UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

RODRIGO DO CARMO SILVA

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM AULAS EXPOSITIVAS E FICHAS DE AULA EM UMA ESCOLA DE ENSINO MÉDIO DO INTERIOR PAULISTA.

SÃO CARLOS
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRAUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

RODRIGO DO CARMO SILVA

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM AULAS EXPOSITIVAS E FICHAS DE AULA EM UMA ESCOLA DE ENSINO MÉDIO DO INTERIOR PAULISTA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), como exigência parcial para obtenção do título de mestre, sob orientação do Professor Doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti.

SÃO CARLOS
2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

S586ea

Silva, Rodrigo do Carmo.
O ensino de análise combinatória com aulas expositivas e fichas de aula em uma escola de ensino médio do interior paulista / Rodrigo do Carmo Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
116 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Análise combinatória. 2. Ficha diagnóstico. 3. Ficha de aula. I. Título.

CDD: 511.6 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM – UFSCar

Profa. Dra. Ires Dias
ICMC – USP

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
DM – UFSCar

“Um país se faz com homens e livros”

(Monteiro Lobato)

AGRADECIMENTOS:

- À Deus, força invisível presente todos os dias de minha jornada *(“...sabemos que todas as coisas concorrem para o bem daqueles que amam a Deus...” (Epístola de São Paulo aos Romanos, Capítulo 8, versículo 28)*) ;
- À minha família: Luciene e João Pedro, os pilares de tudo o que tenho e que sou (*“Por isso deixará o homem o seu pai e a sua mãe e se unirá a sua mulher; e os dois serão apenas uma só carne” (Evangelho de São Marcos, Capítulo 10, versículos 7 e 8*));
- Aos meus pais (Carmo e Bernadete) e meus irmãos (Bianka, Bruna e André), a primeira família;
- Aos colegas de turma que conviveram esse tempo comigo: André Varella, Fábio Cruzado, Fábio Freitas, Felipe Lima, Marcela, Mário, Maristela, Renata, Dimitrius, Edson, Fábio Zanoni, Fred, Lucas, Marina, Max e Rodrigo. Pessoas fantásticas e professores do mais alto gabarito;
- À todos os professores que trabalham e que um dia trabalharam comigo na epopeia do conhecimento, em especial aos professores Eduardo Monteiro de Souza Júnior, Émerson Flamarion da Cruz, João Guilherme Giudice e Marco Antônio Batista;
- À todos os professores do Mestrado Profissional do PPGECE da UFSCar que compartilharam comigo um pouco de suas experiências, em especial ao Professor Pedro Malagutti, pelo esmero e dedicação com que orientou-me para que essa Dissertação possa agregar algo à educação básica brasileira;
- À direção do colégio Anglo/Campinas, Unidade Taquaral, em especial à diretora da unidade, Marta M. Kohn, por permitir a realização da pesquisa;
- Aos professores Leandro C. Vicente e Vitor Hugo Haidar pela significativa contribuição no trabalho;

RESUMO:

O trabalho apresentado a seguir, é a descrição e o relato de uma pesquisa realizada com alunos do segundo ano do Ensino Médio, em uma escola no interior do Estado de São Paulo sobre o tema de Análise Combinatória, tema este que corriqueiramente é negligenciado nesse nível de ensino. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o tema Análise Combinatória tem espaço no conteúdo programático da segunda série do Ensino Médio, e assim sendo, a intervenção foi feita com alunos desse nível escolar. Tal intervenção consta de duas Fichas-Diagnóstico (uma aplicada no início da pesquisa e outra aplicada ao final da pesquisa, servindo como instrumento de comparação), e três Fichas de Aula, que contemplam toda a Análise Combinatória descrita para ser desenvolvida no Ensino Médio. Cada Ficha Diagnóstico tem cinco exercícios sobre contagem, e cada Ficha de Aula tem um resumo da teoria desenvolvida 'in loco' com a participação do professor e dos alunos na forma de aula expositiva, e alguns exercícios para aplicação da teoria desenvolvida na Ficha de Aula. As análises, comentários e comparações coletados pelo professor na aplicação das Fichas de Aula estão descritas nessa Dissertação. O produto final do Mestrado Profissional está disponível no site do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE:

www.ppgece.ufscar.br

Palavras-chave: Análise Combinatória. Ficha Diagnóstico. Ficha de Aula.

ABSTRACT:

The following paper is a description of a research performed with second year of high school students, in a school in the inland of the state of São Paulo, over the topic of Combinatorial Analysis. Such topic is normally neglected in this teaching level. According to the National Teaching Parameters (Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN), the topic of Combinatorial Analysis is a theme with its place in the normal contents of the second year of high school, being so, the intervention was performed with students of this level. The intervention entails two Diagnoses Files (one applied in the beginning of the research, and the other in the end, serving as a comparison tool) and three Classroom Files, which take into consideration all the Combinatorial Analysis to be developed in High School. Each Diagnosis File has 5 exercises about counting, and each Classroom File has a summary of the theory developed with the participation of the teacher and the students in the form of theoretical and practical classes, and some exercises for the application of the theory developed in the Classroom File. Analysis, comments and comparisons collected by the teacher in the application of the classroom files are described in this paper. The final product of this Master degree thesis is available in the web site of Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE (Postgraduate program of exact sciences teaching):

www.ppgece.ufscar.br

Keywords: Combinatorial Analysis. Diagnosis File. Classroom File.

SUMÁRIO:

1. INTRODUÇÃO:

Antes de descrever algumas passagens da minha trajetória, narrarei um fato importante para o que sou hoje.

Em 1992, quando cursava a 7ª série, estudava em uma escola municipal chamada Presidente Humberto de Alencar Castelo Branco, na cidade de Campinas, interior do estado de São Paulo. Foi lá que conheci a professora de Matemática chamada Emília, que me fez gostar e admirar a Matemática, não só pelo jeito de ensinar, mas também pelo modo de cativar os alunos, com seu jeito sério e, ao mesmo tempo, envolvente. Posso dizer que foi a professora Emília que me influenciou a tornar-me professor.

No último ano do 1º grau (atual Ensino Fundamental), tive a minha maior decepção enquanto estudante: em uma prova de Matemática, tive nota 1,0 (um) em uma escala de 0,0 (zero) a 10,0 (dez), o que me serviu de motivação, pois após esse dia, prometi para mim mesmo que a Matemática nunca mais seria um obstáculo durante os meus estudos.

Sempre estudei em escola pública (fiz o 2º grau, hoje ensino médio, na escola estadual Professor Aníbal de Freitas, Campinas/SP), e por isso, não estudei todos os assuntos da Matemática em nível de ensino básico, tais como: Geometria Plana, Progressões, Sistemas Lineares, Análise Combinatória, Probabilidade, Polinômios, Equações Algébricas, Função Modular, Circunferência em GA.

Entretanto, sempre que algum assunto era apresentado, ficava hipnotizado e querendo saber mais.

Nessa época, percebi que a arte de ensinar estava cada dia mais presente, afinal sentia-me bem ensinando meus colegas nos grupos de estudos que montávamos no colégio nas vésperas de prova.

Às vésperas do encerramento da inscrição para o Vestibular da UNICAMP, recordo-me de uma passagem que foi fundamental em minha carreira profissional. No Ensino Médio estudei com uma professora de Geografia chamada Mara Olmos, que questionou o que iria fazer na faculdade, e respondi que ia fazer Economia.

Entretanto, a professora Mara me disse para fazer Matemática, pois, segundo ela, era melhor para mim e eu iria gostar. De certa forma, tal observação intrigou-me e levou-me a refletir sobre essa constatação de alguém que me conhecia apenas na sala de aula. Com um pouco de reflexão de minha parte, resolvi encarar e concorrer a uma das vagas do curso de Licenciatura em Matemática no período noturno da UNICAMP, pois pretendia estudar à noite e trabalhar durante o dia.

No primeiro ano que prestei não passei, e de certo modo, posso creditar isso à falta de professores no colégio, a se destacar na disciplina de Física. No 2º colegial tive dois professores diferentes, e no 3º colegial tive quatro professores diferentes, sendo que fiquei um mês sem professor algum da área.

Não desisti. No segundo semestre do ano seguinte, em 1997, fiz um semiextensivo para revisar alguns pontos, e em 1998 ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), apesar de não saber, no momento, diferenciar Licenciatura de Bacharelado.

Na aula inaugural do curso de Licenciatura em Matemática, o então coordenador do curso, Professor Hugo Horácio Torriani, afirmou que o curso destina-se '... a formar os melhores professores do Brasil ...'.

Até esse momento, não tinha cogitado a possibilidade de ser professor e trabalhar com ensino.

Amadureci a ideia de entrar no Magistério, e no segundo semestre de 1998 assumi aulas de Física como professor eventual na escola estadual Adalberto Nascimento, em Campinas. Foi a minha primeira experiência com ensino. Fiquei no Adalberto Nascimento por 3 meses. Ao final de uma dessas aulas, fui ao lugar onde tinha feito o curso semiextensivo para o vestibular conversar com os donos do curso e, ao final da conversa fui convidado para trabalhar, aos sábados, com plantão de dúvidas para alunos que iriam prestar vestibulinho (concurso de admissão para os colégios técnicos).

A partir desse momento, não deixei a sala de aula. Como não tinha a Licenciatura completa, procurei escolas estaduais para trabalhar como professor eventual, e cursos pré-vestibulares para trabalhar com monitorias e plantões de dúvidas, e assumi aulas de Matemática no colégio Aníbal de Freitas, em caráter substitutivo.

Nesse mesmo ano, eu comecei a trabalhar como plantonista em um curso pré-vestibular chamado MED Vestibulares na cidade de Campinas.

Conhecendo professores, trocando ideias sobre escolas, comecei a ser indicado em algumas escolas particulares, e isso se tornou uma bola de neve: quanto mais escolas, mais professores, mais indicações e mais propostas de emprego. Já que não possuía a Licenciatura completa, comecei como plantonista e assumia algumas aulas esporádicas.

Em 2000, já estava em sala de aula no curso MED e na Consultoria Educacional, e atuava como plantonista no Curso e Colégio Integral e na Trianon – Academia de Ciências Exatas.

Concluindo a Licenciatura em 2001, iniciei efetivamente com aulas regulares a partir do ano de 2002. Lecionei por várias escolas:

- ✓ **Curso Elite Pré-Vestibular** (desde MAR/2003) – Campinas/SP;
- ✓ **Colégio Anglo/Campinas** (desde AGO/2010) – Campinas/SP;
- ✓ **Curso e Colégio Progressão** (de FEV/2010 à DEZ/2010) – Taubaté/SP;
- ✓ **Curso e Colégio Objetivo** (de FEV/2008 à JUN/2010, de FEV/2005 à DEZ/2005 e de FEV/2002 à DEZ/2002) – Mogi Guaçu/SP, Mogi Mirim/SP, Sumaré/SP e Itapetininga/SP;
- ✓ **Colégio Dom Barreto** (de JAN/2009 à DEZ/2009) – Campinas/SP;
- ✓ **Colégio Pelicano** (**Anglo Poços de Caldas**) (de SET/2006 à DEZ/2008) – Poços de Caldas/MG;
- ✓ **Colégio Villa-Lobos** (de ABR/2008 à DEZ/2008) – Amparo/SP;
- ✓ **Curso e Colégio Jundiaí** (de SET/2006 à DEZ/2007) – Jundiaí / SP;
- ✓ **Colégio Etapa** (de FEV/2006 à JUN/2006) – São Paulo/SP;
- ✓ **Curso e Colégio Integral** (de OUT/2000 à DEZ/2005) – Santa Bárbara D'Oeste/SP, Paulínia/SP, Poços de Caldas/MG;
- ✓ **Colégio Ápice** (de AGO/2004 à DEZ/2005) – Campinas/SP
- ✓ **Faculdade de Jaguariúna** (de FEV/2003 à DEZ/2005) – Jaguariúna/SP;
- ✓ **Faculdade Comunitária de Campinas** (de MAR/2002 à DEZ/2005) – Campinas / SP;
- ✓ **Curso MED Pré-Vestibulares** (de SET/1999 à MAI/2004) – Campinas/SP;
- ✓ **Trianon – Academia de Ciências Exatas** (de SET/2001 à JUN/2004) – Campinas/SP;
- ✓ **Faculdade Politécnica de Jundiaí** (de FEV/2002 à DEZ/2002) – Jundiaí/SP.

Em cada escola, cada aula foi (e continua sendo) um aprendizado. Seguindo as palavras do Professor Augusto César Morgado (*in memoriam*) "O professor deve saber muitíssimo mais do que vai ensinar", todos os momentos em sala de aula são únicos, é o momento de colocar em prática esses 30 anos de aprendizagem e de estudo em benefício do meu aluno. Cada erro cometido é uma mola propulsora para o aprimoramento do lecionar. Em todos esses anos que leciono, em várias escolas tive a oportunidade de lecionar Análise Combinatória, que é o tema escolhido para essa dissertação. Tema que é mal lecionado na maioria das vezes, pois a pergunta que surge em todo exercício de Análise Combinatória é: *Qual a fórmula que devo usar para resolver esse exercício, a fórmula de Arranjo ou de Combinação?*

Independente do nível de escolaridade que esteja lecionando, seja Ensino Médio, seja em curso pré-vestibular, percebi, ao longo dos anos, que as dúvidas expostas e os erros cometidos pelos alunos são os mesmos. Toda vez que encerrava o assunto, percebia que os alunos entendiam a Análise Combinatória e resolvi sintetizar essas aulas em um roteiro para o aluno desenvolver a teoria conjuntamente comigo, tentando obter resposta para uma inquietação: **Será que as Fichas de Aula, junto com as aulas expositivas, trazem um aprendizado mais significativo em Análise Combinatória?** Assim sendo, a partir de 2009, criei essas Fichas de Aula que uso desde então para lecionar Análise Combinatória, e a experiência tem comprovado que esse método é eficaz para o ensino-aprendizagem, pois enfoca, em primeiro plano, o Princípio Multiplicativo, que é base da contagem e em seguida os principais agrupamentos: Permutação, Arranjo e Combinação. Esses agrupamentos são trabalhados de maneira intuitiva e sem o recurso da fórmula, isto é, apenas com a interpretação correta do enunciado e a aplicação do Princípio Multiplicativo. As fórmulas aparecem no texto apenas para simplificar as contas, porém, o foco principal é o raciocínio.

As Fichas Diagnóstico e as Fichas de Aula seguem o conceito da Engenharia Didática, termo cunhado por Michèle Artigue, Matemática e Pesquisadora francesa. A Engenharia didática é um método que surgiu em meados da década de 1980, com a finalidade de mostrar que o professor pode ser comparado a um engenheiro na construção do conhecimento, unindo o seu conhecimento prático em sala de aula e o seu conhecimento teórico do tópico a ser ensinado.

A Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui quatro fases:

1) análises prévias;

2) concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática;

3) implementação da experiência;

4) análise a posteriori e validação da experiência.

São essas quatro fases que estão presentes nessa pesquisa.

A fase 1 da Engenharia Didática, a análise prévia, está na Ficha Diagnóstico 1, pois os alunos resolvem os exercícios apenas com o que sabem, as fases 2 e 3, as concepções e a implementação estão na construção e na aplicação das Fichas de Aula 1, 2 e 3, e a fase 4, que é a análise a posteriori está na Ficha Diagnóstico 2.

Na sociedade contemporânea, na qual o Homem necessita de socialização, quanto maior o número de pessoas em sua rede social, melhor. Seja contar o número de amigos no Facebook, no Orkut, no LinkedIn, ou em qualquer outra rede social que existe na rede mundial de computadores, contar o número de convidados para uma festa sem 'estourar' o orçamento, contar o público em um jogo de futebol, contar os pontos necessários para um time ser campeão, enfim, em inúmeras ocasiões, o Homem é levado a contar, e é esse o eixo central de estudo da Análise Combinatória: estudar os problemas de contagem.

Desde os primórdios da civilização, o Homem tem necessidade de contar.

Segundo Eves, H., Introdução à História da Matemática, Editora da Unicamp, 3ª edição, capítulo 1, página 25:

> "Como usualmente se considera a matemática mais antiga àquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, é por aí que começaremos, focalizando de inicio, o surgimento no homem primitivo o conceito de *número* e do processo de *contar*.
>
> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso se deu. É razoável admitir que a espécie humana, esmo nas épocas mais primitivas tinha senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* e *menos* quando se acrescentavam ou se retiravam objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo."

Para essa dissertação do Mestrado Profissional, o tema Análise Combinatória, versa sobre os problemas de contagem.

Não em nível rudimentar, como na Idade da Pedra, mas em nível um pouco mais avançado, pois na nossa sociedade, o sistema de contagem (base decimal, utilizando os símbolos indo-arábicos) já é estabelecido e conhecido por todos os estudantes que frequentam as salas de aula no Ensino Médio.

Tomando como hipótese de que o sistema de contagem estabelecido é de conhecimento de todos, a dissertação trabalha com problemas mais elaborados de contagem, em comparação com os problemas enfrentados pelo Homem no início da civilização.

Para nortear os estudos e embasar a nossa escolha, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Ministério da Educação, 2006, Capítulo 3, página79:

> "... A Combinatória (ou Análise Combinatória) não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas significativamente no espaço amostral das variações. A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento...".

Nesse sentido, a Análise Combinatória é primordial para o estudante em nível de Ensino Médio, pois faz com que o aluno pense de forma organizada, sistemática, dividindo os problemas em etapas e analisando cada uma dessas etapas, tome decisões e saiba, a partir dos resultados obtidos, concluir de forma correta o que se pede, ou seja, é o pensamento Matemático em toda sua plenitude.

Essa dissertação apresenta a seguinte sequência: no capítulo 2 são apresentados os aspectos principais da teoria de Análise Combinatória; no capítulo 3 é analisada a Ficha Diagnóstico 1; no capítulo 4 apresentam-se e discutem-se as Fichas de Aula 1, 2 e 3; no capítulo 5 aparecem os aspectos avaliativos/comparativos da Ficha Diagnóstico 2; no capítulo 6 encerra-se a Dissertação com as conclusões da Pesquisa, e no capítulo 7 encontra-se os anexos, com as Fichas Diagnóstico 1 e 2, e as Fichas de aula 1, 2 e 3.

2. Teoria de Análise Combinatória:

Estudar Análise Combinatória significa estudar os Problemas de Contagem. Antes de introduzir a teoria da Análise Combinatória, serão apresentados alguns problemas de contagem.

EXEMPLO 1: Uma pessoa nasceu no dia 10 de setembro de 1942 e morreu no dia 21 de maio de 2007. Quantos anos completos viveu essa pessoa?

RESPOSTA: *De 1942 até 2007 são 65 anos. Assim, em 10 de setembro de 2007 essa pessoa completaria 65 anos. Como ela morreu antes de 10 de setembro, ela viveu 64 anos completos.*

EXEMPLO 2: Uma mulher nasceu no dia 25 de junho de 1961 e morreu no dia 18 de dezembro de 1995. Quantos dias exatos essa mulher viveu?

RESPOSTA*: De 25 de junho de 1961 até 25 de junho de 1995 temos:*
i) 34 anos completos: 34 x 365 = 12 410 dias;
ii) 8 anos bissextos: 1964, 1968, 1972, 1976, 1980, 1984, 1988 e 1992: 8 dias;

Até a morte, temos: 5 dias em junho, 31 dias em julho, 31 dias em agosto, 30 dias em setembro, 31 dias em outubro, 30 dias em novembro e 18 dias em dezembro: 176 dias.
Assim, a mulher viveu 12 410 + 8 + 176 = 12 594 dias.

EXEMPLO 3: Um governo ditatorial assumiu um país no dia 09 de maio de 1964 e foi destituído no dia 21 de julho de 1992. Quantos anos completos esse governo ficou no poder?

RESPOSTA*: De 1964 até 1992 são 28 anos. Assim, em 09 de maio de 1992 esse governo completou 28 anos no poder. Como foi destituído em 21 de julho de 1992, esse governo ficou 28 anos no poder.*

Até o momento, foram apresentados alguns problemas em que a contagem direta resolve cada um deles.

A partir desse ponto, serão apresentados alguns problemas em que a contagem direta pode ser usada, porém é desconfortável e tedioso.

EXEMPLO 4: Para sair à noite, Maria usa uma saia combinada com uma blusa comum ou com uma camisa ou com uma blusa do tipo ‘tomara que caia’. Se Maria tem à sua disposição: 4 blusas comuns, 5 camisas e 3 blusas do tipo ‘tomara que caia’, quantas possibilidades distintas Maria tem para combinar com cada saia?

RESPOSTA*: Para cada saia, Maria pode usar 4 blusas comuns, ou 5 camisas ou 3 blusas do tipo ‘tomara que caia’. Assim, Para cada saia, Maria tem 4 + 5 + 3 = 12 possibilidades distintas.*

EXEMPLO 5: Voltando à Maria do exemplo 4, se ela possui 6 saias diferentes, de quantas maneiras distintas Maria pode se vestir de acordo com o exemplo 4?

RESPOSTA*: Para cada uma das seis saias distintas que Maria possui, ela tem 12 maneiras distintas de escolher a blusa. Assim:*

Para a saia branca, Maria tem 12 possibilidades;

Para a saia azul, Maria tem 12 possibilidades;

Para a saia vermelha, Maria tem 12 possibilidades;

Para a saia amarela, Maria tem 12 possibilidades;

Para a saia verde, Maria tem 12 possibilidades;

Para a saia lilás, Maria tem 12 possibilidades;

Logo, Maria tem 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 6 x 12 = 72 maneiras distintas de se vestir.

EXEMPLO 6: Uma pessoa irá viajar de uma cidade A para uma cidade C, passando obrigatoriamente pela cidade B. Da cidade A para a cidade B, a pessoa tem a disposição 5 caminhos distintos e da cidade B para a cidade C, essa pessoa tem a disposição 4 caminhos distintos. De quantas maneiras distintas essa pessoa pode realizar a sua viagem?

RESPOSTA*: Essa pessoa irá escolher 1 em 5 caminhos disponíveis de A para B e, em seguida, irá escolher 1 em 4 caminhos disponíveis de B para C. Assim, ela tem 5 x 4 = 20 maneiras distintas de ir de A para C passando por B.*

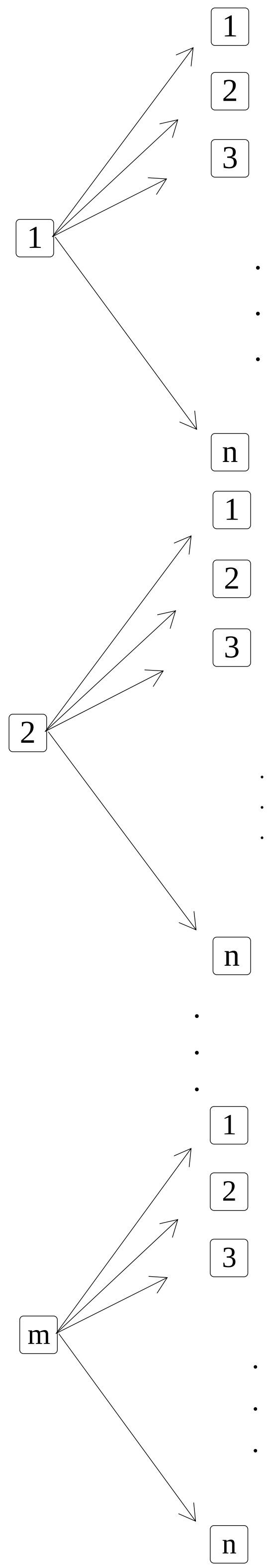
Os exemplos 5 e 6 podem ser caracterizados da mesma forma: alguém realiza uma ***ação*** (no exemplo 5 a ação é Maria se vestir e no exemplo 6 é a pessoa que vai viajar) composta de ***2 eventos sucessivos*** (no exemplo 5 o evento 1 é a escolha da saia e o evento 2 é a escolha da blusa, e no exemplo 6 o evento 1 é a escolha do caminho de A para B, e o evento 2 é a escolha do caminho de B para C), e o total de maneiras de se realizar a ação é a multiplicação das possibilidades de cada um dos eventos. Assim sendo, podemos enunciar o Princípio Multiplicativo:

*Considere uma **ação A** composta de dois eventos sucessivos E_1 e E_2, sendo que E_1 pode ser realizado de **m** maneiras distintas e E_2 pode ser realizado de **n** maneiras distintas. Se para cada uma das **m** maneiras de realizar o evento E_1, temos **n** maneiras distintas de se realizar o evento E_2, então, o total de maneiras de se realizar a **ação A** é **m x n**.*

O Princípio Multiplicativo aplicado com dois eventos de um acontecimento indica que são formados ***m x n*** pares ordenados. Veja isso na tabela abaixo:

E_1 \ E_2	1	2	...	n
1	(1,1)	(1,2)	...	(1,n)
2	(2,1)	(2,2)	...	(2,n)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	(m,1)	(m,2)	...	(m,n)

A tabela inserida acima, nos indica que o número de pares ordenados formados (m.n) é o total de possibilidades de realizar uma **ação A** composta por **dois eventos sucessivos**: E_1, que pode ser realizado de *m* maneiras distintas e E_2, que pode ser realizado de *n* maneiras distintas. Tal tabela pode ser expressa de uma outra maneira chamada de diagrama de árvore, que é representado pelo esquema a seguir:



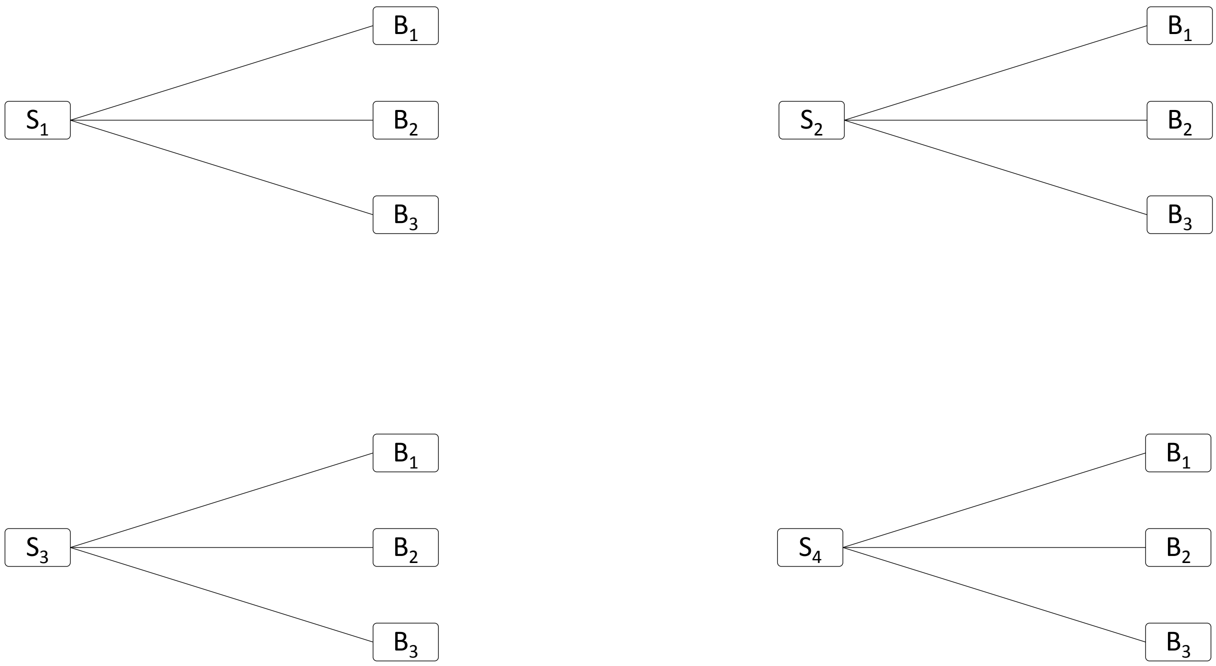
No diagrama, podemos percebe-se que o total de possibilidades para dois eventos é m.n, pois para cada uma das m possibilidades distintas de se realizar o evento 1, temos n possibilidades distintas de se realizar o evento 2.

