UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

NATÁLIA OJEDA MASTRONICOLA

TRIGONOMETRIA POR APPS

SÃO CARLOS
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

NATÁLIA OJEDA MASTRONICOLA

TRIGONOMETRIA POR APPS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre, sob orientação do Professor Doutor João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS
2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M423ta

Mastronicola, Natália Ojeda.
Trigonometria por apps / Natália Ojeda Mastronicola. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
66 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Trigonometria. 2. Matemática - ensino. 3. Engenharia didática. 4. GeoGebra (Software de computador). 5. *Smartphones*. 6. *Tablet* (Computador). I. Título.

CDD: 516.24 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
DM/UFSCar - orientador

Prof. Dr. Luiz Augusto da Costa Ladeira
ICMC-USP

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM-UFSCar

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que com carinho de Pai escutou e atendeu os meus pedidos, me capacitou, me deu saúde e forças para concluir este trabalho.

Aos meus pais, Antonio Carlos e Valnia, por tudo que me ensinaram e por terem me apoiado durante toda minha caminhada acadêmica, sem nunca medir esforços para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu orientador, Professor Doutor João Carlos Vieira Sampaio, que com sua paciência, incentivo e valiosos ensinamentos tornaram possível a realização desse trabalho.

A todos os professores do PPGECE, pela partilha do conhecimento, que enriqueceram minha prática pedagógica e me tornaram uma profissional melhor.

Aos meus colegas de curso, pelo companheirismo e amizade: à Juliana minha eterna parceira, à Roberta pelos momentos de lazer pós-aula, ao Marcos e ao Léo por me proporcionarem pouso, ao Michel pelas cantorias, à Regiane, Jonas, Natália Barros, Juliano, entre outros que tornaram as segundas-feiras em São Carlos mais alegres. Partilhamos nossos medos, frustrações, alegrias, vibramos a cada conquista, a cada disciplina concluída. Vocês tem grande participação na realização desse sonho. Obrigada!

À Kamila pelo carinho e companheirismo, me lembrando a todo o momento que eu era capaz.

À direção da EMEF “Profª Lúcia Novais Brandão”, por permitirem que eu realizasse ali a minha pesquisa e também a todos os funcionários e professores pela acolhida e incentivo.

Aos alunos do nono ano (2013) da EMEF “Profª Lúcia Novais Brandão”, pelo carinho e dedicação com que desenvolveram as atividades propostas neste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, a autora pretende mostrar uma experiência de aplicação de atividades alternativas ao ensino tradicional de trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental. A escolha do tema veio da constatação dessa pesquisadora das dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com um amontoado de fórmulas sem significado algum para eles. O objetivo das atividades foi estimular os alunos a construir o seu próprio saber, culminando em uma aprendizagem significativa. Pretendeu-se formular atividades com o uso de aplicativos para smartphones e tablets. O avanço tecnológico dos celulares tem proporcionado um leque de diferentes ferramentas que cabem na palma da mão e podem ser acessadas instantaneamente. Algumas dessas ferramentas proporcionam o uso de tablets e smartphones no contexto educacional, auxiliando a aprendizagem dos alunos de forma inovadora, tornando-a mais prazerosa. Todas as atividades seguiram o percurso da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. As atividades foram aplicadas em uma escola em que a pesquisadora é professora.

Palavras-chaves: Trigonometria. Ensino de matemática. Engenharia didática. GeoGebra. Apps. Smartphones. Tablets.

ABSTRACT

In this work the author intends to show an experience of implementation of alternative activities to traditional teaching of trigonometry in 9th year of Fundamental School (Brazilian curriculum). The theme choice came from the author's finding of difficulties presented by pupils in face of a great amount of formulas without meaning for them. The goal of these activities was to stimulate the students to make them construct their own knowledge, culminating in a meaningful learning. It was intended to formulate activities with the use of smartphones and tablets. The technological advance of cell phones has provided a range of different tools that fit in someone's palm and can be accessed immediately. Some of these tools provide the use of tablets and smartphones in the educational context, aiding student's learning in an innovative form, making it more pleasurable. All activities followed the guidelines of didactical engineering as research methodology. The activities were applied in a school were the author is a teacher.

Keywords: Trigonometry. Mathematics teaching. Didactical engineering. GeoGebra. Apps. Smartphones. Tablets.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho relatamos a elaboração e a experiência da aplicação de folhas de atividades para o 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal localizada em Cedral-SP. Nosso objetivo foi conduzir o aluno na construção autônoma de conceitos trigonométricos, trazendo significado para as fórmulas do seno, cosseno e tangente e utilizá-las em contextos práticos. Para isso desenvolvemos seis folhas de atividades, todas elas levando o aluno a utilizar apps para smartphones e tablets, para permitir que o aluno, ao final das tarefas, fosse capaz de medir objetos com alturas inacessíveis.

A escolha do tema surgiu da percepção da professora pesquisadora de que os alunos encontram dificuldades em adquirir significado sobre a Trigonometria, que na maioria das vezes se resume em apenas um amontoado de fórmulas sem sentido algum.

Não há como negar que as tecnologias dominaram o mundo contemporâneo. A geração de alunos que estão atualmente nas nossas salas de aula vive em contato com elas, trazendo a necessidade de mudança na didática do professor de forma a inserir essas tecnologias no ensino para incentivar os alunos. Nos dias de hoje a maioria dos alunos possue um smartphone, e na maioria das vezes nós professores o vemos como um inimigo, pois os alunos acabam preferindo mexer no seu aparelho a ouvir as explicações. Desenvolver atividades pedagógicas através deles pode servir também para orientar os alunos das formas úteis de se utilizar o smartphone e o motivar a aprender.

Neste trabalho percorremos o trajeto da Engenharia Didática para validar nossas hipóteses e chegar ao nosso produto final.

Essa dissertação foi dividida em cinco capítulos descritos brevemente a seguir.

No primeiro capítulo falamos sobre a história da Trigonometria, desde seus primeiros indícios na civilização egípcia até a obra trigonométrica mais influente da Antiguidade, o Almagesto, feito por Cláudio Ptolomeu.

No segundo capítulo apresentamos brevemente alguns conceitos da Engenharia Didática e discutimos a inserção das tecnologias da informação como ferramenta pedagógica, em especial os smartphones e tablets.

No terceiro capítulo delimitamos os conceitos matemáticos que são pré-requisitos para a aprendizagem da trigonometria. São eles: triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos. Este capítulo também mostra as relações trigonométricas.

No quarto capítulo apresentamos os apps (aplicativos para plataforma Android e IOS) sugeridos para nossa atividade, elencando suas funcionalidades.

No quinto capítulo descrevemos as aplicações das atividades em três momentos distintos. Primeiro na sala de aula usando a calculadora. Em um segundo momento, na sala de informática, usando o software GeoGebra, sendo sugerido o download do app do mesmo programa para desenvolvimento da atividade no próprio smartphone ou tablet. E por fim, uma atividade de campo, onde medimos a altura do Cristo Redentor da cidade utilizando os conceitos trigonométricos aprendidos. Neste capítulo validamos nossas hipóteses e chegamos ao nosso produto final que se encontra no Apêndice A.

Analisando todo esse processo foi possível responder a questão da nossa pesquisa: "Utilizar tecnologias no ensino, como os aplicativos para smartphones, incentivam e motivam os alunos, permitindo que eles construam uma aprendizagem significativa da Trigonometria?"

1. TRIGONOMETRIA – UM POUCO DE HISTÓRIA

1.1 Egito

Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria apareceram no Egito, observado no Papiro de Rhind[1], datado de aproximadamente 1650 a.C., que em um de seus problemas pede para calcular o **seqt** de um pirâmide com 250 cúbitos[2] de altura e uma base quadrado com lado medindo 360 cúbitos. O **seqt** seria um conceito equivalente à cotangente de um ângulo e necessário para manter a inclinação constante das faces de uma pirâmide. Segundo Boyer (1974, p. 14) “a palavra egípcia **seqt** significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura.” Assim o **seqt** é o que hoje chamamos de inclinação de uma parede.

1.2 Babilônia

Dos registros históricos da matemática babilônica a Tábula de Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.) seja talvez a de maior destaque. Seus dados estão em escrita cuneiforme e o sistema de numeração é o sexagesimal. Morey (2009) escreve que a Plimpton 322 é um fragmento de uma tábula cuja parte esquerda foi perdida. No que restou há uma tabela com quatro colunas e quinze linhas e mesmo assim não está totalmente legível. Porém os dados que faltaram ou ilegíveis foram restaurados por Otto Neugebauer. As informações restauradas aparecem na tabela da figura 1, entre colchetes.

Figura 1 – Transcrição da Tábula de Plimpton 322 restaurada.

O tablete Plimpton 322			
I	II	III	IV
[1,59, 0,] 15	1, 59	2, 49	1
[1, 56, 56,] 58, 14, 50, 6, 15	56, 7	3, 12, 1[6] (?) [1, 20, 25]	1
[1, 55, 7,] 41,15,33,45	1, 16, 41	1, 50, 49	1
[1,] 5, [3, 1,] 0, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	1
[1,] 48, 54, 1,40	1, 5	1, 37	1
[1,] 47, 6, 41, 40	5,19	8, 1	1
[1,] 43, 11, 56, 28, 26, 40	38,11	59, 1	1
[1,] 41,33,59,3,45	13,19	20, 49	1
[1,] 38, 33, 36, 36	9, 1[7], [8,1]	12, 49	1
1, 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	1
1,33, 45	45	1, 15	1
1,29,21,54,2, 15	27,59	48, 49	1
[1,] 27, 0, 3, 45	7, 12, 1	4, 49	1
1,25,48,51,35,6,40	29, 31	53, 49	1
[1,] 23, 13, 46, 40	56	53[8] [1, 46]	1

Fonte: MOREY, 2009

[1] Documento egípcio datado de aproximadamente 1650 a.C. que contêm 85 problemas matemáticos

[2] Unidade de medida utilizada no velho Egito. Corresponde à medida do osso do antebraço.

A tabela conserva o sistema de numeração sexagesimal, por exemplo os dados da segunda coluna com a quarta linha onde temos 3,31,49 para transformar em sistema decimal basta fazer:

$$3{,}31{,}49 = 3.60^2 + 31.60^1 + 49.60^0 = (12709)_{10}$$

De acordo com Eves (2011), a análise minuciosa dessa tábula mostra que se trata de uma tabela de quadrados de secantes para ângulos de 45° a 31° (coluna I), de triângulos retângulos de lados inteiros (colunas II e III apresentando um cateto e a hipotenusa) variando de modo decrescente em função do ângulo correspondente.

Figura 2 – Tábula de Plimpton 322.

Fonte: Wikipédia[3]

1.3 Grécia

Boyer (1974) afirma que é na Grécia que encontramos pela primeira vez um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que o subtendem. A trigonometria surgiu para atender as necessidades da astronomia, Roque e Pitombeira (2012) elencam suas utilidades: prever as efémerides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e geografia.

O trabalho de Euclides, apesar de não conter trigonometria especificamente, contêm teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas, como as proposições 12 e 13 do livro II de *Os elementos*, que são as leis do cosseno para ângulos obtuso e agudo respectivamente, escritos em linguagem geométrica.

[3] Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

Aristarco de Samos (aproximadamente 300 a.C.) resolveu problemas que relacionavam ângulos e cordas. Ele escreveu um tratado chamado *Sobre as distâncias do sol e da lua*, onde ele deduz, baseado em observações, que a distância da terra ao sol está compreendida entre 18 vezes e 20 vezes a distância da Terra à lua. Boyer (1974) conta que a observação feita por Aristarco é que quando a lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de vistas ao Sol e à Lua difere para menos de um ângulo reto por um trintavos de um quadrante. Na linguagem atual quer dizer que a razão da distância da Lua para a distância do Sol é sen 3º. Aristarco deduziu ainda que a razão entre os diâmetros do Sol e da Lua é a mesma que suas distâncias da Terra, o que vem do fato de o Sol e a Lua terem o mesmo tamanho aparente. Também descobriu que a razão do diâmetro do sol pelo diâmetro da Terra está entre 19/3 e 43/6.

Acredita-se que a primeira tabela trigonométrica foi escrita pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 a.C.), o que lhe garantiu o título de “pai da trigonometria”. Provavelmente foi através da sua tabela de cordas que o círculo passou a ser dividido em 360 partes. Boyer (1974) elenca as principais contribuições de Hiparco para a astronomia: a organização dos dados empíricos babilônicos, um catálogo de estrelas, a melhoria no cálculo de constantes astronômicas importantes e a descoberta da precessão dos equinócios.

Já por volta de 100 d.C. a Grécia já apresentava uma trigonometria bem desenvolvida, que foi apresentada por Menelau de Alexandria em seu livro *Geometria esférica*. Nele há demonstrações de diversos teoremas sobre triângulos esféricos.

Baseado fortemente nos trabalhos de Hiparco nasceu a obra de maior influência da trigonometria da antiguidade - *Syntaxis mathematica* (Coleção Matemática) – chamada depois pelos árabes de *Almagesto* (o maior). Foi escrita por Claudio Ptolomeu. Não se sabe muito sobre sua vida, mas supõe-se que ele nasceu no fim do século 1 d.C. O principal objetivo desse trabalho de Ptolomeu era descrever matematicamente o movimento do sistema solar, usando a teoria geocêntrica.

Pedroso (2009) resume o conteúdo dos treze livros que compõe o *Almagesto*:

- Livros I e II: Incluem preliminares ao sistema Ptolomaico, com explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes em relação à Terra como centro, proposições sobre geometria esférica, assim como uma tábua de cordas e seus métodos de cálculo;

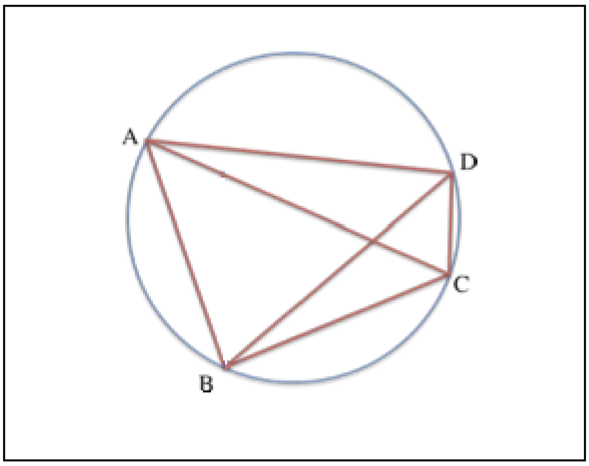
- Livro III: Traz informações sobre a duração do ano e o movimento do Sol;
- Livro IV: São focalizadas as durações dos meses e uma teoria sobre a Lua;
- Livro V: Contém a construção do astrolábio e mais materiais sobre a teoria da Lua;
- Livro VI: Revela informações sobre conjunção e oposições do Sol e da Lua, eclipses solares e lunares e seus períodos;
- Livros VII e VIII: catálogos de 1028 estrelas fixas;
- Livros IX a XIII: São dedicados ao estudo do movimento dos planetas.

Ptolomeu construiu uma tabela de cordas usando a notação de base 60 dos mesopotâmios. Dividiu a circunferência em 360 partes e seu raio em 60 partes e calculou os comprimentos das respectivas cordas para todo ângulo central de 0º a 180º com intervalo de 0,5º. Para a construção dessa tabela foi utilizada uma proposição geométrica que hoje conhecemos como "Teorema de Ptolomeu" que diz que dado um quadrilátero $ABCD$ inscrito num círculo então vale a relação:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

ou seja, em qualquer quadrilátero inscrito em um círculo, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Figura 3 – Teorema de Ptolomeu.



