UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

LUIZ RODOLFO KUSUKI

UM ESTUDO DAS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS COM O MATERIAL DIDÁTICO GEOESPAÇO

SOROCABA

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

Luiz Rodolfo Kusuki

UM ESTUDO DAS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS COM O MATERIAL DIDÁTICO GEOESPAÇO

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

LUIZ RODOLFO KUSUKI

ORIENTADOR: PROF. DR. PAULO CÉSAR OLIVEIRA

UM ESTUDO DAS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS COM O MATERIAL DIDÁTICO GEOESPAÇO

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.
Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

K97ep

Kusuki, Luiz Rodolfo.

Um estudo das potencialidades pedagógicas de atividades exploratórias-investigativas com o material didático geoespaço / Luiz Rodolfo Kusuki. -- São Carlos : UFSCar, 2014.

212 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Geoespaço. 3. Material manipulável. 4. Atividade exploratório-investigativa. 5. Tarefas de representação figural. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Oliveira
DFQM – UFSCar - orientador

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
DM – UNISO

Wladimir Seixas

Prof. Dr. Wladimir Seixas
DFQM - UFSCar

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a minha esposa, Julia, por toda a parceria com que me acompanhou em toda essa longa jornada. Obrigado pelo incentivo e pela admiração demonstrada por esse curso que agora tenho o orgulho de concluir. Essa conquista é sua também. Agradeço também ao meu primeiro professor de matemática, que foi meu orientador durante minha graduação e se tornou um grande amigo, Prof. Dr. Antonio Noel Filho. Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira, obrigado por sua paciência e dedicação nas orientações e por ter me apresentado ao mundo das investigações matemáticas. E por último, mas não menos importante, agradeço a Deus, Jesus Cristo e minha santa protetora Nossa Senhora Aparecida; obrigado por toda a força e proteção, a mim e a essas pessoas que tanto amo, enquanto eu me dedicava aos estudos.

MUITO OBRIGADO.

Resumo

Essa pesquisa tem como contexto a exploração das potencialidades do material manipulativo Geoespaço no ensino de matemática. Com o objetivo de aprofundar conhecimentos sobre a elaboração e aplicação de tarefas exploratório-investigativas e tarefas de representação figural envolvendo material manipulativo Geoespaço e tendo como objetivos específicos o desenvolvimento e a utilização do Geoespaço em diferentes sequências didáticas. A fundamentação teórica toma a analise qualitativa e quantitativa dos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs) de 2001 a 2010 e os Anais da Associação Nacional de pós-graduação e Pesquisa em Educação (Anped) de 2000 a 2013, de modo mais específico, sobre o uso de materiais manipulativos a partir de Lorenzato (2006) e Bezerra (1962), sobre a teoria de representações figurais de Fischbein(1993) e sobre as tarefas exploratório-investigativas de Ponte (2009). A relevância dessa pesquisa se dá pelo fato de tornar clara a importância de se valer de material manipulativo em tarefas exploratório-investigativas em diversas metodologias de ensino de matemática.

Palavras-chave: Geoespaço. Material manipulável. Tarefas exploratório-investigativas. Tarefas de representação figural.

Abstract

This research has as its context the exploration potential of manipulative materials in mathematics teaching Geoespaço. In order to increase knowledge of the development and implementation of exploratory-investigative tasks and tasks of figural representation involving manipulative materials Geoespaço and having specific objectives the development and use of Geoespaço in different didactic sequences. The theoretical foundation takes the qualitative and quantitative analysis Proceedings of the National Meetings of Mathematics Education (ENEMs) from 2001 to 2010 and the Proceedings of the National Association of Postgraduate Education and Research (Anped) from 2000 to 2013, more specifically, on the use of manipulative materials from of Lorenzato (2006) and Bezerra (1962), on the theory of figural representations of Fischbein (1993) and on the exploratory-investigative tasks Bridge (2009). The relevance of this research is partly because of making clear the importance of making use of manipulative materials in exploratory-investigative tasks in various methodologies of teaching math.

Keywords: Geoespaço. Manipulable material. Exploratory-investigative tasks. Tasks of figural representation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO:

1.INTRODUÇÃO

Apresentamos um percurso teórico-metodológico de investigação cuja motivação inicial foi oriunda do desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso (TCC), apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma de graduação em matemática pela Universidade de Sorocaba (UNISO). Ampliamos o conteúdo do TCC, cuja relevância da pesquisa foi apontar, a partir de um estudo bibliográfico, a importância do uso do material didático no processo de ensino-aprendizagem de matemática. A partir da investigação da própria prática pedagógica, buscamos para esta dissertação responder a questão: **que aprendizagem ocorre com conteúdos de geometria espacial via Geoespaço, em um contexto de tarefas exploratórias-investigativas?**

O objetivo deste trabalho foi desenvolver tarefas exploratório-investigativas cuja atividade matemática envolveu a utilização do material didático manipulativo denominado geoespaço. A formulação da questão de investigação condiz com a perspectiva qualitativa de pesquisa. O trabalho de campo contemplou a aplicação de tarefas exploratório-investigativas para 20 alunos de uma 3ª série do ensino médio da E.E. Joaquim Izidoro Marins em Sorocaba, São Paulo. A produção de informações envolveu os registros do diário de campo do professor-pesquisador; os registros das interlocuções entre alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades e relatórios produzidos pelos alunos como produto do envolvimento com as tarefas propostas.

A arquitetura do texto desta dissertação foi planejada e sistematizada em cinco capítulos.

Na primeira parte do trabalho, ressaltamos os motivos para este processo de investigação, partindo de experiências anteriores ao ingresso no mestrado, mais especificamente o trabalho de conclusão de curso da graduação e o desenvolvimento de atividades de extensão universitária.

Sendo expostos apontamentos sobre a construção do geoespaço e a sua utilização de acordo com as atividades exploratórias-investigativas, visando o processo de ensino-aprendizagem via material manipulável.

Posteriormente foi feito um estudo dedicado, por um lado, ao ensino-aprendizagem da geometria no ensino médio, a partir da análise dos documentos curriculares vigentes de modo a identificar a concepção desse tema, que conteúdos, forma e finalidade de tratá-los de acordo com as competências e habilidades almejadas na aprendizagem dos estudantes. Por outro lado, analisamos a influência das diretrizes curriculares nacionais e do estado de São Paulo nas produções acadêmicas desenvolvidas no Brasil a partir do ano 2000, mais especificamente as comunicações científicas e pôsteres relacionados ao ensino-aprendizagem da geometria experimental por meio do uso de materiais manipuláveis, os quais foram publicadas nos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) e nas Reuniões Anuais da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped).

Em relação ao percurso metodológico desta pesquisa, foi apresentado o processo de produção e análise das informações obtidas no trabalho de campo desta pesquisa. A primeira fase deste processo envolveu o planejamento e aplicação de tarefas relacionadas à representação figural de sólidos geométricos construídos no geoespaço. Na segunda fase da pesquisa, foram elaboradas tarefas exploratório-investigativas visando a análise das propriedades dos sólidos construídos no geoespaço, com o objetivo de atingir a formulação da relação de Euler.

Após a analise dos resultados obtidos em relação as tarefas aplicadas foi feita reflexão das etapas da pesquisa culminando na discussão sobre as potencialidades, limitações e implicações do uso do material manipulável geoespaço na prática pedagógica do professor-pesquisador.

Finalmente, listamos todas as referências efetivamente utilizadas para a construção deste texto acadêmico.

2. DEMARCANDO ESTACAS: MOTIVOS PARA ESTE PROCESSO DE INVESTIGAÇÃO

2.1. Atividade de Extensão e o Trabalho de Conclusão de Curso

No decorrer da graduação em matemática pela Universidade de Sorocaba (UNISO), fazia parte de um programa de bolsas de extensão intitulado “Metodologias para o Ensino de Matemática”, que tinha como objetivo tornar as aulas de matemática mais dinâmicas de modo a gerar situações reais de aprendizagem, incentivar e auxiliar os professores das escolas públicas a confeccionar seu próprio material didático e aumentar o interesse e a participação dos alunos nas aulas de matemática. Este foi o primeiro passo no caminho do desenvolvimento do geoespaço, pois ele foi base para o trabalho de conclusão de curso (TCC) intitulado “Desenvolvimento e Utilização de Material Didático no Ensino e Aprendizagem de Matemática (porque, quando e como utilizar material didático)”, que teve como contexto a questão da utilização do material didático no ensino de matemática. O objetivo geral do TCC foi aprofundar conhecimentos sobre metodologias de ensino de matemática envolvendo material didático e o objetivo específico foi o desenvolvimento, a classificação e a utilização de material didático em diferentes sequências didáticas.

A metodologia de pesquisa do TCC contemplou um caráter qualitativo de natureza bibliográfica, sendo pesquisado, num primeiro momento, o porquê da utilização de materiais didáticos no ensino da matemática. Em um segundo momento, analisaram-se as várias formas de abordagem existentes de modo a verificar qual seria a mais adequada para cada tipo de material didático e, por fim, foi feito um levantamento dos materiais didáticos existentes em livros e em artigos científicos, os quais foram classificados de acordo com os blocos temáticos contidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998): números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; e tratamento da informação.

2.2. O ingresso no Programa de Mestrado

Posteriormente, visando desenvolver e aprofundar conhecimentos sobre a matemática em si e suas metodologias de ensino, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos - campus Sorocaba - cujo perfil do aluno do programa é o de um professor pesquisador, que tenha iniciativa de buscar meios e métodos para a melhoria de sua atuação profissional e possa produzir conhecimento e materiais para efetiva melhoria da qualidade de ensino.

Nesta perspectiva, durante as aulas da disciplina “Fundamentos Metodológicos da Educação em Ciências e Matemática” do PPGECE, ministrada pelo Prof. Dr. Paulo César Oliveira, tive o primeiro contato com as tarefas exploratório-investigativas, através do estudo do livro de João Pedro da Ponte intitulado “Investigações Matemática na Sala de Aula”. Sucintamente, as investigações matemáticas caracterizam-se por serem situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos várias alternativas de exploração e de investigação.

Concomitantemente, fiz parte do grupo de estudos e planejamento de atividades matemáticas (GEPLAM) da UFSCar-Sorocaba sob a responsabilidade do Prof. Dr. Paulo César Oliveira, onde tive a oportunidade de aprofundar os estudos em investigações matemáticas e viabilizar o desenvolvimento desta dissertação.

2.3. Por que usar o geoespaço como material manipulável para pesquisa em sala de aula?

A escolha do geoespaço como objeto dessa pesquisa se deu pelo fato não ter encontrado nenhum trabalho no Brasil sobre o mesmo, apesar da infinidade de trabalhos encontrados sobre o uso do geoplano, que tem a mesma finalidade, mas é voltado para o ensino da geometria plana, sendo que o geoespaço é usado no ensino da geometria espacial.

Durante minhas aulas sobre a geometria espacial em escolas públicas da rede estadual do estado de São Paulo constatei que tanto no ensino fundamental II, quanto no ensino médio os alunos não conseguiam identificar as propriedades das figuras espaciais, não compreendendo as representações feitas pelos livros didáticos. Essa dificuldade de abstrair e imaginar os sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cones e cilindros) ocorre pelo fato de a geometria ser uma área da matemática que exige a experimentação por intermédio de atividades concretas, cuja análise de “modelos matemáticos” faz referência a situações reais. Tal análise só pode ser feita de modo satisfatório se os envolvidos nela compreenderem tal referência, fato que ocorre através da manipulação de “objetos matemáticos” concretos que auxiliam na compreensão e abstração por parte dos alunos.

Visando romper essa barreira, foi escolhido o geoespaço, por se tratar de um material didático manipulativo, a partir do qual é possível construir e analisar tais objetos matemáticos, sendo que os mesmos não são estáticos, podendo ser alterados de acordo com as necessidades e permitindo construções que ajudam na visualização de propriedades como: diagonais, alturas, apótemas, raios e diâmetros entre outros.

3. APONTAMENTOS SOBRE O GEOESPAÇO E AS ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS

3.1. O processo ensino-aprendizagem via material didático

Para compreender o uso de um determinado material didático no ensino da geometria devemos, primeiramente, compreender de que forma esse uso interfere no processo de ensino-aprendizagem, para que, a partir deste ponto, possam ser desenvolvidas atividades relevantes a este processo.

No processo ensino-aprendizagem, Lorenzato (2006) afirma que, para chegar ao abstrato, é preciso partir do concreto. Este, por sua vez, pode ser interpretado como palpável ou manipulável; de forma mais ampla, inclui também as imagens gráficas. Essa trajetória é semelhante ao que se deve fazer para atingir o rigor matemático: para alcançá-lo com seus vocábulos, expressões, símbolos e raciocínios é preciso começar pelo conhecimento dos alunos, que é um ponto distante e oposto ao rigor matemático, porque é empírico e baseado no concreto.

Neste contexto, Lorenzato (2006) concebe que um material didático é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem, podendo ser giz, calculadora, filme, livro, quebra-cabeça, jogo, sólido geométrico, slide, entre outros. Apesar dessa enorme variedade de possibilidades dentre os materiais didáticos, eles constituem apenas um dos inúmeros fatores que interferem no rendimento escolar do aluno. Esse tipo de material pode desempenhar várias funções, segundo o objetivo a que se propõe e, desta maneira, o professor deve conhecer a utilidade do mesmo para apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados ou promover a redescoberta pelos alunos.

No entanto para Lorenzato (2006) esse material nunca superará a categoria de meio complementar de ensino, e, como tal, ele não é garantia de um bom ensino-aprendizagem e não substitui o professor. A variedade de materiais didáticos é muito extensa. Existem aqueles que não possibilitam modificações em suas formas, que só permitem a observação, como as representações figurais, que apenas permitem a visualização sobre um ponto de vista e sólidos geométricos (madeira, acrílico, entre outros) que não permite alterações em suas características. Existem, ainda, aqueles dinâmicos, que permitem transformações, como o geoplano - que permite a construção de figuras planas - o algeplan- que permite a análise de propriedades algébricas - e o material dourado - que auxilia no desenvolvimento de conceitos como produto e volume. Os materiais dinâmicos auxiliam o aluno na realização de redescobertas, na percepção de propriedades e na construção de uma efetiva aprendizagem.

De acordo com Lorenzato (2006), existem diferenças entre fazer uma representação gráfica e o uso de um material didático manipulável para exemplificar uma ideia, porque, apesar de todas as contribuições de perspectiva, a representação gráfica não retrata as reais dimensões e posições dos lados e faces de um objeto, e assim dificulta a compreensão da ideia em questão. Já o uso do material manipulável em sala de aula facilita a observação e a análise, desenvolvendo o raciocínio lógico, crítico e científico, tendo um papel fundamental para o ensino experimental e sendo um excelente auxiliar na construção dos conhecimentos em geral. Além disso, leva o aluno a realizar diversas observações e constatações, que dificilmente seriam atingidas sem o uso do mesmo, podendo ser utilizado para um mesmo assunto, porém, em níveis diferentes.

Lorenzato (2006) afirma que, o professor de matemática, ao planejar sua aula, precisa saber se será conveniente, ou necessário, o uso de material didático em sala de aula, se facilitará a aprendizagem e qual o material mais adequado para essa aula. O professor deve conhecer a importância do uso de material didático em sala de aula, qual o material mais adequado, o momento ideal para seu uso, além de como este material deverá ser utilizado. A compreensão da metodologia a ser utilizada em sala de aula bem como das estratégias de ensino serão fundamentais, embora não suficientes, no processo de ensino-aprendizagem.

O modo de utilizar cada material didático depende fortemente da concepção do professor a respeito da matemática e da arte de ensinar. Um professor que concebe a matemática como um conjunto de proposições dedutíveis, auxiliares por definições, cujos resultados são regras ou fórmulas que servem para resolver tarefas em exames, avaliações, geralmente, utiliza-se apenas do quadro negro, para mostrar ou provar determinado conceito.

Para Bezerra (1962), dentre as necessidades para o uso de materiais didáticos no ensino de matemática, destacam-se:

a. O acesso às noções de base não pode ser concebido senão partindo do concreto; deve se iniciar no meio em que a criança pode explorar, a fim de que ela aí possa se mover e agir;

b. Neste indispensável esforço de ligação da abstração com o real, é necessário não esquecer a ajuda eficaz que traz ao ensino de matemática a utilização razoável do material didático;

c. É útil mencionar o lucro que pode tirar o aluno dessa colaboração efetiva entre os professores de trabalhos manuais e de matemática;

d. Sem dúvida, o caráter abstrato é um obstáculo capaz de fazer desanimar os principiantes no uso do material didático, porém uma iniciação prudente produzirá bons resultados.

Para Lorenzato (2006), o importante é frisar que a utilização de todo e qualquer recurso didático exige cuidados básicos por parte do professor, entre os quais, destacamos:

- Dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
- Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
- Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e duvidas;
- Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
- Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo e sempre que possível;
- Estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material.

Quanto às dificuldades de utilização do material didático, Lorenzato (2006) enfatiza que existem vários obstáculos ao seu uso em sala de aula, dentre elas, está a própria política educacional pública que geralmente não preconiza ou orienta os educadores ao uso deste tipo de material, assim como a falta de escolas do ensino fundamental ou médio que possuam seu próprio laboratório de ensino de matemática.

Segundo Bezerra (1962), qualquer tipo de material didático pode ser construído pelos próprios alunos ou por um carpinteiro, mas sempre sob a supervisão de um profissional especialista em trabalhos manuais ou em desenho, que conheça quais os conceitos a serem trabalhados, sendo que para compreender o uso de um determinado material didático no ensino aprendizagem de matemática, primeiramente será necessário compreender as diferentes funções e classificações que esse pode ter.

De acordo com Bezerra (1962), podemos classificar as seguintes funções de um material didático:

a. **Motivadora:** Empregado com propriedade, o material didático torna-se fonte de recursos motivadores, a qual permite ao mestre despertar e manter o interesse dos alunos pela matéria. Grande número de quadros murais e de outros materiais didáticos tem função quase que exclusivamente motivadora;

b. **Auxiliadora da apresentação da matéria:** o material didático é de grande aplicação como auxiliar das explicações do professor quer nos cursos ginasiais, científicos ou mesmo de nível superior;

c. **Fixadora:** É de grande valor o emprego do material didático para auxiliar a fixação da aprendizagem.

E ainda, segundo Bezerra (1962), podemos classificar os diferentes tipos de materiais didáticos existentes em:

- **Material didático industrial ou de trabalho**: quadro-negro, giz, apagadores, réguas, esquadros, réguas de cálculo, calculadoras, softwares educacionais, entre outros;

- Material didático informativo: livros textos, livros didáticos de matemática ou relacionados com a matéria, formulários, livros de exercícios, revistas, entre outros;

- Material didático ilustrativo ou descritivo: desenho, esquemas, quadros murais, modelos, gravuras, gráficos, projetores audiovisual, televisão, entre outros.

- Material didático analítico ou de observação: modelos de sólidos geométricos, figuras planas, entre outros;

- Material didático experimental ou demonstrativo:

I. **De uso do professor:** aparelhos simples para auxiliar a demonstração de diversos teoremas da geometria; aparelhos para explicar a geração de sólidos, ou a variação das linhas trigonométricas, ou a equivalência de áreas; material para o ensino do sistema métrico, material para auxiliar a explicação de diferentes assuntos de álgebra, geometria, entre outros.

II. **De uso do aluno:** aparelhos que possam auxiliar os alunos na compreensão de conceitos matemáticos, como o bloco-fração, o geoplano, os números em cores, o ábaco, algebloc, entre outros.

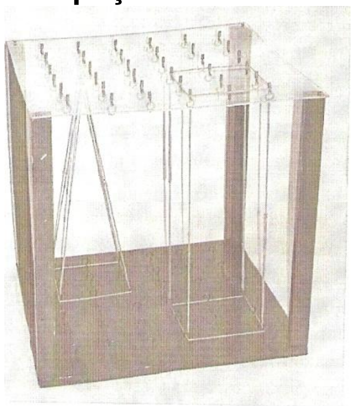
No que diz respeito aos materiais experimentais ou demonstrativos, Lorenzato (2006) os define como materiais didáticos manipulativos, ressaltando que atividades com esses materiais não garantem a aprendizagem, pois para que isso aconteça, também é necessária a atividade mental por parte do aluno, sendo esse material manipulável um catalisador do saber matemático.

3.2. Geoespaço como material didático

O geoespaço é um dos recursos que pode auxiliar no trabalho da geometria espacial, desenvolvendo atividades que envolvam a análise de sólidos geométricos. Trata-se de um material didático manipulativo (experimental ou demonstrativo) de uso do professor e também do aluno, que pode ser confeccionado pelo próprio professor. A vantagem de ser confeccionado é que o professor pode construí-lo conforme a necessidade. É um material de uso individual ou em grupo, que pode ser utilizado tanto para a indução quanto para a dedução de conceitos de geometria espacial.

O primeiro contato com o geoespaço foi através do livro “O laboratório de ensino de matemática na formação de professores” de Lorenzato (2006), no qual ele expõe um geoespaço desenvolvido no Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Cientifica (LEPAC), vinculado ao departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba (CCEN/UFPB) como mostra a figura 1.

Figura 1: Geoespaço desenvolvido no LEPAC



Fonte: Lorenzato (2006)

A partir deste modelo, foram desenvolvidos junto ao grupo de estudos e planejamento de atividades matemáticas (GEPLAM) - vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar-Campus de Sorocaba) - dois tipos de geoespaços: quadrangular e circular.

3.2.1. O Geoespaço Quadrangular

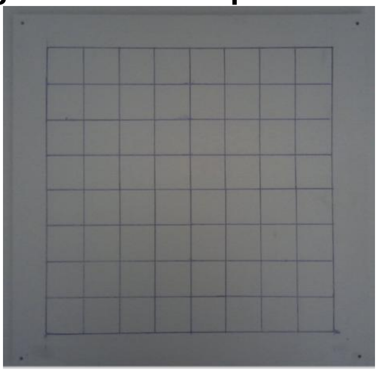
Semelhante ao geoespaço construído pelo LEPAC, o kit geoespaço é formado por duas placas quadradas de madeira de 40cm de lado, quatro cabos cilíndricos de madeira com 45cm cada, 170 pequenos ganchos de cobre e elásticos de diversas cores, 8 parafusos para madeira e 2 pés para móveis de borracha como mostramos a seguir:

Figura 2: Componentes do geoespaço quadrangular

Fonte: arquivo do pesquisador

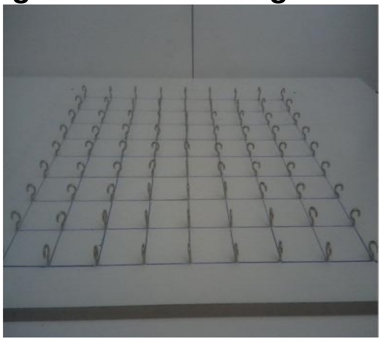
No geoespaço quadrangular as duas bases de madeira são desenhadas malhas quadriculadas com 32cm de lado, sendo que cada quadrado tem 4cm de lado (figura 3). Em seguida são feitos furos em todos os cantos dos quadrados da malha e neles são afixados os ganchos de cobre (figura 4):

Figura 3 – Malha quadriculada



Fonte: arquivo do pesquisador

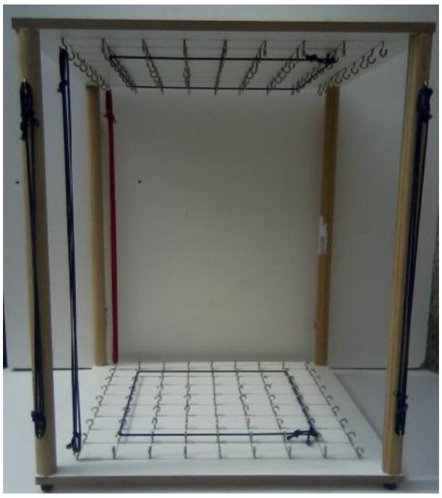
Figura 4 – Malha e ganchos



Fonte: arquivo do pesquisador

Feito isso, as bases são parafusadas nos quatro cabos de madeira formando assim o geoespaço quadrangular, conforme ilustração a seguir:

Figura 5- Geoespaço Quadrangular



Fonte: arquivo do pesquisador

Nesse geoespaço e possível fazer a representação de prismas e pirâmides de diversas bases, sendo elas retas ou obliquas. A partir da representação de um prisma no geoespaço quadrangular é possível determinar o número de arestas, vértices e faces do prisma, calcular a área lateral e a área da base, calcular o comprimento de uma diagonal da face ou o comprimento de uma diagonal do prisma, calcular o volume do prisma. A partir da representação de uma pirâmide no geoespaço quadrangular é possível determinar o número de arestas, vértices e faces, visualizar a altura da pirâmide, calcular a área lateral, a área da base e o volume da pirâmide.

É possível construir no geoespaço quadrangular o tronco de uma pirâmide, uma pirâmide inscrita em um prisma de mesma base, bem como representar a relação entre o volume de uma pirâmide de um prisma.

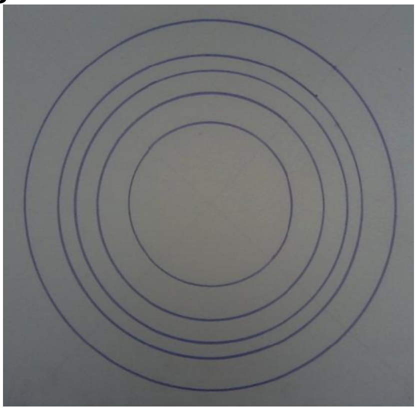
3.2.2. O Geoespaço Circular

Esse geoespaço foi desenvolvido junto ao grupo GEPLAN, ao serem levantadas questões o trabalho com cilindros e cones e se poderia ser construído um material similar ao geoespaço quadrangular, mas que fizesse um estudo das propriedades do cilindro e do cone. Não sendo encontradas referências sobre a existência do mesmo, foi desenvolvido partindo com base para essa construção o geoplano circular.

O kit geoespaço circular é formado por duas placas quadradas de madeira de 40cm de lado, quatro cabos cilíndricos de madeira com 45cm cada, 240 pequenos ganchos de cobre e elásticos de diversas cores, 8 parafusos para madeira e 4 pés para móveis de borracha; material muito semelhante ao geoespaço quadrangular.

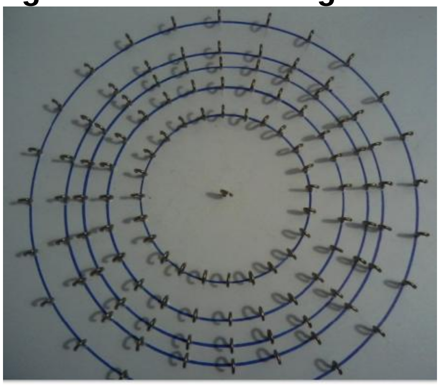
Nas duas bases de madeira do geoespaço circular são desenhados círculos concêntricos de raios 6cm, 8,5cm, 10cm, 11,5 e 14cm. A escolha destas medidas foi de acordo com objetos circulares disponíveis durante a construção (figura 6). Na sequência são feitos os furos nas circunferências em um intervalo de 15° e um furo central, onde são afixados os ganchos de cobre (figura 7):

Figura 6 – Círculos concêntricos



Fonte: arquivo do pesquisador

Figura 7 – Círculos e ganchos



Fonte: arquivo do pesquisador

Feito isto, as bases são parafusadas nos quatro cabos de madeira formando assim o geoespaço circular (figura 8):

Figura 8- Geoespaço Circular

Fonte: arquivo do pesquisador

Nesse geoespaço é possível fazer a representação de cilindros e cones retos ou oblíquos. A partir da representação do cilindro no geoespaço circular é possível visualizar o raio da base, a altura do cilindro, a secção meridiana, calcular sua área lateral, sua área da base e seu volume. Já na representação de um cone no geoespaço, é possível visualizar o raio da base, a altura do cone, a geratriz do cone, a secção meridiana, calcular a área da base, a área lateral e o volume.

Sendo possível construir um tronco de cone e um cone inscrito em um cilindro de mesma base, podemos calcular o volume do tronco do cone e a relação entre o volume do cilindro e do cone. Outra atividade que pode ser construída a partir do geoespaço circular é a visualização e cálculo do volume de uma secção do cone ou cilindro a partir do centro de sua base, como o cálculo do volume de ¼ do cilindro.

3.2.3. Investigações Matemáticas na Sala de Aula e o ensino da Geometria.

Investigar, na concepção de Ponte (2009), é procurar conhecer o que não se sabe, podendo ser usado o termo “investigação” em diferentes contextos. Para os matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar respectivas propriedades. Uma investigação matemática desenvolve em torno de um ou mais problemas, sendo seu primeiro grande passo a clara identificação do problema a ser resolvido. Quando trabalhamos em um problema, o nosso objetivo é resolver o mesmo. No entanto, podemos fazer outras descobertas que podem se revelar tão ou mais importantes que a solução do problema original.

Para Ponte (2009), a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais:

1. Reconhecimento da situação, sua exploração preliminar e a formulação de questões;
2. Processo de formulação de conjecturas a partir da organização dos dados;
3. Realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas, fazendo afirmações sobre as mesmas;

4. Argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado, justificando uma conjectura e avaliando o resultado do raciocínio.

A diferença entre a resolução de exercícios, problemas e a investigação matemática é que, nos dois primeiros, seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Já numa investigação as situações são um pouco mais abertas, cabendo ao investigador sua definição, não só formulando as questões e conjecturas na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas.

Uma atividade de investigação se desenvolve em três fases. Primeiramente, o professor faz a proposta da atividade, seja oralmente ou por escrito; em seguida, é realizada a investigação, individualmente, em pares, em pequenos grupos ou com toda a turma e, finalmente, é feita a discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE, 2009).

No inicio do desenvolvimento da atividade, os alunos em muitos casos são levados a gerar informações e organizá-las, e só depois começam a formular questões. As conjecturas surgem tanto da manipulação desses dados, gerando a necessidade de fazer testes, que podem exigir mais dados; quanto pela observação direta dos dados, seja pela manipulação dos dados ou pela analogia com outras conjecturas.

A justificativa ou prova das conjecturas é de grande importância em um trabalho investigativo, sendo necessário insistir na realização de testes de conjecturas.

No final de uma investigação, deve-se fazer um balanço do trabalho realizado compartilhando os saberes adquiridos, momento em que os alunos colocam em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificativas, cabendo ao professor o papel de moderador, garantindo assim a comunicação dos resultados e processos mais significativos da investigação realizada, estimulando o questionamento entre os alunos.

No decorrer da investigação o professor deve desafiar os alunos a realizar a atividade, criando um ambiente adequado ao trabalho investigativo, escolhendo questões ou situações iniciais que constituam um verdadeiro desafio para os alunos. O professor precisa recolher informações sobre como vai se desenrolando o trabalho com os alunos, desde o primeiro momento, observando se os alunos compreenderam bem a tarefa, e se essa constitui realmente um desafio para eles.

Deve-se compreender o pensamento dos alunos, fazendo perguntas e pedindo explicações, evitando ponderar apressadamente sobre o trabalho desenvolvido. A partir das informações adquiridas, o professor deve adotar uma estratégia de interação com os alunos que se revela mais adequada naquele momento, variando desde uma simples averiguação do processo até um apoio mais direto que interfere positivamente no trabalho com os alunos. O apoio concebido pelo professor deve colocar questões mais ou menos diretas, fornecendo ou recordando informações relevantes, fazendo testes e promovendo a reflexão dos alunos, privilegiando uma postura interrogativa.

No que diz respeito à geometria, Ponte (2009) ressalta sua tendência para um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa, sendo possível conceber tarefas adequadas a diferentes níveis de desenvolvimento e que requerem um número reduzido de pré-requisitos. Tais situações contribuem para a concretização da relação entre situações da realidade e situações matemáticas.

É fundamental estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, explorar a aplicação da geometria a situações da vida real e utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceitual em geometria, pois estas constituem experiências de aprendizagem importantes de acordo com as recomendações curriculares.

4. O ENSINO DA GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

4.1. Análise dos documentos curriculares

Neste trabalho foi feita uma análise do ensino de geometria segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (BRASIL, 2002), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006) e o Currículo do Estado de São Paulo – CESP (SÂO PAULO, 2010).

A análise destes documentos foi norteada pelos critérios construídos por Lopes (1998), como se segue: concepção de geometria, a seleção de noções de geometria, o modo como se sugere o tratamento da geometria e as finalidades da abordagem das noções de geometria junto aos estudantes.

4.1.1. A concepção de geometria

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), ressaltam que a construção de conceitos geométricos possibilita ao aluno desenvolver um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, sendo um campo fértil para se trabalhar situações-problemas, contribuindo para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, assim como identificar regularidades.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), a matemática no Ensino Médio está relacionada com as Ciências da Natureza, sendo justificada por sua afinidade e pelo fato de ser um dos principais recursos de constituição e expressão dos conhecimentos das mesmas, de modo a integrar a matemática com outras ciências.

A abordagem tradicional para o Ensino Médio, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, de acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002), não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem justificar a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar geometria deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos. Sendo assim, é essencial descrever, representar, medir, dimensionar uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços, tratando das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), o estudo da geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas e saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial de apreciar a faceta da matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta a geometria que leva à trigonometria, estudando as relações métricas em um triângulo retângulo, com o auxilio do teorema de Pitágoras, relacionando-as aos ângulos internos do mesmo triângulo, e a geometria que leva para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (SÂO PAULO, 2010), o bloco geometria diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; a construção e a representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e a elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca. O desenvolvimento do bloco geometria, que trabalha com as ideias de percepção/concepção e construção/representação, permite conexões internas com o bloco dos números, que trabalha com as ideias de equivalência/ordem e simbolização/operações, e o bloco das relações, que trabalha com as ideias de medidas/aproximações e proporcionalidade/interdependência.

4.1.2. A seleção de noções de geometria

Para o PCNEM (BRASIL, 2000), a Geometria deve relacionar o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade, identificando, representando e relacionando o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão, e da ação sobre a realidade.

De acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002), no Ensino Médio, são propostas quatro unidades temáticas para o desenvolvimento do ensino da geometria: plana, espacial, métrica e analítica. As propriedades de que a geometria trata são de dois tipos: a posição relativa das formas e as medidas. Isso dá origem a duas maneiras diferentes de pensar em geometria; a primeira delas marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes.

Na unidade geometria plana (semelhança, congruência e representações de figuras), visa-se identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema, analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real, utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras e fazer uso de escalas em representações planas.

Na unidade geometria espacial (elementos dos poliedros, sua classificação e representação, sólidos redondos, propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos) visa-se usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções, interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos; utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade, compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

Na unidade geometria métrica (áreas e volumes, estimativa, valor exato e aproximado) visa-se identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos, utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos e efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

Na unidade geometria analítica (representações no plano cartesiano e equações, intersecção e posições relativas de figuras), visa-se interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos, reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características, associar situações e problemas geométricos às suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa, construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Para as OCEM (BRASIL, 2006), o trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados no ensino médio, como, por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o teorema de Pitágoras.

Na geometria analítica é feito o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra) e o estudo dos pares ordenados de números que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria).

De acordo com Currículo do Estado de São Paulo (SÂO PAULO, 2010), no ensino médio a ideia básica de proporcionalidade direta ou inversa deve ser estendida a outros tipos de relações de interdependência. Enquadra-se nas relações de interdependência todo o estudo da trigonometria, desde as relações métricas no triângulo retângulo até a caracterização das funções trigonométricas, com sua notável potencialidade para representar fenômenos periódicos.

Na geometria analítica, fundem-se as perspectivas das relações de interdependência, da linguagem algébrica e dos objetos geométricos, numa verdadeira comunhão de interesses entre as três vertentes de temas disciplinares (relações, números e geometria).

4.1.3. O modo como se sugere o tratamento da Geometria

De acordo com o PCNEM (2000), a geometria no bloco das Ciências da Natureza tem como contribuir tanto para a compreensão do significado da ciência e da tecnologia na vida humana e social, quanto para uma compreensão do universo físico, da vida planetária e da vida humana, conectando inúmeros conhecimentos geométricos com suas aplicações tecnológicas, identificando, representando e relacionando o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão, e da ação sobre a realidade.

Em relação ao modo como o PCN+ (2002) trata a geometria no ensino médio, usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

Parte do trabalho com geometria está estritamente ligado as medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido e não pode ignorar as relações geométricas em si.

Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de geometria no ensino médio deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos.

Em relação às grandezas geométricas, as atividades propostas deverão proporcionar a consolidação dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores, como área, perímetro e volumes. Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes, considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas. Um conteúdo a ser trabalhado com cuidado são as fórmulas de comprimento e de área do círculo. No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides. As expressões que permitem determinar a medida da área das superfícies do cilindro e do cone podem ser estabelecidas facilmente a partir de suas planificações. Sendo assim, o trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra.

Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: figuras geométricas por meio de equações e vice-versa. A apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas.

É desejável, também, que o professor de matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico quanto algébrico. Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de matemática visa a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de física.

No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria.

Em relação ao uso de tecnologias no ensino de geometria, as OCEM (BRASIL, 2006) destacam a utilização de programas que dispõem de régua e compasso virtuais e menu de construção em linguagem clássica da geometria.

Feita uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura, esses programas são denominados programas de geometria dinâmica, enriquecendo as imagens mentais associadas às propriedades geométricas.

Com a geometria dinâmica também se pode fazer modelação geométrica. Isso significa captar, com a linguagem geométrica, o movimento de certos mecanismos ou os movimentos corporais. Identificar o elemento que desencadeia o movimento e, a partir dele, prosseguir com uma construção sincronizada, em que se preserva a proporção entre os elementos, exige, além de conhecimento em geometria, uma escolha de estratégia de resolução do problema, com a elaboração de um cronograma de ataque aos diferentes subproblemas que compõem o problema maior.

Uma vez que a geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, os grandes temas podem aparecer tanto nos anos do ensino fundamental quanto nas séries do ensino médio, sendo a diferença a escala de profundidade do tratamento dado ao tema.

Um aspecto importante a ser destacado na apresentação da geometria, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, é o fato de que o conhecimento geométrico apresenta quatro faces, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação.

A iniciação em geometria costuma realizar-se por meio da percepção imediata das formas geométricas e de suas propriedades características, tendo por base atividades sensoriais como a observação e a manipulação de objetos. Tais atividades relacionam-se diretamente com a construção, a representação ou a concepção de objetos, existentes ou imaginados, através da análise, manipulação e construção dos mesmos.

Segundo o Currículo do Estado de São Paulo (SÂO PAULO, 2010), o tratamento da geometria no ensino médio difere do ensino fundamental apenas no que diz respeito à escala de profundidade do tratamento dado ao tema. No ensino médio, a ampliação de ideias associadas ao bloco temático relações ocorre de forma muito significativa. Além da continuidade do estudo de medidas de figuras planas e espaciais, deve ser incorporada nesse eixo a investigação das relações entre grandezas que dependem umas das outras, ou seja, as relações de interdependência.