Mais um exemplo:

EXEMPLO 7: Para formar um lanche, uma pessoa deve escolher um sanduiche e uma bebida. Se essa pessoa tem 4 opções de sanduiche e 3 opções de bebida, de quantas formas distintas essa pessoas poderá fazer o seu lanche?

***RESPOSTA*:** *Se para cada escolha do sanduiche, a pessoa tem 3 possibilidades de escolher a bebida, então, pelo Princípio Multiplicativo, essa pessoa tem 4 x 3 = 12 possibilidades distintas de fazer o seu lanche.*

Veja o diagrama de árvore que representa a solução do exemplo 7, em que S_1, S_2, S_3 e S_4 representam os sanduiches a disposição e B_1, B_2 e B_3 representam as bebidas a disposição:



Entretanto, alguns acontecimentos são compostos por mais de dois eventos. Veja alguns exemplos:

EXEMPLO 8: No final de semana, João quer ficar à vontade com relação à sua vestimenta. Para isso, escolhe uma camiseta regata, uma bermuda e um tênis ou um chinelo. Se João tem a sua disposição, 7 camisetas regata, 8 bermudas, 4 pares de chinelo e 5 pares de tênis, de quantas maneiras distintas João poderá se vestir?

***RESPOSTA**: Perceba que a ação de João se vestir consiste em 3 escolhas a serem feitas: escolha da camiseta, escolha da bermuda e escolha do calçado. Para cada uma das 7 maneiras distintas de escolher a camiseta, João tem 8 maneiras de escolher a bermuda. Assim, entre camiseta e bermuda, João tem 7 x 8 = 56 maneiras distintas de se vestir. Além disso, ele tem, a sua disposição, 4 + 5 = 9 maneiras de calçar os pés, usando chinelo ou tênis. Logo, para cada uma das 56 maneiras distintas de escolher o par camiseta-bermuda, João tem 9 maneiras de escolher o calçado. Portanto, João tem 56 x 9 = 504 maneiras distintas de se vestir.*

EXEMPLO 9: O lanche de uma pessoa consiste de um sanduíche (escolhido dentre 4 opções), uma bebida (escolhida dentre café, chá ou leite) e um sorvete (escolhido dentre os sabores: morango, chocolate ou coco). Quantos lanches diferentes essa pessoa pode fazer?

***RESPOSTA**: Seguindo o raciocínio do exemplo 8, temos 4 possibilidades para o sanduiche, 3 possibilidades para a bebida e 3 possibilidades para o sorvete. Assim, temos 4 x 3 x 3 = 36 maneiras distintas de fazer o lanche.*

EXEMPLO 10: Quantos números inteiros positivos de 3 algarismos podem ser formados, de modo que os algarismos das centenas e das dezenas sejam primos e o algarismo das unidades seja divisível por 3?

***RESPOSTA**: Para formar números com três algarismos, devemos escolher o algarismo das unidades, da dezena e da centena. Para cada um deles, temos 10 possibilidades: 0, 1, 2, ..., 9. A exceção é a casa das centenas, que não pode ser ocupada pelo zero. Assim, satisfazendo as condições, temos:*
Possibilidades para a casa das centenas: 2, 3, 5, 7: 4 possibilidades;
Possibilidades para a casa das dezenas: 2, 3, 5, 7: 4 possibilidades;
Possibilidades para a casa das unidades: 0, 3, 6, 9: 4 possibilidades.
Assim, o total de números que podem ser formados é 4 x 4 x 4 = 64.

EXEMPLO 11: Quantos números de telefones com oito dígitos existem com o prefixo 3251?
***RESPOSTA**: O número de telefone com oito dígitos é da forma 3251 – abcd, em que a, b, c e d são os outros quatro dígitos além do prefixo. Assim, temos:*
Para o algarismo a temos 10 possibilidades;
Para o algarismo b temos 10 possibilidades;
Para o algarismo c temos 10 possibilidades;
Para o algarismo d temos 10 possibilidades.
Assim, o total de telefones é 10 x 10 x 10 x 10 = 10 000.

EXEMPLO 12: Para formar uma senha em um site, um usuário escolhe quatro dígitos, não necessariamente distintos. De quantas formas esse usuário pode formar essa senha?
***RESPOSTA**:*
Para formar a senha, o usuário deve realizar quatro eventos sucessivos:
EVENTO 1: escolha do primeiro dígito da senha: 10 possibilidades;
EVENTO 2: escolha do segundo dígito da senha: 10 possibilidades;
EVENTO 3: escolha do terceiro dígito da senha: 10 possibilidades;
EVENTO 4: escolha do quarto dígito da senha: 10 possibilidades;
Pelo Princípio Multiplicativo, temos $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$ *possibilidades de formar a senha.*
Dessa forma, o Princípio Multiplicativo pode ser generalizado para um número fixado de eventos em uma ação:

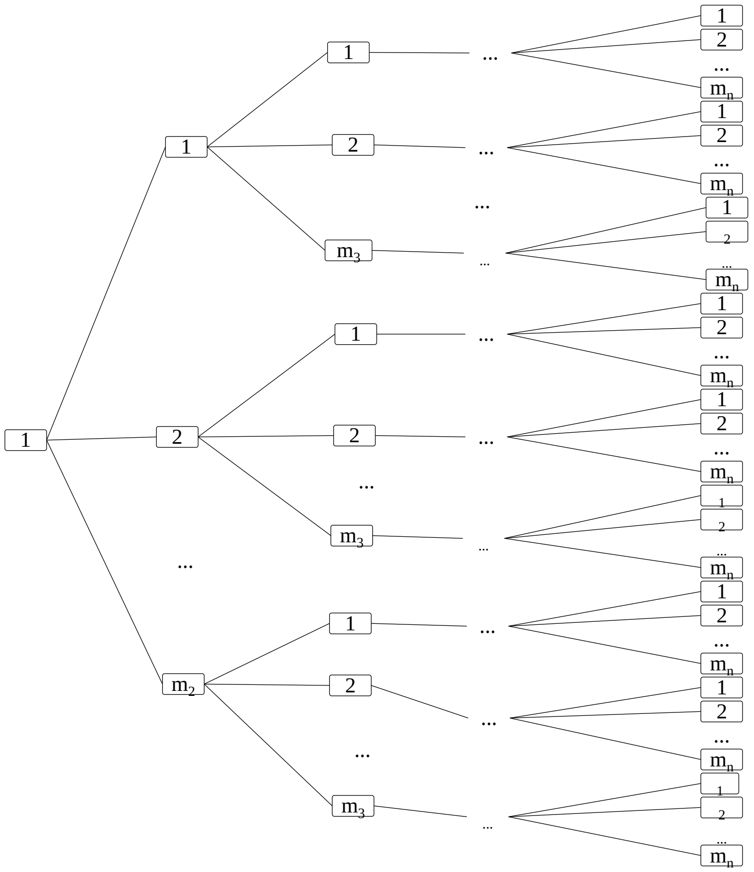
*Considere uma ação composta de **n** eventos sucessivos* $E_1, E_2, \dots, E_n$*, sendo que* E_1 *pode ser realizado de* m_1 *maneiras distintas,* E_2 *pode ser realizado de* m_2 *maneiras distintas,* E_3 *pode ser realizado de* m_3 *maneiras distintas, e assim por diante, até* E_n *que pode ser realizado de* m_n *maneiras distintas.*

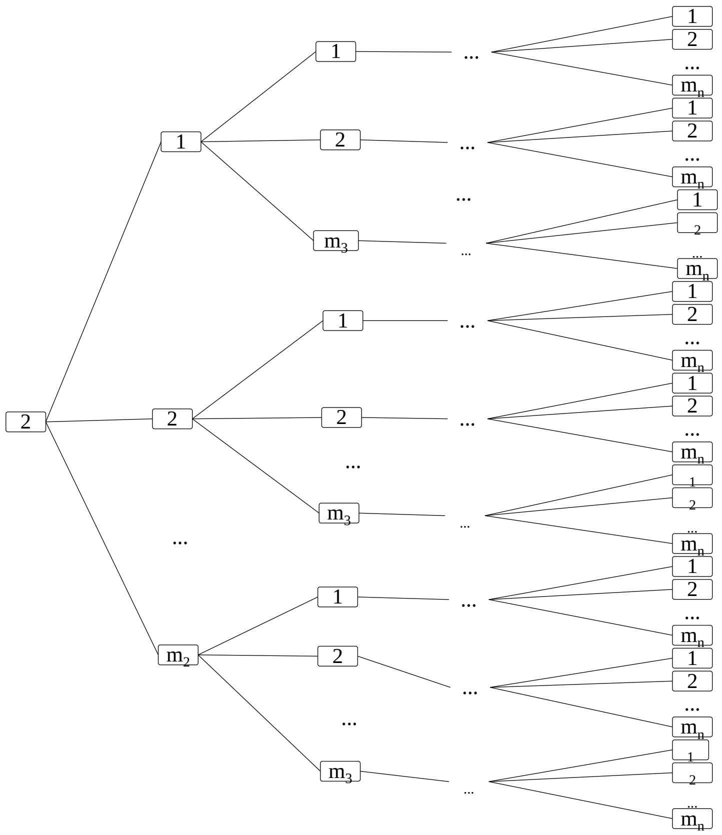
i) Se para cada uma das $\mathbf{m_1}$ *maneiras de realizar o evento* E_1*, temos* $\mathbf{m_2}$ *maneiras distintas de se realizar o evento* E_2*, então, o total de maneiras de se realizar a ação* E_1 *e* E_2 *é* $\mathbf{m_1 \times m_2}$*, isto é, o total de pares ordenados é* $\mathbf{m_1 \times m_2}$*;*

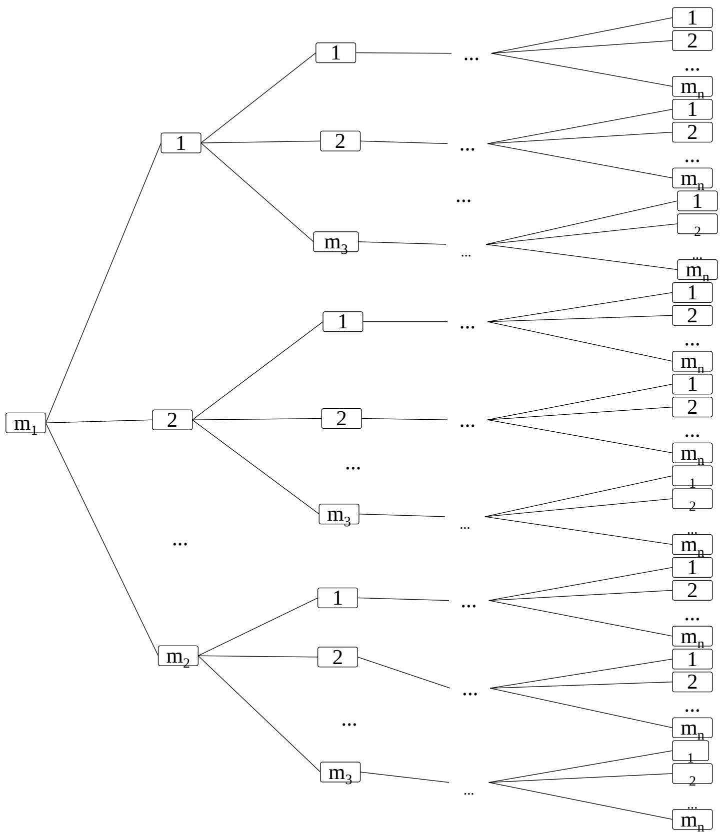
ii) Se para cada um dos pares ordenados obtidos entre E_1 *e* E_2*, temos* m_3 *maneiras distintas de se realizar o evento* E_3*, então, o total de maneiras de se realizar a ação* E_1, E_2, E_3 *é* $\mathbf{m_1 \times m_2 \times m_3}$*;*

Generalizando tal raciocínio, para realizar a ação composta pelos Eventos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$*, temos* $\mathbf{m_1 \times m_2 \times m_3 \times \dots \times m_n}$ *maneiras distintas.*

A generalização do Princípio Multiplicativo inserido acima, nos indica que o número de possibilidades ($m_1.m_2.m_3. ... .m_n$) é o total de possibilidades de realizar uma **ação** A composta por ***n*** **eventos sucessivos**: E_1 que pode ser realizado de m_1 maneiras distintas, E_2 que pode ser realizado de m_2 maneiras distintas, E_3 que pode ser realizado de m_3 maneiras distintas, ..., E_n que pode ser realizado de m_n maneiras distintas . Essa generalização pode ser representada pelo diagrama de árvore seguinte:+







O diagrama de árvore é importante pelo fato de ser a base do raciocínio por recorrência, fundamental para áreas correlatas à Matemática, como a Computação, por exemplo.

A seguir, são apresentados os primeiros agrupamentos importantes no estudo de Análise Combinatória. Vale ressaltar que, apesar desses agrupamentos serem nomeados, eles são aplicações diretas do Princípio Multiplicativo.

a) ARRANJOS SIMPLES E ARRANJOS COM REPETIÇÃO:

Considere um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,..., x_n\}$ com *n* elementos distintos, donde serão escolhidos *p* desses *n* elementos, com $p \leq n$. Se após a escolha de cada um dos p elementos, aplicamos o Princípio Multiplicativo com o total de maneiras de se realizar cada uma dessas escolhas, então obtemos os chamados AGRUPAMENTOS ORDENADOS.

Para entender o que são esses agrupamentos ordenados, veja os exemplos a seguir:

EXEMPLO 13: Quantos são os números de telefone com oito dígitos começados por 92?

RESPOSTA*: Os números de telefone de oito dígitos começados por 92 são da forma 92ab – cdef, em que a, b, c, d, e, e f são os outros dígitos obtidos do conjunto dos naturais A = {0, 1, 2, ..., 9}. Assim, para escolher qualquer um dos seis dígitos restantes, devemos escolher um dos elementos do conjunto A. Logo, temos:*

Para a escolha do dígito a temos 10 possibilidades;
Para a escolha do dígito b temos 10 possibilidades;
Para a escolha do dígito c temos 10 possibilidades;
Para a escolha do dígito d temos 10 possibilidades;
Para a escolha do dígito e temos 10 possibilidades;
Para a escolha do dígito f temos 10 possibilidades;
Assim, o total de telefones começados por 92 é $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1\,000\,000$.

Ainda nesse exemplo, se não fosse permitida a repetição dos dígitos, a resposta seria:

Para a escolha do dígito a temos 8 possibilidades (pois não podemos usar nem o dígito 2 e nem o dígito 9);

Para a escolha do dígito b temos 7 possibilidades;

Para a escolha do dígito c temos 6 possibilidades;

Para a escolha do dígito d temos 5 possibilidades;

Para a escolha do dígito e temos 4 possibilidades;

Para a escolha do dígito f temos 3 possibilidades;

Assim, o total de telefones começados por 92 que não tem dígito repetido é:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20\,160.$$

A primeira situação é o que chamamos de ARRANJO COM REPETIÇÃO (símbolo: AR), e a segunda situação é o que chamamos de ARRANJO SIMPLES (símbolo: A). Uma observação a ser feita é que quando o agrupamento for chamado de SIMPLES, significa que não é permitido usar um elemento que já foi escolhido.

Mais um exemplo:

EXEMPLO 14: Considere o conjunto dos dígitos D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Escolhendo os dígitos de D:

a) Quantos números naturais de três dígitos podem ser formados;

a) Quantos números naturais de três dígitos distintos podem ser formados;

RESPOSTA**:** *Para formar os naturais de três dígitos como pede o exemplo, devemos escolher dígitos que estão no conjunto D. Assim, a escolha de cada um dos eventos é realizada com os elementos de um mesmo conjunto. Logo, temos um exemplo de Arranjo.*

a) Como os dígitos podem ser repetidos, nesse item temos o ARRANJO COM REPETIÇÃO:

EVENTO 1: escolha do primeiro dígito do número: 9 possibilidades;

EVENTO 2: escolha do segundo dígito do número: 9 possibilidades;

EVENTO 3: escolha do terceiro dígito do número: 9 possibilidades;

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $9 \times 9 \times 9 = (AR)_{9,3} = 9^3 = 729$ *possibilidades.*

b) Como os dígitos não podem ser repetidos, nesse item temos o ARRANJO SIMPLES:

EVENTO 1: escolha do primeiro dígito do número: 9 possibilidades;

EVENTO 2: escolha do segundo dígito do número: 8 possibilidades (NÃO PODEMOS USAR O DÍGITO USADO ANTERIORMENTE);

EVENTO 3: escolha do terceiro dígito do número: 7 possibilidades (NÃO PODEMOS USAR OS DOIS DÍGITOS USADO ANTERIORMENTE);

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $9 \times 8 \times 7 = A_{9,3} = 504$ *possibilidades.*

Dessa forma, temos duas possibilidades:

1. Se for permitida a repetição de elementos, temos os agrupamentos ordenados chamados de *ARRANJOS COM REPETIÇÃO de n elementos tomados p a p (notação:* $AR_{n,p}$*)*, cujo total de maneiras de se realizar esses agrupamentos é n^p, pois:

1) Para a escolha do 1º elemento temos *n* possibilidades;

2) Para a escolha do 2º elemento temos *n* possibilidades;

3) Para a escolha do 3º elemento temos *n* possibilidades;

.

.

.

p) Para a escolha do pº elemento temos *n* possibilidades;

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o total de maneiras é $n \times n \times n \times \ldots \times n = n^p$.

2. Se não for permitida a repetição de elementos, temos os agrupamentos ordenados chamados de *ARRANJOS SIMPLES de n elementos tomados p a p (*$A_{n,p}$*)*, cujo total de maneiras de se realizar esses agrupamentos é $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times (n - (p - 1))$, pois:

1) Para a escolha do 1º elemento temos *n* possibilidades;

2) Para a escolha do 2º elemento temos $n - 1$ possibilidades;

3) Para a escolha do 3º elemento temos $n - 2$ possibilidades;

.

.

.

p) Para a escolha do pº elemento temos $n - (p - 1)$ possibilidades;

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o total de maneiras é

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times (n - (p - 1)).$$

Para facilitar as contas, definimos o fatorial de um número natural n (notação: n!) como sendo a multiplicação de todos os naturais de 1 até n, como segue:

$$2! = 2.1 = 2;$$

$$3! = 3.2.1 = 3.2! = 6;$$

$$4! = 4.3.2.1 = 4.3! = 24;$$

.

.

.

$$n! = n.(n-1).(n-2). \ldots . 3.2.1 = n.(n-1)!$$

Além disso, definimos, também que 1! = 1 e que 0! = 1. Logo, o fatorial de um número natural pode ser definido recursivamente como: $n! = \begin{cases} 1, \text{se } n = 0 \\ n.(n-1)!, \text{se } n \geq 1 \end{cases}$.

Assim, usando a notação fatorial, o ARRANJO SIMPLES é escrito como $A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(p+1)) = \dfrac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(p+1))(n-p)!}{(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

b) PERMUTAÇÕES:

Considerando, ainda, o conjunto X = {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,..., x_n} descrito acima, ao escolher todos os elementos desse conjunto para formar agrupamentos ordenados, isto é, quando temos p = n, obtemos os agrupamentos chamados de Permutações. Podemos entender que as Permutações são todas as trocas de posições possíveis que realizamos com alguns elementos.

Logo, o total de Permutações de n elementos é $P_n = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1 = n!$.

EXEMPLOS:

EXEMPLO 15: De quantas maneiras distintas um casal de namorados podem ocupar dois lugares vazios e consecutivos em uma fila qualquer no teatro?

RESPOSTA*: Considerando o casal como sendo A e B, as possibilidades são: AB ou BA, ou seja, são 2 possibilidades. Assim sendo, estamos fazendo uma permutação de 2 objetos. Logo, a resposta pode ser dada por* $P_2 = 2! = 2$.

EXEMPLO 16: Três pessoas participam de uma competição sobre Matemática. Se não há empates, de quantas formas distintas é possível realizar a premiação do concurso, sabendo que as três pessoas concorrem a prêmios distintos?

***RESPOSTA**: O total de premiações é o total de maneiras de escolher três pessoas em um conjunto com três pessoas, que é o total de Permutações de três objetos:* $P_3 = 3! = 6$.

EXEMPLO 17: Antônio, Bia, Carlos e Daniela vão ao cinema e ocupam os quatro lugares vazios de uma fila. Faça um quadro representando todas as possibilidades possíveis para que os quatro amigos sentem-se nos quatro lugares disponíveis.

***RESPOSTA**: O quadro pedido é:*

ABCD	*ABDC*	*ACBD*	*ACDB*	*ADBC*	*ADCB*
BACD	*BADC*	*BCAD*	*BCDA*	*BDAC*	*BDCA*
CABD	*CADB*	*CBAD*	*CBDA*	*CDAB*	*CDBA*
DABC	*DACB*	*DBAC*	*DBCA*	*DCAB*	*DCBA*

Perceba que temos descrito acima todas as possibilidades possíveis de alocarmos 4 pessoas em 4 lugares, que é o total de permutações de 4 objetos, que é obtido fazendo 4! = 24.

Aqui temos uma situação importante: Foi-nos pedido a construção de um quadro, ou seja, devemos descrever todas as possibilidades. Em geral, exercícios de combinatória não nos pede *de quais formas*, e sim *de quantas formas*, isto é, a resposta é o número (24), e não o quadro.

EXEMPLO 18: Quantos são os anagramas da palavra AMOR?

***RESPOSTA**: Um anagrama é uma ordenação de letras com ou sem significado em uma determinada língua. Assim, o total de anagramas é o total de trocas que podemos fazer com as letras da palavra dada. Logo, a palavra AMOR tem* $P_4 = 4! = 24$ *anagramas.*

EXEMPLO 19: Uma competição de atletismo é disputada por cinco atletas com performances idênticas. Se não considerarmos empate, de quantas formas podemos realizar a chegada dessa competição?

RESPOSTA: *Como não são considerados empates, o total de chegadas é o total de trocas que podemos fazer com os cinco atletas, que é a permutação de cinco elementos:* $P_5 = 5! = 120$.

c) PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS:

Considere, agora, um conjunto Y com *n* elementos, em que alguns elementos de Y são iguais entre si. Se quisermos obter todas as permutações possíveis com os elementos de Y, o resultado não é n!, pois a troca de posições de dois ou mais elementos iguais não altera o agrupamento original.

Considere, por exemplo, os anagramas da palavra OVO.

Essa palavra tem 3 letras no total: um V e dois O's. Poderíamos pensar em $P_3 = 3! = 6$ anagramas. Porém, ao escrever todos os anagramas, temos: OVO, OOV e VOO, que são três no total. Perceba que OVO é igual a OVO, pois não há distinção entre os dois O's. Com isso, esses dois anagramas representam um anagrama. Da mesma forma: OOV é igual a OOV e VOO é igual a VOO. Assim, o total de anagramas é 3, pois a cada dois anagramas (OVO/OVO, OOV/OOV e VOO/VOO) consideramos apenas 1 deles, pois a PERMUTAÇÃO das letras repetidas não altera o anagrama já obtido. Assim, o total de anagramas da palavra OVO é $\frac{P_3}{2} = \frac{3!}{2} = 3$. Repare que dividimos o total de permutações pelo fatorial do número de letras repetidas.

EXEMPLO 20: Considerando a palavra ARARA, o total de anagramas é $\underset{R\ \ A}{\frac{P_5}{2!3!}} = \frac{5!}{2.6} = 10$.

Assim, devemos considerar que o total de permutações quando temos elementos repetidos é:

i) Se em Y tivermos n_1 elementos iguais entre si, o total de permutações obtidas com esses n_1 elementos é $n_1!$. Porém, essas $n_1!$ permutações representam, no agrupamento formado com todos os elementos de Y, uma sequência apenas. Logo, o total de permutações com n_1 elementos repetidos é $P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}$;

ii) Se em Y tivermos n_2 elementos iguais entre si, além dos n_1 anteriores, e os n_1 elementos são diferentes dos n_2 elementos, o total de permutações obtidas com esses n_2

elementos é n_2!. Porém, essas n_2! permutações representam, no agrupamento formado com todos os elementos de Y, já incluindo as permutações com os n_1 elementos iguais, uma sequência apenas. Logo, o total de permutações com n_1 e n_2 elementos repetidos é $P_n^{n_1,n_2} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!}$;

Por recorrência, se Y contém n_1 elementos iguais entre si, n_2 elementos iguais entre si, n_3 elementos iguais entre si, ... , n_k elementos iguais entre si, sendo $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k \leq n$, então, o total de permutações com repetição com os elementos de Y é $P_n^{n_1,n_2,n_3,...,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$.

Mais um EXEMPLO:

EXEMPLO 21: Quantos são os anagramas da palavra BRASILEIRA?

