UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

José Clovis Adão Macedo

Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido

SÃO CARLOS

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

José Clovis Adão Macedo

Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Titulo de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas. Orientador: Prof. Dr. Ivo Machado da Costa; Co-orientador: Prof. Dr. Roberto Paterlini.

SÃO CARLOS

2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M141de

Macedo, José Clovis Adão.
Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido / José Clovis Adão Macedo. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
183 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Modelagem matemática. 2. Matematica - estudo e ensino. 3. Engenharia didática. I. Título.

CDD: 511.8 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
DM - UFSCar

Sandra M. S. de Godoy

Profa Dra. Sandra Maria Semensato de Godoy
ICMC – USP

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM - UFSCar

À minha esposa Fatima, meus filhos, Mayra e Fábio e para minhas três netas Giulia, Gabriela e Pietra.

Uma Inteligência que conseguisse conhecer, num dado momento, todas as forças que animam a natureza, bem como todas as posições ocupadas pelos seres que a constituem, e cujo raciocínio fosse suficientemente amplo para submeter todos esses fatores a uma análise, essa inteligência poderia abranger, mediante uma única equação, tanto o movimento dos maiores corpos do universo, quanto o dos mais leves átomos. Para ela, nada seria duvidoso; o passado e o futuro estariam diante de seus olhos com igual nitidez. (Laplace)

Se eu pudesse conversar com Laplace

me arriscaria a dizer que essa

inteligência talvez

se chame:

Deus

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Doutor Ivo Machado da Costa e ao meu co-orientador Professor Doutor Roberto Ribeiro Paterlini, pela dedicação, apoio, competência, pela paciência, e principalmente por acreditarem que não existe idade limite para quem quer aprender e tentar melhorar a educação. A contribuição dos senhores foi essencial para a realização deste trabalho.

A todos os Professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar, que com seus ensinamentos contribuíram significativamente para meu crescimento.

A todos os colegas do mestrado, Danilo, Jayme, Luciano, Mário, Patrícia, Renato, Rita, Rodrigo, Santinho, Thais, Thiago e Toninho. Estar com vocês a cada final de semana me encorajava para a próxima. Faço um agradecimento especial a meu amigo Mário pelo companheirismo e ajuda em diversos momentos do mestrado e pela gentileza de filmar minha apresentação.

Ao secretário do PPGECE, Júnior, por sua presteza em nos ajudar.

Aos alunos das primeiras, segundas e terceiras séries do ensino médio (2009) da EM Adelino Bordignon que participaram ativamente das atividades propostas.

À Kátia, diretora da EM Adelino Bordignon pelo apoio e acertos do horário para que eu pudesse frequentar as aulas do mestrado.

Às professoras Lílian e Vônia pela ajuda com os textos em Inglês.

À Profa. Dra. Sandra Maria Semensato de Godoy e ao Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti pelas valiosas contribuições.

À minha esposa Fátima por compreender meus momentos de solidão.

RESUMO

Em nossos quase 40 anos de magistério temos observado que muitos estudantes encaram a Matemática como um amontoado de regras e fórmulas que precisam ser decoradas e não veem significado algum no que aprendem. Uns poucos percebem as aplicações da Matemática apesar de saberem que elas existem. Numa tentativa de fazer com que a matemática pudesse ser ensinada de um modo mais significativo foi que optamos por realizar um experimento e a partir dele descobrir que conhecimento matemático ele “esconde”. O experimento escolhido foi o “escoamento de um líquido”. Ao analisá-lo sob o ponto de vista da modelagem pretendemos descobrir se existe um modelo matemático que possa descrevê-lo, ou seja, se, por dedução existe alguma função que o descreva e descobri-la a partir de técnicas de manipulação e dedução advindas da interdisciplinaridade dos conhecimentos correlatos e dos dados provenientes do experimento. As funções foram obtidas a partir da análise de dados inicialmente discretos e fazendo-se a passagem para o contínuo. Os estudantes tiveram a oportunidade de construir e interpretar gráficos associados a funções afins, quadráticas e polinomiais de grau superior a dois usando o Excel e rever alguns conceitos relacionados com progressões. Os experimentos foram realizados com alunos das três séries do ensino médio de uma escola pública municipal. Cada classe foi dividida em grupos com três ou quatro integrantes. Os resultados obtidos pelos alunos foram, posteriormente, analisados e comparados com as observações prévias, conforme preconiza a Engenharia Didática, metodologia de pesquisa que adotamos em nossa dissertação.

Palavras chave: Ensino de Matemática. Funções. Modelagem, Engenharia Didática. Escoamento.

ABSTRACT

In our nearly 40 years of teaching we have observed that many students have mathematics as a great number of rules and formulas that need to be memorized. They do not see any meaning in what they learn either. Few realize the applications of mathematics although they know that they really exist. In an attempt to teach mathematics in a more significant way we decided to conduct an experiment to find out what mathematical knowledge it "hides". The flow of a liquid was the chosen experiment. Analyzing it from a modeling point of view, we intend to find out if there is a mathematical model which can describe it. The functions were obtained from an analysis of initially discrete data and then making the transition to the continuous. Students had the opportunity to construct and interpret graphs associated with related functions, quadratic and polynomial of degree greater than two using Excel. We work with students of the three high school series in a public school. Each class was divided into groups of three or four members. We used the Didactical Engineering as a research methodology.

Key words: Mathematics Teaching. Functions. Modeling. Didactical Engineering. Flow.

LISTA DE FOTOS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

3 Fundamentos Teóricos

4 Preparação do Experimento: Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido

INTRODUÇÃO

Todos os professores que conheço gostam quando os alunos fazem perguntas. Existe até quem afirme que: só pergunta quem entende. Quem não entende nem sabe o que perguntar. Em parte até que isso pode ser verdade, até que, de repente, sem que o professor esteja esperando algum aluno lança no ar uma pergunta desconcertante: "Professor, para que serve isso, onde uso isso?" Essa pergunta motivou nossa dissertação de mestrado. Uma pergunta simples que nos mostra que o que estamos ensinando pode não ter significado para o aluno e, se o aluno não compreende porque deve aprender isso ou aquilo, dificilmente vai querer aprender.

Nossa proposta de trabalho pretende evitar que essa e outras perguntas impertinentes, mas perfeitamente cabíveis sejam feitas. Como evitar, então? Propondo uma atividade onde, antes que o aluno pergunte, perceba para que serve o seu objeto de estudo. Para tal, optamos pela modelagem. A disciplina de Física é uma grande aliada da Matemática e inúmeras funções matemáticas encontram nela, um celeiro enorme de aplicações. Diversos experimentos que favorecem a interdisciplinaridade podem ser realizados; entre eles escolhemos o escoamento de um líquido. Antes de chegarmos ao experimento propriamente dito e, seguindo os passos da Engenharia Didática, fizemos inicialmente, no capítulo 1, algumas considerações históricas sobre a evolução do conceito de função, o conceito de função hoje e os tipos mais usualmente estudados em nossas escolas. No capítulo 2 comentamos sobre o aparecimento das funções na escola média, sobre a importância de seu estudo e o destaque que é dado às funções nos documentos oficiais. Julgamos também, oportuno, analisar qual o tratamento que é dado às funções nos livros didáticos atuais, com destaque para a proposta da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. No capítulo 3 nos preocupamos com a fundamentação teórica de nossa dissertação discorrendo sobre a importância da Modelagem, das atividades experimentais, dos conceitos que fazem da Engenharia Didática um bom veículo para nortear nosso trabalho e analisamos algumas dissertações de mestrado que envolvem o conceito de função e que fazem uso de modelagem. No capítulo 4 realizamos o experimento e nos colocamos no lugar do aluno para que pudéssemos sentir, pelo menos em parte, as possíveis dúvidas e dificuldades que poderiam surgir e termos uma noção exata do tempo necessário para a realização completa do experimento. No capítulo 5 descrevemos todos os experimentos realizados pelos alunos e demonstramos as propriedades necessárias para que o aluno pudesse ter plena compreensão do que foi realizado. No Capítulo 6 finalizamos nosso trabalho com um questionário aplicado aos alunos sobre o experimento realizado e fazemos uma avaliação geral, a conclusão e uma auto avaliação. No apêndice 1 fazemos a dedução da função que modela o escoamento de um líquido utilizando os conceitos da Mecânica dos Fluídos e no apêndice 2 colocamos nosso produto com orientações para sua aplicação. Esperamos que esse trabalho seja útil para todos nossos colegas e alunos e que possa contribuir para a melhoria da qualidade de ensino.

1 Uma Introdução à Presença das funções na Matemática

1.1 Introdução

O produto de nosso trabalho de pesquisa é o desenvolvimento de um experimento sobre escoamento de líquidos com o objetivo de propiciar aos estudantes a oportunidade de construírem um modelo matemático de um fenômeno físico, modelo este que tem uma função como seu principal protagonista. Dessa forma, neste capítulo, apresentamos o conceito de função como ele é utilizado na Matemática hoje, conceito esse que percorreu um longo caminho até atingir o grau de abstração que conhecemos.

Inúmeros trabalhos, dissertações e teses já tiveram como objetivo desvendar o "caminho" percorrido pelo conceito de função e explicitar suas mais diversas aplicações. Apresentaremos neste primeiro capítulo uma pequena história da evolução do conceito de função, para que percebamos que nem tudo é tão simples e de fácil aceitação. Fornecemos algumas definições de função idealizadas por grandes matemáticos, a definição de função comumente utilizada no ensino médio, as notações e nomenclaturas, representações, propriedades, classificação quanto à monotonicidade, tipos de funções, funções compostas e funções inversas, função afim e quadrática, função polinomial, função poligonal, função exponencial e logarítmica. Temos a consciência de que por mais que tentemos não conseguiremos esgotar o assunto. Resta-nos a esperança de que com essas breves colocações tenhamos revelada um pouco da beleza da matemática.

1.2 Algumas considerações históricas sobre a evolução do conceito de função.

A noção de função se aperfeiçoou no decorrer dos anos. Inicialmente as funções eram "expressões" ou fórmulas algébricas ou trigonométricas, que mostravam a existência de uma relação entre "variável dependente" e "variável independente", sendo essas variáveis números.

Em termos gerais, uma função é uma regra ou lei que nos diz como duas ou mais quantidades são dependentes entre si.

Já no século XIII, os filósofos escolásticos que seguiam a escola de Aristóteles discutiam a quantificação de formas variáveis. Entre tais formas eles estudavam a velocidade de objetos em movimento e a variação da temperatura de ponto para ponto de um sólido aquecido.

No século XIV Oresme, teólogo e matemático francês, teve a brilhante ideia de representar o valor de grandezas por barras de tamanho proporcional aos seus valores. Esta foi, talvez, a primeira sugestão do que hoje é chamado de representação gráfica de uma função. A ideia de Oresme foi aprofundada mais tarde, no século XVII, com Fermat e Descartes, que definiram um sistema de coordenadas no plano, estabeleceram a correspondência entre uma equação f(x, y) = 0 e a curva plana consistindo de todos os pontos de coordenadas (x, y) que satisfazem a equação dada e introduziram a noção de variável. Em particular, Descartes verificou que uma relação algébrica do segundo grau em duas variáveis tinha como imagem gráfica uma curva cônica, isto é, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola ou uma circunferência. Fermat também estudou as cônicas e estabeleceu que as retas são as curvas descritas por meio de uma relação algébrica de primeiro grau em duas variáveis.

O estudo desses dois gênios contribuiu significativamente para estabelecer os fundamentos que permitiram, mais tarde, o desenvolvimento da teoria do Cálculo Diferencial e Integral, por Newton e Leibniz, sendo Leibniz o primeiro a utilizar a palavra função. Eves (2007, p.660) diz que "a palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva". Em artigos publicados em 1692 Leibniz utiliza "as palavras *coordenadas, abscissa e ordenada,* no sentido técnico que têm hoje" Eves (2007, p.388). A definição de função, todavia, ainda teria um longo caminho a percorrer até alcançar a forma como hoje a conhecemos. Nesse sentido, Courant (2000, p. 332), comenta que:

> Para Leibniz, o primeiro a utilizar a palavra função, e para os matemáticos do século XVIII, a ideia de uma relação funcional estava mais ou menos identificada com a existência de uma fórmula matemática simples expressando a natureza exata da relação. Esse conceito provou ser demasiadamente estreito para as exigências da Física Matemática, e a ideia de função, juntamente com a noção relacionada a limite, foi submetida a um longo processo de generalização e esclarecimento.

A colocação de Courant é comprovada pelas várias definições de função que colocamos a seguir, sem qualquer pretensão de estabelecer uma ordem cronológica.

Diversos matemáticos perceberam a importância do conceito de função e a família Bernoulli, que legou ao mundo mais de uma dezena de matemáticos e cientistas, também deixou sua contribuição por intermédio de Johann Bernoulli que por volta de 1718 publicou no artigo *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions de problèmes sur les isopérimètres* a seguinte definição: "Chamamos função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de um modo qualquer a partir desta grandeza variável e de constantes". Youschkevitch[1], A. P. (1976) apud Correa (1999, p.9).

Felizmente, grandes mestres, por vezes, contribuem para que grandes mentes aflorem. Entre os discípulos de Jean Bernoulli, encontrava-se Leonard Euler (1707-1793) que contribuiu para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de vários campos da matemática, inclusive o de funções. Euler[2] (1990, I, 3) apud Correa (1999, p. 10) fez algumas alterações na definição de Johann Bernoulli e escreveu: "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer a partir da quantidade variável e de números ou de quantidades constantes". Em Boyer (1906, p.327) com tradução de Elza F. Gomide a definição dada por Euler e que se encontra nas páginas de abertura de sua obra *Introductio in analysis infinitorum (1748),* apresenta a seguinte redação para uma função de uma variável: "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes".

Euler ainda tinha o que dizer e em 1755 no prefácio de *Institutiones calculi differentialis,* deu ao conceito de função a seguinte forma:

> Se algumas quantidades dependem de outras quantidades, de modo que se estas variam as primeiras variam, então chamamos às primeiras quantidades funções das últimas. Esta designação é da natureza mais ampla e compreende qualquer método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de algum modo de x, ou por ele são determinadas, são chamadas funções de x. (YOUSCHKEVITCH, A. P. 1976[1] apud CORREA, 1999, p. 65).

Função era a ideia que pululava as mentes de diversos matemáticos, entre elas, a de Lagrange. Na obra *Théorie des Functions Analytiques* (1797) Lagrange define função assim:

> Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas.(MENDES, 1994, p. 37[3]. apud DORICO. 2006. p. 12)

---

[1] **YOUSCHKEVITCH, A. P**. (1976) **"The Concept of Function up to the Middle of the 19 Century. "** *Archive for History of Exact Sciences* 16, 37-85

[2] **EULER**(1990) ***Introduction to Analysis of the Infinite***. *2* vols. New York: Springer--Verlag. Tradução inglesa de **lntroductio in analysin infinitorum**. **EULER**, L.((1748).

[3] **MENDES, M.H.M. O conceito de função:** aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC, Rio de Janeiro.

Incansável e ainda não satisfeito com a definição que dera, Lagrange aprimora o conceito de função em sua obra *"Leçons sur le calcul des functions"* (1806):

> Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo. (SA, P. F. et al. 2003[4] apud DORICO. 2006. p. 14).

Os anos passam e cada vez mais o universo matemático se convence da força que o conceito de função exerce sobre ele. Já é impensável imaginar que a matemática possa sobreviver sem "função". Novas definições e notações, algumas mais concisas, outras mais rebuscadas, surgem para clarear de vez a ideia que Oresme não conseguiu traduzir.

No livro "*Conceitos Fundamentais de Matemática*", Caraça (1951, p.129) coloca sua definição:

> Definição: Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números: diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x), se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x → y. A x chama-se variável independente, a y variável dependente. Para indicar que y é função de x, usaremos também escrever simplesmente y(x); para representar aquele valor b de y que corresponde a um valor particular a de x, escreve-se b = y(a), conforme se usou a representação y = f(x) ou y(x).

Por último, não poderíamos deixar de colocar o pensamento do grupo Bourbaki que tanto contribuiu para o ensino de Matemática. Entre essas contribuições temos o conceito de função, (tradução livre do autor):

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja x ϵ E, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x. Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento x ϵ E o elemento y ϵ F que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (BOURBAKI, 1939, p.6)

Em meio a essa profusão de ideias é justo supor que nós professores tenhamos alguma dificuldade para saber qual a melhor maneira de trabalharmos com funções no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Colocaremos a seguir um pouco do que tem sido usual no trato com as funções.

1.3 Conceito matemático de função

---

[4] **SÁ, P. F**. et al. **A Construção do Conceito de Função**: Alguns dados históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, p.81-94, 2003.

Dados dois conjuntos $\boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B}$, uma função $\boldsymbol{f}\ de\ \boldsymbol{A}\ em\ \boldsymbol{B}$ é uma lei que nos informa como associar a cada elemento $\boldsymbol{x}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$**,** um único elemento $\boldsymbol{y}$ pertencente a $\boldsymbol{B}$. O conjunto $\boldsymbol{A}$ recebe o nome de domínio e o conjunto $\boldsymbol{B}$ o nome de contradomínio da função $\boldsymbol{f}$. É usual a seguinte notação:

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$**,** que lemos: $\boldsymbol{f}$ é uma função de $\boldsymbol{A}\ em\ \boldsymbol{B}$.

O conjunto formado por todos os elementos de $\boldsymbol{B}$ que se correspondem com algum elemento de $\boldsymbol{A}$ recebe o nome de conjunto imagem da função e dizemos que cada elemento $\boldsymbol{y}$ pertencente a B que se corresponde com algum elemento $\boldsymbol{x}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$ é a imagem desse x pela função $\boldsymbol{f}$ e indicamos: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Também dizemos que a função $\boldsymbol{f}$ transforma x em $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e escrevemos: $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Apresentamos também o conceito de função a partir do conceito de par ordenado, como segue:

Dados conjuntos não vazios $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ e dados elementos $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{B}$, chamaremos de par ordenado ao símbolo $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ submetido à seguinte condição de identidade: se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ são elementos de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d}$ são elementos de $\boldsymbol{B}$, então:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \text{ e } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$$

Indicaremos por $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ o conjunto de todos os pares ordenados $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ com $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$. Uma *relação* binária de A em B é o nome dado a qualquer subconjunto de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

Agora definimos função da seguinte forma:

Dados conjuntos não vazios $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, uma *função* com domínio **A** e contradomínio $\boldsymbol{B}$ é uma relação $\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ que satisfaz à seguinte condição: para todo $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ existe um único $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$ tal que $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{f}$.

1.4 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Dependendo do domínio, do contra domínio, do conjunto imagem e de como os elementos dos conjuntos $\boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B}$ se relacionam entre si, as funções recebem nomes especiais.

Função injetora: Uma dada função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é injetora, ou injetiva, quando elementos diferentes de A têm imagens diferentes em $\boldsymbol{B}$. Isso é o mesmo que dizer que uma função é injetiva, se e somente se, quaisquer que sejam $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ pertencentes a A, se $\boldsymbol{x_1}$ é diferente de $\boldsymbol{x_2}$ então $\boldsymbol{f(x_1)}$ é diferente de $\boldsymbol{f(x_2)}$. Podemos também utilizar a forma contra positiva, ou seja, se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$ então $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$.

Simbólicamente, temos:

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é injetora $\Leftrightarrow \forall\ \boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{A},\ \forall\ x_2 \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_2} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$

Também podemos escrever simbolicamente a forma contrapositiva

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é injetora $\Leftrightarrow \forall\ \boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{A},\ \forall\ x_2 \in \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) \Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$

Função sobrejetora: Uma dada função **f: A → B** é sobrejetora, ou sobrejetiva, quando seu conjunto imagem é igual ao seu contradomínio.

Simbolicamente temos:

f: A → B é sobrejetora $\Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \exists\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$

Função bijetora: Uma dada função **f: A → B** é bijetora, ou bijetiva, quando ela for simultaneamente injetora e sobrejetora.

Simbolicamente, temos:

f: A → B é bijetora $\Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \exists |\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$

1.5 Função composta

Definição de função composta:

Dadas as funções $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$, chama-se função composta de f e g a função: $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{C}$, definida por: $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$.

Verificamos facilmente que em geral $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$

1.6 Funções Inversas

Dados dois conjuntos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dizemos que a inversa da função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é uma função $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\big) = \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{x}$ para quaisquer $\boldsymbol{x}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$ e

quaisquer $\boldsymbol{y}$ pertencente a $\boldsymbol{B}$.

É usual a notação $\boldsymbol{f^{-1}}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$ para indicar a função inversa da função $\boldsymbol{f}$, caso exista.

1.7 **Funções reais de uma variável real**

As funções reais de uma variável real são funções cujo domínio é um subconjunto dos números reais e cujo contradomínio é o conjunto dos reais, ou seja $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$.

Se existir um $\boldsymbol{k}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}) = \mathbf{0}$, diremos que $\boldsymbol{k}$ é um zero da função.

1.7.1 Função Afim

Sejam a e b números reais. Uma função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando para cada $\boldsymbol{x}$ pertencente a $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$.

Casos particulares:

se $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ a função recebe o nome de linear; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}$.

se $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ a função recebe o nome de constante; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

A função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}$ definida por: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ denomina-se função identidade.

1.7.2 Função Quadrática

Dado $A \subset \mathbb{R}$, uma função $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ se diz *quadrática* quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \epsilon A$.

1.7.3 Função Modular

A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$ é chamada modular. A notação $|\boldsymbol{x}|$ indica o valor absoluto (ou módulo) de um número real x que é definido por:

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} -\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} < 0 \\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

A função modular é um caso particular da *função poligonal*. Em Elon (1998, p.103) temos:

> *Diz-se que $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função poligonal quando existem $t_0 < t_1 < ... < t_n$ tais que, para $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, com i=1... n-1, f coincide com uma função afim f_i. Equivalentemente podemos dizer que uma função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal. O protótipo de uma função poligonal é uma função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = $|x|$. Ou então f(x) = $|x - c|$, para algum c $\in$ $\mathbb{R}$.*

1.7.4 Função polinomial

Dado $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$, uma função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ se diz *polinomial* quando existem números reais $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$, tais que, para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, temos:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

O maior expoente da variável $\boldsymbol{x}$ com coeficiente não nulo recebe o nome de grau de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Em assim sendo, se $\boldsymbol{n}$ é o maior expoente e se $\boldsymbol{a_n} \neq \mathbf{0}$ o grau de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ é $\boldsymbol{n}$.

As funções afins e quadráticas, entre outras, são casos particulares da função polinomial.

1.7.5 Função exponencial

Denominamos função exponencial à toda função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua satisfazendo às seguintes propriedades:

$\mathbf{1})\ \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$

$\mathbf{2})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$

Observação 1. Se $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{a}$ então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$.

Observação 2. Para cada $\boldsymbol{a}$ pertencente aos reais, a positivo e diferente de 1, existe uma única função contínua $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades acima.

Observação 3. $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ é bijetora,

Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ a função exponencial é estritamente crescente.

Se $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$ a função exponencial é estritamente decrescente.

Logo, segue que a função exponencial $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ é invertível.

1.7.6 Função logarítmica

Pelo exposto acima, a inversa da função exponencial de base **a** com $\boldsymbol{a}$ positivo e diferente de 1 é a função $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta função é chamada logarítmica e satisfaz às seguintes propriedades:

$\boldsymbol{g}\ (\mathbf{1}) = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{g}\ (\boldsymbol{a}) = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$

A função logarítmica é indicada por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{log_a x}$ em que $\boldsymbol{log_a x}$ é o expoente a que se deve elevar a base $\boldsymbol{a}$ para que obtenhamos o número $\boldsymbol{x}$. Pela definição de função inversa temos que:

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{log_a x}} = \boldsymbol{x} \quad \textbf{e} \quad \boldsymbol{log_a}\,(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}$$

Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ a função logarítmica é estritamente crescente.

Se $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$ a função logarítmica é estritamente decrescente.

1.8 Funções monotônicas

Uma função $\boldsymbol{f}$ é dita *monotônica*, ou *monótona*, se puder ser classificada como crescente, estritamente crescente, decrescente ou estritamente decrescente, segundo as definições abaixo:

Dada uma função $\boldsymbol{f}$ e dados $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ dois elementos quaisquer do domínio de f dizemos que:

A função $\boldsymbol{f}$ é **crescente,** quando, $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$.

A função $\boldsymbol{f}$ é **estritamente crescente** quando, $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$.

A função $\boldsymbol{f}$ é **decrescente,** quando $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$.

A função $\boldsymbol{f}$ é **estritamente decrescente** quando $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$.

Exemplos de funções monotônicas são as lineares, as afins, as exponenciais e as logarítmicas.

1.9 Conclusão

Vimos que inúmeros trabalhos, fazem referência à história e à evolução do conceito de função e às suas mais diversas aplicações. Grandes matemáticos se preocuparam com o significado de função. Também verificamos que muitos séculos foram necessários para que a definição de função não deixasse dúvida acerca do seu significado. Se aliarmos a isso as várias definições e os vários tipos e classificações de funções é possível imaginar, por um breve momento, a provável dificuldade que nossos alunos possam ter. Uma ideia que ao professor parece bastante simples pode causar verdadeiro transtorno para o aluno. Não é para menos, pois, inúmeros matemáticos definem funções, cada um à sua maneira. Nesses meus quase quarenta anos lecionando em escolas particulares e públicas vez por outra ouço um aluno dizer: “Eu aprendi diferente, meu professor ensinou diferente”. Ao apresentar os diferentes modos de se trabalhar com funções, as várias definições e um pouco da evolução do conceito de função, espero, em parte, que percebamos que a dificuldade do aluno é perfeitamente plausível. O aluno se sente perdido nesse emaranhado de nomes, conceitos, definições, casos particulares, etc. Podemos ensinar ou redescobrir a matemática juntamente com nossos alunos dos mais diferentes modos e com diferentes estratégias. Neste vasto campo acreditamos ser possível, em determinados momentos, redescobrir a Matemática realizando experimentos, trabalhando com modelagem, acertando, errando e tentando novamente, mas, permitindo que o aluno participe da construção do seu saber.

2 – Funções no ensino médio

2.1 Introdução

O ensino de funções não deve ser uma prerrogativa da Matemática e de seus professores, pois suas aplicações vão muito além. Em todas as ciências, quando a variação de uma grandeza depende da variação de outra, a função *pode* ser necessária para explicar como essa variação ocorre. Na física, por exemplo, utilizamos as funções para estudarmos a variação do espaço percorrido, da velocidade, da aceleração, da energia, etc... a medida que o tempo passa, estudar a variação de uma radiação durante algum tempo, estudar a proliferação de bactérias, a população de uma cidade ou de uma doença durante um certo período. O estudo de funções pode nos ajudar a comparar a evolução do salário de um trabalhador com a variação da inflação no mesmo período e com isso ajudar os adolescentes a compreender porque nem sempre seus pais podem comprar tudo que eles necessitam. Com certeza, inúmeras outras situações podem ser encontradas sem muito esforço.

Sem o conceito de função e até mesmo sem o uso palavra "função" teríamos mais dificuldade para exteriorizar algumas de nossas ideias. Acredito até, que as frases seriam mais longas e menos esclarecedoras. Experimentemos, por exemplo, dizer de outra maneira as frases que seguem, sem o uso da palavra função, mas mantendo o mesmo significado.

- A distância percorrida é calculada em função do tempo.
- O salário de um trabalhador é calculado em função do número de horas trabalhadas.
- A área do círculo é dada em função do seu raio.

Cada um de nós poderá colocar outros exemplos.

Neste capítulo tecemos alguns comentários sobre a escola média no Brasil e analisamos a presença das funções no ensino médio, já que este nível de ensino é o enfoque de nossa pesquisa. Começamos com o exame de documentos oficiais que se manifestam a respeito do ensino de funções, como o PCN, o PCNEM e o PCN+, etc... Em alguns momentos nos adiantamos em explicar nossa posição sobre o uso da modelagem no ensino, aproveitando citações presentes nesses documentos. Em seguida examinamos três livros didáticos que constam na relação do PNLD descrevendo sucintamente como os autores abordam esse tema. Examinamos também o "*Caderno do professor: matemática, ensino médio – 1ª série, volume 2*" que foi enviado pelo governo do Estado de São Paulo aos professores da rede estadual de ensino. Terminamos analisando alguns livros em que o tema função é abordado.

2.2 A Escola Média no Brasil

O Ensino Médio no Brasil é regido pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9.394/96), cujo diferencial em relação às Leis anteriores é determinar que o Ensino Médio faça parte da Educação Básica. Essa determinação vem atender o inciso II do Art. 208 da Constituição de 1988, cujo teor é: "O dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de: II - *a progressiva extensão da obrigatoriedade e gratuidade ao ensino médio"*. A Emenda Constitucional nº 14/96 manteve a gratuidade e a oferta do ensino médio como dever do Estado, mas, retirou sua obrigatoriedade e alterou a redação do texto original para "*a progressiva universalização do ensino médio gratuito"*. Note-se que somente quase treze anos após a promulgação da Lei 9.394/96 é que a Lei nº 12.061, de 27 de outubro de 2009 altera o inciso II do art. 4º e o inciso VI do art. 10 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 para assegurar o acesso de todos os interessados ao ensino médio público.

Pela Lei nº 5.692/71 o 2º grau tinha como funções *"preparar para o prosseguimento de estudos e habilitar para o exercício de uma profissão técnica"*. A nova LDB, todavia, coloca o Ensino Médio como *"etapa final da educação básica"* (Art.36).

A inclusão do Ensino Médio como etapa final do processo educacional revela o que o legislador, e quero crer também a sociedade, consideram como formação mínima para que o cidadão possa se integrar na sociedade e interagir com seus semelhantes. A nova LDB *"tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores"* (Art.22). O Art.35, incisos I a IV, nos mostra que ao nosso jovem não basta se integrar e interagir, é desejável que o prosseguimento dos estudos faça com que ele seja capaz de compreender os *"fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos"* e *"deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social"* (Art.1º § 2º).

A presente dissertação não tem como objetivo tecer maiores comentários sobre as diversas leis, outras dissertações, teses e livros já o fizeram com maior propriedade, no entanto, julgamos oportuno colocar os dois artigos que se seguem, pois tratam diretamente da etapa em que trabalhamos.

Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Art. 36. O currículo do ensino médio observará o disposto na Seção I deste Capítulo e as seguintes diretrizes:

I - destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania;

II - adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes;

III - será incluída uma língua estrangeira moderna, como disciplina obrigatória, escolhida pela comunidade escolar, e uma segunda, em caráter optativo, dentro das disponibilidades da instituição.

IV – serão incluídas a Filosofia e a Sociologia como disciplinas obrigatórias em todas as séries do ensino médio. (Incluído pela Lei nº 11.684, de 2008)

§ 1º Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que ao final do ensino médio o educando demonstre:

I - domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;

II - conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;

§ 3º Os cursos do ensino médio terão equivalência legal e habilitarão ao prosseguimento de estudos.

2.3 Funções nos documentos oficiais

A primeira tentativa de se ensinar funções no Brasil partiu de Euclides Roxo que participou ativamente da primeira grande reforma do ensino conhecida como Reforma Capanema. As “Instruções Metodológicas” revelam que uma das recomendações didático-pedagógicas era a de que o conceito de função deveria ser introduzido a partir da primeira série do Curso Fundamental, e o seu desenvolvimento como conceito unificador dos ramos matemáticos (Aritmética Álgebra e Geometria). Para Euclides Roxo

> A noção de função deve ser adotada como ideia axial no ensino da matemática, capaz de estabelecer o elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária de modo a ser a alma do corpo em que se organiza a matéria (ROXO,[5] 1937, p. 193 apud BRAGA 2003, p. 81).

Infelizmente ele não conseguiu seu intento.

Nos antigos guias curriculares do estado de São Paulo, a partir de 1975, no ensino fundamental:

> O conceito de relação e função são considerados como pontos unificadores da Matemática, tratados como um dos seus eixos havia uma preocupação com a determinação de Domínio, Contradomínio, Imagem e exploração de gráficos desvinculados da análise de fenômenos. (SÃO PAULO, 1991, p.181).

Em 1977 o governo de São Paulo numa tentativa de fornecer aos professores alguma orientação metodológica distribui à rede os **Subsídios para Implementação do Guia Curricular de Matemática – Álgebra para o 1º grau.** Para o ensino de funções os subsídios forneceram inúmeros exemplos estabelecendo uma relação de dependência entre os elementos de dois conjuntos dados como, por exemplo, alunos e respectivos pesos, estados e as respectivas capitais, tipos de carne e os respectivos preços utilizando os nomes "*aplicação"* e *"transformação*" esclarecendo que eles *"também são usados em lugar de função".* Infelizmente não existiam orientações para a realização de alguma atividade onde o aluno deixasse de ser um mero espectador. Em 1978 A Secretaria da Educação de São Paulo Elabora a **Proposta Curricular de Matemática para o 2º grau** e percebe a necessidade de "*complementá-la com materiais instrucionais que pudessem esclarecer alguns pontos, de modo a tornar mais eficaz a ação do professor na sala de aula".* Para tanto, apresenta aos professores do Ensino do 2º grau os **Subsídios para a Implementação da Proposta Curricular de Matemática para o 2º grau.** A primeira parte é reservada ao ensino de funções e cumpre o que promete fornecendo aos professores um estudo detalhado sobre o ensino de funções, destacando que o conceito de funções pode ser encarado de pelo menos duas maneiras, o que *"função é",* e o que *"função faz".* Segundo os subsídios no primeiro

[5] ROXO, E. A Matemática na Escola Secundária. São Paulo: Nacional, 1937.

enfoque temos um *caráter estático* e no segundo um *caráter dinâmico*, pois, no primeiro *"Função é"* um conjunto de pares ordenados que satisfazem a algumas condições especiais. No segundo, dados dois conjuntos a *"função associa"* a cada elemento de um deles, um elemento do outro. A seguir orienta o professor quanto ao melhor procedimento a seguir dependendo do enfoque adotado. Na página12, item 4, os subsídios relacionam o conceito de função com outros assuntos da Matemática e com algumas aplicações fora dela. Uma observação importante é o alerta feito aos professores sobre interdisciplinaridade:

> Os professores poderão achar outros exemplos na Física e, assim ilustrar suas aulas. Aparece aqui a oportunidade de relacionamento entre disciplinas e professores. Na economia podemos destacar, por exemplo, as funções demanda, oferta, custo, receita e lucro. O que segue são apenas alguns comentários superficiais sobre algumas funções da Economia e que, porventura, podem servir como ilustrações aos assuntos função linear, função quadrática, estudo do sinal dessas funções, máximos e mínimos de função quadrática e raízes de funções. Nossos exemplos são simples e não possuem a intenção de retratar alguma realidade. Procuram apenas mostrar como o conceito de função pode ser usado como modelo de alguma situação real. (SÃO PAULO, 1982, p. 12)

A modelagem começa a dar o ar de sua graça. Funções lineares e quadráticas são utilizadas para modelar algumas questões envolvendo produção, custos fixos e variáveis, demanda e lucro máximo ou mínimo.

Em 1986 A Secretaria da Educação do Governo do Estado de São Paulo acena com uma nova **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática para o 1º e para 2º grau.** A diferença é sutil, mas, significativa. A palavra **ensino** faz toda a diferença. A questão primordial é **ensinar** Matemática. (grifo do autor)

Ao estabelecer um paralelo entre os guias curriculares e a nova proposta de Matemática, a nova proposta assim se refere ao ensino de relação e função no 1º grau:

> não se constitui um tema a parte, mas, são indicadas situações em que podem ser exploradas desde o início do estudo dos números em situações-problema até as interpretações de gráficos. No estudo da variação de grandezas (proporcionais ou não) associadas a diferentes fenômenos nas situações de interdependência e na representação através de gráficos é que se enfatizam as relações e se concretiza o conceito de função. O estudo formal das funções será feito no 2º grau. (SÃO PAULO, 1992, p.181)

A **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática para 2º grau,** de São Paulo**.** procura contemplar duas grandes vertentes, as que são necessárias *"em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade"* e as que se preocupam com o desenvolvimento do *"raciocínio lógico"*. Com essa nova proposta *"as primeiras noções de* *função são introduzidas a partir de situações que têm significado para o aluno, significado esse que pode ter sua compreensão facilitada por meios visuais".* São apresentadas 9 situações-problema para só depois se fazer uma primeira sistematização do conceito de função. Todo o assunto relativo ao estudo das funções em geral, função linear e quadrática é permeado por inúmeras situações-problema e, mesmo que não apareça de modo explícito, algumas questões acenam com a possibilidade de se descobrir qual a função que melhor modela uma determinada situação. Ao todo, 51 situações-problema com riqueza de detalhes nos deixam a impressão de que seria praticamente impossível ao aluno não aprender os princípios básicos que norteiam o estudo das funções e percebesse sua importância não só para a Matemática como para as outras ciências.

A **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática para o 2º Grau** (SÃO PAULO, 1991) revelou uma nova preocupação metodológica, qual seja, enfatizou que o aluno deveria "*participar na elaboração do seu conhecimento"*, sendo o professor "*um orientador de aprendizagem, isto é, a de instigador de ideias, de orientador de rumos, num trabalho com erros e acertos"* (SÃO PAULO, 1991, p.10). A partir desse enfoque, o ensino de funções sofreu uma radical transformação, as noções iniciais de funções foram introduzidas a partir de situações que procuravam ter significado para o aluno. Também sugeriu que o professor utilizasse recursos visuais para facilitar a compreensão. Num primeiro momento havia a preocupação de fazer com que o aluno expressasse a dependência de uma variável em relação à outra e construísse tabelas. Num segundo momento se pediam gráficos e representações por conjuntos de sorte que o aluno pudesse entender as diversas representações gráficas de uma função. A partir desses dois momentos e dos exemplos trabalhados é que se explicitavam o domínio, o conjunto imagem e as leis que instruíam como fazer a associação dos elementos dos dois conjuntos. Só então se dava o conceito formal de função, pelo menos é o que a proposta sugeria. Apesar desse belo trabalho, inexiste proposta de algum experimento prático que possa ser realizado em conjunto ou em separado por professores e alunos para que o aluno pudesse, como sugeria a proposta, participar na elaboração do seu conhecimento. Entendemos, todavia, que a construção de tabelas e gráficos bem como a resolução de situações-problema são atividades extremamente importantes e que precisam ser realizadas.

Felizmente existem aqueles que sempre acreditam que é possível melhorar, por melhor que já esteja. O resultado do desejo por melhoria na educação fez surgir os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Não eram mais alguns setores ou Estados isolados da nação a querer mudança. Agora era a nação que respirava novas ideias e novos rumos.

O ensino de Matemática, antes isolado, passou a fazer parte do grande grupo das **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** O ensino de funções embarcou na nova visão, mas manteve o espírito inovador da **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática para o 2º Grau** do estado de São Paulo. Uma nova sugestão mereceu um destaque especial, **modelagem**. (grifos do autor). Hoje, temos a orientação dos PCN's e em especial do PCN+ Ensino Médio, de onde destacamos que:

> O **estudo das funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e **modelar** situações-problema, construindo **modelos** descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p. 121).

A proposta é ainda mais enfática ao dizer que:

> O ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. ... Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. . (BRASIL, 2002, p. 121).

Consideramos ainda de suma importância que:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 43).

Os PCN's e PCN+ nos colocam situações gerais e nos informam sobre procedimentos, sem, contudo, interferirem no modo de agir do professor. As orientações têm caráter bastante abrangente, deixando, entretanto, nas entre linhas, sugestões de como agir. De certa forma, podemos dizer que a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no 2º grau do estado de São Paulo foi melhorada e ampliada. As ideias e objetivos aparecem para o professor e para o aluno com mais clareza. Sobre funções também temos o que segue:

Como caso particular, as atividades e experimentos que realizamos com nossos alunos envolvendo o conceito de função visam, em especial, permitir ao aluno atingir os seguintes objetivos explicitados em Brasil (2002, p. 121) :

O aluno deve ser capaz de:

> • Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.
> • Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.
> • Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.
> • Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.
> • Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

2.4 **Função nos livros didáticos**

Faremos agora a análise de alguns livros didáticos com o objetivo de verificar como o ensino de funções é abordado.

Livro 1

Matemática – Ensino Médio – Volume 1
Autores: Edwaldo Bianchini e Herval Paccola
Editora: Moderna – 1ª Edição – 1984

O volume 1 possui 12 capítulos distribuídos em 248 páginas.

As funções aparecem no capítulo 4, p.60 onde é apresentado breve relato sobre a história da evolução do conceito de função a partir do século XVII. Um pouco de história também antecede o estudo das funções afins, p.87 e quadráticas p.102.

Para introduzir o conceito de função o autor apresenta uma situação hipotética, alguns dados e uma tabela onde relaciona o volume de água em um tanque com o tempo gasto para enchê-lo.

A partir desse exemplo o autor fornece os conceitos de variável dependente e independente e o conceito de função, deixando claro o que *função é* e o que *função faz.*

O autor *parece* conversar com o aluno, procura manter uma linguagem coloquial, inúmeras vezes ele coloca *"observe que...", "observe ainda..."* etc.

Os exemplos de função são bem dosados e fornecem uma visão clara sobre o que o autor pretende transmitir e os exercícios propostos são pertinentes e mostram o uso das funções em diferentes situações. Na p.82 vemos um texto interessante sobre “A criptografia e as funções”

O domínio, contradomínio e conjunto imagem são respaldados por exemplos simples e esclarecedores. O estudo dos gráficos também é repleto de exemplos e ensina como reconhecer quando um gráfico representa ou não uma função e como obter o domínio e o conjunto imagem. Os diversos tipos de funções, incluindo as afins e quadráticas são muito bem explicados com exemplos apropriados e com exercícios propostos interessantes e motivadores. Trabalha graficamente questões envolvendo máximos, mínimos e sinal de uma função, destacando que “*os zeros da função são as abscissas dos pontos onde o gráfico encontra o eixo x.”*

A função afim, que no livro aparece inicialmente como função polinomial do 1º grau e depois simplesmente como função do 1º grau é apresentada a partir de uma situação geométrica na qual a função polinomial do 1º grau aparece naturalmente para representar a área e o perímetro de um retângulo que é obtido quando traçamos, internamente, uma paralela a um dos lados. Seguem outros exemplos envolvendo áreas e custo de corridas de táxi. Na página 90 o autor, a partir de um exemplo, afirma, sem qualquer prova que “o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta”. Como na página 87 o autor diz que “a história das funções polinomiais do 1º grau está diretamente associada aos conceitos de proporção e de equação”, ele poderia usar esse fato para mostrar que o gráfico é uma reta.

A noção de função quadrática, que os autores chamam de função polinomial do 2º grau aparece também, de modo natural, no cálculo da área de uma superfície que se obtém quando é retirado um quadrado e um retângulo de lado variável, de cada canto. Na página 104 é afirmado, sem qualquer justificativa que “o gráfico de uma função do 2º grau f: R → R é uma curva chamada parábola.” A página 105 trás um texto oportuno sobre as antenas parabólicas.

Livro 2

Matemática – Ensino Médio – Volume 1

Autores: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Dinis

Editora: Editora Saraiva – 5ª Edição – 2005 – 1ª tiragem - 2007

O volume 1 possui 14 unidades distribuídas em 432 páginas.

As funções aparecem na unidade 3, p.75 cujo título é, "Relações entre grandezas: funções". No item 1 as primeiras noções são fornecidas a partir de um recorte de jornal onde se deve localizar um edifício através de coordenadas em um mapa e informa que a Matemática também faz uso de coordenadas conhecidas como abscissas e ordenadas. No item 2 apresenta o sistema cartesiano ortogonal informando que a ideia de localizar pontos é bem antiga e já havia sido usada por Apolônio de Perga. Um pouco de história sem maiores detalhes, mas que permitem ao aluno verificar que o conhecimento matemático não surgiu de repente. Como na unidade 2 o livro trata de estatística o aluno já tem certa familiaridade com gráficos e para dar uma noção de função o autor coloca um gráfico, extraído de um jornal, informando que *"o gráfico acima representa uma função que relaciona a participação do carro a álcool no mercado brasileiro*". Em seguida, diz que função é um modo especial de relacionar grandezas e fornece 5 exemplos com naturezas distintas. O primeiro compara graficamente a variação da altura de uma criança em função da idade. O segundo já mostra uma tabela e o gráfico da quantidade de litros de suco pronto em função do número de garrafas de suco concentrado. No terceiro, constrói uma tabela e o gráfico da variação da área de um quadrado em função da medida do lado. No quarto exemplo informa que "os fabricantes de calçados usam a fórmula **N = (5c + 28) /4** onde **N** é o número do calçado e **c** o tamanho do pé. No quinto exemplo mostra ao aluno, utilizando o **tapete de Sierpinski** que padrões geométricos também podem estar relacionados com funções. Pelos exemplos tem-se a impressão de que as autoras querem mostrar aos alunos que o estudo de funções é necessário, interessante e tem utilidade em muitas situações do cotidiano. As autoras têm o cuidado de mostrar um contraexemplo, ou seja, fornecem uma relação que não é função. A partir dos cinco primeiros exemplos são dados os conceitos de variáveis dependentes e independentes, domínio, contradomínio e conjunto imagem. Algumas atividades propostas mostram o uso das funções em situações do dia-a-dia aproveitando informações veiculadas em jornais e revistas. A função afim que as autoras chamam de função do 1º grau é introduzida a partir de situações do cotidiano onde é fornecido o número de litros de gasolina em um tanque em função do tempo em que uma bomba de gasolina permanece ligada. O livro mostra inclusive uma tabela. Os problemas propostos também mostram situações do dia-a-dia. Ao introduzir função quadrática, que as autoras chamam de função do 2º grau, é colocada na página 131 uma parábola mostrando a trajetória de um *"foguete carregando um satélite*" que, *"depois de lançado, caiu, devido a uma pane do sistema".* A autora informa que o gráfico foi construído depois que a equipe da base estudou a *"trajetória e as causas do* *acidente".* O livro coloca que analisando o gráfico se pode obter a altura máxima do foguete, o instante em que ela ocorreu e o tempo para voltar à altura no instante da pane. Informa também que o gráfico foi obtido a partir de uma função que fornece a altura em cada instante depois da pane e que essa função "*corresponde a uma fórmula*" que o aluno "*aprenderá no estudo da Física, sobre movimento de projéteis*".

Livro 3

Matemática – Contexto & Aplicações
Autor: Luiz Roberto Dante
Editora: Editora Ática – 1999

O volume 1 possui 12 capítulos distribuídos em 368 páginas. Segundo o autor o livro está de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

As funções aparecem no capítulo 3 p.52. O autor, de modo apropriado, diz que *"o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários eixos temáticos, bem como de outras áreas do conhecimento humano".* Espera com essa afirmação justificar a importância do estudo de funções no ensino médio. Sob o título "Explorando intuitivamente a noção de função" coloca três situações, a primeira relaciona "o número de litros de gasolina e o preço a pagar", a segunda relaciona o "lado do quadrado e perímetro" e a terceira se refere a uma "máquina de dobrar". A palavra *função* é utilizada sem que seja fornecido o seu significado matemático. No item 3, página 55 temos "A noção de função via conjuntos" onde o conceito de função é apresentado a partir de um diagrama de flechas. No item 4, página 56 é dada a definição de modo bastante simples, qual seja: *"Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$".* Informa que A é o domínio da função, que B é o contradomínio e que o elemento y pertencente a B é a imagem do elemento x pertencente a A pela função f. Em seguida dá um exemplo onde explicita o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem. Inúmeras situações, algumas retiradas de revistas e jornais, reproduzem exemplos de funções. Questões interessantes mostradas através de tabelas e gráficos favorecem o estudo das funções, tornando seu aprendizado um pouco menos árido para o aluno. A função afim é introduzida a partir de uma situação problema onde o salário de um empregado é constituído de uma parte fixa e outra que depende do total das vendas do mês. Neste livro também é visível a preocupação de mostrar que as funções desempenham um papel importante nas questões do dia-a-dia. Bons gráficos e exemplos ilustram as funções afins, facilitando o aprendizado. Na página 120 o autor coloca uma leitura interessante envolvendo a graduação do termômetro em mais uma aplicação da função afim. A função quadrática é apresentada a partir de uma situação envolvendo uma quadra de basquete que precisa ser cercada com tela. A função obtida é dada por um polinômio do segundo grau e o livro informa que "essa situação nos dá uma ideia de *função quadrática".* Inúmeros exemplos e situações-problema interessantes são trabalhados durante o estudo da função quadrática.

Livro 4

São Paulo (Estado) Secretaria da educação
Caderno do professor: matemática, ensino médio- 1ª série, volume 2 – 2009

O caderno do professor sugere um total de oito semanas para que os alunos possam assimilar o conteúdo referente ao estudo das funções, incluindo as funções afins e quadráticas. A proposta destaca logo na página11:

> Conteúdos e temas: Interdependência entre grandezas; proporcionalidade direta e inversa; funções; variável dependente e variável independente e fornece exemplos diversos.
> Competências e habilidades: compreender a ideia de proporcionalidade direta e inversa como relações de interdependência; expressar a interdependência entre grandezas por meio de funções: contextualizar a ideia de função e enfrentar situações-problemas relativas ao tema.
> Estratégia sugere: utilização de diversas linguagens para introduzir a ideia de função (gráficos, tabelas, expressões algébricas, etc.);exercícios referentes a situações-problema em diferentes contextos, envolvendo a ideia de função.

O conceito de função é dado sem maiores preocupações com a existência de Domínio e Contradomínio:

> Duas grandezas **x** e **y** podem variar de modo interdependente, de tal forma que seus valores assumem valores inter-relacionados. Quando deixando variar livremente os valores de uma grandeza **x**, notamos que os valores de outra grandeza **y** também variam, de tal forma que a cada valor de **x** corresponde um e somente um valor de **y**, então dizemos que **y** é uma função de **x**; dizemos ainda que **x** é a variável independente e **y** é a variável dependente.

Como parte integrante do estudo de funções, o caderno coloca três exemplos mostrando onde há ou não proporcionalidade. Em seguida mostra uma primeira atividade com cinco situações onde podem existir proporcionalidades e pede para que o aluno as descubra e represente algebricamente tais fatos indicando as constantes de proporcionalidade sejam elas diretas ou inversas. O caderno dá todas as respostas. Em seguida coloca mais 4 atividades cada uma com vários itens para mostrar a relação de interdependência entre duas variáveis. As atividades são bastante elucidativas e deixam bastante claro essa relação de interdependência. Não existe preocupação, como nas propostas anteriores, com questões como conjuntos, domínio, contradomínio e conjunto imagem de funções. Os gráficos são apresentados sempre a partir de situações-problema em cinco atividades com vários itens. A função que o caderno chama de 1º grau é apresentada teoricamente e só depois são fornecidas situações-problema onde ela aparece como exemplo. Ao todo são 9 atividades interessantes que favorecem sobremaneira a compreensão e o consequente aprendizado. A função quadrática que é chamada de função do 2º grau também recebe inicialmente um tratamento teórico e os exemplos não tem qualquer vínculo com situações-problema. O tratamento é puramente algébrico e perdura em 13 atividades. Depois de todo o estudo teórico feito é que começam as aplicações, num total de 6 atividades com vários itens, algumas equivalentes as que já foram contempladas na **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 2º grau** de São Paulo.

A proposta é boa, contudo exigirá muito empenho do professor e do aluno para que os objetivos sejam alcançados. Infelizmente, nem aqui encontramos qualquer referência a algum experimento prático.

2.4.1 Considerações sobre os livros analisados

Um aluno dedicado que esteja decidido a estudar pode aprender o que está em quaisquer dos livros analisados sem auxílio do professor, tal é a clareza como os assuntos são desenvolvidos. A apresentação de gráficos e tabelas facilitam o entendimento do que é uma função, todavia, em nenhum momento o aluno participa da elaboração de seu conhecimento, não existe proposta para que o aluno realize algum experimento prático envolvendo outras disciplinas, ele não é estimulado a desenvolver qualquer tipo de atividade prática onde ele possa fazer descobertas, em que possa interagir com seus colegas.

A ideia de iniciar o estudo das funções com a história da matemática e com exemplos do cotidiano atende às sugestões dos PCN’s descritas no item 2.3, contudo, acreditamos que seria mais interessante para o aluno comprovar esse fato realizando um experimento. Por que não começar um assunto novo com um desafio, com algum enigma, uma situação problema ou até mesmo com algum mistério? Por que não? Um trabalho paralelo com o professor de Física propiciaria ao aluno realizar algum experimento onde ele percebesse a existência de funções afins e quadráticas.

Uma de nossas preocupações é que o adolescente não aceite as verdades só porque alguém disse ou está escrito em algum lugar, mas aceite e compreenda porque ele descobriu essa verdade. Queremos que ele seja desafiado a fazer algo que nunca fez, que parta do conhecimento que possui para adquirir outros, que seja capaz de tirar conclusões sem que o professor precise convencê-lo. Acreditamos que através de um experimento aliado a modelagem todos podemos aprender muito sobre funções, quiçá, tudo que necessitamos no ensino médio.

2.5 Algumas conclusões

Quer queiramos ou não, a Lei 9.394/96 é a que temos, além de trazer novidades, as diversas alterações que ela sofreu no decorrer dos anos, tem o mérito de tentar se adaptar às transformações, que hoje, se processam de modo vertiginoso. As novas descobertas produzem a cada instante conhecimentos impossíveis de serem trabalhados na escola, contudo, reconhecemos que apesar de possíveis críticas, os princípios norteadores fornecidos pela nova Lei de Diretrizes e Bases e pelos diversos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, aliado aos esforços desenvolvidos pelos diversos estados e municípios da federação, fornecem subsídios e nos permitem, desde que queiramos, desenvolver um ensino de qualidade. Esse ensino de qualidade somente será possível se realmente apreendermos a ideia de que não é mais possível organizarmos o currículo sem que tenhamos em mente uma integração e articulação do conhecimento, quando as disciplinas deixarem de ser compartimentos estanques, quando a interdisciplinaridade fluir com naturalidade em nossas escolas. Ideias, sugestões e orientações não nos faltam. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9.394/96) e outras propostas deixam muito claro, como pudemos ver, quais são as finalidades e diretrizes que precisamos abraçar. É necessário acreditar que é possível melhorar a educação. A nova LDB não inventou a roda, mas, com toda certeza, pretende fazer com que ela rode.

Capítulo 3 – Fundamentos Teóricos

3.1 Introdução

Pretendemos aqui, mostrar algum embasamento teórico sobre o tema, ressaltando a importância da modelagem no ensino de Matemática. Apresentaremos alguns exemplos do que pode ser feito para que o ensino de Matemática possa ser desenvolvido de um modo mais significativo tanto para o professor como para o aluno. A modelagem aparece na História da Matemática e nos revela que muitas descobertas foram feitas através da realização de experimentos e da criação de modelos que representavam problemas concretos da sociedade e que muitas descobertas feitas pelos matemáticos para responder às necessidades teóricas se revelaram posteriormente serem muito úteis na prática. Apresentamos também algumas dissertações que abordam o uso da modelagem no ensino e falaremos sobre a importância dos experimentos. Por fim, discorreremos um pouco sobre os pontos essenciais da Engenharia Didática que é a metodologia utilizada em nossa pesquisa.

3.2 Modelagem, uma ideia moderna?

Se perguntarmos a uma pessoa o que é um modelo ou qual o significado de modelagem, é provável que ela não dê a resposta que os "puristas" esperam, entretanto será capaz de dar alguns exemplos. Sem nenhuma pretensão quanto ao caráter científico, perguntei aos meus alunos da primeira série do ensino médio qual a maior de todas as invenções. A primeira resposta foi Internet e muitos da classe concordaram e cada um procurou dar uma justificativa para a resposta. Outros mencionaram televisão, telefone celular (com rádio, TV, calculadora, máquina fotográfica, filmadora, TV e internet), computador, avião, algum desses instrumentos fantásticos usados nas cirurgias e toda sorte de inventos monumentais desde um par de óculos até grandes transatlânticos, etc... Argumentei que precisávamos chegar num acordo quanto ao maior de todos os inventos e aguardei aproximadamente cinco minutos sem interferir, até que um dos alunos fez a pergunta salvadora: "Professor, não foi a roda?" Não sei, respondi. Por que você acha que foi a roda? Não houve mais discussão, todos perceberam que sem a roda uma infinidade de outras invenções não seria possível. Nem todos os alunos se interessam, mas mesmo assim pedi para que fizessem uma pesquisa sobre como e quando a roda foi inventada. Como já era esperado, não houve consenso, alguns encontraram que ela foi originada do rolo (um tronco de árvore), a mais de cinco mil anos. Mais tarde, este rolo se transformou em disco. Outros encontraram que ela foi inventada pelos Sumérios quando estudavam o movimento do Sol, como se ele rodasse ao redor da Terra. Nassour (2003) nos informa que “a primeira indicação da figura de uma roda registrada numa placa de argila, auxiliando um meio de transporte humano foi na Suméria em 3.500a.C.”

O movimento do sol, ou um tronco rolando podem muito bem terem se constituído num dos primeiros exemplos de modelos matemáticos. Alguns alunos nos questionam como foi possível ao homem criar tanto e ter tantas ideias. Tentamos mostrar que através da observação muito pode ser descoberto e mesmo criado. A matemática está repleta de situações em que os “modelos” foram de fundamental importância. Quase todas as pessoas gostam de música, mas, poucas sabem que a construção de instrumentos de corda é devido a Pitágoras ou como querem alguns, à escola pitagórica, que elaborou um modelo matemático observando que os diferentes comprimentos das cordas vibratórias produziam diferentes sons. Mesmo considerando a Terra como centro do universo, foi a partir de um modelo geométrico com movimentos circulares e uniformes que Eudóxio, que viveu aproximadamente entre 400 e 350 a.C. procurou explicar o movimento dos astros. Também foi realizando experimentos e utilizando conhecimentos matemáticos que Arquimedes descobriu, entre outros, o princípio da alavanca e os fundamentos da estática. Vemos, assim, que desde a antiguidade a Matemática e a Física andam de mãos dadas. Pretendemos que isso continue ocorrendo em nossos dias em nossas escolas. Não importa se outros cientistas já realizaram ou não os experimentos ou se utilizaram dos mesmos modelos que estamos utilizando, para o estudante é uma novidade, e isso é o que importa. Ptolomeu que viveu de 85 a 165 d.C. não se importou com o fato de Eudóxio, matemático e filósofo grego, já ter estudado os movimentos celestes; ele não era um filósofo, entretanto, era um matemático egípcio famoso como geógrafo e astrônomo. Mesmo sendo geocêntrico, o modelo de seu sistema planetário foi extremamente importante para a navegação. Só no século XVI o modelo de Ptolomeu foi contestado. Nicolau Copérnico, astrônomo polonês, também realizou experimentos e inúmeras observações, e concluiu que o Sol era o centro ao redor do qual orbitavam os planetas e não a Terra. Esse modelo forneceu as bases da teoria heliocêntrica. Se os gênios que tanto admiramos utilizaram modelos e experimentos para obterem a verdade, por que não podemos fazer o mesmo? Apesar da existência de modelos ao longo da história o termo “modelo matemático” somente foi introduzido no século XIX por Lobachewsky (1792 – 1856) e por Riemann (1826 – 1866) que criaram os modelos propostos pelas geometrias não euclidianas.

