

# Planejamento de Experimentos Bayesianos: Aplicações em Experimentos na Presença de Tendências Lineares

Luis Gustavo Guedes Bessa Lima

Orientador: Prof. Dr. Jorge Alberto Achcar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

São Carlos

Dezembro de 2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

L732pe

Lima, Luis Gustavo Guedes Bessa.

Planejamento de experimentos Bayesianos: aplicações em experimentos na presença de tendências lineares / Luis Gustavo Guedes Bessa Lima. -- São Carlos : UFSCar, 2007. 114 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.

1. Estatística. 2. Planejamento experimental. 3. Planejamento fatorial. 4. Método bayesiano. 5. Densidades preditivas. 6. Tendências lineares. I. Título.

CDD: 519.5 (20<sup>a</sup>)

*Agradeço,*

*à Deus pela força durante todos esses anos de estudo.*

*à minha mãe, meu pai, meu irmão e à minha família pela paciência apoio e compreensão durante todo esse processo.*

*ao professor Dr. Jorge Alberto Achcar pela orientação, pelas idéias, pelas correções em meu exame de qualificação e na minha dissertação de mestrado e principalmente pelo exemplo de dedicação e disciplina ao trabalho.*

*aos membros da banca examinadora pelas sugestões para a dissertação e pelas correções em meu exame de qualificação e na minha dissertação.*

*à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela assistência financeira.*

*à Petrobrás pelo apoio à conclusão do Mestrado.*

*à todos os professores do Departamento de Estatística da UFSCar, em especial aqueles aos quais tive o privilégio de ser aluno.*

*à todos meus colegas de pós-graduação, pela convivência, amizade e apoio durante todo o período de realização do mestrado.*

*aos meus amigos Adriano, Sabrina, Daniela, Fabíola, Daiane, Olympio e Luiz Ernesto, pelo companheirismo e por toda ajuda que recebi.*

# *Resumo*

Inicialmente apresentamos uma introdução geral sobre planejamentos de experimentos, em especial, o planejamento fatorial geral e o planejamento fatorial  $2^k$ , e alguns critérios Bayesianos na construção de planejamentos de experimentos. Na prática, usualmente o pesquisador pode ter conhecimento a priori de especialistas das quantidades a serem estimadas, a partir de um experimento. O uso de métodos Bayesianos pode levar à melhores resultados com menores custos. Vários critérios Bayesianos introduzidos na literatura são apresentados. Algumas aplicações são consideradas para ilustrar a metodologia proposta. Uma das principais aplicações na construção de um planejamento de experimentos envolve a presença de tendências lineares com o objetivo de verificar a melhor seqüência possível de ensaios, em especial o planejamento fatorial com oito ensaios.

Nesta dissertação, pretendemos introduzir alguns conceitos básicos em planejamentos de experimentos e o uso do enfoque Bayesiano que leva à experimentos com melhor eficiência e menores custos. Como objetivo principal de trabalho, vamos considerar um caso especial de grande importância nas aplicações industriais: a presença de tendências lineares. Neste caso, vamos apresentar um estudo comparativo em planejamento de experimentos clássicos e planejamento de experimentos Bayesianos.

**Palavras-chave:** Planejamentos de experimentos, planejamentos fatoriais, critérios Bayesianos, funções utilidade, densidades preditivas, tendências lineares.

# *Abstract*

We present a general introduction in the construction of experimental design, specially a general factorial design and factorial design  $2^k$  and some Bayesian criteria in the construction of experimental design. In practice, usually the researcher can have a priori knowledge of specialists for estimated quantities from an experiment. The use of Bayesian methods can take on best results with low costs. Many Bayesian criteria introduced in literature are presented. One of the main applications in the experimental design construction involve the existence of linear trends with objective of verifying the best sequence of runs, specially the factorial designs with eight runs.

In this dissertation, we introduce some basic concepts in design of experiments and the use of the Bayesian approach to have more efficient and less cost experiments. The main goal of the work, is to consider a special case of great importance in applied industrial work: the presence of linear trend. In this case, we present a comparative study in design of experiments under the classical and Bayesian approaches.

**Keywords:** Experimental design, factorial designs, Bayesian criteria, utility functions, predictive densities, linear trends.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Uma Introdução ao Planejamento de Experimentos</b>	<b>1</b>
1.1	O que é um planejamento de experimentos? . . . . .	1
1.2	Algumas Aplicações de um Planejamento de Experimentos . . . . .	4
1.3	Princípios Básicos . . . . .	6
1.4	Instruções para Experimentos Planejados . . . . .	8
1.5	Algumas Considerações Históricas . . . . .	10
1.6	O Uso de Técnicas Estatísticas em Experimentação . . . . .	11
1.7	Planejamento de Experimentos Fatoriais . . . . .	13
1.7.1	Definições Básicas e Princípios . . . . .	13
1.7.2	O Planejamento Fatorial com dois Fatores ( $2^k$ ) . . . . .	16
1.8	Métodos Práticos de Estimacão dos Efeitos em um Planejamento $2^k$ . . . . .	23
1.8.1	Um Planejamento Fatorial $2^2$ . . . . .	23
1.8.2	Planejamento Fatorial $2^k$ para $k \geq 3$ Fatores . . . . .	25
1.8.3	Blocagem e Superposicão no Planejamento $2^k$ . . . . .	29
1.8.4	Planejamento Fatorial Fracionário . . . . .	32
1.8.5	Objetivos principais da dissertacão . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Planejamentos de Experimentos Bayesianos</b>	<b>38</b>
2.1	Introducão . . . . .	38
2.2	Informacão de Shannon . . . . .	41
2.2.1	Outras Funções Utilidade Usadas em Planejamentos de Experimentos Bayesianos . . . . .	43
2.3	Uso da Densidade Preditiva em Planejamento de Experimentos Bayesianos	44
2.4	Exemplos . . . . .	46

---

2.4.1	ANOVA com uma Classificação . . . . .	46
2.4.2	Reta Passando pela Origem . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Planejamento de Experimentos na Presença de Tendências Lineares</b>	<b>50</b>
3.1	Introdução . . . . .	50
3.1.1	Planejamento $2^3$ . . . . .	51
3.1.2	Planejamento $2^{4-1}$ . . . . .	54
3.1.3	Planejamento $2^{5-2}$ . . . . .	57
3.1.4	Planejamento $2^{6-3}$ . . . . .	59
3.1.5	Planejamento $2^{7-4}$ . . . . .	60
3.1.6	Comentários Gerais . . . . .	62
3.2	Crítério Clássico . . . . .	62
3.3	Crítério Bayesiano . . . . .	74
3.4	Aplicações: Estudos de Casos . . . . .	85
3.4.1	Planejamento $2^3$ . . . . .	85
3.4.2	Planejamento $2^{4-1}$ . . . . .	87
3.4.3	Conclusões Finais . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>91</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Simulação: Tendências Lineares</b>	<b>92</b>
<b>B</b>	<b>Simulação: Estudos de Casos</b>	<b>98</b>
B.1	Planejamento $2^3$ . . . . .	98
B.2	Planejamento $2^{4-1}$ . . . . .	104

# Capítulo 1

## Uma Introdução ao Planejamento de Experimentos

### 1.1 O que é um planejamento de experimentos?

Neste capítulo, vamos apresentar algumas motivações para planejamentos de experimentos. Assim, destacamos alguns conceitos e descrições introduzidas em vários textos básicos em planejamentos de experimentos (ver por exemplo Montgomery, 1991; Box, Hunter e Hunter, 2005)

Experimentos são executados virtualmente por investigadores em todas as disciplinas científicas e campos de investigação, geralmente para analisar como sistemas e processos funcionam. Literalmente, um experimento é um teste. Um experimento planejado é um teste ou uma série de testes onde alterações são feitas nas variáveis de entrada do processo que se observe e identifique as razões para as alterações na variável de saída (resposta) (ver Montgomery, 1991)

O processo em estudo pode ser representado pelo modelo apresentado na figura 1.1. Geralmente podemos visualizar o processo como uma combinação de máquinas, métodos, pessoas, e outros recursos que transformam a entrada (material) em uma saída que tem uma ou mais respostas observadas. As variáveis do processo  $x_1, x_2, \dots, x_p$  são controláveis, enquanto que outras variáveis  $z_1, z_2, \dots, z_q$  são incontroláveis (embora possam ser controláveis para propor testes). Os objetivos de um experimento incluem os seguintes passos:

1. Determinar quais variáveis são mais influentes na variável resposta,  $y$ .
2. Determinar como fixar as variáveis influentes  $x$ 's em que  $y$  está quase próximo do valor nominal desejado.
3. Determinar como fixar as variáveis influentes  $x$ 's em que a variabilidade de  $y$  é pequena.
4. Determinar como fixar as variáveis influentes  $x$ 's em que os efeitos das variáveis incontroláveis  $z_1, z_2, \dots, z_q$  são minimizadas. Na Figura 1.1, temos um diagrama introduzido por Montgomery (1991) que ilustra o modelo geral do processo.