RESPOSTA: *A palavra BRASILEIRA tem 10 letras, sendo* $\left\langle \begin{matrix} 2R's \\ 2A's \\ 2I's \end{matrix} \right.$ *repetidos. Então o total de anagramas é o total de permutações das 10 letras com 2, 2 e 2 repetidos:* $P_{10}^{2,2,2} = 453600$.

d) COMBINAÇÕES:

Considere, agora, um conjunto X = {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,..., x_n} com *n* elementos distintos, o qual serão escolhidos *p* elementos, com p ≤ n. Se ao realizar uma escolha qualquer de p elementos de X, outra escolha de p elementos é distinta da primeira apenas pelos elementos escolhidos e não pela sua ordenação, então temos os agrupamentos chamados de COMBINAÇÃO, que são os agrupamentos não ordenados.

Para exemplificar, considere a seguinte situação:

EXEMPLO 22: Em uma sala de aula, 6 alunos são selecionados para participar de um concurso, no qual serão distribuídos três prêmios para os três primeiros lugares. Se não é permitido empates, de quantas maneiras distintas podemos distribuir os três prêmios para as seis pessoas se:

a) Os prêmios são distintos;

RESPOSTA*: Se os prêmios são distintos, perceba que a sequência ABC é diferente da sequência ACB, pois na sequência ABC, o aluno A recebe o primeiro prêmio, o aluno B recebe o segundo prêmio e o aluno C recebe o terceiro prêmio, enquanto que na sequência ACB, o aluno A recebe o primeiro prêmio, o aluno C recebe o segundo prêmio e o aluno B recebe o terceiro prêmio. Assim:*

Para o primeiro prêmio, temos 6 possibilidades;

Para o segundo prêmio, temos 5 possibilidades;

Para o terceiro prêmio, temos 4 possibilidades; Logo, o total de maneiras de distribuir três prêmios distintos para seis pessoas é 6 x 5 x 4 = 120, que é o ARRANJO SIMPLES de seis elementos tomados três a três.

b) Os prêmios são iguais;

RESPOSTA*: Se os prêmios são iguais, perceba que a sequência ABC é igual a sequência ACB, pois tanto em ABC, como em ACB, são os alunos A, B e C que são premiados, não importando a ordem de premiação. Assim:*

Para o primeiro prêmio, temos 6 possibilidades;

Para o segundo prêmio, temos 5 possibilidades;

Para o terceiro prêmio, temos 4 possibilidades, que pelo Princípio Multiplicativo nos fornece as mesmas 120 possibilidades obtidas no item a.

Entretanto, a resposta 120 considera que ABC é diferente de ACB. Como os prêmios são iguais, sabemos que as escolhas ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA representam a mesma premiação, ao passo que a premiação muda se mudar um aluno escolhido, por exemplo: ABC é diferente de ABD, pois na primeira escolha os alunos escolhidos são A, B e C, enquanto que na segunda escolha os alunos escolhidos são A, B e D. Assim sendo, as PERMUTAÇÕES de uma escolha representam a mesma premiação, ou seja, a cada 3! = 6 sequências temos uma escolha. Com isso, temos 3! = 6 vezes mais sequências do que escolhas. Portanto, o total de maneiras de distribuir três prêmios iguais para seis pessoas é $\frac{6.5.4}{3!} = 20$.

Esse número obtido é a COMBINAÇÃO SIMPLES de seis elementos tomados três a três (símbolo: $C_{6,3}$).

De acordo com esse raciocínio, podemos perceber que o total de *COMBINAÇÕES SIMPLES* de seis elementos tomados três a três é a divisão do total de *ARRANJOS SIMPLES* de seis elementos tomados três a três pelo *FATORIAL* do número de elementos escolhidos, que nesse caso é três. No exemplo acima, $C_{6,3} = \dfrac{A_{6,3}}{3!}$.

No caso geral, o total de *COMBINAÇÕES SIMPLES* de *n* elementos tomados *p* a *p* é a divisão do total de *ARRANJOS SIMPLES* de *n* elementos tomados *p* a *p* pelo *FATORIAL* do número de elementos escolhidos, ou seja, p elementos.

Assim: $C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{1}{p!}.A_{n,p} = \dfrac{1}{p!}.\dfrac{n!}{(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Observação: o símbolo $C_{n,p}$ pode ser escrito como $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ e é lido como *binomial n,p*.

Mais um exemplo:

EXEMPLO 23: Em uma circunferência temos 6 pontos distintos. Quantos triângulos podem ser formados com esses pontos?

RESPOSTA: *Para formar um triângulo, temos que escolher três dos seis pontos. Assim, o total de triângulos que podem ser formados é* $C_{6,3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 20$ *triângulos.*

<u>Outra abordagem das COMBINAÇÕES:</u>

Como a ordenação dos elementos não é importante, e sim os elementos que são escolhidos, para cada elemento de um conjunto temos duas possibilidades: ou o elemento é escolhido (sinalizaremos que o elemento **é** escolhido pela letra E), ou o elemento não é escolhido (sinalizaremos que o elemento **não é** escolhido pela letra N), *não podendo o mesmo elemento ser escolhido e não escolhido ao mesmo tempo*. Assim, cada elemento tem uma única letra associada a ele: E ou N. Como queremos *escolher p elementos dos n disponíveis*, então teremos uma lista com p letras E e n – p letras N. Do fato de que duas escolhas são diferentes apenas se os elementos escolhidos são diferentes, basta trocar uma letra E por uma letra N para mudar a escolha. Logo, o total de combinações possíveis é o total de trocas que podemos fazer com n letras, sendo p letras E (iguais entre si) e n – p letras N (iguais entre si), o que configura uma PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO de n elementos com p iguais entre si (as letras E) e n – p iguais entre si (as letras N). Pela fórmula apresentada acima, o total de combinações de n elementos tomados p a p, (notação: $C_{n,p}$) é: $C_{n,p} = P_n^{n,n-p} = \dfrac{n!}{n!(n-p)!}$. Esse número pode ser indicado, também, pela notação $\binom{n}{p}$, que é chamada de número binomial, que muito provavelmente leva esse nome exatamente do fato de que cada elemento do conjunto pode ser escolhido ou não ser escolhido, como também por aparecerem no desenvolvimento em binômio de Newton de $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$.

No exemplo 23, se os seis pontos disponíveis forem denotados por P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6, uma escolha possível pode ser o triângulo formado por $P_1P_2P_3$. Assim, essa escolha feita poderia ser representada pela tabela a seguir:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
E	E	E	N	N	N

Uma outra escolha, por exemplo, $P_1P_2P_4$ é uma troca de posição efetuada entre um E e um N, a saber: o terceiro E com o primeiro N. Assim, a tabela fica:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
E	E	N	E	N	N

Logo, o total de triângulos que podem ser formados é o total de *PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO* da 'palavra' EEENNN, que numericamente é igual a $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

e) Combinações com Repetição:

Considere a seguinte situação: Uma doçaria oferece três tipos de doces: pé de moleque (indicamos por P), queijadinha (indicamos por Q) e pudim de coco (indicamos por C). Uma pessoa deseja consumir 2 desses doces, não importando a ordem de degustação e tendo a sua disposição uma quantidade suficiente de doces para isso.

a) de quantas maneiras distintas essa pessoa pode fazer tal degustação se a repetição do doce não for permitida?

RESPOSTA*: As condições são degustar dois doces sem repetir não importando a ordem. Assim, a pessoa tem as seguintes possibilidades: PC, PQ e CQ, que é numericamente igual a escolher 2 objetos, não importando a ordem, quando temos 3 a disposição:* $C_{3,2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$.

b) de quantas maneiras distintas essa pessoa pode fazer tal degustação se a repetição do doce for permitida?

***RESPOSTA**: Se a repetição do doce for permitida, devemos acrescentar as seguintes possibilidades: PP, QQ e CC. Assim, a pessoa tem 3 + 3 = 6 possibilidades.*

No item b, são usados os conceitos de COMBINAÇÃO (pois a ordem de degustação não importa) e de REPETIÇÃO (pois a repetição do doce é permitida). Com isso, o item b é a ***combinação com repetição*** de três elementos tomados dois a dois (símbolo: $(CR)_{3,2}$).

A contagem direta foi fácil porque a quantidade de doces oferecidos e de doces degustados é pequena. Considere, agora, a situação do exemplo seguinte:

EXEMPLO 24: Uma pessoa vai comer pastel em um local que oferece pasteis de carne, queijo, palmito e frango. Essa pessoa deseja comer três pasteis. Sabendo que a ordem em que os pasteis são degustados não importa, e que temos quantidade suficiente para essa degustação, de quantas formas essa pessoa poderá satisfazer seu desejo?

***RESPOSTA**: Vamos contar de maneira direta:*

Indicando carne por C, queijo por Q, palmito por P e frango por F:

i) sem repetição: CQP, CQF, CPF, QPF (4 possibilidades);

ii) com dois repetidos: CCQ, CCP, CCF, QQC, QQP, QQF, PPC, PPQ, PPF, FFC, FFQ, FFP (12 possibilidades);

iii) com três repetidos: CCC, QQQ, PPP, FFF (4 possibilidades).

Assim, temos 4 + 12 + 4 = 20 possibilidades.

Alguns comentários sobre as possibilidades descritas acima:

1. A sequência CQP indica que a pessoa degustou 1 pastel de carne, um pastel de queijo e um pastel de palmito, não importando a ordem de degustação;

2. A sequência CCQ indica que a pessoa degustou 2 pasteis de carne e um pastel de queijo, não importando a ordem de degustação;

3. A sequência CCC indica que a pessoa degustou 3 pasteis de carne, não importando a ordem de degustação.

Podemos perceber que é a quantidade de pasteis de cada sabor que é levado em consideração, e apenas isso. Além disso, a quantidade de pasteis degustados é fixo e nesse exemplo é 3. Com isso, se indicarmos por C a quantidade de pasteis de carne que essa pessoa irá degustar, por Q a quantidade de pasteis de queijo que essa pessoa irá degustar, por P a quantidade de pasteis de palmito que essa pessoa irá degustar e por F a quantidade de pasteis de frango que essa pessoa irá degustar, o total de maneiras da pessoa satisfazer o seu desejo é o total de soluções inteiras da equação linear C + Q + P + F = 3. Na tabela a seguir, construímos cada degustação com a solução da equação dada:

degustação	Solução de C+Q+P+F=3
CQP	(1,1,1,0)
CQF	(1,1,0,1)
CPF	(1,0,1,1)
QPF	(0,1,1,1)
CCQ	(2,1,0,0)
CCP	(2,0,1,0)
CCF	(2,0,0,1)
QQC	(1,2,0,0)
QQP	(0,2,1,0)
QQF	(0,2,0,1)
PPC	(1,0,2,0)
PPQ	(0,1,2,0)
PPF	(0,0,2,1)
FFC	(1,0,0,2)
FFQ	(0,1,0,2)
FFP	(0,0,1,2)
CCC	(3,0,0,0)
QQQ	(0,3,0,0)
PPP	(0,0,3,0)
FFF	(0,0,0,3)

A tabela foi construída com o objetivo de desenvolver um raciocínio que permita a resolução, via técnicas de contagem, do problema exposto, evitando contagem direta.

Para isso, vamos analisar duas situações quaisquer da tabela, por exemplo: as degustações CQP e QQC.

A degustação CQP significa que serão consumidos 1 pastel de carne (C), 1 pastel de queijo (Q) e 1 pastel de palmito (P). Essa degustação será entendida como a solução (1,1,1,0) da equação C + Q + P + F = 3, enquanto que a degustação QQC significa que serão consumidos 1 pastel de carne (C) e 2 pasteis de queijo (Q). Essa degustação será entendida como a solução (1,2,0,0) da equação C + Q + P + F = 3.

Escreveremos a solução (1,1,1,0) da forma 1+1+1+ representando as quantidades consumidas de cada sabor. Assim, a degustação CQP (1 pastel de carne, 1 pastel de queijo e 1 pastel de palmito) é representada por $\underset{C}{1}+\underset{Q}{1}+\underset{P}{1}+\underset{F}{\;}$, da mesma forma que a solução (1,2,0,0) será escrita da forma 1+11+1+, indicando a degustação QQC (1 pastel de carne e 2 pasteis de queijo) e será representada pela sequência $\underset{C}{1}+\underset{Q}{11}+\underset{P}{\;}+\underset{F}{\;}$. Repare que a segunda solução é obtida da primeira trocando a posição do segundo 1 pelo segundo sinal de '+'. Assim, se na primeira solução trocarmos o terceiro '1' pelo terceiro sinal de '+', a sequência fica 1+1++1, que representa a solução (1,1,0,1) que é a degustação CQF. Logo, o total de degustações possíveis é o total de trocas de posição da sequência 111+++ (que é a degustação CCC), que é o total de *PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO* da 'palavra' 111+++, que é numericamente igual a $P_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$, número de possibilidades obtido via contagem direta.

A partir desse raciocínio, podemos entender que a quantidade de 1's representam o resultado da equação e que a quantidade de sinais de '+' são os sinais que aparecem na equação.

Considere o exemplo seguinte:

EXEMPLO 25: Suponha, agora, que a doçaria do item anterior disponha de 7 tipos de doces, e a pessoa em questão queira consumir os mesmos dois doces.

a) de quantas maneiras distintas essa pessoa pode fazer tal degustação se a repetição do doce não for permitida?

b) de quantas maneiras distintas essa pessoa pode fazer tal degustação se a repetição do doce for permitida?

***RESPOSTA**: Do exemplo anterior:*

a) Se não for permitida a repetição, o total é $C_{7,2} = \dbinom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!5!} = 21$*;*

b) Se for permitida a repetição, o total de degustações é o total de soluções da equação $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 = 2$*, em que cada* d_i *representa a quantidade de doces do tipo i* *consumido pela pessoa. Usando o raciocínio do exemplo anterior, o total de soluções é o total de permutações com repetição da 'palavra' ++++++11, que é* $P_8^{2,6} = \frac{8!}{2!6!} = 28$.

Considere, agora, que podemos fazer escolhas em um conjunto finito Z, na qual um objeto de Z pode ser escolhido mais de uma vez, não importando a ordem dessas escolhas.

Do fato de fazer escolhas, temos um agrupamento não ordenado, que chamamos de COMBINAÇÕES, e por permitir a repetição de escolhas, temos um agrupamento que chamaremos de COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO.

Para permitir que as combinações com repetição possam ser feitas, admitiremos que exista uma quantidade suficiente de cada objeto que pode ser escolhido no conjunto Z, de tal forma que a repetição da escolha de um determinado objeto seja possível.

A seguir, deduziremos uma maneira de obter, numericamente, o total de COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO de n objetos tomados p a p:

Considere $Z = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_n\}$. Admitindo que exista uma quantidade suficiente de cada objeto para permitir a repetição, raciocinaremos da seguinte forma:

Escolheremos x_1 exemplares do objeto z_1;

Escolheremos x_2 exemplares do objeto z_2;

Escolheremos x_3 exemplares do objeto z_3;

.

.

.

Escolheremos x_n exemplares do objeto z_n;

Como devemos escolher p objetos no total, o total de maneiras de realizar essa escolha é $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$, em que $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, por representarem quantidades escolhidas de algum objeto, são inteiros positivos (quando escolhemos pelo menos um exemplar de cada objeto) ou inteiros não negativos (quando permitimos a não escolha de algum objeto).

Dessa forma, para obter o total de Combinações com Repetição, devemos encontrar o total de soluções inteiras positivas ou soluções inteiras não negativas de uma equação linear com coeficientes unitários, que significa particionar o inteiro p em n partes, não necessariamente iguais.

Pensemos da seguinte forma:

1. O inteiro *p* será representado por *p* 1's (1);

2. Como dividiremos esse inteiro p em n partes, precisamos de *n – 1* 'divisórias' que indicaremos por sinais de 'mais' (+);

Sendo assim, uma possibilidade de particionar o inteiro p é colocar os p '1' e os n – 1 sinais de (+) da seguinte forma:

$$\underbrace{111...1}_{p\ 1's}\ \underbrace{+++...+}_{n-1\ \text{sinais de }(+)}\ \text{(possibilidade 1)}$$

Outra possibilidade é:

$$\underbrace{+++...+}_{n-1\ \text{sinais de }(+)}\ \underbrace{111...1}_{p\ 1's}\ \text{(possibilidade 2)}$$

Repare que fizemos uma permutação da possibilidade 1 para a possibilidade 2. Com isso, o total de soluções inteiras não negativas da equação, é numericamente igual ao total de *PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO* da sequência com n + p – 1 elementos, sendo p iguais entre si (os p 1's) e n – 1 iguais entre si (os n – 1 sinais de (+)), que é, numericamente igual ao total de Combinações com Repetição de n elementos tomados p a p. Logo, o total de Combinações com Repetição de n elementos tomados p a p (Notação: $CR_{n,p}$) é:

$$(CR)_{n,p} = P_{n+p-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1,p} = C_{n+p-1,n-1} = \binom{n+p-1}{p}.$$

3. A FICHA DIAGNÓSTICO 1:

A Ficha Diagnóstico 1 é o ponto de partida. Sem apresentação alguma da teoria, foram apresentados aos alunos cinco exercícios sobre os problemas iniciais da contagem, em que os alunos respondiam da maneira que quisessem e da forma que melhor lhes conviessem.

A Ficha Diagnóstico 1 é composta dos cinco exercícios que seguem:

1. Em uma cidade, cada semáforo tem 3 cores: verde, amarelo e vermelho. Se não fixarmos a casinha com a sequência das cores, quantos semáforos distintos podem ser obtidos?

2. Uma moça tem 5 blusas e 4 saias. De quantos modos distintos ela pode se vestir?

3. Um grupo de estudantes possui 4 pessoas: Ana, Bia, Carlos e Daniel. Uma comissão com dois estudantes será composta para discutir a viagem de formatura. De quantas maneiras podemos formar tais comissões?

4. Na prova de 100 metros rasos no atletismo, apenas os três primeiros colocados ao fim da prova ganham prêmios distintos: o primeiro colocado ganha medalha de ouro, o segundo colocado medalha de prata e o terceiro colocado ganha medalha de bronze. Se participam 4 atletas, de quantas maneiras distintas é possível realizar a premiação dessa prova.

5. Em um condomínio serão construídas 4 casas de um mesmo lado de uma rua. As casas podem ser de tijolo ou de madeira, mas como medida de segurança contra incêndio, duas casas de madeira não podem ser vizinhas. De quantas maneiras pode-se planejar a construção das casas desse condomínio?

Nessa Ficha Diagnóstico 1, priorizou-se, essencialmente, a contagem direta. O aluno não precisava saber o que é o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e nem as técnicas aprendidas em Combinatória para resolver cada um deles. Os exercícios foram distribuídos em ordem crescente de dificuldade, segundo a ordem que é aprendida, em geral, nos cursos de Combinatória:

- Princípio Multiplicativo, nos exercícios 1 e 2;
- Agrupamentos ordenados (Arranjos) no exercício 4;
- Agrupamentos não ordenados (Combinação) no exercício 3;
- Exercício desafio de contagem no exercício 5, no qual o aluno é convidado a pensar um pouco para responder, porém, a contagem direta pode ser feita sem maiores problemas.

A seguir, será descrito como foi a aplicação da Ficha Diagnóstico 1 em sala de aula.

A atividade de pesquisa foi realizada no Colégio de Educação Básica Anglo/Campinas, Unidade Taquaral, em duas salas do Segundo Ano do Ensino Médio, uma sala, o segundo ano A com 36 alunos, e outra sala, o segundo ano B, com 33 alunos, nos meses de Agosto e Setembro de 2011, durante 7 semanas, com o aval da direção e da coordenação pedagógica da escola.

Por ser uma escola particular, a maioria dos alunos pertencem às classes média e alta da cidade de Campinas/SP, com alguns (poucos) alunos tendo algum tipo de auxílio (bolsa de estudo).

A escola encontra-se sediada no bairro Taquaral, em Campinas/SP, um bairro tranquilo, longe da movimentação do centro desta cidade que tem mais de 1 milhão de habitantes, o que propicia um aprendizado efetivo por parte dos alunos.

A escola está montada em um imóvel que tem características bucólicas, com espaço para integração social dos alunos, um amplo pátio, instalações adequadas para uma escola de educação básica, um ginásio Multidisciplinar para a prática de Educação Física e 15 salas de aula.

O registro dos diálogos entre professor e alunos nas aulas expositivas e a aplicação da pesquisa foi feita pelo professor e pela psicóloga Luciene Cristina.

A atividade foi desenvolvida em uma aula simples de 45 minutos.

As aulas iniciaram-se com uma explicação do professor sobre a atividade da Ficha Diagnóstico, que é um diagnóstico sobre o assunto a ser desenvolvido nas aulas seguintes:

Análise Combinatória, e após a explicação, a Ficha Diagnóstico 1 foi distribuída aos alunos e eles começaram a realizar a atividade.

O objetivo inicial da atividade é que os alunos pensassem em estratégias para resolver os exercícios sozinhos. Porém, com o passar da aula, tal objetivo não foi atingido. Em um primeiro momento, alguns poucos alunos conversavam entre si, mas pouco a pouco, vários alunos estavam se interagindo.

Em um momento posterior, o professor pensou em intervir na realização da atividade, forçando a realização da Ficha Diagnóstico 1 pelos alunos de maneira individual, porém, com o passar da atividade, o professor deixou que os alunos interagissem uns com os outros.

Logo no inicio da atividade, surgiram alguns questionamentos: Como posso fazer? Posso fazer desenho? O professor comunicou que o aluno pode escolher o melhor método para resolver os problemas propostos. Algumas indagações específicas que foram registradas começaram a surgir, e estas estão destacadas a seguir:

QUESTÃO 1:

Aluno A: Pode desenhar?

Aluno B: Pode repetir cor?

Aluno C: Como assim, sem fixar as casinhas das cores?

Aluno D: Como devo dar a resposta?

Aluno E: Se não fixar a casinha das cores, não tem semáforo!

Aluno F: Se não tiver sequencia, as cores podem ocupar qualquer posição?

Aluno G: Contando com a original?

Professor: O que você acha?

Aluno G: Acho que não!

Aluno H: Posso fazer do jeito mais fácil? Não tem conta!

QUESTÃO 2:

Aluno I: Se a moça tem blusa e saia, ela só tem uma maneira de se vestir!

QUESTÃO 3:

Aluno J: Interessa se as pessoas são escolhidas em outra ordem?

QUESTÃO 4:

Aluno K: A ordem é importante no 4?

QUESTÃO 5:

Aluno L: Pode ser todas de tijolo?

Aluno M: Necessariamente são 2 de madeira e 2 de tijolo?

Professor: Pode ser 3 de tijolo e 1 de madeira?

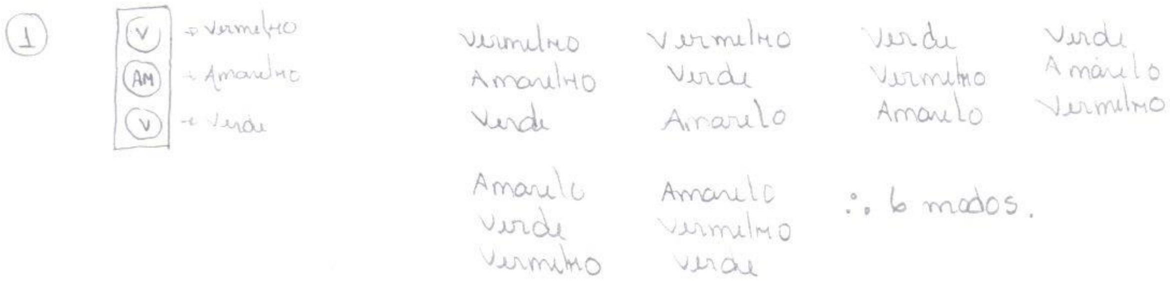
Aluno M: Não sei.

Analisando, a posteriori, a Ficha Diagnóstico 1, percebeu-se, claramente, que os alunos tem uma noção não superficial de contagem, alguns utilizam do Principio Multiplicativo, porém sem formalização. A presença de esquemas na resolução dos exercícios é evidente, a ideia de fazer para um e generalizar está em várias atividades.