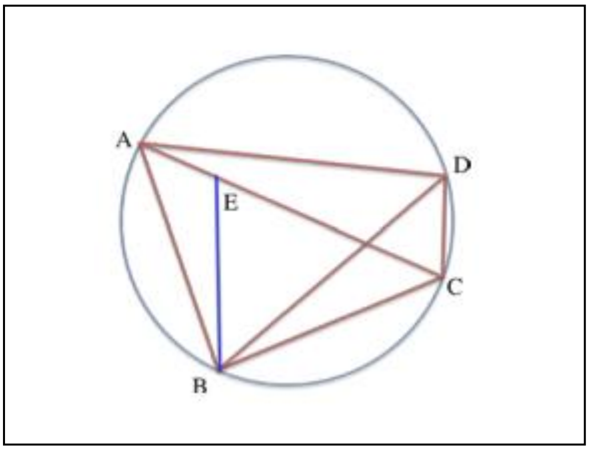
Fonte: BRESSOUD, 2010

A seguir será exibida uma demonstração para o Teorema de Ptolomeu.

Demonstração (Teorema de Ptolomeu)

Seja ABCD um quadrilátero inscrito em uma circunferência, conforme a figura 4. Tome um ponto E em AC tal que os ângulos $A\hat{B}E$ e $D\hat{B}C$ sejam congruentes.

Figura 4 – Demonstração do Teorema de Ptolomeu.



Fonte: BRESSOUD, 2010

Note que $B\hat{A}C$ e $B\widehat{D}C$ são congruentes (ambos são ângulos inscritos na circunferência de mesmo arco BC), segue então que os triângulos ABE e DBC são semelhantes, portanto

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \rightarrow AB.CD = AE.BD$$

Note que $A\widehat{D}B$ é congruente a $A\hat{C}B$ (ambos são ângulos inscritos na circunferência de mesmo arco AB) e da construção de BE temos também que $A\hat{B}D$ é congruente a $C\hat{B}E$, logo os triângulos ADB e EBC são semelhantes, e, portanto

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{AD} \rightarrow AD.BC = BD.EC$$

Combinando os dois resultados temos:

$$AC.BD = (AE + EC).BD = AE.BD + EC.BD = AB.CD + AD.BC$$

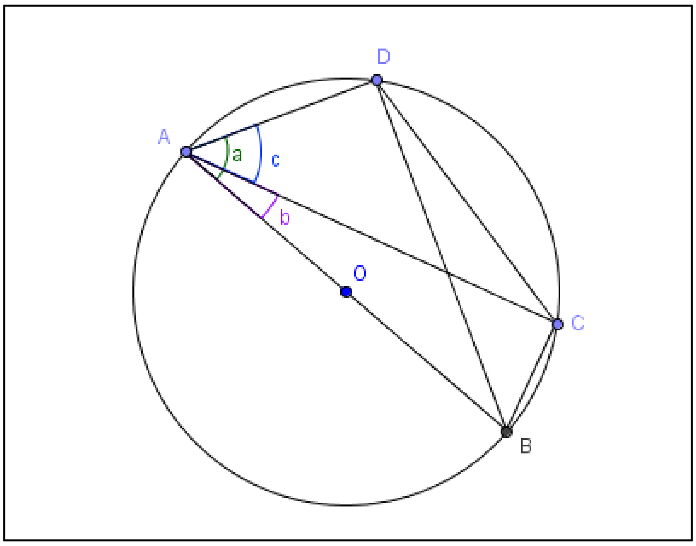
■

Em um caso especial desse Teorema, quando um lado é o diâmetro do círculo, pode ser deduzido o resultado $\boldsymbol{sen(a-b) = sen\, a \cdot \cos b - sen\, b \cdot \cos a}$.

Demonstração (seno da diferença de dois ângulos)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito em uma semicircunferência de raio R, conforme a figura 5.

Figura 5 – Quadrilátero inscrito em uma semicircunferência.



Fonte: Elaborado pela autora

Temos que $AO = R$ e $OB = R$, ou seja, $AB = 2R$. ADB e ACB são triângulos retângulos, pois estão inscritos em uma semicircunferência, então podemos escrever:

$$sen\ a = \frac{BD}{AB} \rightarrow BD = AB.sen\ a$$

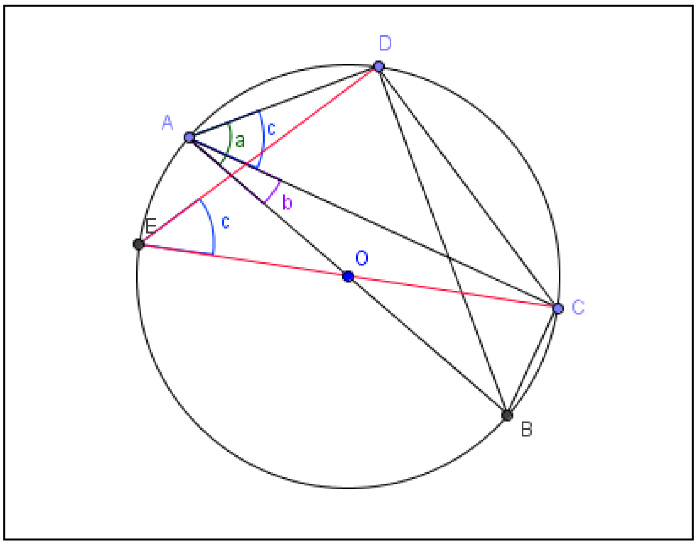
$$cos\ a = \frac{AD}{AB} \rightarrow AD = AB.cos\ a$$

$$sen\ b = \frac{BC}{AB} \rightarrow BC = AB.sen\ b$$

$$\cos b = \frac{AC}{AB} \rightarrow AC = AB.cos\ b$$

Agora marque o ponto E na circunferência de modo que o segmento CE, passe pelo centro O da circunferência. Note que o triângulo CDE é retângulo, pois também está inscrito na semicircunferência, conforme a figura 6.

Figura 6 - Demonstração do seno da diferença de dois ângulos.



Fonte: Elaborado pela autora

Note também que $D\hat{A}C = c = a - b$, e o ângulo $\hat{E}$ é congruente a $D\hat{A}C$, pois subtendem o mesmo arco DC. Então podemos escrever:

$$sen\ (a-b) = \frac{CD}{CE} \rightarrow CD = CE.sen\ (a-b), como\ CE = AB\ então\ CD = AB.sen\ (a-b)$$

$$cos\ (a-b) = \frac{DE}{CE} \rightarrow DE = CE.cos\ (a-b), como\ CE = AB\ então\ DE = AB.\cos\ (a-b)$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$ e fazendo as substituições utilizando as igualdades acima, temos:

$$AB.\big(AB.sen(a-b)\big) + (AB.sen\ b)(AB.\cos a) = (AB.\cos b).(AB.sen\ a) \rightarrow$$
$$\rightarrow (AB)^2.sen(a-b) + (AB)^2.sen\ b.\cos a = (AB)^2.\cos b\,.sen\ a \rightarrow$$
$$\rightarrow sen(a-b) + sen\ b.\cos a = sena.\cos b \rightarrow$$
$$\rightarrow \boldsymbol{sen(a-b) = sena.\cos b - sen\ b.\cos a}$$

■

Pensando analogamente temos também a fórmula $sen(a+b) = sena.cosb + senb.cosa$.

2. METODOLOGIA DE PESQUISA

2.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática surgiu na década de 1980, na França, e foi idealizada por Michèle Artigue que compara esse trabalho didático ao trabalho de um engenheiro. De acordo com Artigue (1996, p. 193) o engenheiro:

> Para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de encarregar.

Segundo Artigue (1996) a Engenharia Didática caracteriza-se, primeiramente, por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sequências didáticas. Caracteriza-se também, baseado em experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelo modo de validação essencialmente interna, confrontando a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Almouloud e Coutinho (2008) identificam essa validação interna como a principal característica que difere a Engenharia Didática de outras metodologias de ensino, pois elimina a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

2.1.1 As fases da Engenharia Didática

Segundo Artigue (1996), a metodologia da Engenharia Didática compreende quatro fases distintas: análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação, e por fim a análise *a posteriori* e validação da experiência.

2.1.1.1 Análises prévias

Este primeiro momento é apoiado em um quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos sobre o assunto. Segundo Carneiro (2005) esta etapa tem como objetivo analisar o funcionamento do ensino usual do conteúdo, possibilitando a proposta de uma intervenção que o modifique para melhor. E ainda afirma que essa análise deve esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e os obstáculos e dificuldades que marcam sua evolução.

2.1.1.2 Concepção e análise *a priori*

Artigue (1996) descreve que o objetivo da análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas controlarão os comportamentos dos alunos e o motivo desses comportamentos. Aqui se estabelecem as hipóteses que deverão ser validadas na análise *a posteriori*.

2.1.1.3 Experimentação

Esta é a fase de aplicação. Almouloud e Coutinho (2008) afirmam ser o momento de colocar em funcionamento tudo o que foi construído, permitindo correções caso sejam necessárias, o que implica retornar à análise *a priori* em um processo de complementação.

2.1.1.4 Análise a posteriori e validação

A análise *a posteriori* são os resultados extraídos das conclusões da experimentação e servem para melhoria do ensino do conteúdo desejado. Carneiro (2005) reforça que o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* consiste em investigar aquilo que consideremos na situação adidática e que na prática sofreu distorções deixando de ser válido.

2.2 Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs)

As Tecnologias da Informação e Comunicação já são realidade nos mais diferentes setores da sociedade, e isso vem trazendo à sala de aula alunos de uma nova geração, chamados Nativos Digitais ou geração Y, jovens nascidos num ambiente virtual, onde tudo é muito rápido, superficial e dinâmico. Recentemente, a Sociologia já nomeou a sucessora da geração Y, a chamada geração Z. Ela compreende os nascidos a partir de 1991, concomitantemente com o nascimento e difusão da World Wide Web – www. Esses estudantes vivem suas vidas, fora da escola, com muitos estímulos, fazendo diversas coisas simultaneamente e não possuem capacidade de atenção concentrada. Passarelli e Junqueira (2012, p.311) destacam a importância de conhecer bem essa geração para melhor planejar a prática docente:

> Quanto mais conhecermos sobre crianças e adolescentes brasileiros conectados melhor poderemos planejar aplicações futuras, nestas telas, que motivem e propiciem a aprendizagem lúdica, a construção do conhecimento e a socialização em rede. A continuidade desta pesquisa e sua atualização sistematizada e sistêmica contribuirão, sobremaneira, para o mapeamento das literacias digitais destas crianças e jovens, podendo servir de base para o design de futuros ambientes de ensino e lazer de forma sinérgica para diluir a barreira entre ensino e lazer, onde o lúdico ensine e o ensino seja lúdico.

Porém, em âmbito escolar, o uso de novas tecnologias ainda é bem restrito, conforme afirma Zylberberg (2010, p.62),

> Sabe-se que a presença das tecnologias digitais de informação é uma realidade indiscutível na cultura contemporânea. Entretanto, no âmbito educacional, pode-se afirmar que sua apropriação ainda é volátil. É neste universo que apontam-se algumas reflexões pedagógicas.

Fazer uma reflexão pedagógica acerca da inserção de novas tecnologias no ensino é o que sugere também Barreto et al (2011, p. 2), destacando a necessidade de oferecer meios de formação aos professores:

> A velocidade do movimento promovido pelo acesso e diversidade de informações torna necessário reorientar não só o currículo, como também o espaço e o tempo escolar. O uso das tecnologias permite, com maior facilidade, a busca por informações mais atualizadas e significativas, além de possibilitar meios para difundi-las e transformá-las. Nesse processo de fluxo contínuo, há que se pensar, essencialmente, na formação do professor, de modo a possibilitá-lo consumir e orientar o uso de novas tecnologias de forma ativa e crítica.

Mesmo com todas as vantagens elencadas pelos autores percebemos ainda o uso de práticas arcaicas nas escolas, remontando à época em que esses professores ainda eram alunos da escola básica.

As novas tecnologias sugerem uma mudança na prática tradicional do professor, de transmissor do saber para mediador do processo de aprendizagem. O uso das TICs por si só não se justifica. É fundamental que os educadores estejam preparados para usá-las como instrumento pedagógico facilitador da aprendizagem crítica e significativa, como sugere Demo (2009, p.1):

> É de fundamental relevância saber que mais importante do que aprender é aprender bem, por isso, não basta apenas informar-se teoricamente, é preciso sim transformar informação em conhecimento e que este conhecimento seja uma prática constante e contínua, para que desta forma a educação aliada às novas tecnologias possa possibilitar novos horizontes e infinitas descobertas entre o aprender e o aprender bem.

Convém recordar que documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) defendem a utilização de tecnologia nas escolas, nos mais diversos níveis e áreas: “As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas” (BRASIL, 1998, p.43). E ainda destaca o papel do professor nesse processo:

> A utilização de recursos como o computador e a calculadora pode contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem. (BRASIL, 1998, P.43)

2.2.1 Uso de Tablets e Smartphones no ensino

O avanço tecnológico dos celulares tem proporcionado um leque de diferentes ferramentas que cabem na palma da mão e podem ser acessadas instantaneamente. Uma delas é sua utilização no contexto educacional, que vem de forma inovadora auxiliar a aprendizagem, tornando-a mais prazerosa. Um dos principais benefícios dos dispositivos móveis, segundo Goodwin (2012) é que eles nos permitem aprender em qualquer lugar e a qualquer hora, fazendo com que a aprendizagem não se limite apenas à sala de aula e ao horário escolar.

Goodwin (2012) indica benefícios na utilização de tablets no ensino com uma pesquisa de 2011 realizada em três escolas da região de Sidney na Austrália. Envolveu cinco professores, mais de 90 alunos e 75 iPads. Os resultados forneceram evidências que o uso desses dispositivos aumenta o envolvimento e a motivação dos alunos, proporciona maior interação entre eles e melhora a aprendizagem. Goodwin (2012) afirma que os professores envolvidos no estudo relataram terem adotado abordagens inovadoras e mais centradas no aluno ao utilizar o iPad, além de o iPad proporcionar um maior compartilhamento do trabalho, permitindo ao aluno demonstrar sua aprendizagem aos colegas e ainda facilitar o fornecimento de um feedback contínuo por parte do professor.

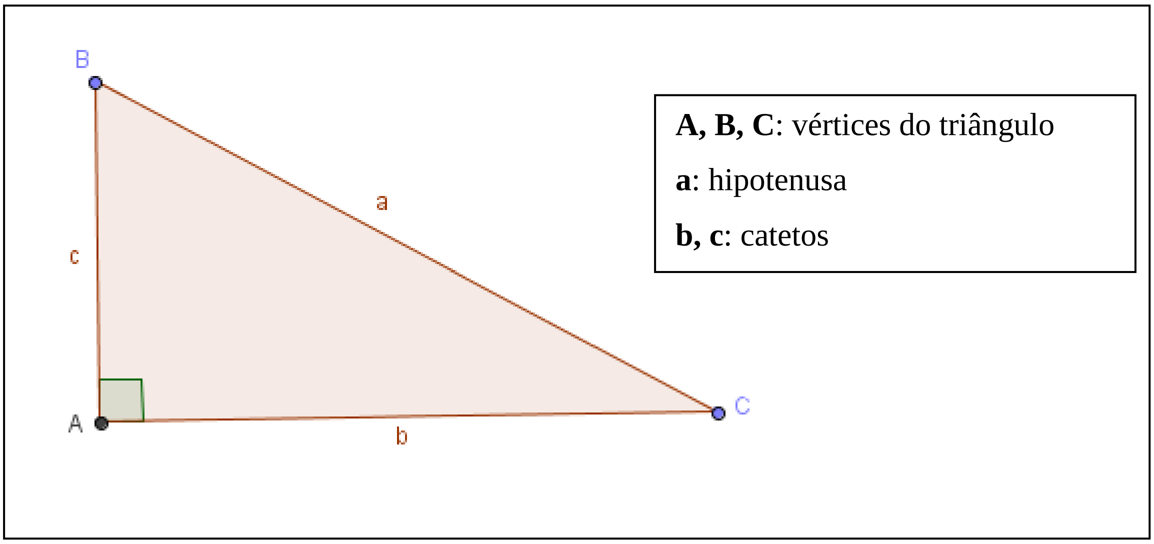
3. INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA

3.1 O triângulo retângulo

Um polígono de três lados que possui um dos seus ângulos medindo 90º é chamado de triângulo retângulo. Seus outros dois ângulos são agudos, ou seja, medem menos que 90º. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, e os outros dois lados são os catetos.

