade os erros foram muito variados.


06) Calcule o valor que falta em cada expressão:

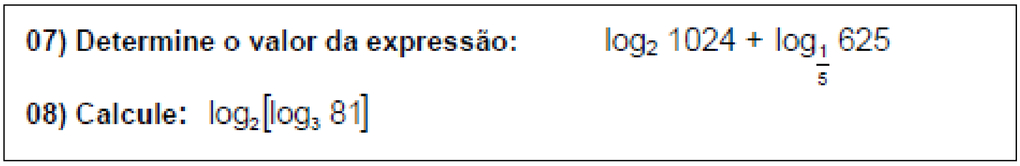
a) $\log_2 \boxed{32} = 5$ b) $3 = \log_4 \boxed{81}$ c) $\log_{10}(\boxed{0} + 1) = 2$

d) $\log_2 64 = \boxed{6}$ e) $-1 = \log_3 \boxed{\frac{1}{3}}$ f) $\boxed{\frac{3}{2}} = \log_9 27$

$9^x = 27$

Ilustração 46: Digitalização de atividade realizada por estudante

Finalizando a Folha de Exercícios, as atividades 7 e 8 trazem operações entre logaritmos. O estudante deve calcular cada um dos logaritmos e em seguida finalizar o exercício com as operações pedidas.


07) Determine o valor da expressão: $\log_2 1024 + \log_{\frac{1}{5}} 625$

08) Calcule: $\log_2[\log_3 81]$

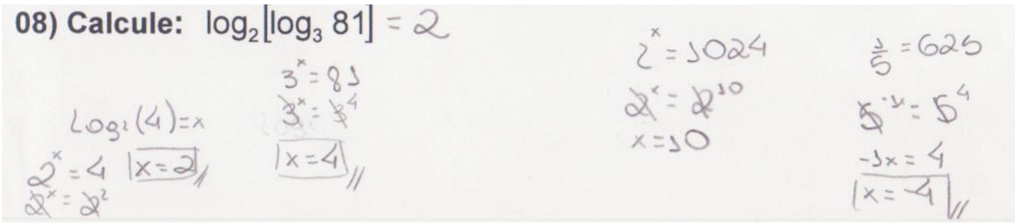
Ilustração 47: Sétima e oitava atividades propostas na Folha de Exercícios

Seguem os resultados desta atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	16
Cometeram algum erro	1	4

Três estudantes não fizeram a atividade e dois erraram no cálculo do logaritmo que envolve fração.

Abaixo temos a atividade resolvida por um estudante.


08) Calcule: $\log_2[\log_3 81] = 2$

$\log_2(4)=x$

$2^x=4$ $\boxed{x=2}$

$2^x=2^2$

$3^x=81$

$3^x=3^4$

$\boxed{x=4}$

$2^x=1024$

$2^x=2^{10}$

$x=10$

$\frac{1}{5}=625$

$5^{-x}=5^4$

$-1x=4$

$\boxed{x=-4}$

Ilustração 48: Digitalização de atividade realizada por estudante

7.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 3

O objetivo desta folha de exercícios é fazer com que o estudante explore de todas as maneiras possíveis o logaritmo e sua notação. O estudante deve usar o logaritmo de forma natural, assim como faz com frações, potências, raízes, etc. Consideramos através dos resultados apresentados que o objetivo foi alcançado, pois foram cometidos erros em itens isolados em cada problema em uma proporção já esperada.

CAPÍTULO 8

Descrição e análise do momento 4 da sequência didática

8.1 INTRODUÇÃO

Após a aplicação das Folhas de Atividades 1 e 2 e da Folha de Exercícios, o momento 4 da sequência didática propõe uma pequena pausa nas atividades, para que o professor, juntamente com os estudantes, façam comentários e observações sobre as atividades aplicadas, o conceito de logaritmo e se necessário, a correção das atividades propostas na Folha de Exercícios. Este é um momento de avaliação propício para constatar se os estudantes estão se adaptando bem às atividades e para fazer correção das mesmas se necessário.

Esse momento da sequência didática se deu no dia 22/09/2009 para as duas classes e estavam presentes os 42 estudantes. A atividade durou aproximadamente 50 minutos.

8.2 DESCRIÇÃO DO MOMENTO 4

Nesse momento, com uma aula expositiva, comentamos brevemente como surgiram os logaritmos, retomando a Folha de Atividades 1. Falamos sobre a definição, salientando a condição de existência dos logaritmos, que está na Folha de Atividades 2 e retomamos também as propriedades encontradas nas regularidades no final da Folha de Atividades 2. Essas observações foram colocadas na lousa e os estudantes anotaram todas.

Comentamos as atividades da Folha de Exercícios. A reação dos estudantes foi positiva e um dos poucos questionamentos feitos por eles foi que os logaritmos que envolviam frações eram um pouco mais trabalhosos. Além disso, outra questão levantada pelos estudantes foi a facilidade de realizar cálculos com as tabelas.

CAPÍTULO 9

Descrição e análise do momento 5 da sequência didática

9.1 INTRODUÇÃO

Nessa etapa da sequência didática elaboramos a Folha de Atividades 3: *“Uma propriedade importante”*. Nossa intenção é que o estudante, através do exame de regularidades e usando que o logaritmo é a inversa da exponencial, construa as propriedades operatórias dos logaritmos.

9.2 RESUMO DO MOMENTO 5

Iniciamos com o fato de que, como o logaritmo tem ação inversa à exponencial, seguindo a lógica as propriedades do logaritmo também serão inversas à da exponencial. Com esse princípio, e com apoio do exame de regularidades, apresentamos as propriedades operatórias dos logaritmos através de quadros explicativos. Além desses quadros propomos atividades em que o estudante precisa usar a propriedade estudada.

As atividades foram aplicadas no dia 28/09/2009, havia nas duas classes 42 estudantes totalizando 21 grupos. A atividade durou aproximadamente 50 minutos.

9.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Nessa Folha de Atividades as explicações são claras e direcionadas. Esperamos que os estudantes não encontrem grandes dificuldades.

9.4 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DO MOMENTO 5

Nesta folha, as atividades têm início relembrando a propriedade da exponencial que transforma a soma de expoentes de uma potência em multiplicação de potências de mesma base. A intenção é mostrar que, como o logaritmo tem ação inversa à da exponencial, logicamente, o logaritmo também deve ter propriedade semelhante à da exponencial.

ATIVIDADE 1:

QUANDO TRABALHAMOS COM AS PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL, VIMOS QUE $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, ENTÃO TEMOS A SEGUINTE REGRA:

A exponencial de uma soma é o produto das exponenciais.

Seguindo a lógica, o logaritmo deve ter uma propriedade semelhante, mas ao contrário, do tipo:

O logaritmo do produto é a soma dos logaritmos.

Vamos verificar?

Ilustração 49: Texto explicativo da Folha de Atividades 3

Apresentamos em seguida um quadro explicativo regularidades para chegar à propriedade do logaritmo do produto. No início, temos o logaritmo de um produto com os números 2048 e 256 já usados na primeira tabela de PG e PA estudada na Folha de Atividades 1. Usando flechas com explicações, a atividade fatora os números que estão em forma de produto, usa a propriedade da exponencial citada no início, e transforma o logaritmo de um produto em soma de logaritmos.

$\log_2(2048 \times 256) \xrightarrow{\text{Fatorando o 2048 e o 256 temos}} \log_2(2^{11} \times 2^8)$

$\log_2(2^{11} \times 2^8) \xrightarrow{\text{Usando propriedades de potência}} \log_2(2^{11+8})$

$\log_2(2^{11+8}) \xrightarrow{\text{Calculando esse log, temos}} 11 + 8$

$\xrightarrow{\text{Sabemos que}}$ $11 = \log_2 2^{11}$ e $8 = \log_2 2^8$

$11 + 8 = \log_2 2^{11} + \log_2 2^8 = \log_2 2048 + \log_2 256$

$$\log_2(2048 \times 256) = \log_2 2048 + \log_2 256$$

NUMA MESMA BASE, O <u>LOGARITMO DO PRODUTO</u> DE DOIS NÚMEROS POSITIVOS <u>É IGUAL À SOMA DOS LOGARITMOS</u> DESSES NÚMEROS.

Ilustração 50: Esquema explicativo na Folha de Atividades 3

A seguir propomos ao estudante atividades para que ele siga o mesmo raciocínio, usando, além de logaritmos de base 2, logaritmos de base 3.

Faça o mesmo para:

$\log_2(512 \times 32) = \log_2(2^9 \times 2^5) = \log_2(2^{9+5}) = 9 + 5 = \log_2(2^9) + \log_2(2^5) = \log_2(512) + \log_2(32)$
$\log_2(128 \times 4096) =$ ____
$\log_3(81 \times 27) =$ ____

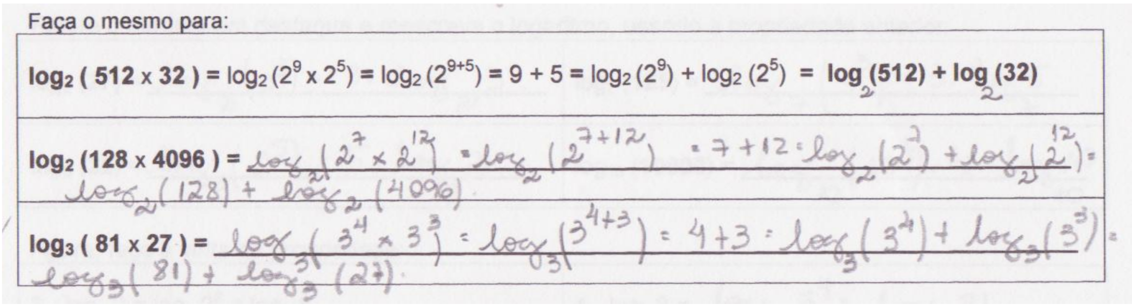
Ilustração 51: Primeira atividade proposta na Folha de Atividades 3

Seguem os resultados dessa atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	20	18
Cometeram algum erro	2	2

Dois estudantes não fizeram a atividade. Um dos estudantes, de uma hora para outra sumiu com a notação *log* e errou a atividade toda. Outro estudante, provavelmente por falta de atenção, estava olhando o exemplo e usou os mesmos expoentes, e com isso errou a atividade.

Temos abaixo a atividade resolvida por um estudante.

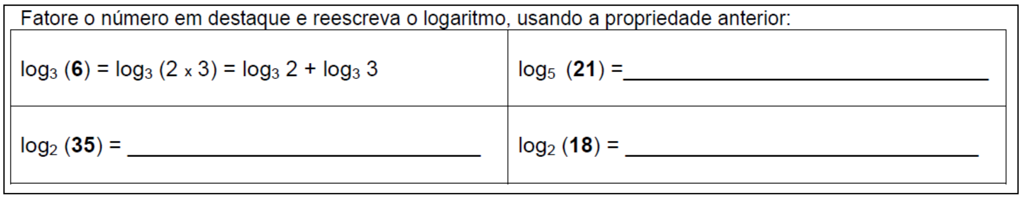


Faça o mesmo para:

$\log_2(512 \times 32) = \log_2(2^9 \times 2^5) = \log_2(2^{9+5}) = 9 + 5 = \log_2(2^9) + \log_2(2^5) = \log_2(512) + \log_2(32)$
$\log_2(128 \times 4096) = \log_2(2^7 \times 2^{12}) = \log_2(2^{7+12}) = 7 + 12 = \log_2(2^7) + \log_2(2^{12}) = \log_2(128) + \log_2(4096)$
$\log_3(81 \times 27) = \log_3(3^4 \times 3^3) = \log_3(3^{4+3}) = 4 + 3 = \log_3(3^4) + \log_3(3^3) = \log_3(81) + \log_3(27)$

Ilustração 52: Digitalização de atividade resolvida por estudante

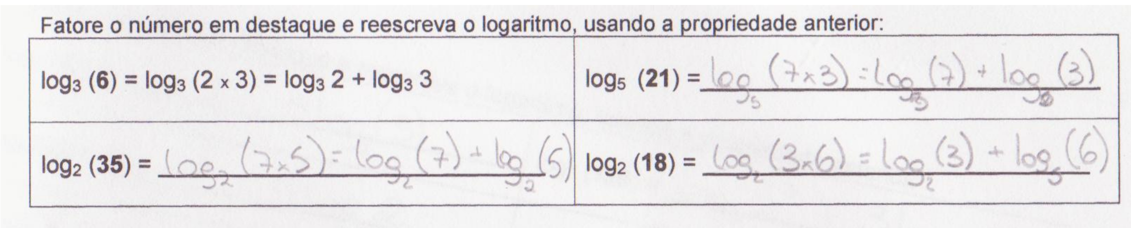
Outras atividades são propostas sugerindo que o estudante fatore os logaritmandos e aplique a propriedade.



Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_3(\mathbf{6}) = \log_3(2 \times 3) = \log_3 2 + \log_3 3$	$\log_5(\mathbf{21}) =$ ____
$\log_2(\mathbf{35}) =$ ____	$\log_2(\mathbf{18}) =$ ____

Ilustração 53: Segunda atividade proposta na Folha de Atividades 3



Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_3(\mathbf{6}) = \log_3(2 \times 3) = \log_3 2 + \log_3 3$	$\log_5(\mathbf{21}) = \log_5(7 \times 3) = \log_5(7) + \log_5(3)$
$\log_2(\mathbf{35}) = \log_2(7 \times 5) = \log_2(7) + \log_2(5)$	$\log_2(\mathbf{18}) = \log_2(3 \times 6) = \log_2(3) + \log_2(6)$

Ilustração 54: Digitalização de atividade resolvida por estudante

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	22	17
Cometeram algum erro	0	3

Um dos estudantes não fez a atividade, um não fez um dos itens e o outro errou em dois dos três itens. Os estudantes não pediram ajuda nesta atividade.

Em seguida propomos problemas com a mesma propriedade, mas da forma inversa. O estudante precisa transformar somas de logaritmos em logaritmo do produto. Propomos essa atividade com a intenção de que o estudante perceba que pode usar a propriedade em várias formas.

Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a soma em multiplicação, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 + \log_2 2 = \log_2 (5 \times 2) = \log_2 (\mathbf{10})$	$\log_4 5 + \log_4 3 =$ ____________
$\log_3 7 + \log_3 2 =$ ____________	$\log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 5 =$ ____________

Ilustração 55: Terceira atividade proposta na Folha de Atividades 3

Abaixo temos a atividade resolvida por um estudante.

Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a soma em multiplicação, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 + \log_2 2 = \log_2 (5 \times 2) = \log_2 (\mathbf{10})$	$\log_4 5 + \log_4 3 = \log_4 (5 \times 3) = \log_4 (15)$
$\log_3 7 + \log_3 2 = \log_3 (7 \times 2) = \log_3 (14)$	$\log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 (3 . 3 . 5) = \log_2 (45)$

Ilustração 56: Digitalização de atividade resolvida por estudante

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	22	17
Cometeram algum erro	0	3

Um dos estudantes errou na multiplicação de $3 \times 3 \times 5$, os outros dois não fizeram a atividade. Como já era esperado, os estudantes desenvolveram a atividade sem maiores problemas.

Dando continuidade à Folha de Atividades 3, neste momento é abordada a propriedade que transforma o logaritmo do quociente em subtração de logaritmos. Inicialmente falamos da propriedade da exponencial que transforma a subtração de expoentes em um quociente de bases iguais, já conhecida dos estudantes. Usando novamente o fato de que o logaritmo tem ação inversa à da exponencial apresentamos a propriedade.

ATIVIDADE 2 :

QUANDO TRABALHAMOS COM AS PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL, VIMOS QUE $a^{x-y} = a^x / a^y$, ENTÃO TEMOS A SEGUINTE REGRA:

A exponencial de uma subtração é o quociente das exponenciais.

Seguindo a lógica novamente, o logaritmo deve ter uma propriedade semelhante, mas ao contrário, do tipo:

O logaritmo do quociente é a subtração dos logaritmos.

Vamos verificar?

Ilustração 57: Texto explicativo da Folha de Atividades 3

Um quadro explica como chegamos à propriedade e dá dois logaritmos para que o estudante faça a transformação em subtração.

$$\log_2\left(\frac{512}{32}\right) = \log_2\left(\frac{2^9}{2^5}\right) = \log_2(2^{9-5}) = 9-5 = \log_2(2^9) - \log_2(2^5) = \log_2(512) - \log_2(32)$$

$$\log_2\left(\frac{512}{32}\right) = \log_2(512) - \log_2(32)$$

$$\log_2\left(\frac{2048}{256}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\log_3\left(\frac{27}{6561}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

NUMA MESMA BASE, O **LOGARITMO DO QUOCIENTE** DE DOIS NÚMEROS POSITIVOS **É IGUAL À ____________ DOS LOGARITMOS** DESSES NÚMEROS.

Ilustração 58: Quarta atividade proposta na Folha de Atividades 3

Seguem os resultados dessa atividade:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	22	17
Cometeram algum erro	0	3

Três estudantes da classe 2 não fizeram esta atividade.

São propostas atividades em diversas bases para que o estudante se familiarize com a propriedade.

Usando a propriedade anterior, escreva os logaritmos em forma de subtração:

$\log_2 \left(\frac{1024}{128}\right) =$	$\log_3 \left(\frac{81}{243}\right) =$
$\log_5 \left(\frac{625}{5}\right) =$	$\log_{10} \left(\frac{1000}{3}\right) =$

Ilustração 59: Quinta atividade proposta na Folha de Atividades 3

Seguem os resultados dessa atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	17
Cometeram algum erro	1	3

O estudante da classe 1 não terminou um dos itens e os três estudantes da classe 2 não fizeram a atividade.

Usando a propriedade anterior, escreva os logaritmos em forma de subtração:

$\log_2 \left(\frac{1024}{128}\right) = \log_2(1024) - \log_2(128)$	$\log_3 \left(\frac{81}{243}\right) = \log_3(81) - \log_3(243)$
$\log_5 \left(\frac{625}{5}\right) = \log_5(625) - \log_5(5)$	$\log \left(\frac{1000}{3}\right) = \log(1000) - \log(3)$

Ilustração 60: Digitalização de atividade realizada por estudante

Depois são propostas atividades que exploram a mesma propriedade, mas de forma inversa, ou seja, transformar subtração de logaritmos em logaritmo do quociente.

Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a subtração em divisão, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 - \log_2 3 =$ ____________________	$\log_5 10 - \log_5 2 =$ ____________________
$\log_3 20 - \log_3 5 =$ ____________________	$\log_2 26 - \log_2 3 =$

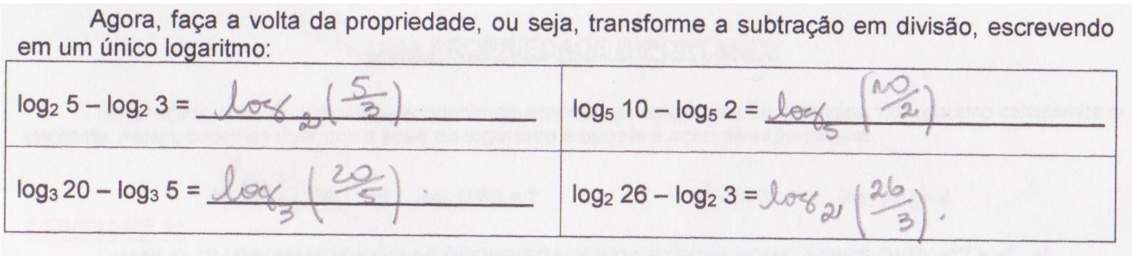
Ilustração 61: Sexta atividade proposta na Folha de Atividades 3

Os resultados foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	18	20
Cometeram algum erro	4	0

Os estudantes que erraram essa atividade subtraíram os logaritmandos ao invés de transformar as expressões em quocientes.

Temos abaixo atividade resolvida por um estudante.


Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a subtração em divisão, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{5}{3}\right)$	$\log_5 10 - \log_5 2 = \log_5\left(\frac{10}{2}\right)$
$\log_3 20 - \log_3 5 = \log_3\left(\frac{20}{5}\right)$	$\log_2 26 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{26}{3}\right)$

Ilustração 62: Digitalização de atividade resolvida por estudante

Após essas atividades, trabalhamos com logaritmos que envolvem potências. A atividade mostra o que acontece com o cálculo de logaritmos quando se tem no logaritmando uma potência. Um quadro explicativo mostra a propriedade do logaritmo de uma potência, usando uma das propriedades já vistas, a que transforma o logaritmo de um produto em soma de logaritmos. Nesse quadro mostramos de maneira simples que o logaritmo de uma potência é igual ao produto de seu expoente pelo logaritmo da base.

ATIVIDADE 3:

VAMOS TRABALHAR AGORA COM POTÊNCIAS:

$$\log_2 8^5 = \log_2 (8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8) = \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 = 5 \times \log_2 8$$

$$\log_2 8^5 = 5 \times \log_2 8$$

NUMA MESMA BASE, O LOGARITMO DE UMA POTÊNCIA DE BASE POSITIVA É IGUAL AO PRODUTO DO EXPOENTE PELO LOGARTIMO DA BASE DA POTÊNCIA.

Ilustração 63: Esquema explicativo da Folha de Atividades 3

Em seguida são propostas algumas atividades para que o estudante se familiarize com esta propriedade. Temos exemplos e atividades que envolvem também logaritmos de raízes, pois os estudantes já sabem que as raízes são potências com expoentes fracionários.

Faça o mesmo para:

$\log_2 32^3 =$ ____________________

$\log_5 125^2 =$ ____________________

$\log_2 \sqrt[5]{16} = \log_2 16^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}.\log_2 16$

$\log_2 \sqrt[3]{256} =$ ____________________

$\log_7 \sqrt{343} =$ ____________________

Ilustração 64: Sétima atividade proposta na Folha de Atividades 3

Seguem os resultados da atividade:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	20	17
Cometeram algum erro	2	3

Os estudantes erraram nos logaritmos que envolviam raízes, eles colocaram que $\log_2 \sqrt[3]{256} = 3 \times \log_2 256$, quando o correto seria $\log_2 \sqrt[3]{256} = \frac{1}{3} \times \log_2 256$.

Apresentamos abaixo a atividade resolvida por um estudante.

Faça o mesmo para:

$\log_2 32^3 =$ $3 \times \log_2 32$
$\log_5 125^2 =$ $2 \times \log_5 125$
Exemplo: $\log_2 \sqrt[5]{16} = \log_2 16^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}.\log_2 16$
$\log_2 \sqrt[3]{256} =$ $\log_2 256^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 256$
$\log_7 \sqrt{343} =$ $\log_7 343^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_7 343$

Ilustração 65: Digitalização de atividade resolvida por estudante

A seguir são propostas atividades em que o estudante não tem o logaritmando em forma de potência. Ele precisa transformá-lo em potência para depois utilizar a propriedade.

Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_2$ (**27**) = ______________________________	$\log_7$ (**125**) = ____________________________
$\log_3$ (**32**) = _____________________________	$\log_{10}$ (**10000**) = __________________________

Ilustração 66: Oitava atividade proposta na Folha de Atividades 3

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	17	19
Cometeram algum erro	5	1

Três estudantes não fizeram essa atividade, um se esqueceu de colocar o expoente multiplicando o logaritmo e dois colocaram o expoente multiplicando o logaritmo, mas não alteraram o logaritmando, $\log_2 27 = 3 \times \log_2 27$ ao invés de $\log_2 27 = 3 \times \log_2 3$.

Abaixo temos a atividade realizada por um estudante.

Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_2 (\mathbf{27}) = 3 \times \log_2 (27)$	$\log_7 (\mathbf{125}) = 5 \times \log_7 3$
$\log_3 (\mathbf{32}) = \log_3 (2^5) = 5 \times \log_3 2$	$\log_{10} (\mathbf{10000}) = 4 \times \log_{10} (10)$

Ilustração 67: Digitalização de atividade resolvida por estudante

Exploramos também a mesma propriedade, mas de forma inversa, ou seja, a transformação do produto de um número real por um logaritmo em logaritmo de uma potência.

Agora, faça a volta da propriedade:

$3 \times \log_5 2 = \log_5 2^3 = \log_5 8$	$4 \times \log_2 3 =$ ____________________
$2 \times \log_5 4 =$ ____________________	$5 \times \log_{10} 2 =$ ____________________

Ilustração 68: Nona atividade proposta na Folha de Atividades 3

Os resultados seguem abaixo:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	20
Cometeram algum erro	1	0

O estudante fez apenas um dos três itens propostos.

Em todas as propriedades vistas até esse momento na Folha de Atividades 3, nas definições que são dadas ao final de cada quadro explicativo, deixamos claro que para que as propriedades sejam válidas é necessário que os logaritmos tenham a mesma base. A última parte desta folha de atividades, explica como fazer quando é necessário trabalhar com logaritmos de outras bases, ou seja, como transformar bases de logaritmos, quando necessário. Para isso temos outro quadro que explica como e porque é possível transformar bases de logaritmos.

Inicialmente temos três logaritmos resolvidos: o logaritmo de 64 na base quatro, cujo resultado é 3, o logaritmo de 64 na base dois, cujo resultado é seis e o logaritmo de 4 na base dois, cujo resultado é dois. Temos uma igualdade mostrando que 3 é igual a 6 dividido por 2. Usando essa igualdade esses resultados são substituídos pelos logaritmos correspondentes. Assim o logaritmo de 64 na base 4 é igual ao quociente do logaritmo de 64 na base 2 pelo logaritmo de 4 na base 2. Com isso podemos escrever um logaritmo de base 4 usando logaritmos de base 2.

ATIVIDADE4:

AS PROPRIEDADES QUE VIMOS ACIMA SÃO VÁLIDAS PARA LOGARTIMOS DE MESMA BASE. E QUANDO TEMOS BASES DIFERENTES?

Observe:

$\log_4 64 = 3$

$\log_2 64 = 6 \quad \longrightarrow \quad 3 = \frac{6}{2} \rightarrow \quad \log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4}$

$\log_2 4 = 2$

QUANDO FOR NECESSÁRIO É POSSÍVEL ESCREVER UM LOGARITMO EM UMA OUTRA BASE QUALQUER.

$$\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4} \qquad \log_5 125 = \frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 5}$$

Ilustração 69: Esquema explicativo da Folha de Atividades 3

Para finalizar são propostas algumas atividades de mudança de base em que os estudantes devem mudar logaritmos de diversas bases para uma base determinada.

Escreva os logaritmos a seguir na base 10:

a) $\log_3 81 = \frac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3}$ b) $\log_7 243 =$ c) $\log_5 3125 =$

Escreva os logaritmos a seguir na base 2:

d) $\log_{10} 32 =$ e) $\log_6 128 =$ f) $\log_{10} 2 =$

Após o estudo dessas propriedades, nas próximas atividades, estudaremos o logaritmo como função.

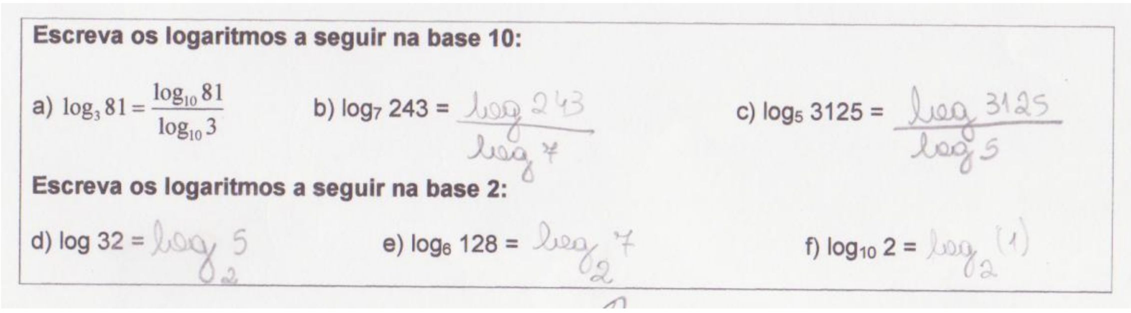
Ilustração 70: Décima atividade proposta na Folha de Atividades 3

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	16
Cometeram algum erro	1	4

Dois estudantes entenderam que era para escrever um logaritmo qualquer de base dois, usando o mesmo logaritmando e não mudar a base. Um estudante não fez um dos 5 itens. E dois estudantes escreveram que $\log 32 = \log_2 5$, que $\log_6 128 = \log_2 7$ *e que* $\log_{10} 2 = \log_2 1$, o que está errado.

Abaixo temos a atividade resolvida por um estudante.



Escreva os logaritmos a seguir na base 10:

a) $\log_3 81 = \frac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3}$ b) $\log_7 243 = \frac{\log 243}{\log 7}$ c) $\log_5 3125 = \frac{\log 3125}{\log 5}$

Escreva os logaritmos a seguir na base 2:

d) $\log 32 = \log_2 5$ e) $\log_6 128 = \log_2 7$ f) $\log_{10} 2 = \log_2 (1)$

Ilustração 71: Digitalização de atividade realizada por estudante

9.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 5

Na Folha de Atividades 3, trabalhamos com a propriedade fundamental dos logaritmos e propriedades relacionadas. Para justificar essas propriedades utilizamos as propriedades correspondentes das funções exponenciais. O estudante também pode perceber essas propriedades através de regularidades que aparecem nos exercícios propostos. Falamos também sobre mudança de base de logaritmos.

