UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

RENATA CLÁUDIA GOIS

O EFEITO DO MATERIAL CONCRETO E DO MODELO DE BARRAS NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONTEÚDO CURRICULAR DE FRAÇÕES PELOS ALUNOS DE 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

São Carlos
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

RENATA CLÁUDIA GOIS

O EFEITO DO MATERIAL CONCRETO E DO MODELO DE BARRAS NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONTEÚDO CURRICULAR DE FRAÇÕES PELOS ALUNOS DE 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para obtenção do título de mestre, sob orientação da Professora Doutora Yuriko Yamamoto Baldin.

São Carlos
2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

G616em

Gois, Renata Cláudia.
O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7º ano do ensino fundamental / Renata Cláudia Gois. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
98 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Frações. 2. Aprendizagem significativa. 3. Material concreto. 4. Modelo de barras. I. Título.

CDD: 513.26 (20ª)

Banca Examinadora:

____
Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
DM/UFSCar - orientadora

____
Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva
IBILCE-UNESP

____
Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM-UFSCar

Dedico esse trabalho ao meu marido e a minha família, que sempre me apoiaram e incentivaram.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Yuriko, por toda a paciência, dedicação, ajuda e extrema contribuição para a realização desse trabalho.

À meu amado marido, por todo carinho e companheirismo.

Aos meus familiares, em especial meus pais e irmãos, por sempre acreditarem em mim.

Aos meus professores, que me ensinaram muito nos últimos anos.

À minha amiga e colega de profissão Andrea, que sempre me ajudou muito.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho uma proposta de ensino do conteúdo de frações para uma turma de 7º ano, baseada na utilização de um material concreto intitulado "Estojo das frações" e do Modelo de Barras da Matemática de Singapura, e centrada na consolidação dos conceitos e das operações básicas. A realização deste trabalho foi motivada por uma constatação da enorme dificuldade de aprendizagem e compreensão dos números racionais apresentada por alunos de diversas séries do ensino fundamental. A aprendizagem dos números racionais é de fundamental importância para o desenvolvimento do conteúdo curricular da matemática do ensino fundamental. O "Estojo de frações" e o Modelo de Barras foram utilizados, pois oferecem a possibilidade de visualizar concretamente os conceitos relacionados ao tema de frações. As atividades propostas foram baseadas nas ideias didáticas e atividades do material de Baldin e Malagutti (2006), e buscam a compreensão do significado de frações equivalentes e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações a partir do significado parte-todo. Trazemos também os resultados obtidos a partir da aplicação dessa proposta com três turmas de 7º ano de uma escola particular de Bauru.

Palavras-chaves: aprendizagem significativa, frações, material concreto, modelo de barras.

ABSTRACT

The dissertation presents a proposal for teaching the content of fractions to a 7th grade classroom of basic education, based on a concrete didactical material, “Fraction Case”, and the Bar Model inspired in Singapore Mathematics, focused on the conceptual understanding along with basic operation skills. The motivation to this work was the recognition of great difficulty in learning with understanding of rational numbers, shown by the students of basic education across the grades. The learning of rational numbers is of fundamental importance to the accomplishment of the mathematics curriculum of basic education. We adopted the “Fraction Case” and the Bar Model because they actually offer the possibility of visualizing concrete representation of ideas that underline the subject of fractions. The proposed activities were inspired by the didactical ideas and activities in Baldin & Malagutti (2006), and they aim at the understanding of the concept of equivalent fractions together with the basic operations of addition, subtraction, multiplication and division of fractions, starting from the perspective of the part-whole relationship. We bring out the outcome resulted from the application of activities in three classrooms of 7th grade students of a private school of city of Bauru.

Key words: meaningful learning, fractions, concrete didactical material, bar model.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente, as dificuldades em ensinar e aprender Matemática estão cada vez mais evidentes. Várias pesquisas e avaliações de rendimento apresentam conclusões e resultados alarmantes. Ainda são predominantes nas escolas aulas de Matemática expositivas, onde os professores explicam os conteúdos e, os alunos, realizam cópias e exercícios de aplicação, que nada mais são do que repetições das soluções apresentadas pelos professores. Esse processo evidencia que ainda acredita-se que a aprendizagem se dá através da transmissão de conhecimentos.

Os PCN (1998, p. 22) afirmam que:

> De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. Também a importância de levar em conta o conhecimento prévio dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderada.

Ball (1990) diz que um dos objetivos do ensino e aprendizagem em Matemática é fazer com que a Matemática faça sentido para o aluno e que ele a compreenda. Assim:

> Learning mathematics with understanding, according to this view, entails making connections between informal understandings – about mathematical ideas, quantitative and spatial patterns, and relationships – and more formal mathematical ideas. (BALL, 1990, p.1)

Segue uma tradução desta citação:

> Aprender matemática com compreensão, de acordo com este ponto de vista, requer fazer conexões entre conhecimentos informais – sobre as ideias matemáticas, padrões quantitativos e espaciais, e relações – e ideias matemáticas mais formais.

Assim, não é exagero afirmar que o aluno deve ser ativo na construção de seu conhecimento e nós professores devemos atuar como mediadores nesse processo. Acreditando nessa prática, comecei a observar as dificuldades de meus alunos e a buscar alternativas para minimizá-las.

Um dos temas que sempre me chamou atenção foi o ensino de frações. É comum ouvirmos dos alunos (e até de professores) frases como “Fração é muito difícil”, “Eu não sei fazer contas com fração”, “Nem uso frações, para que preciso saber?”. Muitos desses, quando se deparam com frações, simplesmente desistem de tentar resolver. Até mesmo os alunos que aparentemente não apresentam dificuldades, em anos futuros, não se lembram de como realizar operações com frações ou não sabem o porquê fazem as contas daquela maneira. Dessas observações ao longo de minha carreira, surgiu a motivação desse estudo.

Nosso objetivo foi tentar fazer com que meus alunos do 7º ano compreendessem os significados das operações com as frações e conseguissem utilizá-los em situações problema, já que, geralmente, apresentavam dificuldades em identificar frações equivalentes, realizar operações com frações e em resolver problemas que envolvessem frações.

Buscando alternativas para uma aprendizagem significativa, em que os alunos pudessem participar raciocinando e compreendendo, encontramos no material de Baldin e Malagutti (2006) uma abordagem coerente com nossa visão.

Com as ideias didáticas desse material e suas atividades, criamos folhas de atividades que foram utilizadas na construção do conceito de frações equivalentes, e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com frações. Também adotamos um material concreto intitulado de "Estojo das frações", para ajudar a visualizar concretamente os conceitos relacionados ao tema de frações e assim atribuir significados aos mesmos.

Nosso trabalho consistiu na aplicação dessas folhas de atividades e na verificação dos resultados obtidos. Está estruturado da seguinte forma:

O **Capítulo 1** traz a fundamentação para nosso estudo e para as abordagens utilizadas durante a aplicação das folhas de atividades.

O **Capítulo 2** traz considerações matemáticas sobre os conceitos abordados.

No **Capítulo 3**, descrevemos como ocorreram as aplicações das folhas de atividades, o "Estojo de frações", quais as dificuldades encontradas nesse processo e explicitamos algumas considerações didáticas sob o olhar do professor.

No **Capítulo 4**, fazemos a análise dos procedimentos adotados e apresentamos nossas conclusões.

O **Apêndice** traz as folhas de atividades elaboradas nesse estudo.

Esperamos que nosso trabalho possa auxiliar outros professores no processo de ensino e aprendizagem das frações.

CAPÍTULO 1 – FUNDAMENTANDO NOSSA PROPOSTA

Nesse capítulo apresentamos a fundamentação para nosso estudo e para as abordagens utilizadas durante a aplicação das folhas de atividades.

1.1 Porque ensinar os números racionais?

Pensando em nosso contexto diário, os números racionais aparecem muito mais em sua forma decimal do que na forma fracionária. Ainda assim, sua abordagem no ensino é de fundamental importância, já que são conhecimentos historicamente construídos e precursores no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos.

Caraça (1991) afirma que medir e contar são as operações que aparecem com maior frequência em nosso dia a dia. Todos nós já precisamos e precisaremos realizar essas operações em algum momento. O problema da contagem foi resolvido com a criação dos números naturais, que surgiram a partir das necessidades de realizar contagens dos povos antigos e evoluíram junto com as civilizações. Quando passaram a perceber que para resolver determinadas situações os números naturais não são suficientes, como no caso de problemas que envolvem medidas de grandezas, deu-se a necessidade de ampliar os números naturais.

Segundo os PCN (1998, p. 63), é fundamental no terceiro ciclo de ensino “que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, busquem relações existentes entre eles, aprimorem a capacidade de análise e de tomada de decisões, que começam a se manifestar”. Para que isso ocorra, o trabalho com os números racionais deve, ainda nos primeiros ciclos do ensino, levar os alunos a perceber essa mesma necessidade de ampliação dos números naturais, seja com problemas que envolvem medidas de grandezas ou os resultados de uma divisão.

O problema é que apesar de ser uma ampliação dos números naturais e de manter suas propriedades, os números racionais apresentam novas particularidades que geram muitas dificuldades. Assim, o estudo dos números racionais deve partir da exploração de seus significados: a relação parte-todo, quociente, razão e operador. O que percebemos é que muitas vezes esses diferentes significados não são trabalhados nos primeiros ciclos de ensino e precisam ser abordados novamente no terceiro ciclo:

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo [...]. (BRASIL, 1998, p. 100)

Como meus alunos apresentavam maiores dificuldades na representação fracionária dos números racionais, que é fundamental no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos, o enfoque de nosso estudo é esse, no sentido de consolidar os conceitos e as operações básicas, tentando agregar significado e interpretações em contextos de problemas.

1.2 Dificuldades na aprendizagem dos números racionais

Várias são as pesquisas sobre as dificuldades no aprendizado dos números racionais. Segundo Brolezzi (1996, p. 55), "Ao que tudo indica, o ensino elementar de Matemática não consegue construir na mente dos alunos um conceito de Número Racional que permita sua utilização pelos alunos mais tarde. As operações com racionais são quando muito mecanizadas em torno de algumas regrinhas básicas, muitas vezes confundidas umas com as outras."

Ainda segundo esse autor, a dificuldade de se trabalhar com frações e decimais pode estar na forma de ensiná-los. Considera o ensino baseado em regras como um "tratamento intensivo", que não procura propiciar a assimilação do conceito dos números racionais, fazendo com que os alunos não atribuam significado a esse conhecimento.

Segundo os PCN (1998), uma possível explicação para as dificuldades nessa aprendizagem deve-se ao fato de que supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais, e lista os seguintes obstáculos:

- As diferentes representações fracionárias de um mesmo número, por exemplo: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \ldots$
- A comparação entre números racionais, já que parece contraditória: se $3 > 2$, como compreender que $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$?

- Para os números naturais, o "tamanho" da escrita numérica é um bom indicador de sua ordem de grandeza (83 < 8345), já a comparação entre números racionais na forma decimal não obedece ao mesmo critério (2,3 > 2,125).

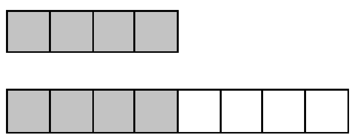
- Na multiplicação de 10 por $\frac{1}{2}$, por exemplo, encontramos um resultado que é menor do que 10. Isso não acontece ao multiplicarmos 10 por outro número natural diferente de 0.

- Como entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional, a indicação "antecessor/sucessor" dos números naturais não faz sentido.

Patrono (2011) diz que parte das dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais representados por frações se relaciona à construção de seu conceito, e que isto acontece porque muitas vezes os alunos têm dificuldades para perceber as frações como números.

Ball (1990) destaca que uma das dificuldades dos alunos é com a ideia de unidade, que é central para o conhecimento de frações. Um dos exemplos que cita é a comparação de $\frac{4}{4}$ com $\frac{4}{8}$, em que muitos alunos acreditam que $\frac{4}{8}$ pode ser igual a $\frac{4}{4}$, pois os representam da seguinte forma:

Figura 1 – representação das frações $\frac{4}{4}$ e $\frac{4}{8}$ sem considerar a ideia de unidade



Fonte: Ball, 1990, p.4

Conforme demonstram os resultados das avaliações do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e do SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino Básico), percebe-se que para os alunos das escolas brasileiras esse conteúdo não é de fácil assimilação. Nessas avaliações, os alunos são submetidos a problemas que têm o objetivo de medir suas competências com as frações como, por exemplo, os problemas seguintes:

Figura 2 – questão do SARESP 2011 para o 5º ano

Os amigos Pedro, Renato e Roberto comemoraram a vitória do seu time em uma pizzaria. Eles dividiram uma pizza em 8 pedaços iguais. Pedro comeu $\frac{3}{8}$, Renato comeu $\frac{1}{8}$ e Roberto comeu $\frac{2}{8}$ dessa pizza.

Que fração da pizza eles comeram?

(A) $\boxed{\frac{6}{8}}$

(B) $\frac{4}{8}$

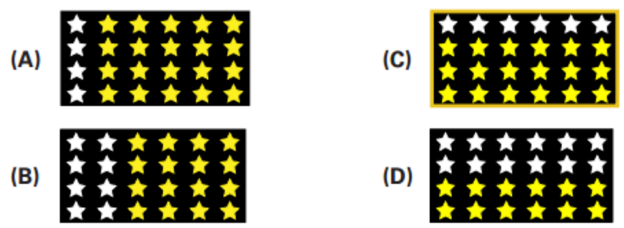
(C) $\frac{6}{14}$

(D) $\frac{6}{24}$

Fonte: Relatório Pedagógico do Saresp 2011 (p. 74)

Figura 3 – questão do SARESP 2011 para o 7º ano

Carla já usou um quarto dos selinhos de sua cartela de estrelas. A cartela de Carla é:



Fonte: Relatório Pedagógico do Saresp 2011 (p. 87)

Figura 4 – questão do SARESP 2011 para o 9º ano

Uma pessoa gastou $\frac{3}{4}$ do seu 13.º salário para comprar uma geladeira e $\frac{3}{5}$ da quantia restante para comprar um colchão novo. Após as duas compras, ele aplicou os R$ 250,00 restantes na poupança. O valor do 13.º salário dessa pessoa foi de

(A) R$ 2.250,00.

(B) **R$ 2.500,00.**

(C) R$ 2.800,00.

(D) R$ 4.000,00.

Fonte: Relatório Pedagógico do Saresp 2011 (p. 147)

O Relatório Pedagógico dessa avaliação aponta algumas das dificuldades dos alunos. Na questão do 5º ano, a porcentagem de acerto foi de 65,2% (alternativa A), porém cerca de 20% dos alunos adicionaram os numeradores e também os denominadores das frações (alternativa D), evidenciando que esse procedimento é considerado lógico pelas crianças. Na do 7º ano, apenas 21% dos alunos acertou a questão (alternativa C) e a maioria, cerca de 59%, assinalou a alternativa A, associando a retirada de quatro selos da cartela à quantidade $\frac{1}{4}$, o que mostra a não compreensão do significado parte-todo das frações. Já no 9º ano, apenas cerca de 36% dos alunos acertaram a questão (alternativa B), o que é muito preocupante, já que esses alunos estão terminando o 4º ciclo do Ensino Básico e que nessa etapa esse conteúdo já deveria ter sido assimilado. O Relatório destaca ainda que são recorrentes os baixos percentuais de acertos em questões que envolvem a habilidade de escrever a representação fracionária de números decimais e vice-versa nas demais avaliações em larga escala, como no SAEB e na Prova Brasil.

Todos esses apontamentos evidenciam que as dificuldades são antigas e que o trabalho com as frações deve ser cuidadoso. Se os conceitos e as operações não forem compreendidos, não conseguiremos melhorar esse cenário.

1.3 Nossa proposta

Segundo os PCN (1998, p. 63), no terceiro ciclo do ensino devemos privilegiar situações de aprendizagem que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações:

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.

Ainda segundo os PCN (1998), por meio dessas situações devemos levar os alunos a:

- Ampliar e construir novos significados para os números racionais;
- Resolver situações-problema e a partir delas construir novos significados para as operações com esses números;
- Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números racionais vinculando-as aos contextos matemáticos e não matemáticos;

- Conseguir identificar e utilizar procedimentos de cálculos em função das situações-problema propostas.

É no sentido da consolidação do conceito e das operações básicas com frações que se dá nossa proposta. Nossas situações de aprendizagem são baseadas na resolução de situações problemas, já que, segundo os PCN (1998, p. 40):

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

Na resolução de problemas os alunos precisam mobilizar seus conhecimentos e gerenciar essas informações na busca de estratégias para a resolução. Dessa forma, estão estabelecendo relações e ampliando seus conhecimentos a respeito de conceitos e procedimentos matemáticos. Além disso, a partir da observação de casos particulares, regularidades são descobertas, generalizadas e hipóteses matemáticas são formuladas. O ensino através da resolução de problemas favorece a capacidade de aprender a aprender.

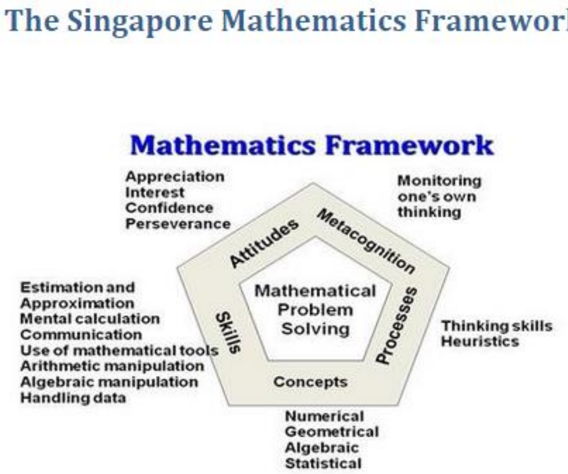
Ball (1990, p. 2) afirma que “In order to help students develop mathematical understanding and power, the teacher must select and construct models, examples, stories, illustrations, and problems that can foster students' mathematical development”. Segue uma tradução dessa citação: “A fim de ajudar os alunos no desenvolvimento da compreensão e poder matemático, o professor deve selecionar e construir modelos, exemplos, histórias, ilustrações e problemas que podem promover nos estudantes desenvolvimento matemático”. E que esses modelos ou contextos representacionais devem oferecer “espaços de pensamento” para trabalhar as ideias, com professores e alunos trabalhando juntos para desenvolver formas de ir além e passar por situações específicas para abstrair e generalizar entendimentos emergentes.

Afirma também (p. 4) que no ensino de frações devemos pesar as vantagens relativas em fornecer aos alunos materiais representacionais estruturados (como barra de frações, diagramas de pizzas, retas numéricas, que podem ajudar os alunos a focar certas características chaves das frações, tais como os significados dos termos fracionários), versus deixar com que os alunos aperfeiçoem os modelos existentes e desenvolvam seus próprios meios de representação.

Nossa opção por adotar o "Estojo de frações" é para tentar ajudar os alunos a visualizar concretamente os conceitos relacionados ao tema de frações e assim atribuir significados aos mesmos.

Outro referencial que utilizaremos é da chamada Matemática de Singapura, que tem sua concepção de ensino construída em torno da Resolução de Problemas. O quadro seguinte mostra a filosofia do currículo de Matemática em Singapura:

Figura 5 – Filosofia do currículo de Matemática de Singapura



Fonte: http://lysigrey.wikispaces.com/Mathematics+Framework

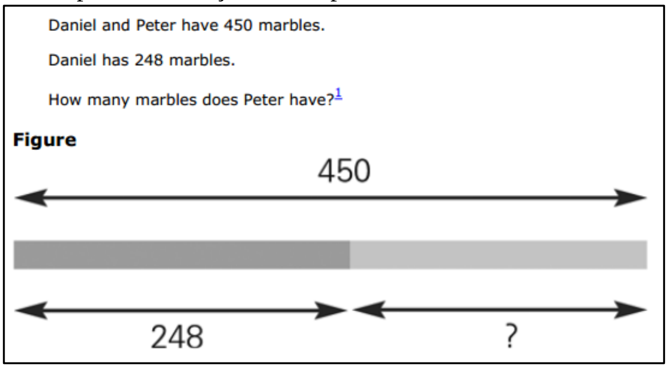
Segundo Baldin (2013, p. 2), a mensagem importante que está por trás desse diagrama "é a proposta coesa que amarra estes aspectos no desenvolvimento curricular" e destaca como principais características dessa filosofia os seguintes aspectos:

- Utiliza a abordagem de aprendizagem: CONCRETO → PICTÓRICO → ABSTRATO;
- Encoraja o processo de pensamento ativo, comunicação de ideias matemáticas e resolução de problemas;
- Desenvolve fundamentos que os alunos necessitarão para a matemática mais avançada;
- Enfatiza a matemática mental e a abordagem por modelo pictórico.

Baldin (2013, p. 1) diz que a Matemática de Singapura "apresenta uma poderosa técnica de resoluções de problemas e de aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da representação pictórica, que é conhecida como Modelo de Barras". Afirma ainda, que além de uma ferramenta para a resolução de problemas, o Modelo de Barras também serve para explicar e consolidar conceitos, como o das quatro operações com frações por exemplo. Para isso, sua utilização deve estar conectada a conceitos trabalhados na aula, já que as habilidades básicas implicadas nos problemas matemáticos e o Modelo de Barras se amarram entre si.

Na Matemática de Singapura, ele é utilizado desde as séries iniciais, como no exemplo seguinte, para a 3ª série, na resolução de um problema envolvendo uma subtração:

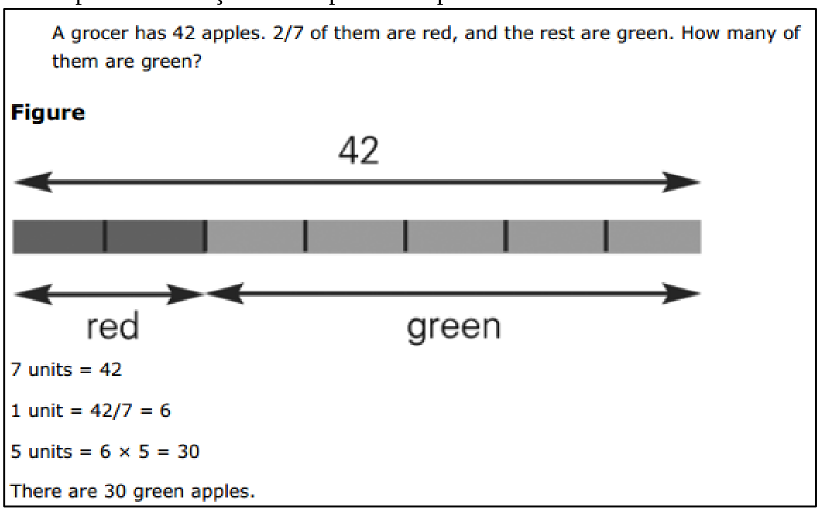
Figura 6 – exemplo de resolução de um problema utilizando o Modelo de Barras



Fonte: Singapure Math: Simple or Complex? (p. 2)

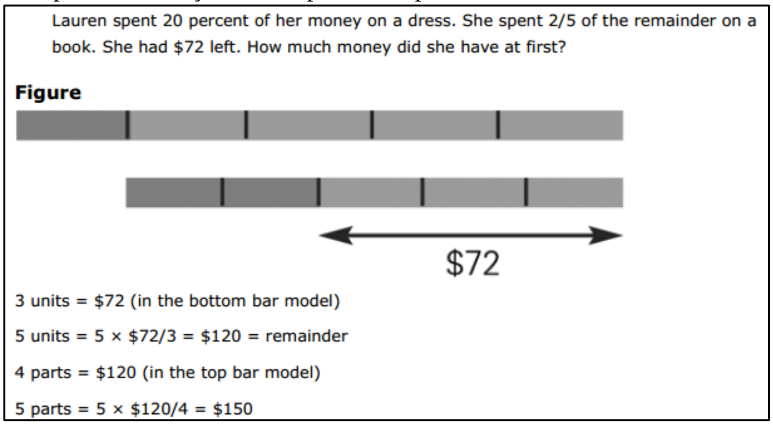
Essa técnica vai sendo desenvolvida ao longo dos anos escolares e sendo aprofundada, como nos exemplos seguintes para a 4ª série e para a 6ª série:

Figura 7 – exemplo de resolução de um problema para a 4ª série utilizando o Modelo de Barras



Fonte: Singapure Math: Simple or Complex? (p. 5)

Figura 8 – exemplo de resolução de um problema para a 6ª série utilizando o Modelo de Barras



Fonte: Singapure Math: Simple or Complex? (p. 6)

Ainda segundo Baldin (2013, p.3), na resolução de problemas a Matemática de Singapura enfatiza:

- O desenvolvimento do raciocínio sobre a relação Parte-Todo e Comparação;
- A visualização pictórica na passagem entre o CONCRETO e a ABSTRAÇÃO → Modelo de Barras.

Dentre as características dessa filosofia, destaca-se o uso da Modelagem com a utilização da representação pictórica que, segundo Baldin (2010, p. 3), “mostraram ser eficazes na delicada transição da aritmética para a álgebra, na fase de pré-algebra nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental”.

Da mesma forma que o “Estojo de frações” oferece a possibilidade de visualizar concretamente os conceitos relacionados ao tema de frações, o Modelo de Barras também. É nesse sentido que optamos por utilizar esses dois recursos de forma a tentar atribuir significado aos conceitos envolvidos em nosso estudo.