O triângulo ABC a seguir é retângulo em A. Vamos identificar seus elementos:

Figura 7 - Elementos de um triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pela autora

3.2 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é talvez o mais famoso teorema matemático. Ele relaciona a medida dos lados de um triângulo retângulo, afirmando que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Usando o triângulo ABC da figura 1, o enunciado do Teorema de Pitágoras é equivalente a afirmar que

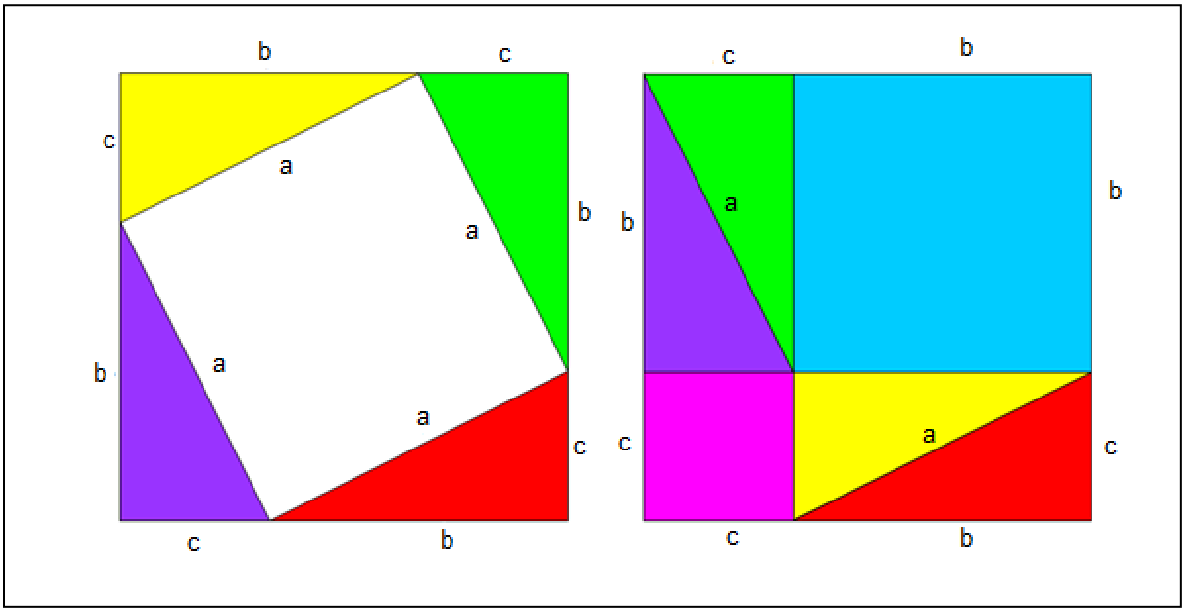
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Uma das demonstrações desse teorema é dada a seguir.

3.2.1 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Dado um triângulo retângulo com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c, considere o quadrado de lado $b+c$ arranjado de duas formas diferentes:

Figura 8 - Demonstração do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborado pela autora

Retirando os quatro triângulos retângulos iguais ao triângulo dado, resta na figura da esquerda um quadrado de lado medindo a e na figura da direita, dois quadrados sendo um de lado b e outro de lado c. Logo a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados de lado b e c, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

Algebricamente podemos escrever:

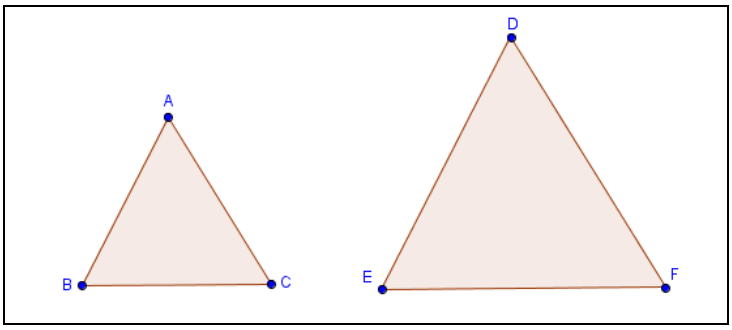
- Área do quadrado da esquerda: $4\frac{bc}{2} + a^2$
- Área do quadrado da direita: $4\frac{bc}{2} + c^2 + b^2$

Daí temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

3.3 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são ditos semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de maneira que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Figura 9 – Triângulos semelhantes.



Fonte: Elaborado pela autora

Em outras palavras, se ABC e DEF são triângulos semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$, são válidas as seguintes relações:

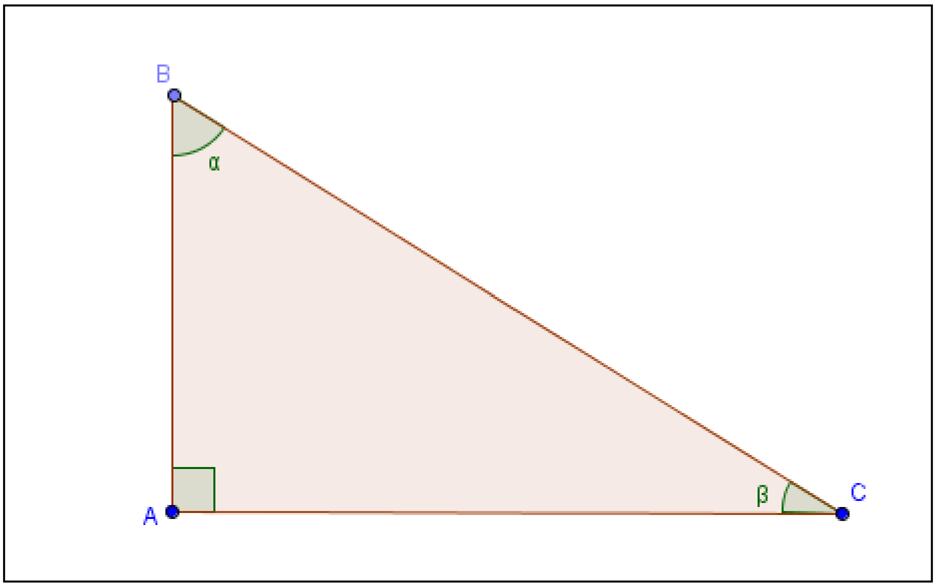
$$\hat{A} = \hat{D},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{C} = \hat{F} \quad \text{e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

3.4 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As relações trigonométricas relacionam lados e ângulos de um triângulo. Para tal iremos diferenciar os dois catetos de um triângulo retângulo usando um dos ângulos agudos como referência. Seja ABC um triângulo retângulo, com ângulos agudos medindo α e β, como segue:

Figura 10 – Ângulos de um triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pela autora

Vamos usar o ângulo β como referência. Assim $\overline{AB}$ será chamado cateto oposto ao ângulo β e o cateto $\overline{AC}$ será chamado cateto adjacente. Assim podemos definir as três principais relações trigonométricas.

3.4.1 Seno

Definimos como seno a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Ou seja:

$$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

3.4.2 Cosseno

Definimos como cosseno a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. Ou seja:

$$cosseno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

3.4.3 Tangente

Definimos como tangente a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Ou seja:

$$tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Observe as relações trigonométricas do triângulo da figura 10:

$$sen\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$cos\ \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$tg\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

4. APPS

4.1 Theodolite Droid (Major Forms)

Valor: Gratuito

Plataforma: Android

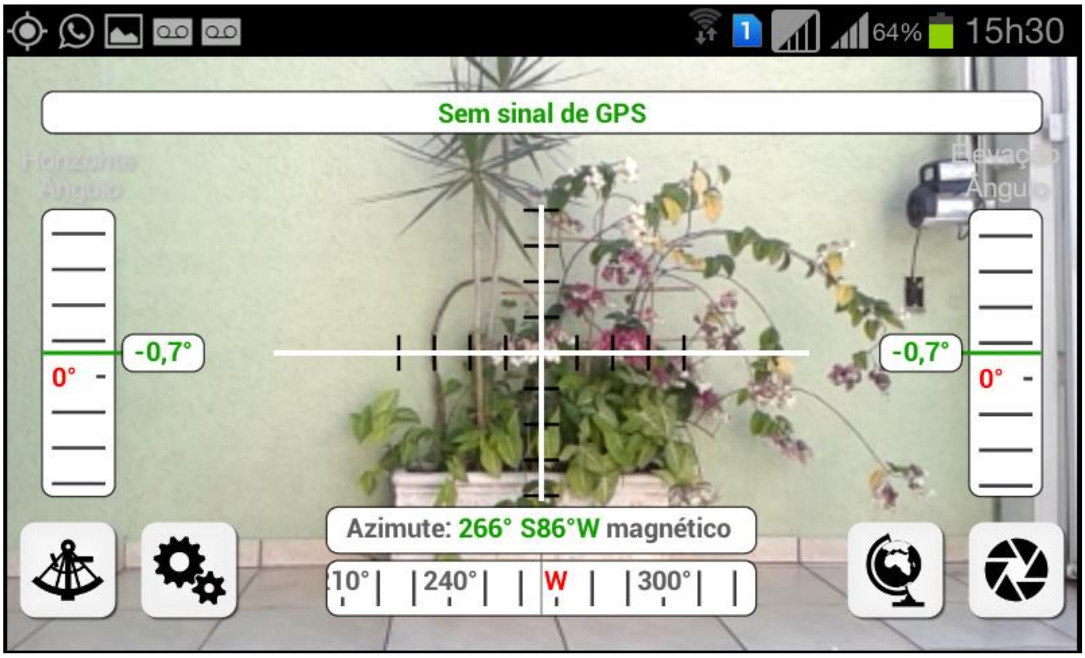
O Theodolite Droid é um aplicativo que utiliza ferramentas do smartphone ou tablet, como por exemplo o GPS, mapas, inclinômetro, câmera, magnetômetro, entre outros. Basta apontar o visor da câmera para a parte superior do objeto a ser medido que ele marca o ângulo de visada, além de várias outras informações como altura e distância.

É possível tirar uma foto do alvo constando longitude, latitude, altitude, azimute, endereço (se disponível), data e hora, e os ângulos horizontais e verticais.

Além disso, essas fotos com as informações podem ser compartilhadas nas redes sociais, como o Facebook, Messenger, WhatsApp e email.

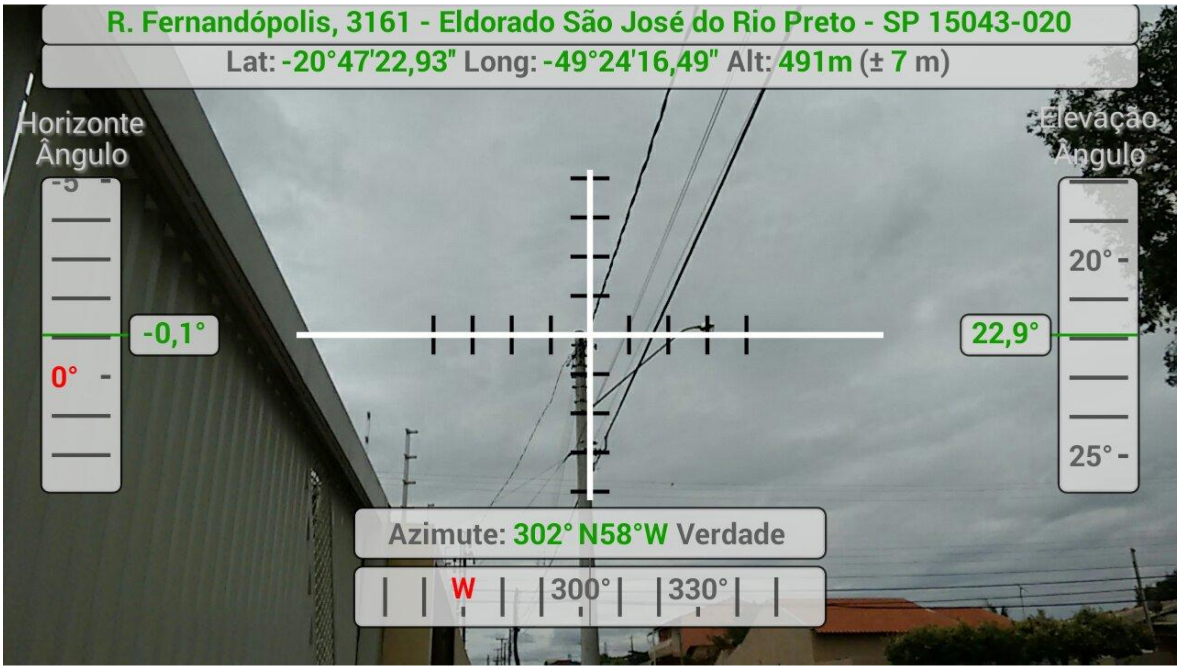
A figura a seguir mostra a interface do Theodolite Droid capturada através de um smartphone Android.

Figura 11 – Interface do aplicativo "Theodolite Droid".



Fonte: *print screen* do aplicativo "Theodolite Droid"

Figura 12 – Foto tirada com o aplicativo "Theodolite Droid" com o sinal de GPS ativo.



Fonte: Acervo da autora

Figura 13 – Foto tirada com o aplicativo "Theodolite Droid" e compartilhada no Facebook

Fonte: *print screen* do Facebook

A informação que utilizaremos para realizar a medição de um objeto inacessível nesse trabalho é a elevação do ângulo, que é dada mesmo com o smartphone sem conexão à internet ou com GPS inativo.

4.2 Teodolito (oxdb.net)

Valor: Gratuito

Plataforma: Android

O Teodolito é um aplicativo simples que mede ângulo de elevação e depressão. A vantagem é seu tamanho reduzido, o que facilita seu uso em aparelhos mais simples e com menos memória.

Segue uma imagem do aplicativo capturada por um smartphone Android.

Figura 14 – Interface do aplicativo "Teodolito".