Hoje, com a internet, qualquer pessoa pode verificar, sem esforço, a importância dos modelos matemáticos para a aquisição de novos conhecimentos e para a explicação de muitos fenômenos, basta querer.

3.3 Ensino da matemática por meio da modelagem

Dezenas, ou quiçá, centenas de educadores em todo o mundo, têm sua preocupação voltada para a Modelagem. Quero, no entanto, voltar meu pensamento para aquele que primeiro tocou minha alma e me fez pensar pela primeira vez na possibilidade de ser professor, John Dewey. Inúmeras vezes me surpreendi pensando que talvez Dewey tenha dito tudo e cada uma de suas frases e cada um de seus pensamentos foram descompactados para dar origem às diversas teorias e concepções de ensino e aprendizagem.

Contrariando muito do que ouvimos hoje Dewey (1978, p. 37) diz: "*Educação é vida, não preparação para a vida.*" Enquanto vivemos nos educamos e enquanto nos educamos, vivemos. Considerando o mundo em que vivemos e as milhares de variáveis com que nos defrontamos durante nossa vida, me arrisco a dizer, numa linguagem popular, que *o viver é um contínuo resolver problemas.* Não podemos, no entanto, confundir as dificuldades naturais de nossa existência que precisam ser superadas, com problemas.

Os problemas escolares só incentivarão o aluno a estudá-los e tentar resolvê-los de modo inteligente se eles forem:

> de natureza a interessá-lo e a prendê-lo, e quando as dificuldades forem de ordem a *estimulá-lo em vez de deprimi-lo. O bom ensino deve estimular a iniciativa.* Ensinar bem é ensinar apelando para as capacidades que o aluno já possui, dando-lhes, do mesmo passo, tanto material novo quanto seja necessário para que ele reconstrua aquelas capacidades em nova direção, reconstrução que exige pensamento, isto é, esforço inteligente. (DEWEY, 1978 p. 93)

Quando pensei na modelagem para promover uma aprendizagem significativa, o argumento de Dewey foi um dos primeiros a tomar forma em minha mente. Entre várias estratégias, a modelagem me parece bastante adequada, pois parte de uma situação que o estudante pode vivenciar; pelo menos é o que tentarei mostrar.

Alguém poderia argumentar que Dewey já está ultrapassado e que suas ideias hoje já não têm o eco de antes e não encontram muito respaldo na sociedade moderna com suas tecnologias. Qual o estudante que vai querer pensar quando pode encontrar quase tudo que precisa na Internet? Para que pensar em modelagem se já existem inúmeros programas de computador que fazem quase tudo inclusive inúmeras simulações? A resposta me parece ser simples; porque o homem tem a capacidade de pensar e o computador ainda não. Porque o Último Teorema de Fermat foi resolvido por um homem e não por um computador. Porque Poincaré, se lhe for permitido, deve estar exultante. Ele tinha uma conjectura, um homem e não um computador decifrou o mistério. O computador ainda é incapaz de tomar uma decisão que não seja precedida de algum tipo de intervenção humana; ainda é o homem que aperta o botão; o computador recebe um comando e segue a ordem dada e, o homem, pode receber a mesma ordem e dizer sim ou não. O homem pode dizer não porque compreende o significado desse não ou do sim, sabe as implicações do sim e do não. Queria me livrar de John Dewey nesse momento, mas não consigo e não posso. Impossível deixar de escrever que:

> Dentro de certos limites, aliás, a resistência sempre desperta energia e novos estímulos. Só uma criança mimada ou um adulto *blasé* não se encoraja e ganha novo ímpeto com a expectativa de leões pelo caminho – a não ser que leões sejam, de fato, demasiado ameaçadores. Mais que isso, podemos dizer que uma pessoa normal exige certa dose de dificuldade a vencer para que possa dar um sentido cheio e vívido, e um interesse agudo e alerta ao que estiver fazendo. (DEWEY, 1978 p. 93)

O exposto me dá a convicção de que a modelagem pode contribuir para a análise de algumas situações-problema que bem dosadas e dentro das expectativas e vivências do aluno se constituirão em um mecanismo favorável à obtenção de uma aprendizagem significativa.

George Polya, em seu livro “A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS” nos mostra realmente que resolver problemas é uma arte. Mostra-nos as fases da resolução e nos diz da importância da compreensão do Problema. Polya insiste no estabelecimento de um plano e nos diz como executá-lo. Informa-nos sobre diversas abordagens e métodos, todavia o que mais me atraiu e mais se aproxima do que pretendemos é o que está no prefácio da primeira tiragem em 1º de agosto de 1944:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 2006; p.v)

Plagiando Polya nos arriscamos a dizer que saber modelar também é uma arte, que escolher um experimento correto para servir como modelo para a aquisição de novos conhecimentos também é uma arte. Pode ser um experimento simples, mas, que desperte no aprendiz a curiosidade e a vontade de realizá-lo.

A relação de educadores, livros e artigos que tem se preocupado com a modelagem, ultrapassa os limites deste. Bem mais próximo dos professores de Matemática do Brasil estão os PCN's. Num primeiro momento é nos PCN's que as ideias aqui contidas tomarão forma.

Os PCN's explicitam a função da Matemática no Ensino Fundamental. Enumeram os objetivos que evidenciam a importância do aluno valorizá-lo como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de usá-lo como área do conhecimento que estimulam o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação. Justifica-se o estudo diante da relevância dos PCN's para área de matemática constituindo-se um referencial para construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Os parâmetros destacam que a matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos. Ora, a modelagem permite que as questões acima citadas possam ser abordadas com bastante eficiência.

Pretendemos mostrar que a modelagem, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da matemática do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Na modelagem o aluno não aplica, de forma mecânica uma fórmula ou um procedimento. Ele é levado a interpretar e relacionar os resultados obtidos com outros conhecimentos matemáticos e dessa forma aprender novos conceitos e procedimentos.

Ao adotar a modelagem como metodologia de ensino o professor deve ter em mente que ele tem diante de si seres em formação, que podem aceitar ou não o desafio de gerar um novo conhecimento ao mesmo tempo em que descobrem outros. O professor precisa compreender que no processo ensino-aprendizagem, a motivação e o desenvolvimento da autonomia do aluno são fundamentais para torná-lo um sujeito pensante e crítico, que ao se deparar com novas situações ou problemas, saiba utilizar os vários conhecimentos e informações apreendidas para escolher um caminho adequado à solução das situações problemas apresentadas.

O professor, cuja presença se torna ainda mais necessária sob este enfoque, também deverá ter sua motivação ainda mais redobrada, pois, caberá a ele criar ou buscar as situações problemas que podem ser trabalhadas à luz da modelagem e apresentar os desafios, ainda que alguns possam ser levantados pelos próprios alunos. Feliz do professor cujos alunos são capazes de apresentar novos problemas e felizes os alunos que têm professores que se sentem felizes por isso. A tarefa não é das mais fáceis, pois, lidar com modelagem não é o mesmo que simplesmente seguir modelos de resolução ou fazer uma leitura e depois reinterpretá-la ou discuti-la. O desafio é grande, promover uma aprendizagem significativa, pois, de acordo com Moreira (2010, p.5)

> Na aprendizagem significativa, o aprendiz não é um receptor passivo. Longe disso. Ele deve fazer uso dos significados que já internalizou, de maneira substantiva e não arbitrária, para poder captar os significados dos materiais educativos. Nesse processo, ao mesmo tempo que está progressivamente diferenciando sua estrutura cognitiva, está também fazendo a reconciliação integradora de modo a identificar semelhanças e diferenças e reorganizar seu conhecimento. Quer dizer, o aprendiz constrói seu conhecimento, produz seu conhecimento.

Esse texto nos mostra que para o aluno aprender, os conceitos devem lhe fazer sentido. Para isso, terá que relacioná-los às ideias pré-existentes e relevantes.

Ao se deparar com uma situação-problema o estudante reage conforme o que tem aprendido e visto, ou seja, nos livros e em geral em aula ele primeiro recebe algum conhecimento e depois parte para a resolução de algum exercício de aplicação. Dificilmente ele se depara com uma questão cujo conteúdo ainda não tenha aprendido. O que vemos, em geral, é o aluno aprendendo uma teoria para depois tentar resolver algumas questões de aplicação. O que ele faz então? Os nossos quase 40 anos de magistério nos revelam que ele tenta se lembrar de algum exercício semelhante para poder resolver a questão seguindo passos análogos aos daquela situação. Esse procedimento não garante, contudo, que seja capaz de elaborar novos procedimentos ao abordar situações-problema diferentes ou mais complexas. A nosso ver, com a modelagem, as preocupações citadas deixam de existir, pois tudo é novidade para o estudante, ele não precisa ter a preocupação de se lembrar de algum procedimento anterior, não tem que decorar nem tem que se lembrar de fórmula alguma.

Muitas são as maneiras pelas quais um estudante pode aprender a desenvolver seu pensamento criativo e consequentemente aprender. Concordamos que a modelagem é apenas uma delas e esse caminho pode trazer grande satisfação e resultados surpreendentes.

A capacidade de pensar faz com que sejamos diferentes de todos os outros seres, o pensar nos permite criar, todavia, o processo de criação não é algo que surge do nada, é necessário que se inicie na mais tenra idade, se possível, no berço. Se observarmos as crianças com um pouco mais de atenção perceberemos que elas mudam de estratégia de acordo com a situação que se apresenta, às vezes choram, às vezes gritam e às vezes atiram coisas ou batem sem parar, até conseguirem o que querem. Infelizmente, na escola, quando um professor tenta trabalhar questões diferentes usando recursos diferentes os alunos reclamam e, também os pais; inúmeras vezes ouvi a frase: "Meu filho nem aprendeu um jeito e você quer que aprenda outro?" Nem adianta querer explicar que os procedimentos são diferentes porque as situações são diferentes, que nem sempre temos a aplicação direta de uma fórmula e o que é pior, pior que um exercício onde apenas aplicamos uma fórmula, só outro.

Reconhecemos que o pensamento matemático não precisa ser puramente "formal" e sempre relacionado com axiomas, definições e demonstrações rígidas. Em alguns momentos é necessário que façamos generalizações a partir de casos observados, argumentações por indução e por analogia. O reconhecimento de conceitos matemáticos ou sua extração a partir de situações concretas é não só possível como salutar que ocorra. É importante que os estudantes conheçam esses processos de pensamento "informais" e os utilizem com bom senso e perspicácia. Nós, professores de matemática, não podemos ignorar as demonstrações, mas, certa dose de intuição e porque não dizer adivinhação faz parte do jogo. Depois da intuição ou da "adivinhação" que se procure a prova. Fermat e Poincaré que o digam, Andrew Wiles e Grigori Yakovlevich Perelman não mais precisam.

3.4 Modelagem no ensino de funções

3.4.1 Respaldo Teórico

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e **modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos** e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p.121) (grifo do autor).

Pintores e escultores se utilizam de modelos, ou seja, copiam para uma tela ou manuseiam o barro ou outro material para reproduzir o que estão vendo. Não é esse tipo de modelagem que pretendemos. O que queremos é estabelecer uma situação onde um determinado fenômeno ou acontecimento possa ser observado e possa ser explicado através da matemática mesmo que eles façam parte de outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a Física ou a Química. Queremos algo a partir do qual o estudante possa pensar, raciocinar, fazer indagações e buscar novos saberes e até desvendar algum mistério, como se fosse um mágico que através de um jogo de espelhos faz aparecer ou desaparecer algum ente. O jogo de espelhos pode muito bem ser um modelo matemático que juntamente com as leis da física podem explicar o que ocorre. Entendemos que modelagem é uma forma de explicar e ou descrever uma situação problema a partir de uma realidade existente podendo envolver conceitos vinculados a diversas disciplinas, ou, como diz Barbosa (2001, p.06): "A Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade".

É bem verdade que essa tarefa de utilizar a modelagem não é simples, pois ela pode exigir um bom tempo em seu preparo, os alunos podem não estar interessados e nem sempre o ambiente escolar e os professores estão preparados para que o experimento seja realizado. Caberá ao professor ter o que normalmente é chamado de "jogo de cintura" para contornar os problemas, para tanto, deverá conhecer muito bem sua turma para poder saber lidar com os imprevistos. O grande desafio é a utilização da modelagem para ensinar, caso contrário o modelo, a atividade ou o experimento apenas tornarão o momento pedagógico mais interessante, mais agradável e as aulas menos chatas, sem, entretanto, nada acrescentar ao conhecimento que o estudante já possui. Independentemente da definição que se dê à modelagem matemática, sua utilidade no ensino não é algo novo e muitos educadores defendem e estimulam seu uso, ocorre que, sendo a modelagem e em especial a que propomos, uma atividade prática, as seguintes considerações de Groenwald *(*2004, p.43) são de extrema importância:

> - Os problemas práticos se apresentam, quase sempre, em forma de situações especiais e complexas, estas têm que cumprir, segundo a opinião generalizada da maior parte dos autores que tem teorizado sobre essa matéria, os seguintes requisitos:
> - as situações e as informações têm que ser reais; quer dizer, elas devem ser recolhidas da vida real e de fenômenos verdadeiros;
> - as situações problemáticas devem ser claramente entendidas por todos os estudantes. Elas não devem conter, preferivelmente, informações difíceis de compreender e trabalhar durante o desenvolvimento de uma unidade de ensino;
> - as situações iniciais devem conter, dentro do possível, informações ricas em conteúdos interessantes para os estudantes e incluir diversas interrogações, o que permitirá um trabalho diversificado e diferenciado de acordo com as características do curso;

- as situações reais devem, dentro do possível, incorporar outras áreas do conhecimento científico, o que possibilita uma Educação Matemática holística e temática;
- as situações realistas devem permitir o tratamento de amplos e variados conteúdos matemáticos em correspondência com o nível de onde se desenvolve o processo de ensino e aprendizagem.

No experimento que realizamos algumas das considerações acima foram observadas.

3.4.2 Exemplos de trabalhos utilizando modelagem no ensino de funções

Os trabalhos a seguir, foram baixados da Internet.

3.4.2.1 CONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES DE PRIMEIRO GRAU NUMA PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Autoras: Rosane Fátima Postal - Claus Haetinger –Maria Madalena Dullius – UNIVATES - X Encontro Gaúcho de Educação Matemática - 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS

Resumo: O presente texto descreve o resultado de um trabalho de pesquisa fundamentado nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática, no uso da tecnologia como estratégia de ensino e na Teoria da Aprendizagem Significativa. Estabelecemos previamente um conjunto de aspectos por meio dos quais é possível evidenciar a ocorrência da Aprendizagem Significativa quando as atividades de ensino e aprendizagem compõem uma proposta que considera o ambiente de Modelagem Matemática O assunto proposto para estudo é funções do primeiro grau, que desenvolvemos em uma turma de primeiro ano de trinta e quatro alunos do ensino médio da Escola Estadual de Educação Básica Érico Veríssimo- Lajeado/RS. As informações provenientes das produções dos estudantes no decorrer das aulas provêm de instrumentos elaborados para este fim, como, de fichas de levantamento, mapas conceituais, trabalho em grupos e outros. A utilização da Modelagem Matemática se apresenta como uma alternativa viável e uma eficiente estratégia de ensino e aprendizagem que atende os anseios da Educação Matemática para a formação do indivíduo.

As autoras do trabalho, optaram pela modelagem matemática para trabalhar com funções, uma das razões é que, para elas:

> ...ensinar não é explicar, aprender não é escutar e conhecimento não é apenas o que está nos livros didáticos e que o êxito da educação não se concentra somente no resultado dos exames, mas na qualidade da aprendizagem, estamos propondo um estudo diferenciado, onde a aula estará centrada no estudante e não no professor.

A atividade de modelagem ocorreu em uma escola Estadual. Inicialmente algumas atividades para sensibilizar os adolescentes a respeito do “uso consciente dos celulares” foram desenvolvidas. As informações colhidas oralmente e por escrito dos estudantes serviram de suporte para a elaboração das atividades e juntamente com os estudantes foi desenvolvido um plano de ação. Feita uma investigação sobre os conhecimentos matemáticos necessários para se escrever o modelo matemático que relacionava preço e tempo de uso do celular é que foi construído o modelo da função. Cada grupo de estudantes elaborou seu próprio modelo e após a apresentação do modelo de cada um dos grupos, numa reunião com todos os grupos, foi elaborado um modelo único.

Entre as várias atividades tomadas como exemplo as autoras destacam a seguinte:

Atividade 1

> Em um dos textos pesquisados constava a informação do preço do minuto das ligações de uma operadora para ligações fora da área de cobertura. Fora da área de cobertura: Para qualquer telefone: R$1,39/min Adicional por chamada: R$1,39 (WWW.vivo.br acesso em 18/08/08) A partir da informação acima foi apresentado aos estudantes o seguinte problema:
> 1-Qual o modelo matemático que representa a relação entre as variáveis descrita?
> 2-Função Linear: Lembrando que a função linear é da forma y= ax+ b, onde a é chamado de coeficiente angular e b de coeficiente linear.
> a) O preço que irei pagar ao final de cada ligação, fora da área de cobertura, é dado em função _____
> b) Identifique o coeficiente angular.
> c) Identifique o coeficiente linear.
> d) Qual a taxa fixa paga em qualquer ligação?
> e) Se minha ligação for de 30s, o preço pago será de_____
> f) Se minha ligação for de 1min e 50s, o preço pago será de _______
> g) Se pagar R$6,18 por uma ligação, quanto tempo poderei falar _______________
> 3-Construa uma tabela a partir da função formulada.
> 4-Construa o gráfico da função.
> 5-Faça um comentário sobre ligações fora da área de cobertura.
> O objetivo destas atividades foi avaliar os conceitos já construídos, bem como dificuldades encontradas. O principal objetivo foi que os estudantes construíssem conhecimento matemático fazendo uso da tecnologia. “Para resolver as atividades propostas, eles tiveram acesso a computadores onde utilizaram o *software Graphmatica.*

Segundo as autoras

> a situação-problema analisada permite o estudo de modelos matemáticos, descritas por funções e a construção de gráficos representativos dessas situações com o uso de programas computacionais. Assim sendo, podemos concluir que a utilização de situações-problema e a construção de modelos matemáticos representativos de tais situações é uma estratégia eficaz para o ensino da Matemática.

3.4.2.2 A MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO AMBIENTAL

Autora: Kátia Luciane Souza da Rocha-Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática.

> **Resumo:** Esta dissertação apresenta resultados de uma pesquisa realizada com os alunos de uma turma de oitava série do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de São Gabriel, RS, na qual propôs-se analisar as contribuições da Modelagem Matemática para o estudo de funções, enquanto se explorava o tema: "Plantio de Eucaliptos". A pesquisa foi do tipo qualitativo, e, a coleta de dados foi feita pela professora pesquisadora, por meio das anotações diárias em seu diário de campo e da análise das atividades desenvolvidas pelos alunos da turma. Foram considerados os dados pesquisados pelos alunos, para construir modelos matemáticos que retratassem alguns aspectos do tema abordado. A análise das respostas aos questionamentos, bem como a validação dos modelos foi feita em grupos de quatro alunos com o acompanhamento da professora e baseou-se nas etapas da Modelagem Matemática sugeridas por Bassanezi (2002). Para um melhor entendimento do comportamento gráfico da função estudada, usou-se a planilha Excel. A partir das análises dos resultados obtidos, foi possível notar mudanças positivas em relação ao comportamento dos alunos em sala de aula. Eles tornaram-se mais participativos e dispostos às discussões que surgiam em cada aula. Percebeu-se que, o uso da Modelagem, propiciou maior motivação pelos conteúdos matemáticos que estavam sendo abordados, além de uma melhora significativa no desempenho. Inferiu-se, também, que a abordagem do tema possibilitou a discussão de questões referentes ao meio ambiente e oportunizou o desenvolvimento da capacidade crítica de perceber a importância da questão ambiental para a sociedade onde vivem.

A questão que direcionou a pesquisa realizada foi:

"*Quais as contribuições que a metodologia da Modelagem Matemática, aliada à Educação Ambiental, pode oferecer para o estudo de funções para alunos de 8ª série do ensino fundamental?"*

Segundo a autora o Plantio de Eucaliptos, "faz parte do contexto social ao qual os alunos estão inseridos", e havia uma preocupação não só quanto a sua viabilidade econômica, mas, também quanto aos impactos ambientais na região. Além de lidarem com a modelagem como proposta pedagógica poder-se-ia em sala de aula:

> inserir discussões sociais, econômicas, culturais e ambientais enquanto se estuda Matemática permitindo também, através da abordagem de temas presentes na realidade local, que a comunidade escolar se integre de forma efetiva na responsabilidade da formação cidadã dos alunos envolvidos, tornando assim, o ensino da Matemática mais presente nas problemáticas vivenciadas pelos educandos.

Os alunos realizaram seis atividades.

Atividade 1

Nessa atividade os estudantes da oitava série além de visitarem fazendas da região e participarem de palestras dadas por especialistas, também realizaram pesquisa nos *sites* da : Associação Brasileira de Produtores de Florestas Plantadas (ABRAF), Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), Associação Brasileira de Celulose e Papel (BRACELPA), entre outros, para realizar um levantamento de dados sobre a quantidade de hectares de terra plantados com eucaliptos no Brasil. Posteriormente os estudantes organizaram uma tabela relacionando o ano de plantio e a quantidade de hectares plantada no período. Com os dados da tabela os alunos fizeram uma representação gráfica. A professora instruiu os alunos para que inserissem no Excel os dados obtidos considerando o período de tempo no eixo “x” e a quantidade de hectares plantados no eixo “y”. Várias discussões foram feitas a respeito do gráfico, em especial se havia proporcionalidade. A professora solicitou aos alunos que calculassem a diferença entre os valores consecutivos de “y” e respondessem as questões: Este valor é constante? Pode-se afirmar que os valores de “y” são proporcionais aos correspondentes valores de “x”? Cada valor de “x” corresponde a quantos valores de “y”? Pode-se escrever uma lei que representa esta situação? Quantos hectares serão plantados em 2010? Em 2020?

Foram obtidas algumas funções afins da forma f(x) = ax + b discutindo-se os significados dos coeficientes a e b da função e feitas algumas previsões.

Atividade 2

Foram feitas visitas às fazendas de propriedade de uma das empresas que cultivam eucaliptos, nos Municípios de São Gabriel, Santa Margarida do Sul e Vila Nova do Sul. Algumas perguntas foram feitas aos técnicos, entre elas: Qual a altura máxima de um eucalipto? Qual a altura mínima para que a árvore sofresse o primeiro corte? Depois da conversa com os técnicos os alunos organizaram-se em grupos para analisarem o crescimento do eucalipto nos 7 primeiros anos. Com os dados obtidos por eles e com os fornecidos pelas empresas confeccionaram-se diversas tabelas e gráficos explorando o ciclo de crescimento do Eucalipto e discutindo as possíveis funções que poderiam ser associadas aos respectivos gráficos. Como existe um limite para a altura do eucalipto houve um estudo sobre assíntotas.

Atividade 3

Nessa terceira atividade foi feito um estudo sobre o consumo de madeira de floresta natural no Brasil após pesquisa efetuada no site da Associação Brasileira de Florestas (ABRAF). Foram confeccionadas tabelas e gráficos e discutidas questões quanto à monotonicidade.

Atividade 4

Nesta atividade foi feito um estudo sobre a produção de celulose de eucaliptos como alternativa à celulose de Pinus que vinha ocorrendo desde 1950. A professora forneceu os dados relativos à produção de papel no período de 1995 a 2007 e a partir daí os alunos analisaram inúmeras questões formuladas pela professora e confeccionaram novas tabelas e gráficos, procurando sempre relacionar as atividades realizadas com o estudo das funções.

Atividade 5

Na atividade 5 foi feito um estudo comparativo da evolução do plantio de Pinus e Eucalipto desde 2000 fazendo-se uma projeção até 2020. Aqui também se verifica a preocupação em relacionar o estudo feito com o estudo das funções.

Atividade 6

Segundo a autora "*Os alunos estavam interessados em saber quanto na verdade o Brasil estava ganhando com a silvicultura*". Depois da tabulação dos dados entre 1997 e 2006, os estudantes foram orientados a organizá-los em uma tabela relacionando o ano com a quantidade de milhões de dólares exportados. O Excel foi utilizado para a confecção dos gráficos. Com o auxílio da professora, depois fazerem os ajustes necessários os alunos obtiveram uma função quadrática *"como um modelo matemático capaz de ilustrar o comportamento dos dados referentes às exportações dos produtos oriundos de florestas plantadas no Brasil".* Inda que esse modelo não seja perfeito foi feita uma tabela comparando-se os valores obtidos com a função com os valores originais. A partir da função obtida foram discutidos os significados dos coeficientes a, b e c da função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. A professora apresenta outros tipos de funções quadráticas e aproveita o momento para discutir questões referentes aos zeros da função e concavidade.

3.4.2.3 Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa e da Modelagem Matemática para o Estudo de Funções
Autora: Cleci Fátima Iaronka - Dissertação de mestrado.

> **Resumo**: Esta dissertação apresenta os resultados da pesquisa realizada com os acadêmicos do primeiro período do Curso Superior de Tecnologia em Gerência de Obras da Universidade Federal Tecnológica do Paraná – UTFPR, Campus de Pato Branco - PR. O foco principal da investigação foi a análise das possibilidades de aquisição de conceitos básicos sobre Função, por meio da Modelagem Matemática, sob a ótica da Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel. A metodologia da pesquisa utilizada, aliada aos procedimentos pedagógicos da Modelagem Matemática, possibilitou aos alunos envolvidos no presente estudo a construção e a assimilação significativa de conceitos básicos de funções. Os resultados da investigação demonstraram que a integração de atividades matemáticas específicas com a realidade do aluno contribui para a aprendizagem significativa dos conceitos básicos de Função, em razão de o processo metodológico empregado ter oferecido aos alunos oportunidade de trabalhar com situações reais e de seu interesse.

A autora, utilizando modelagem matemática realiza com seus alunos uma pesquisa onde procura comparar os preços de construção de casas populares feitas de roletes de *Pinus* e uma de *Alvenaria*, bem como a colocação de lajotas em uma calçada.

Antes do início da pesquisa a autora faz uma análise dos conhecimentos prévios dos alunos através de 10 problemas resolvidos em duplas e individualmente. Os estudantes obtém as funções lineares e afins que fornecem o custo em função do metro quadrado de área construída. A partir das funções os gráficos dos respectivos custos são esboçados. Também é feita uma interessante comparação entre os preços por metro quadrado de diversas lajotas levando-se em conta as dimensões da mesma, obtendo-se ao todo 8 funções lineares. Pelos estudos concluiu-se que a lajota hexagonal é a mais econômica. Ainda, através da modelagem foram realizadas pesquisas para se determinar a função que fornece, entre outros, o custo do transporte da areia natural e areia artificial com caminhão basculante e caminhão carroceria levando-se em conta as distâncias percorridas e o tipo de estrada e posteriormente comparando os custos para o transporte de areia normal e artificial.

Uma das conclusões da autora é que:

> Constatou-se que ao partir de situações oriundas da realidade do aluno, está-se por meio da Modelagem Matemática, levando o aluno a construir de forma significativa o conhecimento, o que flui de maneira natural, e não por imposição. A ligação do conteúdo matemático proposto com a vida cotidiano do aluno tem um papel importante no processo de escolarização do indivíduo, pois dá sentido e significado ao mesmo.

3.4.2.4 Modelagem Matemática e o Uso do Álcool e do Cigarro: uma Forma de Contextualizar a Matemática – Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissionalizante – UNIFRA - 2006
Autora: Cristina Medianeira de Souza Chaves

Resumo: Apresenta-se, nesta dissertação, uma pesquisa qualitativa, voltada à Educação Matemática, desenvolvida em turmas de primeira série, do Ensino Médio, no Colégio Militar de Santa Maria (CMSM). Questionou-se se a Modelagem Matemática pode ajudar os alunos a conhecer os riscos causados pelo uso do álcool e do cigarro, enquanto constroem seus conhecimentos matemáticos. Para tanto, realizou-se, em sala de aula, uma experiência de ensino, em que foi desenvolvida a unidade de Matemática referente à Função Exponencial, abordando-se o tema "drogas, em particular o uso do álcool e do cigarro", tendo como estratégia metodológica a Modelagem Matemática. Deu-se enfoque ao uso de dados oriundos do cotidiano dos estudantes. Com o objetivo de verificar se o emprego dessa estratégia de ensino-aprendizagem facilita tanto a assimilação e a construção de conhecimentos matemáticos, quanto a conscientização dos alunos sobre os efeitos maléficos causados por essas drogas, usaram-se os passos e procedimentos investigativos propostos pela pesquisa-ação, diluídos concomitantemente nas etapas da Modelagem. Foram coletados dados descritivos, usando-se questionários; dois deles foram aplicados no início, e um terceiro no final da investigação. Também se usaram pautas de observação.

Fez-se a descrição e análise dos dados coletados em cada um dos três instrumentos, bem como a comparação do primeiro com o terceiro. Descreveu-se também o desenvolvimento da unidade de ensino. Para um melhor entendimento do comportamento gráfico da função estudada, usou-se a planilha Excel. No final da pesquisa, constatou-se que os alunos conheceram os riscos causados pelo uso do álcool e do cigarro e que a Modelagem Matemática contribuiu significativamente para isso, enquanto houve apropriação de conhecimentos matemáticos, que foram construídos paralelamente à abordagem do tema.

A autora levou para a sala de aula uma "*estratégia de ensino que expusesse os alunos a situações oriundas da realidade*". Para ela a "*Modelagem é uma estratégia que contempla efetivamente o estudo integrado de situações reais*". O foco da pesquisa foi norteado pela questão: "*Pode a Modelagem Matemática ajudar os alunos a conhecer os riscos causados pelo uso do álcool e do cigarro, enquanto constroem seus conhecimentos matemáticos*"*?* Para tanto a autora realizou a presente experiência de ensino com os alunos da primeira série do ensino médio a partir de um questionário aplicado nas segundas e terceiras séries do ensino médio. A partir da pesquisa a autora trabalhou os principais conceitos relativos a função exponencial relacionando-a com questões do cotidiano. Os alunos responderam inicialmente um questionário onde responderam se já haviam feito uso de álcool ou tabaco pelo menos uma vez na vida, pelo menos uma vez no último ano, se faziam uso eventual (1 a 5 vezes no último mês), frequente (6 a 19 vezes no último mês) ou pesado (20 ou mais vezes no último mês). A seguir os dados foram distribuídos numa tabela, por faixa etária e por sexo. Ressalte-se que a pesquisa mostrou o tipo de bebida que era mais consumida em nas 1ªs, 2ªs e 3ªs série do ensino médio. Num questionário que a autora chama de "parte aberta" os alunos foram estimulados a relatar porque bebiam ou fumavam e quais sensações sentiam durante ou depois desse procedimento. Na página 67 de sua dissertação a autora coloca que sua pesquisa confirmou dados obtidos por instituições como a UNIFRA em 1999 e CEBRID em 2001. Valendo-se de dados das instituições acima citadas a autora trabalha questões de crescimento e decrescimento da função exponencial. Um estudo interessante é o que mostra os resíduos do tabaco e do álcool no organismo com o passar do tempo. Segundo a autora o trabalho realizado com modelagem permitiu que:

> Muitos alunos relutantes e/ou desmotivados com as aulas ministradas até o momento sentiram-se despertados pela possibilidade de trabalharem com essa tecnologia que permitiu o uso de habilidades e competências diferenciadas daquelas exigidas numa aula usual de Matemática.

3.5 Importância das Atividades experimentais no ensino da matemática

São muitas as críticas ao ensino de hoje em nossas escolas e concordemos ou não com elas os resultados dos diversos exames realizados como SAEB, SARESP, PISA, OBMEP e outros, tem mostrado o baixo nível de nossos estudantes. Esses resultados nos obrigam a renovar os padrões de ensino que hoje temos e incluirmos ideias inovadoras. Se olharmos para a educação como um processo de construção conjunta entre o aluno e professor olhar para o estudante como um ser participante do conhecimento passará a ser uma ideia antiga. Piaget, Vygotsky, Ausubel, entre outros, têm estudado a Psicologia Cognitiva, de modo a oferecer subsídios para novos estudos e análises sobre o processo de ensino-aprendizagem. O conhecimento científico deve repercutir e influenciar as concepções previamente elaboradas pelos estudantes acerca de diversos conteúdos escolares, promovendo assim uma formação ampla do cidadão contemporâneo. Uma maneira de atender aos reclamos para a melhoria do ensino pode ser a realização de experimentos.

Galiazzi (2001) coloca que "em pesquisa realizada por Kerr (1963), e por Hodson, (1998) professores apontaram dez motivos para a realização de atividades experimentais na escola".

> *1. estimular a observação acurada e o registro cuidadoso dos dados;*
> *2. promover métodos de pensamento científico simples e de senso comum;*
> *3. desenvolver habilidades manipulativas;*
> *4. treinar em resolução de problemas;*
> *5. adaptar as exigências das escolas;*
> *6. esclarecer a teoria e promover a sua compreensão;*
> *7. verificar fatos e princípios estudados anteriormente;*

> *8. vivenciar o processo de encontrar fatos por meio da investigação, chegando a seus princípios;*
> *9. motivar e manter o interesse na matéria;*
> *10. tornar os fenômenos mais reais por meio da experiência* (Hodson, 1998c, p. 630)

3.6 Engenharia didática

A didática da matemática tem sido objeto de discussão em muitos países. Na França, uma metodologia da pesquisa que inclui uma parte experimental tem sido discutida desde a década de 80 sendo um marco da visão de uma área de pesquisa que reflete, discute e busca a compreensão das relações entre o ensino e a aprendizagem no contexto de conteúdos de matemática. Essa nova metodologia é conhecida como Engenharia Didática, termo criado na França na área de didática das matemáticas e que segundo Artigue (1996, p.243), tem inspiração no trabalho do engenheiro que... (tradução livre do autor)

> ... para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Para Carneiro (2005, p.3)

> ... a origem desta teoria está na preocupação com uma certa “ideologia da inovação” presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino. Nesta perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da *realização didática* na sala de aula como prática de investigação.

A Engenharia Didática se apresenta ao professor como uma proposta metodológica facilitadora e adequada para organizar a pesquisa no contexto da didática. Percebemos que sendo a engenharia didática uma metodologia de pesquisa aplicável aos produtos de ensino ela pode ser usada para guiar as experiências em sala de aula.

Nossa proposta de trabalho nesta dissertação é exatamente essa, uma proposta realizável na sala de aula, uma pesquisa experimental realizada pelos alunos sob a orientação do professor. Essa proposta está de acordo com Almouloud (2008, p.66), para quem:

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise à posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Ao utilizarmos a metodologia da Engenharia Didática as atividades devem se desenvolver em quatro fases que segundo Artigue são:

- análise preliminar;
- construção e análise *a priori*;
- implementação do experimento;
- análise *a posteriori* e validação do experimento.

Essas fases são distintas, mas, cada uma delas pode ser retomada durante a realização das atividades de sala de aula, ou como em nosso caso, durante a realização do experimento.

Análise preliminar

Nesta fase, o professor faz uma coleta de dados para que possa refletir sobre eles e com isso estruturar uma maneira positiva de interferência no ensino. Estão incluídas três dimensões:

- Dimensão Epistemológica, associada ao conteúdo em questão;
- Dimensão Didática, associada à maneira como o ensino desse conteúdo vem sendo desenvolvido atualmente;
- Dimensão Cognitiva, associadas às características dos alunos que participam da pesquisa.

Ainda sobre as análises preliminares devem ser feitas as seguintes:

- a análise epistemológica dos conceitos contemplados no ensino;
- a análise do ensino atual e de seus efeitos;
- a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução;
- a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

Essas análises devem ser feitas tendo sempre em mente os objetivos da pesquisa.

Construção e análise a priori

Para facilitar a análise da engenharia, Artigue (1996, p.255) explicita duas variáveis de comando, as "variáveis macro didáticas ou globais e as variáveis micro didáticas ou locais". As variáveis locais são aquelas que dizem respeito ao planejamento específico de uma sessão da sequência didática, portanto é restrita a uma fase da pesquisa. As variáveis globais referem-se ao planejamento geral da engenharia.

Nessa fase analisamos a importância da realização do experimento para o aluno e elaboramos um plano para a realização do experimento descrevendo pormenorizadamente todos os passos necessários a realização do mesmo. As ações do aluno são executadas sem a interferência do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem. Também realizamos o experimento para que possamos fazer uma análise dos materiais necessários à realização do experimento identificando os conhecimentos prévios que o aluno deve ter e verificando que conhecimentos didáticos podem ser abordados. É importante que o professor se coloque no lugar do estudante para que identifique as possíveis dificuldades que ele possa encontrar e estabelecer quais objetivos podem ser alcançados.

Implementação do experimento

Esta etapa está relacionada com a aplicação da sequência didática planejada para certo grupo de alunos escolhidos como público da pesquisa (Em nosso caso trabalhamos, num primeiro momento, com alunos da 2ª e 3ª séries ensino médio). Lembramos que para a aplicação do experimento:

- os objetivos da pesquisa devem ser claramente apresentados aos participantes da experiência;
- o contrato didático deve se estabelecido, ou seja, segundo Brousseau[6], apud Franchi (2008, p.50) "devem ficar absolutamente claros quais são os comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e quais os comportamentos dos alunos que são esperados pelo professor".

[6] BROUSSEAU, G. (1988). Le Contrat didactique: le, ilieu. Recherches en Didactique des Mahematiques, v.9, n. 3 pp. 309-336

- as observações no decorrer das aulas devem ser cuidadosamente descritas em relatórios e os resultados dos experimentos devidamente registrados podendo inclusive ser utilizados recursos audiovisuais.

Colocamos aqui, em prática, o que foi idealizado. Os alunos de cada uma das classes do ensino médio foram divididos em grupos para a realização do experimento seguindo as orientações dadas pelo professor.

Análise a posteriori e validação do experimento

A análise a posteriori é feita utilizando-se o resultado dos trabalhos, ou seja, os dados, tabelas, gráficos, equações e funções produzidas pelos estudantes. Durante o experimento coletamos e organizamos a produção dos alunos e registramos suas perguntas, dúvidas e erros observados durante a realização do experimento. A análise desse material é essencial para a etapa da validação. Eventualmente, para facilitar a análise a posteriori, talvez sejam necessários a obtenção de dados complementares obtidos através de questionários, entrevistas individuais ou grupos pequenos, tanto durante a realização do experimento como após sua realização. Na Engenharia Didática, “a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori”. Artigue (1996, p. 248).

3.7 Conclusão

Discorremos até aqui sobre a importância da modelagem no ensino da matemática e sua importância na evolução do conhecimento. Vimos que o uso da modelagem encontra respaldo no trabalho de inúmeros autores e que sua utilização é incentivada nos Textos Oficiais. Mostramos trabalhos de educadores renomados e dissertações de mestrado profissionalizante onde o uso de modelagem se mostrou importante para o aprendizado. Vimos também que as atividades experimentais são de suma importância para que o estudante participe cada vez mais da construção de seu conhecimento e que os trabalhos em grupo permitiram aos estudantes se interessarem mais pelo estudo. Por fim apresentamos um pouco da Engenharia Didática. Na procura de uma boa sustentação para nossa dissertação percebemos que inúmeros educadores sejam em que nível for mantêm acesa a preocupação com a melhoria da qualidade de ensino e procuram o melhor, ou na pior das hipóteses, um bom caminho para que ocorra uma aprendizagem duradoura e profícua.

Sabemos o que deve ser trabalhado no ensino médio e a importância de cada tema, todavia as diversas críticas que são feitas nos levam a conjecturar que a utilização de um simples modelo ou a realização de um experimento com auxílio de novas tecnologias por si só não conduzirá a uma aprendizagem significativa. É necessário não apenas uma mudança de postura de nossa parte enquanto educadores, mas, também, urge que uma mudança de metodologia seja feita para acabar com o medo que muitas crianças e adolescentes têm da Matemática. É preciso que se desperte no estudante a vontade de aprender. Para alguns problemas práticos não existe teoria prévia e é necessário que se construam soluções. Uma abordagem formadora da prática educativa exige que o professor investigue a própria ação na sala de aula atuando como agente facilitador do processo aprendizagem ao permitir que os alunos construam o conhecimento através de reflexões baseadas nas atividades que eles próprios realizam. Com a modelagem a prática do professor cresce em importância e precisa ser mais reconhecida e valorizada. Em nosso modo de ver, o professor é o instrumento para a ação enquanto criador de situações de aprendizagem. O professor não pode abrir mão de seu direito de ser um mentor da aprendizagem, do seu direito de aceitar o desafio de junto com seus alunos redescobrir ou até mesmo construir um conhecimento novo através das atividades de sala de aula. Ao trabalharmos com a modelagem com certeza faremos descobertas, mas, devemos ter a consciência de que as teorias desenvolvidas ou redescobertas com os alunos dentro ou fora da sala de aula precisam, dentro de um curto espaço de tempo, ser confrontadas com o conhecimento científico existente.

Capítulo 4 – Preparação do Experimento: Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido.

4.1 Introdução

Neste capítulo falaremos sobre a motivação para a escolha do tema, descreveremos o ambiente escolar em que o experimento foi realizado e descreveremos de forma geral e sucinta o experimento apresentando os objetivos pedagógicos que pretendemos alcançar. A seguir faremos uma apresentação detalhada do experimento estabelecendo uma conexão entre as funções obtidas pela matemática e as leis da física.

4.2 Descrição do ambiente escolar

- Nome: Escola Municipal Adelino Bordignon
- Endereço: Av. Daniel Antônio de Brito, 241 – Nova Matão – Matão – SP
- e-mail: secretaria@adelinobordignon.com.br
- Mantenedora: Prefeitura Municipal de Matão
- Funcionamento em três turnos: 7 às 12:20h, 12:40h às 18h e das 19h às 23h
- Reconhecida pela portaria CEI de 11/08/82 e autorizada a funcionar : 09/09/86

O presente experimento foi realizado na Escola Municipal Adelino Bordignon na cidade de Matão. No período da manhã funcionam as sétimas e oitavas séries do Ensino Fundamental e o Ensino Médio. No período da tarde funcionam as demais séries do Ensino Fundamental, da 1ª a 6ª série. No noturno funcionam o ensino médio e os cursos profissionalizantes de Química, Informática e Secretariado. Tenho orgulho de ser um dos membros do corpo docente dessa escola desde fevereiro de 1989. O Adelino, como é popularmente conhecido, possui hoje, aproximadamente dois mil alunos. Participaram das atividades dessa pesquisa, alunos das três séries do ensino médio do período da manhã, num total de 180 alunos.

4.3 Fatores Motivadores para a escolha do experimento

Durante as aulas de Matemática é comum ouvirmos perguntas do tipo:

— Professor, onde uso isso?

— O que eu faço com isso?

— Para que serve essa coisa?

— Tem que decorar?

— Tem fórmula?

— Quem teve a ideia de fazer isso?

Também ouvimos com frequência afirmações como:

— Nossa! Que coisa complicada.

— Não entendo essa coisa.

— Eu sempre tive dificuldade com matemática.

— Não adianta, nunca vou tirar nota.

— Até hoje não sei como eu passei de ano.

Em todos os cursos ou reuniões de professores sempre ouço meus colegas comentarem que os alunos fazem esse tipo de questionamento, eles também não gostariam de ouvir essas frases, mas, nem sempre é possível evitá-las. Essas colocações nos levam a concluir que os alunos não conseguem perceber qual a utilidade e a importância dessa "Matemática" que é apresentada na escola. Esforços são feitos para tornar as aulas mais agradáveis, com questões interessantes e que despertem o aluno para o aprendizado, contudo, parece que nada adianta. Não basta colocarmos questões simples para que o aluno consiga fazê-las sem muita dificuldade, ele percebe a facilidade e pouco a pouco perde o interesse. Ainda me lembro de uma orientação que me foi dada na faculdade: *"É necessário que o aluno compreenda o que está fazendo. Evite usar fórmulas sem justificativa. Prove as afirmações que fizer. O que você ensinar deve ter significado para o aluno, evite 'decoreba'".*

Conversando com colegas, percebi que eles partilham da mesma opinião, concordam que as orientações que recebi são parecidas com as que eles receberam, que também procuram fazer com que o aluno compreenda, contudo, não obtém sucesso e o aprendizado deixa muito a desejar. Muito do que ensinamos hoje não tem significado algum e, aprender é, justamente, atribuir significados.

Comecei a lecionar matemática em 1971 no antigo ensino de 1º grau e em 1972 no 2º grau diurno e noturno. Nesses meus trinta e nove anos como professor, principalmente quando lecionava Física, tenho observado que o interesse dos alunos aumentava quando eram realizados experimentos, principalmente no curso noturno. Os alunos apresentavam grande dificuldade no trato com expressões algébricas e a determinação das expressões que forneciam a variação da velocidade ou do espaço em função do tempo, apesar de aceitas como verdade, pois eram deduzidas, eram de difícil compreensão. Alguns experimentos, na época, minimizaram essas dificuldades. Em 1975 quando lecionava Física tive a grata satisfação de me deparar com a coleção de livros de Física do projeto FAI (Física Auto Instrutiva) idealizado pelo GETEF – Grupo de Estudos em Tecnologia de Ensino de Física e publicado pela Editora Saraiva. Os livros foram adotados nas três séries do 2º grau. O sucesso foi imediato, pois sendo os livros de instrução programada cada aluno trabalhava em seu próprio ritmo. Quase todos os experimentos constantes nos cinco livros foram realizados com participação efetiva dos alunos. Felizmente, naquela época, no "Instituto de Educação Prof. Henrique Morato" hoje EE Prof. Henrique Morato, havia um laboratório bem montado, incluindo até um "marcador de tempo", uma "cuba de onda", resistores, amperímetros e voltímetros, etc. Como, na época, eu também lecionava matemática, ficava fácil estabelecer a relação entre as duas disciplinas. Na EE José Inocêncio da Costa, lecionando Matemática no 1º grau alguns experimentos também foram realizados. Uma atividade realizada com alunos das sétimas e oitavas séries e que trouxe muitas alegrias foi o cálculo de áreas de figuras planas utilizando papel quadriculado, milimetrado e balança. Cada grupo de alunos construía sua própria balança e a calibrava. A Matemática e a Física, que eram ministradas nas aulas de Ciências, andavam de mãos dadas.

Os questionamentos colocados nos parágrafos anteriores nos levaram, inicialmente, a pensar em realizar atividades e ou experimentos tendo como base a resolução de problemas e modelagem; a diferença é que minha experiência e a de meus alunos se constituíram em simplesmente aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas ou comprovar experimentalmente as verdades físicas existentes. Hoje percebo que poderia ter feito o contrário, ou seja, usando modelagem poderíamos ter construído com o aluno, algum conhecimento. Agora, no mestrado profissional, surgiu a oportunidade de reparar o deslize ocorrido no início da carreira docente.

Como leciono no Ensino Médio e lecionei Física por pelo menos 15 anos, o professor Roberto Paterlini e o professor Ivo Machado me sugeriram realizar um experimento envolvendo escoamento de um líquido, para obter a melhor função que o modela.

Acreditamos que a determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido permite ao aluno se comportar como um cientista que quer explicar um fenômeno físico. Durante o processo esperamos que ele perceba que para que um fenômeno seja estudado alguns rigores científicos precisam ser observados. Poderá perceber que para a obtenção de resultados confiáveis o experimento não pode ser feito de qualquer maneira e que alguns cuidados devem ser tomados. Como a atividade será em grupo, espera-se que o próprio grupo perceba os cuidados que deverão ter, como por exemplo:

- verificar se o local onde a garrafa será colocada é plano;
- verificar se a fita ou papel milimetrado está bem colado;
- usar caneta de ponta porosa fina, ou lápis bem apontado se a fita de papel for colada diretamente sobre a garrafa;
- verificar se a região do furo interna e externamente foi bem lixada;
- não apertar a garrafa ao fazer a marca;
- não apoiar a mão sobre a garrafa;
- manter silêncio e não se distrair com conversas;
- testar o cronômetro ou outro instrumento antes de marcar o tempo;
- fazer um teste antes das medições e marcações definitivas e;
- repetir o experimento usando outros dois integrantes do grupo e comparar os resultados caso haja suspeita de algum erro.

Ao realizarmos o experimento tomamos esses cuidados e acreditamos que os grupos também os tomarão; se não os tomarem, ao plotarem os pontos num sistema cartesiano e fizerem o gráfico das diferenças sucessivas perceberão que algo não está muito certo. Nesse caso o experimento deverá ser refeito.

O escoamento de líquidos e suas leis é conhecimento importante para as questões do dia-a-dia, ainda assim, tal assunto é (geralmente) negligenciado no ensino médio. Com o presente experimento pretendemos mostrar a importância da matemática e sua relação com outras ciências, além de dar significado prático ao que fazemos em aula.

4.4 – Escoamento de um líquido: ideias gerais

4.4.1 Objetivos do Experimento: Construir através de um experimento sobre escoamento de líquidos uma atividade que propicie uma aprendizagem significativa do conceito de função e técnicas de manipulação de dados advindos desse experimento.

A partir desse experimento esperamos atingir alguns dos objetivos constantes em Brasil (2002, p. 114) , ou seja, que o aluno seja capaz de:

Quanto a Articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia.

> • Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.

> • Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.
> • Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo.

Quanto a Interações, relações e funções; invariantes e transformações.

> • Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento.

Quanto a Modelos explicativos

> • Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações.

4.4.2 Metodologia da pesquisa: A metodologia adotada, como já tivemos a oportunidade de colocar, é a Metodologia da Engenharia Didática, que é composta de quatro fases consecutivas: as análises preliminares; a concepção e análise a priori; a aplicação de uma sequência didática e a análise a posteriori e validação.

Na análise preliminar realizamos um pequeno estudo sobre a história do conceito de função e analisamos alguns documentos oficiais que tratam do ensino e aprendizagem, em especial do ensino de funções quadráticas. Igualmente fizemos uma análise de alguns livros didáticos para verificarmos como as funções e a função quadrática, em especial, são trabalhadas e apresentadas aos alunos. Na fase da concepção e análise a priori tecemos comentários sobre nossas expectativas, objetivos, eventuais dificuldades que os estudantes possam encontrar e elaboramos uma sequência didática prevista para ser aplicada durante 7 aulas e cujo procedimento é descrito no item 4.4.3. Essa sequência didática foi inicialmente desenvolvida pelo professor por questão de responsabilidade profissional e em segundo lugar para que ele pudesse, em se colocando no lugar do aluno, antever e tentar descobrir as possíveis reações, dificuldades e questionamentos que poderiam existir.

Na outra fase, que é a aplicação da sequência didática e apresentada em detalhes no capítulo 5, o experimento foi desenvolvido pelos alunos conforme descrito no item 4.4.3. Esta fase envolve situações que visam buscar dificuldades efetivamente apresentadas pelos alunos. A aplicação das atividades, a tabulação dos dados, os gráficos produzidos pelos alunos e as funções obtidas foram acompanhadas pelo professor, mas, sem a interferência do mesmo. Ainda nessa fase, realizamos a análise a posteriori local, que consiste da descrição dessa aplicação e possíveis correções no desenvolvimento da pesquisa.

Na parte final da experimentação, que ocorre no capítulo 5, é feito um estudo confrontando a análise a priori e a posteriori, objetivando a validação das hipóteses levantadas no início da pesquisa.

4.4.3 Procedimento

Os alunos de cada uma das séries do ensino médio serão divididos em grupos com 4 alunos. Cada grupo deverá trazer uma garrafa Pet e fazer um furo na lateral próximo à base da garrafa. Esclarecemos que toda vez que nos referirmos à garrafa Pet, estaremos falando de uma garrafa plástica que no intervalo considerado de 0 a 20cm seja de forma cilíndrica e com secções transversais, isto é, paralelas a base, todas congruentes e com 10cm de diâmetro. Uma fita graduada em mm e confeccionada em papel ou um recorte de papel milimetrado que pode ser encontrado em qualquer livraria, ou até mesmo uma régua comum de plástico, transparente ou não, ou qualquer outro material desde que esteja graduado em mm, deverá ser colado na lateral da garrafa perpendicularmente a base. O furo é vedado e os alunos enchem a garrafa com água. O furo é destampado no instante $t = 0$ e a cada 10s é marcada sobre a fita a altura da água na garrafa. Dessa forma, cada grupo de alunos obterá informações sobre a função $h(t)$, inicialmente discreta, que esperamos ser uma boa função que modele a altura da água em cada instante $t \geq 0$. Cada grupo fará em seguida uma tabela colocando o tempo e a correspondente altura da água na garrafa. Os dados da tabela serão plotados inicialmente de forma discreta num sistema de coordenadas cartesianas, primeiro numa folha de papel milimetrado e depois através de algum programa gráfico. Num segundo momento fazemos uma extrapolação respeitando a natureza do problema. Cada grupo, a partir do conhecimento que dispõe até então, poderá tentar obter a função que modela o escoamento de um líquido utilizando inclusive programas gráficos por eles conhecidos, tais como: Excel ou equivalente, Modelus, Maple, Geogebra, etc... Depois que todos os grupos já tiverem tentado obter a função ou as possíveis funções que modelam o escoamento do líquido, o professor poderá mostrar, e seria salutar, a relação entre a Matemática e a Física e como, utilizando-se apenas de conhecimentos matemáticos, se pode obter uma boa função que modele o escoamento de um líquido. No capítulo 5 serão fornecidos todos os detalhes das atividades desenvolvidas pelos estudantes.

4.5 O que se espera que os alunos aprendam

O presente experimento pode ser aplicado nas três séries do Ensino Médio e até em algumas classes de oitava série (nono ano) do Ensino Fundamental. No ensino médio o aluno já deveria estar familiarizado com tabulação de dados, já deveria resolver com desenvoltura equações do 1º e do 2º grau e sistemas lineares pelo menos com duas equações e duas incógnitas. Poderíamos aproveitar o momento para estender o estudo de soluções de sistemas lineares, para sistemas lineares com três equações e três incógnitas, por ser uma necessidade frente ao fato de que algumas curvas são perfeitamente determinadas por três pontos não colineares e por ser o estudo dos sistemas lineares com mais de duas equações e duas incógnitas parte integrante do conteúdo da segunda série do ensino médio. Para o caso dos alunos sentirem dificuldade na resolução de sistemas o assunto será discutido em sala de aula e debatido com cada um dos grupos em separado. Acreditamos, todavia, que os estudantes não terão maiores dificuldades, pois o sistema inicialmente com três equações e três incógnitas pode, na pior das hipóteses, ser facilmente transformado num sistema com duas equações e duas incógnitas. No capítulo 5 essa questão será discutida com mais detalhes e comprovaremos que os alunos não apresentam dificuldade para resolver sistemas. Os grupos deverão escolher pelo menos dois conjuntos com três pontos não colineares para poderem comparar as funções obtidas. Deverão depois testar outros pontos nas funções obtidas para verificar a validade da função. A escolha arbitrária dos 3 pontos entre 10 ou possivelmente 11 poderá levar o aluno a ter a expectativa de que as funções obtidas sejam diferentes. Caso isso ocorra pediremos para que os grupos discutam sobre os motivos que impediram que as funções fossem praticamente as mesmas. Esperamos e temos a convicção de que aqueles que ainda não sabem ou não conhecem, venham a conhecer e aprendam a construir gráficos utilizando pelo menos o Excel. Na obtenção da função o aluno deverá perceber a importância da resolução de equações e de sistemas lineares com mais de duas incógnitas e do estudo das funções quadráticas. Poderá perceber também que, sendo o escoamento de um líquido ocasionado simplesmente pela ação da gravidade, outros fenômenos ainda poderão ser estudados.

Acreditamos ser oportuno, numa análise a priori, fazermos aqui algumas considerações. Este experimento pode ser feito com alunos até de oitava série e da primeira série do ensino médio que talvez nem saibam o que é uma função. Outros podem saber o que é uma função e terem adquirido noções sobre funções lineares e afins. Outros ainda podem ter estudado as funções quadráticas com ou sem análise de gráficos, contudo é muito pouco provável que tenham alguma noção sobre outras funções como as exponenciais e as logarítmicas. Funções polinomiais com grau superior a dois então, nem pensar. Esse fato ao contrário de ser um empecilho, pode se tornar um fator motivador. Quando pensei em minha dissertação, e sei que estou sendo repetitivo, queria algo que me ajudasse a construir com os alunos um conhecimento novo, ou seja, partindo da resolução de problemas ou mesmo da modelagem, mostrar, pelo menos, a necessidade de estudarmos determinados assuntos. A realização desse experimento com alunos que ainda não dominam totalmente as funções e análises de gráficos permitiria, num primeiro momento, que percebessem que o conhecimento que eles têm até então não é suficiente para que possam explicar determinados fenômenos. Antes mesmo deste experimento seria interessante que os alunos já tivessem realizado outros experimentos envolvendo funções lineares e afins, contudo, cabe ao professor analisar se seus alunos estão preparados para tal tarefa. Caso o experimento seja realizado no ensino médio antes do estudo da função quadrática, ele poderá servir como motivação para o aprendizado dessa função. Se for realizado após o estudo da função quadrática, provavelmente, quando os grupos tentarem obter a função, observando a curva, poderão intuir que a função seja quadrática e tentar obtê-la usando os recursos algébricos e conceitos aprendidos ou simplesmente recorrendo a algum software. Se o experimento for realizado na segunda série do ensino médio, quando os alunos além das funções afim, linear e quadrática, também já tiverem conhecimento das funções exponenciais e logarítmicas, poderão suspeitar que uma delas modele o escoamento. Nesse momento é importante deixar que cada um dos grupos faça sua investigação e discutam entre si sem a interferência do professor. Caso o experimento se dê com as terceiras séries do ensino médio e os alunos já tenham algum conhecimento sobre funções polinomiais de grau superior a dois é provável que tentem encontrar funções polinomiais do terceiro ou quarto grau. No momento que o professor julgar oportuno, nas diversas séries, ele deverá esclarecer qual procedimento propicia a oportunidade de obtenção de uma boa função que modela o escoamento do líquido.