4.1.4. As finalidades das abordagens das noções de geometria junto aos estudantes.

Em relação aos PCN+ (BRASIL, 2006), definem-se as seguintes finalidades: identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentadas em diferentes formas, elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema, lendo e interpretando dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como a representação geométrica, traduzindo uma situação dada em determinada linguagem para outra e fazendo uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.

Ainda segundo o PCN+ (BRASIL, 2006), o aluno deve situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da matemática e a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema, identificando transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazendo quantificações, previsões e identificando desvios, fazendo uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos.

O aluno deve realizar ampliações e reduções de figuras, perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, além de usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.

Neste processo, é desejável que o aluno compreenda a necessidade de fazer uso apropriado de escalas, compreendendo a matemática como ciência autônoma, que investiga relações e a construção do conhecimento matemático como um processo histórico. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em históricos diferentes.

O Currículo do Estado de São Paulo – CESP (SÂO PAULO, 2010), define as seguintes finalidades para o ensino de geometria, no ensino fundamental: compreender o significado das frações na representação de medidas não-inteiras e da equivalência de frações, identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas, planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.

Há também necessidade de compreender a noção de área e perímetro de uma figura - sabendo calculá-los por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras - a ideia de simetria - sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares - e a ideia de medida de um ângulo (em grau) - sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos, compreendendo e identificando simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia, sabendo calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estendendo tal cálculo para polígonos de n-lados.

De acordo com o CESP (SÂO PAULO, 2010), o aluno deve saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas, identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista, planificar e representar (em vistas) figuras espaciais e reconhecer e resolver problemas variados, envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais, conhecendo o significado do número π como uma razão constante da geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes.

O aluno deve relacionar as linguagens algébrica e geométrica, sabendo traduzir uma delas na outra, particularmente no caso dos produtos notáveis; reconhecer e aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos; compreender o significado do Teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos, calculando áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares e sabendo identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes, reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes e identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos.

O Currículo do Estado de São Paulo (2010) define as seguintes finalidades para o ensino de geometria no ensino médio: uso sistemático de relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos, as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies, inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas, conhecendo algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a lei dos senos e a lei dos cossenos e saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais.

É fundamental compreender e saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-os em diferentes contextos; saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide, o cone e a esfera, utilizando-as em diferentes contextos e as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres.

Em todos os documentos curriculares analisados, foi verificada a importância do ensino da geometria seja no ensino fundamental, seja no ensino médio. Em relação ao ensino fundamental, o PCN (BRASIL, 1998) destacam que o manuseio e a construção que o permitem ao aluno fazer conjecturas e identificar propriedades. No que diz respeito ao ensino médio, o PCNEM (BRASIL, 2000) ressaltam a importância de se relacionar a geometria com a transformação da sociedade, identificando, representando e relacionando o conhecimento geométrico e sua ação sobre a realidade.

Os PCN+ (BRASIL, 2002), por sua vez, ressaltaram a importância do aluno ser levado a descrever, representar, medir e dimensionar uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços, tratando das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Esta perspectiva é fortalecida pelas OCEM (BRASIL, 2006) que afirmam que o trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado no ensino médio.

Esta perspectiva de ensino-aprendizagem tratada nos documentos curriculares através do manuseio, construção, descrição e representação do objeto geométrico pode ser realizada com o auxilio de materiais manipuláveis que permitem ao aluno trabalhar com a percepção e concepção de conjecturas, de modo a identificar propriedades geométricas.

4.2. Anped e ENEM: trabalhos desenvolvidos no Brasil no período de 2000 a 2013

Com o objetivo de verificar a influência das diretrizes curriculares descritas nesta dissertação nas produções acadêmicas no período de 2000 a 2013 que trataram do ensino de geometria experimental, através o uso de materiais manipuláveis, foi feito um estudo sobre os Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs) de 2001, 2004, 2007 e 2010 e as Reuniões Anuais da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped) de 2000 a 2013.

A análise destas produções acadêmicas visa apresentar ao leitor as tendências didático-pedagógicas no ensino da geometria, concebendo-as como a produção de conhecimentos geométricos na sala de aula e para sala de aula.

Inicialmente apresentamos dois quadros com a descrição quantitativa dos trabalhos apresentados em tais eventos.

Quadro 1 - Descrição quantitativa de trabalhos apresentados na Anped

TRABALHOS APRESENTADOS NA ANPED – GT 19 ENTRE 2000 E 2012				
ANO	**COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA**	**POSTER**	**GEOMETRIA**	**MATERIAIS MANIPULÁVEIS**
2000	17	3	5	1
2001	13	2	3	0
2002	10	3	4	0
2003	11	1	1	0
2004	13	3	2	0
2005	19	4	2	0
2006	20	1	2	1
2007	15	0	0	0
2008	16	3	3	2
2009	10	1	0	0
2010	18	2	1	0
2011	15	0	2	1
2012	12	1	0	0
2013	20	4	0	0
TOTAL	**209**	**28**	**25**	**5**

Fonte: arquivo do pesquisador.

Quadro 2 - Descrição quantitativa de trabalhos apresentado nos ENEMs

ANO	**COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA**	**POSTER**	**GEOMETRIA**	**MATERIAIS MANIPULÁVEIS**
2001	65	4	16	1
2004	67	29	26	5
2007	239	131	42	8
2010	460	150	50	6
TOTAL	**831**	**313**	**134**	**20**

Fonte: arquivo do pesquisador.

As duas tabelas totalizam 1381 trabalhos. No quadro 1, a respectiva média foi de 10,5% na categoria de geometria, no quadro 2 a média de trabalhos na categoria de geometria foi de 11,7% do total. Dos 159 trabalhos em geometria catalogados pela Anped e ENEM, 14,5% das publicações eram destinadas a experimentações por meio de materiais manipuláveis.

4.2.1. Ensino de geometria via materiais manipuláveis

Após o mapeamento quantitativo dos trabalhos apresentados nos ENEMs e nas Reuniões Anuais da Anped, foi feita uma análise qualitativa dos trabalhos que tratavam do ensino da geometria experimental por meio de materiais manipuláveis, visando identificar a questão de investigação, referencial teórico, delineamento metodológico da pesquisa, os resultados e as implicações pedagógicas.

4.2.2. Documentos Curriculares, Anped e ENEM: potencialidades em materiais didáticos?

Em relação aos trabalhos de comunicação científica e pôster com o tema materiais manipulativos apresentados nas edições de 2001, 2004, 2007 e 2010 dos ENEMs,foram encontrados diversos materiais desta natureza para o ensino da geometria plana e espacial.

Os caleidoscópios (MURARI, 2001; MURARI, 2004; GOUVÊA, 2004) são materiais que não permitem ao aluno a alteração de características básicas (comprimento e altura) o que dificulta, na indução e dedução de conceitos, focos da investigação matemática.

Os origamis (ALMEIDA, 2004; BUSKE, 2007; MURARI, 2007; BARRETO, 2010; SILVA 2010) representaram a maioria dos trabalhos estudados que utilizaram materiais manipuláveis, sendo dois tipos: o origami tradicional (uso apenas da folha de papel), que foi usado para a representação de figuras planas, e o origami modular (que é uma união de vários origamis tradicionais), usado para a representação de figuras espaciais.

Esses materiais são de fácil aquisição, pois podem ser feitos inteiramente de papel, mas exigem grande habilidade na leitura de diagramas que auxiliam em sua construção. Porém, após serem construídos, tornam-se um material estático, ou seja, que não permite a alteração de suas propriedades, permitindo apenas a análise das dimensões fixas do objeto (altura, largura, comprimento, faces, vértices e arestas) e, se for necessário alterar qualquer uma dessas dimensões, devem ser feitos outros modelos, a partir de novos diagramas. Consequentemente, cada vez que for necessária a alteração de qualquer dimensão, tal fato dificulta a indução e dedução de conceitos, pois torna o processo de investigação matemática muito lento e trabalhoso.

Os trabalhos de Brito (2004), Andrade (2007), Cavalcanti (2007), Ferreira (2007) e Barbosa (2010) enfatizaram o estudo da geometria plana. Eles construíram figuras geométricas planas a partir de diversos tipos de folhas de papel (sulfite, cartolina e EVA). Esses materiais são de fácil construção, sendo usados em atividades de investigação a partir de tarefas propostas pelo professor com o objetivo de analisar conceitos de pavimentação por composição e decomposição para o cálculo de área. Apenas em um dos trabalhos a análise de tais conceitos foi feita com base em um bloco retangular (FERREIRA, 2010); porém o estudo ocorreu com base na representação figural, não ocorrendo a construção do objeto geométrico.

Em relação aos trabalhos de Santos (2004) e Batistela (2010), o primeiro focou na metodologia dos jogos no ensino da Geometria plana e o segundo, na análise de simetrias de figuras planas com o uso de espelhos, sem abordar a geometria espacial.

O foco do estudo de Ferreira (2010) recaiu na análise de sólidos de revolução e poliedros, construindo figuras geométricas planas, que foram rotacionadas em torno de um de seus lados para gerar visualizações de objetos referentes à geometria espacial. Houve a classificação dos objetos obtidos de acordo com o seu formato, porém não foi possível analisar de fato o objeto em questão, pois o mesmo não era palpável.

Marques (2007) e Pinheiro (2010) desenvolveram atividades exploratório-investigativas no ensino da geometria por meio do geoplano, envolvendo o estudo da geometria plana e trigonometria. Devido às limitações do material manipulável geoplano, o mesmo não permitiu estudos de geometria espacial.

Dos referidos trabalhos contidos nas edições do ENEM, doze envolveram o estudo da geometria plana, mais especificamente, o cálculo de área e propriedades das figuras plana. Houve, ainda, oito trabalhos no estudo da geometria espacial, com foco na construção e análise das propriedades dos sólidos geométricos. Não foram encontrados, dentre os trabalhos voltados à geometria espacial, nenhum sobre o geoespaço, fato que reafirma a necessidade de estudo do mesmo.

Em relação aos trabalhos apresentados na Anped no período de 2000 a 2013 foram encontrados cinco trabalhos na área de experimentação em geometria voltados para o uso de materiais didáticos, sendo que estes visaram a análise dos pontos positivos e negativos na aplicação dos mesmos, bem como, as metodologias de ensino e aprendizagem mais adequadas para a aplicação dos mesmos.

A análise dessas publicações nas Reuniões Anuais da Anped, revelou que poucos foram voltados para o ensino de geometria através de materiais manipulativos, sendo nenhum voltado para o estudo do Geoespaço. Os trabalhos de Pais (2000) e Farias (2008) foram de caráter bibliográfico, onde Pais (2000) fez uma analise da utilização de recursos didáticos do ensino da geometria no Ensino Fundamental e Farias (2008) fez uma analise avaliou a representação de sólidos nos PCN (BRASIL, 1998), PNLD (BRASIL, 2007) e em livros didáticos de Matemática destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Apenas Guimarães (2006) procurou desenvolver atividades com materiais manipulativos no ensino da geometria, cujo foco foi a construção e analise de sólidos geométricos a partir de sua planificação.

Neste capítulo foi feita uma abordagem sobre o ensino da Geometria no Brasil, em especial no Estado de São Paulo, a partir da analise do PCNEM (BRASIL, 2000), do PCN+ (BRASIL, 2002), das OCEM (BRASIL, 2006). e do CESP (SÂO PAULO, 2010), onde foi verificada a importância do ensino da Geometria tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio.

Ao fazer uma análise da Anped, trabalhos voltados para o ensino da Geometria, poucos eram voltados para o ensino de geometria através de materiais manipulativos, que os trabalhos de Pais (2000) e Farias (2008) foram de caráter bibliográfico em efetiva aplicação em sala de aula, onde Pais (2000) fez uma analise da utilização de recursos didáticos do ensino da geometria em nível de educação fundamental e Farias (2008) fez uma analise avaliou a representação de sólidos nos PCN (1998), PNLD (2007) e em livros didáticos de Matemática destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Guimarães (2006) em seu trabalho procurou desenvolver atividades com matérias manipulativos no ensino da geometria, onde focou na construção e analise de sólidos geométricos a partir de sua planificação, Lamonato (2008) em seu trabalho procurou desenvolver tarefas exploratórias- investigativas usando uma folha de sulfite dobrada ao meio como material manipulável, onde buscava verificar as propriedades dos triângulos em relação aos quadriláteros e finalmente Barbosa (2011) em seu trabalho desenvolveu atividades referentes ao uso de diferentes materiais manipuláveis relacionadas a geometria plana elaborando mosaicos a partir de figuras planas e atividades relacionadas a geometria espacial, analisando embalagens do cotidiano, construindo sólidos geométricos a partir de argila e a partir de sua planificação.

Neste capítulo foi feita uma abordagem sobre o ensino da Geometria no Brasil, em especial no Estado de São Paulo, a partir da analise do PCNEM (2000), do PCN+ (2002), da OCEM (2006) e do CESP (2010), onde foi verificada a importância do ensino da Geometria tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio.

Foi feita também uma analise a partir dos ENEMs e da Anped para discutir se a tendência emergente para o ensino de Geometria se manteve durante o período de 2000 a 2013, com ênfase no seu aspecto experimental da geometria, visando a construção, obtenção e utilização de diferentes materiais didáticos, quer em contextos de aulas mais dialogadas com produção e negociação de significados, quer na utilização de aulas voltadas para a experimentação em geometria. Onde a foram verificados trabalhos de atividades exploratórias-investigativas no ensino da geometria plana, mas não no ensino da geometria espacial.

E a partir desse estudo preliminar e dos resultados obtidos no que diz respeito ao ensino da Geometria se mantiveram abaixo das expectativas, por motivo de falta de trabalhos voltados para o estudo da mesma, visto a sua importância segundo os documentos curriculares (PCN, PCNEM, PCN+, OCEM e CESP) sendo necessário novos trabalhos nessa área visando a melhoria do ensino da Geometria. Sendo que este trabalho ressalta o ensino da geometria focados dos documentos curriculares, visando o desenvolvimentos das competências e habilidades previstas nos mesmo, sendo que o mesmo por se tratar de um material manipulativo, e por possibilitar o trabalho com atividades exploratórias investigativas, torna o ensino mais dinâmico, além de ressaltar uma participação ativa dos alunos no processo de ensino-aprendizagem.

Visando esse propósito, no próximo capítulo será feita uma abordagem do uso de materiais manipuláveis no ensino da Geometria, em especial no uso do Geoespaço, visando à confecção do mesmo, o desenvolvimento de atividades investigação matemática em sala de aula.

5. PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

5.1. Caracterização do trabalho de campo

Segundo o CESP (2010), a geometria métrica espacial é trabalhada de maneira mais aprofundada no 4º bimestre da 2ª Série do ensino médio. Os conteúdos a serem trabalhados são: elementos da geometria de posição; poliedros, prismas e pirâmides, cilindros e cones.

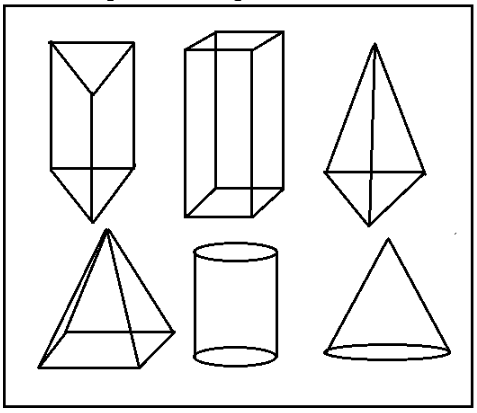
Quanto às habilidades e competências a serem atingidas com base neste documento, o aluno deve compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas), identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos.

Para o desenvolvimento do trabalho de campo desta pesquisa, foi escolhida uma turma de 20 alunos da 3ª Série do ensino médio, da escola estadual Joaquim Izidoro Marins, pelo fato deles já terem estudado toda a parte de geometria espacial no final da série anterior. O primeiro contato deste professor-pesquisador com a referida turma ocorreu no inicio do ano letivo de 2013.

Essa turma de alunos era de responsabilidade do próprio pesquisador devido à atribuição de aulas. Durante o primeiro semestre letivo de 2013, antes de abordarmos o conteúdo programático previsto para a 3ª série do Ensino Médio (geometria analítica), de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (SÂO PAULO, 2010), foi feita uma revisão referente aos conteúdos da geometria plana e espacial. Tal revisão teve como objetivo diagnosticar as competências e habilidades adquiridas durante as duas primeiras séries do ensino médio.

No que diz respeito à geometria espacial (foco desse estudo) foi constatado que os alunos sabiam calcular as relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos. Sabiam compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas) diferenciando sólidos como prismas, pirâmides, cilindros e cones, mas tinham muita dificuldade de identificar propriedades características com as representações geométricas dos mesmos, não conseguiam compreender a representação figural de um sólido geométrico através de sua representação em duas dimensões, figura estática (figura 9), não diferenciando e identificando conceitos elementares como vértices, arestas, faces, altura, comprimento e largura, raio da base (cilindro e cone), diâmetro da base (cilindro e cone), diagonais internas, entre outros.

Figura 9 - Figura Estática



Fonte: arquivo do pesquisador

Estas limitações na aprendizagem desses alunos foram motivadoras no planejamento e aplicação de tarefas com o uso do material manipulável geoespaço. Portanto, nossa pesquisa envolveu a presença do cotidiano de uma sala de aula onde o professor também exerceu a função de pesquisador na construção de saberes com os seus alunos. Neste contexto, a abordagem de pesquisa adequada foi a qualitativa, uma vez que Ribeiro (2000, p. 111) chama-nos a atenção de que a segurança das compreensões obtidas nas investigações qualitativas radica-se no pesquisador e no diálogo pesquisador/comunidade.

A partir da investigação da própria prática pedagógica com a referida turma de 20 alunos da 3ª Série do Ensino Médio, buscamos para esta dissertação de mestrado responder a questão: **que aprendizagem ocorre com conteúdos de geometria espacial via geoespaço, em um contexto de tarefas exploratórias-investigativas?**

A produção das informações no cenário de sala de aula ocorreu em dois momentos distintos. Primeiramente, foi elaborada uma série de tarefas com o objetivo de fazer uma análise da representação dos objetos geométricos tridimensionais, a partir dos registros escritos das atividades matemáticas dos alunos. Consequentemente, proporcionamos aos alunos a possibilidade de construção dos sólidos geométricos para que pudessem aprender os referidos conceitos elementares com os quais não estavam familiarizados. Posteriormente, planejamos e aplicamos tarefas de natureza exploratório-investigativa visando uma aprendizagem em que o aluno pudesse ser capaz de associar o número de arestas, faces e vértices de modo a construir a relação de Euler.

Na fase de elaboração e aplicação das tarefas relativas à representação do objeto tridimensional, identificamos a categoria conceito figural na perspectiva de Fischbein (1993), para a análise da produção de informações dos alunos. Posteriormente, durante um encontro entre orientador e orientando para a avaliação preliminar das atividades matemáticas dos alunos, identificamos, a partir da leitura dos registros escritos, outra categoria de análise: uso adequado de termos geométricos, interpretado como vocabulário empregado pelos dos alunos na resolução das tarefas.

O segundo momento do nosso trabalho de campo (construção da relação de Euler) contou com o desenvolvimento e aplicação de tarefas exploratório-investigativas que teve a análise da produção de informações, com base em Ponte (2009), do processo de formulação de conjecturas a partir da organização dos dados, a realização de testes e eventual refinamento das conjecturas, fazendo afirmações sobre as mesmas e argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Para esta fase do trabalho de campo, adotamos a seguinte categoria de análise: generalidade e abstração dos conceitos sob a perspectiva de Pais (1996).

A escolha de tarefas exploratório-investigativas teve influência de Grando (2008), que considera que esse recurso pedagógico pode minimizar algumas “lacunas” existentes, decorrentes do pouco ensino de conteúdos geométricos na educação básica. De acordo com Grando (2008), como as tarefas são abertas, se o aluno tiver o domínio restrito dos conteúdos geométricos, muito provavelmente a tarefa permaneça no nível da exploração, mas se esta também estiver voltada para o domínio de conteúdos algébricos, existe grande possibilidade de se tornar investigativa.

Dedicamos o próximo item deste capítulo a expor o aporte teórico de Fischbein (1993) e Pais (1996), os quais sustentam duas categorias de análise já citadas.

5.1.1. A representação figural e a generalização e abstração de conceitos

Em relação à teoria dos conceitos figurais, categoria de análise da produção de informações da primeira etapa de tarefas, esta se refere à representação sensorial de um objeto ou fenômeno. Uma vez que os objetos materiais (sólidos ou desenho) são apenas modelos materializados das entidades mentais com as quais lidam o matemático, apenas num senso conceitual podemos considerar a perfeição absoluta das entidades geométricas. Tais entidades não possuem correspondentes matemáticos verdadeiros e a figura geométrica é descrita como tendo intrinsecamente propriedades conceituais.

Para Fischbein (1993) os objetos de investigação e manipulação do pensamento geométrico são então entidades mentais denominadas “conceitos figurais”, que exprimem propriedades espaciais como forma, espaço e magnitude bem como possuem qualidades conceituais como idealidade, abstração, universalidade e perfeição. As imagens mentais das figuras geométricas podem ser baseadas na experiência perceptivo-sensorial, na imagem de um desenho ou definição formal.

Para Fischbein (1993), o controle conceitual deve ser intrínseco, ou seja, é inerente ao processo de ensino-aprendizagem, e a imagem e o conceito devem fundir-se em um objeto mental único, sendo que o conceito é o fato que expressa uma ideia, representação ideal de uma classe de objetos, baseada em seus aspectos comuns e uma imagem (imagens mentais) é uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno, o que faz com que o desenvolvimento de conceitos figurais não ocorra de maneira natural.

Em raciocínio matemático não nos referimos a uma representação figural como objetos materiais ou desenhos. Os objetos materiais (sólidos ou desenhos) são somente modelos materializados das entidades mentais com as quais o matemático lida. Somente num senso conceitual podemos considerar a perfeição absoluta das entidades geométricas: linhas retas, círculos, quadrados, cubos, entre outros.

Essas entidades geométricas não possuem correspondentes materiais verdadeiros. Pontos, linhas e planos não existem, não podem existir na realidade. Os objetos reais na nossa experiência prática são necessariamente tridimensionais, mas mesmo o cubo ao qual o matemático se refere, não existe na realidade. Embora seja tridimensional, esse também é uma imagem mental que não deve possuir qualquer realidade substancial, seja qual for.

Todas essas construções são representações universais, como cada conceito, e nunca cópias mentais particulares de objetos concretos. Quando você desenha uma figura geométrica numa folha de papel para checar algumas de suas propriedades, você não se refere ao respectivo desenho particular, mas a um certo formato que pode ser o formato de uma infinita classe de objetos. Mesmo o formato particular desenhado por você, com seus lados e ângulos pode ser o formato de uma infinidade de objetos. Na verdade, nós lidamos com uma hierarquia de formatos, de um aparentemente particular, mas de fato correspondente a uma infinidade de objetos possíveis, à categoria universal da figura geométrica desenhada. Idealidade, abstração, perfeição absoluta e universalidade são propriedades que fazem sentido no domínio dos conceitos.

As figuras geométricas também podem ser relacionadas à sua natureza conceitual. As propriedades das figuras geométricas são impostas ou derivadas de definições no reino de certo sistema evidente. Também desse ponto de vista, uma figura geométrica tem natureza conceitual. Um quadrado não é uma imagem desenhada numa folha de papel. É um formato controlado por sua definição (embora possa ser inspirado por um objeto real). Um quadrado é um retângulo que possui lados iguais. Começando dessas propriedades, podemos prosseguir para descobrir outras propriedades do quadrado (a igualdade de ângulos que são todos ângulos retos, a igualdade de diagonais, etc.).

Uma figura geométrica pode então ser descrita como tendo propriedades conceituais. Todavia, uma figura geométrica não é um mero conceito, é uma imagem, uma imagem visual e possui uma propriedade que conceitos usuais não possuem, a saber, inclui a representação mental da propriedade espaço.

Da mesma forma quando conceituamos, por exemplo, um sólido no geoespaço para descrever sua “tridimensionalidade”, não somente a *imagem* do sólido é associada a isso, mas também um terceiro tipo de construção que é a figura geométrica que representa esse sólido.

Se vamos resolver uma tarefa na qual temos que calcular, por exemplo, a distância percorrida entre dois vértices, sabendo a medida das arestas do sólido, o cálculo é feito considerando um modelo abstrato do sólido que não é nem uma imagem pura nem um conceito puro. Conceitos são vértices, não se movem e imagens não possuem perfeição, universalidade, abstração e a pureza que supomos enquanto realizamos os cálculos.

Quando nós imaginamos um sólido, imaginamos um sólido desenhado (incluindo, por exemplo, a cor da tinta) e não o ideal sólido perfeito. Mas um objeto matemático, que é o objeto do nosso raciocínio matemático, não tem cor, substância, massa, entre outros e é, supostamente, idealmente perfeito. Possui todas as propriedades de um conceito e pode fazer parte do raciocínio matemático, a despeito do fato de que ainda inclui a representação de propriedades espaciais.

Para Fischbein (1993), os objetos de investigação e manipulação no pensamento geométrico são então entidades mentais, a que chamamos conceitos figurais, o que exprime propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais como “idealidade”, abstração, universalidade e perfeição,

A ideia do uso do geoespaço segundo essa teoria é analisar por meio da manipulação do mesmo, as propriedades espaciais e o modo como cada aluno desenvolve as entidades mentais dos conceitos figurais, fazendo uma relação entre as representações figurais obtidas pelos alunos e as fornecidas pelos livros.

Em relação a generalidade e a abstração dos conceitos, categoria de análise que será utilizada na segunda etapa de tarefas, pautada em Pais (1996), elas são construídas pouco a pouco, em um processo dialético que envolve necessariamente a influência do mundo físico e uma reflexão sobre ele. Estabelece-se uma relação de comparação permanente entre o mundo das ideias e o mundo físico sendo que, durante o processo de conceitualização, o aluno lança mão dos recursos concretos, entrando em cena as representações por objetos e desenhos e, posteriormente pelas representações mentais.

Pais (1996) salienta que a representação de um conceito somente faz sentido pleno se houver um certo nível de organização e, as dificuldades impostas pela abstração num nível preliminar da aprendizagem - na identificação entre o conceito e sua representação, na transposição desta dupla correlação dialética, envolvendo o particular e o geral, o concreto e o abstrato - é talvez o principal obstáculo vivenciado pelo aluno no desenvolvimento inicial da aprendizagem.

Em relação ao estudo a partir do concreto, Nacarato (2005) afirma que, no caso da geometria, materiais didáticos como o geoespaço são fundamentais em todas as séries e níveis de ensino, uma vez que podem contribuir para o desenvolvimento da visualização.

Visando superar estas dificuldades, planejamos e aplicamos tarefas exploratório-investigativas, nas quais os alunos desenvolveram atividades matemáticas a partir do concreto (construção dos sólidos no geoespaço), visando à compreensão conceitual e sua formalização.

5.2.Tarefas de representação figural

O planejamento e aplicação das tarefas, visando a representação figural dos sólidos geométricos envolveram prisma, pirâmide, cilindro e cone.

Em relação as tarefas de representação figural, antes da aplicação delas, foi explicado ao alunos que seriam desenvolvidas atividades usando o material didático manipulativo geoespaço e o livro didático adotado pela turma (DANTE, 2010). Esse livro foi adotado pela unidade escolar, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo e usado durante todo o ano letivo, na resolução de exercícios e de problemas e, a partir do uso dele, foi notado que os alunos tinham dificuldades na compreensão das representações figurais. Não foram utilizados os “cadernos do aluno” (apostila adotada pelo governo do estado de São Paulo), pelo fato do conteúdo referente a geometria espacial constar apenas nos cadernos da 2ª série do Ensino Médio, 4º bimestre, não tendo acesso aos mesmos.

Não houve problemas na realização das tarefas, pois era uma turma muito participativa e de bom comportamento, com faixa etária de 17 anos, cuja maioria dos alunos trabalhava durante o dia e saia do serviço direto para a escola.

As tarefas de representação figural foram desenvolvidas em dois encontros, cada um com duas aulas. No primeiro encontro o geoespaço foi apresentado aos alunos, sendo realizadas as tarefas referentes à representação figural dos prismas e, no segundo encontro, os alunos realizaram as tarefas referentes à representação figural das pirâmides, do cilindro e do cone.

Em cada tarefa foram construídos os sólidos no geoespaço pelos alunos com o auxilio do professor. Feita essa construção, cada aluno tinha que fazer uma representação figural do sólido construído em uma folha de papel. Após todos os alunos realizarem essa representação, era apresentado a eles uma versão ampliada do desenho contido no livro didático de matemática (DANTE, 2010) e era pedido que os alunos comparassem a representação figural feita por eles próprios e a fornecida pelo livro didático e respondessem algumas perguntas sobre a relação entre ambos.

A seguir apresentamos uma descrição quantitativa e uma análise qualitativa dos resultados obtidos durante a aplicação das tarefas.

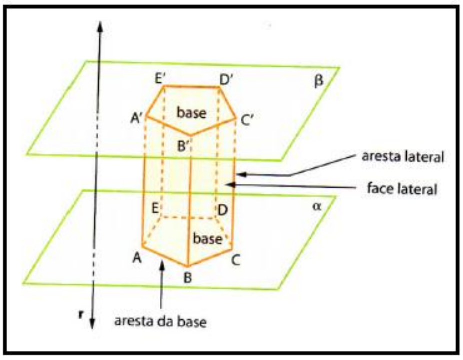
5.2.1. Representação 3D/2D de um prisma.

Apresentamos à turma de 20 alunos da 3ª série do ensino médio o geoespaço quadrangular (figura 5), onde foi demonstrado como construir prismas com o auxílio do material em questão. Após esta apresentação, solicitamos que os alunos representassem por meio de uma figura estática os prismas que haviam sido construídos neste material manipulativo. Feita essa representação, os alunos tiveram que comparar os seus resultados com os de uma figura pré-selecionada pelo professor, tendo que escrever qual a relação entre o seu desenho e o selecionado pelo professor. As respostas dos alunos foram classificadas em cinco categorias: respostas suficientemente argumentadas, respostas com justificativas implícitas, respostas sem justificativas, respostas confusas e ausência de respostas.

Antes do inicio desta tarefa, foi verificada no livro didático do Dante (2010) a definição do que seria um prisma. Não há uma definição formal e sim a demonstração de como construir um prisma de base pentagonal, fato que dificultou a compreensão dos alunos.

Segundo Dante (2010), o aluno deveria considerar a região poligonal ABCDE, contida em um plano α, escolher um ponto A' não pertencente a α e por ele traçar o plano β, paralelo a α. Pelos demais pontos B, C, D, E devia traçar retas paralelas a AA' que cortam β nos pontos B', C', D', E', sendo as mesmas paralelas entre si, tomando segmentos consecutivos como, por exemplo, $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ o quadrilátero AA'B'B é um paralelogramo. As regiões limitadas por paralelogramos assim determinados, juntamente com as regiões poligonais ABCDE e A'B'C'D'E' determinavam um poliedro chamado prisma de bases ABCDE e A'B'C'D'E' como mostra a figura 10.

Figura 10 - Construção de um Prisma



Fonte: Dante (2010, p.213).

Dante (2010), após essa definição, ressaltou que as bases poderiam ser citadas como polígonos, mas deveria ser entendido como região poligonal, ou seja, um prisma cuja base é um quadrado, devia ser entendido como um prisma cuja base é uma região quadrada.

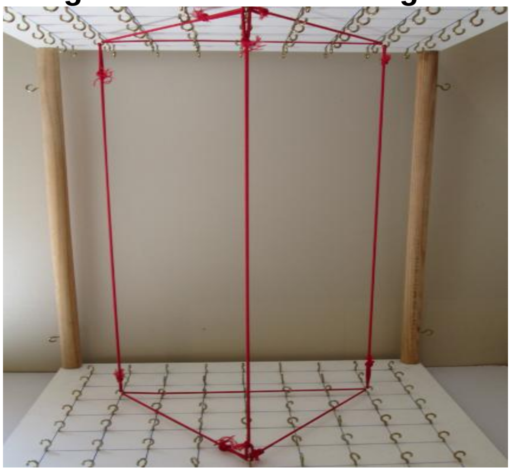
A partir desse momento foi utilizado o geoespaço. De acordo com a teoria de Fischbein (1993), os objetos de investigação e manipulação no pensamento geométrico são entidades mentais, que chamamos de conceitos figurais, o que exprime propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais como "idealidade", abstração, universalidade e perfeição. Os alunos iriam analisar por meio da manipulação do mesmo, as propriedades espaciais e o modo como cada aluno desenvolve as entidades mentais dos conceitos figurais, fazendo uma relação entre as representações figurais obtidas pelos alunos e as fornecidas pelos livros.

Essa manipulação pode conduzir, segundo Pais (1996), à generalidade e à abstração dos conceitos construídos pouco a pouco, em um processo dialético que envolve necessariamente a influência do mundo físico (geoespaço) e uma reflexão sobre o mesmo, estabelecendo uma relação de comparação permanente entre o mundo das ideias e o mundo físico.

Essa construção foi repetida no geoespaço pelo professor seguindo a definição de Dante (2010), para que os alunos pudessem sanar suas dúvidas sobre a definição do prisma e sobre a nomenclatura utilizada pelo livro, ressaltando que a partir dessa definição seriam construídos todos os prismas.

Após serem sanadas as dúvidas referentes à definição de construção de um prisma pelo professor, foi pedido aleatoriamente, para que os alunos construíssem um prisma triangular.

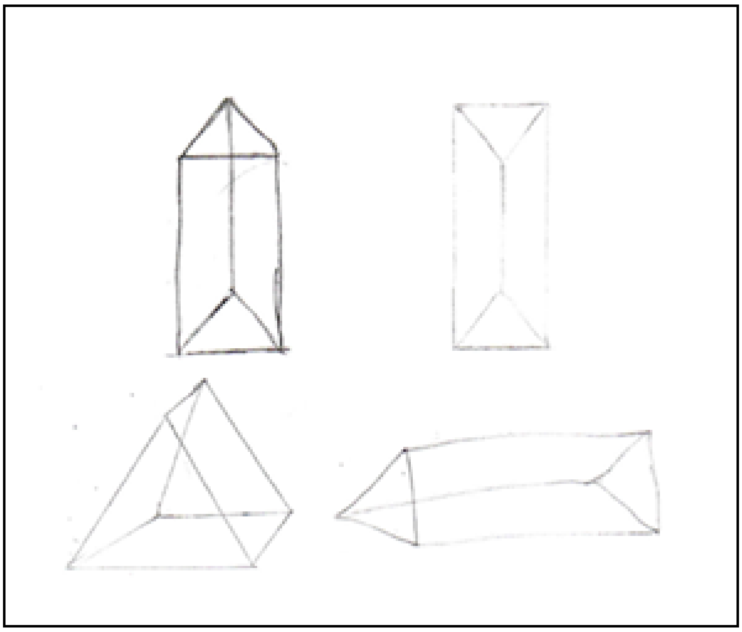
Figura 11 - Prisma Triangular



Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir dessa construção feita pelos alunos toda a sala teve que fazer a representação figural do prisma. Nela os alunos tinham que representar o prisma por meio de uma figura estática, de modo a confrontar o ponto de vista de cada aluno sobre esse prisma. Nessa primeira representação os alunos tiveram um pouco de dificuldade em representar figuralmente esse prisma, pelo fato de nunca terem realizado uma representação através da análise de uma figura concreta. Com o auxilio do professor, que relembrou a construção desse desenho proposta por Dante (2010), eles conseguiram obter os seguintes tipos de representações:

Figura 12 - Representações figurais do Prisma Triangular

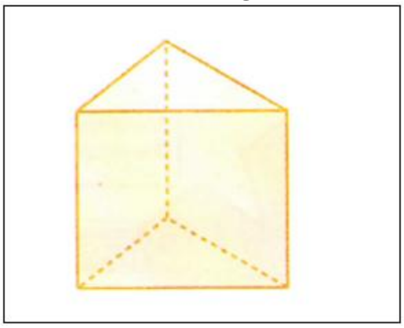


Fonte: arquivo do pesquisador.

Ao analisar os tipos de representações ficou evidente que, como a sala é dividida em quatro grandes grupos, fato que ocorre desde o inicio do ano letivo, houve influencia dos colegas de cada grande grupo na representação figural final, pois em cada um deles podia se notar relação entre os desenhos. Os próprios alunos admitiram discutir com os colegas em sua volta como realizar essa representação figural.

Em seguida foi proposto que os alunos confrontassem suas representações com aquela fornecida pelo livro didático (figura 13). A primeira reação dos alunos em relação a representação feita por Dante (2010) foi em relação às linhas pontilhadas, pois geralmente usamos o pontilhado para aquilo que “não enxergamos”, pensando em um sólido propriamente dito (desenho em perspectiva). Foi feita a explicação do porquê do pontilhado e em seguida foi proposta a seguinte tarefa:

Figura 13 - Prisma Triangular/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.212).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir onde selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 1 - Análise quantitativa/Prisma Triangular

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	**3**
Respostas com justificativas implícitas	**5**
Respostas sem justificativas	**8**
Respostas confusas	**4**
Ausências de respostas	**0**

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente. Destas, foram detectadas três tipos diferentes:

Quadro 3 - Prisma Triangular: Respostas suficientemente argumentadas

Aluno	Resposta
A	A única diferença entre o meu e o do livro, é que no meu eu não pontilhei a parte de traz.
B	A única diferença é que no meu desenho o triângulo de baixo está para dentro e no do livro didático está para cima
C	A diferença é que o meu ficou deitado e eu não pontilhei o fundo.

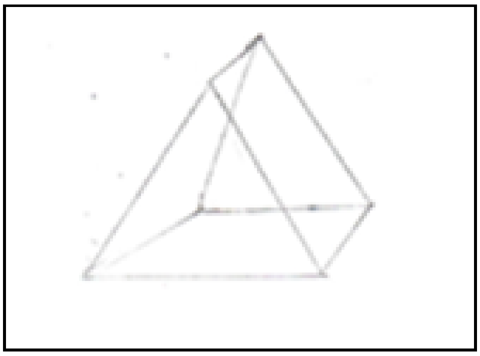
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas, foi verificado que o aluno A (A única diferença entre o meu e o do livro, é que no meu eu não pontilhei a parte de traz) cometeu um dos erros mais comuns durante a aplicação dessa atividade: o fato de não diferenciar as linhas que estão ao fundo e as que estão à frente. Explicamos a este aluno que no livro didático é usado o artifício de pontilhar as linhas que ficam na “parte de trás” do prisma para não confundir com a parte da figura que fica encoberta durante a representação.

Na resposta B (A única diferença é que no meu desenho o triângulo de baixo está para dentro e no do livro didático está para cima) verificou-se que o aluno desenhou um prisma onde os triângulos das bases não estavam na mesma posição. Foi identificado que não dá a impressão das mesmas serem paralelas e, por esse motivo, no livro elas têm a mesma direção para ilustrar a condição de paralelismo.