Fonte: *print screen* do aplicativo "Teodolito"

4.3 Theodolite (Hunter Research & Technology)

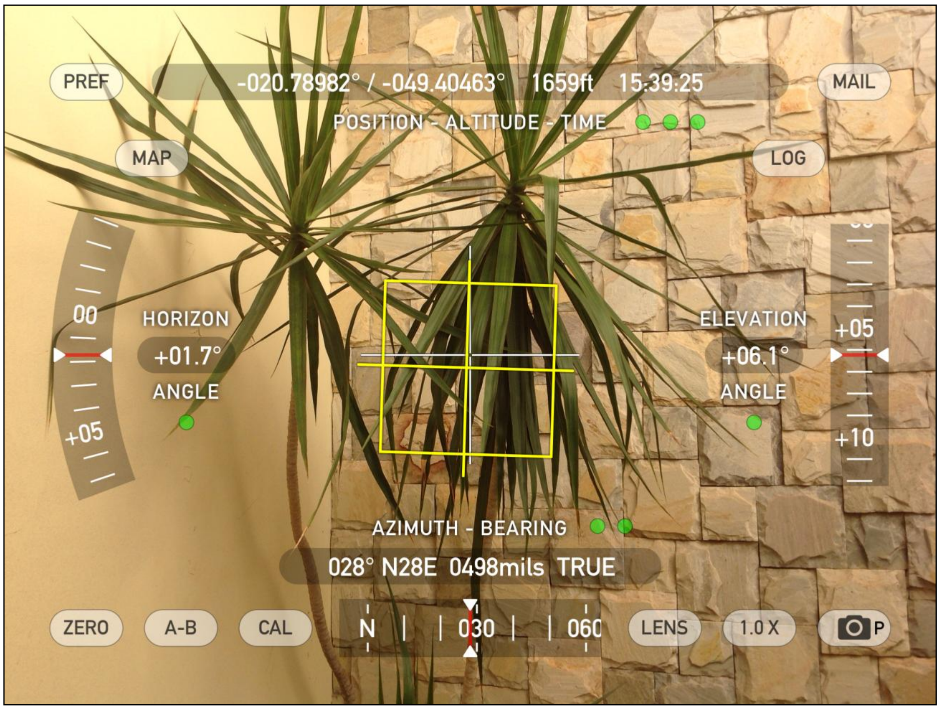
Valor: USD 2.99

Plataforma: IOS

O Theodolite é um aplicativo que tira fotos com informações de localização, como data e hora, latitude e longitude, altitude, tendo (posição em relação ao norte verdadeiro) ângulo de elevação e ângulo horizonte. Por ser pago, o torna inviável para o uso educacional, porém, na ocasião em que este trabalho foi realizado era o único aplicativo para medir ângulo de visada disponível para iPad e iPhone.

Segue a imagem capturada por um iPad da interface deste aplicativo.

Figura 15 – Interface do aplicativo "Theodolite".



Fonte: *print screen* do aplicativo "Theodolite"

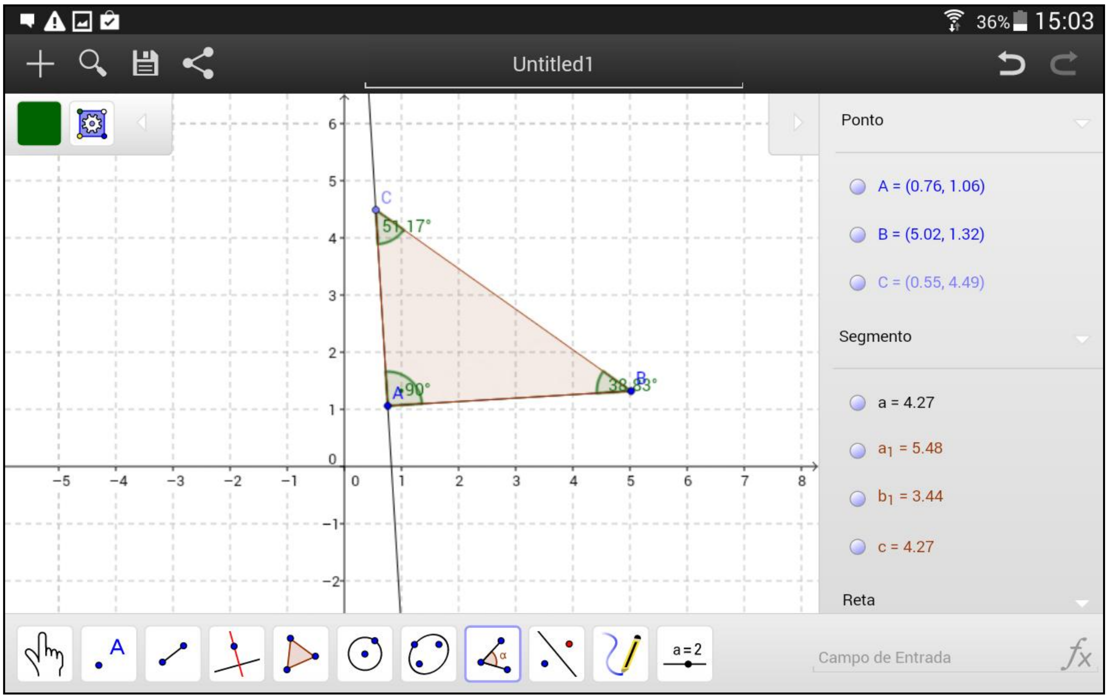
4.4 GeoGebra (Internacional GeoGebra Institute)

Valor: Gratuito

Plataforma: Android e IOS

O GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica, criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, em 2001, que possibilita trabalhar geometria, álgebra, planilhas eletrônicas, gráficos, estatística e cálculo em todos os níveis de ensino. É um software gratuito e está disponível para download em http://www.geogebra.org/download. Atualmente existem versões para desktops e para tablets e em breve haverá o lançamento da versão para smartphones. A figura a seguir mostra a interface do aplicativo para tablets, contendo a construção de um triângulo, capturada através de um tablet Android.

Figura 16 – interface do aplicativo GeoGebra para Android.

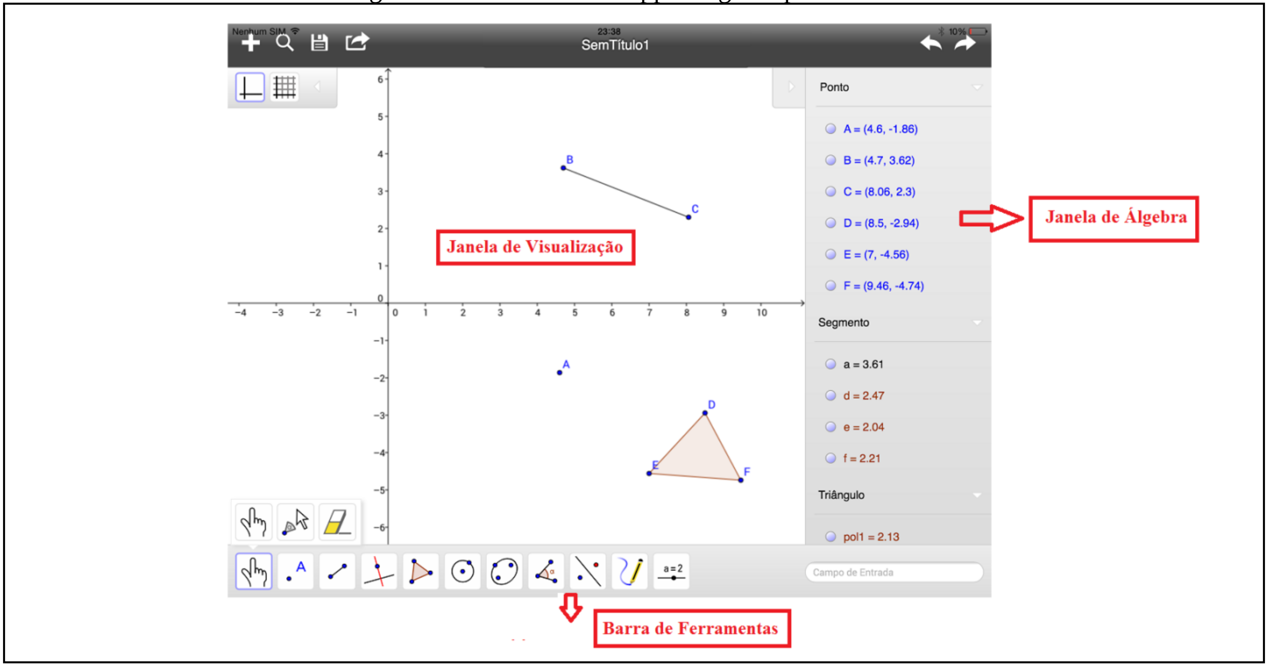


Fonte: *print screen* do aplicativo GeoGebra

Essa versão para tablets, recém lançada, não possui todas as funcionalidades da versão desktop. Uma delas é que não traz o nome das ferramentas e nem sua breve descrição, apenas os ícones.

Na figura 17 exibimos a tela inicial do app Geogebra para Tablets, com pontos, segmentos de reta e um triângulo. Essa interface inicial apresenta a configuração padrão.

Figura 17 – tela inicial do app Geogebra para tablets.



Fonte: Elaborado pela autora

A barra de ferramentas concentra todas as ferramentas necessárias para as construções geométricas, e cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados com um simples toque.

A Janela de Visualização é a área onde aparece a representação geométrica dos objetos construídos. Cada objeto criado na Janela de Visualização tem também sua representação na Janela de Álgebra.

Também destacamos o campo de entrada que é usado para inserir coordenadas, equações, comandos e funções.

5. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Participaram dessa pesquisa os alunos de duas turmas de 9º ano da Escola Municipal “Profª Lúcia Novais Brandão” localizada no município de Cedral (SP), cidade do interior de São Paulo com aproximadamente 8000 habitantes, sendo essa a sua única escola de ensino fundamental.

A escola possui um laboratório de informática com 40 computadores, porém são poucos os horários disponibilizados para os alunos do ensino fundamental II.

A turma do 9º ano A contava com 30 alunos; enquanto a turma do 9º ano B era formada por 21 alunos.

Ambas as turmas eram compostas por alunos de diferentes perfis, havendo alunos interessados e com relativa facilidade em matemática, alunos interessados, porém com dificuldades em matemática e alunos bastante desinteressados.

5.1 Análises prévias

O material utilizado pelo 9º ano dessa escola é um material apostilado da Netbil Educacional, empresa da cidade de Bilac-SP. Para ensinar o conteúdo de Trigonometria, essa apostila traz primeiramente um pouco da história da Trigonometria, explicando sua etimologia e falando sobre Hiparco e sua tabela trigonométrica. Em seguida já aparecem definidas as fórmulas para seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, finalizando com exercícios e atividades contextualizadas.

Nota-se que os alunos entram em contato pela primeira vez com a trigonometria, através de um amontoado de fórmulas sem significado nenhum, o que desmotiva o aluno e assim surgem as dificuldades referentes à assimilação do conteúdo.

5.2 Análise *a priori*

Para tornar o processo de aprendizagem do conteúdo de trigonometria mais prazeroso e significativo, as atividades foram preparadas inserindo o uso das tecnologias e também uma atividade prática. O objetivo foi que os alunos chegassem de maneira autônoma até as fórmulas trigonométricas, para que fixassem o conteúdo e soubessem aplicá-las em problemas práticos. Antes disso foram resgatados conteúdos que são pré-requisitos e que já haviam sido trabalhados: triângulo retângulo, semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras. Nesse momento foi permitida a intervenção da professora com o intuito de sanar possíveis dúvidas e dificuldades encontradas. Da segunda folha em diante pretendeu-se que a professora interferisse o mínimo possível.

5.3 As folhas de atividades (Experimentação)

Todas as folhas de atividades foram construídas para que o aluno aprenda de forma independente e para proporcionar maior clareza sobre o caminho desejável a ser percorrido pelos alunos.

A primeira folha de atividades fez os alunos relembrarem conceitos sobre triângulos retângulos, semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras.

A folha 2 trouxe nove triângulos retângulos em malha quadriculada para que os alunos identificassem quais eram semelhantes.

Para introduzir as relações trigonométricas, a folha número 3 trouxe tabelas para que os alunos calculassem razões entre os lados dos triângulos da folha 2 fazendo uso da calculadora. No fim desafiou os alunos a encontrarem alguma relação entre essas razões.

Na folha 4, foi proposto um problema aos alunos para calcular a altura de uma árvore, dispondo apenas de um teodolito e de uma trena, além das razões encontradas nos triângulos da folha 2.

A segunda parte da sequência didática trouxe na folha de número 5 um roteiro para construir um triângulo retângulo no GeoGebra e calcular as razões trigonométricas seno e cosseno.

A folha 6 propôs uma investigação sobre as razões encontradas ao modificar os lados do triângulo construído. E com um applet pronto do GeoGebra apresentou pela primeira vez aos alunos o nome das três principais razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Completadas todas essas etapas, sugeriu um trabalho de campo, quando os alunos que possuíam smartphones ou tablets fizeram o download de algum dos aplicativos que tem a função de teodolito já elencados anteriormente. Feito isso os alunos saíram da escola acompanhados da professora e tiveram que calcular a altura do Cristo Redentor da entrada da cidade.

5.3.1 Atividades dentro da sala de aula

Materiais utilizados: Calculadora, transferidor e lápis de cor.

Tempo: 2 aulas de 50 minutos cada.

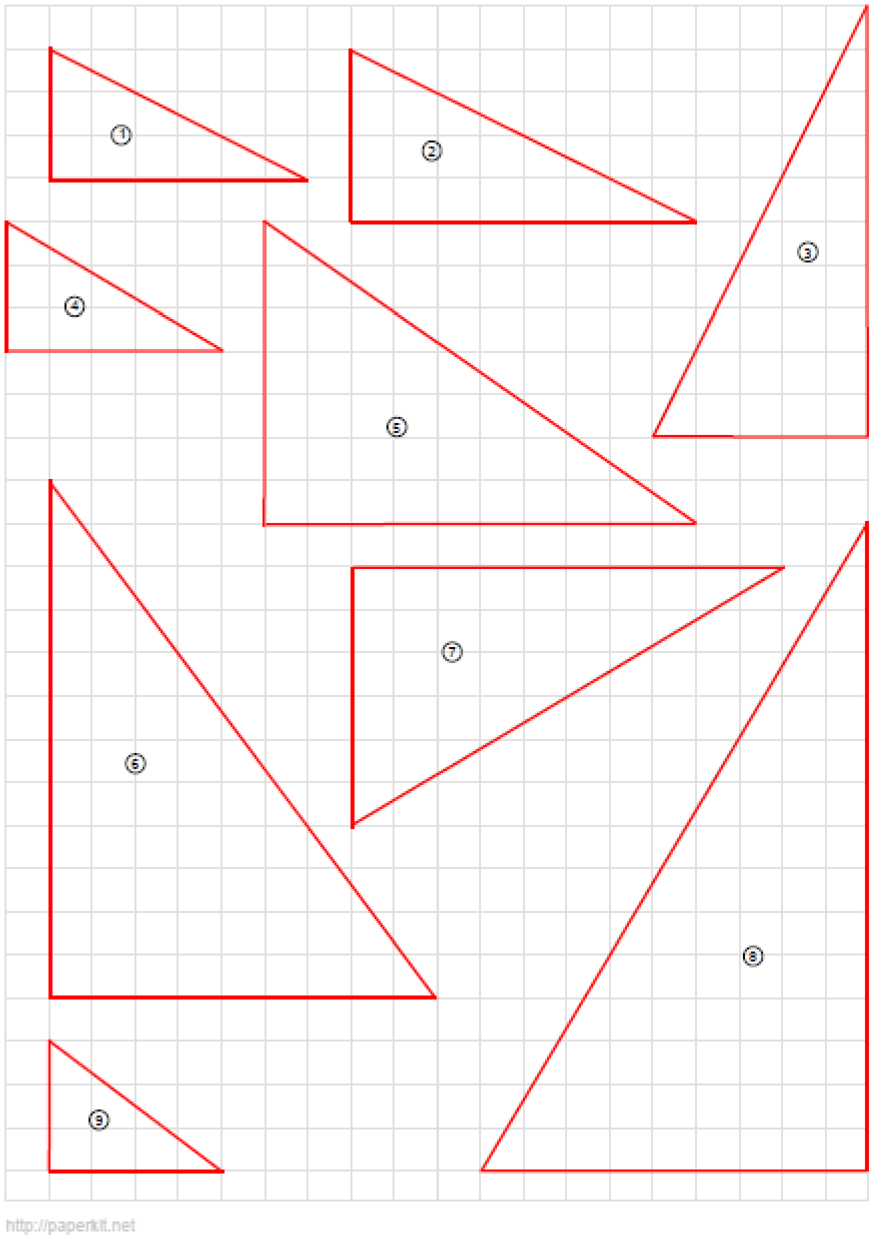
Para fazer a abordagem do conteúdo de trigonometria no 9º ano do ensino fundamental, os alunos receberam quatro folhas de atividades contendo 9 triângulos e questionamentos referentes a esses triângulos. Esta atividade possibilitou verificar as dificuldades dos alunos em conteúdos já vistos e que são pré-requisitos da trigonometria. São eles: definição de triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos.