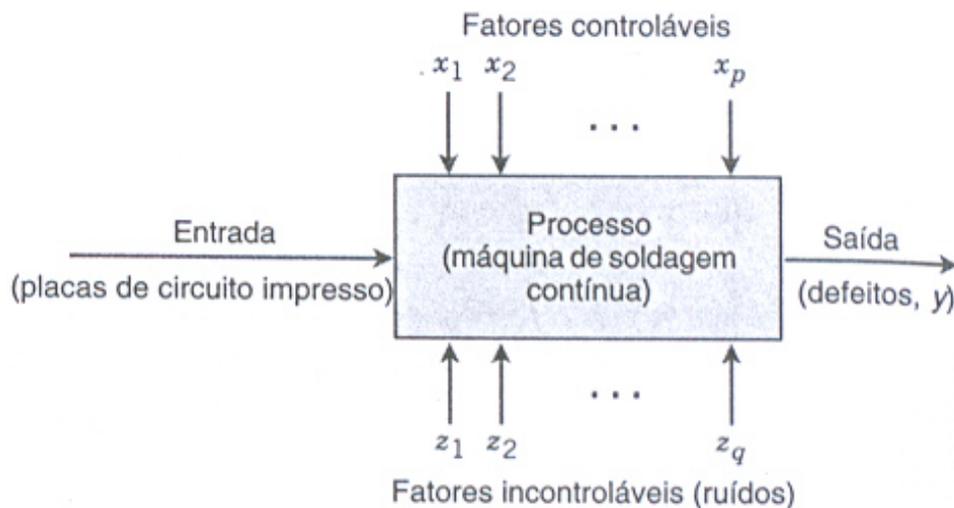


Figura 1.1: Modelo geral do processo (figura introduzida em Montgomery, 1991)

Métodos de planejamento experimental desempenham uma função importante no processo de desenvolvimento do produto e do processo para melhorar o desempenho do processo. O objetivo em muitos casos seria desenvolver um processo robusto, isto é, o processo afetado minimamente por origens externas de variabilidade (as variáveis  $z$ 's).

Como exemplo de um experimento, retirado de Montgomery (1991), suponha que um engenheiro metalúrgico está interessado em estudar o efeito de dois diferentes processos de endurecimento, repleção de óleo e repleção de água salgada, na liga de alumínio. Aqui o objetivo do experimentador é determinar a repleção da solução que produz a dureza máxima para a liga de alumínio particular. O engenheiro decide revelar o número de amostras de liga de alumínio em cada repleção média e medir a dureza das amostras após

a repleção. A dureza média das amostras tratadas em cada repleção de solução será usada para determinar qual é a melhor solução.

Como consideramos isso um experimento simples, algumas questões são formuladas:

1. As duas soluções de uma única repleção média são de interesse em potencial?
2. Existem quaisquer outros fatores que podem afetar a dureza que deveria ser investigada ou controlada neste experimento?
3. Quantas amostras de combinação de alumínio devem ser testadas em cada repleção de uma solução?
4. Como as amostras deveriam ser extraídas de uma repleção das soluções, e em que ordem os dados deveriam ser coletados?
5. Que método da análise de dados deveria ser usado?
6. Que diferença na média de dureza observada entre as duas repleções médias será considerada importante?

Todas estas questões, e talvez muitas outras, terão de ser respondidas satisfatoriamente antes de executar um experimento.

Em qualquer experimento, os resultados e conclusões que podem ser obtidas dependem em grande parte da maneira que os dados foram coletados. Para ilustrar este ponto, suponha que um engenheiro metalúrgico no experimento acima usou amostras de um aquecimento na repleção de óleo e amostras do segundo aquecimento na repleção de água salgada. Quando a dureza média é comparada, o engenheiro é incapaz de dizer quanto da diferença observada é o resultado da repleção média e quanto é o resultado de diferenças inerentes entre os aquecimentos. Portanto, o método da coleta de dados afetam as conclusões que podem ser obtidas do experimento (ver Montgomery, 1991; Box, Hunter e Hunter, 2005).

## 1.2 Algumas Aplicações de um Planejamento de Experimentos

Um planejamento de experimentos é uma ferramenta extremamente importante para engenheiros e cientistas que estejam interessados em melhorar o desempenho de um processo de fabricação. A aplicação das técnicas de um planejamento experimental em processo de desenvolvimento pode resultar em (seqüência introduzida em vários textos básicos)

1. Melhor rendimento do processo.
2. Redução na variabilidade do processo e uma melhor obediência aos requerimentos nominais ou alvos.
3. Redução nos tempos de projeto e desenvolvimento.
4. Redução nos custos de operação.

Métodos de planejamento experimental são úteis também em atividade de projeto de engenharia, em que novos produtos sejam desenvolvidos e produtos já existentes sejam melhorados. Algumas aplicações típicas de experimentos planejados estatisticamente em projeto de engenharia incluem

1. Avaliação e comparação de configurações básicas de projeto.
2. Avaliação de materiais diferentes.
3. Seleção de parâmetros de projeto de modo que o produto trabalhe bem sob uma ampla variedade de condições de campo (ou de modo que o projeto seja robusto).
4. Determinação dos parâmetros de projeto dos produtos chaves que causem impacto no desempenho do produto.

O uso do planejamento de experimentos no projeto de engenharia pode resultar em produtos que sejam mais fáceis de fabricar, em produtos que tenham melhores desempenhos no campo e melhor confiabilidade, menor custo e menor tempo de planejamento e desenvolvimento do produto. A seguir apresentamos um exemplo (introduzido em Montgomery, 1991)

### **Exemplo 1.1: Um Experimento de Caracterização de um Processo**

Um time de engenheiros de desenvolvimento de projetos está trabalhando em um novo processo de soldagem de componentes eletrônicos em placas de circuitos impressos.

Uma máquina de soldagem contínua preaquece as placas de circuito impresso, colocando-as então em contato com uma onda do líquido de soldagem. Essa máquina faz todas as conexões elétricas e a maioria das conexões mecânicas dos componentes na placa de circuito impresso.

O processo de soldagem atualmente faz operações com aproximadamente 1% de defeitos, isto é, a probabilidade do processo ser defeituoso é de 1%. Defeitos de soldagem requerem retoque ou retrabalho, que adiciona custo, danificando geralmente as placas. De qualquer forma, uma placa de circuito impresso contém, em média, 2000 juntas de soldagem, até 1% do nível defeituoso resulta que várias juntas de soldagem requerem retrabalho. O time responsável pelo processo nesta área gostaria de usar um planejamento experimental para determinar quais parâmetros da máquina são influentes na ocorrência de defeitos de soldagem e quais ajustes deveriam ser feitos nessas variáveis para reduzir os defeitos de soldagem.

A máquina de soldagem contínua tem várias variáveis que podem ser controladas. Eles incluem:

1. Temperatura de soldagem
2. Temperatura de preaquecimento
3. Velocidade da esteira
4. Tipo de fluxo
5. Densidade do fluxo
6. Profundidade da onda de soldagem
7. Ângulo da esteira

Em adição a esses fatores controláveis, há vários outros fatores que não podem ser facilmente controláveis, uma vez que a máquina entra em uma rotina de fabricação, incluindo

1. Espessura da placa de circuito impresso
2. Tipos de componentes usados na placa
3. Disposição dos componentes na placa
4. Operador
5. Fatores ambientais
6. Taxa de produção

Nesta situação, o engenheiro está interessado em caracterizar a máquina de soldagem contínua; ou seja, ele está interessado em determinar quais fatores (tanto as variáveis controláveis quanto as incontroláveis) afetam a ocorrência de defeitos nas placas de circuitos impressos. Para executá-lo, ele pode planejar um experimento que o capacitará a estimar a magnitude e a direção dos efeitos dos fatores; isto é, quanto a variável resposta (defeitos por unidade) altera quando cada fator é alterado. Algumas vezes, chamamos tal experimento de experimento de seleção (screening experiment).

A informação deste estudo de caracterização ou experimento de seleção pode ajudar a determinar as variáveis críticas do processo, assim como a direção do ajuste para esses fatores, de modo a reduzir o número de defeitos por unidade. Este experimento pode ajudar na determinação de quais variáveis de processo devem ser cuidadosamente controladas durante a fabricação, a fim de prevenir altos níveis de defeitos e desempenho errático de processo. Portanto, um resultado do experimento poderia ser uma aplicação de técnicas como os gráficos de controle de qualidade para uma ou mais variáveis do processo (como a temperatura da soldagem), mais os gráficos de controle na saída do processo.

### 1.3 Princípios Básicos

Se um experimento como o descrito no exemplo 1.1 for executado de maneira eficiente, então a aplicação científica de planejamento de experimentos deve ser empregada. Por planejamento estatístico de experimentos, referimos ao processo de planejar um experimento com os dados apropriados que pode ser analisado por métodos estatísticos, resultando em conclusões válidas e objetivas. A aplicação estatística para planejamento de experimentos é necessária se desejarmos tirar conclusões significativas dos dados. Portanto, existem dois aspectos para qualquer problema experimental: o planejamento de experimentos e a análise estatística dos dados. Esses dois assuntos são intimamente relacionados desde que o método de análise dependa diretamente do planejamento empregado.