Em relação a resposta C que respondeu “Meu desenho não ficou nem um pouco parecido com o do livro, meu modo de visão foi completamente diferentes” e D que respondeu “a diferença é que o meu ficou deitado e eu não pontilhei o fundo”, ambos desenharam sob outra perspectiva (figura 14), ressaltei que os seus respectivos desenhos não estavam errados e que realmente a única diferença era o ponto de vista e que em alguns problemas ele aparecia nestas perspectivas, lembrando que eles deveriam pontilhar as partes que ficam encobertas para facilitar a visualização (figura 13).

Figura 14 - Prisma Triangular/ representação do aluno C



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, nestas o aluno não soube descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro; mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

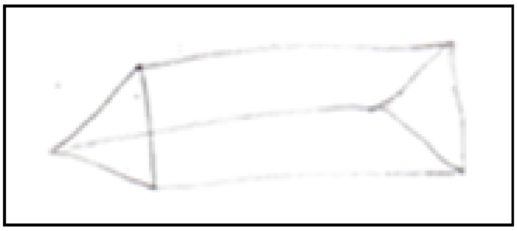
Quadro 4 - Prisma Triangular: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	O meu esta parecido, e não esta pontilhado.
B	A única diferença é que o meu não esta pontilhado.
C	A única diferença é a do livro esta pontilhado.
D	Não pontilhei a parte de traz como o livro.
E	Além de não pontilhar, desenhei de comprido por outro ângulo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas desses alunos foi verificado que eles tinham conseguido realizar a representação figural não tendo apenas pontilhado como no livro. Apenas o aluno E desenhou sobre outro ponto de vista (figura 15).

Figura 15 - Prisma Triangular/ representação do aluno E



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas sem justificativas, nestas o aluno não soube descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

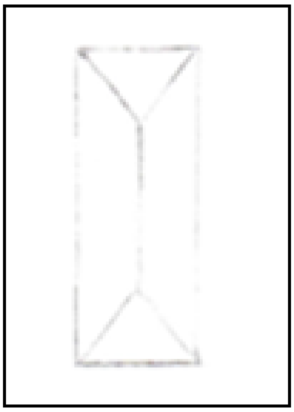
Quadro 5 - Prisma Triangular: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Igual.
C	Exatamente igual.
D	Igual a do livro.
E	Quase igual.
F	Está parecido com a do livro.
G	Está diferente .
H	Não está igual a do livro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Neste caso, foi verificado que os alunos conseguiram representar corretamente o prisma, porém, não justificaram suas repostas. Os alunos G e H apenas desenharam o prisma sob outra perspectiva (figura 16).

Figura 16 - Prisma Triangular/ representação do aluno G



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas confusas, os alunos não souberam descrever, e/ou não terminaram a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 6 - Prisma Triangular: Respostas confusas

Aluno	Resposta
A	Eu errei uma parte.
B	Ficou estranho.
C	Nem tão igual, nem tão diferente.
D	Sei lá.

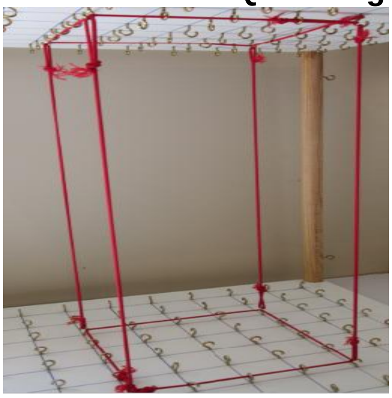
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Nessas quatro respostas verificou-se a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, pois nas respostas A, B e C verificaram que seus desenhos não corresponderam ao do livro didático, mas não souberam se expressar em relação ao mesmo. O aluno D não demonstrou interesse sobre o estudo.

Durante a realização das tarefas, foi possível analisar que os alunos tinham dificuldades em representar o prisma triangular, pois não conseguiam representar sua tridimensionalidade. Em alguns momentos houve a intervenção do professor que orientou a respeito dos passos usados na construção desse prisma no geoespaço. Primeiramente, se constrói as bases semelhantes e em seguida, elas são unidas pelas arestas para obter representações por diferentes pontos de vista. Foi esclarecido aos alunos que tais representações estavam corretas e que um prisma tem infinitas representações. Em relação às arestas pontilhadas, foi explicado aos alunos que esse é um artifício utilizado nos livros quando temos uma aresta encoberta pelo prisma, ou seja, essa aresta poderia ser vista por outro ponto de vista.

Na tarefa seguinte, foi solicitada a representação figural do prisma quadrangular a partir da sua construção no geoespaço:

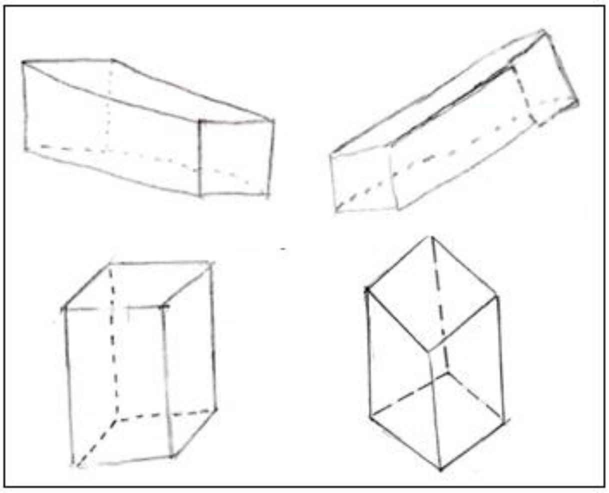
Figura 17 - Prisma Quadrangular



Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir desta construção foram obtidos os seguintes tipos de representações figurais (figura 18):

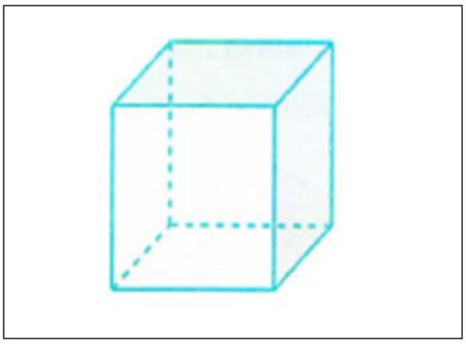
Figura 18 - Representações figurais do Prisma Quadrangular



Fonte: arquivo do pesquisador.

Após o registro escrito, os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 19) e analisar e relação entre essas representações figurais:

Figura 19 - Prisma Quadrangular/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.212)

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir em que selecionamos quatro protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 2 - Análise quantitativa/Prisma Quadrangular

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	7
Respostas sem justificativas	6
Respostas confusas	3
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente, conforme quadro a seguir:

Quadro 7 - Prisma Quadrangular: Respostas suficientemente argumentadas

Aluno	Resposta
A	O meu ficou deitado, e ficou diferente, tentei deixar quadrado e o do livro é torto.
B	Tive dificuldade para desenhar os retângulos no papel e o meu ficou torto, não parecendo com o do livro.
C	O meu ficou igual ao do livro, dessa vez não esqueci de pontilhar o fundo.
D	O meu ficou parecido, mas muito torto, acho que é por causa do lado que vi.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dos alunos A e B, destacou-se um dos erros mais comuns cometidos pelos alunos durante a aplicação desta tarefa, lembrando que, segundo Fischbein (1993), a imagem (imagens mentais) é uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno, o que faz com que o desenvolvimento de conceitos figurais não ocorra de maneira natural. Eles lembraram de pontilhar as partes sobrepostas, mas tiveram dificuldade em representar a base do prisma quadrangular. Vários ressaltaram que “quando faziam os retângulos das bases um sobre o outro, as linhas ficavam por cima e não parecia um prisma”. Foi explicado que quando se olha para o prisma quadrangular de frente realmente as arestas ficavam sobrepostas e, por esse motivo, no livro didático a visão é lateral.

A partir dessa explicação foi mostrado que os desenhos de alguns alunos em perspectiva lateral lembravam uma base no formato de um paralelogramo, porém eram o que mais se aproximavam do prisma da figura 19.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

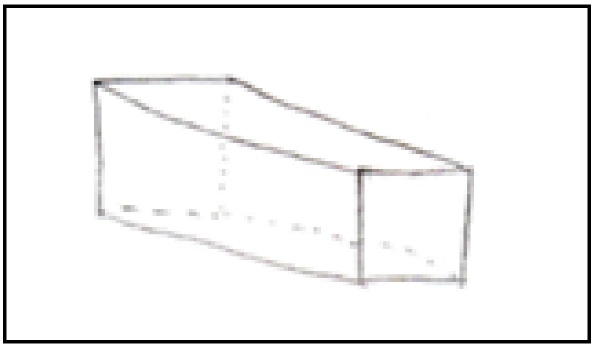
Quadro 8 - Prisma Quadrangular: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	O meu está parecido,e pontilhei
B	Está pontilhado e igual.
C	Pontilhei a parte de traseira como o livro.
D	A base ficou diferente da do livro.
E	Igual, mas de ponto de vista diferente.
F	Ficou semelhante ao do livro em relação ao ponto de vista.
G	Além de não pontilhar, desenhei de comprido de novo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Os alunos conseguiram realizar a representação figural tendo apenas pontilhado como no livro. Apenas o aluno E desenhou sobre outro ponto de vista (figura 20).

Figura 20 - Prisma Quadrangular/ representação do aluno E



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas sem justificativas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 9 - Prisma Quadrangular: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Exatamente igual.
C	Igual a do livro.
D	Quase igual.
E	Está parecido com a do livro.
F	Está diferente.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas confusas, os alunos não souberam descrever, e/ou não terminaram a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

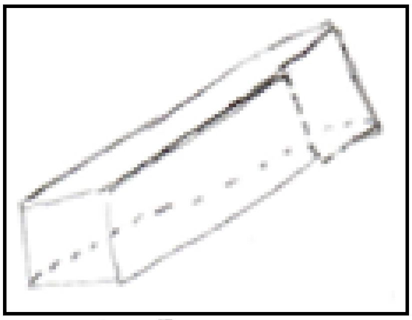
Quadro 10 - Prisma Quadrangular: Respostas confusas

Aluno	Resposta
A	Me confundi na construção.
B	Ficou mais ou menos igual.
D	Liguei torto.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Nestas três respostas notamos a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, pois nas respostas A e B verificaram que seus desenhos não correspondiam ao do livro didático, mas não souberam se expressar em relação ao mesmo, e o aluno C verificou que seu desenho tinha ficado diferente, mas não soube explicar o motivo disso. (figura 21).

Figura 21 - Prisma Quadrangular/ representação do aluno C



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, verificou-se a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, pois os alunos verificaram que seus desenhos não correspondiam ao do livro didático, mas não souberam se expressar em relação a essa diferença.

Durante a realização das tarefas, foi possível analisar que os alunos tiveram dificuldades em representar o prisma quadrangular, pois não conseguiam representar sua tridimensionalidade, o que ocasionou, em alguns momentos, a intervenção do professor. Nesse prisma em questão, a dificuldade maior foi na representação da base, pois dependendo do ponto de vista as arestas ficavam encobertas. Isso ocorreu quando os alunos desenharam bases quadradas. Foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e, por esse motivo, nos livros quando temos que representar esse prisma a base é sempre um paralelogramo.

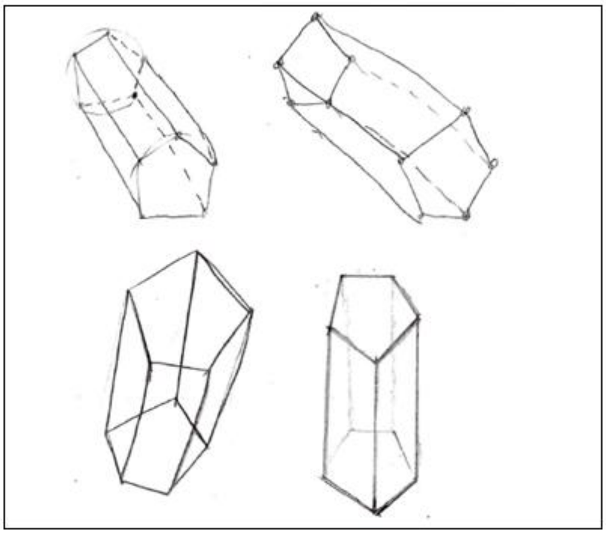
Para a representação do prisma pentagonal foi construído o seguinte prisma no geoespaço:

Figura 22 - Prisma Pentagonal

Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir dessa construção foi pedido aos alunos que fizessem a representação figural do prisma e foram obtidos os seguintes tipos de representações figurais (figura 23):

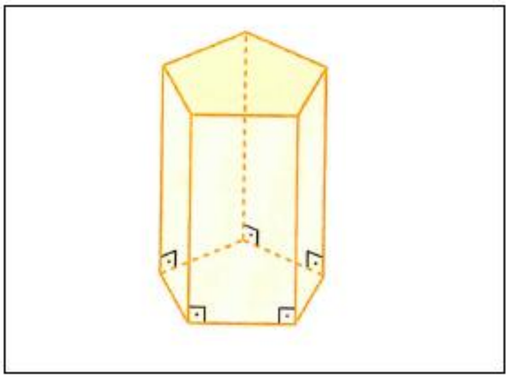
Figura 23 - Representações figurais do Prisma Pentagonal



Fonte: arquivo do pesquisador.

Após feita a representação, os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 24) e analisar e relação entre essas representações figurais:

Figura 24 - Prisma Pentagonal/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.213).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos quatro protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 3 - Análise quantitativa/Prisma Pentagonal

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	9
Respostas sem justificativas	5
Respostas confusas	2
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente, conforme quadro a seguir:

Quadro 11 - Prisma Pentagonal: Respostas suficientemente argumentadas

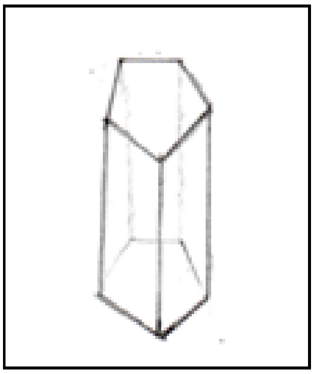
Respostas suficientemente argumentadas	
Aluno	**Resposta**
A	O meu não ficou parecido, não consegui desenhar o pentágono.
B	O meu ficou parecido, mas deitado, por causa do desenho do meu pentágono.
C	O meu ficou parecido, mas esqueci de pontilhar a parte do fundo.
D	O meu ficou parecido, a única diferença é que o bico do pentágono ficou para baixo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Nesta atividade a grande dificuldade dos alunos foi em desenhar o pentágono, o que ocorre com as respostas A e B, que reclamaram dessa dificuldade, principalmente de fazer dois de mesmo formato; um deles até usou um círculo como referencia para construir os pentágonos.

Ao analisar as representações referentes às respostas C e D, os dois acertaram no desenho, só tendo mudado a perspectiva. O aluno da resposta C novamente não pontilhou as partes do fundo e o aluno D usou o termo “bico” ao invés do termo correto vértice e o desenho desse aluno sofreu uma rotação (figura 25).

Figura 25 - Prisma Pentagonal/ representação do aluno D



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

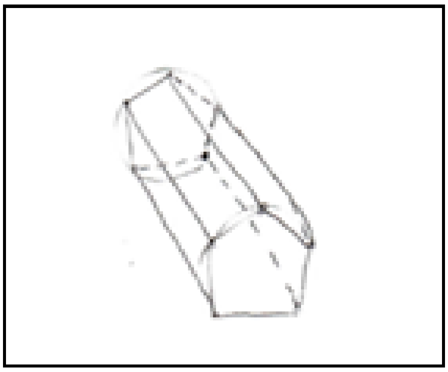
Quadro 12 - Prisma Pentagonal: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	Esta pontilhado e igual.
B	Ficou semelhante ao do livro em relação ao ponto de vista.
C	Pontilhei a parte do fundo como o livro.
D	Está na mesma posição da do livro.
E	Igual, mas de ponto de vista diferente.
F	O meu está parecido e esqueci de pontilhar.
G	Esqueci apenas de pontilhar.
H	Ficou parecido, mas o pentágono não ficou bonito.
I	Está igual só muda o ponto de vista.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

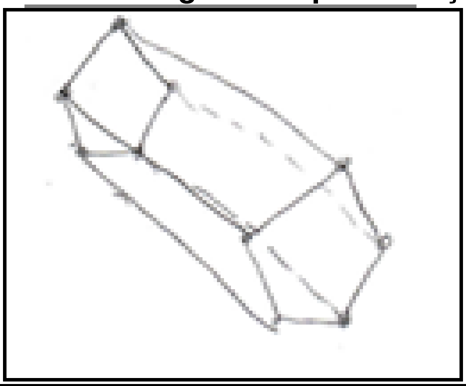
Foi verificado que esses alunos tinham conseguido realizar a representação figural tendo apenas pontilhado como no livro. Apenas o aluno H teve dificuldades em desenhar o pentágono da base (figura 26) e o aluno I desenhou sobre outro ponto de vista (figura 27).

Figura 26 - Pentagonal/ representação do aluno H



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 27 - Prisma Pentagonal/ representação do aluno I



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas sem justificativas, nestas o aluno não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 13 - Prisma Pentagonal: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Está diferente.
C	Igual a do livro.
D	Quase igual.
E	Está parecido com a do livro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas confusas, os alunos não souberam descrever, e/ou não terminaram a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 14 - Prisma Pentagonal: Respostas confusas

Aluno	Resposta
A	Me confundi no desenho.
B	Um lado ficou diferente do outro.

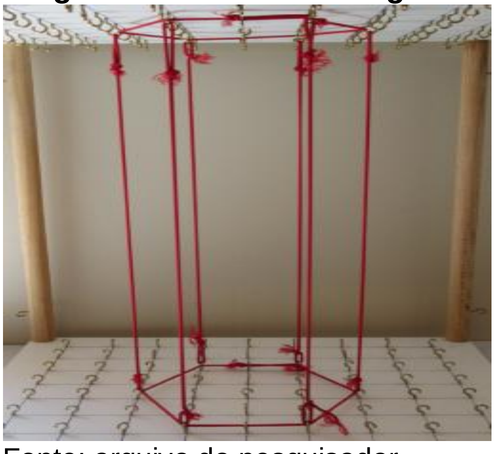
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a esses alunos, verificou-se a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, pois os alunos verificaram que seus desenhos não correspondiam ao do livro didático, mas não souberam se expressar em relação ao mesmo.

Durante a realização das tarefas, foi possível analisar que os alunos tiveram dificuldades em representar o prisma pentagonal, pois não conseguiam representar sua tridimensionalidade, sendo necessária, em alguns momentos, a intervenção do professor. Nesse prisma, a dificuldade maior foi na representação da base, em específico no desenho do pentágono da base. Os alunos tiveram dificuldade em desenhar pentágonos regulares e semelhantes, fato que dificultou a representação desse prisma. Foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e que é difícil a representação de um pentágono regular, lembrando que mesmo no geoespaço essa representação não ficou exata.

O último prisma a ter sua representação figural foi o prisma de base hexagonal. Para a representação dele foi construído o seguinte prisma no geoespaço (figura 28):

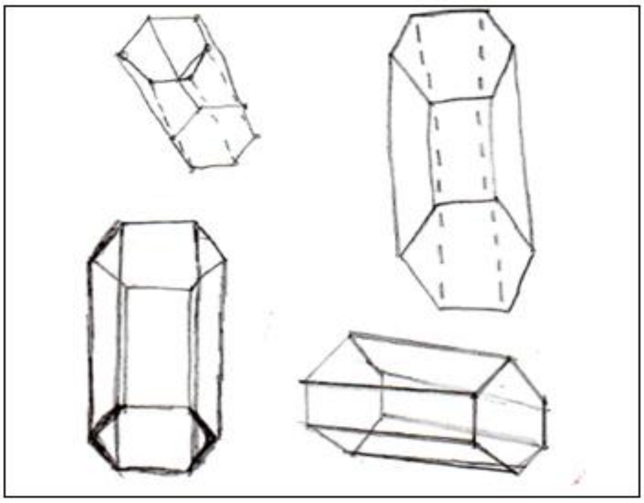
Figura 28 - Prisma Hexagonal



Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir dessa construção, foi pedido aos alunos que fizessem a representação figural do prisma hexagonal. Foram obtidos os seguintes tipos de representações figurais:

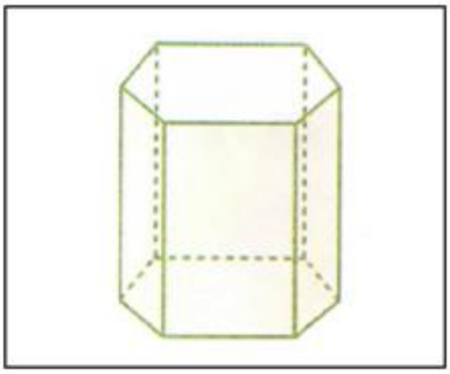
Figura 29 - Representações figurais do Prisma Hexagonal



Fonte: arquivo do pesquisador.

Após feita a representação, os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 30) e analisar a relação entre as representações.

Figura 30 - Prisma Hexagonal/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.212).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos os protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 4 - Análise quantitativa/Prisma Hexagonal

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	8
Respostas com justificativas implícitas	8
Respostas sem justificativas	3
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, com justificativas implícitas e sem justificativas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente, conforme quadro a seguir:

Quadro 15 - Prisma Hexagonal: Respostas suficientemente argumentadas

Aluno	**Resposta**
A	Não ficou muito parecido, o hexágono ficou torto e pontilhei a parte da frente e não a de trás.
B	Ficou parecido, mas tive dificuldade na hora de pontilhar, juntando as pontas erradas.
C	Ficou parecido, mas liguei as pontas erradas, e ficou estranho.
D	Ficou parecido, liguei as pontas certas, mas só consegui desenhar deitado.
E	O meu não ficou parecido, não consegui desenhar o hexágono.
F	O meu ficou parecido, mas deitado, por causa do desenho do meu hexágono.
G	O meu ficou quase igual, esqueci de pontilhar a parte do fundo, pois as linha ficavam sobrepostas..
H	Ficou parecido, a única diferença foi a posição do hexágono.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisar as respostas A e G, nas quais os alunos relataram que “as linhas ficavam umas sobre as outras”, verificou-se que eles tentaram copiar o modo como foi feito com o prisma quadrangular, mudando o ponto de vista.

Em relação às respostas B e C, foi um problema muito comum do desenho do prisma hexagonal; muitos alunos se confundiram no momento de ligar os vértices, lembramos a eles que bastava ligar os vértices de mesma posição.

Já os alunos da resposta D, F e H relataram que fizeram o prisma “deitado”, pois dessa maneira as arestas não se sobrepõem, ficando mais fácil não se confundir ao ligar os vértices. O aluno E teve dificuldades em desenhar o hexágono.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 16 - Prisma Hexagonal: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	Ficou parecido, mas o hexágono não ficou bonito.
B	Ficou semelhante ao do livro em relação ao ponto de vista.
C	Está na mesma posição da do livro.
D	Está igual só muda o ponto de vista.
E	Igual, mas de ponto de vista diferente.
F	O meu está parecido, e esqueci de pontilhar.
G	Esqueci apenas de pontilhar.
H	Está pontilhado e igual.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Foi verificado que esses alunos tinham conseguido realizar a representação figural tendo apenas pontilhado como no livro.

Em relação às respostas sem justificativas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 17 - Prisma Hexagonal: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Está diferente ao do livro
C	Igual a do livro.
D	Quase igual.
E	Está parecido com a do livro

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação à resposta confusa, o aluno não soube descrever, e/ou não terminou a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro:

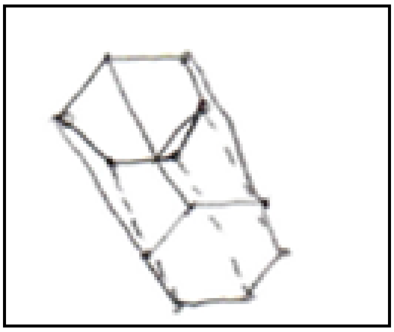
Quadro 18 - Prisma Hexagonal: Respostas confusas

Respostas confusas	
Aluno	**Resposta**
A	Me confundi na base.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a esse aluno, verificou-se a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, pois o aluno verificou que seu desenho não correspondia ao do livro didático, mas não soube se expressar em relação ao mesmo, sendo que ele dá indícios que sua falha comprometeu a construção (figura 31). Ao analisar o desenho foi verificado que ele inverteu as linhas que deveria pontilhar e que as bases não ficaram semelhantes.

Figura 31 - Prisma Hexagonal/ representação do aluno A



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante a realização das tarefas foi possível analisar que os alunos não tiveram dificuldades em representar o prisma hexagonal, não sendo necessária a intervenção do professor. Nesse prisma, a dificuldade maior foi na representação das faces, dependendo da representação as arestas ficavam sobrepostas e os alunos se confundiam ao ligar os vértices das bases. Foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e que por esse motivo, na representação dos livros, as bases não eram exatamente regulares, sendo maiores as faces que ficavam sobrepostas.

Ao analisar as atividades de representação figural dos prismas, ficou evidente que na medida em que foram construídos mais sólidos no geoespaço, o rendimento dos alunos melhorou significativamente. Esse fato ocorreu, pois os alunos no inicio das atividades tinham dificuldades em expressar suas ideias. Tais dificuldades foram diminuindo do decorrer do tempo pela troca de ideias entre os alunos e o professor. Outro motivo é que eles foram se acostumando a trabalhar com o material manipulativo geoespaço e com as representações figurais.

Foi possível verificar que a construção do prisma pentagonal (figura 22) e do prisma hexagonal (figura 28) no geoespaço, em termos de posição é a mesma do livro didático (figuras 24 e 30), porém, pelo caráter dinâmico do geoespaço, o aluno transcende a representação do livro didático. Esse fato ocorre, segundo Fischbein (1993), porque as imagens mentais das figuras geométricas podem ser baseadas na experiência perceptivo-sensorial por meio da manipulação. Já as propriedades espaciais e o modo que cada aluno desenvolve de maneira própria as entidades mentais dos conceitos figurais faz uma relação entre as representações figurais obtidas pelos alunos e as fornecidas pelos livros didáticos.

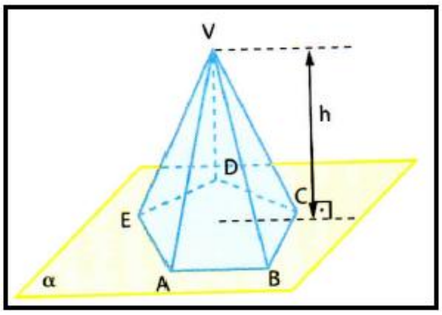
5.2.2. Representação 3D/2D de uma pirâmide

Depois de terem construído e desenhado os prismas, foi demonstrado como construir pirâmides com o auxílio do Geoespaço. Após esta construção os alunos tiveram que representá-la por meio de uma figura estática as pirâmides que haviam sido construídas no geoespaço. Em seguida, os alunos tiveram que comparar os resultados com os de uma figura pré-selecionada pelo professor e escrever qual a relação entre o seu desenho e o selecionado pelo professor.

Antes do início desta atividade, foi verificada a definição do que seria pirâmide no livro didático (DANTE, 2010). O livro novamente não apresentou uma definição formal, e sim a demonstração de como construir uma pirâmide de base pentagonal, fato que novamente dificultou a compreensão dos alunos.

Segundo Dante (2010), o aluno deveria considerar a região poligonal ABCDE, contida em um plano α, escolher um ponto V exterior ao plano da região poligonal, traçando os seguimentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$,$\overline{VC}$, $\overline{VD}$,$\overline{VE}$. Cada dois vértices consecutivos de ABCDE determinam com V uma região triangular. Essas regiões triangulares, juntamente com a região poligonal ABCDE, determinam um poliedro chamado de pirâmide de base ABCDE e vértice V (figura 32).

Figura 32 - Construção de uma Pirâmide



Fonte: Dante (2010, p.227).

De acordo com Dante (2010) a distância entre o vértice e o plano da base, que seria indicada por h, é a altura da pirâmide.

Essa construção foi repetida no geoespaço pelo professor seguindo a definição de Dante (2010), para que os alunos pudessem sanar suas dúvidas sobre a definição do prisma e sobre a nomenclatura utilizada pelo livro, sendo ressaltado que, a partir dessa definição, seriam construídas todas as pirâmides.

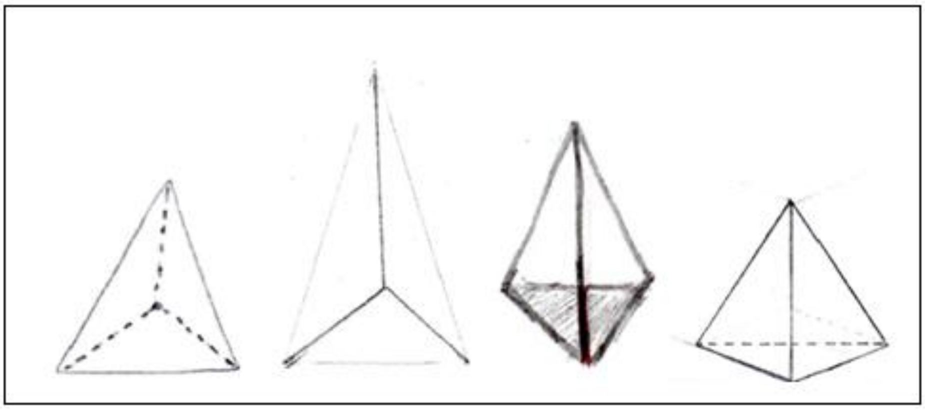
Após serem sanadas as dúvidas referentes a definição da construção, o professor pediu que os alunos construíssem um pirâmide triangular (figura 33).

Figura 33 - Pirâmide Triangular

Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir desta construção foi proposto à sala que todos fizessem a representação figural da pirâmide triangular. Os alunos tiveram que representá-la por meio de uma figura estática, de modo a confrontar o ponto de vista de cada aluno sobre essa pirâmide. Nessa primeira representação, os alunos tiveram um pouco de dificuldade, pelo fato de a pirâmide não conter duas bases como o prisma. Com o auxílio do professor em relembrar como foi construído esse desenho, segundo Dante (2010), eles conseguiram obter os seguintes tipos de representações figurais:

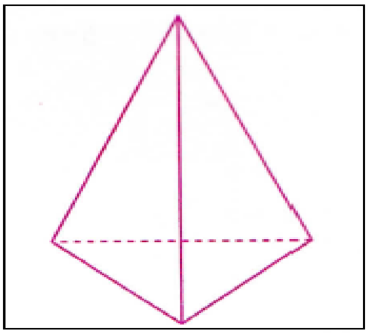
Figura 34 - Representações figurais da Pirâmide Triangular



Fonte: arquivo do pesquisador.

Foi proposto que os alunos confrontassem suas representações com aquela fornecida pelo livro didático (figura 35). A primeira reação dos alunos quanto à representação feita por Dante (2010) foi em relação às linhas pontilhadas, pois geralmente usamos o pontilhado para aquilo que “não enxergamos”. Pensando em um sólido propriamente dito (desenho em perspectiva), foi feita a explicação do porquê do pontilhado e, em seguida, foi proposta a seguinte tarefa:

Figura 35 - Pirâmide Triangular/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.240).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 5 - Análise quantitativa/ Pirâmide Triangular

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	8
Respostas sem justificativas	5
Respostas confusas	2
Ausências de respostas	1

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente conforme quadro a seguir:

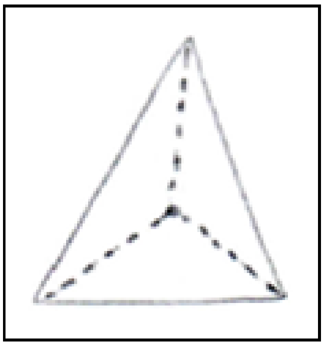
Quadro 19 - Pirâmide Triangular: Respostas suficientemente argumentadas

Aluno	Resposta
A	Tive dificuldades em desenhar essa pirâmide, desenhei as costas dela.
B	Meu desenho ficou parecido, sendo olhado se cima.
C	Meu desenho ficou igual, mas eu não pontilhei o fundo.
D	O meu desenho ficou idêntico, desenhei do mesmo jeito e lembrei de pontilhar a parte do fundo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

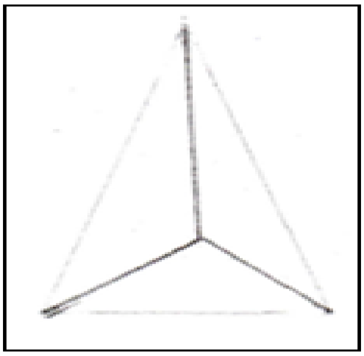
Em relação ao desenho da pirâmide triangular, foram obtidas duas perspectivas distintas: a resposta A (figura 36) representa uma visão frontal, onde três arestas ficam sobrepostas e B (figura 37) uma visão superior, onde nenhuma aresta fica sobreposta e a reposta C e D, cujo ponto de vista é o encontro de duas faces. Foi explicado aos alunos que ambas estavam corretas, só ressaltando que houve aqueles que se esqueceram de discriminar as partes sobrepostas por uma linha pontilhada (resposta C).

Figura 36 - Pirâmide Triangular/ representação do aluno A



Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 37 - Pirâmide Triangular/ representação do aluno B



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, nestas os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

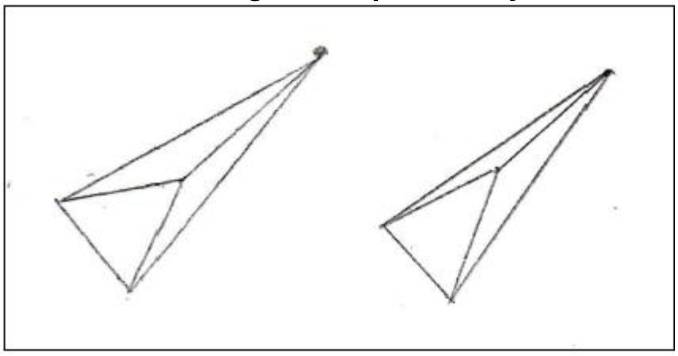
Quadro 20 - Pirâmide Triangular: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	O meu está parecido, e não está pontilhado.
B	A única diferença é que o meu não está pontilhado.
C	A única diferença é que a do livro está pontilhada.
D	Não pontilhei a parte de trás como o livro.
E	Além de não pontilhar, desenhei de comprido por outro ângulo.
F	Faltou pontilhar o fundo.
G	Igual, mas de ponto de vista diferente.
H	Ficou semelhante ao do livro em relação ao ponto de vista

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a esses alunos foi verificado que eles tinham conseguido realizar a representação figural não tendo apenas pontilhado como no livro, e apenas os alunos G e H tinham desenhado sobre outro ponto de vista (figura 38).

Figura 38 – Pirâmide Triangular/ representação dos alunos G e H



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas sem justificativas, nestas os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 21 - Pirâmide Triangular: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Aluno	**Resposta**
A	Igual.
B	Está parecido com a do livro
C	Exatamente igual.
D	Igual a do livro.
E	Quase igual.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas foi verificado que todos os alunos haviam conseguido representar corretamente a pirâmide, porém não souberam justificar suas repostas.

Em relação às respostas confusas, nestas os alunos não souberam descrever, e/ou não terminaram a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

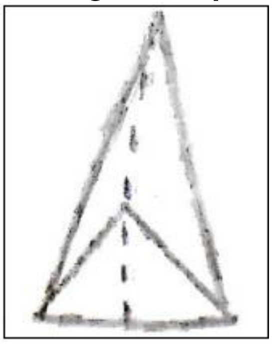
Quadro 22 - Pirâmide Triangular: Respostas confusas

Respostas confusas	
Aluno	**Resposta**
A	Ficou torto
B	Sei lá.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Nestas duas respostas foi verificada a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, pois na resposta o aluno A (figura 39) não soube explicar de forma clara a relação entre a sua representação e a do livro didático, enquanto o aluno B fez a representação correta, mas não se interessou em analisar essa relação.

Figura 39 - Pirâmide Triangular/ representação do aluno A

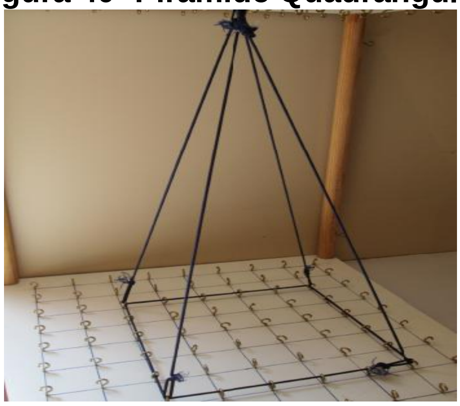


Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante a realização das tarefas foi possível analisar que os alunos tinham dificuldades em representar o prisma triangular, pois não conseguiam representar sua tridimensionalidade, sendo necessário, em alguns momentos, haver a intervenção do professor que orientava a seguir os mesmos passos usados na construção dessa pirâmide no geoespaço. Primeiramente, se constrói a base da pirâmide e, em seguida, um ponto fora do plano dessa base (vértice da pirâmide). Somente depois é desenhada a pirâmide ligando esse vértice à base. Foram obtidas representações por diferentes pontos de vista e esclarecido aos alunos que tais representações estavam corretas e que uma pirâmide tem infinitas representações. Em relação às arestas pontilhadas, foi explicado que esse é um artifício utilizado nos livros quando temos arestas que estão encobertas pelo prisma, ou seja, que essa aresta poderia ser vista por outro ponto de vista.

Para a representação figural da pirâmide quadrangular foi construída a seguinte pirâmide no geoespaço (figura 40):

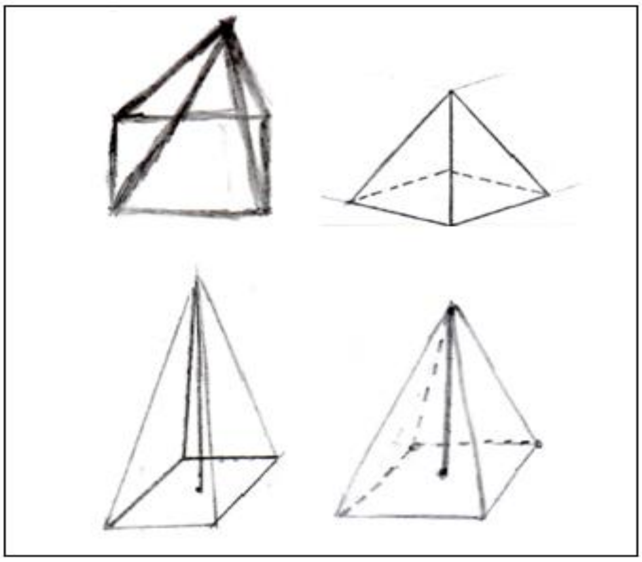
Figura 40- Pirâmide Quadrangular



Fonte: arquivo do pesquisador

A partir dessa construção, foi pedido aos alunos que fizessem a representação figural da mesma. Foram obtidos os seguintes tipos de representações figurais:

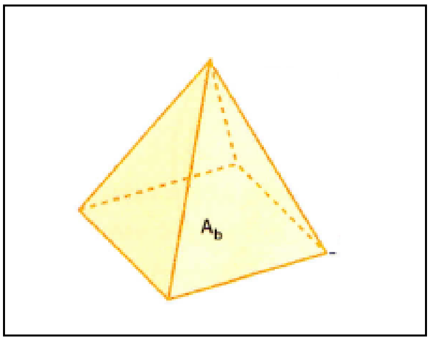
Figura 41 - Representações figurais da Pirâmide Quadrangular



Fonte: arquivo do pesquisador.