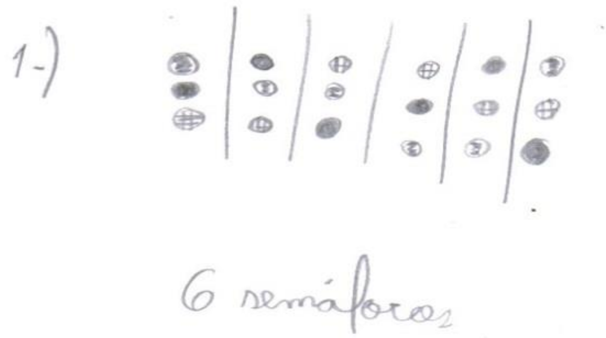
Nas questões da Ficha Diagnóstico 1, percebeu-se que o aluno usa dos mais variados artifícios para resolver os exercícios propostos:

Questão 1:

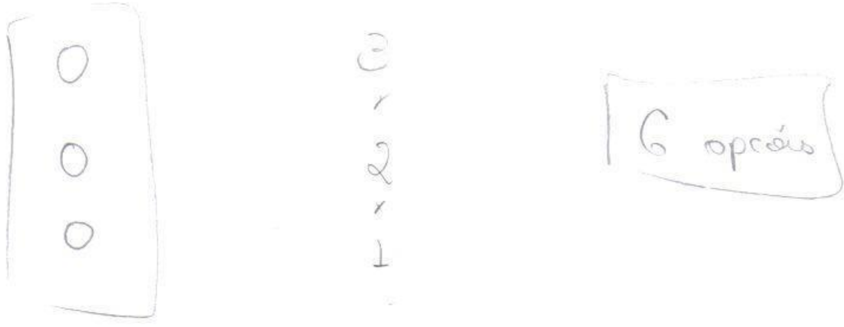
- Esquemas;



- Contagem Direta;



- Princípio Multiplicativo;



Questão 2:

- Produto Cartesiano (Contagem Direta);

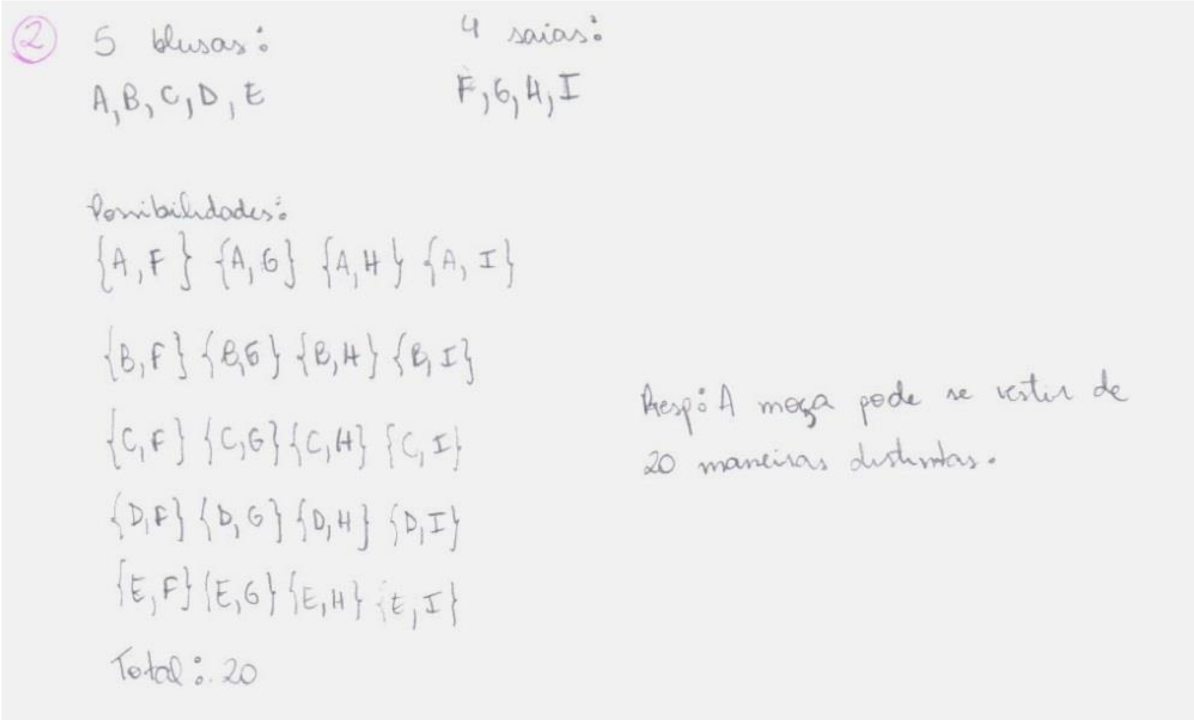
2-)

Blusas

Calças	1	2	3	4	5
1	1·1	1·2	1-3	1-4	1·5
2	2·1	2·2	2-3	2-4	2-5
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5

$5 \cdot 4 = 20$

- Tabelas;

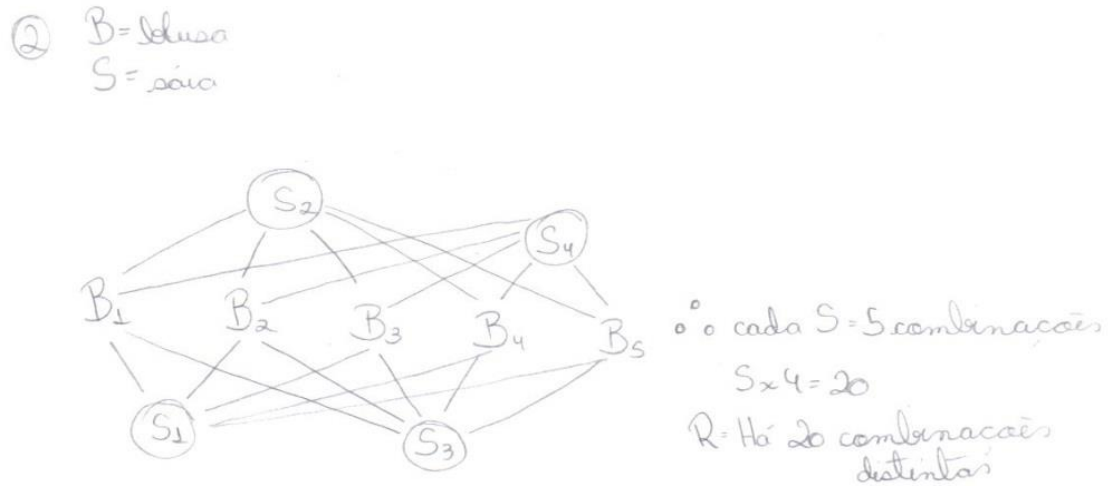

2 5 blusas:
A, B, C, D, E

4 saias:
F, G, H, I

Possibilidades:
{A, F} {A, G} {A, H} {A, I}
{B, F} {B, G} {B, H} {B, I}
{C, F} {C, G} {C, H} {C, I}
{D, F} {D, G} {D, H} {D, I}
{E, F} {E, G} {E, H} {E, I}
Total: 20

Resp: A moça pode se vestir de 20 maneiras distintas.

- Esquemas;



- Faz com um e generaliza;

2) Blusas. 5 1 Blusa c/ 1 saia
Saias. 4 (1 blusa . 4 saias) . 5
4 . 5 = 20 modos distintos de se vestir

Questão 3:

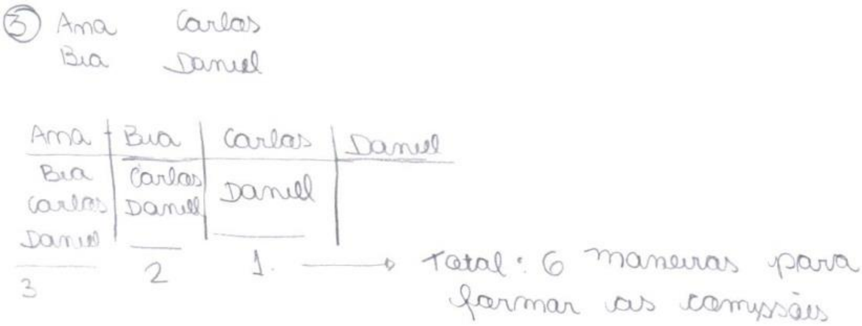
- Montagem das duplas que são permitidas;

3) A → B B → C
A → C B → D
A → D D → C
Podemos formar de 6 mane

- Contagem Direta;

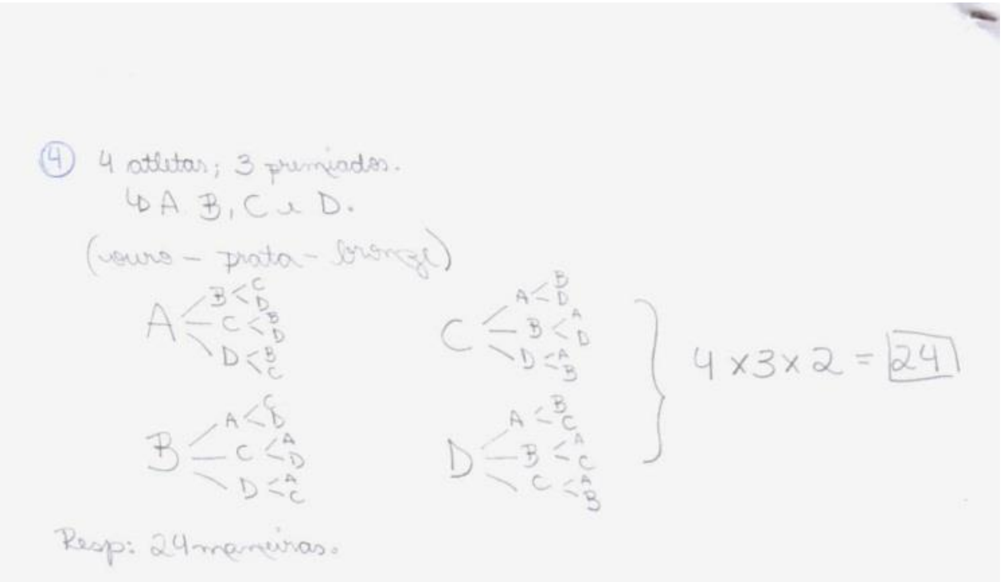
3) Ana → A
Bia → B
Carlos → C
Daniel → D
Combinações: A/B ; A/C ; A/D ; B/C ; B/D ; C/D.
R: As comissões podem ser formadas de 6 maneiras.

- Soma de Naturais;

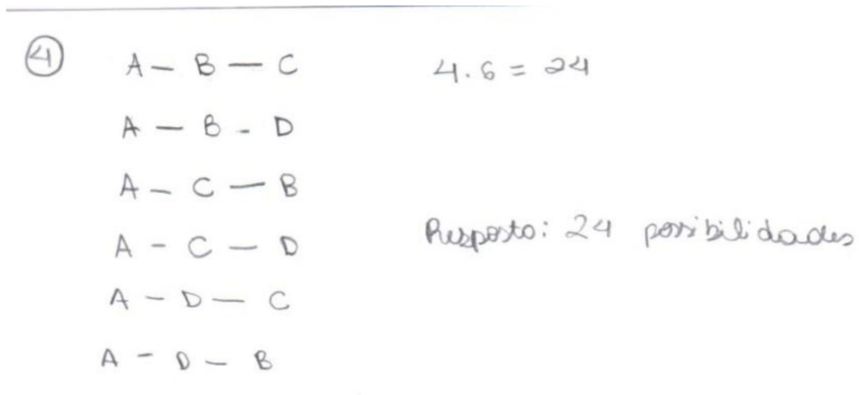


Questão 4:

- Montagem das Possibilidades (Diagrama de Árvore);



- Contagem para um atleta em uma posição e generaliza;

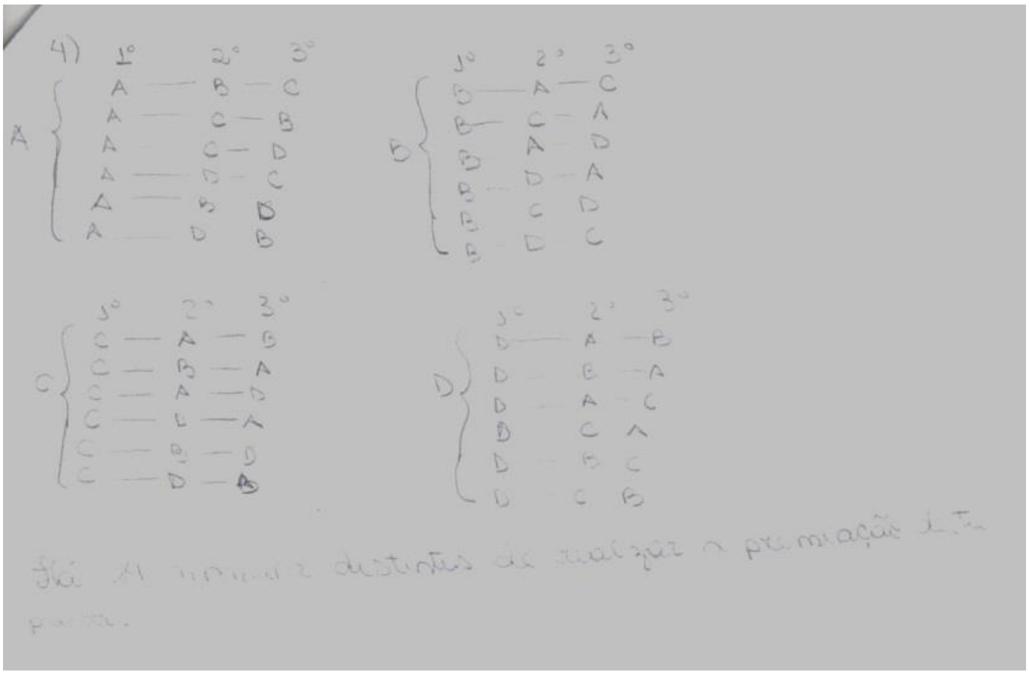


4) A — B — C
A — B - D
A — C — B
A - C — D
A — D — C
A - D — B

4 . 6 = 24

Resposta: 24 possibilidades

- Contagem Direta;

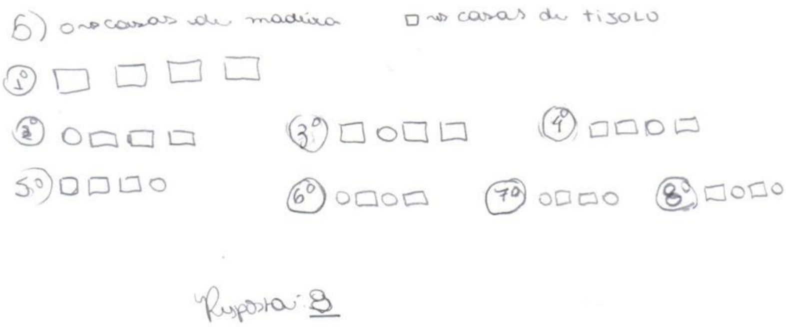


4) 1° 2° 3°
A: A — B — C; A — C — B; A — C — D; A — D — C; A — B — D; A — D — B
B: B — A — C; B — C — A; B — A — D; B — D — A; B — C — D; B — D — C
C: C — A — B; C — B — A; C — A — D; C — D — A; C — B — D; C — D — B
D: D — A — B; D — B — A; D — A — C; D — C — A; D — B — C; D — C — B

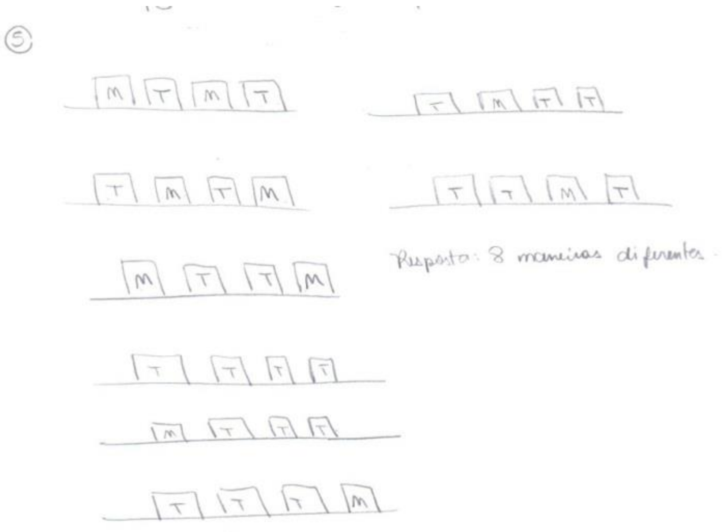
Há 24 maneiras distintas de realizar a premiação desta prova.

Questão 5:

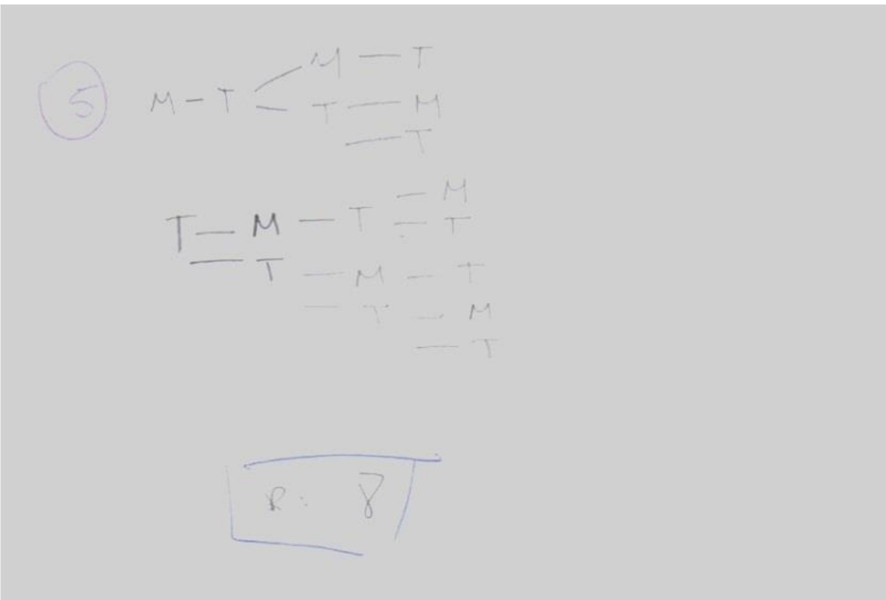
- Contagem das situações uma a uma;



- Utilização de figuras;



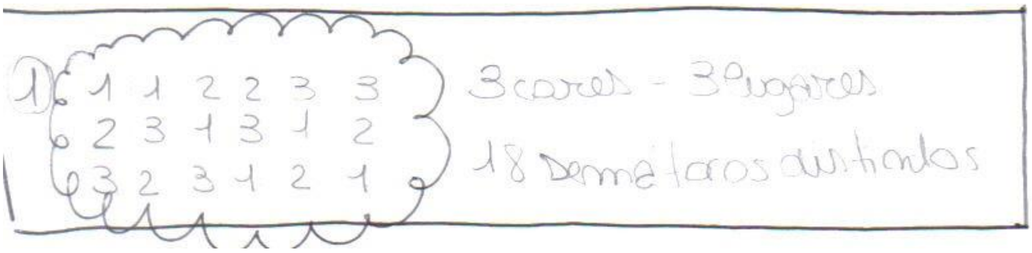
- Diagrama de árvore;



Entretanto, em algumas atividades, alguns erros frequentes estão presentes:

Questão 1:

- Interpretar erroneamente a contagem direta;



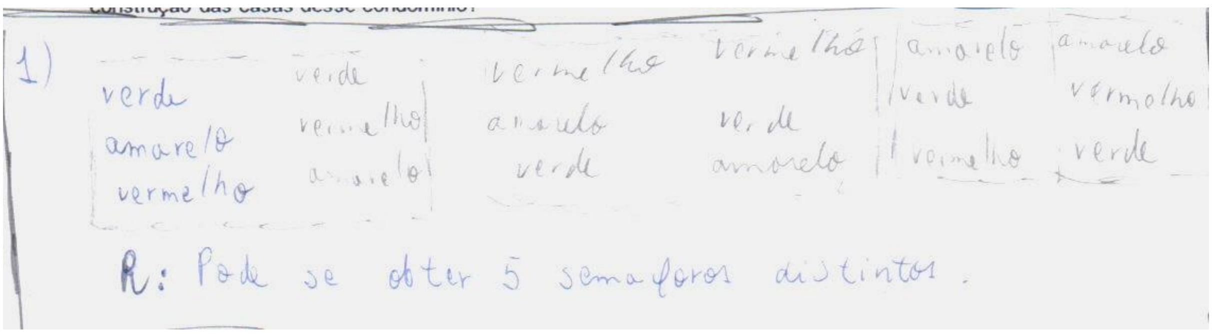
1) 1 1 2 2 3 3
2 3 1 3 1 2
3 2 3 1 2 1

3 cores - 3 lugares
18 semáforos distintos

- Não considerar a casinha como um lugar a ser preenchido e concluir que não tem nenhuma maneira;

1 Nenhum.

- Não contar o original;



1)

verde	verde	vermelho	vermelho	amarelo	amarelo
amarelo	vermelho	amarelo	verde	verde	vermelho
vermelho	amarelo	verde	amarelo	vermelho	verde

R: Pode se obter 5 semaforos distintos.

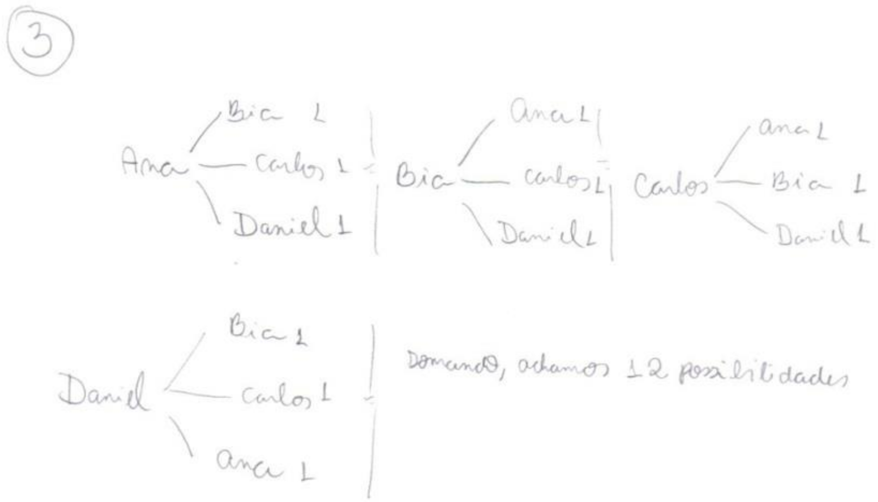
Questão 2:

- Chute;

2 A moça pode se vestir de 20 modos distintos.

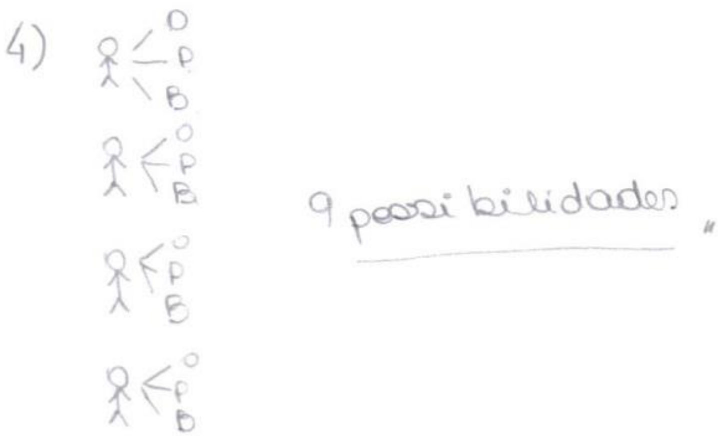
Questão 3:

- Considerar o caso em que a comissão (Ana, Bia) é diferente da comissão (Bia, Ana) devido a ordem de escolha dos elementos da comissão;



Questão 4:

- Resposta com a ideia errada (os alunos vão multiplicando os números aleatoriamente, sem saber o que estão fazendo e/ou que está sendo pedido);



- Contar errado as possibilidades;

4) primeiro → ouro, prata, bronze, sem premiação
segundo → ouro, prata, bronze, sem premiação
terceiro → ouro, prata, bronze, sem premiação
quarto → ouro, prata, bronze, sem premiação

4x4 = 16

R: É possível organizar de 16 maneiras distintas, a distribuição das medalhas.

Questão 5:

- Resposta certa sem justificativa;

5

Resp: Poderão ser formados 8 combinação.

- Não contar todos os casos possíveis;

5)

T M T M
M T M T
M T T M

} 3 medidas

- Esquema sem legenda

5)

X X X X
X Y X Y
Y X Y X
Y X X Y

X X X Y
X X Y X
X Y X X
Y X X X

Em suma, conclui-se que a atividade com a Ficha Diagnóstico 1 foi proveitosa e direcionou o trabalho a ser desenvolvido com as Fichas de Aula, introduzindo o desenvolvimento do assunto.

Uma constatação obtida com a aplicação da Ficha Diagnóstico 1 é que a maioria dos alunos tem dificuldade de concentração, não tem iniciativa para começar a atividade, tem uma necessidade de fazer a atividade em grupo e não consegue ficar sem transmitir a informação e sem interagir e divulgar com os colegas suas ideias.

No início, o professor interveio no tocante a conversa, mas percebeu-se que seria em vão devido ao exposto acima. A troca de informações é tão intensa, que os alunos recriminam aqueles que não compartilham suas informações. Apesar de tudo isso, o fato é que a troca de informações ocorre apenas com os integrantes do próprio grupo em que o aluno está inserido na sala de aula, e essa troca de informações faz com que cada aluno se sinta importante dentro do grupo.

4. FICHAS DE AULA:

4.1: FICHA DE AULA 1:

O assunto Análise Combinatória desenvolveu-se com a aplicação das Fichas de Aula 1, 2 e 3, que são folhas para o acompanhamento dos alunos sobre o encadeamento da matéria em sala de aula.

Cada aluno recebeu uma Ficha de Aula e a teoria da Análise Combinatória foi desenvolvida com base nessas fichas.

O método de fichas de aula foi utilizado com a intenção de criar um produto educacional que se mostrou muito eficiente.

No desenvolvimento do tema, a análise prévia consistiu em averiguar como o aluno se comporta diante de problemas que envolvem contagem sem ter a teoria formalizada. Por isso que, na Ficha Diagnóstico 1, os problemas são simples e, a contagem direta e uma análise cuidadosa da situação descrita pelo enunciado, resolvem todos os problemas.

Nas Fichas de Aula, os problemas são colocados de tal forma que a dificuldade torna-se gradual, e o aluno é requerido a tomar decisões para resolvê-los a partir da teoria formalizada até tal ponto da matéria.

Para o desenvolvimento do assunto, foi-se utilizada à sequência sugerida por **(BACHX, A.C., POPPE, L.M.B., TAVARES, R.N.O., Prelúdio à Análise Combinatória)**, já que o autor segue uma linha gradual dos exercícios, introduzindo a matéria de forma natural para o aluno que está começando o estudo da análise combinatória, iniciando dos mais simples até os mais complexos.

Cada Ficha de Aula contempla uma parte do assunto a ser desenvolvido:

A Ficha de Aula 1 versa sobre o Princípio Multiplicativo e suas consequências, tais como Arranjos com Repetição, Arranjos Simples e a notação fatorial.

A Ficha de Aula 2 versa sobre as Permutações Simples e Circulares.

A Ficha de Aula 3 versa sobre as Permutações com elementos repetidos e as Combinações.

Em todas as Fichas de Aula aparecem parte da teoria a ser desenvolvida na forma de lacunas para os alunos preencherem a medida com que o professor desenvolveu a matéria e exercícios de aplicação dessa teoria. As fichas de aula que foram aplicadas em sala seguem abaixo com o desenvolvimento da pesquisa:

FICHA DE AULA 1: 10 de agosto de 2011

1) Fundamentos da Contagem:

i) Conjunto dos números naturais:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,...\}$

ii) Número de elementos em um conjunto:

a) $A = \{1,2,3,4,...,p\} \Rightarrow n(A) = \_\_\_\_\_$

b) $B = \{0,1,2,3,4,...,p\} \Rightarrow n(B) = \_\_\_\_\_$

c) $C = \{2,3,4,...,p\} \Rightarrow n(C) = \_\_\_\_\_$

d) $D = \{m, m+1, m+2, m+3, m+4, ..., m+p\} \Rightarrow n(D) = \_\_\_\_\_$

e) $E = \{m, m+1, m+2, m+3, m+4, ..., n\} \Rightarrow n(E) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

2) Termos não definidos:

Acontecimento, ocorrência de um acontecimento, agrupamento de objetos.