Os três princípios básicos do planejamento experimental são: replicação, aleatorização e blocagem. Por replicação, definimos a repetição do experimento básico. No experimento metalúrgico discutido na seção 1.1, a replicação consistiria em tratar uma amostra de repleção de óleo e uma de repleção de água salgada. Portanto, se 5 amostras

são tratadas em cada repleção média, dizemos que cinco réplicas foram obtidas. A replicação tem duas propriedades importantes. Primeiro, permite ao experimentador obter uma estimativa do erro experimental. Esta estimativa do erro torna a unidade básica de medida para determinar se diferenças observadas nos dados são estatisticamente diferentes. Segundo, se a média amostral  $\bar{y}$  costuma estimar o efeito do fator em um experimento, então a replicação permite que o experimentador obtenha a estimativa mais precisa deste efeito. Por exemplo, se  $\sigma^2$  é a variância dos dados, e há  $n$  réplicas, então a variância da média amostral é dada por  $\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ .

A implicação prática é que, se tivéssemos  $n = 1$  réplica e observássemos  $y_1 = 145$  (repleção de óleo) e  $y_2 = 147$  (repleção de água salgada), provavelmente seríamos incapazes de fazer inferências satisfatórias sobre o efeito da repleção média, isto é, a diferença observada poderia ser o resultado do erro experimental. Por outro lado, se  $n$  fosse suficientemente grande, e o erro experimental for suficientemente pequeno, então se observarmos  $\bar{y}_1 < \bar{y}_2$ , estaríamos razoavelmente seguros em concluir que a repleção de água salgada produz uma dureza maior na liga de alumínio que a repleção de óleo.

A aleatorização é um ponto chave do uso de métodos estatísticos em planejamento de experimentos. Por aleatorização, definimos que em ambos os problemas a alocação da importância experimental e a ordem em que ensaios individuais ou tentativas de experimento são executadas e determinadas aleatoriamente. Métodos estatísticos requerem que as observações (ou erros) sejam variáveis aleatórias independentemente distribuídas. A aleatorização pode ser de grande valia para um experimento. Por exemplo, suponha que as amostras do experimento acima estejam com espessuras levemente diferentes e que a efetividade da repleção média pode ser afetada pela espessura da amostra. Se todas as amostras tiradas da repleção de óleo são mais espessas do que as amostras tiradas da repleção de água salgada, então podemos estar limitando uma repleção média acima das outras. Determinando aleatoriamente as amostras da repleção média acarretaria na suavização deste problema.

A blocagem é uma técnica utilizada para aumentar a precisão de um experimento. O bloco é a porção de um material experimental que deve ser mais homogêneo do que a outra parte do material. A blocagem envolve fazer comparações entre as condições de interesse no experimento entre cada bloco.

Esses princípios básicos de planejamento experimental são extremamente importantes de todo experimento (ver Montgomery, 1991).

## 1.4 Instruções para Experimentos Planejados

A seguir, introduzimos um roteiro para planejar um experimento existente em vários textos (ver Montgomery, 1991).

Para utilizar aplicações estatísticas ao planejar e analisar um experimento, é necessário que todos os que estão envolvidos em um experimento tenham uma idéia clara no avanço em que vai ser estudado, como os dados estão sendo coletados, e por último, o entendimento qualitativo de como esses dados estão sendo analisados. Os procedimentos recomendados seguem da seguinte forma:

### 1. Reconhecimento e afirmação do problema.

Pode parecer um ponto bastante óbvio, mas na prática, muitas vezes não é simples realizar aquilo que o problema exija que exista experimentação, nem desenvolver uma afirmativa claramente aceita do problema. É necessário desenvolver todas as idéias sobre os objetivos do experimento. Geralmente, é importante solicitar uma entrada de todas as áreas de interesse: engenharia, garantia de qualidade, manufatura, marketing, gerenciamento, o cliente e a equipe de operadores. A afirmação clara do problema contribui substancialmente para o melhor entendimento do fenômeno e a solução final do problema.

### 2. Escolha de fatores e níveis

O experimentador deve escolher os fatores a serem variados no experimento, as amplitudes que esses fatores serão variados, e os níveis específicos a serem usados e que serão feitos. Devemos também idealizar como esses fatores estão sendo controlados em valores desejados e como eles são medidos. Por exemplo, no experimento de soldagem (exemplo 1.1), o engenheiro define 12 variáveis que podem afetar a ocorrência de defeitos. O engenheiro terá também que decidir uma região de interesse para cada variável e quantos níveis de cada variável a serem usados. O experimento requer conhecimento do problema, que normalmente é a combinação da experiência prática com o entendimento teórico. É importante investigar todos os fatores que podem ser importantes, e não depender da experiência anterior;

### 3. Seleção de uma variável resposta

Selecionando a variável resposta, o experimentador deveria ter certeza de que esta variável realmente fornece informação útil sobre o processo em estudo. A média ou o desvio padrão (ou ambos) da característica medida será a variável resposta. Múltiplas respostas não são comuns. A medida de capacidade (ou erro de medida) também é um fator importante. Se a capacidade é baixa, então somente os grandes efeitos do fator serão detectados pelo experimento ou a réplica adicional será exigida.

### 4. Escolha do planejamento experimental

Se os três primeiros passos são feitos corretamente, este passo é relativamente fácil. a escolha do planejamento envolve a consideração do tamanho da amostra (número de réplicas), a seleção de uma boa ordem de seqüências para tentativas experimentais, e a determinação se a blocagem ou não ou uma outras restrições aleatórias estão envolvidas. Na seleção de um planejamento, é importante manter os objetivos experimentais. Em vários experimentos de engenharia, já conhecemos esses objetivos.

### 5. Execução de um experimento

Quando executamos um experimento, é crucial monitorar o processo cuidadosamente para garantir que tudo está sendo feito de acordo com o planejamento. Erros em procedimento experimental nesta etapa destruirá a validade experimental. Isso é fácil para subestimar os aspectos logísticos e de planejamento de execução do experimento planejado na manufatura complexa ou na pesquisa e desenvolvimento ambiental.

### 6. Análise de dados

Métodos estatísticos deveriam ser usados para analisar os dados em que resultados e conclusões são tão objetivos quanto o julgamento. Se o experimento é planejado corretamente e executado de acordo com o planejamento, então os métodos estatísticos exigidos são simples. Existem muitos pacotes estatísticos feitos para análises de dados, e métodos gráficos simplificados representam uma função importante na interpretação de dados. Análises de resíduos e verificação da adequabilidade do modelo também são etapas importantes na análise dos dados.

Os métodos estatísticos não podem provar que um ou mais fatores tenham um efeito particular. Fornecem somente instruções sobre a confiabilidade e a validade dos resultados. Aplicada de maneira adequada, os métodos estatísticos não permitem que

nada seja provado, mas nos permitem medir o provável erro na conclusão ou supor um nível de confiança para uma afirmação. A primeira vantagem dos métodos estatísticos é que adicionam objetividade para o processo de decisão. Técnicas estatísticas emparelhadas com bom conhecimento do processo e senso comum são conduzidos a verificar hipóteses.

## 7. Conclusões e recomendações

Uma vez que os dados são analisados, o experimentador deve tirar conclusões práticas sobre os resultados e recomendar o desenvolvimento. Métodos gráficos são bastante úteis neste estágio, particularmente na apresentação de outros resultados. Simulações e confirmação de testes deveriam também ser executados para validar as conclusões do experimento.

Durante este processo completo, é importante lembrar que a experimentação é uma parte importante do processo de aprendizagem, em que formulamos hipóteses sobre o sistema, realizar experimentos para investigar estas hipóteses, e baseado nos resultados formular novas hipóteses, e entre outros. Isto sugere que a experimentação é iterativa. Normalmente é o maior erro ao planejar um experimento único, grande e compreensivo no início de um estudo. Um experimento bem-sucedido requer o conhecimento de fatores importantes, de amplitudes que esses fatores deveriam ser variados, o número apropriado de níveis a ser usado e as unidades de medida precisas para essas variáveis. Geralmente, não sabemos exatamente as respostas para estas perguntas, mas aprendemos sobre como conduzimos as respostas. Como um progresso do programa experimental, excluimos freqüentemente variáveis estranhas, adicionamos outras variáveis, mudamos a região de exploração para alguns fatores, ou acrescentamos novas variáveis respostas. Conseqüentemente, experimentamos seqüencialmente, e como regra geral, não mais de 25% de recursos disponíveis deveriam ser investidos no primeiro experimento. Isto irá garantir que recursos suficientes estão disponíveis para realizar a confirmação de ensaios e alcançar o objetivo final do experimento.

## 1.5 Algumas Considerações Históricas

Sir. Ronald A. Fisher foi o inovador no uso de métodos estatísticos no planejamento experimental. Por vários anos foi responsável por estatísticas e análise de dados

no Centro de Experimentos em Agricultura em Londres. Fisher desenvolveu e utilizou primeiramente a análise de variância como método primário de análise estatística em planejamento experimental. Em 1933, Fisher assumiu o cargo de professor na Universidade de Londres. Mais tarde, tornou-se um dos professores da Universidade de Cambridge e assumiu cargos de professor visitante em várias universidades mundo afora. Para mais detalhes sobre a biografia de Fisher, ver J. F. Box (1978). Enquanto Fisher foi pioneiro, tem existido muitas outros contribuidores significantes para a literatura de planejamento experimental, incluindo F. Yates, R. C. Bose, O. Kempthorne, W. G. Cochran, e G. E. P. Box.