CAPÍTULO 2 – AS OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA A PARTIR DO SIGNIFICADO PARTE-TODO

Nesse capítulo, trazemos considerações matemáticas sobre os conceitos abordados nas folhas de atividades, explicitando quais deles queríamos trabalhar através das situações de aprendizagem. Como consideramos que o auxílio de representações pictóricas ou de materiais concretos que mobilizem o significado parte-todo das frações pode facilitar o entendimento dessas operações, fazemos o uso dessas representações para exemplificar os conceitos.

2.1 O significado parte-todo das frações

Esse significado se caracteriza pela ideia de unidade ou de um inteiro, que pode ser uma grandeza discreta ou contínua, em que partes dessa unidade (convenciona-se que ela deve estar dividida em partes iguais) são associadas ao conceito de uma fração (da unidade como um todo).

Romanatto e Passos (2012, p. 62) dizem que a melhor forma de compreender as ideias relacionadas à fração é a partir de situações-problema ou de um contexto em que ela se faz presente. Para o significado parte-todo, esta referência traz as seguintes situações:

Situação 1: dividir uma pizza em quatro partes iguais e comer três delas (unidade: 1 pizza; o resultado é $\frac{3}{4}$ ou três quartos).

Situação 2: três quartos de um grupo de 12 pessoas (unidade: 12 pessoas; o resultado é nove pessoas).

Esses exemplos envolvem grandezas contínuas e discretas em que, no primeiro, a unidade representa uma área e, no segundo, representa o número de elementos de um grupo.

Uma ressalva da utilização desse significado é quando o resultado é maior que um inteiro. Almouloud e Silva (2008, p. 59) trazem o seguinte exemplo para justificá-la: “Se para a fração 2/3, por exemplo, a criança compreende que o inteiro foi dividido em três partes, de mesma área ou “iguais”, das quais duas estão sendo consideradas, como explicar a fração 5/3? Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três?”. Justificam ainda que:

> Para situações que envolvam mais do que um inteiro, as concepções de medida e quociente se mostram boas alternativas. No primeiro caso, utilizando a reta

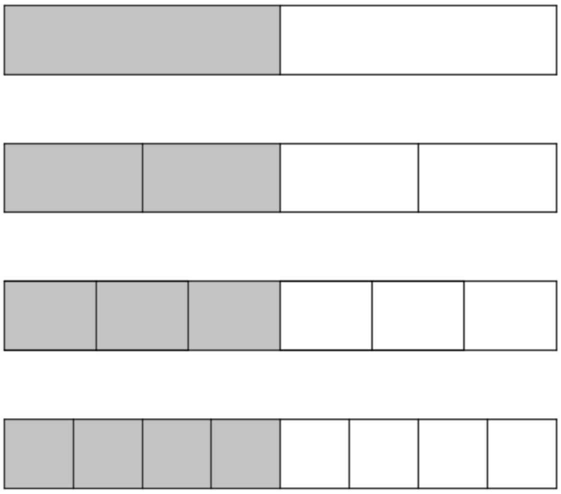
> numerada e, no segundo, situações de distribuição, embora em ambos os casos possamos mobilizar também a concepção parte-todo.

É com base nesses aspectos que utilizamos esse significado das frações em nosso estudo.

2.2 Frações equivalentes

As frações equivalentes são frações que representam a mesma parte da unidade. É importante a percepção de que "toda fração tem uma classe infinita de frações equivalentes". Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ tem um conjunto de infinitas frações equivalentes a ela: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}...$

Figura 9 – Representação de algumas frações equivalentes à fração $\frac{1}{2}$



Fonte: elaborada pela autora

Vamos demonstrar que as frações equivalentes a uma dada fração formam uma classe de equivalência. Consideremos o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b) |\ a \in \mathbb{Z}\ \ e\ b \in \mathbb{Z}^*\}$ e definamos nele a relação $(a,b) \sim (c,d)$ quando $ad = bc$ (FERREIRA, 2010, p. 62). É importante observar que os números racionais, ou fracionários com inteiros, representam uma abstração em nível de Fundamental I e início do terceiro ciclo (6º ano), logo as representações pictóricas devem primeiramente considerar situações com números inteiros positivos.

Vamos mostrar que essa relação é de equivalência:

i) $\sim$ é reflexiva

$(\forall(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \Longrightarrow (a,b)\sim(a,b)$, pois $ab = ba$.

ii) $\sim$ é simétrica

$(\forall(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ e \ \forall(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \big((a,b)\sim(c,d) \Longrightarrow (c,d)\sim(a,b)\big)$, pois se $ad = bc$, então $bc = ad$, que é igual a $cb = da$.

iii) $\sim$ é transitiva

$(\forall(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \forall(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ e \ \forall(e,f)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ $\big((a,b)\sim(c,d) \ e \ (c,d)\sim(e,f)\big) \Longrightarrow (a,b)\sim(e,f)\big)$, pois como $ad = bc$ e $cf = de$, multiplicando a primeira igualdade por f e a segunda por b, obtemos $adf = bcf$ e $bcf = bde$, logo $adf = bde$. Como $d \neq 0$, então $af = be$.

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência. Disto podemos definir classe de equivalência desta relação: dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{a}{b}$ a classe de equivalência do par (a,b) pela relação $\sim$ acima. Assim:

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (x,y)\sim(a,b)\}$$

Seguem dois exemplos:

$$\frac{1}{2} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (x,y)\sim(1,2)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | 2x = y\}$$

$$\frac{3}{4} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (x,y)\sim(3,4)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | 4x = 3y\}$$

Definimos o conjunto dos números racionais (denotado por $\mathbb{Q}$) como o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é:

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim = \left\{\frac{a}{b} \middle| \, a \in \mathbb{Z} \ e \ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

A compreensão do conceito de frações equivalentes é importante para a comparação de frações, bem como para o trabalho com a as adições e subtrações.

2.3 Adição e subtração

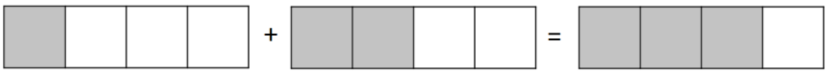
Sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$ dois números racionais, temos que:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

A adição e a subtração de frações de inteiros positivos com mesmo denominador, geralmente, são facilmente compreendidas pelos alunos quando utilizamos representações pictóricas ou materiais concretos, vejamos:

Figura 10 – representação pictórica de uma adição de frações com o mesmo denominador

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$



Fonte: elaborada pela autora

Figura 11 – representação pictórica de uma subtração de frações com o mesmo denominador

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Fonte: elaborada pela autora

Note que as representações devem considerar a mesma unidade como referência, de acordo com o significado parte-todo das frações.

A ideia de frações equivalentes quando o numerador e denominador são múltiplos de um mesmo número não nulo é facilmente percebida, e isso permite trabalhar inicialmente a adição e a subtração de números racionais de denominadores diferentes da maneira a seguir.

Sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números racionais, as adições e subtrações com denominadores diferentes são definidas como:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$$

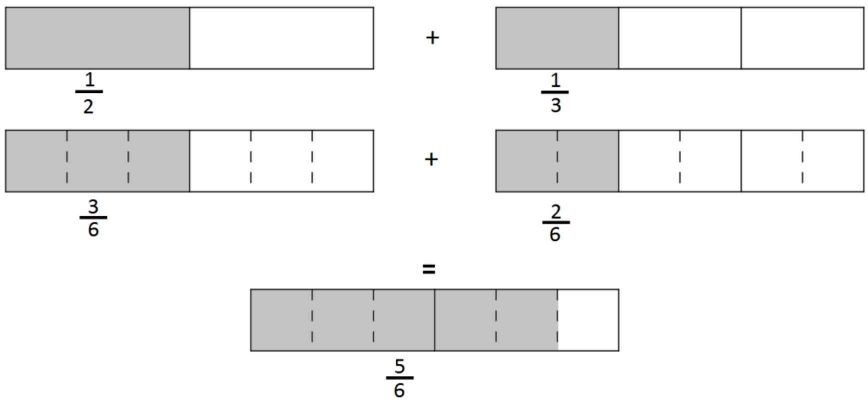
Concordamos com Almouloud e Silva (2008, p. 61) quando dizem que:

> No caso em que as frações têm denominadores diferentes é comum utilizar o mínimo múltiplo comum (mmc) para transformar as frações em outras equivalentes e de mesmo denominador. No entanto, acreditamos que tal procedimento prejudica a compreensão da definição da operação de adição.

A nosso ver, a obtenção de frações equivalentes de mesmo denominador (sendo esse qualquer múltiplo comum dos denominadores originais) é o melhor encaminhamento para a compreensão das regras dessas operações. Exemplificando:

Figura 12 – representação pictórica de uma adição de frações com denominadores diferentes

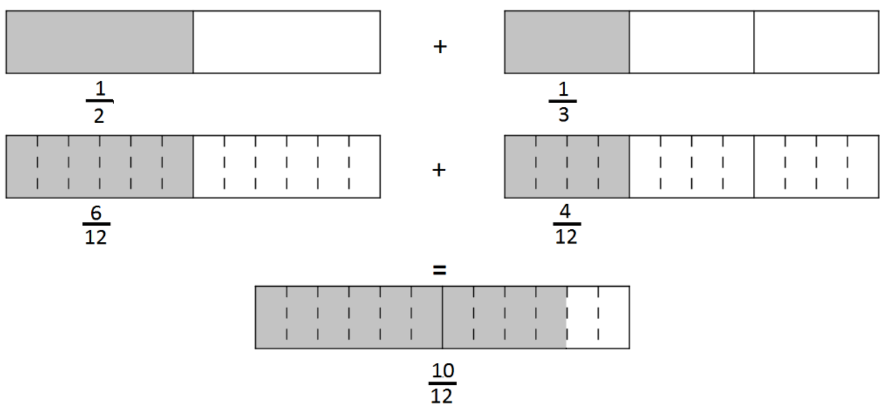
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$



Fonte: elaborada pela autora

Figura 13 – representação pictórica de uma adição de frações com denominadores diferentes

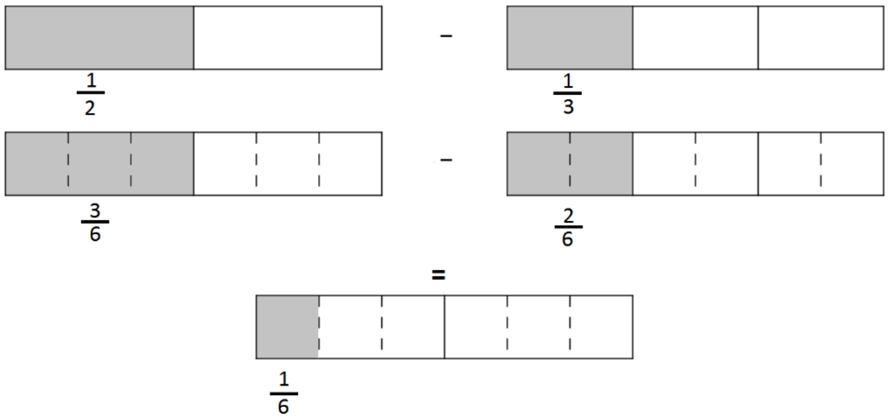
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$



Fonte: elaborada pela autora

Figura 14 – representação pictórica de uma subtração de frações com denominadores diferentes

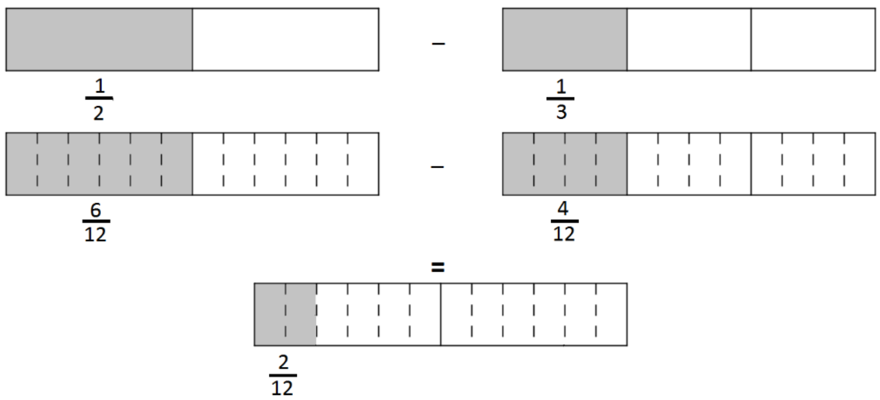
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$



Fonte: elaborada pela autora

Figura 15 – representação pictórica de uma subtração de frações com denominadores diferentes

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{6}{12}-\frac{4}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$



Fonte: elaborada pela autora

Após alguns exemplos, os próprios alunos podem chegar à conclusão que se utilizarem como novo denominador o mmc dos denominadores originais, os cálculos geralmente ficam mais simples. Mas essa conclusão não é necessária para o entendimento dessas operações.

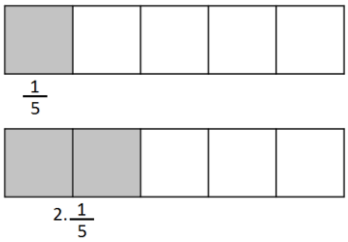
2.4 Multiplicação

Almouloud e Silva (2008) afirmam que para trabalharmos a multiplicação de números racionais, podemos fazer analogias com as operações com os números naturais, que já são conhecidas pelos alunos.

Com esse enfoque, a multiplicação de um número natural por uma fração é encarada como uma adição de parcelas iguais. Por exemplo, o dobro de um quinto é escrito como:

Figura 16 – representação pictórica da multiplicação de um número natural por uma fração

$$2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$



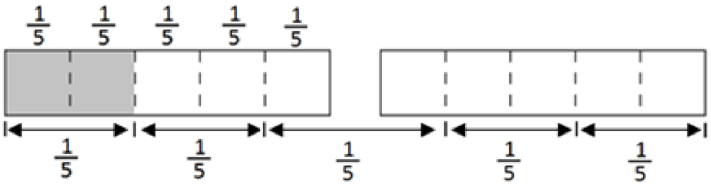
Fonte: elaborada pela autora

A multiplicação de uma fração por um número natural pode ser compreendida através do significado parte-todo associado ao de operador multiplicativo.

A concepção de operador multiplicativo se caracteriza pela ideia de que a fração é um multiplicador da quantidade indicada, transformando seu valor nesse processo. Está vinculada a aumentos ou diminuições. Assim, a fração pode ser vista como um valor escalar aplicado a uma quantidade.

Sabemos que expressões como "o dobro de", "o triplo de" estão associadas a multiplicações. Assim, calcular $\frac{1}{5}$ de 2, por exemplo, é o mesmo que determinar $\frac{1}{5} \cdot 2$. Logo, devemos dividir cada um dos inteiros em 5 partes iguais cada e, para termos $\frac{1}{5}$ desse todo-referência, devemos considerar 2 partes de $\frac{1}{5}$ de um inteiro:

Figura 17 – representação pictórica da multiplicação de uma fração por um número natural

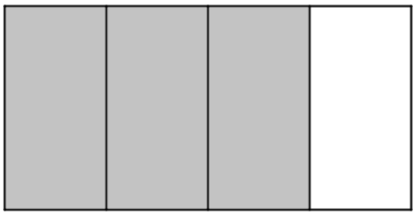


Fonte: elaborada pela autora

Assim, $\frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{1}{5}$ de $2 = \frac{2}{5}$.

Já a multiplicação de uma fração por outra fração, é entendida como a determinação de uma parte de outra parte. Determinar $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ é o mesmo que determinar $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$. Dessa forma, primeiro, representamos $\frac{3}{4}$ de um inteiro:

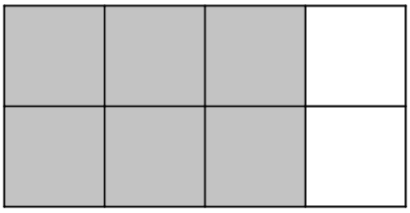
Figura 18 – representação pictórica de $\frac{3}{4}$ de um inteiro



Fonte: elaborada pela autora

Agora, como queremos $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, devemos dividir a figura em duas partes iguais. Isso pode ser visualizado mais facilmente se a dividirmos na horizontal:

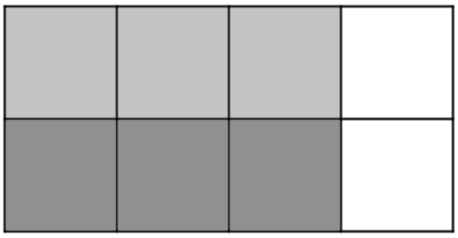
Figura 19 – representação pictórica da divisão do inteiro em duas partes iguais



Fonte: elaborada pela autora

Assim, o inteiro fica dividido em 8 partes iguais e devemos considerar 3 delas, considerando exatamente a metade de $\frac{3}{4}$:

Figura 20 – representação pictórica da multiplicação $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$



Fonte: elaborada pela autora

Logo, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Após alguns exemplos, os alunos podem perceber a regra operatória para a multiplicação de duas frações. Sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números racionais, a multiplicação pode ser definida como:

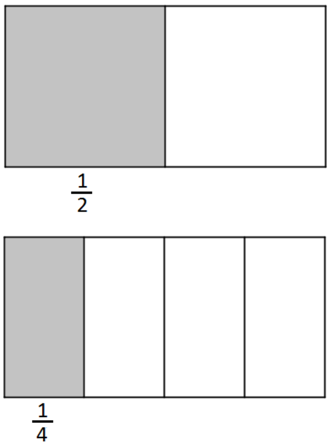
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

2.5 Divisão

Para a divisão com números fracionários, podemos mobilizar conceitos anteriores, como a ideia de "quantos cabem" e de algumas propriedades dos números naturais, e associá-los ao significado parte-todo das frações.

A divisão de uma fração por um número natural pode ser compreendida através do significado parte-todo. Por exemplo, para calcularmos $\frac{1}{2} : 2$, podemos representar $\frac{1}{2}$ de um inteiro e, depois, dividi-la por 2:

Figura 21 – representação pictórica da divisão $\frac{1}{2}:2$

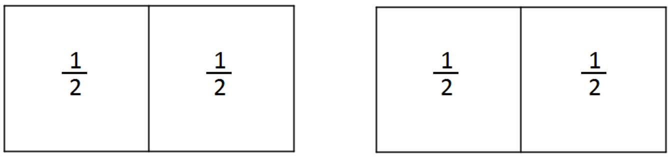


Fonte: elaborada pela autora

Assim, a parte obtida corresponde a $\frac{1}{4}$ do inteiro. Portanto, $\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$.

Já a divisão de um número natural por uma fração, pode ser trabalhada com a ideia de "quantos cabem". Calcular $2:\frac{1}{2}$ é o mesmo que verificar quantas vezes a fração $\frac{1}{2}$ cabe em 2 inteiros. Para isso, dividimos cada um dos 2 inteiros ao meio, obtendo partes correspondentes à fração $\frac{1}{2}$ de uma unidade inteira:

Figura 22 – representação pictórica da divisão $2:\frac{1}{2}$



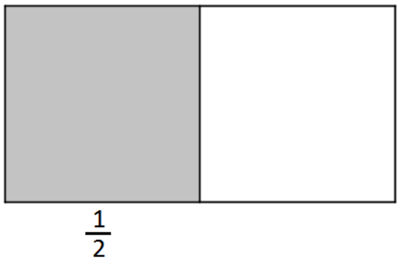
Fonte: elaborada pela autora

Podemos observar que a fração $\frac{1}{2}$ cabe 4 vezes em dois inteiros, portanto, $2:\frac{1}{2}=4$.

A divisão de uma fração por outra fração também pode ser trabalhada através da ideia de "quantos cabem". Assim, calcular $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ é o mesmo que verificar quantas vezes $\frac{1}{3}$

cabe em $\frac{1}{2}$. Para isso, primeiro, dividimos o inteiro em duas partes iguais para obtermos a fração $\frac{1}{2}$:

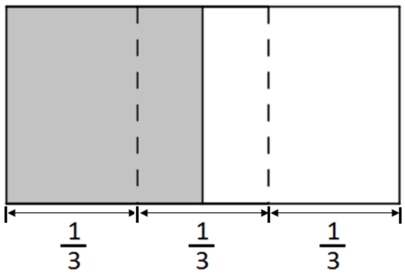
Figura 23 – representação pictórica da divisão do inteiro em duas partes iguais



Fonte: elaborada pela autora

Agora, dividimos o inteiro em três partes iguais:

Figura 24 – representação pictórica da divisão do inteiro em três partes iguais



Fonte: elaborada pela autora

Como queremos verificar quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$, devemos comparar à parte correspondente a $\frac{1}{3}$ com a parte correspondente a $\frac{1}{2}$. Podemos observar que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$, já que $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Logo, $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Com alguns exemplos, esperamos que os alunos consigam chegar à regra operatória para a divisão de duas frações. Sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números racionais $\left(\frac{c}{d}\neq 0\right)$, a divisão pode ser definida como:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Como nem sempre representações permitem a visualização do resultado, segundo os PCN (1998), podemos utilizar a propriedade “invariância do quociente” para obter na divisão de frações uma fração com denominador 1, já que: *um quociente não se altera quando dividendo e divisor são multiplicados por um mesmo número*. Por exemplo:

$$\frac{5}{4} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{8}}{1} = \frac{15}{8}$$

Dessa forma, podemos interpretar a divisão utilizando a ideia do inverso multiplicativo de um número racional diferente de zero, ou seja, dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso:

$$\frac{5}{4} : \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

Assim, sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números racionais $\left(\frac{c}{d} \neq 0\right)$, a divisão também pode ser definida como:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

CAPÍTULO 3 – APLICAÇÃO DAS FOLHAS DE ATIVIDADES

Nesse capítulo são apresentadas as aplicações das folhas de atividades (encontradas no Apêndice), elaboradas através das ideias didáticas e atividades de Baldin e Malagutti (2006), e que foram utilizadas na construção do conceito de frações equivalentes e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com frações. Descrevemos a forma como foram trabalhadas, o material concreto "Estojo de frações", quais as dificuldades enfrentadas e algumas considerações didáticas sob o olhar do professor.

3.1 A escola e as turmas

A aplicação das folhas de atividades foi realizada em três turmas de 7º ano (6ª série) do Ensino Fundamental II, no ano de 2011, do Colégio Fênix – Anglo, da cidade de Bauru – SP. O Colégio Fênix era uma escola particular, com material apostilado e cerca de 1200 alunos, matriculados desde a Pré-escola até o Ensino Médio.

Uma característica do colégio é que os alunos geralmente estudavam lá durante todo o Ensino Básico, caracterizando assim turmas com alunos que se conheciam muito bem e familiarizadas com a abordagem do material de ensino utilizado.

A média de alunos em cada turma onde as atividades foram aplicadas era de 20 alunos. Essas turmas apresentavam alguns problemas disciplinares, mas a maioria dos alunos era participativa. Muitos apresentavam interesse pela Matemática, porém era possível identificar alunos com déficit de aprendizagem dos conceitos matemáticos das séries iniciais, acarretando dificuldades na aprendizagem dos conceitos abordados no Ensino Fundamental II.

3.2 Descrição das aplicações das folhas de atividades e considerações

Como o trabalho foi realizado com turmas de 7º ano, consideramos que esses alunos já tinham tido contanto em algum momento de seus estudos com o conceito de fração, seus diferentes significados e representações, já que o nosso foco é o significado parte-todo.

Para a realização das folhas de atividades, os alunos foram organizados em duplas, de modo a tentar promover um espaço em que pudessem discutir suas ideias. O papel da professora foi o de mediadora, visando colaborar com alunos na construção dos conceitos e de seus significados.

As formas de registro dos resultados variaram de uma folha de atividade para outra. Apresentaremos a descrição de situações vivenciadas, alguns diálogos e exemplos de resoluções elaboradas pelos alunos. Os nomes utilizados nessa descrição são fictícios.

Em alguns momentos, devido às dificuldades encontradas durante as aplicações, apenas evidenciaremos os erros cometidos pelos alunos, considerando as possíveis causas como objetos de estudo de uma próxima pesquisa.

As atividades do material apostilado utilizado pela escola foram utilizadas como exercícios de fixação ao final da aplicação de cada folha de atividade. Esse processo não será mencionado e discutido aqui.

Com o objetivo de ajudar a visualizar concretamente os conceitos relacionados ao tema de frações e assim atribuir significados aos mesmos, utilizamos em algumas atividades um material concreto intitulado "Estojo das frações", descrito a seguir.

3.2.1 Estojo das frações

O Estojo das frações é formado por uma base, um conjunto de peças retangulares manipuláveis e um conjunto de transparências.

Figura 25 – Estojo das frações

Fonte: foto tirada pela autora

A base é composta por uma moldura de dimensões 20 cm x 30 cm (medidas externas) e 12 cm x 24 cm (medidas internas) feita em EVA, que foi colada sobre uma cartolina amarela. O retângulo interno (amarelo) representa uma unidade. Dentro da moldura são encaixadas peças retangulares coloridas, que representam as frações do retângulo interno. As peças retangulares que compõem o kit são as seguintes:

- 1 peça de dimensões 12 cm x 24 cm, correspondente ao inteiro 1;
- 2 peças de dimensões 12 cm x 12 cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{2}$;
- 3 peças de dimensões 12 cm x 8 cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{3}$;
- 4 peças de dimensões 12 cm x 6 cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{4}$;
- 5 peças de dimensões 12 cm x (24/5) cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{5}$;
- 6 peças de dimensões 12 cm x 4 cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{6}$;
- 7 peças de dimensões 12 cm x (24/7) cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{7}$;
- 8 peças de dimensões 12 cm x 3 cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{8}$;
- 9 peças de dimensões 12 cm x (24/9) cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{9}$;
- 10 peças de dimensões 12 cm x (24/10) cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{10}$;
- 11 peças de dimensões 12 cm x (24/11) cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{11}$;
- 12 peças de dimensões 12 cm x 2 cm, cada qual correspondente a $\frac{1}{12}$.