3) Princípio Fundamental da Contagem:

EXERCÍCIOS:

1. Uma moça tem 5 blusas e 4 saias. De quantos modos distintos ela pode se vestir?

2. Quantos números de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal?

3. Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados no sistema decimal?

4. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados com os algarismos não nulos:
a) podendo repetir algarismos?
b) sem repetir algarismos?

Observação:

5. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal,
a) podendo repetir algarismos?
b) sem repetir algarismos?

Observação:

Generalização do Princípio Multiplicativo:

Quando a escolha dos elementos de cada um dos eventos do acontecimento é realizada dentro de um mesmo conjunto, temos os agrupamentos chamados de **ARRANJO**.

Se for permitida a repetição de elementos, temos ______________________________, caso a

repetição não seja permitida, temos _________________________.

Assim, dado um conjunto com *n* elementos, definimos:

i) O número de **ARRANJOS COM REPETIÇÃO** tomados dentre p elementos desse conjunto é:

Para a escolha do 1º elemento temos _______ possibilidades;

Para a escolha do 2º elemento temos _______ possibilidades;
...

Para a escolha do pº elemento temos _______ possibilidades;

Logo, o arranjo com repetição de n elementos tomados p a p (notação: $AR_{n,p}$) é:

$AR_{n,p}$ = ______________________ = _____;

ii) Caso não se permita a repetição de elementos, temos que o número de **ARRANJOS SIMPLES** tomados dentre p elementos desse conjunto é:

Para a escolha do 1º elemento temos _______ possibilidades;

Para a escolha do 2º elemento temos _______ possibilidades;
...
Para a escolha do pº elemento temos _______ possibilidades;

Logo, o arranjo simples de n elementos tomados p a p (notação: $A_{n,p}$) é:

$A_{n,p}$ = ____.

Para simplificar as contas, definimos o fatorial de um número natural n:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ n(n-1)!, & n \geq 2 \end{cases}.$$

A partir da definição de fatorial, podemos reescrever o ARRANJO SIMPLES da seguinte forma:

$A_{n,p}$ = _____________________________________ = _______.

EXERCÍCIOS:

6. O lanche de uma certa pessoa consiste de um sanduíche (escolhido dentre 4 opções), uma bebida (escolhida dentre café, chá ou leite) e um sorvete (escolhido dentre os sabores: morango, chocolate ou coco). Quantos lanches diferentes essa pessoa pode fazer?

7. De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 7 cadeiras em fila?

8. (Problema do número de divisores)
a) Determinar os divisores inteiros e positivos de 60.
b) Quantos divisores inteiros positivos possui o número 72?
c) Quantos divisores inteiros e positivos tem o número $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são números primos.

9. Quantas coleções **não vazias** podemos formar com 5 exemplares iguais da revista R, 4 exemplares iguais da revista S e 3 exemplares iguais da revista T?

10. (Problema do número de subconjuntos de um conjunto com um número finito de elementos)
a) Considere o conjunto A = {a, b, c}. Quantos subconjuntos tem o conjunto A?
b) Quantos subconjuntos possui um conjunto com n objetos?

11. Quantos números inteiros positivos de 3 algarismos podem ser formados, de modo que os dois primeiros sejam primos e o último algarismo seja divisível por 3?

12. Quantos números inteiros de cinco algarismos distintos e maiores do que 53 000 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

13. (Problema do número de funções) Dados dois conjuntos A com n elementos e B com m elementos, determine:
a) Quantas aplicações podem ser definidas de A para B?
b) Sendo $n \leq m$, quantas aplicações injetoras podem ser definidas de A para B?

A seguir, a resolução com os comentários de cada um dos exercícios da Ficha de Aula 1.

Exercício 1: De quantas maneiras diferentes uma mulher pode se vestir se ela tiver 5 blusas diferentes e 4 saias diferentes?
(Alunos participaram da escolha das cores dos elementos a serem trabalhados na tabela a seguir, sempre com brincadeiras sobre o quê combina com o quê).

	Vermelho	*Amarelo*	*Roxo*	*Lilás*	*Preta*
Jeans	*JV*	*JA*	*JR*	*JL*	*JP*
Xadrez	*XV*	*XA*	*XR*	*XL*	*XP*
Marrom	*MV*	*MA*	*MR*	*ML*	*MP*
Preta	*PV*	*PA*	*PR*	*PL*	*PP*

Olhando a tabela, temos: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20.
A resposta é: ela terá 20 maneiras diferentes de se vestir.
A maior dúvida está em entender o que significa se vestir.
Na outra sala, a tabela montada não teve cores, e sim letras: S_1, S_2, S_3 e S_4 para as saias e B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 para as blusas. O resultado foi idêntico ao resultado obtido na primeira sala.

Exercício 2: Quantos números de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal?

Um dos erros mais comuns cometidos pelos alunos nesse tipo de exercício é não entender o que significa um número de dois algarismos no sistema decimal. Depois de superada essa dificuldade, os alunos conseguem resolver o problema.

Para resolver o exercício, a pergunta inicial feita pelo professor foi: Qual é o primeiro número com dois algarismos no sistema decimal?

Uma das respostas mais fornecidas pelos alunos é o número 01, pois está sendo contado o zero à esquerda. Uma nova intervenção do professor sobre o assunto reforçou a ideia de que o zero à esquerda não é considerado, e com isso, o 01 é um número de um algarismo apenas. Após essa intervenção, os alunos entendem que o primeiro número decimal com dois dígitos é o 10 e que o último número com dois algarismos é o 99. A partir disso, dois caminhos podem ser seguidos, e um deles é o da contagem direta, pois entre 10 e 99, temos uma sucessão de naturais e conforme os Fundamentos da Contagem apresentados no início da Ficha de Aula 1, entre 10 e 99 temos 99 – 10 + 1 = 90 inteiros. Assim, temos 90 números de dois algarismos no sistema decimal.

Outra maneira de resolver o exercício é definir os eventos a serem realizados para formar o número com dois algarismos:

EVENTO 1: escolha do algarismo das dezenas: 9 possibilidades (pois exclui o zero)
EVENTO 2: escolha do algarismo das unidades: 10 possibilidades (pois pode usar o zero).

Pelo Princípio Multiplicativo, temos 9x10 = 90 números de dois algarismos no sistema decimal.

Aqui foi apresentada aos alunos a técnica do traço, usada para resolver alguns exercícios de Combinatória. A técnica do traço consiste em fazer um traço na horizontal (como se fosse uma fração) descrevendo, na parte de cima o evento a ser realizado e na parte de baixo o número de possibilidades que tal evento pode ser realizado.
Assim, para o exercício 2, o esquema de resolução foi:

$$\underset{\text{exclui o zero}}{\frac{\text{D}}{9}} \quad \underset{\text{sem restrição}}{\frac{\text{U}}{10}} = 9\text{x}10 = 90$$

A partir disso, foi imediato resolver o exercício 3:
<u>Exercício 3</u>: Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados no sistema decimal?
Para responder a esse exercício, os alunos observaram que basta tirar os números que tem dois algarismos iguais da resposta obtida anteriormente. Assim, a resposta é: 90 – 9 = 81, pois estamos retirando os números 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99.
Nesse momento surgiu, na sala, a pergunta se é possível fazer esse exercício com a técnica do traço, e a resposta foi afirmativa. Então, foi apresentada a resposta com a técnica do traço:

$$\frac{D}{9}\quad \frac{U}{9} = 9x9 = 81$$

exclui o zero — volta o zero, exclui o já usado

e com isso, a técnica do traço foi utilizada para resolver os exercícios seguintes.

Exercício 4. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados com os algarismos não nulos:

a) podendo repetir algarismos?

b) sem repetir algarismos?

O grande empecilho para resolver esse exercício é saber o significado do termo algarismos não nulos. Outra barreira é quando um número é par. O professor explicou que os algarismos não nulos são aqueles todos com exceção do zero, ou seja, os algarismos de 1 a 9 e que um número é par se o algarismo da unidade for 2, 4, 6 ou 8. Indicando a dezena por D e a unidade por U, o exercício foi resolvido da seguinte forma:

$$\frac{D}{9}\quad \frac{U}{4} = 9x4 = 36$$

Assim, temos 36 números pares formados com os algarismos não nulos.

Para a resposta do item b, os alunos perceberam que os números 22, 44, 66 e 88 estão contados no item a e não podem aparecer no item b.

Logo, a resposta é 36 – 4 = 32.

Nesse ponto, o professor percebeu que a sala fica inquieta, pois a resposta veio de uma contagem indireta, pois do total tiramos os números que não nos interessam. A pergunta que surgiu é: É possível usar a técnica do traço? A resposta para o exercício seria:

$$\frac{D}{9}\quad \frac{U}{?}$$

Nesse ponto surgiu um dilema:

i) se o algarismo usado nas dezenas for par, então temos 3 possibilidades para o algarismos das unidades.

ii) Se o algarismo usado nas dezenas for ímpar, então temos 4 possibilidades para o algarismos das unidades.

Nesse ponto, os alunos apresentaram grande dificuldade do que fazer, pois se encontram em uma situação onde adiar uma escolha pode acarretar em erro no exercício. Aqui, surge a primeira observação a ser seguida em todo exercício de Análise Combinatória:

***Devemos satisfazer as restrições em primeiro lugar*.**

Nesse exercício, a restrição é formar um número que seja par. Assim, a resposta é:

$$\begin{array}{cc} D & U \\ \hline 8 & 4 \\ \text{exclui o} & \text{algarismo} \\ \text{algarismo} & \text{par} \\ \text{par usado} & \end{array} = 8x4 = 32$$

Como foi percebido, tomar decisões não faz parte do cotidiano dos alunos. E essa prática está presente em todos os níveis da educação básica, inclusive está presente em cursos pré-vestibular, onde é percebido, por parte do professor que leciona nesse nível, também, tal passividade por parte dos alunos.

Exercício 5: Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal,

a) podendo repetir algarismos?

b) sem repetir algarismos?

Esse exercício é a generalização do exercício anterior e os alunos não apresentam dificuldades para resolver o item a:

$$\begin{array}{cc} D & U \\ \hline 9 & 5 \\ \text{exclui o} & \text{algarismo} \\ \text{zero} & \text{par} \end{array} = 9x5 = 45$$

Com a resposta do item a, tem-se que a resposta do item b é imediata: 45 – 4 = 41, pois excluímos os números 22, 44, 66 e 88.

Como é sabido, 41 é primo, e o único produto de inteiros positivos cujo resultado é 41 é 1x41. Assim, ao usar a técnica do traço, a resposta não será conveniente.

Usando a restrição do problema (primeira observação), a resposta do exercício pela técnica do traço é:

$$\begin{array}{cc} D & U \\ \hline ? & 5 \\ \text{exclui o} & \text{algarismo} \\ \text{zero} & \text{par:0,2,4,6,8} \end{array}$$

Apesar de obedecer a restrição de que todo número par deve ter 0, 2, 4, 6 ou 8 como último algarismo, não sabemos o que fazer, pois:

i) Se o ultimo algarismo for zero, no algarismo das dezenas temos 9 possibilidades;

ii) Se o ultimo algarismo for 2, 4, 6 ou 8, no algarismo das dezenas temos 8 possibilidades, pois não podemos usar o zero no algarismos das dezenas;

Com isso, surge a segunda observação ao se resolver um exercício de Análise Combinatória:

“***Se ao ocupar uma determinada posição com um determinado objeto, essa ocupação causar dificuldades, o problema deverá ser resolvido dividindo-o dois casos, conforme o objeto ocupe a posição determinada ou não ocupe tal posição”.***

A partir da análise anterior, vimos que a dificuldade está no momento em que alocamos o algarismo o zero na casa das unidades.

Usando a segunda observação, a resposta do exercício é:

D	U	
9	1	$= 9 \times 1 = 9$
exclui o zero	algarismo 0	

D	U	
8	4	$= 8 \times 4 = 32$
exclui o zero e o já usado	algarismos: 2,4,6ou8	

Logo, a resposta é 32 + 9 = 41.

Nesse ponto cabe uma observação: os exercícios 3, 4 e 5, podem ser resolvidos da primeira maneira que foi apresentada: do total subtraímos os elementos que não interessam. Porém, a resolução correta de cada exercício é a segunda apresentada, pois o ser humano é naturalmente um ser agregador de coisas, ou seja, aprendemos primeiro a somar e depois a subtrair (*ver em PIZYBLSKY, L.M.; SANTOS JÚNIOR,G; PINHEIRO, N.A.M.;* ***Relações entre o ensino de Matemática e a Neurociência****, 1º Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. Universidade Federal Tecnológica do Paraná, 2009*). Como a divisão em casos é trabalhada com os alunos desde o Ensino Fundamental, torna-se mais natural para o aluno resolver os exercícios obedecendo as duas observações inseridas durante as discussões dos exercícios.

Com isso, temos que a primeira parte da teoria de Análise Combinatória está feita: Apresentação dos Fundamentos da Contagem, Introdução do Princípio Multiplicativo e a colocação das duas observações importantes para resolver os exercícios de contagem. Ainda na Ficha de Aula 1, temos os exercícios de 6 a 13, que foram resolvidos em sala de aula. Os exercícios a seguir são aplicações do Princípio Multiplicativo para dois ou mais eventos.

<u>Exercício 6</u>: O lanche de uma certa pessoa consiste de um sanduíche (escolhido dentre 4 opções), uma bebida (escolhida dentre café, chá ou leite) e um sorvete (escolhido dentre os sabores: morango, chocolate ou coco). Quantos lanches diferentes essa pessoa pode fazer?

Para fazer o lanche, a pessoa deve percorrer 3 eventos: a escolha do sanduiche, a escolha da bebida e a escolha do sorvete. Chamando de:

- *Sa* o evento escolher um sanduiche;
- *B* o evento escolher uma bebida, e
- *So* o evento escolher um sorvete, pela técnica do traço, a resposta é:

$$\frac{Sa}{4}\ \frac{B}{3}\ \frac{So}{3} = 4x3x3 = 36$$

Assim, temos a generalização do Princípio Multiplicativo, que é válido para um número limitado de eventos.

Aqui, os alunos responderam de forma imediata ao pedido pelo exercício, pois anteriormente desenvolveu-se uma série de exercícios com o intuito de fixar o Princípio Multiplicativo. Segundo a experiência do professor, a sugestão que fica é: *Antes da generalização, faça alguns exemplos envolvendo apenas situações com dois eventos para que os alunos sintam-se seguros ao aplicar o Princípio Multiplicativo.*

Percebeu-se que, dessa forma, a generalização do Princípio Multiplicativo é imediata. Nesse momento, é apresentado o exercício 7, que tem a mesma estrutura do exercício 6, porém com uma diferença fundamental.

<u>Exercício 7</u>: De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 7 cadeiras em fila? Nesse exercício, surgiram as mais variadas respostas:

- A resposta é 21, pois 3x7 é 21;
- A resposta é 63, pois 3x7 é 21, temos 3 pessoas e 7 cadeiras, então sobram 4 cadeiras: 4x3 é 12. A seguir, 21 – 12 é 9. Portanto, 9x7 é 63.

A primeira resposta é compreensível, pois os números do problema são multiplicados. A segunda resposta não é coerente. Nesse ponto, o professor interpelou o aluno que deu tal resposta para explicar o que ele quis dizer, porém o aluno não conseguiu desenvolver uma linha de raciocínio plausível. Percebeu-se que os alunos não estão preparados para interpretar o que diz o texto e não conseguem fazer a transposição da situação descrita no enunciado para uma situação real, que pode ocorrer, inclusive, na sala de aula.

Apesar dessas respostas, surgiu a resposta correta: 210 e o professor pediu ao aluno que deu a resposta a explicar o seu raciocínio para a classe, e sua resposta foi clara e correta:

Para a primeira pessoa temos 7 possibilidades para escolher uma cadeira;

Para a segunda pessoa temos 6 possibilidades para escolher uma cadeira, pois uma já está ocupada;

Para a terceira pessoa temos 5 possibilidades para escolher uma cadeira, pois duas cadeiras já estão ocupadas;

Pelo Princípio Multiplicativo, temos 7x6x5 = 210 possibilidades.

Mesmo depois dessa explicação, feita na lousa pelo aluno, alguns ficaram sem entender.

Com isso, o professor fez uma situação real, com as carteiras da escola.

Após essa simulação, os alunos entenderam o exercício.

Fica a constatação: os alunos têm grandes dificuldades de sair do papel e contextualizar a situação do exercício, ou seja, tem dificuldades de ler, interpretar informações e tomar decisões.

Após a resolução do exercício 7, o professor indagou os alunos se existe alguma diferença entre os exercícios 6 e 7. Após algum tempo de espera, alguns alunos responderam que a diferença fundamental é que no exercício 6, uma escolha não interfere a outra escolha (por exemplo, a escolha do sanduiche não interfere na escolha da bebida, que não interfere na escolha do sorvete) enquanto que no exercício 7, a escolha de uma cadeira interfere na colocação da segunda pessoa, pois a cadeira ocupada pela primeira pessoa não pode ser mais ocupada por nenhuma outra pessoa.

Depois dessa colocação, o professor fechou a discussão com a seguinte orientação: no exercício 6, as escolhas de cada evento são realizadas em conjuntos diferentes (3, para ser mais preciso: o conjunto dos sanduiches, o conjunto das bebidas e o conjunto dos sorvetes), ao passo que, no exercício 7, as escolhas de cada evento é realizada no mesmo conjunto (que é o conjunto das cadeiras). Dessa forma, fica claro para o aluno que para resolver um exercício de combinatória, é necessário fazer algumas escolhas em alguns conjuntos.

É necessário ressaltar que, até agora, não se mencionou qualquer tipo de agrupamento: arranjo ou combinação, apenas o Princípio Multiplicativo.

É nesse ponto, que o professor introduz o agrupamento chamado de ARRANJO, que é o agrupamento obtido quando a escolha dos elementos de cada um dos eventos do acontecimento é realizada dentro de um mesmo conjunto cujos elementos têm a mesma qualidade.

Assim, o exercício 7 é um exemplo de arranjo.

Nesse ponto, foi feita a formalização dos ARRANJOS SIMPLES e com REPETIÇÃO, apresentando, inclusive, a fórmula do ARRANJO SIMPLES com a notação fatorial: $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, e do ARRANJO COM REPETIÇÃO: $(AR)_{n,p} = n^p$.

Apesar de apresentar a fórmula do arranjo, foi enfatizado pelo professor que todo exercício de Análise Combinatória pode ser resolvido com o Princípio Multiplicativo. E dessa forma foi resolvido os exercícios de 8 a 12.

Exercício 8: **(Problema do número de divisores)**

a) Determinar os divisores inteiros e positivos de 60.

b) Quantos divisores inteiros positivos possui o número 72?

c) Quantos divisores inteiros e positivos tem o número $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são números primos.

A resolução do exercício começa, por parte do professor, com uma explicação do que é o divisor inteiro de um número inteiro. Com essa explicação em mente, os alunos começam a enumerar os divisores de 60: {1, 3, 4, 2, 60, 15, 12, 30, 6, 10, 5, 20}. O professor organiza tais elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60} e pergunta se está faltando algum. As respostas mais comuns são para testarmos os outros números que faltam. Para poupar tempo dos alunos, o professor fez uma explanação sobre uma propriedade importante dos divisores de um número inteiro quando são colocados em ordem crescente: *"O produto dos divisores equidistantes dos extremos (no caso, 1 e 60), deve resultar no número que estamos obtendo os divisores (no caso, 60)"*.

Com isso, o teste foi rápido: 1x60, 2x30, 3x20, 4x15, 5x12 e 6x10 resultam em 60. Assim, falta testar apenas os números 7, 8 e 9. Como foi alertado pelos alunos, o 60 não está na tabuada nem do 7, nem do 8 e nem do 9, então 7, 8 e 9 não são divisores de 60. Portanto, a lista está completa.

A questão que surgiu é: como obter os divisores de um número inteiro sem precisar listar todos?

Nesse ponto, o professor interveio e explicou que todos os divisores de um inteiro são obtidos a partir da fatoração em primos do número que se deseja obter os divisores inteiros.

Usando o exemplo do número 60, o professor fez um exemplo de como um divisor do número inteiro 60 é escrito com as potências da fatoração em primos:

A fatoração do número 60 é: $2^2 x 3^1 x 5^1$. Usando, por exemplo, o divisor 12, temos que o número 12 pode ser escrito como $2^2 x 3^1 x 5^0$, que é uma das possibilidades de combinar os expoentes dos primos que aparecem na fatoração do número 60.

O professor alertou para os alunos que todos os divisores de 60 podem ser escritos dessa forma, basta mudar os expoentes. Por exemplo: $15 = 2^0 x 3^1 x 5^1$. Nesse momento, alguns alunos perguntaram o que isso tem a ver com Análise Combinatória e o professor respondeu que o exercício pede uma contagem.

Olhando para a tabela de todos os divisores de 60 e sua fatoração, podemos perceber qual é o padrão em que os divisores de um inteiro satisfazem:

divisor	fatoração	divisor	fatoração
1	$2^0 x 3^0 x 5^0$	10	$2^1 x 3^0 x 5^1$
2	$2^1 x 3^0 x 5^0$	12	$2^2 x 3^1 x 5^0$
3	$2^0 x 3^1 x 5^0$	15	$2^0 x 3^1 x 5^1$
4	$2^2 x 3^0 x 5^0$	20	$2^2 x 3^0 x 5^1$
5	$2^0 x 3^0 x 5^1$	30	$2^1 x 3^1 x 5^1$
6	$2^1 x 3^1 x 5^0$	60	$2^2 x 3^1 x 5^1$

Com a tabela construída, os alunos perceberam que:

i) Os expoentes do primo 2 assumem valores 0, 1 ou 2;

ii) Os expoentes do primo 3 assumem valores 0 ou 1;

iii) Os expoentes do primo 5 assumem valores 0 ou 1;

iv) Para cada expoente do primo 2, temos duas possibilidades de escolher o expoente do primo 3 e para cada uma dessas possibilidades, temos duas possibilidades de escolha do expoente do primo 5.

Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades de agrupar os expoentes é 3x2x2=12, que é o total de divisores do número 60.

Com isso, temos um procedimento para obter os divisores inteiros positivos de um número inteiro:

Passo 1: fatorar o número dado;

Passo 2: somar 1 ao expoente de cada primo na fatoração do número;

Passo 3: multiplicar os resultados obtidos no Passo 2.

Logo, para o número 72, cuja fatoração é $72 = 2^3 x 3^2$, o total de divisores inteiros positivos é (3 + 1) x (2 + 1) = 12.

Assim, para qualquer inteiro n da forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, o total de divisores inteiros positivos é: $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times ... \times (\alpha_k + 1)$.

As Fichas de Aula tem uma particularidade: ao introduzir uma ideia, é apresentado outro exercício com outro contexto, porém usando a ideia apresentada.

O exercício 9 tem um enunciado que, a princípio, não tem relação com o exercício 8. Porém, ao analisar esse exercício, percebemos que a ideia do exercício 8 pode ser usada.

Uma das dificuldades nesse exercício é entender o que é uma coleção.

O professor perguntou aos alunos o que é uma coleção. Os alunos respondem que coleção é *'algo que eu junto'* (sic). Então o professor questionou: Coleção é igual a conjunto? Os alunos responderam que sim. A partir disso, o professor interpelou os alunos e disse que: 'Se uma coleção é um conjunto, então posso ter uma coleção com zero objeto, pois podemos ter o conjunto vazio'. Os alunos se inquietaram e não concordaram, pois a argumentação deles é que se temos uma coleção, deveríamos ter mais de um objeto, ou seja, pelo menos dois.

Nesse ponto, surgem algumas discussões sobre o tema e o professor estabeleceu que é possível ter uma coleção com zero objetos.

Assim sendo, começa a resolução do exercício.

Exercício 9: Quantas coleções não-vazias podemos formar com 5 exemplares iguais da revista R, 4 exemplares iguais da revista S e 3 exemplares iguais da revista T?

Para formar as coleções, podemos ter de 0 a 12 exemplares na coleção. A coleção com 0 exemplares é aquela onde usamos 0 exemplares da revista R, 0 exemplares da revista S e 0 exemplares da revista T, enquanto que a coleção com 12 exemplares é aquela onde usamos 5 exemplares da revista R, 4 exemplares da revista S e 3 exemplares da revista T.

Observe que podemos utilizar:

- De 0 a 5 exemplares da revista R: 6 possibilidades;
- De 0 a 4 exemplares da revista S: 5 possibilidades;
- De 0 a 3 exemplares da revista T: 4 possibilidades;

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos 6 x 5 x 4 = 120 possibilidades de formar uma coleção.

Nessas 120 possibilidades, contamos a coleção com 0 exemplares. Logo, devemos tirar tal possibilidade. Portanto, o total de coleções não vazias é 120 – 1 = 119.

Outro problema interessante na parte de Princípio Multiplicativo é o Problema do número de subconjuntos de um conjunto com um número finito de elementos.

Exercício 10: **(Problema do número de subconjuntos de um conjunto finito)**

a) Considere o conjunto A = {a, b, c}. Quantos subconjuntos tem o conjunto A?

b) Quantos subconjuntos possui um conjunto com n objetos?

O professor começou com uma explicação do que é um subconjunto: é um conjunto formado por alguns elementos (todos ou nenhum) do conjunto original.

A partir disso, iniciou-se a construção de todos os subconjuntos de A = {a, b, c}:

{a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {a}, {b},{c}, ∅.

Analisando cada subconjunto, podemos perceber que:

- Em {a}, o elemento *a* aparece, o elemento *b* **não** aparece e o elemento *c* **não** aparece;
- Em {b}, o elemento *a* **não** aparece, o elemento *b* aparece e o elemento *c* **não** aparece;
- Em {c}, o elemento *a* **não** aparece, o elemento *b* **não** aparece e o elemento *c* aparece;
- Em {a, b}, o elemento *a* aparece, o elemento *b* aparece e o elemento *c* **não** aparece;
- Em {a, c}, o elemento *a* aparece, o elemento *b* **não** aparece e o elemento *c* aparece;
- Em {b, c}, o elemento *a* **não** aparece, o elemento *b* aparece e o elemento *c* aparece;
- Em {a, b, c}, o elemento *a* aparece, o elemento *b* aparece e o elemento *c* aparece;
- Em ∅, o elemento *a* **não** aparece, o elemento *b* **não** aparece e o elemento *c* **não** aparece;

Construindo tal tabela (por isso que o número de elementos é pequeno), os alunos perceberam que em um subconjunto de um conjunto, podemos ter 2 possibilidades para cada elemento: ou ele aparece ou ele não aparece. Assim, para três elementos, temos:

$$2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 2^3 = 8 \text{ subconjuntos.}$$

Com isso, a generalização, que é pedida no item b, é:

Tomando um conjunto com n elementos, o total de subconjuntos é $\underbrace{2x2x...x2}_{n\ vezes} = 2^n$ conjuntos.