Na aplicação da Folha de Atividades 3, os estudantes trabalharam sem maiores problemas, não tiveram dúvidas e praticamente não solicitaram ajuda da professora. Os erros cometidos ocorreram em itens específicos das questões, e as maiores dificuldades aconteceram nos casos em que o logaritmo era negativo com frações na base ou no logaritmando, ou quando apareciam expoentes fracionários.

Concluímos que essa atividade alcançou os objetivos que havíamos previsto.

CAPÍTULO 10

Descrição e análise do momento 6 da sequência didática

10.1 INTRODUÇÃO

No momento 6 da sequência didática pretendemos introduzir o conceito de função logarítmica, estendendo a definição de logaritmo para números reais positivos quaisquer. Os principais pré-requisitos exigidos são o conceito de função inversa e o de função exponencial que os estudantes já viram.

Na Folha de Atividades 3 todas as propriedades operatórias tiveram como introdução a propriedade correspondente da exponencial, que era abordada para que o estudante percebesse que no logaritmo temos propriedade semelhante só que inversa à da exponencial. Nessa aula explicativa fazemos o mesmo, ou seja, definimos a função logarítmica como inversa da função exponencial e mostramos que, a partir daí, temos todas as propriedades e características da primeira.

Neste momento da sequência didática usamos como base o livro didático adotado na escola em que foi aplicado o projeto, *MATEMÁTICA- construção e significado (volume único), José Luiz Pastore (et al) da Editora Moderna*. Achamos importante usar atividades do livro texto para que os estudantes não percam contato com ele e se familiarizem com o estilo do autor, pois o livro texto é utilizado durante todo o ano. Na aula, além do livro, de papel quadriculado e da lousa planejamos usar o computador com projetor multimídia para plotar alguns gráficos de funções logarítmicas, com o auxílio do software *Graphmática* (software de domínio público, desenvolvido por Keith Hertzer, com tradução de Carlos Malaca, para a língua portuguesa. Este software pode ser obtido no site http://www.graphmatica.com) para melhor explorar as características da função logarítmica.

10.2 RESUMO DO MOMENTO 6

Nessa aula expositiva pretendemos desenhar alguns gráficos na lousa para explorar as características da função logarítmica, sempre tendo como base que ela é a inversa da função exponencial. Usaremos ainda um programa para plotar diversos gráficos de logaritmos para que os estudantes percebam os diversos tipos dessas funções. Após a aula, os estudantes farão os exercícios propostos no livro didático adotado pela escola e em seguida faremos a correção dessas soluções.

10.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Como os estudantes já trabalharam com função inversa e função exponencial, pensamos que não terão grandes dificuldades. Talvez cometam pequenos erros na construção da tabela para a confecção dos gráficos da função logarítmica, já que estão acostumados a trabalhar com domínio real nas funções.

10.4 DESCRIÇÃO DO MOMENTO 6

Aplicamos o momento 6 da sequência didática nos dias 01, 05 e 07/10/2009 para as duas classes, a maioria dos alunos esteve presente. A duração das atividades foi de 3 aulas de 50 minutos cada.

Para dar início à aula explicativa, questionamos os estudantes sobre a função exponencial $f(x) = 2^x$. Fizemos na lousa o gráfico dessa função, que já era conhecida dos estudantes. Para construir o gráfico, montamos uma tabela auxiliar. Desenhado o gráfico da função, perguntamos aos estudantes qual o domínio e a imagem da função, se é crescente ou decrescente, se existia assíntota e demais características vistas anteriormente.

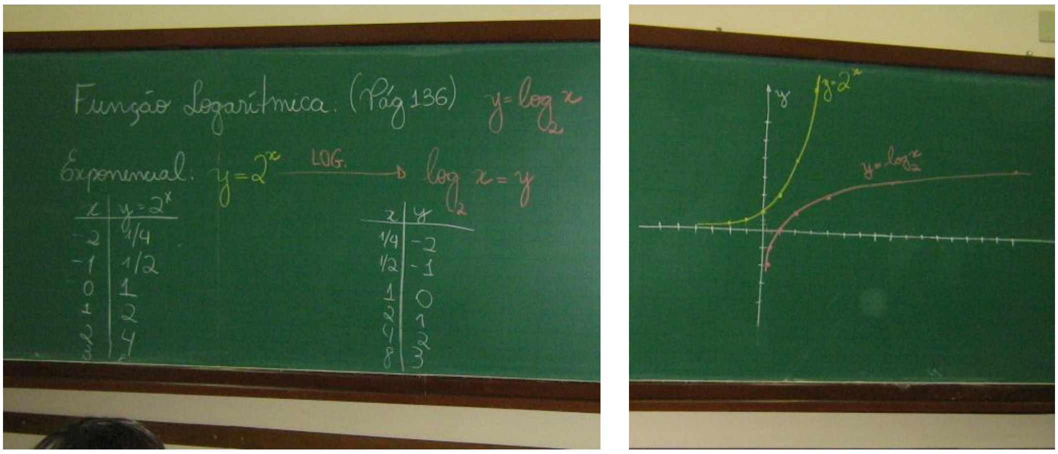


Foto 4: Lousa da aula expositiva sobre Função Logarítmica

Os estudantes já viram o conceito de função inversa e, na Folha de Atividades 3, trabalhamos com o logaritmo como inversa da exponencial. Usando isso observamos aos estudantes que através da inversão da tabela construída para a função $f(x) = 2^x$, obteríamos o gráfico da função logarítmica $y = \log_2 x$. Com o gráfico da função logarítmica construído, questionamos os estudantes quanto ao domínio, imagem, crescimento e assíntota do gráfico. Anotamos ao lado do gráfico as respostas dadas pelos estudantes. Enquanto o gráfico era construído pelo professor na lousa, os estudantes o construíam no papel quadriculado. Observando que tanto a função exponencial quanto a sua inversa são crescentes, questionamos qual delas cresce mais rapidamente.

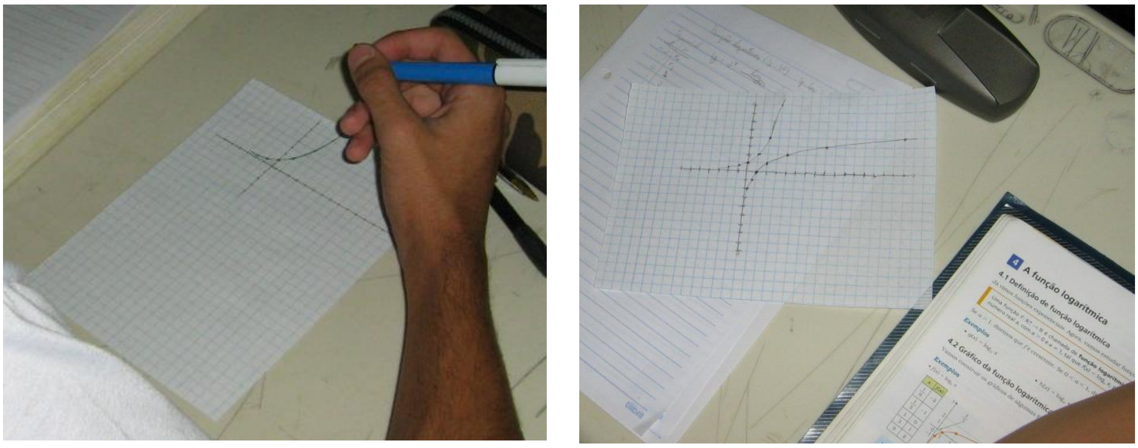


Foto 5: Gráficos confeccionados pelos estudantes

Além da construção feita pelos estudantes, usamos o projetor multimídia com o software G*raphmática* para plotar alguns gráficos de funções logarítmicas diversas para que os estudantes verifiquem modificações no domínio, na assíntota, etc. Os gráficos feitos nessa parte da aula foram os das funções $y = \log(x+1)$, $y = 1 + \log x$, $y = 2 \cdot \log x$.

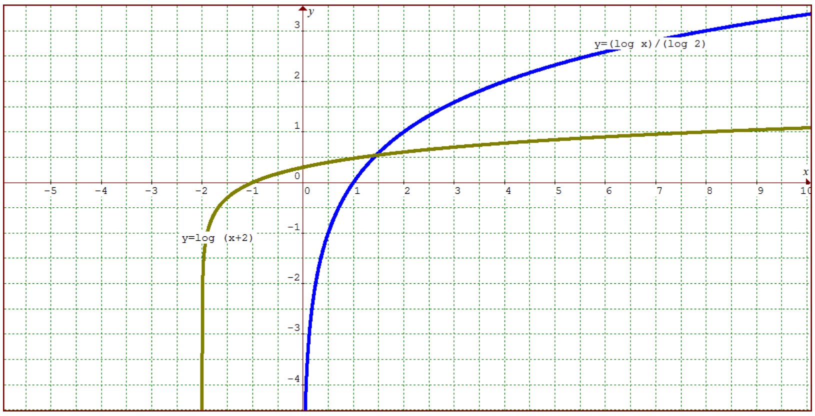


Ilustração 72: Gráfico trabalhado na aula expositiva com projetor multimídia e software *Graphmática*

Abaixo temos uma foto com uma das atividades apresentadas no software Graphmática.

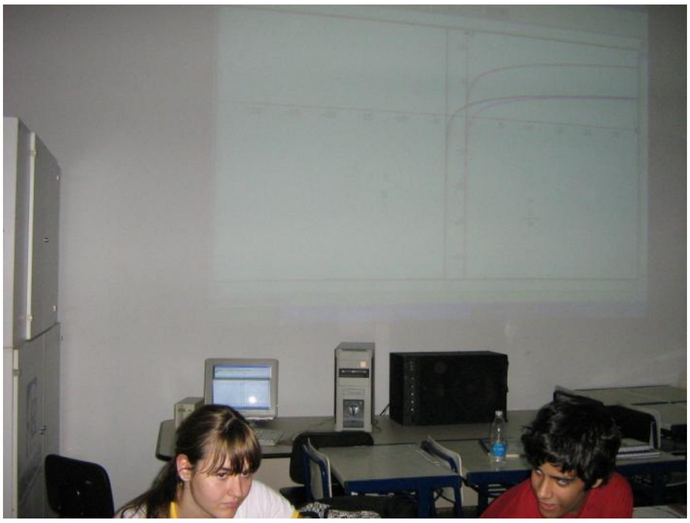
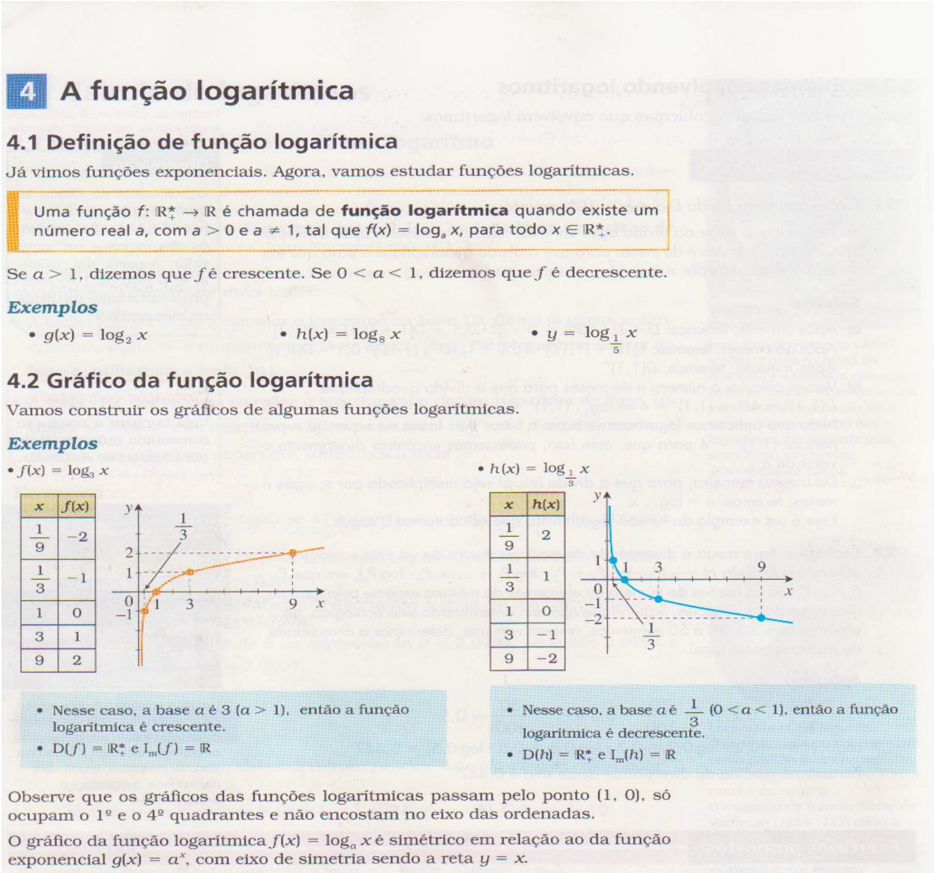


Foto 6: Projeção de gráficos da aula expositiva sobre Função Logarítmica

Após essa observação, trabalhamos com a leitura do livro didático para fazer as devidas correspondências com a construção anterior, ver a definição da função logarítmica dada pelo autor, exemplos de funções em outras bases e seus gráficos. Dessa forma os estudantes puderam explorar mais a função logarítmica. Vemos abaixo um trecho do livro didático utilizado.



4 A função logarítmica

4.1 Definição de função logarítmica

Já vimos funções exponenciais. Agora, vamos estudar funções logarítmicas.

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **função logarítmica** quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \log_a x$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Se $a > 1$, dizemos que f é crescente. Se $0 < a < 1$, dizemos que f é decrescente.

Exemplos

- $g(x) = \log_2 x$
- $h(x) = \log_8 x$
- $y = \log_{\frac{1}{5}} x$

4.2 Gráfico da função logarítmica

Vamos construir os gráficos de algumas funções logarítmicas.

Exemplos

- $f(x) = \log_3 x$

x	$f(x)$
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2

- Nesse caso, a base a é 3 ($a > 1$), então a função logarítmica é crescente.
- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $I_m(f) = \mathbb{R}$

- $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$h(x)$
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2

- Nesse caso, a base a é $\frac{1}{3}$ ($0 < a < 1$), então a função logarítmica é decrescente.
- $D(h) = \mathbb{R}_+^*$ e $I_m(h) = \mathbb{R}$

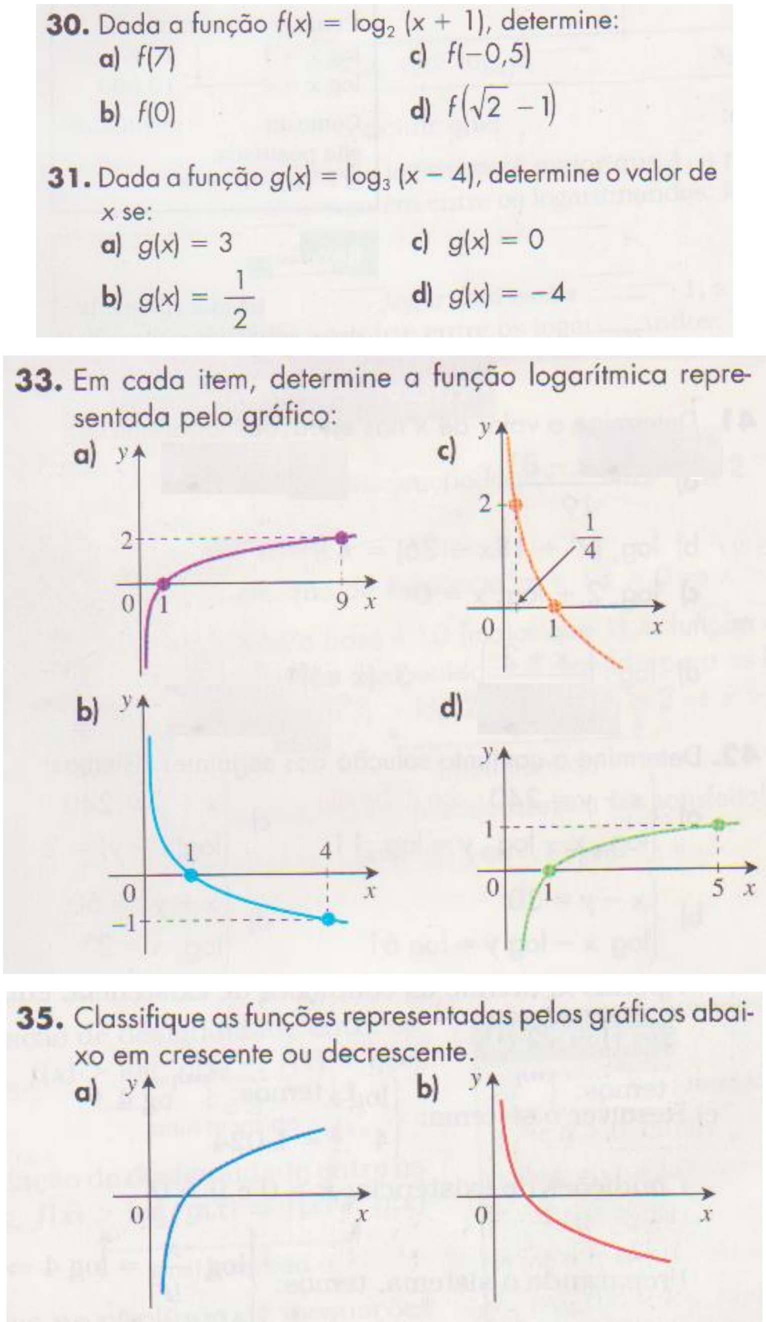
Observe que os gráficos das funções logarítmicas passam pelo ponto (1, 0), só ocupam o 1º e o 4º quadrantes e não encostam no eixo das ordenadas.

O gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é simétrico em relação ao da função exponencial $g(x) = a^x$, com eixo de simetria sendo a reta $y = x$.

Ilustração 73: Trecho do livro didático utilizado

Mostramos também outra maneira de construir o gráfico da função logarítmica, sem o uso da sua inversa. Para isso consideramos a função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e fizemos um a tabela. O gráfico foi feito a partir dessa tabela. Essa atividade foi muito legal, pois os estudantes perceberam que não era tão fácil fazer essa tabela. Quando colocaram $x = 3$, como calcular $y = \log_{\frac{1}{2}} 3$? Viram então que é mais fácil atribuir primeiro valores para y.

Em seguida os estudantes fizeram exercícios do livro didático para trabalhar com o logaritmo como função. Os exercícios foram corrigidos posteriormente, na lousa. Os problemas do livro exploravam domínio, imagem, crescimento e alguns gráficos. Havia também problemas para que o estudante encontrasse a lei da função logarítmica correspondente através da identificação de pontos de um gráfico dado. Na figura seguinte, temos os exercícios trabalhados com os estudantes, extraídos do livro didático utilizado.



30. Dada a função $f(x) = \log_2 (x + 1)$, determine:

a) $f(7)$ c) $f(-0,5)$

b) $f(0)$ d) $f\left(\sqrt{2} - 1\right)$

31. Dada a função $g(x) = \log_3 (x - 4)$, determine o valor de x se:

a) $g(x) = 3$ c) $g(x) = 0$

b) $g(x) = \frac{1}{2}$ d) $g(x) = -4$

33. Em cada item, determine a função logarítmica representada pelo gráfico:

a) c)

b) d)

35. Classifique as funções representadas pelos gráficos abaixo em crescente ou decrescente.

a) b)

Ilustração 74: Digitalização de atividades propostas pelo livro didático

10.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 6

No momento 6 da sequência didática, exploramos o logaritmo como função através de sua inversa, a exponencial. Os estudantes viram todas suas características através da construção de gráficos e dos exercícios do livro didático.

As aulas transcorreram sem maiores problemas. Os estudantes pediram ajuda no problema que tinham que determinar a expressão das funções logarítmicas através da observação de seus gráficos.

Julgamos que os objetivos da aula foram alcançados, pois os estudantes fizeram as atividades propostas sem dificuldades e durante a correção dos exercícios poucas foram as dúvidas levantadas por eles.

Foto 7: Imagens da aula expositiva sobre Função Logarítmica

CAPÍTULO 11

Descrição e análise do momento 7 da sequência didática

11.1 INTRODUÇÃO

O uso de recursos tecnológicos na sala de aula como vídeos, áudios, computadores, calculadoras e outros não é mais novidade na educação. Contribui para a criação de novas estratégias de ensino. Ainda assim é necessário ter cuidado ao usá-los, pois tais recursos não podem ser meros enfeites em uma aula. Devem ser usados para que o estudante adquira as habilidades e competências necessárias para a sua formação.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio uma das competências e habilidades desenvolvidas pela Matemática é a de que o estudante utilize adequadamente calculadoras e computadores, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (Brasil, p. 259)

Neste momento da sequência didática, uma atividade simples, feita com o uso de uma planilha eletrônica, introduz o conceito do número *e*. O número *e (constante de Euler)* aparece naturalmente quando se estuda certos fenômenos cuja descrição demanda funções exponenciais e logarítmicas. Por isso é imprescindível falarmos do número *e* para os estudantes.

Além da atividade com o número *e* são propostos aos estudantes alguns exercícios do livro didático em que eles terão que usar uma calculadora científica.

O uso da calculadora ainda é questionado por alguns professores, pais e até pelos próprios estudantes, pois acham que seu uso fará com que não se raciocine mais. Mas usada de maneira correta e orientada a calculadora poupará tempo e energia em cálculos mecânicos e assim o estudante se dedica mais à situação problema que está resolvendo. Além disso, permite trabalhar com problemas reais, situações que na maioria das vezes envolvem números não exatos.

11.2 RESUMO DO MOMENTO 7

Este momento da sequência didática é dividido em duas aulas. A primeira aula tem uma atividade feita no laboratório de informática, com o uso de planilha eletrônica e um problema criado para que os estudantes desenvolvam uma situação em que tenham que estudar a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ atribuindo valores cada vez maiores a n e assim o professor possa falar sobre o número *e*. Na segunda aula os estudantes trabalharão com atividades do livro didático com o auxílio da calculadora científica.

11.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Talvez o estudante tenha alguma dificuldade ao usar a calculadora científica no cálculo de logaritmos com base diferente da base decimal ou da base natural, já que na calculadora só são encontradas essas bases. Na Folha de Atividades 3 eles já viram como mudar a base de um logaritmo. O professor pode ajudá-los caso eles não se lembrem.

11.4 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DO MOMENTO 7

Aula sobre o número *e*

Antes de dar início à aula, que aconteceu no dia 08/10/2009, mostramos aos estudantes como devemos proceder para trabalhar com fórmulas na planilha eletrônica utilizada na atividade. Os estudantes já tinham algum conhecimento sobre essa planilha, mas não sabiam trabalhar com fórmulas. Após orientá-los com os símbolos utilizados e o uso dos sinais na inserção de fórmulas a atividade se iniciou.

A atividade elaborada para introduzir o conceito de número *e* é bastante simples. Trazemos inicialmente um problema supondo que o estudante emprestou um real para um amigo e combinou com ele que no final do ano cobraria seu empréstimo com 100% de juros. No final do ano, seu amigo veio lhe pagar. O estudante faz o seguinte questionamento: Se eu cobrasse 50% no meio do ano e depois mais 50% no final do ano o que aconteceria? Essa pergunta é feita para que o estudante, ao realizar a atividade, perceba que ele ganhará mais se dividir os 100% dessa forma.

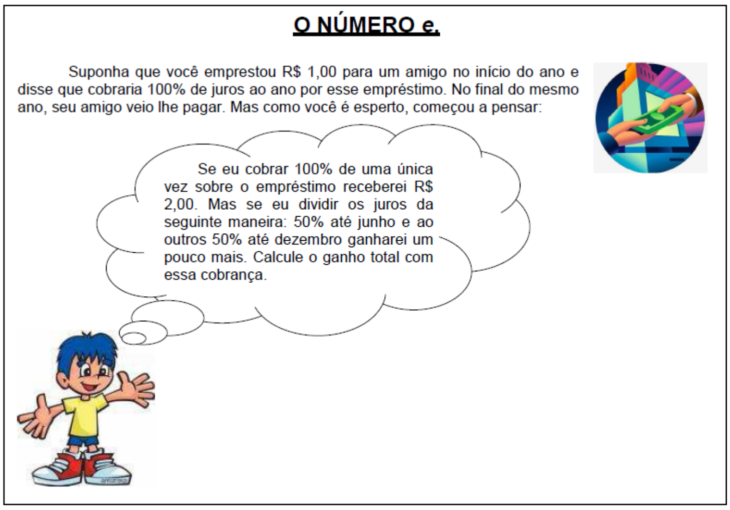


Ilustração 75: Primeira parte da atividade proposta na aula sobre o número *e*

Para realizar essa atividade os estudantes, com o auxílio da planilha eletrônica, calcularam o valor de $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$. Alguns estudantes fizeram o cálculo mentalmente. Eles perceberam que ganhariam mais se dividissem os juros dessa forma.

Continuando a atividade propomos outro cálculo ao estudante: e se eu dividir os 100% em quatro partes uma para cada trimestre, ou seja, cobrar juro de 25% a cada trimestre? O estudante deve efetuar os cálculos e verificar que ganhará mais ainda.

Ilustração 76: Segunda parte da atividade proposta na aula sobre o número *e*.

Os estudantes nessa atividade fizeram o seguinte cálculo $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44$. E perceberam que dessa forma, dividindo os 100% em 4 partes ganhariam mais.

Em seguida são propostos outros dois cálculos, dividir os 100% em 10 partes e depois em 100 partes para ver o que acontece.

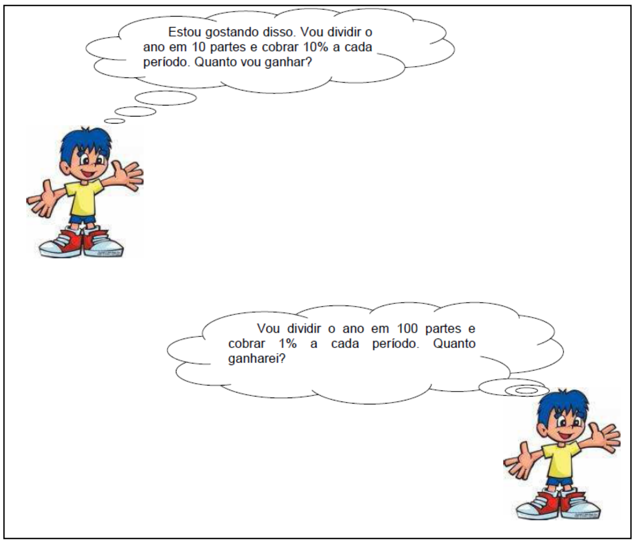


Ilustração 77: Terceira parte da atividade proposta na aula sobre o número *e*

Para fazer esse cálculo os estudantes usaram a seguinte fórmula: $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}50$

A intenção é despertar no estudante o interesse por essa quantia final e mostrar que ela vem da sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e que quanto maior o valor de *n*, mais próxima a sequência estará do número *e*.

Um dos estudantes me perguntou o que aconteceria se dividíssemos em 100 partes cobrando de um em um por cento, dissemos então para que eles fizessem o cálculo. Um dos estudantes perguntou se o valor iria sempre aumentar. Para responder a essa pergunta mostrei a eles uma planilha que havíamos feito atribuindo valores de 1 a 1000 para essa sequência e em seguida falamos sobre o número *e*.

Foto 8: Aula no laboratório de informática

A atividade termina com um pequeno texto explicativo sobre o número *e*.

Observe que conforme vamos aumentando o número de períodos, mais o valor recebido se aproxima de um certo número. Esse número é chamado número de Euler e representado pela letra **e**. Seu valor é $e \approx 2{,}7181818...$

Em muitas situações práticas, em diferentes contextos, deparamo-nos com o número **e**. Apesar de ser um número de aparência estranha – ele é irracional, como o π – sua presença é muito freqüente no estudo de fenômenos naturais que envolvem crescimento ou decrescimento exponencial.

O número **e**, além de ser base de importante funções exponenciais, ele também serve para a correspondente função logarítmica: se $y = e^x$, então $x = log_e\, y$.

A função $f(x) = log_e\, x$ costuma ser representada por $f(x) = \ell n\, x$, uma abreviatura para "*logaritmo natural de x* ".

Nos sistemas de logaritmos mais usados estão os logaritmos decimais (log x) e os logaritmos naturais (ℓn x).

Ilustração 78: Texto explicativo da atividade proposta na aula sobre o número *e*

Após os estudantes realizarem a leitura do texto, falamos um pouco sobre os logaritmos naturais.

Aula com a calculadora científica

A atividade proposta com a calculadora científica, realizada no dia 13/10/2009, é do livro didático utilizado pelos estudantes e traz cálculos de logaritmos decimais, logaritmos naturais e logaritmos em outras bases. Essa atividade incentiva o estudante usar o que aprendeu na Folha de Atividades 3 sobre mudança de base.