O conjunto de transparências é composto por 12 folhas com marcações de unidades fracionárias, que são sobrepostas às peças retangulares encaixadas na moldura, para se certificar quais frações estão sendo trabalhadas. As medidas das demarcações em cada transparência são as mesmas descritas acima.

3.2.2 Folha de atividades 1 – Frações equivalentes

Figura 26 – página 1 da folha de atividades 1

Frações Equivalentes

Utilizando o Estojo de Frações, responda:

A. Qual a fração que representa o fundo amarelo do estojo?
____

B. Existem outras maneiras de representar **um inteiro** utilizando as barras? Como seriam escritas estas frações? ___________________________

C. Peguem duas partes que representem $\frac{1}{8}$ e, após encaixá-las no estojo, coloquem sobre o estojo as transparências até encontrarem aquelas que representem frações correspondentes à mesma parte ocupada pelas duas barras que estão no estojo. O que é possível observar? Que fração representa as duas barras?
____
____

D. Representem agora algumas outras frações equivalentes que podem ser formadas utilizando outras barras. Escrevam os resultados de suas experiências.
____
____
____
____

Definição de frações equivalentes:

Como obter frações equivalentes

Como podemos obter frações equivalentes a $\frac{2}{3}$?

a) Utilizando o Estojo de Frações, encontre as frações que são equivalentes a $\frac{2}{3}$: _______________________________________

b) Entre as frações encontradas, o que podemos observar?
____
____
____
____

Como verificar se duas frações são equivalentes?

1) **Através do produto em cruz:**

Para verificar que $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ são equivalentes, basta realizar os produtos 6 . 12 = 72 e 9 . 8 = 72 e verificar que eles são iguais.

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 27 – página 2 da folha de atividades 1

2) **Usando a decomposição em fatores primos dos numeradores e denominadores:**

Neste caso podemos simplesmente fazer uma simplificação da fração pelos fatores primos em comum do numerador e do denominador:

$\frac{6}{9}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}=\frac{2}{3}$ (aqui foi feita a decomposição em fatores primos tanto do numerador como do denominador e eliminados os fatores comuns). O mesmo deve ser feito na outra fração:

$\frac{8}{12}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{2}{3}$

3) **Redução ao mesmo denominador**

Se escrevermos formas equivalentes de duas frações de modo que elas possuam os mesmos denominadores, então elas serão equivalentes, quando e somente quando elas tiverem os mesmos numeradores. Por exemplo, 6/8 e 3/4 são equivalentes pois ambas são equivalentes à 24/32.

ATIVIDADES:

1) Analise a seguinte situação: João pretende pegar $\frac{1}{5}$ das balas de um pote e Rodrigo $\frac{2}{10}$ do mesmo pote. O que podemos dizer em relação à quantidade que cada um pegou? Ela são equivalentes ou não? Explique.
____
____

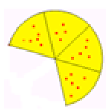
2) Ligue as frações equivalentes:

$\frac{7}{8}$	$\frac{60}{90}$
$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{200}{1000}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{30}{45}$	$\frac{28}{32}$

3) Complete as frações com os valores que estão faltando:

a) $\frac{3}{7}=\frac{15}{\_\_}$ b) $\frac{2}{5}=\frac{\_\_}{45}$ c) $\frac{21}{49}=\frac{3}{\_\_}$

4) Jandira dividiu uma pizza em 6 partes e comeu 2. Logo comeu $\frac{2}{6}$ da pizza. Se ela tivesse dividido a pizza em 12 pedaços, quantos pedaços de pizza ela deveria comer para ingerir a mesma quantidade de pizza? ___________________



Comparação de frações

Problema 1: Carlos e Fábio pediram uma pizza média de calabresa. Carlos comeu $\frac{3}{8}$ da pizza e Fábio $\frac{5}{8}$ da mesma. Quem comeu mais? Porque?

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 28 – página 3 da folha de atividades 1

____

____

Problema 2: Quem é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{9}$?

a) Faça a representação das duas frações no Estojo de Frações e responda:____

b) Encontre frações equivalentes às frações dadas com mesmo denominador e as compare:

$\frac{2}{3} = \frac{-}{-}$ $\frac{2}{9} = \frac{-}{-}$

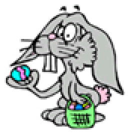
Problema 3: Em uma prova de 20 questões, João acertou $\frac{3}{5}$ das questões e Daniele acertou $\frac{6}{8}$. Então responda:

a) Quem acertou mais questões? Explique.

b) Quantas questões cada um acertou?

ATIVIDADES:

1) Na Páscoa, Marina e Flávia ganharam de seus pais uma barra de chocolate cada uma. Marina dividiu sua barra em 4 partes iguais e comeu uma delas. Já Flávia dividiu a sua em 8 partes e comeu duas delas. Quem comeu mais chocolate, Marina ou Flávia? Porque?



____

____

2) A prova de Português tinha 18 exercícios de mesmo valor e Hugo acertou 15 deles. Já na prova de Geografia havia 12 perguntas de mesmo valor e Hugo acertou 8. Responda:

a) Qual a fração de acertos em cada prova?______________________

b) Em qual prova ele se saiu melhor? ___________________________

3) Em uma eleição do Grêmio Estudantil da Escola José Bonifácio, tivemos a seguinte situação: A Chapa 1 obteve $\frac{4}{7}$ dos votos, a chapa 2 teve $\frac{1}{2}$ dos votos e a chapa 3 teve $\frac{2}{3}$ dos votos. Qual foi a 1º, a 2ª e a 3ª colocada da eleição?

____

4) Transforme as frações em porcentagens:

a) $\frac{1}{4} =$ b) $\frac{3}{4} =$ c) $\frac{7}{10} =$

d) $\frac{4}{25} =$ e) $\frac{18}{200} =$ f) $\frac{16}{400} =$

Fonte: imagem criada pela autora

Essas atividades têm como objetivo unificar as diversas representações de uma mesma fração através do conceito de equivalência. O trabalho foi em grande parte desenvolvido com o auxílio do Estojo das frações. Depois de abordarmos o conceito de frações equivalentes, trabalhamos a relação de ordem entre frações.

As atividades foram aplicadas nas três turmas de 7º ano, durante seis aulas (dias 18, 19 e 25 de abril).

Para recordar o conceito de fração e o seu significado parte-todo, a cada dupla foi entregue um estojo e, utilizando-o, os alunos deveriam responder às seguintes perguntas:

Figura 29 – questões a serem respondidas pelos alunos

A. Qual a fração que representa o fundo amarelo do estojo?

B. Existem outras maneiras de representar **um inteiro** utilizando as barras? Como seriam escritas estas frações?

C. Peguem duas partes que representem $\frac{1}{8}$ e, após encaixá-las no estojo, coloquem sobre o estojo as transparências até encontrarem aquelas que representem frações correspondentes à mesma parte ocupada pelas duas barras que estão no estojo. O que é possível observar? Que fração representa as duas barras?

D. Representem agora algumas outras frações equivalentes que podem ser formadas utilizando outras barras. Escrevam os resultados de suas experiências.

Fonte: imagem criada da pela autora

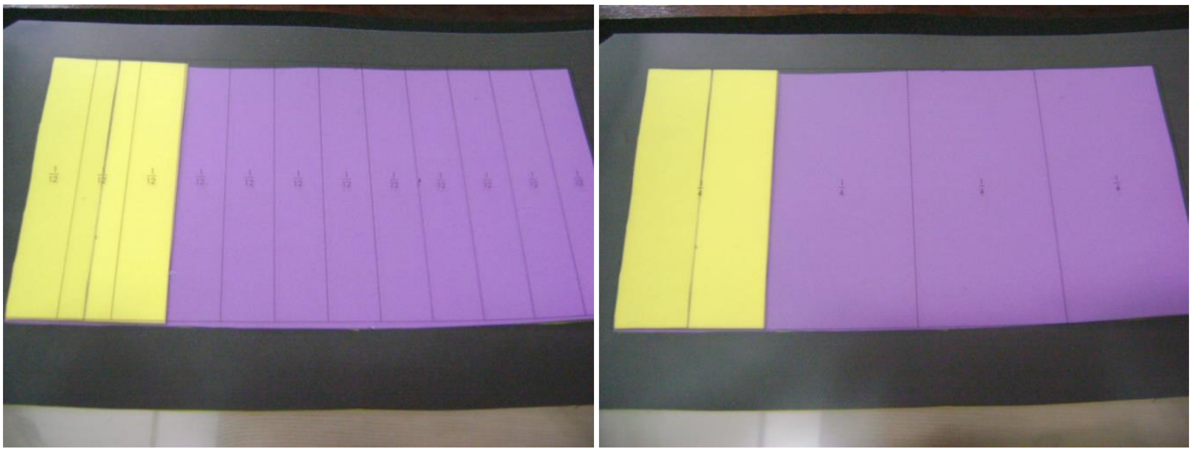
Depois de respondidas, começamos as discussões sobre suas respostas. Quando perguntei aos alunos qual era a fração que representava o fundo do estojo, a maioria respondeu que era $\frac{1}{1}$. Na turma A, a aluna Luiza me respondeu que poderia ser $\frac{100}{100}$, questionei o porquê e ela disse que dividiria em 100 partes e estava considerando as 100 partes, logo o todo-referência inteiro. Nessa turma, a partir desse questionamento, muitas respostas surgiram para o item B, como por exemplo: $\frac{50}{50}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{2}{2}$ etc., em que os alunos não se prenderam às peças do estojo. Discussões semelhantes aconteceram nas demais turmas, em que induzi o raciocínio dos alunos com perguntas como "se dividirmos o todo-referência em duas partes, quantas partes devemos considerar?" até que chegassem a várias respostas para o item B.

Figura 30 – alunos do 7º B utilizando o Estojo das frações

Fonte: foto tirada pela autora

Ao realizarmos o item C, os alunos perceberam que existiam três frações $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}\right)$ que representavam aquela mesma parte que estava sendo considerada no estojo. Definimos, então, o significado de frações equivalentes, como: *frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo-referência*.

Figuras 31 e 32 – representação das frações equivalentes a $\frac{2}{8}$ utilizando o Estojo de Frações



Fonte: fotos tiradas pela autora

Para que respondessem ao item D, inicialmente sugeri algumas frações $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ e } \frac{2}{5}\right)$ para que buscassem frações equivalentes a elas utilizando as transparências. Os alunos conseguiram identificar sem muitos problemas algumas frações equivalentes, repetindo o processo utilizado no item C. O aluno Tiago (7º B) percebeu que, considerando as 12 frações que poderiam ser representadas no estojo com numerador 1, somente para as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$ era possível encontrar frações equivalentes utilizando as peças do estojo, justificando que como o número máximo de peças em que o estojo estava dividido era em 12 partes, as equivalências das demais não poderiam ser encontradas. O aluno também percebeu que para as frações com numerador 2 que podiam ser representadas, somente encontraria frações equivalentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{6}$; para as frações com numerador 3, encontraria somente frações equivalentes a $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{6}$; para as frações com numerador 4, somente encontraria frações equivalentes a $\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{6}$; e para as frações com numerador 5, encontraria frações equivalentes somente a $\frac{5}{6}$. Registrei essas conclusões na lousa e verifiquei se os demais alunos dessa turma conseguiram compreender o raciocínio apresentado pelo Tiago e, aparentemente, a maioria sim.

Em seguida, questionei os alunos sobre como deveríamos proceder para obter frações equivalentes a uma fração dada, com o seguinte exemplo:

Figura 33 – questão sobre como determinar frações equivalentes a uma fração dada

Como podemos obter frações equivalentes a $\frac{2}{3}$?

a) Utilizando o Estojo de Frações, encontre as frações que são equivalentes a $\frac{2}{3}$:

b) Entre as frações encontradas, o que podemos observar?

Fonte: imagem criada pela autora

Utilizaram o estojo para responder ao item a e, quando questionados sobre o que observaram, muitos disseram que era o dobro, o triplo ou o quádruplo. Perguntei então se existia uma fração equivalente à fração dada com denominador 30. Alguns alunos, rapidamente disseram que sim, pois "é só multiplicar por 10". Com perguntas parecidas, induzi os alunos a formalizarem a relação existente entre o numerador e o denominador das frações equivalentes obtidas.

Aos poucos, grande parte dos alunos observou que não havia a necessidade de sempre utilizarmos o estojo para encontrar frações equivalentes. Alguns perceberam também que existem infinitas frações equivalentes a uma fração dada.

Apresentei na sequência três procedimentos para verificar se duas frações são equivalentes: através do produto em cruz, usando a decomposição em fatores primos e utilizando a redução ao mesmo denominador. A escolha de qual método utilizar ficou a critério de cada aluno.

Na sequência, os alunos realizaram as quatro atividades a seguir e a correção foi feita em conjunto na lousa:

Figura 34 – atividades sobre frações equivalentes

1) Analise a seguinte situação: João pretende pegar $\frac{1}{5}$ das balas de um pote e Rodrigo $\frac{2}{10}$ do mesmo pote. O que podemos dizer em relação à quantidade que cada um pegou? Elas são equivalentes ou não? Explique.

2) Ligue as frações equivalentes:

$\frac{7}{8}$	$\frac{60}{90}$
$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{200}{1000}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{30}{45}$	$\frac{28}{32}$

3) Complete as frações com os valores que estão faltando:

a) $\frac{3}{7} = \frac{15}{\quad}$ b) $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{45}$ c) $\frac{21}{49} = \frac{3}{\quad}$

4) Jandira dividiu uma pizza em 6 partes e comeu 2. Logo comeu $\frac{2}{6}$ da pizza. Se ela tivesse dividido a pizza em 12 pedaços, quantos pedaços de pizza ela deveria comer para ingerir a mesma quantidade de pizza?

Fonte: imagem criada pela autora

Essas atividades foram realizadas com certa facilidade pela maioria dos alunos e sem a utilização do estojo. Para justificar o problema 1, muitos alunos utilizaram frações equivalentes e alguns utilizaram uma representação pictórica, supondo certa quantidade de balas e determinando a parte representada pelas duas frações. No problema 4, também foram utilizadas estratégias semelhantes. Foi possível notar que, em se tratando de resolução de situações problema, os alunos tendiam a fazer uma representação da situação.

Para trabalharmos a comparação de duas frações, foram utilizados os seguintes problemas:

Figura 35 – problemas utilizados para a comparação de duas frações

Problema 1: Carlos e Fábio pediram uma pizza média de calabresa. Carlos comeu $\frac{3}{8}$ da pizza e Fábio $\frac{5}{8}$ da mesma. Quem comeu mais? Por quê?

Problema 2: Quem é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{9}$?

a) Faça a representação das duas frações no Estojo de Frações e responda:

b) Encontre frações equivalentes às frações dadas com mesmo denominador e as compare:

$\frac{2}{3} = \frac{}{}$ $\frac{2}{9} = \frac{}{}$

Problema 3: Em uma prova de 20 questões, João acertou $\frac{3}{5}$ das questões e Daniele acertou $\frac{6}{8}$. Então responda:

a) Quem acertou mais questões? Explique.
b) Quantas questões cada um acertou?

Fonte: imagem criada pela autora

O primeiro problema foi respondido corretamente e sem dificuldades pela maioria dos alunos. Perceberam que, sempre que tivermos denominadores iguais, a maior fração é a que tem maior numerador, ou seja, estamos considerando um número maior de partes iguais de um todo.

O problema 2 sugeria que os alunos fizessem as duas representações no estojo, mas a maioria não precisou utilizá-lo para encontrar as frações equivalentes e respondê-lo corretamente. Ao questionar os alunos sobre o problema, no 7º B, o aluno Heitor rapidamente respondeu que era $\frac{2}{3}$, justificando que as partes consideradas do todo-referência eram maiores nessa fração.

No problema 3, ocorreram discussões interessantes, pois eles não queriam utilizar o estojo.

Na turma B, para responder ao item a, o aluno Heitor tentou novamente justificar, sem utilizar o estojo, que 6 partes está mais próximo de 8 partes, que seria o número de partes correspondentes ao todo-referência, logo $\frac{6}{8}$ era a maior fração. Disse que em $\frac{3}{5}$ as partes eram maiores, mas considerando-se somente 3 dessas partes, a região representada (mentalmente) seria menor que a região representada pela fração $\frac{6}{8}$. Em seguida, o aluno

Leonardo tentou justificar, também sem utilizar o estojo, que $\frac{6}{8}$ era maior que $\frac{3}{5}$, pois $3+5=8$ e $6+8=14$, como 14 é maior que 8, $\frac{6}{8}$ era a maior fração. A aluna Laura questionou seu raciocínio com as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{2}$, nesse caso teríamos $2+5=7$ e $1+2=3$, logo $\frac{2}{5}$ seria maior que $\frac{1}{2}$, e representando as duas frações no estojo, mostrou a ele que isso não era válido.

Ainda no item a, como o todo-referência era conhecido, alguns alunos aplicaram as respectivas frações de acertos e utilizaram o maior número de acertos para respondê-lo.

Visto que nenhum aluno tentou encontrar frações equivalentes as dadas com mesmo denominador, pedi que todos resolvessem também desta maneira.

No item b, como vários alunos já tinham aplicado as frações ao todo-referência, a resposta veio naturalmente.

A aluna Giovana do 7º A observou que 20 questões não podem ser divididas em 8 partes iguais e inteiras, perguntou então se poderia calcular $\frac{3}{4}$ de 20 questões, já que a fração $\frac{3}{4}$ é equivalente à fração $\frac{6}{8}$ e estas representam a mesma parte do todo-referência. Nesse mesmo item, o aluno Bruno do 7º B também percebeu que as partes da divisão de 20 por 8 não seriam inteiras, mas como a resposta final considerando-se essas partes decimais seria um número inteiro, disse que poderia considerá-las mesmo sendo decimais.

Terminadas as discussões, os alunos realizaram mais quatro exercícios contidos na folha de atividades e os exercícios do material apostilado, como fixação. As correções foram feitas em conjunto na lousa.

Ao realizar essas atividades utilizando o Estojo de frações, percebemos que a maioria dos alunos conseguiu entender o significado das frações equivalentes, conceito fundamental para o entendimento da adição e subtração de frações. A nosso ver, o uso de um material concreto nesse contexto proporcionou uma aprendizagem significativa, na qual os alunos participaram raciocinando e compreendendo, além das aulas se tornarem mais produtivas. Acreditamos também que a organização dos alunos em duplas e as discussões realizadas estimularam os alunos, até mesmo os alunos mais tímidos.

3.2.3 Folha de atividades 2 – Adição e subtração de frações

Figura 36 – página 1 da folha de atividades 2

Adição e Subtração de frações

Utilizando o Estojo de Frações, responda:

a) De quantas metades precisamos para completar um inteiro? ________

b) De quantos terços precisamos para completar um inteiro? __________

c) De quantos quartos precisamos para completar um inteiro? _________

d) De quantos quintos precisamos para completar um inteiro? _________

Adição de frações com mesmo denominador

A principal questão que envolve esse processo se concentra na idéia de **ACRESCENTAR** peças no estojo com mesmo denominador.

Como calcular $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

Agora calcule:

a) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=$

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$

c) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=$

d) $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=$

e) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=$

f) $\frac{9}{11}+\frac{1}{11}=$

Subtração de frações com mesmo denominador

A principal questão que envolve esse processo se concentra na idéia de **RETIRAR** peças do estojo com mesmo denominador.

Como calcular $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=$

Agora calcule:

a) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$

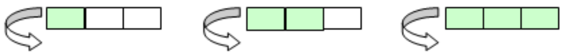
b) $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=$

c) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=$

d) $\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=$

ATIVIDADES

1) Marcos está pintando um painel. Para controlar seu trabalho ele dividiu o painel em três partes iguais. Peça para seus alunos observarem as figuras abaixo e responderem as questões feitas por Marcos.



a) Pintei $\frac{1}{3}$ do painel. Quanto ainda falta pintar?

b) Pintei $\frac{2}{3}$ do painel. Quanto ainda falta pintar?

c) Pintei todo o painel. Qual a fração que indica que o painel está todo pintado?

Agora, utilize as figuras de Marcos para indicar o número que completa corretamente cada uma das sentenças abaixo:

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 37 – página 2 da folha de atividades 2

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$ b) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=$ c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

d) $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=$ e) $\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=$ f) $\frac{3}{3}=$

2) Martinha ganhou de sua mãe uma barra de chocolate que veio dividida em 8 partes para serem destacadas. No mesmo dia ela comeu $\frac{2}{8}$ da barra e no outro dia comeu mais $\frac{3}{8}$. Que fração da barra de chocolate Martinha comeu? Faça uma representação.

3) Susi ganhou o livro *Viagem ao centro da Terra*, de Júlio Verne. Ela leu $\frac{1}{4}$ do livro na segunda-feira e $\frac{2}{4}$ na quarta-feira.

a) Que fração do livro ela já leu?_______________

b) Que fração do livro falta para ela terminar de lê-lo?____________

c) Que fração do livro Susi leu a mais na quarta-feira comparando-se com o que leu na segunda-feira?___________________

d) Que fração do livro, no total, Susi deve ler para completar a leitura do livro do começo ao fim?________________

4) Julia foi ao mercado e comprou 5 pacotes de açúcar mascavo, pesando $\frac{1}{2}$ Kg cada um. Quantos Kg de açúcar ela comprou?

5) Fabiano comprou 4 pacotes de café, cada um contendo $\frac{1}{4}$ Kg. Quantos quilos de café ele comprou?

Para <u>somar</u> ou <u>subtrair</u> frações com <u>demoninadores iguais</u> devemos:

Adição de frações com denominadores diferentes

Como calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$

Agora calcule:

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

d) $\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=$

e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 38 – página 3 da folha de atividades 2

<u>Subtração de frações com denominadores diferentes</u>

Como calcular $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

Agora calcule:

a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$ d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=$

b) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=$ e) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$

c) $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=$ f) $\frac{2}{3}-\frac{2}{6}=$

Para **<u>somar</u>** ou **<u>subtrair</u>** **frações com <u>demoninadores diferentes</u>** devemos:

<u>As frações podem ser negativas?</u>

Como calcular $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=$

Agora calcule:

a) $\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=$ c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=$

b) $\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=$ d) $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=$

<u>ATIVIDADES</u>

1) Minha avó gosta de fazer gelatina da seguinte maneira: $\frac{1}{4}$ de litro de água quente e $\frac{1}{5}$ de litro de água fria. Qual é a fração que representa o total de litros de água que ela utiliza?

2) Vera, mãe de Felipe, fez um bolo para comemorar seu aniversário, cortou-o em 6 pedaços e Felipe levou 2 pedaços para a escola. Susi, mãe de Pedro, também fez o mesmo bolo, mas cortou-o em 4 pedaços, dos quais Pedro levou 1 para escola.

a) Que fração de um bolo corresponde os pedaços que Felipe levou a escola?_________________________

b) Que fração de um bolo corresponde os pedaços que Pedro levou a escola? ______________________

c) No recreio, Felipe e Pedro resolveram comer juntos os pedaços de bolo. Que fração de um bolo tinham juntos? ________________________

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 39 – página 4 da folha de atividades 2

d) Os pedaços dos dois foram suficientes para formar um bolo inteiro? ____

3) Eu comi $\frac{1}{3}$ da torta no almoço e meu irmão $\frac{1}{4}$ da torta. Quanto da torta sobrou para o jantar?

4) A professora de Kátia e Lia pediu à classe que lessem durante as férias o livro *Meu Pequeno Príncipe*. Kátia leu $\frac{3}{4}$ do livro e Lia leu $\frac{5}{6}$.

a) Que fração do livro Lia leu a mais que Kátia?

b) Se Lia lesse mais $\frac{1}{7}$ do livro, quanto ainda faltaria para ler o livro todo?

c) Se o livro tivesse 96 páginas. Quanto Kátia já teria lido?

5) Encontre a solução para as quatro situações problemas abaixo.

I) Andei $\frac{1}{3}$ km hoje e ontem tinha andado $\frac{1}{6}$ km. Qual a fração de km que andei nos dois dias e quantos metros andei?

II) Numa sala de aula com 30 alunos, $\frac{1}{3}$ das crianças só gostam de futebol e $\frac{1}{6}$ só gostam de basquete. Se juntarmos o grupo de alunos que só gostam de futebol e o grupo de alunos que só gostam de basquete, que fração obtemos e quantas crianças esses dois grupos juntos formam?

III) $\frac{1}{3}$ do cereal "Sweety" é açúcar e $\frac{1}{6}$ do cereal "Healty" é açúcar. Se misturarmos porções iguais de ambos os cereais, que fração desta mistura é açúcar e qual a quantidade de açúcar há em 1 kg da mistura?

6) Juliano, Décio e Felipe foram comer na Pizzaria Tomato. Pediram uma pizza de mussarela e uma de bacon. O garçom cortou a pizza de mussarela em 6 pedaços iguais e a pizza de bacon em 5 pedaços iguais.

- Juliano comeu 3 pedaços da pizza de mussarela e 2 de bacon.
- Décio comeu 2 pedaços da pizza de mussarela e 1 de bacon.
- Felipe comeu o pedaço que restou de mussarela e 1 de bacon.

Qual a fração de uma pizza que cada um comeu?

Que fração da pizza de bacon sobrou?

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 40 – página 5 da folha de atividades 2

Quem comeu mais e que fração comeu?