Muitas das primeiras aplicações dos métodos de planejamento de experimentos foram nas áreas de agricultura e ciências biológicas, e como resultado, muito da terminologia do campo é derivada desta tradição. As primeiras aplicações em planejamento experimental na indústria começaram a aparecer na década de 30, inicialmente na indústria têxtil britânica. Após a Segunda Guerra Mundial, os métodos de planejamento experimental foram introduzidos em indústrias químicas nos Estados Unidos e na Europa Ocidental. Estes grupos industriais utilizam áreas muito férteis para o uso do planejamento experimental no desenvolvimento do produto e do processo. A indústria de semicondutores e componentes eletrônicos utiliza métodos de planejamento de experimentos por vários anos com muito sucesso.

Em anos recentes, tem existido interesse na retomada do planejamento experimental nos Estados Unidos porque várias indústrias descobriram que seus concorrentes usavam planejamento de experimentos por muitos anos e que tinha sido um fator importante no sucesso competitivo.

## 1.6 O Uso de Técnicas Estatísticas em Experimentação

Muito da pesquisa em engenharia, ciência e em indústria é empírica e faz uso extensivo em experimentação. Métodos estatísticos podem aumentar a eficiência desses experimentos e fortalecer conclusões então obtidas. O uso inteligente de técnicas estatísticas em experimentação requer que o experimentador mantenha os seguintes pontos em

mente (ver Montgomery, 1991; Box, Hunter e Hunter, 2005):

### **1. Utilizar conhecimentos não-estatísticos para o problema**

Experimentadores são altamente conhecidos em suas áreas. Por exemplo, o engenheiro civil que trabalha em um problema de hidrologia normalmente tem uma experiência consideravelmente prática e um treinamento acadêmico formal nesta área. Em alguns campos há um grande corpo da teoria física em que explica as relações entre fatores e respostas. Este tipo de conhecimento não-estatístico é válido na escolha de fatores, determinação dos níveis de um fator, decisão de quantas replicações corridas, interpretação dos resultados das análises, entre outros.

### **2. Manter o planejamento e a análise o mais simples possível**

Não utilizar técnicas estatísticas complexas e sofisticadas. Relativamente, métodos simples de planejamento e análise são quase sempre melhores. Isso é um bom sinal para reenfatizar o passo 4 do procedimento da Seção 1.4. Se fizer o planejamento corretamente, as análises quase sempre estarão no caminho certo. De qualquer forma, se realizar um planejamento mal feito, é improvável que a maioria das estatísticas complexas podem amenizar a situação.

### **3. Reconhecer a diferença entre as significâncias prática e estatística**

Mostra que somente duas condições experimentais produzem respostas médias que são estatisticamente diferentes, não há garantia de que esta diferença é suficientemente grande para ter qualquer valor prático. Por exemplo, um engenheiro pode determinar que a modificação do sistema de injeção de combustível do automóvel pode produzir a melhoria da média na milhagem da gasolina de 0.1 mi/gal. Isto é um resultado estatisticamente significativo. De qualquer forma, se o custo da modificação é de U\$1000, então a diferença de 0.1 mi/gal é tão pequena para ser de qualquer valor prático.

### **4. Experimentos são iterativos**

Em várias situações, não é inteligente planejar muito compreensivamente um experimento em começo de estudo. Um planejamento bem sucedido requer um conhecimento de fatores importantes, as amplitudes sobre os fatores a serem variados, o número apropriado de níveis para cada fator, e as unidades de medida adequadas para cada fator e para a resposta. Geralmente, não estamos bem equipados para responder as questões no começo de um experimento, mas aprendemos as respostas como se cooperássemos. Os

argumentos favoráveis à aplicação iterativa ou seqüencial foram discutidas anteriormente, pois existem situações em que experimentos compreensivos são apropriados, mas, como regra geral, a maioria dos experimentos deveriam ser iterativos. Consequentemente, não deveríamos investir mais do que 25% dos recursos da experimentação (tempo, orçamento, etc...) no planejamento inicial. Geralmente, os primeiros esforços acompanham somente as experiências em estudo, e os recursos devem estar disponíveis para executar os objetivos finais do experimento.

## 1.7 Planejamento de Experimentos Fatoriais

### 1.7.1 Definições Básicas e Princípios

Muitos experimentos envolvem o estudo dos efeitos de dois ou mais fatores. Geralmente, planejamentos fatoriais são muito eficientes para este tipo de experimento. Define-se um planejamento fatorial quando, em cada tentativa completa ou réplica do experimento, todas as combinações possíveis dos níveis dos fatores são investigadas. Por exemplo, se houver dois fatores A e B com  $a$  níveis do fator A e  $b$  níveis do fator B, então cada réplica conterà todas as  $ab$  combinações de tratamentos. Quando os fatores são arranjados em um planejamento fatorial, eles estão freqüentemente sendo cruzados.

O efeito do fator é definido por ser a mudança na resposta produzida pela alteração no nível do fator. Isto é freqüentemente chamado de efeito principal porque se refere aos fatores primários de interesse no experimento. Por exemplo, considere os dados da Tabela 1.1. O efeito principal do fator A poderia ser considerado como a diferença entre a resposta média no primeiro nível de A e a resposta média do segundo nível de A.

		Fator B	
		$B_1$	$B_2$
Fator A	$A_1$	20	30
	$A_2$	40	52

Tabela 1.1: Um experimento fatorial sem interação

Numericamente, esse efeito é definido da seguinte forma:  $A = \frac{40 + 52}{2} - \frac{20 + 30}{2} =$

Isto é, aumentando o fator A do nível 1 para o nível 2, leva à resposta média aumentada em 21 unidades. Similarmente, o efeito principal de B é dado por:  $B = \frac{30 + 52}{2} - \frac{20 + 40}{2} = 11$ .

Se os fatores tiverem mais de dois níveis, o procedimento acima deve ser modificado desde que hajam muitas maneiras de expressar as diferenças entre as respostas médias. Este tópico será discutido em breve.

		Fator B	
		$B_1$	$B_2$
Fator A	$A_1$	20	40
	$A_2$	50	12

Tabela 1.2: Um experimento fatorial com interação

Em alguns experimentos, a diferença na resposta entre os níveis de um fator não é a mesma em todos os níveis dos outros fatores. Quando isto ocorre, há uma interação entre os fatores.. Por exemplo, considere os dados da Tabela 1.2. No nível baixo do fator B, o efeito de A é dado por:  $A = 50 - 20 = 30$ ; e no nível alto do fator B, o efeito de A é dado por:  $A = 12 - 40 = -28$ . Uma vez que o efeito de A depende do nível escolhido para o fator B, há interação entre A e B.

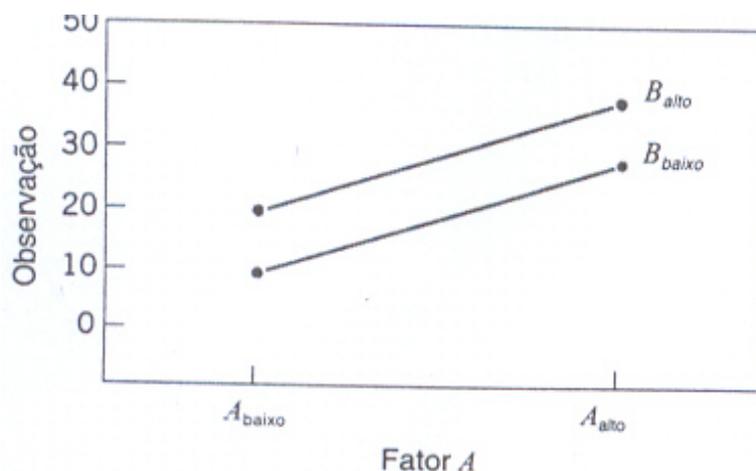


Figura 1.2: Um experimento fatorial sem interação

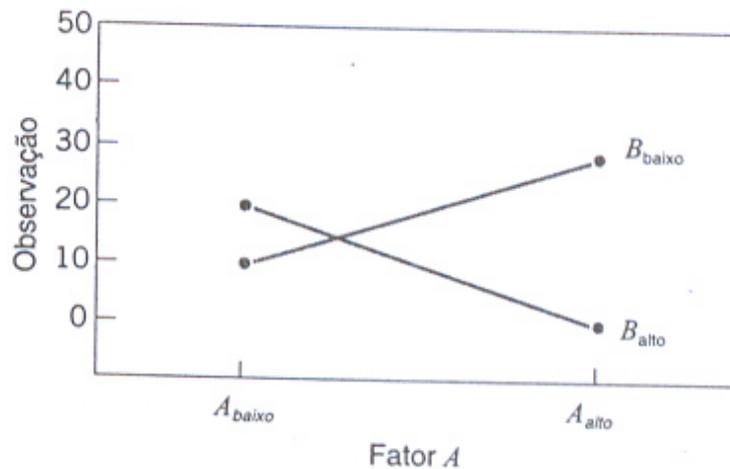


Figura 1.3: Um experimento fatorial com interação

O conceito de interação pode ser ilustrado graficamente de várias formas. Na Figura 1.3 temos o gráfico dos dados da Tabela 1.1 contra os níveis de A para ambos os níveis de B. Note que as linhas  $B_1$  e  $B_2$  são aproximadamente paralelas, indicando que não há interação entre os fatores A e B. Similarmente, a Figura 1.3 plota os dados da Tabela 1.2. Aqui, vemos que as linhas  $B_1$  e  $B_2$  não são paralelas, indicando a interação entre os fatores A e B. Tais gráficos são chamados de gráficos de interação entre dois fatores, pois estes são freqüentemente úteis na interpretação de interações significantes e na apresentação de resultados para o gerenciamento treinado.