4.6 Pré-requisitos para a realização do experimento

Para a realização do experimento espera-se que o aluno saiba, inicialmente, no mínimo plotar pontos em R^2 [plano] , saiba construir e interpretar gráficos, resolver equações do primeiro e do segundo grau, sistemas lineares com até três incógnitas e saiba usar calculadoras e programas gráficos. Temos observado que diversos alunos dispõem de calculadoras científicas, todavia, só as usam para as operações usuais. Esse é um bom momento para que eles aprendam a utilizá-las. Caso exista alguma dificuldade em um desses itens o professor tem duas possibilidades, ou se trabalha com o aluno os pré-requisitos desenvolvendo alguma atividade que seja significativa ou, e que talvez seja melhor, aproveite o próprio experimento como elemento motivador para que o estudante possa adquirir os pré-requisitos. Ele aprende enquanto aplica e "*vê*" para que serve o que está aprendendo. Esse é um bom exemplo de uma aprendizagem significativa. Hoje, muitas escolas dispõem de data show ou simplesmente um projetor que pode, e muito, auxiliar o professor para ensinar os alunos a trabalharem com o Excel e com o Geogebra e principalmente com calculadoras científicas dos mais diferentes tipos, que nem precisam ser compradas, pois o computador tem calculadora científica e outros modelos podem ser baixados via Internet gratuitamente.

4.7 Experimento realizado pelo autor deste trabalho

Não somente realizaremos o experimento como obviamente espera-se que qualquer atividade experimental deva ser cuidadosamente realizada à priori, pelo professor para que o mesmo possa prever eventuais dificuldades dos alunos, planejar bem como deverá ser a realização do mesmo em sala de aula para que os alunos sejam discretamente orientados visando-se alcançar, com sucesso, os objetivos esperados.

O experimento com escoamento de líquidos foi feito tomando-se uma garrafa plástica em forma de cilindro reto. Foi feito um pequeno furo na parte lateral inferior da garrafa, e colada, na sua lateral e perpendicularmente a base, uma régua impressa em uma fita de papel. Tampado o furo colocou-se água na garrafa até que a altura ultrapassasse a marca de 20 cm da fita graduada. O furo foi destampado no instante $t = 0$ e a cada 10s foi marcada sobre a fita a altura da água. Com esse procedimento obtivemos informações sobre um protótipo discreto da função $h(t)$ que modela a altura da água na garrafa no instante $t \geq 0$.

O presente experimento foi realizado pelo autor com auxílio da professora Fátima Macedo e informo que tenho autorização legal para citá-la nominalmente.

Recipiente: garrafa Pet de 2 litros, com 10cm de diâmetro e um furo de 5 mm na lateral inferior da garrafa.

Nesse primeiro experimento a escolha de um furo de 5 mm não foi devido a nenhum motivo especial, simplesmente era a broca que o professor dispunha no momento.

A seguinte tabela foi obtida.

Tabela1. Altura da água em função do tempo medido a intervalos de 10 em 10s numa garrafa Pet com furo de 5 mm

Tempo	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Altura	20	16,7	13,8	11,2	8,9	6,9	5,1	3,6	2,4	1,5	0,8

Para trabalhar com essa tabela plotamos os dados em um sistema de coordenadas cartesianas.

No gráfico 1, a seguir, plotamos os pontos usando uma folha de papel milimetrado.

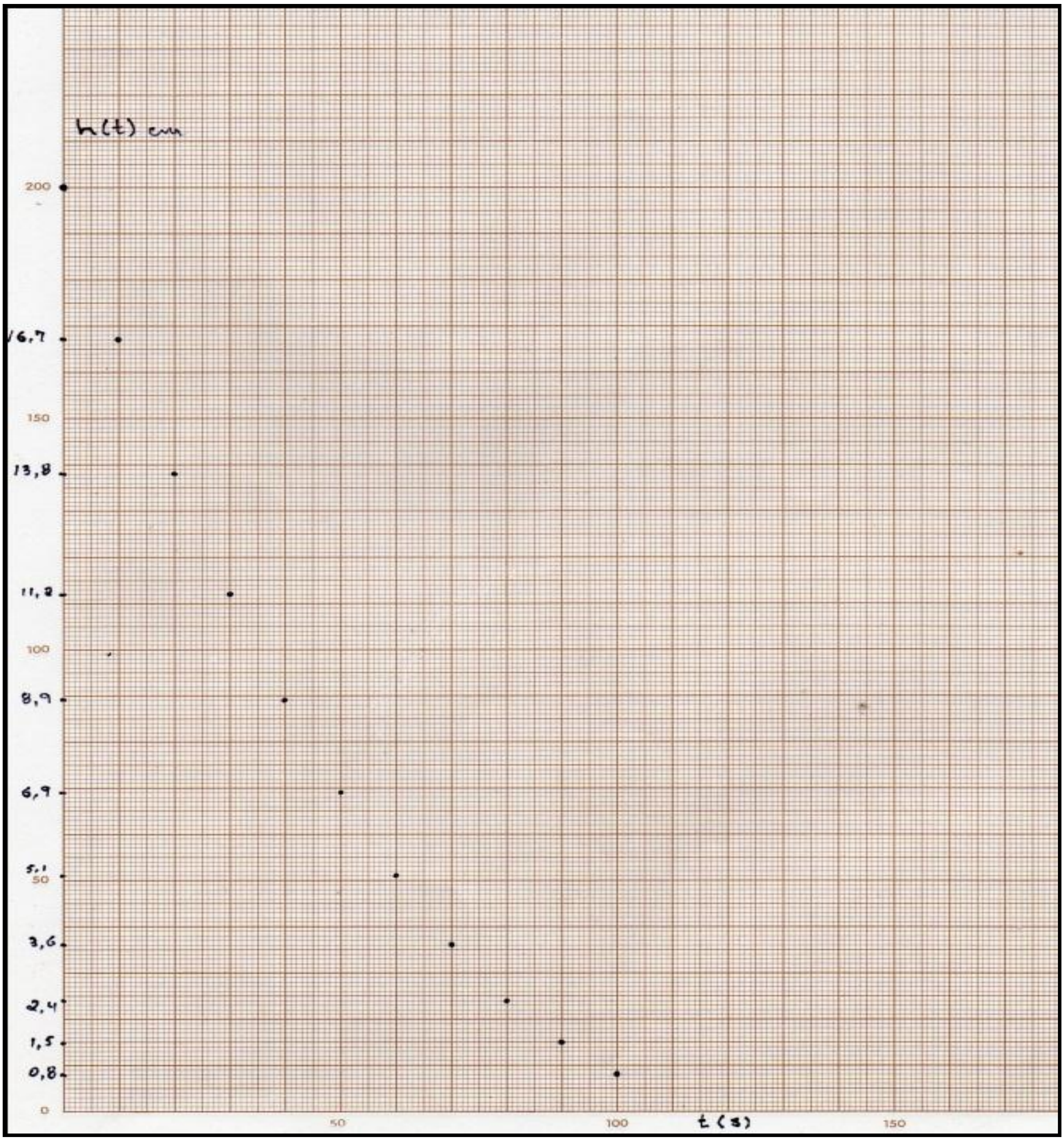


Gráfico 1: Gráfico discreto do experimento sobre o escoamento da água em papel milimetrado – furo de 5 mm

Esclarecemos que para a realização do experimento, desde o momento em que a garrafa foi furada até o instante em que os dados foram tabulados, foram gastos aproximadamente 50 min. Acreditamos que cada um dos grupos realizará o experimento e fará o gráfico discreto com os pontos obtidos no máximo uma aula de 50 mim.

No gráfico 2, que segue, plotamos os pontos utilizando o Excel.

Gráfico 2: Gráfico discreto do experimento sobre o escoamento da água feito com o Excel – furo 5mm

Para sabermos qual a melhor função que modela o escoamento iniciemos nossa análise pelas funções que são do conhecimento do aluno. Façamos antes um ajuste de curva.

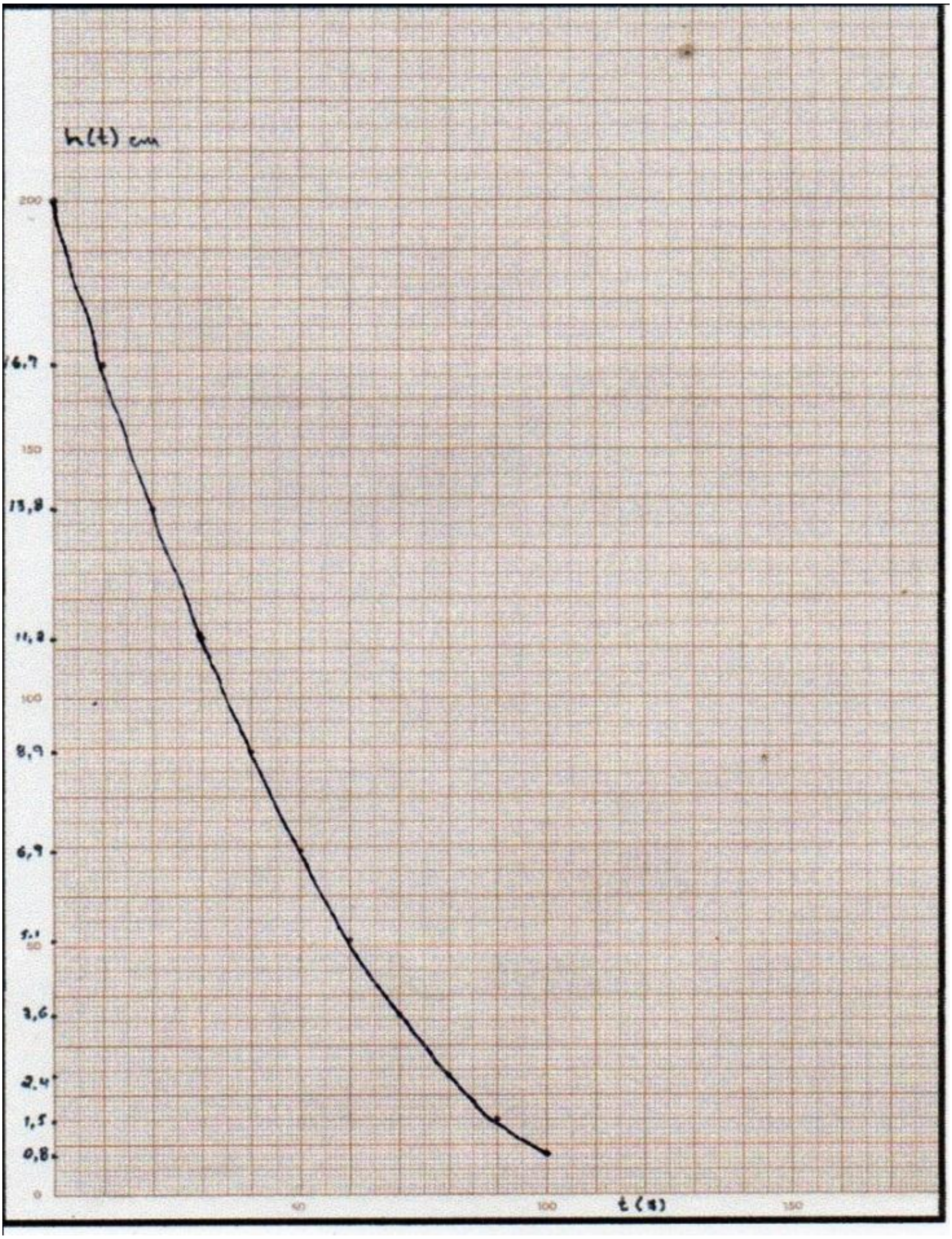


Gráfico 3: Exemplo de um ajuste de curva em papel milimetrado- furo 5mm

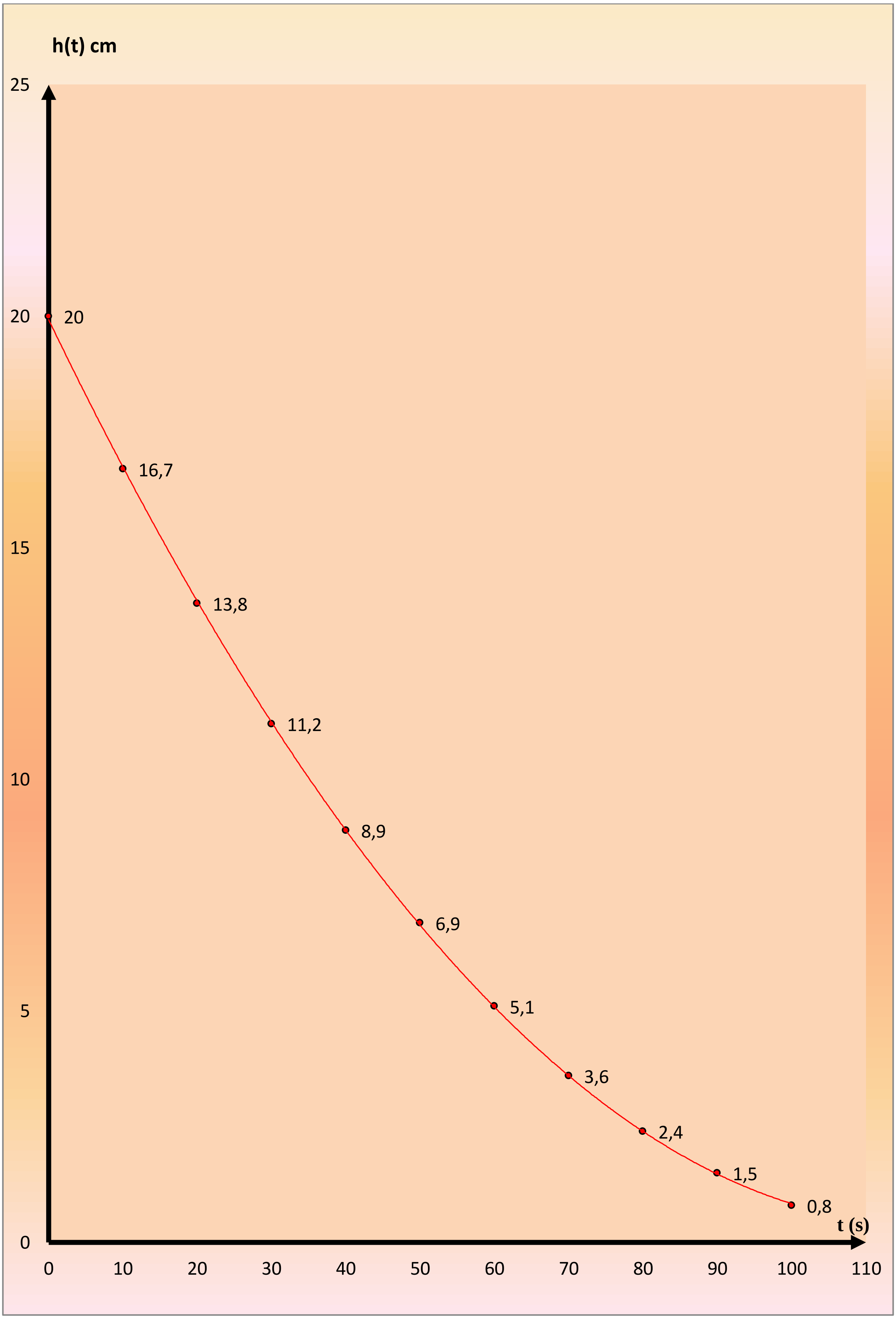


Gráfico 4 : Exemplo de ajuste de curva feito com Excel – furo 5mm

A primeira função que é do conhecimento do aluno é a função linear, mas, é descartada, pois a curva não passa pela origem, t = 0, h(0) ≠ 0

Outra função que nada mais é do que uma transladada de uma linear é a função afim. Ela também está descartada, pois sendo os tempos medidos a intervalos constantes, se a função fosse afim, a variação da altura para um mesmo intervalo de tempo também seria constante e isso não ocorre como podemos constatar na tabela abaixo observando a diferença 1.

Tabela2: repetição da tabela.1 com acréscimo das diferenças entre as alturas – furo 5mm

Tempo	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Altura	20	16,7	13,8	11,2	8,9	6,9	5,1	3,6	2,4	1,5	0,8
Diferença 1		-3,3	-2,9	-2,6	-2,3	-2	-1,8	-1,5	-1,2	-0,9	-0,7

Seguindo uma ordem usual das funções discutidas no ensino médio nos deparamos com a função quadrática, outra função relativamente comum para alunos da escola média. Observando melhor o gráfico discreto poderemos ser tentados a ajustar a função discreta por uma quadrática. Uma forma de verificarmos se isso é possível, até certo ponto, é examinarmos a variação da altura. Na tabela abaixo vemos como se faz isso. As três primeiras linhas são uma repetição da primeira tabela. Na terceira linha temos as diferenças consecutivas $h(10) - h(0),\ h(20) - h(10),\ h(30) - h(20) \ldots,$ etc. Na quarta linha calculamos as diferenças consecutivas dos valores da terceira linha.

Tabela3: repetição da tab.1 com acréscimo das diferenças 1 e 2 – furo 5mm

Tempo	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Altura	20	16,7	13,8	11,2	8,9	6,9	5,1	3,6	2,4	1,5	0,8
Diferença 1		-3,3	-2,9	-2,6	-2,3	-2	-1,8	-1,5	-1,2	-0,9	-0,7
Diferença 2			0,4	0,3	0,3	0,3	0,2	0,3	0,3	0,3	0,2

Observamos que na quarta linha os valores são aproximadamente constantes. De acordo com uma *caracterização das funções quadráticas* (Lima, 1998 p.144 à p.149), se a segunda variação de uma função é constante então a função é quadrática. O teorema: ”Caracterização das Funções Quadráticas” cuja demonstração está em Lima (1998, p. 149) diz que:

> A fim de que a função contínua $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante $x_{1,} x_{2,} \dots, x_{n,} \dots$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\dots y_n = f(x_n), \dots$

Dessa forma, pelo que vimos, podemos esperar que uma função quadrática deva fazer um bom ajuste dos dados. Como a segunda variação (Diferença 2) da função é quase constante, a primeira variação (Diferença 1) contém valores discretos próximos de uma Progressão Aritmética. Essas diferenças quando plotadas num sistema cartesiano nos mostram pontos que estão praticamente na mesma reta. A representação gráfica se mostra mais significativa do que a simples apresentação das diferenças e nos permitem perceber, em função de uma maior ou menor dispersão em torno da reta o que está ocorrendo. No Gráfico 5 plotamos essas diferenças.

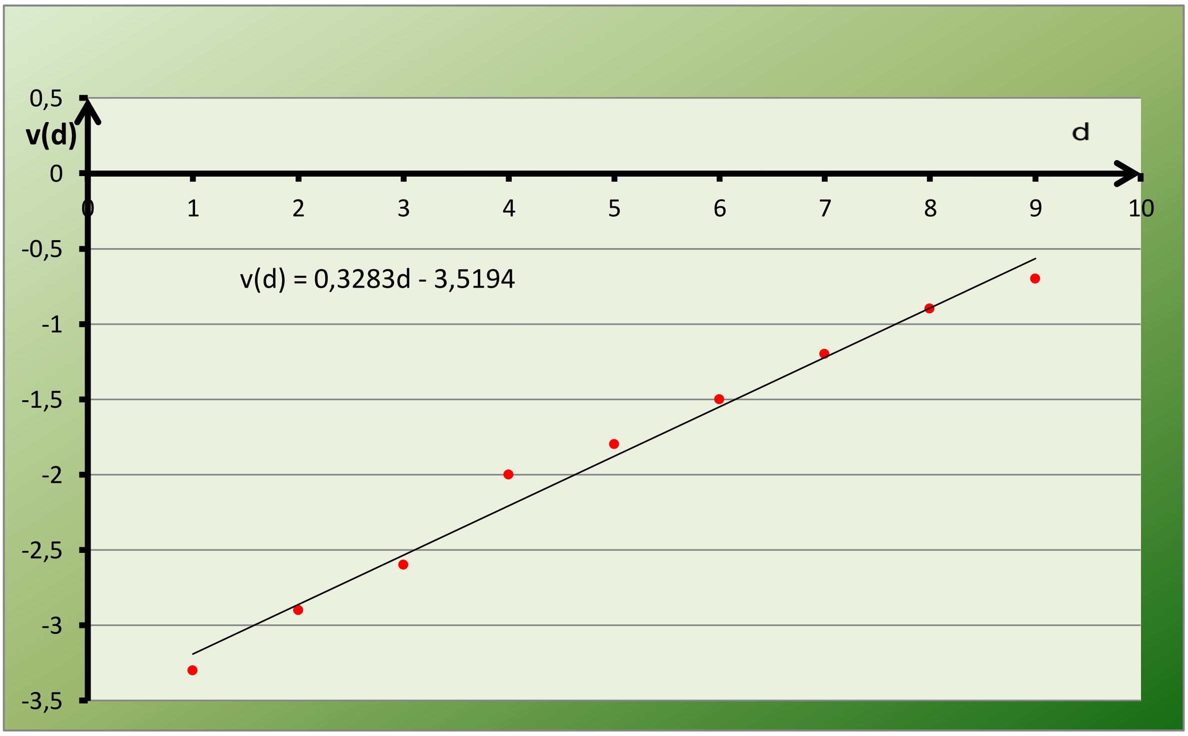


Gráfico 5: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças. furo 5mm

Para a confecção da tabela 3 que contém os valores das tabelas 1 e 2, e construção dos gráficos 2, 4 e 5 gastamos, usando o Excel, menos de 50 mim. Como essa parte da atividade os alunos farão como atividade de casa, o tempo aqui é uma irrelevante.

Lembramos que os dados obtidos são aproximados, pois a obtenção deles depende de alguns fatores que não conseguimos evitar, como:

- imprecisão na leitura do cronômetro;

- a graduação em mm apesar de pequena não é muito precisa pois em 1s o líquido “desce” mais de 1mm e desse modo qualquer descuido induz ao erro;
- em virtude da falta de apoio a mão ou o braço podem tremer;
- diferença de tempo entre o instante da leitura, a informação passada e o momento da marcação;
- ao se fazer a marca pode ter havido uma leve pressão sobre a garrafa de plástico e com isso a marca pode ter sido colocada num local próximo ao real;
- em virtude da temperatura ambiente um mesmo experimento pode conduzir a resultados diferentes;
- eventuais distrações.

Esses e outros pequenos deslizes que possam ter havido não invalidam, contudo, o experimento e os dados obtidos.

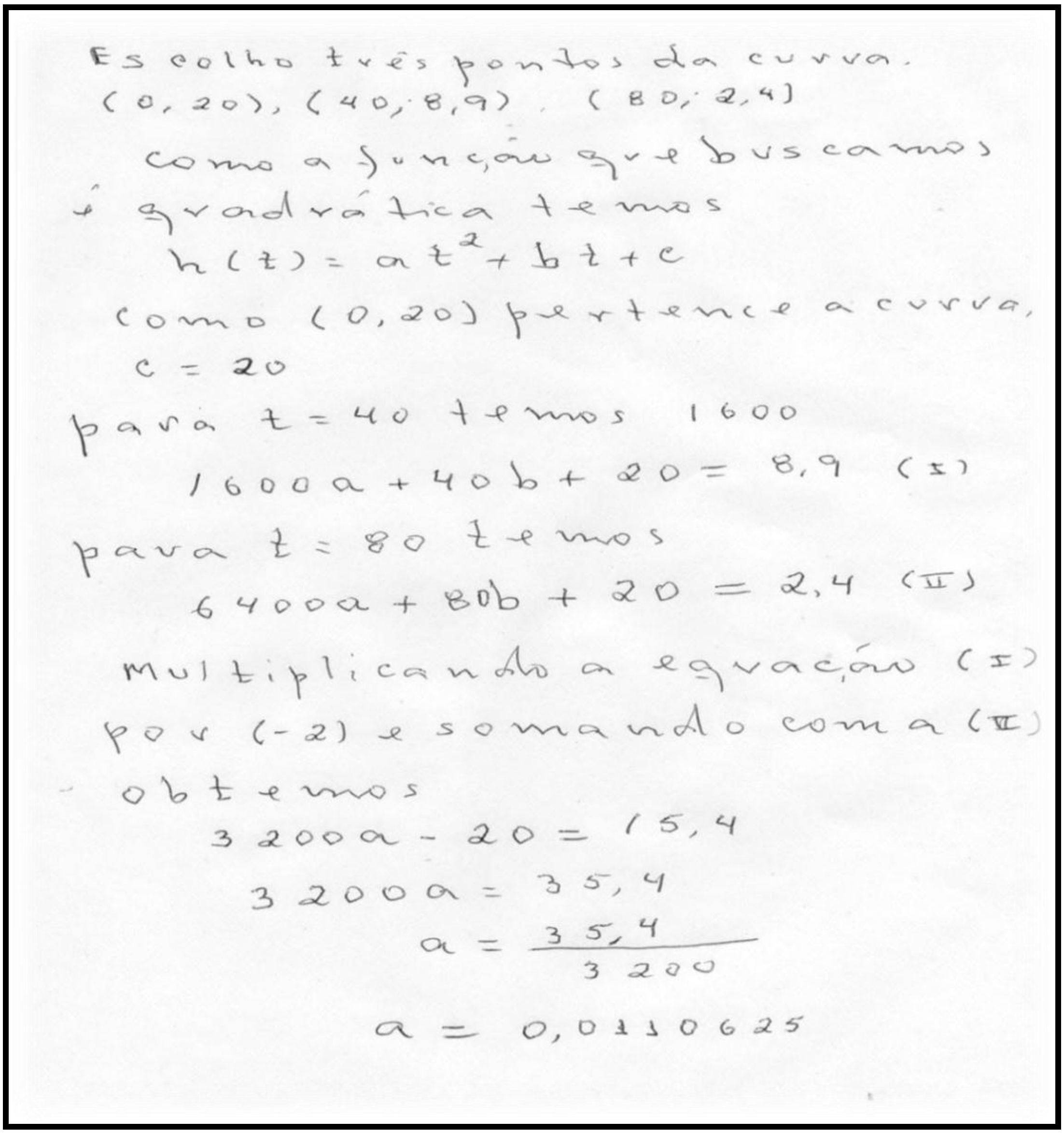
A função quadrática que pretendemos encontrar e que fornece a variação da altura da água em função do tempo de escoamento obviamente tem a forma:

$$h(t) = a\,t^2 + b\,t + c$$

Para obtenção da função quadrática basta que escolhamos três pontos não colineares da curva. Podemos inicialmente considerar que c = 20, pois para $t = 0,\ h = 20$. Num outro momento consideraremos três pontos quaisquer, sem necessariamente considerarmos o ponto $(0, 20)$. A cada três pontos não colineares escolhidos teremos uma função quadrática e, é claro, que não esperamos que elas sejam idênticas. Como temos onze pontos, espera-se que cada grupo de alunos perceba que o total de equações possivelmente diferentes é igual ao número de combinações de 11 elementos tomados 3 a 3, ou seja:

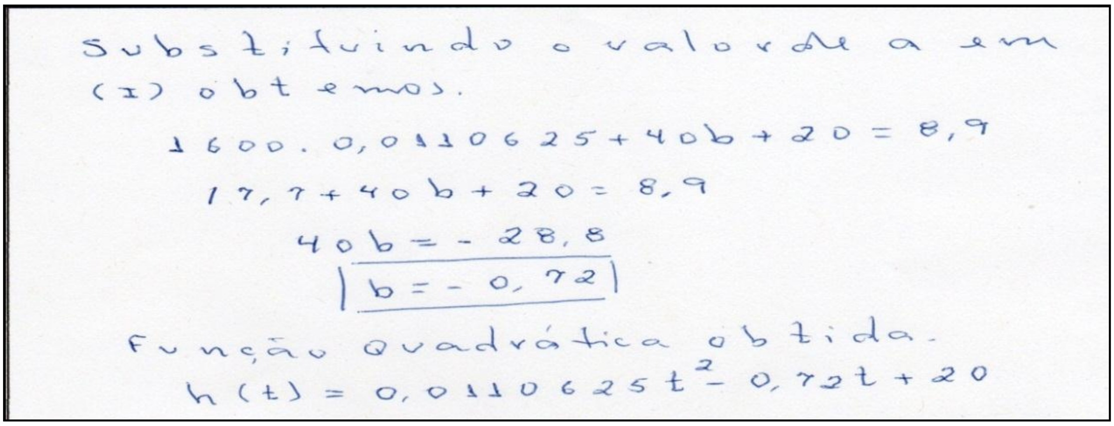
$$C_{11,3} = 165$$

Fizemos alguns exemplos manualmente para que pudéssemos ter uma noção do tempo necessário a ser utilizado em sala de aula. Fazendo sem pressa demoramos menos de uma aula para resolver os dois sistemas que estão abaixo nas ilustrações 1, 2 e 3. Como os alunos resolverão os sistemas em classe acreditamos que uma aula será suficiente. Preferimos que eles façam em classe para que possamos esclarecer eventuais dúvidas.



Escolho três pontos da curva.
(0, 20), (40, 8,9) , (80, 2,4)
como a função que buscamos
é quadrática temos
$h(t) = at^2 + bt + c$
como (0, 20) pertence a curva,
$c = 20$
para $t = 40$ temos 1600
$1600a + 40b + 20 = 8,9$ (I)
para $t = 80$ temos
$6400a + 80b + 20 = 2,4$ (II)
Multiplicando a equação (I)
por (-2) e somando com a (II)
obtemos
$3200a - 20 = 15,4$
$3200a = 35,4$
$a = \frac{35,4}{3200}$
$a = 0,0110625$

Ilustração 1: Resolução manual do sistema feita pelo autor deste trabalho e escaneada.



Substituindo o valor de a em
(I) obtemos.
$1600 . 0,0110625 + 40b + 20 = 8,9$
$17,7 + 40b + 20 = 8,9$
$40b = -28,8$
$\boxed{b = -0,72}$
Função quadrática obtida.
$h(t) = 0,0110625t^2 - 0,72t + 20$

Ilustração 2: continuação1 da resolução manual do sistema

Consideremos outros 3 pontos $(30; 11,2)$; $(60; 5,1)$ e $(90; 1,5)$ obtemos o sistema.

$$\begin{cases} 900a + 30b + c = 11,2 & (I) \\ 3600a + 60b + c = 5,1 & (II) \\ 8100a + 90b + c = 1,5 & (III) \end{cases}$$

Fazendo $(II) - (I)$ e $(III) - (I)$ eliminamos c.

$$\begin{cases} 2700a + 30b = -6,1 & (IV) \\ 7200a + 60b = -9,7 & (V) \end{cases}$$

Faço $(V) - 2.(IV)$

$1800a = 2,5$

$a = 0,0013888$

Substituindo em (IV), obtemos

$2700 . 0,0013888 + 30b = -6,1$

resolvendo obtemos

$b = -0,328353$

Substituindo em (I) a e b

$900 . 0,0013888 + 30.(-0,328353) + c = 11,2$

Fazendo as contas, $c = 18,55075$

A Função Quadrática é dada por

$h(t) = 0,001388t^2 - 0,328353t + 18,55075$

Ilustração 3 : continuação 2 da resolução manual do sistema

Com o auxílio do Excel obtivemos a função

$$h(t) = 0{,}00141259t^2 - 0{,}33216783t + 19{,}92797203$$

Como o Excel utiliza todos os pontos através do procedimento dos mínimos quadrados é de se esperar que a função obtida esteja muito mais próxima do real do que aquela que encontramos.

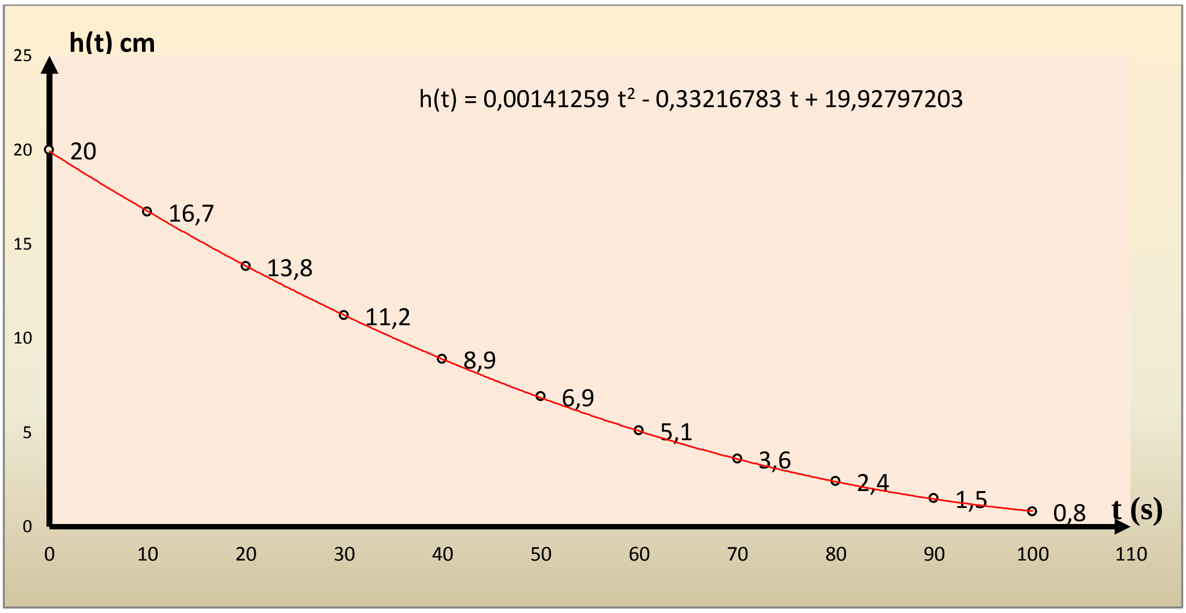


Gráfico 6: Ajuste de curva feito com Excel

Utilizando leis da mecânica dos fluidos ou outras formas pode ser que consigamos outros modelos mais exatos.

Durante a realização do experimento, observamos que fazendo um furo de 5 mm o escoamento, sendo rápido, não permite que obtenhamos muitos pontos. Resolvemos então realizar o mesmo experimento utilizando outra garrafa Pet, mas fazendo um furo de 4 mm.

Com essa nova condição obtivemos a tabela 3 com os dados colocados até a diferença 2. Esses dados foram obtidos pelo autor do trabalho com ajuda da professora Fatima.

Tabela 4: Tabela com os dados do experimento feito pelo autor deste trabalho obtido do escoamento da água numa garrafa pet com 4mm de diâmetro incluindo a variação da altura e a variação das diferenças.

T	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
H	20,00	17,80	15,70	13,7	11,9	10,2	8,70	7,30	6,00	4,80	3,7	2,8	2,10	1,50	1,00
D1		-2,20	-2,10	-1,95	-1,80	-1,70	-1,55	-1,40	-1,30	-1,20	-1,05	-0,90	-0,75	-0,60	-0,50
D2			0,00	0,15	0,15	0,10	0,15	0,00	0,10	0,10	0,00	0,15	0,15	0,15	0,10

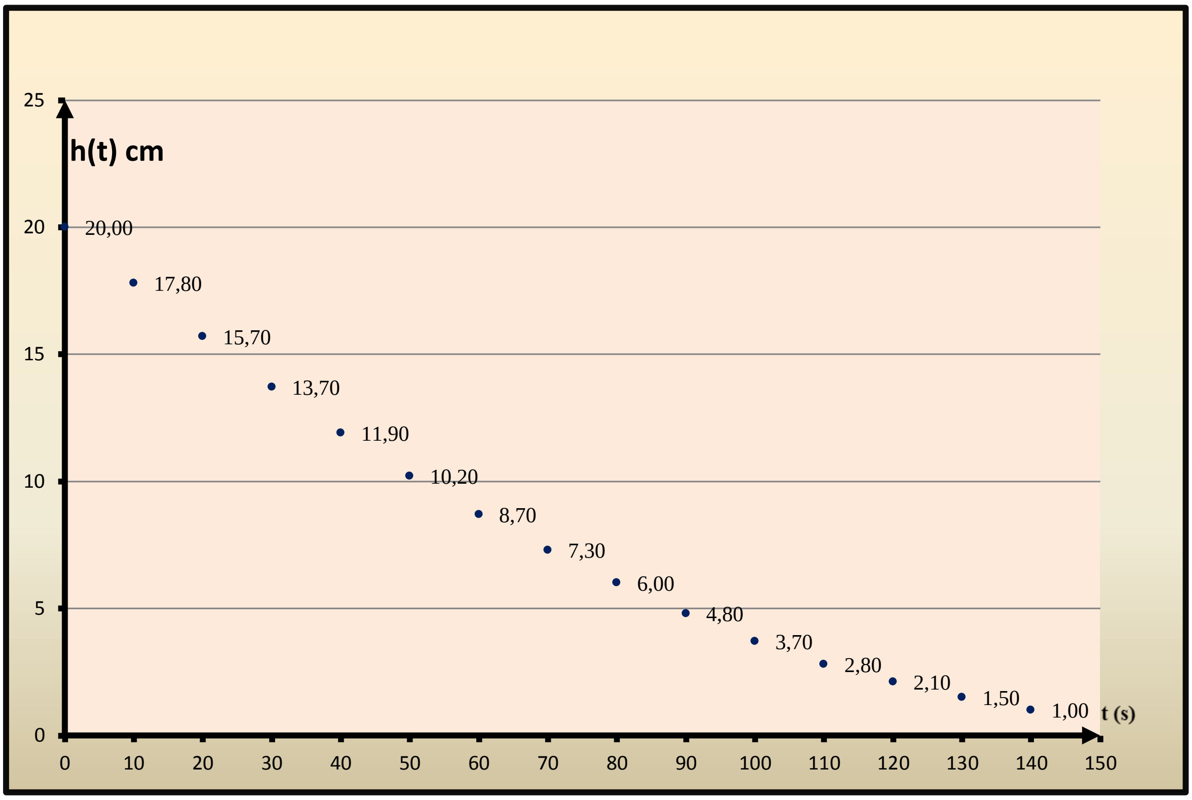


Gráfico 7: Gráfico discreto do experimento sobre o escoamento da água feito com o Excel

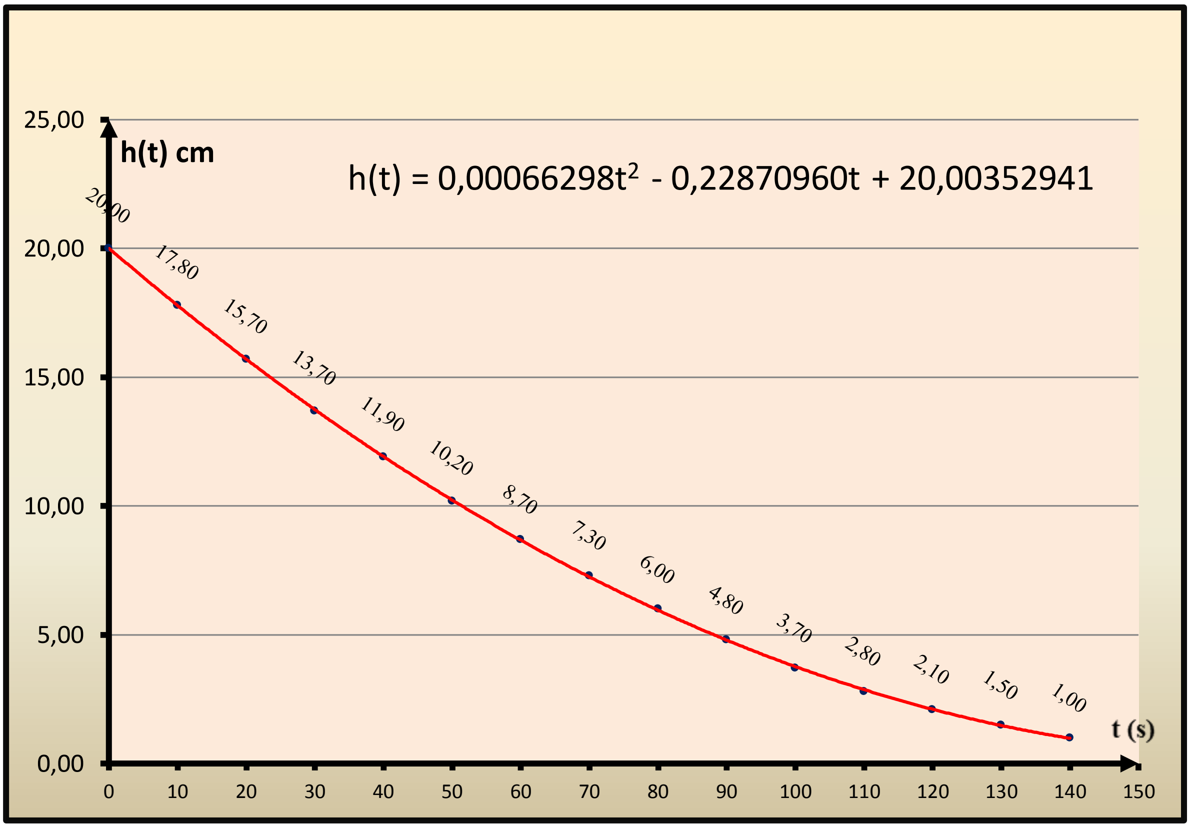


Gráfico 8: Ajuste de curva feito com Excel e função quadrática obtida

Para termos uma ideia do que ocorre a respeito da dispersão dos pontos em relação reta de tendência plotamos num sistema cartesiano os valores correspondentes às primeiras diferenças. Podemos perceber que a dispersão é mínima.

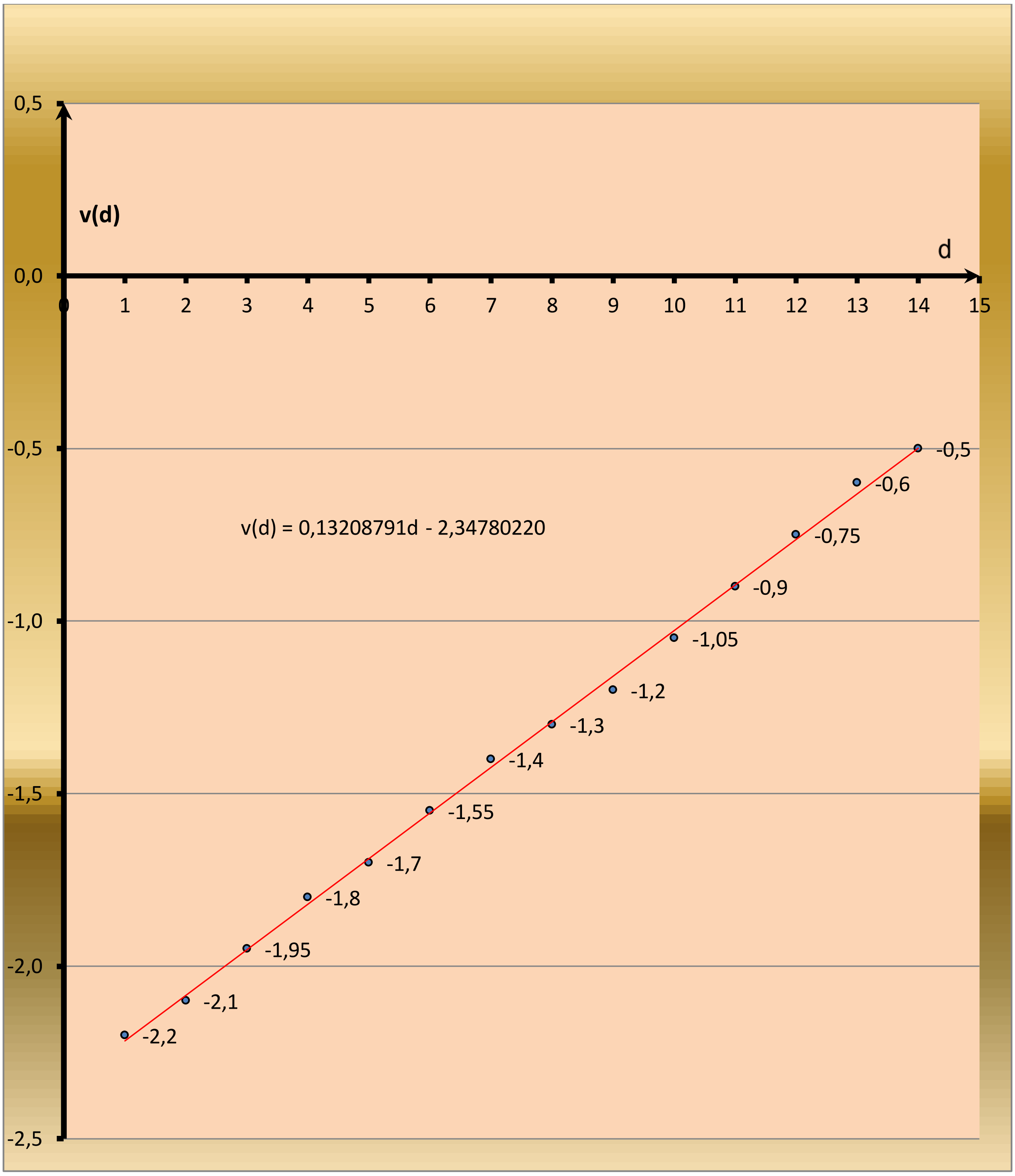


Gráfico 9: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças- furo com 4 mm de diâmetro

Numa tentativa de obtermos uma melhor aproximação filmamos o experimento anterior e tabulamos os dados.

Na tabela 5 mostramos as alturas obtidas a cada 5s e a cada 10s e as diferenças.

Tabela 5: Tabulação dos dados do escoamento obtidos a cada 5s e a cada 10s e acrescido das diferenças 1 e 2.

Tabela 5							
Tabulação a cada 5 s				Tabulação a cada 10 s			
t	h	D1	D2	t	h	D1	D2
0	20,00			0	20,00		
5	18,85	-1,15		10	17,75	-2,25	
10	17,75	-1,10	0,05	20	15,65	-2,10	0,15
15	16,70	-1,05	0,05	30	13,60	-2,05	0,05
20	15,65	-1,05	0,00	40	11,80	-1,80	0,25
25	14,60	-1,05	0,00	50	10,15	-1,65	0,15
30	13,60	-1,00	0,05	60	8,60	-1,55	0,10
35	12,65	-0,95	0,05	70	7,25	-1,35	0,20
40	11,80	-0,85	0,10	80	6,00	-1,25	0,10
45	10,95	-0,85	0,00	90	4,80	-1,20	0,05
50	10,15	-0,80	0,05	100	3,70	-1,10	0,10
55	9,35	-0,80	0,00	110	2,80	-0,90	0,20
60	8,60	-0,75	0,05	120	2,00	-0,80	0,10
65	7,90	-0,70	0,05	130	1,45	-0,55	0,25
70	7,25	-0,65	0,05	140	1,00	-0,45	0,10
75	6,60	-0,65	0,00				
80	6,00	-0,60	0,05				
85	5,40	-0,60	0,00				
90	4,80	-0,60	0,00				
95	4,25	-0,55	0,05				
100	3,70	-0,55	0,00				
105	3,20	-0,50	0,05				
110	2,80	-0,40	0,10				
115	2,40	-0,40	0,00				
120	2,00	-0,40	0,00				
125	1,70	-0,30	0,10				
130	1,45	-0,25	0,05				
135	1,20	-0,25	0,00				
140	1,00	-0,20	0,05				

A seguir, no gráfico 10, temos o gráfico discreto do experimento sobre o escoamento obtido através de filmagem e considerando os tempos medidos a cada 10s respectivamente. Ressaltamos que mesmo com a filmagem os dados ainda são aproximados, pois, a menos que tenhamos uma filmadora de alta precisão o máximo que conseguimos é uma graduação de 0,05 cm em 0,05 cm. Os dados foram obtidos filmando-se com uma máquina fotográfica digital.

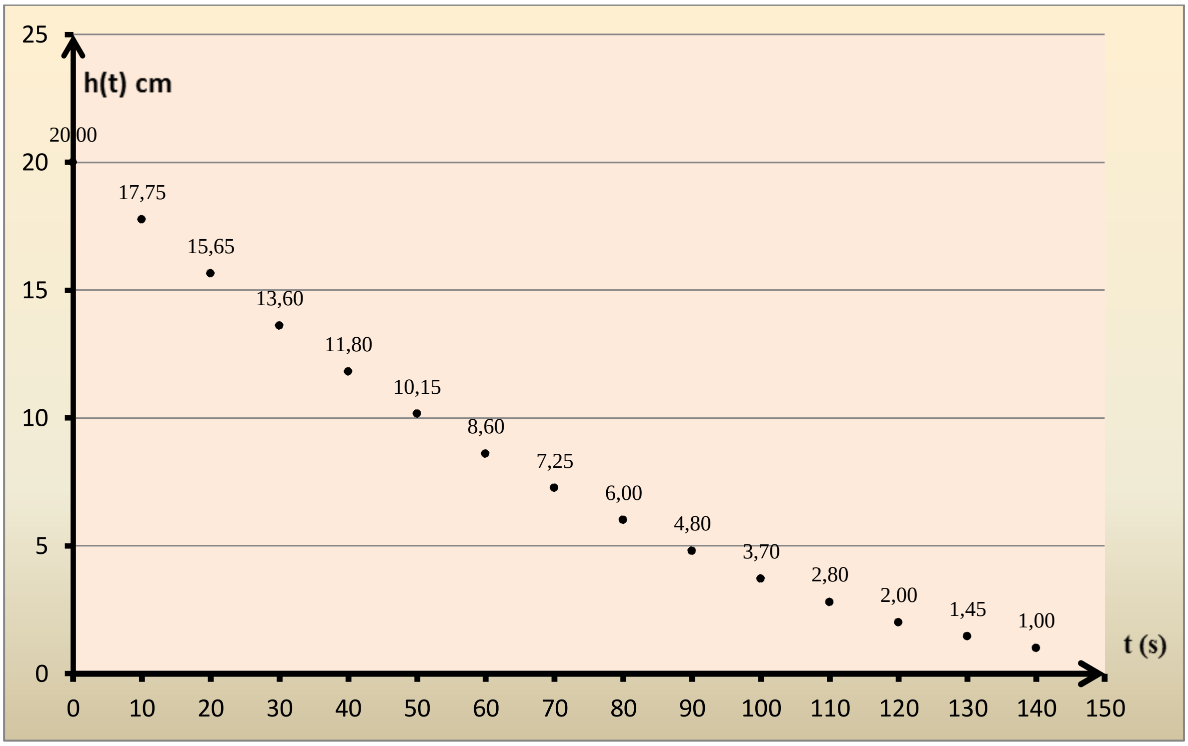


Gráfico10: Gráfico discreto do experimento sobre o escoamento da água feito com o Excel e obtido após filmagem.

No gráfico 11 temos o ajuste da curva e a respectiva função.

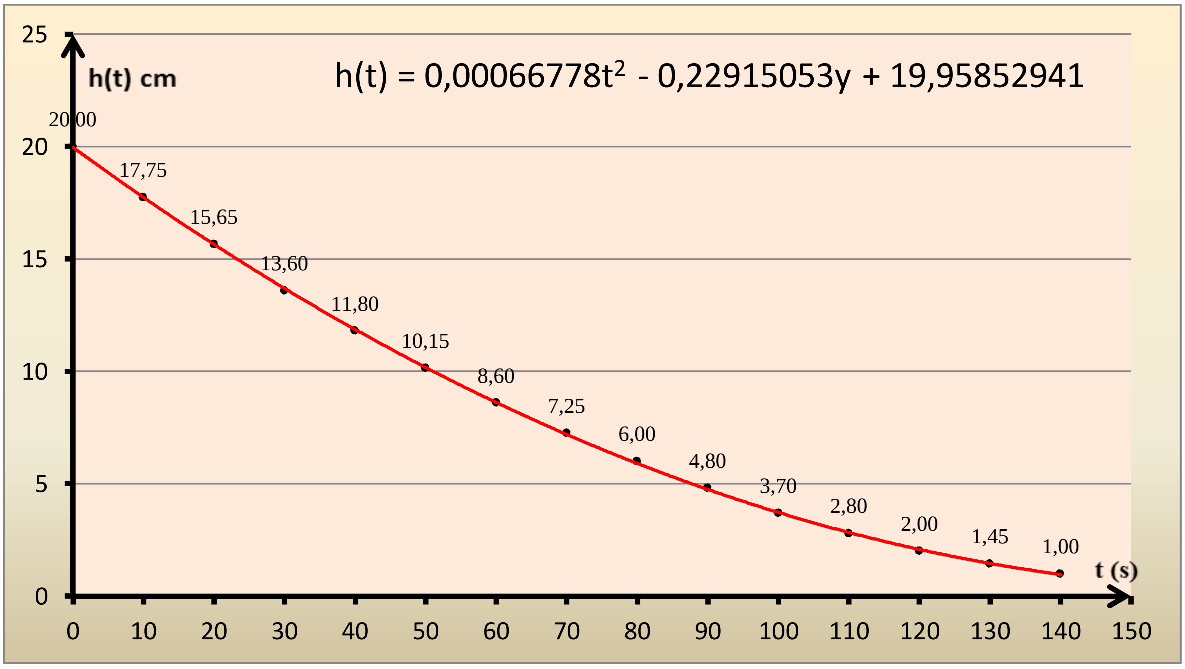


Gráfico 11: Ajuste de curva feito com Excel e a respectiva função após filmagem

No gráfico 12 temos o gráfico discreto com as variações das diferenças e que mostra a dispersão em relação a reta de tendência.

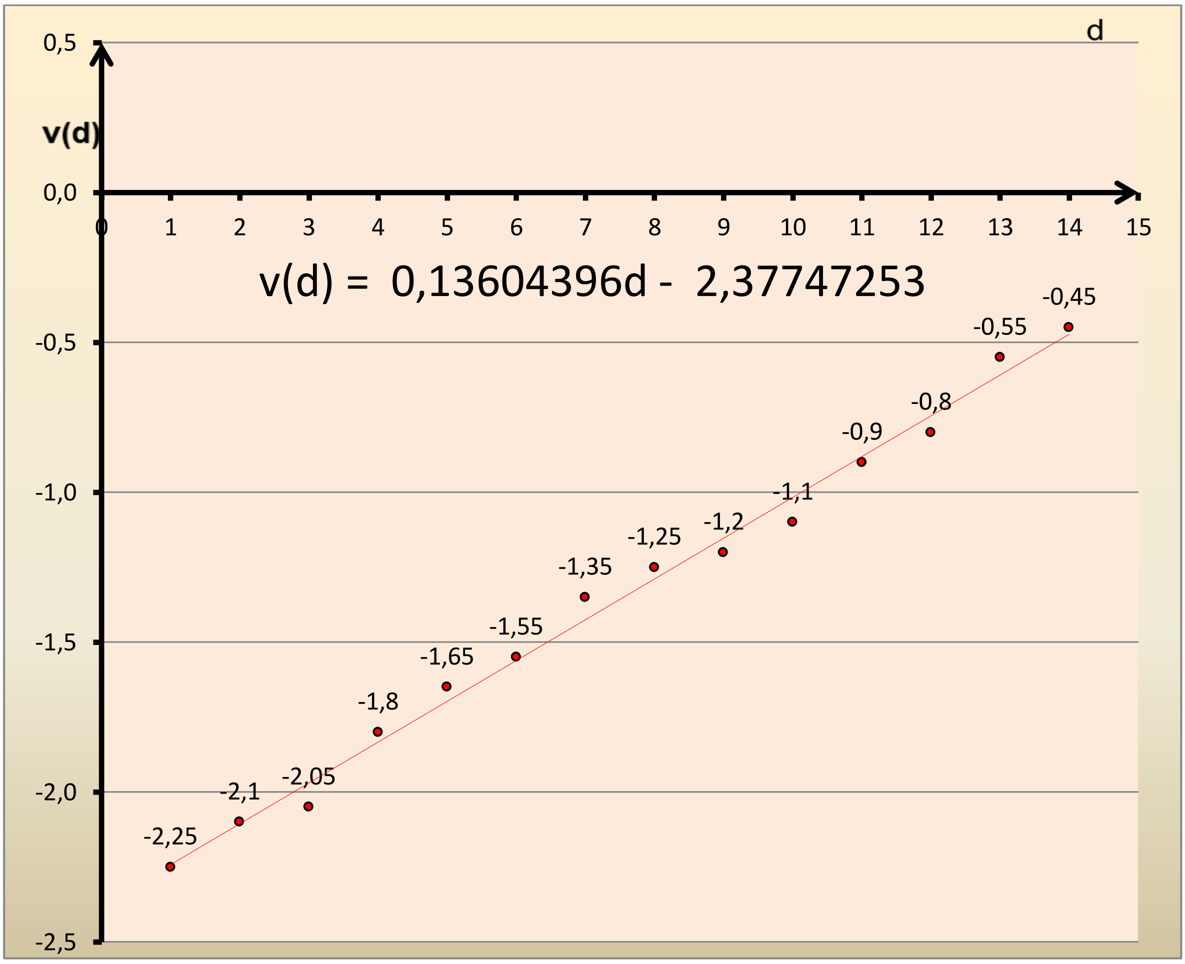


Gráfico 12: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças a cada 10s , feito pelo autor. Diâmetro do furo: 4 mm.

Abaixo, na tabela 6 comparamos as funções quadráticas e os gráficos obtidos com a filmagem e sem a filmagem quando os tempos eram considerados de 10s em 10s. Observamos que as funções são praticamente as mesmas. Em h_1 temos as alturas obtidas sem filmagem e em h_2 as alturas obtidas com filmagem.

Tabela 6: Comparação da variação da altura em função do tempo obtida com e sem filmagem pelo autor do experimento.

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
h_1	20,00	17,80	15,70	13,70	11,90	10,20	8,70	7,30	6,00	4,80	3,70	2,80	2,10	1,50	1,00
h_2	20,00	17,75	15,65	13,60	11,80	10,15	8,60	7,25	6,00	4,80	3,70	2,80	2,00	1,45	1,00

Os gráficos com as curvas de tendência e respectivas funções estão no gráfico. 13.

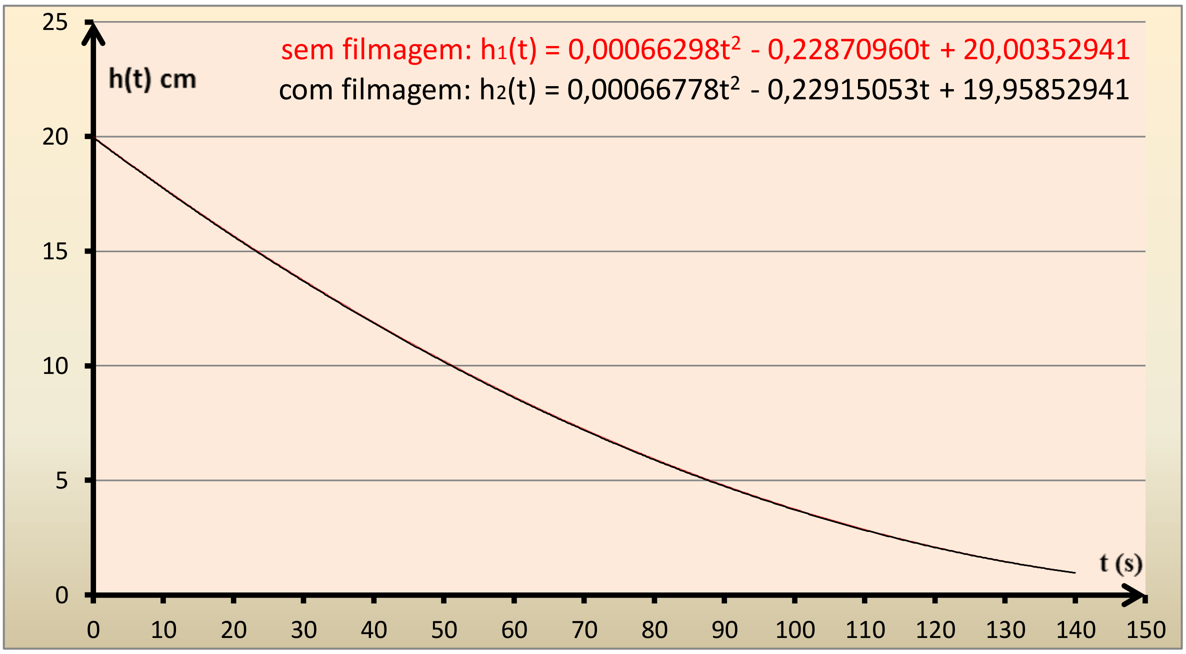


Gráfico13 Gráfico comparativo: sem filmagem x com filmagem

Como última etapa de nossa análise à priori estudaremos o escoamento através de filmagem e com os dados sendo obtidos de 5s em 5s. No gráfico 14 plotamos os pontos.