23. Utilizando uma calculadora científica, determine o valor aproximado de:

a) $\log 32$
b) $\log 0{,}012$
c) $\log 243$
d) $\log\sqrt{130}$
e) $\log_6 40$
f) $\log 0{,}8$

26. Com uma calculadora científica, determine o valor das expressões a seguir.

a) $\ln \dfrac{2}{\ln 2}$ b) $\dfrac{\log 900}{3}$ c) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{7}{8}}$

Ilustração 79: Trecho extraído do livro didático utilizado na aula com a calculadora

O estudante tem contato com a calculadora científica e percebe a facilidade que hoje em dia temos com esses recursos.

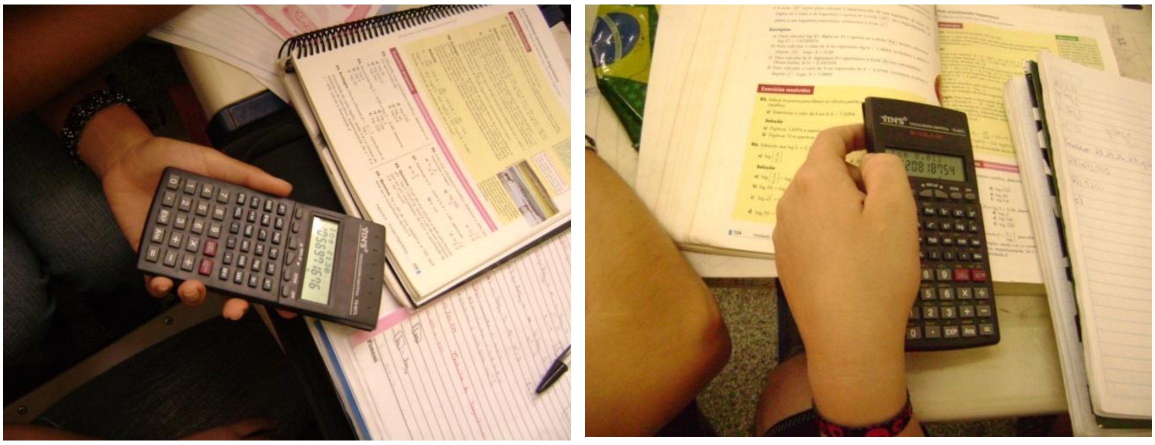


Foto 9: Estudantes trabalhando com a calculadora científica

Foto 10: Estudantes trabalhando com a calculadora científica

Os estudantes gostaram muito da atividade. Muitos deles tiveram ali o primeiro contato com uma calculadora científica.

11.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 7

O uso das tecnologias digitais é importante para que o estudante do Ensino Médio adquira habilidades de manusear os aparelhos e perceber que eles podem simplificar muitos problemas trabalhados na sala de aula.

Neste momento da sequência didática os estudantes, além de terem contato com a calculadora científica também aprenderam como surge o número *e* (constante de Euler). As atividades foram realizadas de maneira tranquila, mas os estudantes tiveram algumas dúvidas na aula sobre o uso da planilha eletrônica, não na atividade em si, mas na utilização de fórmulas na planilha eletrônica, pois eles nunca haviam feito isso até então.

Os estudantes ficaram bastante animados com o uso da calculadora científica, já que muitos não a haviam utilizado ainda e acharam um recurso excelente.

Concluímos que nossos objetivos foram alcançados neste momento da sequência didática, já que os estudantes solicitaram poucas vezes o auxílio da professora.

CAPÍTULO 12

Descrição e análise do momento 8 da sequência didática

12.1 INTRODUÇÃO

Trabalhando com a gênese histórica dos logaritmos, vimos que eles foram criados quando não existiam calculadoras. Mas hoje com os computadores e calculadoras existentes, qual a utilidade dos logaritmos? O objetivo desta Folha de Atividades: "*Para que servem os logaritmos?*" é mostrar algumas aplicações dos logaritmos na matemática e em outras áreas do conhecimento através do uso em escalas e na modelagem de fenômenos.

Aplicamos as atividades para as duas classes no dia 15/10/2009, para 42 estudantes totalizando 21 grupos. A atividade durou 2 aulas de 50 minutos cada.

12.2 RESUMO DO MOMENTO 8

Nesta Folha de Atividades iniciamos com um problema de representação gráfica de dados para mostrar ao estudante a utilidade da escala logarítmica. Depois um pequeno texto explica a criação e o funcionamento da escala Richter, usada em terremotos. São propostas atividades para que o estudante perceba a necessidade de se usar os logaritmos, já que a energia liberada por um terremoto tem um valor muito grande.

Temos ainda, nesta Folha de Atividades, a escala *pH*, usada em química e um fenômeno de crescimento modelado pela função logarítmica.

12.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Na Folha de Atividades 4, utilizada neste momento 8 da sequência didática, esperamos que os estudantes encontrem dificuldades na primeira atividade proposta, que é a representação gráfica de números em potências de dez. Além disso alguns estudantes podem encontrar dificuldades no item *f* da atividade que trabalha com a escala Richter, já que eles terão que fazer comparações de energia em unidades diferentes. Mesmo sabendo que terão que transformar as unidades podem ter alguma dificuldade.

12.4 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DO MOMENTO 8

Inicialmente apresentamos uma tabela com números que representam a quantidade de amigos em um grupo, a quantidade de formandos em uma escola, a quantidade de alunos de uma escola e assim por diante. Pedimos ao estudante que faça a representação gráfica dessa tabela.

PARA QUE SERVEM OS LOGARITMOS?

Vimos que o surgimento dos logaritmos estava diretamente relacionado com a simplificação de cálculos, nos séc. XVI e XVII, mas hoje com o avanço tecnológico de calculadoras e computadores, para que servem os logaritmos?

LOGARITMOS E ESCALAS: Essa é uma das aplicações do logaritmo.

Represente graficamente a situação descrita pela tabela abaixo:

Conjunto	Nº	Faça aqui o seu gráfico.
Um grupo de amigos	10	
Formandos de uma escola	100	
Estudantes de uma escola	1 000	
Pessoas de uma pequena cidade	10 000	
Habitantes de uma cidade	100 000	
Habitantes de uma região urbana	1 000 000	
Habitantes de um pequeno país	10 000 000	
Habitantes de um país	100 000 000	

Ilustração 80: Primeira atividade proposta na Folha de Atividades 4

O objetivo desta atividade é que o estudante sinta dificuldade em fazer a representação gráfica, já que aparecem números pequenos e números muito grandes, que são muito distantes entre si

Os resultados dessa atividade foram:

	Classe 1	Classe 2
Gráfico de barras	13	11
Gráfico cartesiano	6	6
Gráfico de setores	3	3

Nesta atividade os estudante usaram representações diferentes para a mesma situação. Conforme o esperado não conseguiram desenhar a representação na escala real. Nos gráficos construídos eles dispuseram esses números no eixo, mantendo o mesmo espaço entre eles. Não se preocuparam com esse detalhe, ou seja, já usaram a ideia da escala logarítmica, mesmo antes de conhecê-la.

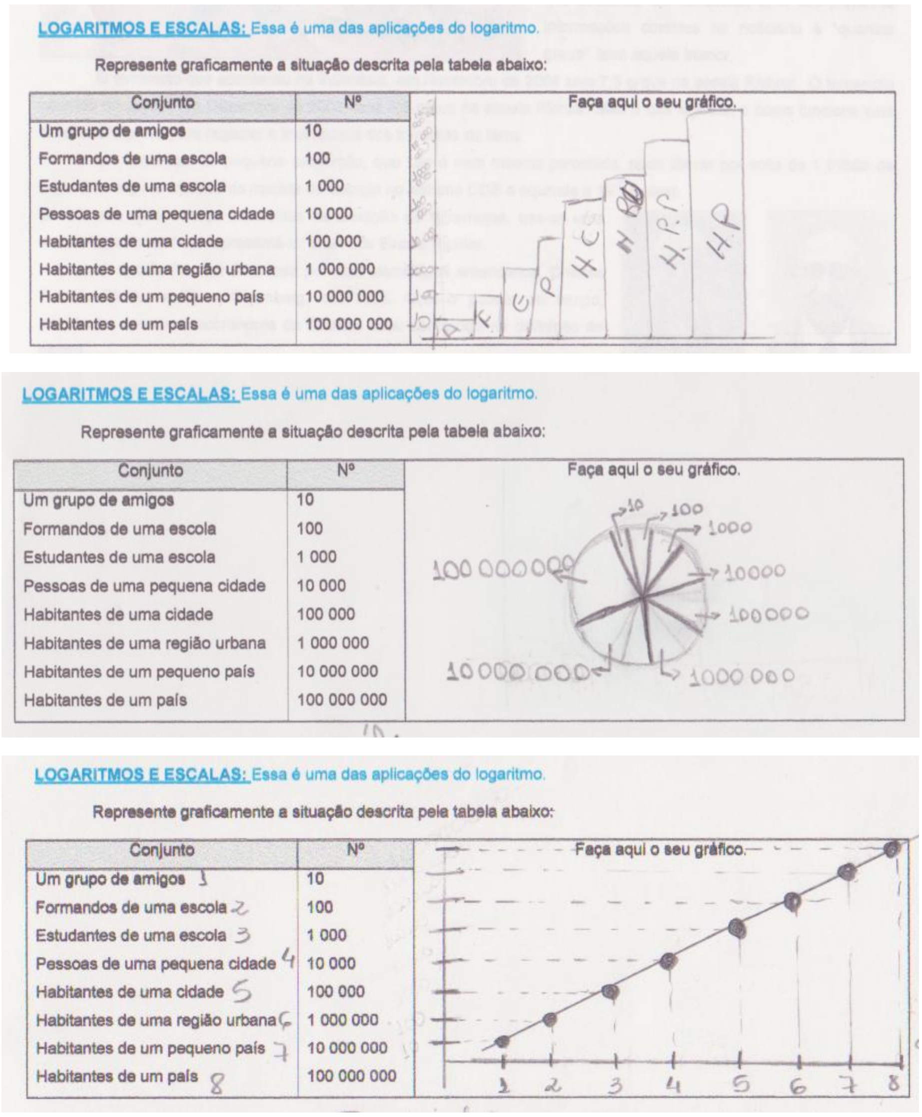


Ilustração 81: Digitalização de atividade resolvida por estudantes

Após a construção da representação gráfica, o estudante deve dizer qual foi a representação que ele usou, se ele tentou outras e se o seu gráfico usa uma escala proporcional. Após essas perguntas uma frase cita como é difícil representar certos fenômenos em escala real e que para isso existe a escala logarítmica, pois o logaritmo diminui bastante o valor de um número.

Que tipo de representação você usou?__________

Tentou outras?__________

Na sua representação, os números da 2ª coluna estão numa escala proporcional?__________

Viu como é difícil representar graficamente certos fenômenos? Por isso, às vezes, é utilizada a escala logarítmica. O logaritmo diminui bastante o número. Por exemplo, log (1 000 000) = 6.

Ilustração 82: Segunda atividade proposta na Folha de Atividades 4

Os resultados seguem abaixo:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	16	17
Cometeram algum erro	6	3

Dois estudantes não responderam à última questão e sete estudantes disseram que seus gráficos estavam numa escala real, mas não estavam.

Nessa atividade a única dúvida que surgiu entre alguns estudantes era se podiam usar qualquer tipo de representação gráfica. Respondemos que sim, eles é que deveriam decidir qual gráfico usar.

Que tipo de representação você usou? gráfica

Tentou outras? Não

Na sua representação, os números da 2ª coluna estão numa escala real? não,

Ilustração 83: Digitalização de atividade resolvida por estudante

A Folha de Atividades continua com a reapresentação da tabela inicial, mas agora colocamos uma terceira coluna em que constam os logaritmos dos valores trabalhados. Ao lado apresentamos um gráfico de barras usando os logaritmos no eixo vertical.

Elementos	Nº	Logaritmos	
Amigos	10	log 10 =	1
Formandos	100	log 100 =	2
Escola	1 000	log 1000 =	3
Pequena cidade	10 000	log 10 000 =	4
Cidade	100 000	log 100 00 =	5
Região urbana	1 000 000	log 1 000 000 =	6
Pequeno país	10 000 000	log 10 000 000 =	7
País	100 000 000	log 100 000 000 =	8

Ilustração 84: Tabela e gráfico de escala logarítmica da Folha de Atividades 4

Este gráfico foi construído com o objetivo de mostrar para o estudante que o uso da escala logarítmica facilita a representação desses dados.

Na sequência fazemos uma pergunta com o objetivo de verificar se o aluno entendeu que ao aumentar uma unidade na escala logarítmica, o aumento real é dez vezes maior.

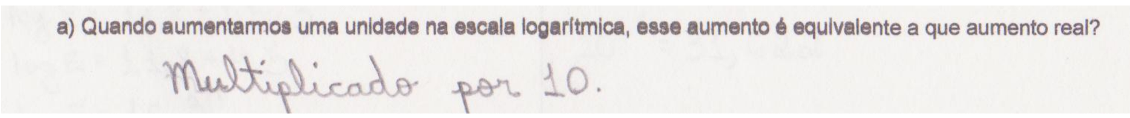
> Você já conhece a tabela que gerou esse gráfico. Analisando o gráfico responda:
>
> a) Quando aumentarmos uma unidade na escala logarítmica, esse aumento é equivalente a que aumento real?

Ilustração 85: Pergunta sobre escala logarítmica na Folha de Atividades 4

Seguem os resultados:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	19	15
Cometeram algum erro	3	5

Três estudantes responderam que o aumento era real, mas não falaram de quantas vezes era esse aumento. Três estudantes não responderam à pergunta e dois não entenderam a pergunta e responderam não.


a) Quando aumentarmos uma unidade na escala logarítmica, esse aumento é equivalente a que aumento real?

Multiplicado por 10.

Ilustração 86: Digitalização de atividade resolvida por estudante

Outra pergunta é feita com a intenção de verificar se o estudante percebeu que há vantagens e desvantagens no uso da escala logarítmica.

b) O gráfico na escala logarítmica tem vantagens e desvantagens. Quais são elas?

Ilustração 87: Pergunta sobre escala logarítmica na Folha de Atividades 4

Seguem os resultados dessa atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	21	19
Não fizeram	1	1

Dois estudantes não responderam à pergunta.

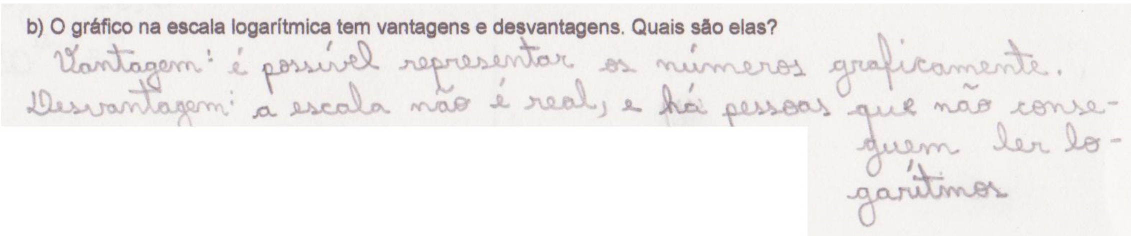

b) O gráfico na escala logarítmica tem vantagens e desvantagens. Quais são elas?
Vantagem: é possível representar os números graficamente.
Desvantagem: a escala não é real, e há pessoas que não conse-
guem ler lo-
garítmos

Ilustração 88: Digitalização de atividade resolvida por estudante

A seguir apresentamos um gráfico cartesiano em escala logarítmica para que o estudante perceba que a escala logarítmica pode ser usada em vários tipos de representação e não só em gráficos de barra. Segue um texto explicativo desse gráfico.

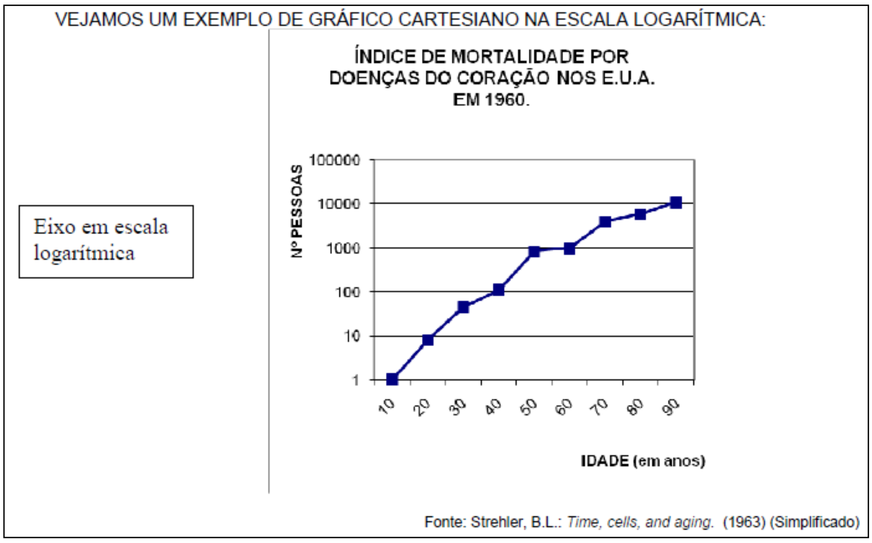


Ilustração 89: Gráfico cartesiano em escala logarítmica da Folha de Atividades 4

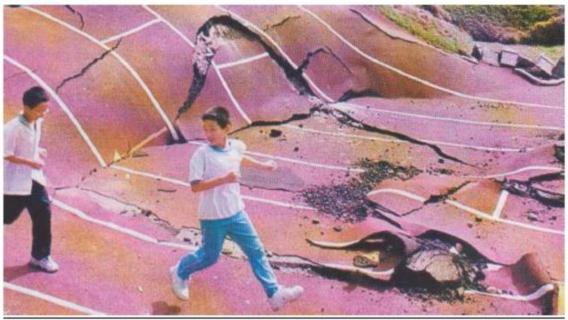
Veja como a escala logarítmica ajudou na construção do gráfico. No eixo horizontal, que representa a idade em anos dos pacientes, a escala é real com espaçamento igual de 10 em 10 anos. No eixo vertical as linhas estão igualmente espaçadas, mas representam valores exponenciais. Portanto, no gráfico, a altura de uma linha é o logaritmo do número que ela representa. Assim o valor 1000 está na terceira linha, pois log 1000 = 3.

Ilustração 90: Texto explicativo da Folha de Atividades 4

Após esta atividade trabalhar com a escala logarítmica, exemplos de escalas são mostrados ao estudante.

O primeiro exemplo é o uso da escala em medição de terremotos. Um pequeno texto fala sobre os terremotos, a escala Richter e a aplicação dos logaritmos. A intenção desse texto é que o estudante adquira conhecimento sobre a escala Richter.

LOGARITMOS E TERREMOTOS:



Belos e dramáticos. Assim costumam ser considerados quase todos os fenômenos da natureza de grande magnitude. Maremotos, furacões, tempestades, erupções vulcânicas e terremotos, dentre outros, sempre nos impressionam, tanto pelo espetáculo visual quanto pelo poder de destruição.

Você pode estar se perguntando o que os logaritmos têm a ver com terremotos. Sempre que acontece um terremoto, uma das primeiras informações contidas no noticiário é "quantos graus" teve aquele tremor.

O terremoto que aconteceu na Indonésia, em Novembro de 2008 teve 7,3 graus na escala Richter. O terremoto ocorrido no Japão, em Dezembro de 2008, teve 6,3 graus na escala Richter. Mas o que significa e como funciona esta escala? Ela serve para registrar a intensidade dos tremores de terra.

Um terremoto de pequena proporção, que não é nem mesmo percebido, pode liberar por volta de 1 trilhão de ergs. (Um erg é a unidade de medida de energia no sistema CGS e equivale a 10^{-7} Joules).

Devido aos altos valores envolvidos na medição de terremotos, usa-se uma escala logarítmica para representá-la, chamada Escala Richter.

A escala Ritchter foi criada por dois sismólogos americanos, Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, em 1935. Com o passar do tempo, entretanto, apenas o sobrenome de Charles ficou conhecido na definição da escala.

Charles Richter

Beno Gutenberg

Ilustração 91: Texto introdutório da atividade sobre escala Richter na Folha de Atividades 4

Em seguida apresentamos uma tabela com magnitudes de vários terremotos conhecidos, além de uma fórmula para calcular a quantidade de energia liberada (em ergs) em terremotos de acordo com sua magnitude.

Abaixo temos uma tabela que indica alguns dos terremotos conhecidos:

Local do Terremoto	*Data*	*Magnitude do terremoto na escala Richter (R)*
Lisboa, Portugal	1755	9,0 (estimado)
São Francisco, EUA	1906	8,0 (estimado)
Valdívia, Chile	1960	9,5
Peru	1970	7,7
Cidade do México	1985	8,0
Irã	1990	7,3
Índia	2001	7,9
Oceano Índico	2004	9,3
Indonésia	2006	6,2
China	2008	8,0
México	2009	7,4

Existem fórmulas diferentes para se calcular a magnitude na escala Richter. Cada uma das fórmulas nos dá a energia liberada em unidades diferentes: ergs, joule, kWh, etc. Uma delas é: $\log E = 11{,}8 + 1{,}5R$, onde **E** é a energia liberada (em ergs) e **R** a magnitude da escala Richter.

Ilustração 92: Tabela com magnitude de alguns terremotos

A primeira atividade é um exemplo de como encontrar a energia liberada (em ergs) de um terremoto de magnitude 1,0 na escala Richter. Depois propomos ao estudante que ele faça o mesmo cálculo só que agora para um terremoto de magnitude 2,0 na escala Richter.

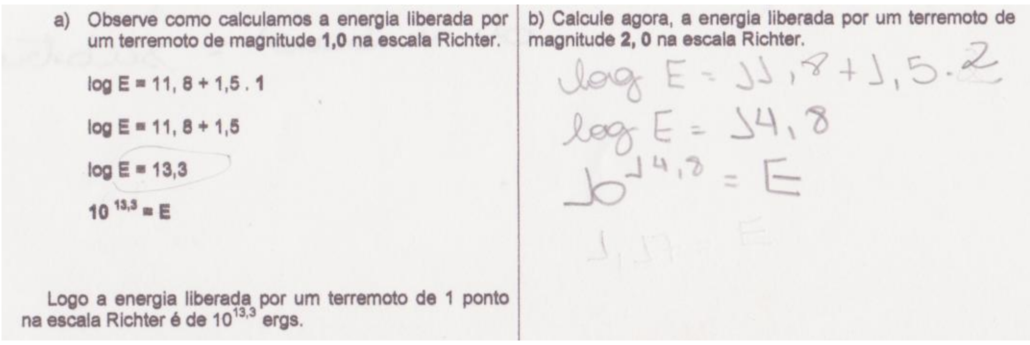
a) Observe como calculamos a energia liberada por um terremoto de magnitude **1,0** na escala Richter. $\log E = 11,8 + 1,5 \cdot \mathbf{1}$ $\log E = 11,8 + 1,5$ $\log E = 13,3$ $\mathbf{10^{13,3} = E}$ Logo a energia liberada por um terremoto de 1 ponto na escala Richter é de $10^{13,3}$ ergs.	b) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **2, 0** na escala Richter.

Ilustração 93: Itens *a)* e *b)* da atividade com escala Richter

Os resultados obtidos nesta atividade foram:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	21	18
Cometeram algum erro	1	2

Um dos estudantes fez a soma errada e dois estudantes não fizeram este item.



a) Observe como calculamos a energia liberada por um terremoto de magnitude **1,0** na escala Richter.

log E = 11, 8 + 1,5 . 1

log E = 11, 8 + 1,5

log E = 13,3

$10^{13,3} = E$

Logo a energia liberada por um terremoto de 1 ponto na escala Richter é de $10^{13,3}$ ergs.

b) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **2, 0** na escala Richter.

log E = 11,8 + 1,5 . 2

log E = 14,8

$10^{14,8} = E$

Ilustração 94: Digitalização de atividade realizada por estudante

Em seguida o estudante deve calcular a energia liberada por um terremoto de magnitude 3,0 na escala Richter. Pedimos que ele faça uma comparação da energia liberada por terremotos que tenham a diferença de um ponto na escala Richter. Aumentando uma unidade na magnitude do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada? Essa atividade tem a intenção de mostrar que uma unidade de aumento na escala Richter não corresponde ao mesmo aumento na liberação de energia, mas aproximadamente 31 vezes mais.

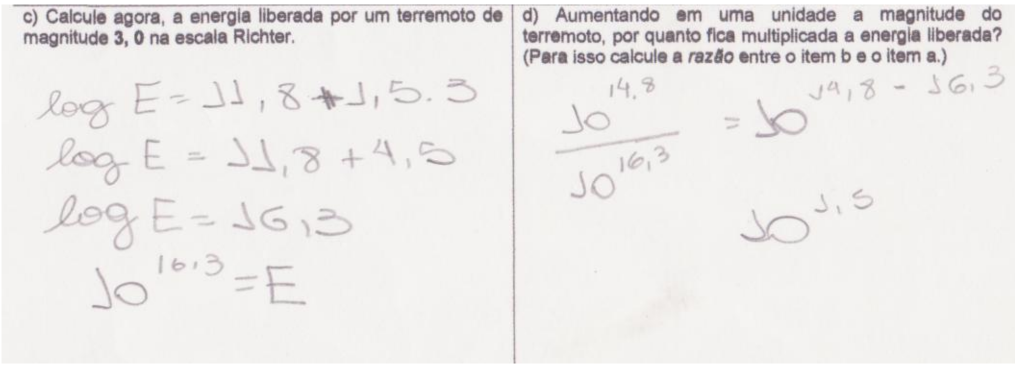
c) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **3, 0** na escala Richter.	d) Aumentando em uma unidade a magnitude do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada? (Para isso calcule a *razão* entre o item b e o item a.)

Ilustração 95: Itens *c)* e *d)* da atividade com escala Richter

Os resultados foram os seguintes:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	19	14
Cometeram algum erro	3	6

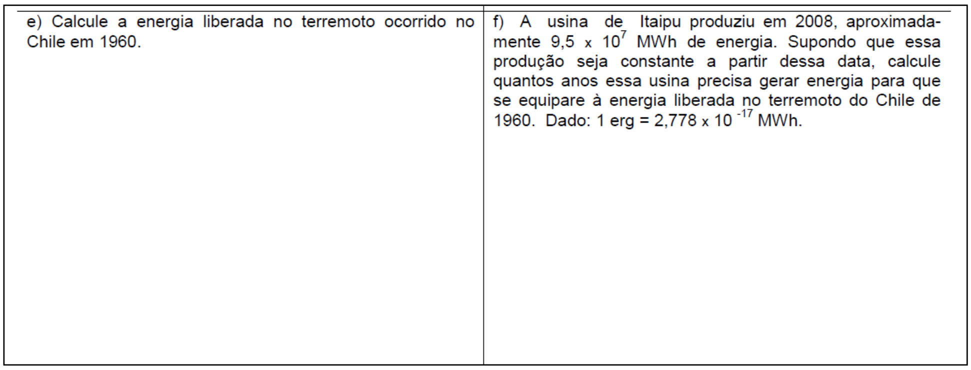
Na classe 1, três estudantes não fizeram esta atividade. Na classe 2, três estudantes colocaram que o aumento era de 1,5, ou seja fizeram a comparação, viram que dava $10^{1,5}$ e responderam errado. Os outros três estudantes responderam que o aumento seria de duas vezes.



c) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **3, 0** na escala Richter.	d) Aumentando em uma unidade a magnitude do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada? (Para isso calcule a *razão* entre o item b e o item a.)
$\log E = 11,8 + 1,5 \cdot 3$ $\log E = 11,8 + 4,5$ $\log E = 16,3$ $10^{16,3} = E$	$\frac{10^{14,8}}{10^{16,3}} = 10^{14,8 - 16,3}$ $10^{1,5}$

Ilustração 96: Digitalização de atividade realizada por estudante

Nos próximos itens da atividade propomos ao estudante que ele verifique qual foi a energia liberada no terremoto do Chile em 1960, da mesma maneira que ele calculou os itens anteriores. Em seguida é fornecida a energia total produzida no ano de 2008 pela Usina de Itaipu e pedimos ao estudante que, com os dados do item anterior, calcule quantos anos a usina precisa produzir energia para que se equipare à energia liberada no terremoto do Chile. Propomos esta atividade para que o estudante tenha a real dimensão da quantidade de energia liberada em um terremoto.