Note que, quando a interação é grande, os efeitos principais correspondentes tem uma significado pouco prático. Para os dados da Tabela 1.2, estimaríamos o efeito principal do fator A dado por:  $A = \frac{50 + 12}{2} - \frac{20 + 40}{2} = 1$ , que é muito pequeno, portanto, concluímos que o efeito principal do fator A não é significativo. De qualquer modo, quando examinamos os efeitos do fator A em diferentes níveis do fator B, vimos que este não é o caso. O fator A tem um efeito, mas depende do nível do fator B. Isto é, o conhecimento da interação AB é mais útil que o conhecimento do efeito principal. A interação significativa mascarará a significância dos efeitos principais, indicado pelos dados da Tabela 1.2. Na presença de interação significativa, o experimentador deve sempre examinar os níveis de um fator, digamos o fator A, com os níveis de outros fatores fixados para tirar conclusões sobre o efeito principal de A.

### 1.7.2 O Planejamento Fatorial com dois Fatores ( $2^k$ )

A seguir introduzimos um exemplo (ver Montgomery, 1991)

#### Exemplo 1.3

O tipo mais simples do planejamento fatorial envolve somente dois fatores, como por exemplo, A e B. Supor  $a$  níveis do fator A e  $b$  níveis do fator B, combinados em um planejamento fatorial. O experimento tem  $n$  réplicas e cada réplica contém todas as  $ab$  combinações de tratamentos.

Como exemplo de um planejamento fatorial envolvendo dois fatores, um engenheiro está desenvolvendo uma bateria para o uso em um dispositivo que estará sujeito a algumas variações extremas na temperatura. O único parâmetro do planejamento que ele pode selecionar neste ponto é o material prateado para a bateria, e ele tem três opções possíveis. Quando o dispositivo é manufaturado e lançado para o campo, o engenheiro não tem controle das temperaturas extremas que o dispositivo encontrará e está ciente que a temperatura provavelmente comprimirá a vida da bateria efetiva. De qualquer modo, a temperatura pode ser controlada no desenvolvimento do produto em laboratório para propor um teste.

O engenheiro decide testar os três materiais prateados a três níveis de temperatura: 15°F, 70°F e 125°F; como esses níveis de temperatura são consistentes com o uso do produto para fins ambientais. Quatro baterias são testadas em cada combinação de material de prata e temperatura, e todas os 36 testes são corridos em ordem aleatória. O experimento e os dados observados da vida resultante da bateria são dados na Tabela 1.4.

Tipo de material	Temperatura (°F)					
	15		70		125	
1	130	155	34	40	20	70
	74	180	80	75	82	58
2	150	188	126	122	25	70
	159	126	106	115	58	45
3	138	110	174	120	96	104
	168	160	150	139	82	60

Tabela 1.3: Dados do Tempo de vida (em horas) da bateria

Neste problema o engenheiro quer responder as seguintes questões:

1. Que efeitos do tipo de material e da temperatura influenciam na vida de uma bateria?
2. Existe uma escolha de material que daria vida uniformemente longa sem levar em consideração a temperatura?

Esta última questão é particularmente importante. Poderia ser possível encontrar um material alternativo que não seja muito afetado pela temperatura. Então, o engenheiro pode fazer uma bateria robusta para a variação da temperatura no campo. Este é um exemplo do uso de planejamento experimental estatístico para o desenvolvimento de um produto robusto, um problema muito importante na engenharia.

Este planejamento é um exemplo específico do caso geral do experimento fatorial com dois fatores. Passando para o caso geral, seja  $y_{ijk}$  a resposta observada do  $i$ -ésimo nível do fator A ( $i = 1, 2, \dots, a$ ) e do  $j$ -ésimo nível do fator B ( $j = 1, 2, \dots, b$ ) para a  $k$ -ésima réplica ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Geralmente os dados observados aparecerão na Tabela 1.5. As  $abn$  observações são corridas em uma ordem aleatória, portanto, o fatorial com dois fatores é um planejamento completamente aleatorizado.

		Fator B			
		1	2	...	b
Fator A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12n}$	...	$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{22n}$	...	$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots, y_{2bn}$
	:	:	:	:	:
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$	...	$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abn}$

Tabela 1.4: Arranjo dos dados para um Planejamento Fatorial com Dois Fatores

As observações podem ser descritas pelo modelo estatístico linear dado por,

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, b \\ k = 1, \dots, n \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde  $\mu$  é o efeito médio global,  $\tau_i$  é o efeito de  $i$ -ésimo nível do fator A,  $\beta_j$  é o efeito do  $j$ -ésimo nível do fator B,  $(\tau\beta)_{ij}$  é o efeito da interação entre os fatores A e B e  $\varepsilon_{ijk}$  é um componente do erro aleatório, tendo uma distribuição normal, com média zero e variância

$\sigma^2$ . Ambos os fatores são inicialmente assumidos como fixos, e os efeitos de tratamento são definidos como desvios da média global, então  $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$  e  $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$ . Ao mesmo tempo, os efeitos de interação são fixos e são definidos que  $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij} = 0$ . Se houver  $n$  réplicas do experimento, então existem  $abn$  observações no total.

No planejamento fatorial com dois fatores, com os fatores linha e coluna (ou tratamentos), A e B, são de interesse de igualdade. Especificamente, estamos interessados em testar hipóteses sobre os efeitos principais dos fatores A e B e a interação AB.

As hipóteses que testaremos são dadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 H_o &: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0 & (1.2) \\
 H_1 &: \text{pelo menos um } \tau_i \neq 0 \\
 H_o &: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0 \\
 H_1 &: \text{pelo menos um } \beta_j \neq 0 \\
 H_o &: (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = \dots = (\tau\beta)_{ab} = 0 \\
 H_1 &: \text{pelo menos um } (\tau\beta)_{ij} \neq 0
 \end{aligned}$$

Discutiremos agora como essas hipóteses são testadas usando a análise de variância com dois fatores.

### Análise Estatística do Modelo de Efeitos Fixos

Sejam  $y_{i..}$  as representações do total de todas as observações do  $i$ -ésimo nível do fator A,  $y_{.j}$  as representações do total de todas as observações do  $j$ -ésimo nível do fator B,  $y_{ij}$  as representações do total de todas as observações na  $ij$ -ésima célula e  $y_{...}$  as representações do total global de todas as observações. Definimos  $\bar{y}_{i..}$ ,  $\bar{y}_{.j}$ ,  $\bar{y}_{ij}$ ,  $\bar{y}_{...}$  como as médias correspondentes às linhas, às colunas, às células e à média global. Isto é,

$$\begin{aligned}
y_{i..} &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{i..} &= \frac{y_{i..}}{bn} & i &= 1, 2, \dots, a \\
y_{.j.} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{.j.} &= \frac{y_{.j.}}{an} & j &= 1, 2, \dots, b \\
y_{ij.} &= \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{ij.} &= \frac{y_{ij.}}{n} & i &= 1, 2, \dots, a & j &= 1, 2, \dots, b \\
y_{...} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{...} &= \frac{y_{...}}{abn}
\end{aligned}$$

A soma quadrática total pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n [(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) \\
&\quad + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 \\
&= bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
&\quad + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \\
&\quad + 6 \text{ termos de produtos cruzados}
\end{aligned}$$

No entanto, todos os termos dos produtos cruzados são zero. A soma quadrática total é particionada em uma soma quadrática devido às "linhas" do fator A ( $SQ_A$ ), em uma soma quadrática devido às "colunas" do fator B ( $SQ_B$ ), em uma soma quadrática devido à interação entre os fatores A e B ( $SQ_{AB}$ ) e em uma soma quadrática devido ao erro ( $SQ_E$ ).