7) Efetue as seguintes adições e subtrações:

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=$

b) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}=$

c) $\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}=$

d) $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$

e) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$

f) $\frac{14}{30}-\frac{6}{15}=$

g) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

h) $\frac{3}{5}+\frac{2}{4}+\frac{7}{10}=$

8) Observe como Lúcia resolveu as operações a seguir. Quais erros ela cometeu? A fim de ajudá-la a não errar mais, quais sugestões você daria a ela?

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{8}$ b) $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{3}{0}$ c) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{6}{8}$ d) $\frac{12}{9}-\frac{2}{4}=\frac{10}{5}$

Obs: Resolva-as corretamente.

9) Coloque nos espaços em branco um dos símbolos: **>** (maior), **<** (menor), = (igual).

a) $\frac{4}{4}$ ___ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ ___ $\frac{6}{18}$

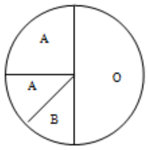
c) $\frac{8}{2}$ ___ 5 d) $2+\frac{1}{2}$ ___ $\frac{10}{5}$

10) Na escola Ribeirinha a professora de Biologia solicitou a um grupo de alunos que fizesse uma pesquisa sobre o tipo de sangue dos 2.000 alunos de uma escola. Os alunos, para resumir os dados encontrados, construíram um gráfico de "pizza" como o representado abaixo. Mas se esqueceram de colocar a fração correspondente ao sangue tipo B. Responda:

a) Quantos alunos têm o sangue tipo O? ______________________

b) Qual o total de alunos que tem sangue A e AB? ______________

c) Que fração do total de alunos está relacionada aos alunos que têm sangue do tipo B? ___________________________



Fonte: imagem criada pela autora

Essas atividades têm como objetivo a compreensão das técnicas operatórias que envolvem a adição e a subtração de frações, tornando-as mais naturais. Para isso, utilizamos na maioria das atividades o Estojo das frações. Iniciamos trabalhando a adição e a subtração de frações com mesmo denominador e em seguida com denominadores diferentes.

As atividades foram aplicadas nas três turmas de 7º ano, durante 10 aulas (dias 26, 28 de abril e 02, 03, 05 de maio).

Para que os alunos recordassem algumas relações das peças do estojo, utilizando-o, deveriam responder as seguintes perguntas:

Figura 41 – perguntas para relembrar as relações do estojo

Utilizando o Estojo de Frações, responda:

a) De quantas metades precisamos para completar um inteiro?

b) De quantos terços precisamos para completar um inteiro?

c) De quantos quartos precisamos para completar um inteiro?

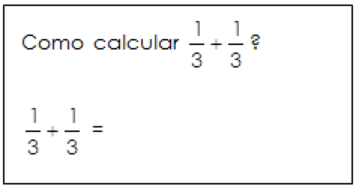
d) De quantos quintos precisamos para completar um inteiro?

Fonte: imagem criada pela autora

Essas perguntas foram respondidas com facilidade e os alunos não precisaram utilizar as peças do estojo.

Começamos então a trabalhar a adição de frações com mesmo denominador com a utilização do estojo. A principal questão que envolve esse processo se concentra na ideia de acrescentar peças no estojo com mesmo denominador. A primeira adição proposta foi a seguinte:

Figura 42 – adição de frações com mesmo denominador proposta



Fonte: imagem criada pela autora

Seguindo minhas orientações e com a utilização do estojo, os alunos efetuaram essa adição, colocando duas peças correspondentes à $\frac{1}{3}$ uma ao lado da outra e identificando a fração total. Discutimos o raciocínio envolvido nessa adição e a maioria conseguiu compreendê-lo.

Figura 43 – adição de frações com mesmo denominador utilizando o estojo

Fonte: foto tirada pela autora

Na sequência, foram propostas as seguintes adições:

Figura 44 – adições de frações com mesmo denominador propostas

Agora calcule:

a) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=$

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$

c) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=$

d) $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=$

e) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=$

f) $\frac{9}{11}+\frac{1}{11}=$

Fonte: imagem criada pela autora

Os alunos não precisaram utilizar o estojo para respondê-las.

A subtração de frações com mesmo denominador aconteceu de maneira análoga, já que esse processo se concentra na ideia de retirar peças do estojo com mesmo denominador. Foi proposta a seguinte subtração:

Figura 45 – subtração de frações com mesmo denominador proposta

Como calcular $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$?

$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=$

Fonte: imagem criada pela autora

Utilizando as peças do estojo, os alunos representaram a fração $\frac{2}{3}$ e, em seguida, retiraram uma peça correspondente à $\frac{1}{3}$. Discutimos então o raciocínio envolvido e a maioria conseguiu compreendê-lo. A seguir, realizaram as subtrações seguintes e, aparentemente, não houve dificuldades em resolvê-las sem a utilização do estojo:

Figura 46 – subtrações de frações com mesmo denominador propostas

Agora calcule:

a) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$

b) $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=$

c) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=$

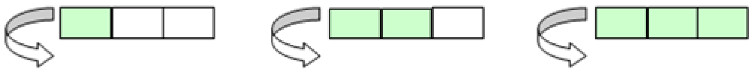
d) $\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=$

Fonte: imagem criada pela autora

A fim de colocar em prática os conceitos discutidos, foram propostos os seguintes problemas:

Figura 47 – problemas com adições e subtrações de mesmo denominador

1) Marcos está pintando um painel. Para controlar seu trabalho ele dividiu o painel em três partes iguais. Observe as figuras abaixo e responda as questões feitas por Marcos.



a) Pintei $\frac{1}{3}$ do painel. Quanto ainda falta pintar?

b) Pintei $\frac{2}{3}$ do painel. Quanto ainda falta pintar?

c) Pintei todo o painel. Qual a fração que indica que o painel está todo pintado?

Agora, utilize as figuras de Marcos para indicar o número que completa corretamente cada uma das sentenças abaixo:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$ b) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=$ c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

d) $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=$ e) $\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=$ f) $\frac{3}{3}=$

2) Martinha ganhou de sua mãe uma barra de chocolate que veio dividida em 8 partes para serem destacadas. No mesmo dia ela comeu $\frac{2}{8}$ da barra e no outro dia comeu mais $\frac{3}{8}$. Que fração da barra de chocolate Martinha comeu? Faça uma representação.

3) Susi ganhou o livro *Viagem ao centro da Terra*, de Júlio Verne. Ela leu $\frac{1}{4}$ do livro na segunda-feira e $\frac{2}{4}$ na quarta-feira.

a) Que fração do livro ela já leu?_______________

b) Que fração do livro falta para ela terminar de lê-lo?_____________

c) Que fração do livro Susi leu a mais na quarta-feira comparando-se com o que leu na segunda-feira?__________________

d) Que fração do livro, no total, Susi deve ler para completar a leitura do livro do começo ao fim?________________

4) Julia foi ao mercado e comprou 5 pacotes de açúcar mascavo, pesando $\frac{1}{2}$ kg cada um. Quantos kg de açúcar ela comprou?

5) Fabiano comprou 4 pacotes de café, cada um contendo $\frac{1}{4}$ kg. Quantos quilos de café ele comprou?

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 48 – alunos do 7º ano A resolvendo os problemas propostos

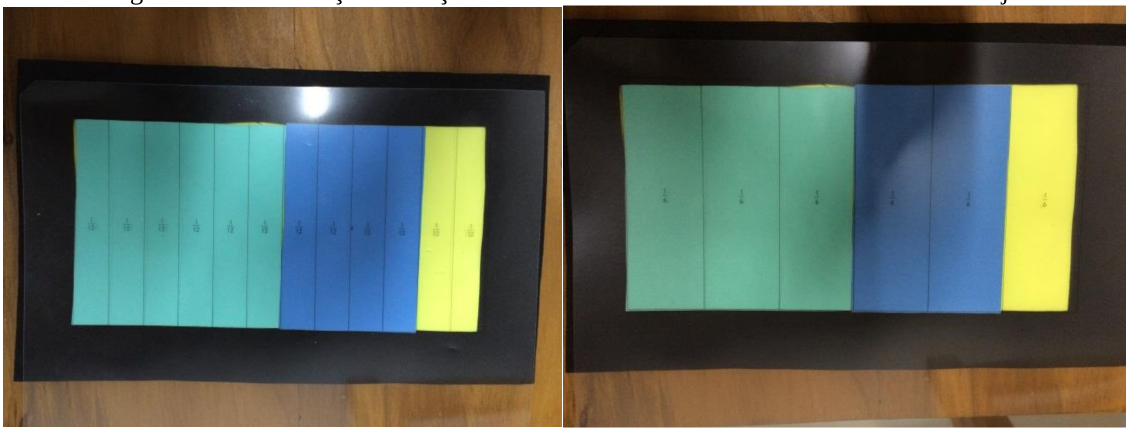
Fonte: foto tirada pela autora

Após terminarem, fizemos a correção em conjunto na lousa e sintetizamos o processo para realizar adições ou subtrações com mesmo denominador. Os alunos não apresentaram dificuldades e nenhum cometeu o erro de somar os denominadores das frações, já que, como aponta o Relatório Pedagógico do Saresp 2011, esse raciocínio é considerado lógico pelos alunos.

Para iniciarmos o trabalho com a adição de frações com denominadores diferentes, perguntei como poderíamos calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

Antes de começarmos a discutir como realizar essa adição, na turma B, o aluno Heitor já havia realizado as primeiras somas desse tipo, sem utilizar o estojo, dizendo que era só utilizar frações equivalentes com mesmo denominador. Com os outros alunos e nas demais turmas, a discussão foi iniciada quando, utilizando o Estojo de frações, representamos essa adição e, utilizando as transparências, os alunos perceberam que a resposta poderia ser $\frac{5}{6}$ ou $\frac{10}{12}$. Também através da utilização das transparências, verificaram as trocas dessas frações pelas respectivas frações equivalentes com denominadores 6 e 12.

Figuras 49 e 50 – adição de frações com denominadores diferentes utilizando o estojo



Fonte: fotos tiradas pela autora

Fiz o registro dessas trocas através de uma representação pictórica na lousa e discutimos o procedimento utilizado, reforçando a utilização de frações equivalentes e a simplificação da fração resultante.

Propus então as seguintes adições:

Figura 51 – adições de frações com denominadores diferentes propostas

Agora calcule:

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

d) $\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=$

e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$

Fonte: imagem criada pela autora

Os alunos realizaram somente algumas adições com a utilização do estojo. Nas demais, fizeram diretamente as equivalências, sem muitos problemas. Verifiquei várias vezes se eles haviam percebido o porquê podemos realizar as trocas pelas frações equivalentes e o resultado foi positivo.

A partir dessas discussões, a realização das subtrações de frações com denominadores diferentes foi facilmente compreendida pelos alunos. Iniciamos realizando a subtração $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ com a utilização do estojo. Para isso, representamos a fração $\frac{1}{2}$ e sobrepomos a ela a fração $\frac{1}{3}$, de modo que, ao sobrepor as peças, a parte descoberta correspondesse à diferença entre essas frações. Utilizando as transparências, os alunos descobriram a resposta e verificaram as trocas dessas frações pelas respectivas frações equivalentes com denominadores 6 e 12. Somente essa subtração precisou ser realizada com o estojo para que os alunos associassem esse procedimento com o procedimento já utilizado para as adições.

Na turma C, o aluno João Pedro, durante a realização da subtração $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ com o estojo, observou que não precisávamos ficar testando todas as transparências para encontrarmos o resultado, disse que era só utilizar a que estava dividida em 6 partes e a que estava divida em 12 partes, pois 6 era o mmc entre 2 e 3 e que 12 era múltiplo de 2 e 3, concluindo que com nenhuma das outras transparências daria certo.

Figuras 52 e 53 – subtração de frações com denominadores diferentes utilizando o estojo

Fonte: fotos tiradas pela autora

Como para as adições, registrei as trocas na lousa através de uma representação pictórica e discutimos o procedimento utilizado, reforçando a utilização de frações equivalentes e a simplificação da fração resultante.

A seguir, os alunos realizaram as seguintes subtrações:

Figura 54 – subtrações de frações com denominadores diferentes propostas

Agora calcule:

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$

b) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

c) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} =$

d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$

e) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$

f) $\frac{2}{3} - \frac{2}{6} =$

Fonte: imagem criada pela autora

Na maioria dos exercícios, fiquei questionando os alunos quanto à escolha do denominador comum e observei que aparentemente compreenderam que poderiam utilizar qualquer múltiplo comum dos denominadores em questão, e que, ao utilizar o menor múltiplo comum, os cálculos seriam mais simples.

Com a utilização do estojo, realizamos a subtração $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ para trabalhar as frações negativas. Para isso, representamos a fração $\frac{1}{2}$ e sobrepomos a ela a transparência com as marcações de $\frac{1}{4}$, identificando que, como $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$, ficou sobrando $\frac{1}{4}$ para que $\frac{1}{2}$ completasse $\frac{3}{4}$. Dessa forma, para representar essa falta (o quanto ½ falta para completar ¾), utilizamos o sinal negativo. Assim, a resposta encontrada foi $-\frac{1}{4}$.

Figura 55 – subtração de frações com denominadores diferentes utilizando o estojo

Fonte: foto tirada pela autora

Os alunos não apresentaram muitas dificuldades em compreender o procedimento utilizado, pois já haviam estudado as operações com os números inteiros.

Realizaram então as subtrações seguintes sem utilizar o estojo:

Figura 56 – subtrações de frações com denominadores diferentes propostas

Agora calcule:

a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{2} =$ c) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

b) $\frac{1}{5} - \frac{1}{4} =$ d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$

Fonte: imagem criada pela autora

Terminadas as discussões, os alunos realizaram mais dez exercícios contidos na folha de atividades e os exercícios contidos no material apostilado, como fixação. As correções foram feitas em conjunto na lousa.

Nesta etapa, acreditamos que a utilização do material concreto foi fundamental para ajudar na aprendizagem dos conceitos envolvidos.

3.2.4 Folha de atividades 3 – Multiplicação de frações

Figura 57 – página 1 da folha de atividades 3

A MULTIPLICACÃO DE FRACÕES

Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

Problema 3: Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco desse remédio contém 45 cápsulas, responda:

a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração do vidro que ele terá tomado?

b) Coloque a resposta na forma de operação com frações, utilizando tanto adição como multiplicação.

c) Um vidro de remédio é suficiente para ser tomado em 15 dias?

Atividades

1) Realize as operações:

a) 5 x (1/3) = b) 8x (3/5) =

c) 6 x (2/6) = d) 7x (1/7) =

2) Em cada operação, dizer se a resposta é correta ou não. Dar uma resposta correta quando for falsa.

a) 5 x (2/5) = (2/5) + (2/5)+ (2/5)+ (2/5)+ (2/5) ____________________

b) 5x (2/5) = $\frac{5\times2}{5}$ ___________________________

c) 5x (2/5) = 2 ______________________________

d) 3x (2/5) = $\frac{2}{15}$ ____________________________

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 58 – página 2 da folha de atividades 3

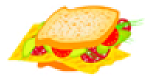
Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo −750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?



Problema 5: A classe de inglês da Elisa tem 16 alunos ao todo. Hoje vieram apenas $\frac{3}{4}$ dos alunos. A quarta parte dos alunos presentes trouxe lanche de casa. Que fração da classe trouxe o lanche?

Problema 6: A classe de Educação Artística da Elisa é formada por 32 alunos e hoje apenas vieram 5/8 da classe. Dentre os presentes, 3/4 trouxeram lanche. Que fração da classe trouxe o lanche? Quantos alunos trouxeram lanche?

Fonte: imagem criada pela autora

As atividades para abordamos a operação de multiplicação de números fracionários foram desenvolvidas de modo que essa operação fosse inicialmente trabalhada como uma multiplicação de um número natural por um número fracionário, para que os alunos as relacionassem com as adições de parcelas iguais correspondentes. Para isso, foram utilizados casos particulares. Em seguida, propusemos problemas em que os resultados procurados eram partes de outra parte, para que conseguissem entender as ideias que fundamentam a multiplicação de frações. Finalmente, os próprios alunos apresentaram a regra formal que permite multiplicar frações.

Essas atividades foram aplicadas nas três turmas de 7º ano, durante 06 aulas (dias 20, 21 e 27 de junho).

Pelo gradativo abandono dos alunos do estojo, demos preferência à utilização das representações pictóricas, mas é importante ressaltar que poderíamos tê-lo utilizado.

Como dito acima, inicialmente trabalhamos a multiplicação de um número natural por um número fracionário. Para começarmos, realizamos o preenchimento do seguinte quadro:

Quadro 1 - transposição da linguagem usual para a linguagem matemática

Linguagem usual	**Linguagem matemática**	**Resultado**
O dobro de cinco		
O triplo de sete		
	4×7	
	5×3	
O dobro de meio		
O dobro de um terço		
	$2 \times \frac{1}{5}$	
O triplo de um quarto		
	$4 \times \frac{1}{3}$	

Fonte: Apostila 2 do 7º ano do Anglo (2011, p. 277)

Os alunos não apresentaram dificuldades para transformar a linguagem usual em linguagem matemática e, ao se depararem com $2 \times \frac{1}{2}$, rapidamente responderam $\frac{2}{2}$. Alguns responderam sem entender o porquê, mas quando os questionei sobre o significado, na turma A, o aluno Thales respondeu o seguinte:

Thales: São $\frac{2}{2}$, pois é só fazer $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ que é igual a $\frac{2}{2}$.

Em seguida, o aluno Lúdio disse:

Lúdio: Ou ainda pode ser 1 inteiro, já que $2 \times \frac{1}{2}$, são duas metades, logo o todo completo.

Nas outras turmas, induzi esses mesmos raciocínios e ocorreram discussões semelhantes.

Na turma C, o aluno Lucas fez a seguinte afirmação:

Lucas: Então é fácil! É só fazer o número vezes o numerador da fração e copiar o denominador.

Em todas as turmas, após as discussões, os alunos perceberam que poderiam transformar as multiplicações em adições de parcelas iguais ou simplesmente multiplicar o número natural pelo numerador da fração e manter o denominador. Trabalhamos também o significado da preposição “de”, como sendo uma multiplicação.

Na sequência, foram propostos os quatro problemas a seguir:

Figura 59 – problemas envolvendo a multiplicação de um número natural por uma fração

Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

Problema 3: Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco desse remédio contém 45 cápsulas, responda:

a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração do vidro que ele terá tomado?

b) Coloque a resposta na forma de operação com frações, utilizando tanto adição como multiplicação.

c) Um vidro de remédio é suficiente para ser tomado em 15 dias?

Fonte: imagem criada pela autora

Nos dois problemas iniciais, a maioria dos alunos não apresentou dificuldades, vários já resolveram utilizando uma multiplicação, outros preferiram usar a adição de parcelas iguais e alguns alunos utilizaram esquemas para representar a parte procurada. Seguem alguns exemplos de resoluções:

Figura 60 – resolução da aluna Mariana do 7º A

Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

$$3 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$R = \boxed{\frac{3}{8}}$$

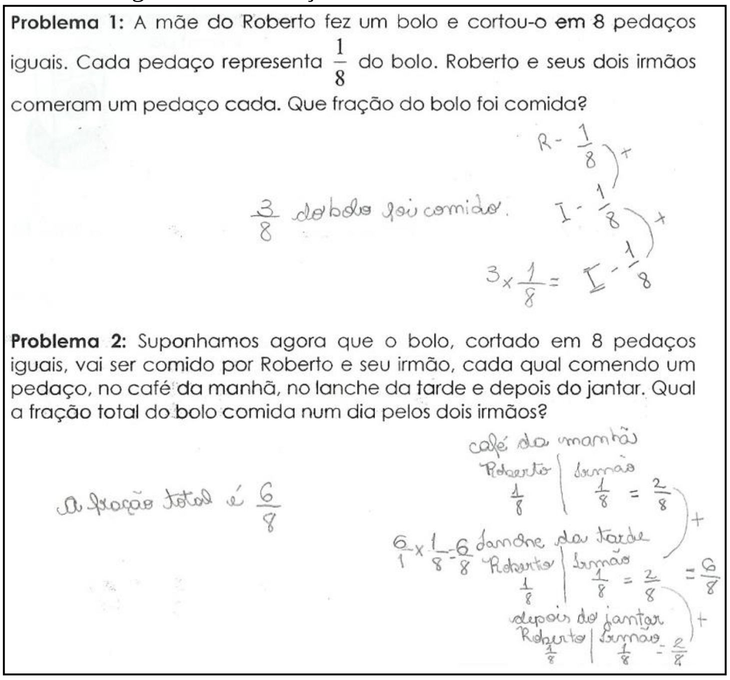
Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

$$6 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$$

$$R = \boxed{\frac{6}{8}}$$

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 61 – resolução da aluna Eduarda do 7º A



Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

R - $\frac{1}{8}$ +

I - $\frac{1}{8}$ +

I - $\frac{1}{8}$

$\frac{3}{8}$ do bolo foi comido.

$3 \times \frac{1}{8} =$

Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

café da manhã

Roberto | Irmão

$\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ +

lanche da tarde

Roberto | Irmão

$\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ $= \frac{6}{8}$

depois do jantar

Roberto | Irmão

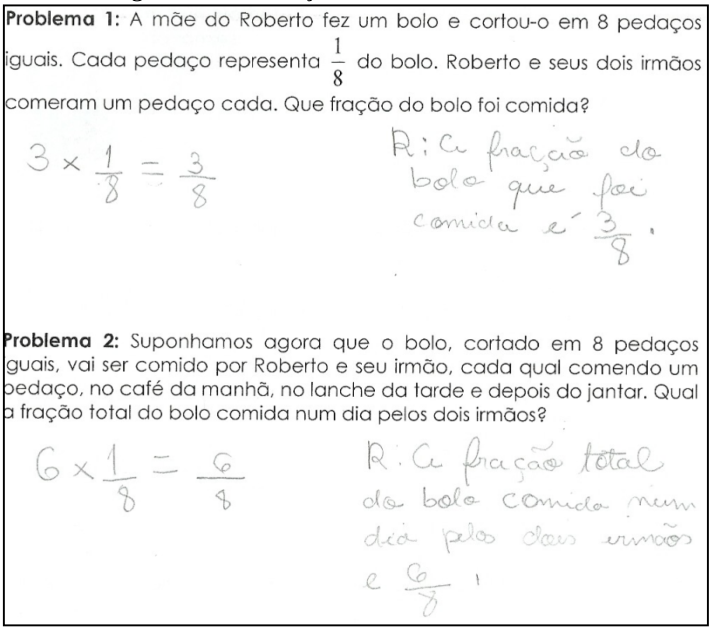
$\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ +

$\frac{6}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

A fração total é $\frac{6}{8}$

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 62 – resolução da aluna Isabela do 7º C



Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

R: a fração do bolo que foi comida é $\frac{3}{8}$.

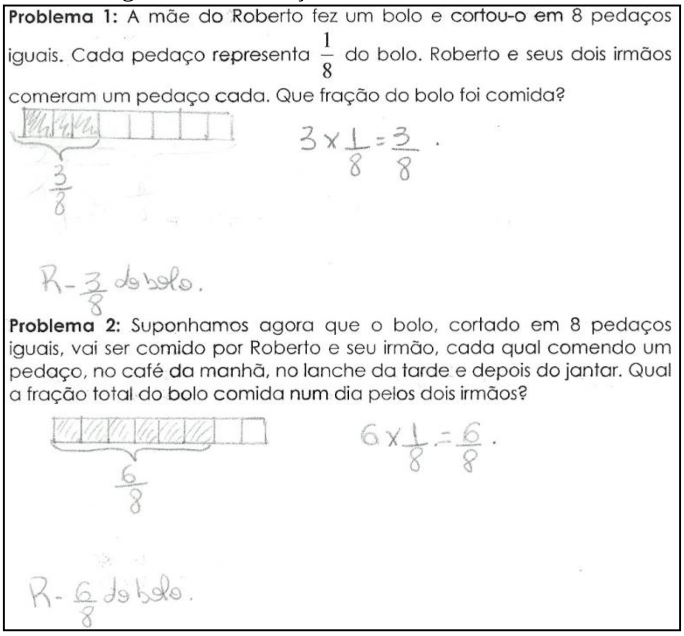
Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

$6 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

R: a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos é $\frac{6}{8}$.

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 63 – resolução da aluna Luiza do 7º A



Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

$\frac{3}{8}$

$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

R- $\frac{3}{8}$ do bolo.

Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

$\frac{6}{8}$

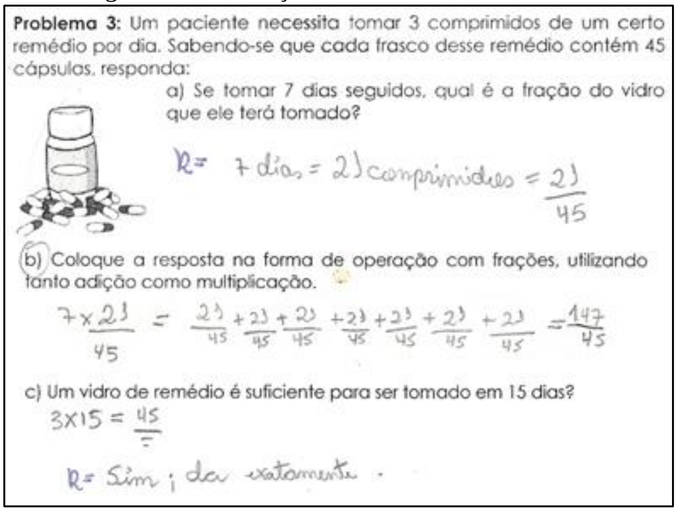
$6 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$.

R- $\frac{6}{8}$ do bolo.