Depois de feita a representação figural, os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 42) e analisar a relação entre as mesmas.

Figura 42 - Pirâmide Quadrangular/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.232).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 6 - Análise quantitativa/ Pirâmide Quadrangular

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	8
Respostas sem justificativas	6
Respostas confusas	2
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente, conforme quadro a seguir:

Quadro 23 - Pirâmide Quadrangular: Respostas suficientemente argumentadas

Aluno	Resposta
A	Tentei fazer a base quadrada e não ficou parecido com a pirâmide do livro.
B	Fiz o desenho muito torto e não deu pra ver a linha do fundo, ficou por baixo da linha da frente.
C	Achei que ficou parecido, mas novamente esqueci de pontilhar as linhas do fundo.
D	Ficou bem parecido, me lembrei do desenho do prisma de mesma base.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação à representação figural dessa pirâmide, alguns alunos (resposta A) insistiram em fazer um retângulo como o desenho da base, mas um número bem menor do que o prisma quadrangular. A maioria lembrou de desenhar um paralelogramo com o figura da base (repostas B, C e D), porém o aluno da resposta B usou uma perspectiva em que sobrepôs uma das arestas e o aluno da resposta C se esqueceu de pontilhar as arestas do fundo.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 24 - Pirâmide Quadrangular: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Aluno	**Resposta**
A	Ficou semelhante ao do livro em relação ao ponto de vista.
B	Está pontilhado e igual.
C	Pontilhei a parte de trás como o livro.
D	A base ficou igual a do livro.
E	Igual, mas de ponto de vista diferente.
F	Desta vez me lembrei de pontilhar.
G	Só não pontilhei.
H	O meu está parecido e pontilhei.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas desses alunos foi verificado que os mesmos tinham conseguido realizar a representação figural. Apenas o aluno G não havia pontilhado as arestas.

Em relação às respostas sem justificativas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

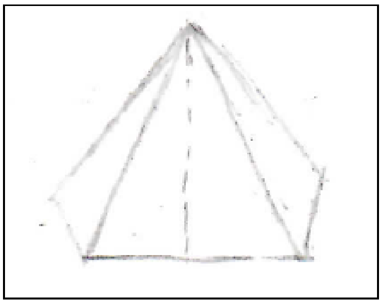
Quadro 25 - Pirâmide Quadrangular: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Igual a do livro.
C	Está parecido com a do livro.
D	Quase igual.
E	Exatamente igual.
F	Errei na base.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas desses alunos foi verificado que os alunos A, B, C, D e E tinham feitos representações semelhantes à do livro didático, e o aluno F tentou usar o mesmo método utilizado na base do prisma hexagonal para que as arestas não ficassem sobrepostas (figura 43).

Figura 43 - Pirâmide Quadrangular/ representação do aluno F



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas confusas, apresentamos o quadro a seguir:

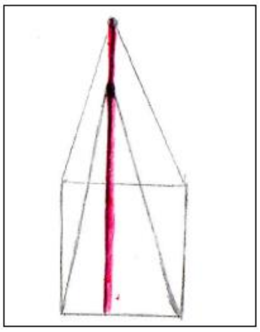
Quadro 26 - Pirâmide Quadrangular: Respostas confusas

Respostas confusas	
Aluno	**Resposta**
A	Mais ou menos.
B	A ponta ficou pouco pontuda.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas foi verificado que o aluno A não soube analisar sua representação, sendo que a mesma estava parecida com a do livro, apenas não tinha pontilhado as arestas sobrepostas. O aluno B (figura 44) se confundiu na representação da pirâmide, para ser exato no vértice da pirâmide, representando assim um prisma triangular.

Figura 44 - Pirâmide Quadrangular/ representação do aluno B



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante a realização das tarefas foi possível analisar que os alunos tiveram as mesmas dificuldades em representar a pirâmide quadrangular que tiveram na representação do prisma quadrangular. Nessa pirâmide em questão a dificuldade maior foi na representação da base, pois dependendo do ponto de vista as arestas ficavam “encobertas”. Isso ocorreu quando os alunos desenhavam bases quadradas. Foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e, por esse motivo, nos livros quando temos que representar essa pirâmide a base é sempre um paralelogramo, do mesmo modo que no prisma de base quadrangular.

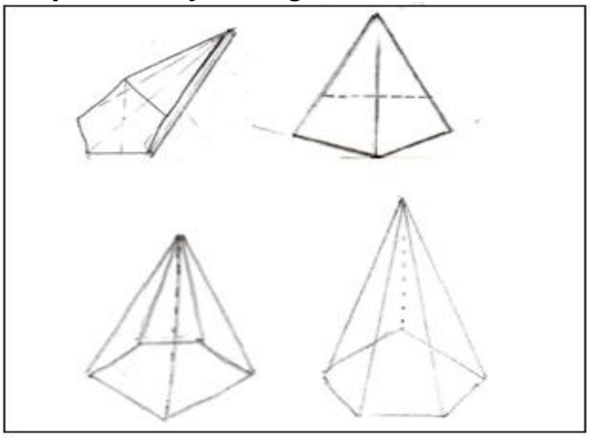
Para a representação figural da pirâmide pentagonal foi construída a seguinte pirâmide no Geoespaço (figura 45):

Figura 45 - Pirâmide Pentagonal

Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir dessa construção foi pedido aos alunos que fizessem representações figurais sobre a pirâmide pentagonal. Foram obtidos os seguintes tipos de representações:

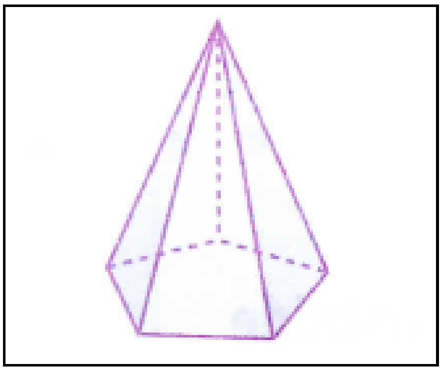
Figura 46 - Representações figurais da Pirâmide Pentagonal



Fonte: arquivo do pesquisador.

Em seguida os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 47) e analisar a relação entre elas.

Figura 47 - Pirâmide Pentagonal/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.227).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 7 - Análise quantitativa/ Pirâmide Pentagonal

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	5
Respostas com justificativas implícitas	7
Respostas sem justificativas	7
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, alguns alunos utilizaram conceitos corretos ao descrever algumas propriedades que não conseguiram representar figuralmente, conforme quadro a seguir:

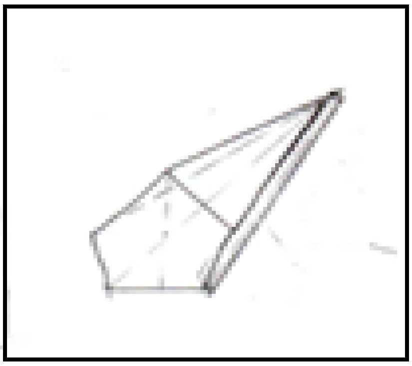
Quadro 27 - Pirâmide Pentagonal: Respostas suficientemente argumentadas

Aluno	Resposta
A	Tive dificuldade na hora de desenhar o pentágono e ligar à ponta da pirâmide e ficou muito torto, não parecendo com a do livro.
B	Ao ligar os vértices, as linhas ficaram umas sobre as outras, não parecendo com uma pirâmide.
C	Ficou parecido, mas eu inverti a ponta do pentágono.
D	A única diferença é que esqueci de pontilhar as linhas do fundo da base.
E	A minha ficou igual, tanto o pentágono como a altura.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a resposta do aluno A (figura 48), foi verificado que o desenho não lembrou o da pirâmide do livro pelo fato de ter posicionado o ponto do vértice superior muito afastado da face da base. Foi explicado ao mesmo que aquilo também era uma pirâmide, mas as faces laterais não eram regulares.

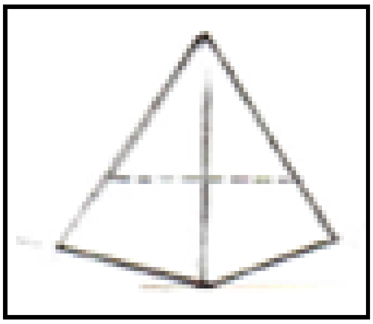
Figura 48 - Pirâmide Pentagonal/ representação do aluno A



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Já em relação à representação figural do aluno B (figura 49), foi explicado que a posição das arestas ficavam sobrepostas devido a posição do vértice superior e que variando a altura do mesmo, as arestas não ficariam sobrepostas.

Figura 49 - Pirâmide Pentagonal/ representação do aluno B



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Os alunos de respostas C e D fizeram ótimas representações figurais de pontos de vista diferente, sendo que na perspectiva do aluno de resposta D o número de arestas a serem pontilhadas devia ser maior do que do aluno C, pois no ponto de vista diferente do aluno C a pirâmide havia sofrido uma rotação.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

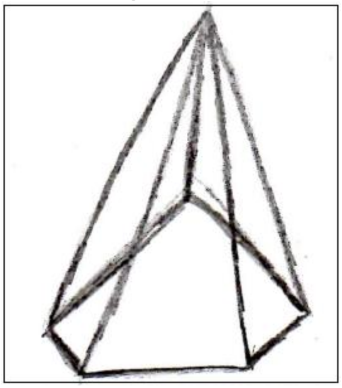
Quadro 28 - Pirâmide Pentagonal: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	Está pontilhado e igual.
B	Ficou parecido, mas o pentágono não ficou bonito.
C	Pontilhei a parte de trás como o livro.
D	Está na mesma posição da do livro.
E	Igual, mas de ponto de vista diferente.
F	O meu está parecido e esqueci de pontilhar.
G	Esqueci apenas de pontilhar.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas desses alunos foi verificado que os mesmos tinham conseguido realizar a representação figural, lembrando de pontilhar as arestas sobrepostas, como no livro didático. O aluno B teve dificuldades em desenhar o pentágono da base (figura 50).

Figura 50 - Pirâmide Pentagonal/ representação do aluno B



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas sem justificativas, nestas os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

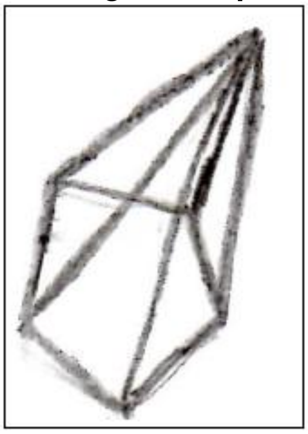
Quadro 29 - Prisma Hexagonal: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Aluno	**Resposta**
A	Igual.
B	Bem igual
C	Igual a do livro.
D	Quase igual.
E	Está parecido com a do livro.
F	Parecido .
G	Bem parecido.
H	Não está igual ao do livro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que os alunos tinham conseguido representar corretamente a pirâmide hexagonal, mas não souberam justificar as repostas. No caso do aluno H (figura 51), ele desenhou a pirâmide sob uma perspectiva diferente que dava a impressão de se tratar de uma pirâmide oblíqua. Foi explicado a ele que o desenho estava correto, só havia sofrido uma rotação diferente.

Figura 51- Pirâmide Pentagonal/ representação do aluno H



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas confusas, o aluno não soube descrever e/ou não terminou a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

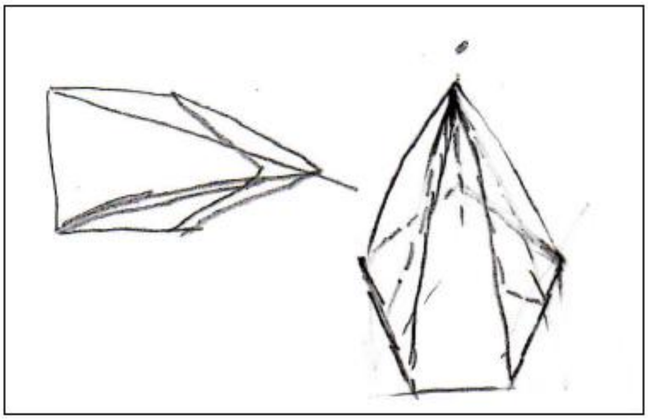
Quadro 30 - Pirâmide Pentagonal: Respostas confusas

Respostas confusas	
Aluno	**Resposta**
A	A base é difícil.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a resposta desse aluno verifiquei a dificuldade em desenhar o pentágono da base, fato que dificultou na representação dessa pirâmide, o que o levou a fazer dois desenhos para representar a mesma (figura 52).

Figura 52 - Pirâmide Pentagonal/ representação do aluno A



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Nessa pirâmide em questão a maior dificuldade foi na representação do desenho do pentágono da base. Os alunos tinham dificuldade em desenhar pentágonos regulares, fato que dificultou a representação dessa pirâmide. Foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e que é difícil a representação de um pentágono regular sem o uso de um transferidor ou mesmo de um compasso, lembrando que mesmo no geoespaço essa representação não ficou exata.

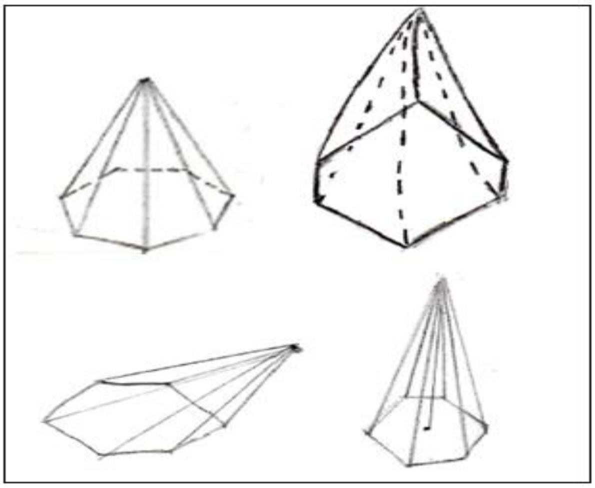
A última pirâmide a ter sua representação figural foi a pirâmide de base hexagonal (figura 53):

Figura 53 - Pirâmide Hexagonal

Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir dessa construção, foi pedido para os alunos que fizessem a representação figural. Foram obtidos os seguintes tipos de representações:

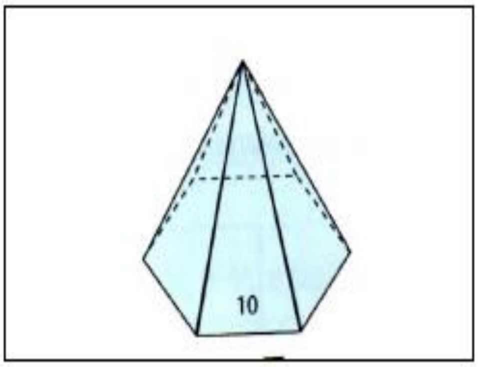
Figura 54 - Representações figurais da Pirâmide Hexagonal



Fonte: arquivo do pesquisador.

Depois de feita a representação, os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 55) e analisar a relação entre elas.

Figura 55 - Pirâmide Hexagonal / livro didático



Fonte: Dante (2010, p.229).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 8 - Análise quantitativa/ Pirâmide Hexagonal

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	5
Respostas com justificativas implícitas	7
Respostas sem justificativas	8
Respostas confusas	0
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, segue o quadro a seguir:

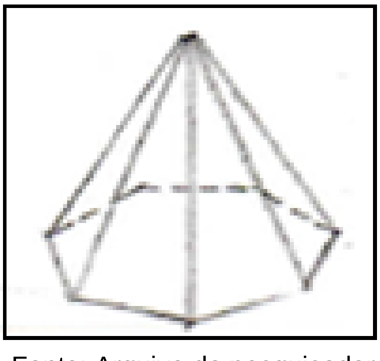
Quadro 31 - Pirâmide Hexagonal: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Aluno	**Resposta**
A	Achei que tinha ficado igual, mas depois notei que desenhei uma pirâmide onde a base tem sete lados.
B	O meu desenho ficou parecido com uma pirâmide, mas além de trocar o lado do hexágono, troquei as linhas que tinham que ser pontilhadas.
C	Coloquei o ponto superior muito perto da figura e isso dificultou a visão da pirâmide.
D	Meu desenho ficou parecido, e ainda desenhei a altura, mas esqueci de pontilhar a parte do fundo.
E	O meu desenho ficou igual ao do livro e as arestas não ficaram encobertas.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisar essas respostas foi verificado que o aluno A (figura 56) desenhou um heptágono ao invés de um hexágono. Foi explicado a ele que seu erro era plausível, visto que quanto maior o número de lados da base, maior era chance de erro, e por esse motivo estávamos trabalhando com prismas e pirâmides de base com no máximo seis lados.

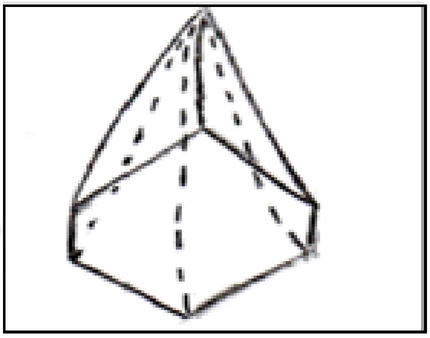
Figura 56 - Pirâmide Hexagonal/ representação do aluno A



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a resposta do aluno B (figura 57), foi verificado que ele conseguiu desenhar a pirâmide hexagonal e sabia que devia pontilhar as arestas, mas se confundiu na hora de pontilhá-las.

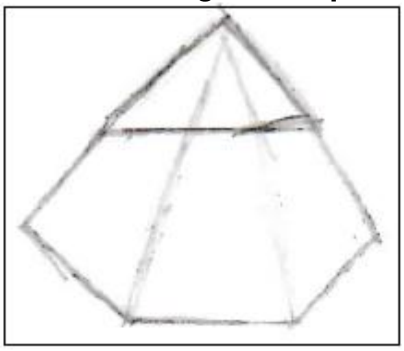
Figura 57 - Pirâmide Hexagonal/ representação do aluno B



Fonte: Arquivo do pesquisador

No que diz respeito ao aluno de resposta C (figura 58), ele afirmou que tinha inicialmente colocado o vértice superior bem acima da base de modo centralizado, mas as arestas ficaram sobrepostas, e por esse motivo deslocou lateralmente esse vértice, sendo seu desenho de uma perspectiva superior e lateral.

Figura 58 - Pirâmide Hexagonal/ representação do aluno C



Fonte: Arquivo do pesquisador

Já em relação ao aluno de resposta D e E foi verificado que eles não tiveram dificuldades em representar a pirâmide, inclusive representaram até a sua altura, tendo como único erro a não representação da parte sobreposta por uma linha pontilhada.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, segue o quadro:

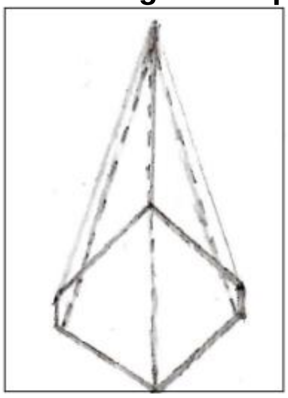
Quadro 32 - Prisma Hexagonal: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	Está pontilhado e igual.
B	Igual, mesmo de vista diferente.
C	Está na mesma posição da do livro.
D	Esqueci apenas de pontilhar.
E	Ficou parecido e pontilhado.
F	O meu está parecido, mas esqueci de pontilhar.
G	Está igual só muda a posição.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas desses alunos foi verificado que os mesmos tinham conseguido realizar a representação figural tendo apenas pontilhado como no livro. Mesmo que a base não estivesse na mesma posição daquela do livro, como a do aluno G (figura 59), eles notavam a rotação e consideravam correta a representação.

Figura 59 - Pirâmide Hexagonal/ representação do aluno G



Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação às respostas sem justificativas, segue o quadro:

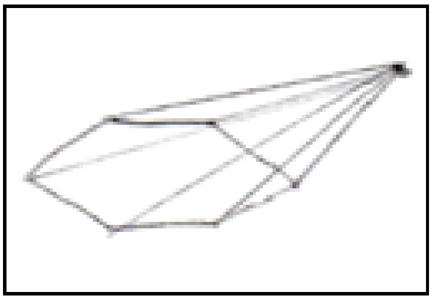
Quadro 33 - Prisma Hexagonal: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Parecido.
C	Igual ao do livro.
D	Quase igual.
E	Está parecido com a do livro.
F	Bem parecido.
G	Bem igual.
H	Está diferente ao do livro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que os alunos tinham conseguido representar corretamente a pirâmide hexagonal, mas não souberam justificar as repostas. No caso do aluno H (figura 60), ele desenhou a pirâmide sob uma perspectiva diferente, o que deu a impressão de se tratar de uma pirâmide oblíqua. Foi explicado a ele que o desenho estava correto, só havia sofrido uma rotação diferente.

Figura 60 - Pirâmide Hexagonal/ representação do aluno H



Fonte: Arquivo do pesquisador

Durante a realização das tarefas, foi possível analisar que os alunos não tiveram dificuldades em representar a pirâmide hexagonal, não sendo necessária a intervenção do professor. Nessa pirâmide em questão a dificuldade maior foi na representação das faces. Dependendo da representação, as arestas ficavam sobrepostas e os alunos se confundiam ao ligar os vértices das bases, mas essa dificuldade foi bem menor se comparada a do prisma hexagonal. Novamente foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e que, por esse motivo, na representação dos livros, as bases não eram exatamente regulares, sendo maiores as faces que ficavam sobrepostas.

Ao analisar as atividades de representação figural das pirâmides, ficou evidente que na medida em que são construídos mais sólidos no geoespaço, o rendimento dos alunos tem melhorado significativamente. Esse fato ocorreu pois os alunos, no início das atividades, tinham dificuldades em expressar suas ideias. Tais dificuldades foram diminuindo do decorrer do tempo pela troca de ideias entre os alunos e o professor. Outro motivo foi a adaptação ao uso do material manipulativo geoespaço e com as representações figurais.

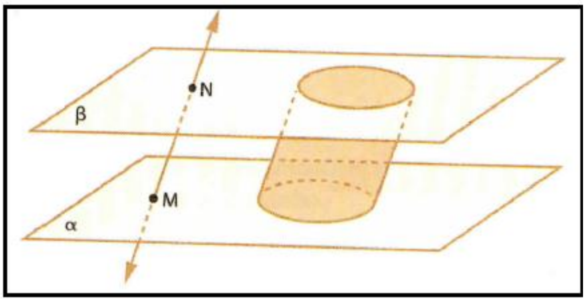
5.2.3. Representação 3D/2D de um cilindro.

Depois de terem construído e desenhado os prismas e as pirâmides, foi demonstrado aos alunos como construir um cilindro com o auxílio do geoespaço circular (figura 8). Após esta construção os alunos tiveram que representar por meio de uma figura estática os cilindros que haviam sido construídos no geoespaço. Depois desta representação, os alunos tiveram que comparar os resultados com os de uma figura pré-selecionada pelo professor, tendo que escrever qual a relação entre o seu desenho e o selecionado pelo professor.

Antes do inicio desta atividade foi verificada no livro didático (DANTE, 2010) a definição do que seria um cilindro. O livro novamente não dava uma definição formal, e sim demonstrava como construir um cilindro, fato que novamente dificultou a compreensão dos alunos.

Segundo Dante (2010), os alunos deviam considerar dois planos α e β, distintos e paralelos, e um segmento de reta MN com M pertencente a α e N pertencente a β. Dado um círculo C de centro em O e raio r, contido em α, chamamos de cilindro à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruente ao segmento MN, que unem um ponto do círculo C a um ponto de β.

Figura 61 - Construção de um cilindro

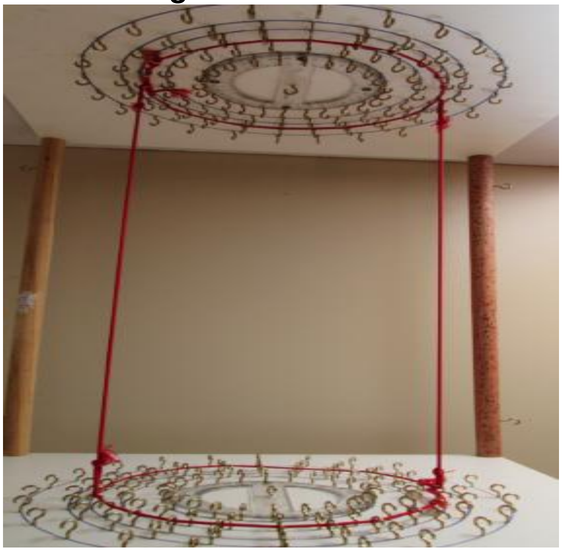


Fonte: Dante (2010, p.247).

Essa construção foi repetida no geoespaço para que os alunos pudessem sanar suas dúvidas sobre a definição do cilindro e sobre sua a construção.

Para a representação figural do cilindro foi construído a seguinte cilindro no geoespaço (figura 62):

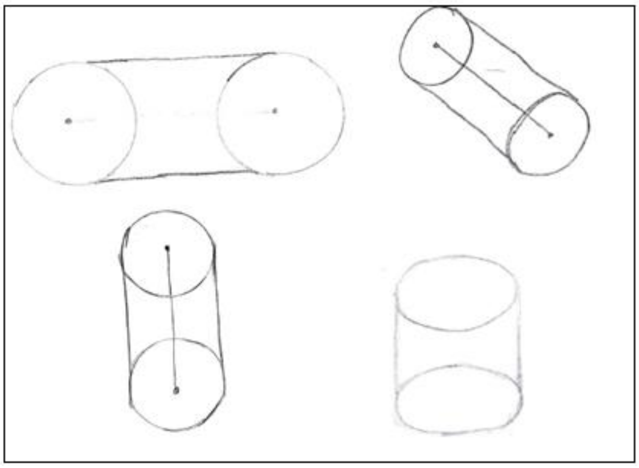
Figura 62- Cilindro



Fonte: arquivo do pesquisador.

A partir dessa construção foi pedido aos alunos que fizessem e representação figural. Foram obtidos os seguintes tipos de representações figurais:

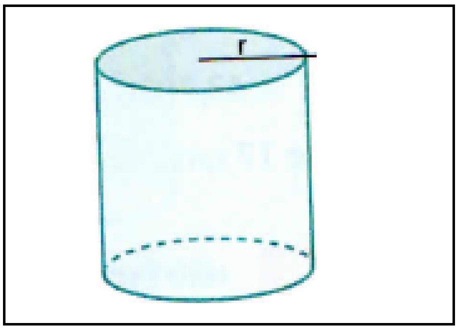
Figura 63 - Representações do Cilindro



Fonte: arquivo do pesquisador.

Após a representação, os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 64) e analisar a relação entre as representações:

Figura 64 - Cilindro/ livro didático



Fonte: Dante (2010, p.250).

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 9 - Análise quantitativa/ Cilindro

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	7
Respostas com justificativas implícitas	6
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	4
Ausências de respostas	1

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente, conforme quadro a seguir:

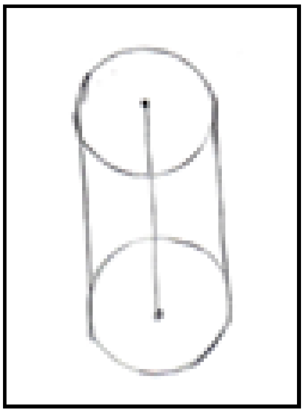
Quadro 34 - Cilindro: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Aluno	**Resposta**
A	Desenhei deitado e não fiz os círculos achatados como no livro.
B	Ficou parecido, mas eu não sabia qual das partes pontilhar.
C	Ficou diferente, pois não parece um cilindro porque fiz os círculos muito abertos e não parece com as bases do desenho do livro.
D	Ficou quase igual, faltou apenas pontilhar a parte de trás do cilindro.
E	Ficou igual ao do livro, mas não pontilhei a base.
F	Ficou igual ao do livro, faltou apenas pontilhar a parte de trás da base.
G	Ficou igual ao do livro, porém mais alto e não pontilhei a base escondida.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

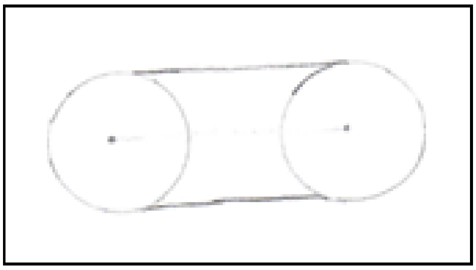
Ao analisar as respostas foi verificado que os alunos tentaram desenhar círculos perfeitos. Exemplos disso são o aluno C (figura 65) e o aluno A que desenhou a figura “deitada” (figura 66). Nenhum aluno pontilhou a parte encoberta.

Figura 65 - Cilindro/ representação do aluno C



Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 66 - Cilindro/ representação do aluno A



Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação às respostas com justificativas implícitas, nestas os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 35 - Cilindro: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	Só falta pontilhar.
B	Não pontilhado.
C	Sem pontilhar a parte do fundo.
D	Está na mesma posição da do livro.
E	Igual, mas deitado.
F	O meu está parecido, e esqueci de pontilhar.
G	Esqueci apenas de pontilhar.
H	Não pontilhei.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as repostas desses alunos, foi verificado que eles tinham conseguido realizar a representação figural, deixando apenas de pontilhar como no livro.

Em relação às respostas sem justificativas, nestas os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 36 - Cilindro: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Está parecido com a do livro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que todos os alunos haviam conseguido representar corretamente o cilindro, porém não souberam justificar suas repostas.

Em relação às respostas confusas, os alunos não souberam descrever, e/ou não terminaram a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

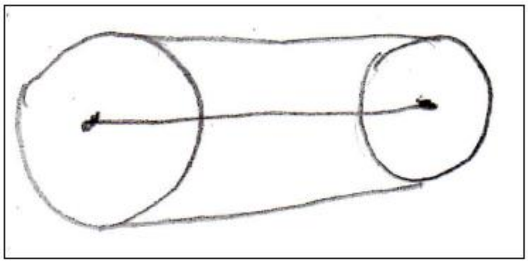
Quadro 37 - Cilindro: Respostas confusas

Respostas confusas	
Aluno	**Resposta**
A	Não entendi.
B	Ficou estranho.
C	Totalmente diferente.
D	Círculo errado.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

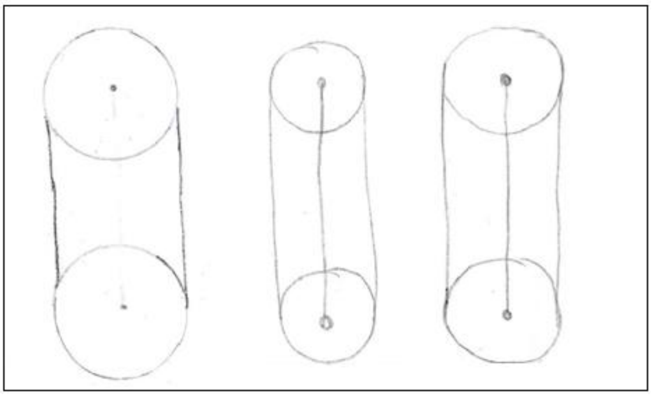
Ao analisar as respostas desses alunos, foi verificada a dificuldade em desenhar o cilindro, pois tentavam representas as bases com círculos. O aluno A (figura 67) soube fazer uma boa representação, mas não soube analisa-la. Os alunos B, C e D fizeram representações semelhantes, mas não souberam analisar a relação com a do livro e visualizar o erro no desenho das bases do cilindro (figura 68).

Figura 67 - Cilindro/ representação do aluno A



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 68 - Cilindro/ representação do alunos B, C e D



Fonte: Arquivo do pesquisador

Durante a realização das tarefas, foi possível analisar que os alunos tiveram dificuldades em representar o cilindro, pois não conseguiam representar sua tridimensionalidade, por isso, em alguns momentos, foi necessária a intervenção do professor para orientar que dependendo do ponto de vista a base era uma elipse e não um círculo. A maior dificuldade foi a representação da base, pois a maioria insistiu em desenhar um círculo como base, fato que dificultou a representação do cilindro. Foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e que, quando um cilindro é visto lateralmente, não se enxerga um círculo perfeito e, sim, uma elipse.

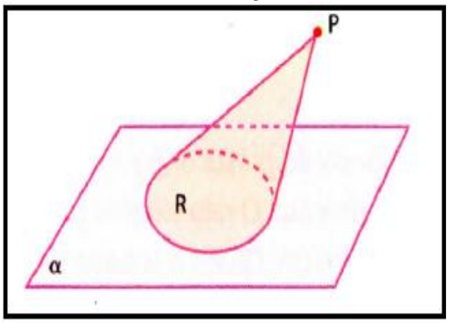
5.2.4. Representação 3D/2D de um cone.

Depois de terem construído e desenhado os cilindros, foi demonstrado como construir um cone com o auxílio do geoespaço circular (figura 8). Após esta construção os alunos tiveram que representar por meio de uma figura estática os cones que haviam sido construídos no geoespaço. Depois de feita essa representação, os alunos tiveram que comparar os resultados com os de uma figura pré-selecionada pelo professor, tendo que escrever qual a relação entre o seu desenho e o selecionado pelo professor.

Antes do início desta atividade foi verificada no livro didático (DANTE, 2010) a definição do que seria um cone. O livro novamente não oferecia uma definição formal, e sim demonstrava como construir um cone, fato que novamente dificultou a compreensão dos alunos.

Segundo Dante (2010), o aluno devia considerar um plano α, uma região circular R nesse plano e um ponto P não pertencente a α. A reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto de R ao ponto P é um sólido chamado de cone circular (figura 69).

Figura 69 - Construção de um Cone

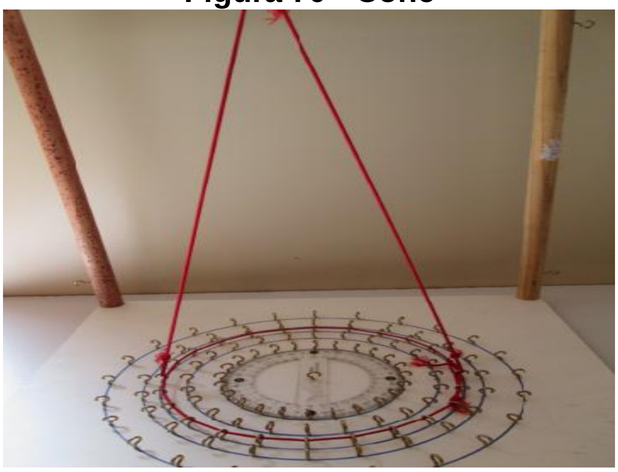


Fonte: Dante (2010, p.254).

Essa construção foi repetida no geoespaço para que os alunos pudessem sanar suas dúvidas sobre a definição do cone e sobre a construção dele, porém Dante (2010) faz a representação de um cone oblíquo, e no geoespaço foi feita a construção de um cone reto.

Para a representação figural do cone foi construído o seguinte cone no geoespaço (figura 70):

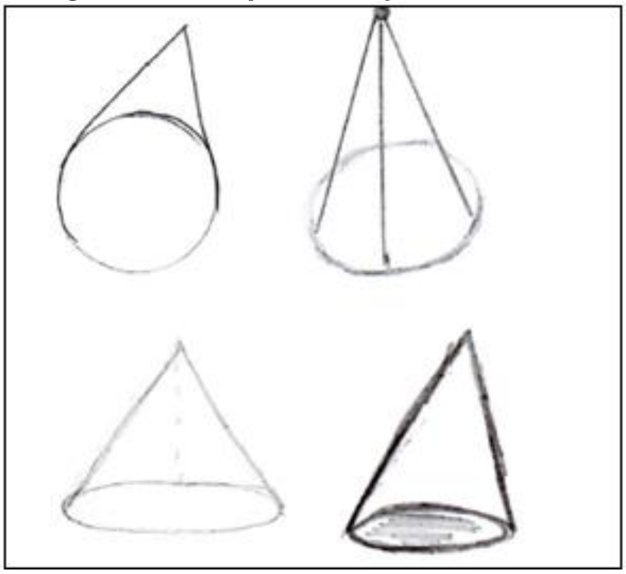
Figura 70 - Cone



Fonte: arquivo do pesquisador

A partir dessa construção, foi pedido aos alunos que fizessem representações figurais do cone. Foram obtidos os seguintes tipos de representações figurais:

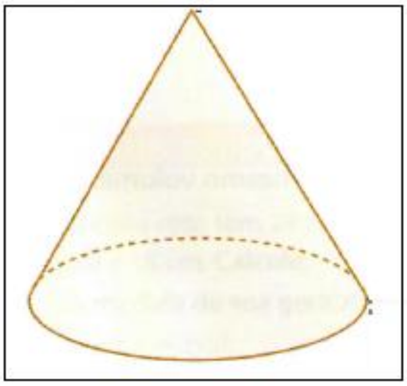
Figura 71 - Representações do Cone



Fonte: arquivo do pesquisador

Depois de feita a representação, os alunos tiveram que confrontar as suas representações com a fornecida pelo livro didático (figura 72) e responder à seguinte questão:

Figura 72 – Cone / livro didático



Fonte: Dante (2010, p.258)

Tarefa: Qual é a relação entre o desenho feito anteriormente e o desenho apresentado pelo livro didático?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 10 - Análise quantitativa/ Cone

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	6
Respostas com justificativas implícitas	7
Respostas sem justificativas	4
Respostas confusas	3
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade que não conseguiu representar figuralmente, conforme quadro a seguir:

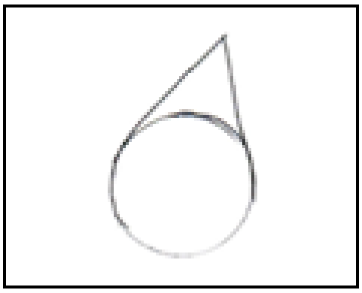
Quadro 38 - Cone: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Aluno	**Resposta**
A	Não ficou parecido, não achatei o circulo e o vértice ficou muito torto.
B	Não ficou igual, daí quis melhorar com mais uma reta, mas só piorou.
C	Ficou muito parecido com o do livro didático, a única diferença é que não pontilhei a parte que fica escondida.
D	Ficou igual, e para ficar mais fácil de ver eu pintei a base do cone.
E	Ficou igual ao do livro, mas não pontilhei a base.
F	Ficou igual ao do livro, faltou apenas pontilhar a parte de trás da base.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

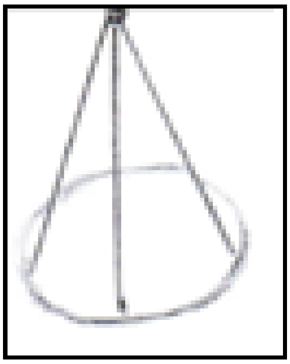
Ao analisar as respostas referentes à representação figural do cone foi verificado que o aluno A (figura 73) cometeu o mesmo erro da construção do cilindro, desenhando um círculo perfeito. O aluno B cometeu o mesmo erro e tentou melhorar seu desenho utilizando mais um segmento de reta (figura 74). Os demais apenas se esqueceram de pontilhar a base, sendo que o aluno D (figura 75) usou do artifício de pintar a base para destacá-la.