Podemos escrever a Equação 1.1 simbolicamente como

$$SQ_T = SQ_A + SQ_B + SQ_{AB} + SQ_E. \quad (1.3)$$

O número de graus de liberdade associados a cada soma de quadrados é dada por:

Efeito	Graus de Liberdade
A	$a - 1$
B	$b - 1$
AB	$(a - 1)(b - 1)$
Erro	$ab(n - 1)$
Total	$abn - 1$

Há um total de  $abn - 1$  graus de liberdade. Os efeitos principais dos fatores A e B, com  $a$  e  $b$  níveis, respectivamente, têm  $(a - 1)$  e  $(b - 1)$  graus de liberdade, enquanto o efeito de interação AB tem  $(a - 1)(b - 1)$  graus de liberdade. Os graus de liberdade da interação AB são simples pelos cálculos do número de graus de liberdade:  $ab - 1 - (a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$ . Dentro de cada uma das células  $ab$ , há  $n - 1$  graus de liberdade entre as  $n$  réplicas, portanto, há  $ab(n - 1)$  graus de liberdade para o erro. Note que o número dos graus de liberdade no lado direito da Equação 1.3 é a soma do número total dos graus de liberdade.

Cada soma quadrática dividida pelo seu respectivo grau de liberdade é chamada de média quadrática. Considerando que os fatores A e B sejam fixos, os valores esperados das médias quadráticas são:

$$\begin{aligned}
 E(MQ_A) &= E\left(\frac{SQ_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a-1} \\
 E(MQ_B) &= E\left(\frac{SQ_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1} \\
 E(MQ_{AB}) &= E\left(\frac{SQ_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} \\
 E(MQ_E) &= E\left(\frac{SQ_E}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Note que se as hipóteses nulas de nenhum efeito principal para o fator A, nenhum efeito principal para o fator B e nenhuma interação para o fator AB são verdadeiras,

então  $MQ_A$ ,  $MQ_B$ ,  $MQ_{AB}$  e  $MQ_E$  são todas as estimativas não tendenciosas de  $\sigma^2$ . Entretanto, se houver efeito principal para os fatores A e B ou presença de interação, então as médias quadráticas são maiores que  $MQ_E$ . Então, para testar a significância de ambos os efeitos principais e a interação, basta dividir a média quadrática correspondente pela média quadrática do erro. Valores grande desta razão implica na rejeição da hipótese nula.

Se assumirmos que o modelo proposto na Equação 1.1 é adequado e que os termos do erro  $\varepsilon_{ijk}$  são normais e independentemente distribuídas com variância constante  $\sigma^2$ , então cada uma das razões  $MQ_A/MQ_E$ ,  $MQ_B/MQ_E$  e  $MQ_{AB}/MQ_E$  têm distribuição F com  $a - 1$ ,  $b - 1$  e  $(a - 1)(b - 1)$  graus de liberdade no numerador, respectivamente, e  $ab(n - 1)$  graus de liberdade no denominador, e a região crítica estaria na cauda superior da distribuição de F. O procedimento do teste é sumarizado na tabela ANOVA, mostrada na Tabela 1.6.

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Média Quadrática	$F_o$
A tratamentos	$SQ_A$	$a - 1$	$MQ_A = \frac{SQ_A}{a - 1}$	$F_o = \frac{MQ_A}{MQ_E}$
B tratamentos	$SQ_B$	$b - 1$	$MQ_B = \frac{SQ_B}{b - 1}$	$F_o = \frac{MQ_B}{MQ_E}$
Interação	$SQ_{AB}$	$(a - 1)(b - 1)$	$MQ_{AB} = \frac{SQ_{AB}}{(a - 1)(b - 1)}$	$F_o = \frac{MQ_{AB}}{MQ_E}$
Erro	$SQ_E$	$ab(n - 1)$	$MQ_E = \frac{SQ_E}{ab(n - 1)}$	
Total	$SQ_T$	$abn - 1$		

Tabela 1.5: Tabela ANOVA para um Fatorial com Dois Fatores, Modelo de Efeitos Fixos

Fórmulas computacionais para as somas quadráticas na Equação 1.3 podem ser facilmente obtidas. A soma quadrática total é computada por:

$$SQ_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (1.5)$$

A soma de quadrados para os efeitos principais são:

$$\begin{aligned}
 SQ_A &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
 SQ_B &= \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

É conveniente obter  $SQ_{AB}$  em dois estágios. Primeiro, computamos a soma quadrática entre as  $ab$  células totais, que é chamada de soma quadrática dos "subtotais":

$$SQ_{Subtotais} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn}
 \tag{1.7}$$

Esta soma quadrática contém  $SQ_A$  e  $SQ_B$ . Então, o segundo passo é computar  $SQ_{AB}$  como

$$SQ_{AB} = SQ_{Subtotais} - SQ_A - SQ_B
 \tag{1.8}$$

Podemos computar  $SQ_E$  pela subtração como

$$SQ_E = SQ_T - SQ_{AB} - SQ_A - SQ_B,
 \tag{1.9}$$

ou

$$SQ_E = SQ_T - SQ_{Subtotais}.$$

### Verificação da Adequabilidade do Modelo

Nos planejamentos de experimentos utilizando dois ou mais fatores, os resíduos de um planejamento fatorial desempenham um papel importante na verificação da adequabilidade de um modelo. Portanto, os resíduos de um fatorial com dois fatores são

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij}.
 \tag{1.10}$$

Ou seja, os resíduos são somente a diferença entre as observações e as médias correspondentes.

## 1.8 Métodos Práticos de Estimação dos Efeitos em um Planejamento $2^k$

### 1.8.1 Um Planejamento Fatorial $2^2$

O tipo mais simples de um planejamento fatorial  $2^k$  é o planejamento  $2^2$ , com dois fatores A e B, que possui 4 ensaios ou combinações de tratamentos. Geometricamente, o planejamento é representado por um quadrado com 4 combinações de tratamento, formando os vértices do quadrado. Neste planejamento, é normal a representação dos níveis baixo e alto dos fatores A e B pelos sinais - e +, respectivamente. Isso é chamado de notação geométrica para o planejamento.

Os efeitos de interesse no planejamento  $2^2$  são os efeitos principais A e B e a interação de segunda ordem AB. Nesse caso, os efeitos principais podem ser facilmente estimados, e que as letras minúsculas (1), a, b e ab representam os totais de todas as  $n$  observações tomadas nas 4 combinações de tratamentos no planejamento. Isso fornece:

$$\begin{aligned} A &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{a + ab - b - (1)}{2n} \\ B &= \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{b + ab - a - (1)}{2n} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Com base na tabela de sinais abaixo, a interação AB é dada por:

$$AB = \frac{ab + (1) - a - b}{2n} \quad (1.12)$$

No caso de uma réplica única ( $n = 1$ ), os efeitos A e B e a interação AB são dados por:

$$\begin{aligned} A &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{a + ab - b - (1)}{2} \\ B &= \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{b + ab - a - (1)}{2} \\ AB &= \frac{ab + (1) - a - b}{2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Uma tabela de sinais + ou - pode ser desenvolvida a partir dos contrastes. Os sinais para os efeitos principais são determinados pela associação.

Combinações de tratamentos	Efeito fatorial			
	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
<i>a</i>	+	+	-	-
<i>b</i>	+	-	+	-
<i>ab</i>	+	+	+	+

Tabela 1.6: Sinais para o Planejamento fatorial  $2^2$

Essas quantidades que se encontram no numerador das equações acima são chamadas contrastes. Por exemplo, o contraste A é

$$\text{Contraste}_A = a + ab - b - (1) \quad (1.14)$$

Nessas equações, os coeficientes dos contrastes são sempre +1 ou -1. A Tabela 1.7 pode ser usada para determinar o sinal de cada combinação de tratamento para um contraste particular. Os nomes das colunas para a Tabela 1.7 são os efeitos principais A e B, a interação AB e I, que representa o total. Os nomes nas linhas são combinações dos tratamentos. Note que os sinais na coluna AB são o produto de sinais das colunas A e B. Para gerar o contraste a partir dessa tabela, multiplicar os sinais na coluna apropriada da Tabela 1.7 pelas combinações dos tratamentos listadas nas linhas e adicionar.

Os contrastes são usados no cálculo das estimativas dos efeitos e nas somas quadráticas para A, B e interação AB. As fórmulas das somas quadráticas são

$$\begin{aligned} SQ_A &= \frac{[a + ab - b - (1)]^2}{4n} \\ SQ_B &= \frac{[b + ab - a - (1)]^2}{4n} \\ SQ_{AB} &= \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n} \end{aligned} \quad (1.15)$$

### 1.8.2 Planejamento Fatorial $2^k$ para $k \geq 3$ Fatores

Os métodos para planejamentos fatoriais com  $k = 2$  fatores, cada um com dois níveis, pode ser estendidos para mais de dois fatores. Por exemplo, considere  $k = 3$  fatores, cada um com dois níveis. O planejamento fatorial  $2^3$  possui 8 ensaios ou combinações de tratamentos. Geometricamente, o planejamento é um cubo com 8 combinações formando os vértices do cubo. Esse planejamento permite que 3 efeitos principais (A, B e C) sejam estimados com interações de segunda ordem (AB, AC e BC) e de terceira ordem (ABC).