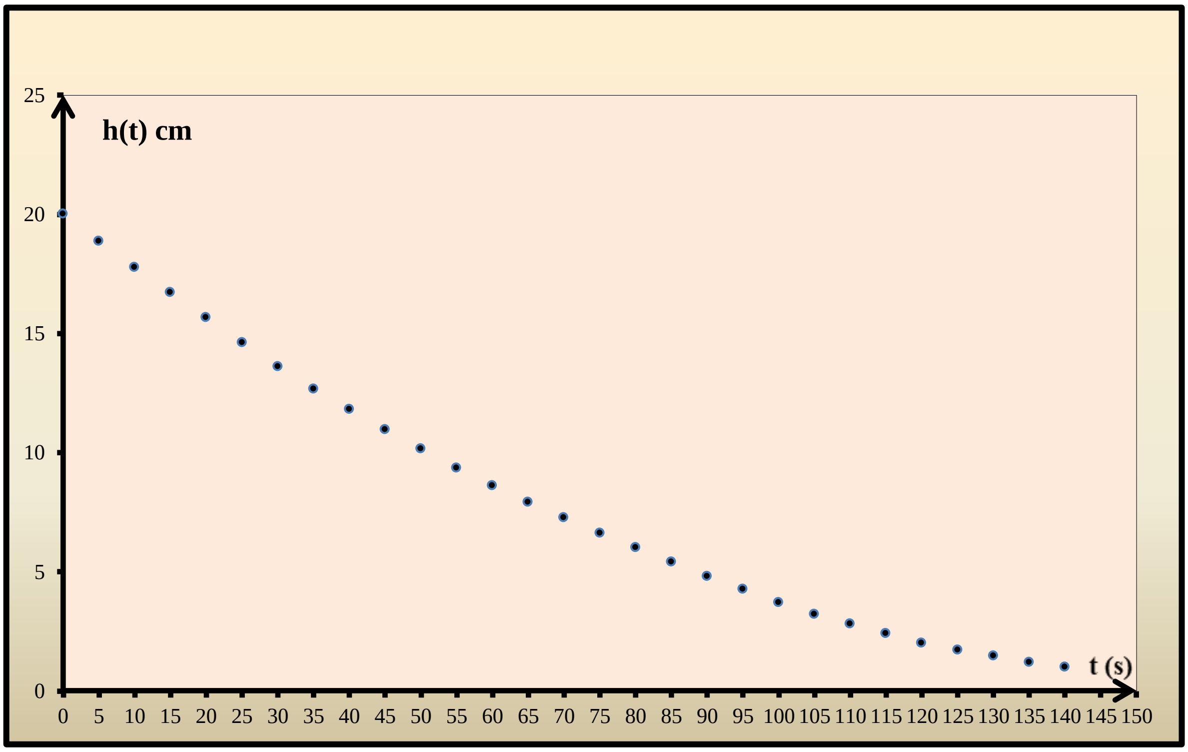


Gráfico 14: Gráfico discreto do experimento sobre o escoamento da água feito com o Excel

No gráfico 15 fizemos o ajuste da curva com ajuda do Excel

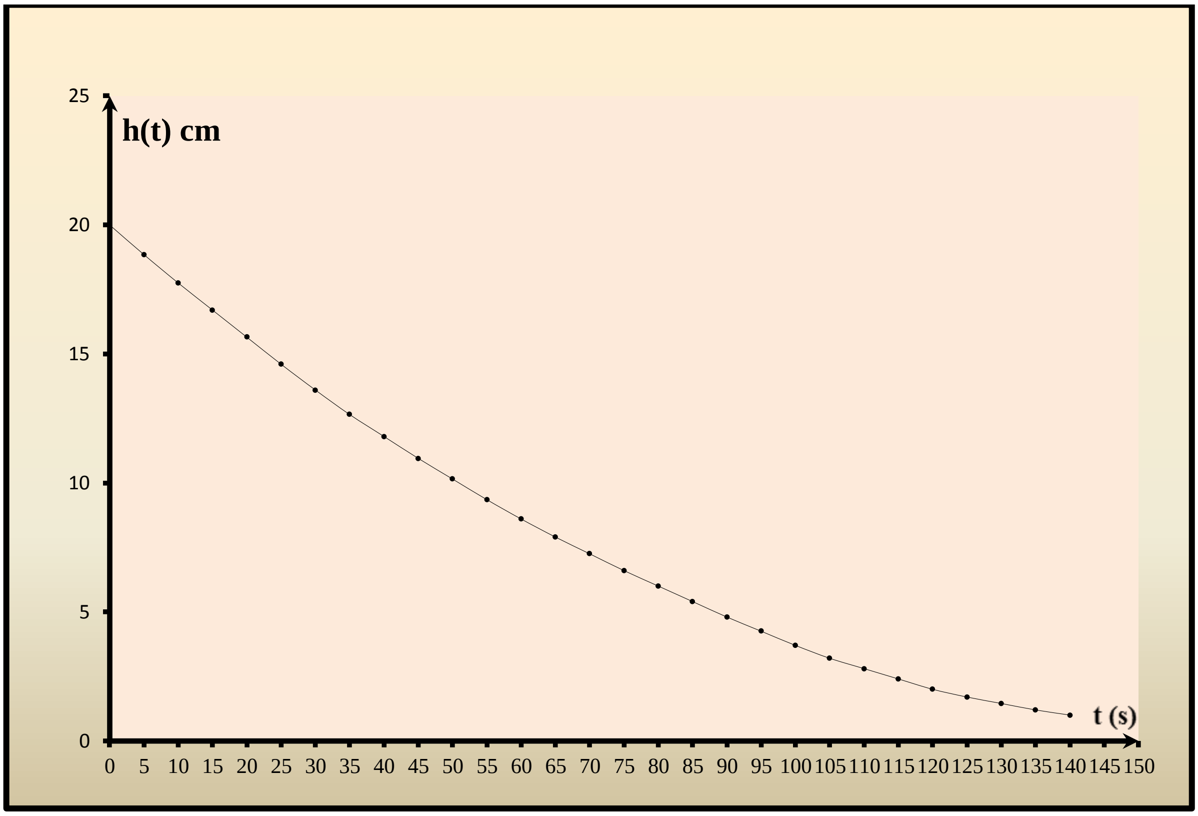


Gráfico 15: Ajuste de curva feito com Excel.

No gráfico 16 mostramos a curva de tendência e a função quadrática

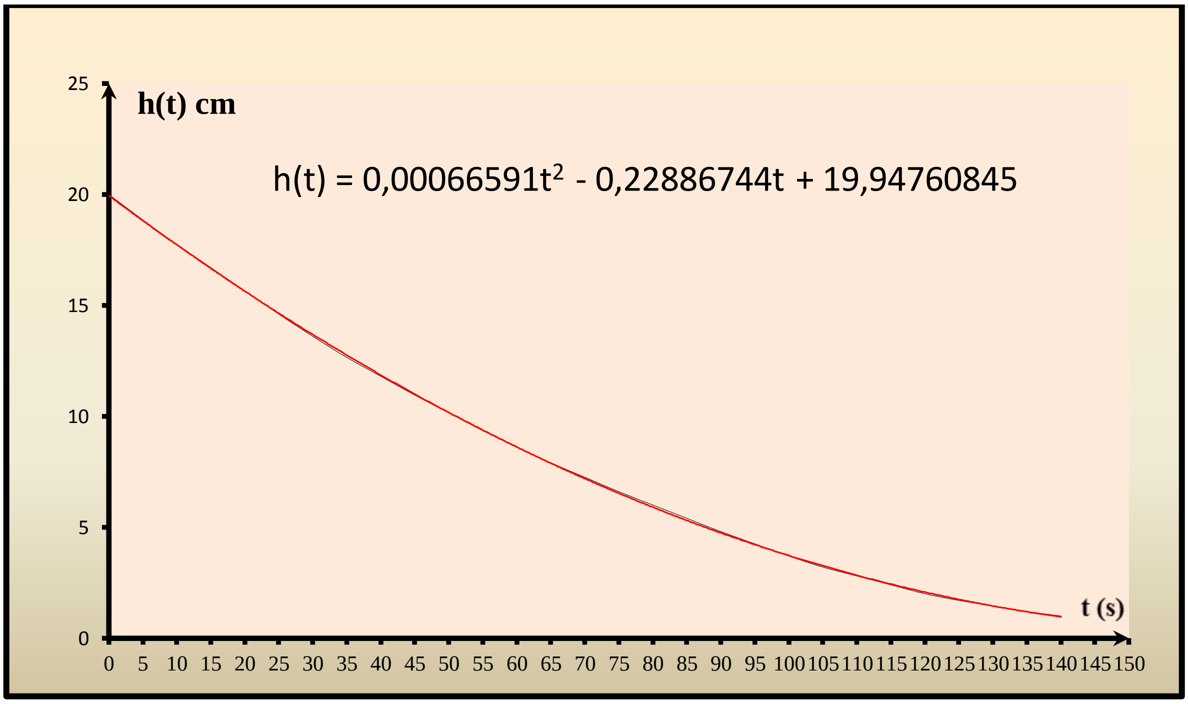


Gráfico 16:Ajuste e obtenção da curva de tendência feito com Excel com a respectiva função.

No gráfico17 verificamos que a dispersão em torno da reta de tendência nesse último caso também é mínima.

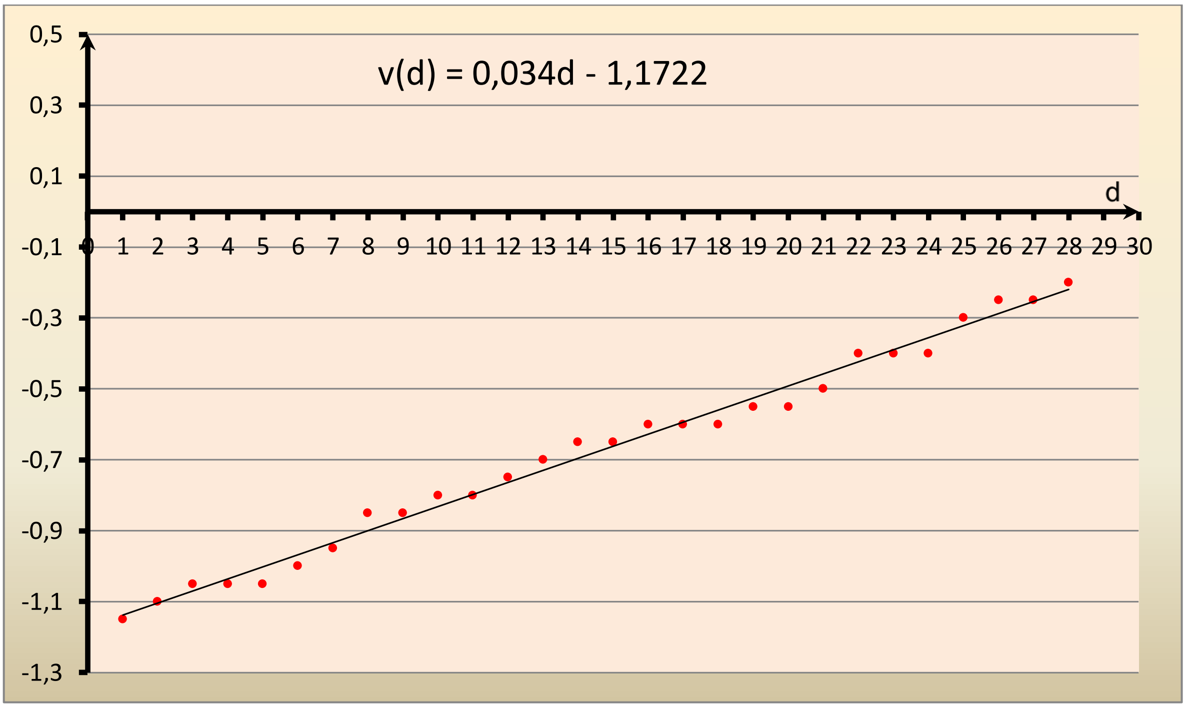


Gráfico 17: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças a cada 5s

Comparando as três últimas funções observamos que elas são praticamente iguais.

sem filmagem e tempo de 10s em 10s: $h_1(t) = 0,00066298t^2 - 0,22870960t + 20,00352941$

com filmagem e tempo de 10s em 10s: $h_2(t) = 0,00066778t^2 - 0,22915053t + 19,95852941$

com filmagem e tempo de 05s em 05s: $h\ (t) = 0,00066591t^2 - 0,22886744t + 19,94760845$

A conclusão que tiramos após esse estudo é que a função quadrática realmente se mostra como uma boa função para modelar o escoamento de um líquido. Nossa insistência em apresentar o gráfico da variação $v(d)$ das alturas é para que todos percebamos que quanto menor a dispersão em relação a reta de tendência, melhor será a função que modela o escoamento.

Capítulo 5. Aplicação do experimento - Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido

5.1 Introdução

Chegamos ao experimento propriamente dito. Informaremos sobre o material, os cuidados e os procedimentos necessários para a sua preparação além do relato passo a passo dos experimentos realizado pelos alunos.

Objetivos: Construir através de um experimento sobre escoamento de líquidos uma atividade que propicie uma aprendizagem significativa do conceito de função quadrática e técnicas de manipulação de dados advindos desse experimento.

O experimento de escoamento de líquidos foi preparado de forma que ele pudesse ser utilizado em uma sala de aula do ensino médio. Em nosso caso ele foi aplicado em duas classes da segunda série e em duas da terceira série. Inicialmente estudamos detalhadamente o experimento e vimos que existe um modelo matemático aproximado que descreve o fenômeno físico e que esse modelo faz uso de conceitos matemáticos inerentes ao ensino médio. Esperamos que cada um dos grupos consiga obter a melhor função que modela o escoamento do líquido.

5.2 Material necessário

- Vasilhame transparente de formato cilíndrico. Pode ser uma garrafa PET com capacidade para dois litros e com diâmetro de 10 cm ou outro equivalente. Trabalhamos com o mesmo material para podermos comparar de forma mais eficiente os resultados;
- Líquido, de preferência colorido, para facilitar a leitura;
- Fita de papel milimetrado que será colada na face lateral da garrafa PET com o objetivo de registrar o nível da água em determinados intervalos de tempo durante o escoamento;
- Fita adesiva transparente, tipo durex, com largura superior a da fita de papel milimetrado;
- Tesoura;

- Brocas de diversos tamanhos. O ideal é que se encontrem brocas graduadas em mm;
- Furadeira ou outro instrumento auxiliar que permita, com facilidade, perfurar o vasilhame no ponto desejado;
- Lixa d'água não muito áspera;
- Cronômetro ou relógio que possibilite marcar os intervalos de tempo desejados;
- Caneta para retroprojetor com ponta fina;
- Paquímetro;

Obs. Caso um determinado grupo utilize materiais diferentes desses, deverá informar sobre o material que está utilizando.

5.3 Procedimento

- Na lateral e próximo ao fundo do vasilhame fazer um furo com broca fina para não estourar a garrafa e em seguida aumentar o furo com a broca pretendida usando baixa rotação *(Foto 1) e (Foto 2)*

Foto 1:Furando a garrafa Pet com broca pequena

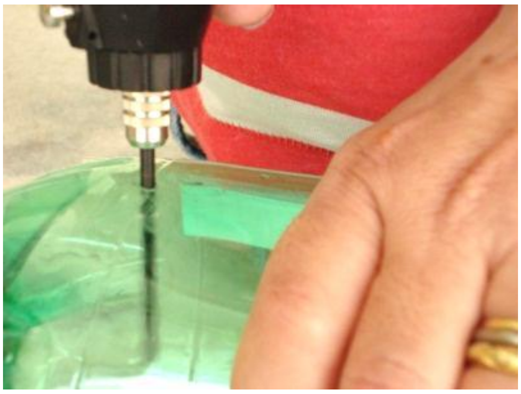


Foto 2: Furando a garrafa Pet com a broca correta

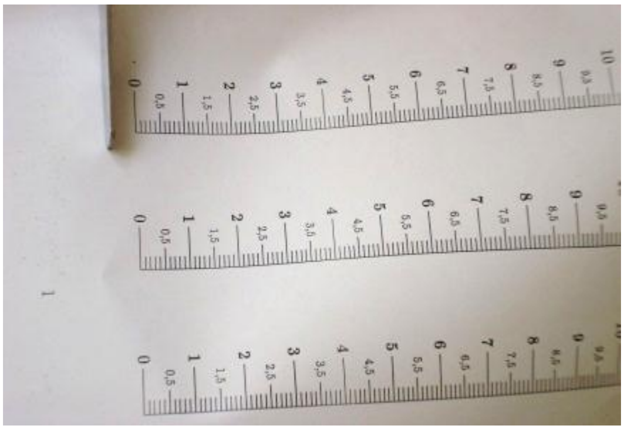


Foto 3:Cortando a tira de papel milimetrado.

- Cortar uma tira de fita de papel milimetrado ou uma tira feita, por exemplo, com uso de algum editor de texto e de figuras.

Obs. Cuidado! Algumas impressoras "roubam"1 mm.

- Com uso de uma régua fazer um risco, de leve, obtendo a direção vertical. (*Foto* 4) e (*Foto* 5)

Foto 4

Foto 5

- Para facilitar a leitura colocar o papel milimetrado numa fita adesiva transparente

(Fig. 6), em seguida, colar a fita na garrafa Pet. (Fig. 7).

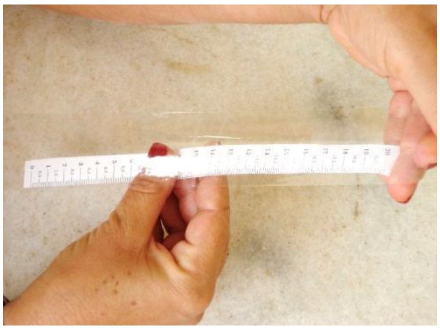


Foto 6

Foto 7

A fita adesiva também tem a função de proteger a fita de papel evitando que ela se molhe.

- Cortar a garrafa usando uma tesoura; uma faca de serra deixaria algumas "rebarbas" que depois precisariam ser lixadas para evitar algum acidente. Lixar o contorno do furo interna e externamente. Pequenas rebarbas interferirão no experimento.

- Antes da realização do experimento, medir o furo com algum instrumento de precisão, como um paquímetro, eletrônico ou não. Isso é necessário para a exatidão do experimento.

- Tampar o furo com uma fita crepe e colocar um líquido colorido, (em nosso caso usamos água tingida de vermelho), para facilitar a leitura (*Foto* 8). Colocar o líquido um pouco acima do nível máximo pretendido, para que haja um tempo entre a retirada da fita crepe e o início da contagem dos tempos e consequente leitura da altura. Deixar uma parte da fita solta para facilitar a "puxada" (*Foto* 9)

Foto 8

Foto 9

Foto 10

(*Foto* 10) Líquido sendo escoado. Pela foto percebe-se que o jato é bem uniforme.

A cada 10 segundos uma marca deve feita na fita usando-se caneta de retroprojetor ou equivalente. Recomenda-se, novamente, que a ponta seja bem fina.

Obs.1 Evitar apertar a garrafa para não interferir na medição da altura.

Obs.2 Em dias de muito frio a garrafa "sua" e com isso a fita colada com a fita adesiva também "sua" dificultando a marcação com a caneta de retroprojetor. Nesse caso sugerimos que a fita graduada seja colada diretamente na garrafa, mas, evitando-se que ela se molhe.

Obs. 3 A colocação da fita da *Foto* 9 é opcional, pois como o experimento é feito em grupo pode-se tampar o furo com um dos dedos.

5.4 Experimentos realizados pelos alunos

No dia anterior a realização do experimento o autor desta dissertação fez uma simulação do mesmo explicando detalhadamente os itens 5.2 e 5.3 e esclarecendo que eles poderiam utilizar outros procedimentos desde que no dia seguinte a garrafa estivesse dentro das condições exigidas para a realização do experimento, ou seja, com a fita colada perpendicularmente a base e com o "marco" zero na altura do furo de 4 mm e que, se possível, deveriam trazer as brocas para conferência.

Foto 11 : Professor explicando os procedimentos necessários à realização do experimento, na sala de vídeo para os alunos da segunda série do ensino médio.

Foto 12: Alunos da segunda série do ensino médio na sala de vídeo

No total os alunos trouxeram 12 garrafas, mas, três não estavam dentro do que havíamos estabelecido e foram descartadas. Cada classe foi dividida em grupos com três ou quatro alunos. No primeiro dia, cada grupo, após a realização do experimento, tabulou os dados e, a seguir, os transportou para uma folha de papel milimetrado. Como havíamos previsto, uma aula foi suficiente. Para a segunda aula, que seria no dia seguinte, cada grupo deveria tentar obter uma função para modelar o escoamento do líquido, contudo, como os experimentos foram realizados na quarta e na quinta feira e os alunos alegaram que precisavam estudar para algumas provas ficou combinado que eles poderiam apresentar as possíveis funções a partir da quarta feira seguinte. Alguns alunos disseram que pelo "jeitão" do gráfico, deveria ser uma função exponencial, contudo, não tinham a menor noção sobre o que fazer para obtê-la. Também perguntaram se podiam usar o Excel e enviar o resultado por e-mail. Como a resposta foi afirmativa alguns grupos disseram que tentariam obter a função. Na segunda feira à noite, recebi dois e-mails, o primeiro veio sem qualquer comentário e colocando as variáveis x e y no lugar de t e h respectivamente. Mesmo assim considero um ponto positivo, pois os alunos se preocuparam em resolver a questão assim que se "livraram" da provas.

E-mail recebido do Grupo 2 da terceira série A do ensino médio.

segunda-feira, 24 de agosto de 2009 19:58 <kapy.y@uol.com.br> Escoamento de Líquido.xls 3A09

Tabela 7: Tabela o obtida pelo grupo 2 da 3ª série A

TABELA 7	
0	20
10	17,8
20	15,7
30	13,8
40	12,1
50	10,3
60	8,75
70	7,25
80	6
90	4,95
100	3,8
110	2,9
120	2,15
130	1,5
140	1

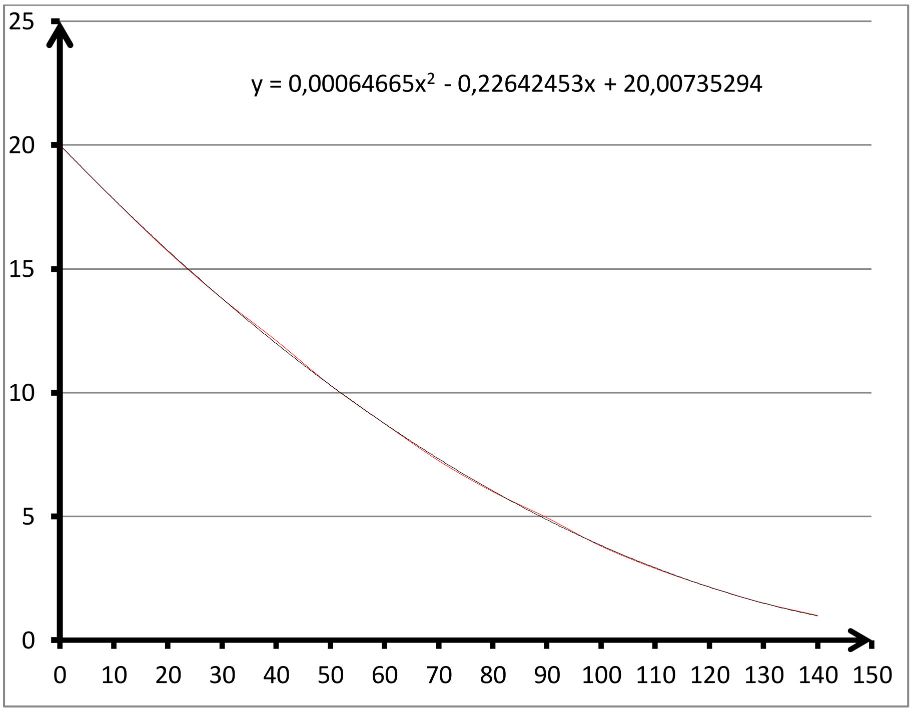


Gráfico 18: Gráfico e curva de tendência obtida pelo grupo 2 da 3ª série A

Depois que um dos grupos obteve uma possível função os demais logo se animaram e, como um dos grupos obteve uma função quadrática os demais grupos também houveram por bem fazer o mesmo, sem, contudo, fazerem quaisquer questionamentos.

Cada grupo fez como "achou" que devia fazer, sem qualquer interferência do professor.

Um segundo e-mail já apresentava algum questionamento pois comparava o resultado do Excel com o da função quadrática obtida conhecendo-se três pontos, apesar do autor desta dissertação nada ter dito. Quando foi perguntado por que escolheram três pontos responderam que haviam se lembrado de um exercício de aula.

segunda-feira, 24 de agosto de 2009 23:24 "Clóvis Macedo" <kapy.y@uol.com.br> tabela de valores.xlsx 3A09

Boa noite Professor, segue em anexo a planilha do escoamento de líquido, porém os resultados obtidos automaticamente pelo Excel não estão batendo com os obtidos na mão, dê uma olhada.

	Experiência
TEMPO(S)	ALTURA(CM)
0	20
10	17,9
20	15,85
30	**13,85**
40	12,1
50	10,4
60	**8,8**
70	7,3
80	6
90	**4,85**
100	3,9
110	2,9
120	2,2
130	1,6

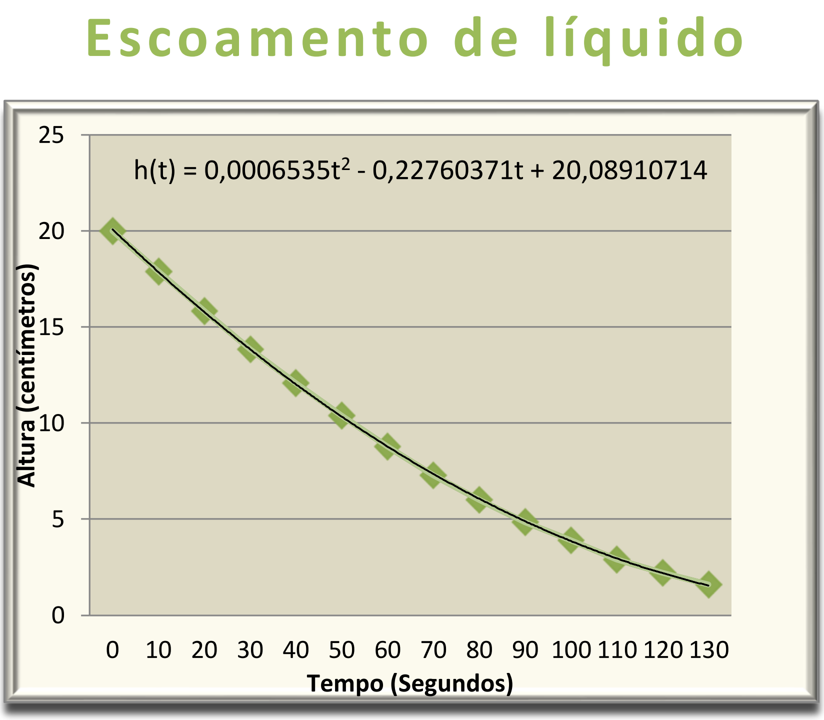


Gráfico 19: Gráfico e tabela do experimento realizado pelo grupo 3 da 3ª Série A

Resultados obtidos na mão usando tempo 30, 60, 90

a = 0,000611

b = -0,223333

c = 20,00009

h = altura (centímetros)

t = tempo (segundos)

Retornei o e-mail e pedi para que escolhessem outros três pontos e refizessem as contas. Fiquei no aguardo, mas como já era tarde da noite não tive retorno. Na terça feira a maioria dos grupos já havia terminado e na quarta feira, dia 26, todos já haviam feito as tabulações, plotado os pontos no papel milimetrado e obtido a função quadrática que modelava o experimento que fizeram. Na terça feira à noite recebi um relatório do grupo 1 da segunda série do ensino médio. Esse grupo mostrou como resolveu o sistema, mas não fez qualquer tipo de questionamento sobre os valores de a, b e c.

terça-feira, 25 de agosto de 2009 19:40 <kapy.y@uol.com.br> trabalho.docx 2B09

Professor Clóvis, segue em anexo o trabalho realizado pelo grupo da garrafa 1, 2º colegial B, Infelizmente não pudemos imprimir o trabalho para quarta feira, pois minha impressora está sem tinta. Entretanto, estou lhe enviando o trabalho por e-mail, e assim que minha impressora estiver disponível, iremos imprimi-lo e entregá-lo ao senhor.

Professor, enviamos como imagem porque não conseguíamos fixar as contas.

A observação feita pelos alunos é importante, pois mostra que nem todos estão familiarizados com alguns aplicativos. A resolução foi digitada e colocaram cada sistema e cada resolução numa caixa de texto. Quando "rolamos" as páginas as caixas de texto acabam se misturando, dai a razão de enviarem como imagem. É gratificante saber que os alunos encontraram uma solução. Sugerimos que em outras oportunidades eles usassem um editor específico para digitar textos matemáticos e evitassem colocar expressões lado a lado e separados por um traço como foi feito.

Obs. O gráfico recebido por e-mail está na página seguinte.

Tempo (s)	Altura (cm)
0	20
10	17,8
20	15,8
30	13,6
40	12
50	10,2
60	8,4
70	7,1
80	5,8
90	4,6
100	3,6
110	2,6
120	2
130	1,3
140	0,9
150	0,5

Equação do gráfico dada pelo programa Microsoft Office Excel 2007:

$$y = 0{,}0007x^2 - 0{,}2335x + 20{,}0804$$

Equação resolvida manualmente pelo grupo:

$$\begin{cases} 1600a + 40b + c = 12 & (-1)\ (-1) \\ 2500a + 50b + c = 10{,}2 \\ 14400a + 120b + c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1600a + 40b + c = 12 \\ +900a + 10b = -1{,}8 & (+8) \\ -12800a - 80b = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1600a + 40b + c = 12 \\ +900a + 10b = -1{,}8 \\ -5600a = -4{,}4 \end{cases}$$

$$a = 0.000785$$

$$-900a - 10b = 1{,}8$$

$$-b = \frac{1{,}8 + 900a}{10}$$

$$b = -0{,}250$$

$$1600a + 40b + c = 12$$

$$c = 12 - 1600a - 40b$$

$$c = 20{,}74$$

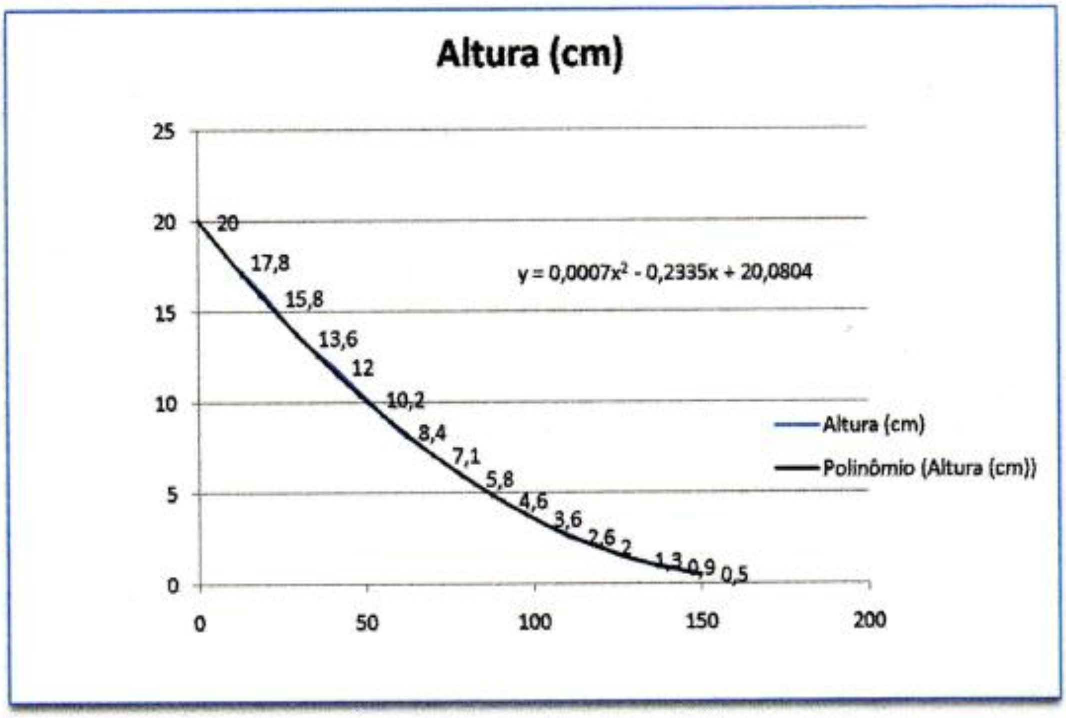


Gráfico 20: Gráfico, função, tabela, resolução do sistema feito pelo grupo1 da 2ªsérie B

Obs. Professor: Colocando mais casas decimais e obtivemos uma melhor aproximação para a função obtida acima. Também corrigimos escrevendo h e t no lugar de y e x.

Nova função: $h(t) = 0{,}0006866t^2 - 0{,}23352311t + 20{,}08039216$

É louvável a atitude dos alunos de buscarem um resultado mais exato e escreverem de modo correto a função.

Seguem algumas fotos dos alunos durante a realização do experimento

Foto 13: Alunos realizando o experimento

Foto 14: Alunos realizando o experimento

Foto 15:Alunos realizando o experimento

Foto 16: Alunos trocando ideias sobre o experimento

Foto 17: Aluno conferindo os dados do experimento

Foto 18: Alunos guardando o material

Foto 19: Professores Roberto, Ivo e Clovis com a turma da 2ª Série B do ensino médio

Foto 20: Professores Clovis, Ivo e Roberto com a turma da 3ª Série A do ensino médio

Foto 21: Alunos realizando experimento

Foto 22: Alunos tingindo a água para o experimento

Foto 23: Alunos do 3º A Transferindo os dados para uma tabela

Foto 24: Aluno conferindo os dados que foram transportados para uma tabela

O grupo 2 da terceira série B do ensino médio resolveu fazer o experimento na casa de um dos integrantes. O que segue é o relato que eles fizeram.

Professor, realizamos o experimento em minha casa com uma garrafa PET com 10 cm de diâmetro e com um furo de 5 mm e obtivemos a seguinte tabela.

Tabela 8: Tabela com os dados obtidos pelo experimento feito extra classe pelo grupo 2 da 3ª série B

T (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
H (cm)	20	17	14,45	11,75	9,3	7,35	5,5	3,95	2,65	1,65	1

A partir dessa tabela construímos o gráfico abaixo.

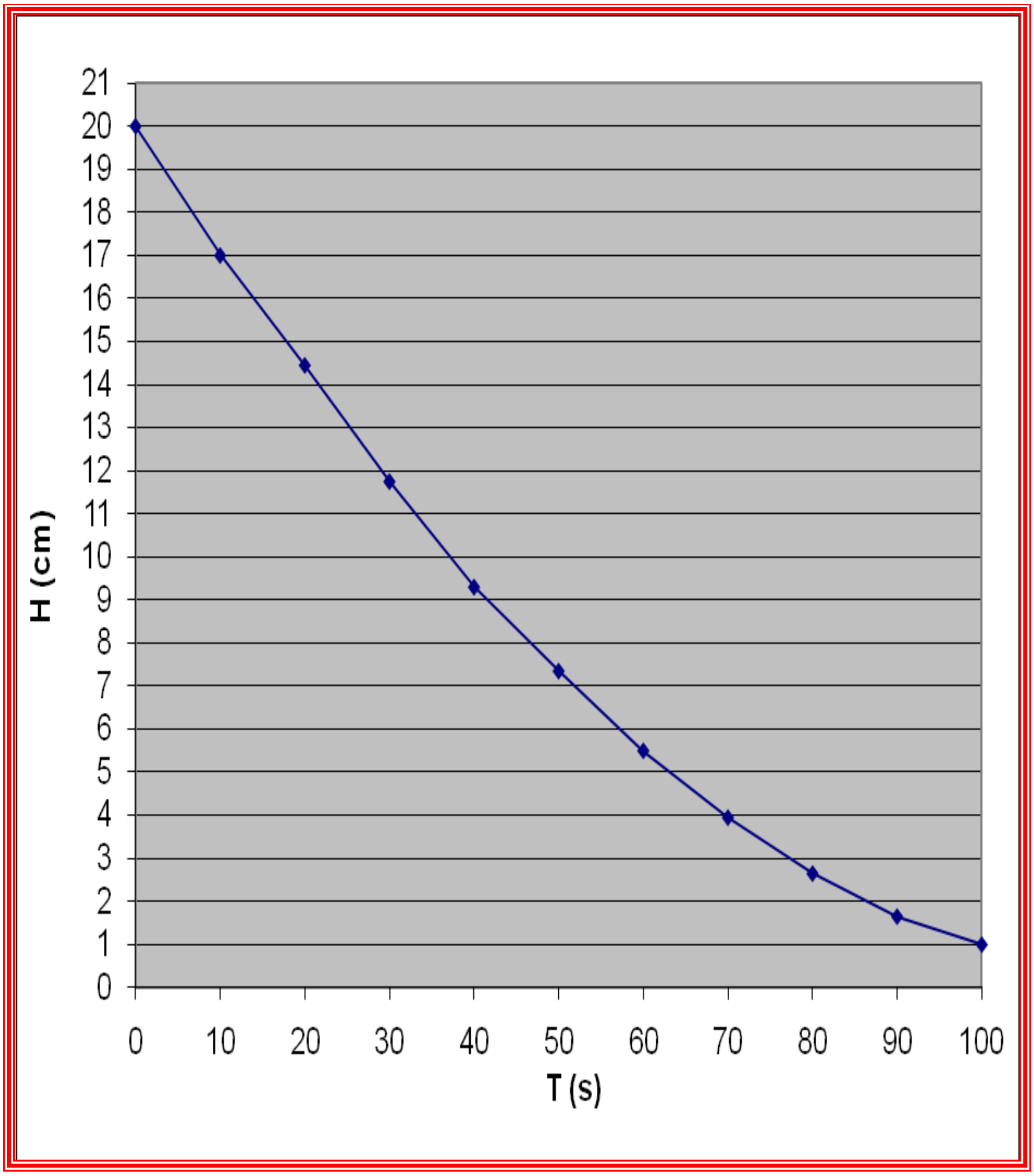


Gráfico 21: Gráfico obtido pelo grupo 2 da 3ª Série B

No gráfico acima o grupo, acertadamente, utilizou t e h, contudo, nos gráficos a seguir utilisou x e y, talvez por estarmos todos mais acostumados a isso. Esse procedimento não invalida, entretanto, a iniciativa e o esforço dos alunos. Eles prosseguem.

Ao formatarmos a linha de tendência tentamos uma exponencial e não bateu, como se pode ver. É a curva vermelha. Então não é exponencial.

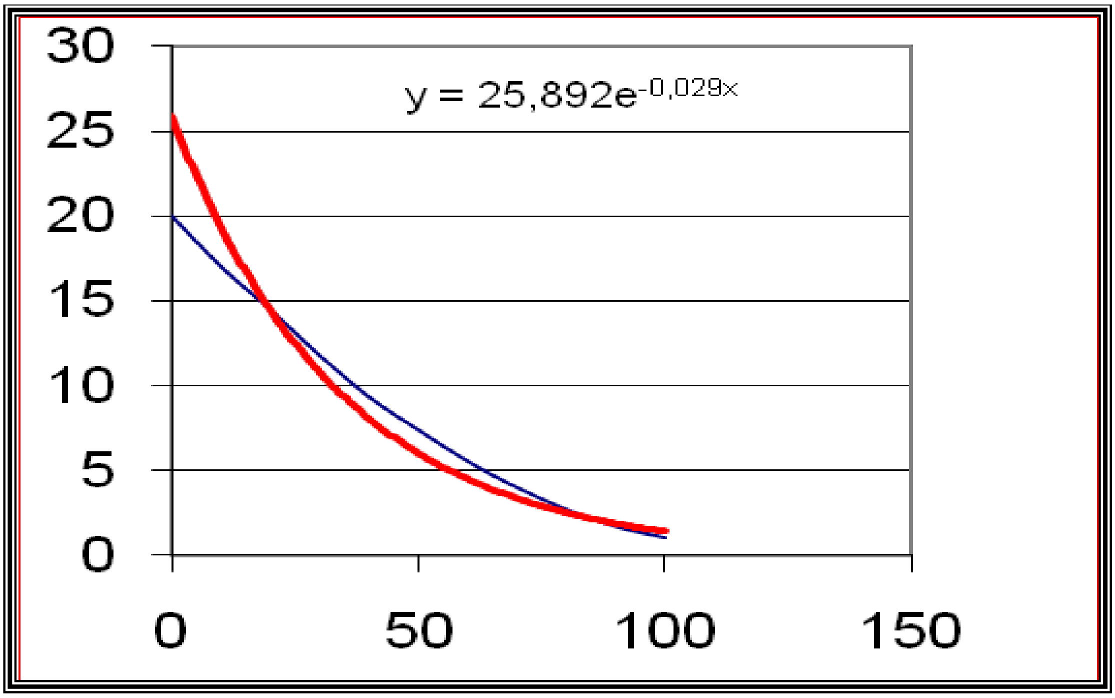


Gráfico 22: Comparando a curva com uma função exponencial

Como a curva estava muito esquisita para ser do grau 2, tentamos uma linha de tendência do grau 3 e a curva bateu.

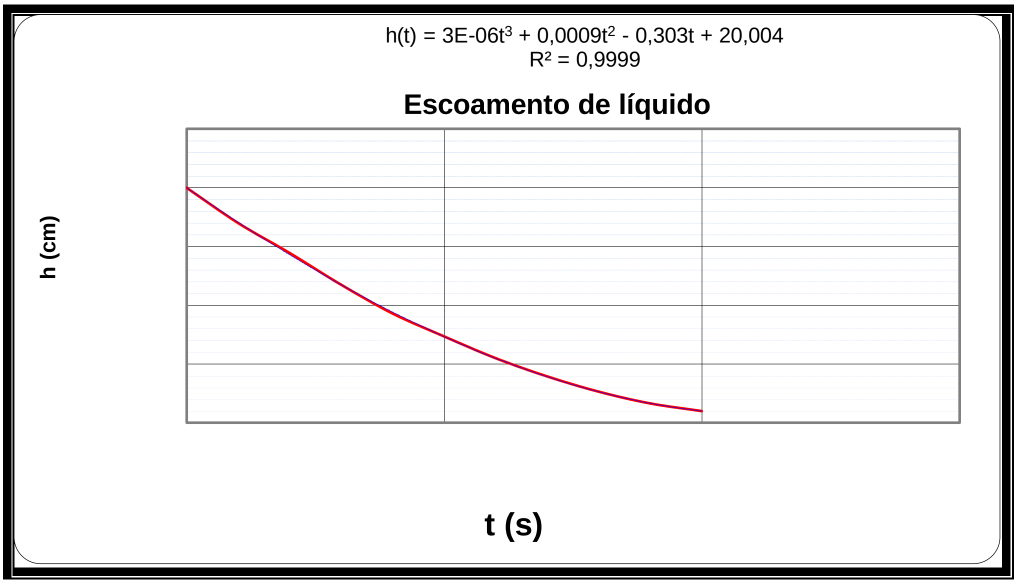


Gráfico 23: Gráfico com uma curva de tendência do grau 3.

Resolvemos então fazer a do segundo grau para ver o que acontecia e também deu certo.

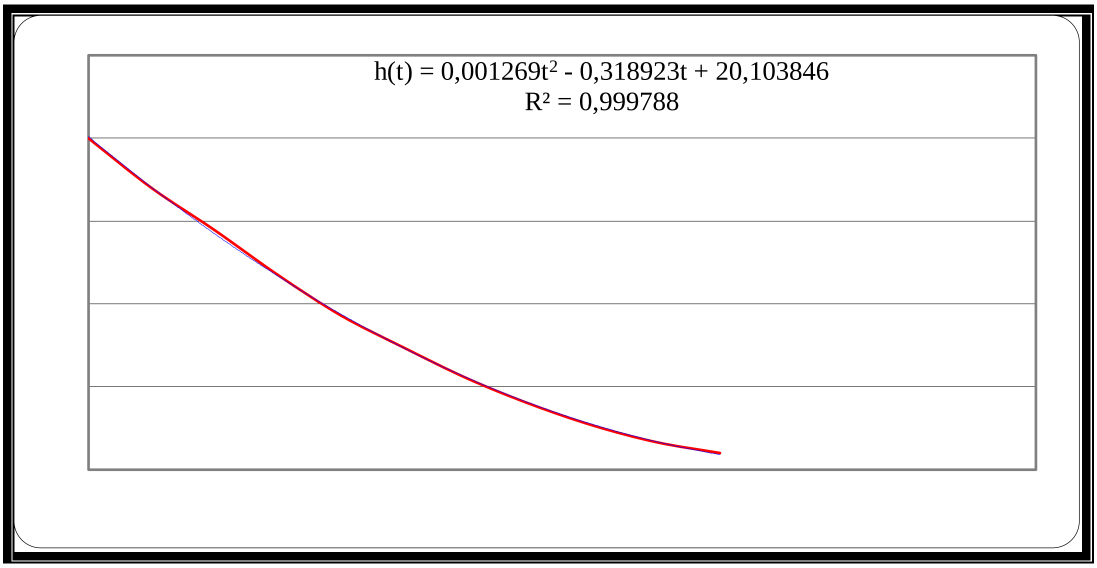


Gráfico 24-A: Gráfico com uma curva de tendência do grau 2.

A do grau 4 também bateu, veja:

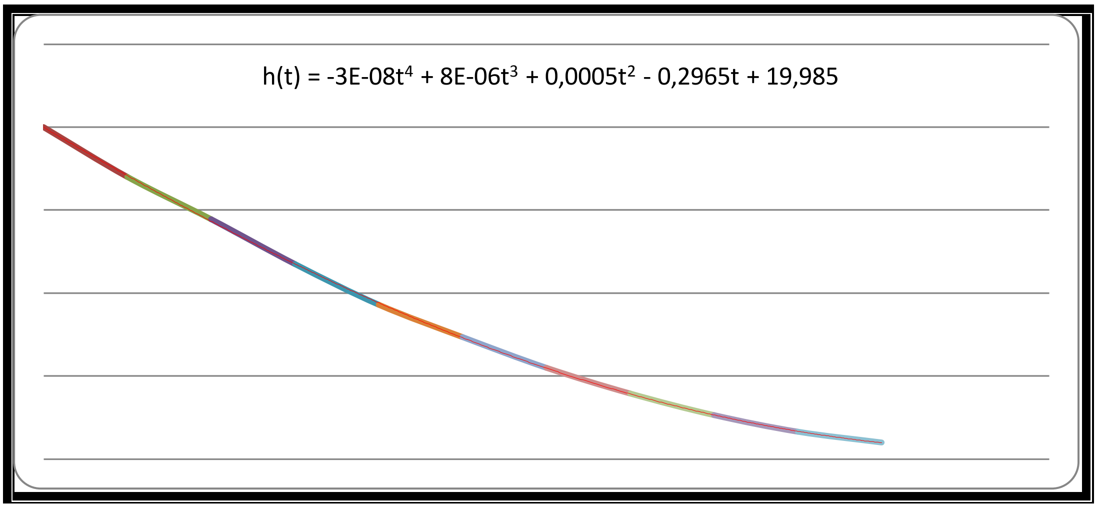


Gráfico 24-B: Gráfico com uma curva de tendência do grau 4

Observamos em cada um dos gráficos que existem duas curvas, uma vermelha e uma azul que praticamente coincidem. Isso quer dizer que a linha de tendência bate com a curva. Como podemos saber qual dos gráficos representa a curva e a função corretas?

Depois que esse grupo percebeu que mais de uma função poderia fornecer a resposta correta outros grupos também fizeram o mesmo. Não dá para manter segredo numa classe de colegial, entretanto o mistério permanecia. Qual a melhor?

É evidente que os alunos não poderiam ficar sem resposta, mas primeiro foi pedido para que eles pesquisassem na internet ou em livros, contudo nenhum dos grupos conseguiu uma explicação satisfatória. Na primeira aula após a tabulação e obtenção do gráfico o autor deste trabalho teve dificuldade para conter a ansiedade dos alunos que queriam desvendar o místério. Na segunda aula, depois que todos os grupos de uma mesma sala fizeram o experimento por completo, as justificativas necessárias foram dadas.

5.5 Justificativas – Propriedades das funções quadráticas

Os questionamentos feitos pelos alunos são perfeitamente justificados e é louvável que eles os tenham feito. Baseando-se apenas nas representações gráficas é impossível dizer qual delas é a mais correta. Poderíamos, de um modo simplista, dizer que os coeficientes dos termos de grau 3 e 4 são muito pequenos e portanto desprezíveis, todavia, devemos nos lembrar que esses coeficientes multiplicam as potências de graus 3 e 4 de x, e quando substituímos os valores de x o resultado não é tão pequeno assim, por exemplo: Para $x = 100$, $-3E\text{-}08x^4 = -3.\ 0{,}00000001\ .\ 100000000 = -300$ que nada tem de insignificante.

Poderíamos também enveredarmo-nos pela Física, buscando explicações na Mecânica dos Fluidos, Fluídodinâmica, leis da hidrodinâmica ou as mais diferentes explicações envolvendo escoamentos.

Preferimos, no entanto, utilizar apenas a Matemática, ela deve ser capaz de decifrar seus próprios mistérios.

Colocamos a seguir o que foi mostrado aos alunos de cada uma das séries para que eles pudessem compreender porque a função quadrática é uma boa função para modelar o escoamento. Foram necessárias duas aulas de 50 mim para que o que segue fosse discutido com os alunos.

Utilizamos a ideia contida no livro do professor Elon (Lima, vol. 1, pág. 144). “Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária e $x_1, x_2, x_3, x_4,...$ é uma progressão aritmética qualquer então a sequência $y_1, y_2, y_3, y_4,...$ dos valores $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, etc..., goza da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 – y_1$, $d_2 = y_3 – y_2$, $d_3 = y_4 – y_3$,... formam uma progressão aritmética. Esse fato que se verifica sem maiores dificuldades, constitui uma propriedade exclusiva das funções quadráticas.” Dissemos aos alunos que eles poderiam tentar fazer em casa a demonstração de um modo geral, mas que naquele momento daríamos um exemplo. Informamos também que na aula seguinte faríamos a demonstração completa.

Segue o que foi apresentado aos alunos. Inicialmente, fizemos em sala de aula usando a lousa e depois fizemos uma apresentação mais completa usando projetor.

Na foto a seguir o autor do trabalho faz a apresentação na sala de vídeo para os alunos do ensino médio. A tabela que aparece é a mesma que já havia sido mostrada em classe usando-se a lousa.

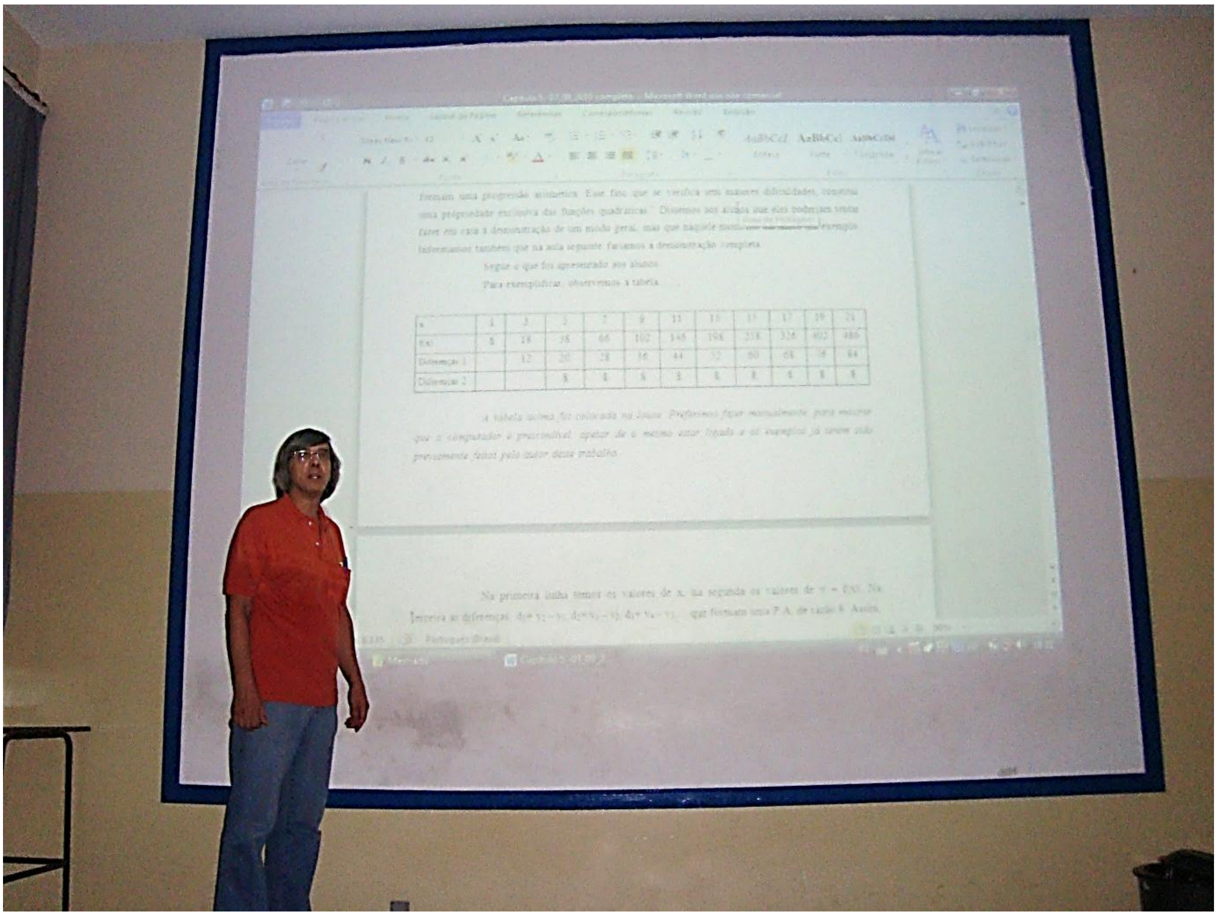


Foto 25: Foto da Apresentação para os alunos do ensino médio

Para exemplificar, observemos a tabela.

Tabela 9: Tabela utilizada para explicar a propriedade da função quadrática

x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
f(x)	6	18	38	66	102	146	198	258	326	402	486
Diferenças 1		12	20	28	36	44	52	60	68	76	84
Diferenças 2			8	8	8	8	8	8	8	8	8

A tabela acima foi colocada na lousa. Preferimos fazer manualmente, para mostrar que o computador é prescindível, apesar de o mesmo estar ligado e os exemplos já terem sido previamente feitos pelo autor deste trabalho.

Na primeira linha temos os valores de x, na segunda os valores de y = f(x). Na terceira as diferenças $d_1 = y_2 - y_1$, $d_2 = y_3 - y_2$, $d_3 = y_4 - y_3$,... que formam uma P.A. de razão 8. Assim, os valores da linha 2, de acordo com o exposto, nos fornecem uma função quadrática.

Para obtermos a função basta que escolhamos três desses pontos. Pedimos para que cada grupo escolhesse três pontos e resolvesse o sistema, o que foi feito sem dificuldade. Segue o exemplo que fizemos na lousa na classe da 2ª série A do ensino médio depois de nos certificarmos de que nenhum dos grupos havia escolhido os três pontos a seguir discriminados: (1,6), (9,102) e (15,258). Considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ formamos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \ (I) \\ 81a + 9b + c = 102 \ (II) \\ 225a + 15b + c = 258 \ (III) \end{cases}$$

Fazendo II – I e III – I, obtemos

$$\begin{cases} 80a + 8b = 96 \ (IV) \\ 224a + 14b = 252 \ (V) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 12 \ (VI) \\ 224a + 14b = 252 \ (V) \end{cases}$$

Fazendo *(V) – (IV)* · 14 obtemos

$$84a = 84 \Rightarrow a = 1$$

Substituindo em *(VI)* encontramos

$$10 + b = 12 \Rightarrow b = 2$$

Substituindo os valores de a e b em (I) encontramos o valor de c

$$1 + 2 + c = 6 \Rightarrow c = 3$$

Logo, a função procurada será dada por

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

É evidente que todos os grupos obtiveram a mesma função, contudo os alunos não se mostraram muito surpresos, pois no ano anterior já haviam resolvido questões semelhantes, ou seja, dado o esboço gráfico da função quadrática determinar os coeficientes a, b e c escolhendo três pontos da curva. Um dos alunos apenas argumentou que: *“ A diferença é que no ano passado era dada a curva e a gente já sabia que devia ser uma função quadrática. Agora não, a gente só tem a tabela e tem que descobrir qual é a função... sem saber essa propriedade a gente não ia conseguir*”. Outro aluno completou: *”A gente já devia ter feito essa experiência o ano passado e visto essa propriedade, as coisas ficariam mais* *claras".* Para não alimentarmos a discussão, dissemos que esse tipo de informação não aparece em todos os livros didáticos ou apostilas e por isso ela passa despercebida e, que eu a conheço, porque ela faz parte do estudo que estou fazendo e da minha dissertação de mestrado. Disse ainda para os alunos que justamente porque concordava com eles é que o experimento também seria realizado com os alunos da primeira série do ensino médio deste ano e em todos os anos a partir deste.

Para eliminar possíveis dúvidas dos alunos que não tinham muita familiaridade com o Excel fizemos vários exemplos explicando detalhadamente cada passo. Depois, com os valores da tabela 9, fizemos o gráfico abaixo para ver a reação dos alunos de cada uma das séries. A reação foi a mesma em todas. Diversos alunos perceberam que a curva parecia passar em (0,0) porque os valores eram muito grandes. Para fazer um gráfico "bonitinho", a garota da foto disse que eles deveriam atribuir valores pequenos para x, por exemplo, entre -1 e 1. Não entramos em detalhes, pois nosso objetivo era outro.