Fonte: imagem criada pela autora

No terceiro problema, alguns alunos tiveram dificuldade em responder ao item b, pois ao resolverem o item a, não encontraram inicialmente a fração correspondente a um dia e sim descobriram quantas cápsulas ele tomaria em sete dias, depois escreveram a fração procurada. Seguem exemplos desse raciocínio:

Figura 64 – resolução da aluna Gabriela do 7º A



Problema 3: Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco desse remédio contém 45 cápsulas, responda:

a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração do vidro que ele terá tomado?

R= 7 dias = 21 comprimidos = $\frac{21}{45}$

b) Coloque a resposta na forma de operação com frações, utilizando tanto adição como multiplicação.

$7 \times \frac{21}{45} = \frac{21}{45} + \frac{21}{45} + \frac{21}{45} + \frac{21}{45} + \frac{21}{45} + \frac{21}{45} + \frac{21}{45} = \frac{147}{45}$

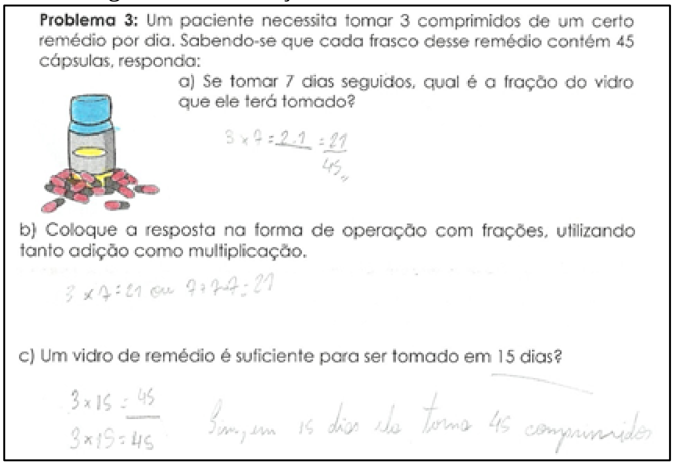
c) Um vidro de remédio é suficiente para ser tomado em 15 dias?

$3 \times 15 = 45$

R= Sim; da exatamente .

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 65 – resolução do aluno Gabriel do 7º C


Problema 3: Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco desse remédio contém 45 cápsulas, responda:

a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração do vidro que ele terá tomado?

$3 \times 7 = 21 = \frac{21}{45}$

b) Coloque a resposta na forma de operação com frações, utilizando tanto adição como multiplicação.

$3 \times 7 = 21$ ou $7+7+7=21$

c) Um vidro de remédio é suficiente para ser tomado em 15 dias?

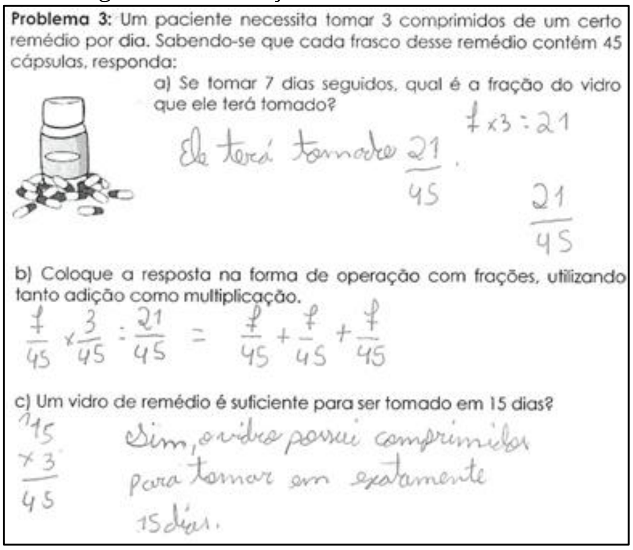
$3 \times 15 = 45$

$3 \times 15 = 45$

Sim, em 15 dias ele toma 45 comprimidos

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 66 – resolução da aluna Luísa do 7º A


Problema 3: Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco desse remédio contém 45 cápsulas, responda:

a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração do vidro que ele terá tomado?

Ele terá tomado $\frac{21}{45}$.

$7 \times 3 = 21$

$\frac{21}{45}$

b) Coloque a resposta na forma de operação com frações, utilizando tanto adição como multiplicação.

$\frac{7}{45} \times \frac{3}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{45} + \frac{7}{45} + \frac{7}{45}$

c) Um vidro de remédio é suficiente para ser tomado em 15 dias?

$15 \times 3 = 45$

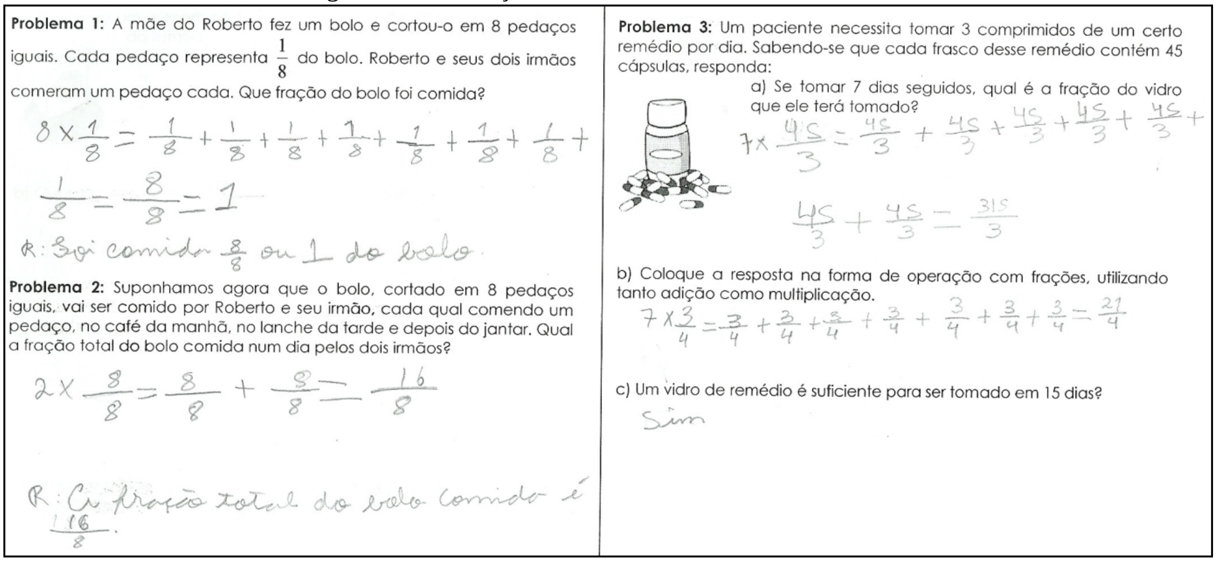
Sim, o vidro possui comprimidos para tomar em exatamente 15 dias.

Fonte: imagem criada pela autora

Após a identificação dessas dificuldades, retomei esse problema com os alunos, pedindo que encontrassem a fração correspondente a um dia e, a partir dessa, que determinassem a fração correspondente a uma semana. A partir daí discutimos as respostas do item b. Diante dessa dificuldade, observamos que devíamos ter acrescentado uma pergunta inicial referente à fração correspondente a um dia, para que os alunos pensassem também nessa forma de resolver.

Apesar dos três problemas iniciais serem simples, uma dupla não conseguiu resolvê-los. Segue a resolução apresentada por elas:

Figura 67 – resolução das alunas Alice e Débora do 7º A



Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

$8 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

R: foi comido $\frac{8}{8}$ ou 1 do bolo.

Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

$2 \times \frac{8}{8} = \frac{8}{8} + \frac{8}{8} = \frac{16}{8}$

R: A fração total do bolo comido é $\frac{16}{8}$.

Problema 3: Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco desse remédio contém 45 cápsulas, responda:

a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração do vidro que ele terá tomado?

$7 \times \frac{45}{3} = \frac{45}{3} + \frac{45}{3} + \frac{45}{3} + \frac{45}{3} + \frac{45}{3} + \frac{45}{3} + \frac{45}{3} = \frac{315}{3}$

b) Coloque a resposta na forma de operação com frações, utilizando tanto adição como multiplicação.

$7 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$

c) Um vidro de remédio é suficiente para ser tomado em 15 dias?

Sim

Fonte: imagem criada pela autora

Observando suas resoluções é possível perceber que elas não compreenderam os enunciados dos problemas, já que as operações apresentadas, mesmo que não correspondessem aos cálculos que deveriam ser feitos, estão corretas. Ou seja, elas sabem como multiplicar um número inteiro por uma fração, relacionaram essas operações às adições de parcelas iguais correspondentes, mas não conseguiram interpretar os enunciados e aplicar esses conhecimentos.

Na sequência, os alunos resolveram os seguintes exercícios de fixação:

Figura 68 – exercícios envolvendo multiplicação de um número natural por um número fracionário

1) Realize as operações:

a) $5\times(1/3)=$ b) $8\times(3/5)=$

c) $6\times(2/6)=$ d) $7\times(1/7)=$

2) Em cada operação, dizer se a resposta é correta ou não. Dar uma resposta correta quando for falsa.

a) $5\times(2/5)=(2/5)+(2/5)+(2/5)+(2/5)+(2/5)+(2/5)$ ________________

b) $5\times(2/5)=\frac{5\times 2}{5}$ ________________

c) $5\times(2/5)=2$ ________________

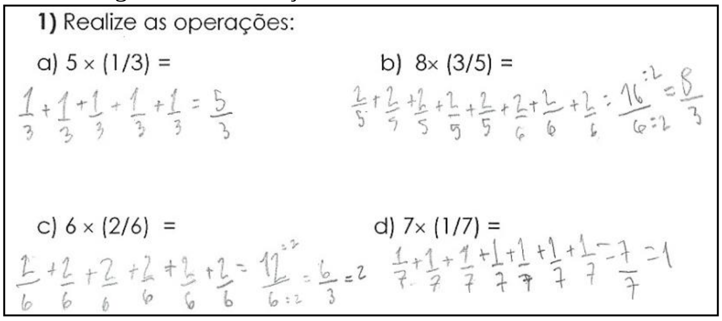
d) $3\times(2/5)=\frac{2}{15}$ ________________

Fonte: imagem criada pela autora

No exercício 1, todos os alunos acertaram as respostas. Apenas 18% dos alunos simplificaram as frações obtidas nos itens c e d, identificando-as como números inteiros. Já

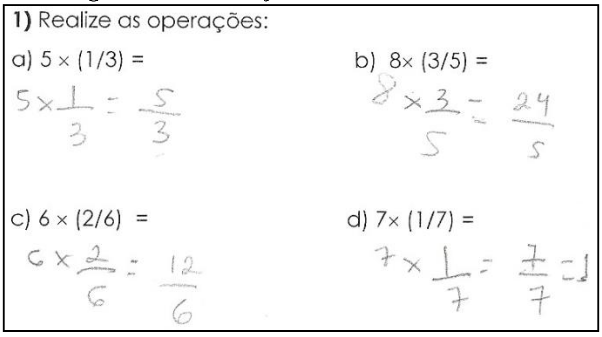
49% dos alunos simplificaram apenas a fração do item d $\left(\frac{7}{7}\right)$ e 33% não simplificou nenhuma das frações. Seguem alguns exemplos de resoluções:

Figura 69 – resolução do aluno Guilherme do 7º B



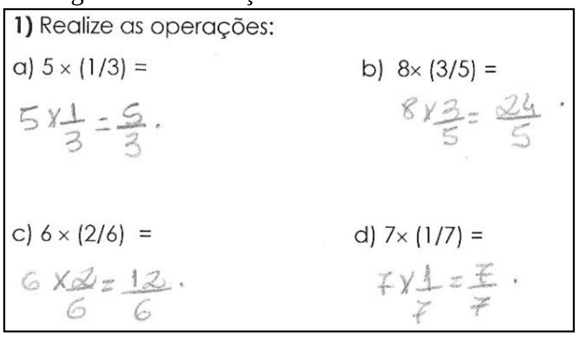
Fonte: imagem criada pela autora

Figura 70 – resolução da aluna Júlia do 7º B



Fonte: imagem criada pela autora

Figura 71 – resolução da aluna Luísa do 7º A



Fonte: imagem criada pela autora

No exercício 2, aconteceram erros apenas no item c, 59% dos alunos. Todos os alunos que responderam que a afirmação desse item era falsa apresentou como resposta correta a fração $\frac{10}{5}$, não a relacionando com o número inteiro correspondente. Dos alunos que simplificaram as frações no exercício 1, 63% errou o item c do exercício 2. Dessa forma, é possível observar que o erro foi uma falta de atenção, já que esses alunos conseguem relacionar, quando possível, frações com os números inteiros correspondentes. Os alunos que não simplificaram nenhuma das frações do exercício 1, não conseguiram acertar o item c do exercício 2.

Figura 72 – resolução da aluna Débora do 7º A

2) Em cada operação, dizer se a resposta é correta ou não. Dar uma resposta correta quando for falsa.

a) 5 × (2/5) = (2/5) + (2/5)+ (2/5)+ (2/5)+ (2/5) Correta

b) 5× (2/5) = $\frac{5 \times 2}{5}$ correta

c) 5× (2/5) = 2 falso, pois 5x(2/5) = $\frac{10}{5}$

d) 3× (2/5) = $\frac{2}{15}$ falso, pois 3x(2/5) = $\frac{6}{5}$

Fonte: imagem criada pela autora

Após essas identificações, abordamos novamente esses exercícios, discutindo com os alunos os procedimentos realizados e as soluções esperadas.

Em seguida, foram propostos os três problemas seguintes:

Figura 73 – problemas envolvendo multiplicações

Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

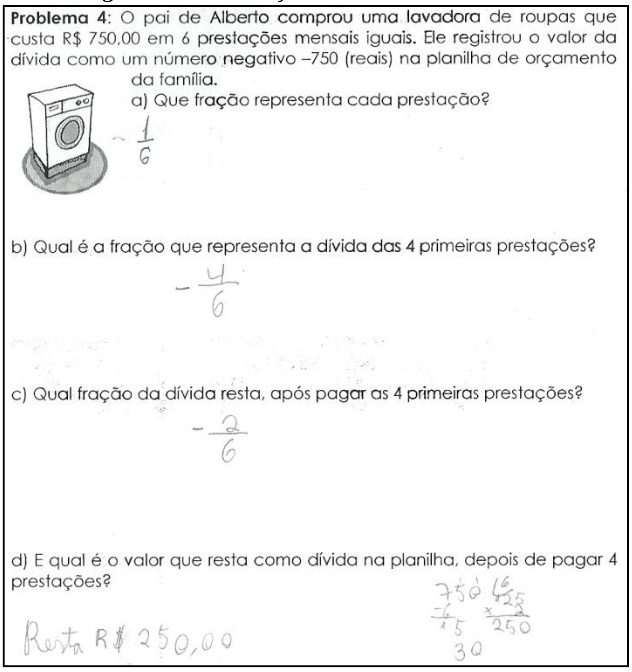
Problema 5: A classe de inglês da Elisa tem 16 alunos ao todo. Hoje vieram apenas $\frac{3}{4}$ dos alunos. A quarta parte dos alunos presentes trouxe lanche de casa. Que fração da classe trouxe o lanche?

Problema 6: A classe de Educação Artística da Elisa é formada por 32 alunos e hoje apenas vieram 5/8 da classe. Dentre os presentes, 3/4 trouxeram lanche. Que fração da classe trouxe o lanche? Quantos alunos trouxeram lanche?

Fonte: imagem criada pela autora

Na resolução do quarto problema, os alunos ficaram bem confusos e apenas alguns se atentaram ao sinal menos para representar a dívida nas respostas. Nos itens a, b e c, 18% dos alunos indicou apenas a fração que representa as prestações, sem considerar o valor da dívida. Porém, desses alunos, todos consideraram esse valor no item d. Seguem alguns exemplos:

Figura 74 – resolução do aluno Gian do 7º C


Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

$-\frac{1}{6}$

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

$-\frac{4}{6}$

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

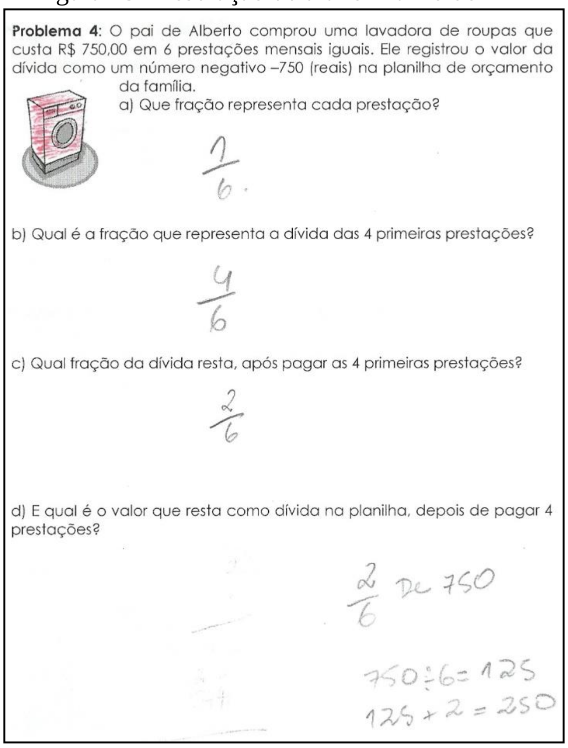
$-\frac{2}{6}$

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

Resta R$ 250,00

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 75 – resolução do aluno Murilo do 7º A


Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

$\frac{1}{6}$

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

$\frac{4}{6}$

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

$\frac{2}{6}$

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

$\frac{2}{6}$ De 750

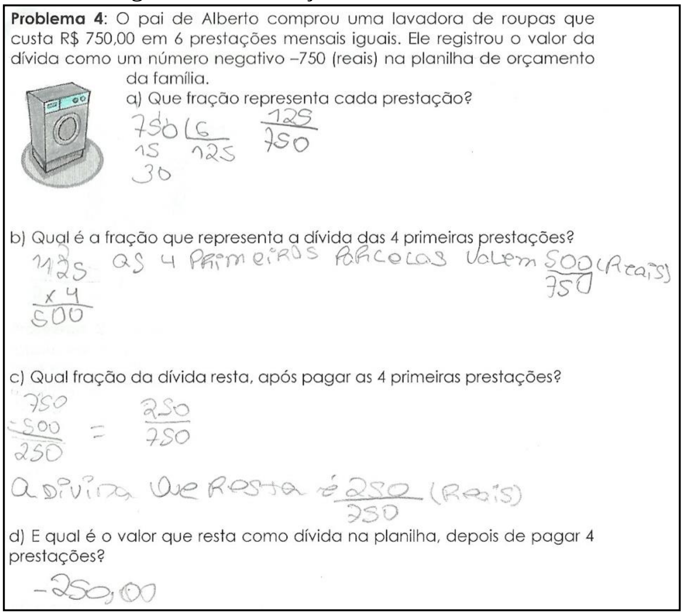
750 ÷ 6 = 125

125 + 2 = 250

Fonte: imagem criada pela autora

Ainda nos itens a, b e c do quarto problema, 46% dos alunos indicou a fração que o valor das prestações em questão representava do valor da dívida, não compreendendo as perguntas. Todos esses alunos acertaram o item d. Seguem exemplos desse raciocínio:

Figura 76 – resolução da aluna Ane do 7º C


Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

750 | 6 → 125; 15; 30 — $\frac{125}{750}$

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

125 × 4 = 500 — AS 4 PRIMEIROS PARCELAS VALEM $\frac{500}{750}$ (Reais)

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

750 − 500 = 250 — $\frac{250}{750}$

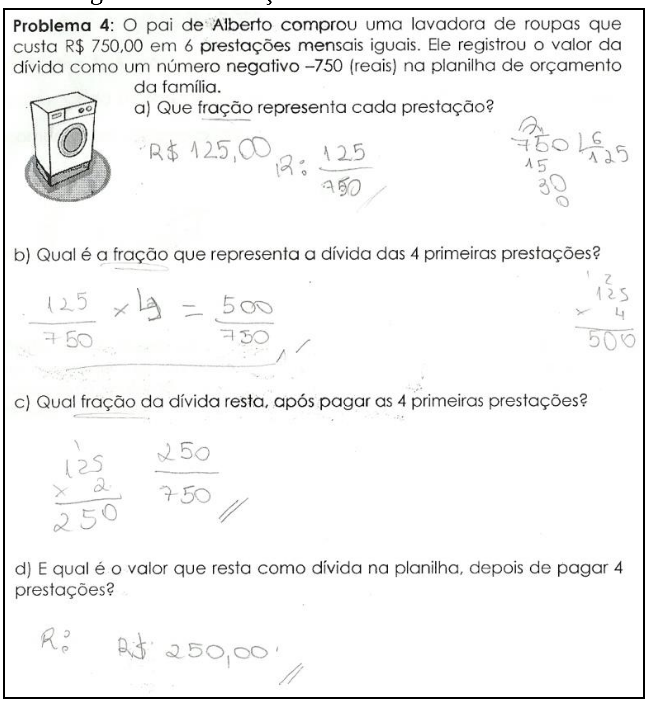
A DIVIDA QUE RESTA É $\frac{250}{750}$ (Reais)

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

−250,00

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 77 – resolução da aluna Giovana do 7º B


Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

R$ 125,00 R: $\frac{125}{750}$ — 750 | 6 → 125; 15; 30; 0

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

$\frac{125}{750} \times 4 = \frac{500}{750}$ — 125 × 4 = 500

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

125 × 2 = 250 — $\frac{250}{750}$

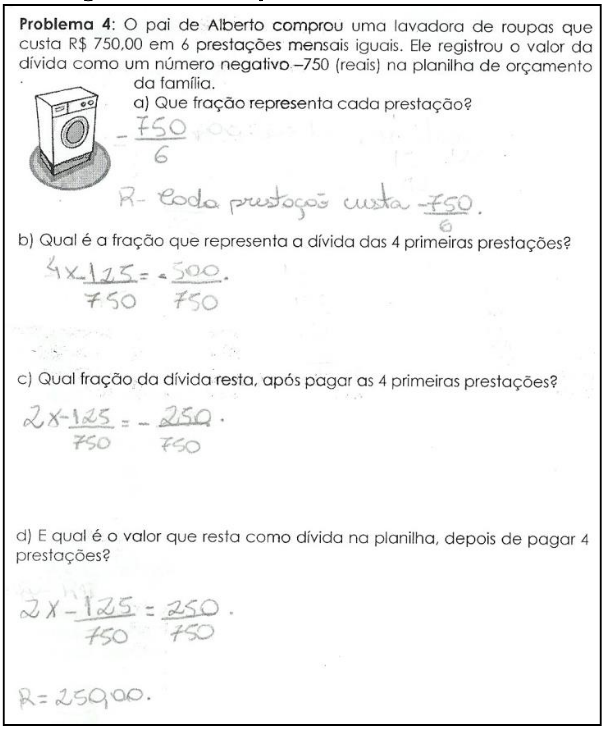
d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

R: R$ 250,00

Fonte: imagem criada pela autora

15% dos alunos respondeu corretamente o item a, mas, nos itens b e c, indicaram a fração que o valor das prestações em questão representava do valor da dívida:

Figura 78 – resolução da aluna Luísa do 7º A


Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

$-\frac{750}{6}$

R- Cada prestação custa $-\frac{750}{6}$.

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

$4\times\frac{125}{750} = -\frac{500}{750}$.

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

$2\times\frac{-125}{750} = -\frac{250}{750}$.

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

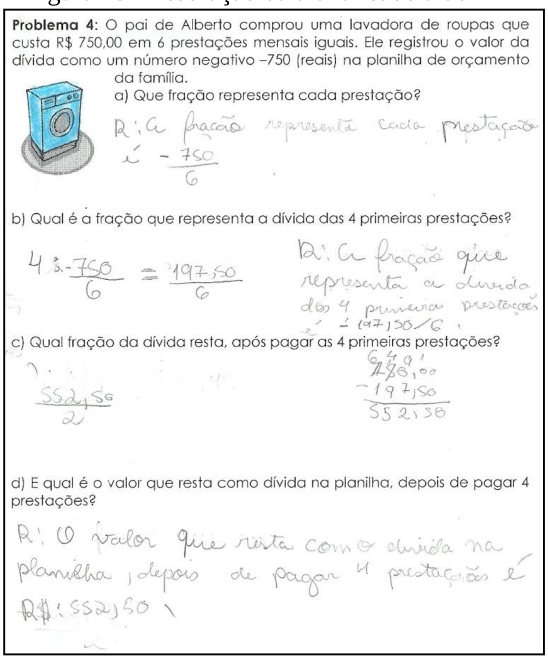
$2\times-\frac{125}{750} = \frac{250}{750}$.

R= 250,00.

Fonte: imagem criada pela autora

Dos alunos restantes, 5% acertou apenas o item a, 5% acertou os itens a e b, e 11% errou o problema.

Figura 79 – resolução da aluna Isabela do 7º B


Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

R: a fração representa cada prestação é $-\frac{750}{6}$

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

$4\times-\frac{750}{6} = \frac{197,50}{6}$

R: a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações é 197,50/6.