Os efeitos principais podem ser facilmente estimados, e que as letras minúsculas (1), a, b, c, ab, ac, bc e abc representam o total de todas as  $n$  réplicas em cada uma das 8 corridas no planejamento. O efeito principal A pode ser estimado calculando a média das quatro combinações de tratamento quando A tiver sinal positivo, e subtraindo dessa quantidade a média das combinações de tratamento quando A tiver sinal negativo. Similarmente para os efeitos principais B e C. Isso fornece:

$$\begin{aligned} A &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc}{4n} \\ B &= \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac}{4n} \\ C &= \bar{y}_{C+} - \bar{y}_{C-} = \frac{c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab}{4n} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Com base na tabela de sinais abaixo, as interações AB, AC, BC e ABC são dadas por:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{(1) + ab + c + abc - a - b - ac - bc}{4n} \\ AC &= \frac{(1) + b + ac + abc - a - c - ab - bc}{4n} \\ BC &= \frac{(1) + a + bc + abc - b - c - ab - ac}{4n} \\ ABC &= \frac{a + b + c + abc - (1) - ab - ac - bc}{4n} \end{aligned} \quad (1.17)$$

No caso de uma réplica única ( $n = 1$ ), os efeitos A, B e C são dados por:

$$\begin{aligned}
 A &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc}{4} \\
 B &= \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac}{4} \\
 C &= \bar{y}_{C+} - \bar{y}_{C-} = \frac{c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab}{4}
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

As interações AB, AC, BC e ABC são dados por:

$$\begin{aligned}
 AB &= \frac{(1) + ab + c + abc - a - b - ac - bc}{4} \\
 AC &= \frac{(1) + b + ac + abc - a - c - ab - bc}{4} \\
 BC &= \frac{(1) + a + bc + abc - b - c - ab - ac}{4} \\
 ABC &= \frac{a + b + c + abc - (1) - ab - ac - bc}{4}
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Uma tabela de sinais + ou - pode ser desenvolvida a partir dos contrastes. Os sinais para os efeitos principais são determinados pela associação.

Combinações de Tratamentos	Efeito fatorial							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
<i>a</i>	+	+	-	-	-	-	+	+
<i>b</i>	+	-	+	-	-	+	-	+
<i>ab</i>	+	+	+	+	-	-	-	-
<i>c</i>	+	-	-	+	+	-	-	+
<i>ac</i>	+	+	-	-	+	+	-	-
<i>bc</i>	+	-	+	-	+	-	+	-
<i>abc</i>	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabela 1.7: Sinais para o Planejamento fatorial  $2^3$

A Tabela 1.8 tem propriedades interessantes:

1. Exceto para a coluna identidade I, cada coluna tem um número igual de sinais + e -.
2. A soma dos produtos dos sinais em quaisquer duas colunas é zero, ou seja, as colunas da tabela são ortogonais.
3. A multiplicação de qualquer coluna pela coluna I deixa a mesma inalterada, ou seja, I é uma coluna identidade. Por exemplo:  $A^2 = I$ ;  $B^2 = I$ ;  $C^2 = I$ .
4. O produto de quaisquer duas colunas resulta em uma coluna na tabela. Por exemplo,  $A \times B = AB$  e  $AB \times ABC = A^2B^2C = C$ , já que qualquer coluna multiplicada por ela mesma resulta em uma coluna identidade.

A estimativa de qualquer efeito principal ou interação em um planejamento  $2^k$  é determinada pela multiplicação das combinações dos tratamentos na primeira coluna da tabela pelos sinais na coluna do efeito principal ou da interação correspondente, pela adição do resultado de modo a produzir um contraste e então pela divisão do contraste pela metade do número total de corridas no experimento. Para qualquer planejamento  $2^k$  com  $n$  réplicas as estimativas dos efeitos são calculadas a partir de

$$Efeito = \frac{Contraste}{n2^{k-1}}, \quad (1.20)$$

e a soma quadrática para qualquer efeito é dado por

$$SQ = \frac{(Contraste)^2}{n2^k}. \quad (1.21)$$

(ver Montgomery, 1991; Box, Hunter e Hunter, 2005)

#### Exemplo 1.4

Considerar um planejamento fatorial  $2^3$  onde temos duas variáveis quantitativas (temperatura, concentração) e uma variável qualitativa (catalisador). A resposta é dada pela quantidade do produto químico obtido (gramas). Seguem na tabela a seguir:

	nível inferior	nível superior
temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) (T)	160 (-)	180 (+)
concentração (%) (C)	20 (-)	40 (+)
catalisador (A ou B) (K)	A (-)	B (+)

A matriz do planejamento (incluindo resposta) é dada por,

Experimento	Temperatura	Concentração	Catalisador	Produção (Y)
1	-	-	-	60
2	+	-	-	72
3	-	+	-	54
4	+	+	-	68
5	-	-	+	52
6	+	-	+	83
7	-	+	+	45
8	+	+	+	80

Os efeitos principais e as interações são dados por,

$$Média = 64.25$$

$$T = 23$$

$$C = -5$$

$$K = 1.5$$

$$TC = 1.5$$

$$TK = 10$$

$$CK = 0$$

$$TCK = 0.5$$

Conclusão: Vimos que, após calcular os efeitos principais e as interações, os efeitos importantes são dados pelos efeitos principais T e C e a interação TK. Nesse caso, trata-se de planejamento fatorial  $2^3$  com réplica única, pois o erro quadrático médio (EQM) é nulo, portanto, seu uso não é apropriado.

### 1.8.3 Blocagem e Superposição no Planejamento $2^k$

Na prática, é frequentemente impossível correr todas as observações em um planejamento fatorial  $2^k$  sob condições homogêneas. Blocagem é a técnica de planejamento que é apropriada para essa situação geral. No entanto, em várias situações, o tamanho do bloco é menor do que o número de corridas na réplica completa. Nesses casos, a superposição, também chamada de confundimento, é um procedimento útil para correr o planejamento  $2^k$  em  $2^p$  blocos, sendo  $k < p$  e sendo o número de corridas em um bloco menor do que o número de combinações de tratamentos em uma réplica completa. A técnica faz com que certos efeitos de interação fiquem indistinguíveis dos blocos ou superpostos com os blocos.

Considerar um planejamento  $2^2$ . Supor que cada uma das  $2^2$  combinações de tratamento requeira 4 horas de análises no laboratório. Dessa forma, dois dias são requeridos para realizar o experimento. Se dias forem considerados como blocos, então temos de atribuir duas das quatro combinações de tratamento em cada dia.

Esse planejamento é mostrado na Tabela 1.7. Observando a coluna AB, podemos notar que o bloco 1 contém as combinações de tratamentos (1) e  $ab$  devido ao sinal mais, e que o bloco 2 contém  $a$  e  $b$  devido ao sinal menos. Os contrastes para estimar os efeitos principais dos fatores A e B são dados por

$$\text{Contraste}_A = a + ab - b - (1)$$

$$\text{Contraste}_B = b + ab - a - (1)$$

Note que esses contrastes não são afetados pela blocagem, uma vez que em cada contraste há uma combinação de tratamento mais e outra menos, proveniente de cada bloco. Ou seja, qualquer diferença entre o bloco 1 e o bloco 2, que aumente as leituras em um bloco por uma constante aditiva, é eliminada. O contraste para a interação AB é dado por

$$\text{Contraste}_{AB} = ab + (1) - a - b$$

Nesse caso, os efeitos do bloco e da interação AB são idênticos, isto é, a interação AB é superposta com os blocos.

Esse esquema pode ser usado para superpor qualquer planejamento  $2^k$  em dois blocos. Considerar o planejamento fatorial  $2^3$ , corrido em dois blocos. Da tabela de sinais mais e menos, mostrada na Tabela 1.7, atribuímos as combinações de tratamentos que sejam menos na coluna ABC ao bloco 1 e aquelas que sejam mais na coluna ABC ao bloco 2.

Nesse caso, há um método mais geral de construir os blocos (ver por exemplo, Myers, 2002). O método emprega um contraste de definição dado por

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k,$$

sendo  $x_i$  o nível do  $i$ -ésimo fator aparecendo em uma combinação de tratamentos e  $\alpha_i$  o expoente aparecendo no  $i$ -ésimo fator no efeito que é superposto com blocos. Para o sistema  $2^k$ , temos tanto  $\alpha_i = 0$  como  $x_i = 0$  (nível baixo) ou  $x_i = 1$  (nível alto). As combinações de tratamentos que produzam o mesmo valor de  $L$  (módulo 2) serão colocadas no mesmo bloco. Visto que os únicos valores possíveis de  $L$  (mód 2) são 0 e 1, isso atribuirá as  $2^k$  combinações de tratamentos a exatamente dois blocos.

Como exemplo, considere o planejamento  $2^3$  com ABC superposto com blocos. Aqui,  $x_1$  corresponde ao fator A,  $x_2$  corresponde ao fator B e  $x_3$  corresponde ao fator C, com  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ . Logo, o contraste de definição que seria usado para superpor ABC com blocos é  $L = x_1 + x_2 + x_3$ .