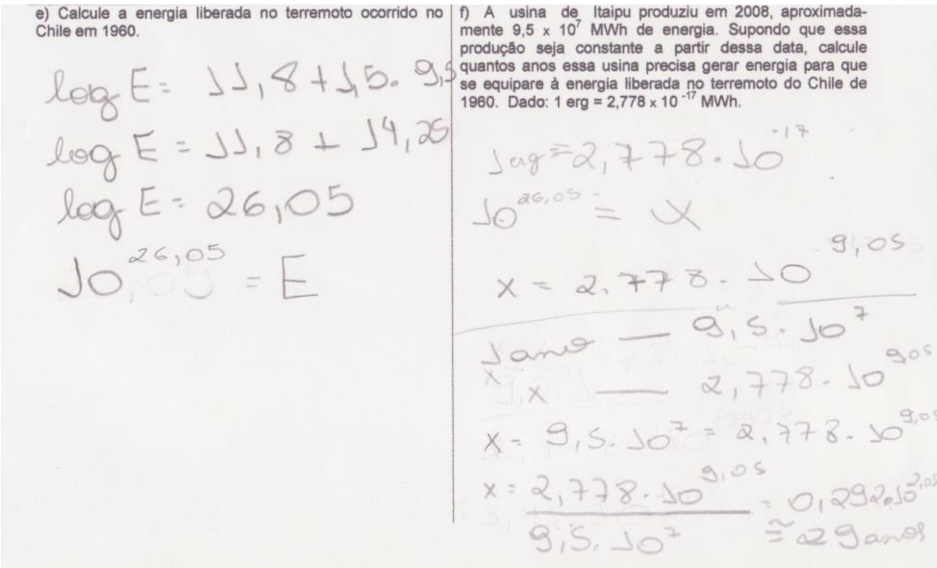
e) Calcule a energia liberada no terremoto ocorrido no Chile em 1960.	f) A usina de Itaipu produziu em 2008, aproximadamente $9,5 \times 10^7$ MWh de energia. Supondo que essa produção seja constante a partir dessa data, calcule quantos anos essa usina precisa gerar energia para que se equipare à energia liberada no terremoto do Chile de 1960. Dado: 1 erg = $2,778 \times 10^{-17}$ MWh.

Ilustração 97: Itens *e)* e *f)* da atividade com escala Richter

Seguem os resultados:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	21	16
Cometeram algum erro	1	3

Quatro estudantes deixaram a atividade em branco.



e) Calcule a energia liberada no terremoto ocorrido no Chile em 1960.

$\log E = 11,8 + 1,5 \cdot 9,5$

$\log E = 11,8 + 14,25$

$\log E = 26,05$

$10^{26,05} = E$

f) A usina de Itaipu produziu em 2008, aproximadamente $9,5 \times 10^7$ MWh de energia. Supondo que essa produção seja constante a partir dessa data, calcule quantos anos essa usina precisa gerar energia para que se equipare à energia liberada no terremoto do Chile de 1960. Dado: 1 erg = $2,778 \times 10^{-17}$ MWh.

$1 \text{ erg} = 2,778 \cdot 10^{-17}$

$10^{26,05} = x$

$x = 2,778 \cdot 10^{9,05}$

1 ano — $9,5 \cdot 10^7$

x — $2,778 \cdot 10^{9,05}$

$x \cdot 9,5 \cdot 10^7 = 2,778 \cdot 10^{9,05}$

$x = \frac{2,778 \cdot 10^{9,05}}{9,5 \cdot 10^7} = 0,292 \cdot 10^{2,05}$

$\cong 29$ anos

Ilustração 98: Digitalização de atividade realizada por estudante

Mais uma atividade é proposta para que o estudante veja mais um exemplo da utilidade da escala logarítmica. É o uso dos logaritmos na química, na medição do nível de *pH* em substâncias. Inicialmente apresentamos um pequeno texto explicando o que caracteriza a acidez das substâncias. Como os números usados são muito pequenos, usamos o logaritmo para representá-los.

LOGARITMOS E ACIDEZ:

Para caracterizar a acidez de um líquido, usa-se um indicador chamado de pH (potencial hidrogeniônico), determinado pela presença de hidrônios H_3O^+. A água tem íons H^+ livres, são poucos, mas existem, cerca de 1 *íon-grama* para cada 10^7 litros, ou seja a razão é $1/10^7$. Assim dizemos que o pH da água é 7. No suco de limão existem mais íons que na água, 1 *íon-grama* para cada 10^2 litros, a razão é $1/10^2$. Assim o pH do suco de limão é 2. *Observe que quanto* ***maior*** *é a concentração de hidrônios,* ***mais ácida*** *é a substância.*

O pH dá uma idéia da quantidade de íons H^+ que se encontram livres na substância, indicando a quantidade por unidade de volume.

Para medir a acidez de substâncias é mais prático considerar uma escala logarítmica.

O pH é definido por **$pH = -\log [H_3O^+]$**, sendo $[H_3O^+]$ a quantidade de íon-grama por litro. Por definição, o pH igual a 7 é considerado neutro, de 0 a 7, ácido e de 7 a 14, básico.

Ilustração 99: Texto introdutório da atividade com escala de *pH*

Em seguida temos uma tabela que mostra o *pH* de algumas substâncias e pedimos ao estudante que, com base nas informações dadas anteriormente, calcule o *pH* de algumas substâncias.

Abaixo temos o pH de algumas substâncias:

Substância	pH
Suco de limão	2
Suco de tomate	4
Leite	6,9
Água	7
Leite de magnésia	10

Ácido (maior concentração de hidrônios)

Básico (menor concentração de hidrônios)

a) Com base nas informações do texto acima responda: se um líquido tem 1 íon-grama H^+ para cada 1000 litros, qual o seu pH?

b) O que significa dizer que uma substância tem pH igual a 9?

Ilustração 100: Itens a) e b) da atividade com escala *pH*

Os resultados desta atividade foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	22	17
Cometeram algum erro	0	3

Na classe 2, três estudantes não fizeram esta atividade.

a) Com base nas informações do texto acima responda: se um líquido tem 1 íon-grama H^+ para cada 1000 litros, qual o seu pH?

$1/10^3 = 3$

1000

b) O que significa dizer que uma substância tem pH igual a 9?

Significa que o PH é básico, tem concentração $\frac{1}{10^9}$.

Ilustração 101: Digitalização da atividade realizada por estudante

Os outros dois itens desta atividade também pedem para que o estudante calcule alguns valores de *pH*.

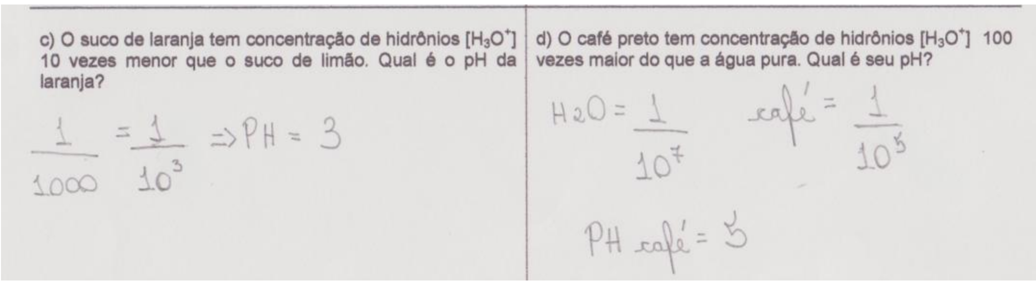
c) O suco de laranja tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 10 vezes menor que o suco de limão. Qual é o pH da laranja?	d) O café preto tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 100 vezes maior do que a água pura. Qual é seu pH?

Ilustração 102: Itens *c)* e *d)* da atividade com escala *pH*

Seguem os resultados:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	22	17
Cometeram algum erro	0	3

Na classe dois, os mesmos três estudantes não fizeram essa atividade.


c) O suco de laranja tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 10 vezes menor que o suco de limão. Qual é o pH da laranja?

$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} \Rightarrow PH = 3$

d) O café preto tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 100 vezes maior do que a água pura. Qual é seu pH?

$H_2O = \frac{1}{10^7}$ café $= \frac{1}{10^5}$

PH café = 5

Ilustração 103: Digitalização de atividade realizada por estudante

Nesse ponto introduzimos um exemplo em que o logaritmo aparece como modelo para não ficarmos apenas nas aplicações relativas a escalas. A atividade propõe a modelagem de um fenômeno usando a função logarítmica. A altura média do tronco de certa espécie de árvore é dada por uma função logarítmica. Perguntamos inicialmente qual será a altura da planta no momento em que a muda é plantada. O estudante deve perceber que nesse momento o tempo é zero e fazer a substituição para conseguir a resposta.

LOGARITMOS E FUNÇÕES:

Ao se estudar fenômenos físicos, químicos ou biológicos, temos muitas vezes a presença dos logaritmos como modelo de certas situações. Vejamos uma delas:

A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui, desde que a muda é plantada (t = 0), segundo o seguinte modelo matemático: **$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$**, com *h(t)* em metros e *t* em anos.

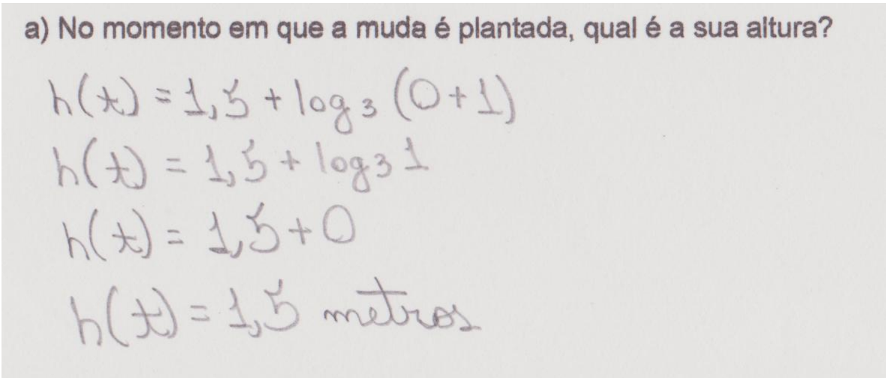
a) No momento em que a muda é plantada, qual é a sua altura?

Ilustração 104: Texto introdutório e item *a)* da atividade com modelagem de crescimento

Os resultados foram:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	18	19
Cometeram algum erro	4	1

Todos os estudantes que cometeram erro calcularam o $\log_3 1$ de maneira errada, disseram que valia 1, enquanto o resultado correto é zero.



a) No momento em que a muda é plantada, qual é a sua altura?

$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (0+1)$

$h(t) = 1{,}5 + \log_3 1$

$h(t) = 1{,}5 + 0$

$h(t) = 1{,}5$ metros

Ilustração 105: Digitalização de atividade resolvida por estudante

A seguir mais duas atividades questionam os estudantes quanto à altura da árvore passados 26 anos e se a árvore foi cortada com 3,5 metros de altura, qual o tempo transcorrido do momento da plantação até o corte?

b) Transcorridos 26 anos, qual será a altura de uma dessas árvores?

c) Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, calcule o tempo transcorrido (em anos) do momento da plantação até o corte.

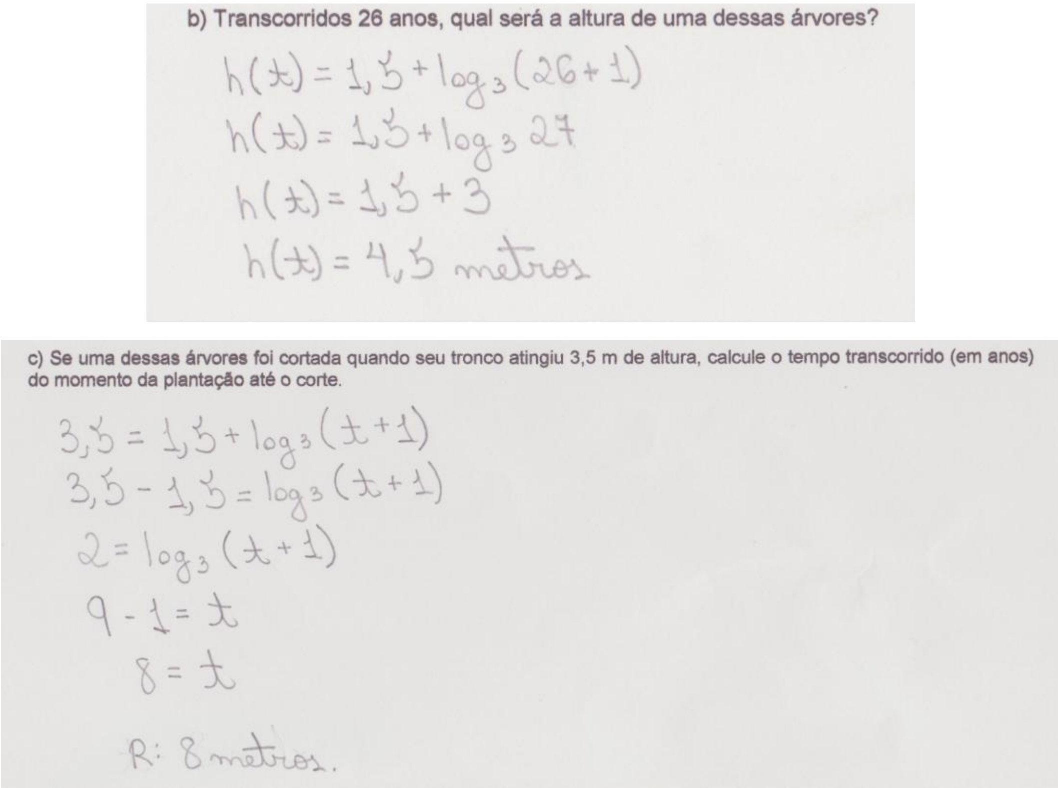
Ilustração 106: Itens *b)* e *c)* da atividade com modelagem

Seguem os resultados:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	19	17
Cometeram algum erro	3	3

Dois estudantes erraram na última passagem do item *c* e colocaram dez anos ao invés de oito. Três estudantes não fizeram essa atividade e um não terminou sendo que a parte inicial do item *c* está correta, mas ele não deu a resposta final.

Propomos esta atividade para que o estudante saiba que existe modelagem de algumas situações que utilizam função logarítmica.


b) Transcorridos 26 anos, qual será a altura de uma dessas árvores?

$h(t) = 1{,}5 + \log_3(26+1)$

$h(t) = 1{,}5 + \log_3 27$

$h(t) = 1{,}5 + 3$

$h(t) = 4{,}5$ metros

c) Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, calcule o tempo transcorrido (em anos) do momento da plantação até o corte.

$3{,}5 = 1{,}5 + \log_3(t+1)$

$3{,}5 - 1{,}5 = \log_3(t+1)$

$2 = \log_3(t+1)$

$9 - 1 = t$

$8 = t$

R: 8 metros.

Ilustração 107: Digitalização de atividade resolvida por estudante

12.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 8

A utilização da escala logarítmica ficou clara e os estudantes perceberam que em certas situações, se os logaritmos não forem utilizados, haverá inúmeras dificuldades na representação das mesmas devido ao crescimento exponencial dos números.

As situações apresentadas nesta Folha de Atividades fizeram com que os estudantes percebessem que os logaritmos modelam fenômenos e têm utilidade em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Química e na Geologia. Assim, neste momento da sequência didática nosso objetivo de mostrar aos estudantes a utilidade e aplicação os logaritmos foi alcançada.

CAPÍTULO 13

Descrição e análise do momento 9 da sequência didática

13.1 INTRODUÇÃO

Neste momento da sequência didática, trabalhamos com resolução de problemas e equações logarítmicas, usando o livro didático adotado na escola que, como já citado anteriormente, incluímos nesta sequência para que os estudantes não perdessem a referência e se acostumassem com a linguagem utilizada pelo autor.

Trabalhamos com diversas equações logarítmicas e problemas aplicados que envolveram o uso de logaritmos, para mostrar aos estudantes que mesmo com o uso das calculadoras e computadores o logaritmo continua tendo grande importância.

Esse momento da sequência didática foi realizado nas duas classes nos dias 19 e 20/10/2009, para os 42 estudantes. A atividade durou 4 aulas de 50 minutos cada.

13.2 RESUMO DO MOMENTO 9

Neste momento da sequência didática utilizamos aulas expositivas e de resolução de exercícios, em que os estudantes trabalharam ora individualmente, ora em duplas.

13.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Esperamos que os estudantes tenham dificuldades em algumas equações que mesclam as propriedades operatórias dos logaritmos. Por isso o professor ficará circulando na sala para sanar, individualmente, as dúvidas que surgirem durante a aula de exercícios.

13.4 DESCRIÇÃO DO MOMENTO 9

A primeira aula foi expositiva. Mostramos os diversos tipos de equações com exemplos extraídos do livro didático. Inicialmente, resolvemos na lousa equações logarítmicas bem simples, como: $\log_6(x+5)=2$ e $\log_3 x+\log_3(x+2)=0$. Para a resolução da primeira equação retomamos a definição de logaritmo e na segunda equação trabalhamos com a propriedade do produto. Na mesma aula, propusemos atividades do livro didático com resolução de algumas equações semelhantes a estas duas.

Na segunda aula fizemos a correção dessas atividades e mostramos outros tipos de equações, como: $\log^2 x-5\log\ x+4=0$ e $\log_2 x+\log_4 x=0$. Os estudantes fizeram mais algumas atividades do livro didático e em seguida foi feita a correção.

Nas terceira e quarta aulas destinadas a esse momento, foram feitas mais algumas atividades do livro didático. Além de equações os estudantes também resolveram problemas aplicados envolvendo logaritmos. Nesses problemas foram abordados escala Richter, medida de intensidade sonora, tempo de crescimento populacional e matemática financeira. Abaixo temos uma imagem do livro didático contendo parte das atividades realizada pelos estudantes. Encerramos fazendo comentários sobre as questões. Nessas atividades não recolhemos material produzido pelos estudantes, mas foram incluídas como matéria da avaliação final. Essa avaliação é descrita no capítulo seguinte.

81. Bioquímica. A meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Se 16 gramas de uma substância, cuja meia-vida é de 5 anos, se reduzir daqui a n meias-vidas a 2^{-20} gramas, qual o valor de n?

82. Crescimento populacional. Estima-se que a população de determinado país aumenta de acordo com a lei $P(t) = 1.000 \cdot (1{,}02)^t$, sendo t o tempo em anos e $P(t)$ o total de habitantes após t anos. Adotando $(1{,}02)^{50} = 2{,}7$, calcule a população desse país em 200 anos.

83. Acústica. A intensidade sonora é medida em uma unidade chamada decibel. Para medi-la, primeiro associa-se uma intensidade I_0 a um som muito fraco, que seria o menor valor audível pelo ser humano. Se um som tem intensidade I, o valor, em decibéis, desse som é dado pela fórmula $d = 10 \cdot \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.

Quantos decibéis terá um som cuja intensidade equivale a $100I_0$?

84. Geologia. (Fuvest-SP) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8{,}9$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \frac{E}{E_0}$$

onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

85. Indústria. (PUC-SP) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6.000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996?

a) 1998 **c)** 2000 **e)** 2002
b) 1999 **d)** 2001

86. Calculadora. Em uma calculadora de 12 dígitos quando se "aperta" a tecla log, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO. Se digitarmos o número 10 bilhões, qual o número de vezes que devemos "apertar" a tecla log para aparecer a mensagem ERRO?

Ilustração 108: Exercícios aplicativos do livro didático

13.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 9

Estas atividades finalizaram a nossa sequência didática. Com essas equações os estudantes se prepararam para a resolução de problemas que envolvam logaritmos.

Concluímos que nossos objetivos foram alcançados nesta etapa da sequência didática. Os estudantes viram como os logaritmos são úteis para a resolução de equações exponenciais e como essas equações aparecem em problemas aplicados.

CAPÍTULO 14

Descrição e análise do momento 10

14.1 INTRODUÇÃO

Estamos agora na parte final de nossa sequência didática para o ensino dos logaritmos. Este momento consistiu de aplicação de uma prova dissertativa seguindo os parâmetros estabelecidos no projeto pedagógico da escola. Conforme já comentamos, a escola adota um livro didático para os cursos de Matemática e procuramos não modificar totalmente esse esquema, de modo que em vários momentos de nossa sequência procuramos manter contato com esse livro. Além disso, a escola adota uma metodologia própria de avaliação. As avaliações são programadas pela coordenação pedagógica em datas pré-determinadas. Cada professor elabora a prova de sua disciplina, mas as provas são examinadas e aplicadas pela coordenação. As provas devem obedecer a um certo formato que inclui o objetivo de preparar os estudantes para o vestibular. Assim o momento 10 de nossa sequência didática inclui essa avaliação.

Não ficamos preocupados com o fato dessa avaliação não incluir questões ou atividades com o formato que caracterizou nossa proposta. Primeiro porque boa parte do conteúdo de nossa sequência didática já havia sido avaliada nas próprias folhas de atividades, e a parte que não o foi constitui justamente o conteúdo que foi abordado na forma tradicional, sendo assim passível de ser incluído na prova.

Por outro lado essa avaliação formal estabelecida pela escola constituiu uma oportunidade de fazer uma comparação entre as duas turmas em que foi aplicada a sequência didática e turmas anteriores que estudaram a mesma matéria da forma tradicional. Embora não tenhamos feito um controle quantitativo, pudemos constatar que os estudantes dessas duas turmas participaram com mais confiança e tranqüilidade da prova e, em média, tiveram melhor rendimento que os estudantes das turmas anteriores.

A prova continha questões dissertativas explorando a definição de logaritmo, suas propriedades, construção e reconhecimento de gráficos, e aplicações. Foi realizada individualmente numa aula de 50 minutos e valeu 10 pontos.

14.2 RESUMO DO MOMENTO 10

A prova é composta de 09 questões, das quais uma é extra, ou seja, os estudantes fazem se quiserem e ela substitui qualquer uma das questões anteriores que o estudante tenha errado.

Nessas questões utilizamos todos os conceitos aprendidos na sequência didática. Foram utilizados algumas atividades do momento 3 da sequência didática e também problemas que envolvem logaritmos.

14.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Em todas as atividades aplicadas nesta sequência didática os estudantes tiveram a presença da professora e fizeram as atividades em duplas. Com isso eles podiam a qualquer momento solicitar ajuda. Nesta avaliação isto não foi possível, pois tivemos que seguir os procedimentos da escola.

Como a avaliação foi realizada individualmente e depende não somente da maneira com que é elaborada e conduzida, mas também do estudo individual dos estudantes, pode ser que tenhamos um número de erros um pouco maior que o das Folhas de Atividades.

14.4 ANÁLISE A *PRIORI* E A *POSTERIORI* DO MOMENTO 10

A avaliação ocorreu no dia 27/10/2009. Dois estudantes da classe 2 faltaram e fizeram a avaliação posteriormente, em data estipulada pela coordenação da escola. As avaliações desses estudantes foram analisadas junto com as dos outros estudantes.

Os estudantes levaram para casa, alguns dias antes, todas as Folhas de Atividades que haviam feito para estudar e devolveram posteriormente. Além das folhas, anotaram em seus cadernos quais as atividades do livro didático e suas respectivas páginas deveriam estudar para a prova. Isso foi feito para que os estudantes tivessem a oportunidade de se preparar para a avaliação.

Juntamente com a folha da prova o estudante recebeu uma folha de papel almaço para resolvê-la e uma folha de papel quadriculado para a construção do gráfico.

No primeiro exercício pedimos para que o estudante construa o gráfico de uma função logarítmica. Os estudantes trabalharam com construção de gráficos na aula expositiva, momento 6 da sequência didática.

01) Construa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$. (desenhe o gráfico no papel quadriculado)

Ilustração 109: Primeira atividade proposta na avaliação

Os resultados desse exercício seguem abaixo:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	16	13
Cometeram algum erro	6	7

Quatro estudantes não fizeram o gráfico e nove erraram, dos quais três fizeram o gráfico da função $f(x) = 2^x$, e o restante errou no cálculo de alguns logaritmos durante a confecção da tabela, obtendo assim curvas erradas.

Abaixo temos a digitalização de alguns gráficos dos estudantes.

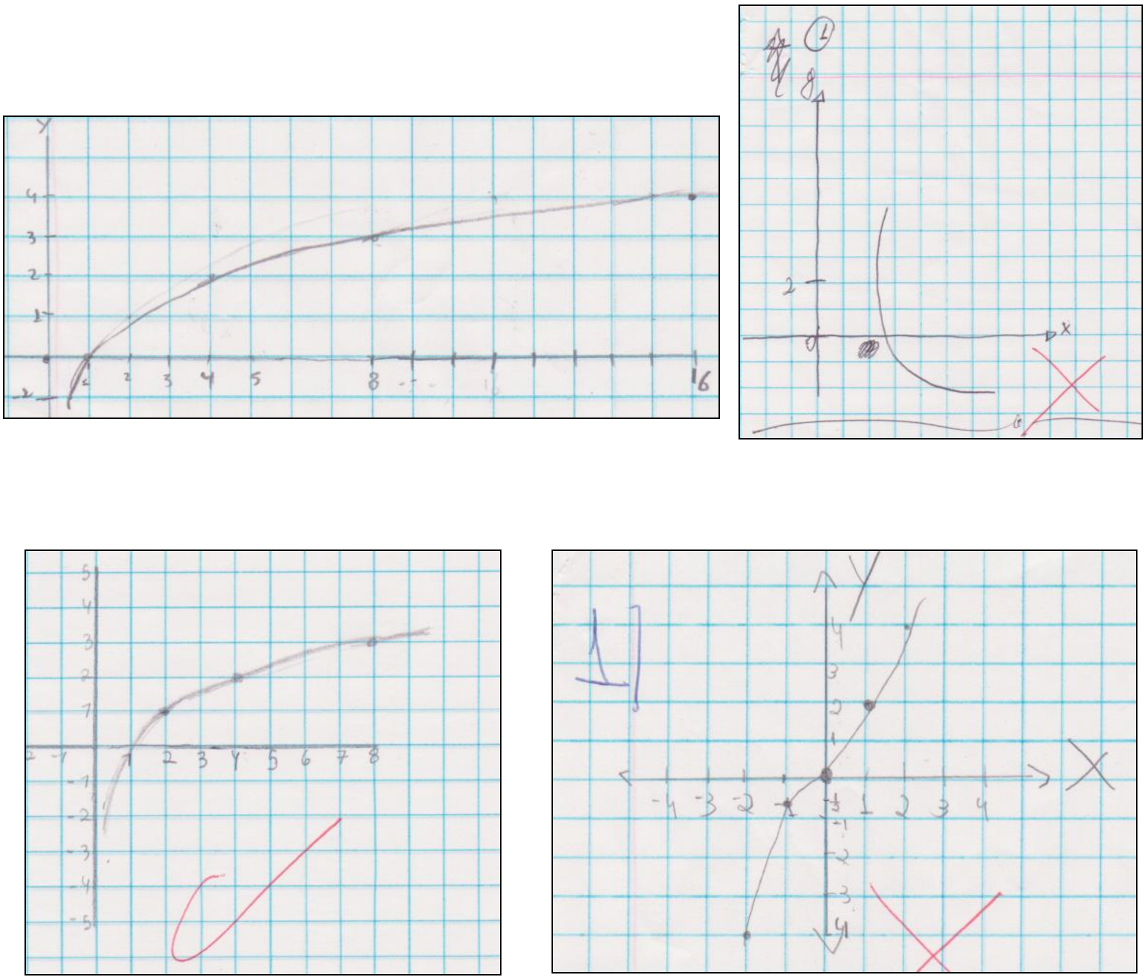


Ilustração 110: Digitalização da atividade resolvida por estudantes

O segundo exercício explora a atividade feita com a calculadora científica em sala de aula e também a mudança de base, vista na Folha de Atividades 3.

02) Se você precisar calcular $\log_3 2$ com uma calculadora científica, o que você terá que fazer?