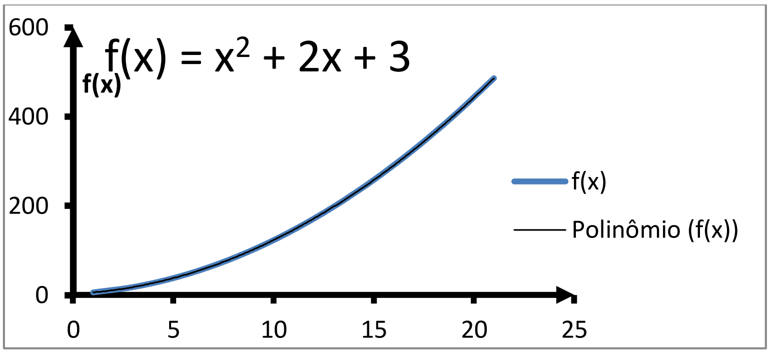


Gráfico 25: Gráfico e função quadrática obtida pelo Excel.

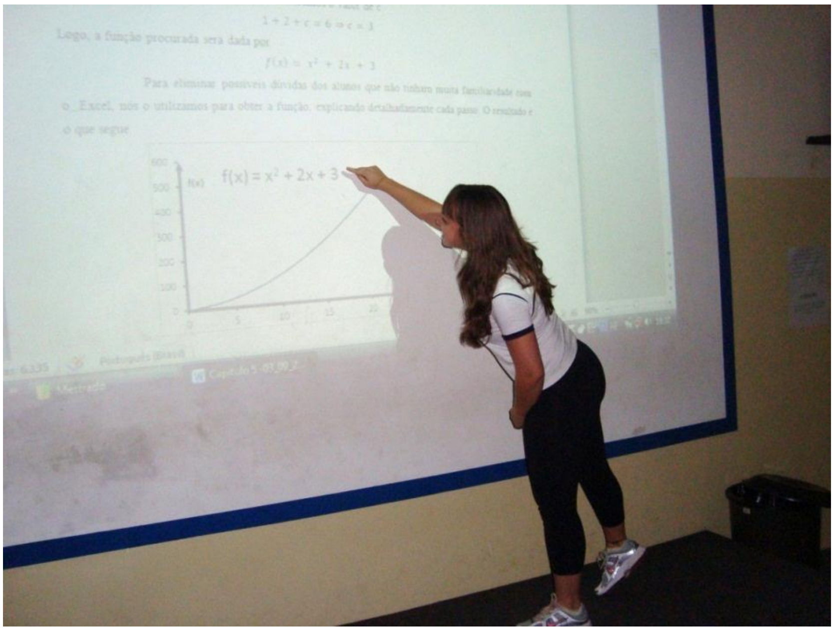


Foto 26: Aluna da 2ª série B fazendo esclarecimentos sobre o gráfico

Para que houvesse maior compreensão escolhemos uma função quadrática como aquelas que estavam acostumados a trabalhar, ou seja, uma função com discriminante positivo, duas raízes reais e preferivelmente inteiras e realizamos o procedimento inverso ao descrito acima.

O procedimento a seguir foi mostrado aos alunos com uso de um projetor. Para melhor entendimento e melhor aproveitamento do tempo o exemplo que segue já havia sido feito pelo autor deste trabalho.

Seja a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Completemos a tabela com valores discretos de x e calculemos as diferenças d1 e d2.

Tabela 10: Tabela dos valores discretos do domínio e da imagem de uma função quadrática conhecida, com as diferenças 1 e 2

.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15
D1		-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
D2			2	2	2	2	2	2	2	2

Vemos na tabela que as diferenças designadas por D1 são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 2, por isso na linha 4 aparece apenas o número 2.

Plotemos esses valores no Excel e obtenhamos a função.

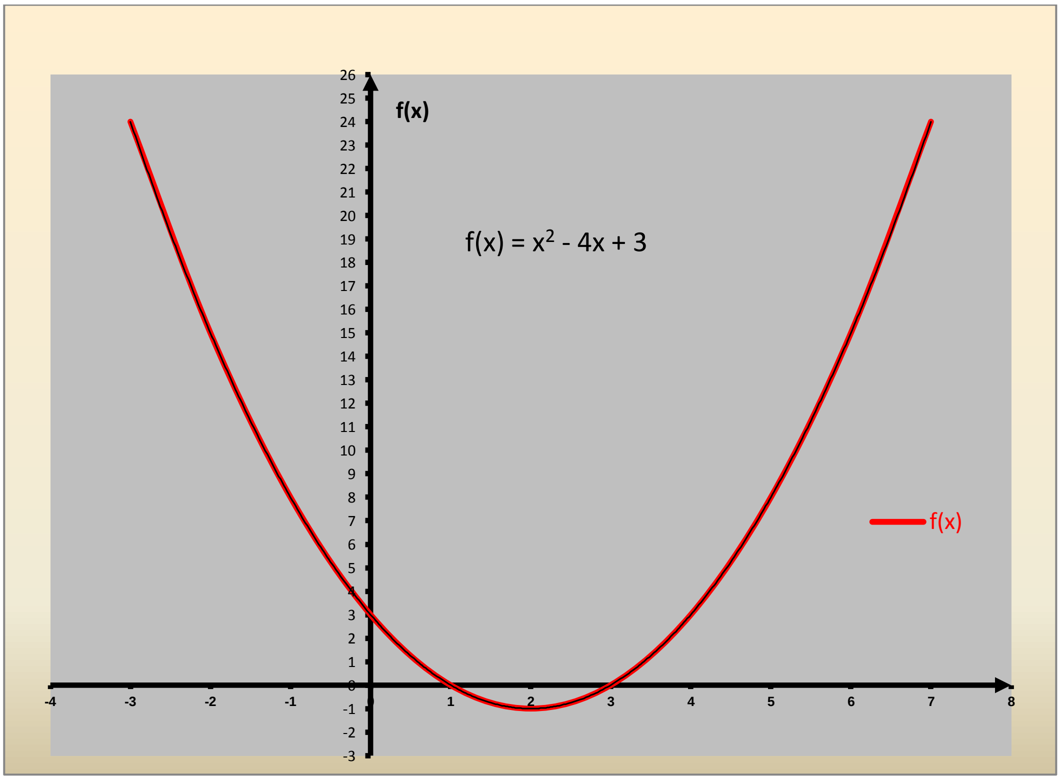


Gráfico 26: Gráfico de uma função quadrática

Pudemos comprovar, assim, que a função obtida pelo Excel é exatamente a função com a qual obtivemos os valores discretos.

Observemos ainda que plotando as diferenças num sistema cartesiano os pontos obtidos pertencem a uma mesma reta, pois os dados discretos estão em progressão aritmética.

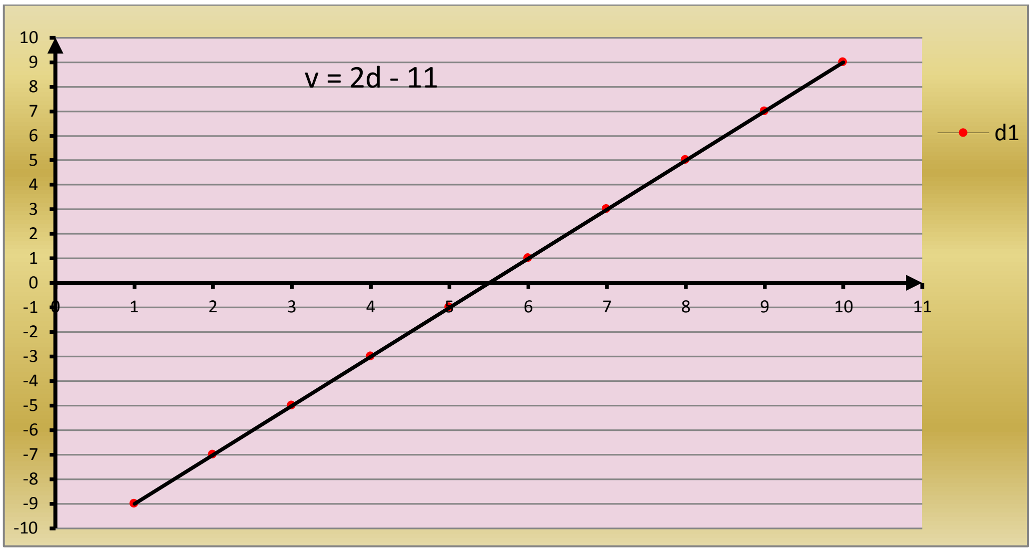


Gráfico 27: Gráfico das diferenças sucessivas correspondente a função do gráfico 26

Verifiquemos também que escolhendo três pontos não colineares da parábola obteremos a mesma função.

Escolhendo os pontos: (-2,15), (2,-1), (0,3) e sendo $y = ax^2 + bx + c$ a função, temos:

Como para x = 0, y = 3, temos que c = 3. Observemos que:

(-2,15) nos fornece (I) 4a - 2b + 3 = 15

(2,-1) nos fornece (II) 4a + 2b +3 = -1

Somando (I) e (II) temos

8a + 6 = 14, logo a = 1. Substituindo a = 1 em (II) 4a + 2b +3 = -1, obtemos 4 + 2b + 3 = -1,

Logo b = -4.

Com esse procedimento encontramos a função procurada, que é:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$$

Pelo que pudemos observar parece ter ficado claro para os alunos que a função quadrática é uma boa função que modela o escoamento de um líquido, restava cada um dos grupos escolher aleatoriamente três pontos não alinhados, obter a função quadrática, comparar os resultados obtidos e testar outros pontos. No final da aula pedimos novamente para que os alunos tentassem demonstrar a propriedade da função quadrática e informamos que a faríamos na próxima aula. Solicitamos que cada um dos grupos completasse o trabalho que haviam realizado, refazendo a tabela com a ajuda do Excel e calculando as diferenças D1 e D2 conforme feito em classe, para verificar se a diferença D1 continha números que se aproximavam de uma Progressão Aritmética e consequentemente se a diferença D2 apresentava números aproximadamente constantes. Também foi pedido para que fizessem o gráfico das diferenças D1 para observarem a dispersão em relação a reta de tendência. Como agora todos os alunos estavam cientes de que a função era quadrática é uma boa função para modelar o experimento, pedimos para que cada um dos grupos verificasse se o gráfico obtido apresentava uma curva suave, sem bicos e sem pontos muito afastados da linha de tendência. Solicitamos também que verificassem no gráfico da diferença se haviam pontos muito dispersos em relação a reta de tendência. Se houvessem pontos muito dispersos nos dois gráficos, isso poderia ser um indicativo de que algum deslize ocorrera durante a realização do experimento e, nesse caso, seria interessante que o experimento fosse refeito. Como em alguns dias pela manhã estava muito frio os alunos poderiam levar a garrafa e refazer o experimento em casa com maior tranquilidade e comparar os resultados. Um dos grupos pediu para refazer o experimento e permitiu que os gráficos que segundo eles *"ficaram muito esquisitos"* pudessem ser mostrado e colocado na dissertação para que todos vissem o que não deve ocorrer, com a condição de que não disséssemos de quem era. Um dos integrantes até sorriu e disse: *"Não gostamos dos gráficos, faremos melhor"*. Concordamos. Seguem os gráficos.

t (s)	H (cm)
0	20,0
10	18,2
20	16
30	14,2
40	12
50	10,3
60	8,6
70	7,3
80	6,6
90	3,4
100	2,5
110	1,8
120	1,2
130	0,5

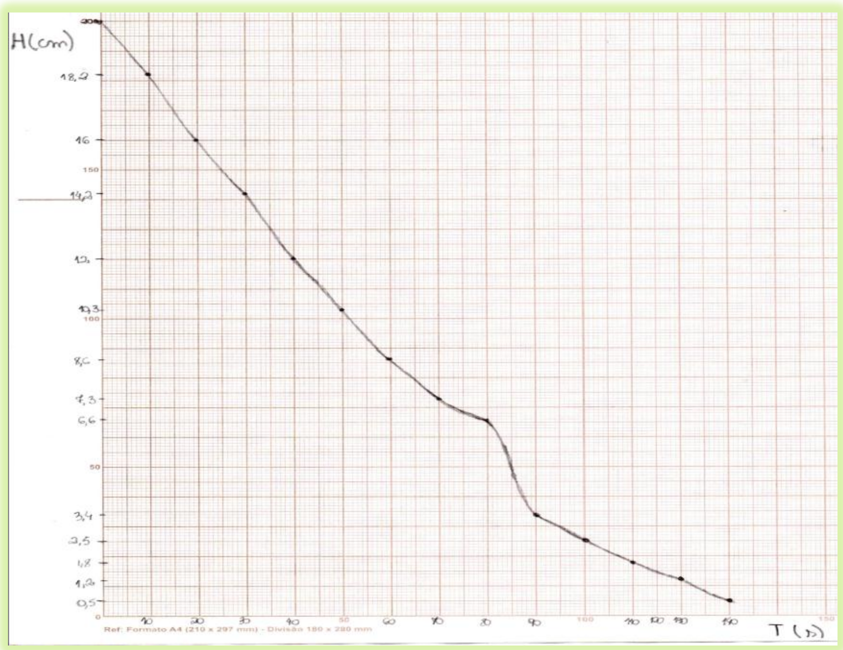


Gráfico 28:Exemplo de gráfico apresentando "bicos".

Gráfico 29:Exemplo de gráfico apresentando "bicos". Gráfico idêntico ao gráfico 28, feito com Excel

Infelizmente os alunos não conseguiram descobrir o motivo do "erro", todavia concordaram que a função por eles obtida destoava um pouco da obtida pelos demais colegas. Seguem a tabela e o gráfico das diferenças. A tabela e o gráfico das diferenças foi feito pelo autor deste trabalho na presença dos alunos do grupo em questão pois eles não sabiam como calcular as diferenças usando o Excel. A cor foi escolhida pelo grupo.

Tabela 11: Tabela com os dados do experimento correspondente ao gráfico 30 e que foi considerado "esquisito".

T	H	D1	D2
0	20		
10	18,2	-1,8	
20	16	-2,2	-0,4
30	14,2	-1,8	0,4
40	12	-2,2	-0,4
50	10,3	-1,7	0,5
60	8,6	-1,7	0
70	7,3	-1,3	0,4
80	6,6	-0,7	0,6
90	3,4	-3,2	-2,5
100	2,5	-0,9	2,3
110	1,8	-0,7	0,2
120	1,2	-0,6	0,1
130	0,5	-0,7	-0,1

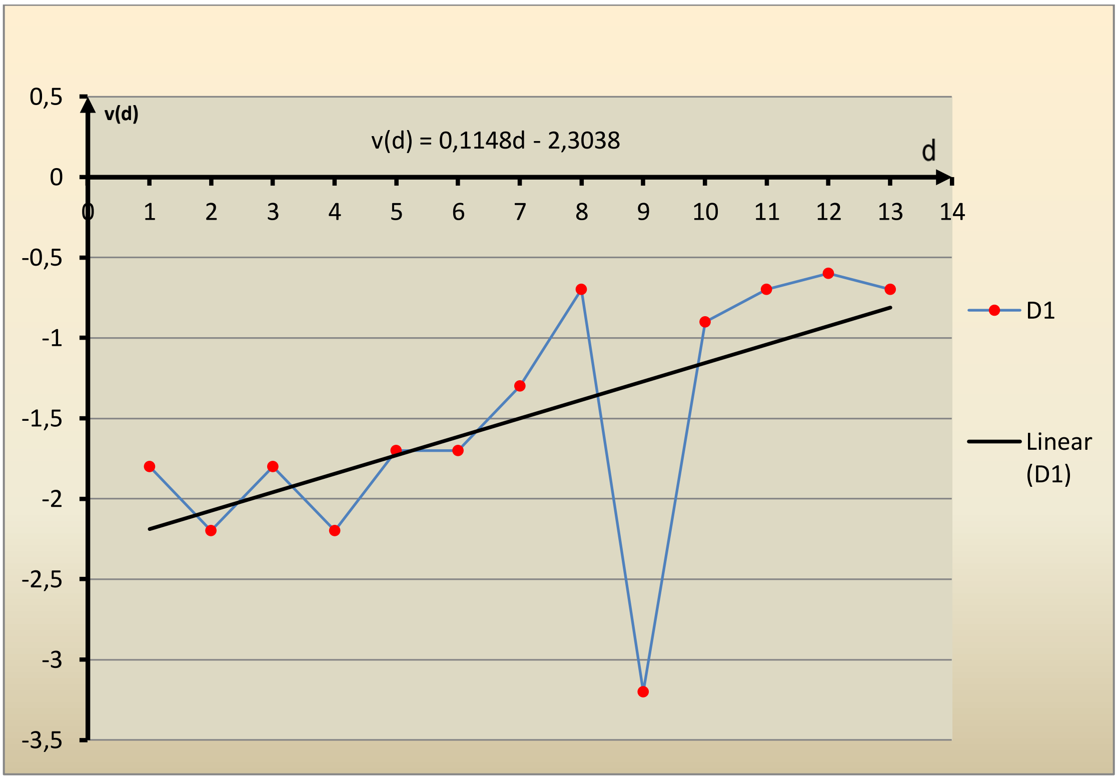


Gráfico 30: Gráfico da variação das diferenças que foi considerado "esquisito"

O grupo refez o experimento obtendo um resultado bem mais satisfatório.

5.6 Demonstração da propriedade das funções quadráticas

Conforme havíamos combinado com os alunos na aula seguinte procedemos a demonstração da propriedade das funções quadráticas. Infelizmente nenhum aluno conseguiu demonstrar.

Segue a demonstração que fizemos com os alunos das segundas e terceiras séries do ensino médio. A demonstração foi elaborada previamente e mostrada usando-se um projetor e eventualmente usando-se a lousa para explicações adicionais. Tal procedimento foi necessário para que fosse possível desenvolver o conteúdo em uma única aula de 50 minutos.

"Se $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\mathcal{R}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ é uma função quadrática arbitrária e $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ é uma progressão aritmética qualquer então a sequência $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ dos valores $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3)$, etc..., goza da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3 \ldots$ formam uma progressão aritmética".

Observação: A sequência $y_1, y_{2,}y_{3,}y_4, \ldots$ em que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3, \ldots$ formam uma progressão aritmética é chamada de progressão aritmética de segunda ordem.

Demonstração:

Consideremos a progressão aritmética com primeiro termo igual a k e cuja razão é r para evitarmos a constante colocação de índices e de modo que tenhamos:

$$(x_1, x_{2,}x_{3,}x_4, \ldots) = (k, k + r, k + 2r, k + 3r, \ldots)$$

e, consequentemente:

$$(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots) = (f(k), f(k + r), f(k + 2r), \ldots)$$

Calculemos $f(k), f(k + r), f(k + 2r), f(k + 3r), f(k + 4r), \ldots$

$f(k) = ak^2 + bk + c$

$f(k + r) = a(k + r)^2 + (k + r)b + c = ak^2 + 2akr + ar^2 + bk + br + c$

$d_1 = f(k + r) - f(k) = 2akr + ar^2 + br$

$f(k + 2r) = a(k + 2r)^2 + (k + 2r)b + c = ak^2 + 4akr + 4ar^2 + bk + 2br + c$

$d_2 = f(k + 2r) - f(k + r) = 2akr + 3ar^2 + br = (2akr + ar^2 + br) + 1.2ar^2$

$f(k + 3r) = a(k + 3r)^2 + (k + 3r)b + = ak^2 + 6akr + 9ar2 + bk + 3br + c$

$d_3 = f(k + 3r) - f(k + 2r) = 2akr + 5ar2 + b = (2akr + ar^2 + br) + 2.2ar^2$

$f(k + 4r) = a(k + 4r)^2 + (k + 4r)b\ c = ak^2 + 8akr + 16ar^2 + bk + 4br + c$

$d_4 = 2akr + 5ar^2 + br = (2akr + ar^2 + br) + 3.2ar^2$

Até aqui verificamos que d_1, d_2, d_3, d_4 estão em progressão aritmética onde o primeiro termo é $2akr + ar^2 + br$ e cuja razão é $2ar^2$. Precisamos, todavia, mostrar que qualquer que seja d_n, ele faz parte da P.A., ou seja, d_n é $da\ forma$:

$$d_n = 2akr + ar^2 + br + (n - 1).2ar^2$$

Para comprovarmos o que está acima calculemos

$$d_n = f(k+nr) - f[k+(n-1)r]$$

Calculamos separadamente

$f(k+(n-1)r) = a(k+(n-1)r)^2 + (k+(n-1)r)b + c =$

$= ak^2 + 2(n-1)akr + (n-1)^2ar^2 + bk + (n-1)br + c =$

$= ak^2 + 2nakr - 2akr + (n^2-2n+1)ar^2 + bk + (n-1)br + c =$

$= ak^2 + 2nakr - 2akr + an^2r^2 - 2nar^2 + ar^2 + bk + nbr - br + c =$

$f(k+nr) = a(k+nr)^2 + (k+nr)b + c = ak^2 + 2nakr + an^2r^2 + bk + nbr + c$

$d_n = f(k+nr) - f(k+(n-1)r) = 2ak + 2nar^2 - ar^2 + br$

Somando e subtraindo ar^2 obtemos

$d_n = 2ak + ar^2 + br + 2nar^2 - 2ar^2 = 2ak + ar^2 + br + (n-1).2ar^2$

Está provado que $d_1, d_2, d_3, d_{4,}$ ... estão em progressão aritmética.

Nossa tarefa ainda não está terminada, ainda temos que provar que se a sequência $y_1, y_{2,} y_{3,} y_4, \ldots$ é uma Progressão Aritmética de segunda ordem, ou seja, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, etc..., goza da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1$ $d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3 \ldots$ formam uma progressão aritmética então existem números reais A, B e C, tais que $\boldsymbol{y_n = An^2 + Bn + C}$ para todo n natural.

Observemos que se as diferenças sucessivas

$d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3 \ldots, d_n = y_{n+1} - y_n, \ldots$

formam uma P.A. ordinária cujo primeiro termo é $d_1 = y_2 - y_1$, se chamarmos a razão de r, como é usual, seu n-ésimo termo será dado por

$$d_n = y_{n+1} - y_n = d_1 + (n-1)r$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ temos:

$(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_{n+1} - y_n) = d_1 + (d_1 + r) + (d_1 + 2r) + \cdots + [d_1 + (n-1)r]; y_{n+1} - y_1 = nd_1 + [r + 2r + 3r + 4r + \cdots (n-1)r] = nd_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$

$y_{n+1} = nd_1 + \frac{n(n-1)}{2}r + y_1$, para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais.

Quando $n = 0$ a igualdade também se verifica, pois obtemos $y_1 = y_1$, logo podemos escrever que:

$y_n = (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r + y_1$

$y_n = nd_1 - d_1 + \frac{n^2 r - 3rn + 2r}{2} + y_1$

$y_n = nd_1 - d_1 + \frac{n^2 r}{2} - \frac{3rn}{2} + r + y_1$

Escrevendo a equação segundo as potências decrescentes de n encontramos:

$y_n = \frac{r}{2}n^2 + (d_1 - \frac{3r}{2})n + r - d_1 + y_1$, para todo n natural.

Fazendo $A = \frac{r}{2}, B = d_1 - \frac{3r}{2}$ e $C = r - d_1 + y_1$ obtemos a função quadrática

$$\boldsymbol{y_n = An^2 + Bn + C}$$

que era o que queríamos provar inicialmente.

Pelo exposto, podemos concluir que se em nosso experimento de escoamento as diferenças sucessivas $d_1 = h_2 - h_1, d_2 = h_3 - h_2, d_3 = h_4 - h_3 \ldots, d_{n-1} = h_n - h_{n-1}, \ldots$ forem termos de uma P.A. então cada elemento da sequência $h_1, h_2, h_3, \ldots$ representa, respectivamente, a imagem de $t_1, t_2, t_3, \ldots$ pela função

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\mathcal{R}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}} \text{ definida por } \boldsymbol{h(t) = At^2 + Bt + C},$$

e que os pares (t_i, h_i), $i = 1, 2, 3, \ldots n$ representam pontos de uma parábola.

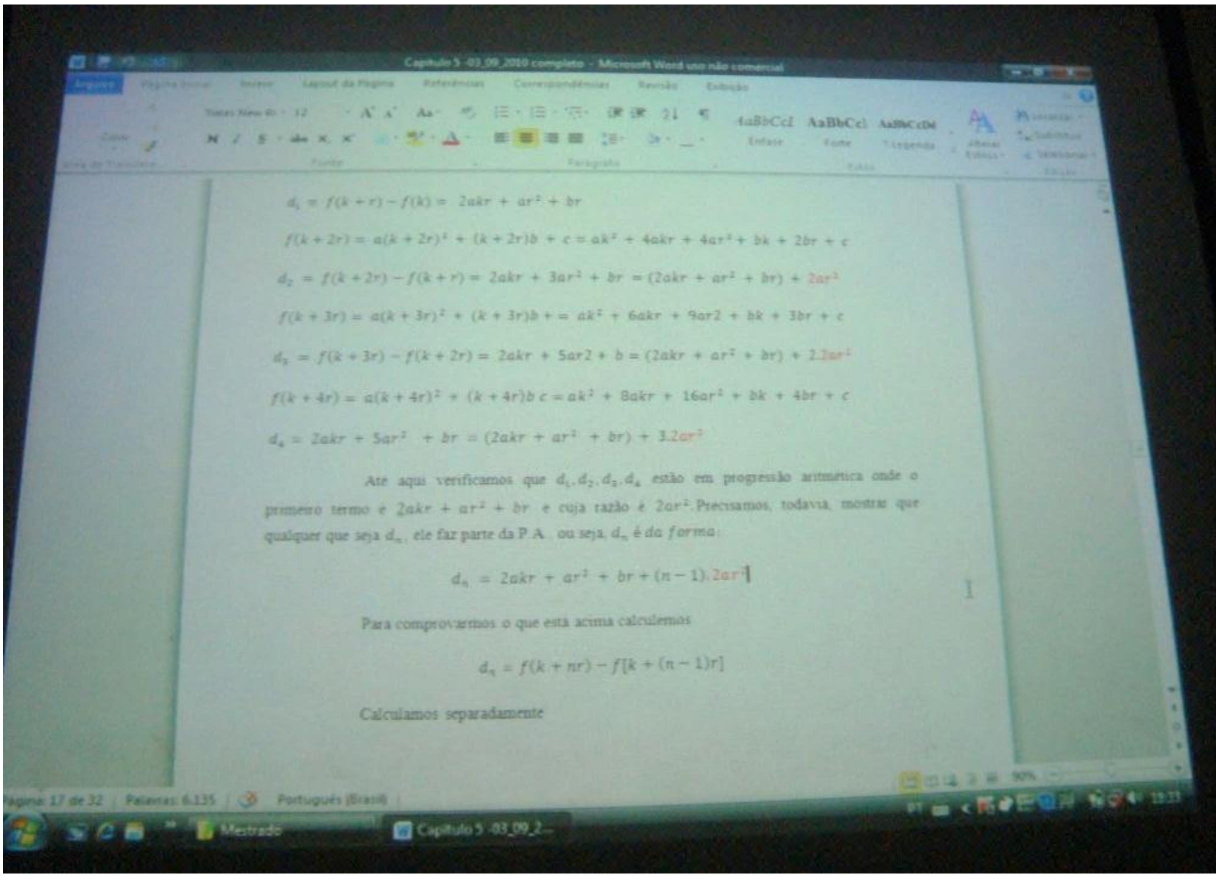


Foto27: Foto da demonstração apresentada na sala de vídeo

É claro que nos experimentos realizados as diferenças não são termos de uma P.A. mas os valores são bastante próximos. Talvez, se dispuséssemos de condições ideais em um laboratório, poderíamos encontrar valores bem mais precisos. Mesmo assim, nos permitimos concluir que a função quadrática é uma boa função que modela o escoamento.

5.7 Resultado obtido por alguns grupos.

Esclarecemos que combinamos com os grupos que os gráficos que fossem utilizados na presente dissertação seriam ajustados à folha. Para que houvesse um padrão ficou acertado com os grupos que a cor interna seria "sólida" e a externa "gradiente".

Experimento 1 - Grupo 6 da terceira série A do ensino médio

Iniciamos por este grupo por ter sido o primeiro a nos entregar o resultado e por ter a preocupação de nos explicar um pouco do que estavam fazendo. As partes que estiverem em Itálico foram relatadas pelo grupo.

Experimento realizado com uma garrafa Pet de 2 litros, com 10 cm de diâmetro, pelos alunos do grupo 6 da 3ª série A do ensino Médio da Escola Municipal Adelino Bordignon da cidade de Matão. O furo feito na garrafa foi de 4 mm.

Após a realização do experimento obtivemos os seguintes dados.

Tabela 12: Tabulação de todos os dados obtidos pelo grupo 6 com a realização do Experimento e já com as diferenças D1 e D2 conforme foi solicitado.

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
h(t)	20	17,7	15,6	13,8	11,9	10,2	8,7	7,3	6	4,8	3,8	3	2,1	1,6	1,1	0,8
D 1		-2,3	-2,1	-1,8	-1,9	-1,7	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1	-0,8	-0,9	-0,5	-0,5	-0,3
D 2			0,2	0,3	-0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	-0,1	0,4	0	0,2

Podemos ver que a diferença D2 é quase constante e pelo que aprendemos a função quadrática pode ser uma boa função para modelar o escoamento. Faremos o gráfico da variação das diferenças (D1) para podermos "enxergar" como os pontos estão dispersos em relação a uma reta de tendência, visto que a diferença D1 nos deve fornecer os termos de uma progressão aritmética.

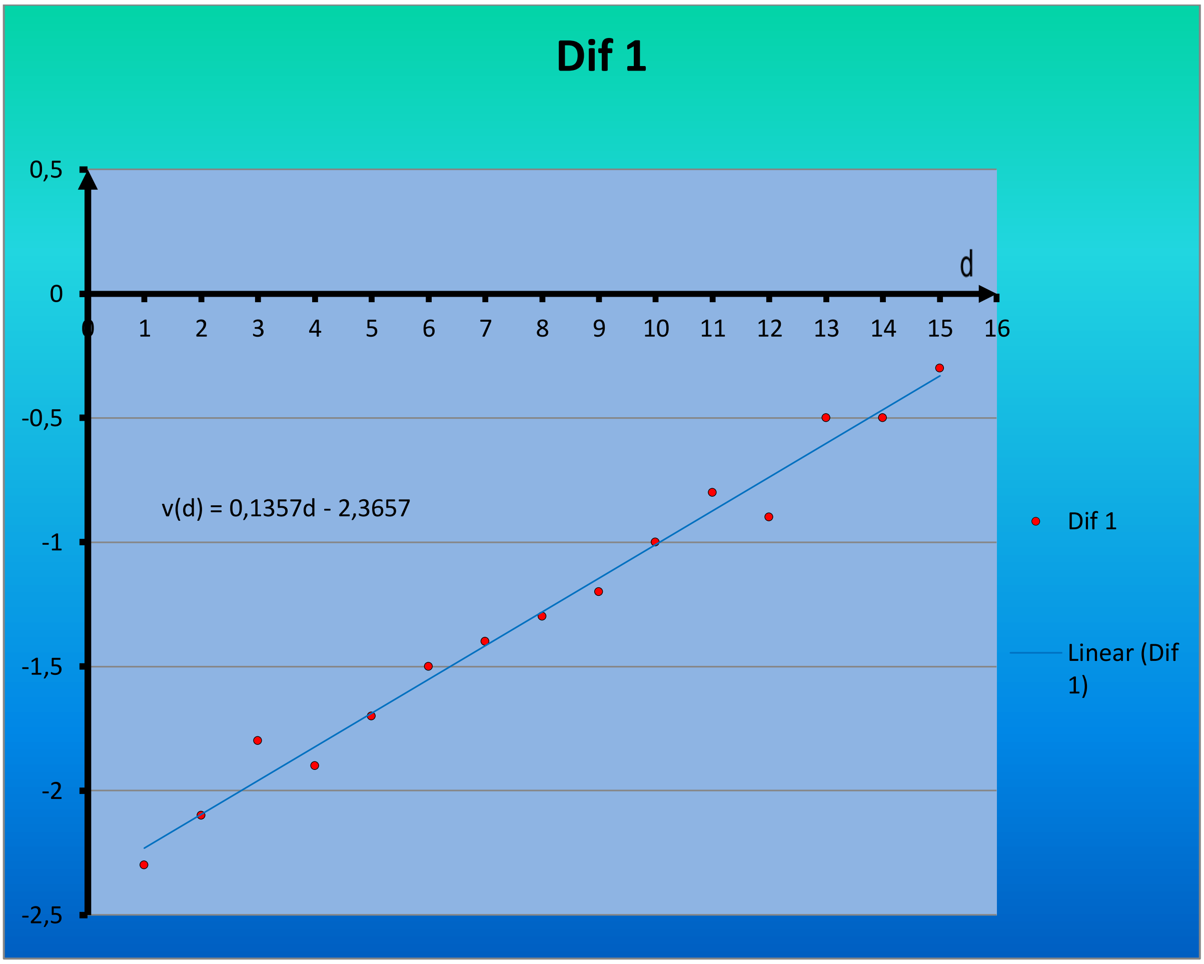


Gráfico 31: Gráfico das diferenças e função linear que fornece a variação das diferenças- *grupo 6 da 3ª série A*

Verificamos que existe uma linha de tendência para a qual a dispersão não é tão grande. É possível perceber que os pontos 3 e 12 são os que estão mais dispersos em relação a linha de tendência, mas não muito, e isso pode ser devido a alguma falha na hora da leitura. Queremos lembrar que o experimento foi realizado na primeira aula e estava muito frio. Nas fotos em que os alunos aparecem eles estão bem agasalhados e um deles está de luva. O frio foi um fator que dificultou as medições. Aproveitamos este primeiro trabalho, que foi um dos melhores, para colocarmos algumas observações que julgamos oportunas e importantes, aproveitando, em parte, para iniciarmos a última fase da Engenharia Didática que é a Análise *a posteriori* e validação do experimento.

Colocamos os dados discretos da tabela num sistema cartesiano. Usamos um papel milimetrado e obtivemos a curva passando por eles.

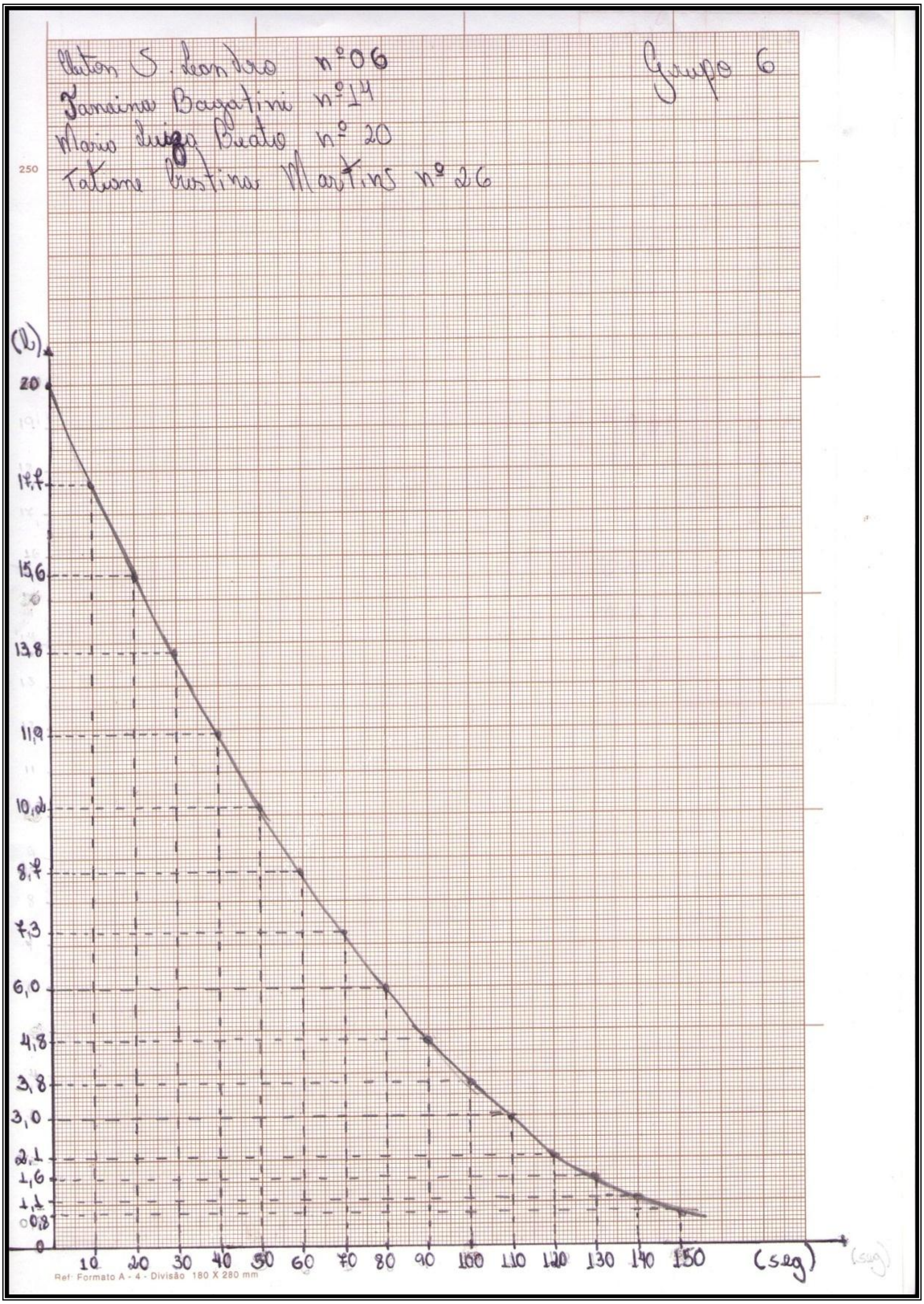


Gráfico 32: Gráfico realizado em papel milimetrado pelo grupo 6 da 3ª série A

Com o Excel obtivemos o gráfico da variação da altura em função do tempo, bem como a equação que modela o experimento.

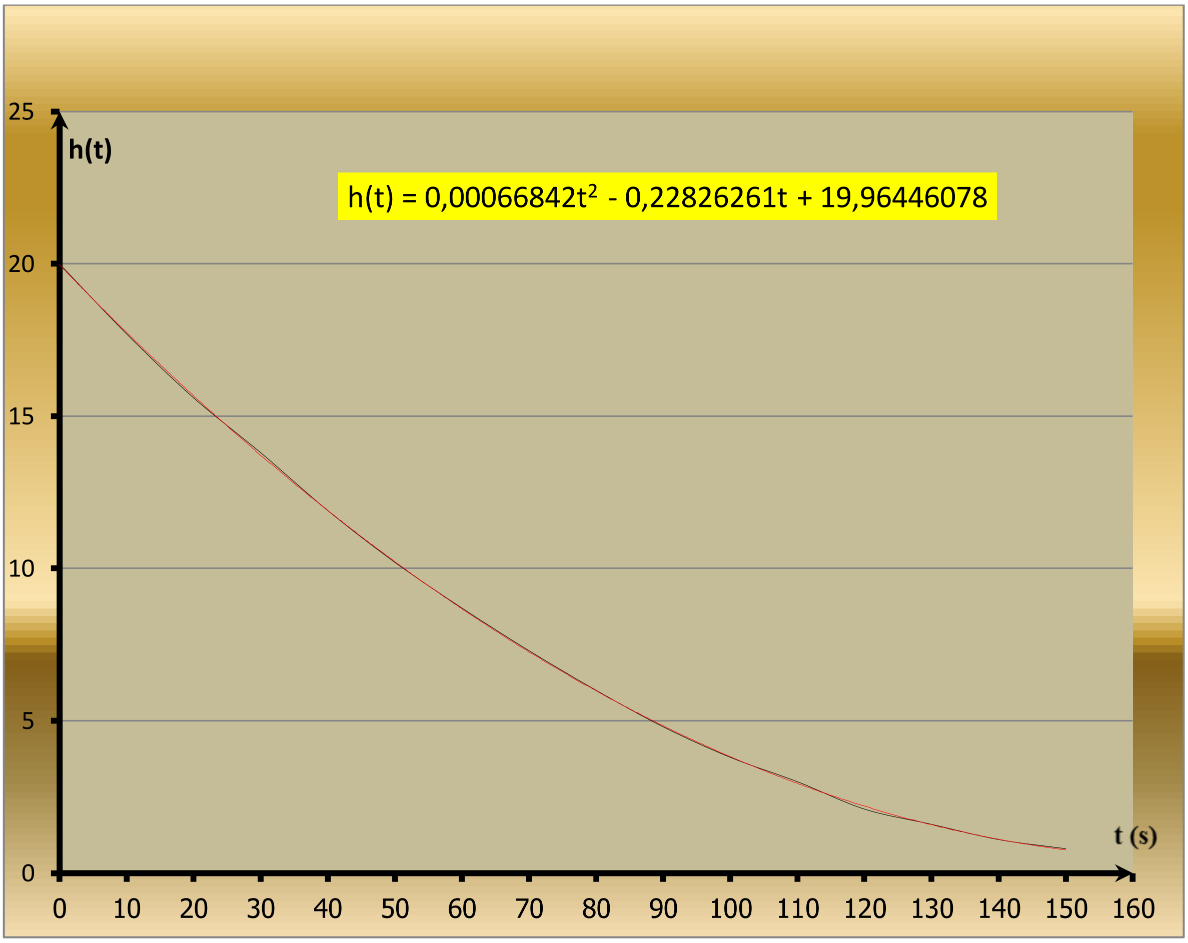


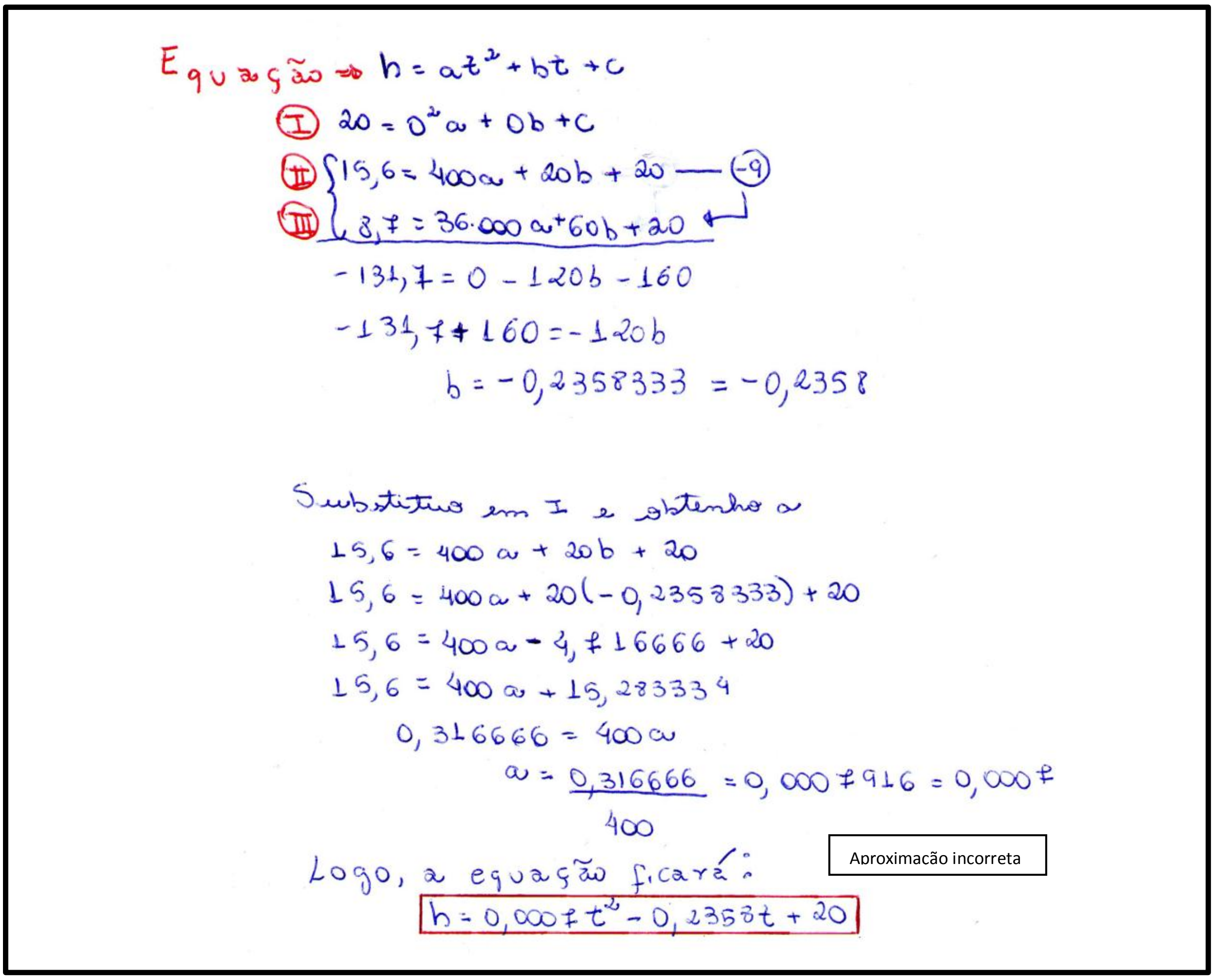
Gráfico 33: Gráfico idêntico ao 32 feito pelo grupo 6 da 3ª série A com o Excel.

Apesar do Excel fornecer o gráfico e a função, ele, ou qualquer outro software não é imprescindível. O importante é que o aluno compreenda o que está fazendo. Nesse sentido é que incentivamos o aluno a construir o gráfico usando um papel milimetrado e a resolver um sistema de equações para obter a função que modela o experimento; pode, assim, comprovar a importância da resolução de sistemas lineares. O computador é útil, contudo, a matemática pode muito bem ser aprendida e compreendida sem seu uso. O Excel consegue nos dar uma função mais próxima do real em virtude de utilizar o procedimento dos Mínimos Quadrados, que não é, ainda, do conhecimento dos alunos do ensino médio. Permite ainda que as informações sejam processadas instantaneamente ganhando-se um tempo precioso que pode ser utilizado na realização de outras atividades que o computador ainda não consegue fazer. Se o uso de algum software, todavia, apenas servir para que desenvolvamos mais rapidamente os conteúdos sem que haja total compreensão por parte do estudante então é necessário que repensemos o seu uso.

Conforme combinado com os alunos eles obtiveram a função sem uso de software.

Segue a obtenção da função que modela o escoamento.

Inicialmente o grupo escolheu os pontos: (0; 20) (20; 15,6) e (60; 8,7). Resolveram o sistema



Equação ⇒ $h = at^2 + bt + c$

(I) $20 = 0^2a + 0b + c$

(II) $15{,}6 = 400a + 20b + 20$ —— (−9)

(III) $8{,}7 = 36.000a + 60b + 20$

$-131{,}7 = 0 - 120b - 160$

$-131{,}7 + 160 = -120b$

$b = -0{,}2358333 = -0{,}2358$

Substituo em I e obtenho a

$15{,}6 = 400a + 20b + 20$

$15{,}6 = 400a + 20(-0{,}2358333) + 20$

$15{,}6 = 400a - 4{,}716666 + 20$

$15{,}6 = 400a + 15{,}283334$

$0{,}316666 = 400a$

$a = \dfrac{0{,}316666}{400} = 0{,}0007916 = 0{,}0007$

Aproximação incorreta

Logo, a equação ficará:

$\boxed{h = 0{,}0007t^2 - 0{,}2358t + 20}$

Ilustração 4: Digitalização da resolução do sistema de equações feita pelo grupo 6 da 3ª série A

Depois que o grupo 6 já havia entregue é que perceberam um erro na aproximação. No mesmo dia, à noite, me enviaram um e-mail informando sobre o erro.

Professor, depois de conferirmos percebemos que a aproximação que fizemos não estava correta. Favor considerar a função correta que é:.

$$h(t) = 0,0007916t^2 - 2,2358\, t + 20$$

A escolha do ponto (0, 20) facilita a resolução, em especial para os alunos da primeira série do ensino médio ou da oitava série do Ensino fundamental.

A partir da segunda série do ensino médio não há a necessidade de se escolher o ponto (0, 20), sua escolha, no entanto, possibilita a comparação dos resultados.

Nesse experimento, para escolhermos três pontos teríamos um total de 560 combinações de 16 elementos 3 a 3. Cada grupo pode escolher algumas combinações e verificar se as funções apresentam valores próximos para os coeficientes da variável t.

O grupo 6 escolheu os pontos: (30; 13,8) ; (90; 4,8) , (120; 2,1) e resolveu o sistema abaixo.

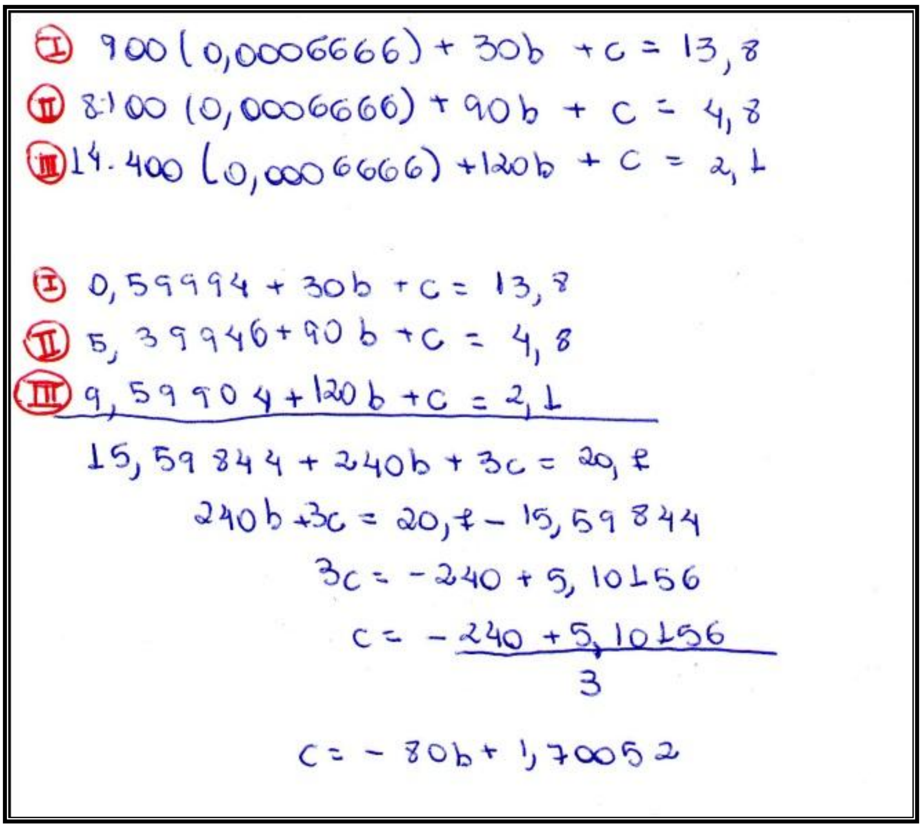
$$\text{I} \quad 900a + 30b + c = 13{,}8$$
$$c = -900a - 30b + 13{,}8$$
$$\text{II} \quad 8100a + 90b - 900a - 30b + 13{,}8 = 4{,}8 \quad (-)$$
$$\text{III} \quad \underline{14.400a + 120b - 900a - 30b + 13{,}8 = 2{,}1}$$
$$-8.100a - 90b + \cancel{900a} + \cancel{30b} - \cancel{13{,}8} = -4{,}8$$
$$\underline{14.400a + 120b - \cancel{900a} - \cancel{30b} + \cancel{13{,}8} = 2{,}1}$$
$$6.300a + 30b = -2{,}7$$
$$30b = -6.300a - 2{,}7$$
$$b = \frac{-6.300a - 2{,}7}{30}$$
$$b = -210a - 0{,}09$$

Ilustração 5: Digitalização- Continuação 1 da resolução dos sistema de equações do grupo 6 da 3ª série A.

Substituindo em II, obtenho a

$$8100a + 90(-210 - 0{,}09) - 900a - 30(-210 - 0{,}09) + 13{,}8 = 4{,}8$$
$$8.100a - 18.900a - 8{,}1 - 900a + 6.300a + 2{,}7 + 13{,}8 = 4{,}8$$
$$8.100a - 18.900a - 900a + 6.300a = 4{,}8 + 8{,}1 - 2{,}7 - 13{,}8$$
$$14.400a - 19.800a = -16{,}5 + 12{,}9$$
$$-5.400a = -3{,}6$$
$$a = 0{,}000666$$

Ilustração 6: Digitalização- Continuação 2 da resolução dos sistema de equações do grupo 6 da 3ª série A.



I $900(0,0006666) + 30b + c = 13,8$

II $8100(0,0006666) + 90b + c = 4,8$

III $14.400(0,0006666) + 120b + c = 2,1$

I $0,59994 + 30b + c = 13,8$

II $5,39946 + 90b + c = 4,8$

III $9,59904 + 120b + c = 2,1$

$15,59844 + 240b + 3c = 20,7$

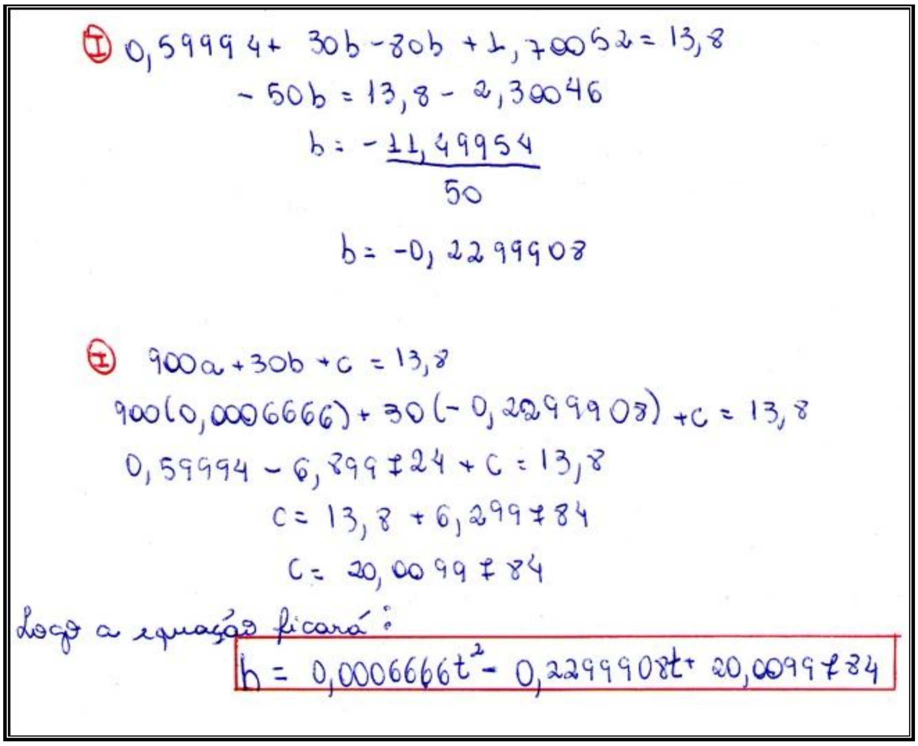
$240b + 3c = 20,7 - 15,59844$

$3c = -240 + 5,10156$

$c = -\frac{240 + 5,10156}{3}$

$c = -80b + 1,70052$

Ilustração 7: Digitalização- Continuação 1 da resolução dos sistema de equações do grupo 6 da 3ª série A.



I $0,59994 + 30b - 80b + 1,70052 = 13,8$

$-50b = 13,8 - 2,30046$

$b = -\frac{11,49954}{50}$

$b = -0,2299908$

I $900a + 30b + c = 13,8$

$900(0,0006666) + 30(-0,2299908) + c = 13,8$

$0,59994 - 6,899724 + c = 13,8$

$c = 13,8 + 6,299784$

$c = 20,099784$

Logo a equação ficará:

$\boxed{h = 0,0006666t^2 - 0,2299908t + 20,099784}$

Ilustração 8: Digitalização- Continuação 1 da resolução dos sistema de equações do grupo 6 da 3ª série A.

Colocamos, a seguir, algumas dessas funções obtidas com auxílio do Excel.

Tabela 13: Tabela comparativa entre as funções obtidas com diversas ternas de pontos.

Pontos	*Função*
(0; 20); (15; 20,6); (60; 8,7)	$h = 0{,}000791667x^2 - 0{,}235833x + 20{,}0$ *(obtida acima)*
(10; 17,7) ; (50; 10,2) ; (130; 1,6)	$h = 0{,}000667t^2 - 0{,}227500t + 19{,}908333$
(20; 15,6) ; (80; 6,0) ; (140; 1,1)	$h = 0{,}000653t^2 - 0{,}225278t + 19{,}844444$
(30; 13,8) ; (90; 4,8) , (120; 2,1)	$h = 0{,}0006667t^2 - 0{,}2300000t + 20{,}1000000$ *(Com Excel)*
Com todos os pontos	$\mathbf{h(t) = 0{,}00066842t^2 - 0{,}22826261t + 19{,}96446078}$ **(com Excel)**

Observamos que com exceção da função obtida usando-se o ponto (0, 20) os valores são bastante próximos. Professor, estamos convencidos de que realmente a função quadrática consegue explicar como ocorrem alguns fenômenos físicos. Foi legal fazer esse experimento. Alunos do grupo 6.

Gostamos muito do trabalho desenvolvido pelos alunos do grupo 6. Os gráficos foram muito bem feitos e, além de explicarem o que estavam fazendo também tiveram a preocupação de, mesmo depois do trabalho entregue, corrigir o erro feito na aproximação.

Nas fotos a seguir vemos alunos trabalhando em sala de aula, construindo gráficos, resolvendo sistemas, conferindo os resultados, comparando os trabalhos realizados, etc.

Foto 28: Alunos conferindo o gráfico feito no Excel.

Foto29: Aluna conferindo o gráfico discreto e a tabela de dados.