Divididos em grupos de quatro ou cinco, os alunos calcularam a medida dos lados desses triângulos, que estavam em uma malha quadriculada, usando como unidade de medida o lado de cada quadradinho. Pra calcular as medidas das hipotenusas usaram o Teorema de Pitágoras.

Quando se depararam com medidas irracionais vários alunos perguntaram como deveria ser feito o arredondamento, momento esse em que a professora recordou a todos que a calculadora fornece apenas um valor racional aproximado, devido a sua capacidade finita de dígitos.

A grande maioria dos grupos concluiu esta atividade com facilidade, apenas os alunos pouco participativos não lembravam como usar o teorema de Pitágoras então foi necessário a intervenção da professora. Mas rapidamente foi entendido e com o uso da calculadora eles concluíram a atividade.

Figura 18 – Ficha com triângulos retângulos distribuída para os alunos.



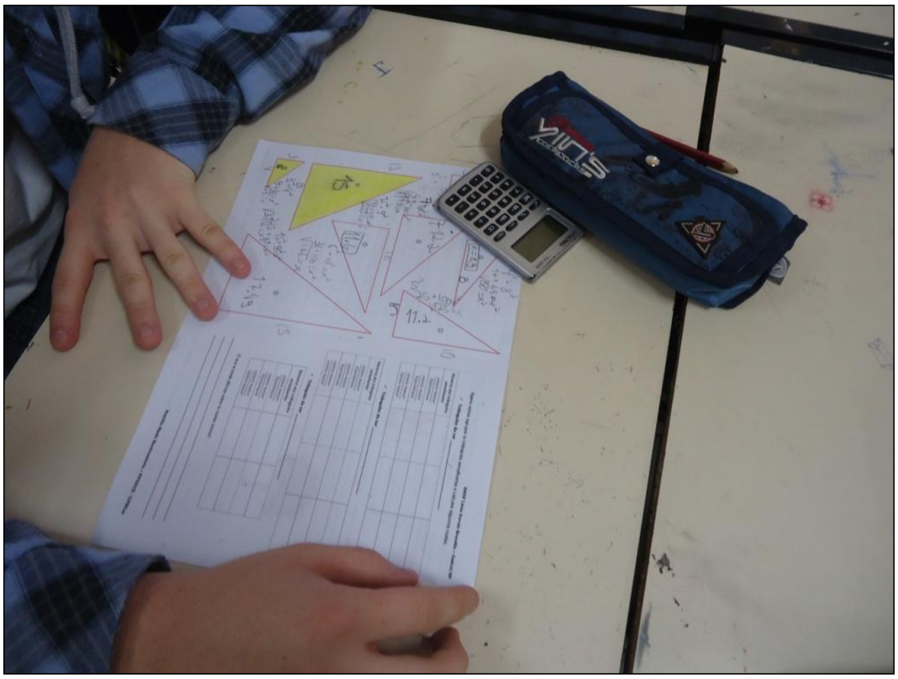
Fonte: Elaborado pela autora

Após calcularem as medidas dos lados, os alunos tiveram que agrupar os triângulos semelhantes pintando-os com a mesma cor e calculando razões pedidas em tabelas. Um dos triângulos não era semelhante a nenhum dos outros.

Figura 19 – Aluna colorindo os triângulos semelhantes.

Fonte: Acervo da autora

Figura 20 – Aluno usando a calculadora para cálculo das razões.



Fonte: Acervo da autora

Figura 21 – Tabela com as razões a serem calculadas pelos alunos.

Agora vamos agrupar os triângulos semelhantes e calcular algumas razões.

✓ **Triângulos de cor ______________________________**

Números dos triângulos semelhantes			
$\frac{\text{cateto menor}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto maior}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto menor}}{\text{cateto maior}}$			

✓ **Triângulos de cor ______________________________**

Números dos triângulos semelhantes			
$\frac{\text{cateto menor}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto maior}}{\text{hipotenusa}}$			
$\frac{\text{cateto menor}}{\text{cateto maior}}$			

✓ **Triângulos de cor ______________________________**

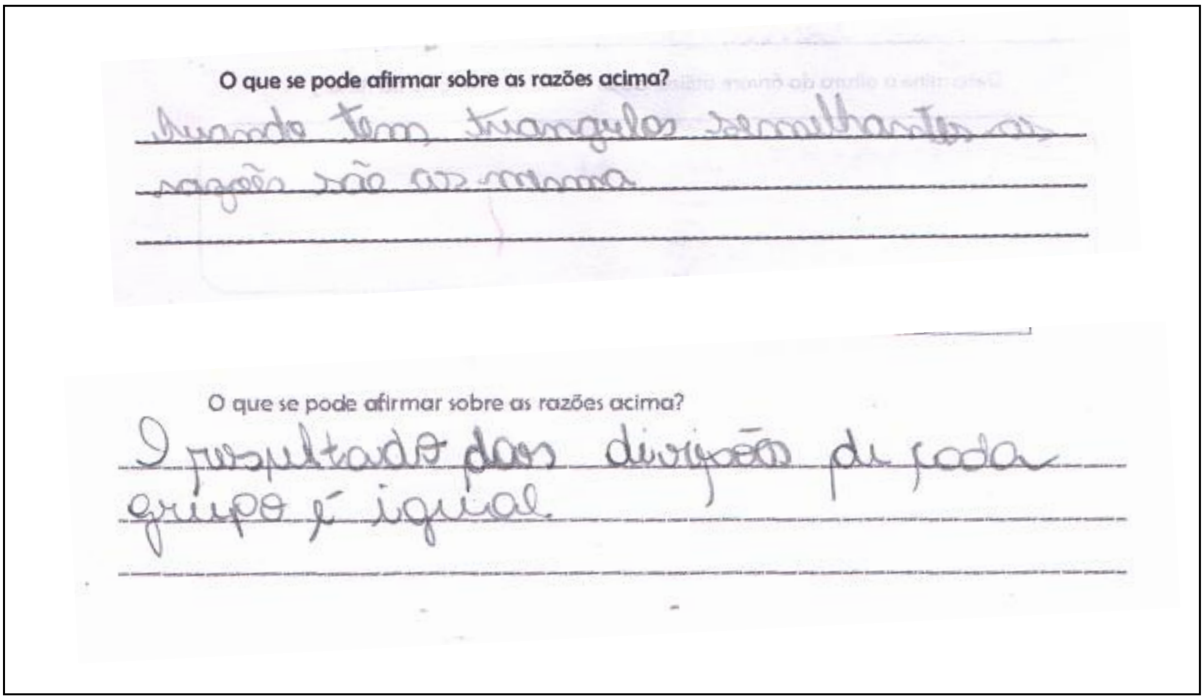
Números dos triângulos semelhantes		
$\frac{\text{cateto menor}}{\text{hipotenusa}}$		
$\frac{\text{cateto maior}}{\text{hipotenusa}}$		
$\frac{\text{cateto menor}}{\text{cateto maior}}$		

Fonte: Elaborado pela autora

Neste momento os alunos estavam bastante seguros e motivados, até os alunos menos interessados estavam calculando as razões com bastante entusiasmo. Percebe-se que a calculadora traz segurança para eles, aumentando sua autoconfiança e estimulando-os a produzir conhecimento.

Os alunos ainda foram conduzidos a tirar conclusões sobre o valor das razões encontradas.

Figura 22 – Resposta digitalizada de dois alunos (folha 3).



O que se pode afirmar sobre as razões acima?

Quando tem triangulos semelhantes as razões são as mesma

O que se pode afirmar sobre as razões acima?

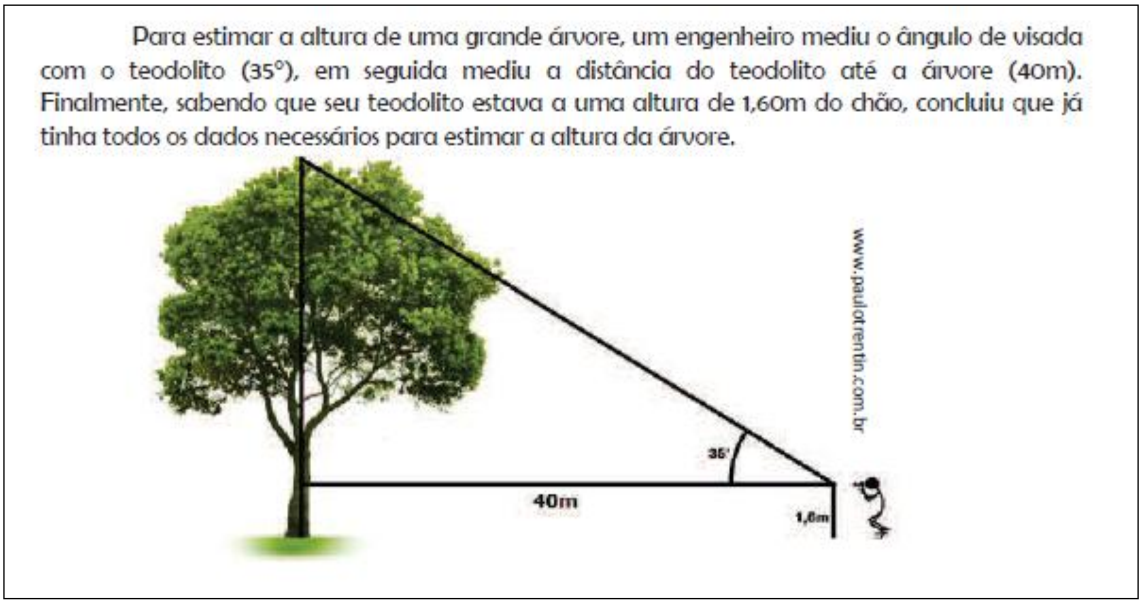
O resultado das divisões de cada grupo é igual.

Fonte: Elaborado pela autora

O triângulo que sobrou foi usado para resolver o problema de um engenheiro que dispunha apenas de um teodolito e uma trena para calcular a altura de uma árvore. Assim os alunos usaram as relações trigonométricas para resolver um problema, sem nem saber que elas existiam. Eles foram levados, pela observação de padrões dos triângulos agrupados, a fazer uso dessas relações. Notaram que triângulos com os mesmos ângulos possuem as razões entre os lados homólogos[4] sempre iguais.

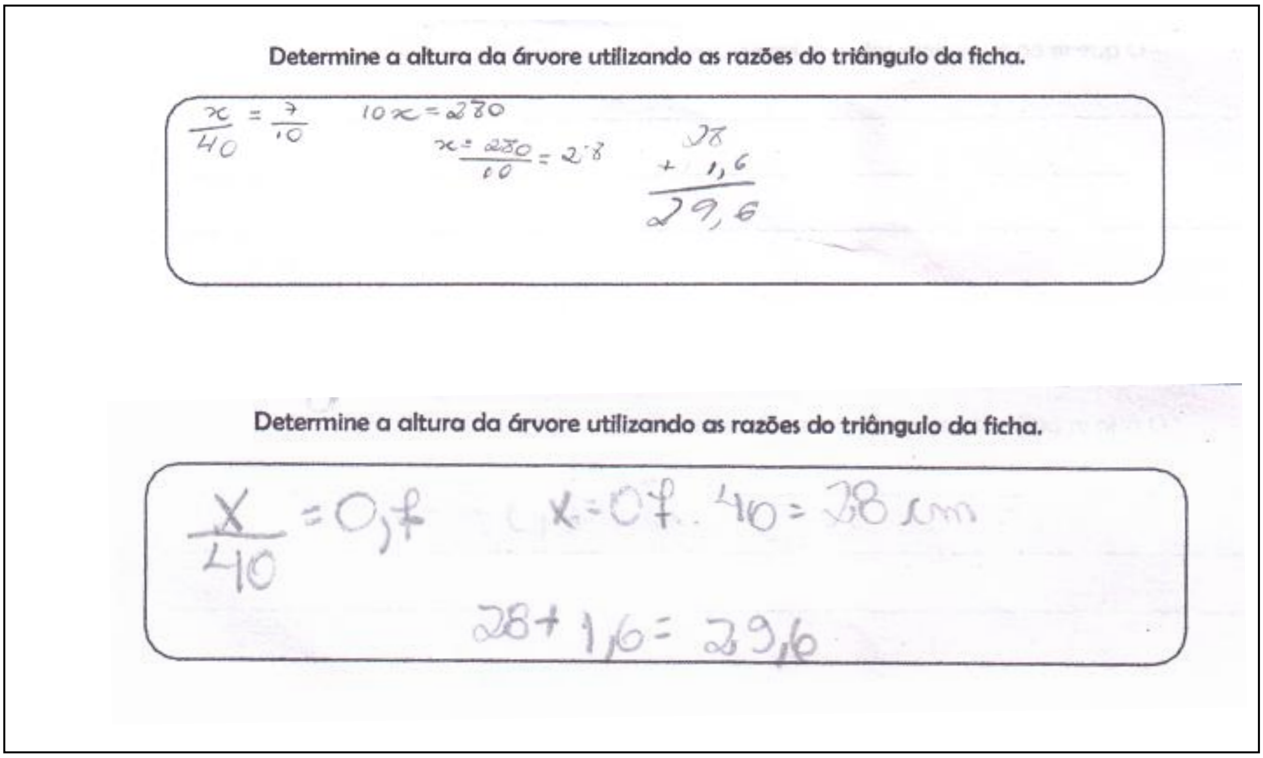
[4] Sendo dados dois triângulos semelhantes, tomados ordenadamente, dizemos que dois lados, um do primeiro e outro do segundo, são lados homólogos quando são lados opostos a ângulos congruentes.

Figura 23 – Problema para calcular a altura de uma árvore.