Os exercícios 11 e 12 são aplicações diretas do Princípio Multiplicativo.

O exercício mais interessante da Ficha de aula 1 é o exercício 13, que diz respeito à contagem do número de funções.

Nesse exercício, a dificuldade é entender o que significa contar o número de funções.

O professor explicou que contar funções é o mesmo que contar o número de imagens formadas por cada elemento do domínio, com isso, o número de funções é obtido por uma contagem e logo, é um exercício de Análise Combinatória.

Funções é um assunto que, em geral, é ensinado no 1º ano do Ensino Médio, e esse é o contexto das salas que foram trabalhadas.

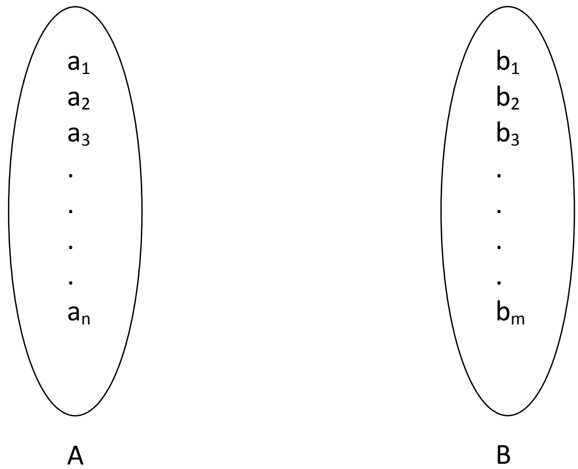
A partir dessa retomada de assunto, iniciou-se a resolução do exercício.

<u>Exercício 13</u>: **(Problema do número de funções)** Dados dois conjuntos A com n elementos e B com m elementos, determine:

a) Quantas aplicações podem ser definidas de A para B?

b) Sendo $n \leq m$, quantas aplicações injetoras podem ser definidas de A para B?

Para o exercício temos a seguinte situação:



A definição de aplicação é: Uma aplicação f de A para B é uma correspondência em que para todo elemento de A, existe apenas um único elemento de B que faz tal correspondência.

Para o item a, temos a seguinte contagem:

- O elemento a_1 pode fazer *m* imagens com os elementos de B;
- O elemento a_2 pode fazer *m* imagens com os elementos de B;
- O elemento a_3 pode fazer *m* imagens com os elementos de B;

.

.

.

- O elemento a_n pode fazer *m* imagens com os elementos de B;

Assim, o total de imagens é $\underbrace{mxmx...xm}_{n\ vezes} = m^n$, que é o total de funções de A para B, que é numericamente igual ao total de *ARRANJOS COM REPETIÇÃO* de m elementos tomados n a n.

Se a função é injetora, as imagens de elementos diferentes devem ser diferentes. Assim, as possibilidades para as imagens são:

- O elemento a_1 pode fazer *m* imagens com os elementos de B;
- O elemento a_2 pode fazer *(m – 1)* imagens com os elementos de B;
- O elemento a_3 pode fazer *(m – 2)* imagens com os elementos de B;

.

.

.

- O elemento a_n pode fazer *(m – (n – 1))* imagens com os elementos de B;

Assim, o total de funções injetoras de A para B é

$(m)x(m-1)x(m-2)x...x(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$, que é numericamente igual ao total de *ARANJOS SIMPLES* de m elementos tomados n a n.

Os alunos entenderam que podemos associar a contagem de elementos a contagem do número de funções e que cada agrupamento é uma imagem da sequência fundamental do agrupamento.

Entretanto, tal raciocínio ficou muito abstrato para o nível em questão: o segundo ano do Ensino Médio. Percebe-se que alguns alunos (apenas os bons alunos em Matemática) conseguiram acompanhar tal raciocínio. Com um exemplo feito pelo professor, outros alunos entenderam a ideia, porém, a maioria dos alunos não conseguiu raciocinar de tal forma.

Para essa ficha de Aula foram necessárias 8 aulas de 45 minutos para discussões e conclusões.

4.2: FICHA DE AULA 2:

A Ficha de aula 2 é sobre um assunto importante em Análise Combinatória: as PERMUTAÇÕES, que são aplicações do Princípio Multiplicativo e um caso particular dos ARRANJOS SIMPLES.

FICHA DE AULA 2: 06 de setembro de 2011

1. PERMUTAÇÕES.

Considere a seguinte situação: Quatro amigos: Antônio, Bia, Carlos e Daniel vão ao cinema e ocupam os 4 lugares consecutivos de uma determinada fila. Escreva todas as possibilidades possíveis para essa ocupação.

Esse é um exemplo de Permutação, que é qualquer *agrupamento ordenado de n elementos*.

Com isso, a permutação de n elementos é o arranjo de n elementos tomados n a n, ou seja, quando usamos todos os elementos do conjunto para formar o agrupamento.

Logo, o número de **PERMUTAÇÕES** de n elementos é:
Para a escolha do 1º elemento temos _____ possibilidades;

Para a escolha do 2º elemento temos _____ possibilidades;
...

Para a escolha do nº elemento temos _____ possibilidades;

Assim, P_n = ___________________________________ = _____.

EXERCÍCIOS DE SALA

1. Considere a palavra PERNAMBUCO e seus anagramas.
a) Quantos são?
b) Quantos deles começam por PER?
c) Quantos deles começam por PER, nesta ordem?
d) Quantos deles tem a sequência PER juntas nesta ordem?
e) Quantos deles começam por PER nesta ordem e terminam por BUCO em qualquer ordem?

2. De quantas formas 6 pessoas podem se sentar numa fileira de 6 cadeiras se duas dessas pessoas (Geraldo e Francisco) se recusam a sentar um do lado do outro?

3. Quantos números de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? Qual a posição do número 43 521?

4. (Número de funções bijetoras) Se A e B são conjuntos e $n(A) = n(B) = n > 0$. Quantas funções de A para B bijetoras existem?

5. De quantos modos 4 pessoas podem formar uma roda?

PERMUTAÇÃO CIRCULAR: CONCEITO

PERMUTAÇÃO CIRCULAR: DEFINIÇÃO

6. De quantos modos se pode pintar as faces de uma pirâmide pentagonal regular usando seis cores diferentes, sendo cada face para cada cor?

7. De quantos modos podemos colocar 5 pedras preciosas em um anel?

A Ficha começou com uma situação prática das permutações: quatro pessoas vão ocupar quatro lugares consecutivos em uma fila.

Uma das dificuldades que os alunos têm para entender as permutações é que cada permutação é obtida a partir de uma troca de posições entre os elementos, tendo como referência uma sequência qualquer dos elementos que temos, ao qual chamaremos de sequência fundamental.

Assim, a situação prática é: Quatro amigos: Antônio, Bia, Carlos e Daniel vão ao cinema e ocupam os 4 lugares consecutivos de uma determinada fila. Escreva todas as possibilidades possíveis para essa ocupação.

O professor começou nomeando os integrantes desse grupo: Antônio (A), Bia (B), Carlos (C) e Daniel (D).

Consideremos a sequência fundamental como sendo ABCD.

Outra dificuldade dos alunos é entender que a própria sequência fundamental é uma permutação.

O professor começou completando o quadro que está disponível na ficha para os alunos:

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

A construção da tabela foi feita da seguinte forma:

Na linha 1, começamos com todas as possibilidades de começar uma fila com a pessoa A na primeira posição;

Na linha 2, começamos com todas as possibilidades de começar uma fila com a pessoa B na primeira posição;

Na linha 3, começamos com todas as possibilidades de começar uma fila com a pessoa C na primeira posição;

Na linha 4, começamos com todas as possibilidades de começar uma fila com a pessoa D na primeira posição.

A construção da tabela foi feita com a ajuda dos alunos. Assim, os alunos perceberam que basta trocar as posições dos elementos de uma sequência para mudar a permutação.

Em seguida, o professor questionou os alunos se falta alguma sequência ou se existe alguma sequência repetida. Como a resposta foi negativa para ambas as perguntas, o professor disse que essas 24 sequências obtidas e colocadas na tabela são todas as permutações possíveis desses 4 elementos, e a conclusão obtida é que para 4 elementos, temos 24 permutações possíveis.

Na ficha de aula foi feita a generalização da permutação de n elementos:

O número de **PERMUTAÇÕES** de n elementos é:

Para a escolha do 1º elemento temos *n* possibilidades;

Para a escolha do 2º elemento temos $n - 1$ possibilidades;

.

.

.

Para a escolha do nº elemento temos 1 possibilidade;

Assim, $P_n = n.(n-1). \ldots .1 = n!$.

Dessa forma, foi feita a dedução da fórmula das permutações.

Como exemplo, o professor usou a sala de aula em questão:

Professor: Em quantos estamos na sala?

Aluno A: 32 pessoas.

Professor: De quantas formas podemos nos assentar nas 32 cadeiras da sala?

Aluno B: Não sei.

Professor: Pense da seguinte forma:

Os alunos estão em fila na parte de fora da sala.

O 1º aluno que entra tem 32 possibilidades de escolher uma cadeira e sentar-se;

O 2º aluno que entra tem 31 possibilidades de escolher uma cadeira e sentar-se;

O 3º aluno que entra tem 30 possibilidades de escolher uma cadeira e sentar-se;

.

.

.

O 31º aluno que entra tem 2 possibilidades de escolher uma cadeira e sentar-se;

O 32º aluno que entra tem 1 possibilidade de escolher uma cadeira e sentar-se, pois é aquela que sobrou.

Então, temos 32 x 31 x 30 x ... x 2 x 1 possibilidades de nos assentar nessa sala. Esse número é exatamente 32!, que é um número enorme. Pode deixar indicado. O que isso tem a ver com permutações? Permutações são trocas de posições. Tome por exemplo, essa configuração da sala (o professor usa a sala da forma que está no momento). Se trocarmos de lugar a aluna A com a aluna B, a configuração muda, certo? Essa nova configuração e a anterior são 2 das 32! maneiras de assentarmos na sala.

Os alunos entenderam a ideia e começou-se a resolução dos exercícios da Ficha de Aula número 2:

<u>Exercício 1</u>: Considere a palavra PERNAMBUCO e seus anagramas.

a) Quantos são?

b) Quantos deles começam por PER?

c) Quantos deles começam por PER, nesta ordem?

d) Quantos deles têm a sequência PER juntas nesta ordem?

e) Quantos deles começam por PER nesta ordem e terminam por BUCO em qualquer ordem?

Em um primeiro momento, o professor explicou o que é um anagrama: ordenação de letras que podem ter ou não sentido em uma determinada língua. Assim sendo, uma palavra é uma ordenação de letras com sentido em uma determinada língua.

O professor explicou que um dos anagramas da palavra ROMA é a palavra AMOR.

Dessa forma, o exercício começou a ser resolvido.

a) O total de anagramas é a permutação de 10 símbolos: P_{10} = 10! = 3 628 800

b) Se o anagrama começa por PER, as três primeiras posições já estão ocupadas. Assim, a disposição das letras fica:

$$PER\underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}_{letras\ N,A,M,B,U,C,O}$$

Portanto, o total de Permutações começadas por PER é: P_3 x P_7 = 3! x 7! = 30 240.

Alguns questionamentos que surgiram são: o porquê do 3! e o porquê da multiplicação.

Para responder a primeira pergunta, o professor fez a leitura do item c: Quantos deles começam por PER, nesta ordem?

O professor ressaltou que em exercícios de Permutações, essa parte do enunciado '*nessa ordem*' é importante, pois no exercício 3, as três primeiras posições devem ser, obrigatoriamente, PER, ao passo que no exercício 2, é permitido que nas três primeiras posições tenhamos PRE, por exemplo.

É nesse ponto que o professor explicou o porquê do 3! na resposta do item b. A outra pergunta, que é o porque da multiplicação, vem do Princípio Multiplicativo.

Com essa explicação, a resposta do item c foi imediata:

$$\underset{uma\ mameira}{PER}\ \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}_{letras\ N,A,M,B,U,C,O:P_7=7!}$$

A resposta é 1 x P_7 = 7! = 5 040.

No item d: Quantos deles têm a sequência PER juntas e nesta ordem, os alunos perceberam que a sequência PER poderia ocupar qualquer posição, desde que estivessem juntas. O professor observou que, se as letras devem estar juntas, então poderíamos pensar que elas são 'uma' letra apenas. Dessa forma, temos 8 letras para permutar:

$$\boxed{PER}, N, A, M, B, U, C, O$$

Assim, a resposta é: P_8 = 8! = 40 320.

O Professor ponderou que, se a expressão '*nessa ordem*' não estivesse no enunciado, poderíamos trocar, também, as letras P, E e R, e nesse caso, a resposta seria P_3 x P_8 = 3! x 8! = 241 920.

Para finalizar o exercício, o item e: Quantos deles começam por PER nesta ordem e terminam por BUCO em qualquer ordem, foi resolvido e os alunos responderam de forma correta:

$$\underset{1\,possib.}{PER}\underbrace{N,A,M}_{P_3=3!}\ \underbrace{B,U,C,O}_{P_4=4!}$$

Assim, a resposta é 1 x P_3 x P_4 = 3! x 4! = 144.

<u>Exercício 2</u>: De quantas formas 6 pessoas podem se sentar numa fileira de 6 cadeiras se duas dessas pessoas (Geraldo e Francisco) se recusam a sentar um do lado do outro, foi resolvido, primeiro, sem a restrição do problema, e o total de possibilidades é $P_6 = 6! = 720$.

Em seguida, o exercício foi resolvido com a restrição do problema:

O professor iniciou com o questionamento de como é possível que Geraldo (G) e Francisco estejam separados, e começou a construção das possibilidades:

1.*G* __ *F* __ __ __
2.*G* __ __ *F* __ __
3.*G* __ __ __ *F* __
4.*G* __ __ __ __ *F*
5.__ *G* __ *F* __ __
6.__ *G* __ __ *F* __
7.__ *G* __ __ __ *F*
8.__ __ *G* __ *F* __
9.__ __ *G* __ __ *F*
10.__ __ __ *G* __ *F*

Nesse ponto, alguns questionaram se na posição 8 não poderia colocar o F no primeiro lugar e assim teríamos a sequência F,__,G,__,__,__. O professor respondeu que sim e então teríamos mais do que 10 maneiras. Entretanto, o professor ressaltou que essa sequência (F,__,G,__,__,__) é obtida trocando G e F de lugar na posição 1. Os alunos perceberam que podemos fazer essa troca para cada uma das 10 posições. Assim, a resposta é $10 \times 2 \times P_4 = 20 \times 24 = 480$.

Os alunos reclamaram que o total de casos a ser considerado é grande (nesse caso, 20). O professor disse que tem uma outra solução.

A solução alternativa é:

O total de possibilidades, sem restrição é 720. O exercício diz que G e F não podem estar juntos. Dessa forma, basta subtrair do 720 o total de possibilidades em que G e F aparecem juntas. O professor ressaltou que a ideia é idêntica ao do exercício 1. O total de possibilidades no qual G e F estarão juntos é o total de permutações da sequência:

$$\boxed{G,F},A,B,C,D$$

que é $P_2 x P_5 = 2!x5! = 240$. Portanto, a resposta é $720 - 240 = 480$.

O professor indagou qual das duas soluções é a mais intuitiva e a resposta dos alunos foi que a primeira é mais intuitiva, porém a segunda é mais fácil. Nesse ponto, o professor concordou e disse que, em certos momentos, é preferível resolver de uma maneira semelhante à segunda resolução. O professor ressaltou que, para utilizar a segunda solução, o aluno deve saber de forma precisa o que é para ser feito.

Exercício 3: Quantos números de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? Qual a posição do número 43 521?

O Professor iniciou com a construção de um número de cinco algarismos:

$$\underset{5}{\underline{D_M}}\ \underset{4}{\underline{M}}\ \underset{3}{\underline{C}}\ \underset{2}{\underline{D}}\ \underset{1}{\underline{U}}$$

e assim, o total de possibilidades para os dígitos dados é $5! = 120$.

A segunda pergunta do exercício é sobre a posição do número 43 521. Nesse caso, a pergunta está mal formulada, pois não faz referência à alguma ordenação dos números obtidos. A pergunta correta seria: ‘Listando todos os números obtidos em ordem crescente, qual a posição ocupada pelo número 43 521’.

Para exemplificar, o professor listou alguns números em ordem:

Posição	número
1	12 345
2	12 354
3	12 435
.	.
.	.
.	.
n	43 521
.	.
.	.
.	.
120	54 321

Com os números listados, o professor atentou os alunos que para chegar ao número pedido, devemos escrever todos os números iniciados por 1, 2 e 3. Assim, temos:

$$\underset{\substack{3\\ 1,2\ ou\ 3}}{\underline{D_M}}\ \underset{4}{\underline{M}}\ \underset{3}{\underline{C}}\ \underset{2}{\underline{D}}\ \underset{1}{\underline{U}}$$

São 72 números que ocupam as posições de 1 a 72. Os alunos entenderam a construção.

Nesse ponto, o professor perguntou aos alunos qual o número que está na posição 73, e a resposta foi que esse número é o primeiro que começa por 4, no caso, o 41 235.

O professor questionou se deveríamos escrever todos os começados por 4. Alguns alunos responderam que não, pois o número pedido está antes do número 45 123, por exemplo. Um dos alunos disse que o número pedido está após os começados por 41 e 42, pois ele começa por 43.

Assim, os começados por 41 e 42 são:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{D_M} & \underline{M} & \underline{C} & \underline{D} & \underline{U} \\ \underset{4}{1} & \underset{1\,ou\,2}{2} & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Temos 12 números que ocupam as posições de 73 à 84.

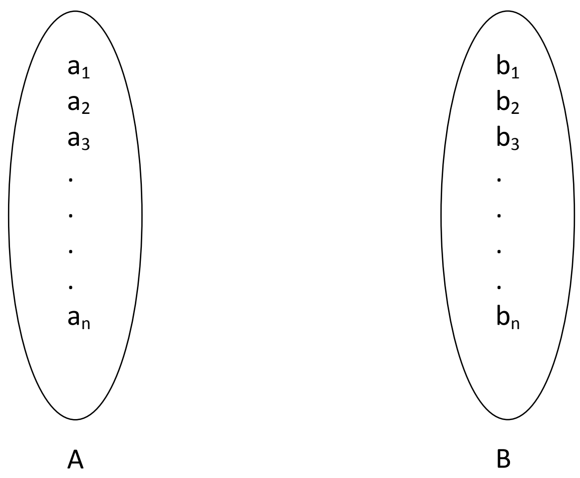
O professor perguntou qual o próximo número da sequência e os alunos responderam, com certa dificuldade: 43 125. Assim, o professor interveio e afirmou que o número pedido tem esse começo e sugeriu para os alunos que listassem todos os começados por 43, e dessa forma foi feito:

Posição 85: 43 125	Posição 86: 43 152	Posição 87: 43 215
Posição 88: 43 251	Posição 89: 43 512	Posição 90: 43 521

Logo, a posição ocupada é a posição 90.

<u>Exercício 5</u>: Se A e B são conjuntos e n(A) = n(B) = n > 0, quantas funções bijetoras de A para B existem?

O professor lembrou que a contagem do número de funções já foi feita no exercício 13 da Ficha de Aula 1. Com isso, os alunos já tinham visto o raciocínio. Com isso, foi apenas raciocinar de maneira análoga ao que foi feito anteriormente:



Como o número de elementos de A e B são iguais:

- O elemento a_1 pode fazer *n* imagens com os elementos de B;
- O elemento a_2 pode fazer *n – 1* imagens com os elementos de B;
- O elemento a_3 pode fazer *n – 2* imagens com os elementos de B;

  .

  .

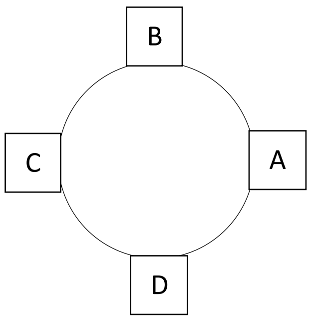
  .
- O elemento a_n pode fazer *1* imagem com os elementos de B;

Assim, o total de imagens é $nx(n-1)x(n-2)x...x1 = n!$, que é o total de funções bijetoras de A para B, que é, numericamente igual ao total de *PERMUTAÇÕES* de n elementos.

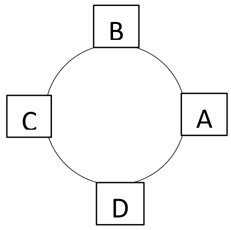
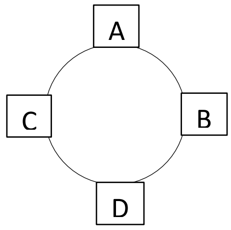
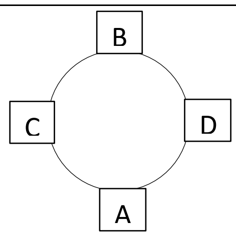
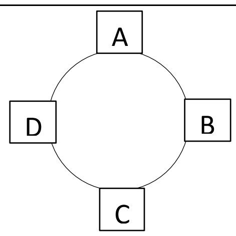
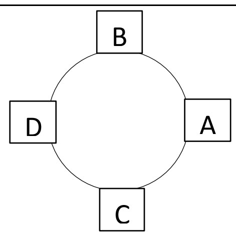
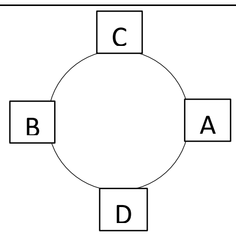
A teoria de permutações em nível de Ensino Médio termina nesse ponto. Entretanto, o professor apresentou aos alunos o conceito de *PERMUTAÇÃO CIRCULAR (PC)*, que é dispor os objetos em roda.

<u>Exercício 5</u>: De quantas formas 4 pessoas podem formar uma roda?

O professor montou uma roda na lousa da sala de aula e pediu para que os alunos montassem uma roda possível, e a roda foi a seguinte:



A partir dessa roda, o professor explicou que estão embutidas, nessa roda, 4 filas: BADC, ADCB, DCBA e CBAD. O professor explicou, ainda, que em uma roda não temos referência, ou seja, não sabemos quem é o primeiro ou o último da roda. Assim, nesse exemplo, a cada 4 filas temos uma roda:

Roda	Filas
	BADC ADCB DCBA CBAD
	ABDC BDCA DCAB CABD
	BDAC DACB ACBD CBDA
	ABCD BCDA CDAB DABC
	BACD ACDB CDBA DBAC
	CADB ADBC DBCA BCAD

O professor explicou que todas as filas obtidas na tabela inicial (das quatro pessoas em uma fila no cinema usada para exemplificar as Permutações) estão listadas nessa tabela e que o total de filas é maior do que o total do número de rodas.

Para cada 4 filas, temos uma roda, e assim, o total de rodas é o total de filas dividido por 4: $\frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4} = 6$ rodas.

O professor perguntou o porquê da divisão por 4.

Após alguns instantes de silêncio, um aluno disse que é devido ao fato de termos 4 pessoas. A partir dessa fala do aluno, o professor introduziu o conceito de permutação circular: *Objetos em Fila e sem a referência do lugar ocupado.*

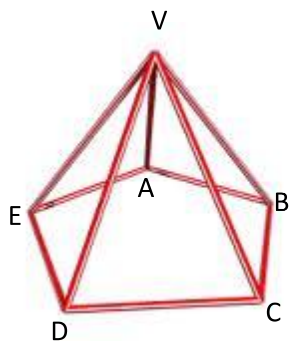
Generalizando a ideia, o total de rodas com n objetos é o total de filas dividido por n:

$$\frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{nx(n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

Exercício 6: De quantos modos pode-se pintar uma pirâmide pentagonal regular usando seis cores diferentes, sendo cada lado para cada cor?

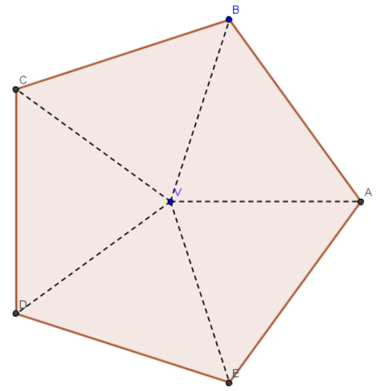
Os alunos perguntaram o que é uma pirâmide, pois essa matéria não foi vista por eles até esse momento.

O professor disse que uma pirâmide é uma figura geométrica espacial (o professor levou para sala de aula uma pirâmide) composta por um polígono, que é a base, e por triângulos que tem como base um dos lados do polígono da base e um vértice em comum fora do plano da base.



A pirâmide acima é a descrita pelo exercício.

Vista de cima, temos a seguinte figura:



Assim, a coloração da pirâmide é um exercício de permutação circular.

Para colorir a pirâmide devemos realizar dois eventos:

Evento 1: escolha da cor da base: 6 possibilidades;

Evento 2: escolha das cores das faces laterais da pirâmide: $(PC)_5 = 4! = 24$.

Logo, o total de maneiras de colorir a pirâmide é 6x24 = 144.

A Ficha de Aula 2 termina com o seguinte exercício:

Exercício 7: De quantos modos podemos colocar cinco pedras preciosas em um anel?

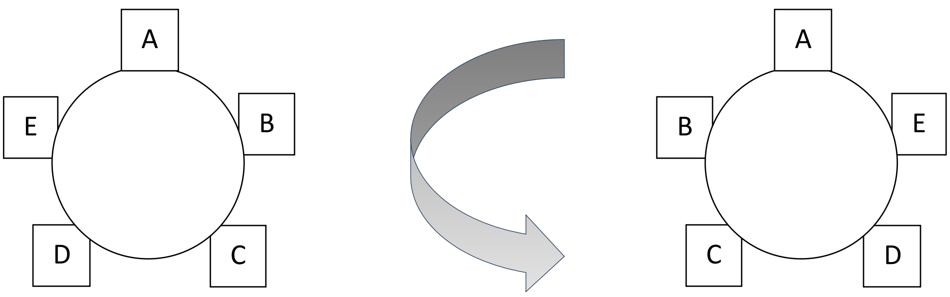
O enunciado pode sugerir que o exercício é um exercício de permutação circular, o que de fato ocorre.