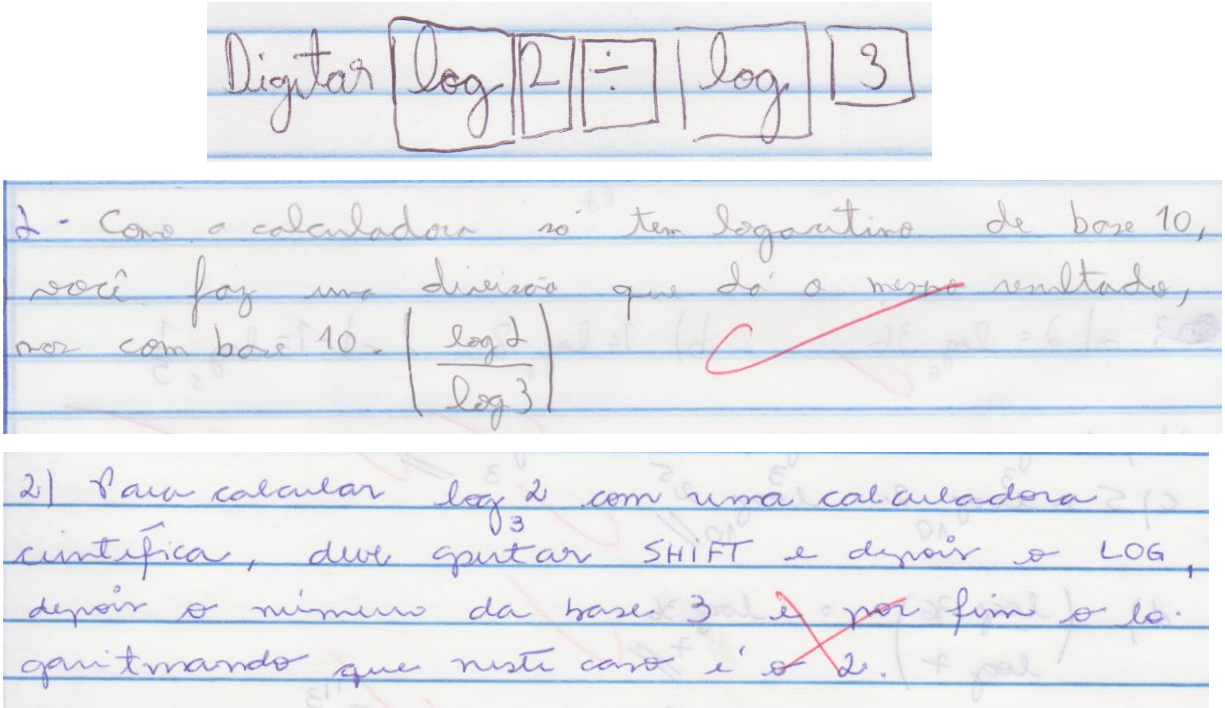
Ilustração 111: Segunda atividade proposta na avaliação

Seguem os resultados desta atividade:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	9	13
Cometeram algum erro	13	7

Quatro estudantes não fizeram esse exercício e dezesseis erraram. Eles esqueceram de explicar como fazíamos para mudar a base do logaritmo. Não disseram em nenhum momento que tinham que dividir *log 2* por *log 3*.

Abaixo temos algumas imagens das provas dos estudantes.



Digitar $\boxed{\log}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\log}$ $\boxed{3}$

2- Como a calculadora só tem logaritmo de base 10, você faz uma divisão que dá o mesmo resultado, nos com base 10. $\left(\frac{\log 2}{\log 3}\right)$

2) Para calcular $\log_3 2$ com uma calculadora científica, deve apertar SHIFT e depois o LOG, depois o número da base 3 e por fim o logaritmando que neste caso é o 2.

Ilustração 112: Digitalização da atividade resolvida por estudantes

Os exercícios 3 e 4 são atividades que exploram a definição de logaritmos, como montar o logaritmo e como encontrar a base de alguns logaritmos. Esperamos que os estudantes trabalhem com potências para resolver estas atividades.

03) Escreva uma igualdade, usando logaritmos e os números dados:

a) 6, 36 e 2 b) 8, 8 e 1 c) 5, -1 e $\frac{1}{5}$ d) 5, 2 e 32

Ilustração 113: Terceira atividade proposta na avaliação

Seguem os resultados da análise desse exercício:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	16	11
Cometeram algum erro	6	9

Três estudantes não fizeram o exercício, cinco erraram todos os itens, quatro erraram apenas um dos itens, um errou dois itens e um errou três itens. Um dos estudantes montou potências em cada um dos itens e não usou logaritmos como o enunciado pedia.

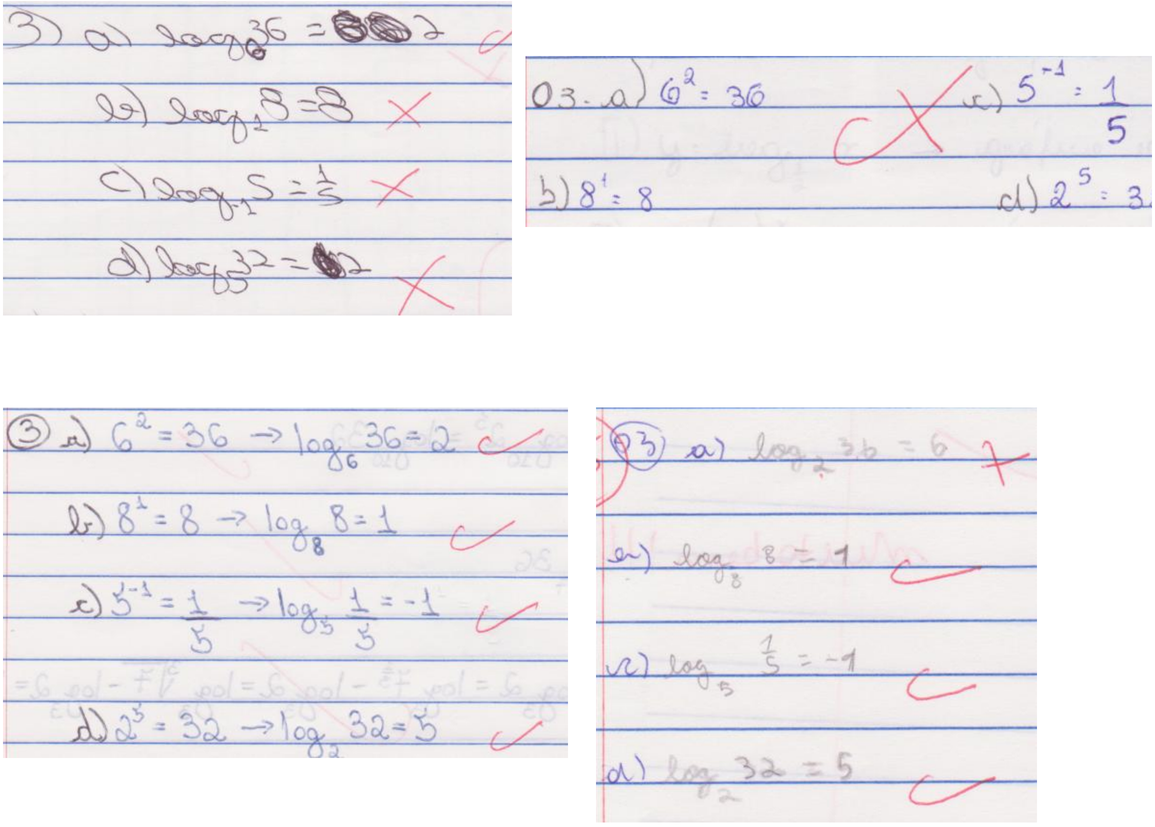


Ilustração 114: Digitalização da atividade realizada por estudantes

04) Determine o valor da base *a*:

a) $\log_a 8 = 3$ b) $\log_a 5 = 1$ c) $\log_a 36 = 2$

d) $\log_a 4 = -2$ e) $\log_a 1 = 0$ f) $\log_a 5 = 2$

Ilustração 115: Quarta atividade proposta na avaliação

Os resultados do exercício de número 4 estão abaixo:

	Classe 1	**Classe 2**
Acertaram	6	9
Cometeram algum erro	16	11

Quatro estudantes não fizeram esse exercício. Doze estudantes erraram em apenas um dos itens, a maioria no último item; alguns erraram no item *d*. Quatro estudantes erraram em apenas dois itens, cinco estudantes erraram três itens e dois acertaram apenas um dos itens.

Neste exercício muitos estudantes colocaram como resposta no item *e* que a base do logaritmo podia ser qualquer número real. Mesmo não fazendo restrição entre quais reais poderiam ser usados, consideramos a resposta correta, levando em consideração o raciocínio dos estudantes.

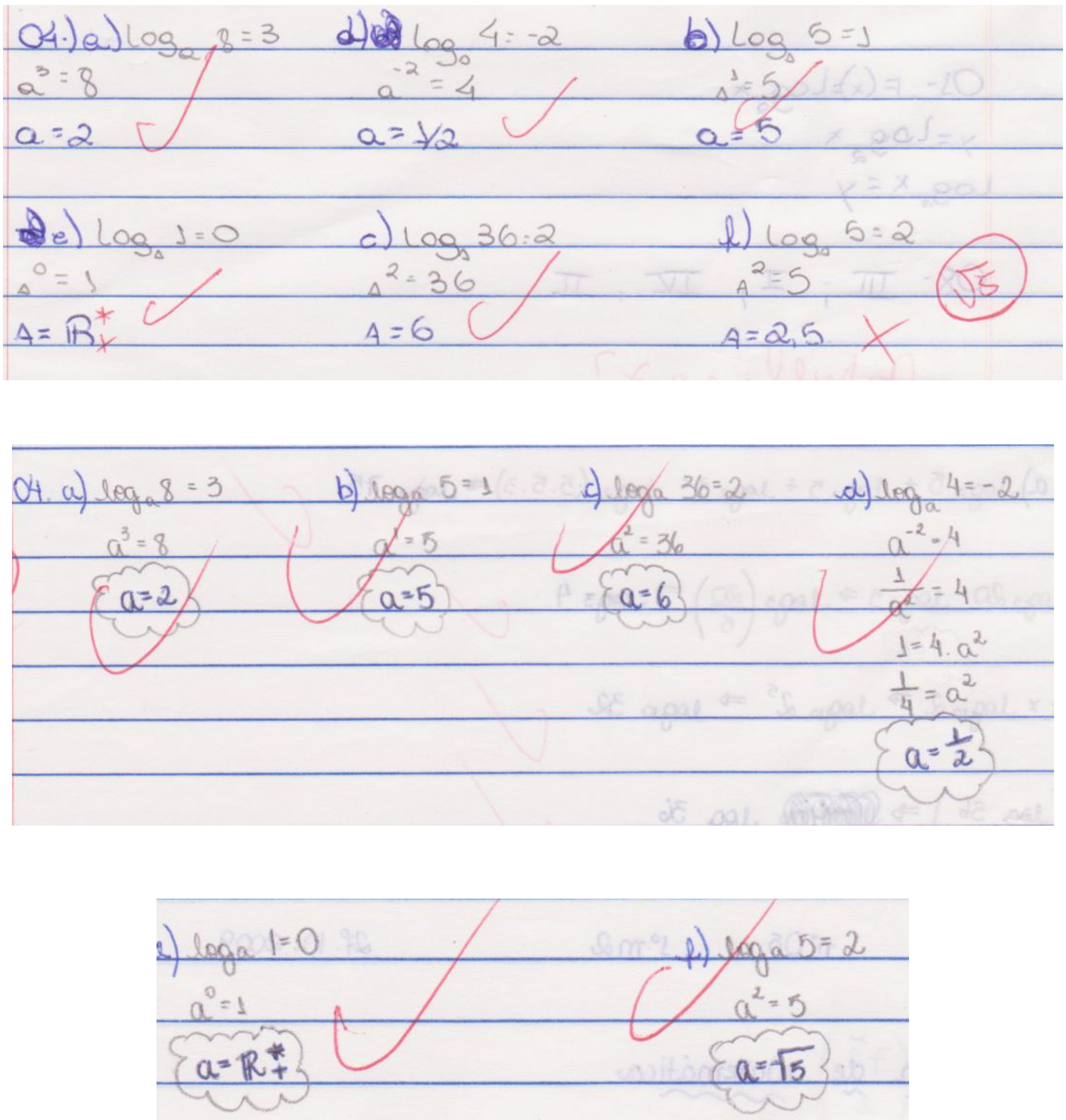


Ilustração 116: Digitalização de atividade realizada por estudantes

A maioria dos estudantes que erraram o último item o fizeram também nas atividades da sequência didática, no momento 3. Podemos perceber que novamente os estudantes cometem erro quando o logaritmo envolve raízes.

No exercício 5 esperamos que os estudante utilizem os conceitos aprendidos na Folha de Atividades 2, que também usa a definição dos logaritmos e em alguns itens as regularidades apontadas por eles no final da Folha de Atividades.

05) Calcule os logaritmos abaixo:

a) $\log_2 64$ b) $\log_3 729$ c) $\log_e e^7$ d) $\log 1$

e) $\log_8 8$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ g) $\log 10000$ h) $\log_{\sqrt{3}} 81$

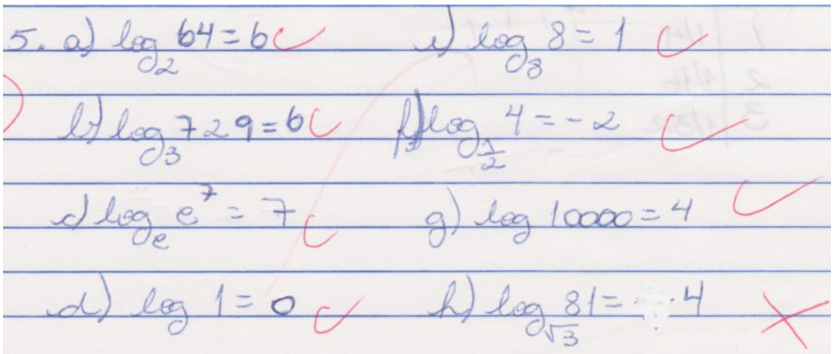
Ilustração 117: Quinta atividade proposta na avaliação

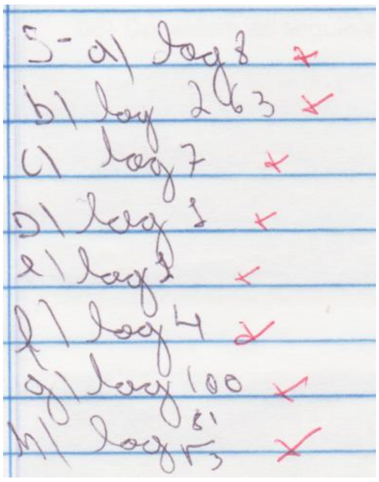
Seguem os resultados:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	5	7
Cometeram algum erro	17	13

Dos estudantes que erraram, onze erraram apenas um dos itens. Três erraram apenas dois itens. Quatro estudantes erraram três itens. Quatro estudantes erraram quatro itens. Três estudantes acertaram apenas dois itens e dois estudantes erraram o exercício inteiro. Um estudante não fez esse exercício.

Podemos ver que apesar de muitos estudantes terem cometido erros (30), a maioria deles (18) cometeu erro em um, dois ou três itens apenas.





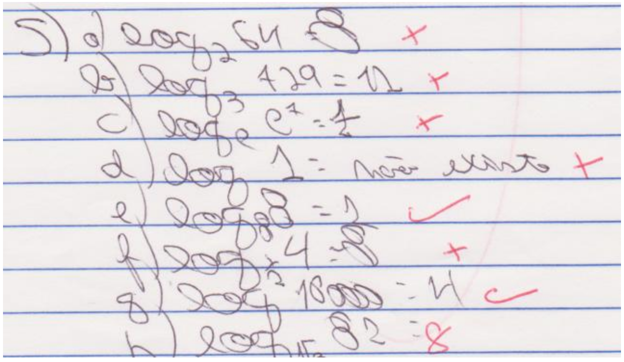


Ilustração 118: Digitalização de atividade realizada por estudante

No exercício 6 esperamos que os estudantes utilizem os conceitos aprendidos na Folha de Atividades 3, ou seja, as propriedades dos logaritmos.

06) Escreva cada expressão usando apenas um logaritmo:

a) $\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 3 =$ b) $\log_3 20 - \log_3 5 =$ c) $5 \times \log_{10} 2 =$

d) $\left(\dfrac{\log 36}{\log 7}\right) =$ e) $\left(\dfrac{1}{3}\right) \times \log_3 7 - \log_3 2 =$

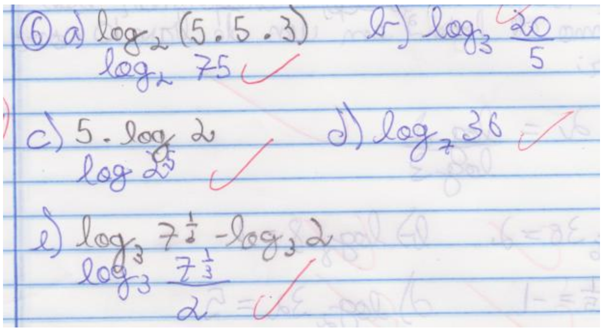
Ilustração119: Sexta atividade proposta na avaliação

Os resultados foram:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	10	10
Cometeram algum erro	12	10

Cinco estudantes erraram apenas um dos itens. Quatro estudantes erraram apenas dois itens. Oito estudantes erraram três itens. Dois estudantes acertaram apenas um dos itens e três estudantes erraram todo o exercício.

Abaixo temos as imagens das provas de dois estudantes.



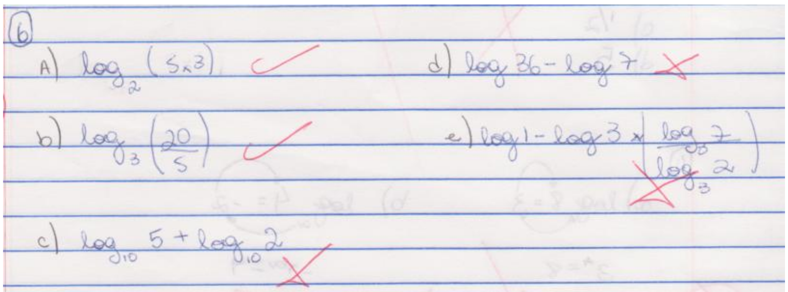


Ilustração 120: Digitalização de atividade realizada por estudantes

No exercício de número 7 o estudante deve reconhecer a base de uma função logarítmica através de seu gráfico. Nesta atividade são explorados os conhecimentos da aula expositiva sobre função logarítmica, momento 6 da sequência didática.

07) A figura a seguir mostra o gráfico da função logarítmica na base **b**. Qual é o valor de b?

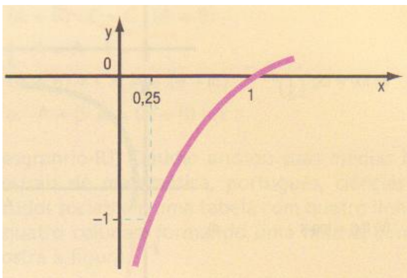


Ilustração 121: Sétima atividade proposta na avaliação

Seguem os resultados dessa atividade:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	6	9
Cometeram algum erro	16	11

Dezesseis estudantes não fizeram o exercício. Três estudantes erraram o exercício parcialmente, dois colocaram que a base do logaritmo era $\frac{1}{4}$ ao invés de 4, um não fez a divisão de 1 por 0,25. Oito estudantes erraram o exercício todo.

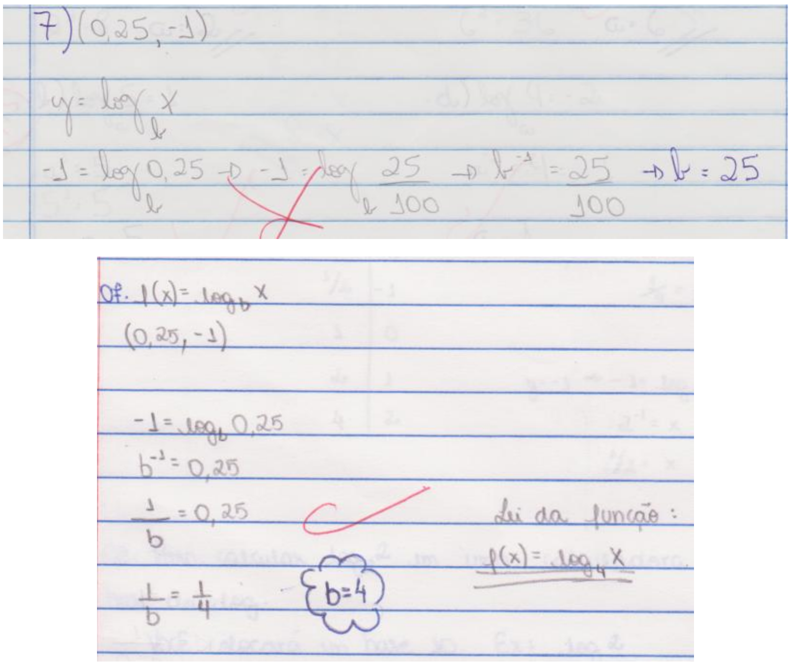


Ilustração 122: Digitalização de atividade realizada por estudantes

No exercício 8, temos um problema que envolve a escala Richter. Pedimos a quantidade de energia liberara em um terremoto.

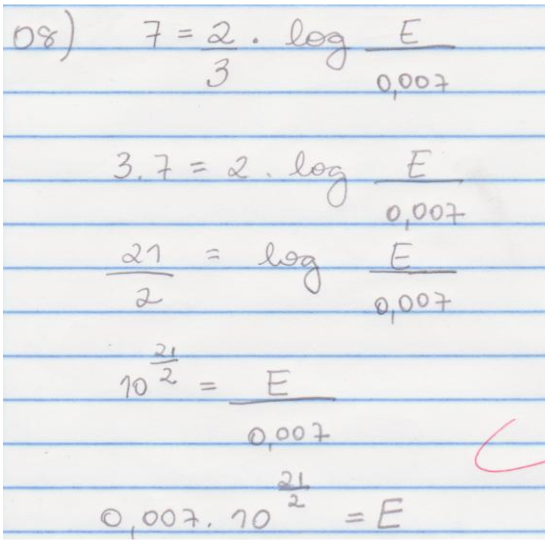
08) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é dada pela equação $I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{0{,}007}\right)$, em que E é a energia liberada no terremoto em kWh. Determine a energia liberada em um terremoto de intensidade 7 medida na escala Richter.

Ilustração 123: Oitava atividade proposta na avaliação

Seguem os resultados:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	12	13
Cometeram algum erro	10	7

Seis estudantes não fizeram o problema. Cinco erraram o problema todo e os outros seis erraram apenas no final do exercício.



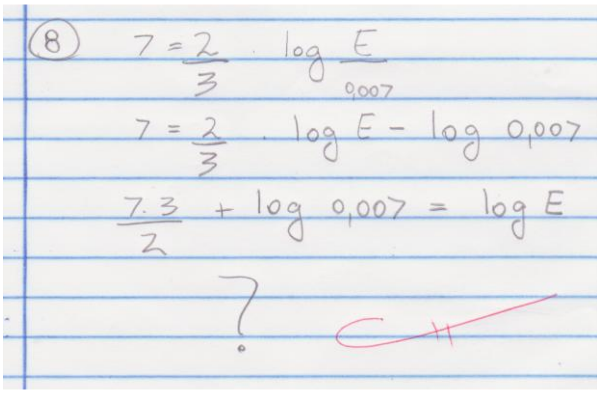


Ilustração 124: Digitalização de atividade resolvida por estudantes

Na maioria das provas que elaboramos na escola, colocamos um exercício extra. Se o estudante o fizer corretamente, podemos substituir qualquer um dos anteriores, que ele tenha errado pelo exercício extra. Assim nesta avaliação colocamos como exercício extra um problema que envolve logaritmo.

EXTRA: Ao se estudar o crescimento das palmeiras na cidade de Palmeirópolis constatou-se que a função que descreve esse crescimento em metros, após t anos, é $f(t) = 3^{\log_2(2t+1)}$. Quantos anos são necessários para que uma determinada palmeira atinja 27 metros de altura?

Ilustração 125: Nona atividade proposta na avaliação

Seguem os resultados:

	Classe 1	Classe 2
Acertaram	4	3
Cometeram algum erro	18	17

Vinte e oito estudantes não fizeram o exercício, já que se tratava de um exercício extra. A maioria deles disse que não houve tempo para a resolução desse exercício. Sete estudantes erraram o exercício, dos quais quatro colocaram o 27 no tempo (*t*), ao invés de colocar na altura (*f(t)*) e três não finalizaram o exercício, provavelmente por falta de tempo.

Abaixo temos trechos de algumas provas dos estudantes:

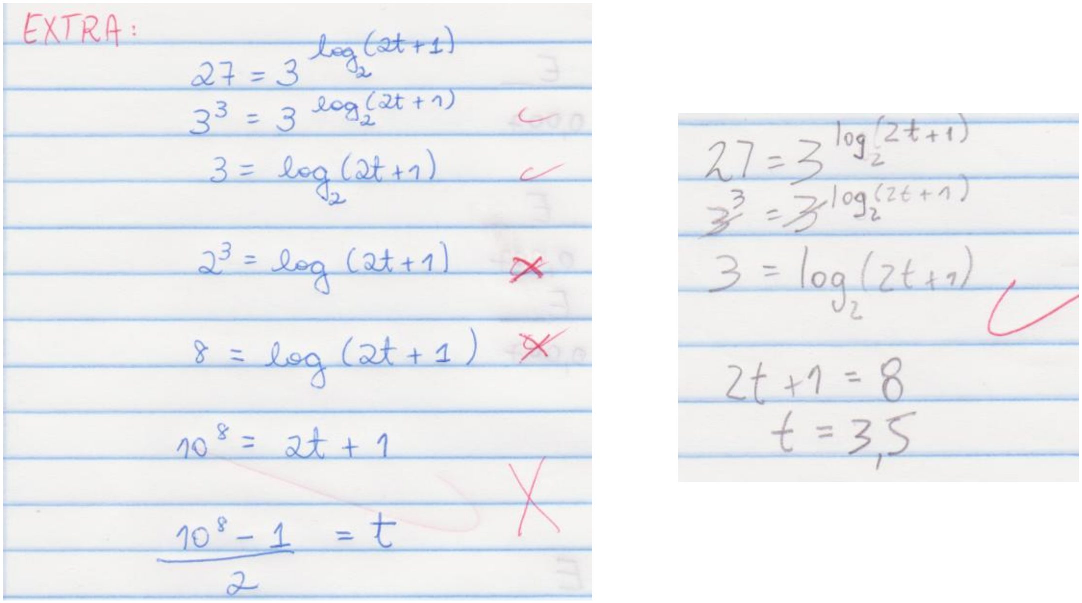


Ilustração 126: Digitalização de atividade resolvida por estudantes

14.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DO MOMENTO 10

Encerrando o nosso projeto esta avaliação foi aplicada individualmente aos estudantes que dele participaram. Analisando os resultados obtidos nas atividades da avaliação concluímos que nossos objetivos com a aplicação da sequência didática foram alcançados, pois apesar dos erros cometidos a maioria dos estudantes se saiu bem.

Nos exercícios que tivemos um grande número de estudantes cometendo erros, a maioria deles não errou o exercício todo, errou apenas algum item.

CAPÍTULO 15

Conclusão e Considerações Finais

15.1 INTRODUÇÃO

Depois da aplicação e análise de nossa sequência trazemos as conclusões e avaliações finais de nosso trabalho. Neste capítulo falamos da aplicação da sequência e também fazemos uma avaliação da metodologia utilizada. Colocamos ainda algumas observações pessoais a respeito da elaboração, aplicação e análise da sequência didática e por fim disponibilizamos nosso trabalho para os colegas professores e deixamos a cargo de cada um a modificação ou não do material de acordo com sua realidade.

15.2 AVALIAÇÃO DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O objetivo deste trabalho foi possibilitar aos estudantes um aprendizado significativo de logaritmo através da aplicação de uma sequência didática elaborada com recursos variados da Educação Matemática. Dentre esses recursos utilizamos a metodologia das tarefas exploratórias e as orientações da Engenharia Didática como forma de organizar o trabalho e garantir sua validação.

Essa sequência didática foi subdividida em dez momentos, cada um formando uma unidade pedagógica. Quatro desses momentos foram constituídos por folhas de atividades, três momentos de aulas expositivas com resolução de problemas, um momento em que foram utilizados computadores e calculadoras científicas e dois momentos dedicados à avaliação. Apesar de termos apenas dois momentos exclusivos dedicados à avaliação, esta foi feita também durante toda a aplicação da sequência didática.

A sequência foi aplicada para estudantes do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola cooperativa na cidade de Araraquara. A aplicação de nossa sequência didática foi feita em acordo com a coordenação pedagógica da escola, de modo que nossa interferência se constituísse em um acréscimo positivo para o aprendizado. Para a aplicação das atividades os estudantes foram divididos em duplas. Acreditamos que dessa forma os estudantes se sentiram mais confiantes e puderam dialogar e trocar ideias para a resolução das tarefas. Dessa forma as atividades foram aproveitadas da melhor maneira possível.

No início da aplicação da sequência didática os estudantes ficaram um pouco inseguros, pois não estavam muito acostumados a trabalhar de maneira autônoma, principalmente nas aulas de Matemática. Durante o início da aplicação da primeira Folha de Atividades, eles faziam muitas perguntas e tinham muitas dúvidas. Mas logo perceberam qual era a ideia de nossa proposta. Ao final da primeira Folha de Atividades os estudantes estavam muito entusiasmados. Vimos que a ideia da redução das operações chamou muito sua atenção. A partir desse primeiro momento, se adaptaram à metodologia e no restante das atividades da sequência didática trabalharam de forma independente, solicitando ajuda apenas quando era necessário. Ficavam esperando qual seria a próxima Folha de Atividades e qual seria o novo conceito a ser aprendido. O trabalho em grupo foi muito produtivo, pois percebemos que quando um estudante tinha alguma dúvida imediatamente discutia com o colega do grupo sobre ela.