Fonte: Site do Paulo Trentin[5]

Figura 24 – Solução para o problema da árvore por dois alunos



Fonte: Elaborado pela autora

5 Disponível em: www.paulotrentin.com.br

5.3.2 Atividades na sala de informática

Materiais utilizados: software GeoGebra e applet do GeoGebra da internet

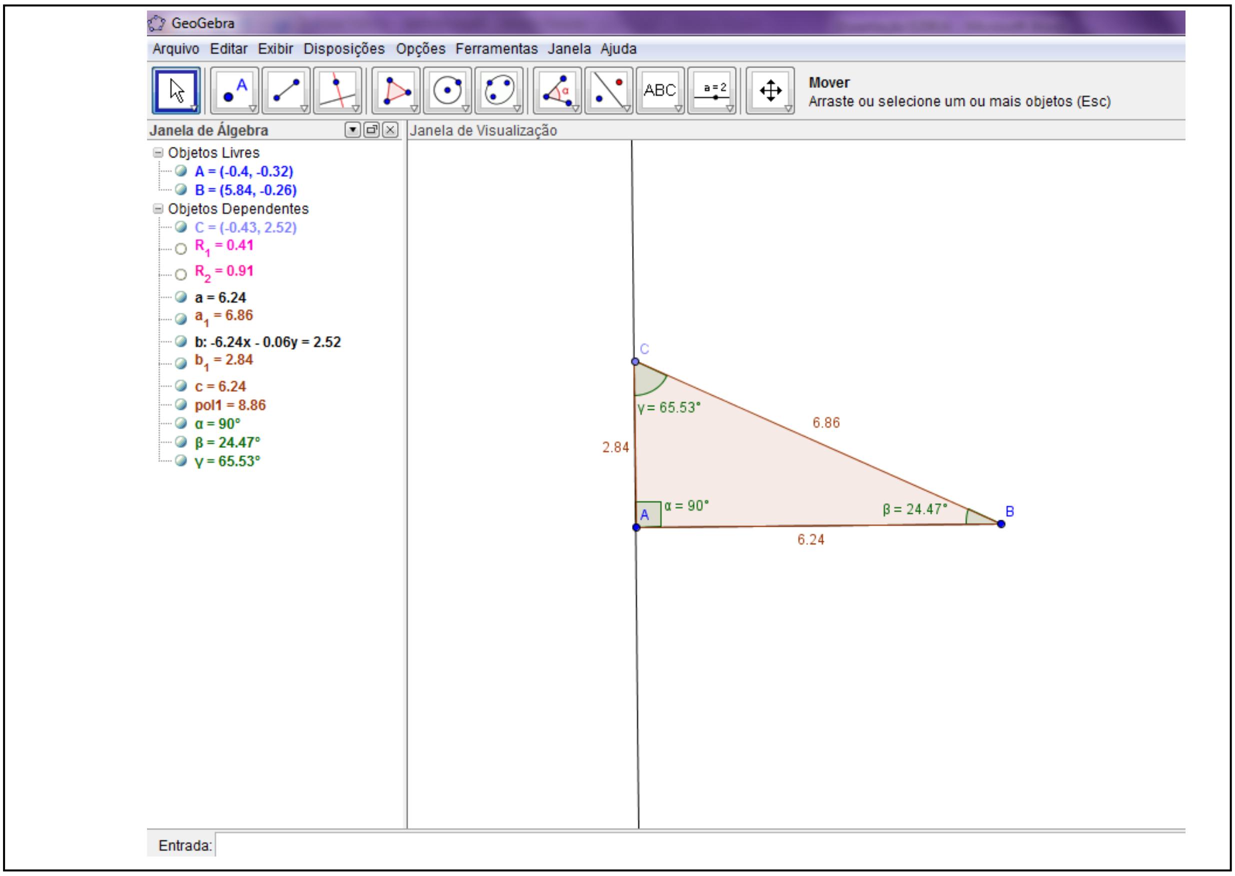
Tempo: 1 aulas de 50 minutos.

O segundo momento deste trabalho foi realizado na sala de informática da escola. Os alunos receberam um roteiro para a construção de um triângulo retângulo no GeoGebra.

O trabalho na sala de informática foi iniciado com a professora mostrando aos alunos como utilizar algumas ferramentas do GeoGebra. O roteiro entregue foi planejado para que o aluno construísse um triângulo retângulo com o mínimo possível de intervenção da professora.

Construído o triângulo, os alunos calcularam (pelo GeoGebra) as razões seno e cosseno (ainda sem conhecer esses nomes) e foram instruídos a movimentar os vértices do triângulo e anotar suas conclusões.

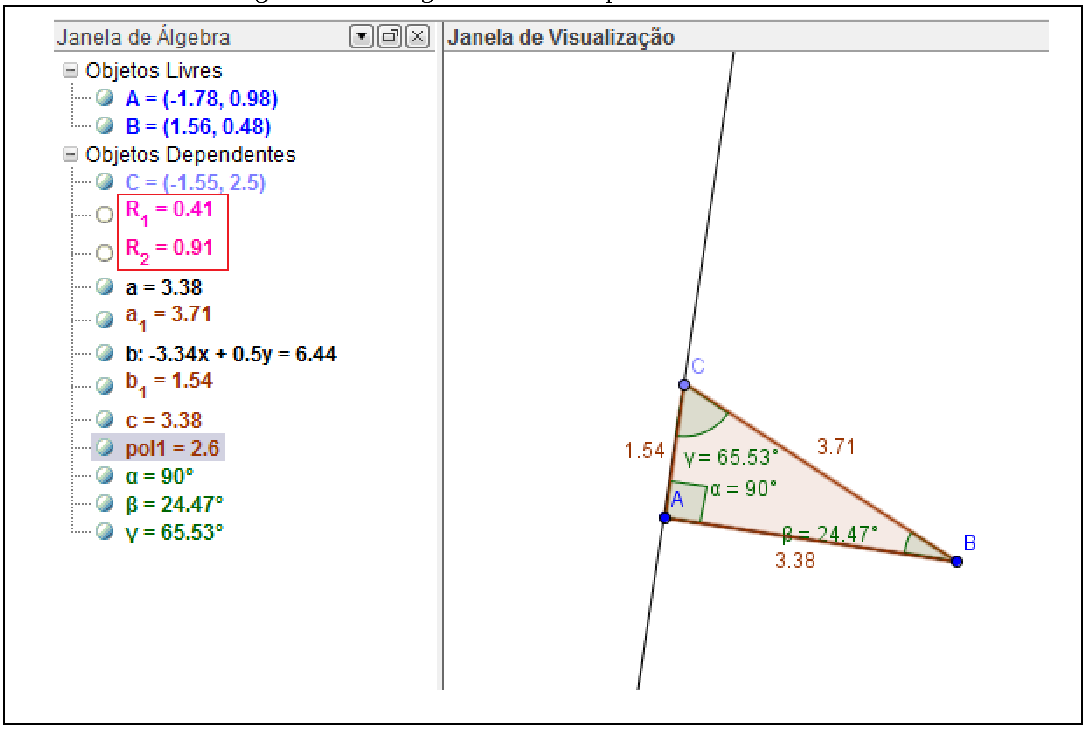
Figura 25 – Triângulo retângulo a ser construído pelos alunos no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora

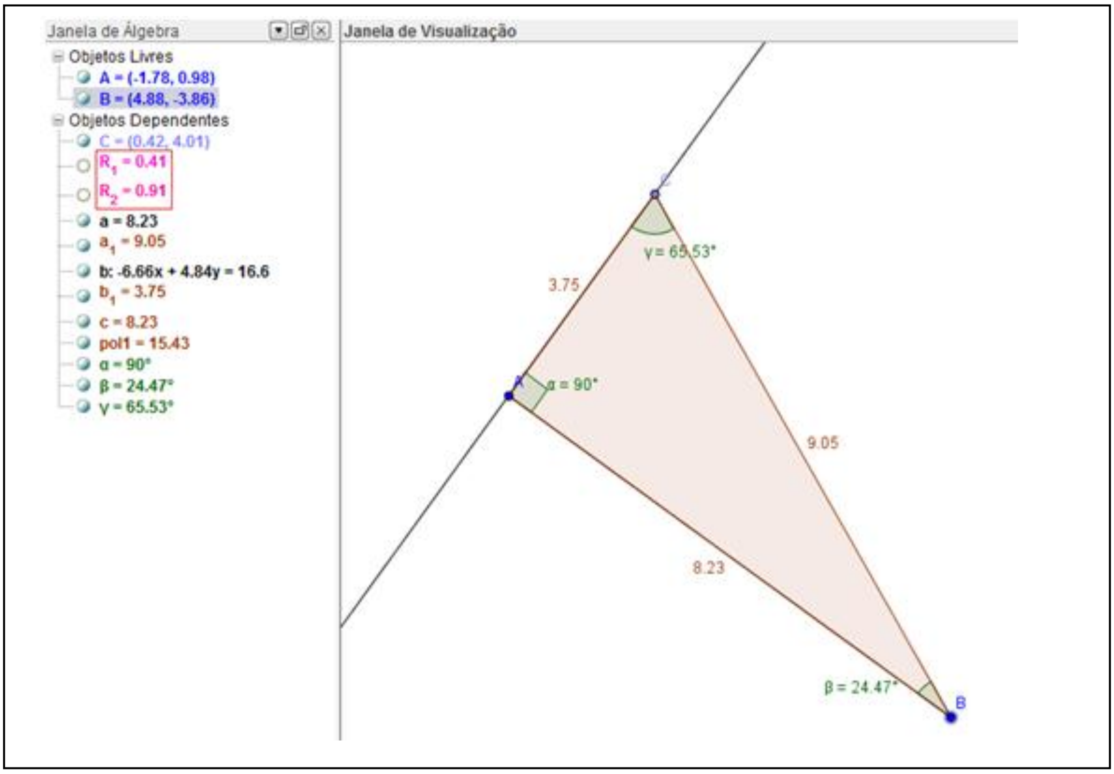
Ao movimentar o vértice B, o triângulo teve seus lados alterados, mas os ângulos e as razões permaneciam o mesmo.

Figura 26 – Triângulo construído após movimentar vértice B.



Fonte: Elaborado pela autora

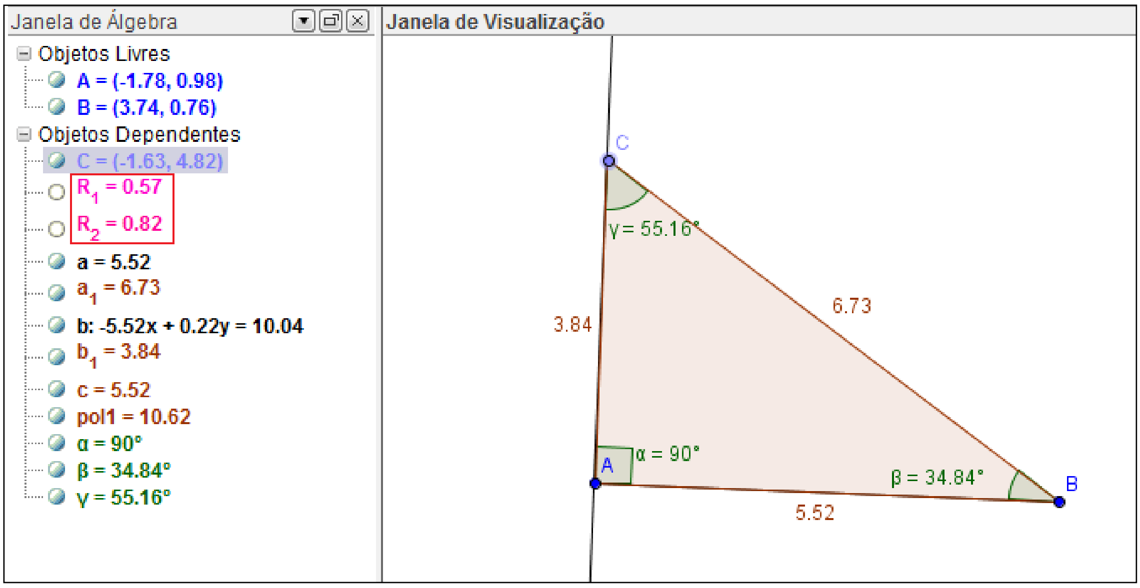
Figura 27 – Outra movimentação do vértice B do triângulo construído



Fonte: Elaborado pela autora

Ao movimentar o vértice C, os triângulos tinham seus ângulos alterados e consequentemente também as razões.

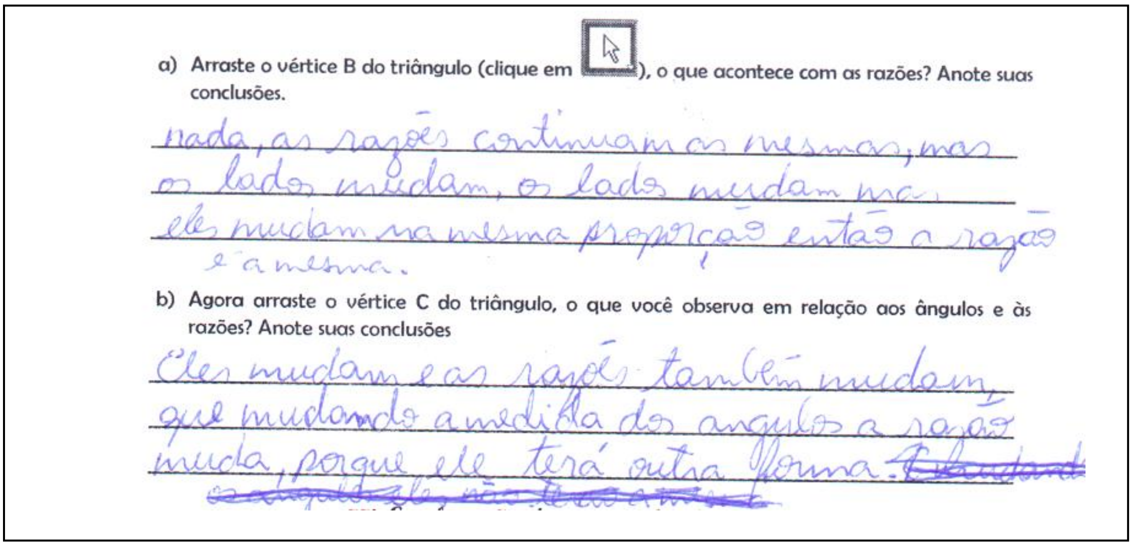
Figura 28 - Triângulo construído após movimentar vértice C.



Fonte: Elaborado pela autora

Seguem as conclusões relatadas por alguns alunos:

Figura 29 – Conclusão de um aluno a respeito do movimento dos vértices.



a) Arraste o vértice B do triângulo (clique em), o que acontece com as razões? Anote suas conclusões.

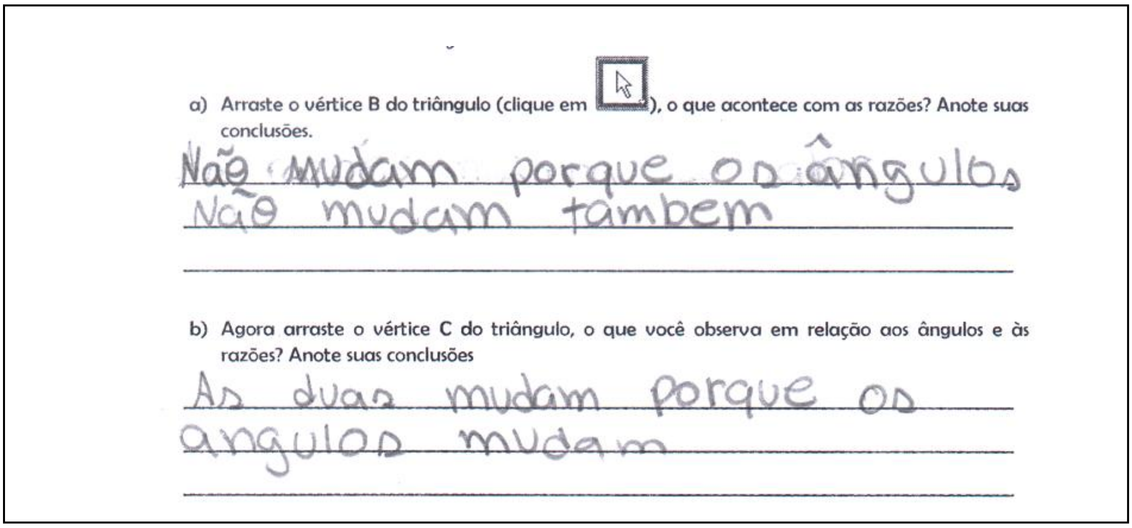
nada, as razões continuam as mesmas, mas os lados mudam, os lados mudam mas eles mudam na mesma proporção então a razão é a mesma.

b) Agora arraste o vértice C do triângulo, o que você observa em relação aos ângulos e às razões? Anote suas conclusões

Eles mudam e as razões também mudam, que mudando a medida dos angulos a razão muda, porque ele terá outra forma.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 30 – Conclusão de outro aluno a respeito do movimento dos vértices.



a) Arraste o vértice B do triângulo (clique em), o que acontece com as razões? Anote suas conclusões.