Figura 73 - Cone/ representação do aluno A



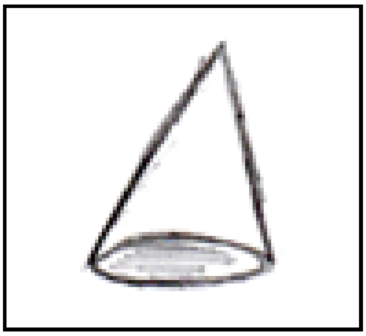
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 74 - Cone/ representação do aluno B



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 75 - Cone/ representação do aluno C



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 39 - Cone: Respostas com justificativas implícitas

Aluno	Resposta
A	Só faltou pontilhar.
B	Não pontilhado.
C	Sem pontilhar .
D	Está na mesma posição da do livro.
E	Igual e não pontilhado.
F	O meu está parecido, e esqueci de pontilhar.
G	Esqueci apenas de pontilhar.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas foi verificado que todos conseguiram representar figuralmente o cone, apenas esquecendo-se de pontilhar a parte que ficaria sobreposta.

Em relação às respostas sem justificativas, os alunos não souberam descrever a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

Quadro 40 - Cone: Respostas sem justificativas

Aluno	Resposta
A	Igual.
B	Está parecido com a do livro.
C	Parecido.
D	Bem parecido.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas verificou-se que os alunos haviam conseguido representar corretamente o prisma, porém não souberam justificar suas repostas.

Em relação às respostas confusas, nestas os alunos não souberam descrever, e/ou não terminaram a descrição sobre a relação entre a sua representação figural e a do livro, conforme quadro a seguir:

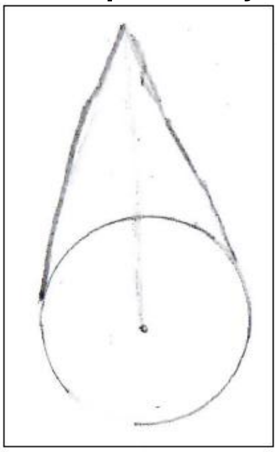
Quadro 41 - Cone: Respostas confusas

Respostas confusas	
Aluno	**Resposta**
A	Muito redondo demais.
B	Diferente em parte.
C	Ficou torto.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

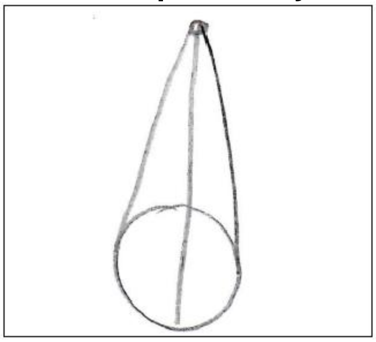
Ao analisar essas respostas foi verificado que o aluno A (figura 76), na representação da base, desenhou um círculo, fato que interferiu na análise. O aluno B (figura 77) usou um segmento a mais em sua representação, o que dificultou sua análise. Já o aluno C (figura 78) fez uma boa representação, mas não usou régua para fazê-la e, por esse motivo, disse que “ficou torto”.

Figura 76 - Cone/ representação do aluno A



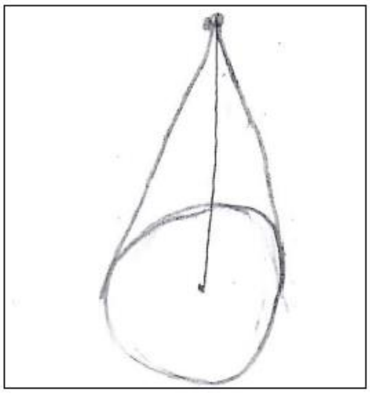
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 77 - Cone/ representação do aluno B



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 78- Cone/ representação do aluno C



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante a realização das tarefas foi possível analisar que os alunos tiveram as mesmas dificuldades em representar o cone que tiveram ao representar o cilindro, porém em menor número, pois não conseguiam representar sua tridimensionalidade. Em alguns momentos foi necessária a intervenção do professor que orientava que dependendo do ponto de vista a base era uma elipse e não um círculo. A dificuldade maior foi na representação da base, pois a maioria insistiu em desenhar um círculo como base, fato que dificultou na representação do cone. Foi explicado aos alunos que esse é um dos problemas dessa representação e que, visto lateralmente, não se enxerga um círculo perfeito e sim uma elipse. Outro fato que ficou notório foi que alguns alunos usaram mais que dois segmentos de reta para representar a união entre a base e o vértice do cone. Foi explicado que também estava correto, mas que aquilo não era uma aresta, e sim a geratriz do cone.

Ao analisar as tarefas de representação figural do prisma da pirâmide, do cilindro e do cone, foi possível verificar no início delas que os alunos tinham dificuldades em habilidades previstas no CESP (2010), principalmente em relação à identificação e compreensão de fato fundamentais relativos à representação desses sólidos. Além disso, ficou notória a dificuldade de se expressar verbalmente. Durante o desenvolvimento das tarefas, foi possível verificar, por intermédio da análise, o desenvolvimento da capacidade de expressão, compreensão, argumentação e de abstração, competências fundamentais previstas no CESP (2010).

5.3.Tarefas exploratórias-investigativas

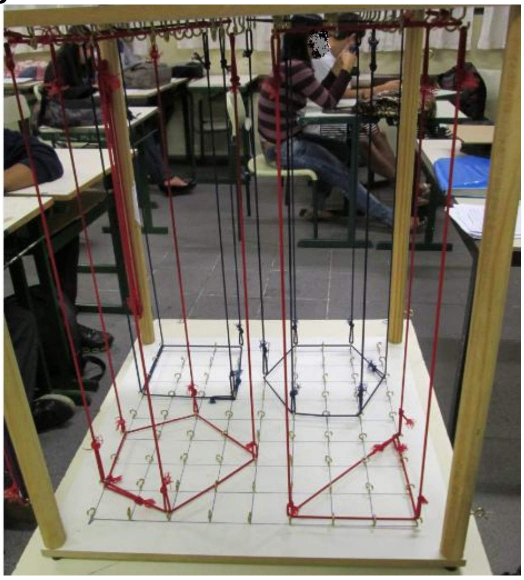
Nesta etapa do trabalho, foram elaboradas tarefas exploratório-investigativas, com o objetivo de fazer uma análise segundo o aporte teórico de Ponte (2009) e Pais (1996). A elaboração dessas tarefas visou ao estudo das propriedades do prisma, da pirâmide, do cilindro e do cone, de modo de analisar a relação entre as faces, vértices, arestas e a relação de Euler.

Para chegar à relação de Euler, primeiramente foi analisada a relação entre o número de lados da base dos sólidos e o número de faces, vértices e arestas de um prisma e de uma pirâmide e em seguida a relação entre o número de faces, vértices e arestas deles. As tarefas exploratório-investigativas foram desenvolvidas em três encontros, cada um com duas aulas. No primeiro encontro, os alunos fizeram a análise das propriedades dos prismas de diferentes bases. No segundo encontro, os alunos realizaram as tarefas referentes à análise das propriedades das pirâmides e, no terceiro encontro, os alunos fizeram a análise das propriedades do cilindro e do cone.

5.3.1. Propriedades do Prisma

Nesta parte do trabalho os alunos foram divididos em duplas, de modo a agilizar o prosseguimento do trabalho. Foi pedido que os alunos construíssem prismas de diferentes bases (figura 79) e esses prismas foram analisados por toda a turma. Seria necessário que eles contassem o número de faces, vértice e arestas de cada prisma, anotando os resultados na tabela a seguir:

Figura 79 - Prismas de diferentes bases



Fonte: arquivo do pesquisador.

Tabela 11 - Propriedades dos Prismas

Número de lados da base do prisma	Número de faces	Número de Vértices	Número de arestas
3	5	6	9
4	6	8	12
5	7	10	15
6	8	12	18
N	?	?	?

Fonte: arquivo do pesquisador.

Nesta etapa da atividade, um dos integrantes da dupla realizava a contagem do número de faces, vértices e arestas do prisma, enquanto o outro integrante fazia as anotações. Após a elaboração da tabela, foi verificado se todos os alunos chegaram ao mesmo resultado e, em caso de negativo, foi verificado o porquê do erro. Em seguida, propusemos aos alunos a resolução de sete tarefas, sendo que os resultados foram classificados em cinco categorias (respostas sem justificativas, respostas com justificativas implícitas, respostas confusas, ausências de respostas, respostas suficientemente argumentadas).

1ª Tarefa: No prisma construído o que é uma face? Qual é o seu formato?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 12 - Análise quantitativa: Faces e Prisma

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	2
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	4
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 42 - A face e o Prisma: Respostas suficientemente argumentadas

Dupla	Resposta
A	São as regiões laterais que formam o prisma, as bases dependem do número de lados do prisma e as laterais são retangulares.
B	É a figura formada pela aresta e tem formatos variados, as debaixo dependem do número de lados e as do lado são retângulos.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as repostas, foi verificado que as duplas identificavam corretamente o que seria uma face do prisma.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever as propriedades em análise, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 43 - A face e o Prisma: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	São os lados do prisma.
B	São as figuras que formam o prisma.
C	São formadas pelas arestas.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dessas duplas foram verificadas dificuldades de expressar suas justificativas, mas as duplas mostravam que compreenderam a natureza da tarefa e as propriedades da face.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre as faces e os prismas, conforme quadro a seguir:

Quadro 44 - A face e o Prisma: Respostas sem justificativas

Dupla	Resposta
A	São as figuras.
B	São as laterais.
C	São as figuras laterais.
D	Todas as figuras.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dessas duplas verificou-se falta de domínio da linguagem formal da matemática por parte dos alunos. Ao final da atividade foi explicado aos alunos que uma face é um polígono que limita o prisma.

Em relação à resposta confusa, nesta a dupla não soube descrever, e/ou não terminou a descrição sobre o conceito em questão.

Quadro 45 - A face e o prisma: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	Não sei dizer.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essa resposta foi verificada a falta de vocabulário para expressar sua justificativa, não sabendo ele expressar tal conceito.

2ª Tarefa: No prisma construído o que é um vértice? Qual é o seu formato?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 13 - Análise quantitativa/ Vértices e o Prisma

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	3
Respostas com justificativas implícitas	4
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 46 - O vértice e o prisma: Respostas suficientemente argumentadas

Dupla	Resposta
A	Um vértice é o ponto comum entre os lados consecutivos de uma figura, ou o encontro de duas semirretas.
B	É a união das arestas, e tem formato de um ponto.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade conceitual em questão, conforme quadro a seguir.

Quadro 47 - O vértice e o prisma: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	É uma das pontas do prisma, e tem formato pontudo.
B	É a ponta da figura e tem formato de um ponto.
C	É o ponto de união.
D	É o ponto que une.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as repostas dessa questão, foi verificado que os alunos em sua maioria tinham a noção básica do que seria um vértice, embora as duplas não soubessem descrever, e/ou não terminassem a descrição sobre a tarefa em questão.

Em relação às respostas sem justificativas, nestas os alunos não souberam descrever a relação do conceito em questão, conforme quadro a seguir:

Quadro 48 - O vértice e o prisma: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	É o ponto.
B	Ponto.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas verificou-se a falta de domínio da linguagem formal da matemática por parte dos alunos.

Em relação à resposta confusa a dupla não soube descrever, e/ou não terminou a descrição sobre conceito em questão.

Quadro 49 - O vértice e o prisma: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	É um vértice pontudo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a essa dupla foi verificado que tiveram dificuldade ao expressar suas justificativas, pois não compreenderam a natureza da tarefa proposta. Ao final dessas atividades, foi explicado aos alunos que um vértice é um ponto em comum entre, pelo menos, três faces.

3ª Tarefa: No prisma construído o que é uma aresta? Qual é o seu formato?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 14 - Análise quantitativa/ Arestas e o Prisma

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	2
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	4
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 50 - A aresta e o prisma: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	É o segmento comum a duas faces, ou seja, a quina entre elas.
B	É a união entre as duas faces, e tem formato de uma semi-reta.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as repostas foi verificado que as duplas identificaram corretamente o que seria uma aresta do prisma.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação entre a aresta e o prisma, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 51 - A aresta e o prisma: Respostas com justificativas implícitas

Dupla	Resposta
A	São as linhas da figura.
B	São as linhas que formam as figuras
C	São as juntas das faces

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas duplas foi verificado que tiveram dificuldade de expressar suas justificativas, mas mostraram que compreenderam a natureza da tarefa e as propriedades da aresta.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre a aresta e o prisma, conforme quadro a seguir:

Quadro 52 - A aresta e o prisma: Respostas sem justificativas

Dupla	Resposta
A	São as linha.
B	São os segmentos.
C	Todas as linhas.
D	As retas.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, verificou-se que os alunos compreendiam o conceito de aresta, mas não conseguiam fazer uso da linguagem formal da matemática.

Em relação à resposta confusa, a dupla não soube descrever e/ou não terminou a descrição propriedade de uma aresta:

Quadro 53 - A aresta e o prisma: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	É uma coisa do prisma.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas desses alunos foi verificada a falta de vocabulário para expressar sua justificativa. Ao usar o termo “coisa” não soube definir em seu ponto de vista o que significaria esse termo, deu a entender que seria o lado da face como foi explicado posteriormente.

4ª Tarefa: Qual a relação entre o número de **faces** e o número de lados da base do prisma? Qual seria o resultado se construíssemos um prisma com uma base de 10 lados? E um com base de "n" lados?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 15 - Análise quantitativa: Faces e a lei de formação do Prisma

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	2
Respostas sem justificativas	3
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade os alunos foram orientados a verificar os resultados da tabela 11 e compararem o número de faces dos prismas construídos, relacionando-o ao número inicial de lados da base de cada prisma de modo a determinar uma relação. Os alunos conseguiram de forma natural chegar à constatação correta, mas tiveram dificuldades de formalizar os resultados. Foi necessária a intervenção do professor para questionar as duplas sobre as propriedades que haviam identificado em relação ao número de faces em função do número de lados da base e orientando a anotar suas constatações.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 54 - Faces generalizando I: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	As faces sempre aumentam dois, logo é 10+2 e se for n é ele mais dois.
B	O número de faces é o número da base acrescido de 2, logo 10+2 e n+2.
C	A relação é que o número de faces e o número do prisma somado por 2.
D	O número do lado somado com 2, com base 10 lados, seria apenas somar com 2.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

De modo geral todas as duplas conseguiram responder a questão, mas ficou claro a dificuldade em expressar um conceito matemático verbalmente, chegando às constatações das respostas A, C e D que se expressam bem com números, mas tem dificuldade em se expressar com letras, o que não acontece com a resposta B.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre o número de faces, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 55 - Faces generalizando I: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta a mesma quantia.
B	Aumenta o mesmo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre as faces e os prismas, conforme quadro a seguir:

Quadro 56 - Faces generalizando I: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta um pouco.
B	Aumenta sempre o mesmo.
C	Está aumentando a mesma coisa.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Em relação à resposta confusa, a duplas não soube descrever, e/ou não terminou a descrição propriedade de uma face:

Quadro 57 - Faces generalizando I: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	É uma soma

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante a realização das tarefas, foi possível perceber que os alunos tiveram dificuldades em analisar e compreender a relação entre o número de faces e o numero de lados da figura da base do prisma, fato justificado por nunca terem trabalhado com tarefas do tipo exploratório-investigativas.

Ao final da atividade, foi explicado aos alunos que de cada lado da base dos prismas se projetava uma face, então bastava contar o número de lados da base para saber o número de faces laterais e em seguida era só somar as duas faces da base. Por esse motivo se tivéssemos um prisma de base “n” e “F” fosse o número de faces do prisma, então o número de faces (F) aumentaria em função do número de lados da base (n), sempre sendo duas unidades maior, ou seja, F=n+2.

5ª Tarefa: Qual a relação entre o número de vértices e o número de lados da base do prisma? Qual seria o resultado se construíssemos um prisma com uma base de 10 lados? E um com base de n lados?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir:

Tabela 16 - Análise quantitativa/ Vértices e a lei de formação do Prisma

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade, os alunos foram orientados a voltar os resultados da tabela 11, comparar o número de vértices dos prismas construídos e relacioná-lo ao número inicial de lados da base de modo a determinar uma relação. Os alunos chegaram logo à constatação correta, mas tiveram dificuldades de representa-la verbalmente. Para isso, foi necessária a intervenção do professor, que questionou as duplas sobre o que acontecia com o número de faces em relação ao número de lados da base e pedia para que os mesmo escrevessem suas respostas.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 58 - Vértices generalizando I: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	É só somar o mesmo número duas vezes, logo é 10+10 e n+n.
B	Basta fazer vezes dois, tendo 20 e 2 x n.
C	É sempre o dobro, então é 20 e o dobro de n;
D	A relação entre o número de vértices, é o número da base multiplicado por 2, logo a de base 10 é 10x2=20 e a de base n é nx2= 2.n.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas das duplas foi verificado que de modo geral todas as duplas conseguiram responder a questão, mas se repetiu a dificuldade em expressar um conceito matemático verbalmente, chegando às constatações dos alunos de respostas A, C e D que expressaram bem com números, mas tem dificuldade em se expressar com letras, o que não acontece com os alunos B.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, nestas a dupla não soube descrever, a relação entre o número de vértices, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 59 - Vértices generalizando I: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta a mesma quantia.
B	Aumenta um valor que varia conforme a base.
C	É um produto da base.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

De modo geral, todas as duplas conseguiram responder a questão, mas não conseguiram verificar de modo claro o conceito envolvido, não determinando o aumento.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre os vértices e os prismas, conforme quadro a seguir:

Quadro 60 - Vértices generalizando I: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Soma-se um número.
B	Aumenta sempre o mesmo em todos.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisar essas respostas, foi constatado que as duplas não fizeram a análise correta, de modo geral eles se basearam na situação anterior para responder a tarefa, mas a relação não é a mesma.

Em relação à resposta confusa, a dupla não soube descrever e/ou não terminou a descrição propriedade de relação do vértice e do prisma:

Quadro 61 - Vértices generalizando I: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta um pouco.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a resposta dessa dupla verificou-se uma resposta qualitativa que não está errada, porém, a tarefa exige uma atividade matemática de quantificação para mensurar o termo “aumenta”.

Durante a realização das tarefas foi possível perceber que os alunos tiveram dificuldades em analisar e compreender a relação entre o número de vértices e o número de lados da figura da base do prisma. Ao final da atividade foi explicado aos alunos que cada lado da base do prisma tinha um número de vértices igual ao número de lados. Somando os números de lados das bases chegaríamos ao número de vértices, e quando somamos o mesmo número duas vezes estamos dobrando-o, ou seja, basta multiplicar o número por 2, contar o número de lados da base e multiplicar por 2. Por esse motivo se tivéssemos um prisma de base “n” e “V” fosse o número de vértices do prisma, então o número de vértices (V) aumentaria em função do número de lados da base (n), sempre sendo duas unidades maiores, ou seja, V=nx2.

6ª Tarefa: Qual a relação entre o número de **arestas** e o número de lados da base do prisma? Qual seria o resultado se construíssemos um prisma com uma base de 10 lados? E um com base de n lados?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir:

Tabela 17 - Análise quantitativa/ Arestas e a lei de formação do Prisma

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade, os alunos foram orientados a voltar aos resultados da tabela 11, comparar o número de arestas dos prismas construídos e relacionar ao número inicial de lados da base de modo a determinar uma relação. Novamente os alunos chegaram logo à constatação correta e tiveram um pouco de dificuldades em organizar suas constatações, sendo necessária a intervenção do professor que questionava as duplas sobre quais propriedades foram identificadas em relação ao número de arestas e número de lados da base e pedia para que os alunos escrevessem suas respostas.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 62 - Arestas generalizando I: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	Basta somar o número da base três vezes, o de 10 é 10+10+10 e o de n é n+n+n
B	A relação é fazer vezes três o número da base, de base 10 é 10x3=30 e o de base n é nx3.
C	Nesse caso a relação é sempre o triplo, logo é o triplo de 10 e o triplo de n.
D	Dado uma figura de base 10 basta multiplicar por 3, e é igual para n.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

De modo geral, todas as duplas conseguiram responder a questão, mas se repetiu a dificuldade em expressar um conceito matemático verbalmente, chegando às constatações corretas. Porém, as duplas de respostas A, C e D que se expressaram bem com números, tiveram dificuldade em se expressar com letras, o que não aconteceu com a resposta B.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre o número de arestas, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 63 - Arestas generalizando I: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Multiplica a mesma quantia.
B	Aumenta mais que o dobro da base.
C	Um produto da base

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, verificou-se que essas duplas conseguiram visualizar que ocorria um aumento, mas não souberam verificar de modo claro o conceito envolvido, não quantificando esse aumento.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre as arestas e o prisma, conforme quadro a seguir:

Quadro 64 - Arestas generalizando I: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Multiplica-se um número.
B	Multiplica-se sempre um número em todos.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisar essas respostas, verificou-se que essas duplas não fizeram a análise correta, de modo a não conseguir constatar e quantificar o conceito em questão.

Em relação à resposta confusa, a dupla não soube descrever, e/ou não terminou a descrição propriedade de relação da aresta e do prisma:

Quadro 65 - Arestas generalizando I: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta bastante.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a essa resposta verificou-se que a dupla fez uma resposta qualitativa que não está errada, porém a tarefa exige uma atividade matemática de quantificação para mensurar o termo “aumenta”.

Durante a realização das tarefas, foi possível constatar que os alunos tiveram dificuldades em analisar e compreender a relação entre o número de arestas e o número de lados da figura da base do prisma. Ao final da atividade, foi explicado aos alunos que de cada lado da base do prisma tinha um número de vértices igual ao número de lados, somando os números de lados de ambas as bases e o número de arestas que ligavam as bases (mesmo número de arestas da base) chegaríamos ao número de arestas, e que quando somamos o mesmo número três vezes estamos triplicando o mesmo, ou seja, basta multiplicar o número por 3, contar o número de lados da base, multiplicar por 3. Por esse motivo se tivéssemos um prisma de base “n” e “A” fosse o número de arestas do prisma, então o número de arestas (A) aumentaria em função do número de lados da base (n), sempre sendo três unidades maior, ou seja, A=nx3.

7ª tarefa: Existe alguma relação entre o número de faces, vértices e arestas? Qual?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir:

Tabela 18 - Análise quantitativa/ Relação de Euler e o prisma

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	1
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade os alunos foram orientados a voltar aos resultados da tabela 11. Os alunos chegaram logo à relação de Euler, mas tiveram dificuldades de representar verbalmente, de modo que foi necessária a intervenção do professor que questionava as duplas sobre o que acontecia se somassem o número de faces e o número de vértices, qual seria o resultado era obtido e qual seria a relação com o número arestas. Em seguida, pedia para que os alunos escrevessem suas respostas.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 66 - Relação de Euler I: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O número de arestas é igual ao número de faces e o de vértices e falta dois.
B	A relação é que somamos as faces e os vértices e o resultado é sempre igual ao de arestas mais 2.
C	Se tirar o número de vértices do de arestas é igual ao de faces menos 2.
D	Se somar os dois primeiros e tirar o ultimo da 2.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas das duplas, foi verificado que elas tiveram certa dificuldade em chegar a uma constatação final, mas após reflexão de discussão entre as duplas, eles chegaram a ela, não necessitaram do auxílio do professor para registrar os resultados obtidos, porém não usaram uma linguagem algébrica na resolução.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação de Euler, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 67 - Relação de Euler I: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Todas aumentam o mesmo tanto.
B	Se somar face e vértice quase dá o número arestas.
C	Se somar e tirar resulta em dois.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas foi verificado que de modo geral todas as duplas conseguiram responder a questão, mais se não conseguiram verificar de modo claro o conceito envolvido, não determinando a relação.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação de Euler, conforme quadro a seguir:

Quadro 68 - Relação de Euler I: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Não há relação.
B	Uma aumenta e as outras multiplicam.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, verificou-se que as duplas não fizeram a análise correta. Elas se basearam na situação anterior para responder à tarefa, mas a relação não é a mesma.

Em relação à resposta confusa, a dupla não soube descrever, e/ou não terminou a descrição propriedade de relação da face e do prisma:

Quadro 69 - Relação de Euler I: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	Não entendi a relação.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas ficou constatada a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, bem como o fato de ele não compreender a proposta da tarefa e não constatar o que ocorria.

Durante a realização das tarefas, foi possível constatar que os alunos tiveram dificuldades em analisar e compreender a relação entre o número de faces, vértices e arestas. Ao final da atividade foi explicado aos alunos que de cada um dos casos estudados o número de faces(F) somados ao número de vértices(V) era igual ao número de arestas (A) acrescido de 2, ou seja F+V=A +2, podendo ter outras variações dependendo do ponto de vista como por exemplo F+ V- A =2 ou A-V-F= -2.

5.3.2. Propriedades da Pirâmide

Após terem sido analisados os prismas, foi pedido que os alunos construíssem pirâmides de diferentes bases (figura 45) e contassem o número de faces, vértice e arestas de cada prisma, anotando os resultados em uma tabela (tabela 19).

Figura 80 - Pirâmides de diferentes bases

Fonte: arquivo do pesquisador.

Tabela 19 - Propriedades das Pirâmides

Número de lados da base da pirâmide	Número de faces	Número de Vértices	Número de arestas
3	4	4	6
4	5	5	8
5	6	6	10
6	7	7	12
n	?	?	?

Fonte: arquivo do pesquisador.

Nesta etapa da atividade, após a elaboração da tabela, foi verificado se todos os alunos chegaram ao mesmo resultado e, em caso de negativo, foi verificado o porquê do erro. Em seguida os alunos tiveram que realizar as tarefas seguintes.

1ª Tarefa: Na pirâmide construída o que é uma face? Qual é o seu formato?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 20 - Análise quantitativa/ Faces e a Pirâmide

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	3
Respostas confusas	0
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 70 - A face e a pirâmide: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	São os lados da pirâmide e têm formato triangular.
B	São as figuras geométricas que formam a pirâmide e têm diferentes formatos.
C	São os lados e quase todos têm a forma de um triângulo, menos o de baixo.
D	São as figuras que formam a pirâmide, alguns tem a forma de triângulos e outros da figura que da nome à pirâmide.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas foi verificado que os alunos não tiveram dificuldade em descrever uma face, mesmo porque já haviam feito isso na análise dos prismas. Alguns não lembraram que a base também era uma face, mas em número bem menor (reposta A), e um dos grupos não soube se expressar formalmente (resposta C) usando o termo lado, que provem das figuras planas. Os alunos de respostas D ressaltaram que a pirâmide recebe o nome de acordo com sua base.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, os alunos não souberam descrever a relação faces e a pirâmide, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 71 - A face e a pirâmide: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	São os lados da pirâmide.
B	São as figuras que formam a pirâmide.
C	São formadas pelas arestas.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Aos analisar essas respostas, foi verificado que essas duplas tiveram dificuldade de expressar suas justificativas, mas mostravam que compreenderam a natureza da tarefa e as propriedades da face.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre as faces e a pirâmide, conforme quadro a seguir:

Quadro 72 - A face e a pirâmide: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	São todas figuras.
B	São as figuras laterais.
C	São as regiões laterais.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificada a falta de domínio da linguagem formal da matemática por parte dos alunos. Ao final da atividade foi explicado aos alunos que uma face é um polígono que limita a pirâmide.

2ª Tarefa: Na pirâmide construída o que é um vértice? Qual é o seu formato?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 21 - Análise quantitativa/ Vértices e a Pirâmide

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	3
Respostas confusas	0
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum a dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 73 - O vértice e a pirâmide: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	São as pontas da pirâmide, e têm formato pontudo.
B	É a união das linhas da pirâmide, e tem formato de um ponto.
C	É toda ponta da figura e tem formato de um ponto.
D	É ponto comum que une os lados de uma figura, ou o encontro de duas retas.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as repostas dessa questão, foram obtidas respostas semelhantes às referentes à tarefa de análise do vértice do prisma, verificando que as duplas em sua maioria tinham a noção básica do que seria um vértice, sendo que apenas alguns definiram como a união das arestas (resposta B).

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade conceitual em questão, conforme quadro a seguir.

Quadro 74 - O vértice e a pirâmide: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	O ponto que une.
B	A ponta da figura e tem formato de um ponto.
C	O ponto de união.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisar as repostas dessa questão, foi verificado que as duplas em sua maioria tinham a noção básica do que seria um vértice, mas as duplas não souberam descrever, e/ou não terminaram a descrição sobre tarefa em questão.

Em relação às respostas sem justificativas, a dupla não soube descrever, a relação ao conceito em questão, conforme quadro a seguir:

Quadro 75 - O vértice e a pirâmide: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	O ponto.
B	A ponta.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a essas respostas, nota-se que falta domínio da linguagem formal da matemática por parte das duplas.

3ª Tarefa: Na pirâmide construída o que é uma aresta? Qual é o seu formato?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 22 - Análise quantitativa/ Arestas e a Pirâmide

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	3
Respostas confusas	0
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever a propriedade em questão, conforme quadro a seguir:

Quadro 76 - A aresta e a pirâmide: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	São todas as linhas da figura e têm formato reto.
B	São as linhas formadas pelas faces.
C	O segmento comum a duas faces, ou seja a quina entre elas.
D	A união entre as duas faces, e tem formato de reto.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as repostas dessa questão, constatou-se que foram obtidas as mesmas respostas referentes à aresta do prisma, verificando que os alunos, em sua maioria, tinham a noção básica do que seria uma aresta.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, a dupla não soube descrever, relação entre aresta e a pirâmide, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 77 - A aresta e a pirâmide: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	São as linhas da figura.
B	São as linhas que formam as figuras.
C	A união das faces.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dessas essas duplas, foi verificado que elas tiveram dificuldade de expressar suas justificativas, mas mostravam que compreenderam a natureza da tarefa e as propriedades da aresta.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre as faces e a pirâmide, conforme quadro a seguir:

Quadro 78 - A aresta e a pirâmide: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	São as linha.
B	São os segmentos.
C	Todas as linhas.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisar essas respostas, foi verificada a falta de domínio da linguagem formal da matemática por parte dos alunos.

4ª Tarefa: Qual a relação entre o número de faces e o número de lados da base da pirâmide? Qual seria o resultado se construíssemos uma pirâmide com uma base de **10 lados**? E uma com base de n lados?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 23 - Análise quantitativa/ Faces e a lei de formação da Pirâmide

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	4
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	0
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade, os alunos foram orientados a voltar aos resultados da tabela 19, comparar o número de faces dos prismas construídos e relacionar ao número inicial de lados da base de modo a determinar uma relação. Os alunos chegaram logo à constatação correta.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 79 - Faces generalizando II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O lado mais 1, o de 10 é 11 e o de n é n mais 1.
B	Basta somar 1, ou seja o de 10 lados e 11 e o de n lados de n mais um lado.
C	Uma base mais o mesmo número de laterais, o de base 10 é 11 e o de base n e n+1.
D	A relação é o número da base somado 1, logo temo 11 e n somado1.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, a dupla não soube descrever a relação entre o número de faces, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 80 - Faces generalizando II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta um.
B	Mais um.
C	Uma unidade.
D	Acrescente um.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas foi constatado que, de modo geral, todas as duplas conseguiram responder a questão, mas ficou clara a dificuldade em expressar um conceito matemático verbalmente.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre as faces e a pirâmide, conforme quadro a seguir:

Quadro 81 - Faces generalizando II: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta um pouco.
B	Aumenta sempre o mesmo.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Durante a realização das tarefas, foi possível constatar que os alunos não tiveram tanta dificuldade em analisar e compreender a relação entre o número de faces e o número de lados da figura da base de uma pirâmide, pois é o mesmo pensamento que foi usado no do prisma. Ao final da atividade, foi explicado aos alunos que de cada lado da base da pirâmide se projetava uma face, então bastava contar o número de lados da base para saber o número de faces laterais e em seguida era só somar a face da base. Por esse motivo, se tivéssemos uma pirâmide de base “n” e “F” fosse o número de faces da pirâmide, então o número de faces (F) aumentaria em função do número de lados da base (n), sempre sendo maior em uma unidade, ou seja, F=n+1.

5ª Tarefa: Qual a relação entre o número de vértices e o número de lados da base da pirâmide? Qual seria o resultado se construíssemos uma pirâmide com uma base de **10 lados**? E uma com base de n lados?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a segui. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 24 - Análise quantitativa/ Vértices e a lei de formação da Pirâmide

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	5
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade os alunos foram orientados a voltar aos resultados da tabela 19, comparar o número de vértices das pirâmides construídas e relacionar ao número inicial de lados da base de modo a determinar uma relação. Os alunos chegaram logo à constatação correta, sem o auxílio do professor.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 82 - Vértices generalizando II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	Igual ao das faces.
B	Basta somar 1, tendo 11 e n+1.
C	O número da base somado 1, tendo 10+1 e n+1.
D	O calculo é igual ao de faces, somando sempre 1, tendo 11 e n mais 1.
E	O lado mais 1, o de 10 é 11 e o de n é n mais 1.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que, de modo geral, todas as duplas conseguiram responder a questão, mas se repetiu a dificuldade em expressar um conceito matemático verbalmente, chegando às constatações dos alunos de respostas A, C e D que expressaram bem com números, mas tiveram dificuldade em se expressar com letras, o que não aconteceu com os alunos de resposta B e E.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre o número de vértices, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 83 - Vértices generalizando II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta um.
B	Soma um.
C	Mais um.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que todas as duplas conseguiram responder à questão, mas não tiveram a oportunidade de verificar de modo claro o conceito envolvido.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre os vértices e as pirâmides, conforme quadro a seguir:

Quadro 84 - Vértices generalizando II: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Soma-se.
B	Aumenta em todos.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a essa resposta, as duplas não fizeram a análise correta dos dados e não realizaram uma mensuração quantitativa correta.

Durante a realização das tarefas, foi possível constatar que os alunos não tiveram tanta dificuldade em analisar e compreender a relação entre o número de vértices e o número de lados da figura da base de uma pirâmide, pois é o mesmo pensamento que foi usado no do prisma. Ao final da atividade, foi explicado aos alunos que número lados da base das pirâmides era igual ao número de vértices da base, então bastava contar o número de lados da base para saber o número vértices da base e em seguida era só somar o vértice da pirâmide. Por esse motivo, se tivéssemos uma pirâmide de base “n” e “V” fosse o número de vértices da pirâmide, então o número de vértices (F) aumentaria em função do número de lados da base (n), sempre sendo maior em uma unidade, ou seja, V=n+1.

6ª Tarefa: Qual a relação entre o número de arestas e o número de lados da base da pirâmide? Qual seria o resultado se construíssemos uma pirâmide com base de **10 lados**? E uma com base de n lados?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 25 - Análise quantitativa/ Arestas e a lei de formação da Pirâmide

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	5
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade, as duplas foram orientadas a voltar aos resultados da tabela 19, comparar o número de arestas das pirâmides construídas e relacionar ao número inicial de lados da base de modo a determinar uma relação. As duplas chegaram logo à constatação correta.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 85 - Arestas generalizando II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	Tem que fazer vezes dois, tendo 20 e 2 x n.
B	Se soma o mesmo número duas vezes, logo é 10+10 e n+n.
C	Basta fazer vezes dois, tendo 20 e 2 x n.
D	O número de vértices, é o número da base vezes por 2, ai o de base 10 é 10x2=20 e a de base n é nx2.
E	Dado uma figura de base 10 basta multiplicar por 3, e é igual para n.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que as duplas conseguiram responder a questão sem o auxilio do professor, não tendo muita dificuldade em expressar um conceito matemático verbalmente, chegando às constatações corretas.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, a dupla não soube descrever a relação entre o número de arestas, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 86 - Arestas generalizando II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Dobra.
B	Aumenta mais que o dobro da base.
C	Duplica.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que as duplas conseguiram responder a questão, mas não conseguiram verificar de modo claro o conceito envolvido.

Quadro 87 - Arestas generalizando II: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Multiplica por um número.
B	Multiplica.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas repostas verificou- se que as duplas não fizeram a análise correta. Elas se basearam na situação anterior para responder à tarefa, mas não constataram a razão de aumento.

Durante a realização das tarefas, foi possível constatar que os alunos não tiveram dificuldades em analisar e compreender a relação entre o número de arestas e o número de lados da figura da base da pirâmide, fato que ocorreu por a tarefa ser semelhante à realizada com o prisma. Ao final da atividade, foi explicado aos alunos que de cada base da pirâmide tinha um número de arestas igual ao número de lados, que os números arestas que ligavam a base ao vértice da pirâmide eram os mesmos e que quando somamos o mesmo número duas vezes estamos dobrando-o, ou seja, basta multiplicar o número por 2, então bastava contar o número de lados da base em seguida era só multiplicar por 2. Por esse motivo, se tivéssemos um prisma de base "n" e "A" fosse o número de arestas da pirâmide, então o número de arestas (A) aumentaria em função do número de lados da base (n), sempre sendo maior em duas unidades, ou seja, A=nx2.

7ª **Tarefa**: Existe alguma **relação** entre o número de **faces, vértices e arestas**? Qual?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 26 - Análise quantitativa/ relação de Euler e a Pirâmide

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	3
Respostas confusas	0
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para responder essa atividade, os alunos foram orientados a voltar aos resultados da tabela 19, comparar número de arestas, vértices e arestas das pirâmides construídas e relacionar ao número inicial de lados da base, de modo a determinar uma relação. Os alunos chegaram logo à constatação correta e não tiveram dificuldades de representar verbalmente.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 88 - Relação de Euler II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O mesmo do prisma, o número de arestas é igual ao número de faces e o de vértices e falta dois.
B	Quando somamos as faces e os vértices e o resultado é sempre igual ao de arestas mais 2.
C	Se tirar as faces e os vértices das arestas dá -2.
D	Se somar os dois primeiros e tirar o ultimo da 2.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação de Euler, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 89 - Relação de Euler II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Se somar e tirar resulta em dois.
B	Se somar face e vértice quase dá o número arestas.
C	Aresta somado 2.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que, de modo geral, todas as duplas conseguiram responder a questão, mas se confundiram no momento de expressar suas constatações.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação de Euler, conforme quadro a seguir:

Quadro 90 - Relação de Euler II: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Juntando e tirando temos o mesmo número.
B	Tem relação.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

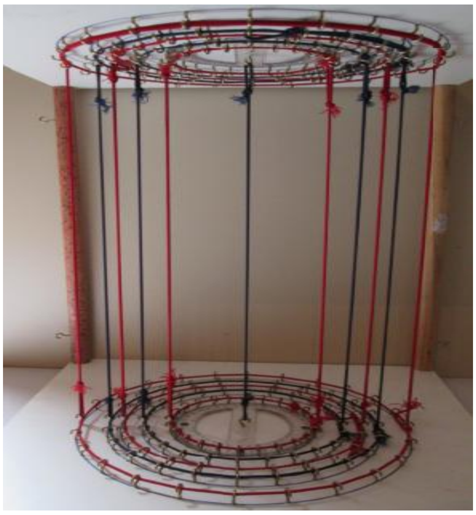
Ao analisar essas respostas, foi verificado que as duplas não fizeram a análise correta e que não compreenderam a situação de análise.