Assim, o total de maneiras de colocar as pedras no anel é $(PC)_5 = 4! = 24$.

Nesse ponto, o professor percebeu que os alunos acharam o exercício desnecessário, pois já resolveram o exercício 6.

Entretanto, uma aluna percebeu que o anel pode ser ‘virado’. O professor perguntou para a aluna o que ela entendia por ‘virado’, e a aluna explicou com um anel que possuía em um de seus dedos. Ela tirou o anel, virou o anel 180º em relação a um de seus eixos e colocou-o de volta no dedo, e explicou que o anel não mudou.

Nesse ponto, o professor fez uma explicação sobre o ocorrido. Observando as rodas a seguir, podemos entender que são rodas diferentes, porém representam o mesmo anel:



Portanto, a cada duas rodas temos um único anel. Então, o total de anéis é $\frac{(PC)_5}{2}=\frac{4!}{2}=\frac{24}{2}=12$.

Para essa ficha de aula foram necessárias 3 aulas de 45 minutos para as discussões e conclusões.

4.3: A FICHA DE AULA 3:

A Ficha de Aula 3 é sobre Permutações com Elementos Repetidos e os agrupamentos chamados de Combinação.

FICHA DE AULA 3: 20 de setembro de 2011:

1. PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS:

Considere os anagramas da palavra MACACA:

Se tivéssemos a palavra M__C__C__, fixando as letras M, C e C, teríamos os seguintes anagramas:

M__C__C__ M__C__C__ M__C__C__

M__C__C__ M__C__C__ M__C__C__

Como não existe distinção (olhe para a palavra original), essas______permutações representam, na verdade, ____ anagrama.

Logo, o total de anagramas da palavra MACACA é:

______=_____=_______

Raciocinando de maneira análoga para a letra C, temos que essas _____ permutações representam, na verdade, ____ anagrama.

Assim, o total de anagramas da palavra MACACA é

______=________=_________

Em geral, $P_n^{n_1, n_2, \ldots n_k}$ = __________ .

2. COMBINAÇÃO:

Para exemplificar os agrupamentos chamados de combinação, considere a seguinte situação: Em um grupo de 8 alunos de uma sala de aula, escolhemos 3 alunos para algumas tarefas. Determine o número de escolhas que podem ser feitas para:

a) Os três ganharem três prêmios distintos na rifa da escola;

b) Os três ganharem três prêmios iguais na rifa da escola;

c) O primeiro ganhar uma TV, o segundo uma bicicleta e o terceiro um par de tênis;

d) Os três irem ao cinema assistir ao mesmo filme;

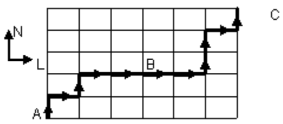
e) O primeiro ir ao teatro, o segundo ir ao cinema e o terceiro ir ao campo de futebol.

Com os exemplos acima temos exemplos de AGRUPAMENTOS ORDENADOS (letras: ________) e AGRUPAMENTOS NÃO ORDENADOS (letras: ________). Os agrupamentos ordenados são os ARRANJOS e os agrupamentos não ordenados são as COMBINAÇÕES.
O total de combinações é: $C_{n,p} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_ = \binom{\ }{\ }$.

EXERCÍCIOS

1. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA? (Considere dois casos: (i) Á = A (ii) Á ≠ A).

2. (FUVEST – 1993) A figura ao lado representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa se Maria?



3. Dado o conjunto A = {a, b, c, d, e, f}, descreva todos os subconjuntos com dois elementos de A.

4. Com cinco professores, quantas comissões de três professores é possível formar?

5. Dados cinco objetos distintos, qual o número de combinações de três objetos que:
a) contém um determinado objeto?
b) não contém tal objeto?
(perceba que o resultado independe do objeto escolhido)

6. Quantos triângulos podemos formar com oito pontos distintos de um plano, se três pontos quaisquer não estão alinhados?

7. De quantas maneiras podemos dividir 18 pessoas em 3 grupos, sendo um de 5 pessoas, outro de seis pessoas e um de sete pessoas?

8. Convenciona-se transmitir sinais luminosos de uma ilha para a costa por meio de seis lâmpadas brancas e seis vermelhas, colocadas nos vértices de um hexágono regular, de tal modo que:
i) em cada vértice haja 2 lâmpadas de cores diferentes;
ii) em cada vértice não haja mais do que uma lâmpada acesa;
iii) o número mínimo de vértices iluminados seja 3.
Determinar o número total de sinais que podem ser transmitidos.

9. Resolva: $\dfrac{\dbinom{x+3}{3}}{\dbinom{x+1}{2}} = \dfrac{10}{3}$.

A Ficha começa com um exemplo prático: considere os anagramas da palavra MACACA.

Os alunos perceberam que essa palavra tem letras repetidas, e assim, o total de anagramas seria diferente do total se as letras fossem iguais (alguns alunos disseram a resposta se as letras fossem diferentes: $P_6 = 6! = 720$).

O professor começou com a seguinte situação:

Se tivéssemos a palavra MACACA (o professor destacou as letras iguais para que os alunos percebessem que se as letras fossem diferentes, a resposta seria 720, como destacado por alguns alunos antes da explanação da teoria), fixando as letras M, C e C, teríamos os seguintes anagramas:

MACACA, MACACA, MACACA, MACACA, MACACA, MACACA.

Como não existe a distinção entre as letras (olhe para a palavra original), essas **6** permutações representam, na verdade, **1** anagrama.

Logo, o total de anagramas da palavra MACACA é:

$$\frac{P_6}{3!} = \frac{6!}{3!} = P_6^3 = 120$$

Raciocinando de maneira análoga para a letra C, temos que essas **2** permutações representam, na verdade, **1** anagrama.

Assim, o total de anagramas da palavra MACACA é $\dfrac{P_6^3}{2!} = \dfrac{6!}{3!x2!} = P_6^{3,2} = 60$. Em geral,

$$\boxed{P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$$

Nesse ponto, o professor pausou a teoria e fez os dois primeiros exercícios propostos:

Exercício 1: Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA? (Considere dois casos: (i) Á = A (ii) Á ≠ A).

Nesse tipo de exercício que trabalha com os anagramas de palavras que possuem letras repetidas, a maior dúvida por parte dos alunos é considerar a letra acentuada igual ou diferente da letra sem acento, que nesse caso é a letra A.

Para exemplificar, o professor resolveu das duas formas possíveis: considerando os dois casos: (i) Á = A (ii) Á ≠ A.

Assim, as respostas são:

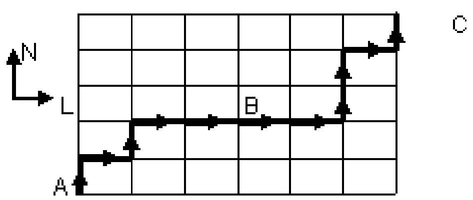
i) Se Á = A, então a palavra MATEMÁTICA tem: $10\text{letras}\left\langle \begin{array}{l} 2M \\ 3A \\ 2T \end{array}\right.$, e o total de anagramas é $P_{10}^{2,3,2} = \dfrac{10!}{2!3!2!} = 151\,200$.

ii) Se Á ≠ A, então a palavra MATEMÁTICA tem: $10\text{letras}\left\langle \begin{array}{l} 2M \\ 2A \\ 2T \end{array}\right.$, e o total de anagramas é $P_{10}^{2,2,2} = \dfrac{10!}{2!2!2!} = 453\,600$.

Nesses dois casos, os alunos entenderam o que foi feito e o professor percebeu que a teoria sobre as permutações com elementos repetidos foi compreendida pelos alunos.

O exercício 2 é sobre o total de caminhos em uma malha reticulada. Após a leitura do exercício, os alunos perguntaram o que isso tem a ver com as Permutações com Repetição. Que é um exercício de Análise Combinatória, os alunos entenderam, pois envolvia contagem. Entretanto, não conseguiam relacionar o exercício com a teoria apresentada.

Exercício 2: A figura abaixo representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?



O professor alertou a sala que o enunciado do exercício não possibilita a volta, por exemplo, se João caminha, em um primeiro momento, três trechos para o Norte, isso não é possível, pois para passar na casa de Maria (condição do exercício), João teria que caminhar um trecho para o Sul, o que não é permitido.

Com essa explanação, o professor iniciou a resolução do exercício. O professor separou o exercício em duas partes: a primeira parte o caminho de João até a casa de Maria, e em seguida o caminho de João e Maria até a escola. O professor perguntou para a sala qual é o caminho indicado no enunciado no primeiro trecho, e alguns alunos respondem: NLNLL. Nesse ponto, o professor apresentou a seguinte tabela para os alunos, realizada passo a passo, da direita para a esquerda, com a participação dos alunos:

Trajeto	Um caminho possível	Outro caminho possível	Total de caminhos
De A para B	NLNLL	NNLLL	$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

Com a tabela feita, o professor disse que o total de caminhos possíveis é o total de permutações com repetição da sequência de letras formada por um dos caminhos possíveis.

Uma pergunta que surgiu após a construção da tabela foi: porque o professor fez dois caminhos: o indicado e um outro possível caminho? O professor respondeu que fez os dois para que os alunos comparassem os caminhos e percebam que de um caminho para outro, basta trocar (permutar) duas ou mais letras de posição e assim sendo, o exercício se resume em um exercício de permutação com repetição. O aluno pediu para que o professor indicasse a troca que foi feita entre as letras nos dois caminhos. O professor disse que a troca feita foi o primeiro L (NLNLL) com o segundo N (NLNLL), obtendo NNLLL.

Para resolver o segundo trecho, o raciocínio foi análogo:

Trajeto	Um caminho possível	Outro caminho possível	Total de caminhos
De B para C	LLNNLN	LLLNNN	$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$

Como foi explicado anteriormente, os alunos não tiveram dificuldade e entender esse trecho.

Logo, a resposta é 10x20 = 200 caminhos possíveis.

Um dos alunos questionou o professor da multiplicação e queria saber porque não é realizada uma soma dos resultados (nesse caso, para o aluno, a resposta seria 10 + 20 = 30, e não 200).

O professor respondeu ao aluno remetendo-se ao Princípio Multiplicativo, pois para cada um dos 10 caminhos possíveis de A para B, temos 20 caminhos possíveis de B para C, o que totaliza 20 + 20 + 20 +20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 10x20 = 200. O aluno entendeu a resposta do professor e os outros alunos também entenderam.

O objetivo de ensinar as Permutações com Repetição antes das Combinações, é porque com as Permutações com Repetição, os alunos começaram a ter a noção da divisão de um certo número de casos pelo fatorial de um determinado número natural.

Para introduzir os agrupamentos chamados de COMBINAÇÃO, o professor lançou mão de uma situação prática: Em um grupo de 8 alunos de uma sala de aula, escolhemos 3 alunos para algumas tarefas. Determine o número de escolhas que podem ser feitas para:

a) Os três ganharem três prêmios distintos na rifa da escola;

b) Os três ganharem três prêmios iguais na rifa da escola;

c) O primeiro ganhar uma TV, o segundo uma bicicleta e o terceiro um par de tênis;

d) Os três irem ao cinema assistir ao mesmo filme;

e) O primeiro ir ao teatro, o segundo ir ao cinema e o terceiro ir ao campo de futebol.

O professor pediu para a classe que sugerisse três prêmios distintos que seriam sorteados na rifa da escola. Em uma das salas a escolha foi: Um salgado da cantina, uma viagem para Porto Seguro e um passeio em um Fórmula 1. Enquanto que na outra sala, a escolha foi: Uma bala, um pirulito e uma trufa de chocolate.

Independentemente das escolhas feitas, o professor ressaltou que os prêmios eram diferentes e que o raciocínio era o que importava.

Chamando de:

S: salgado da cantina;

V: viagem para Porto Seguro;

P: passeio com o Fórmula 1, a resposta para essa situação é:

$$\frac{S}{8}\frac{V}{7}\frac{P}{6} = 8x7x6 = 336.$$

Assim, temos 336 possibilidades de premiar 3 alunos de uma sala de 8 com prêmios distintos de uma rifa. Para as escolhas feitas pela outra sala, a resposta é idêntica.

Por outro lado, o item b sugeriu que os prêmios fossem iguais. Novamente, o professor pediu sugestões e em uma sala as sugestões foram três salgados de calabresa da cantina, enquanto que na outra sala, as sugestões foram três trufas de chocolate.

O professor começou resolvendo como resolveu o item anterior:

Chamando de:

S_1: salgado de calabresa da cantina;

S_2: salgado de calabresa da cantina;

S_3: salgado de calabresa da cantina, a resposta para essa situação é: $\frac{S_1}{8}\frac{S_2}{7}\frac{S_3}{6} = 8x7x6 = 336$. Nesse ponto, o professor pergunta se as duas situações (dos itens a e b) são iguais, pois as respostas eram as mesmas. Os alunos responderam que não, pois na primeira os prêmios são diferentes, enquanto que na segunda os prêmios são iguais. O professor pergunta qual seria a resposta correta do item b, e os alunos não conseguiram responder de forma satisfatória.

Aqui o professor interveio e fez uma simulação. Chamou três alunos à frente, desenhou no quadro os prêmios da primeira situação: o salgado, a viagem e o passeio, colocou um aluno em frente de cada prêmio e escreveu no quadro a sequência com as iniciais dos nomes dos alunos: MPR. Em seguida, mudou M e P de posição, escreveu a nova sequência no quadro PMR e perguntou para a classe se a premiação dos alunos tinha mudado ou permanecido inalterada. A resposta foi que a premiação mudou, pois na primeira situação, M ganha o salgado, P ganha a viagem e R ganha o passeio, enquanto que na segunda situação, P ganha o salgado, M ganha a viagem e R ganha o passeio.

O professor ressaltou que entendido isso, os alunos entenderiam o que viria adiante.

Continuando com a explicação, o professor perguntou quantas sequências de premiação seriam possíveis com os alunos M, P e R. Os alunos foram construindo as possibilidades: MPR, PMR, RMP, PRM, RPM e MRP. O professor perguntou para os alunos o que representam tais sequências e os alunos responderam que são todas as trocas possíveis com os três alunos (M, P e R), e depois dessa fala dos alunos, o professor enfatizou que são as permutações dos três alunos.

Logo após essa intervenção, o professor perguntou para a sala se no item b as seis sequências representam seis premiações diferentes e os alunos responderam que não, pois os prêmios são iguais. Assim, o professor disse que o total de premiações no item b segue o mesmo raciocínio das permutações com repetição, isto é, a cada seis permutações formadas pelos três estudantes escolhidos (no caso, os estudantes M, P e R), temos uma distribuição prêmios. Logo, o total de maneiras de três estudantes ganharem os três prêmios iguais é $\frac{336}{3!} = \frac{336}{6} = 56$. Nesse momento, houve perguntas por parte dos alunos, querendo saber o porque divide por 3! e não 6, que é o total de permutações obtidas com os três alunos. O professor ressaltou que dividiu por 3! para reforçar a ideia de que quando a escolha é feita dentro de um mesmo conjunto cujos elementos tem a mesma característica e a ordem entre as escolhas não importa, devemos fazer um arranjo e depois dividir pelo fatorial do número de escolhas, e isso seria o agrupamento chamado de COMBINAÇÃO.

Assim sendo, temos dois tipos de agrupamentos: os agrupamentos ORDENADOS (os arranjos) e os agrupamentos NÃO ORDENADOS (as combinações), e as respostas dos outros itens foram obtidas com a ajuda dos alunos:

ITEM C: 336, ITEM D: 56 e ITEM E: 336.

O professor ressaltou que podemos simplificar as contas com os fatoriais, pois a combinação fica da seguinte forma: $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$, em que $\binom{n}{p}$ significa fazer p escolhas em um conjunto com n elementos, e é chamado de número binomial. Com isso, seguiu a resolução dos outros exercícios da Ficha de Aula 3:

<u>Exercício 3</u>: Dado o conjunto A = {a, b, c, d, e, f}, descreva todos os subconjuntos com dois elementos de A.

A resolução começou com a construção de todos os subconjuntos com dois elementos: {a,b}, {b,c}, {d,c}, {a,c}, {b,d}, {b,e}, {a,d}, {a,e}, {b,f}, {a,f}, {c,e}, {f,c}, {f,d}, {f,e}, {d,e}. O professor pediu para que os alunos reorganizassem os conjuntos, seguindo o seguinte padrão: todos os subconjuntos que possuem o elemento a, depois todos os subconjuntos que possuem o elemento b, e assim por diante. Essa construção ficou assim:

{a,b}, {a,c}, {a,d}, {a,e}, {a,f},

{b,c}, {b,d}, {b,e}, {b,f},

{c,d}, {c,e}, {c,f},

{d,e}, {d,f},

{e,f}.

O professor ressaltou que estão listadas todas as possibilidades de escolher dois elementos em seis possíveis, sem que haja repetição de elementos, e essa escolha pode ser feita de 15 maneiras diferentes.

O professor ainda sugeriu a seguinte situação: Uma comissão de dois alunos será formada para discutir a formatura do terceiro ano. Em um grupo de seis alunos, de quantas formas é possível escolher essa comissão?

A resposta dos foi imediata: 15. Além disso, o professor perguntou se era possível resolver a situação proposta com a teoria desenvolvida até então, e alguns alunos responderam que sim, pois era calcular o binomial $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6x5x4!}{2!4!} = \frac{6x5}{2!} = 15$, pois de seis elementos (alunos) escolhemos dois. Aqui, o professor argumenta que podemos entender que o número é chamado de binomial porque cada elemento do conjunto original tem DUAS possibilidades de ocorrência: ser escolhido ou não ser escolhido, e o total de maneiras de escolher dois elementos para PARTICIPAR da comissão é <u>numericamente</u> igual ao total de maneiras de escolher quatro elementos para NÃO PARTICIPAR da comissão. Por isso, que os números binomiais têm a seguinte propriedade: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Veja que a soma dos números de baixo é igual ao número de cima do binomial. Para exemplificar a ideia exposta, o professor resolveu o exercício seguinte:

<u>Exercício 4</u>: Com cinco professores, quantas comissões de três professores é possível formar?

O professor pediu para que os alunos escolhessem cinco professores e a escolha foi:

R, S, M, Z, e P.

Em um primeiro momento, o professor resolveu o exercício com os binomiais: ‘Temos 5 professores e vamos escolher 3, isso pode ser feito de $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ maneiras’.

A seguir, o professor construiu uma tabela indicando todas as possibilidades possíveis de escolha, ressaltando que 10 possibilidades é um número pequeno e possível de ser feito. Na tabela, o professor colocou, também, a escolha que não foi feita, enfatizando a ideia do número binomial:

Professores escolhidos	Professores não escolhidos
R, S, M	Z, P
R, S, Z	M, P
R, S, P	M, Z
R, M, Z	S, P
R, M, P	S, Z
R, Z, P	S, M
S, M, Z	R, P
S, M, P	R, Z
S, Z, P	R, M
M, Z, P	R, S

Com a construção da tabela, o professor ressaltou que ao escolher três elementos em cinco possíveis para PARTICIPAR, escolhemos, automaticamente, os dois elementos que NÃO PARTICIPAM. Assim, $\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{três prof. que part.}} = \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{dois prof. que não part.}}$.

Ainda observando a tabela construída, o professor resolveu o exercício 5:

<u>Exercício 5</u>: Dados cinco objetos distintos, qual o número de combinações de três objetos que:

a) contém um determinado objeto?

b) não contém tal objeto?

(perceba que o resultado independe do objeto escolhido)

Alguns alunos perguntaram qual a razão da observação feita no fim do enunciado. O professor respondeu usando a tabela construída no exercício anterior. O professor indicou para os alunos que iria resolver o exercício 5 baseado na tabela construída no exercício 4.

Para resolver, o professor fez uma comparação com o enunciado dos exercícios 4 e 5 da seguinte forma: os cinco objetos são os professores e eu quero escolher três desses professores (objetos). Os alunos entenderam essa comparação e indicaram que o total de escolhas é 10. Aqui, o professor começou a resolver o item a, pedindo para que os alunos escolhessem um dos professores do exercício 4. Depois de algum tempo, os alunos entraram em acordo e escolheram o professor M. Com isso, o professor usou a tabela já construída do exercício 4 e foi marcando as comissões (combinações) na qual o professor (objeto) M está contido. A tabela ficou da seguinte forma:

Professores escolhidos	Professores não escolhidos
R, S, M	Z, P
R, S, Z	M, P
R, S, P	M, Z
R, M, Z	S, P
R, M, P	S, Z
R, Z, P	S, M
S, M, Z	R, P
S, M, P	R, Z
S, Z, P	R, M
M, Z, P	R, S

Em seguida pediu para os alunos indicarem outro professor, e eles indicaram o professor R, e a tabela ficou da seguinte forma:

Professores escolhidos	Professores não escolhidos
R, S, M	Z, P
R, S, Z	M, P
R, S, P	M, Z
R, M, Z	S, P
R, M, P	S, Z
R, Z, P	S, M
S, M, Z	R, P
S, M, P	R, Z
S, Z, P	R, M
M, Z, P	R, S

Nesse ponto, o professor respondeu aos alunos o porquê da observação após o enunciado, visto que, tanto na escolha do professor M, como na escolha do professor R, o total de comissões que contém um ou outro professor é numericamente igual, isto é, igual a 6. O professor sugeriu que os alunos fizessem o mesmo para os outros professores e acreditassem na observação colocada.

Aqui o professor resolveu o item b, convidando os alunos a observar a tabela e dar a resposta. A resposta dos alunos foi imediata: 4 combinações.

Um dos alunos perguntou ao professor se era possível resolver o exercício com as fórmulas apresentadas, e o professor disse que sim.

Nesse caso, o professor pediu a leitura do enunciado do exercício para esse aluno. Após a leitura, o professor indicou que a resposta estava na leitura atenta do exercício.

No item a, se um objeto está contido na combinação, então temos quatro objetos a disposição, pois um deles já está escolhido, e devemos escolher dois desses quatro objetos, pois um deles já está escolhido. Assim, a resposta do item a é $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$, que foi obtida com o auxílio da tabela.

No item b, se um objeto não está contido na combinação, então temos quatro objetos a disposição, pois um deles não pode ser escolhido, e devemos escolher três desses quatro objetos, pois não fizemos escolha alguma. Assim, a resposta do item b é: $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{24}{6} = 4$, que foi obtida com o auxílio da tabela.

Ao final, o professor ressaltou, também, que existe uma propriedade por trás desse exercício chamada de Relação de Stifel (Michael Stifel, matemático alemão que nasceu em 1487 e morreu em 1567), cuja ideia recai sobre um objeto estar ou não contido em uma determinada escolha:

"Considere um conjunto com n objetos, na qual devemos escolher p desses objetos. O total de escolhas possíveis é $\binom{n}{p}$. Indicando um objeto qualquer, ele tem duas possibilidades: ou ele é escolhido ou ele não é escolhido. Se ele for escolhido, devemos escolher (p – 1) objetos dentre (n – 1) objetos, e assim, o total de escolhas é $\binom{n-1}{p-1}$. Se ele não for escolhido, devemos escolher p objetos dentre (n – 1) objetos, e assim, o total de escolhas é $\binom{n-1}{p}$. Logo, é válida a propriedade é: $\boxed{\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}}$, que é conhecida como relação de Stifel".

Em seguida, o professor resolveu os exercícios que seguem:

<u>Exercício 6</u>: Quantos triângulos podemos formar com oito pontos distintos de um plano, se três pontos quaisquer não estão alinhados?

Resposta: Devemos escolher 3 pontos dentre 8 possíveis. O total é $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$.

<u>Exercício 7</u>: De quantas maneiras podemos dividir 18 pessoas em 3 grupos, sendo um de 5 pessoas, outro de seis pessoas e um de sete pessoas?

Resposta: Para fazer a divisão, temos que realizar as seguintes escolhas:

- Escolher 5 pessoas dentre 18 disponíveis: $\binom{18}{5}$;
- Escolher 6 pessoas dentre 13 disponíveis, pois 5 já estão escolhidas: $\binom{13}{6}$;
- Escolher 7 pessoas dentre 7 disponíveis, pois 11 já estão escolhidas: $\binom{7}{7}$;

Assim, o total de maneiras é: $\binom{18}{5} \text{x} \binom{13}{6} \text{x} \binom{7}{7} = \dfrac{18!}{5!6!7!} = 14\ 702\ 688$.

<u>Exercício 8</u>: Convenciona-se transmitir sinais luminosos de uma ilha para a costa por meio de seis lâmpadas brancas (B) e seis vermelhas (V), colocadas nos vértices de um hexágono regular, de tal modo que:

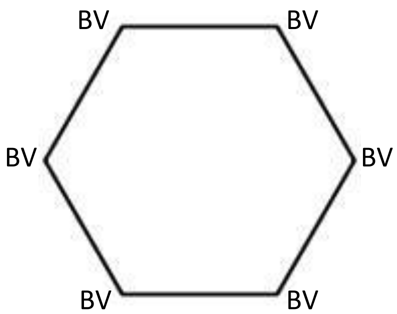
i) em cada vértice haja 2 lâmpadas de cores diferentes;

ii) em cada vértice não haja mais do que uma lâmpada acesa;

iii) o número mínimo de vértices iluminados seja 3.

Determinar o número total de sinais que podem ser transmitidos.

Resposta: Considere a seguinte figura que representa o transmissor de sinal:



Para que o sinal seja transmitido, devemos realizar dois eventos:

EVENTO 1: escolha da cor da lâmpada do vértice (branca ou vermelha);

EVENTO 2: escolha dos vértices acesos (no mínimo três: 3, 4, 5, 6);

Com isso, temos as seguintes situações:

Número de vértices escolhidos	Total de maneiras de Escolher o vértice	Escolha da cor de cada vértice	Total de possibilidades
3	$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=20$	2x2x2 = 8	20x8 = 160
4	$\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!2!}=15$	2x2x2x2 = 16	15x16 = 240
5	$\binom{6}{5}=\frac{6!}{1!5!}=6$	2x2x2x2x2 = 32	6x32 = 192
6	$\binom{6}{6}=\frac{6!}{6!0!}=1$	2x2x2x2x2x2 = 64	1x64 = 64
total			656

Logo, são 656 maneiras de transmitir o sinal da ilha para a costa.

Exercício 9: Resolva: $\dfrac{\binom{x+3}{3}}{\binom{x+1}{2}}=\dfrac{10}{3}$.

Para resolver esse exercício, o professor utilizou o conceito do número binomial: $\binom{n}{p}=\dfrac{nx(n-1)x(n-2)x...x(n-(p-1))}{p!}$.