Não mudam porque os ângulos Não mudam também

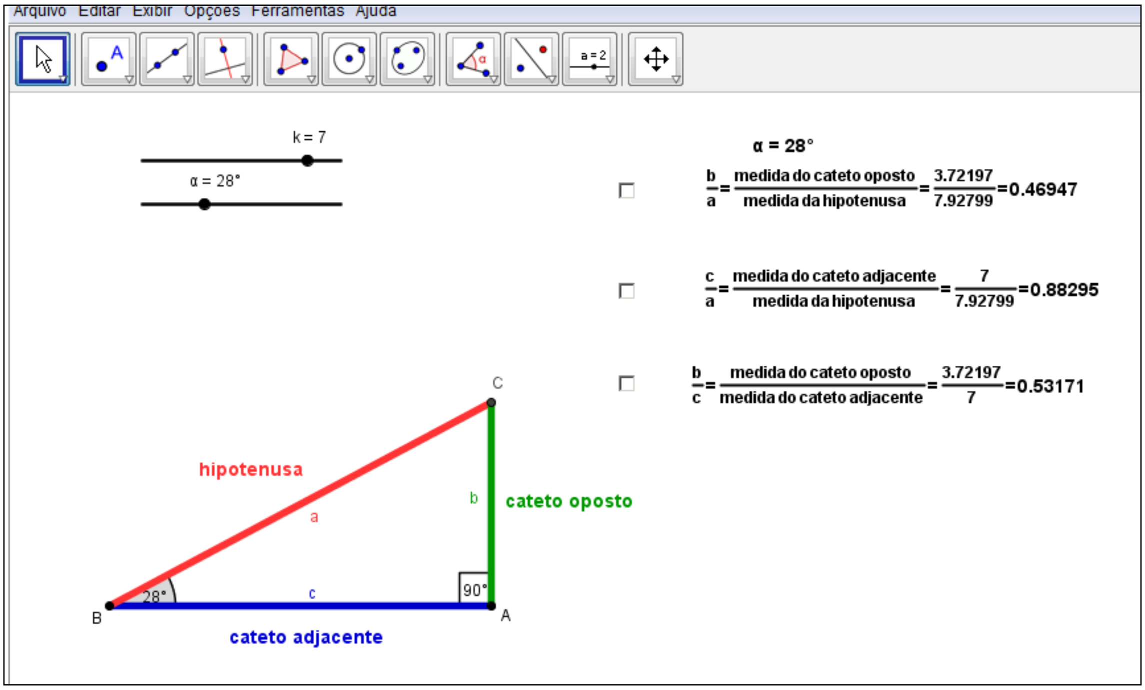
b) Agora arraste o vértice C do triângulo, o que você observa em relação aos ângulos e às razões? Anote suas conclusões

As duas mudam porque os angulos mudam

Fonte: Elaborado pela autora

O próximo passo foi abrir o applet do GeoGebra no link http://www.es.iff.edu.br/softmat/aple/Blo1/1trianguloretangulo.html e mover os seletores k e α observando o que acontece com as razões e anotar suas conclusões.

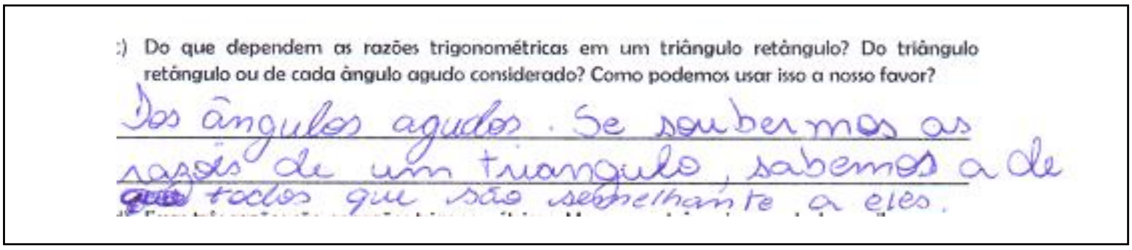
Figura 31 – Tela inicial do applet.



Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos perceberam que, assim como o triângulo construído por eles mesmos, as razões só se alteram quando os ângulos se alteram. O objetivo foi que eles concluíssem que as razões trigonométricas dependem apenas dos ângulos agudos considerados e não do triângulo retângulo e ainda percebessem no que tudo isso seria útil.

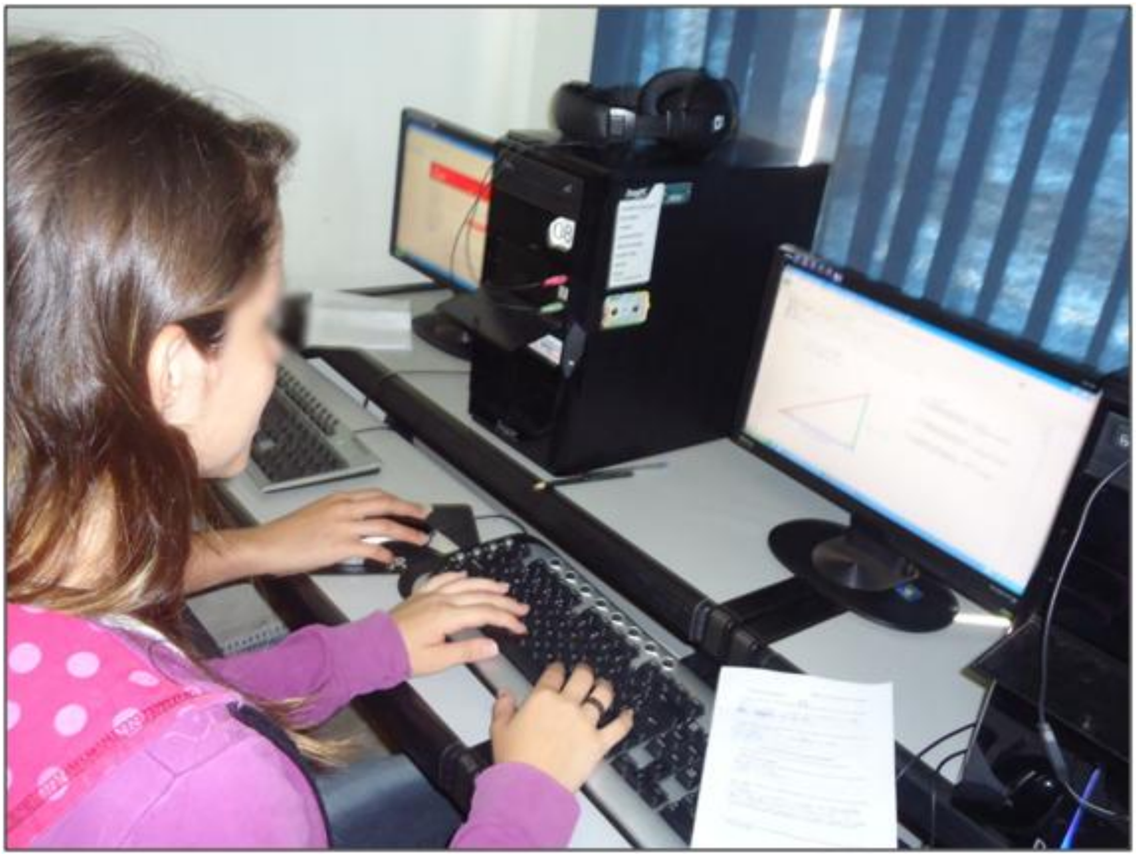
Figura 32 – Conclusão de um aluno a respeito do applet.


:) Do que dependem as razões trigonométricas em um triângulo retângulo? Do triângulo retângulo ou de cada ângulo agudo considerado? Como podemos usar isso a nosso favor?

Dos ângulos agudos. Se soubermos as razões de um triangulo, sabemos a de ~~que~~ todos que são semelhante a eles.

Fonte: Elaborado pela autora

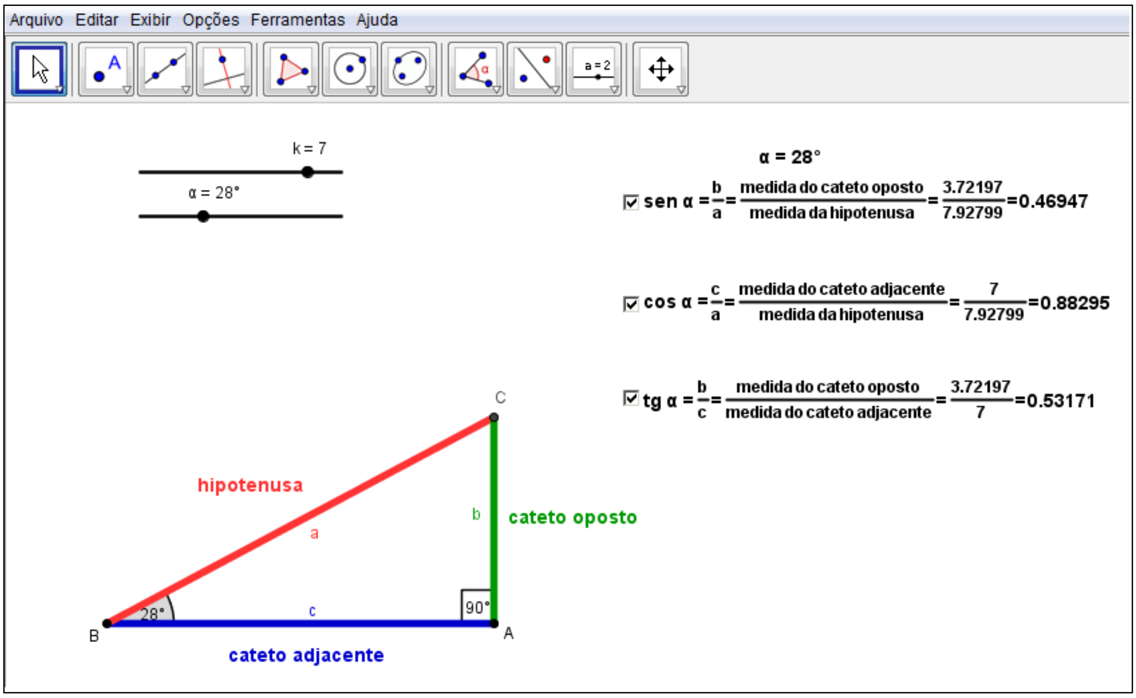
Figura 33 – Aluna explorando o applet.



Fonte: Acervo da autora

Por fim foi apresentado aos alunos o nome dessas razões entre lados de triângulos retângulos. Clicando nas três caixinhas ao lado, cada razão recebeu seu nome.

Figura 34 – Apresentação da nomenclatura das razões trigonométricas no applet.



Fonte: *print screen* do applet no sistema Windows

5.3.3 Atividades externas

Materiais utilizados: Calculadora científica e smartphones ou tablets.

Tempo: 2 aulas de 50 minutos cada.

Para fixar o conteúdo de trigonometria depois dessas diversas explorações, foi lançado um desafio aos alunos: medir a altura do Cristo Redentor localizado na entrada da cidade de Cedral. Para isso foi necessário uma trena e um teodolito. Para medir o ângulo de visada, os alunos foram instruídos a fazer o download de um dos aplicativos, listados anteriormente, que fazem a função de teodolito. Todos os alunos optaram pelo Theodolite Droid.

Divididos em grupos de 5 ou 6 alunos, sendo que pelo menos um integrante do grupo tinha o smartphone ou o tablet com o app instalado, e acompanhados pela professora, ao alunos caminharam até a entrada da cidade para realizar a medição.

O local escolhido conta com um terreno plano o que possibilita o uso da trigonometria em triângulos retângulos para o cálculo da altura do objeto.

Cada grupo fez suas anotações e ao voltar para a sala de aula, esboçaram a situação e calcularam, com o auxílio da calculadora do próprio smartphone, a altura aproximada do Cristo Redentor.

Figura 35 – Alunos no local do objeto a ser medido.

Fonte: Acervo da autora

Figura 36 – Alunas usando um tablet para medir o ângulo de visada.

Fonte: Acervo da autora

Figura 37 – Aluno usando um smartphone para medir o ângulo de visada.

Fonte: Acervo da autora

De acordo com informações da Prefeitura Municipal de Cedral, o Cristo Redentor do município possui uma base de 4 metros e a imagem tem 8 metros, totalizando 12 metros de altura.

Para chegar até a estátua do Cristo, os alunos teriam que atravessar a avenida que passa por ela, então foi decidido determinar um ponto fixo para o observador e realizar uma medição apenas para evitar a movimentação de muitos alunos pela rua. A distância do ponto escolhido até o objeto que foi medido era de 29,5 metros. A medição foi realizada por um representante de cada grupo acompanhados da professora. Feito isso, o ângulo de visada ficou a cargo de cada grupo e sem intervenção da professora.

A tabela a seguir mostra os dados encontrados pelos grupos:

Tabela 1 – Medidas encontradas pelos grupos para o Cristo Redentor.

Grupo	**Ângulo de visada**	**Altura do observador**	**Altura do Cristo Redentor**
1	19,8º	1,69 m	12,31 m
2	19,8º	1,70 m	12,32 m
3	19,3º	1,75 m	12,08 m
4	20,5°	1,65 m	12,68 m
5	20,7°	1,65 m	12,80 m
6	20,2º	1,59 m	12,44 m
7	20,9º	1,50 m	12,76 m

Fonte: Elaborado pela autora

5.4 Análise *a posteriori*

Fazendo uma análise qualitativa do comportamento dos alunos durante as atividades e das respostas apresentadas nas folhas de atividades, avaliamos que em geral o objetivo foi alcançado, pois os alunos se interessaram pelas atividades e se empenharam na realização das tarefas. Já na primeira parte da aplicação, que foi feita em sala de aula, notamos essa motivação dos alunos ao calcular as hipotenusas dos triângulos com o uso da calculadora. Percebe-se que mesmo uma tecnologia tão antiga e simples como a calculadora já os deixam confiantes pela certeza do cálculo correto. Este momento serviu para refletir sobre o motivo de nossas turmas conterem tantos alunos desinteressados pela Matemática. A dificuldade e os obstáculos encontrados por eles, até em operações básicas, os fazem desistir da Matemática logo nas séries iniciais.

O contato com o GeoGebra na sala de informática permitiu aos alunos, fazerem experimentos com vários triângulos ao mesmo tempo, apenas movimentando seus vértices, o que deixa mais claro ainda os padrões que existem nos triângulos, fazendo-os chegar mais rapidamente ás conclusões. Inclusive alguns alunos, nas aulas subsequentes, disseram ter feito o download do GeoGebra no computador de casa.

A atividade de campo, por ser em uma cidade pequena, chamou a atenção e todos e rapidamente a informação da medida da estátua do Cristo Redentor foi espalhada pelos alunos aos pais, amigos e familiares, como um dado importante medido pelo próprio aluno.