Durante a realização das tarefas, foi possível constatar que os alunos não tiveram dificuldades em analisar e compreender a relação entre o número de faces, vértices e arestas, pelo fato de já terem realizado uma tarefa parecida com o prisma, mas algumas duplas tiveram dificuldade novamente em representar algebricamente seus resultados. Ao final da atividade, foi explicado novamente aos alunos que em todos os casos estudados o número de faces(F) somados ao número de vértices(V) era igual ao número de arestas (A) acrescido de 2, ou seja F+V=A +2, podendo ter outras variações dependendo do ponto de vista como por exemplo F+ V- A =2 ou A-V-F= -2.

5.3.3. Propriedades do Cilindro

Após terem sido analisadas as pirâmides, foi pedido que as duplas construíssem cilindros de diferentes raios (figura 81), anotando os resultados em uma tabela (tabela 27).

Figura 81 - Cilindros de diferentes raios



Fonte: arquivo do pesquisador.

Tabela 27 - Propriedades dos Cilindros

Cilindro	Medida do raio	Medida do diâmetro
1	6	12
2	8	16
3	10	20
4	11	22
5	13	26
N	?	?

Fonte: arquivo do pesquisador.

Após a elaboração da tabela, foi verificado se todos os alunos chegaram ao mesmo resultado e, em caso de negativo, foi verificado o porquê do erro. Em seguida as duplas tiveram que responder a três tarefas iniciais.

1ª Tarefa: No cilindro construído quais são as dimensões (comprimento, largura e altura)?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 28 - Análise quantitativa/ Dimensões do Cilindro

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	1
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a essa questão, as duplas a princípio tiveram dificuldades em identificar a largura e o comprimento do cilindro, pelo fato de sua base ser circular. Foi necessária a intervenção do professor, que ressaltou que a largura e o comprimento no cilindro são determinados pela maior reta que contém o círculo de sua base.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 91 - Dimensões do Cilindro: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O comprimento é igual a largura e a altura é a distância entre as duas bases.
B	A largura e o comprimento mudam de acordo com o diâmetro e a altura é a distância entre as bases.
C	O comprimento e a largura medem o mesmo que a maior reta do circulo e a altura é a distância entre os centros dos dois círculos.
D	A largura e o comprimento são os mesmos medindo o dobro do raio e a altura é a distância entre as bases do cilindro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar estas respostas, notou-se que as duplas compreendiam conceitos de comprimento, largura e altura, usando em alguns casos as nomenclaturas adequadas.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação das dimensões, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 92 - Dimensões do Cilindro: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Largura é igual ao comprimento e a altura varia.
B	Largura e comprimento são iguais ao diâmetro.
C	Não há diferença entre largura e comprimento.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas destas duplas, foi verificado que tiveram dificuldade de expressar suas justificativas, mas mostravam que compreenderam a natureza da tarefa as relações entre as dimensões.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre largura, comprimento e altura, conforme quadro a seguir:

Quadro 93 - Dimensões do Cilindro: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Diâmetro é altura.
B	Largura é igual ao comprimento.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que as duplas conseguiram verificar a relação entre as dimensões, porém não souberam se expressar verbalmente.

Em relação à resposta confusa, o aluno não soube descrever, e/ou não terminou a descrição sobre o conceito em questão.

Quadro 94 - Dimensões do Cilindro: Respostas confusas

Respostas confusas	
Dupla	**Resposta**
A	Não da pra saber.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a resposta desta dupla foi verificada a falta de vocabulário para expressar suas justificativas, bem como que tais alunos não conseguiram compreender a proposta da tarefa, ou constatar o que ocorria.

Durante o desenvolver dessa tarefa, os alunos tiveram dificuldade na utilização de termos matemáticos referentes ao cilindro, pois fizeram a relação entre raio, diâmetro, largura e comprimento. Ao final da atividade foi explicado que a altura era a menor distância entre as duas faces.

A partir da discussão e compreensão dessa questão os alunos foram orientados a responder a 2ª tarefa.

2ª Tarefa: No cilindro construído o que é o diâmetro? E o raio?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 29 - Análise quantitativa/ O raio e o Cilindro

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	3
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 95 - Raio e diâmetro I: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O diâmetro é a distância entre os extremos do círculo e o raio é a distância entre o centro e o extremo do círculo.
B	O diâmetro a maior reta do círculo e o raio é a metade dela.
C	O diâmetro é a reta que corta o círculo ao meio e o raio a metade dela.
D	O diâmetro esta contido no círculo e é a reta que mede o dobro do raio, que é a distância entre o centro e o lado do círculo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a resolução desta questão, foi verificado que as duplas não apresentaram dificuldades, visto que uma vez compreendida a questão anterior, a dupla já conseguiria respondia à essa questão. A importante constatação foi da dupla D, que estabeleceu em sua resolução a relação entre diâmetro e raio.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre largura, comprimento e altura, conforme quadro a seguir:

Quadro 96 - Raio e diâmetro I: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Raio faz parte do diâmetro.
B	Os dois fazem parte do círculo.
C	Um é a metade do outro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que essas duplas conseguiram verificar a relação entre as dimensões, porém não souberam se expressar verbalmente.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre o raio e o diâmetro, conforme quadro a seguir:

Quadro 97 - Raio e diâmetro I: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	O diâmetro é a maior reta do círculo.
B	O raio é a distância do centro à ponta do círculo.
C	Raio e círculo estão relacionados.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que essas duplas conseguiram verificar a relação entre as dimensões, porém não souberam se expressar verbalmente.

Durante o desenvolver dessa tarefa os alunos não tiveram dificuldade na utilização de termos matemáticos referentes ao cilindro, pois fizeram a relação entre raio, diâmetro, largura e comprimento. Ao final da atividade foi explicado que o raio é o segmento que une o centro a qualquer ponto da circunferência e o diâmetro é a corda máxima que passa necessariamente pelo centro da circunferência.

3ª Tarefa: Qual a relação entre a medida do raio e a medida do diâmetro do cilindro?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 30 - Análise quantitativa/ Relação entre raio e diâmetro no Cilindro

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	5
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 98 - Relação entre raio e diâmetro I: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O dobro do raio e igual ao diâmetro.
B	Basta somar o raio duas vezes e temos o diâmetro.
C	O raio é a metade do diâmetro.
D	O diâmetro é o dobro do raio.
E	O diâmetro é a reta que corta o círculo ao meio e o raio é a metade dela.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dessas duplas, foi verificado que todas elas conseguiram quantificar a relação entre raio e diâmetro, registrando seus resultados corretamente, porém não usaram linguagem algébrica para os mesmos.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre raio e diâmetro, conforme quadro a seguir:

Quadro 99 - Relação entre raio e diâmetro I: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Raio faz parte do diâmetro.
B	Um é o dobro do outro.
C	Um é a metade do outro

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que essas duplas não souberam descrever a relação entre o raio e o diâmetro de forma adequada, conforme quadro a seguir:

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre raio e diâmetro, conforme quadro a seguir:

Quadro 100 - Relação entre raio e diâmetro I: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	é metade.
B	é duas vezes.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Durante o desenvolver dessa tarefa os alunos não tiveram dificuldade na utilização de termos matemáticos referentes ao cilindro, pois fizeram a relação entre raio e diâmetro. Ao final da atividade foi explicado que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio e o diâmetro é a corda máxima que passa necessariamente pelo centro da circunferência.

A resolução desta questão foi simples, visto que algumas duplas já haviam questionado sobre essa relação na questão anterior, logo a relação entre raio e diâmetro de desenvolveu naturalmente.

A partir dos resultados obtidos na tabela 27, os alunos tiveram que calcular o volume dos cilindros construídos sendo dada a fórmula e sabendo que a altura dos cilindros é fixa de 44 cm. Depois de feitos os cálculos, eles anotaram os resultados (tabela 31) e tiveram que responder a duas questões:

Tabela 31- Volume dos Cilindros

Cilindro	Medida do raio	$V=\pi.r^2.h$
1	6	4752
2	8	8448
3	10	13200
4	11	15972
5	13	22308
n	?	?

Fonte: arquivo do pesquisador.

Obs.: ($\pi \cong 3$(Pi), r=raio e h=altura)

Na resolução desta questão da atividade, o foi feita uma breve explicação de como utilizava a fórmula do volume do cilindro usando alguns exemplos numéricos, o que fez com que a mesma fluísse melhor. Enquanto um dos integrantes da dupla media as medidas dos raios do cilindro, o outro realizava as contas e anotava os resultados. No final da atividade, os resultados foram compartilhados com toda da sala de modo a corrigir erros de cálculo. Feita essa correção, os alunos tiveram que realizar mais duas tarefas.

1ª Tarefa: Se dobrarmos o raio o que acontece com o volume?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 32 - Análise quantitativa/ Relação entre raio e volume do Cilindro I

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	1
Respostas com justificativas implícitas	5
Respostas sem justificativas	4
Respostas confusas	0
Ausências de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na resolução desta questão, os alunos ficaram com muitas duvidas, pois não seriam usados números, de modo que o professor teve que intervir, orientando-os em relação á medida do raio e o modo de representá-la algebricamente: se o raio é representado por "r" e ele dobra, então teremos "2.r". O professor orientou que eles aplicassem esse valor na fórmula.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 101 - Relação entre raio e volume: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	Se trocarmos na formula temos $V= \pi.(2r)^2.h= \pi.4r^2.h$, logo quadruplica.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essa questão, foi verificado que a dupla demonstrou conhecimento algébrico, desenvolvendo corretamente e expressão algébrica, e soube analisar o resultado para chegar à conclusão final.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre raio e volume, conforme quadro a seguir:

Quadro 102 - Relação entre raio e volume: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta o quadrado do dobro.
B	Eleva o 2 ao quadrado.
C	Aumenta 4 vezes.
D	Quatro vezes maior.
E	O dobro do dobro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, temos que as duplas A e B compreenderam o conceito envolvido, no qual a diferença entre a fórmula inicial ($V= \pi.r^2.h$) e a fórmula em que dobramos o raio ($V= \pi.(2r)^2.h$) é que o número dois ser elevado ao quadrado, mas os alunos não terminaram o raciocínio. Em relação as duplas C, D e E, esses conseguiram constatar seus resultados, mas não souberam representar o procedimento utilizado.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre largura, comprimento e altura, conforme quadro a seguir:

Quadro 103 - Relação entre raio e volume: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta.
B	Aumenta um pouco.
C	Aumenta ao quadrado.
D	Aumenta mais que o dobro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, verificou-se que as duplas A e B perceberam o aumento, mas não souberam determinar o valor exato desse aumento. A dupla C sabia que ele estava relacionado ao fato do raio ser elevado ao quadrado, mas não soube representar sua solução algebricamente. A dupla D constatou que esse aumento deveria ser maior que o dobro, mas não soube determinar o quanto.

Durante o desenvolver dessa tarefa foi possível notar a dificuldade que os alunos têm em relacionar a geometria e a álgebra e, quando eles compreendem a relação entre as duas, não conseguem calcular os resultados por falta de conhecimento algébrico.

2ª tarefa: Se triplicarmos o raio o que acontece com o volume?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 33 - Análise quantitativa/ Relação entre raio e volume do cilindro II

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	2
Respostas com justificativas implícitas	4
Respostas sem justificativas	4
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador

.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 104 - Relação entre raio e volume II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	Se trocar na fórmula temos V= π.(3r)².h= π.9r².h, logo aumenta 9 vezes.
B	Se eleva ao quadrado entre será o quadrado do triplo, nove vezes.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, verificou-se que as duas duplas demonstraram compreensão do conceito em questão, porém só a dupla A demonstrou conhecimento algébrico, desenvolvendo corretamente a expressão matemática.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre raio e volume, conforme quadro a seguir:

Quadro 105 - Relação entre raio e volume II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta o quadrado do triplo.
B	Eleva o 2 ao quadrado.
C	Aumenta 9 vezes
D	O volume aumenta mais que o triplo

Fonte: Arquivo do pesquisador

Ao analisar essas respostas, temos que as duplas A e B compreenderam o conceito envolvido, no qual a única diferença entre a fórmula inicial ($V= \pi.r^2.h$) e a fórmula em que triplicamos o raio ($V= \pi.(3r)^2.h$) é que o número três é elevado ao quadrado, mas as duplas não terminaram o raciocínio. A dupla C não conseguiu constatar seus resultados, mas não soube representar o procedimento utilizado e a dupla D não conseguiu compreender o conceito analisado na tarefa, não quantificando o aumento.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação entre raio e volume, conforme quadro a seguir:

Quadro 106 - Relação entre raio e volume II: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta.
B	Aumenta um pouco.
C	Aumenta ao quadrado.
D	Aumenta mais que o triplo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

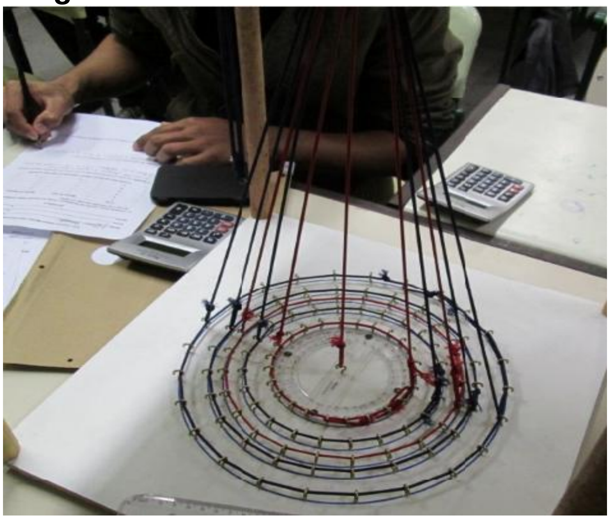
Ao analisar essas respostas, verificou-se que as duplas A e B perceberam o aumento, mas não souberam determinar o valor exato desse aumento. A dupla C sabia que estava relacionado ao fato do raio ser elevado ao quadrado, mas não soube representar sua solução algebricamente. A dupla D constatou que esse aumento deveria ser maior que o triplo, mas não soube determinar o quanto.

Os resultados obtidos nesta questão foram muito semelhantes ao resultado obtidos na questão anterior, sendo progressivos ao triplo. Apenas os alunos de resposta D conseguiram aplicar adequadamente a fórmula. Após essa atividade, foram discutidas as respostas com os alunos, sendo esclarecida a resposta de cada questão.

5.3.4. Propriedades do Cone

Após terem sido analisadas as propriedades dos cilindros, foi realizado o mesmo procedimento com para os cones, construindo, assim, cones de diferentes raios (figura 82), anotando os resultados em uma tabela (tabela 34).

Figura 82 - Cones de diferentes raios



Fonte: arquivo do pesquisador.

Tabela 34 - Propriedades dos Cones

Cone	Medida do raio	Medida do diâmetro
1	6	12
2	8	16
3	10	20
4	11	22
5	13	26
n	?	?

Fonte: arquivo do pesquisador.

Nesta parte da atividade, enquanto um dos integrantes da dupla media, com a ajuda de uma régua, o raio e o diâmetro do cone, o outro anotava os resultados. Após a elaboração da tabela, foi verificado se todos os alunos chegaram ao mesmo resultado e, em caso negativo, foi verificado o porquê do erro. Em seguida os alunos tiveram que responder a três tarefas:

1ª Tarefa: No cone construído quais são as dimensões (comprimento, largura e altura)?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 35 - Análise quantitativa/ dimensões do Cone

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	5
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 107 - Dimensões do Cone: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O comprimento é igual a largura e a altura é a distância entre as bases.
B	É a figura formada pela aresta e têm formatos variados, as debaixo dependem do número de lados e as do lado são retângulos.
C	A largura e o comprimento mudam de acordo com o raio e a altura é a distância entre as bases.
D	O comprimento e a largura medem o mesmo que a maior reta do circulo e a altura é a distância entre o centro dos do circulo e o vértice do cone.
E	A largura e o comprimento são os mesmos medindo o dobro do raio e a altura é a distância entre as bases e o vértice.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que essas duplas compreenderam os conceitos envolvidos e souberam descrever os mesmos de forma adequada, fato que ocorreu por terem resolvido tarefas semelhantes com o cilindro.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever as dimensões do cone, mas foi possível compreender implicitamente essa relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 108 - Dimensões do Cone: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Largura é igual ao comprimento e a altura varia.
B	Largura e comprimento são iguais ao diâmetro.
C	Não há diferença entre largura e comprimento.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que as duplas compreenderam as propriedades em questão, mas não souberam descrevê-las de forma adequada.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever as dimensões do cone, conforme quadro a seguir:

Quadro 109 - Dimensões do Cone: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Diâmetro e altura.
B	Largura é igual ao comprimento.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que as duplas não tiveram dificuldades nesta questão, visto que as propriedades do cone são muito similares às propriedades do cilindro.

A partir da discussão e compreensão dessa tarefa, os alunos foram orientados a responder a 2ª tarefa.

2ª Tarefa: No cone construído o que é o diâmetro? E o raio?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir:

Tabela 36 - Análise quantitativa/ O raio e o Cone

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	4
Respostas com justificativas implícitas	4
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, algumas duplas utilizaram o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 110 - Raio e diâmetro II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O diâmetro é a distância entre os lados opostos do círculo e o raio é a distância entre o centro e o lado do círculo
B	O diâmetro é a maior reta do círculo e o raio é a metade dela.
C	O diâmetro é a reta que corta o círculo ao meio e o raio a metade dela.
D	O diâmetro é a reta que mede o dobro do raio, que é a distância entre o centro e o lado do círculo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na resolução desta questão as duplas não apresentaram dificuldades, visto que uma vez compreendida a questão anterior, ela já servia de base para responder este item. A dupla D, além de relacionar de forma adequada a relação entre raio e diâmetro ainda fez a descrição adequada do conceito de raio.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre o raio e o diâmetro, conforme quadro a seguir:

Quadro 111 - Raio e diâmetro II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Raio faz parte do diâmetro.
B	Os dois fazem parte do círculo.
C	Um é a metade do outro.
D	Um é o dobro do outro.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas as respostas, foi constatado que as duplas conseguiram verificar a relação entre as dimensões, porém não souberam se expressar verbalmente.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever, a relação entre o raio e o diâmetro, conforme quadro a seguir:

Quadro 112 - Raio e diâmetro II: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	O diâmetro é a maior reta do círculo.
B	O raio é a distância do centro à ponta do círculo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar a resolução dessa tarefa, foi constatado que as duplas conseguiram verificar a relação entre as dimensões, porém não souberam se expressar verbalmente. Novamente, os alunos não tiveram nenhuma dificuldade na resolução dessa questão, pelo fato dela já ter sido amplamente discutida na análise do cilindro.

3ª tarefa: Qual a relação entre a medida do raio e a medida do diâmetro do cilindro?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 37- Análise quantitativa/ Relação entre raio e diâmetro no Cone

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	5
Respostas com justificativas implícitas	3
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhum aluno utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 113 - Relação entre raio e diâmetro II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	O diâmetro é a reta que corta o círculo ao meio e o raio a metade dela.
B	Somando duas vezes o raio e temos o diâmetro.
C	O dobro do raio e igual ao diâmetro.
D	O raio é a metade do diâmetro.
E	O diâmetro é o dobro do raio.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que as duplas souberam determinar a relação entre raio e diâmetro, descrevendo a mesma de forma adequada.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre o raio e o diâmetro, conforme quadro a seguir:

Quadro 114 - Relação entre raio e diâmetro II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	O dobro do outro.
B	Um é o dobro do outro.
C	Um é a metade do outro

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dessas duplas, foi verificado que as mesmas compreendiam a relação entre raio e diâmetro, mas não souberam descrever a mesma de forma adequada.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever, a relação entre o raio e o diâmetro, conforme quadro a seguir:

Quadro 115 - Relação entre raio e diâmetro II: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	é metade.
B	é dois.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar essas respostas, foi verificado que essas duplas também compreendiam em parte o conceito, mas não especificaram a relação de modo adequado, não deixaram claro que medida seria a metade de qual outra medida e qual seria a relação entre elas (que seria multiplicada por dois).

Durante o desenvolver dessa tarefa, os alunos não tiveram dificuldade na utilização de termos matemáticos referentes ao cone, pois fizeram a relação entre raio e diâmetro. Essa dificuldade foi menor se comparada ao estudo do cilindro. No final da tarefa, foi explicado que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio e o diâmetro é a corda máxima que passa necessariamente pelo centro da circunferência.

Na resolução desta atividade, foi observado que os alunos já tinham o domínio das propriedades do cone, fato que decorreu como consequência do trabalho com o cilindro.

A partir dos resultados obtidos na tabela 34, os alunos tiveram que calcular o volume dos cones construídos sendo dada a fórmula e sabendo que a altura dos cones é fixa de 44 cm. Depois de feitos os cálculos, eles anotaram os resultados (tabela 38) e tiveram que responder a duas questões:

Tabela 38 - Volume dos Cones

Cone	Medida do raio	$V = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$
1	6	1584
2	8	2816
3	10	4400
4	11	5324
5	13	7436
n	?	?

Fonte: arquivo do pesquisador.

Obs.: ($\pi \cong 3$ (Pi), r=raio e h=altura)

Na resolução desta questão da atividade, o foi feita uma breve explicação de como utilizava a fórmula do volume do cone usando alguns exemplos numéricos, o que fez com que as duplas a compreendessem melhor. Enquanto um dos integrantes da dupla media as medidas dos raios do cone, o outro realizava as contas e anotava os resultados. Após a realização dos cálculos os resultados foram compartilhados com a turma e corrigidos os erros de cálculo. Posteriormente, foram propostas duas tarefas complementares.

1ª Tarefa: Se dobrarmos o raio o que acontece com o volume?

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo.

Tabela 39 - Análise quantitativa/ Relação entre raio o volume do Cone

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	3
Respostas com justificativas implícitas	5
Respostas sem justificativas	2
Respostas confusas,	0
Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 116 - Relação entre raio e volume II: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	Se trocarmos na fórmula temos: $V = \frac{\pi.(2r)^2.h}{3} = \frac{\pi.4.r^2.h}{3}$, logo aumenta 4 vezes.
B	Ao trocar na fórmula fica $(2.r)^2=4.r^2$ e o resto não muda, logo quadruplica.
C	é o quadrado do dobro, logo é quatro vezes.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas das duplas A e B, foi verificado que elas demonstravam conhecimento algébrico, desenvolvendo corretamente e expressão algébrica, e souberam analisar o resultado para chegar à conclusão final. Já a dupla C compreendeu o conceito, mas não soube se expressar algebricamente.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre raio e volume, conforme quadro a seguir:

Quadro 117 - Relação entre raio e volume II: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta o quadrado do dobro.
B	Eleva o 2 ao quadrado.
C	Dobra duas vezes.
D	Aumenta 4 vezes.
E	Aumenta 4 vezes.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dessas duplas, foi verificado que a dupla A e B compreenderam o conceito, mas não souberam expressar de forma clara a relação de aumento, e as duplas C e D determinaram a relação de aumento, mas não souberam explicar o modo como chegaram a ela.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrevera relação entre raio e volume, conforme quadro a seguir:

Quadro 118 - Relação entre raio e volume: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	Aumenta.
B	Aumenta ao quadrado.

Fonte: Arquivo do pesquisador**.**

Na análise desta tarefa, foi verificado que os alunos se apropriaram das propriedades da potenciação e, em sua grande maioria, acertaram os resultados, mesmo que em alguns casos não tenham representado de maneira clara e algébrica.

Durante o desenvolver dessa tarefa foi possível verificar que as dificuldades que os alunos tinham em relacionar a geometria e a álgebra havia diminuído, mas ainda houve alguns casos quando eles compreendiam a relação, mas não conseguiam calcular os resultados por falta de conhecimento algébrico.

2ª Tarefa: Se 1000 cm³ equivalem a um litro, é possível determinar o volume dos cones anteriores sem realizar novas contas? Se possível determine o volume de todos.

A leitura da produção escrita dos alunos permitiu-nos categorizar as respostas, conforme tabela a seguir. Selecionamos cinco protocolos escritos para análise de seu conteúdo:

Tabela 40 - Análise quantitativa/ Relação entre cm³ e litros

Categorias de respostas	Quantidade
Respostas suficientemente argumentadas	2
Respostas com justificativas implícitas	4
Respostas sem justificativas	4
Respostas confusas	0

Ausência de respostas	0

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação às respostas suficientemente argumentadas, nenhuma dupla utilizou o conceito correto ao descrever alguma propriedade, conforme quadro a seguir:

Quadro 119 - Relação entre cm³ e litros: Respostas suficientemente argumentadas

Respostas suficientemente argumentadas	
Dupla	**Resposta**
A	Basta dividir todos por mil se obtendo 1,584 litros, 2,816 litros, 4,4litros, 5,324 litros e 7,436 litros
B	É só dividir todos os números por mil e temos 1,584 litros, 2,816 litros, 4,4litros, 5,324 litros e 7,436 litros

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar esses resultados, foi verificado que essas duplas compreenderam a relação, sabendo explicar o modo como chegaram aos resultados finais.

Em relação às respostas com justificativas implícitas, as duplas não souberam descrever a relação entre cm³ e litros, conforme quadro a seguir:

Quadro 120 - Relação entre cm³ e litros: Respostas com justificativas implícitas

Respostas com justificativas implícitas	
Dupla	**Resposta**
A	é só andar 3 casas pra esquerda com a vírgula (1,584/ 2,816/ 4,4 / 5,324/ 7,436.
B	é fácil, pois já esta em ml 1584ml, 2816ml, 4400ml, 5324ml e 7436ml.
C	é o mesmo número, mas com a vírgula na casa do milhar (1,584 l/ 2,816 l/ 4,4 l/ 5,324 l/ 7,436 l.
D	é o mesmo número, mas com a vírgula depois do primeiro número (1,584 l/ 2,816 l/ 4,400 l/ 5,324 l/ 7,436 l).

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar as respostas dessas duplas, verificou-se que as mesmas compreenderam a relação entre cm³ e litros, efetuando corretamente os cálculos, mas não souberam descrever de forma adequada essa relação.

Em relação às respostas sem justificativas, as duplas não souberam descrever a relação, conforme quadro a seguir:

Quadro 121 - Relação entre cm³ e litros: Respostas sem justificativas

Respostas sem justificativas	
Dupla	**Resposta**
A	1584ml, 2816ml, 4400ml, 5324ml e 7436ml
B	1,584litro, 2816 litro, 4,4 litro, 5,324 litro e 7,436 litro
C	1,584litros, 2816 litros, 4,4 litros, 5,324 litros e 7,436 litros
D	1,584l, 2816 l, 4,4 l, 5,324 li e 7,436 l

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao analisar os resultados dessa questão, foi verificado que as duplas compreenderam a relação, chegando aos resultados desejados, mas não souberam explicar a relação entre cm³ e litros.

Durante o desenvolver dessa tarefa, foi possível verificar que as duplas não tiveram dificuldade em relacionar o volume em centímetros cúbicos e o volume em litros. Nem todas as duplas souberam descrever o porquê da relação, mas todas elas conseguiram resolvê-la, não sendo necessária a intermediação do professor.

5.4. Refletindo sobre processo de aprender e ensinar com o material didático geoespaço.

No início da aplicação das tarefas desenvolvidas com o auxílio do geoespaço, os alunos tiveram dificuldades de interagir com o geoespaço, com o professor e entre eles, pelo fato de nunca terem trabalhado com tarefas do tipo investigativo-exploratórias.

No início, os alunos tinham medo de serem reprovados nas tarefas, principalmente nas de representação figural, devido ao receio e vergonha de suas representações figurais. Essa dificuldade foi transposta, pois foi esclarecido à turma que a participação nas tarefas é que seria avaliada, e não os resultados obtidos, pois se tratava de uma atividade complementar que serviria de reflexão e discussão sobre o ensino da geometria.

No primeiro encontro, a primeira aula foi toda destinada á explicação da atividade a ser desenvolvida e à apresentação do geoespaço, sendo que a segunda aula foi destinada à representação figural dos prismas.

A partir daí, no segundo encontro, os alunos tiveram que fazer a representação figural das pirâmides na primeira aula e do cilindro e do cone na segunda aula. Não houve problemas durante esse encontro, pois os alunos já estavam familiarizados com o geoespaço e com as atividades propostas.

Durante o desenvolver desses dois primeiros encontros, foi possível verificar que as tarefas de representação figural baseadas na teoria de representação figural de Fischbein (1993) criaram um ambiente de reflexão, onde os alunos puderam argumentar sobre o modo como são feitas essas representações figurais pelos livros didáticos. Durante a resolução das tarefas, eles questionavam sobre os infinitos tipos de representação de um mesmo objeto, sobre os infinitos pontos de vista, constatando que todas essas infinitas representações são corretas, e desenvolvendo suas capacidades de abstrair e compreender essas infinitas representações possíveis.

No terceiro encontro, foram utilizadas as duas aulas para a resolução das atividades exploratório-investigativas, onde foram resolvidas as tarefas referentes às propriedades do prisma.

No quarto encontro, foram utilizadas as duas aulas para a resolução das atividades exploratório-investigativas. Nelas, foram resolvidas as tarefas referentes às propriedades da pirâmide.

E, no quinto e último encontro, os alunos tiveram que resolver as tarefas exploratórias investigativas referentes às propriedades do cilindro e do cone. Esse encontro se deu em duas aulas, sendo o encontro onde houve um número maior de intervenções por parte do professor, visto que se discutiram muitos conceitos que os alunos não dominavam, bem como a resolução de fórmulas matemáticas que necessitavam do domínio de vários conceitos.

Após o término da atividade investigativa, os alunos, assim como as demais salas do 3º ano da escola, que não participaram desse projeto, fizeram uma avaliação diagnóstica em que os alunos tiveram um melhor aproveitamento em relação às questões referentes à geometria espacial, em comparação às demais salas de 3º ano do ensino médio.

Confirmando as constatações de Pais (1996), ao resaltar que as representações de um conceito somente fazem sentido pleno se essa representação tiver certo nível de organização do pensamento, o geoespaço auxiliou do desenvolvimento do pensamento abstrato, de modo a auxiliar o aluno na visualização das chamadas imagens mentais, estas que são associadas aos conceitos geométricos. No desenvolvimento das tarefas, tanto de representação figural como nas tarefas exploratório-investigativas, foi verificado que a generalidade e a abstração foram construídas pouco a pouco, envolvendo a influência do mundo físico, no caso o geoespaço, por meio da manipulação.

Durante o desenvolvimento das atividades junto ao grupo GEPLAM foi sugerida uma variedade de atividades, dentre elas o uso do “teorema de Pitágoras e dos sólidos geométricos”, “o uso teorema de Pick e o cálculo de volume”, “o cálculo do volume do tronco da pirâmide”, “o cálculo do volume do tronco do cone”, “o cálculo da área total de uma pirâmide” e, com a implantação de um transferidor nas bases do geoespaço circular (figura 8), “o cálculo do volume de secções no cilindro e no cone”. Todas essas atividades serão desenvolvidas posteriormente em parceria com o grupo de estudos e planejamento de atividades matemáticas (GEPLAM) da UFSCar-Sorocaba.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo abrangente sobre a importância de se utilizar material didático geoespaço no ensino de matemática por meio de atividades exploratório-investigativas, pois segundo os autores pesquisados, esse material manipulativo pode ser de grande importância para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Na primeira parte desse trabalho, procurou-se explicitar, primeiramente, os motivos pelos quais resolvemos trabalhar com atividades que envolvessem materiais manipulativos no ensino da matemática, relembrando quando e onde ocorreu o primeiro contato com o geoespaço, explicitando o porquê de se utilizar o geoespaço no ensino da geometria espacial. Buscou-se também refletir sobre qual é a importância do ensino-aprendizagem de matemática, dado o fato de que a nossa vida atual estar impregnada de matemática e que essa ciência interfere plenamente nos nossos atos cotidianos, sejam nas atividades profissionais, artísticas e culturais.

Após compreender a importância da matemática em si, procuramos pesquisar qual a importância do uso de material didático para ensinar essa matemática. Explicitou-se que, se queremos conhecer um determinado objeto, ou compreender uma situação problema, necessitamos medir, exprimir ou mesmo interagir com objeto ou situação problema a ser trabalhado, pois senão nossos conhecimentos sobre eles são precários e insatisfatórios. Por tal motivo, o professor que dispõe de um bom laboratório de matemática, poderá iniciar um processo de interação aluno/professor com maior facilidade, por meio de experiências e orientando-os posteriormente em pesquisas abstratas com uma maior segurança.

No posteriormente, procurou-se fazer apontamentos sobre o processo de ensino-aprendizagem via material didático, em especial o geoespaço, apoiado nas ideias de Lorenzato (2006), que ressalta o uso adequado e as potencialidades do uso de um material didático manipulativo nas aulas de geometria, citando também as ideias de Bezerra (1962) que ressalta a importância do uso de materiais didáticos manipulativos no ensino da geometria, bem como a classificação de suas funções: motivadora; auxiliadora da apresentação da matéria; fixadora; informativa; ilustrativa ou descritiva; analítica ou de observação e experimental ou demonstrativa.

Feito isso, foi demonstrado como se confeccionar um geoespaço de maneira simples, desenvolvendo dois tipos (geoespaço quadrangular e geoespaço circular) e como desenvolver atividades com o mesmo nas investigações matemática em sala de aula a partir das ideias de João Pedro da Ponte. Esse estudioso destaca que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais: o reconhecimento da situação, sua exploração preliminar e a formulação de questões; o processo de formulação de conjecturas a partir da organização dos dados; a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas, fazendo afirmações sobre as mesmas e a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado, justificando uma conjectura e avaliando o resultado do raciocínio.

Ponte (2009) ainda destaca que uma atividade de investigação se desenvolve em três fases: a proposta da atividade, a investigação em si, e a discussão dos resultados, fases que foram realizadas nesta pesquisa.

Em seguida foi feita uma análise dos documentos curriculares vigentes: PCN (1998); PCNEM (2000), PCN+ Ensino Médio (2002), OCEM (2006) e o CESP (2010), na qual foram pesquisadas as concepções da geometria, a seleção das noções de geometria, o modo como esses documentos sugerem o tratamento da geometria, bem como as finalidades das abordagens das noções de geometria junto aos estudantes.

Todo esse estudo evidenciou a importância que esses documentos curriculares dão ao ensino de geometria na educação básica. Esse estudo norteou os rumos dessa pesquisa, que visou, a partir daí, a uma análise quantitativa e qualitativa dos trabalhos desenvolvidos no Brasil sobre o ensino da geometria via materiais didáticos manipulativos. Escolhemos os Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs) de 2001, 2004, 2007 e 2010 e os Anais da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped) de 2000 à 2013.

Do total de 1381 trabalhos, foi verificado que a média de trabalhos que constituíam a categoria de geometria foi de aproximadamente 11,7% do total e que, destes, 14,5% das publicações eram destinados a experimentações por meio de materiais manipuláveis, ou seja, pouco mais de 1% do referido total.

Foram encontrados, nesta etapa da pesquisa, trabalhos que envolviam materiais manipuláveis e trabalhos exploratório-investigativos, mas não foi encontrado nenhum trabalho a respeito do uso do geoespaço.

Em relação a parte metodológica desse trabalho, foi feito o desenvolvimento das tarefas a serem aplicadas, sendo divido o trabalho em campo em dois momentos. No primeiro momento, foram desenvolvidas tarefas de representação figural segundo a teoria Fischbein (1993), que ressalta que uma imagem é uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno, sendo que os objetos materiais são apenas modelos materializados ou “conceitos figurais”, que exprimem propriedades espaciais como forma, espaço e magnitude bem como possuem qualidades conceituais como idealidade, abstração, universalidade e perfeição. Essas tarefas visavam à representação figural dos objetos representados no geoespaço e se mostraram de grande importância, pois através delas foi feito um confronto entre o ponto de vista dos alunos e o ponto de vista dos livros didáticos.

Ao analisar o desenvolvimento das tarefas de representação figural, foi possível verificar que no início das atividades, os alunos aceitaram as representações fornecidas pelo livro didático adotado pela escola (DANTE, 2010) sem questionar sua veracidade e o porquê de ser feito deste ou daquele modo. Mesmo que eles não entendessem tal representação figural, durante o desenvolver das tarefas, os alunos começaram a confrontar essas representações analisando-as, chegando à constatação de que estas não eram únicas; que cada objeto tem infinitas representações figurais, dependendo do ponto de vista da pessoa que o representa.

Foram verificados ainda o porquê de alguns artifícios, como pontilhar algumas linhas para representar profundidade e mesmo utilizar pontos de vistas específicos (nos sólidos de base quadrangular e hexagonal) para melhor visualizar o objeto a ser representado figuralmente.

No segundo momento do trabalho de campo, foram desenvolvidas tarefas exploratórias-investigativas segundo as ideias de Ponte (2009) e estas visavam à análise das propriedades dos sólidos geométricos. Tais tarefas incentivaram a participação ativa dos alunos no processo de ensino-aprendizagem e, no desenvolver delas, ficou evidente a aquisição de competências fundamentais no estudo da geometria, segundo CESP (2010). O desenvolvimento das capacidades de expressão, compreensão, argumentação e abstração, confirmando a teoria de Pais (1996) sobre a construção da abstração dos conceitos de generalidade pouco a pouco por influência do mundo físico. Os alunos foram aprimorando suas capacidades de abstrair e generalizar conforme manipulavam o geoespaço visando a resolução das tarefas propostas.

Ao analisar o desenvolvimento dessas tarefas exploratório-investigativas, foi possível verificar que no início das atividades os alunos tinham dificuldade em analisar fenômenos e propriedades existentes na geometria. No entanto, com o transcorrer das atividades os alunos foram desenvolvendo um pensamento crítico que os permitia analisar de forma mais detalhada as propriedades e fenômenos, sendo constatado que os mesmos conseguiam verificar os conceitos analisados, mas tinham muita dificuldade em expressar suas opiniões, principalmente algebricamente.

Ao final da aplicação e análise das tarefas foi possível verificar um avanço significativo dos alunos no que diz respeito à aprendizagem dos conteúdos de geometria espacial, pois os mesmos desenvolveram um pensamento crítico e analítico no contexto das tarefas exploratório-investigativas. Eles melhoraram o desenvolvimento das competências e habilidades propostas no CESP (2010). Em relação aos conteúdos referentes à geometria, os alunos desenvolveram a percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais, a construção e a representação de formas geométricas e a elaboração de concepções de espaço. Tais competências servem de suporte para a compreensão do mundo físico.

É necessário frisar que, durante a realização desse trabalho, o professor deve estar ciente do seu papel como educador, compreendendo os objetivos da matemática a serem alcançados e sendo capaz de criar situações reais de ensino-aprendizagem. Mas não basta ao professor apenas conhecer a matéria, ele deve apresentá-la com clareza, tendo entusiasmo pelo trabalho de educador, sempre destacando o seu valor utilitário para a vida corrente, o seu valor formativo para o desenvolvimento do raciocínio lógico, o seu valor sociológico por sua universalidade e o seu valor estético por sua beleza.