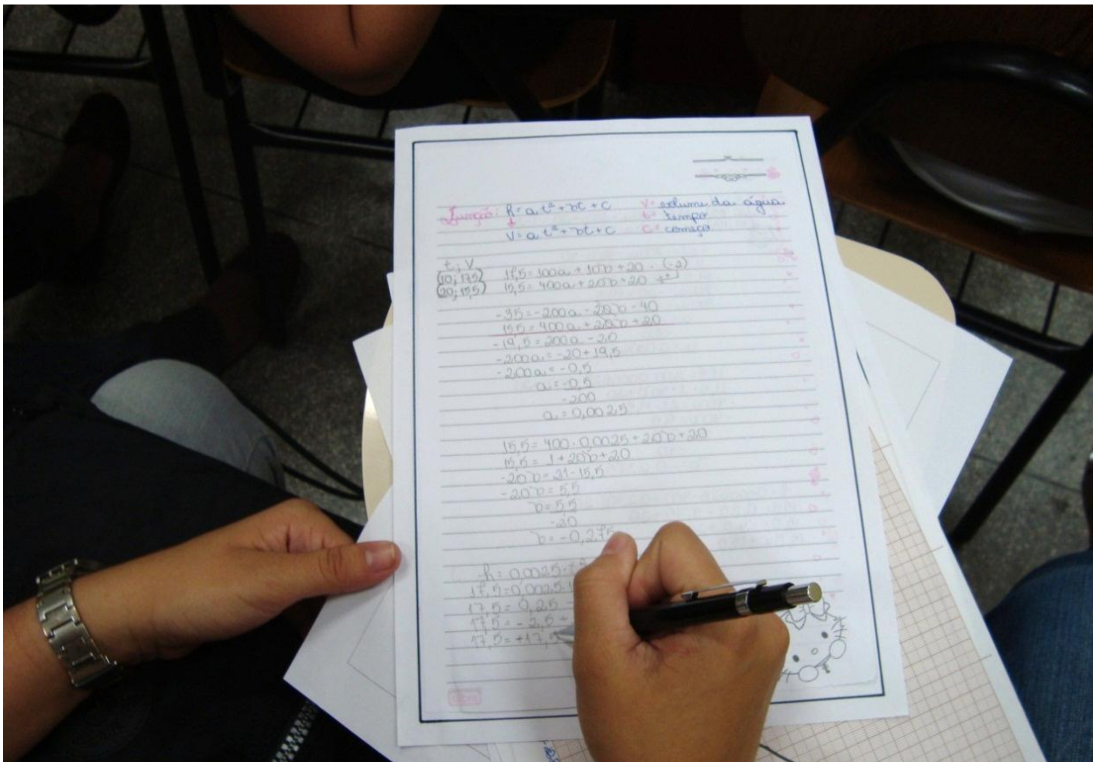


Foto30: Aluna resolvendo o sistema para obtenção da função quadrática

Foto 31: Alunos comparando os gráficos

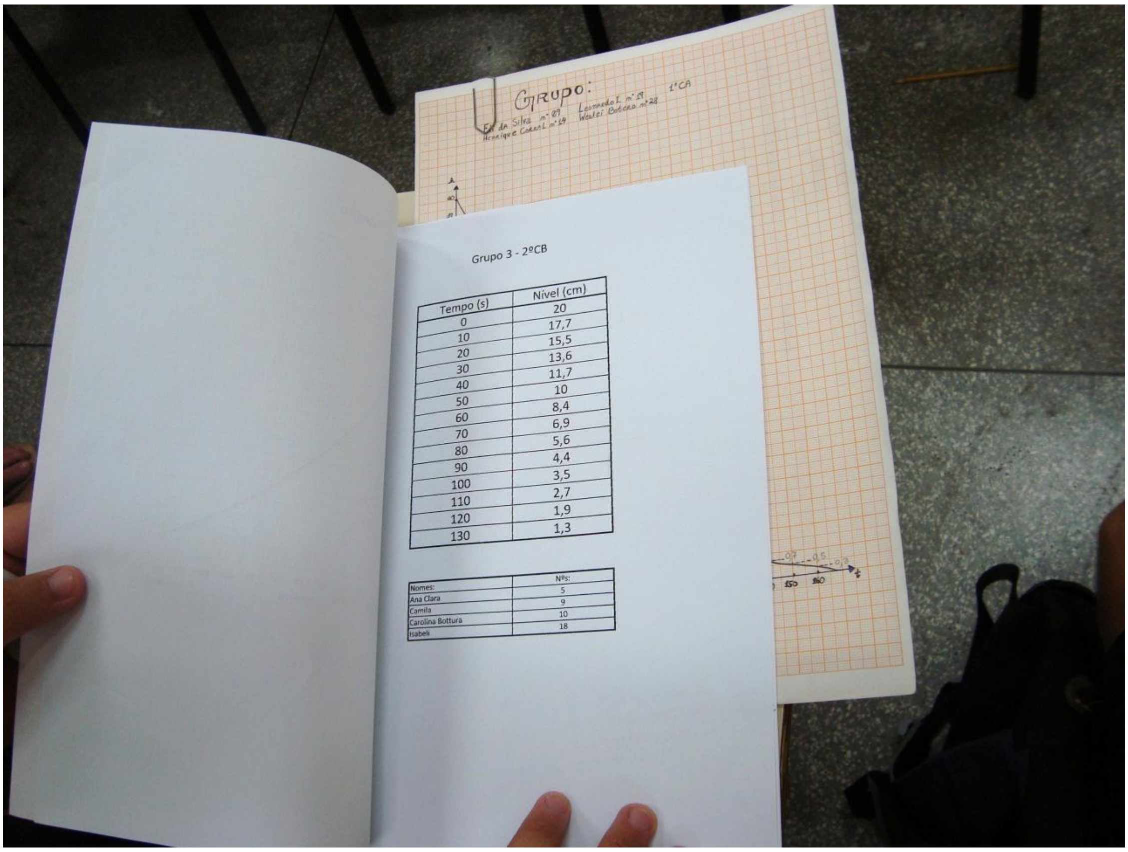


Foto 32: Aluno conferindo os trabalhos antes de entregar

Foto 33: Aluno conferindo a resolução do sistema

Foto 34: *Foto de Aluna, mostrando o trabalho realizado.*

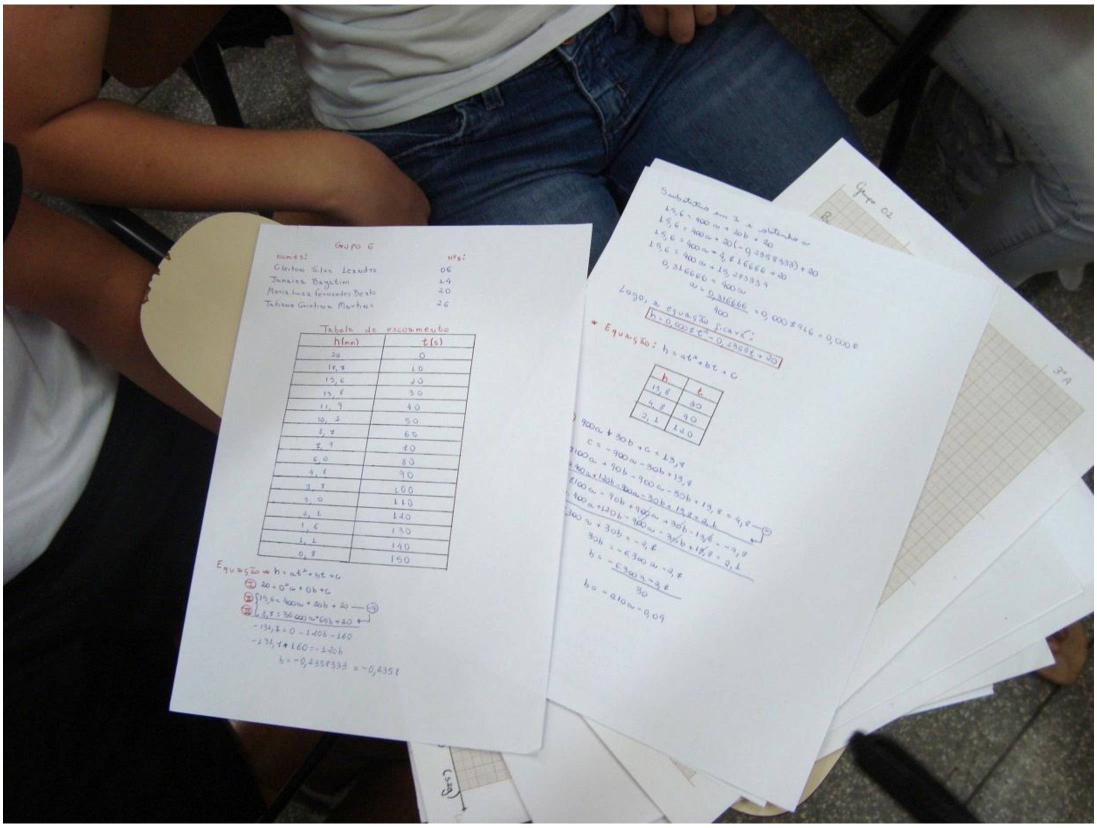


Foto 35: Foto da tabela e da resolução do sistema para a obtenção da função.

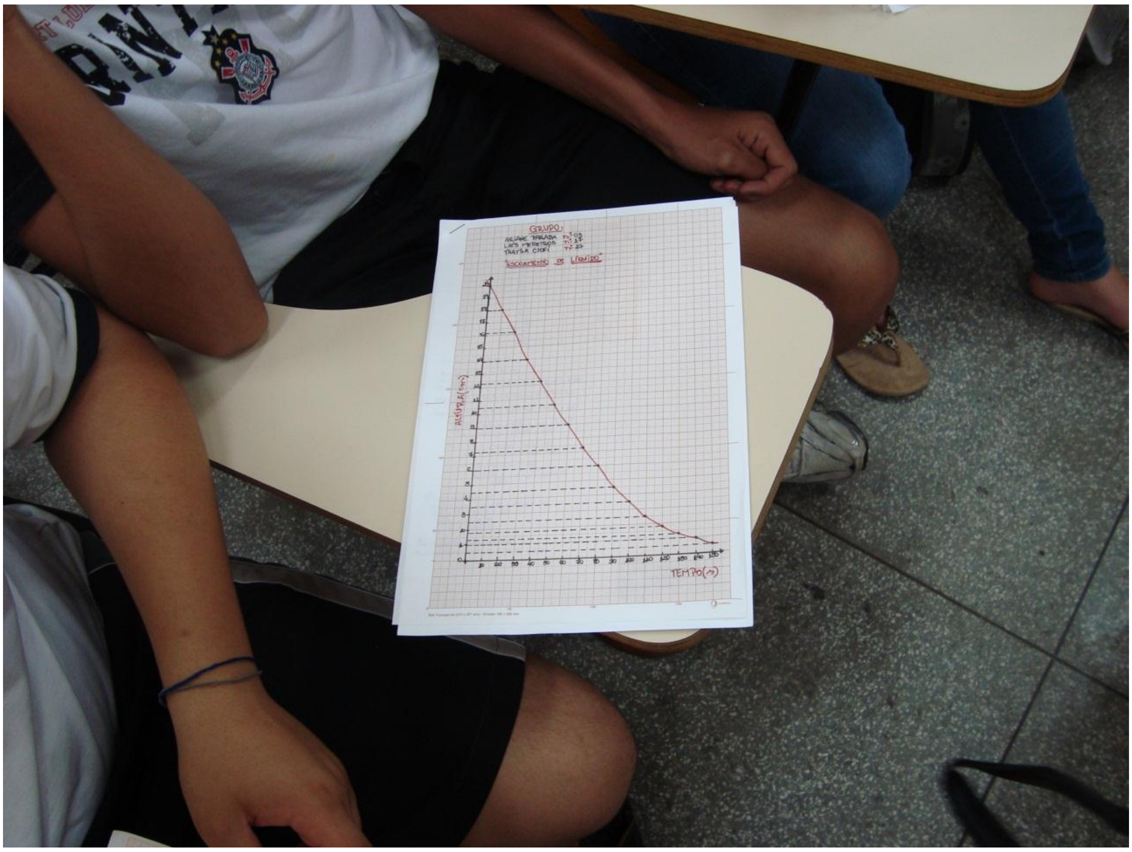
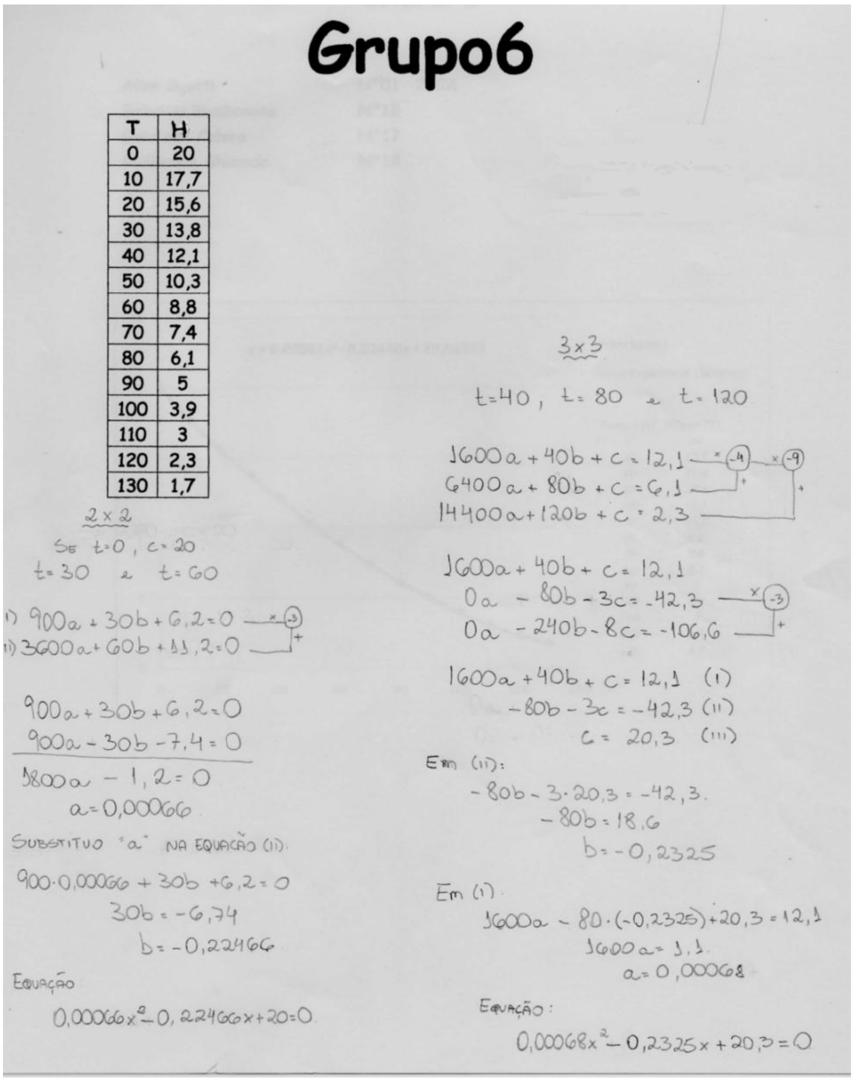


Foto36: Aluno mostrando o gráfico construído no papel milimetrado

Experimento 2 - Grupo 6 da segunda série A do ensino médio

Experimento realizado com uma garrafa Pet de 2 litros, com 10 cm de diâmetro, pelos alunos do grupo 6 da 2ª série A do ensino Médio da Escola Municipal Adelino Bordignon da cidade de Matão. O furo feito na garrafa foi de 4 mm. O que segue foi recebido dos alunos em papel e, em seguida, digitalizado pelo autor deste trabalho.



Grupo6

T	H
0	20
10	17,7
20	15,6
30	13,8
40	12,1
50	10,3
60	8,8
70	7,4
80	6,1
90	5
100	3,9
110	3
120	2,3
130	1,7

2 x 2

Se t=0, c=20

t=30 e t=60

I) $900a + 30b + 6,2 = 0$ × (-3)

II) $3600a + 60b + 11,2 = 0$ +

$900a + 30b + 6,2 = 0$

$900a - 30b - 7,4 = 0$

$1800a - 1,2 = 0$

$a = 0,00066$

Substituo "a" na equação (I).

$900 \cdot 0,00066 + 30b + 6,2 = 0$

$30b = -6,74$

$b = -0,22466$

Equação

$0,00066x^2 - 0,22466x + 20 = 0$

3 x 3

t=40, t=80 e t=120

$1600a + 40b + c = 12,1$ × (-4) × (-9)

$6400a + 80b + c = 6,1$ +

$14400a + 120b + c = 2,3$ +

$1600a + 40b + c = 12,1$

$0a - 80b - 3c = -42,3$ × (-3)

$0a - 240b - 8c = -106,6$ +

$1600a + 40b + c = 12,1$ (I)

$-80b - 3c = -42,3$ (II)

$c = 20,3$ (III)

Em (II):

$-80b - 3 \cdot 20,3 = -42,3$

$-80b = 18,6$

$b = -0,2325$

Em (I)

$1600a - 80 \cdot (-0,2325) + 20,3 = 12,1$

$1600a = 1,1$

$a = 0,00068$

Equação:

$0,00068x^2 - 0,2325x + 20,3 = 0$

Ilustração 9: Digitalização da resolução dos sistema de equações feita pelo grupo 6 da 2ª série A

Apesar do procedimento correto adotado pelos alunos constatamos mais uma vez como é forte o uso do "x" apesar de na tabela colocarem T e H e a confusão que eles fazem escrevendo a equação do 2º grau no lugar da função quadrática mesmo sabendo que o que querem é obter a função que modela o experimento e a tendo obtida com o Excel. Esse deslize não invalida o trabalho do grupo, pois eles se esforçaram e resolveram o sistema corretamente sem qualquer interferência do professor.

O correto é: **h(t) = 0,00066t^2-0,22466t+20 e h(t) = 0,00068t^2-0,2325t+20,3**.

Colocamos o que foi feito pelo grupo, antes dos esclarecimentos dados pelo autor deste trabalho. Abaixo está o gráfico e a função obtida com uso do Excel.

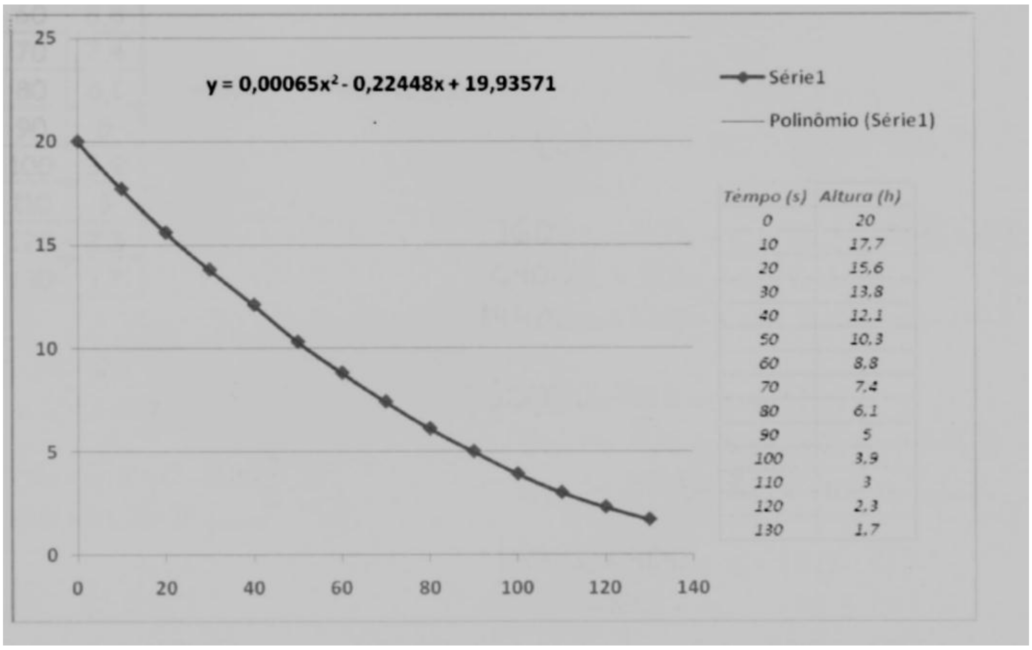


Gráfico 34: Gráfico Digitalizado obtido com Excel, Tabela e curva de tendência-2ª série A- grupo 6

Depois dos esclarecimentos dados pelo autor deste trabalho os alunos decidiram fazer o gráfico novamente colocando corretamente as informações. Esse simples fato nos mostra que o aluno gosta de fazer as "coisas" corretamente e o faz, basta que saibamos fazer nossas colocações de modo adequado. Além de corrigir o que haviam feito também fizeram o que foi solicitado. Abaixo temos a tabela com os dados obtidos

Tabela 14: tabela obtida pelo grupo 6 da 2ª série A do ensino médio.

T	H	D1	D2
0	20		
10	17,7	-2,3	
20	15,6	-2,1	0,2
30	13,8	-1,8	0,3
40	12,1	-1,7	0,1
50	10,3	-1,8	-0,1
60	8,8	-1,5	0
70	7,4	-1,4	0,1
80	6,1	-1,3	0,1
90	5	-1,1	0,2
100	3,9	-1,1	0
110	3	-0,9	0,2
120	2,3	-0,7	0,2
130	1,7	-0,6	0,1

O grupo fez novo gráfico, obteve nova função escrevendo-a de modo correto e concordou que ficou bem melhor. Um dos integrantes comentou: "*É, a gente é muito apressado*". Os gráficos a seguir mostram que os alunos gostam de fazer as coisas bem feitas. Os alunos trouxeram os gráficos num pen drive e o professor os copiou. Como eles estavam em preto e branco a cor foi decidida na hora pelo grupo.

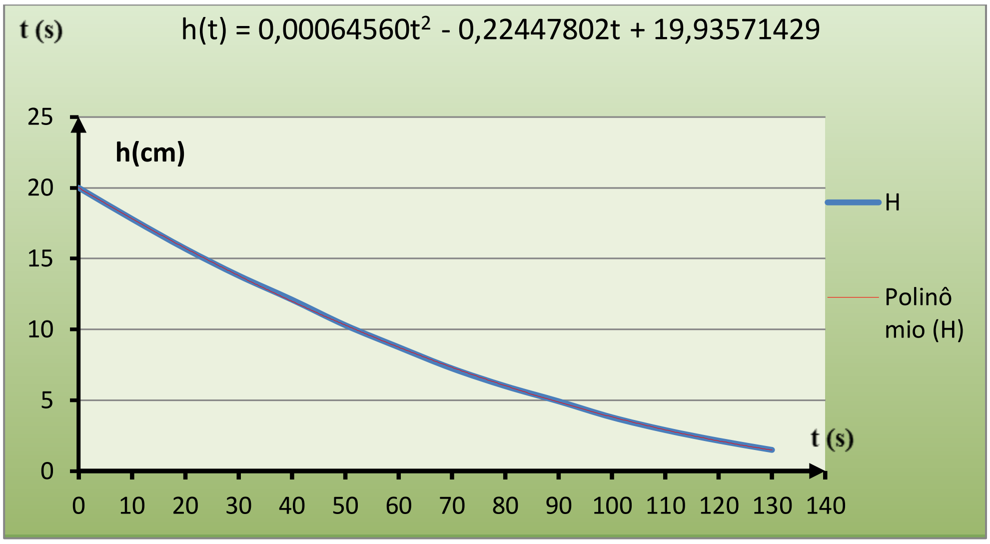


Gráfico 35: Curva de tendência e função obtida pelo grupo 6 da 2ª série A

Comparação entre as funções:

Manualmente **$h(t) = 0{,}00066t^2-0{,}22466t+20$ e $h(t) = 0{,}00068t^2-0{,}2325t+20{,}3$**.

Pelo Excel: **$h(t) = 0{,}00064560t^2 - 0{,}22447802t + 19{,}93571429$**

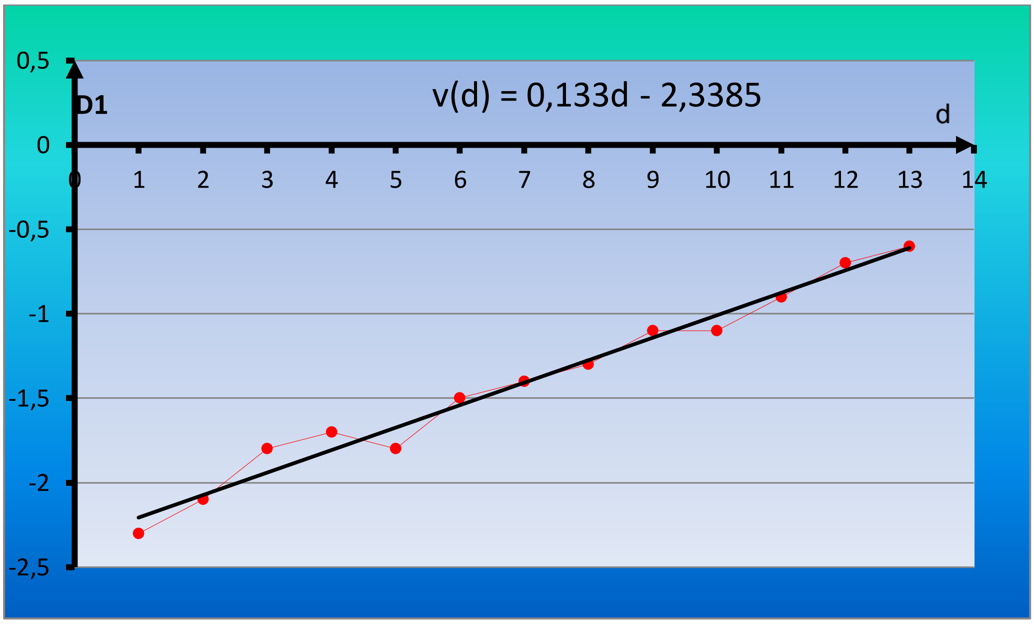


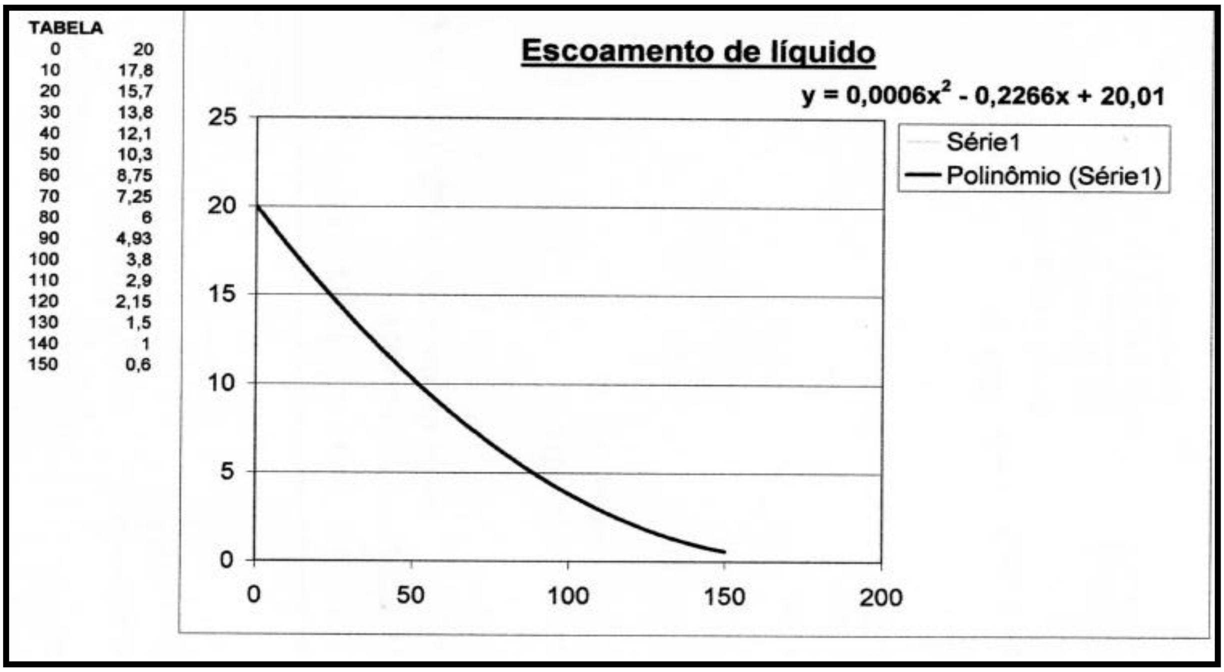
Gráfico 36: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças obtida pelo grupo 6 da 2ª série A

Observamos que a dispersão não é muito grande.

Experimento 3 - Grupo 2 da terceira série A do ensino médio

Experimento realizado com uma garrafa Pet de 2 litros, com 10 cm de diâmetro, pelos alunos do grupo 2 da 3ª série A do ensino Médio da Escola Municipal Adelino Bordignon da cidade de Matão. O furo feito na garrafa foi de 4 mm. O que segue foi recebido dos alunos em papel e digitalizado.

Inicialmente o grupo fez a tabela, o gráfico e obteve a função quadrática como segue. O grupo não teceu comentários sobre o trabalho.



TABELA

0	20
10	17,8
20	15,7
30	13,8
40	12,1
50	10,3
60	8,75
70	7,25
80	6
90	4,93
100	3,8
110	2,9
120	2,15
130	1,5
140	1
150	0,6

Gráfico 37: Gráfico digitalizado, tabela e curva de tendência obtida pelo grupo 2 da 3ª série A e

Resolução manual com uso dos pontos (0,20), (60; 8,75), (120; 2,15)

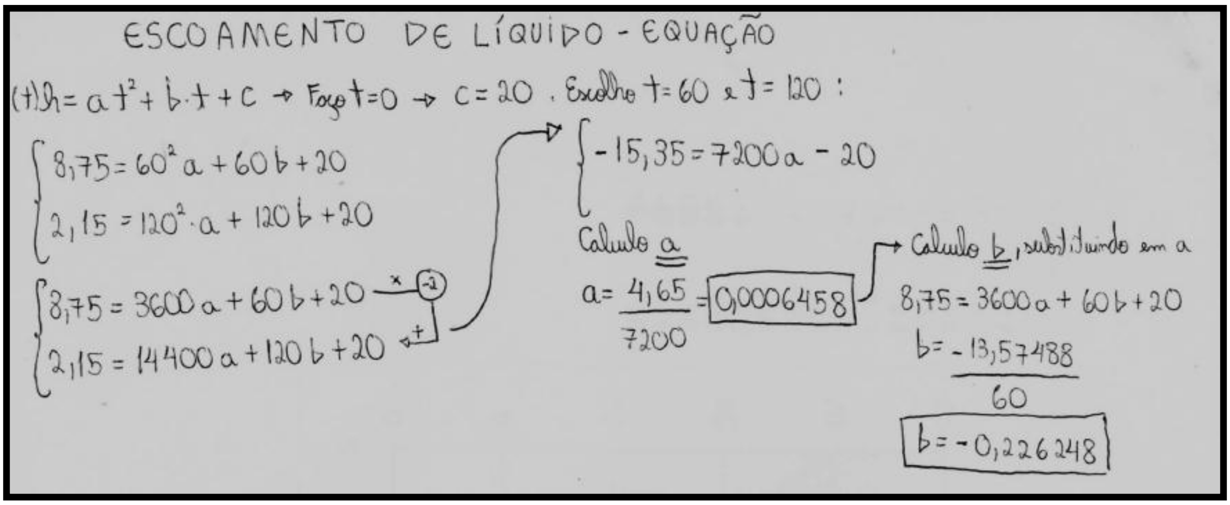
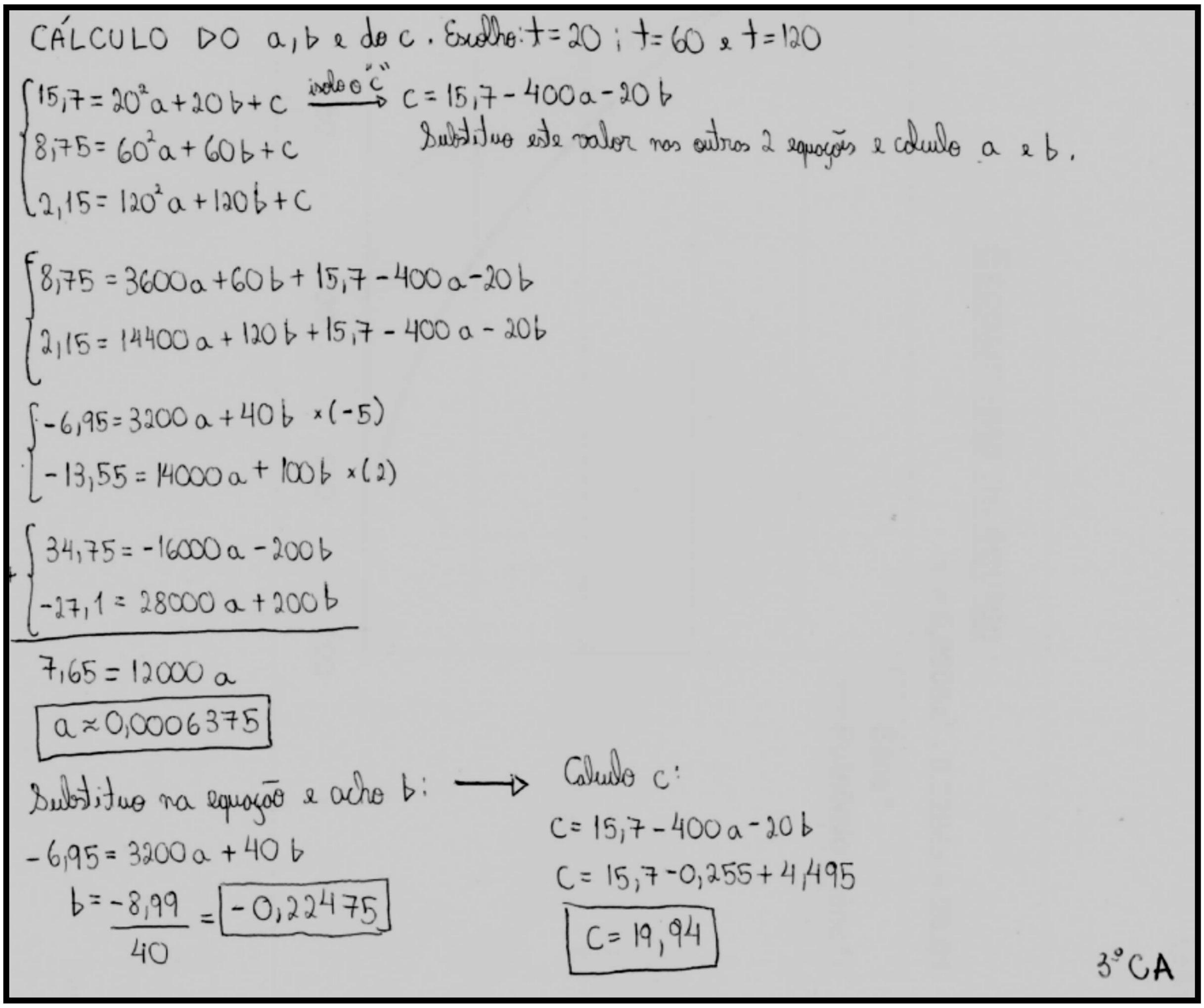


Ilustração 10: Digitalização da resolução dos sistema de equações. Grupo 2 da 3ª série A

Observamos que alguns grupos, assim como este, não colocaram a função, mesmo sabendo que era o que buscavam. Acreditamos, que apesar dos alunos estarem interessados, alguns não tem muita noção do que estão fazendo. Quando questionamos o grupo sobre o porque não haviam fornecido a expressão da função quadrática simplesmente disseram que haviam esquecido. O grupo também colocou (t) h, quando o correto, pelo menos segundo as convenções, é h(t). Como já dissemos, num primeiro momento não interferimos justamente para observarmos como os alunos realizariam as atividades, se estavam atentos, se todos os elementos do grupo participam ou se apenas um faz e os demais concordam ou nem sequer tomam conhecimento. Nossa pretensão não é, nem de longe, querer que nossos alunos façam tudo de modo perfeito, mas, esperamos que eles possam aprender com os erros cometidos.

Resolução manual com uso dos pontos (20,15,7), (60; 8,75), (120; 2,15)



CÁLCULO DO a, b e do c. Escolho: t = 20 ; t = 60 e t = 120

$$\begin{cases} 15{,}7 = 20^2a + 20b + c \xrightarrow{\text{isolo o "c"}} c = 15{,}7 - 400a - 20b \\ 8{,}75 = 60^2a + 60b + c \\ 2{,}15 = 120^2a + 120b + c \end{cases}$$

Substituo este valor nos outros 2 equações e calculo a e b.

$$\begin{cases} 8{,}75 = 3600a + 60b + 15{,}7 - 400a - 20b \\ 2{,}15 = 14400a + 120b + 15{,}7 - 400a - 20b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6{,}95 = 3200a + 40b \quad \times(-5) \\ -13{,}55 = 14000a + 100b \quad \times(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34{,}75 = -16000a - 200b \\ -27{,}1 = 28000a + 200b \end{cases}$$

$$7{,}65 = 12000a$$

$$\boxed{a \approx 0{,}0006375}$$

Substituo na equação e acho b: ⟶ Calculo c:

$$-6{,}95 = 3200a + 40b$$

$$b = \frac{-8{,}99}{40} = \boxed{-0{,}22475}$$

$$c = 15{,}7 - 400a - 20b$$

$$c = 15{,}7 - 0{,}255 + 4{,}495$$

$$\boxed{c = 19{,}94}$$

3ºCA

Ilustração 11: Digitalização- Continuação 1 da resolução dos sistema de equações do grupo 2 da 3ª série A.

Depois das explicações e das demonstrações o grupo fez o que foi pedido e escreveu corretamente a função obtida manualmente comparando-a com a obtida pelo Excel.

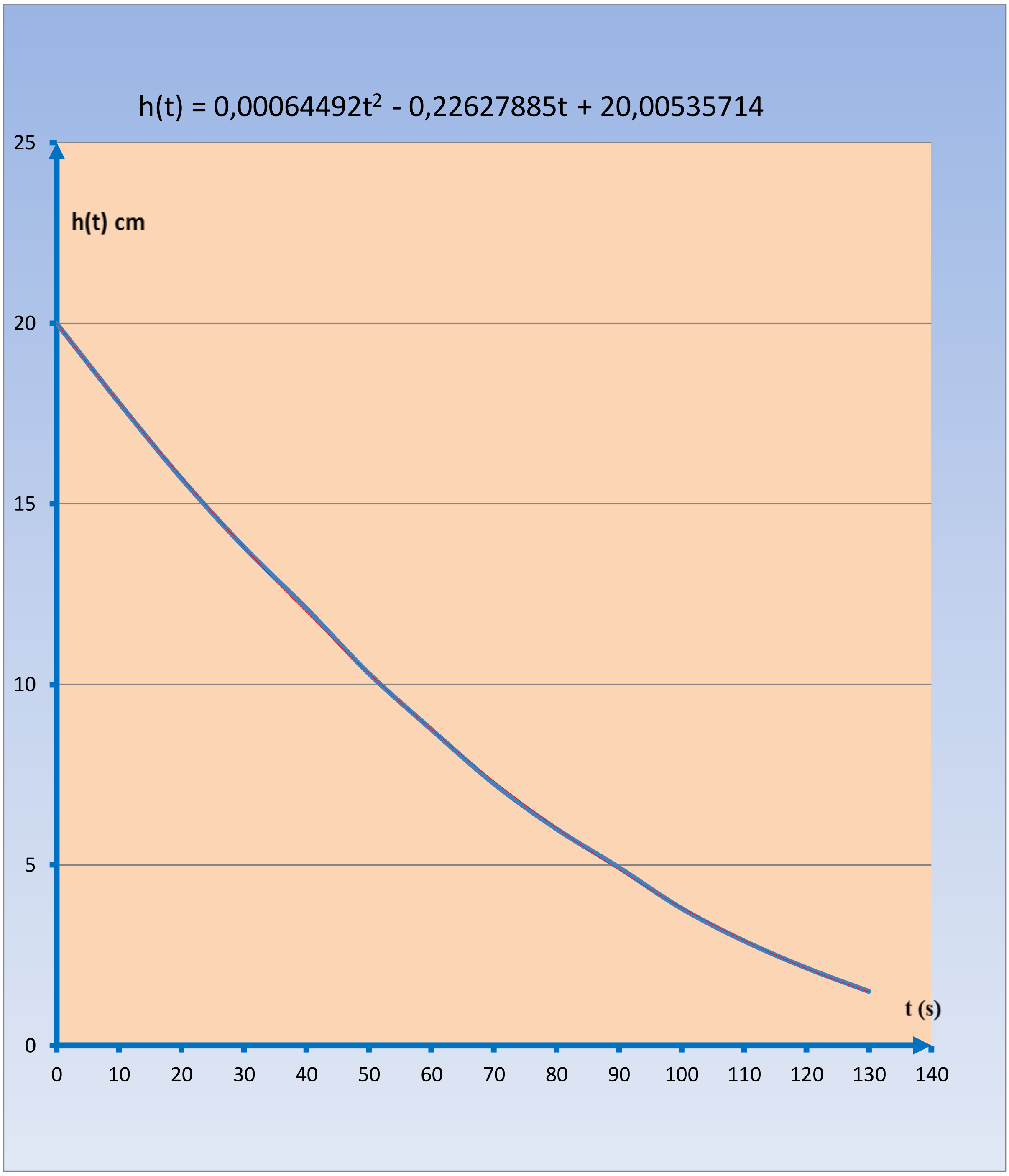


Gráfico 38: Gráfico e curva de tendência obtida pelo grupo 2 da 3ª série A com uso do Excel

Função obtida com Excel: $h(t) = 0{,}00064492t^2 - 0{,}22627885t + 20{,}00535714$

1ª Função obtida manualmente: $h(t)= 0{,}0006458t^2-0{,}226248t+20$

2ª Função obtida manualmente: $h(t)= 0{,}0006375t^2-0{,}22475t+19{,}94$

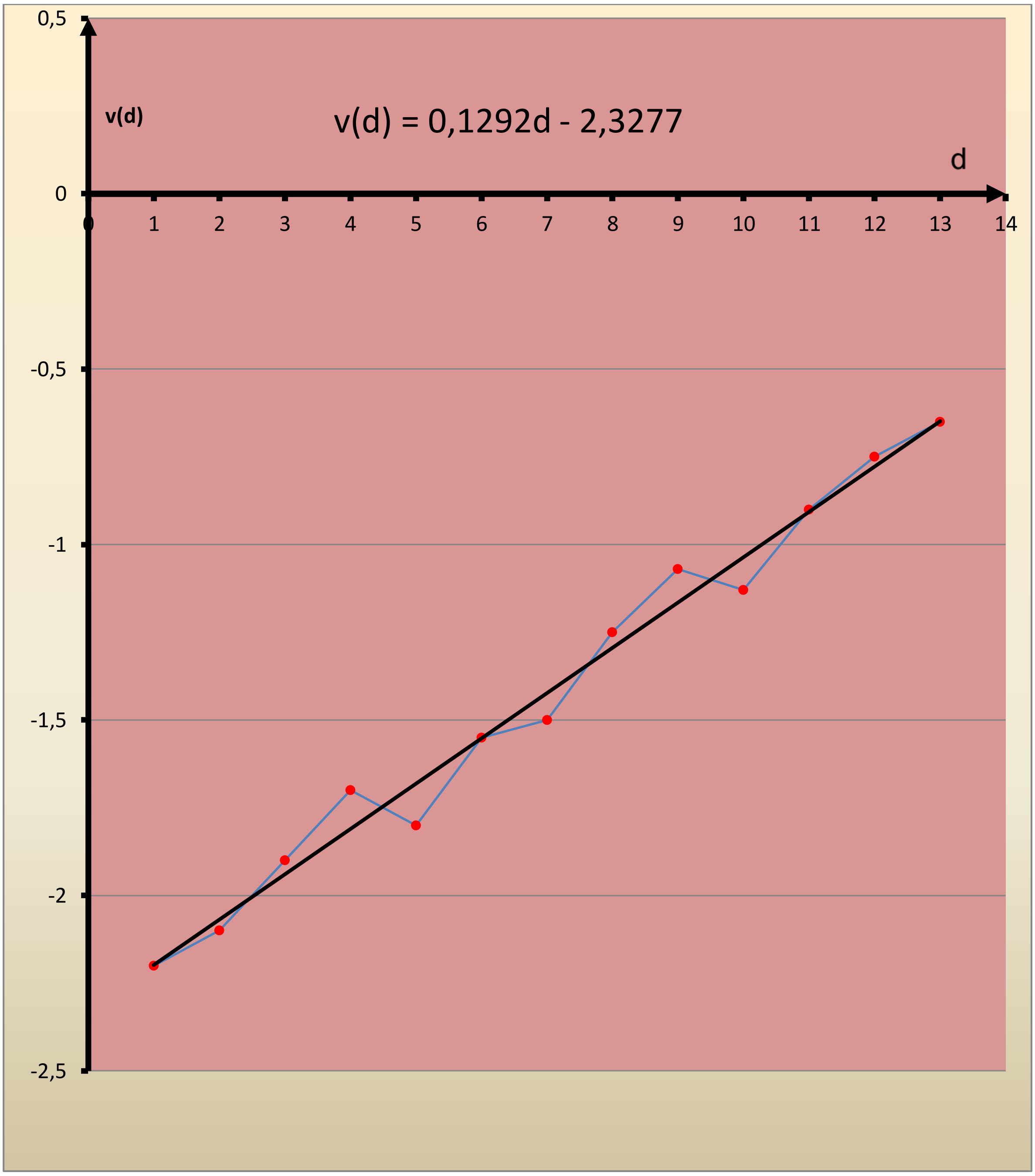
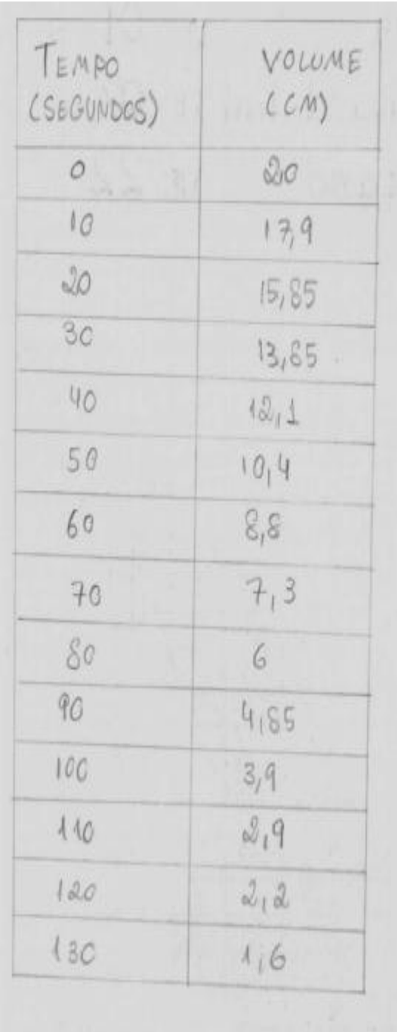


Gráfico 39: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças grupo 2 da 3ª série A

Experimento 4 - Grupo 3 da terceira série A do ensino médio

Experimento realizado com uma garrafa Pet de 2 litros, com 10 cm de diâmetro, pelos alunos do grupo 3 da 3ª série A do ensino Médio da Escola Municipal Adelino Bordignon da cidade de Matão. O furo feito na garrafa foi de 4 mm. O que segue foi recebido dos alunos em papel e Escaneado. Inicialmente o grupo fez a tabela e o gráfico em papel milimetrado.



TEMPO (SEGUNDOS)	VOLUME (CM)
0	20
10	17,9
20	15,85
30	13,85
40	12,1
50	10,4
60	8,8
70	7,3
80	6
90	4,85
100	3,9
110	2,9
120	2,2
130	1,6

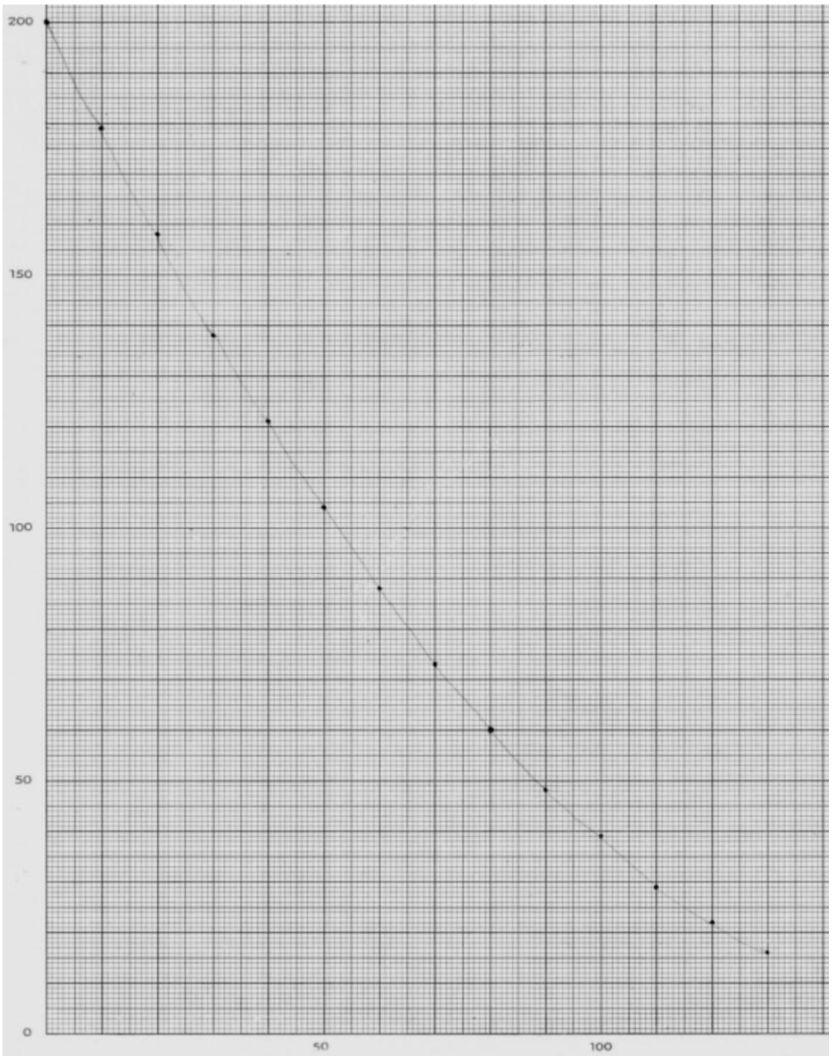


Gráfico 40: Gráfico digitalizado e tabela obtida pelo grupo 3 da 3ª série A

Em seguida o grupo calculou as diferenças para verificar se as mesmas eram termos próximos de uma P.A.

Tabela 15: Tabela obtida pelo grupo 3 da 3ª série A do ensino médio.

T	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
H	20	17,9	15,85	13,85	12,1	10,4	8,8	7,3	6	4,85	3,9	2,9	2,2	1,6
D1		-2,1	-2,05	-2	-1,75	-1,7	-1,6	-1,5	-1,3	-1,15	-0,95	-1	-0,7	-0,6
D2			0,05	0,05	0,25	0,05	0	0,1	0,2	0,15	0	-0,05	0,3	0,1

Para verificarem a dispersão em torno da reta de tendência, fizeram o gráfico. Observamos no gráfico 41 que a dispersão é mínima, assim como ocorreu na maioria dos gráficos elaborados pelos grupos. Isso mostra que cada um dos grupos procurou fazer o experimento da melhor maneira possível.

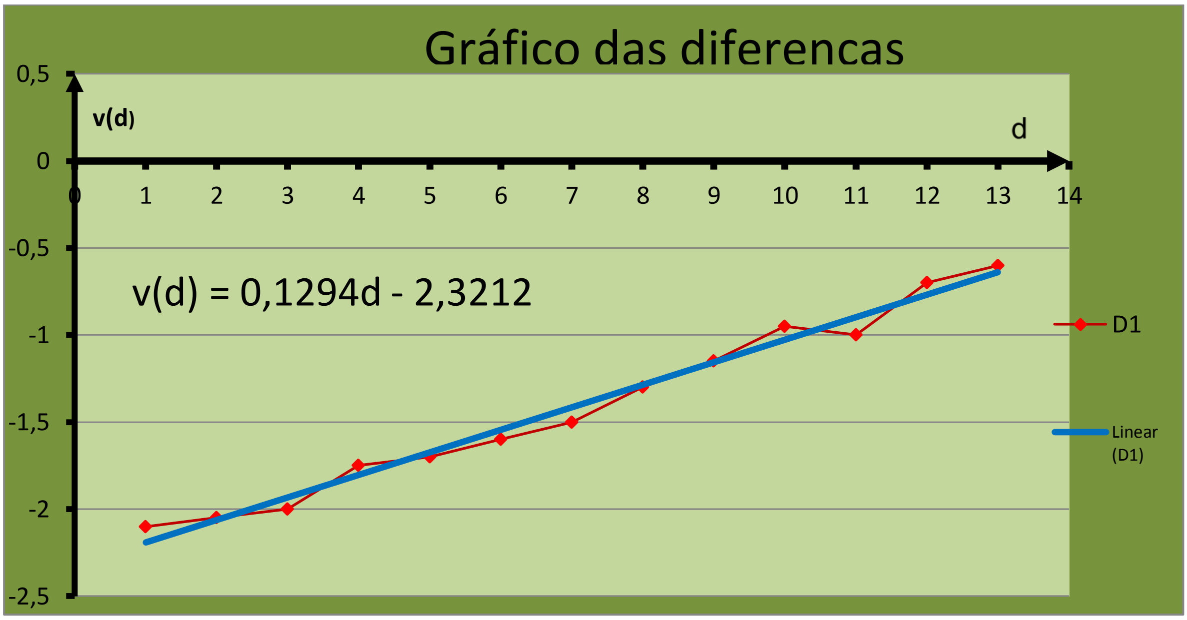


Gráfico 41: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças - grupo 3 da 3ª série A.

Obtenção da função quadrática usando os pares ((0,20), (50; 10,4) e (100; 3,9)

Análises e Equações utilizando três relações tempo/altura distintas onde uma delas $t=0$.

Utilizando-se da equação $h = at^2 + bt + c$, onde h é a altura e t o tempo, temos que para $t = 0 \rightarrow a.0^2 + b.0 + c = 20$, portanto $c = 20$ (I)

para $t = 50$, temos $a.50^2 + b.50 + c = 10,4$, isolando-se o c $\rightarrow$

$c = 10,4 - 2500a - 50b$. (II)

para $t = 100$, $a.100^2 + b.100 + c = 3,9$

$c = 3,9 - 10000a - 100b$ (III)

NOMES ALEXANDRE 01, DAVI 07, MATEUS 22

substituindo I em II $\rightarrow$ $2500a + 50b + 20 = 10,4$

$2500a + 50b = -9,6$ (α)

substituindo I em III $\rightarrow$ $10000a + 100b + 20 = 3,9$

$10000a + 100b = -16,1$ (β)

resolvendo o sistema entre α e β

$$+\begin{cases} 2500a + 50b = -9,6 \\ 10000a + 100b = -16,1 \end{cases}$$ multiplico por $-0,5$

$-5000a - 50b = 8,05$

$-2500a = -1,55 \rightarrow a = 0,00062$

substituo a e c em II

$2500.0,00062 + 50b + 20 = 10,4$

$1,55 + 50b + 20 = 10,4$

$50b + 21,55 = 10,4 \rightarrow b = \frac{11,15}{50} = -0,223$

Provando que $h = 0,00062t^2 - 0,223t + 20$

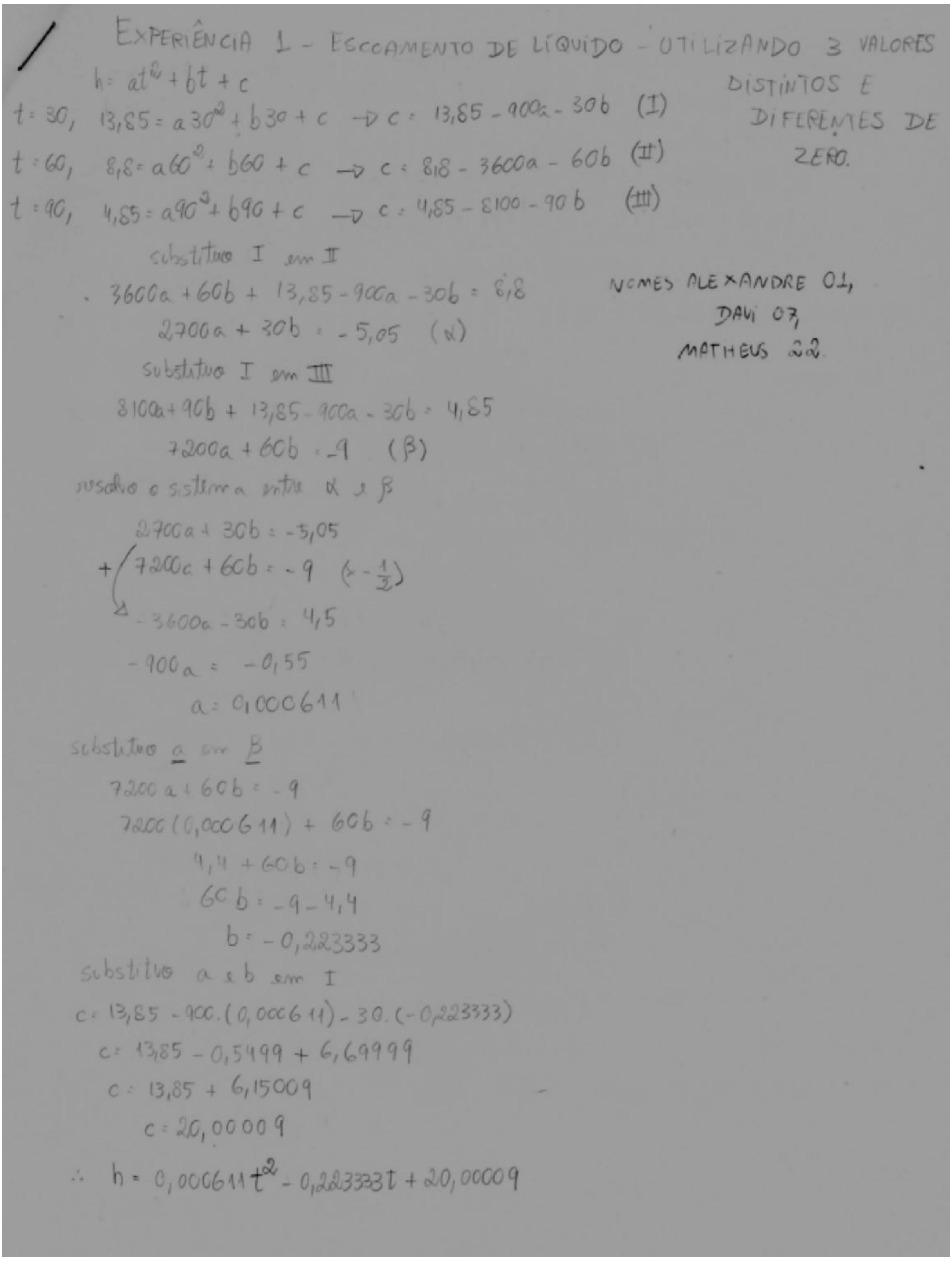
seja $h = 7,3 \rightarrow 7,3 = 0,00062.70^2 - 0,223.70 + 20$

$7,3 = 3,038 - 15,61 + 20$

$7,3 = 23,038 - 15,61$, logo $7,3 \approx 7,428$

Ilustração 12 Digitalização da resolução dos sistema de equações. Grupo 3 da 3ª série A

Obtenção da função quadrática usando os pares (30; 13,85), (60; 8,8) e (90; 4,85)



EXPERIÊNCIA 1 – ESCOAMENTO DE LÍQUIDO – UTILIZANDO 3 VALORES DISTINTOS E DIFERENTES DE ZERO.