Percebemos que os estudantes tiveram uma participação mais ativa na construção dos conceitos e no aprendizado das técnicas. Podemos afirmar isso devido a uma observação que fizemos. Vários estudantes de nossas classes não gostam muito das aulas de Matemática, pois não as acham interessantes. Quando são solicitados a resolver os problemas no formato mais tradicional sempre se mostram reticentes. Mas na ocasião da aplicação da nossa sequência didática modificaram seu comportamento, e se mostraram o tempo todo interessados. Observamos o caso de um estudante que nunca emite sua opinião e raramente faz as atividades propostas em sala. Durante a aplicação da sequência houve momentos em que ele chegou a discutir com outro estudante dizendo que a forma com que ele resolveu a atividade em questão era mais apropriada do que a resolução do colega.

Consideramos que a aplicação de nossa sequência didática ocorreu dentro do previsto, que tudo aconteceu da melhor forma possível e que nossos objetivos foram alcançados.

15.3 AVALIAÇÃO DO MÉTODO

Neste trabalho nos propusemos a construir uma sequência didática completa para o ensino dos logaritmos. Nosso principal desejo era aplicar um material que fosse mais interessante para os estudantes do que o tradicional e ao mesmo tempo favorecesse o desenvolvimento de sua autonomia.

Como já havíamos lido sobre a Engenharia Didática procuramos seguir suas orientações. Já estávamos de posse de uma análise prévia do problema. Aliás, essa análise é que nos levou a escolher esse tema para nosso trabalho de mestrado profissional. Sabíamos das dificuldades que os professores encontram para ensinarem logaritmos e que muitos livros didáticos trazem uma abordagem excessivamente algébrica. Isso não atrai os estudantes e dificulta o trabalho do professor.

Ao iniciar a elaboração da sequência didática percebemos que não poderíamos descartar totalmente o livro didático adotado na escola assim como a metodologia tradicional de aulas expositivas. Veio-nos então a idéia de aglutinar a esses elementos folhas de atividades em que tivemos a liberdade de introduzir métodos e conteúdos inspirados pela história da Matemática e pela metodologia que utiliza tarefas exploratórias. Essas folhas de atividades foram cuidadosamente escritas incluindo textos breves, mas explicativos, mesclados com atividades na forma de problemas subdivididos em itens com nível de dificuldades crescente. Cada parte da folha de atividade tinha um objetivo pedagógico determinado, sendo cada um, um pequeno pedaço de todo o conjunto.

Conforme já descrevemos na seção anterior podemos considerar que nossos objetivos foram alcançados com a aplicação da sequência didática. A análise dessa aplicação a partir dos resultados apresentados pelos estudantes nos fizeram ver o acerto de nossas escolhas quanto à metodologia adotada.

15.4 AUTO AVALIAÇÃO

Durante a preparação, a aplicação e a análise desta sequência didática ficou claro que o trabalho de pesquisa que realizamos contribuiu significativamente para nosso aprimoramento profissional.

Na preparação das atividades foi necessário realizar uma pesquisa a respeito do tema tratado. Essa pesquisa fez com que observássemos detalhes que antes, talvez devido à falta de experiência ou ainda à falta de tempo, não tivéssemos notado o quanto são importantes no trabalho de um professor em sala de aula. A preparação levou algum tempo e demandou muito trabalho e várias revisões, mas acreditamos que as atividades alcançaram nossas metas em relação à elaboração de nossa sequência.

Durante a aplicação das atividades da sequência didática tivemos outro momento de enriquecimento profissional. Pudemos verificar mais detalhadamente o comportamento dos estudantes, prestando mais atenção à reação de cada um deles para verificarmos se a aprendizagem estava realmente se dando da forma com que planejamos. Nesta etapa de nosso trabalho julgamos que a maior contribuição para nosso aprimoramento foi o acompanhamento dos estudantes. A avaliação contínua feita durante o processo de aplicação contribuiu para que percebêssemos em quais pontos os estudantes precisavam de mais ajuda ou em quais pontos eles conseguiam trabalhar de forma mais independente.

Na análise dos resultados podemos dizer que nosso aprimoramento profissional se deu pela maior atenção que demos a cada atividade de cada momento da sequência didática. Ao observarmos com muita atenção as atividades dos estudantes pudemos perceber com detalhes pontos em que os estudantes têm mais ou menos facilidade e como conseguiram superar as dificuldades, coisa que antes da realização deste trabalho não percebíamos com tanta facilidade. A análise nos fez perceber ainda o quanto é importante essa observação no processo de aprendizagem.

15.5 CONCLUSÃO FINAL

Disponibilizamos assim uma sequência didática para o ensino de logaritmos como produto final de nosso trabalho de mestrado profissional. Esperamos ter contribuído para a solução desse difícil problema que é o ensino dos logaritmos.

A sequência didática não sofreu grandes modificações após sua aplicação. Fizemos apenas uma pequena alteração na Folha de Atividades 2 e disponibilizamos essa folha com a alteração no Apêndice B.

As outras Folhas de Atividades não foram modificadas e permanecem na forma com que foram apresentadas no Apêndice A.

O professor que desejar utilizar essas folhas deve se sentir a vontade para adaptá-las de acordo com o planejamento pedagógico da escola e a realidade de seus estudantes.

Podemos dizer que ao final da realização deste trabalho teremos, como profissional da educação, uma visão e uma experiência bem diferente da que tínhamos no início. O aperfeiçoamento é visível, muitas ideias surgiram durante a realização deste trabalho e julgamos ser possível que nossas aulas sejam mais interessantes e mais produtivas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT** – Revista Eletrônica de Educação Matemática, UFSC, Florianópolis, v. 3.6, 2008. p.62-77.

ARTIGUE, Michele. Didactica Engineering as a framework for the conception of teaching products. In: BIEHLER, Rolf et al. **Didactics of mathematics as a scientific discipline.** U.S.A: Kluwer Academic Publishers, 1994. p.27-39.

______. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didática das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.193-217.

ASSUMPÇÃO, Marcelo; DIAS NETO, Coriolano de Marins. Sismicidade e estrutura interna da Terra. In: TEIXEIRA, Wilson et al. **Decifrando a terra**. São Paulo: Oficina de Textos, 2000. p. 43-62.

BATSCHELET, Edward. **Introdução à matemática para biocientistas.** Tradução de Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Interciência; Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978. 596 p.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** 8. ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974. 488 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília, 2006. v.2. 137 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2009.

_____. Orientações educacionais complementares aos p**arâmetros curriculares nacionais do ensino médio (PCN+)**. Brasília, 2007. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2009.

_____. **Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio**. Brasília, 1999. 360 p.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean. **Didática das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.35-111.

_____. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. 2. ed. Porto Alegre, RS: Artmed Editora, 1996. p. 48-72.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké,** Campinas, v.13, n.23, jan./jun.2005. p.87-129.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único:** contexto e aplicações. 3. ed. São Paulo. Editora Ática, 2009. 736 p.

EDWARDS, Charles Henry. Napier's Wonderful Logarithms. In: **The historical development of the calculos**. 26. ed. New York: Springer Verlag, 1979. p. 142-165.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 3. ed**.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. 844 p.

FERREIRA, Ronize Lampert. **Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a Engenharia Didática**. 2006. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática). Pró Reitoria de Pós Graduação e Pesquisa Área de Ciências Naturais e Tecnológicas, UNIFRA - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2007.

GÁLVEZ, Grecia. A didática da Matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. 2. ed Porto Alegre, RS: Artmed Editora, 1996. p. 26-35.

GAMBLE, Marvin. Teaching logarithms day one. **Mathematics teacher,** U.S.A., v.99, n.1, ago. 2005. p. 66-67.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática completa.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. v.1. (Coleção Matemática completa).

HAMMACK, Richard; LYONS, Davis. A simple way to teach logarithms. **Mathematics teacher,** U.S.A., v. 88, n. 5, maio 1995. p. 374-375.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática volume único.** 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2007. 688 p.

KARRER, Mônica. **Logaritmos:** proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora, 1999. 227 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 1999.

LOMBARDI, Ricardo et al. A Terra se mexe o tempo todo. In: **GUIA do estudante:** atualidades vestibular 2009. 8. ed. São Paulo: Editora Abril, 2009. p. 204-207.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos.** 2. ed**.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. 107 p. (Coleção do Professor de Matemática.)

_____. Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. 237 p. v.1. (Coleção do Professor de Matemática.)

MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. 254 p. (Série Trilhas).

MELLO, José Luiz Pastore et al. **Matemática, volume único:** construção e significado. São Paulo: Editora Moderna, 2005. 791 p.

MIORIM, Maria Angela; MIGUEL, Antonio. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira.** Campinas: Gráfica da Faculdade de Educação da UNICAMP; Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2001. 107 p.

OLIVEIRA, Andréia Júlio de. **O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. 2005. 123 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2005.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função: u**ma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 165 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 1997.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. **A aritmética dos números reais**. São Paulo: UFSCar. 2008. (a publicar).

PINTO, Neuza Bertoni. Contrato didático ou contrato pedagógico? **Revista diálogo educacional,** Curitiba, v. 4, n.10, set./dez. 2003. p.93-106.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** 3. ed. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

PONTE, João Pedro. **Investigar, ensinar e aprender**. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf>. Acesso em: 06 ago. 2008.

____. **Gestão curricular em Matemática**. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2008.

SAMPAIO, João Carlos Vieira. **John Napier, Henry Brigss e a invenção dos logaritmos.** Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/logshistoria.PDF>. Acesso em: 10 ago. 2008.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo**. Grandezas e medidas:** escalas logarítmicas**.** Disponível em: **<**http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/33/arquivos/Matematica%20Parte%204.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2009.

_____. Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio – 1ª série, 3º bimestre. São Paulo, 2008. 56 p.

_____. Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Coordenação geral de Maria Inês Fini. São Paulo, 2008. 59 p.

Apêndice A

Folha de Atividades 1: *Simplificando Cálculos*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º ___

ENSINO MÉDIO - DATA: / / 2009 PROF:

SIMPLIFICANDO CÁLCULOS

I) No tempo em que não havia calculadora, não era fácil fazer contas. Vamos tentar!

a) 8 1 9 2 | 2 5 6

b) 4 0 9 6
x 1 2 8

Nos séculos XVI e XVII o uso da Trigonometria para o estudo da Astronomia exigia uma necessidade de precisão em cálculos com números grandes, com 8 ou mais casas decimais. Era preciso multiplicar, dividir, extrair raízes desses números grandes. Como não existiam calculadoras e computadores, isso dava muito trabalho. Em meados do século XVI, o monge e matemático Michael Stifel, partindo de uma antiga idéia de Arquimedes, começou a usar algumas tabelas numéricas para facilitar cálculos. Vejamos uma dessas tabelas:


Michael Stifel

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Você reconhece essas sequências numéricas?

A sequência da 1ª linha é uma ___________________________ de razão____.

A sequência da 2ª linha é uma ___________________________ de razão____.

II) Vamos usar essa relação para fazer umas contas. Observe:

Para calcular **8192** ÷ **256** olhamos esses números na 1ª linha da tabela e procuramos os seus correspondentes na 2ª linha, que são 13 e 8.

Com os números encontrados na 2ª linha fazemos uma subtração, **13 – 8** que é igual a **5** e vemos que o correspondente do número **5** na 1ª linha é **32**, com isso temos que 8192 ÷ 256 = 32.

32			256					8192
5			8					13

13 - 8

8192 ÷ **256** desça na tabela e faça: 13 - 8 = 5 suba e veja o resultado: **32**

Confere? Para fazer uma divisão, fizemos uma subtração, não é melhor?
Vimos que 8192 ÷ 256 é 32 será isso coincidência?

Usando a tabela, você pode economizar cálculos. Faça as operações propostas usando esse método e depois confira com uma calculadora:

a) **512** ÷ **64** → 9 – 6 = 3 → **8**	b) 1024 ÷ 16 →	c) 4096 ÷ 128 →
512 ÷ **64 = 8**	1024 ÷ 16 =	
d) 65536 ÷ 128 →	e) 131072 ÷ 4096 →	f) 1048576 ÷ 512 →

Pense no que você fez com a divisão e faça agora multiplicações:

g) 8 x 64 →	h) 32 x 4096 →	i) 32768 x 32 →
j) 2048 x 512 →	k) 8192 x 16 →	l) 128 x 4096 →

SUBSTITUÍMOS A DIVISÃO POR UMA______________________________________
SUBSTITUÍMOS A MULTIPLICAÇÃO POR UMA__________________________________

IV) Calcule sem usar a calculadora $4^3 =$ $8^4 =$

Para calcular 4^3, basta descer na tabela e **multiplicar** o número encontrado por três, suba e encontraremos o 64, com isso teremos $4^3 = 64$.

4				64
2				6

x 3

Para calcular 8^4, basta descer e **multiplicar** o número encontrado por quatro, suba e encontraremos o 4096, com isso observamos que $8^4 = 4096$.

8									4096
3									12

x 4

Vamos verificar se o método funciona? Faça as contas usando–o e depois confira com a calculadora:

a) $\mathbf{16^3} \rightarrow 4 \times 3 = 12 \rightarrow \mathbf{4096}$	b) $8^5 \rightarrow$	c) $4^6 \rightarrow$
$\mathbf{16^3 = 4096}$		
d) $32^3 \rightarrow$	e) $512^2 \rightarrow$	f) $1024^2 \rightarrow$

Se na potenciação você multiplicou, na radiciação você deverá____________:

g) $\sqrt{256} \rightarrow$	h) $\sqrt{1024} \rightarrow$	i) $\sqrt{4096} \rightarrow$
j) $\sqrt[3]{512} \rightarrow$	k) $\sqrt[3]{4096} \rightarrow$	l) $\sqrt[3]{32768} \rightarrow$

SUBSTITUÍMOS A POTENCIAÇÃO POR UMA__________________________

SUBSTITUÍMOS A RADICIAÇÃO POR UMA____________________________

Perceba que fizemos uma redução de operações e os cálculos se tornaram muito mais rápidos e fáceis, foi isso que os matemáticos fizeram com suas tabelas nos séculos XVI e XVII.

Agora, vamos explicar. Vamos escrever a tabela de outra maneira. Fatore os números da primeira linha e reescreva-os usando potências de dois.

Complete a tabela:

1 2^0	2	4	8 2^3	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Observe a relação da primeira linha com a segunda. Na primeira linha temos sempre 2 elevado ao número da linha de baixo

1) Agora podemos explicar a conta:

$$4096 \div 16 = \frac{4096}{16} = \frac{2^{12}}{2^4}$$

$$\frac{2^{12}}{2^4} = 2^{12-4} = 2^8 = 256$$

Isso explica porque a divisão vira subtração.

2) Agora você vai explicar a **multiplicação:**

512 x 64 = ______________________________

256 x 128 = ____________________________

Isso explica porque a multiplicação vira________________.

3) Veja a explicação da **radiciação:**

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$$\sqrt{16384} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Isso explica porque a radiciação vira__________________.

4) Explique a **potenciação:**

$8^4 = (2^3)^4 =$ ______________________________

$32^3 =$ ___________________________________

Isso explica porque a potenciação vira___________________

Folha de Atividades 2: *Uma invenção interessante*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º___

ENSINO MÉDIO - DATA: / / PROF:

UMA INVENÇÃO INTERESSANTE

Os matemáticos e os astrônomos perceberam que se trabalhassem com os expoentes dos números, quando escritos em forma de potência, seus cálculos seriam simplificados. Com isso criaram tabelas de duas colunas (ou duas linhas) em que se colocava os termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 (potências de um certo número) em correspondência com os termos de uma progressão aritmética (na verdade os expoentes dos números) e chamou-as tábuas de logaritmos.

1 2^0	**2** 2^1	**4** 2^2	**8** 2^3	**16** 2^4	**32** 2^5	**64** 2^6	**128** 2^7	**256** 2^8	**512** 2^9	**1024** 2^{10}	**2048** 2^{11}	**4096** 2^{12}	**8192** 2^{13}	**16384** 2^{14}	**32768** 2^{15}	**65536** 2^{16}	**131072** 2^{17}
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**

Na tabela, o número de baixo chama-se **logaritmo** do número de cima. Assim:

128
7
O logaritmo de 128 é 7

Pois $2^7 = 128$

512
9
O logaritmo de 512 é 9

Pois $2^9 = 512$

8192
13
O logaritmo de 8192 é 13

Pois $2^{13} = 8192$

OBSERVE QUE O **LOGARITMO** É O **EXPOENTE** DE UMA POTÊNCIA.

Complete a tabela:

	Abreviando:		Abreviando:
O logaritmo de 2048 é 11	log (2048) = 11	O logaritmo de 4096 é_____.	log (4096) =____
O logaritmo de 256 é _____.	log (256) = ____	O logaritmo de 8 é_________.	
O logaritmo de 32 é________.		O logaritmo de 16384 é____.	

Vamos trabalhar com uma PG de razão 3:

1 3^0	**3** 3^1	**9** 3^2	**27** 3^3	**81** 3^4	**243** 3^5	**729** 3^6	**2187** 3^7	**6561** 3^8	**19683** 3^9	**59049** 3^{10}	**177147** 3^{11}	**531441** 3^{12}
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

81 ⤵ **O logaritmo de 81 é 4**

4

Pois $3^{4} = 81$

2187 ⤵ **O logaritmo de 2187 é 7**

7

Pois $3^{7} = 2187$

Complete a tabela:

	Abreviando:		Abreviando:
O logaritmo de 81 é 4	log (81) = 4	O logaritmo de 2187 é_____.	log
O logaritmo de 6561 é _____.	log (6561) = ____	O logaritmo de 177147 é________.	

Vemos que quando a base das potências é 2 ou 3 muitos números ficam de fora. Por exemplo nenhuma das tabelas anteriores permite fazer 9571 x 111275. Por isso, em meados do século XVII John Napier, um rico e inteligente lorde escocês que tinha tomado conhecimento das tabelas de Michael Stifel, propôs tabelas de razões menores para abranger uma quantidade maior de números.

Se tivermos uma tabela em que a PG tem razão (1,1), os termos estão mais próximos

1 $(1{,}1)^{0}$	**1,1** $(1{,}1)^{1}$	**1,21** $(1{,}1)^{2}$	**1,331** $(1{,}1)^{3}$	**1,4641** $(1{,}1)^{4}$	**1,61051** $(1{,}1)^{5}$	**1,771561** $(1{,}1)^{6}$	**1,9487171** $(1{,}1)^{7}$	**2,14358881** $(1{,}1)^{8}$	**2,357947691** $(1{,}1)^{9}$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

1,331 ⤵ **O logaritmo de (1,331) é 3**

3

Pois $(1{,}1)^{3} = 1{,}331$

1,771561 ⤵ **O logaritmo de (1,771561) é 6**

6

Pois $(1{,}1)^{6} = 1{,}771561$

Assim podemos montar qualquer tabela e fazer redução de cálculos com quaisquer números.

COMO DIFERENCIAR AS TABELAS? Usaremos a seguinte notação:

128

$2^{7} = (128)$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{\log_2 (128) = 7}$

7

Se o log vem de uma tabela de base 2, dizemos LOGARITMO DE 128 **NA BASE DOIS** É SETE.

81

$3^{4} = (81)$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{\log_3 (81) = 4}$

4

Portanto o LOGARITMO DE 81 **NA BASE TRÊS** É QUATRO.

LOGARITMOS

Já vimos nas atividades anteriores que o logaritmo é um expoente que foi criado para facilitar cálculos. Para nos familiarizar com os logaritmos vamos fazer algumas atividades:

PARTE I) PREENCHA A CAIXA AZUL COM O NÚMERO CORRETO:

a) $2^{\square} = (16) \leftrightarrow \log_2 (16) = \square$

b) $3^{\square} = (243) \leftrightarrow \log_3 (243) = \square$

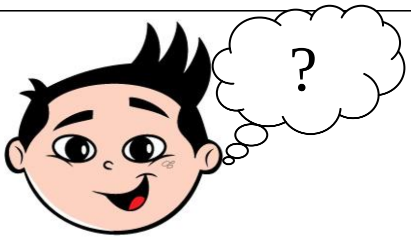
c) $\log_6 (36) = \square \leftrightarrow 6^{\square} = (36)$

d) $\log_7 (1) = \square \leftrightarrow 7^{\square} = (1)$

e) $\log_2 (8) = \square$

f) $\log_{10} (1000) = \square$

g) $\log_5 (125) = \square$



O que acontece se eu fizer uma tabela logarítmica com PG de razão 1?

Calcule: $\log_1 32 = \square$ $\log_1 5 = \square$

Qual é a sua conclusão?____

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com a ≠ 1, se **b = a^c^** — i.e. $b = a^c$, então o expoente **c** chama-se **LOGARITMO** de **b** na base **a**.

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b, \text{ com a e b positivos e } a \neq 1.$$

PARTE II) AGORA CALCULE OS LOGARITMOS E PREENCHA A TABELA:

h) $\log_2 (16)$=	Logaritmo de 16 na base dois é_________________________
i) $\log_3 (9)$=	Logaritmo de 9 na base três é ___________________
j) $\log_4 (16)$=	Logaritmo de
k) $\log_3 (27)$=	
l) $\log_5 (125)$=	
m) $\log_4 (64)$=	
n) $\log_9 (9)$=	
o) $\log_{10} (100)$=	
p) $\log_{10} (10000)$=	

PARTE III) CALCULE OS LOGARITMOS ABAIXO:

a) $\log_2 (2)=$ b) $\log_5 (5)=$ c) $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}\right)=$ d) $\log_9 (9)=$

Nos itens a a d, você percebeu alguma particularidade? Qual?

___

___

e) $\log_7 (1)=$ f) $\log_8 (1)=$ g) $\log_{10} (1)=$ h) $\log_2 (1)=$

O que você observou nos logaritmos dos itens e a h? Justifique.

___

___

i) $\log_2 (2^5) =$ j) $\log_3 (3^2) =$ k) $\log_5 (5^3) =$ l) $\log_{10} (10^4) =$

Você encontrou alguma regularidade nos logaritmos dos itens i a l? Qual?

___

___

m) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=$ n) $\log_{\frac{1}{5}}(5)=$ o) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)=$ p) $\log_{\frac{1}{2}}(2)=$

Há alguma regularidade nos itens de m a p?

___

___

___

q) $2^{\log_2 (16)}$ r) $3^{\log_3 (27)}$ s) $5^{\log_5 (625)}$ t) $7^{\log_7 (49)}$

O que você observou nos itens q a t?

___

___

Faça um pequeno resumo das regularidades encontradas:

___

___

___

___

___

___

___

___

Folha de Atividades 3: *Uma propriedade importante*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º_____

ENSINO MÉDIO - DATA: / / PROF:

UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE

Na atividade anterior, vimos que enquanto na exponencial calculamos as potências, no logaritmo calculamos o expoente. Assim, podemos dizer que **a ação do logaritmo é oposta à ação da exponencial.**

$2^7 = (128) \longrightarrow \log_2 (128) = \mathbf{7}$ $\qquad$ $3^4 = (81) \longrightarrow \log_3 (81) = \mathbf{4}$

ATIVIDADE 1:

QUANDO TRABALHAMOS COM AS PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL, VIMOS QUE $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, ENTÃO TEMOS A SEGUINTE REGRA:

A exponencial de uma soma é o produto das exponenciais.

Seguindo a lógica, o logaritmo deve ter uma propriedade semelhante, mas ao contrário, do tipo:

O logaritmo do produto é a soma dos logaritmos.

Vamos verificar?

$$\log_2 (2048 \times 256) \xrightarrow{\text{Fatorando o 2048 e o 256 temos}} \log_2 (2^{11} \times 2^8)$$

$$\log_2 (2^{11} \times 2^8) \xrightarrow{\text{Usando propriedades de potência}} \log_2 (2^{11+8})$$

$$\log_2 (2^{11+8}) \xrightarrow{\text{Calculando esse log, temos}} 11 + 8$$

$$\xrightarrow{\text{Sabemos que}} \quad 11 = \log_2 2^{11} \quad \text{e} \quad 8 = \log_2 2^8$$

$$11 + 8 = \log_2 2^{11} + \log_2 2^8 = \log_2 2048 + \log_2 256$$

$$\log_2 (2048 \times 256) = \log_2 2048 + \log_2 256$$

NUMA MESMA BASE, O **LOGARITMO DO PRODUTO** DE DOIS NÚMEROS POSITIVOS **É IGUAL À SOMA DOS LOGARITMOS** DESSES NÚMEROS.

Faça o mesmo para:

$\log_2$ (512 x 32) = $\log_2 (2^9 \times 2^5)$ **=** $\log_2 (2^{9+5})$ **=** 9 + 5 **=** $\log_2 (2^9) + \log_2 (2^5)$ **= $\log_2$ (512) + $\log_2$ (32)**
$\log_2$ (128 x 4096) = ______________________________
$\log_3$ (81 x 27) = ______________________________

Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_3$ (**6**) = $\log_3 (2 \times 3) = \log_3 2 + \log_3 3$	$\log_5$ (**21**) = ______________________
$\log_2$ (**35**) = ______________________	$\log_2$ (**18**) = ______________________

Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a soma em multiplicação, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 + \log_2 2 = \log_2 (5 \times 2) = \log_2$ (**10**)	$\log_4 5 + \log_4 3$ = ______________________
$\log_3 7 + \log_3 2$ = ______________________	$\log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 5$ = ______________________

ATIVIDADE 2 :

QUANDO TRABALHAMOS COM AS PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL, VIMOS QUE $a^{x-y} = a^x / a^y$, ENTÃO TEMOS A SEGUINTE REGRA:

A exponencial de uma subtração é o quociente das exponenciais.

Seguindo a lógica novamente, o logaritmo deve ter uma propriedade semelhante, mas ao contrário, do tipo:

O logaritmo do quociente é a subtração dos logaritmos.

Vamos verificar?

$$\log_2\left(\frac{512}{32}\right) = \log_2\left(\frac{2^9}{2^5}\right) = \log_2 (2^{9-5}) = 9 - 5 = \log_2 (2^9) - \log_2 (2^5) = \log_2 (512) - \log_2 (32)$$

$$\log_2\left(\frac{512}{32}\right) = \log_2 (512) - \log_2 (32)$$

$\log_2\left(\frac{2048}{256}\right)$ = ______________________________

$\log_3\left(\frac{27}{6561}\right)$ = ______________________________

NUMA MESMA BASE, O **LOGARITMO DO QUOCIENTE** DE DOIS NÚMEROS POSITIVOS **É IGUAL À ____________ DOS LOGARITMOS** DESSES NÚMEROS.

Usando a propriedade anterior, escreva os logaritmos em forma de subtração:

$\mathbf{log_2} \left(\dfrac{1024}{128}\right) =$	$\mathbf{log_3} \left(\dfrac{81}{243}\right) =$
$\mathbf{log_5} \left(\dfrac{625}{5}\right) =$	$\mathbf{log_{10}} \left(\dfrac{1000}{3}\right) =$

Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a subtração em divisão, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 - \log_2 3 =$ ___________________________	$\log_5 10 - \log_5 2 =$ ___________________________
$\log_3 20 - \log_3 5 =$ ___________________________	$\log_2 26 - \log_2 3 =$

ATIVIDADE 3: VAMOS TRABALHAR AGORA COM POTÊNCIAS:

$$\mathbf{log_2 8^5} = \log_2 (8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8) = \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 = \mathbf{5 \times \log_2 8}$$

$$\mathbf{log_2 8^5 = 5 \times log_2 8}$$

NUMA MESMA BASE, O **LOGARITMO DE UMA POTÊNCIA** DE BASE POSITIVA É IGUAL AO **PRODUTO DO EXPOENTE PELO LOGARTIMO DA BASE** DA POTÊNCIA.

Faça o mesmo para:

$\mathbf{log_2 32^3 =}$ ____
$\mathbf{log_5 125^2 =}$ ____
$\log_2 \sqrt[5]{16} = \log_2 16^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}.\log_2 16$
$\mathbf{log_2} \sqrt[3]{256} =$ ____
$\mathbf{log_7} \sqrt{343} =$ ____

Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_2$ (**27**) = ______________________________	$\log_7$ (**125**) = ______________________________
$\log_3$ (**32**) = ______________________________	$\log_{10}$ (**10000**) = ___________________________

Agora, faça a volta da propriedade:

$3 \times \log_5 2 = \log_5 2^3 = \log_5 8$	$4 \times \log_2 3 =$ ______________________________
$2 \times \log_5 4 =$ ______________________________	$5 \times \log_{10} 2 =$ ____________________________

ATIVIDADE4: AS PROPRIEDADES QUE VIMOS ACIMA SÃO VÁLIDAS PARA LOGARTIMOS DE MESMA BASE. E QUANDO TEMOS BASES DIFERENTES?

Observe:

$\log_4 64 = 3$

$\log_2 64 = 6$ $\longrightarrow$ $3 = \dfrac{6}{2} \rightarrow$ $\log_4 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 4}$

$\log_2 4 = 2$

QUANDO FOR NECESSÁRIO É POSSÍVEL ESCREVER UM LOGARITMO EM UMA OUTRA BASE QUALQUER.

$$\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4} \qquad \log_5 125 = \frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 5}$$

Escreva os logaritmos a seguir na base 10:

a) $\log_3 81 = \dfrac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3}$ b) $\log_7 243 =$ c) $\log_5 3125 =$

Escreva os logaritmos a seguir na base 2:

d) $\log_{10} 32 =$ e) $\log_6 128 =$ f) $\log_{10} 2 =$

Após o estudo dessas propriedades, nas próximas atividades, estudaremos o logaritmo como função.