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

$\frac{552,50}{2}$

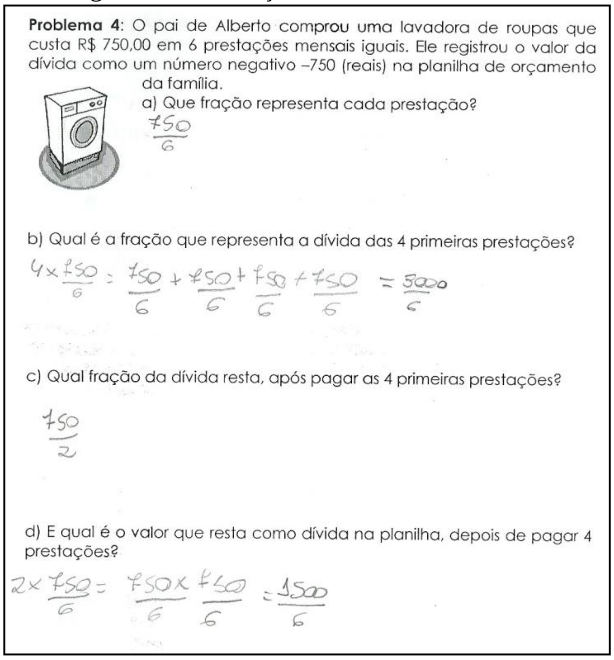
750,00 − 197,50 = 552,50

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

R: O valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações é R$: 552,50.

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 80 – resolução da aluna Alice do 7º A



Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

$\frac{750}{6}$

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

$4 \times \frac{750}{6} = \frac{750}{6} + \frac{750}{6} + \frac{750}{6} + \frac{750}{6} = \frac{5000}{6}$

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

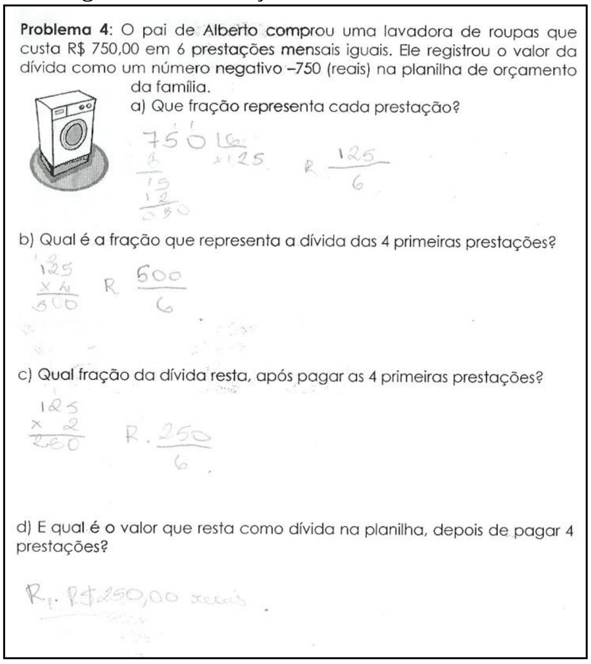
$\frac{750}{2}$

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

$2 \times \frac{750}{6} = \frac{750}{6} \times \frac{750}{6} = \frac{1500}{6}$

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 81 – resolução da aluna Júlia do 7º A



Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

750 | 6 → 125 R. $\frac{125}{6}$

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

125 × 4 = 500 R. $\frac{600}{6}$

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

125 × 2 = 250 R. $\frac{250}{6}$

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?

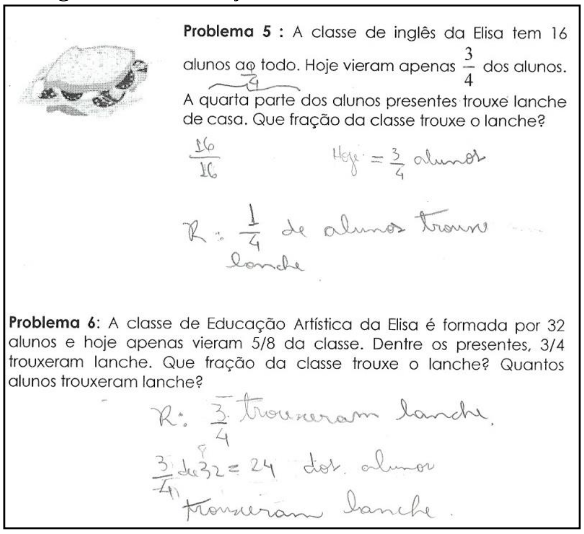
R. R$ 250,00 reais

Fonte: imagem criada pela autora

Esse problema foi retomado com os alunos após essas observações e discutido, evidenciando os procedimentos envolvidos, já que tiveram muita dificuldade em compreendê-lo.

O objetivo dos dois últimos problemas era que os alunos identificassem que o resultado procurado eram partes de outra parte. Nenhum aluno conseguiu resolvê-los corretamente. Alguns responderam as frações indicadas nos enunciados, não observando que essas deveriam ser calculadas da fração de alunos presentes:

Figura 82 – resolução da aluna Giovana do 7º A



Problema 5 : A classe de inglês da Elisa tem 16 alunos ao todo. Hoje vieram apenas $\frac{3}{4}$ dos alunos. A quarta parte dos alunos presentes trouxe lanche de casa. Que fração da classe trouxe o lanche?

$\frac{16}{16}$ Hoje: $= \frac{3}{4}$ alunos

R: $\frac{1}{4}$ de alunos troux lanche

Problema 6: A classe de Educação Artística da Elisa é formada por 32 alunos e hoje apenas vieram 5/8 da classe. Dentre os presentes, 3/4 trouxeram lanche. Que fração da classe trouxe o lanche? Quantos alunos trouxeram lanche?

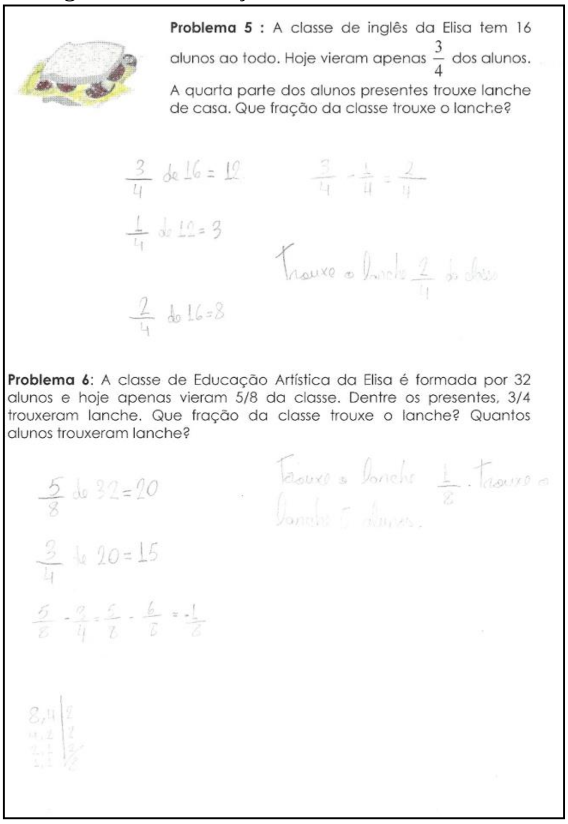
R: $\frac{3}{4}$ trouxeram lanche.

$\frac{3}{4}$ de 32 = 24 dos alunos trouxeram lanche.

Fonte: imagem criada pela autora

Outros determinaram o número de alunos que trouxeram lanche, mas não conseguiram responder qual era a fração representada por essas quantidades:

Figura 83 – resolução do aluno Lucas do 7º C



Problema 5 : A classe de inglês da Elisa tem 16 alunos ao todo. Hoje vieram apenas $\frac{3}{4}$ dos alunos. A quarta parte dos alunos presentes trouxe lanche de casa. Que fração da classe trouxe o lanche?

$\frac{3}{4}$ de 16 = 12 $\quad \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

$\frac{1}{4}$ de 12 = 3

Trouxe o lanche $\frac{2}{4}$ da classe

$\frac{2}{4}$ de 16 = 8

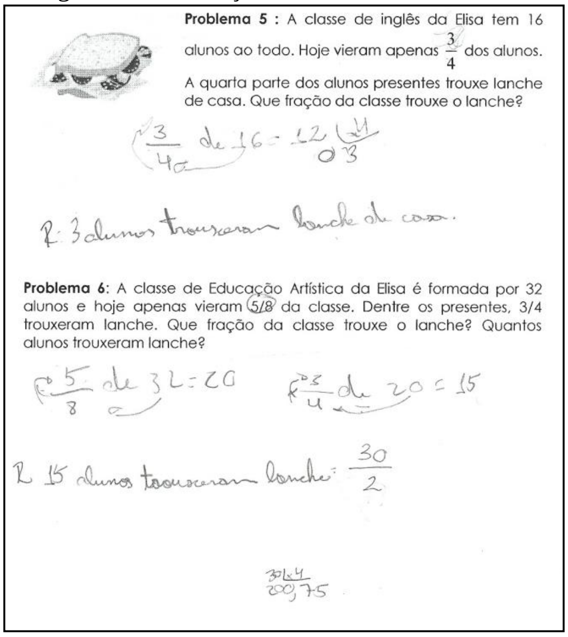
Problema 6: A classe de Educação Artística da Elisa é formada por 32 alunos e hoje apenas vieram 5/8 da classe. Dentre os presentes, 3/4 trouxeram lanche. Que fração da classe trouxe o lanche? Quantos alunos trouxeram lanche?

$\frac{5}{8}$ de 32 = 20

$\frac{3}{4}$ de 20 = 15

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 84 – resolução do aluno Thales do 7º A



Problema 5 : A classe de inglês da Elisa tem 16 alunos ao todo. Hoje vieram apenas $\frac{3}{4}$ dos alunos. A quarta parte dos alunos presentes trouxe lanche de casa. Que fração da classe trouxe o lanche?

$\frac{3}{4}$ de 16 = 12

R: 3 alunos trouxeram lanche de casa.

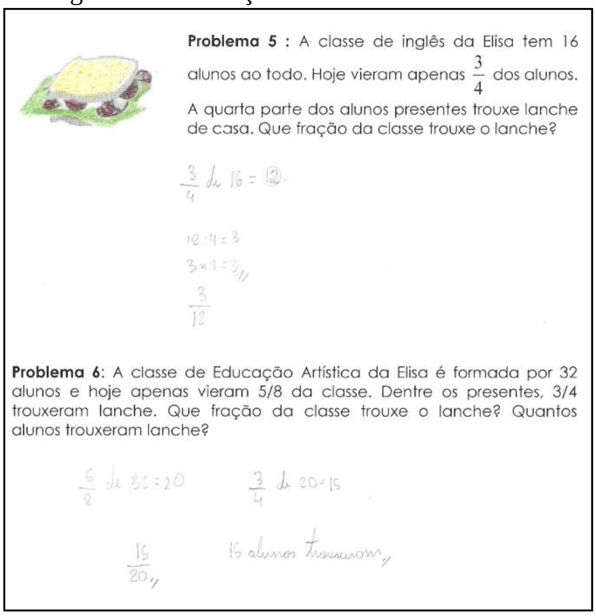
Problema 6: A classe de Educação Artística da Elisa é formada por 32 alunos e hoje apenas vieram 5/8 da classe. Dentre os presentes, 3/4 trouxeram lanche. Que fração da classe trouxe o lanche? Quantos alunos trouxeram lanche?

$\frac{5}{8}$ de 32 = 20 $\frac{3}{4}$ de 20 = 15

R 15 alunos trouxeram lanche: $\frac{30}{2}$

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 85 – resolução do aluno Gabriel do 7º B



Problema 5 : A classe de inglês da Elisa tem 16 alunos ao todo. Hoje vieram apenas $\frac{3}{4}$ dos alunos. A quarta parte dos alunos presentes trouxe lanche de casa. Que fração da classe trouxe o lanche?

$\frac{3}{4}$ de 16 = 12

12 : 4 = 3

3 x 1 = 3

$\frac{3}{12}$

Problema 6: A classe de Educação Artística da Elisa é formada por 32 alunos e hoje apenas vieram 5/8 da classe. Dentre os presentes, 3/4 trouxeram lanche. Que fração da classe trouxe o lanche? Quantos alunos trouxeram lanche?

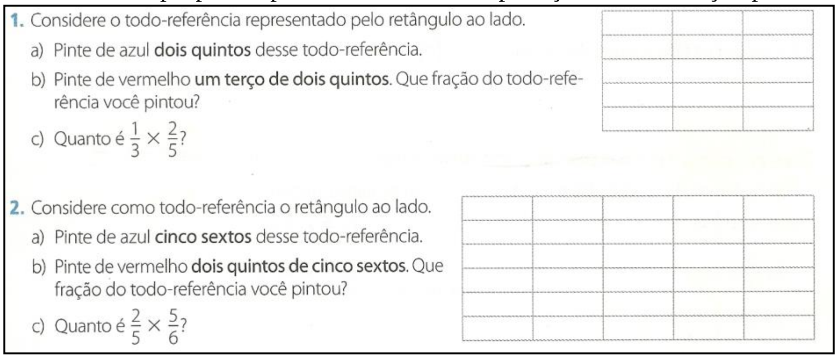
$\frac{5}{8}$ de 32 = 20 $\frac{3}{4}$ de 20 = 15

$\frac{15}{20}$ 15 alunos trouxeram

Fonte: imagem criada pela autora

Observando a dificuldade dos alunos, propus então os seguintes exercícios:

Figura 86 – exercícios propostos para trabalhar a multiplicação de uma fração por outra fração



1. Considere o todo-referência representado pelo retângulo ao lado.

a) Pinte de azul **dois quintos** desse todo-referência.

b) Pinte de vermelho **um terço de dois quintos**. Que fração do todo-referência você pintou?

c) Quanto é $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$?

2. Considere como todo-referência o retângulo ao lado.

a) Pinte de azul **cinco sextos** desse todo-referência.

b) Pinte de vermelho **dois quintos de cinco sextos**. Que fração do todo-referência você pintou?

c) Quanto é $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}$?

Fonte: Apostila 2 do 7º ano do Anglo (2011, p. 279)

O objetivo era que os alunos conseguissem entender o significado de uma multiplicação de duas frações, relacionando a parte obtida ao todo-referência dado e também destacar novamente a função da preposição “de” nessa situação. Ao responderem ao item c dos dois exercícios, muitos alunos já conseguiram perceber a regra formal para se multiplicar duas frações. Em seguida, pedi que eles refizessem os dois últimos problemas. A maioria deles conseguiu perceber que nesses dois casos, como eles possuíam o todo-referência, poderiam resolver encontrando as partes ou simplesmente utilizando a multiplicação de duas frações.

Analisando a ordem em que abordamos essa parte do conteúdo concluímos que deveríamos ter invertido, propondo primeiro os exercícios para que os alunos compreendessem a multiplicação de uma fração por outra fração através da representação pictórica e, depois, os dois problemas. Observamos também a necessidade de mais exemplos.

Na sequência, solicitei então que completassem o seguinte quadro:

Quadro 2 – multiplicação de uma fração por outra fração

Quanto é?	**Resultado**
Metade da metade	
Metade de um quarto	
Um quarto da metade	
Um terço de um terço	
Metade de dois terços	
Dois terços da metade	
Um quarto de dois quintos	

Fonte: elaborado pela autora

Alguns alunos nas primeiras linhas fizeram representações para encontrar a resposta, associando essas operações a multiplicações.

Para finalizar, discutimos o conceito envolvido em uma multiplicação de duas frações e os alunos realizaram os exercícios e problemas contidos no material apostilado, como fixação. As correções foram feitas em conjunto na lousa.

3.2.5 Folha de atividades 4 – Divisão de frações

Figura 87 – página 1 da folha de atividades 4

A DIVISÃO DE FRACÕES

Problema 1: Ao saírem do trabalho, João e mais dois amigos foram comer uma pizza. A pizza veio dividida em quatro pedaços iguais. Cada um dos amigos comeu um pedaço da pizza. João ficou satisfeito, porém seus dois amigos não ficaram e resolveram dividir o último pedaço. Sabendo que este último pedaço representa $\frac{1}{4}$ de toda pizza, como dividi-lo entre os dois amigos?

Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Atividades

1) Resolva:

a) $\frac{1}{9} : 3 =$

b) $\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} =$

2) Qual a fração obtida nas operações abaixo:

a) $\frac{4}{5} : 2 =$

b) $\frac{3}{7} : 3 =$

c) $\frac{10}{9} : 5 =$

d) $\frac{20}{3} : 4 =$

3) Dona Sônia faz salgadinhos para festas. Ela foi ao supermercado e comprou uma peça de queijo de 4 quilogramas, o que era mais em conta do que se pegasse pedaços menores. Ralou todo o queijo e guardou no congelador em pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma cada, para usar quando necessário. Quantos pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma de queijo foram feitos?

4) Quantas vezes 1/8 cabe em 1/4?

5) Represente a fração solicitada:

a) a metade de um terço

Ela representa _____ de um inteiro

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 88 – página 2 da folha de atividades 4

b) a terça parte de um meio

Ela representa ______ de um inteiro

c) a quarta parte de um terço

Ela representa ______ de um inteiro

6) Maria terá de encher, com água, uma jarra de 2 litros, mas em sua caneca cabe apenas $\frac{2}{5}$ de litro. Quantas canecas Maria precisará carregar para encher a jarra?

7) Para fazer uma receita de pudim é necessário $\frac{1}{2}$ litro de água quente e $\frac{1}{4}$ de litro de água fria. Quero fazer a metade da receita, quanto de água quente e água fria vou precisar? (Dê a resposta na forma fracionária)

8) Quantas vezes $\frac{1}{5}$ cabe em 2?

9) Quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em $\frac{5}{6}$?

10) Uma aula de ginástica dura $\frac{3}{4}$ de hora. Quantas aulas de ginástica podem ser dadas em 4 horas e meia?

11) Seis políticos deveriam dividir $\frac{3}{5}$ da hora de um programa de televisão para sua propaganda. Quanto tempo coube a cada um no programa?

12) Para fazer duas receitas de biscoitos, Maria usou 2 copos e meio de farinha. Qual é a fração do copo de farinha usada em cada receita?

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 89 – página 3 da folha de atividades 4

13) Resolva as expressões:

a) $\frac{2}{5} : (\frac{6}{5} \times \frac{15}{4}) =$

b) $(\frac{2}{7} \times \frac{7}{3} + 1) : \frac{25}{9} =$

c) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}) : (\frac{2}{5} + \frac{1}{10}) =$

14) André foi ao parque de diversão com suas três irmãs Ana, Amanda e Ângela. Enquanto elas brincavam na roda gigante ele comprou uma garrafa de refrigerante, pois estava fazendo muito calor. Ele tomou a metade do refrigerante e guardou o restante para suas irmãs dividirem. Quanto do refrigerante tomará cada uma das irmãs se elas dividirem o restante igualmente?

Fonte: imagem criada pela autora

Para trabalharmos a divisão de números fracionários utilizamos situações-problema, visando que os alunos concluíssem as propriedades dessa operação. Inicialmente trabalhamos a divisão de uma fração por um número natural, depois a divisão de um número natural por uma fração e, por fim, a divisão de fração por outra fração.

Essas atividades foram aplicadas nas três turmas de 7º ano, durante 06 aulas (dias 28 e 30 de junho e 04 de julho).

Novamente, demos preferência à utilização das representações pictóricas, mas é importante ressaltar que também poderíamos ter utilizado o estojo.

Inicialmente, os alunos tentaram resolver os dois problemas seguintes:

Figura 90 – problemas propostos para trabalhar a divisão

Problema 1: Ao saírem do trabalho, João e mais dois amigos foram comer uma pizza. A pizza veio dividida em quatro pedaços iguais. Cada um dos amigos comeu um pedaço da pizza. João ficou satisfeito, porém seus dois amigos não ficaram e resolveram dividir o último pedaço. Sabendo que este último pedaço representa $\frac{1}{4}$ de toda pizza, como dividi-lo entre os dois amigos?

Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Fonte: imagem criada pela autora

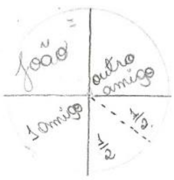
No problema 1, a maioria dos alunos conseguiu entender que deveriam dividir o pedaço restante por 2. Muitos utilizaram esquemas e responderam que ficaria metade para cada um, não relacionando à parte obtida ao todo-referência:

Figura 91 – resolução da aluna Débora do 7º A

3

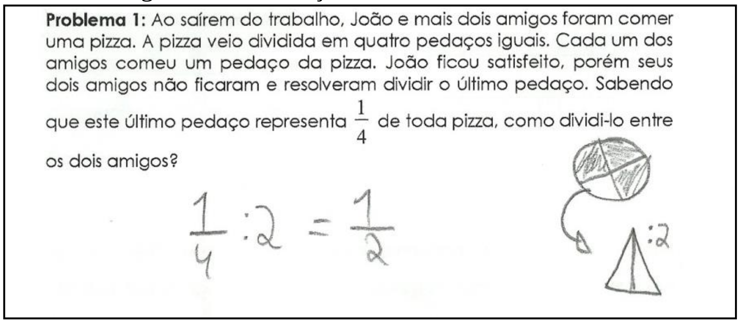
Problema 1: Ao saírem do trabalho, João e mais dois amigos foram comer uma pizza. A pizza veio dividida em quatro pedaços iguais. Cada um dos amigos comeu um pedaço da pizza. João ficou satisfeito, porém seus dois amigos não ficaram e resolveram dividir o último pedaço. Sabendo que este último pedaço representa $\frac{1}{4}$ de toda pizza, como dividi-lo entre os dois amigos?

$\frac{3}{4}$ da pizza já foram, $\frac{1}{4}$ faltou, desse $\frac{1}{4}$ dá para dividir em 2, $\frac{1}{2}$ para cada



Fonte: imagem criada pela autora

Figura 92 – resolução do aluno Afonso do 7º B



Problema 1: Ao saírem do trabalho, João e mais dois amigos foram comer uma pizza. A pizza veio dividida em quatro pedaços iguais. Cada um dos amigos comeu um pedaço da pizza. João ficou satisfeito, porém seus dois amigos não ficaram e resolveram dividir o último pedaço. Sabendo que este último pedaço representa $\frac{1}{4}$ de toda pizza, como dividi-lo entre os dois amigos?

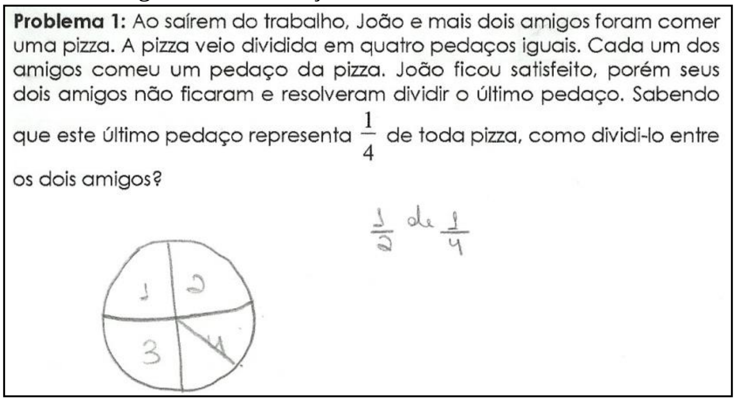
$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{2}$

$:2$

Fonte: imagem criada pela autora

Outros indicaram qual era o cálculo que deveriam fazer, sem resolvê-los:

Figura 93 – resolução do aluno Marcos do 7º C



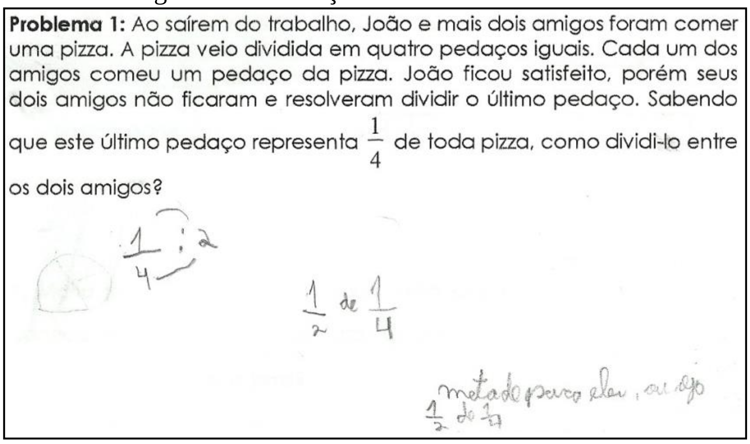
Problema 1: Ao saírem do trabalho, João e mais dois amigos foram comer uma pizza. A pizza veio dividida em quatro pedaços iguais. Cada um dos amigos comeu um pedaço da pizza. João ficou satisfeito, porém seus dois amigos não ficaram e resolveram dividir o último pedaço. Sabendo que este último pedaço representa $\frac{1}{4}$ de toda pizza, como dividi-lo entre os dois amigos?

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$

1 2 3 4

Fonte: figura criada pela autora

Figura 94 – resolução do aluno Pedro do 7º A



Problema 1: Ao saírem do trabalho, João e mais dois amigos foram comer uma pizza. A pizza veio dividida em quatro pedaços iguais. Cada um dos amigos comeu um pedaço da pizza. João ficou satisfeito, porém seus dois amigos não ficaram e resolveram dividir o último pedaço. Sabendo que este último pedaço representa $\frac{1}{4}$ de toda pizza, como dividi-lo entre os dois amigos?