$h = at^2 + bt + c$

$t = 30, \quad 13{,}85 = a30^2 + b30 + c \rightarrow c = 13{,}85 - 900a - 30b \quad (I)$

$t = 60, \quad 8{,}8 = a60^2 + b60 + c \rightarrow c = 8{,}8 - 3600a - 60b \quad (II)$

$t = 90, \quad 4{,}85 = a90^2 + b90 + c \rightarrow c = 4{,}85 - 8100 - 90b \quad (III)$

NOMES ALEXANDRE 01, DAVI 07, MATHEUS 22.

substituo I em II

$3600a + 60b + 13{,}85 - 900a - 30b = 8{,}8$

$2700a + 30b = -5{,}05 \quad (\alpha)$

substituo I em III

$8100a + 90b + 13{,}85 - 900a - 30b = 4{,}85$

$7200a + 60b = -9 \quad (\beta)$

resolvo o sistema entre α e β

$2700a + 30b = -5{,}05$

$+ \; 7200a + 60b = -9 \quad (\times -\frac{1}{2})$

$-3600a - 30b = 4{,}5$

$-900a = -0{,}55$

$a = 0{,}000611$

substituo $\underline{a}$ em $\underline{\beta}$

$7200a + 60b = -9$

$7200(0{,}000611) + 60b = -9$

$4{,}4 + 60b = -9$

$60b = -9 - 4{,}4$

$b = -0{,}223333$

substituo a e b em I

$c = 13{,}85 - 900.(0{,}000611) - 30.(-0{,}223333)$

$c = 13{,}85 - 0{,}5499 + 6{,}69999$

$c = 13{,}85 + 6{,}15009$

$c = 20{,}00009$

$\therefore \quad h = 0{,}000611t^2 - 0{,}223333t + 20{,}00009$

Ilustração 13: Digitalização- Continuação 1 da resolução dos sistema de equações do grupo 3 da 3ª série A.

Para comparar com o resultado obtido manualmente o grupo refez os procedimentos usando apenas o Excel.

Diferentemente de outros grupos, primeiro, o grupo 3 da 3ª série A fez o gráfico discreto.

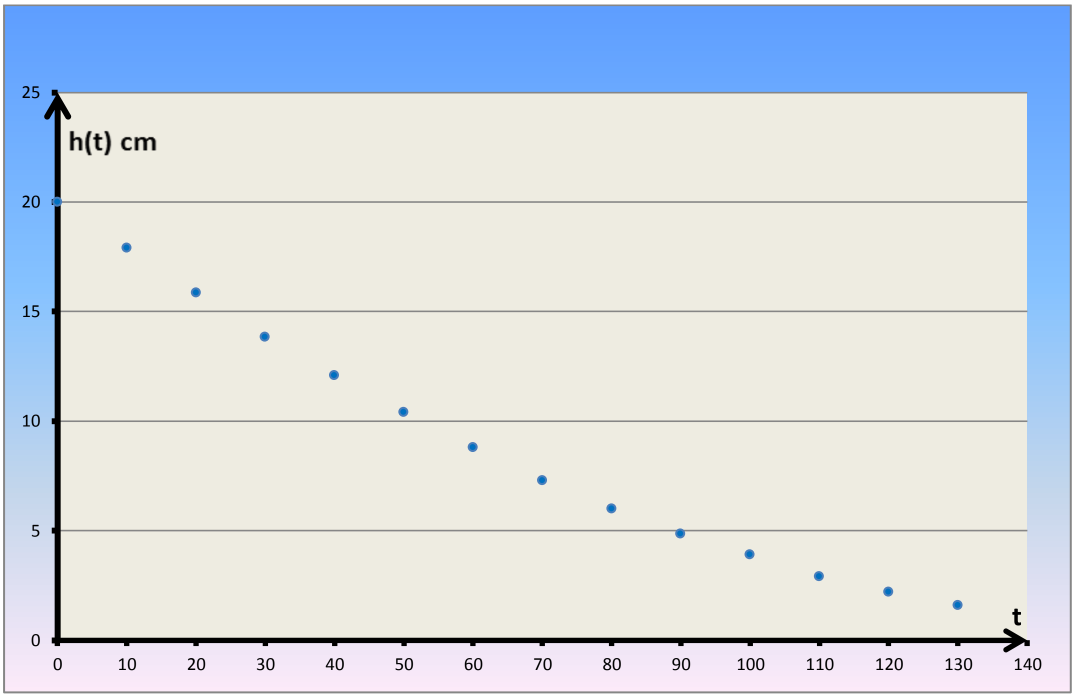


Gráfico 42: gráfico discreto construído pelo Excel a partir dos dados coletados. Grupo3 da 3ª série A

Depois obteve a linha de tendência e a função quadrática

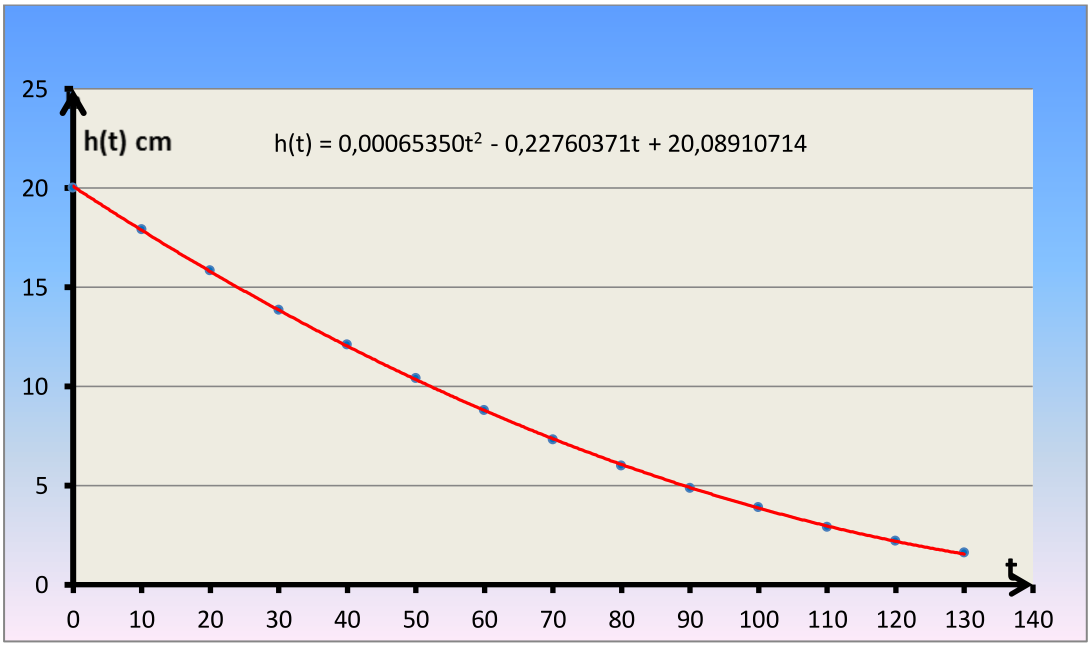


Gráfico 43: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças Grupo3 da 3ª série A

A seguir o grupo comparou as três funções obtidas e verificou que as equações apresentam coeficientes bastante próximos. Na opinião do grupo a equação obtida com o Excel deve ser considerada a mais correta pois "pega" todos os pontos.

Função obtida com Excel: $h(t) = 0{,}00065350t^2 - 0{,}22760371t + 20{,}0891$

1ª Função obtida manualmente: $h(t)= 0{,}00062000t^2 - 0{,}223t+20$

2ª Função obtida manualmente: $h(t)= 0{,}0006110t^2- 0{,}223333t+20{,}00009$

Até aqui, as funções obtidas pelo autor e pelos grupos, com o Excel, considerando-se a garrafa Pet com um furo de 4 mm, são:

$h(t) = 0{,}00066298t^2 - 0{,}22870960t + 20{,}00352941$

$h(t) = 0{,}00066778t^2 - 0{,}22915053y + 19{,}95852941$

$h(t) = 0{,}00066591t^2 - 0{,}22886744t + 19{,}94760845$

$h(t) = 0{,}00064665t^2 - 0{,}22642453t + 20{,}00735294$

$h(t) = 0{,}0006535t^2 - 0{,}22760371t + 20{,}08910714$

$h(t) = 0{,}0006866t^2 - 0{,}23352311t + 20{,}08039216$

$h(t) = 0{,}00066842t^2 - 0{,}22826261t + 19{,}96446078$

$h(t) = 0{,}00064560t^2 - 0{,}22447802t + 19{,}93571429$

$h(t) = 0{,}00064492t^2 - 0{,}22627885t + 20{,}00535714$

$h(t) = 0{,}00065350t^2 - 0{,}22760371t + 20{,}08910714$

Todas as garrafas utilizadas são da mesma marca de refrigerante, possuem as mesmas medidas e foram furadas com brocas de 4 mm; todas conferidas pelo autor com paquímetro. Era de se esperar que as funções obtidas fossem todas iguais, porém, isso não ocorreu. É necessário que se diga, todavia, que as discrepâncias começam a partir da 5ª casa decimal e outras a partir da 6ª casa para o valor de a. Considero essa aproximação excelente e mostra que os integrantes dos grupos se esforçaram para fazer o melhor possível. Temos as funções que cada um dos grupos obteve, mas seria enfadonho colocar aqui todas elas. Entendemos que é mais salutar comparar a média dos resultados de cada uma das classes. Uns erram para mais, outros para menos. A média nos parece ser um resultado que talvez traduza melhor a função que modela o escoamento. Vamos, agora, em busca dessa média.

5.8 Análise comparativa dos experimentos realizados.

Colocamos a seguir as tabelas contendo a variação da altura da água em função do tempo. Em cada tabela aparece a tabulação obtida pelos grupos de uma mesma classe do ensino médio.

Tabela 16: Variação da altura obtida pelos grupos da 2ª série A.

ESPERIMENTO REALIZADO PELOS ALUNOS DA SEGUNDA SÉRIE A DO ENSINO MÉDIO

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	Média
T (s)	H1(cm)	H2(cm)	H3(cm)	H4(cm)	H5(cm)	H6(cm)	H7(cm)	H8(cm)	H9(cm)	H(cm)
0	20,00	20	20	20	20	20	20	20	20	20,00
10	17,50	18,1	17,5	17,6	17,6	17,7	17,6	17,8	17,8	17,69
20	15,60	15,9	15,6	15,7	15,6	15,6	15,5	16,1	16	15,73
30	13,60	13,9	13,4	13,7	13,5	13,8	13,6	14,2	14,1	13,76
40	11,90	11,9	11,8	11,9	11,7	12,1	11,8	12,5	12,4	12,00
50	10,30	10,3	10,1	10,1	9,9	10,3	10,9	10,5	10,6	10,33
60	8,20	8,8	8,5	8,5	8,3	8,8	8,4	9,2	9,1	8,64
70	7,20	7,3	6,9	7,1	6,9	7,4	7,2	7,9	7,8	7,30
80	5,90	6,1	5,7	5,7	5,6	6,1	5,8	6,8	6,6	6,03
90	4,70	4,9	4,5	4,5	4,5	5	4,6	5,6	5,5	4,87
100	3,70	3,6	3,5	3,5	3,4	3,9	3,5	4,5	4,3	3,77
110	2,80	2,1	2,2	2,6	2,5	3	2,3	3,5	3,5	2,72
120	2,10	1,3	1,2	1,8	1,6	2,3	1,5	2,7	2,6	1,90
130	1,50	0,8	0,8	1,3	1,1	1,7	1	2,2	2	1,38
140	1,00			1				1,6	1,5	1,28

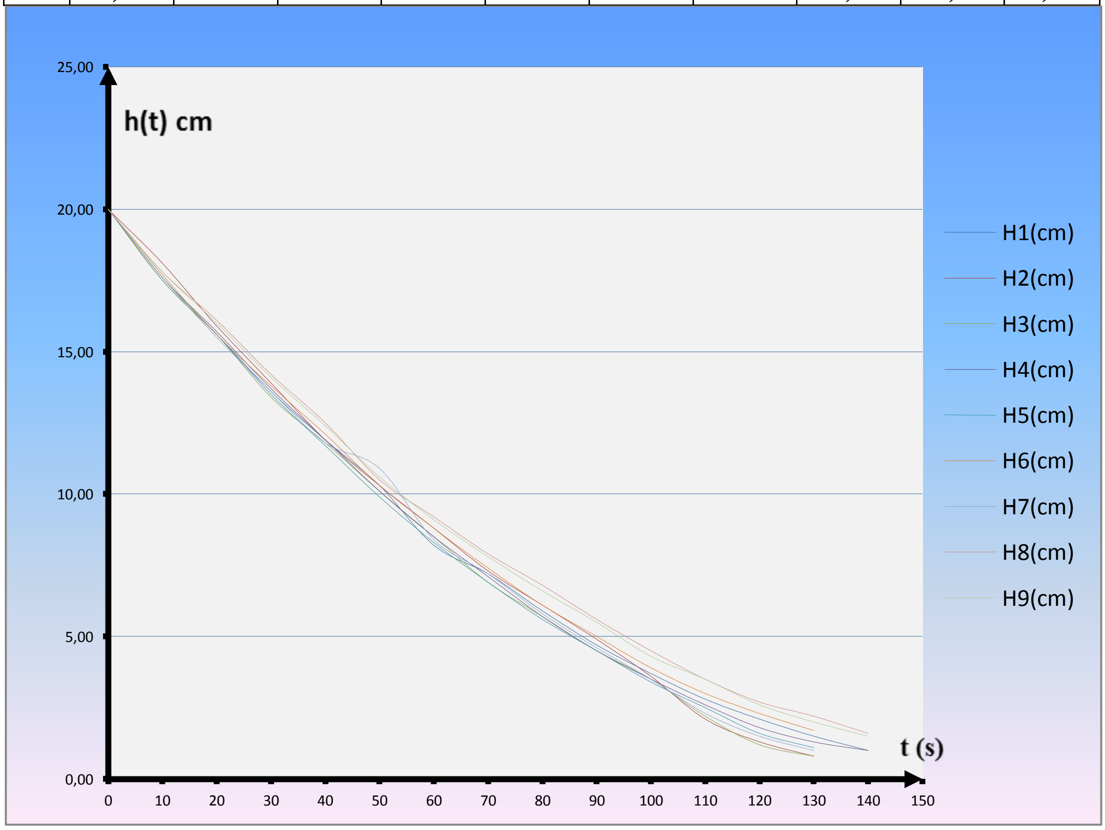


Gráfico 44: Gráfico do experimento realizado por todos os grupos da 2ª série A do ensino médio

Tabela 17: Variação da altura obtida pelos grupos da 3ª série A.

EXPERIMENTO REALIZADO PELOS ALUNOS DA TERCEIRA SÉRIE A DO ENSINO MÉDIO

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G8	G9	Média
T (s)	H1(cm)	H2(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20,00
10	17,8	17,8	17,9	18	17,6	17,7	17,8	18	17,83
20	15,7	15,7	15,85	16,1	15,5	15,6	15,7	16,1	15,78
30	13,8	13,8	13,85	14,1	13,5	13,8	13,7	14,1	13,83
40	11,8	12,1	12,1	12,3	11,7	11,9	12	12,3	12,03
50	10,3	10,3	10,4	10,6	9,9	10,2	10,3	10,6	10,33
60	8,6	8,75	8,8	9	8,3	8,7	8,7	9	8,73
70	6,9	7,25	7,3	7,7	6,9	7,3	7,2	7,6	7,27
80	5,7	6	6	6,4	5,6	6	5,9	6,4	6,00
90	4,6	4,95	4,85	5,3	4,5	4,8	4,7	5,3	4,88
100	3,5	3,8	3,9	4,1	3,4	3,8	3,8	4,3	3,83
110	2,7	2,9	2,9	3,3	2,5	3	2,8	3,3	2,93
120	1,9	2,15	2,2	2,6	1,6	2,1	2,1	2,6	2,16
130	1,3	1,5	1,6	1,9	1,1	1,6	1,5	1,9	1,55
140	0,9	1		1,3		1,1		1,4	1,14

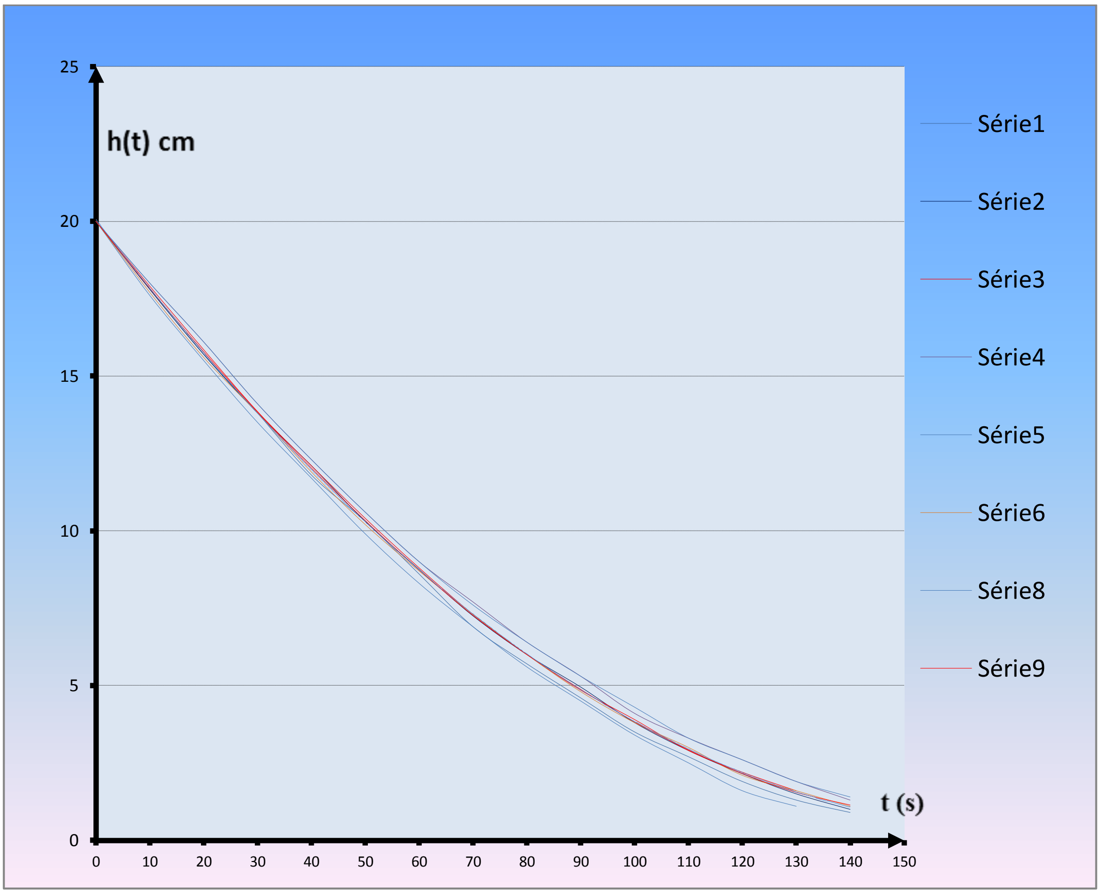


Gráfico 45: Gráfico do experimento realizado por todos os grupos da 3ª série A do ensino médio

Tabela 18: Variação da altura obtida pelos grupos da 2ª série B.

EXPERIMENTO REALIZADO PELOS ALUNOS DA SEGUNDA SÉRIE B DO ENSINO MÉDIO

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G8	G12	Média
T (s)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20,00
10	17,8	18	17,7	17,8	18	18,1	17,7	17,9	17,88
20	15,8	16	15,5	15,5	16,4	16,1	15,5	16	15,85
30	13,6	14	13,6	13,5	14,5	14,1	13,5	13,8	13,83
40	12	12,2	11,7	11,6	12,9	12,2	11,7	12,3	12,08
50	10,2	10,5	10	10,1	11	10,6	10	10,7	10,39
60	8,4	9	8,4	8,4	9,7	9,1	8,4	9,1	8,81
70	7,1	7,5	6,9	6,8	8,3	7,6	6,6	7,7	7,31
80	5,8	6,3	5,6	5,7	6,9	6,2	5,6	6,4	6,06
90	4,6	5	4,5	4,6	5,7	5,1	4,4	5	4,86
100	3,6	4	3,5	3,5	4,8	3,8	3,4	4,3	3,86
110	2,6	3,1	2,7	2,6	3,8	2,9	2,5	3,1	2,91
120	2	2,5	1,9	2	2,9	2,1	1,7	2,8	2,24
130	1,3	1,8	1,2	1,4	2,3	1,5	1,1	1,6	1,53
140	0,9	1,2		1	1,6	1		1,2	1,15

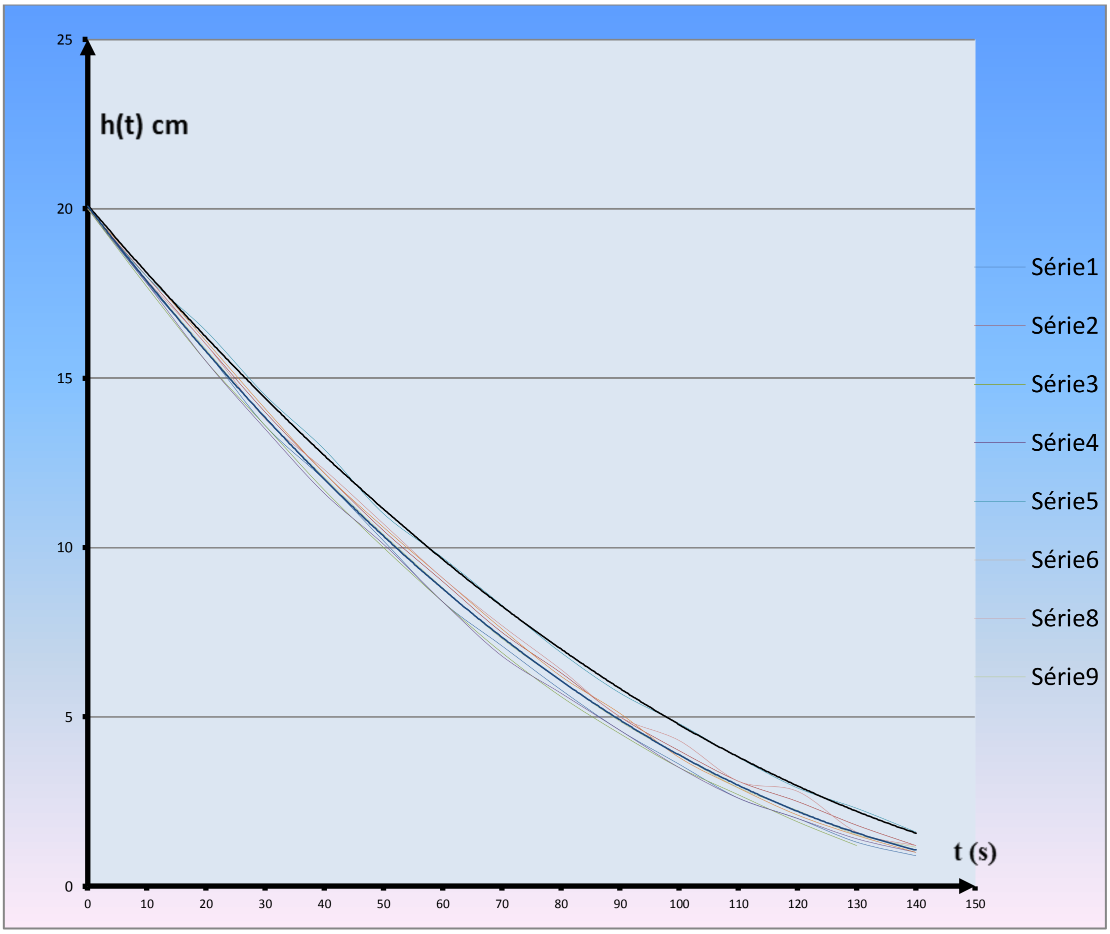


Gráfico 46: Gráfico do experimento realizado por todos os grupos da 2ª série B do ensino médio

Tabela 19: Variação da altura obtida pelos grupos da 3ª série B.

ESPERIMENTO REALIZADO PELOS ALUNOS DA TERECIRA SÉRIE B DO ENSINO MÉDIO

	G1	G2	G3	G4	G5	G7	G8	G9	Média
T(s)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)	H(cm)
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20,00
10	17,5	17,9	17,5	17,7	17,8	18	17,4	17,6	17,68
20	15,5	16	15,4	15,6	15,7	16,1	15,3	15,6	15,65
30	13,6	14,1	13,5	13,6	13,7	14,1	13,2	13,8	13,70
40	11,8	12,4	11,7	11,9	12,1	12,3	11,25	11,9	11,92
50	10	10,3	9,9	10,1	10,5	10,6	9,6	10,3	10,16
60	8,2	9,3	8,4	8,5	8,9	9,1	7,9	8,7	8,63
70	7,2	7,9	6,9	7,1	7,4	7,6	6,45	7,4	7,24
80	5,8	6,6	5,7	5,7	5,9	6,4	5,1	6,2	5,93
90	4,5	5,4	4,5	4,6	5	5	3,9	5	4,74
100	3,5	4,4	3,5	3,6	3,9	4,1	3,1	3,9	3,75
110	2,6	3,5	2,6	2,6	2,9	3	2,2	3,2	2,83
120	1,9	2,65	1,9	1,8	2,2	2,2	1,55	2,4	2,08
130	1,3	2	1,4	1,2	1,5	1,3	0,95	1,8	1,43
140	0,8	1,4			0,9	0,7		1,3	1,02

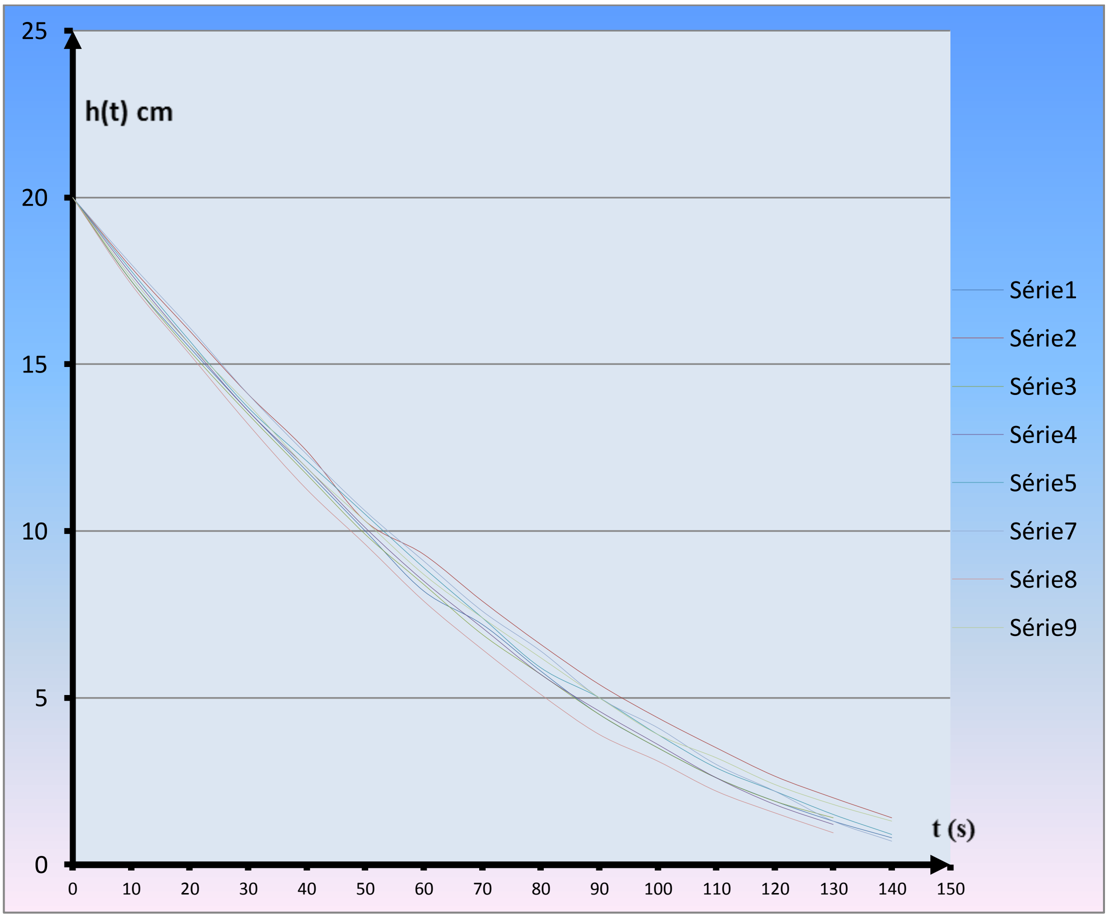


Gráfico 47: Gráfico do experimento realizado por todos os grupos da 3ª série B do ensino médio.

Tabela 20: Tabela comparativa das alturas considerando a média dos valores obtidos pelas 4 classes do ensino médio.

T(s)	H2A	H2B	H3A	H3B	Média
0	20	20	20	20	20,00
10	17,69	17,88	17,83	17,68	17,77
20	15,73	15,85	15,78	15,65	15,75
30	13,76	13,83	13,83	13,7	13,78
40	12	12,08	12,01	11,92	12,00
50	10,33	10,39	10,33	10,16	10,30
60	8,644	8,813	8,713	8,625	8,70
70	7,3	7,313	7,263	7,244	7,28
80	6,033	6,063	6	5,925	6,01
90	4,867	4,863	4,838	4,738	4,83
100	3,767	3,863	3,788	3,75	3,79
110	2,722	2,913	2,9	2,825	2,84
120	1,9	2,238	2,125	2,075	2,08
130	1,378	1,525	1,525	1,431	1,46
140	1,275	1,15	1,1	1,02	1,14

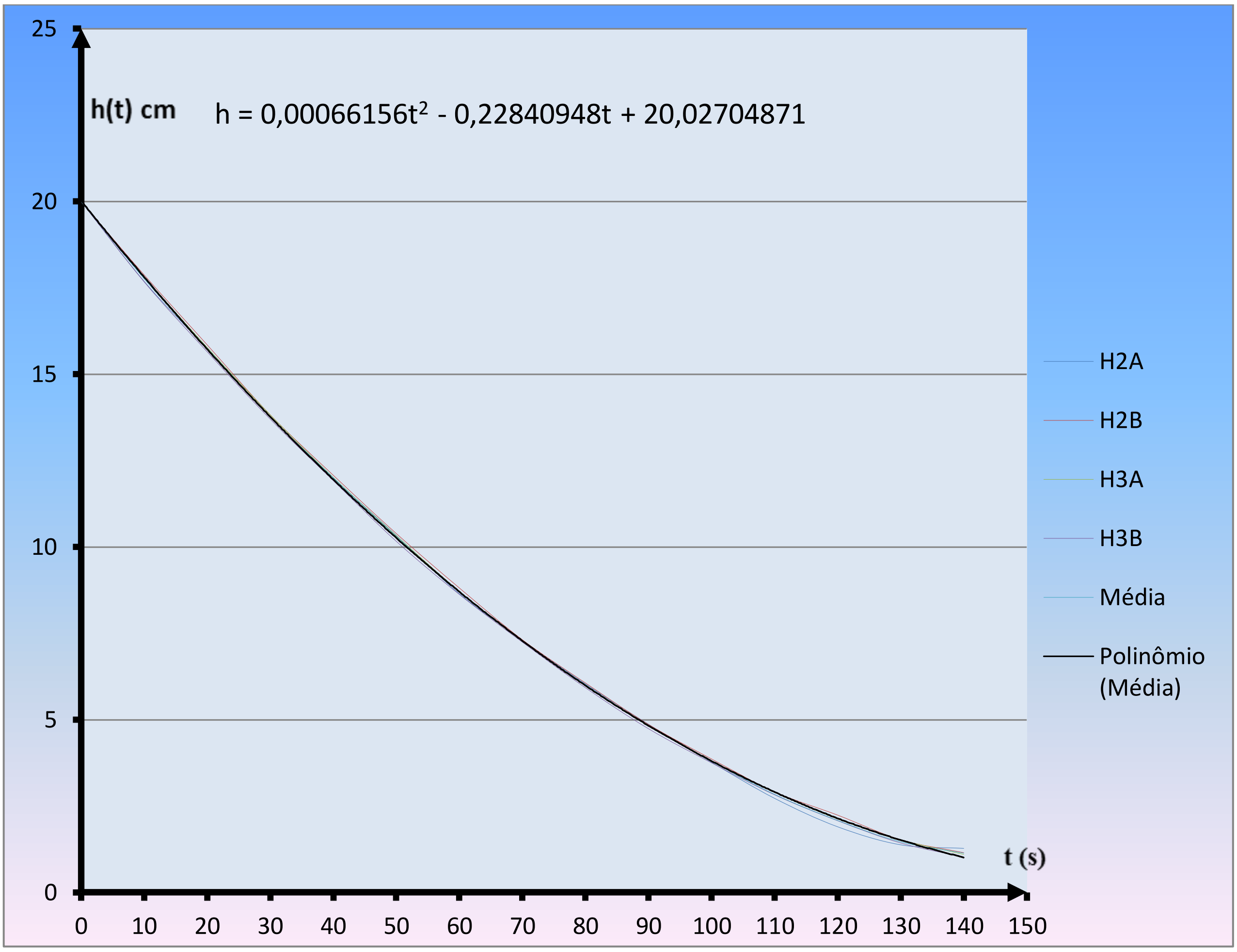


Gráfico 48: Gráfico comparativo das médias das 4 classes com a média de todos os valores

No gráfico 46 ampliamos o gráfico 45 para percebermos melhor as diferenças.

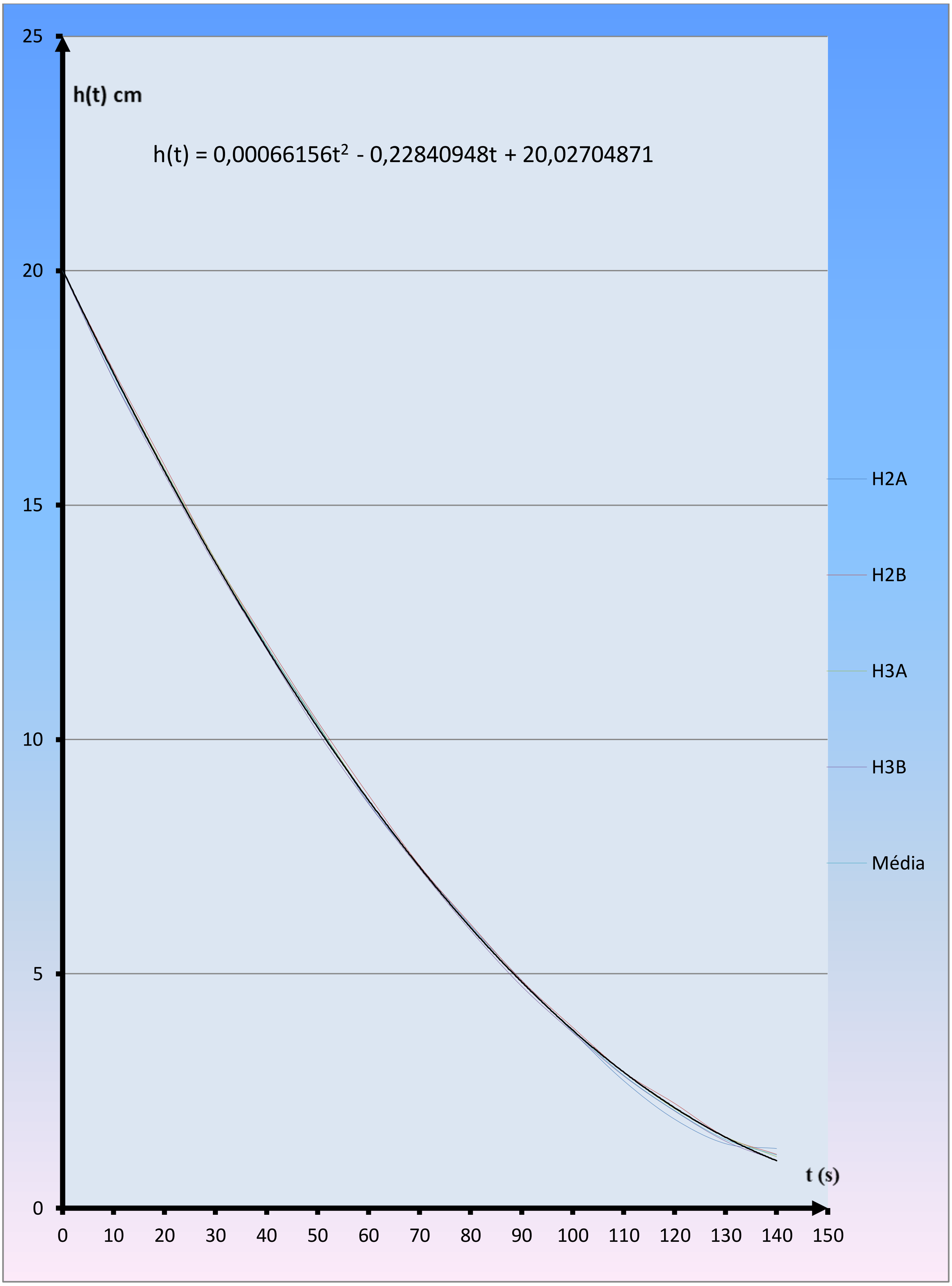


Gráfico 49: ampliação do gráfico 48

É interessante observar que tomando-se a média aritmética dos valores as curvas são praticamente idênticas.

Obtivemos, finalmente, a função quadrática média que modela o escoamento de um líquido em uma garrafa PET com 10 cm de diâmetro e com um furo de 4 mm. Resta fazer o que chamaremos de "teste de fogo" que é o cálculo das diferenças.

Tabela 21: Tabulação dos dados obtidos com a média de todos os experimentos

T(s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Média	20	17,77	15,75	13,78	12	10,3	8,699	7,2797	6,005208	4,826042	3,791667	2,839931	2,084375	1,464757	1,13625
D1		-2,234	-2,01	-1,98	-1,775	-1,699	-1,6	-1,419	-1,27448	-1,17917	-1,03438	-0,95174	-0,75556	-0,61962	-0,32851
D2			0,22	0,038	0,201	0,075	0,096	0,1845	0,144444	0,095313	0,144792	0,082639	0,196181	0,135938	0,291111

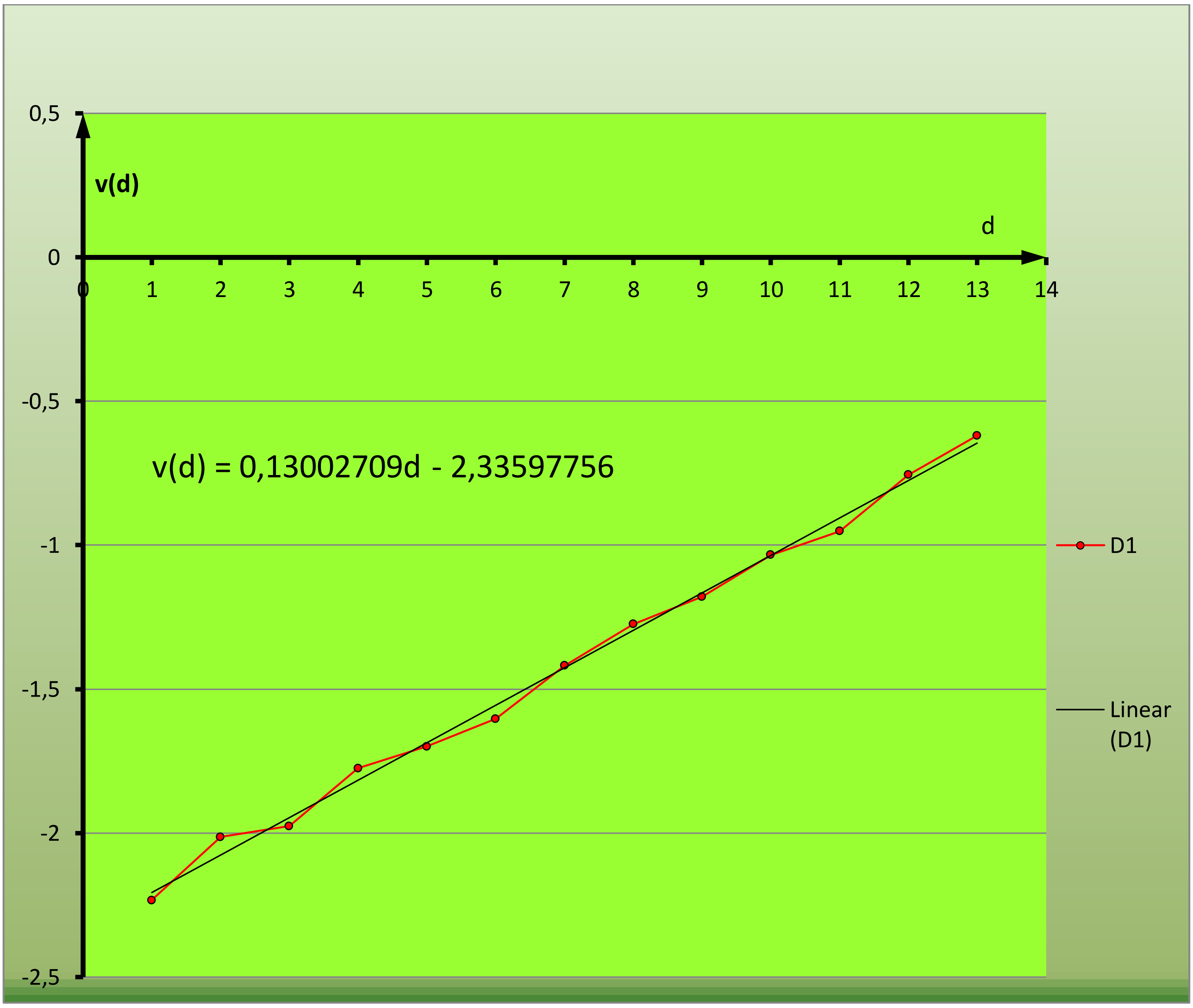


Gráfico 50: Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças – Resultado obtido com a média de todos os grupos.

Observamos acima que a dispersão em torno da reta de tendência é mínima.

O resultado final obtido pelos grupos foi bastante próximo do resultado que obtivemos ao realizarmos o experimento sem uso da filmagem. As funções obtidas seguem abaixo.

Função obtida com a média dos grupos: **h(t) = 0,00066156t^2 - 0,22840948t + 20,02704871**

Função obtida pelo autor do trabalho:.... **h(t) = 0,00066298t^2 - 0,22870960t + 20,00352941**

Reta de tendência obtida pela média dos grupos:..... **v = 0,13002709d - 2,33597756**

Reta de tendência obtida pelo autor:.......................**v = 0,13208791d - 2,34780220**

5.9 Relato final e Conclusão

Ao encerrarmos este capítulo com a apresentação dos trabalhos realizados pelos alunos apenas lamentamos a não colocação dos resultados obtidos por todos os grupos, pois todos se empenharam ao máximo dando o melhor de si e fornecendo resultados plenamente satisfatórios. Cada um dos grupos teve o cuidado de colocar a garrafa em lugar plano e verificar se a fita estava bem colada. Acompanhamos atentamente o desenvolvimento dos trabalhos de cada um dos grupos sem interferir no que estavam fazendo, mas anotando o que de relevante poderia estar ocorrendo. Observei um dos grupos retirando e recolocando a fita, pois, a mesma estava um pouco torta e o resultado poderia ser impreciso; isso ocorreu com o grupo que refez o experimento. Houve preocupação com a ponta da caneta. Em um dado momento ouvi um aluno dizer para um colega: “Essa caneta não serve, pegue outra”. Dois grupos precisaram lixar novamente interna e externamente a região do furo, pois segundo eles estava “muito rombudo”. Um grupo refez o experimento porque ao fazer a marca na fita a garrafa foi levemente pressionada alterando a altura. Esse grupo mudou o colega que fazia a marcação e tudo funcionou corretamente. Dois grupos, o grupo 3 e o grupo 8 da terceira série B realizaram o experimento duas vezes e colocaram no resultado a média dos valores obtidos. Um dos integrantes de um dos grupos exclamou: “ Quem sabe na média a gente acerta!” Num outro grupo um dos integrantes colocou uma das mãos sobre a garrafa enquanto o experimento estava sendo realizado levando uma “bronca” de um outro integrante do grupo. Ele retirou a mão mas não perdeu a esportiva nem a oportunidade de retrucar: “ Prá que você estuda física, minha mão não tampava toda a garrafa, a pressão atmosférica é a mesma”. O colega que deu a “bronca” fez de conta que não ouviu. Observei também que a maioria dos grupos fez algumas simulações antes de iniciar o experimento em definitivo. As atividades transcorreram na mais perfeita ordem. Em um dos dias estiveram presentes o meu orientador professor Ivo e meu co-orientador professor Roberto. Para a tabulação dos dados e feitura dos gráficos pretendíamos utilizar o Modelus, o Maple e o Geogebra, entretanto, não conseguimos. Os alunos se deram muito bem com o Excel e preferimos deixar o estudo do Modelus e do Geogebra para o final do ano, desenvolvendo alguma atividade extra com os alunos que mostrarem interesse. Sentimo-nos perfeitamente realizados com a participação dos alunos e com os resultados obtidos. O cronograma inicialmente proposto foi cumprido, apenas não esperávamos que muitos grupos nos enviassem os gráficos e a resolução por e-mail, dificultando um pouco nosso controle. Tudo foi feito inicialmente sem nossa interferência, cada grupo fez como achou melhor, mas não houve uniformidade de conduta. Depois das explicações dadas na sala de vídeo e o estabelecimento de um padrão de conduta, ou seja, estabelecendo um novo contrato didático, o registro das atividades desenvolvidas pelos grupos se tornou mais eficiente. Trabalhamos com duas classes da terceira série e duas da segunda série do ensino médio e dispúnhamos de cinco aulas por semana. Era nossa intenção incluir as primeiras séries do ensino médio, contudo não foi possível, pois tínhamos apenas duas aulas por semana e na ocasião eu não lecionava a parte de álgebra correspondente às funções, lecionava Geometria.

Os trabalhos fluíram mais naturalmente na classe em que o seguinte cronograma foi seguido:

Primeira Aula

Na sala de vídeo comentamos sobre os procedimentos necessários à realização do experimento. Uma simulação do experimento foi feita pelo autor do presente trabalho.

Segunda Aula

Realização do experimento por parte dos alunos e tabulação dos dados colocando o resultado num papel milimetrado. Em casa eles tentaram obter a função e fizeram o gráfico usando o Excel.

Terceira e quarta aula

Apresentação aos alunos, parte sendo feita na lousa e parte na sala de vídeo das justificativas do porque a função quadrática é uma boa função para modelar o experimento do escoamento de um líquido. A parte da lousa se justifica, pois observamos que o aluno ainda aprende melhor quando fazemos passo a passo na lousa, sem pressa. Nessa aula o professor mostrou como usar o Excel para plotar os pontos.

Quinta aula

Cada um dos grupos, em sala de aula, obteve a função quadrática resolvendo os sistemas conforme mostrado em 5.5 e 5.6 e entregou a solução e o gráfico em papel milimetrado.

Durante o final de semana, para diminuir o custo da internet, pois nem todos tem conexão com banda larga, os grupos puderam enviar por e-mail as funções obtidas e os gráficos construídos com o Excel. Alguns grupos preferiram imprimir e entregar na aula seguinte.

Na sexta aula o professor tirou eventuais dúvidas dos grupos, quanto a resolução dos sistemas e feitura dos gráficos. Os colegas com mais experiência auxiliaram os demais sem, contudo, interferir. Os grupos trocaram informações e tiveram mais um dia para dar um "toque final". Na sétima aula os trabalhos foram recolhidos e o autor desta dissertação teceu ainda alguns comentários apresentando a função obtida com auxílio da mecânica dos fluidos e mostrando que a função é quadrática.

Capítulo 6 – Conclusão

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos nossas últimas considerações acerca dos trabalhos que realizamos com nossos alunos. Destacamos nossa satisfação pelos objetivos alcançados. Conhecemos os alunos com os quais trabalhamos e não foi nenhuma surpresa o interesse, a participação e o empenho que tiveram na busca e obtenção dos resultados. Eles não só aceitaram o desafio de realizar o experimento como também o fizeram de modo exemplar, ajudando-se mutuamente de modo que todos os integrantes do grupo pudessem aprender. Grupos com mais experiência e que dominavam o uso do Excel se prontificaram a ajudar e ensinar colegas de outros grupos que nunca haviam trabalhado com o Excel ou mesmo com um computador. Concluímos, também, a última etapa da engenharia didática que é a "análise a posteriori". No item 6.2 colocamos as respostas de um questionário respondido pelos grupos. Colocamos também as respostas de dois grupos, digitalizadas. Elaboramos quatro questões:

1) O que o grupo achou mais interessante no experimento realizado?
2) Quais foram os fatores dificultadores para a realização do experimento?
3) Que conceitos puderam ser melhor aprendidos e ou compreendidos?
4) O experimento foi realizado em grupo. O que é melhor, realizar atividades e/ou experimentos em grupo ou individualmente? Por quê?

6.2 Resposta do questionário apresentado aos alunos

As respostas foram transcritas como os alunos as responderam.

1) O que o grupo achou mais interessante no experimento realizado?

- Achamos interessante a representação gráfica ser quase uma parábola e a função ser quadrática porque quando olhamos mais parecia uma exponencial decrescente; mais interessante ainda foi saber que era possível encontrar uma progressão aritmética a partir de uma função quadrática e que o fato da P.A aparecer nas diferenças sucessivas isso nos dava a certeza de que a função deveria ser quadrática;

- O gráfico das diferenças é muito interessante, pois, através dele podemos perceber se o que fizemos estava bem feito e se não bobeamos na hora de marcar os dados;
- O alcance do jato de água diminuía a medida que a altura diminuía;
- Percebemos que o escoamento da água em função do tempo era gradativo;
- Neste experimento, vimos para que serve a matemática na prática;
- Fizemos contas e usamos fórmulas e gráficos para definir o escoamento da água;
- Pudemos colocar em uma atividade prática os conhecimentos aprendidos em sala de aula;
- Uso o computador num experimento simples;
- Apesar dos resultados de cada um dos grupos de uma mesma classe terem sido um pouco diferentes e os gráficos não coincidirem, os gráficos com as médias de cada uma das classes praticamente coincidiram;
- A parte prática do experimento foi a mais interessante de acordo com o grupo. Houve maior interesse quanto à variação da água e ao fato de que, ao se aproximar do ponto "O" da garrafa o líquido escorre mais devagar;
- Nós achamos interessante o fato de um experimento "simples" poder ser analisado através de uma função, usando apenas a vazão da água através de um orifício de 4 mm, analisando apenas a medida que a água ia diminuindo com o decorrer do tempo cronometrado;
- A variação da velocidade em relação ao volume da coluna de água e a pressão atmosférica;
- Através desse experimento, colocamos os conhecimentos aprendidos em sala de aula, em uma realidade prática, tornando dessa forma as aulas menos monótonas, Além disso, nos aproximamos do uso da tecnologia para uma melhor aprendizagem;
- Colocar em prática os conhecimentos adquiridos em sala de aula. Isso faz com que a aula seja mais descontraída e a matéria se fixe com mais facilidade e há uma aproximação da matéria com nosso cotidiano;
- Uniformidade dos gráficos e das funções;
- O resultado do experimento variar de grupo para grupo mesmo com as garrafas sendo iguais e o furo com mesmo tamanho;
- Os tempos de escoamento da água nas garrafas com furos de mesmo diâmetro terem sido quase os mesmos com poucas diferenças;
- A pressão da água ia diminuindo conforme a água ia diminuindo seu volume;
- A física envolvida e como a equação foi obtida através do gráfico;

2) Quais foram os fatores dificultadores para a realização do experimento?

- Furar a garrafa com o diâmetro indicado; alta rotação da furadeira;
- Condições climáticas desfavoráveis. Em virtude do frio a garrafa “suava” dificultando a marcação;
- A elasticidade da garrafa impedia uma marcação correta;
- Dificuldade para trabalhar com números com várias casas decimais;
- Dificuldade para montar a função pois não tínhamos nenhuma base para saber qual seria;
- A espessura da ponta da caneta dificultava a marcação correta. Depois que trocamos por um papel milimetrado e marcamos com lápis ficou melhor;
- Dificuldade para riscar e cronometrar o tempo. Usamos o relógio do celular;

3) Que conceitos puderam ser melhor aprendidos e ou compreendidos?

- Resolução de sistemas de equações por escalonamento e sem escalonamento;
- Construção de gráficos;
- Compreendemos que a função, o gráfico e o experimento são variáveis, porém com um certo padrão;
- Percebemos que a matemática está presente nos experimentos;
- Pudemos rever progressões aritméticas e sua relação com as funções lineares e afins;
- Grandezas diretas e inversamente proporcionais;
- Aprendemos a utilizar o Excel para a elaboração do gráfico;
- Aprimoramento do conceito de função e aplicações;
- Atuação da gravidade e pressão da coluna d’água;
- Funções quadráticas;

4) O experimento foi realizado em grupo. O que é melhor, realizar atividades e experimentos em grupo ou individualmente? Por que?

Todos os integrantes dos grupos concordam que é em grupo, pois

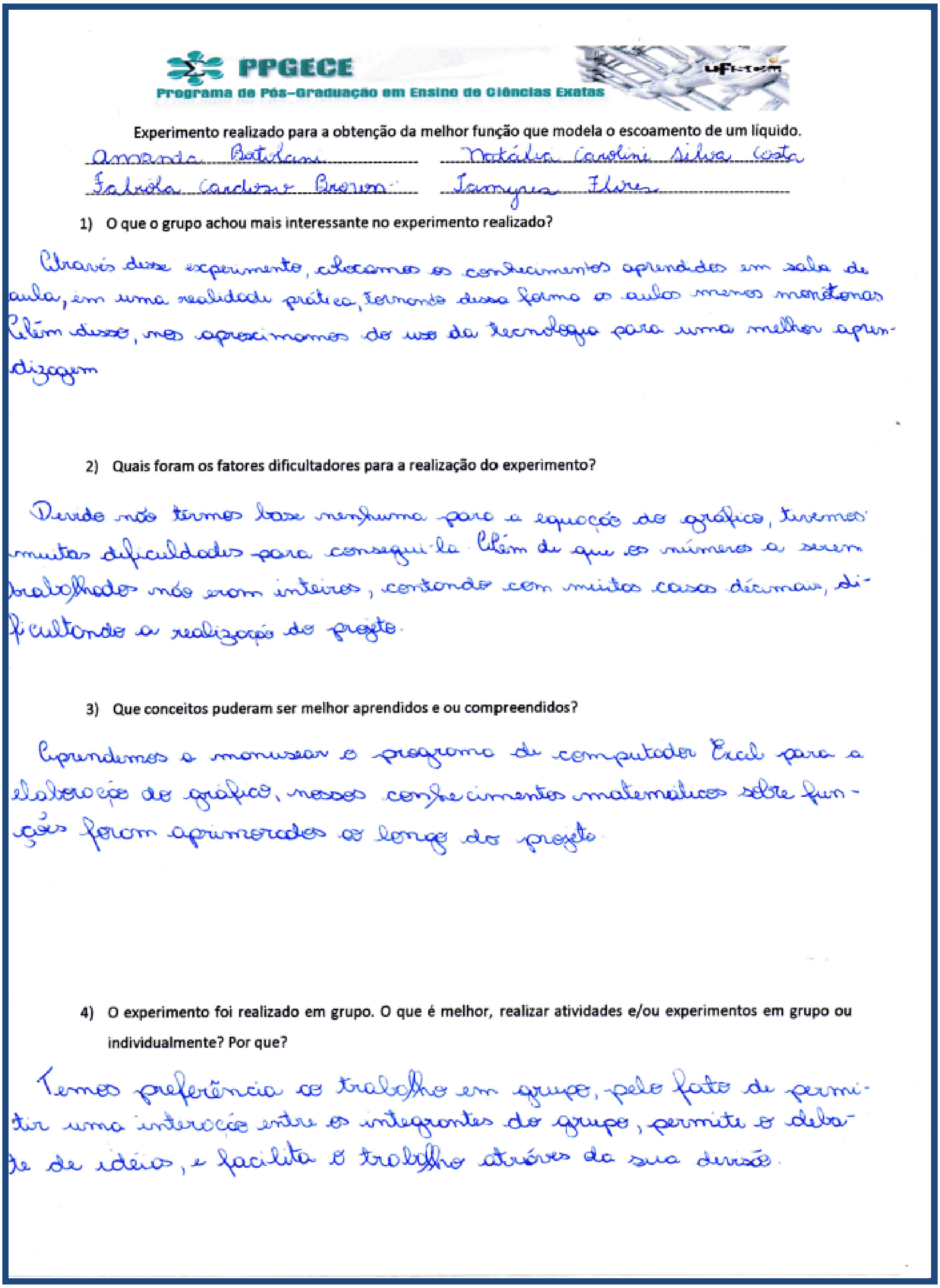
- Não há acúmulo de tarefas;
- Cada um tem sua função estipulada;
- Utilizamos a habilidade de cada um em cada momento finalizando os trabalhos em menos tempo;
- As ideias fluem melhor;
- Há troca de opiniões e de informações gerando um trabalho mais criativo e produtivo;

- Individualmente o experimento não poderia ser feito;
- Compartilhamos o conhecimento;
- Promove a socialização e há menor chance de erro pois todos discutem sobre o que estão fazendo;
- Permite uma interação entre os integrantes do grupo;
- Permite o debate de ideias;
- Facilita o trabalho em virtude da divisão do mesmo;
- Todos trabalham com a mesma finalidade, aprendendo a ouvir e a fazer concessões com respeito ao próximo;
- Temos mais ideias e sugestões sobre o que fazer;
- Podemos nos concentrar mais e um ajudava o outro;
- Maior número de ideias e maiores possibilidades de debates;
- Com os debates podemos adquirir mais informação e conhecimento e melhor compreensão sobre o que está sendo feito;
- Cada um desempenha sua tarefa não sobrecarregando uma pessoa só;
- Porque em grupo é mais fácil.

Depois que fizemos o resumo das respostas dos alunos as mostramos aos professores de física do ensino médio. Pedimos para que eles fizessem alguns esclarecimentos sobre os conceitos da mecânica dos fluídos que apareceram durante a realização do experimento e eles se propuseram a dar as explicações devidas.