Folha de Atividades 4: *Para que servem os logaritmos?*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º _____

ENSINO MÉDIOVV - DATA: / / PROF:

PARA QUE SERVEM OS LOGARITMOS?

Vimos que o surgimento dos logaritmos estava diretamente relacionado com a simplificação de cálculos, nos séc. XVI e XVII, mas hoje com o avanço tecnológico de calculadoras e computadores, para que servem os logaritmos?

LOGARITMOS E ESCALAS: Essa é uma das aplicações do logaritmo.

Represente graficamente a situação descrita pela tabela abaixo:

Conjunto	Nº	Faça aqui o seu gráfico.
Um grupo de amigos	10	
Formandos de uma escola	100	
Estudantes de uma escola	1 000	
Pessoas de uma pequena cidade	10 000	
Habitantes de uma cidade	100 000	
Habitantes de uma região urbana	1 000 000	
Habitantes de um pequeno país	10 000 000	
Habitantes de um país	100 000 000	

Que tipo de representação você usou?____

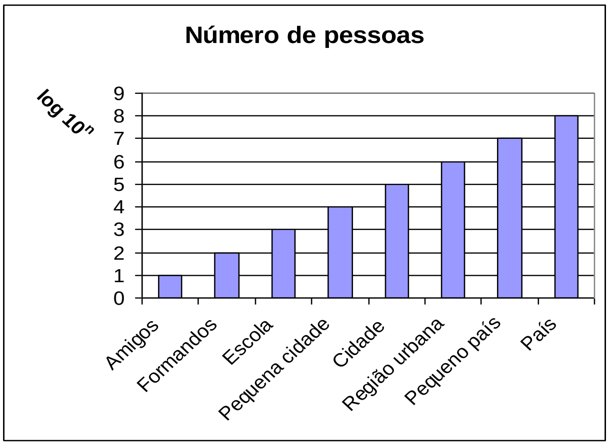
Tentou outras?____

Na sua representação, os números da 2ª coluna estão numa escala proporcional?___________________________

Viu como é difícil representar graficamente certos fenômenos? Por isso, às vezes, é utilizada a escala logarítmica. O logaritmo diminui bastante o número. Por exemplo, log (1 000 000) = 6.

Vejamos outra vez a tabela acima, mas com uma coluna a mais. Usando agora a terceira coluna podemos fazer um gráfico de barras:

Conjunto	Nº	Logaritmos	
Amigos	10	log 10 =	1
Formandos	100	log 100 =	2
Escola	1 000	log 1000 =	3
Pequena cidade	10 000	log 10 000 =	4
Cidade	100 000	log 100 00 =	5
Região urbana	1 000 000	log 1 000 000 =	6
Pequeno país	10 000 000	log 10 000 000 =	7
País	100 000 000	log 100 000 000 =	8



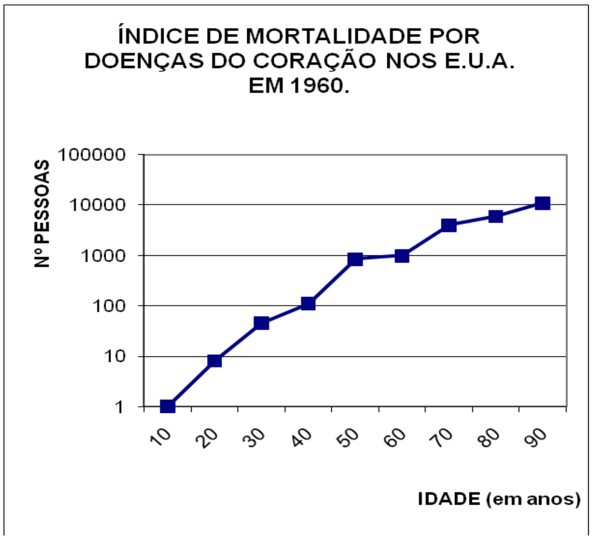
Com isso temos um exemplo de um gráfico de barras na escala logarítmica. Você já conhece a tabela que gerou esse gráfico. Analisando o gráfico responda:

a) Quando aumentarmos uma unidade na escala logarítmica, esse aumento é equivalente a que aumento real?

b) O gráfico na escala logarítmica tem vantagens e desvantagens. Quais são elas?

VEJAMOS UM EXEMPLO DE GRÁFICO CARTESIANO NA ESCALA LOGARÍTMICA:

Eixo em escala logarítmica



Fonte: Strehler, B.L.: *Time, cells, and aging.* (1963) (Simplificado)

Veja como a escala logarítmica ajudou na construção do gráfico. No eixo horizontal, que representa a idade em anos dos pacientes, a escala é real com espaçamento igual de 10 em 10 anos. No eixo vertical as linhas estão igualmente espaçadas, mas representam valores exponenciais. Portanto, no gráfico, a altura de uma linha é o logaritmo do número que ela representa. Assim o valor 1000 está na terceira linha, pois log 1000 = 3.

LOGARITMOS E TERREMOTOS:

Belos e dramáticos. Assim costumam ser considerados quase todos os fenômenos da natureza de grande magnitude. Maremotos, furacões, tempestades, erupções vulcânicas e terremotos, dentre outros, sempre nos impressionam, tanto pelo espetáculo visual quanto pelo poder de destruição.

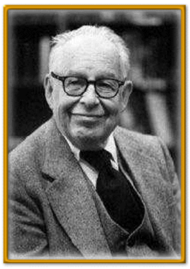
Você pode estar se perguntando o que os logaritmos têm a ver com terremotos. Sempre que acontece um terremoto, uma das primeiras informações contidas no noticiário é "quantos graus" teve aquele tremor.

O terremoto que aconteceu na Indonésia, em Novembro de 2008 teve 7,3 graus na escala Richter. O terremoto ocorrido no Japão, em Dezembro de 2008, teve 6,3 graus na escala Richter. Mas o que significa e como funciona esta escala? Ela serve para registrar a intensidade dos tremores de terra.

Um terremoto de pequena proporção, que não é nem mesmo percebido, pode liberar por volta de 1 trilhão de ergs. (Um erg é a unidade de medida de energia no sistema CGS e equivale a 10^{-7} Joules).

Devido aos altos valores envolvidos na medição de terremotos, usa-se uma escala logarítmica para representá-la, chamada Escala Richter.

A escala Ritchter foi criada por dois sismólogos americanos, Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, em 1935. Com o passar do tempo, entretanto, apenas o sobrenome de Charles ficou conhecido na definição da escala.



Charles Richter

Beno Gutenberg

Abaixo temos uma tabela que indica alguns dos terremotos conhecidos:

Local do Terremoto	***Data***	***Magnitude do terremoto na escala Richter (R)***
Lisboa, Portugal	1755	9,0 (estimado)
São Francisco, EUA	1906	8,0 (estimado)
Valdívia, Chile	1960	9,5
Peru	1970	7,7
Cidade do México	1985	8,0
Irã	1990	7,3
Índia	2001	7,9
Oceano Índico	2004	9,3
Indonésia	2006	6,2
China	2008	8,0
México	2009	7,4

Existem fórmulas diferentes para se calcular a magnitude na escala Richter. Cada uma das fórmulas nos dá a energia liberada em unidades diferentes: ergs, joule, kWh, etc. Uma delas é: $\log E = 11{,}8 + 1{,}5R$, onde **E** é a energia liberada (em ergs) e **R** a magnitude da escala Richter.

a) Observe como calculamos a energia liberada por um terremoto de magnitude **1,0** na escala Richter.

$\log E = 11,8 + 1,5 \cdot \mathbf{1}$

$\log E = 11,8 + 1,5$

$\log E = 13,3$

$\mathbf{10^{13,3} = E}$

Logo a energia liberada por um terremoto de 1 ponto na escala Richter é de $10^{13,3}$ ergs.

b) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **2, 0** na escala Richter.

c) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **3, 0** na escala Richter.

d) Aumentando em uma unidade a magnitude do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada? (Para isso calcule a *razão* entre o item b e o item a.)

e) Calcule a energia liberada no terremoto ocorrido no Chile em 1960.

f) A usina de Itaipu produziu em 2008, aproximadamente $9,5 \times 10^{7}$ MWh de energia. Supondo que essa produção seja constante a partir dessa data, calcule quantos anos essa usina precisa gerar energia para que se equipare à energia liberada no terremoto do Chile de 1960. Dado: 1 erg = $2,778 \times 10^{-17}$ MWh.

LOGARITMOS E ACIDEZ:

Para caracterizar a acidez de um líquido, usa-se um indicador chamado de pH (potencial hidrogeniônico), determinado pela presença de hidrônios H_3O^+. A água tem íons H^+ livres, são poucos, mas existem, cerca de 1 *íon-grama* para cada 10^7 litros, ou seja a razão é $1/10^7$. Assim dizemos que o pH da água é 7. No suco de limão existem mais íons que na água, 1 *íon-grama* para cada 10^2 litros, a razão é $1/10^2$. Assim o pH do suco de limão é 2. *Observe que quanto **maior** é a concentração de hidrônios, **mais ácida** é a substância.*

O pH dá uma idéia da quantidade de íons H^+ que se encontram livres na substância, indicando a quantidade por unidade de volume.

Para medir a acidez de substâncias é mais prático considerar uma escala logarítmica.

O pH é definido por **pH = - log** $\mathbf{[H_3O^+]}$, sendo $[H_3O^+]$ a quantidade de íon-grama por litro. Por definição, o pH igual a 7 é considerado neutro, de 0 a 7, ácido e de 7 a 14, básico.

Abaixo temos o pH de algumas substâncias:

Ácido (maior concentração de hidrônios)

Substância	pH
Suco de limão	2
Suco de tomate	4
Leite	6,9
Água	7
Leite de magnésia	10

Básico (menor concentração de hidrônios)

a) Com base nas informações do texto acima responda: se um líquido tem 1 íon-grama H^+ para cada 1000 litros, qual o seu pH?

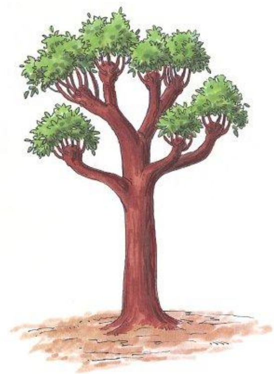
b) O que significa dizer que uma substância tem pH igual a 9?

c) O suco de laranja tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 10 vezes menor que o suco de limão. Qual é o pH da laranja?

d) O café preto tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 100 vezes maior do que a água pura. Qual é seu pH?

LOGARITMOS E FUNÇÕES:

Ao se estudar fenômenos físicos, químicos ou biológicos, temos muitas vezes a presença dos logaritmos como modelo de certas situações. Vejamos uma delas:



A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui, desde que a muda é plantada ($t = 0$), segundo o seguinte modelo matemático: $\mathbf{h(t) = 1,5 + \log_3 (t + 1)}$, com $h(t)$ em metros e t em anos.

a) No momento em que a muda é plantada, qual é a sua altura?

b) Transcorridos 26 anos, qual será a altura de uma dessas árvores?

c) Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, calcule o tempo transcorrido (em anos) do momento da plantação até o corte.

Apêndice B

Folha de Atividades 2 (modificada): *Uma invenção interessante.*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º_____

ENSINO MÉDIO - DATA: / / PROF:

UMA INVENÇÃO INTERESSANTE

Os matemáticos e os astrônomos perceberam que se trabalhassem com os expoentes dos números, quando escritos em forma de potência, seus cálculos seriam simplificados. Com isso criaram tabelas de duas colunas (ou duas linhas) em que se colocava os termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 (potências de um certo número) em correspondência com os termos de uma progressão aritmética (na verdade os expoentes dos números) e chamou-as tábuas de logaritmos.

1 2^0	**2** 2^1	**4** 2^2	**8** 2^3	**16** 2^4	**32** 2^5	**64** 2^6	**128** 2^7	**256** 2^8	**512** 2^9	**1024** 2^{10}	**2048** 2^{11}	**4096** 2^{12}	**8192** 2^{13}	**16384** 2^{14}	**32768** 2^{15}	**65536** 2^{16}	**131072** 2^{17}
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**

Na tabela, o número de baixo chama-se **logaritmo** do número de cima. Assim:

128 → 7 **O logaritmo de 128 é 7**

Pois $2^7 = 128$

512 → 9 **O logaritmo de 512 é 9**

Pois $2^9 = 512$

8192 → 13 **O logaritmo de 8192 é 13**

Pois $2^{13} = 8192$

OBSERVE QUE O **LOGARITMO** É O **EXPOENTE** DE UMA POTÊNCIA.

Complete a tabela:

	Abreviando:		**Abreviando:**
O logaritmo de 2048 é 11	log (2048) = 11	O logaritmo de 4096 é_____.	log (4096) =____
O logaritmo de 256 é _____.	log (256) = ____	O logaritmo de 8 é________.	
O logaritmo de 32 é_______.		O logaritmo de 16384 é____.	

Vamos trabalhar com uma PG de razão 3:

1 3^0	**3** 3^1	**9** 3^2	**27** 3^3	**81** 3^4	**243** 3^5	**729** 3^6	**2187** 3^7	**6561** 3^8	**19683** 3^9	**59049** 3^{10}	**177147** 3^{11}	**531441** 3^{12}
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

81

O logaritmo de 81 é 4

4

Pois $3^{4} = 81$

2187

O logaritmo de 2187 é 7

7

Pois $3^{7} = 2187$

Complete a tabela:

	Abreviando:		**Abreviando:**
O logaritmo de 81 é 4	log (81) = 4	O logaritmo de 2187 é_____.	log
O logaritmo de 6561 é _____.	log (6561) = ____	O logaritmo de 177147 é________.	

Vemos que quando a base das potências é 2 ou 3 muitos números ficam de fora. Por exemplo nenhuma das tabelas anteriores permite fazer 9571 x 111275. Por isso, em meados do século XVII John Napier, um rico e inteligente lorde escocês que tinha tomado conhecimento das tabelas de Michael Stifel, propôs tabelas de razões menores para abranger uma quantidade maior de números.

Se tivermos uma tabela em que a PG tem razão (1,1), os termos estão mais próximos

1	**1,1**	**1,21**	**1,331**	**1,4641**	**1,61051**	**1,771561**	**1,9487171**	**2,14358881**	**2,357947691**
$(1,1)^{0}$	$(1,1)^{1}$	$(1,1)^{2}$	$(1,1)^{3}$	$(1,1)^{4}$	$(1,1)^{5}$	$(1,1)^{6}$	$(1,1)^{7}$	$(1,1)^{8}$	$(1,1)^{9}$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

1,331

O logaritmo de (1,331) é 3

3

Pois $(1,1)^{3} = 1,331$

1,771561

O logaritmo de (1,771561) é 6

6

Pois $(1,1)^{6} = 1,771561$

Assim podemos montar qualquer tabela e fazer redução de cálculos com quaisquer números.

COMO DIFERENCIAR AS TABELAS? Usaremos a seguinte notação:

128

$2^{7} = (128) \iff \log_2 (128) = 7$

7

Se o log vem de uma tabela de base 2, dizemos LOGARITMO DE 128 **NA BASE DOIS** É SETE.

81

$3^{4} = (81) \iff \log_3 (81) = 4$

4

Portanto o LOGARITMO DE 81 **NA BASE TRÊS** É QUATRO.

LOGARITMOS

Já vimos nas atividades anteriores que o logaritmo é um expoente que foi criado para facilitar cálculos. Para nos familiarizar com os logaritmos vamos fazer algumas atividades:

PARTE I) PREENCHA A CAIXA AZUL COM O NÚMERO CORRETO:

a) $2^{\square} = (16) \leftrightarrow \log_2 (16) = \square$

b) $3^{\square} = (243) \leftrightarrow \log_3 (243) = \square$

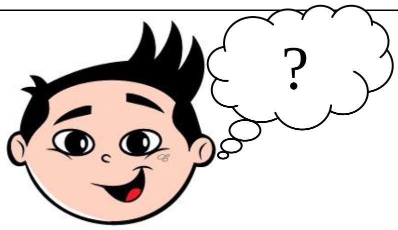
c) $\log_6 (36) = \square \leftrightarrow 6^{\square} = (36)$

d) $\log_7 (1) = \square \leftrightarrow 7^{\square} = (1)$

e) $\log_2 (8) = \square$

f) $\log_{10} (1000) = \square$

g) $\log_5 (125) = \square$



O que acontece se eu fizer uma tabela logarítmica com PG de razão 1?

1									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	0

Sendo assim existe $\log_1 32$?_______________

Qual é a sua conclusão?_______________________________________

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com a ≠ 1, se **b = a^{c}**, então o expoente **c** chama-se **LOGARITMO** de **b** na base **a**.

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b, \text{ com a e b positivos e } a \neq 1.$$

Agora, a base da potência é a *base do logaritmo*, o resultado da potência chama-se *logaritmando* e o expoente chama-se *logaritmo*.

PARTE II) AGORA CALCULE OS LOGARITMOS E PREENCHA A TABELA:

h) $\log_2 (16)$=	Logaritmo de 16 na base dois é_________________________
i) $\log_3 (9)$=	Logaritmo de 9 na base três é ___________________
j) $\log_4 (16)$=	Logaritmo de
k) $\log_4 (64)$=	
l) $\log_9 (9)$=	
m) $\log_{10} (100)$=	
n) $\log_{10} (10000)$=	

PARTE III) CALCULE OS LOGARITMOS ABAIXO:

a) $\log_2 (2)=$ b) $\log_5 (5)=$ c) $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}\right)=$ d) $\log_9 (9)=$

Nos itens a a d, você percebeu alguma particularidade? Qual?

___

___

e) $\log_7 (1)=$ f) $\log_8 (1)=$ g) $\log_{10} (1)=$ h) $\log_2 (1)=$

O que você observou nos logaritmos dos itens e a h? Justifique.

___

___

i) $\log_2 (2^5) =$ j) $\log_3 (3^2) =$ k) $\log_5 (5^3) =$ l) $\log_{10} (10^4) =$

Você encontrou alguma regularidade nos logaritmos dos itens i a l? Qual?

___

___

m) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=$ n) $\log_{\frac{1}{5}}(5)=$ o) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)=$ p) $\log_{\frac{1}{2}}(2)=$

Há alguma regularidade nos itens de m a p?

___

___

___

q) $2^{\log_2 (16)}$ r) $3^{\log_3 (27)}$ s) $5^{\log_5 (625)}$ t) $7^{\log_7 (49)}$

O que você observou nos itens q a t?

___

___

Faça um pequeno resumo das regularidades encontradas:

___

___

___

___

___

___

___

___

Apêndice C

Folha de Atividades 1 resolvida: *Simplificando cálculos*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º ___

ENSINO MÉDIO - DATA: / / 2009 PROF:

SIMPLIFICANDO CÁLCULOS

I) No tempo em que não havia calculadora, não era fácil fazer contas. Vamos tentar!

a) 8 1 9 2 | 2 5 6

5 1 2   *3 2*

0

b) 4 0 9 6

x 1 2 8

3 2 7 6 8

8 1 9 2 +

4 0 9 6 + +

5 2 4 2 8 8

Nos séculos XVI e XVII o uso da Trigonometria para o estudo da Astronomia exigia uma necessidade de precisão em cálculos com números grandes, com 8 ou mais casas decimais. Era preciso multiplicar, dividir, extrair raízes desses números grandes. Como não existiam calculadoras e computadores, isso dava muito trabalho. Em meados do século XVI, o monge e matemático Michael Stifel, partindo de uma antiga idéia de Arquimedes, começou a usar algumas tabelas numéricas para facilitar cálculos. Vejamos uma dessas tabelas:

Michael Stifel

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Você reconhece essas sequências numéricas?

A sequência da 1ª linha é uma *progressão geométrica* de razão *2*.

A sequência da 2ª linha é uma *progressão aritmética* de razão *1*.

II) Vamos usar essa relação para fazer umas contas. Observe:

Para calcular **8192 ÷ 256** olhamos esses números na 1ª linha da tabela e procuramos os seus correspondentes na 2ª linha, que são 13 e 8.

Com os números encontrados na 2ª linha fazemos uma subtração, **13 – 8** que é igual a **5** e vemos que o correspondente do número **5** na 1ª linha é **32**, com isso temos que 8192 ÷ 256 = 32.

32			256					8192
5			8					13

13 - 8

8192 ÷ 256 desça na tabela e faça: 13 - 8 = 5 suba e veja o resultado: **32**

Confere? Para fazer uma divisão, fizemos uma subtração, não é melhor?
Vimos que 8192 ÷ 256 é 32 será isso coincidência?

Usando a tabela, você pode economizar cálculos. Faça as operações propostas usando esse método e depois confira com uma calculadora:

a) **512 ÷ 64** → 9 – 6 = 3 → **8**	b) 1024 ÷ 16 → *10 - 4 = 6*	c) 4096 ÷ 128 → *12 – 7 = 5*
512 ÷ 64 = 8	*1024 ÷ 16 = 64*	*4096 ÷ 128 = 32*
d) 65536 ÷ 128 → *16 – 7 = 9*	e) 131072 ÷ 4096 → *17 – 12 = 5*	f) 1048576 ÷ 512 → *20 – 9= 11*
65536 ÷ 128 = 512	*131072 ÷ 4096 = 32*	*1048576 ÷ 512=2048*

Pense no que você fez com a divisão e faça agora multiplicações:

g) 8 x 64 → *3 + 6 = 9*	h) 32 x 4096 → *5 + 12 = 17*	i) 32768 x 32 → *15 + 5 = 20*
8 x 64 = 512	*32 x 4096 = 131072*	*32768 x 32 = 1048576*
j) 2048 x 512 → *11 + 9 = 20*	k) 8192 x 16 → *13 + 4 = 17*	l) 128 x 4096 → *7 + 12 = 19*
2048 x 512 = 1048576	*8192 x 16 = 131072*	*128 x 4096 = 524288*

SUBSTITUÍMOS A DIVISÃO POR UMA *subtração.*

SUBSTITUÍMOS A MULTIPLICAÇÃO POR UMA *adição.*

IV) Calcule sem usar a calculadora $4^3 =$ *64* $8^4 =$ *4096*

Para calcular 4^3, basta descer na tabela e **multiplicar** o número encontrado por três, suba e encontraremos o 64, com isso teremos $4^3 = 64$.

4				64
2				6

x 3

Para calcular 8^4, basta descer e **multiplicar** o número encontrado por quatro, suba e encontraremos o 4096, com isso observamos que $8^4 = 4096$.

8									4096
3									12

x 4

Vamos verificar se o método funciona? Faça as contas usando–o e depois confira com a calculadora:

a) $\mathbf{16^3} \rightarrow 4 \times 3 = 12 \rightarrow$ **4096**	b) $8^5 \rightarrow$ *$3 \times 5 = 15$*	c) $4^6 \rightarrow$ *$2 \times 6 = 12$*
$\mathbf{16^3 = 4096}$	*$8^5 = 32768$*	*$4^6 = 4096$*
d) $32^3 \rightarrow$ *$5 \times 3 = 15$*	e) $512^2 \rightarrow$ *$9 \times 2 = 18$*	f) $1024^2 \rightarrow$ *$10 \times 2 = 20$*
$32^3 = 32768$	*$512^2 = 262144$*	*$1024^2 = 1048576$*

Se na potenciação você multiplicou, na radiciação você deverá *dividir*.

g) $\sqrt{256} \rightarrow$ *$8 \div 2 = 4$*	h) $\sqrt{1024} \rightarrow$ *$10 \div 2 = 5$*	i) $\sqrt{4096} \rightarrow$ *$12 \div 2 = 6$*
$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{1024} = 32$	$\sqrt{4096} = 64$
j) $\sqrt[3]{512} \rightarrow$ *$9 \div 3 = 3$*	k) $\sqrt[3]{4096} \rightarrow$ *$12 \div 3 = 4$*	l) $\sqrt[3]{32768} \rightarrow$ *$15 \div 3 = 5$*
$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{4096} = 16$	$\sqrt[3]{32768} = 32$

SUBSTITUÍMOS A POTENCIAÇÃO POR UMA *multiplicação*.
SUBSTITUÍMOS A RADICIAÇÃO POR UMA *divisão*.

Perceba que fizemos uma redução de operações e os cálculos se tornaram muito mais rápidos e fáceis, foi isso que os matemáticos fizeram com suas tabelas nos séculos XVI e XVII.

Agora, vamos explicar. Vamos escrever a tabela de outra maneira. Fatore os números da primeira linha e reescreva-os usando potências de dois.

Complete a tabela:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072
2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}	2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Observe a relação da primeira linha com a segunda. Na primeira linha temos sempre 2 elevado ao número da linha de baixo

1) Agora podemos explicar a conta:

$$4096 \div 16 = \frac{4096}{16} = \frac{2^{12}}{2^{4}}$$

$$\frac{2^{12}}{2^{4}} = 2^{12-4} = 2^{8} = 256$$

Isso explica porque a divisão vira subtração.

2) Agora você vai explicar a **multiplicação:**

512 x 64 = $2^{9} \times 2^{6} = 2^{9+6} = 2^{15} = 32768$

256 x 128 = $2^{8} \times 2^{7} = 2^{15} = 32768$

Isso explica porque a multiplicação vira *adição*.

3) Veja a explicação da **radiciação:**

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^{5} = 32$$

$$\sqrt{16384} = \sqrt{2^{14}} = 2^{14/2} = 2^{7} = 128$$

Isso explica porque a radiciação vira *divisão*.

4) Explique a **potenciação:**

$8^{4} = (2^{3})^{4} = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4096$

$32^{3} = (2^{5})^{3} = 2^{5 \times 3} = 2^{15} = 32768$

Isso explica porque a potenciação vira *multiplicação*.

Folha de Atividades 2 resolvida: *Uma invenção interessante*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º____

ENSINO MÉDIO - DATA: / / PROF:

UMA INVENÇÃO INTERESSANTE

Os matemáticos e os astrônomos perceberam que se trabalhassem com os expoentes dos números, quando escritos em forma de potência, seus cálculos seriam simplificados. Com isso criaram tabelas de duas colunas (ou duas linhas) em que se colocava os termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 (potências de um certo número) em correspondência com os termos de uma progressão aritmética (na verdade os expoentes dos números) e chamou-as tábuas de logaritmos.

1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**	**4096**	**8192**	**16384**	**32768**	**65536**	**131072**
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**

Na tabela, o número de baixo chama-se **logaritmo** do número de cima. Assim:

128
7 **O logaritmo de 128 é 7**

Pois $2^7 = 128$

512
9 **O logaritmo de 512 é 9**

Pois $2^9 = 512$

8192
13 **O logaritmo de 8192 é 13**

Pois $2^{13} = 8192$

OBSERVE QUE O **LOGARITMO** É O **EXPOENTE** DE UMA POTÊNCIA.

Complete a tabela:

	Abreviando:		**Abreviando:**
O logaritmo de 2048 é 11	log (2048) = 11	O logaritmo de 4096 é *12*.	log (4096) = *12*
O logaritmo de 256 é *8*.	log (256) = *8*	O logaritmo de 8 é *3*.	*log (8) = 3*
O logaritmo de 32 é *5*.	*log (32) = 5*	O logaritmo de 16384 é *14*.	*log (16384) = 14*

Vamos trabalhar com uma PG de razão 3:

1	**3**	**9**	**27**	**81**	**243**	**729**	**2187**	**6561**	**19683**	**59049**	**177147**	**531441**
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

81

4

O logaritmo de 81 é 4

Pois $3^4 = 81$

2187

7

O logaritmo de 2187 é 7

Pois $3^7 = 2187$

Complete a tabela:

	Abreviando:		Abreviando:
O logaritmo de 81 é 4	*log (81) =4*	O logaritmo de 2187 é *7*	log (2187) = *7*
O logaritmo de 6561 é *8*	log (6561) = *8*	O logaritmo de 177147 é *11*	*log (177147) =11*

Vemos que quando a base das potências é 2 ou 3 muitos números ficam de fora. Por exemplo nenhuma das tabelas anteriores permite fazer 9571 x 111275. Por isso, em meados do século XVII John Napier, um rico e inteligente lorde escocês que tinha tomado conhecimento das tabelas de Michael Stifel, propôs tabelas de razões menores para abranger uma quantidade maior de números.

Se tivermos uma tabela em que a PG tem razão (1,1), os termos estão mais próximos

1 $(1,1)^0$	**1,1** $(1,1)^1$	**1,21** $(1,1)^2$	**1,331** $(1,1)^3$	**1,4641** $(1,1)^4$	**1,61051** $(1,1)^5$	**1,771561** $(1,1)^6$	**1,9487171** $(1,1)^7$	**2,14358881** $(1,1)^8$	**2,357947691** $(1,1)^9$	**2,5937424601** $(1,1)^{10}$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

1,331

3

O logaritmo de (1,331) é 3

Pois $(1,1)^3 = 1,331$

1,771561

6

O logaritmo de (1,771561) é 6

Pois $(1,1)^6 = 1,771561$

Assim podemos montar qualquer tabela e fazer redução de cálculos com quaisquer números.