$\frac{1}{4} : 2$

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$

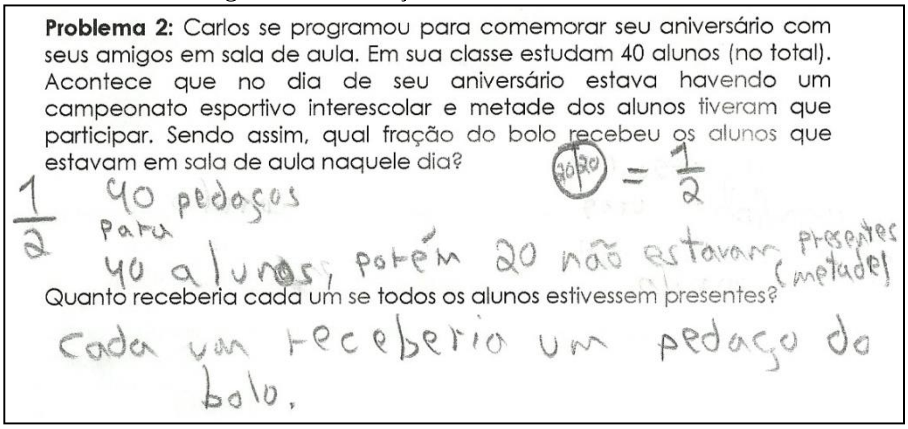
metade para eles, ou seja $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$

Fonte: imagem criada pela autora

No problema 2, a primeira pergunta gerou dois tipos de interpretações: 52% dos alunos calculou a fração correspondente à todos os alunos presentes juntos $\left(\frac{20}{40} = \frac{1}{2}\right)$ e

31% calculou a fração correspondente a cada aluno presente $\left(\frac{1}{20}\right)$. Seguem exemplos desses raciocínios:

Figura 95 – resolução do aluno Afonso do 7º B



Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

40|20 $= \frac{1}{2}$

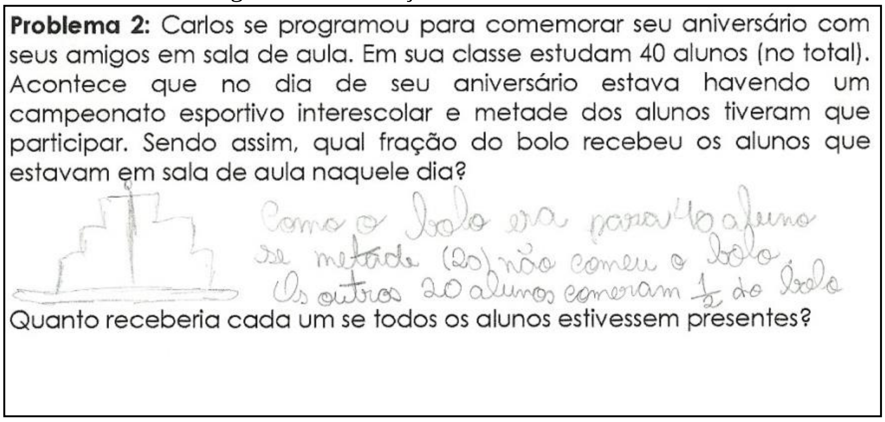
$\frac{1}{2}$ 40 pedaços para 40 alunos, porém 20 não estavam presentes (metade)

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Cada um receberia um pedaço do bolo.

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 96 – resolução da aluna Júlia do 7º C



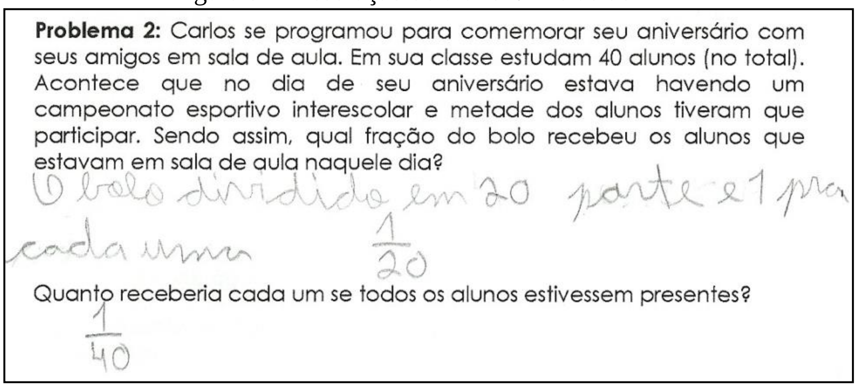
Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

Como o bolo era para 40 aluno se metade (20) não comeu o bolo. Os outros 20 alunos comeram $\frac{1}{2}$ do bolo

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 97 – resolução do aluno Vinícius do 7º A



Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

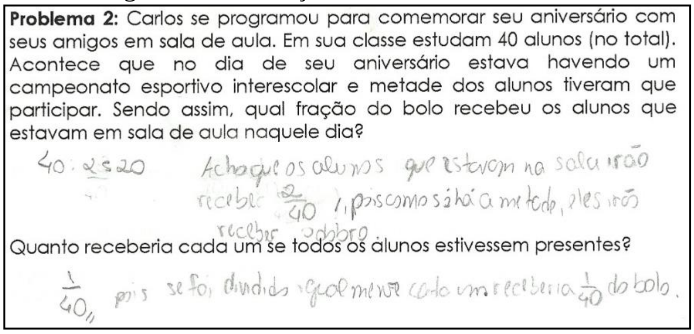
O bolo dividido em 20 parte e 1 pra cada uma $\frac{1}{20}$

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

$\frac{1}{40}$

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 98 – resolução do aluno Heitor do 7º C


Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

40 : 2 = 20 Acho que os alunos que estavam na sala irão receber $\frac{2}{40}$, pois como só há a metade, eles irão receber o bolo

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

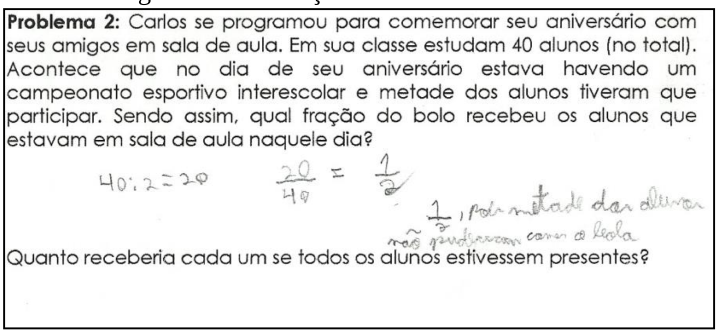
$\frac{1}{40}$, pois se foi dividido igualmente cada um receberia $\frac{1}{40}$ do bolo.

Fonte: imagem criada pela autora

A princípio isso me surpreendeu, mas, analisando novamente a pergunta do problema, acredito que as duas interpretações são aceitáveis. Quando estava resolvendo esse item, a aluna Carolina (7º A) me questionou quanto às partes, se seriam iguais ou não. Achei estranha sua pergunta, mas analisando o enunciado verifiquei que essa informação está realmente faltando nesse problema.

Na segunda pergunta do problema 2, a maioria dos alunos que calculou a fração correspondente a todos os alunos presentes juntos, não a respondeu ou indicou que cada um receberia um pedaço:

Figura 99 – resolução do aluno Pedro do 7º A


Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

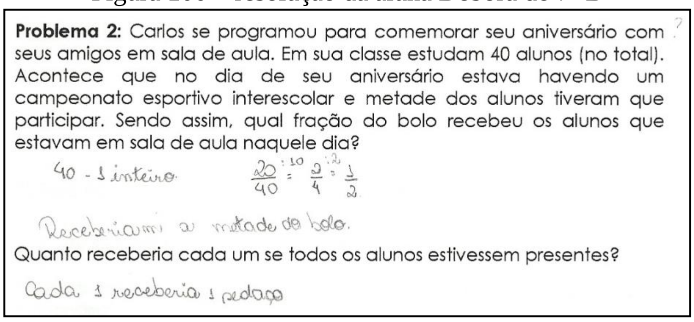
40 : 2 = 20 $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$, pois metade dos alunos não puderam comer o bolo

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Fonte: imagem criada pela autora

Figura 100 – resolução da aluna Débora do 7º B


Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

40 - 1 inteiro $\frac{20}{40} \overset{:10}{=} \frac{2}{4} \overset{:2}{=} \frac{1}{2}$

Receberiam a metade do bolo.

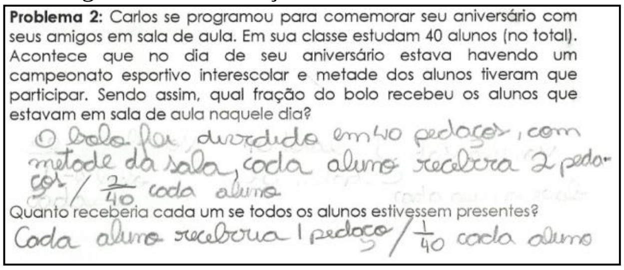
Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Cada 1 receberia 1 pedaço

Fonte: imagem criada pela autora

Já os alunos que calcularam a fração correspondente a cada aluno presente, acertaram esse item:

Figura 101 – resolução da aluna Vivian do 7º A



Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

O bolo foi dividido em 40 pedaços, com metade da sala, cada aluno recebera 2 pedaços / $\frac{2}{40}$ cada aluno

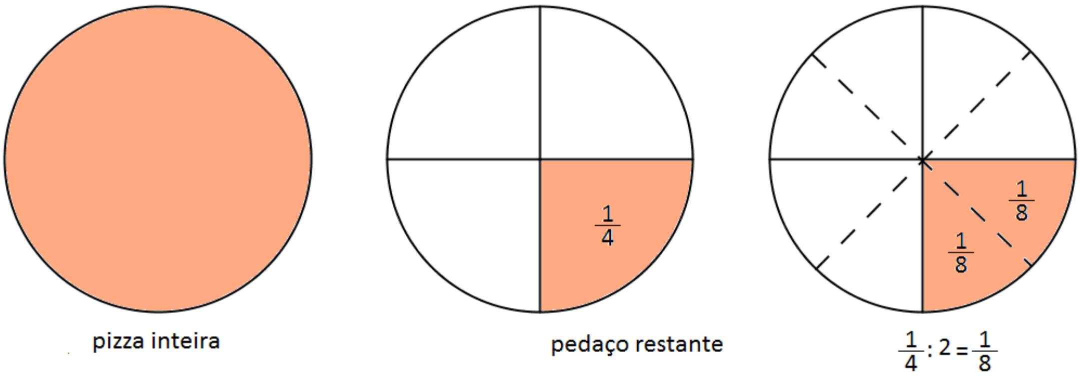
Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Cada aluno receberia 1 pedaço / $\frac{1}{40}$ cada aluno

Fonte: imagem criada pela autora

Após os alunos terminarem, fizemos a discussão de suas resoluções. Utilizei o seguinte esquema, que foi o utilizado pela maioria, para resolver o problema 1:

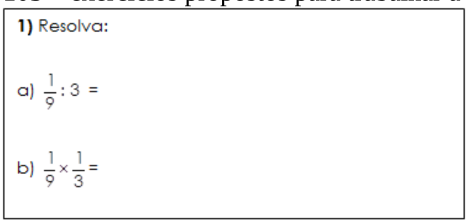
Figura 102 – esquema utilizado na resolução do problema 1



Fonte: imagem produzida pela autora

Na sequência, pedi que os alunos resolvessem os exercícios seguintes, utilizando um esquema no item a:

Figura 103 – exercícios propostos para trabalhar a divisão



1) Resolva:

a) $\frac{1}{9} : 3 =$

b) $\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} =$

Fonte: imagem criada pela autora

A maioria dos alunos que utilizou o esquema conseguiu responder:

Figura 104 – resolução da aluna Luíza do 7º C

1) Resolva:

a) $\frac{1}{9} : 3 = \frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

Fonte: imagem criada pela autora

Discutindo os resultados dessas duas operações, os alunos concluíram que dividir a fração $\frac{1}{9}$ por 3 é o mesmo que multiplicá-la por $\frac{1}{3}$. Fiz o registro dessa conclusão na lousa e eles realizam o exercício seguinte como fixação:

Figura 105 – exercício proposto

2) Qual a fração obtida nas operações abaixo:

a) $\frac{4}{5} : 2 =$

b) $\frac{3}{7} : 3 =$

c) $\frac{10}{9} : 5 =$

d) $\frac{20}{3} : 4 =$

Fonte: imagem criada pela autora

Não ocorreram muitas dúvidas durante a sua resolução. Para os alunos que ainda tinham dúvidas, sugeri que continuassem utilizando esquemas. Desses, observei que utilizaram apenas esquemas no item a, resolvendo os demais itens algebricamente.

Para trabalhar a divisão de um número natural por uma fração, foi proposto o seguinte problema:

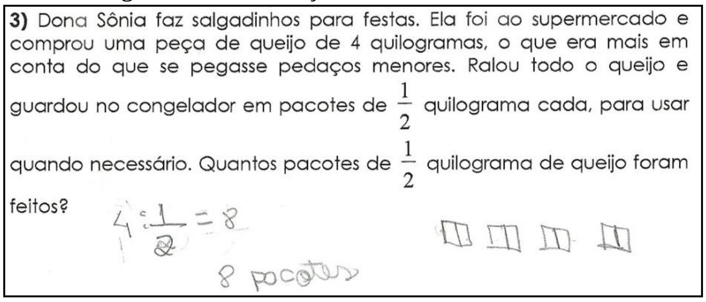
Figura 106 – problema proposto para trabalhar a divisão de um número natural por uma fração

3) Dona Sônia faz salgadinhos para festas. Ela foi ao supermercado e comprou uma peça de queijo de 4 quilogramas, o que era mais em conta do que se pegasse pedaços menores. Ralou todo o queijo e guardou no congelador em pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma cada, para usar quando necessário. Quantos pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma de queijo foram feitos?

Fonte: imagem criada pela autora

59% dos alunos conseguiu respondê-lo, identificando que deveriam dividir 4 por $\frac{1}{2}$:

Figura 107 – resolução do aluno Danilo do 7º C



3) Dona Sônia faz salgadinhos para festas. Ela foi ao supermercado e comprou uma peça de queijo de 4 quilogramas, o que era mais em conta do que se pegasse pedaços menores. Ralou todo o queijo e guardou no congelador em pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma cada, para usar quando necessário. Quantos pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma de queijo foram feitos?

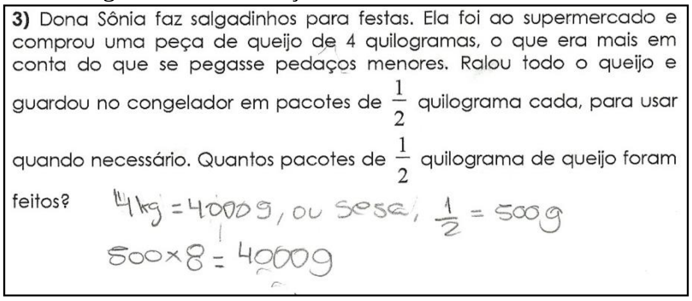
$4 : \frac{1}{2} = 8$

8 pacotes

Fonte: imagem criada pela autora

Alguns fizeram as conversões das medidas em gramas antes de realizar os cálculos:

Figura 108 – resolução do aluno Matheus do 7º A



3) Dona Sônia faz salgadinhos para festas. Ela foi ao supermercado e comprou uma peça de queijo de 4 quilogramas, o que era mais em conta do que se pegasse pedaços menores. Ralou todo o queijo e guardou no congelador em pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma cada, para usar quando necessário. Quantos pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma de queijo foram feitos?

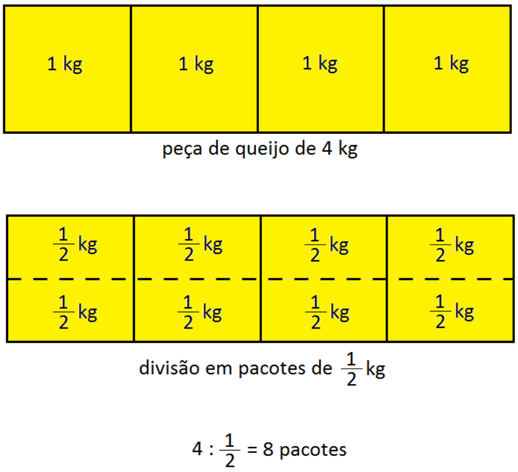
4kg = 4000g, ou sesa, $\frac{1}{2}$ = 500g

500×8 = 4000g

Fonte: imagem criada pela autora

Após as discussões de suas resoluções, utilizei o esquema seguinte, para resolver esse problema:

Figura 109 – esquema utilizado na resolução do problema 3



Fonte: imagem criada pela autora

Discutindo o resultado dessa operação, os alunos concluíram que dividir o número 4 por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que multiplicá-lo por 2. Fiz o registro dessa conclusão na lousa.

Para trabalharmos a divisão de uma fração por outra fração, foi proposto o seguinte problema:

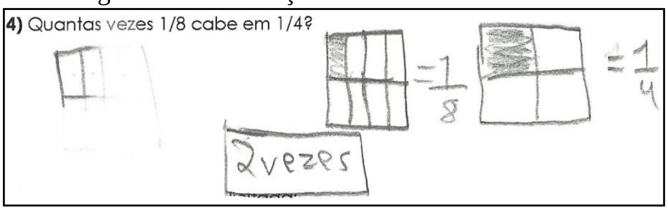
Figura 110 – problema proposto para trabalhar a divisão de uma fração por outra fração

4) Quantas vezes 1/8 cabe em 1/4?

Fonte: imagem criada pela autora

Inicialmente, os alunos não conseguiram resolvê-lo. Então, fiz a seguinte pergunta: “Quantas vezes 2 cabe em 10?”, e todos disseram que era cinco vezes. Questionei-os sobre o porquê e qual operação realizaram, e a maioria disse que calculou 2×5. Visto que não identificaram a divisão, fiz outra pergunta: “O quanto de 10 cabe em 2?”. Para resolver, tiveram que realizar a divisão, pois não conseguiram responder mentalmente. Sistematizamos na lousa quais eram as operações envolvidas nas duas perguntas e voltamos à pergunta do problema inicial. A maioria dos alunos identificou que a operação a ser realizada era $\frac{1}{4} : \frac{1}{8}$, mas disseram que não sabiam resolvê-la. Sugeri que tentassem resolver utilizando um esquema e o aluno Afonso (7º A) quis mostrar sua resolução para a classe:

Figura 111 – resolução do aluno Afonso do 7º B

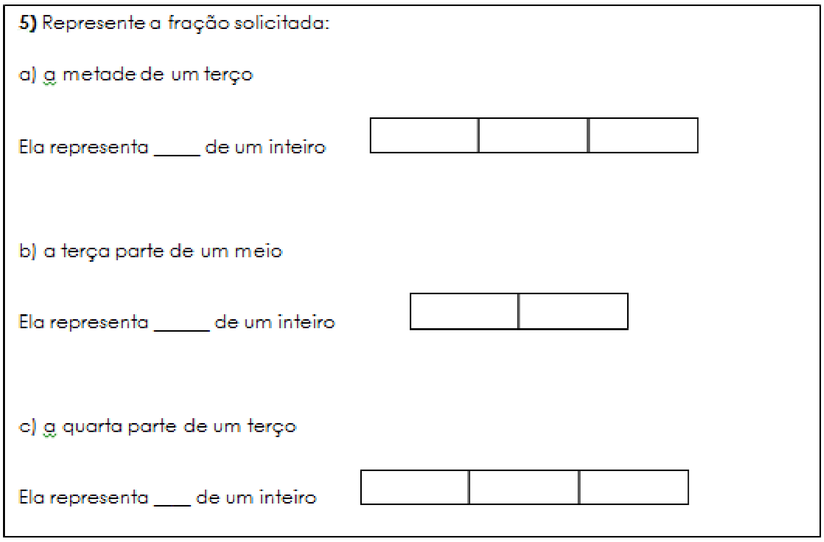


Fonte: imagem criada pela autora

Nas demais turmas, direcionei as discussões do mesmo modo.

Na sequência, propus a realização do seguinte exercício:

Figura 112 – exercício proposto para trabalhar a divisão de uma fração por outra fração



5) Represente a fração solicitada:

a) a metade de um terço

Ela representa _____ de um inteiro

b) a terça parte de um meio

Ela representa ______ de um inteiro

c) a quarta parte de um terço

Ela representa ____ de um inteiro

Fonte: imagem criada pela autora

55% dos alunos conseguiram resolvê-lo. Dos que não conseguiram, alguns fizeram a representação da fração procurada no esquema corretamente, mas indicaram como resposta a fração dada no enunciado:

Figura 113 – resolução da aluna Beatriz do 7º B

5) Represente a fração solicitada:

a) a metade de um terço

Ela representa $\frac{1}{2}$ de um inteiro

b) a terça parte de um meio

Ela representa $\frac{1}{3}$ de um inteiro

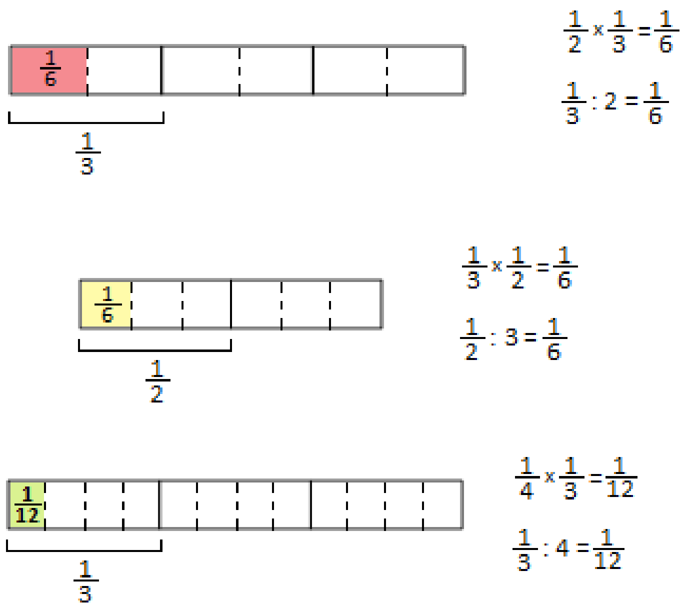
c) a quarta parte de um terço

Ela representa $\frac{1}{4}$ de um inteiro

Fonte: imagem criada pela autora

Fizemos a correção em conjunto na lousa e sistematizamos a divisão de uma fração por outra fração, identificando a divisão e a multiplicação de frações como operações inversas:

Figura 114 – esquema utilizado na resolução do problema 5



Fonte: imagem criada pela autora

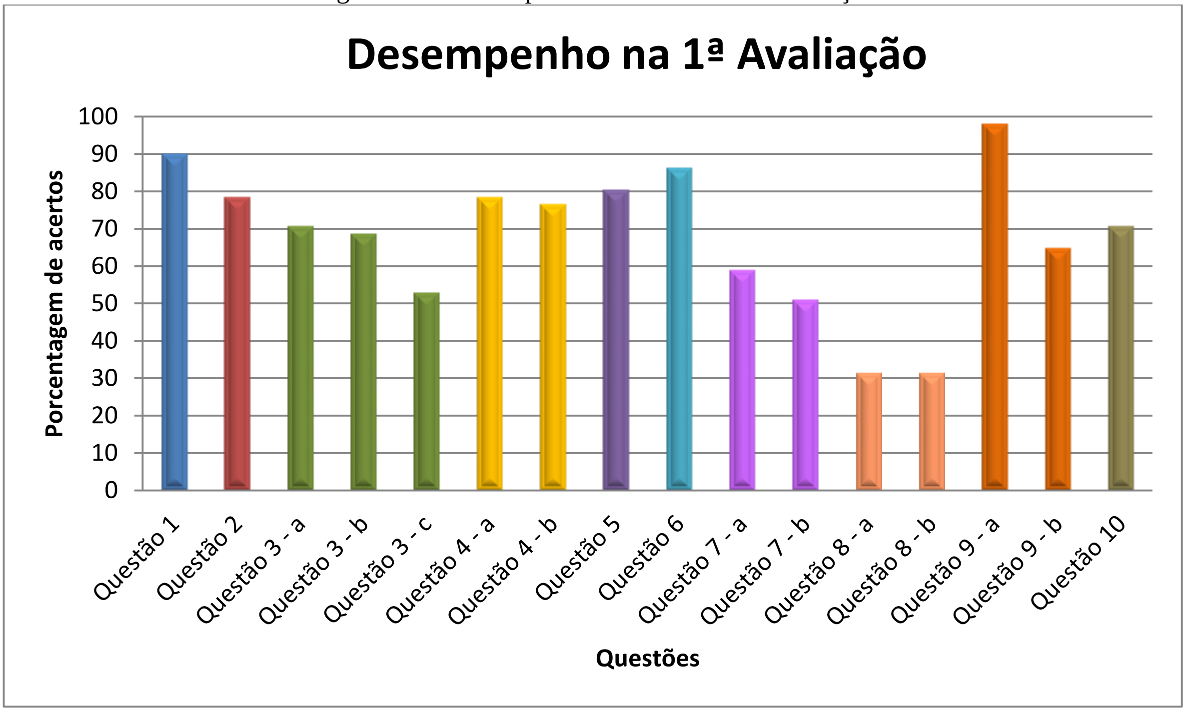
Terminadas as discussões, os alunos realizaram mais nove exercícios contidos na folha de atividades e os exercícios contidos no material apostilado, como fixação. As correções foram feitas em conjunto na lousa.

Nesta etapa, acreditamos que a utilização da representação pictórica e também o possível uso do Estojo das frações são fundamentais para ajudar na aprendizagem dos conceitos envolvidos.