No entanto, o professor deve se lembrar de sempre de que o material manipulativo, no caso o geoespaço pode não superar a categoria de “meio” para o ensino de matemática, uma vez que não substituirá o professor. O geoespaço só propiciará bons resultados se o próprio professor acreditar na potencialidade desse recurso. Assim, o professor deve planejar a sua aula e conhecer detalhadamente o geoespaço, pois o modo de utilização do geoespaço depende da concepção do professor a respeito da matemática e do seu ensino. O geoespaço não ameniza a falta de domínio de um assunto, por parte do professor, pelo contrário, ele poderá ressaltá-la, pois durante uma aula podem surgir questões que dificilmente seriam levantadas sem o mesmo.

Durante a pesquisa, compreendi também a importância de preparar uma aula e escolher a metodologia adequada e como trabalhar com tarefas de representação figural segundo a teoria de Fischbein (1993) e com tarefas exploratório-investigativas no ensino da matemática segundo as idéias de Ponte (2009), pois estas levam tanto o aluno, como o professor a repensar o processo de ensino, pois tornam a aprendizagem mais ativa, incentivando o pensamento crítico e analítico. Descobri, nessa pesquisa, como é importante o trabalho referente às representações figurais, principalmente no ensino da geometria, pois essa parte fez com todos os envolvidos nesse processo viessem a elaborar questionamentos sobre o modo como fazemos tais representações figurais, e de como lidamos com as representações figurais impostas pelos livros didáticos.

Os resultados obtidos serão de fundamental importância para minha vida profissional como educador, pois auxiliarão na pesquisa e elaboração de minhas aulas daqui em diante, visto que desenvolvi um novo olhar sobre o processo de ensino-aprendizagem, diferente do que tinha no início desse trabalho. Procurarei, a partir deste momento, sempre refletir sobre o processo de ensino-aprendizagem, visando a uma melhoria na qualidade ensino da matemática, aperfeiçoando-me continuamente no que diz respeito do desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas e das tarefas de representação figural, dando continuidade aos meus estudos sobre o assunto de modo a descobrir e desenvolver novas metodologias de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Iolanda Andrade Campos et al. Construindo a geometria com o origami. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife, PE: UFPE, 2004. CD-ROM.

ANDRADE, João Batista et al. Composição e decomposição de figuras geométricas planas por alunos do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

ANDRADE, José Antonio Araujo; NACARATO, Adair Mendes. **Tendencias didático-pedagógicas para o ensino de geometria**. Disponível em: <http//www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteúdo_produções/docs_27/tendências .pdf.>. Acesso em: 09 ab.2012.

BARBOSA, Pedro Ribeira et al. O material didático “peças retangulares”. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

BARBOSA, Cirléia Pereira. O pensamento geométrico em movimento: um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma Escola Publica de Ouro Preto (MG). In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 34., 2011, Natal, **Anais**... Natal, 2011. CD-ROM.

BARRETO, Mylane dos Santos et al. O origami no ensino e aprendizagem de geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

BATISTELA, Rosemeire de Fátima et al. Um kit de espelhos para o ensino de geometria: a construção dos instrumentos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

BEZERRA, Manoel Jairo. **O material didático no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Globo, 1962. 116p.

BEZERRA, Renata Camacho et al. Arte e mosaicos: explorando a matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.142p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.109 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino** Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.141p.

BRASIL. Secretária da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, v.2, 2006.135p.

BRITO, Alexsandra Felix et al. Influencia do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza comprimento. In ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

BUSKE, Neirelise et al. Origami moldurar na construção de poliedros para o ensino de geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

CAVALCANTI, Lialda B. et al. Experimentação da situação didática "composição de quadrados congruentes em representações retangulares" e os conceitos de múltiplo e divisor. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. 341 p.

FARIAS, Katia Sebastiana Carvalho dos Santos. Tendencias das orientações didáticas para o ensino dos sólidos geométricos nos anos iniciais do ensino fundamental. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 31., 2008, Caxambu, **Anais**... Caxambu, 2008. CD-ROM.

FERREIRA, Ana Rafaela et al. Explorações geométricas no Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

FERREIRA, Lúcia Helena da Cunha et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico na visualização de figuras espaciais por meio da metodologia de oficinas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: UCSal, 2010.CD-ROM.

FISCHBEIN, Efraim. **The teory of figural concepts**. Educational Studies in Mathematics. Springer Netherlands, v.24, p. 139- 162, 1993.

GOUVEA, Flavio Roberto et al. Fractais de bases caleidoscópicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife: UFPE, 2004.CD-ROM.

GRANDO, Regina Célia; NACARATO, Adair Mendes; GONÇALVES, Luci Mara Gotardo. Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p.39 -56, jan./abr.2008.

GUIMARÃES, Gilselene Garcia. Abstração e construção: Uma interlocução epistêmica em geometria espacial. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 29., 2006, Caxambu, **Anais**... 6p. Caxambu, 2006. CD-ROM.

LAMONATO. Maiza, et al. Aprendizagem de professoras da educação infantil A geometria a partir da exploração-investigação matemática. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 31., 2008, Caxambu, **Anais**... Caxambu, 2008. CD-ROM.

LORENZATO, Sergio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.178p.

MARQUES, Maria Christina Bittencourt et al. Segmentos e cordas: atividades propostas para geoplano triangular isométrico, para geoplano circular ou para redes de pontos impressas em papel. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

MURARI, Claudemir et al. Tesselações espaciais com bases caleidoscópicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: UFRJ, 2001. CD-ROM.

MURARI, Claudemir et al. A tesselação (5,6,6)- A bola de futebol- visualizada em caleidoscópio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife: UFPE, 2004.CD-ROM.

MURARI, Claudemir et al. Origamis na confecção de bases caleidoscópicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007.CD-ROM.

NACARATO, Adair Mendes. **Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa – ação: Currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando Geometria**. 2000. 344p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade estadual de Campinas, Campinas, 2000.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 7-14, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, v.4, n.6, p.65-74, jul./dez., 1996.

PAIS, Luiz Carlos. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-

GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 23., 2000, Caxambu, **Anais**... Caxambu, 2000. CD-ROM.

PEREIRA, Patrícia Vândalo et al. Construindo fractais e demonstrando os três problemas clássicos da antiguidade através do origami. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: UNI-BH, 2007.CD-ROM.

PINHEIRO, Elizabethe Gomes et al. Geoplano circular: um aliado no ensino da trigonometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: UCSal, 2010.CD-ROM.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na Sala de Aula**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 158p.

SANTOS, Marli Regina et al. Aprendendo Tesselações de forma lúdica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

SÃO PAULO. Secretária da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. São Paulo: SEE, 2010. 72p.

SÃO PAULO. Secretária da Educação. **Relatório Pedagógico:** Matemática/ SARESP. São Paulo: SEE, 2011. 242p.

SILVA, Enoilma Simões Paixão Correia. GESTAR II – utilizando o origami para construção do octaedro truncado com estudantes do 9º ano do ensino fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: UCSal, 2010.CD-ROM

APÊNDICE A – Análise Qualitativa dos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs) de 2001, 2004, 2007 e 2010

No VII ENEM (2001), há uma comunicação científica relacionada com o estudo do caleidoscópio, conforme apontamento do quadro a seguir:

Quadro 122 - VII ENEM

ENEM 2001			
Publicações	**Comunicação Científica**	**Pôsteres**	**Total**
Total	108	03	111
Ensino Superior	43	00	43
Educação Básica	65	03	68
Geometria	15	01	16
Experimentação em geometria	01	00	01

Fonte: arquivo do pesquisador.

Murari (2001), em seu trabalho "Tesselações Espaciais com bases caleidoscópicas", teve como objetivo apresentar uma estratégia educacional diferente de como estudar o tema, utilizando o caleidoscópio como instrumento mediador no processo de construção de atividades geométricas.

Foi feita uma explanação das bases caleidoscópicas nas faces de poliedros por meio de tesselações, sendo que essas referem-se às justaposições, as quais não deixam lacunas ou sobreposições. As tesselações do plano são obtidas através do estudo dos ângulos internos dos polígonos e, no caso das tesselações no espaço, há necessidade de considerar nos poliedros os seus ângulos diedros.

Em um primeiro momento, foi feita uma definição de caleidoscópio, sendo usados aqueles formados por três espelhos planos e perpendiculares a um plano, sendo dois articulados. Em seguida, foram construídas regiões caleidoscópicas que, depois de dobradas, gerarão poliedros empilhados com faces caleidoscópicas.

O trabalho de Murari (2001) fez parte de um estudo amplo envolvendo espelhos caleidoscópios e softwares com estratégias educacionais, para os quais ainda não haviam sido efetuadas experiências com alunos.

A proposta das atividades deu-se na perspectiva de resolução de problemas, podendo ser aplicados em qualquer nível de escolaridade, sendo adequados para os mesmos, auxiliando no desenvolvimento da percepção espacial, da motivação para o estudo e exploração das propriedades dos polígonos e de transformações geométricas, desenvolvendo habilidades gráficas e do senso estético e, por fim, fazendo a integração multidisciplinar com ciências, desenho geométrico e educação artística. Como algumas bases do caleidoscópio são muito elaboradas, Murari (2001) foi levado a buscar uma ferramenta que facilitasse tais construções, encontrando no software Cabri-geométre II a possibilidade de construir as bases de maneira rápida e com precisão.

No VIII ENEM (2004) foram encontrados cinco trabalhos na nossa área de estudo, sendo quatro comunicações cientificas e um pôster, conforme tabela a seguir:

Quadro 123 - VIII ENEM

ENEM-2004			
Publicações	**Comunicação Científica**	**Pôsteres**	**Total**
Total	168	58	226
Ensino Superior	101	29	130
Educação Básica	67	29	96
Geometria	19	07	26
Experimentação em geometria	4	1	5

Fonte: arquivo do pesquisador.

Brito (2004) em sua comunicação cientifica focalizou os conceitos de comprimento e perímetro, a exploração de situações de comparação e produção de diversos materiais didáticos e a verificação da influência do uso de materiais manipulativos na resolução de situações-problema.

Esta investigação apoiou-se em pesquisas anteriores da educação matemática, relativas ao ensino-aprendizagem das grandezas geométricas, destacando aquelas que investigaram os conceitos de comprimento e área, visto que tal tema é de grande importância para a formação do pensamento e, por isso, ganhou destaque nas pesquisas em didática da matemática.

A motivação para esta investigação deu-se a partir de um breve levantamento acerca do uso de materiais manipuláveis como recurso didático, mais especificamente na sua aplicação para alunos da 4ª série do ensino fundamental.

O trabalho de campo foi planejado a partir de um estudo exploratório, que principiou pela elaboração e realização da análise a priori de um teste diagnóstico, constando de situações-problema de comparação e produção, sendo aplicadas as atividades a uma turma de 35 alunos e, posteriormente, a uma turma de 24 alunos de 4ª série do ensino fundamental de uma escola pública municipal do Recife. Durante o desenvolvimento do trabalho os alunos tiveram acesso a materiais manipulativos, sendo eles borracha, canetas de várias cores, lápis, tesoura, régua de cartolina não graduada, um fio fino, palitos e dois cordões de cores diferentes.

Na elaboração das atividades, foi feita uma seleção de valores e de variáveis didáticas, possibilitando a identificação de conhecimentos utilizados na resolução de problemas, a partir de uma análise *a priori*, e teve como objetivo determinar como as escolhas realizadas permitiram controlar os comportamentos do aluno e os conhecimentos a serem adquiridos bem como a compreensão das condições didáticas de sua aprendizagem, sendo feita também uma analise *a posteriori*, que se baseou na observação da atividade, fazendo uma ligação entre os fatos observados e os objetivos para que desta maneira fosse avaliada a aplicação da atividade.

De modo geral, foram investigados os conhecimentos-em-ação mobilizados pelos alunos na resolução de situações-problema de comparação e produção envolvendo comprimento, no ambiente papel e lápis e com uso de materiais manipulativos. O melhor desempenho ocorreu em situações-problema apresentadas nas quais os alunos fizeram uso de materiais manipulativos.

Santos (2004) tem como tema as “tesselações de forma lúdica” cujo foco foi a exploração de vários assuntos relacionados ao ensino de geometria, de uma forma criativa e atraente, visto que o ensino de geometria proporciona a exploração do espaço físico e desenvolve a observação e a percepção de semelhanças, diferenças e regularidades.

A tesselação de forma lúdica, através da manipulação de jogos, ofereceu ao aluno a oportunidade de medir, transformar, comparar, classificar e arriscar suas intuições, buscando desenvolver no estudante a habilidade de resolver problemas escolares ou não, favorecendo o pensamento crítico e autônomo.

O uso de jogos numa perspectiva lúdica proporcionou o desenvolvimento de técnicas intelectuais e pela formação de relações sociais, pois nos jogos, assim como na matemática, há regras, instruções, operações, definições, deduções, desenvolvimento, utilização de normas e de novos conceitos.

Neste trabalho de campo, foram propostos vários materiais manipulativos, dentre eles o kit de polígonos, composto por 50 polígonos regulares e irregulares, com a mesma medida de lados, feitos em papel cartão e colorido dos dois lados, a partir do qual é possível descobrir, através da investigação sobre os ângulos e vértices dos polígonos utilizados, algumas tesselações do plano por polígonos regulares ou não.

O kit de pavimentações de Penrose é formado por apenas dois tipos de quadriláteros denominados de kite e dart, formados pelos dois triângulos encontrados na geometria do pentágono, cujas tesselações não são periódicas, isto é, não podem ser obtidas através de um único arranjo, em escala fixa, se aproximando da “relação de ouro”.

O kit poliminós é formado por quadrados congruentes. Com ele podem ser formulados problemas de tesselações parciais do plano dos mais variados tipos, quer com escolha livre de peças, quer fixando-se as peças a serem utilizadas, de modo a desenvolver noções de rotação, translação, e reflexão, sendo aconselhável seu uso no estudo de áreas e perímetros de figuras côncavas ou convexas e no estudo de semelhança de figuras.

O estudo realizado desenvolveu habilidades de percepção e criação, permitindo que muitos objetivos fossem alcançados, como a colaboração, a disciplina e a confiança. O tema despertou o interesse dos alunos e possibilitou que os conceitos geométricos tiveram aplicação prática e, assim, fossem melhor compreendidos.

Gouvêa (2004), em sua comunicação científica, visou ao trabalho com fractais, caleidoscópios e softwares em geometria dinâmica explorados em sala de aula, proporcionando uma abordagem diferente de alguns conceitos de geometria.

Nesse trabalho, foi proposta a construção de fractais através de bases caleidoscópicas, para a qual foram explicados os conceitos básicos da obtenção de uma base caleidoscópica, pois estes podem ser utilizados para desenvolver a percepção espacial, habilidades gráficas, estimular a criatividade, motivar o estudo e a exploração de propriedades de polígonos e simetria reflexional das transformações geométricas, ampliar o campo de atividades educacionais com relação às pavimentações no plano.

Para a construção das bases geradoras desses caleidoscópios, o autor propôs a utilização de régua e compasso, a partir de então foram gerados fractais, também sendo construídas essas bases geradoras através do software Cabri-Gèométre II, usando macro, um recurso que possibilita a memorização de uma sequência de construções que podem ser reproduzidas instantaneamente, chamadas de macro construção.

Esse trabalho aborda de uma forma inovadora a geometria a partir da construção de fractais de bases caleidoscópicas e softwares de geometria dinâmica, que permitem evidenciar a importância da geometria euclidiana para a formação cultural e intelectual do educando, pois atividades utilizando caleidoscópios, um software de geometria dinâmica e fractais se configuram um eficiente veículo de transmissão de conceitos de geometria, de uma forma atraente, de modo que contemple e atenda a interdisciplinaridade (desenho geométrico, desenho artístico e geometria euclidiana) e promova uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos.

Murari (2004) apresentou um trabalho de comunicação científica cujo objetivo era abordar a geometria esférica, bem como conceitos básicos de ponto, reta, círculo, distância, ângulos, tesselações, entre outros, sendo estes comparados e contrastados com as ideias correspondentes na geometria plana elementar.

Os materiais manipuláveis utilizados por Murari (2004) foram a esfera de isopor, caleidoscópio generalizado, triangulo esférico de isopor, compasso e outros. Estes materiais possibilitaram aos alunos e professores fazerem construções e explorações não-euclidianas, visto que existem muitas aplicações da geometria esférica na matemática, na física, na astronomia, na navegação, entre outras áreas.

Primeiramente, foram abordados os conceitos básicos da geometria esférica. Posteriormente, foi feita uma relação entre os cinco poliedros de Platão e os treze poliedros de Arquimedes e as tesselações esféricas, de modo a imaginar esses poliedros inflados para que desta maneira se tornassem esféricos.

Com o auxílio de uma régua flexível, compasso, barbante e alfinete, foram construídos graficamente diferentes tesselações. Para esse caso, as construções ocorreram com o auxilio de um kit que contém esfera plástica, régua esférica, compasso esférico, além de outros itens. O fato desse kit ser importado, limita sua obtenção e utilização. As atividades propostas resultaram na construção de conceitos, como a medida do lado de um triângulo esférico e a construção de bases caleidoscópicas esféricas.

Esse trabalho ofereceu a oportunidade de tomar contato com conteúdos referentes a poliedros, tesselações esféricas, ângulos diedrais, além dos conceitos geométricos envolvidos nas construções das bases caleidoscópicas, limitando-se à construção de uma base caleidoscópica para a visualização de tesselação (5,6,6), porém trata-se de um trabalho teórico, não sendo aplicado em nenhuma turma.

Almeida (2004) apresentou um pôster envolvendo a arte da dobradura de papel, origami, para apresentar propostas metodológicas no processo de ensino e de aprendizagem em diferentes níveis de ensino, dentro de uma perspectiva construtivista, cuja proposta consiste no uso de modelos confeccionados para evidenciar elementos e propriedades geométricas existentes nos próprios modelos e/ou nos passos de dobras necessários para confeccionar estes modelos. Tal trabalho teve como metodologia fornecer exemplos de origamis, e a partir deles focalizar os elementos e propriedades geométricas envolvidas na sua confecção.

Além disso, no referido trabalho foram apresentados alguns diagramas de dobraduras de figuras geométricas obtidas a partir de diferentes formatos de papel, de modo a verificar como proceder para determinar as dobras que possibilitam chegar ao modelo geométrico pretendido a partir do diagrama apresentado, adicionando ainda a questão das demonstrações geométricas que exprimem as propriedades geométricas empregadas para cada uma das dobras.

A origem desse trabalho se deu pela necessidade de uma capacitação em construções geométricas, visto que a falta de instrumentos de desenho por parte dos alunos é considerado um impedimento para a implementação das construções geométricas em sala de aula. Dentre os principais resultados, destacou-se a espontaneidade com que se podem trabalhar propriedades e formas geométricas através de dobraduras de papel e desafios ao desenvolvimento para novos diagramas, tornando-se um excelente material exploratório para o ensino e a aprendizagem da geometria.

No IX ENEM (2007), foram encontrados oito trabalhos no contexto da geometria, cujas temáticas relacionavam a influencia de um material manipulável na construção do saber matemático, a exploração da geometria por meio de representações planas e espaciais e o tratamento de atividades de exemplificação e dedução de conceitos geométricos, por meio de materiais industriais e artesanais, elaborados pelos alunos com o auxílio do professor.

Quadro 124 - IX ENEM

ENEM 2007			
Publicações	**Comunicação Científica**	**Pôsteres**	**Total**
Total	278	147	425
Educação Básica	239	131	370
Ensino Superior	39	16	55
Geometria	28	14	42
Experimentação em geometria	4	4	8

Fonte: arquivo do pesquisador.

Andrade (2007) apresentou uma comunicação científica cujo foco era trabalhar com a área hachurada de determinadas figuras, compostas por duas ou mais figuras. As dificuldades dos alunos se acentuaram no reconhecimento de figuras geométricas planas e na identificação das expressões algébricas para encontrar a área das respectivas figuras. Apresentaram também dificuldades em decompor corretamente uma figura composta de duas ou mais figuras geométricas planas para o cálculo da área solicitada, bem como em compor uma figura geométrica para facilitar o cálculo da área.

As atividades foram desenvolvidas em duas etapas em uma escola do 3º ano do ensino médio de uma escola pública, com 30 alunos com idades entre 17 e 18 anos. A primeira etapa consistiu na aplicação de um teste diagnóstico, que permitiu verificar se os alunos tinham conhecimento de figuras geométricas planas e dos procedimentos associados ao estudo ao cálculo de área. A segunda etapa foi o desenvolvimento de uma sequência de ensino, com o objetivo de trabalhar o cálculo de área da intersecção de figuras geométricas planas.

Os resultados nas atividades diagnósticas foram analisados individualmente, sendo considerados os acertos, os erros e as questões que não foram respondidas. A partir disso, foi concluído que a maioria dos alunos reconheciam as figuras geométricas planas e conseguiam fazer a relação entre a figura e a expressão algébrica (forma) que representa sua área, o que facilitou o desenvolvimento da sequência de ensino. Dentre as atividades diagnósticas que envolviam resolução de problemas, foi observado que os alunos conseguiram até com certa facilidade fazer a conversão da linguagem natural para a linguagem geométrica e para a linguagem algébrica, que permite calcular a medida da área das figuras construídas.

Em relação às sequências de ensino desenvolvidas na segunda etapa, foram realizadas cinco atividades, sendo que para a realização de cada uma dessas atividades foi necessário que o aluno visualizasse a decomposição dessas figuras geométricas planas para calcular as áreas hachuradas. Durante sua aplicação foram feitos diversos comentários sobre os critérios de resolução, pela necessidade dos alunos analisarem as figuras apresentadas utilizando o processo de composição e de decomposição, para depois efetuarem o cálculo da parte hachurada. Foram distribuídas folhas de papel cartão, cartolinas e sulfites para que os alunos pudessem reproduzir as figuras geométricas planas indicadas na sequência de ensino. A partir da reprodução das figuras no material manipulativo, os alunos poderiam fazer os recortes necessários promovendo, assim, a decomposição das figuras apresentadas e, com as figuras obtidas por meio desses recortes, os alunos passariam a discutir em grupo de três pessoas as possibilidades de resolução.

Durante o processo de discussão foi observado que alguns alunos conseguiam visualizar o que estava sendo pedido em cada item da sequência de ensino, porém, parte dos alunos não conseguiu entender como obter a área da figura original pela decomposição.

Diversas intervenções foram realizadas ao longo das atividades desenvolvidas, de maneira que os alunos buscaram caminhos para a resolução de cada problema. Nessas intervenções, cada aluno dava sua opinião, redesenhava as figuras e fazia os recortes necessários, promovendo, assim, a decomposição da figura e facilitando o cálculo.

De acordo com os resultados obtidos na sequência de ensino, foi observado que a maioria dos alunos demonstrou muita dificuldade no que diz respeito ao cálculo de área de figuras que necessitavam de decomposição ou composição, mais precisamente quanto se tratava de figuras com áreas hachuradas ou sombreadas, resultado da sobreposição de duas ou mais figuras geométricas planas.

O trabalho de Cavalcanti (2007) intitulado “Experimentação da situação didática composição de quadrados congruentes em representações retangulares e os conceitos de múltiplo e divisor” teve como foco a metodologia de engenharia didática na elaboração de uma sequência didática visando investigar o efeito do uso de materiais concretos que trabalhavam com representações retangulares na apropriação do conceito de decomposição multiplicativa dos números naturais.

O material empírico foi constituído a partir de uma turma de 15 alunos do 6º ano do ensino fundamental na aplicação de uma sequência didática com materiais concretos para que fosse construído o significado de um saber especifico.

Um dos objetivos da didática da matemática foi verificar o funcionamento das situações didáticas, ou seja, o que caracterizou cada situação como fator determinante para uma evolução comportamental do aluno e, consequentemente, a apropriação do saber escolar. Nesse trabalho, Cavalcanti (2007) analisou todas as situações didáticas com êxito ou não. Quanto aos erros, eles serviram como um aporte à didática para identificação dos aspectos da situação determinante desse fracasso.

A análise *a priori* e *a posteriori* da situação didática foi importante para prever os possíveis efeitos da situação elaborada sobre os alunos, defendendo o estudo das condições que propiciam a construção de conhecimentos, assim como o controle destas para otimização e aquisição de conhecimentos escolares.

Durante a realização das atividades foram analisados os procedimentos mobilizados, as estratégias e os caminhos traçados pelos alunos para identificação das informações necessárias (fatos pertinentes) no enunciado que dessem pistas da operação aritmética a ser desenvolvida para o estabelecimento de relações entre os dados e que davam conta do significado do conceito.

Após a realização das atividades, foram feitos debates que se intensificaram favorecendo a tomada de decisões para minimizarem os conflitos surgidos durante as atividades, acarretados pela dificuldade em identificar casos em que duas ou mais soluções eram possíveis.

A busca de soluções oriundas das ações de manipulações sobre os quadrados congruentes, segundo Cavalcanti (2007), acarretou o desenvolvimento de estratégias próprias para estruturar esquemas/critérios para a montagem de retângulos em seus respectivos grupos, segundo uma série de passos. De maneira geral, a interação em grupo evidenciou diferentes formas de pensamento sobre as ideias surgidas nas discussões, permitindo o desenvolvimento de habilidades de raciocínio como investigação, inferência, reflexão e argumentação.

Com seu trabalho, Cavalcanti (2007) constatou que as discussões em grupo favoreceram a comunicação de ideias com base na adequação de informações mencionadas nas questões e nos conhecimentos vistos anteriormente. A troca de sugestões sobre como resolver possíveis conflitos, surgiu como consequência da interação entre os componentes que, em conjunto, tentaram tomar decisões acerca da tarefa proposta.

Os avanços no que diz respeito à explicitação de argumentos que justificassem a solução encontrada com eficácia nos intercâmbios comunicativos permitiram desenvolver ações sobre os materiais e reflexões sobre suas ações de modo que a montagem de retângulos e o número de soluções encontradas dependessem do total de quadrados no enunciado da questão, não podendo sobrar nenhum quadrado na representação retangular.

Ferreira (2007) em sua comunicação científica “Explorações geométricas no Ensino Médio” tratou das potencialidades das atividades de exploração como uma estratégia de ensino e aprendizagem a ser utilizada em estudos introdutórios de geometria, relacionados à percepção geométrica e visualização espacial, em duas turmas de terceira série do ensino médio (uma turma de ensino diurno e outra de ensino noturno) de duas escolas estaduais em cidades diferentes.

A geometria foi descrita como um corpo de conhecimentos fundamental para a compreensão do mundo e participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual.

Foram desenvolvidas nesse trabalho atividades exploratórias no ensino de geometria, considerando que a aprendizagem matemática deve contemplar oportunidades de os alunos se envolverem em momentos das atividades matemáticas, sendo que as atividades de exploração ganham importância uma vez que possibilitam o engajamento dos alunos em seu próprio desenvolvimento. Essas tarefas foram caracterizadas como um tipo de atividade fácil e de estrutura aberta, diferindo-se das investigações que possuem estrutura aberta, porém de dificuldade elevada.

As atividades foram elaboradas de forma colaborativa pelos professores envolvidos baseando-se em questões de prova de um concurso público relacionadas à percepção geométrica e espacial, elaboradas na forma de exploração. A atividade foi composta por três questões, visando proporcionar aos alunos um papel ativo e, assim, um maior envolvimento na tarefa.

A primeira questão teve por objetivo verificar a percepção geométrica dos alunos e processos simples de indução e generalização. Informava uma sequência de quadrados e pedia que os alunos investigassem qual seria a quantidade de quadrados na sétima posição da sequência e generalizassem para a enésima posição.

A segunda questão, também com o objetivo de desenvolver a percepção geométrica, mostrava um triângulo, formado por outros triângulos de lados 1, 2, 3, 4 e 5 unidades. Foi pedido que os alunos investigassem a quantidade de triângulos formados por lados de 1, 2, 3, 4 e 5 unidades.

A terceira questão tinha por objetivo verificar as habilidades de percepção espacial dos alunos. Apresentava um bloco retangular de 2 x 3 x 4 que possuía sua superfície pintada de vermelho. Este bloco seria cortado em cubos com 1 unidade de aresta cada um. A situação pedia aos alunos que investigassem qual seria o número de cubos que tinham exatamente três, duas e uma face pintada, além de questionar se seria possível obter algum cubo sem nenhuma face pintada. Para ajudar na visualização dos alunos, foi colocado na atividade um modelo de bloco retangular 2 x 3 x 4.

O desenvolvimento da atividade foi dividido em dois momentos: um primeiro momento de discussão entre as duplas e um segundo momento de socialização das diferentes estratégias encontradas.

Para a avaliação das atividades, Ferreira (2007) optou por um relato descritivo da atividade por turma, visando mostrar as peculiaridades de cada uma delas no decorrer da atividade. Os resultados apresentados buscaram evidenciar um pouco da dinâmica de aula gerada pelas explorações. Optou-se também por relacionar pontos convergentes e divergentes apresentados pelas turmas, estabelecidos através de um espírito de colaboração e troca entre os profissionais envolvidos.

Durante a realização das atividades, foi constatado que, pela primeira vez, o professor observou seus alunos interessados em realizar a atividade. Alunos que muitas vezes não se interessavam pela aula de matemática estavam discutindo, buscando solucionar as questões propostas. Os resultados obtidos parecem confirmar a hipótese das atividades de natureza exploratória como uma estratégia de ensino e aprendizagem rica em potencialidades, especialmente nos estudos de geometria.

Porém, os alunos também apresentaram dificuldades em registrar, comunicar, formalizar ideias e conclusões acerca do que estava sendo discutido, principalmente os alunos do ensino médio. Já os alunos do ensino médio, em especial, demonstraram mais dificuldades de generalização, o que demandou da professora maior atenção.

De modo geral as atividades foram de grande importância e serviram não só como introdução aos estudos de geometria plana e espacial, mas como um referencial do que ainda deverá ser trabalhado pelos professores, mostrando que demandará importantes intervenções dos professores envolvidos, a fim de garantir um aprendizado significativo.

Buske (2007) visou em seu trabalho de comunicação cientifica oferecer a oportunidade de aprendizado de alguns conceitos importantes, relacionados à geometria, fazendo uso do origami modular e a sua utilização na construção de poliedros.

No início das pesquisas, notou-se que o uso de dobraduras (origami) é um recurso muito útil no ensino da matemática, visto que este se caracteriza pelo uso de materiais de baixo custo, que resultam na apresentação de formas e cores que despertam o interesse. Além disso, como o resultado de uma construção de uma dobradura é um material manipulável, permite o manuseio do objeto de estudo de maneira a analisar suas propriedades e características.

Segundo Buske (2007), o origami é uma arte, tradicionalmente japonesa, que se caracteriza por confeccionar figuras fazendo dobras no papel, fazendo uso de cortes nem colagem, partindo, na maioria das vezes, de um pedaço de papel quadrado com uma de suas faces colorida, cujo resultado final depende do corte do papel utilizado e da confecção de dobras perfeitas, exigindo paciência e concentração do executor ao seguir os passos indicados para cada figura. O origami modular se baseia na construção de módulos ou unidades, formando figuras ao serem encaixados.

Para a construção dos poliedros a partir de origami modular, foram utilizados diagramas retirados de livros especializados e adaptados a fim de facilitar sua compreensão. Os módulos poligonais de lados congruentes são obtidos a partir do uso de diferentes tamanhos de papéis; quanto mais ângulos a figura tiver, maior deverá ser o tamanho do quadrado utilizado. Após ser dobrado de acordo com os passos indicados para cada tipo de módulo, se obteve como resultado um polígono com bolsos de encaixe, e para unir um módulo com o outro foi necessária a construção de peças de conexão introduzidas nos bolsos, fazendo assim a união dos módulos.

A utilização do origami em sala de aula auxiliou no desenvolvimento da leitura e da interpretação de diagramas, proporcionando o uso de termos geométricos, além de permitir a exploração de padrões geométricos. Ainda foi possível estudar eixos e planos de simetria, fórmula de Euler, áreas e volumes, planificação e vistas.

O trabalho com o origami modular, segundo Buske (2007), deve ser realizado em grupo, para que desta maneira a produção dos módulos não se torne cansativa. Os alunos devem ser dispostos em grupos com média de cinco ou seis componentes, para que desta maneira seja possível fazer a construção de todos os poliedros regulares em mais ou menos 5 horas/aula.

Além da construção dos poliedros, foi possível utilizar os módulos para a visualização de poliedros em um caleidoscópio generalizado, formado por um conjunto de três espelhos, que representam uma pirâmide triangular, constituindo um triedro de espelhos em que todas as imagens de um ponto pertencem a uma esfera, cujo centro é um ponto de intersecção dos planos dos três espelhos que são utilizados para a visualização de pavimentações esféricas e de poliedros.

Como conclusão do trabalho, Buske (2007) constatou que o trabalho com origami deve ser iniciado partindo-se de dobras mais simples, iniciando as atividades com a construção de polígonos, para depois introduzir o origami modular, de modo a se familiarizar com a leitura e interpretação de diagramas e dobras. A estética dos primeiros modelos nem sempre é boa, mas na medida em que se repetem os procedimentos, o trabalho adquire melhor qualidade.

Apesar de algumas limitações diante de algumas dificuldades na construção dos poliedros e do caráter trabalhoso da construção dos mesmos, os alunos demonstraram muito interesse, tornando válido o trabalho, considerando que a intenção foi de apresentar conceitos geométricos de uma maneira diferente do tradicional, oferecendo aos professores interessados em transformar a sua prática instrumentos de baixo custo e fácil execução e, aos alunos, materiais que podem ser manipulados, com bonitos acabamentos, razão pelo qual despertam o interesse e prendem a intenção dos estudantes.

Bezerra (2007) apresentou um pôster de investigação sobre como explorar a matemática através da arte dos mosaicos. Como a matemática muitas vezes é considerada uma disciplina fria e acabada, sem espaço para a criatividade do aluno, para mudar tal panorama são necessárias alternativas metodológicas que auxiliem o processo de ensino e aprendizagem da mesma.

Com esse intuito de colaborar com o processo de ensino e aprendizagem, o autor propôs investigar as relações matemáticas existentes em obras de arte (mosaicos) conhecidas no Brasil e no mundo e elaborar estratégias metodológicas que permitam trabalhar a matemática e a arte com os alunos do ensino fundamental e/ou médio para que dessa forma permita que alunos e professores vivenciem uma matemática dinâmica, criativa e com espaço para a construção e reconstrução de conhecimentos.

Com o desenvolvimento deste trabalho buscou-se desmistificar a matemática como uma disciplina pronta e acabada para torná-la acessível a todos de forma dinâmica e criativa, ou seja, foram propostas alternativas para trabalhar a matemática através de obras de arte (mosaicos) e dessa forma humanizar a disciplina, permitindo que ela seja vista como um objeto de curiosidade e criação, além de contribuir com o processo de ensino e aprendizagem. O autor buscou estudar relações matemáticas nos mosaicos famosos do Brasil e do mundo, criar estratégias para se trabalhar a matemática dos currículos escolares através da arte dos mosaicos, explorar a criatividade na elaboração de mosaicos e estabelecer, aprimorar e incentivar vínculos entre a atemática e a arte.

Bezerra (2007) teve como principal meta com esse trabalho a exploração da Matemática através da arte, em ações de caráter interdisciplinar e/ou transdisciplinar e estabelecendo vínculos mais estreitos entre a matemática e a arte. Além disso, traçou estratégias metodológicas para o ensino da matemática que facilitam o processo de ensino e aprendizagem e tornam a disciplina presente nos currículos dinâmica e com espaço para a criatividade e (re)construção do conhecimento por parte dos alunos e professores do ensino fundamental e/ou médio.

Pereira (2007) apresentou um pôster envolvendo a construção de figuras da geometria fractal, por meio do uso origami a fim de demonstrar os três problemas clássicos da antiguidade, visto que junto com o aprimoramento da matemática, surgiu o avanço tecnológico, e esse status gerou uma complexidade cada vez maior de elementos matemáticos de difícil explicação.

No referido trabalho, buscou-se abordar, por meio do recorte do projeto de iniciação científica voluntário intitulado “A Matemática do Origami: Aplicações no Ensino Superior”, a construção de figuras da geometria fractal.

Buscou também, por meio do origami, demonstrar os três problemas clássicos da antiguidade que são a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

O estudo do origami pode estabelecer alternativas possíveis para incorporar o uso da dobradura de papel ao ensino dos conteúdos matemáticos, pois o origami disponibiliza uma variedade de aplicações, como por exemplo, a demonstração de teoremas, a construção de sólidos das mais variadas formas e aspectos, além de muitas outras aplicações.

Os três problemas abordados neste trabalho tem suas origens em lendas contadas através dos tempos, e um dos elementos motivadores e curiosos que se pode observar em ambos os casos é que o surgimento destes problemas é tão antigo quanto o origami, e mesmo não sendo tão recentes, tem contribuído para o aprimoramento matemático.

No caso da geometria fractal, Pereira (2007) utilizou o origami de outra forma. Como ele é capaz de construir o próprio objeto de estudo, torna possível a análise minuciosa dos conceitos presentes em cada um desses fractais. A maioria dos fractais comuns pode ser construído através do origami, que é o caso do floco de neve, do triângulo de Sierpinski e do carpete de Sierpinski.

O objetivo desse trabalho foi tornar a matemática acadêmica algo aberto a novas visões, ao desenvolvimento da criatividade e da individualidade de cada um, sem perder o real sentido de se estudar a matemática, tornando mais fácil o processo de aprendizagem de alguns destes problemas e motivando os alunos à construção de suas próprias técnicas.

Murari (2007) apresentou um pôster intitulado “O origami como técnica para a construção de bases caleidoscópicas”, onde os origamis são figuras geométricas especialmente construídas para serem colocadas no interior dos caleidoscópios, a fim de gerarem um determinado visual.

Esse trabalho consistiu na construção de dobraduras, ou seja, bases caleidoscópicas que fornecem o visual dos poliedros. Visou a apresentar uma maneira diferente de abordar alguns conceitos geométricos e poliedros, utilizando materiais de baixo custo e de fácil utilização. O trabalhou forneceu apenas uma perspectiva teórica, não fornecendo dados sobre a aplicação das atividades.

Marques (2007) apresentou um pôster de um trabalho onde foram estudadas e criadas atividades com o uso do geoplano visando proporcionar, ao educando, ações lúdicas que estimulassem a percepção visual e a imaginação, conduzindo-o à descoberta ativa, ao desenvolvimento do raciocínio indutivo e à elaboração de teste de inferência, essenciais para a construção de conceitos.

Foi utilizado o geoplano por se tratar de um material manipulável que permitiu o desenvolvimento de atividades diferenciadas. Nesse trabalho buscou-se descrever, detalhar e comentar atividades, com o uso do geoplano triangular isométrico, geoplano circular e também com o uso de redes de pontos impressas em papel, circulares ou triangulares isométricas.

Marques (2007) focou apenas no desenvolvimento teórico das atividades, não sendo essas aplicadas em um trabalho de campo.