COMO DIFERENCIAR AS TABELAS? Usaremos a seguinte notação:

128

7

$2^7 = (128) \iff \log_2 (128) = 7$

Se o log vem de uma tabela de base 2, dizemos LOGARITMO DE 128 **NA BASE DOIS** É SETE.

81

4

$3^4 = (81) \iff \log_3 (81) = 4$

Portanto o LOGARITMO DE 81 **NA BASE TRÊS** É QUATRO

.

LOGARITMOS

Já vimos nas atividades anteriores que o logaritmo é um expoente que foi criado para facilitar cálculos. Para nos familiarizar com os logaritmos vamos fazer algumas atividades:

PARTE I) PREENCHA A CAIXA AZUL COM O NÚMERO CORRETO:

a) $2^{4} = (16) \leftrightarrow \log_2 (16) = 4$

b) $3^{5} = (243) \leftrightarrow \log_3 (243) = 5$

c) $\log_6 (36) = 2 \leftrightarrow 6^{2} = (36)$

d) $\log_7 (1) = 0 \leftrightarrow 7^{0} = (1)$

e) $\log_2 (8) = 3$

f) $\log_{10} (1000) = 3$

g) $\log_5 (125) = 3$

O que acontece se eu fizer uma tabela logarítmica com PG de razão 1?

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	0

Sendo assim existe $\log_1 32$? *não*

Qual é a sua conclusão? *Não existe logaritmo de base 1*

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com a ≠ 1, se **b = a^c**, então o expoente **c** chama-se **LOGARITMO** de **b** na base **a**.

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b, \text{ com a e b positivos e } a \neq 1.$$

Agora, a base da potência é a ***base do logaritmo***, o resultado da potência chama-se ***logaritmando*** e o expoente chama-se ***logaritmo***.

PARTE II) AGORA CALCULE OS LOGARITMOS E PREENCHA A TABELA:

h) $\log_2 (16) = 4$	Logaritmo de 16 na base dois é *quatro*
i) $\log_3 (9) = 2$	Logaritmo de 9 na base três é *dois*
j) $\log_4 (16) = 2$	Logaritmo *de 16 na base quatro é dois*
k) $\log_4 (64) = 3$	*Logaritmo de 64 na base quatro é três*
l) $\log_9 (9) = 1$	*Logaritmo de 9 na base nove é um*
m) $\log_{10} (100) = 2$	*Logaritmo de 100 na base dez é dois*
n) $\log_{10} (10000) = 4$	*Logaritmo de 10000 na base dez é quatro*

PARTE III) CALCULE OS LOGARITMOS ABAIXO:

a) $\log_2(2)=$ *1* b) $\log_5(5)=$ *1* c) $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}\right)=$ *1* d) $\log_9(9)=$ *1*

Nos itens a a d, você percebeu alguma particularidade? Qual?

Quando a base do logaritmo é igual ao logaritmando, o resultado é sempre um.

e) $\log_7(1)=$ *0* f) $\log_8(1)=$ *0* g) $\log_{10}(1)=$ *0* h) $\log_2(1)=$ *0*

O que você observou nos logaritmos dos itens e a h? Justifique.

Quando o logaritmando é um, o logaritmo é sempre zero.

i) $\log_2(2^5)=$ *5* j) $\log_3(3^2)=$ *2* k) $\log_5(5^3)=$ *3* l) $\log_{10}(10^4)=$ *4*

Você encontrou alguma regularidade nos logaritmos dos itens i a l? Qual?

Quando no logaritmando há uma potência cuja base é igual à base do logaritmo, o resultado deste logaritmo é o expoente desta potência.

m) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=$ *-1* n) $\log_{\frac{1}{5}}(5)=$ *-1* o) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)=$ *-1* p) $\log_{\frac{1}{2}}(2)=$ *-1*

Há alguma regularidade nos itens de m a p?

Quando a base do logaritmo e o logaritmando são números inversos, o resultado é sempre 1 negativo.

q) $2^{\log_2(16)}=$ *16* r) $3^{\log_3(27)}=$ *27* s) $5^{\log_5(625)}=$ *625* t) $7^{\log_7(49)}=$ *49*

O que você observou nos itens q a t?

O logaritmo é o expoente de uma potência. A base deste logaritmo é igual à base da potência e o resultado da expressão é o logaritmando.

Faça um pequeno resumo das regularidades encontradas:

- *Quando a base do logaritmo é igual ao logaritmando, o resultado é sempre 1.*
- *Quando o logaritmando é 1, o resultado é sempre 0.*
- *Quando o logaritmando for uma potência de base igual à base do logaritmando, o resultado será sempre o expoente dessa potência.*
- *Quando a base do logaritmo e o logaritmando forem números inversos, o logaritmo será sempre -1.*
- *Quando o logaritmo for expoente de uma potência e a base desse logaritmo for igual à base dessa potência, o resultado será sempre o logaritmando.*

Lembramos que todas essas regularidades são válidas para logaritmos de base positiva e diferente de 1, com logaritmandos positivos.

Folha de Atividades 3 resolvida: *Uma propriedade importante*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º_____

ENSINO MÉDIO - DATA: / / PROF:

UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE

Na atividade anterior, vimos que enquanto na exponencial calculamos as potências, no logaritmo calculamos o expoente. Assim, podemos dizer que **a ação do logaritmo é oposta à ação da exponencial.**

$2^7 = (128) \longrightarrow \log_2 (128) = \mathbf{7}$ $\quad$ $3^4 = (81) \longrightarrow \log_3 (81) = \mathbf{4}$

ATIVIDADE 1:

QUANDO TRABALHAMOS COM AS PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL, VIMOS QUE $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, ENTÃO TEMOS A SEGUINTE REGRA:

A exponencial de uma soma é o produto das exponenciais.

Seguindo a lógica, o logaritmo deve ter uma propriedade semelhante, mas ao contrário, do tipo:

O logaritmo do produto é a soma dos logaritmos.

Vamos verificar?

$$\log_2 (2048 \times 256) \xrightarrow{\text{Fatorando o 2048 e o 256 temos}} \log_2 (2^{11} \times 2^8)$$

$$\log_2 (2^{11} \times 2^8) \xrightarrow{\text{Usando propriedades de potência}} \log_2 (2^{11+8})$$

$$\log_2 (2^{11+8}) \xrightarrow{\text{Calculando esse log, temos}} 11 + 8$$

$$\xrightarrow{\text{Sabemos que}} \quad 11 = \log_2 2^{11} \quad \text{e} \quad 8 = \log_2 2^8$$

$$11 + 8 = \log_2 2^{11} + \log_2 2^8 = \log_2 2048 + \log_2 256$$

$$\log_2 (2048 \times 256) = \log_2 2048 + \log_2 256$$

NUMA MESMA BASE, O **LOGARITMO DO PRODUTO** DE DOIS NÚMEROS POSITIVOS É **IGUAL À SOMA DOS LOGARITMOS** DESSES NÚMEROS

Faça o mesmo para:

$\log_2$ (512 x 32) = $\log_2 (2^9 \times 2^5) = \log_2 (2^{9+5}) = 9 + 5 = \log_2 (2^9) + \log_2 (2^5)$ = **$\log_2$ (512) + $\log_2$ (32)**
$\log_2$ (128 x 4096) = $\log_2 (2^7 \times 2^{12}) = \log_2 (2^{7+12}) = 7 + 12 = \log_2 (2^7) + \log_2 (2^{12})$ = **$\log_2 (128) + \log_2 (4096)$**
$\log_3$ (81 x 27) = $\log_3 (3^4 \times 3^3) = \log_3 (3^{4+3}) = 4 + 3 = \log_3 (3^4) + \log_3 (3^3)$ = **$\log_3 (81) + \log_3 (27)$**

Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_3$ (**6**) = $\log_3 (2 \times 3) = \log_3 2 + \log_3 3$	$\log_5$ (**21**) = $\log_5 (7 \times 3) = \log_5 7 + \log_5 3$
$\log_2$ (**35**) = $\log_7 (7 \times 5) = \log_7 7 + \log_7 5$	$\log_2$ (**18**) = $\log_2 (3 \times 3 \times 2) = \log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 2$

Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a soma em multiplicação, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 + \log_2 2 = \log_2 (5 \times 2) = \log_2$ (**10**)	$\log_4 5 + \log_4 3 = \log_4 (5 \times 3) = \log_4$ (**15**)
$\log_3 7 + \log_3 2 = \log_3 (7 \times 2) = \log_3$ (**14**)	$\log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 (3 \times 3 \times 5) = \log_2$ (**45**)

ATIVIDADE 2 :

QUANDO TRABALHAMOS COM AS PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL, VIMOS QUE $a^{x-y} = a^x / a^y$, ENTÃO TEMOS A SEGUINTE REGRA:

A exponencial de uma subtração é o quociente das exponenciais.

Seguindo a lógica novamente, o logaritmo deve ter uma propriedade semelhante, mas ao contrário, do tipo:

O logaritmo do quociente é a subtração dos logaritmos.

Vamos verificar?

$$\log_2 \left(\frac{512}{32}\right) = \log_2 \left(\frac{2^9}{2^5}\right) = \log_2 (2^{9-5}) = 9 - 5 = \log_2 (2^9) - \log_2 (2^5) = \log_2 (512) - \log_2 (32)$$

$$\log_2 \left(\frac{512}{32}\right) = \log_2 (512) - \log_2 (32)$$

$$\log_2 \left(\frac{2048}{256}\right) = \log_2 (2^{11} / 2^8) = \log_2 (2^{11-8}) = 11 - 8 = \log_2 (2^{11}) - \log_2 (2^8) = \log_2 (2048) - \log_2 (256)$$

$$\log_3 \left(\frac{27}{6561}\right) = \log_3 (3^3 / 3^8) = \log_3 (3^{3-8}) = 3 - 8 = \log_3 (3^3) - \log_3 (3^8) = \log_3 (27) - \log_3 (6561)$$

NUMA MESMA BASE, O LOGARITMO DO QUOCIENTE DE DOIS NÚMEROS POSITIVOS É IGUAL À ***subtração*** DOS LOGARITMOS DESSES NÚMEROS.

Usando a propriedade anterior, escreva os logaritmos em forma de subtração:

$\log_2\left(\frac{1024}{128}\right) = \log_2(1024) - \log_2(128)$	$\log_3\left(\frac{81}{243}\right) = \log_3(81) - \log_3(243)$
$\log_5\left(\frac{625}{5}\right) = \log_5(625) - \log_5(5)$	$\log_{10}\left(\frac{1000}{3}\right) = \log_{10}(1000) - \log_{10}(3)$

Agora, faça a volta da propriedade, ou seja, transforme a subtração em divisão, escrevendo em um único logaritmo:

$\log_2 5 - \log_2 3 = \log_2 (5/3)$	$\log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 (10/2) = \log_2 5$
$\log_3 20 - \log_3 5 = \log_3 (20/5) = \log_2 4$	$\log_2 26 - \log_2 3 = \log_2 (26/3)$

ATIVIDADE 3: VAMOS TRABALHAR AGORA COM POTÊNCIAS:

$$\log_2 8^5 = \log_2 (8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8) = \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8 = 5 \times \log_2 8$$

$$\log_2 8^5 = 5 \times \log_2 8$$

NUMA MESMA BASE, O **LOGARITMO DE UMA POTÊNCIA** DE BASE POSITIVA É IGUAL AO **PRODUTO DO EXPOENTE PELO LOGARTIMO DA BASE** DA POTÊNCIA.

Faça o mesmo para:

$\log_2 32^3 = \log_2 (32 \times 32 \times 32) = \log_2 32 + \log_2 32 + \log_2 32 = 3 \times \log_2 32$
$\log_5 125^2 = \log_5 (125 \times 125) = \log_5 125 + \log_5 125 = 2 \times \log_5 125$
$\log_2 \sqrt[5]{16} = \log_2 16^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}.\log_2 16$
$\log_2 \sqrt[3]{256} = \log_2 256^{1/3} = 1/3 \times \log_2 256$
$\log_7 \sqrt{343} = \log_7 343^{1/2} = 1/2 \times \log_7 343$

Fatore o número em destaque e reescreva o logaritmo, usando a propriedade anterior:

$\log_2$ **(27)** = $\log_2 (3^3) = 3 \times \log_2 3$	$\log_7$ **(125)** = $\log_7 (5^3) = 3 \times \log_7 5$
$\log_3$ **(32)** = $\log_3 (2^5) = 5 \times \log_3 2$	$\log_{10}$ **(10000)** = $\log_{10} (10^4) = 4 \times \log_{10} 10$

Agora, faça a volta da propriedade:

$3 \times \log_5 2 = \log_5 2^3 = \log_5 8$	$4 \times \log_2 3 = \log_2 (3^4) = \log_2 (81)$
$2 \times \log_5 4 = \log_5 (4^2) = \log_5 (16)$	$5 \times \log_{10} 2 = \log_{10} (2^5) = \log_{10} (32)$

ATIVIDADE4: AS PROPRIEDADES QUE VIMOS ACIMA SÃO VÁLIDAS PARA LOGARTIMOS DE MESMA BASE. E QUANDO TEMOS BASES DIFERENTES?

Observe:

$\log_4 64 = 3$

$\log_2 64 = 6$ $\longrightarrow$ $3 = \dfrac{6}{2} \rightarrow$ $\log_4 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 4}$

$\log_2 4 = 2$

QUANDO FOR NECESSÁRIO É POSSÍVEL ESCREVER UM LOGARITMO EM UMA OUTRA BASE QUALQUER.

$$\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4} \qquad \log_5 125 = \frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 5}$$

Escreva os logaritmos a seguir na base 10:

a) $\log_3 81 = \dfrac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3}$ b) $\log_7 243 = \dfrac{\log_{10} 243}{\log_{10} 7}$ c) $\log_5 3125 = \dfrac{\log_{10} 3152}{\log_{10} 5}$

Escreva os logaritmos a seguir na base 2:

d) $\log_{10} 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 10}$ e) $\log_6 128 = \dfrac{\log_2 128}{\log_2 6}$ f) $\log_{10} 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 10}$

Após o estudo dessas propriedades, nas próximas atividades, estudaremos o logaritmo como função.

Folha de Atividades 4 resolvida: *Para que servem os logaritmos?*

ESCOLA:____

NOME: ____ Nº: _____ 1º _____

ENSINO MÉDIO - DATA: / / PROF:

PARA QUE SERVEM OS LOGARITMOS?

Vimos que o surgimento dos logaritmos estava diretamente relacionado com a simplificação de cálculos, nos séc. XVI e XVII, mas hoje com o avanço tecnológico de calculadoras e computadores, para que servem os logaritmos?

LOGARITMOS E ESCALAS: Essa é uma das aplicações do logaritmo.

Represente graficamente a situação descrita pela tabela abaixo:

Conjunto	Nº	Faça aqui o seu gráfico.
Um grupo de amigos	10	
Formandos de uma escola	100	
Estudantes de uma escola	1 000	
Pessoas de uma pequena cidade	10 000	*aqui o estudante deve fazer a representação*
Habitantes de uma cidade	100 000	*que achar mais conveniente*
Habitantes de uma região urbana	1 000 000	
Habitantes de um pequeno país	10 000 000	
Habitantes de um país	100 000 000	

Que tipo de representação você usou? *Gráfico de linha ou gráfico de barras ou gráfico de setores, etc.*

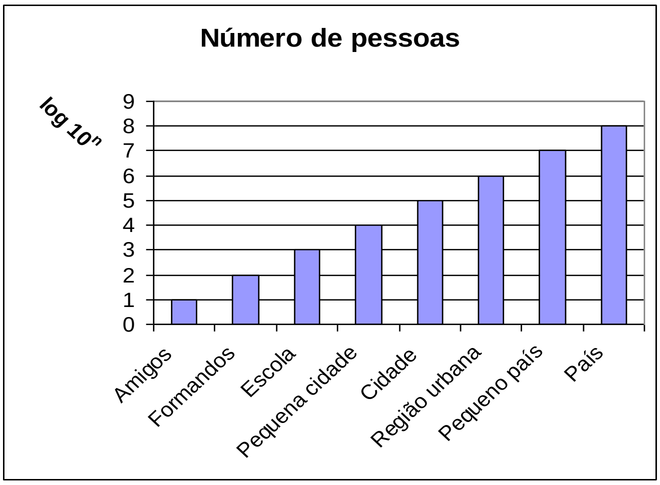
Tentou outras? *Resposta pessoal.*

Na sua representação, os números da 2ª coluna estão numa escala proporcional? *não*

Viu como é difícil representar graficamente certos fenômenos? Por isso, às vezes, é utilizada a escala logarítmica. O logaritmo diminui bastante o número. Por exemplo, log (1 000 000) = 6.

Vejamos outra vez a tabela acima, mas com uma coluna a mais. Usando agora a terceira coluna podemos fazer um gráfico de barras:

Conjunto	Nº	Logaritmos	
Amigos	10	log 10 =	1
Formandos	100	log 100 =	2
Escola	1 000	log 1000 =	3
Pequena cidade	10 000	log 10 000 =	4
Cidade	100 000	log 100 00 =	5
Região urbana	1 000 000	log 1 000 000 =	6
Pequeno país	10 000 000	log 10 000 000 =	7
País	100 000 000	log 100 000 000 =	8



Com isso temos um exemplo de um gráfico de barras na escala logarítmica.

Você já conhece a tabela que gerou esse gráfico. Analisando o gráfico responda:

a) Quando aumentarmos uma unidade na escala logarítmica, esse aumento é equivalente a que aumento real?

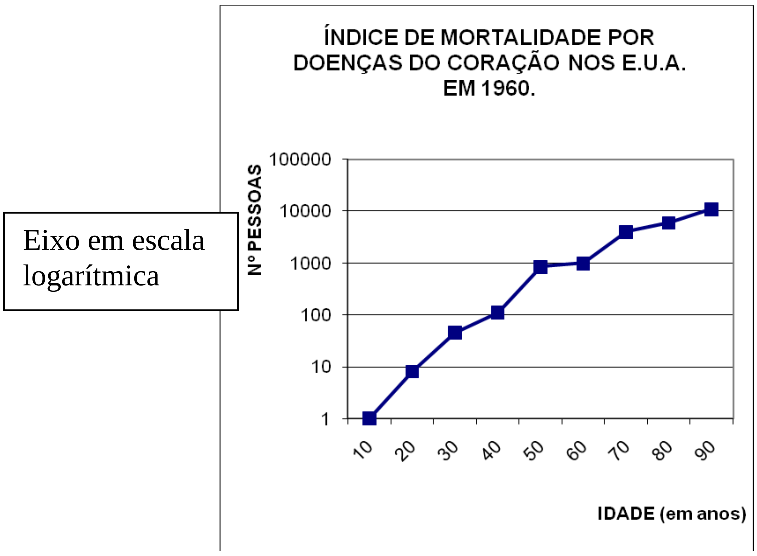
Dez vezes mais.

b) O gráfico na escala logarítmica tem vantagens e desvantagens. Quais são elas?

Essa resposta é pessoal.

Uma das respostas pode ser: a vantagem é a facilidade de representar graficamente a situação e a desvantagem é que a escala utilizada não é real.

VEJAMOS UM EXEMPLO DE GRÁFICO CARTESIANO NA ESCALA LOGARÍTMICA:



Fonte: Strehler, B.L.: *Time, cells, and aging.* (1963) (Simplificado) (apud BATSCHELET)

Veja como a escala logarítmica ajudou na construção do gráfico. No eixo horizontal, que representa a idade em anos dos pacientes, a escala é real com espaçamento igual de 10 em 10 anos. No eixo vertical as linhas estão igualmente espaçadas, mas representam valores exponenciais. Portanto, no gráfico, a altura de uma linha é o logaritmo do número que ela representa. Assim o valor 1000 está na terceira linha, pois log 1000 = 3.

LOGARITMOS E TERREMOTOS:

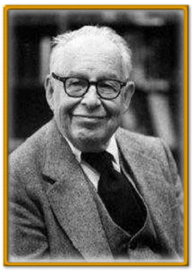
Belos e dramáticos. Assim costumam ser considerados quase todos os fenômenos da natureza de grande magnitude. Maremotos, furacões, tempestades, erupções vulcânicas e terremotos, dentre outros, sempre nos impressionam, tanto pelo espetáculo visual quanto pelo poder de destruição.

Você pode estar se perguntando o que os logaritmos têm a ver com terremotos. Sempre que acontece um terremoto, uma das primeiras informações contidas no noticiário é "quantos graus" teve aquele tremor.

O terremoto que aconteceu na Indonésia, em Novembro de 2008 teve 7,3 graus na escala Richter. O terremoto ocorrido no Japão, em Dezembro de 2008, teve 6,3 graus na escala Richter. Mas o que significa e como funciona esta escala? Ela serve para registrar a intensidade dos tremores de terra.

Um terremoto de pequena proporção, que não é nem mesmo percebido, pode liberar por volta de 1 trilhão de ergs. (Um erg é a unidade de medida de energia no sistema CGS e equivale a 10^{-7} Joules).
Devido aos altos valores envolvidos na medição de terremotos, usa-se uma escala logarítmica para representá-la, chamada Escala Richter.

A escala Ritchter foi criada por dois sismólogos americanos, Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, em 1935. Com o passar do tempo, entretanto, apenas o sobrenome de Charles ficou conhecido na definição da escala.



Charles Richter

Beno Gutenberg

Abaixo temos uma tabela que indica alguns dos terremotos conhecidos:

Local do Terremoto	***Data***	***Magnitude do terremoto na escala Richter (R)***
Lisboa, Portugal	1755	9,0 (estimado)
São Francisco, EUA	1906	8,0 (estimado)
Valdívia, Chile	1960	9,5
Peru	1970	7,7
Cidade do México	1985	8,0
Irã	1990	7,3
Índia	2001	7,9
Oceano Índico	2004	9,3
Indonésia	2006	6,2
China	2008	8,0
México	2009	7,4

Existem fórmulas diferentes para se calcular a magnitude na escala Richter. Cada uma das fórmulas nos dá a energia liberada em unidades diferentes: ergs, joule, kWh, etc. Uma delas é: $\log E = 11{,}8 + 1{,}5R$, onde **E** é a energia liberada (em ergs) e **R** a magnitude da escala Richter.

a) Observe como calculamos a energia liberada por um terremoto de magnitude **1,0** na escala Richter.

log E = 11, 8 + 1,5 . **1**

log E = 11, 8 + 1,5

log E = 13,3

$10^{13,3}$ = E

Logo a energia liberada por um terremoto de 1 ponto na escala Richter é de $10^{13,3}$ ergs.

b) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **2, 0** na escala Richter.

log E = 11, 8 + 1,5 . ***2***
log E = 11, 8 + 3
log E = 14,8
$10^{14,8}$ = E

Logo a energia liberada por um terremoto de 1 ponto na escala Richter é de $10^{14,8}$ ergs.

c) Calcule agora, a energia liberada por um terremoto de magnitude **3, 0** na escala Richter.

log E = 11, 8 + 1,5 . ***3***
log E = 11, 8 + 4,5
log E = 16,3
$10^{16,3}$ = E

Logo a energia liberada por um terremoto de 1 ponto na escala Richter é de $10^{16,3}$ ergs.

d) Aumentando em uma unidade a magnitude do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada? (Para isso calcule a *razão* entre o item b e o item a.)

$$\frac{10^{14,8}}{10^{13,3}} = 10^{14,8-13,3}$$

$$= 10^{1,5} = 31,6$$

Aumentando em uma unidade a magnitude do terremoto, a quantia de energia liberada fica multiplicada por 31,6 aproximadamente.

e) Calcule a energia liberada no terremoto ocorrido no Chile em 1960.

log E = 11, 8 + 1,5 . ***9,5***
log E = 11, 8 + 14,25
log E = 26,05
$10^{26,05}$ = E

A energia liberada no terremoto do Chile, ocorrido em 1960, foi de $10^{26,05}$ ergs.

f) A usina de Itaipu produziu em 2008, aproximadamente $9,5 \times 10^7$ MWh de energia. Supondo que essa produção seja constante a partir dessa data, calcule quantos anos essa usina precisa gerar energia para que se equipare à energia liberada no terremoto do Chile de 1960. Dado: 1 erg = $2,778 \times 10^{-17}$ MWh.

1 erg ------------------ $2,778 \times 10^{-17}$ MWh

$10^{26,05}$ ergs-------------------- x

$x = 10^{26,05} \times 2,778 \times 10^{-17}$
$x = 3,11 \times 10^9$ MWh.

Como a usina produz $9,5 \times 10^7$ MWh de energia ao ano, fazendo a comparação, temos:

$$\frac{3,11 \times 10^9 \text{ MWh}}{9,5 \times 10^7 \text{ MWh}} = 3,2 \times 10 = \textbf{32 anos aproximadamente}$$

LOGARITMOS E ACIDEZ:

Para caracterizar a acidez de um líquido, usa-se um indicador chamado de pH (potencial hidrogeniônico), determinado pela presença de hidrônios H_3O^+. A água tem íons H^+ livres, são poucos, mas existem, cerca de 1 *íon-grama* para cada 10^7 litros, ou seja a razão é $1/10^7$. Assim dizemos que o pH da água é 7. No suco de limão existem mais íons que na água, 1 *íon-grama* para cada 10^2 litros, a razão é $1/10^2$. Assim o pH do suco de limão é 2. *Observe que quanto **maior** é a concentração de hidrônios, **mais ácida** é a substância.*

O pH dá uma idéia da quantidade de íons H^+ que se encontram livres na substância, indicando a quantidade por unidade de volume.

Para medir a acidez de substâncias é mais prático considerar uma escala logarítmica.

O pH é definido por **$pH = -\log [H_3O^+]$**, sendo $[H_3O^+]$ a quantidade de íon-grama por litro. Por definição, o pH igual a 7 é considerado neutro, de 0 a 7, ácido e de 7 a 14, básico.

Abaixo temos o pH de algumas substâncias:

Ácido (maior concentração de hidrônios)

Substância	pH
Suco de limão	2
Suco de tomate	4
Leite	6,9
Água	7
Leite de magnésia	10

Básico (menor concentração de hidrônios)

a) Com base nas informações do texto acima responda: se um líquido tem 1 íon-grama H^+ para cada 1000 litros, qual o seu pH?

Se um líquido tem 1 íon-grama H^+ para cada 1000 litros, seu pH é 3.

b) O que significa dizer que uma substância tem pH igual a 9?

Significa dizer que sua concentração é de 1 íon grama de H^+ para cada 1 000 000 000 litros da substância. E seu pH é básico.

c) O suco de laranja tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 10 vezes menor que o suco de limão. Qual é o pH da laranja?

Como o pH do limão é 2, isso significa que sua concentração é de 1 íon grama de H^+ para cada 100 litros de suco. Se a laranja tem a concentração 10 vezes menor, ela tem 1 íon grama de H^+ para cada 1000 litros de suco, assim seu pH é 3.

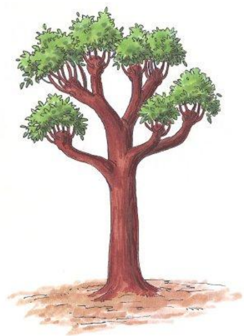
d) O café preto tem concentração de hidrônios $[H_3O^+]$ 100 vezes maior do que a água pura. Qual é seu pH?

O ph da água, de acordo com a tabela acima é 7. Se o ph do café é 100 vezes maior que o da água pura, sua concentração é de 1 íon grama de H^+ para cada 100 000 litros de café e seu pH é 5.

LOGARITMOS E FUNÇÕES:

Ao se estudar fenômenos físicos, químicos ou biológicos, temos muitas vezes a presença dos logaritmos como modelo de certas situações. Vejamos uma delas:

A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui, desde que a muda é plantada (t = 0), segundo o seguinte modelo matemático: $\mathbf{h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)}$, *com h(t) em metros e t em anos.*



a) No momento em que a muda é plantada, qual é a sua altura?

No momento em que a muda é plantada, o tempo é zero, daí:

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (\mathbf{0} + 1)$$

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (1)$$

$$h(t) = 1{,}5 + 0$$

$$h(t) = 1{,}5$$

Logo, a altura da árvore no momento em que a muda é plantada é de 1,5 m.

b) Transcorridos 26 anos, qual será a altura de uma dessas árvores?

Transcorridos 26 anos, temos:

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (\mathbf{26} + 1)$$

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (27)$$

$$h(t) = 1{,}5 + 3$$

$$h(t) = 4{,}5$$

Logo, a altura da árvore após 6 anos será de 4,5 m.

c) Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, calcule o tempo transcorrido (em anos) do momento da plantação até o corte.

Se a árvore for cortada quando seu tronco tiver 3,5 m de altura, teremos:

$$3{,}5 = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$$

$$3{,}5 - 1{,}5 = \log_3 (t + 1)$$

$$2{,}0 = \log_3 (t + 1)$$

$$3^2 = t + 1 \longrightarrow 8 = t$$

Logo, terão se passado 8 anos desde o plantio da muda.