CAPÍTULO 4 – CONCLUSÕES

Utilizamos duas avaliações para tentar medir a compreensão de nossos alunos a respeito dos temas que abordamos. A primeira envolveu o significado parte-todo das frações, frações equivalentes, comparação de frações e as operações de adição e subtração. O gráfico seguinte traz o desempenho por questão dos alunos nessa avaliação:

Figura 115 – desempenho dos alunos na 1ª avaliação



Fonte: imagem criada pela autora

Os conceitos envolvidos em cada questão foram os seguintes:

Figura 116 – conteúdos das questões da 1ª avaliação

Questão 1 – Frações equivalentes	**Questão 6 –** Frações equivalentes
Questão 2 – Comparação de frações com mesmo numerador	**Questão 7 – a –** Comparação de frações
Questão 3 – a – Adição de frações com denominadores diferentes	**Questão 8 – a –** Significado parte-todo
Questão 3 – b – Subtração de frações com mesmo denominador	**Questão 8 – b –** Comparação de frações
Questão 3 – c – Transformar as frações em porcentagens	**Questão 9 – a –** Adição de frações com mesmo denominador
Questão 4 – a – Comparação de frações	**Questão 9 – b –** Subtração de frações com mesmo denominador
Questão 4 – b – Significado parte-todo	**Questão 10 –** Comparação de frações
Questão 5 – Frações equivalentes	

Fonte: imagem criada pela autora

A segunda avaliação abordou o significado parte-todo das frações e as operações de multiplicação e divisão de frações. O gráfico seguinte traz o desempenho por questão dos alunos nessa avaliação:

Figura 117 – desempenho dos alunos na 2ª avaliação

Fonte: imagem criada pela autora

Os conceitos envolvidos em cada questão foram os seguintes:

Figura 118 – conteúdos das questões da 2ª avaliação

Questão 1 – Significado parte-todo	**Questão 7 –** Divisão de frações
Questão 2 – a – Subtração de frações com mesmo denominador	**Questão 8 – a –** Multiplicação de frações
Questão 2 – b – Multiplicação de frações	**Questão 8 – b –** Significado parte-todo
Questão 3 – Multiplicação de frações	**Questão 8 – c –** Significado parte-todo
Questão 4 – Multiplicação de frações	**Questão 9 –** Divisão de fração por um número natural
Questão 5 – Divisão de frações	**Questão 10 – a –** Divisão de números naturais
Questão 6 – Divisão de um número natural por uma fração	**Questão 10 – b –** Divisão de número natural por fração

Fonte: imagem criada pela autora

Os gráficos revelam que o desempenho dos alunos foi bom, apenas em algumas questões tivemos porcentagens de acertos menores que 50%. O estudo desses erros pode ser objeto de uma próxima pesquisa.

Nessas avaliações, muitos alunos utilizaram representações pictóricas em suas resoluções, evidenciando que esse recurso os ajudou a visualizar concretamente os conceitos relacionados ao tema.

Ao longo do ano, percebemos que os alunos passaram a argumentar mais sobre suas conjecturas e, em situações em que as frações foram abordadas novamente, recordavam da utilização do estojo e das representações pictóricas.

Pudemos observar também que, em relação aos outros anos em que não utilizamos essas estratégias, foi significativa a diferença na compreensão desses conceitos por parte dos alunos. Acreditamos dessa forma que a utilização do estojo e das representações facilitou a compreensão do significado parte-todo das frações e das operações básicas, permitindo que os alunos atribuíssem significado a esses conceitos. O gradativo abandono do estojo pelos alunos e as interessantes conclusões apresentadas durante a aplicação são evidências disso.

O trabalho através de situações de aprendizagem e da utilização de recursos para ajudar na abstração dos conceitos criou os “espaços de pensamentos” que supomos. Apesar de não ser um trabalho fácil, por demandar um bom tempo em sua preparação e aplicação, acreditamos que conseguimos contribuir de alguma forma na aprendizagem desses alunos.

Temos ciência que de nossa proposta deve ser melhorada. É apenas uma de várias tentativas em proporcionar uma aprendizagem significativa desses conceitos, mas acreditamos que possa auxiliar outros professores nessa busca.

Esse estudo foi de fundamental importância em minha prática pedagógica. Acredito que sempre devemos buscar formas para tentar promover uma aprendizagem significativa, tanto dos alunos quanto para nós mesmos. Atualmente, além de lecionar também trabalho com a elaboração de conteúdos e atividades em uma empresa de Educação e Tecnologia. No meio digital, nosso desafio em busca dessa aprendizagem é ainda maior. São experiências de ensino como essa, que proporcionam um melhor entendimento de como os alunos aprendem, que minimizam essas dificuldades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saad Ag; SILVA, Maria José Ferreira. **As operações com os números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo.** Rio Claro: Bolema, 2008, ano 21, nº 31, 24 p.

BALDIN, Yuriko Yamamoto. **Texto explicativo sobre a chamada Matemática de Singapura.** Versão revisada 2014, disponível em <http://prof.obmep.org.br>.

BALDIN, Yuriko Yamamoto; MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido. **Ensino de números racionais no ensino fundamental.** São Carlos: LIMC, 2006. 199 p.

BALL, Deborah Loewenberg. **Halves, pieces, and twoths: constructing representational contexts in teaching fractions.** Michigan: The National Center for Research on Teacher Education, 1990. 41 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática.** 1996. 96 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1951. 319 p.

Colégio Anglo vestibulares ensino fundamental: 7º ano (língua portuguesa, história, geografia, ciências, matemática). São Paulo: Anglo, 2011. (Coleção Anglo Ensino Fundamental).

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números.** Rio de Janeiro: SBM, 2010. 133 p. (Coleção Textos Universitários; 9).

GARELICK, Barry; HOVEN, John. **Singapore Math: Simple or Complex?**. Educational Leadership, v. 65, n. 3, p. 28-31, novembro de 2007.

PATRONO, Rosângela Milagres. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental: análise de uma proposta de ensino.** 2011. 184 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ROMANATTO, Mauro Carlos; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **A matemática na formação de professores dos anos iniciais: um olhar para além da aritmética.** São Carlos: EdUFSCar, 2011. 107 p. (Coleção UAB-UFSCar).

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Relatório Pedagógico 2011 Saresp: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. São Paulo: FDE, 2011. 255 p.

APÊNDICE

<u>Frações Equivalentes</u>

Utilizando o Estojo de Frações, responda:

A. Qual a fração que representa o fundo amarelo do estojo?

____

B. Existem outras maneiras de representar **um inteiro** utilizando as barras? Como seriam escritas estas frações? ____________________

C. Peguem duas partes que representem $\frac{1}{8}$ e, após encaixá-las no estojo, coloquem sobre o estojo as transparências até encontrarem aquelas que representem frações correspondentes à mesma parte ocupada pelas duas barras que estão no estojo. O que é possível observar? Que fração representa as duas barras?

____

____

D. Representem agora algumas outras frações equivalentes que podem ser formadas utilizando outras barras. Escrevam os resultados de suas experiências.

____

____

____

____

<u>Definição de frações equivalentes:</u>

<u>Como obter frações equivalentes</u>

Como podemos obter frações equivalentes a $\frac{2}{3}$?

a) Utilizando o Estojo de Frações, encontre as frações que são equivalentes a $\frac{2}{3}$: ______________________________

b) Entre as frações encontradas, o que podemos observar?

____

____

____

____

<u>Como verificar se duas frações são equivalentes?</u>

1) Através do produto em cruz:

Para verificar que $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ são equivalentes, basta realizar os produtos 6 . 12 = 72 e 9 . 8 = 72 e verificar que eles são iguais.

Folha de atividades 1 – Frações equivalentes (p. 1)

2) Usando a decomposição em fatores primos dos numeradores e denominadores:

Neste caso podemos simplesmente fazer uma simplificação da fração pelos fatores primos em comum do numerador e do denominador:

$\frac{6}{9} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ (aqui foi feita a decomposição em fatores primos tanto do numerador como do denominador e eliminados os fatores comuns). O mesmo deve ser feito na outra fração:

$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

3) Redução ao mesmo denominador

Se escrevermos formas equivalentes de duas frações de modo que elas possuam os mesmos denominadores, então elas serão equivalentes, quando e somente quando elas tiverem os mesmos numeradores. Por exemplo, 6/8 e 3/4 são equivalentes pois ambas são equivalentes à 24/32.

<u>ATIVIDADES:</u>

1) Analise a seguinte situação: João pretende pegar $\frac{1}{5}$ das balas de um pote e Rodrigo $\frac{2}{10}$ do mesmo pote. O que podemos dizer em relação à quantidade que cada um pegou? Ela são equivalentes ou não? Explique.

____

____

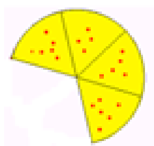
2) Ligue as frações equivalentes:

$\frac{7}{8}$	$\frac{60}{90}$
$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{200}{1000}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{30}{45}$	$\frac{28}{32}$

3) Complete as frações com os valores que estão faltando:

a) $\frac{3}{7} = \frac{15}{\_\_}$ b) $\frac{2}{5} = \frac{\_\_}{45}$ c) $\frac{21}{49} = \frac{3}{\_\_}$

4) Jandira dividiu uma pizza em 6 partes e comeu 2. Logo comeu $\frac{2}{6}$ da pizza. Se ela tivesse dividido a pizza em 12 pedaços, quantos pedaços de pizza ela deveria comer para ingerir a mesma quantidade de pizza? ________________



<u>**Comparação de frações**</u>

Problema 1: Carlos e Fábio pediram uma pizza média de calabresa. Carlos comeu $\frac{3}{8}$ da pizza e Fábio $\frac{5}{8}$ da mesma. Quem comeu mais? Porque?

Folha de atividades 1 – Frações equivalentes (p. 2)

____

____

Problema 2: Quem é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{9}$?

a) Faça a representação das duas frações no Estojo de Frações e responda: ____

b) Encontre frações equivalentes às frações dadas com mesmo denominador e as compare:

$\frac{2}{3} = \frac{}{}$ $\frac{2}{9} = \frac{}{}$

Problema 3: Em uma prova de 20 questões, João acertou $\frac{3}{5}$ das questões e Daniele acertou $\frac{6}{8}$. Então responda:

a) Quem acertou mais questões? Explique.

b) Quantas questões cada um acertou?

ATIVIDADES:

1) Na Páscoa, Marina e Flávia ganharam de seus pais uma barra de chocolate cada uma. Marina dividiu sua barra em 4 partes iguais e comeu uma delas. Já Flávia dividiu a sua em 8 partes e comeu duas delas. Quem comeu mais chocolate, Marina ou Flávia? Porque?

____

____

2) A prova de Português tinha 18 exercícios de mesmo valor e Hugo acertou 15 deles. Já na prova de Geografia havia 12 perguntas de mesmo valor e Hugo acertou 8. Responda:

a) Qual a fração de acertos em cada prova?______________________

b) Em qual prova ele se saiu melhor? ______________________

3) Em uma eleição do Grêmio Estudantil da Escola José Bonifácio, tivemos a seguinte situação: A Chapa 1 obteve $\frac{4}{7}$ dos votos, a chapa 2 teve $\frac{1}{2}$ dos votos e a chapa 3 teve $\frac{2}{3}$ dos votos. Qual foi a 1ª, a 2ª e a 3ª colocada da eleição?

____

4) Transforme as frações em porcentagens:

a) $\frac{1}{4} =$ b) $\frac{3}{4} =$ c) $\frac{7}{10} =$

d) $\frac{4}{25} =$ e) $\frac{18}{200} =$ f) $\frac{16}{400} =$

Folha de atividades 1 – Frações equivalentes (p. 3)

Adicão e Subtracão de fracões

Utilizando o Estojo de Frações, responda:

a) De quantas metades precisamos para completar um inteiro? _________

b) De quantos terços precisamos para completar um inteiro? ___________

c) De quantos quartos precisamos para completar um inteiro? __________

d) De quantos quintos precisamos para completar um inteiro? __________

Adicão de fracões com mesmo denominador

A principal questão que envolve esse processo se concentra na idéia de **ACRESCENTAR** peças no estojo com mesmo denominador.

Como calcular $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

Agora calcule:

a) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=$

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$

c) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=$

d) $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=$

e) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=$

f) $\frac{9}{11}+\frac{1}{11}=$

Subtracão de fracões com mesmo denominador

A principal questão que envolve esse processo se concentra na idéia de **RETIRAR** peças do estojo com mesmo denominador.

Como calcular $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=$

Agora calcule:

a) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$

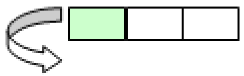
b) $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=$

c) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=$

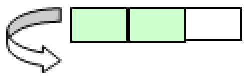
d) $\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=$

ATIVIDADES

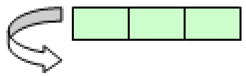
1) Marcos está pintando um painel. Para controlar seu trabalho ele dividiu o painel em três partes iguais. Peça para seus alunos observarem as figuras abaixo e responderem as questões feitas por Marcos.



a) Pintei $\frac{1}{3}$ do painel. Quanto ainda falta pintar?



b) Pintei $\frac{2}{3}$ do painel. Quanto ainda falta pintar?



c) Pintei todo o painel. Qual a fração que indica que o painel está todo pintado?

Agora, utilize as figuras de Marcos para indicar o número que completa corretamente cada uma das sentenças abaixo:

Folha de atividades 2 – Adição e subtração de frações (p. 1)

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$　　b) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=$　　c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

d) $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=$　　e) $\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=$　　f) $\frac{3}{3}=$

2) Martinha ganhou de sua mãe uma barra de chocolate que veio dividida em 8 partes para serem destacadas. No mesmo dia ela comeu $\frac{2}{8}$ da barra e no outro dia comeu mais $\frac{3}{8}$. Que fração da barra de chocolate Martinha comeu? Faça uma representação.

3) Susi ganhou o livro *Viagem ao centro da Terra*, de Júlio Verne. Ela leu $\frac{1}{4}$ do livro na segunda-feira e $\frac{2}{4}$ na quarta-feira.

a) Que fração do livro ela já leu?_________________

b) Que fração do livro falta para ela terminar de lê-lo?______________

c) Que fração do livro Susi leu a mais na quarta-feira comparando-se com o que leu na segunda-feira?____________________

d) Que fração do livro, no total, Susi deve ler para completar a leitura do livro do começo ao fim?__________________

4) Julia foi ao mercado e comprou 5 pacotes de açúcar mascavo, pesando $\frac{1}{2}$ Kg cada um. Quantos Kg de açúcar ela comprou?

5) Fabiano comprou 4 pacotes de café, cada um contendo $\frac{1}{4}$ Kg. Quantos quilos de café ele comprou?

Para <u>somar</u> ou <u>subtrair</u> frações com <u>denominadores iguais</u> devemos:

<u>**Adição de frações com denominadores diferentes**</u>

Como calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$

Agora calcule:

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=$　　d) $\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$　　e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

Folha de atividades 2 – Adição e subtração de frações (p. 2)

Subtração de frações com denominadores diferentes

Como calcular $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

Agora calcule:

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$

b) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

c) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} =$

d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$

e) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$

f) $\frac{2}{3} - \frac{2}{6} =$

Para **somar** ou **subtrair** frações com **demoninadores diferentes** devemos:

As frações podem ser negativas?

Como calcular $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$? Siga as orientações de sua professora e responda:

$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$

Agora calcule:

a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{5} - \frac{1}{4} =$

c) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} =$

ATIVIDADES

1) Minha avó gosta de fazer gelatina da seguinte maneira: $\frac{1}{4}$ de litro de água quente e $\frac{1}{5}$ de litro de água fria. Qual é a fração que representa o total de litros de água que ela utiliza?

2) Vera, mãe de Felipe, fez um bolo para comemorar seu aniversário, cortou-o em 6 pedaços e Felipe levou 2 pedaços para a escola. Susi, mãe de Pedro, também fez o mesmo bolo, mas cortou-o em 4 pedaços, dos quais Pedro levou 1 para escola.

a) Que fração de um bolo corresponde os pedaços que Felipe levou a escola?_______________________

b) Que fração de um bolo corresponde os pedaços que Pedro levou a escola? _____________________

c) No recreio, Felipe e Pedro resolveram comer juntos os pedaços de bolo. Que fração de um bolo tinham juntos? _______________________

Folha de atividades 2 – Adição e subtração de frações (p. 3)

a) Os pedaços dos dois foram suficientes para formar um bolo inteiro? ____

3) Eu comi $\frac{1}{3}$ da torta no almoço e meu irmão $\frac{1}{4}$ da torta. Quanto da torta sobrou para o jantar?

4) A professora de Kátia e Lia pediu à classe que lessem durante as férias o livro *Meu Pequeno Príncipe*. Kátia leu $\frac{3}{4}$ do livro e Lia leu $\frac{5}{6}$.

a) Que fração do livro Lia leu a mais que Kátia?

b) Se Lia lesse mais $\frac{1}{7}$ do livro, quanto ainda faltaria para ler o livro todo?

c) Se o livro tivesse 96 páginas. Quanto Kátia já teria lido?

5) Encontre a solução para as quatro situações problemas abaixo.

I) Andei $\frac{1}{3}$ km hoje e ontem tinha andado $\frac{1}{6}$ km. Qual a fração de km que andei nos dois dias e quantos metros andei?

II) Numa sala de aula com 30 alunos, $\frac{1}{3}$ das crianças só gostam de futebol e $\frac{1}{6}$ só gostam de basquete. Se juntarmos o grupo de alunos que só gostam de futebol e o grupo de alunos que só gostam de basquete, que fração obtemos e quantas crianças esses dois grupos juntos formam?

III) $\frac{1}{3}$ do cereal "Sweety" é açúcar e $\frac{1}{6}$ do cereal "Healty" é açúcar. Se misturarmos porções iguais de ambos os cereais, que fração desta mistura é açúcar e qual a quantidade de açúcar há em 1 kg da mistura?

6) Juliano, Décio e Felipe foram comer na Pizzaria Tomato. Pediram uma pizza de mussarela e uma de bacon. O garçom cortou a pizza de mussarela em 6 pedaços iguais e a pizza de bacon em 5 pedaços iguais.

- Juliano comeu 3 pedaços da pizza de mussarela e 2 de bacon.
- Décio comeu 2 pedaços da pizza de mussarela e 1 de bacon.
- Felipe comeu o pedaço que restou de mussarela e 1 de bacon.

Qual a fração de uma pizza que cada um comeu?

Que fração da pizza de bacon sobrou?

Folha de atividades 2 – Adição e subtração de frações (p. 4)

Quem comeu mais e que fração comeu?

7) Efetue as seguintes adições e subtrações:

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=$

b) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}=$

c) $\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}=$

d) $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$

e) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$

f) $\frac{14}{30}-\frac{6}{15}=$

g) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

h) $\frac{3}{5}+\frac{2}{4}+\frac{7}{10}=$

8) Observe como Lúcia resolveu as operações a seguir. Quais erros ela cometeu? A fim de ajudá-la a não errar mais, quais sugestões você daria a ela?

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{8}$ b) $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{3}{0}$ c) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{6}{8}$ d) $\frac{12}{9}-\frac{2}{4}=\frac{10}{5}$

Obs: Resolva-as corretamente.

9) Coloque nos espaços em branco um dos símbolos: > (maior), < (menor), = (igual).

a) $\frac{4}{4}$ ___ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ ___ $\frac{6}{18}$

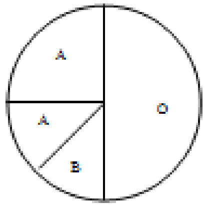
c) $\frac{8}{2}$ ___ 5 d) $2+\frac{1}{2}$ ___ $\frac{10}{5}$

10) Na escola Ribeirinha a professora de Biologia solicitou a um grupo de alunos que fizesse uma pesquisa sobre o tipo de sangue dos 2.000 alunos de uma escola. Os alunos, para resumir os dados encontrados, construíram um gráfico de "pizza" como o representado abaixo. Mas se esqueceram de colocar a fração correspondente ao sangue tipo B. Responda:

a) Quantos alunos têm o sangue tipo O? ___________________________

b) Qual o total de alunos que tem sangue A e AB? __________________

c) Que fração do total de alunos está relacionada aos alunos que têm sangue do tipo B? ______________________________



Folha de atividades 2 – Adição e subtração de frações (p. 5)

A MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Problema 1: A mãe do Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ do bolo. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida?

Problema 2: Suponhamos agora que o bolo, cortado em 8 pedaços iguais, vai ser comido por Roberto e seu irmão, cada qual comendo um pedaço, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar. Qual a fração total do bolo comida num dia pelos dois irmãos?

Problema 3: Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco desse remédio contém 45 cápsulas, responda:

a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração do vidro que ele terá tomado?

b) Coloque a resposta na forma de operação com frações, utilizando tanto adição como multiplicação.

c) Um vidro de remédio é suficiente para ser tomado em 15 dias?

Atividades

1) Realize as operações:

a) 5 × (1/3) =

b) 8× (3/5) =

c) 6 × (2/6) =

d) 7× (1/7) =

2) Em cada operação, dizer se a resposta é correta ou não. Dar uma resposta correta quando for falsa.

a) 5 × (2/5) = (2/5) + (2/5)+ (2/5)+ (2/5)+ (2/5) ____________________

b) 5× (2/5) = $\frac{5\times 2}{5}$ ____________________

c) 5× (2/5) = 2 ____________________

d) 3× (2/5) = $\frac{2}{15}$ ____________________

Folha de atividades 3 – Multiplicação (p. 1)

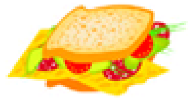
Problema 4: O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00 em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo –750 (reais) na planilha de orçamento da família.

a) Que fração representa cada prestação?

b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

c) Qual fração da dívida resta, após pagar as 4 primeiras prestações?

d) E qual é o valor que resta como dívida na planilha, depois de pagar 4 prestações?



Problema 5 : A classe de inglês da Elisa tem 16 alunos ao todo. Hoje vieram apenas $\frac{3}{4}$ dos alunos. A quarta parte dos alunos presentes trouxe lanche de casa. Que fração da classe trouxe o lanche?

Problema 6: A classe de Educação Artística da Elisa é formada por 32 alunos e hoje apenas vieram 5/8 da classe. Dentre os presentes, 3/4 trouxeram lanche. Que fração da classe trouxe o lanche? Quantos alunos trouxeram lanche?

Folha de atividades 3 – Multiplicação (p. 2)

A DIVISÃO DE FRAÇÕES

Problema 1: Ao saírem do trabalho, João e mais dois amigos foram comer uma pizza. A pizza veio dividida em quatro pedaços iguais. Cada um dos amigos comeu um pedaço da pizza. João ficou satisfeito, porém seus dois amigos não ficaram e resolveram dividir o último pedaço. Sabendo que este último pedaço representa $\frac{1}{4}$ de toda pizza, como dividi-lo entre os dois amigos?

Problema 2: Carlos se programou para comemorar seu aniversário com seus amigos em sala de aula. Em sua classe estudam 40 alunos (no total). Acontece que no dia de seu aniversário estava havendo um campeonato esportivo interescolar e metade dos alunos tiveram que participar. Sendo assim, qual fração do bolo recebeu os alunos que estavam em sala de aula naquele dia?

Quanto receberia cada um se todos os alunos estivessem presentes?

Atividades

1) Resolva:

a) $\frac{1}{9} : 3 =$

b) $\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} =$

2) Qual a fração obtida nas operações abaixo:

a) $\frac{4}{5} : 2 =$

b) $\frac{3}{7} : 3 =$

c) $\frac{10}{9} : 5 =$

d) $\frac{20}{3} : 4 =$

3) Dona Sônia faz salgadinhos para festas. Ela foi ao supermercado e comprou uma peça de queijo de 4 quilogramas, o que era mais em conta do que se pegasse pedaços menores. Ralou todo o queijo e guardou no congelador em pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma cada, para usar quando necessário. Quantos pacotes de $\frac{1}{2}$ quilograma de queijo foram feitos?

4) Quantas vezes 1/8 cabe em 1/4?

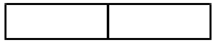
5) Represente a fração solicitada:

a) a metade de um terço

Ela representa _____ de um inteiro

Folha de atividades 4 – Divisão (p. 1)

b) a terça parte de um meio



Ela representa ______ de um inteiro

c) a quarta parte de um terço

Ela representa ______ de um inteiro

6) Maria terá de encher, com água, uma jarra de 2 litros, mas em sua caneca cabe apenas $\frac{2}{5}$ de litro. Quantas canecas Maria precisará carregar para encher a jarra?

7) Para fazer uma receita de pudim é necessário $\frac{1}{2}$ litro de água quente e $\frac{1}{4}$ de litro de água fria. Quero fazer a metade da receita, quanto de água quente e água fria vou precisar? (Dê a resposta na forma fracionária)

8) Quantas vezes $\frac{1}{5}$ cabe em 2?

9) Quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em $\frac{5}{6}$?

10) Uma aula de ginástica dura $\frac{3}{4}$ de hora. Quantas aulas de ginástica podem ser dadas em 4 horas e meia?

11) Seis políticos deveriam dividir $\frac{3}{5}$ da hora de um programa de televisão para sua propaganda. Quanto tempo coube a cada um no programa?

12) Para fazer duas receitas de biscoitos, Maria usou 2 copos e meio de farinha. Qual é a fração do copo de farinha usada em cada receita?

Folha de atividades 4 – Divisão (p. 2)

13) Resolva as expressões:

a) $\frac{2}{5} : (\frac{6}{5} \times \frac{15}{4}) =$

b) $(\frac{2}{7} \times \frac{7}{3} + 1) : \frac{25}{9} =$

c) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}) : (\frac{2}{5} + \frac{1}{10}) =$

14) André foi ao parque de diversão com suas três irmãs Ana, Amanda e Ângela. Enquanto elas brincavam na roda gigante ele comprou uma garrafa de refrigerante, pois estava fazendo muito calor. Ele tomou a metade do refrigerante e guardou o restante para suas irmãs dividirem. Quanto do refrigerante tomará cada uma das irmãs se elas dividirem o restante igualmente?

Folha de atividades 4 – Divisão (p. 3)