Nessa pesquisa pretendeu-se responder à seguinte questão: “Utilizar tecnologias no ensino, como os aplicativos para smartphones, incentivam e motivam os alunos, permitindo que eles construam uma aprendizagem significativa da Trigonometria?”. Diante das constatações dessa pesquisa, podemos responder positivamente essa questão, pois o uso de tecnologias no ensino aproxima o conteúdo a ser ensinado do cotidiano dos alunos, além de possibilitar uma melhor visualização dos diversos conceitos trigonométricos, promovendo uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo A.; COUTINHO , Cileda Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revista de Educação Matemática**, Santa Catarina, v.3, n.6, p.62-77, 2008.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BARRETO, Maria de Fátima Teixeira et al. **Educação Matemática, tecnologias e formação de professores**: jogos online nas aulas de matemática dos anos iniciais. In Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), XIII, 2011, Recife. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011. Disponível em <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1748/165> Acesso em 07/02/2013.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRESSOUD, David M. Supplement to “Historical Reflections on Teaching Trigonometry”: Ptolomy. **Mathematics Teacher**, Reston, v.104, n. 2, p.120-125, 2010.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetikè**, Campinas, v.13, n.23, p.87-119, 2005.

CHARTERS, Lawrence I. **Teodolito para iPhone**. 2010. Disponível em <http://www.wap.org/journal/theodolite/>. Acesso em 05/06/2014.

DEMO, Pedro. **Educação hoje: “novas” tecnologias, pressões e oportunidades**. São Paulo: Atlas, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5ª edição. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GOODWIN, Kristy. **Use of tablet technology in the classroom**. 2012. Disponível em: <http://www.tale.edu.au/tale/live/teachers/shared/next_practice/iPad_Evaluation_Sydney_Region.pdf>. Acesso em: 24/06/2014.

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Manual Oficial da versão 3.2 do GeoGebra.** Disponível em: <http://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em 15/09/2014.

MOREY, Bernadete Barbosa. Tópicos de História da Trigonometria In: FOSSA, John A. **Matemática e medida: Três momentos históricos**. São Paulo: Editora da Física, 2009. P.117-153.

PASSARELLI, Brasilina; JUNQUEIRA Antonio Helio. **Gerações Interativas Brasil – Crianças e Adolescentes diante das telas**. São Paulo: Escola do Futuro/USP, 2012.

PEDROSO, Hermes Antonio. **História da Matemática**. 2009. Disponível em <http://www.mat.ibilce.unesp.br/personal/hermes/apostila_hist_mat.pdf>. Acesso em 01/07/2014.

PITOMBEIRA, João Bosco, ROQUE, Tatiana Marins. **Tópicos de história da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ZYLBERBERG, Tatiane Passos. Tecnologias digitais e avaliação: algumas conexões. **Motrivivência**, Ano XXII, nº34, p.61-71, 2010.

Apêndice A

Folhas de atividades aplicadas

FOLHA DE ATIVIDADES 1

Nome:____ nº:_____ 9º___
Grupo:_______________ Data____/_____/________

INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA

Vamos recordar? - Semelhança de triângulos

Vocês devem se reunir em grupos de quatro alunos. Na próxima página tem uma ficha contendo triângulos numerados de 1 a 9. Observem que esses triângulos possuem uma característica em comum. Qual é ela? Como são chamados esses triângulos?

____

____

Agora registre, na própria ficha, as medidas de cada lado dos triângulos. Utilize como unidade de medida o lado de cada quadradinho da malha. Note que para encontrar o valor de um dos lados será necessário o uso de um famoso teorema. Se lembram qual é? Fale sobre ele.

____

____

____

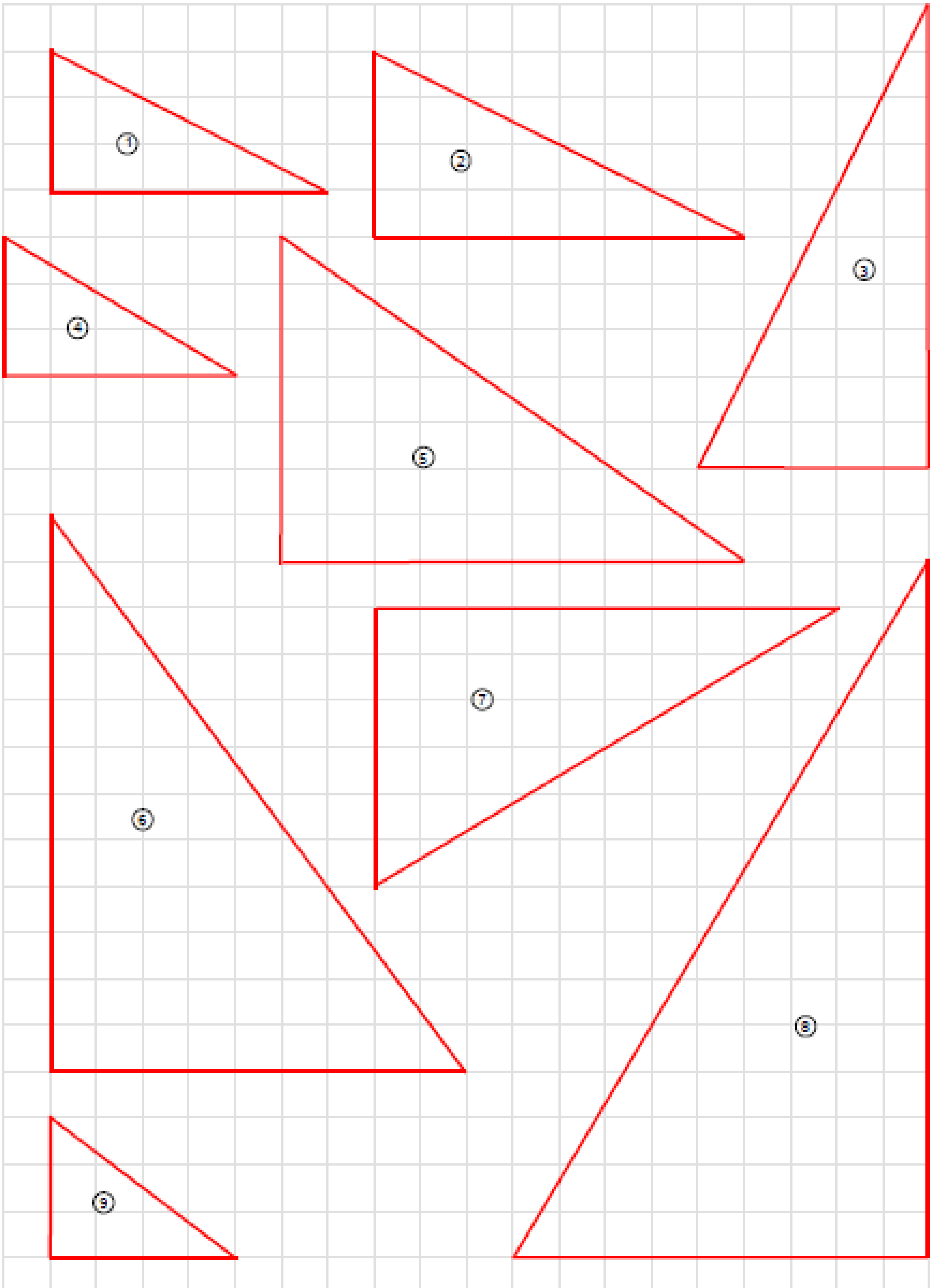
Discuta com seu grupo as características de triângulos semelhantes e registre, depois, os identifique na ficha pintando os triângulos semelhantes com a mesma cor.

____

____

____

FOLHA DE ATIVIDADES 2



FOLHA DE ATIVIDADES 3

Agora vamos agrupar os triângulos semelhantes e calcular algumas razões.

- ✓ **Triângulos de cor ______________________________**

Números dos triângulos semelhantes			
$\frac{cateto\ menor}{hipotenusa}$			
$\frac{cateto\ maior}{hipotenusa}$			
$\frac{cateto\ menor}{cateto\ maior}$			

- ✓ **Triângulos de cor ______________________________**

Números dos triângulos semelhantes			
$\frac{cateto\ menor}{hipotenusa}$			
$\frac{cateto\ maior}{hipotenusa}$			
$\frac{cateto\ menor}{cateto\ maior}$			

- ✓ **Triângulos de cor ______________________________**

Números dos triângulos semelhantes		
$\frac{cateto\ menor}{hipotenusa}$		
$\frac{cateto\ maior}{hipotenusa}$		
$\frac{cateto\ menor}{cateto\ maior}$		

O que se pode afirmar sobre as razões acima?

____

____

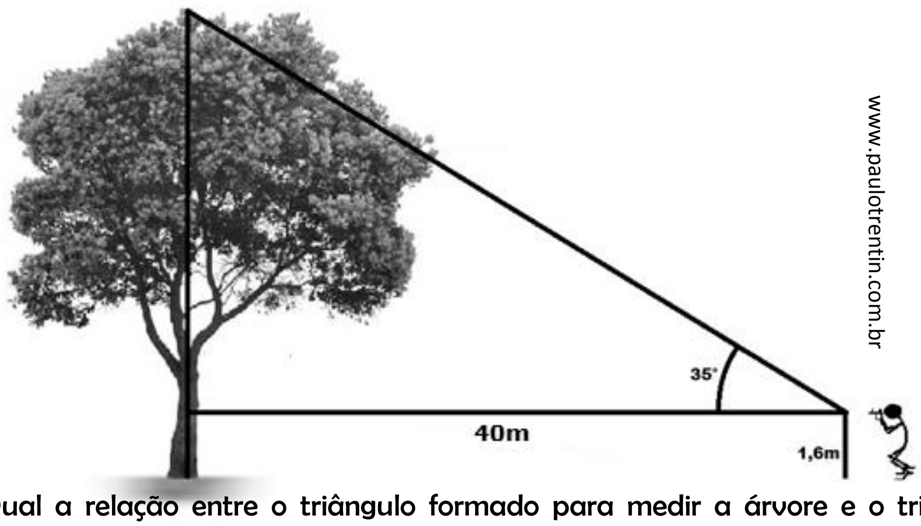
FOLHA DE ATIVIDADES 4

Sobrou um triângulo? Utilizando uma régua, meça os ângulos internos do triângulo que sobrou e anote na ficha.

Imagine que você queira medir a altura de uma árvore. Você dispõe apenas de uma trena e de um **teodolito**.

- ***Ângulo de visada*** *é o ângulo sob o qual um observador enxerga um objeto que se encontra na posição vertical em relação ao solo.*

Para estimar a altura de uma grande árvore, um engenheiro mediu o ângulo de visada com o teodolito (35°), em seguida mediu a distância do teodolito até a árvore (40m). Finalmente, sabendo que seu teodolito estava a uma altura de 1,60m do chão, concluiu que já tinha todos os dados necessários para estimar a altura da árvore.



Qual a relação entre o triângulo formado para medir a árvore e o triângulo que sobrou da ficha? Justifique.

____

____

Determine a altura da árvore utilizando as razões do triângulo da ficha.

FOLHA DE ATIVIDADES 5

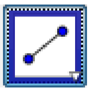
Nome:____ nº:_____ 9º____	
Grupo:_______________	Data____/_____/________

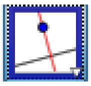
RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

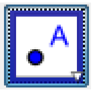
Continuando nossa exploração, a seguir há um roteiro para a construção de um triângulo retângulo no software de geometria dinâmica **GeoGebra.**

Você deve construir o triângulo e responder as questões.

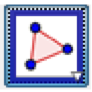
I) *Roteiro para a construção de um triângulo retângulo no GeoGebra*

1) Trace o segmento de reta AB. (clique na ferramenta  "Segmento definido por dois pontos").

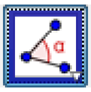
2) Trace uma reta b perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A. (clique na ferramenta  "Reta Perpendicular" e, em seguida, no ponto A e no segmento AB).

3) Marque um ponto C sobre a reta b (clique na ferramenta 

"Novo Ponto" e na reta b).

4) Construa o triângulo ABC (clique na ferramenta  "Polígono" e, em seguida, nos pontos A, B, C e A novamente)

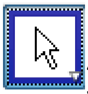
5) Determine as medidas dos lados do triângulo formado (clique com o ponto direito do mouse sobre cada elemento e, em seguida, propriedades e marque a opção "Exibir Rótulo" e na caixa de seleção ao lado marque "Valor").

6) Determine as medidas dos ângulos internos do triângulo formado (clique na ferramenta  "Ângulo" e, em seguida, dentro do triângulo ABC)

7) Calcule as razões AC/BC e AB/BC (digite na caixa de entrada R_1= AC/BC e clique em Enter e, em seguida, digite na caixa de entrada R_2=AB/BC)

FOLHA DE ATIVIDADES 6

É hora de investigar!

a) Arraste o vértice B do triângulo (clique em ), o que acontece com as razões? Anote suas conclusões.

____

____

b) Agora arraste o vértice C do triângulo, o que você observa em relação aos ângulos e às razões? Anote suas conclusões

____

____

II) *Exploração de um applet do GeoGebra*

Abra o applet http://www.es.iff.edu.br/softmat/aple/Blo1/1trianguloretangulo.html.

É hora de investigar!

a) Mova o seletor k e observe na janela de visualização. O que acontece com o ângulo $\hat{B}$ e as razões? Anote suas conclusões

____

____

b) Mova o seletor ∝, alterando a medida do ângulo $\widehat{B}$, o que acontece com as razões? Por que isso acontece?

____

____

c) Do que dependem as razões trigonométricas em um triângulo retângulo? Do triângulo retângulo ou de cada ângulo agudo considerado? Como podemos usar isso a nosso favor?

____

____

d) Essas três razões são as razões trigonométricas. Marque as três caixas ao lado e saiba o nome de cada uma delas.

Apêndice B

Adaptação do roteiro de construção e exploração do triângulo retângulo usando Geogebra para tablets

Nome:____ nº:_____ 9º___

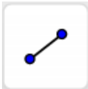
Grupo:________________ Data____/_____/________

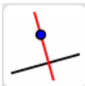
RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

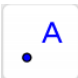
Continuando nossa exploração, a seguir há um roteiro para a construção de um triângulo retângulo no aplicativo de geometria dinâmica **GeoGebra.**

Você deve construir o triângulo e responder as questões.

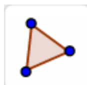
I) *Roteiro para a construção de um triângulo retângulo no GeoGebra*

1) Trace o segmento de reta AB. (toque no terceiro ícone da barra de ferramentas e escolha a ferramenta  "Segmento definido por dois pontos" e depois toque em dois lugares diferentes da janela de visualização para marcar os pontos A e B do segmento).

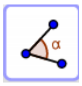
2) Trace uma reta b perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A. (toque no quarto ícone e escolha a ferramenta  "Reta Perpendicular" e, em seguida, toque no ponto A e no segmento AB).

3) Marque um ponto C sobre a reta b (toque no segundo ícone e escolha a ferramenta 

"Novo Ponto" e em seguida toque na reta b).

4) Construa o triângulo ABC (clique no quinto ícone e escolha a ferramenta  "Polígono" e, em seguida, toque nos pontos A, B, C e A novamente)

5) Note que as medidas do triângulo formado aparecem na janela de álgebra no item "Segmento".

6) Determine as medidas dos ângulos internos do triângulo formado (toque no oitavo ícone e escolha a ferramenta  "Ângulo" e, em seguida, toque dentro do triângulo ABC)

7) Calcule as razões AC/BC e AB/BC (digite no campo de entrada R_1= AC/BC e toque em "retorno" e, de modo análogo, digite no campo de entrada R_2=AB/BC)

É hora de investigar!

a) Arraste o vértice B do triângulo (toque no primeiro ícone e escolha a ferramenta , depois toque no vértice B deslize o dedo sobre a tela), o que acontece com as razões (observe-as na janela de álgebra)? Anote suas conclusões.

b) Agora arraste o vértice C do triângulo, o que você observa em relação aos ângulos e às razões? Anote suas conclusões