Assim, a equação fica:

$$\frac{\binom{x+3}{3}}{\binom{x+1}{2}}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3\binom{x+3}{3}=10\binom{x+1}{2}\Leftrightarrow\frac{3(x+3)(x+2)(x+1)}{3!}=\frac{10(x+1)(x)}{2!},$$

que simplificando, resulta em $(x+3)(x+2)=10x\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$, já que x não pode ser igual a – 1, pois para que o binomial exista, $x + 1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$. Com isso, as raízes da equação são x = 2 ou x = 3, que são as respostas para o x.

Com isso, concluiu-se a Ficha de Aula 3 e a teoria básica de Análise Combinatória para o segundo ano do Ensino Médio regular.

Antes de finalizar, o professor fez uma observação sobre as Combinações.

Do fato das combinações serem escolhas dentro de um conjunto com elementos distintos, olhando para cada elemento, ele pode ser escolhido ou não escolhido. Assim sendo, podemos trabalhar com as combinações como caso particular das permutações com repetição.

O professor sugeriu para os alunos resolverem novamente o exercício 6: Quantos triângulos podemos formar com oito pontos distintos de um plano, se três pontos quaisquer não estão alinhados?

A sugestão do professor foi para que os alunos raciocinassem do seguinte modo: Temos 8 pontos distintos: A, B, C, D, E, F, G, e H. Para cada ponto, temos duas possibilidades: o ponto pode ser escolhido (E) ou não escolhido (N). Assim, uma escolha possível é:

A	B	C	D	E	F	G	H
E	E	E	N	N	N	N	N

Outra escolha possível é:

A	B	C	D	E	F	G	H
E	N	E	N	E	N	N	N

que é uma permutação da escolha anterior. Assim sendo, o total de escolhas possíveis é o total de permutações com repetição da sequencia EEENNNNN, que é $P_8^{5,3} = \dfrac{8!}{5!3!} = \dbinom{8}{3} = 56$.

Após essa explicação, alguns alunos disseram que é mais fácil pensar em permutação com repetição do que pensar em combinação.

Para essa ficha de Aula foram necessárias 6 aulas de 45 minutos para as discussões e conclusões.

5. A FICHA DIAGNÓSTICO 2:

A Ficha Diagnóstico 2 possui os seguintes exercícios:

1. Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas ele poderá vestir um terno, uma camisa e um par de sapato?

2. Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

3. Numa circunferência são tomados 8 pontos distintos.

a) Quantas cordas podemos traçar?
b) Quantos triângulos convexos podem ser formados?
c) Quantos hexágonos convexos podem ser formados?

4. Uma organização dispõe de 6 administradores e 10 economistas. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas de modo que cada comissão tenha, no mínimo, 3 administradores?

5. Em um calendário, definimos uma data como sendo uma tripla de números naturais da forma DD/MM/AAAA, onde DD é o dia do mês MM do ano AAAA. Definimos também a soma S como sendo a quantidade de dias transcorridos no ano AAAA, desde 1º de janeiro de AAAA até o dia DD/MM, inclusive, do ano AAAA, e o produto P como sendo DDxMM. Assim, em 2011, o dia 28 de setembro (28/09/2011) tem S = 271 (31 dias de janeiro, 28 dias de Fevereiro, 31 dias de março, 30 de abril, 31 de maio, 30 de junho, 31 de julho, 31 de agosto e 28 dias de setembro) e P = 252 (28x09). Determine o número de dias do ano AAAA onde S = P.

Analisando as resoluções dos alunos da Ficha Diagnóstico 2, o professor percebeu que a teoria desenvolvida com as Fichas de Aula e as aulas expositivas durante as 5 semanas surtiram o efeito desejado, pois:

1. Todas as resoluções dos exercícios 1 e 2 foram resolvidas com a técnica do traço bem executada, como mostra o exemplo a seguir:

Determine o número de dias do ano AAAA onde S = P.

1) $\dfrac{P}{10}\ \dfrac{P}{12}\ \dfrac{P}{5} = 600$

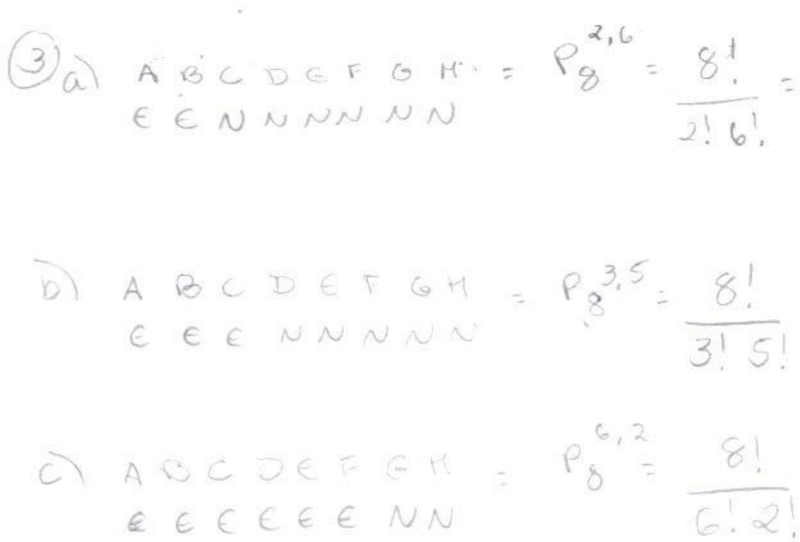
2) $\dfrac{1^{\circ}}{20} \cdot \dfrac{2^{\circ}}{19}\ \dfrac{3^{\circ}}{18} = 6840$

2. No exercício 3, a maioria dos alunos usou a combinação de maneira correta. Inclusive alguns alunos usaram a ideia de pensar nas combinações como caso particular das permutações com repetição e como soma de naturais no caso em que são escolhidos dois elementos do conjunto, como mostra os exemplos abaixo:

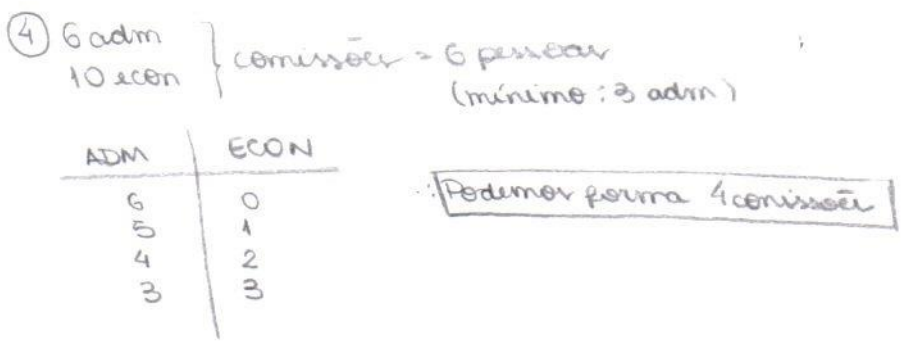
3) a) $7+6+5+4+3+2+1 = 28$

b) $\dfrac{8!}{3!\,.\,5!} = 56$

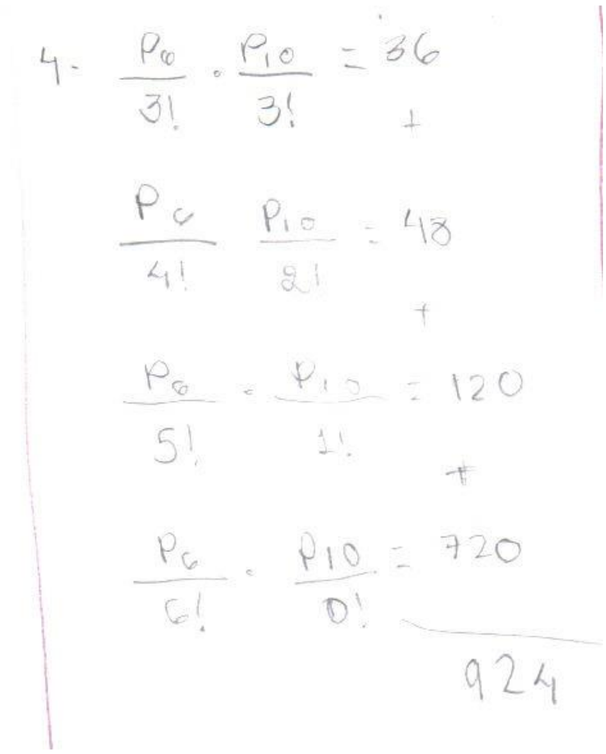
c) $\dfrac{8!}{6!\,.\,2!} = 28$



3. No exercício 4, os alunos não colocaram em prática a sugestão de separar o acontecimento em casos. Quem tentou esboçar alguma coisa nesse exercício o fez de forma incorreta. O exemplo abaixo ilustra que alguns alunos pensaram que bastaria separar o número de pessoas que necessitamos sem observar que, além disso, deve ser feita uma escolha dentro do conjunto em questão:



Outros alunos, por sua vez, fizeram a separação dos casos de forma correta, porém, a conta final foi errada:



$$4.\ \frac{P_6}{3!} \cdot \frac{P_{10}}{3!} = 36$$
$$+$$
$$\frac{P_6}{4!} \cdot \frac{P_{10}}{2!} = 48$$
$$+$$
$$\frac{P_6}{5!} \cdot \frac{P_{10}}{1!} = 120$$
$$+$$
$$\frac{P_6}{6!} \cdot \frac{P_{10}}{0!} = 720$$
$$924$$

4. Nenhum aluno fez o exercício 5, o qual ficou como um desafio para casa.

Lembrando o exercício 5: Em um calendário, definimos uma data como sendo uma tripla de números naturais da forma DD/MM/AAAA, onde DD é o dia do mês MM do ano AAAA. Definimos também a soma S como sendo a quantidade de dias transcorridos no ano AAAA, desde 1º de janeiro de AAAA até o dia DD/MM, inclusive, do ano AAAA, e o produto P como sendo DDxMM. Assim, em 2011, o dia 28 de setembro (28/09/2011) tem S = 271 (31 dias de janeiro, 28 dias de Fevereiro, 31 dias de março, 30 de abril, 31 de maio, 30 de junho, 31 de julho, 31 de agosto e 28 dias de setembro) e P = 252 (28x09). Determine o número de dias do ano AAAA em que S = P.

RESPOSTA: Das definições dadas, o produto é feito multiplicando o dia pelo mês. Assim, em Janeiro (mês 1), todos os 31 dias terão S = P. Em fevereiro (mês 2), o produto será sempre um número par e a soma será de 32 à 59 (anos não bissextos) ou de 32 à 60 (anos bissextos). Em março (mês 3), o produto será sempre um múltiplo de três e a soma será de 60 à 90 (anos não bissextos) ou de 61 à 91 (anos bissextos). Como março tem 31 dias, nos anos bissextos, o dia 30 de março (30/03) terá S = P. Assim, se o ano for bissexto, temos 32 dias em que S = P. Se o ano não for bissexto, os dias 30 de abril (30/04, dia 120 do ano) e 30 de maio (30/05, dia 150 do ano) terão S = P. Logo, a resposta é 32 (anos bissextos) ou 33 (anos não bissextos) dias em que S = P.

6. CONCLUSÕES:

Analisando a evolução das aulas com a aplicação da Ficha Diagnóstico 1, das Fichas de Aula 1, 2 e 3 e da Ficha Diagnostico 2 com os alunos do Segundo ano do Ensino Médio, conclui-se que o produto educacional mostrou-se eficiente, pois a partir da Ficha Diagnóstico 1, podemos ter a ideia de que os alunos que cursam o Segundo Ano do Ensino Médio tem uma noção vaga de como fazer contagem, mesmo sem a formalização que a Análise Combinatória exige. Com as Fichas de Aula 1, 2 e 3, os alunos formalizam a teoria de Análise Combinatória, e constroem seu próprio conhecimento, conforme vimos nos exemplos disponíveis nos comentários feitos na Ficha Diagnóstico 2, que estão descritas no Capítulo 5 dessa Dissertação.

Dessa forma, a conclusão da aplicação desse produto educacional é positiva, e mostrou-se eficiente.

Assim sendo, a pergunta inicial da dissertação:

As fichas de aula, junto com aulas expositivas, trazem um aprendizado significativo para o tema de Análise Combinatória?

tem resposta afirmativa, isto é, o uso de fichas de aula em conjunto com as aulas expositivas, é uma maneira eficiente de lecionar Análise Combinatória.

Vale ressaltar que, embora os alunos tenham apresentado uma formalização aceita para um aluno do Ensino Médio, algumas interpretações equivocadas dos exercícios ocorreram, e isso se deve, em grande parte, pelo tempo escasso para se trabalhar o assunto em sala de aula.

Além desse fato, alguns erros cometidos são recorrentes, e isso se deve, em parte, a dificuldade que os alunos apresentam em transpor o enunciado do exercício para situações do cotidiano. A impaciência em ler um texto longo, em entender o que está sendo pedido, além da dificuldade em transpor para a realidade vivenciada, como por exemplo, no exercício 7, da Ficha de Aula 1, em que é pedido para os alunos contarem de quantas formas é possível alocar três pessoas em sete cadeiras vazias. Para alguns alunos é difícil imaginar essa situação dentro da própria sala de aula. Esse é um dos muitos erros cometidos pelos alunos que estudam Análise Combinatória, e que estão descritos nessa dissertação.

Quanto à utilização das Fichas de Aula em conjunto com as aulas expositivas para o ensino de Análise Combinatória na visão dos alunos, alguns comentários interessantes surgiram:

Aluno O: "Foi uma experiência diferente, pois estava acostumado apenas a copiar da lousa e ouvir o Professor falar. Com as fichas, eu participo junto com o Professor e fico 'ligado';

Aluno P: "As Fichas de aula me ajudam a organizar a matéria e o raciocínio"

Aluno Q: "Professor, vai ter mais Fichas de Aula?"

Aluno R: "Os outros Professores também vão usar as Fichas?"

Aluno S: "Professor, não tem Ficha dessa matéria? (Ao começar ensinar Binômio de Newton)

Entretanto, alguns comentários negativos também surgiram:

Aluno T: "Professor, vamos fazer exercícios da apostila, também?"

Aluno U: "As fichas de aula 'paralisam' a aula"

Por fim, devo afirmar que, após a aplicação dessas Fichas de Aula, e a descrição de todas as situações que permearam a aplicação dessas em sala de aula, bem como, o relato dessas situações nesse trabalho, lecionar Análise Combinatória será muito diferente, pois terei um novo olhar, uma maneira diferente para a abordagem o assunto, e para esclarecimento das dúvidas dos alunos, tanto aquelas dúvidas que são manifestadas, como aquelas que, por algum motivo, os alunos não externam.

7. Anexos:

7.1: Ficha de Aula 1:

1) Fundamentos da Contagem:

i) Conjunto dos números naturais:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,...\}$

ii) Número de elementos em um conjunto:

a) $A = \{1,2,3,4,...,p\} \Rightarrow n(A) =$ _____

b) $B = \{0,1,2,3,4,...,p\} \Rightarrow n(B) =$ _____

c) $C = \{2,3,4,...,p\} \Rightarrow n(C) =$ _____

d) $D = \{m, m+1, m+2, m+3, m+4, ..., m+p\} \Rightarrow n(D) =$ _____

e) $E = \{m, m+1, m+2, m+3, m+4, ..., n\} \Rightarrow n(E) =$ ____________

2) Termos não definidos:

Acontecimento, ocorrência de um acontecimento, agrupamento de objetos.

3) Princípio Fundamental da Contagem:

EXERCÍCIOS:

1. Uma moça tem 5 blusas e 4 saias. De quantos modos distintos ela pode se vestir?

2. Quantos números de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal?

3. Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados no sistema decimal?

4. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados com os algarismos não-nulos:

a) podendo repetir algarismos?

b) sem repetir algarismos?

Observação:

5. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal,

a) podendo repetir algarismos?

b) sem repetir algarismos?

Observação:

Generalização do Princípio Multiplicativo:

Quando a escolha ordenada dos elementos de cada um dos eventos do acontecimento é realizada dentro de um mesmo conjunto, temos os agrupamentos chamados de **ARRANJO**.
Se for permitida a repetição de elementos, temos

______________________________, caso a repetição não seja

permitida, temos _________________________.

Assim, dado um conjunto com *n* elementos, definimos:

i) O número de **ARRANJOS COM REPETIÇÃO** tomados dentre p elementos desse conjunto é:

Para a escolha do 1º elemento temos _______ possibilidades;

Para a escolha do 2º elemento temos _______ possibilidades;
...
Para a escolha do p-ésimo elemento temos _______ possibilidades;

Logo, o arranjo com repetição de *n* elementos tomados *p* a *p* (notação: $AR_{n,p}$) é:

$$AR_{n,p} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_;$$

ii) Caso não se permita a repetição de elementos, temos que o número de **ARRANJOS SIMPLES** tomados dentre p elementos desse conjunto é:

Para a escolha do 1º elemento temos _______ possibilidades;

Para a escolha do 2º elemento temos _______ possibilidades;
...
Para a escolha do p-ésimo elemento temos _______ possibilidades;

Logo, o arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p* (notação: $A_{n,p}$) é:

$A_{n,p}$ = ____.

Para simplificar as contas, definimos o fatorial de um número natural n:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ n(n-1)!, & n \geq 2 \end{cases}.$$

A partir da definição de fatorial, podemos reescrever o ARRANJO SIMPLES da seguinte forma:

$A_{n,p}$ = ____ = ________.

EXERCÍCIOS:

6. O lanche de uma certa pessoa consiste de um sanduíche (escolhido dentre 4 opções), uma bebida (escolhida dentre café, chá ou leite) e um sorvete (escolhido dentre os sabores: morango, chocolate ou coco). Quantos lanches diferentes essa pessoa pode fazer?

7. De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 7 cadeiras em fila?

8. (Problema do número de divisores)

a) Determinar os divisores inteiros e positivos de 60.

b) Quantos divisores inteiros positivos possui o número 72?

c) Quantos divisores inteiros e positivos tem o número $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, sendo p_1, p_2, ..., p_k são números primos distintos.

9. Quantas coleções não vazias podemos formar com 5 exemplares iguais da revista R, 4 exemplares iguais da revista S e 3 exemplares iguais da revista T?

10. (Problema do número de subconjuntos de um conjunto com um número finito de elementos)

a) Considere o conjunto A = {a, b, c}. Quantos subconjuntos tem o conjunto A?

b) Quantos subconjuntos possui um conjunto com *n* objetos?

11. Quantos números inteiros positivos de 3 algarismos podem ser formados, de modo que os dois primeiros sejam primos e o último algarismo seja divisível por 3?

12. Quantos números inteiros de cinco algarismos distintos e maiores do que 53 000 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

13. (Problema do número de funções) Dados dois conjuntos A com n elementos e B com m elementos, determine:

a) Quantas aplicações podem ser definidas de A para B?

b) Sendo $n \leq m$, quantas aplicações injetoras podem ser definidas de A para B?

7.2: Ficha de Aula 2:

1. PERMUTAÇÕES.

Considere a seguinte situação: Quatro amigos: Antônio, Bia, Carlos e Daniel vão ao cinema e ocupam os 4 lugares consecutivos de uma determinada fila. Escreva todas as possibilidades possíveis para essa ocupação nas lacunas a seguir:

Esse é um exemplo de Permutação, que é qualquer *agrupamento ordenado de n elementos*.

Com isso, a Permutação de *n* elementos é o Arranjo Simples de *n* elementos tomados *n* a *n*, ou seja, quando usamos todos os elementos do conjunto para formar o agrupamento.

Logo, o número de **PERMUTAÇÕES** de n elementos é:
Para a escolha do 1º elemento temos _____ possibilidades;

Para a escolha do 2º elemento temos _____ possibilidades;
...

Para a escolha do *n-ésimo* elemento temos _____ possibilidades;

Assim, P_n = ___________________________________ = _____.

EXERCÍCIOS DE SALA

1. Considere a palavra PERNAMBUCO e seus anagramas.

a) Quantos são?

b) Quantos deles começam por PER?

c) Quantos deles começam por PER, nesta ordem?

d) Quantos deles tem a sequência PER juntas nesta ordem?

e) Quantos deles começam por PER nesta ordem e terminam por BUCO em qualquer ordem?

2. De quantas formas 6 pessoas podem se sentar numa fileira de 6 cadeiras se duas dessas pessoas (Geraldo e Francisco) se recusam a sentar um do lado do outro?

3. Quantos números de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? Qual a posição do número 43 521?

4. (Número de funções bijetoras) Se A e B são conjuntos e $n(A) = n(B) = n > 0$. Quantas funções de A para B bijetoras existem?

5. De quantos modos 4 pessoas podem formar uma roda?

PERMUTAÇÃO CIRCULAR: CONCEITO

PERMUTAÇÃO CIRCULAR: DEFINIÇÃO

6. De quantos modos se pode pintar as faces de uma pirâmide pentagonal regular usando seis cores diferentes, sendo cada face para cada cor?

7. De quantos modos podemos colocar 5 pedras preciosas em um anel?

7.3: Ficha de Aula 3:

1. PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS:

Considere os anagramas da palavra MACACA:

Se tivéssemos a palavra M__C__C__, fixando as letras M, C e C, teríamos os seguintes anagramas:

M__C__C__ M__C__C__ M__C__C__

M__C__C__ M__C__C__ M__C__C__

Como não existe distinção (olhe para a palavra original), essas ______ permutações representam, na verdade, ____ anagrama.

Logo, o total de anagramas da palavra MACACA é:

______=_____=_______

Raciocinando de maneira análoga para a letra C, temos que essas _____ permutações representam, na verdade, ____ anagrama.

Assim, o total de anagramas da palavra MACACA é

______=________=_________

Em geral, $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ = __________ .

2. COMBINAÇÃO:

Para exemplificar os agrupamentos chamados de combinação, considere a seguinte situação: Em um grupo de 8 alunos de uma sala de aula, escolhemos 3 alunos para algumas tarefas. Determine o número de escolhas que podem ser feitas para:

a) Os três ganharem três prêmios distintos na rifa da escola;

b) Os três ganharem três prêmios iguais na rifa da escola;

c) O primeiro ganhar uma TV, o segundo uma bicicleta e o terceiro um par de tênis;

d) Os três irem ao cinema assistir ao mesmo filme;

e) O primeiro ir ao teatro, o segundo ir ao cinema e o terceiro ir ao campo de futebol.

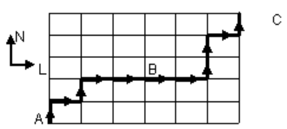
Com os exemplos acima temos exemplos de AGRUPAMENTOS ORDENADOS (letras: ________) e AGRUPAMENTOS NÃO ORDENADOS (letras: ________). Os agrupamentos ordenados são os ARRANJOS e os agrupamentos não ordenados são as COMBINAÇÕES.

O total de combinações é: $C_{n,p} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \left(\begin{matrix} \ \\ \ \end{matrix} \right)$.

EXERCÍCIOS

1. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA? (Considere dois casos: (i) Á = A (ii) Á ≠ A).

2. (FUVEST – 1993) A figura ao lado representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa se Maria?



3. Dado o conjunto A = {a, b, c, d, e, f}, descreva todos os subconjuntos com dois elementos de A.

4. Com cinco professores, quantas comissões de três professores é possível formar?

5. Dados cinco objetos distintos, qual o número de combinações de três objetos que:

a) contém um determinado objeto?

b) não contém tal objeto?

(perceba que o resultado independe do objeto escolhido)

6. Quantos triângulos podemos formar com oito pontos distintos de um plano, se três pontos quaisquer não estão alinhados?

7. De quantas maneiras podemos dividir 18 pessoas em 3 grupos, sendo um de 5 pessoas, outro de seis pessoas e um de sete pessoas?

8. Convenciona-se transmitir sinais luminosos de uma ilha para a costa por meio de seis lâmpadas brancas e seis vermelhas, colocadas nos vértices de um hexágono regular, de tal modo que:

i) em cada vértice haja 2 lâmpadas de cores diferentes;

ii) em cada vértice não haja mais do que uma lâmpada acesa;

iii) o número mínimo de vértices iluminados seja 3.

Determinar o número total de sinais que podem ser transmitidos.

9. Resolva: $\dfrac{\binom{x+3}{3}}{\binom{x+1}{2}} = \dfrac{10}{3}$.

8. BIBLIOGRAFIA

BACHX, A.C.; POPPE, L.M.B.; TAVARES, R.N.O.; **Prelúdio à Análise Combinatória.** São Paulo. Companhia Editora Nacional, 1975.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília; Secretaria de Educação Média e tecnológica. 2000
http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf acesso em 13/11/2011

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 3.ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas. Ed. UNICAMP, 2002.

FONSECA, L.; DIAS, M.A.; SANTOS, A.C. **ENGENHARIA DIDÁTICA: O MOTOR PARA AS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** V Colóquio Internacional "Educação e Comtemporaneidade". São Cristóvão/SE. 2011.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 5.** 5.ed. São Paulo. Atual Editora. 1985.

MORGADO, A.C.O.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P.; **Análise Combinatória e Probabilidade.** Reimpressão. Coleção do Professor de Matemática. 2001

NETO, A.A.; LAPA, N.; SAMPAIO, J.L.P.; CAVALLANTE, S.L.; **Noções de Matemática.** Volume 4. 1.ed. São Paulo. Editora Moderna. 1979.

PANTOJA, L.F.L.; SILVA, F.H.S.; **ENGENHARIA DIDÁTICA: ARTICULANDO UM REFERENCIAL METODOLÓGICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EJA.** www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../CC63265869253T.doc acesso em 26/10/2010.

PIZYBLSKY, L.M.; SANTOS JÚNIOR, G.; PINHEIRO, N.A.M.; **Relações entre o Ensino da Matemática e a Neurociência.** 1º Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. UFTPR. 2009.

VILEKIN, N. **De quantas formas? Combinatoria.** 1. Ed. Tradução do russo por Juan Jose Tolosa. Moscou. Editora MIR. 1972

SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C. **Introdução à Análise Combinatória.** 2.ed. Campinas. Ed. UNICAMP. 1998.

http://www.google.com.br/search?q=imagens+de+cadeiras&hl=pt-BR&tbo=u&tbm=isch&source=univ&sa=X&ei=ULnlUPA955bRAfSogZgC&sqi=2&ved=0CDUQsAQ&biw=1366&bih=667 acesso em 11/12/2012