Finalmente, em relação ao X ENEM (2010), foram encontrados seis trabalhos na área estudada, visando a influência de um material manipulável na relação entre aluno e geometria por meio de indução, dedução e exemplificação de conceitos matemáticos, a exploração de vários assuntos relacionados à geometria por meio representações no plano e no espaço, fazendo uso do crivo geométrico, de experimentações por meio de oficinas visando ao trabalho com origami e a construção de caleidoscópios a partir de espelhos, trabalhando também com conceitos trigonométricos, a partir de materiais concretos industriais ou artesanais, construídos pelos próprios alunos com o auxilio do professor.

Quadro 125 - X ENEM

ENEM-2010			
Publicações	**Comunicação Cientifica**	**Pôsteres**	**Total**
Total	561	170	731
Ensino Superior	101	20	121
Educação Básica	460	150	610
Geometria	47	23	50
Experimentação em geometria	2	4	6

Fonte: arquivo do pesquisador.

Ferreira (2010), em seu trabalho de comunicação científica, visou à aquisição do pensamento geométrico buscando contribuir com o desenvolvimento de uma importante habilidade cognitiva: a visualização espacial, com base em uma turma de 35 alunos da 2ª série do ensino médio.

Devido à insatisfação em relação à prática docente, esse trabalho teve como foco a visualização, partindo do pressuposto de que essa habilidade possibilita ao aluno pensar no objeto geométrico, na ausência do mesmo, distinguindo suas características. Para alcançar o objetivo da pesquisa, foram elaboradas tarefas envolvendo a manipulação de sólidos geométricos.

Esse trabalho teve como objetivo rever, formular e/ou aprofundar conceitos e procedimentos matemáticos, por meio do uso de materiais concretos, novas tecnologias com uso de software e atividades tipo "lápis e papel". A metodologia da pesquisa envolveu a elaboração de oficinas, mais especificamente a construção de sólidos geométricos com o auxilio do software POLY.

O trabalho de Ferreira (2010) teve como base o trabalho de Van Hiele. O mesmo perfaz uma sequência de cinco níveis hierárquicos: visualização (reconhecimento), análise, dedução informal (ordenação, síntese ou abstração), dedução formal e rigor.

A opção pelas oficinas permitiu promover o processo da habilidade de desenvolvimento da visualização, favorecendo a descoberta, a observação, a exploração e a construção do conhecimento, sendo que a metodologia possibilita explorar não só as possibilidades dos materiais manipuláveis, como também criar um ambiente propício que oportunize a construção do conhecimento, no sentido de proporcionar significativa melhoria na aprendizagem dos conteúdos matemáticos por parte dos estudantes.

Procurou-se elaborar tarefas voltadas para a construção do conceito de área, focando na Investigação matemática. Na primeira sequência de tarefas, os estudantes receberam orientações para a resolução, pois o conceito iria ser trabalhado de forma intuitiva. Para isso foi necessário, apesar dos alunos já terem visto esse conteúdo anteriormente, uma boa revisão em alguns conceitos geométricos das principais figuras planas, que seriam trabalhadas a todo o momento no estudo dos sólidos geométricos.

A segunda sequência de tarefas envolveu a exploração da visualização para favorecer a aquisição do pensamento geométrico. A orientação dada aos alunos consistiu em representar o que realmente estava sendo visto, esquecendo o nome daquilo que estavam desenhando, buscando o relacionamento entre as dimensões, ângulos e formas.

A terceira etapa de tarefas contemplou o uso de materiais manipuláveis e teve como objetivo fazer o reconhecimento de sólidos de revolução e de poliedros. Os alunos confeccionaram algumas bandeirinhas, a pedido do professor, e também trouxeram de casa várias embalagens, sendo que as bandeirinhas foram confeccionadas com papel color-sete, em formas variadas de polígonos, círculo e de semicírculos, pregadas em palitos, fixadas em um isopor, rotacionadas 360° e descrevendo o sólido que era formado. Em seguida, foi feita a relação entre estes sólidos e as embalagens trazidas de casa, agrupando de acordo com critérios pré-estabelecidos.

A quarta tarefa contou com o uso do software POLY. Foram distribuídos os cadernos de atividades para que os alunos trabalhassem em duplas ou trios; com a finalidade de serem capazes de enunciar a relação de Euler.

Na transição da construção no papel ou no quadro negro para a representação com o software POLY, mudou-se de um referencial estático para um referencial dinâmico. Por meio da visualização e movimentação dos sólidos, houve a exploração das figuras com suas propriedades, possibilitando sua visualização em várias posições. Dessa forma, constatou-se o caráter dinâmico do software POLY, gerando algumas vantagens para o ensino, como acelerar o tempo de muitas construções, encorajar a tentativa e erro. Além disso, o software permitiu a realização do movimento de abrir/fechar o poliedro, isto é, abrir para a forma planificada, e fechar para voltar ao poliedro inicial.

Ferreira (2010) constatou, por meio dos resultados da aplicação das tarefas, uma melhora significativa no desempenho dos alunos, levando a crer que a teoria de Van Hiele, o uso de recursos didáticos diversificados e a interação social foram facilitadores na aprendizagem do reconhecimento e propriedades dos sólidos geométricos; visto que os alunos demonstraram curiosidade e interesse em trabalhar com os recursos concretos e o software nas oficinas.

Batistela (2010) em seu trabalho de comunicação científica mostrou a importância da construção com espelhos de um kit de instrumentos para o ensino de geometria, a partir do qual foi feito um estudo das obras e autores que construíram instrumentos com espelhos e/ou trabalharam com eles no ensino de geometria.

Segundo Batistela (2010), os espelhos simples foram utilizados na visualização, investigação de objetos com linhas de simetria e na exploração de propriedades e fenômenos que acompanharam a reflexão possibilitada por eles (simetria reflexional, translacional e rotacional). Os caleidoscópios com três e quatro espelhos foram utilizados para visualização de tesselações planas ou espaciais, conforme a construção de cada um, enquanto os espelhos articulados foram utilizados para visualizar poliedros regulares.

Na construção desse tipo de kit foi dada atenção aos princípios matemáticos necessários à determinação de ângulos exatos nos espelhos para que, quando articulados, formassem ângulos entre eles que possibilitassem a reflexão perfeita de imagens e a repetição delas sem deixar lacunas ou sobreposições. Para isto, primeiramente, foram confeccionados os moldes dessas peças de espelhos com as medidas e ângulos bem determinados.

As explicações dadas por Batistela (2010) tiveram por objetivo incentivar os professores de matemática de todos os níveis de ensino a conhecer e usufruir do trabalho desenvolvido por meio desse kit de instrumentos; evitando desperdícios de materiais e possíveis erros na confecção das peças, de modo a minimizar equívocos nas reflexões sobre as imagens obtidas nos espelhos.

Os instrumentos sugeridos permitiram o trabalho com conteúdos da geometria envolvendo desde o conceito de simetria até os mais complexos poliedros de Platão e Arquimedes. A construção das bases para a visualização destes sólidos, segundo Batistela (2010), pode ser estabelecida em parceria com o recurso tecnológico, especialmente, com o software Cabri-Géométre, que permite a construção de bases com mais perfeição e em menor tempo, de modo a obter ângulos precisos dos moldes dos espelhos. Nesse sentido, é possível oferecer inúmeras possibilidades de tarefas, seja em nível da educação básica ou ensino superior.

Barbosa (2010), em seu pôster, apresentou um relato de experiência sobre o processo de criação do material didático “peças retangulares”. Para a criação desse material foi feito um estudo do material didático “blocos lógicos”, criado por Dienes em 1976 e usado tanto para trabalhar aspectos da formação do pensamento, quanto aspectos da teoria dos conjuntos.

No trabalho com os blocos lógicos, Barbosa (2010) relatou que havia um equívoco no uso do atributo espessura ao se trabalhar com suas peças, pois eram tratados conceitos “grosso e fino” específicos para entes associados ao espaço tridimensional. No entanto, tais peças eram usadas como representantes de figuras planas (bidimensional), o que causava ambiguidades porque, a partir delas, eram trabalhados os conceitos grosso e fino, que são explorados para as situações com elementos espaciais. Esse foi um dos fatores que estimulou a elaboração de um material que superasse essas dificuldades.

Nesse trabalho Barbosa (2010) optou pela criação de um recurso didático que não trabalhasse com o atributo da “espessura”, daí foi introduzido o atributo da “largura” (largo e estreito). Como havia a pretensão de introduzir no atributo “tamanho” a modalidade “média”, optou-se por trabalhar apenas com peças retangulares. Foi feita a elaboração de um material com 24 peças com a mesma espessura, nas cores amarela, azul, verde e vermelha; o que facilitou sua reprodução. Enquanto o material “blocos lógicos” explorou atributos forma, cor, tamanho e espessura, o material “peças retangulares” explorou os atributos cor, tamanho e largura.

As primeiras experiências com esse material foram realizadas por Barbosa (2010) entre 1997 e 1998, quando foi realizado um estudo piloto numa escola da rede privada em turmas da educação infantil e dos anos iniciais do ensino fundamental. As atividades/jogos foram elaboradas em função do trabalho desenvolvido nas situações concretas. Algumas delas possuíam kits confeccionados com duratex; outras com materiais alternativos tipo borracha miolo (EVA), polionda ou cartão guache.

Segundo Barbosa (2010), no ano de 2000, foi escrito um manual que abordou o uso do material “peças retangulares”, com o qual foi desenvolvido um estudo mais sistemático que constou basicamente de dois momentos: uma proposta metodológica para trabalhar com o respectivo material didático e a aplicação do material, segundo as atividades desenvolvidas.

De modo geral, Barbosa (2010) concluiu que o material atendeu satisfatoriamente o aspecto lúdico, considerando o aspecto do conteúdo relacional. No que diz respeito à função do conteúdo informacional, foram realizados mais estudos no decorrer de 2001, culminando na elaboração de um manual que só foi concluído em 2008.

Pinheiro (2010), em seu pôster, procurou mostrar como o geoplano Circular pode ser um recurso facilitador da aprendizagem de conteúdos significativos de trigonometria, a partir do resgate do ensino da geometria.

No que diz respeito às dificuldades no ensino da trigonometria, Pinheiro (2010) propôs a utilização do geoplano circular, que é um modelo matemático que permite traduzir ideias matemáticas. Pelo fato de o geoplano circular ainda ser pouco explorado, foram propostas várias tarefas envolvendo funções trigonométricas como alternativa para que os alunos formulassem hipóteses, trocassem ideias, descobertas, de modo a enriquecer o momento de aprendizagem.

Barreto (2010), em seu pôster, visou oferecer a oportunidade de relacionar características numéricas dos elementos dos sólidos geométricos a partir da construção dos mesmos, utilizando técnicas de origami modular; que é um origami feito a partir de peças de outro origami. Foi escolhido o uso do origami por se tratar de uma arte de baixo custo, que pode funcionar como um grande aliado no ensino de geometria espacial. Destaca-se também o fato de que para conseguir fazer um determinado origami é necessário realizar uma sequência de dobras e isso auxilia também a memória e a concentração.

O trabalho foi desenvolvido por Barreto (2010) ao longo de três semestres letivos, em uma disciplina do curso de licenciatura de matemática, no qual o licenciando era levado a refletir sobre os problemas do ensino e aprendizagem da matemática, através da elaboração uma sequência didática feita pelos graduandos, para que fosse aplicada em uma turma de uma escola regular.

Sob a supervisão de Barreto (2010), seus alunos de graduação aplicaram a sequência didática do origami circular com uma turma de alunos da 2ª série do ensino médio, dividida em cinco grupos. A dinâmica da aula teve início com a definição oral, por parte dos licenciandos, dos conceitos de polígonos e poliedros. Posteriormente, foi apresentado um dodecaedro construído por um origami modular, com destaque aos elementos deste sólido. Feito isso, cada aluno recebeu uma apostila contendo um pouco da história do origami, ilustrações com os passos para construção dos módulos triangulares, quadrangulares e peças de conexão.

Cada grupo recebeu a tarefa de construir um sólido: cubo, cuboctaedro, pirâmide quadrangular, octaedro e tetraedro, com o auxílio de um professor em formação, sendo que o grupo responsável pela construção do cuboctaedro teve um maior grupo de integrantes, para que fosse construído em tempo hábil. Ao final das construções, cada grupo teve que escolher um integrante para apresentar para a turma o poliedro construído e as respostas da atividade, que propunha uma sequência de perguntas que levavam o aluno a deduzir que a quantidade de arestas do sólido é igual à metade do total de arestas de todos os polígonos usados na construção e que representam suas faces.

Ao final desse trabalho, Barreto (2010) percebeu que a construção dos módulos através de dobraduras exigiu máxima concentração dos alunos. E se um módulo fosse construído de maneira inadequada à estética, até mesmo a montagem do poliedro ficaria comprometida, sendo que a estética dos primeiros módulos nem sempre era boa, mas com a repetição o trabalho adquiriu melhor qualidade.

Os grupos de alunos demonstraram certa competição à medida que exibiam suas construções e exigiam perfeição na execução das tarefas de todos os componentes. A construção dos poliedros permitiu que os alunos observassem e identificassem seus elementos além de postular características comuns e relações quantitativas.

Silva (2010), em seu pôster, apresentou um trabalho com estudantes do 9º ano do ensino fundamental envolvendo tetradecaedros, utilizando a planificação de octaedros regulares. Este trabalho foi desenvolvido durante a participação do autor como cursista no programa de gestão da aprendizagem escolar (GESTAR II), que foi oferecido pelo governo estadual da Bahia.

Seu principal objetivo a formação continuada dos profissionais em educação municipal/estadual com foco na melhoria do processo de ensino-aprendizagem. Na modalidade semipresencial, ele forneceu módulos de atividades teóricas e práticas, com encontros quinzenais para oficinas coletivas, nas quais os professores tiveram a oportunidade de realizar algumas dessas atividades e discutir a sua prática pedagógica em grupo, trocar experiências com outros colegas, compartilhar reflexões e estratégias, esclarecer dúvidas e questionamentos, elaborar outras situações didáticas para sala de aula e realizar uma análise crítica antes e depois da aplicação das atividades para os alunos. Para a realização das atividades, o programa contou com professores formadores que realizaram o trabalho de mediadores qualificados para atuarem no GESTAR II.

Tendo em vista a variedade de elementos geométricos que podem ser explorados aplicando essa técnica, foi escolhido pela autora o origami, por também auxiliar o professor na elaboração de aulas mais atrativas, e tornar o conteúdo mais fácil para o estudante.

A atividade realizada sugeriu a construção de um octaedro regular que, em seguida, teria suas pontas cortadas, obtendo assim um octaedro truncado. Nessa atividade foram abordados os conceitos dos polígonos regulares e revestimento de piso, reconhecimento de poliedros e prismas, poliedros regulares e polígonos.

Os objetivos dessa atividade de pesquisa, segundo Silva (2010), foram reconhecer polígonos e analisar aqueles que são adequados para recobrir superfícies, caracterizar poliedro regular e semirregular, estabelecer relações entre os nomes dos poliedros e os números das faces, identificar poliedros regulares e semirregulares adequados para o preenchimento do espaço.

A construção do octaedro truncado permitiu explorar muitos conceitos de formas geométricas. Por isso foi feita uma abordagem das formas presentes no cotidiano, de modo a explicar aos alunos o modo de se reconhecer um poliedro, mostrando a diferença entre poliedros côncavos ou convexos, abordando o conceito de polígono e poliedro regular.

Nessa atividade, as dobraduras foram fundamentais não só para exploração da teoria sobre os poliedros, como também foram essenciais para o desenvolvimento da habilidade de planificação dos alunos. Para fazer o octaedro de origami foi utilizada uma planificação que ajudou os alunos na produção de modelos de octaedro. Além disso, o trabalho com o origami contribuiu para explorar outros conceitos importantes de geometria que poderiam auxilia-los na compreensão da atividade.

A atividade foi bastante produtiva, segundo Silva (2010), pois os estudantes demonstraram que compreenderam a teoria desenvolvida sobre os poliedros. Através da dobradura foi possível sistematizar melhor os conceitos de geometria presentes nessa atividade dando um significado mais apropriado aos conceitos produzidos pelos alunos. No início da atividade, alguns estudantes apresentaram dificuldades para distinguir figuras planas e espaciais e, com essa atividade, ficou evidente a diferença entre plano e espaço.

Ao final da atividade, a maioria dos alunos, segundo Silva (2010), relatou que gostou de fazer a atividade, pois pode aprender um pouco mais sobre geometria de forma divertida e prazerosa. Contudo, para alguns desses estudantes, essa atividade configurou mais do que uma forma prazerosa de aprender, serviu também como uma prova de que é possível vencer as dificuldades e abarcar conjecturas, compreendendo alguma das suas funções da matemática em tarefas simples do cotidiano.

APÊNDICE B – Análise qualitativa das Reuniões Anuais da Associação Nacional de Pós-Graduação em Educação (ANPED) de 2000 à 2013

Pais (2000), em seu trabalho de comunicação cientifica, abordou o problema da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria no Ensino Fundamental, tendo como finalidade principal a contribuição para uma fundamentação mais consistente dessa utilização. Optou por uma abordagem fenomenológica, dando prioridade a uma analise do ensino-aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental de natureza epistemológica, onde buscou-se ampliar o embasamento teórico.

A justificativa da escolha deste tema decorreu da expectativa de utilização de materiais didáticos por parte de professores que atuam no Ensino Fundamental, com a pretensão de que as dificuldades de ensino pudessem ser amenizadas pelo suporte da materialidade. O princípio do aprender fazendo, implícito nessa tendência pedagógica, por vezes, foi entendido como uma exclusiva manipulação de objetos, esquecendo a estreita relação que deve haver entre a experiência e a reflexão. Analisando os materiais didáticos no ensino da matemática, observou-se a necessidade de um cuidado especial com utilização desses recursos, ressaltando a importância da competência do professor nesse processo.

Os recursos didáticos envolveram uma diversidade de elementos utilizados como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem. Sua finalidade foi servir de interface mediadora para facilitar a relação entre professor, aluno e o conhecimento em um momento preciso da elaboração do saber.

Foram utilizados modelos geométricos que funcionaram como uma primeira forma de representação dos conceitos geométricos. Os desenhos constituíram uma segunda forma de representação, ainda acessível pela sensibilidade, porém, com uma complexidade maior devido à exigência da interpretação de seu significado, principalmente, se tratando de uma figura espacial. Na sucessão de complexidade do processo de aprendizagem da geometria estavam as imagens mentais, as quais caracterizavam como um suporte bem mais sofisticado de representação conceitual, pois, se por um lado, tais imagens estão mais próximas da abstração, por outro, distanciam-se dos conceitos pelo seu aspecto subjetivo.

Além dos recursos didáticos no ensino da geometria e os modelos, desenhos e formação de conceitos, esse trabalho abordou as configurações geométricas, as inversões didáticas e os obstáculos epistemológicos do ensino da geometria. Analisou-se também a origem do conhecimento e do ensino da geometria, através da compreensão do fenômeno do conhecimento de várias tendências epistemológicas, admitindo a existência de uma estrutura dualista no entendimento humano, ressaltando as dimensões da sensibilidade e da racionalidade.

Na tentativa de esboçar um estudo inicial deste problema, Pais (2000) fez menção a quatro grandes tendências epistemológicas apresentando soluções diferenciadas: o racionalismo e o Ensino da Geometria (defende que a razão é a única fonte legítima de conhecimento), o empirismo e o Ensino da Geometria (experiência é considerada a única fonte legítima do conhecimento), o empirismo Moderado ou Intelectualismo (representa a primeira tentativa de conciliação entre as posições extremas do racionalismo e do empirismo), e o Apriorismo ou Racionalismo Moderado (uma segunda tentativa de conciliação entre o racionalismo e o empirismo).

Após isso, Pais (2000) analisou as manifestações no ensino da geometria, sendo que nas atividades de ensino de geometria, envolvendo o uso dos materiais foi preciso estar duplamente vigilante para que toda informação proveniente de uma manipulação esteja em sintonia com algum pressuposto racional e, ao mesmo tempo, que todo argumento dedutivo esteja associado a alguma dimensão experimental.

Quanto ao uso de materiais didáticos no ensino da geometria, este estudo colocou em evidência duas concepções igualmente extremas e redutoras dos valores educacionais deste conteúdo: uma consistia no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de ideias prontas, acabadas e acessíveis, somente através do método axiomático em seu aspecto formal. A outra se expressava pela visão de que o ensino da geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhando somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e de desenhos.

Segundo Pais (2000), uso de materiais didáticos no ensino da geometria coloca em evidência duas concepções igualmente extremas e redutoras dos valores educacionais deste conteúdo, onde uma consiste no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de idéias prontas, acabadas e acessíveis somente através do método axiomático em seu aspecto formal e a outra expressa-se pela visão de que o ensino da geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhado somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e de desenhos.

Guimarães (2006), em seu pôster, apresentou um trabalho referente a aprendizagem do conteúdo específico de geometria espacial, com o objetivo de identificar a relação entre construção e abstração como uma representação cognitiva do conhecimento em geometria espacial tendo trabalhado com 55 alunos do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Miguel Couto, na cidade do Cabo Frio- RJ, onde o foco foi a construção e analise de sólidos geométricos.

A primeira etapa do trabalho de Guimarães (2006) foi propor aos educandos a planificação de quatro cubos, com determinações prévias de suas medidas, onde os alunos deviam identificar elementos que determinavam a figura escolhida (faces, arestas, ângulos, entre outros).

Após o reconhecimento e identificação de todas as características planas, a segunda etapa desse trabalho consistiu em transportar o desenho da planificação do cubo para uma cartolina, onde os alunos deveriam fazer o recorte desse desenho e, em seguida, colar suas arestas, de modo a construir o cubo.

Após essa construção a sala foi dividida em grupos de quatro componentes, de modo que cada componente do grupo pudesse construir, manipular e fazer a representação da figura do cubo. Neste momento os alunos foram orientados sobre a construção representativa da figura geometria que ilustrou a conclusão do trabalho, onde cada grupo apresentou uma forma geométrica diferenciada, sendo que os planos de cada direção do espaço da figura deveriam ter uma única cor.

O trabalho atingiu seu auge na colagem dos cubos confeccionados, onde esse trabalho com essa associação de faces e cores propôs ainda os resgates de conceitos de analise combinatória, mesmo que esse não tenha sido o objetivo principal desse trabalho, ou seja, a capacidade de abstrair os vários planos direcionais comuns a figura estudada .

O principal resultado citado por Guimarães (2006) foram as conclusões relatadas pelos próprios alunos, onde constatavam bons resultados, irradiando, sobretudo a esperança de que seja possível todos o aprendizado. Outro fator observado por ele foi a imensa alegria e prazer dos alunos durante as alunas que ocorreram a manipulação e a construção dos artefatos.

De modo geral Guimarães (2006) salientou que a possível interlocução entre abstração e construção seja capaz de promover ações retificadoras como a recomendação de um novo paradigma, onde a percepção e a imaginação possam ser fortalecedoras de potencialidades epistemológicas.

Farias (2008) em seu trabalho de comunicação cientifica avaliou a representação de sólidos geométricos nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), no Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2007 e em livros didáticos de Matemática destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental, onde se buscou verificar o que seria ensinar Espaço e Forma nos dias atuais, a fim de contribuir com conhecimentos mais esclarecedores para a formação inicial de docentes que atuam nessa fase de escolaridade obrigatória.

A escolha dos Parâmetros Curriculares Nacionais como fonte de dados para a pesquisa, justificou-se pelo fato dessa publicação ser um referencial curricular para todo o País e servir como dispositivo de orientação didático para o professor, auxiliando-o na execução de seu trabalho, principalmente no planejamento das aulas, na reflexão sobre a prática educativa e na análise do material didático, pois essa fonte de referência estabelece um conjunto de competências a serem trabalhadas no estudo inicial da Matemática, por meio dos conteúdos agrupados em quatro blocos: número e operações; espaço e forma; grandezas e medidas e tratamento da informação.

A opção em escolher as resenhas do Guia de Livros Didáticos como fonte de dados para a pesquisa justificou-se porque este documento é o resultado de um trabalho que vem conquistando credibilidade junto aos educadores, principalmente, por tratando-se de um trabalho elaborado no plano institucional.

No que se refere à opção em pesquisar livros didáticos Farias (2008) justificou que esse material tem um papel importante na atuação do professor e na orientação das atividades dos alunos, pois é estreita a relação entre a formação docente e o papel a ser atribuído ao livro.

O referencial para análise desse estudo foi composto pela Teoria Antropológica do Didático e por alguns trabalhos que tratam do estudo da Geometria para a fase inicial da educação básica. O objetivo foi analisar as tarefas e as técnicas sugeridas nos livros didáticos, de acordo com os seguintes registros: o escrito, o gráfico, o verbal, o gestual, o material, entre outros. Sendo essas representações denominadas de objetos ostensivos, e o conceito em si de um objeto não-ostensivo.

Para ilustrar essa relação entre objetos ostensivos e não-ostensivos, Farias (2008) citou uma atividade que utiliza um dado (objeto ostensivo) por meio do qual o professor pode trabalhar, entre outros, os conceitos de cubo, de quadrado, de face, de aresta, de vértice, dos primeiros números naturais que, segundo o referencial teórico utilizado neste trabalho, são objetos não-ostensivos, ocorrendo dessa forma a relação entre representação e conceitos geométricos.

Inicialmente, a realização da pesquisa nos PCN e no Guia de Livros Didáticos levou a extrair uma grande quantidade de unidades consideradas significativas e que dizem respeito aos aspectos metodológicos do estudo de geometria hoje, nos primeiros anos da escolarização obrigatória. Em seguida, passou-se a analisar as frases significativas das fontes, revelando, portanto, uma passagem das ideias e ações individuais para o coletivo, de modo realizar a análise teórica, ou seja, trabalhar os conceitos descritos nas referências teóricas no contexto das temáticas que aparecem na pesquisa.

Para o estudo da representação do espaço nos livros didáticos Farias (2008) delimitou como fonte da pesquisa quatro coleções escolhidas entre as trinta e cinco que constam no Guia de Livros Didáticos/2007, a partir de uma leitura das trinta e cinco resenhas contidas no Guia do PNLD, a fim de eliminar as coleções na medida em que foram identificadas críticas negativas relacionadas às mesmas.

Dentre os aspectos metodológicos sugeridos por esses referenciais, Farias (2008) enfatizou a importância de diversificar e relacionar diferentes representações e valorizar a diversificação de diferentes linguagens.

A partir da análise das resenhas do PNLD (2007), Faria (2008) constatou-se que as coleções que receberam críticas positivas em suas avaliações, valorizaram a diversificação e relação entre diferentes representações. Como existem diferentes maneiras de representar as ideias matemáticas, o destaque dessa confluência serve de alerta para que se possa implementar, efetivamente, em sala de aula, essas ideias matemáticas.

Como parte das competências matemáticas explicitadas no PNLD (2007), comunicar-se utilizando as diversas formas de linguagem empregadas na Matemática é uma competência que exige do professor e da escola, segundo Farias (2008), a visão da importância didático-metodológica das diferentes representações matemáticas.

Um dos tipos de tarefas mais frequentes nos livros didáticos analisados, de acordo com Farias (2008), consiste em levar o aluno a construir um sólido geométrico, a partir do fornecimento da representação de um sólido geométrico em perspectiva e a sua planificação. De acordo com Farias (2008), trata-se de um tipo de atividade que valoriza a dimensão experimental no estudo da geometria, procurando quebrar a forte influência formalista do passado, quando predominava o pensamento euclidiano na prática pedagógica do ensino da Matemática.

Assim, no contexto desse trabalho, ao valorizar a parte experimental da geometria, entendemos que se trata de buscar maior equilíbrio entre essa visão mais formal e outra de cunho intuitivo. Farias (2008) constatou que os referenciais curriculares valorizam o estudo do espaço e forma pautados em um trabalho de caráter experimental com o uso de variados objetos ostensivos, sendo que os PCN (BRASIL, 1998) recomendam, na lista de conteúdos conceituais e procedimentais relativos ao espaço e forma para o primeiro e para o segundo ciclo, a construção e representação de formas geométricas.

Farias (2008) verificou que esse tipo de tarefa está presente, também, nos segundos e terceiros anos iniciais de todas as coleções selecionadas. Uma explicação pode ser o fato de que em tal fase, a criança já possui condições para passar de observadora para construtora, tem capacidade para cortar, colar, pintar e construir, portanto, possui as habilidades necessárias para desenvolver atividades que envolvem construções concretas com medidas e sem medidas.

A organização didática associada a esse tipo de tarefa constituiu, segundo Farias (2008), em uma das técnicas experimentais de recortar, dobrar e colar que, a rigor, não são ações puramente matemáticas. Porém são conhecimentos prévios necessários para efetivar o estudo da matemática, tais como técnicas que, em parte, atendem o objetivo da primeira fase do Ensino Fundamental, que é criar condições para a formação do raciocínio espacial da criança.

Verificou-se que esse tipo de tarefa analisada requer para a sua realização, segundo Farias (2008), que sejam acionadas uma pluralidade de registros ostensivos: registro da perspectiva; registro da planificação; registro da língua materna escrita; registro da linguagem geométrica escrita; registro do desenho; e objetos materiais induzidos e objetos não ostensivos.

Ao fornecer fotos de objetos em forma de sólido geométrico ou representações de sólidos geométricos, um dos tipos de tarefas presentes nos livros leva o aluno a pesquisar figuras de objetos que têm a forma de sólidos geométricos.

Os PCN (BRASIL, 1998) sugerem na lista de conteúdos relacionados ao espaço e forma para o primeiro ciclo a valorização da troca de experiência com seus pares como forma de aprendizagem. Por outro lado, o Guia de Livros Didáticos ao tratar dos princípios gerais do ensino da Matemática, defende um ensino que considere o aluno como sujeito ativo de seu processo de aprendizagem e que incentive sua autonomia e sua interação com os colegas.

A técnica didática presente neste tipo de tarefa, de acordo com Farias (2008), primeiramente, leva o aluno a pesquisar figuras geométricas em revistas e jornais; em seguida, recortar os desenhos em que apareçam figuras geométricas; na sequência, o aluno organiza um cartaz colando os recortes para, posteriormente, socializar o trabalho com a professora e os alunos. Na concepção do autor, tal organização didática é muito importante para estimular a prática da observação, da investigação e da ação, possibilitando o desenvolvimento da criatividade e da crítica.

Para a utilização das técnicas didáticas sugeridas pelo livro didático, os alunos utilizarão dos seguintes registros ostensivos: registro da perspectiva que são as representações dos sólidos geométricos por uma perspectiva; registro do desenho ou fotos; registro de objetos materiais; os livros sugerem o uso de revistas e jornais, mas também está implícito o uso de tesoura para recortar e colar para organização do cartaz; registro da oralidade.

A partir das constatações sintetizadas nas análises realizadas dos PCN (BRASIL, 1998), do Guia de Livros Didáticos do PNLD e também nas tarefas propostas nos livros didáticos, Farias (2008) definiu quatro categorias abertas para as quais convergem as confluências temáticas e também os tipos de tarefas mais representativos do estudo da geometria nessas fontes de influências da transposição didática. Na realidade, são quatro dimensões interligadas de uma mesma questão que é o significado do estudo da geometria em nível das séries iniciais: contextualização do estudo da geometria, diferentes articulações no estudo da geometria, sistematização do conhecimento geométrico e diversificação de linguagens no estudo da geometria.

Os resultados dessa investigação revelaram dentre outros aspectos importantes, que o ensino do espaço e forma, atualmente, está sendo orientado no sentido de levar a escola e os professores a uma valorização do trabalho metodológico por meio dos vários tipos de articulações no ensino da geometria, isto é, relacionar diferentes representações e valorizar a diversificação de diferentes linguagens no estudo da geometria.

As pesquisas sobre o ensino de geometria nessa fase da escolarização, de acordo com Farias (2008) apontam que as recomendações postas nas fontes bibliográficas analisadas ainda não estão sendo uma realidade nas salas de aula das crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse trabalho apontou que a formação do professor para ensinar Matemática aos alunos dos primeiros anos da escolaridade obrigatória não tem assegurado uma consistente base teórica e diversidade de conhecimentos do professor sobre os conteúdos de ensino que envolve conceitos matemáticos, ou seja, o conhecimento de Matemática ainda não está sendo valorizado na formação do professor para ensinar Matemática nos anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Portanto, este trabalho se propôs a contribuir com reflexões referentes aos aspectos geométricos específicos para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, aponta e discute algumas questões de ordem didático-metodológicas que colaboram para o trabalho qualitativo e reflexivo nessa área de conhecimento ainda pouco trabalhada na prática de sala de aula, em termos de valorizar, ao mesmo tempo, a dimensão didática e conceitual da matemática. Entende-se que se essa questão estiver sendo bem trabalhada no processo de formação inicial do professor, o ensino de Geometria poderá, segundo Farias (2008), de forma efetiva e com qualidade, fazer parte da aula de matemática desde os primeiros anos da escolarização obrigatória.

Lamonato (2008) em seu trabalho de comunicação cientifica fez um estudo da aprendizagem de professoras da Educação Infantil ao estudarem e ensinaram geometria através de tarefas com características exploratório-investigativas, onde o objetivo desse estudo consistia em investigar quais conhecimentos as professoras participantes relevaram ao realisar tarefas exploratório-investigativas com o conteúdo geométrico, ma discussão do ensino de geometria.

Lamonato (2008) trabalhou com quatro professoras que lecionavam na última etapa da Educação Infantil, todas atuavam no ensino público de uma cidade do interior de São Paulo. Em relação a metodologia aplicada neste trabalho, tratava-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, onde os dados foram provenientes dos registros escritos das professoras e das videogravações feitas durantes os encontros.

Na dinâmica desse trabalho foram propostas tarefas de caráter exploratório-investigativo, onde as professoras envolveram-se nas atividades mobilizando e (re)construindo não somente conhecimentos de conteúdo especifico, mas também foram discutidos aspectos relacionados à formação escolar e às suas práticas pedagógicas.

Lamonato (2008) trabalhou com as professoras a tarefa “Recortando Triângulos”, onde a partir de uma folha de papel dobrada ao meio os alunos tinham que recortar triângulos fazendo para o mesmo apenas dois cortes na parte dobrada da folha. Nesta etapa do trabalho os alunos tiveram que analisar as figuras obtidas ao desdobra a folha de papel. Na realização dessa tarefa, foram desenvolvidos vários enunciados de forma a melhorar o desenvolvimento da mesma, no inicio a tarefa tinha um caráter mais aberto a discussão, como o desenvolvimento da mesma a tarefa foi mais direcionada, nesta os alunos tinham que recortar triângulos equiláteros, escalenos e isósceles e a partir desses recortes fazer uma analise das figuras geométricas obtidas ao desdobra a folha de papel.

E segundo Lamonato (2008) este trabalho indicou o crescimento do conhecimento do conteúdo especifico das professoras, conduzindo-as naturalmente ao questionamento e a problematização de suas práticas, tendo como consequência as construções e reelaborações de conhecimentos. E as aprendizagens das professoras apontaram alguns fatores propulsores para o desenvolvimento profissional como a formação a partir da exploração-investigação matemática e a oportunidade de reflexão compartilhada.

Barbosa (2011) em seu trabalho de comunicação cientifica investigou a mobilização do pensamento geométrico de professores que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo como meta construir, implementar e analisar uma proposta didática no ensino de Geometria em cursos de formação continuada de professores , sendo que o trabalho completo deu origem a uma dissertação de mestrado, na qual foram analisados quatro estudos de casos, sendo citado neste texto apenas o estudo do caso da professora Vanda.

Nesse trabalho foi usado o termo objeto apenas em sua acepção concreta como sinônimo de material concreto, material manuseável ou material manipulativo. O uso de tais objetos de deu pelo fato que Barbosa (2011) em sua prática quanto professora e formadora ter mostrado a dificuldade de compreensão que algumas pessoas apresentam nas transformações sofridas por um objeto tridimensional para o bidimensional e vice-versa, onde muitas vezes essa dificuldades pode estar associada a identificação dos diferentes elementos que compõem esses objetos, de maneira que essas pessoas não conseguem representar determinadas propriedades desses objetos em decorrência da deficiência ou ausência do ensino da Geometria.

O Trabalho de Barbosa (2011) foi de caráter qualitativo, e buscava reconhecer os saberes que eram mobilizados pelos professores que lecionam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de Ouro Preto (MG).

Na dinâmica do trabalho procurou desenvolver atividades não rotineiras, realizadas a partir de materiais manipulativos (argila, espelhos, palitos, cartolina, jogos, geoplano, etc.) e promover discussões acerca da utilização dessas atividades em sala de aula, troca de experiências e criação de materiais/atividades pelas participantes, onde foi proposto ainda que os participantes construíssem seu próprio dicionário de geometria.

Antes do desenvolvimento das atividades foi feito um diagnostico inicial em relação aos conhecimentos geométricos da professora Vanda, onde em evidenciou-se algumas das habilidades de visualização de Vanda, entre elas a discriminação visual ao comparar quadriláteros e identificar semelhanças e diferenças entre eles, a percepção de figura ao identificar figuras específicas em diferentes objetos, a memória visual ao associar o objeto cubo à sua planificação e alguns saberes relacionados ao conteúdo.

A atividade desenvolvida neste trabalho foi o “Problema dos ladrilhos”, no qual devia-se encapar cadernos usando figuras geométricas de tamanhos e cores variadas, de maneira que não houvesse espaço entre elas. Para tal atividade Vanda utilizou triângulos, trapézios, quadrados e um círculo para encapar seu caderno, comentando todas as formas e destacando os nomes e algumas propriedades das mesmas.

Outra atividade citada por Barbosa (2011) foi a classificação de embalagens de acordo com critérios definidos no desenvolver da mesma (forma). Onde foi feito o questionamento pelo fato de algumas embalagens rolarem e outras não, se analisando as respostas dos participantes, sendo posteriormente planejada a criação de um modelo de embalagem, onde foi proposto a tarefa de modelar sólidos geométricos usando argila e representar três perspectivas diferentes de um mesmo objeto (vista de cima, vista frontal e vista lateral).

Segundo Barbosa (2011) embora tenham sido produzidos corretamente todos os sólidos geométricos, a professora Vanda teve dificuldade em classificar o prisma retangular e o prisma triangular, tendo que inverter a posição dos mesmos para que a classificação se torna-se mais fácil.

Ao final desta atividade foi realizado um diagnostico final com sete questões, onde a primeira tinha por objetivo classificar objetos em poliedros e não poliedros a partir de suas semelhanças e diferenças e a segunda questão era planificar uma embalagem, mantendo as características (forma e quantidade) dos elementos faces, vértices e arestas.

Barbosa (2011) a pesquisa revelou que a participação em um grupo de estudo voltado para aprendizagem de conteúdos geométricos pode contribuir para a ampliação e mobilização de saberes e para o desenvolvimento profissional de professores. E que caso de Vanda, a professora não apenas se desenvolveu profissionalmente, como também contribui para o desenvolvimento profissional de seus pares. Para ela, a participação no grupo foi também a oportunidade de aprender novas maneiras de trabalhar a Geometria com seus alunos.