Essas respostas dadas foram posteriormente discutidas com todos os alunos de cada uma das classes para esclarecimento de alguns termos e colocações que eles fizeram. Nas respostas se percebe alguma confusão no que diz respeito ao uso de termos como vazão, pressão atmosférica, pressão da água, velocidade de escoamento e pressão da coluna d'agua e outros. Dissemos que as respostas foram mostradas aos professores de física, e que eles dariam as explicações que fossem necessárias e tirariam outras possíveis dúvidas. Não entramos em detalhes com os alunos sobre a parte da física, para evitarmos quaisquer tipos de conflitos entre nossas respostas e a dos professores de física, esclarecendo que depois que os professores de física tivessem dado os esclarecimentos necessários faríamos a comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e a função dada teoricamente. A parte teórica relacionada a mecânica dos fluidos está no apêndice 1.

A seguir colocamos as respostas dadas por dois dos grupos



PPGECE
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Experimento realizado para a obtenção da melhor função que modela o escoamento de um líquido.

Amanda Bortolani — Natália Carolini Silva Costa

Fabíola Cardoso Brown — Tamyres Flores

1) O que o grupo achou mais interessante no experimento realizado?

Através desse experimento, colocamos os conhecimentos aprendidos em sala de aula, em uma realidade prática, tornando dessa forma as aulas menos monótonas. Além disso, nos aproximamos do uso da tecnologia para uma melhor aprendizagem

2) Quais foram os fatores dificultadores para a realização do experimento?

Devido nós termos base nenhuma para a equação do gráfico, tivemos muitas dificuldades para consegui-la. Além de que os números a serem trabalhados não eram inteiros, contando com muitas casas decimais, dificultando a realização do projeto.

3) Que conceitos puderam ser melhor aprendidos e ou compreendidos?

Aprendemos a manusear o programa de computador Excel para a elaboração do gráfico, nossos conhecimentos matemáticos sobre funções foram aprimorados ao longo do projeto.

4) O experimento foi realizado em grupo. O que é melhor, realizar atividades e/ou experimentos em grupo ou individualmente? Por que?

Temos preferência ao trabalho em grupo, pelo fato de permitir uma interação entre os integrantes do grupo, permite o debate de idéias, e facilita o trabalho através da sua divisão.

Ilustração14: Questionário respondido por alunos da 2ª série B do Ensino Médio 2009

PPGECE
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

UFSCar

Experimento realizado para a obtenção da melhor função que modela o escoamento de um líquido.

Anderson C. de Almeida .... Davi Scarpin Vechiato ....
André Lucas Lázaro .... Gabriel Santos Magalhães ....

1) O que o grupo achou mais interessante no experimento realizado?

A parte prática do experimento foi a mais interessante de acordo com o grupo. Houve maior interesse quanto à variação da vazão da água e ao fato de que, ao se aproximar do ponto "O" da garrafa (ponto de referência inicial) o líquido para de escorrer, de vazar.

2) Quais foram os fatores dificultadores para a realização do experimento?

Na prática um dos fatores foi determinar o tempo exato do escoamento de acordo com o cronômetro, tanto inicialmente, quando durante o experimento. A elasticidade da garrafa também não cooperou muito. Quanto a parte teórica, houveram algumas dificuldades em trabalhar com números de vários casas decimais, números "quebrados"

3) Que conceitos puderam ser melhor aprendidos e ou compreendidos?

Um dos conceitos reforçados foi o uso da função, principalmente o fato de aplicarmos a função em um uso real, também nos ajudou a reforçar a idéia do escalonamento.

4) O experimento foi realizado em grupo. O que é melhor, realizar atividades e/ou experimentos em grupo ou individualmente? Por que?

Atividades em grupos pois as idéias fluem melhor. Há troca de opiniões e informações entre os integrantes do grupo gerando assim um trabalho mais produtivo e criativo. Um bom exemplo foi essa atividade que realizamos. De modo individual seria impossível completá-lo já que cada integrante do grupo exerceu uma função como segurar a garrafa, anotar os dados, marcar o cronômetro etc...

Ilustração15: Questionário respondido por alunos da 2ª série B do Ensino Médio 2009

6.3 Conclusão geral e síntese

A escolha de um experimento para o trabalho em sala de aula ocorreu principalmente porque queríamos que nosso aluno tivesse um momento de descoberta e pudesse participar do processo para a aquisição de um novo conhecimento deixando de ser um mero expectador. Queríamos realizar uma atividade que pudesse ser feita de um modo descontraído, sem que o estudante tivesse qualquer tipo de preocupação com nota. Queríamos uma atividade onde o estudante se sentisse livre para aprender, que a fizesse sem se sentir pressionado ou com medo de errar. Queríamos uma atividade que tivesse algum significado para ele. O escoamento de um líquido faz parte de nossa vida, o esvaziar de uma pia, de um tanque, de uma caixa d'água, esvaziamento de uma piscina por gravidade, de uma represa, etc. Queríamos uma atividade onde o aluno pudesse perceber a existência de um conhecimento matemático e que esse conhecimento aparecesse naturalmente. Queríamos uma atividade que permitisse ao aluno aprender "sem sofrer", queríamos que ele tivesse prazer em aprender, sem decorar regras ou fórmulas. Em nosso experimento, a função quadrática aparece como uma necessidade para que possamos explicar um fenômeno físico e isso evita a famosa pergunta que nenhum professor gosta de ouvir: "Para que serve isso?".

O estudo das funções trás muitas dificuldades aos alunos quando ele vem recheado de "algebrismos", quando se confunde com um amontoado de questões que, para serem resolvidas, precisam de dicas e macetes que nada acrescentam ao estudo das funções. Um aluno da primeira série do ensino médio me disse que não sabia funções e quando perguntei por que ele achava que não sabia ele me mostrou o seguinte exercício que ele não sabia fazer: "Dada a função real $f(2x -3) = 2x^2-x + 1$, obter o valor de $f(3x-1)$. Essas questões deixam os alunos apavorados. Isso é o que eu chamo de "algebrismo". O estudo das funções compostas é necessário, mas é preciso que decidamos se vamos ensinar Matemática ou se vamos transformar nossas aulas em seções de tortura e nossas provas em ensaios ao terror. Tenho saudades, entre outros, do pedagogo Paulo Freire que falou em "liberdade para aprender" e do professor Mário Tourasse que, em 1984, numa de suas aulas da disciplina 'Ideias Essenciais da Matemática' no mestrado em educação matemática em Rio Claro, disse: "Não se preocupem tanto em copiar, se o que eu disser atingir o seu coração, você irá se lembrar."

Com a realização do experimento os alunos puderam elaborar tabelas, ler, construir e interpretar gráficos, resolver equações e sistemas com até três equações e três incógnitas e especular sobre a resolução de sistemas com mais de três equações. Obtiveram também a melhor função que modela o escoamento de um líquido. As atividades se realizaram sem sobressaltos e sem surpresas, pois antes dos alunos realizarem as atividades tomamos o cuidado de realizá-la e analisar os possíveis obstáculos e dificuldades.

Tendo em vista a receptividade dos alunos, o empenho e a alegria com que realizaram as atividades, a opinião de colegas professores principalmente daqueles que lecionam a disciplina de Física, estamos absolutamente convencidos de que a modelagem matemática não só pode como deve ser utilizada para a descoberta ou mesmo aplicação de conhecimentos matemáticos, notadamente no ensino de funções.

6.4 Nosso produto

Este é, por fim, o produto de nosso trabalho, um experimento simples que nos permite mostrar a importância da Matemática na tentativa de explicar fenômenos físicos e sua estreita relação com a disciplina de Física. Um experimento que resgata o cientista em potencial que existe no interior de cada estudante, que mostra que a Matemática não é um amontoado de fórmulas e regras totalmente desprovidas de significado, que resgata o fazer em detrimento da inércia e do marasmo que ronda nossas salas de aula, que resgata o participar em contraposição ao ouvir, que resgata o discutir e consequentemente o diálogo em oposição direta ao calar e a aceitação pura e simples de algumas verdades, que resgata a ideia de que o processo é tão ou mais importante que o produto. Esse experimento, como já foi colocado, pode ser realizado nas três séries do ensino médio e até em turmas da oitava série do ensino fundamental, desde que em cada série o professor utilize uma linguagem adequada ao nível de formação dos alunos.

Para que os professores que tiverem interesse possam usar o presente trabalho, o mesmo será publicado no site da UFSCAR . Também pretendemos publicar alguns resumos para facilitar a aplicação do experimento. Colocamo-nos também à disposição para futuros contatos pelo e-mail: kapy.y@uol.com.br .

6.5 Auto avaliação e conclusão final

Se pudéssemos resumir numa única frase tudo que sentimos ao realizar esse trabalho diríamos apenas que:

"Cada segundo foi mais gratificante que o anterior."

Gratificante porque durante todo o processo, cada aluno foi um personagem principal. Não existiram coadjuvantes. Pela postura dos alunos, pelos questionamentos feitos, pelas dúvidas levantadas, pelo interesse demonstrado e pela alegria estampada em seus rostos tivemos a certeza de que valeu a pena a realização desse experimento. Pudemos sair da rotina, o aluno deixou de ser um mero expectador para ser um construtor de seu próprio saber. Cada estudante pode perceber a importância da Matemática e sua estreita relação com a Física, pode perceber que o conhecimento não é formado por compartimentos estanques, mas, que muitos conhecimentos estão relacionados entre si e que várias partes da Matemática se auxiliam. Se nossos alunos puderam se comportar como cientistas, nós, por outro lado, nos comportamos como alunos e pudemos experimentar novamente as emoções de realizar algo nunca antes feito. A partir da realização do experimento sentimos as dificuldades que um aluno normal poderia sentir e isso fez com que amadurecêssemos ainda mais e adquiríssemos um pouco mais de paciência para podermos compreender as dificuldades e dúvidas que alguns alunos apresentam. O mais importante foi que confirmamos nossas suspeitas de que o aluno gosta e quer aprender, basta que ele entenda o significado do que faz, que compreendamos suas limitações e estejamos sempre dispostos a ajuda-lo quando sozinho não se sentir capaz.
Não esperamos a perfeição nem que todos participem igualmente de todas as atividades, contudo, precisamos acreditar que todos têm condições de aprender.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; e COUTINHO, C. Q. S, - Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd - : GT 19 da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v3, n.6, p.62-77, UFSC: 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/13031/12137>. Acesso em: 05 jun. 2010.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: BRUN, J. (Dir.). **Didactique des mathématiques.** Paris: Delachaux et Niestlé, 1996. Disponível em: <http://www.kleio.ch/HEP_VS/hepvsvideo/8_INGENIERIE_DIDACTIQUE_ARTIGUE.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2010.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática**: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUALDA ANPED, 24., 2001, Caxambu. *Anais*... Rio Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf >. Acesso em: 15 nov. 2010.

______. **Modelagem matemática e os futuros professores**. Acta Scientiae Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 10, n. 1, jan./jun. 2008. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/joneicerqueirabarbosat19.rtf>. Acesso em: 02/01/2010.

BARBOSA, J. C**.;** SANTOS, M. A. **Modelagem matemática, perspectivas e discussões**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, Belo Horizonte. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. Disponível em: <http://www.uefs.br/nupemm/cc86136755572.pdf >. Acesso em: 02/01/2010.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática:** Ensino Médio**.** São Paulo: Moderna, 1984. v. 1

BOURBAKI, N. **Théorie des ensembles.** 2 ed. Paris: Hermann, 1939. p. 137

BOYER, C. B. **Cálculo.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula, v. 6).

______. **História da matemática**; tradução: Elza F. Gomide. – São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRAGA, C. **O Processo inicial de disciplinarização de Função na Matemática do Ensino Secundário Brasileiro**. 2003. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/BRAGA_ciro.html>. Acesso em: 10 jan. 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio**.** 2000**.** Disponível em: **<**http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >. Acesso em: 21/12/2009.

______.Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 144p..**PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em jun. 2010

______.Casa Civil. **Lei de diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus.** 1971**.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L5692.htm>. Acesso em 15 jan. 2010.

______.Casa Civil. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional.** 1996**.** Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.html>. Acesso em 15 jan. 2010.

______.Casa Civil. **CONSTITUIÇÃO DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL DE 1988**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constitui%C3%A7ao.htm>. Acesso em: 15 jan. 2010.

______.Casa Civil**. Lei nº 12.061.** 2009. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2009/Lei/L12061.htm>. Acesso em: 15 jan. 2010

CARAÇA, B. J. – **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Tipografia Matemática L.DA, Lisboa- 1951.

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática**: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike**,** Campinas- UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118). Disponível em: **<**http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/ENGENHARIA%20ZETEIKE2005.pdf**>.** Acesso: em 16 jun. 2010.

CHAVES, C. M. S. **- Modelagem Matemática e o Uso do Álcool e do Cigarro:** uma Forma de Contextualizar a Matemática- Disponível em: <http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=7>. Acesso em: 23 jun. 2010.

CORREIA, J. M. T. **A Evolução do Conceito de Função na Segunda Metade do Século XVIII** , 1999. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, PT disponível em: <http://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/10137> ou < http://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/10137/3/2571_TM_01_P.pdf > Acesso em: 10 ago. 2009.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1991.

______.**Matemática** – Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 1999.

DORICO. M . **Função Quadrática: um estudo sobre as representações gráficas**. 2006. Disponível em: <http://www.matematica.campus2.uneb.br/DownloadDeArquivos.php?IDArquivo=159> Acessado em: jun. 2010.

DEWEY, J. - **Vida e Educação**. Tradução e estudo preliminar: Anísio Teixeira. São Paulo : Melhoramentos; [Rio de Janeiro] : Fundação Nacional de Material Escolar, 1978.

EVES, H**. Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FRANCHI, Anna... et al. Contrato Didático. MACHADO, S. D. A. (Org.). – **Educação Matemática**: uma (nova) introdução - 3ª. Ed revista – São Paulo: EDUC, 2008

GALIAZZI, M.C. et all. **Objetivos das atividades experimentais no ensino médio**: a pesquisa coletiva como modo de formação de professores de ciências. Ciência & Educação, v. 7, n. 2, 2001. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/cienciaeeducacao/include/getdoc.php?id=360&article=107&m>. Acesso em 04/04/2009.

GROENWAL, C. L. O. et all. **Perspectivas em Educação Matemática** - Revista Acta Scientae / v.6- n.1 - jan./jun. 2004. Disponível em: <http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoes.html>. Acesso em: 25/03/2010

IARONKA, C. F. **- Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa e da Modelagem Matemática para o Estudo de Funções.** Dissertação de mestrado. Disponível **em:<**http://sites.unifra.br/fisicamatematica/Produ%C3%A7%C3%A3o/Disserta%C3%A7%C3%B5es/tabid/438/Default.aspx?PageContentMode=1**>.** Acesso em: 23/05/2010

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: GGRAFTEX; Comunicação Visual, 1998. v.1.

MACEDO, J. C. A. **Entre a Realidade e a Fantasia:** confissões de Maurício. Matão: Unigraf Matão Ltda – 2005

MOREIRA, M. A. **APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA CRÍTICA** – 2ª Edição-2010- disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigcritport.pdf>. Acesso em: 10/12/2010

NASSOUR, A.C. **A Roda: A maior invençào tecnológica.** Revista Eletrônica de Ciências. 2003. Disponível em: <http://cdcc.usp.br/ciencia/artigos/art_19/roda.html>. Acesso em: jun. 2009

POLYA, G. A. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Interciência, 2006

POSTAL, R. F.; HAETINGER, C. – DULLIUS, M. M. **– Construção de Funções de primeiro grau numa proposta de modelagem matemática -** UNIVATES - X Encontro Gaúcho de Educação Matemática - 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS e Disponível em <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_51.pdf >. Acesso em: 23/05/2010

ROCHA, K. L. S**. A modelagem matemática para o estudo de funções no contexto da educação ambiental -** Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática. Disponível em: <http://sites.unifra.br/fisicamatematica/Produ%C3%A7%C3%A3o/Disserta%C3%A7%C3%B5es/tabid/438/Default.aspx?PageContentMode=1>.Acesso em: 23/05/2010

ROSSINI, R. OS PROFESSORES E O CONCEITO DE FUNÇÃO: **Uma investigação à luz da teoria antropológica do didático**. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/professores.pdf >. Acesso em: 27/12/2009

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Subsídios para implementação da proposta curricular de matemática para o 2º grau.** São Paulo: SE/CENP, 1980

______. **Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau.** São Paulo: SE/CENP, 1991

______. **Proposta curricular para o ensino de matemática: 1º grau.** 4.ed**.** São Paulo 1992

______. Caderno do professor: matemática, ensino médio- 1ª série, volume 2 – 2009

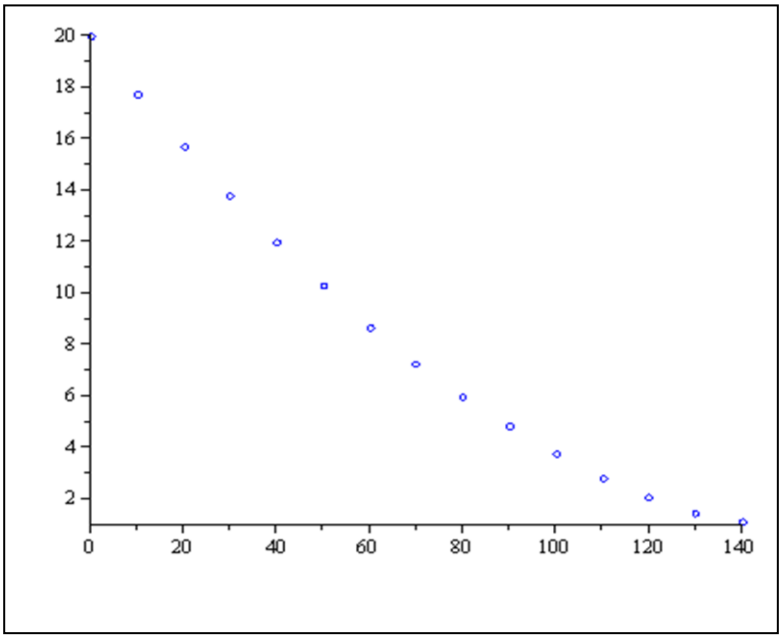
SMOLE, K. S. e DINIS, M. I. **- Matemática – Ensino Médio –** v.1- Editora: Editora Saraiva – 5ª Edição – 2005 – 1ª tiragem – 2007

APÊNDICE A

Escoamento de um líquido

Vamos nos servir do MAPLE para esboçarmos gráficos, plotarmos funções e efetuarmos alguns cálculos de rotina associados ao problema do Escoamento de um Líquido. Inicialmente vamos plotar os dados discretos obtidos experimentalmente

```
> restart;
f(0):=20:
f(10):=17.77:
f(20):=15.75:
f(30):=13.78:
f(40):=12:
f(50):=10.3:
f(60):=8.7:
f(70):=7.28:
f(80):=6.01:
f(90):=4.83:
f(100):=3.79:
f(110):=2.84:
f(120):=2.08:
f(130):=1.46:
f(140):=1.14:
```




```
> alpha := [[10*n,f(10*n)]$n=0..14];
```

$$\alpha := [[0, 20], [10, 17.77], [20, 15.75], [30, 13.78], [40, 12], [50, 10.3], [60, 8.7], [70, 7.28], [80, 6.01], [90, 4.83], [100, 3.79], [110, 2.84], [120, 2.08], [130, 1.46], [140, 1.14]]$$

Consideremos, à guisa de exemplo os pontos (0,20), (60, 8.7) e (110, 2.84)

Suponhamos que a nossa função quadrática esteja associada com a equação

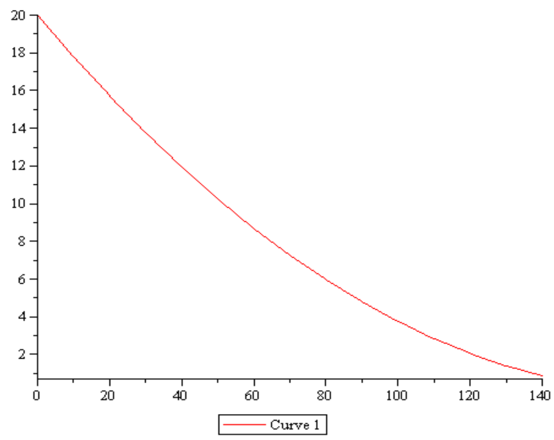
```
solve({p=20,m*60^2+n*60+p=8.7,m*110^2+n*110+p=2.84},{m,n,p});
```

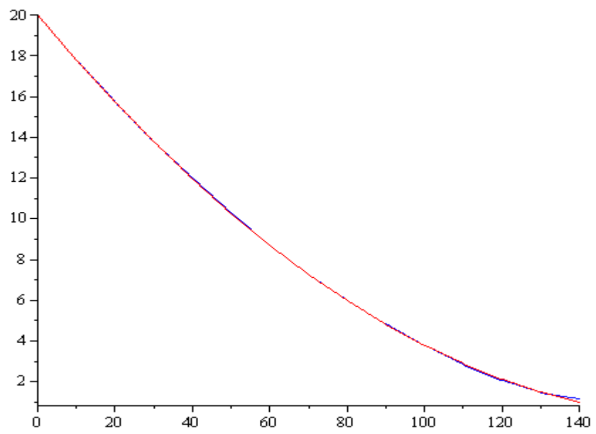
$$\{m = 0.0006466666667, n = -0.2271333333, p = 20.\}$$

```
> g:=t -> 0.00064666*t^2-.22713333*t+20;
```

$$g := t \rightarrow 0.00064666t^2 - 0.22713333t + 20$$

A curva da esquerda foi obtida com os pontos selecionados. À direita temos as duas curvas, a obtida com os pontos selecionados e a curva que contém todos os dados discretos.





Observemos que as curvas, grosseiramente, são as mesmas. É possível perceber duas curvas, uma em azul e outra em vermelho.

Vamos, agora, descrever e plotar a função que modela o escoamento e deduzida à partir das leis da física e um pouco de Cálculo Integral I. (Seguem as contas do Maple)

> g:=978.4; Esse é o g da cidade de Matão (em cm/s^2) (1) , em função da altitude e da latitude.

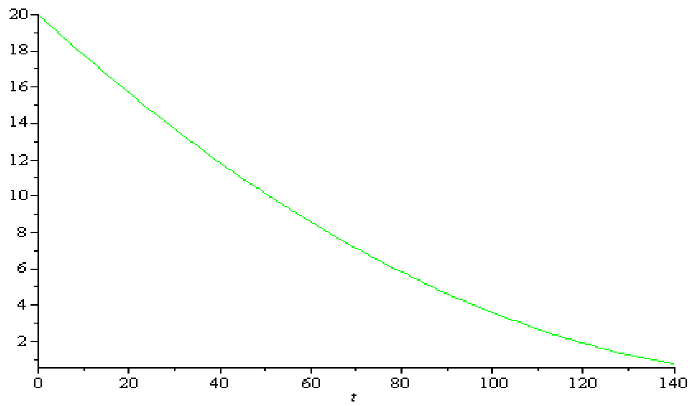
H:=20;#altura da coluna d'agua (.......)   A:=evalf(5^2*Pi);#Área da seção do tubo

d:=0.4;# diâmetro do orifício   a:=evalf(Pi*(d)^2/4)*0.7268;

$g := 978.4$ $H := 20$ $A := 78.5398163$ $d := 0.4$ $a := 0.0913323816$

> h:=unapply(g*a^2/(2*(A^2-a^2))*t^2-a*sqrt(2*g*H/(A^2-a^2))*t+H,t);

Obtivemos assim, com o Maple, a função que modela o escoamento de um líquido e cujo gráfico está em verde. A dedução da equação do escoamento de um líquido está na página 167.

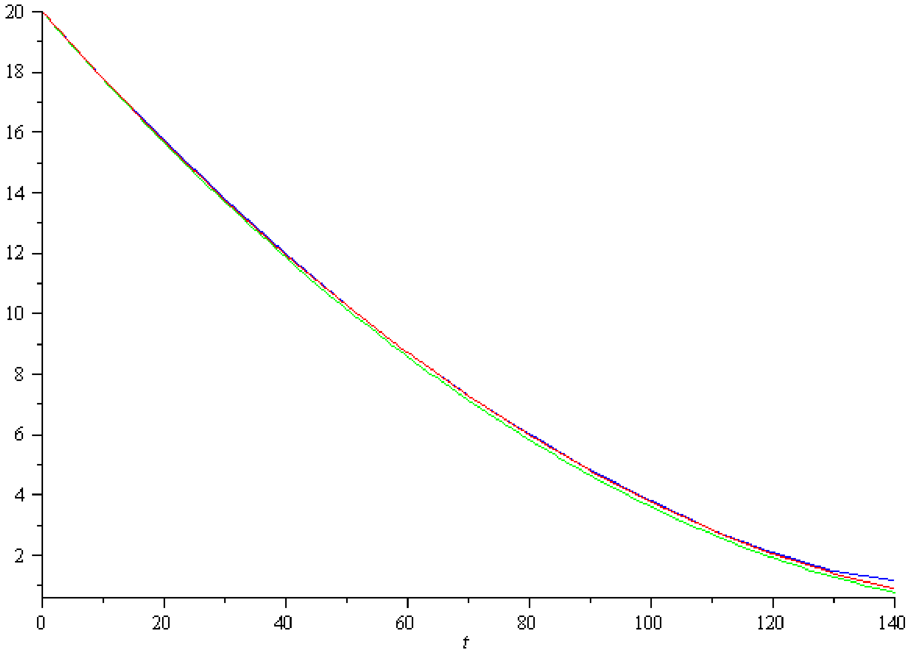


$$h := t \rightarrow 0.0006615411115t^2 - 0.2300506225t + 20$$

(1) Para o cálculo de g em função da altitude e da latitude, ver Lopes, Wilson – Variação da gravidade com a latitude e altitude – disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/viewFile/9106/8450

Plotemos os três gráficos simultaneamente.

Observemos que praticamente as três linhas coincidem. Temos uma verde, uma azul e outra vermelha. Com isso vemos que o coeficiente $\mathbf{C_Q = 0,7268}$ obtido por sucessivas tentativas é bastante próximo do real.



Para resumir, colocamos as três funções juntas.

Função obtida com a média dos grupos...: $\mathbf{h(t) = 0,00066156t^2 - 0,22840948t + 20,02704871}$

Função obtida com o Maple.................. : $\mathbf{h(t) = 0,00066154t^2 - 0,23005622t + 20}$, **ou**

Função obtida pelo autor do trabalho........: $\mathbf{h(t) = 0,00066298t^2 - 0,22870960t + 20,00352941}$

Dedução da equação do escoamento de um líquido.

Nosso objetivo aqui é deduzir a função que modela o escoamento experimentalmente realizado, em função de algumas variáveis facilmente observáveis.

Estamos considerando um vasilhame transparente de formato cilíndrico [por exemplo uma garrafa de refrigerante ou de água mineral] sem a “tampa" superior e com um orifício junto a base. Colamos uma fita de papel milimetrado [ou uma tira de cartolina] junto a sua face lateral e perpendicularmente à base, para que possamos registrar o nível da água em determinados intervalos de tempo durante o escoamento. Enchemos o vasilhame de água [podemos colorir a água para facilitar a visualização] até o nível superior da fita. O escoamento pelo orifício é liberado no momento que passamos a cronometrar o tempo, conforme visto durante a experiência realizada.

Para deduzirmos a função que estabelece a relação entre a altura do líquido e o tempo de escoamento algumas observações são necessárias:

1. A quantidade de líquido que vemos “descer" na garrafa num determinado intervalo de tempo é igual a quantidade de líquido que sai pelo orifício no mesmo intervalo. Observemos que a velocidade com que o líquido "desce" é, em princípio, diferente da velocidade com que o mesmo sai pelo orifício. Neste nosso caso a velocidade de saída é “muito" maior que a velocidade de descida.

Notação:

Indiquemos por: $h = h(t)$ a altura do líquido no instante t, A a área da seção do vasilhame em qualquer altura $h = h(t)$, pois neste caso a garrafa plástica tem formato cilíndrico e, portanto, suas secções transversais tem área constante.

$h(0) = H$ representa a altura do líquido antes do início do escoamento, a área do orifício, g aceleração da gravidade na cidade de Matão fixada em $9.784 m/s^2$.

Com a notação $\frac{dh}{dt}$ queremos indicar a velocidade com que o líquido "desce" e finalmente com a notação v_e queremos indicar a velocidade de escoamento do líquido pelo orifício.

2. Observemos que a vazão pode ser obtida, no mínimo de duas formas diferentes, multiplicando-se a área da secção de altura h pela velocidade $\frac{dh}{dt}$ que o líquido desce ou multiplicando-se a área a do orifício pela velocidade de escoamento (v_e) e pelo coeficiente de vazão ou descarga. Portanto:

$$\text{vazão} = A \cdot \left(\frac{-dh}{dt}\right) = a \cdot v_e \cdot C_Q \qquad (1)$$

onde: $C_Q = C_v . C_c$ é conhecido como coeficiente de vazão ou de descarga. C_v é o chamado coeficiente de velocidade, vale aproximadamente $0,98$ e C_c é o chamado coeficiente de contração e varia de $0,65$ a $0,98$. No nosso caso experimentalmente vimos que atribuindo a

C_Q um valor aproximadamente igual a 0,7268, as funções e os gráficos praticamente coincidem. Falando de maneira extremamente simples e informal, este fator existe porque o fluído não faz curva muito acentuada. Para chegarmos nesse valor escolhemos inicialmente o valor médio e por aproximações sucessivas, usando o Maple obtivemos o valor acima.

3. Esse sistema é conservativo, portanto segue da equação de Bernoulli que em qualquer nível a soma da energia cinética [normalizada pelo volume] com a potencial [também normalizada] mantém-se constante, isto é:

$$\frac{1}{2}\frac{m}{V}\cdot\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+\frac{m}{V}\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\frac{m}{V}\cdot(v_e)^2 \quad (2)$$

É evidente que também podemos escrever:

$$\frac{1}{2}\rho\cdot v_1^2+\rho\cdot g\cdot h_1=\frac{1}{2}\rho\cdot v_2^2+\rho\cdot g\cdot h_2 \quad (3)$$

onde $v_1(t)=\dfrac{dh}{dt}$, $h_1(t)=h(t)$, $v_2(t)=v_e(t)$ e $h_2(t)=0$.

Não mencionamos nada sobre a pressão exercida pelo ar na parte superior aberta da garrafa e no orifício, pois, as mesmas são “iguais" (pressão atmosférica). A equação acima é uma versão simplificada da conhecida equação de Bernoulli aplicada ao nosso problema.

4. Da equação (1) obtemos $v_e=\dfrac{-A}{a.C_Q}\cdot\dfrac{dh}{dt}$. Substituindo esse valor na equação (2) obtemos:

$$\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+m\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}m\cdot\left[\frac{A}{a.C_Q}\cdot\frac{dh}{dt}\right]^2 \quad (4)$$

5. Cancelando-se m e colocando-se $\dfrac{dh}{dt}$ em evidência obtemos:

$$\frac{A^2-a^2\cdot C_Q^2}{a^2\cdot C_Q^2}\cdot\left(\frac{dh}{dt}\right)^2=2\cdot g\cdot h \quad (5)$$

6. Ou ainda:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \frac{\sqrt{A^2 - a^2 \cdot C_Q^2}}{a^2 \cdot C_Q^2} \cdot \left(\frac{dh}{dt}\right) = -\sqrt{2 \cdot g} \qquad (6)$$

7. O sinal negativo justifica-se pelo fato de que a derivada de h em relação a t é negativa, uma vez que, $h = h(t)$ diminui a medida que o tempo passa.

8. Usando, simplesmente, o Teorema Fundamental do Cálculo, um pouco de habilidade e a regra da cadeia para derivação obtemos a função que estávamos procurando, ou seja:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot a^2 \cdot C_Q^2}{2A^2 - a^2 \cdot C_Q^2} \cdot t^2 - a \cdot C_Q \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{A^2 - a^2 \cdot C_Q^2}} \cdot t + H \qquad (7)$$

Esta função é a que foi utilizada no Maple.

APÊNDICE B

PRODUTO FINAL

Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido

Orientações Gerais para aplicação do experimento

1. Considerações iniciais

O presente experimento pode ser aplicado nas três séries do Ensino Médio e até em algumas classes de oitava série (nono ano) do Ensino Fundamental. Espera-se que o aluno já esteja familiarizado com tabulação de dados e resolva com desenvoltura equações do 1º e do 2º grau e sistemas lineares pelo menos com duas equações e duas incógnitas. Poderíamos aproveitar o momento para estender o estudo de soluções de sistemas lineares, para sistemas lineares com três equações e três incógnitas, por ser uma necessidade frente ao fato de que algumas curvas são perfeitamente determinadas por três pontos não colineares e por ser o estudo dos sistemas lineares com mais de duas equações e duas incógnitas parte integrante do conteúdo da segunda série do ensino médio. Para o caso dos alunos sentirem dificuldade na resolução de sistemas recomentamos que esse assunto seja discutido em sala de aula antes da realização do experimento. Acreditamos, todavia, que os estudantes não terão maiores dificuldades, pois o sistema inicialmente com três equações e três incógnitas pode, na pior das hipóteses, ser facilmente transformado num sistema com duas equações e duas incógnitas com duas subtrações.

Este experimento pode ser realizado com alunos que talvez nem saibam o que é uma função. Outros podem saber o que é uma função e terem adquirido noções sobre funções lineares e afins. Outros ainda podem ter estudado as funções quadráticas com ou sem análise de gráficos, ou terem noções sobre funções exponenciais e as logarítmicas. Se por ventura os alunos não tiverem conhecimento sobre funções o experimento pode se tornar um fator motivador. Quando pensei em minha dissertação, queria algo que me ajudasse a construir com os alunos um conhecimento novo, ou seja, partindo da resolução de problemas ou mesmo da modelagem, mostrar, pelo menos, a necessidade de estudarmos determinados assuntos. A realização desse experimento com alunos que ainda não dominam totalmente as funções e análises de gráficos permitiria, num primeiro momento, que percebessem que o conhecimento que eles têm até então não é suficiente para que possam explicar determinados fenômenos. Antes mesmo deste experimento seria interessante que os alunos já tivessem realizado outros experimentos envolvendo funções lineares e afins, contudo, cabe ao professor analisar se seus alunos estão preparados para tal tarefa. Caso o experimento seja realizado no ensino médio antes do estudo da função quadrática, ele poderá servir como motivação para o aprendizado dessa função. Se for realizado após o estudo da função quadrática, provavelmente, quando os estudantes tentarem obter a função, observando a curva, poderão intuir que a função seja quadrática e tentar obtê-la usando os recursos algébricos e conceitos aprendidos ou simplesmente recorrendo a algum software. Se o experimento for realizado na segunda série do ensino médio, quando os alunos além das funções afim, linear e quadrática, também já tiverem conhecimento das funções exponenciais e logarítmicas, poderão suspeitar que uma delas modele o escoamento. Nesse momento é importante deixar que cada um dos grupos faça sua investigação e discutam entre si sem a interferência do professor. Caso o experimento se dê com as terceiras séries do ensino médio e os alunos já tenham algum conhecimento sobre funções polinomiais de grau superior a dois é provável que tentem encontrar funções polinomiais do terceiro ou quarto grau. No momento que o professor julgar oportuno, nas diversas séries, ele deverá esclarecer qual é uma boa função que modela o escoamento do líquido. O escoamento de um líquido é estudado na mecânica dos fluidos. Em nossa dissertação de mestrado profissional deduzimos, no apêndice 1, a função que fornece a altura do líquido em função do tempo decorrido no escoamento. A função que deduzimos é:

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot a^2 \cdot C_Q^2}{2A^2 - a^2 \cdot C_Q^2} \cdot t^2 - a \cdot C_Q \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{A^2 - a^2 \cdot C_Q^2}} \cdot t + H \qquad (1)$$

onde:

$h = h(t)$ é a altura do líquido no instante t, A é a área da seção do vasilhame em qualquer altura $h = h(t)$, pois neste caso a garrafa plástica tem formato cilíndrico e, portanto, suas secções transversais tem área constante.

$h(0) = H$ representa a altura do líquido antes do início do escoamento, a área do orifício, g aceleração da gravidade na cidade onde será realizado o experimento.

$C_Q = C_v . C_c$ é conhecido como coeficiente de vazão ou de descarga. C_v é o chamado coeficiente de velocidade, vale aproximadamente $0{,}98$ e C_c é o chamado coeficiente de contração e varia de $0{,}65$ a $0{,}98$.

Observemos que a função acima é quadrática, logo nosso experimento deve ter uma função quadrática que o modele.

Entendemos, porém, que a matemática deve ser capaz de desvendar seus próprios mistérios, por isso é que apresentamos uma caracterização das funções quadráticas:

Em nossa dissertação de mestrado provamos que:

"Se $f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária e $x_1, x_{2,} x_{3,} x_4, \ldots$ é uma progressão aritmética qualquer então a sequência $y_1, y_{2,} y_{3,} y_4, \ldots$ dos valores $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3)$, etc..., goza da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3 \ldots$ formam uma progressão aritmética".

Sugerimos que o professor escolha diversas funções quadráticas, completas, incompletas, com o coeficiente a positivo ou negativo, com zeros reais ou não, para que o aluno perceba que a caracterização acima é verdadeira. Nas séries mais avançadas como segundo ou terceiros colegiais seria de bom alvitre que a demonstração fosse feita.

Também demonstramos que:

"Se a sequência $y_1, y_{2,} y_{3,} y_4, \ldots$ é uma Progressão Aritmética de segunda ordem, ou seja, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3)$, etc..., goza da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_{1,}$ $d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3 \ldots$ formam uma progressão aritmética então existem números reais A, B e C, tais que $y_n = An^2 + Bn + C$ para todo n natural".

O teorema: "Caracterização das Funções Quadráticas" diz que:

> "*A fim de que a função contínua f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante $x_{1,}\, x_{2,}\, \ldots, x_{n,}$ ... seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y_1 = f(\,x_1\,)$, $y_2 = f(\,x_2\,), \ldots y_n = f(\,x_n\,), \ldots$* (Lima, 1998, p. 149)

2. Material necessário

- Vasilhame transparente de formato cilíndrico

  Pode ser qualquer tipo de garrafa ou recipiente cilíndrico transparente. Para diâmetros e alturas variadas basta procurar em lojinhas que trabalham com enfeites.

Nós utilizamos uma garrafa PET com capacidade para dois litros e com diâmetro de 10 cm. Trabalhamos com o mesmo material para podermos comparar de forma mais eficiente os resultados;

- Líquido, de preferência colorido, para facilitar a leitura;
- Fita de papel milimetrado que será colada na face lateral da garrafa PET com o objetivo de registrar o nível da água em determinados intervalos de tempo durante o escoamento;
- Fita adesiva transparente, tipo durex, com largura superior a da fita de papel milimetrado, caso não se queira colar a fita diretamente sobre a garrafa.
- Tesoura;
- Brocas de diversos tamanhos. O ideal é que se encontrem brocas graduadas em mm;
- Furadeira ou outro instrumento auxiliar que permita, com facilidade, perfurar o vasilhame no ponto desejado;
- Lixa d'água não muito áspera;
- Cronômetro ou relógio que possibilite marcar os intervalos de tempo desejados;
- Lápis ou caneta para retroprojetor com ponta fina caso se utilize a fita adesiva;
- Paquímetro;

3. Procedimento

Na lateral e próximo ao fundo do vasilhame fazer um furo com broca fina para não estourar a garrafa e em seguida aumentar o furo com a broca pretendida usando baixa rotação *(Foto 1) e (Foto 2)*


Foto 1

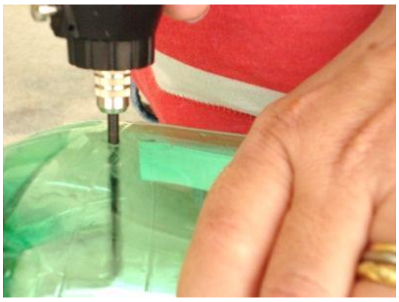


Foto 2


Foto 4

- Com uso de uma régua fazer um risco, de leve, obtendo a direção vertical. (Foto 4)
- Para facilitar a leitura colocar o papel milimetrado numa fita adesiva transparente (Fig. 5), em seguida, colar a fita na garrafa Pet. (Fig. 6).

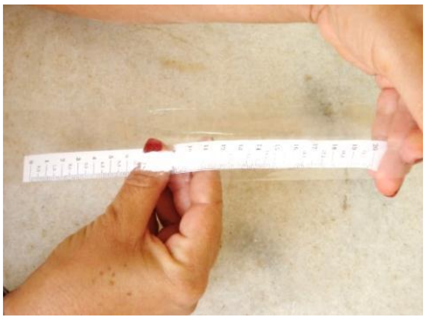


Foto 5

Foto 6

Foto 7

A fita adesiva também tem a função de proteger a fita de papel evitando que ela se molhe.

- ❖ Cortar a garrafa usando uma tesoura. Lixar o contorno do furo interna e externamente. Pequenas rebarbas interferirão no experimento.
- ❖ O furo é vedado e os alunos enchem a garrafa com água. O furo é destampado no instante $t = 0$ e a cada 10s é marcada sobre a fita a altura da água. Dessa forma, cada grupo de alunos obterá informações sobre a função $h(t)$, inicialmente discreta, que esperamos ser uma boa função que modele a altura da água em cada instante $t \geq 0$

Obs.1 Evitar apertar a garrafa para não interferir na medição da altura.

Obs.2 Em dias de muito frio a garrafa “sua” e com isso a fita colada com a fita adesiva também “sua” dificultando a marcação com a caneta de retroprojetor. Nesse caso sugerimos que a fita graduada seja colada diretamente na garrafa, mas, evitando-se que ela se molhe.

Para a realização do experimento é conveniente dividir a classe em grupos, a critério do professor. Cada grupo fará em seguida uma tabela colocando o tempo e a correspondente altura da água na garrafa. Os dados da tabela serão plotados inicialmente de forma discreta num sistema de coordenadas cartesianas, primeiro numa folha de papel milimetrado e depois através de algum software gráfico.

É conveniente padronizar os registros para facilitar a posterior conferência por parte do professor e uma possível exposição dos trabalhos.

Sugerimos que todas as atividades sejam feitas em folhas A4 e, como a folha de papel milimetrado não é utilizada integralmente é melhor que ela seja colada na folha A4 ao lado da tabela com os dados oriundos do experimento, como mostramos a seguir.

Nas folhas seguintes colocamos um experimento realizado com as justificativas que o professor deve repassar ao aluno no momento em que julgar mais conveniente.

Folha de papel A4

Complete a tabela e cole a folha de papel milimetrado

Grupo número ______ Garrafa ______ Diâmetro do furo 4 mm

Integrantes do grupo:

1) ____________________________________ 2) ______________________________________

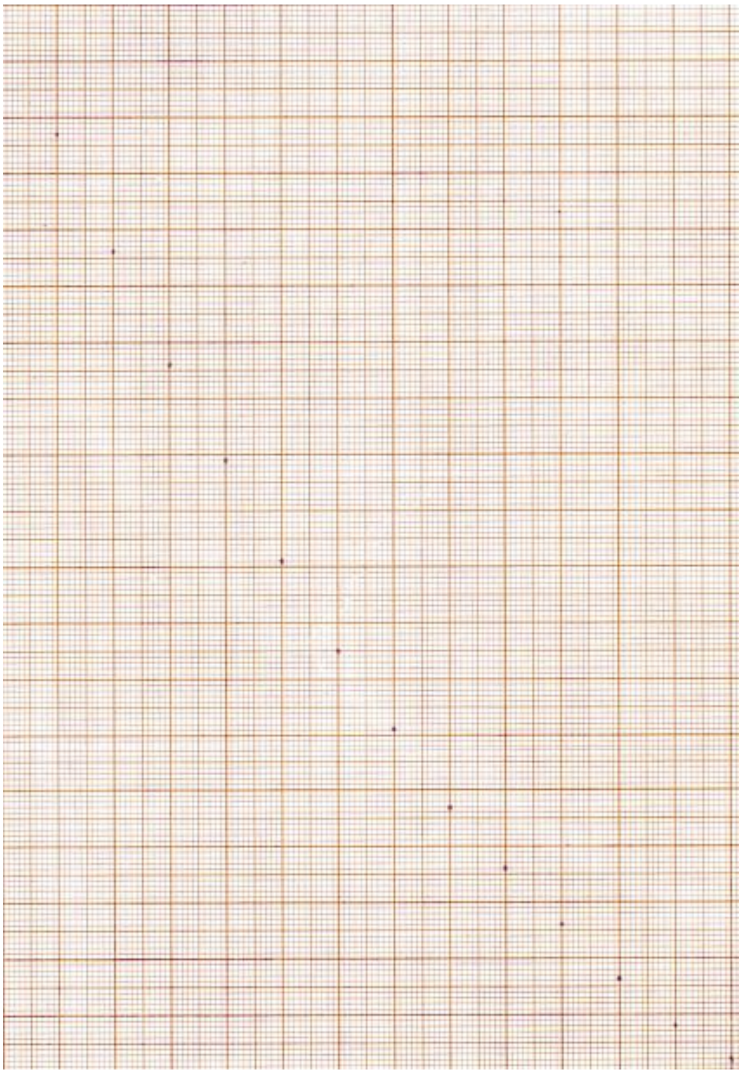
3) ____________________________________ 4) _____________________________________

Após a realização do experimento os dados foram colocados na tabela 1.

Tabela 1

t	H
0	20
10	17,8
20	15,7
30	13,7
40	11,9
50	10,2
60	8,7
70	7,3
80	6,0
90	4,8
100	3,7
110	2,8
120	2,1
130	1,5
140	1,0

Colar aqui o papel milimetrado

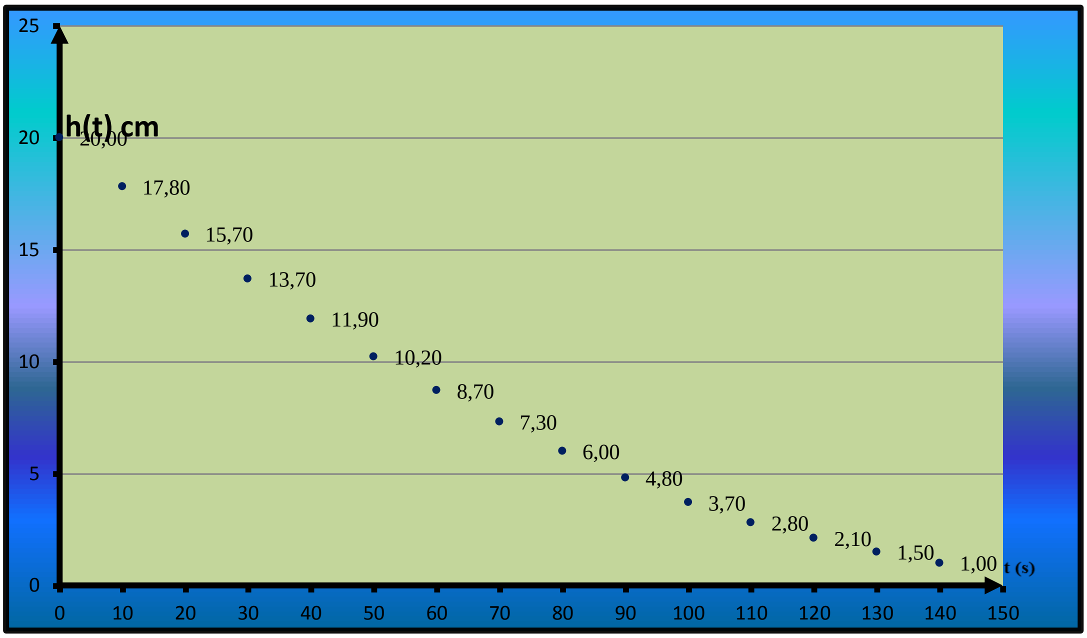


Completamos a tabela 2

T	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
H	20,00	17,80	15,70	13,7	11,9	10,2	8,70	7,30	6,00	4,80	3,7	2,8	2,10	1,50	1,00
D1		-2,20	-2,10	-1,95	-1,80	-1,70	-1,55	-1,40	-1,30	-1,20	-1,05	-0,90	-0,75	-0,60	-0,50
D2			0,00	0,15	0,15	0,10	0,15	0,00	0,10	0,10	0,00	0,15	0,15	0,15	0,10

Onde as duas primeiras linhas são uma repetição da tabela 1. Na terceira linha (D1) calculamos as diferenças consecutivas $h(10)-h(0)$, $h(20)-h(10)$, etc. Na quarta linha (D2) calculamos as diferenças consecutivas dos valores da terceira linha. Verificamos que as diferenças D2 são números aproximadamente constantes e as diferenças D1 são termos que estão aproximadamente em P.A. A importância dessas duas observações é que, de acordo com uma *caracterização das funções quadráticas* (Lima, 1998 p. 144 à p.149), que mostramos anteriormente, se a segunda variação de uma função é constante então a função é quadrática.

Com uso do Excel plotamos os dados discretos em um sistema de coordenadas cartesianas.



Plotamos num sistema cartesiano os valores correspondentes às primeiras diferenças e determinamos a reta de tendência, pois os dados discretos devem estar aproximadamente em P.A..

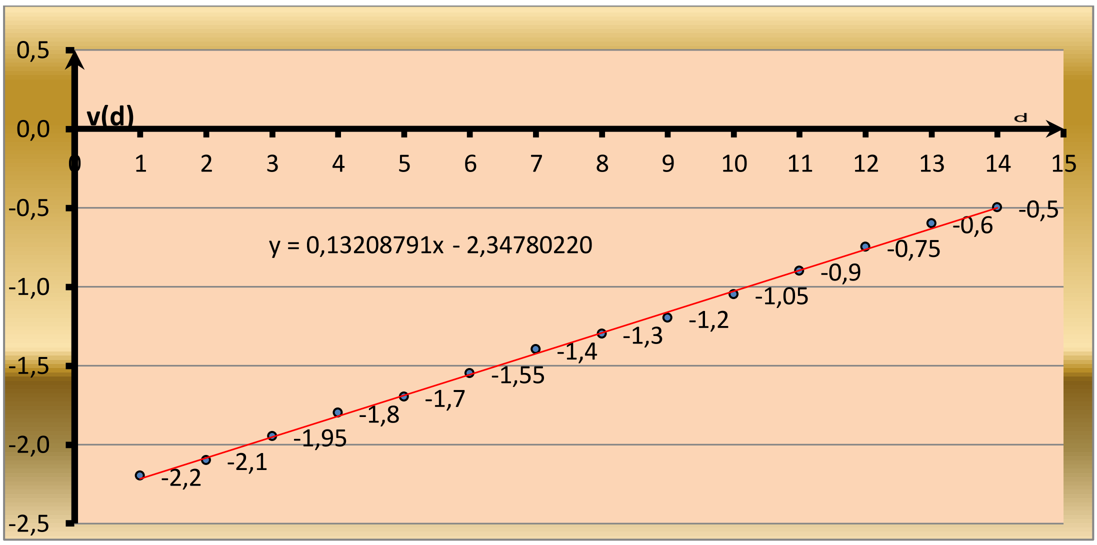
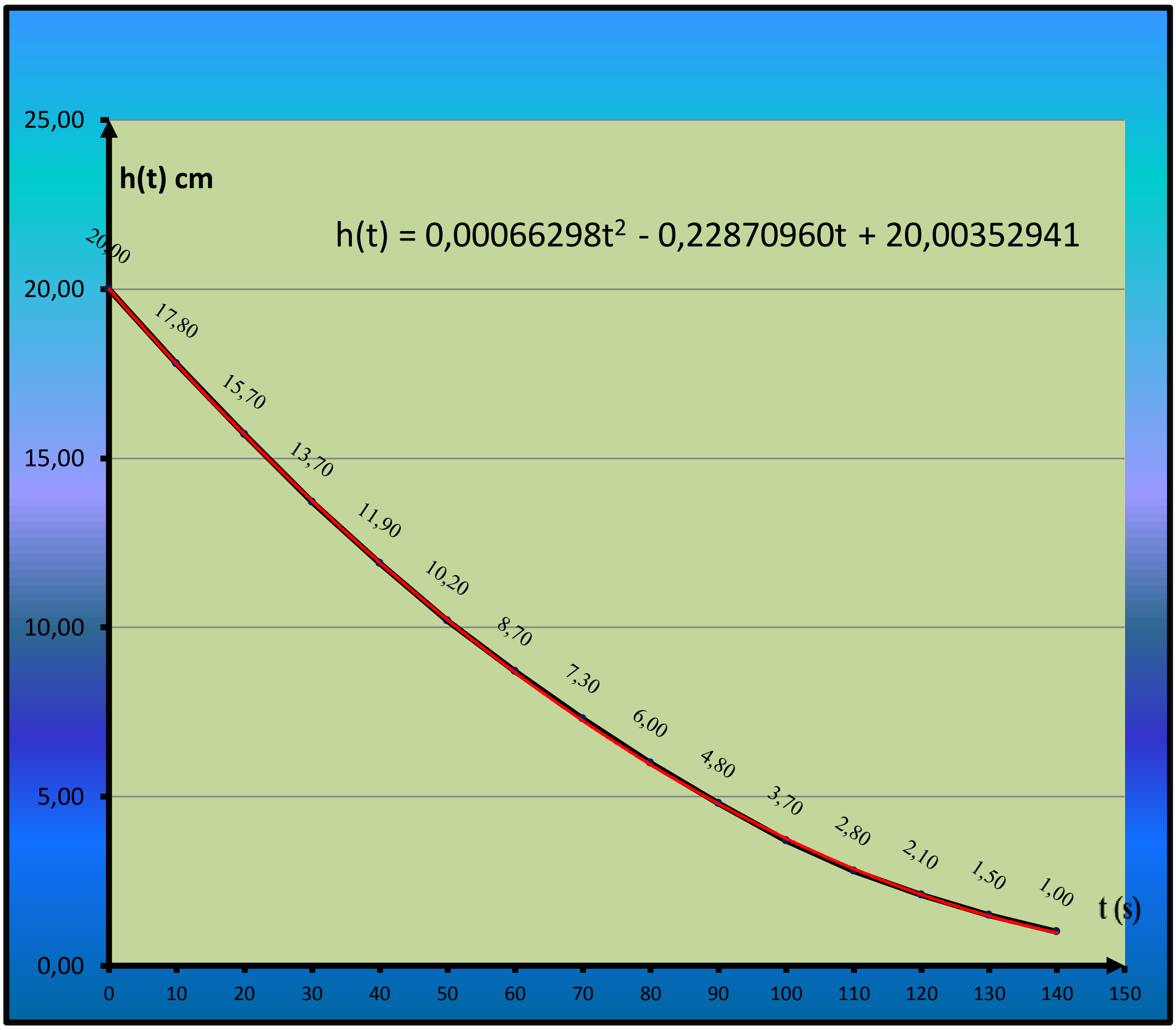


Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças. furo de 4 mm

Percebemos que a dispersão é mínima, ou seja, as diferenças estão praticamente em P.A.. Pela caracterização da função quadrática, concluímos que a função quadrática é uma boa função para modelar o escoamento.

Como a função quadrática fica perfeitamente determinada por três de seus pontos, escolhemos três pontos não alinhados e resolvemos o sistema para a obtenção da função quadrática. Seria interessante escolher pelo menos três conjuntos com três pontos não alinhados para a comparação dos resultados. Em um desses conjuntos de pontos sugerimos que um deles seja o (0, 20). Felizmente hoje, dispomos de softwares gráficos que nos ajudam nessa tarefa. O Excel é um deles.

Com uso do Excel obtivemos a curva de tendência e a função quadrática que modela o escoamento do líquido.



Vemos que no gráfico existem duas curvas, uma vermelha e uma preta, que praticamente coincidem.

A curva preta contém os pontos obtidos com os dados discretos.

A curva vermelha representa a parábola determinada pela função quadrática.

OBS. Para qualquer dúvida entrar em contato com o autor pelo e-mail: kapy.y@uol.com.br

Dissertação completa em:

http://www2.ufscar.br/interface_frames/index.php?link=http://www.ppgece.ufscar.br/

Exemplo de folhas que podem ser distribuídas aos grupos de alunos.

Grupo número ______ Vasilhame ______ Diâmetro do furo do Vasilhame _______

Integrantes do grupo:

1)_____________________________________ 2)_______________________________________

3) _____________________________________ 4) ______________________________________

Tabela 1

t	H
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	
110	
120	
130	
140	

Colar aqui o papel milimetrado

Complete a tabela colocando as diferenças 2.

T	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
H															
D1															
D2															

As duas primeiras linhas são uma repetição da primeira tabela. Na terceira linha (D1) calculamos as diferenças consecutivas $h(10)-h(0)$, $h(20)-h(10)$, etc. Na quarta linha (D2) calculamos as diferenças consecutivas dos valores da terceira linha.

Com uso do _______________ plotamos os dados em um sistema de coordenadas cartesianas.

Imprimir e colar o gráfico aqui.

Gráfico da reta de tendência e função linear que fornece a variação das diferenças.

Vemos no gráfico que a dispersão é mínima.

Como os pontos estão praticamente alinhados, podemos inferir que uma função quadrática deve fazer um bom ajuste dos dados.

Como a função quadrática fica perfeitamente determinada por três de seus pontos, escolhemos três pontos não alinhados e resolvemos o sistema para a obtenção da função quadrática que modela o experimento.

Primeiro conjunto de pontos: (0 , 20) , (,) , (,)

Montagem do sistema e resolução

....

.... Função obtida:

Segundo conjunto de pontos: (,) , (,) , (,)

Montagem do sistema e resolução

....

.... Função obtida:

Com uso do ___________________________obtivemos a curva de tendência e a função quadrática que modela o escoamento do líquido.

Comparamos os resultados:

Pontos	*Função*
	h(t)=
	h(t)=
	h (t)=
	h(t)=
Com todos os pontos (Excel)	***h(t) =)***

Considerações finais do grupo sobre a atividade desenvolvida: (pode ser um questionário aplicado pelo professor)

Obs. Utilizar tantas folhas quantas forem necessárias. Para uma possível exposição dos trabalhos é melhor que em cada folha aparece a resolução de um único sistema. O mesmo sistema pode ser resolvido com auxílio de algum software gráfico para que os resultados possam ser comparados. No final, apresenta-se a curva de tendência e a função que modela o experimento obtida com todos os pontos usando-se algum software gráfico.

Por fim, digitando-se a função abaixo em algum software gráfico pode-se determinar, por tentativa e erro, o valor do coeficiente C_Q.

$$h(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot a^2 \cdot C_Q^2}{2A^2 - a^2 \cdot C_Q^2} \cdot t^2 - a \cdot C_Q \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{A^2 - a^2 \cdot C_Q^2}} \cdot t + H \qquad (1)$$

Seria interessante realizar o experimento com vasilhames com furos de diversos tamanhos e comparados posteriormente os valores do coeficiente C_Q.