Com a finalidade de atribuir as combinações de tratamentos aos dois blocos, substituímos as combinações de tratamentos no contraste de definição como segue:

$$\begin{aligned}
(1) & : L = 1(0) + 1(0) + 1(0) = 0 = 0 \pmod{2} \\
a & : L = 1(1) + 1(0) + 1(0) = 1 = 1 \pmod{2} \\
b & : L = 1(0) + 1(1) + 1(0) = 1 = 1 \pmod{2} \\
ab & : L = 1(1) + 1(1) + 1(0) = 2 = 0 \pmod{2} \\
c & : L = 1(0) + 1(0) + 1(1) = 1 = 1 \pmod{2} \\
ac & : L = 1(1) + 1(0) + 1(1) = 2 = 0 \pmod{2} \\
bc & : L = 1(0) + 1(1) + 1(1) = 2 = 0 \pmod{2} \\
abc & : L = 1(1) + 1(1) + 1(1) = 3 = 1 \pmod{2}
\end{aligned}$$

Assim, (1),  $ab$ ,  $ac$  e  $bc$  são corridas no bloco 1 e  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $abc$  são corridas no bloco 2.

Um método simplificado é útil na construção desses planejamentos. O bloco contendo a combinação de tratamento (1) é chamado de bloco principal. Qualquer elemento (exceto (1)) no bloco principal pode ser gerado pela multiplicação de dois outros elementos no bloco principal. Por exemplo, considerar o bloco principal do planejamento  $2^3$  com ABC superposto. Podemos notar que

$$\begin{aligned}
ab \times ac & = a^2bc = bc \\
ab \times bc & = ab^2c = ac \\
ac \times bc & = abc^2 = ab
\end{aligned}$$

As combinações de tratamento no outro bloco (ou blocos) podem ser geradas multiplicando um elemento no novo bloco por cada elemento do bloco principal. Para o planejamento  $2^3$  com ABC superposto, uma vez que o bloco principal é (1),  $ab$ ,  $ac$  e  $bc$ , sabemos que a combinação de tratamento  $a$  está no outro bloco. Desse modo, os elementos desse segundo bloco são:

$$a \times (1) = a$$

$$a \times ab = a^2b = b$$

$$a \times ac = a^2c = c$$

$$a \times bc = abc$$

### 1.8.4 Planejamento Fatorial Fracionário

À medida que o número de fatores em um planejamento fatorial  $2^k$  aumenta, o número requerido de pontos experimentais aumenta. Por exemplo:  $2^5$  requer 32 corridas, e nesse planejamento, 5 graus de liberdade correspondem aos efeitos principais e 10 graus de liberdade correspondem às interações de segunda ordem, e 16 dos 31 graus de liberdade são usados para estimar interações de ordens maiores. Frequentemente, há pouco interesse nessas interações de ordens altas, pois se pudermos considerar que as mesmas são negligenciáveis, então um planejamento fatorial fracionário, envolvendo menos pontos experimentais que o conjunto completo  $2^k$ , poderá ser usado para obter informações sobre os efeitos principais e as interações de ordens menores (ver por exemplo, Box, Hunter e Hunter, 2005).

O objetivo do planejamento fatorial fracionário é fazer com que os efeitos principais e as interações de ordem baixa sejam associados (confundidos) somente com as interações de ordem alta (que são negligenciáveis). Isso é chamado de estrutura de confundimento.

#### Resoluções de um Planejamento

Os planejamentos de resolução III, IV e V são particularmente importantes. Aqui temos as seguintes definições de cada resolução e seus exemplos:

Resolução III: Nenhum efeito principal está associado com qualquer outro efeito principal, mas os efeitos principais estão associados com interações de segunda ordem e algumas interações de segunda ordem estão associadas entre si. Por exemplo, planejamento  $2^{3-1}_{III}$ , com  $I = ABC$ , é um planejamento de resolução III.

Resolução IV: Nenhum efeito principal está associado com qualquer outro efeito

principal ou com interações de segunda ordem, mas as interações de segunda ordem estão associadas entre si. Por exemplo, o planejamento  $2_{IV}^{4-1}$ , com  $I = ABCD$ , é um planejamento de resolução IV.

Resolução V: Nenhum efeito principal ou qualquer interação de segunda ordem está associado com qualquer interação de segunda ordem, mas as interações de segunda ordem estão associadas com as interações de terceira ordem. Por exemplo, o planejamento  $2_V^{5-1}$ , com  $I = ABCDE$ , é um planejamento de resolução V.

### Gerador e relação definidora

O gerador de um planejamento fatorial fracionário  $2^{3-1}$  é dado por  $C = AB$ ; o de um planejamento  $2^{4-1}$  é dado por  $D = ABC$ ; e o de um planejamento  $2^{5-1}$  é dado por  $E = ABCD$ .

Observe que, no planejamento  $2^{3-1}$ ,  $C^*C = AB^*C$ , isto é,  $C^2 = ABC$ ; no planejamento  $2^{4-1}$ ,  $D^*D = ABC^*D$ , isto é,  $D^2 = ABCD$ ; e no planejamento  $2^{5-1}$ ,  $E^*E = ABCD^*E$ , isto é,  $E^2 = ABCDE$ . Portanto, a relação definidora de cada planejamento é dada, respectivamente, por:  $I = ABC$ ;  $I = ABCD$ ;  $I = ABCDE$ .

### Planejamento $2^{k-1}$ (Meia fração no planejamento $2^k$ )

Uma meia-fração do planejamento  $2^k$  contém  $2^{k-1}$  corridas, sendo chamado de planejamento fatorial fracionário  $2^{k-1}$ , ou seja, ele pode ser corrido em uma fração 1/2. Como exemplo, considere o planejamento  $2^{4-1}$ , isto é, uma meia fração de  $2^4$ .

Nesse caso, o planejamento  $2^{k-1}$  possui duas meias-frações: fração principal e fração alternativa. No caso do planejamento  $2^{4-1}$ , a fração principal tem como característica o sinal mais na relação definidora, ou seja,  $I = ABCD$ , enquanto que a fração alternativa tem como característica o sinal negativo na sua relação definidora, ou seja,  $I = -ABCD$ . Desse planejamento, temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_A &= A + BCD & (1.22) \\
\mathcal{L}_B &= B + ACD \\
\mathcal{L}_C &= C + ABD \\
\mathcal{L}_D &= D + ABC \\
\mathcal{L}_{AB} &= AB + CD \\
\mathcal{L}_{AC} &= AC + BD \\
\mathcal{L}_{AD} &= AD + BC
\end{aligned}$$

Entretanto, se depois de obtermos a fração principal estivermos incertos acerca das interações, será possível estimá-las obtendo uma fração alternativa. A fração alternativa produz as seguintes estimativas dos efeitos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_A &= A - BCD & (1.23) \\
\mathcal{L}'_B &= B - ACD \\
\mathcal{L}'_C &= C - ABD \\
\mathcal{L}'_D &= D - ABC \\
\mathcal{L}'_{AB} &= AB - CD \\
\mathcal{L}'_{AC} &= AC - BD \\
\mathcal{L}'_{AD} &= AD - BC
\end{aligned}$$

Podemos agora obter as estimativas desassociadas dos efeitos principais e das interações AB, AC e AD pela soma e diferença das combinações lineares dos efeitos estimados nas duas frações individuais. Por exemplo, supor que queiramos desassociar A da interação BCD. Uma vez que  $\mathcal{L}_A = A + BCD$  e  $\mathcal{L}'_A = A - BCD$ , podemos combinar essas estimativas dos efeitos como segue:

$$(1/2)(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A) = 0.5(A + BCD + A - BCD) = A \quad (1.24)$$

$$(1/2)(\mathcal{L}_A - \mathcal{L}'_A) = 0.5(A + BCD - A + BCD) = BCD$$

Para todos os 7 pares de estimativas de efeitos, obteríamos os seguintes resultados:

Efeito $i$	de $0.5(\mathcal{L}_i + \mathcal{L}'_i)$	de $0.5(\mathcal{L}_i - \mathcal{L}'_i)$
$A$	$A$	$BCD$
$B$	$B$	$ACD$
$C$	$C$	$ABD$
$D$	$D$	$ABC$
$AB$	$AB$	$CD$
$AC$	$AC$	$BD$
$AD$	$AD$	$BC$

Tabela 1.8: Estrutura de confundimento do planejamento  $2^{4-1}$

### Planejamento $2^{k-p}$ (Frações menores)

Embora o planejamento fatorial de meia-fração seja valioso em reduzir o número requerido de pontos experimentais, encontramos freqüentemente frações menores que fornecerão tanta informação útil quanto antes, com uma maior economia. Geralmente, um planejamento  $2^k$  pode ser corrido em uma fração  $(1/2)^p$ , chamado de planejamento fatorial fracionário  $2^{k-p}$ . Desse modo uma fração 1/4 é chamada planejamento  $2^{k-2}$ , uma fração 1/8 é chamada planejamento  $2^{k-3}$ , e assim por diante. Como exemplo, considere o planejamento  $2^{5-2}$ ,  $2^{6-3}$  e  $2^{7-4}$ , todas elas contendo 8 corridas, todas elas sendo de resolução III.

i) No caso do planejamento  $2^{5-2}$ , os geradores são dados por  $D = AB$  e  $E = AC$ , em que a relação definidora é  $I = ABD = ACE$ . O produto de  $ABD(ACE) = A^2BCDE = BCDE$ . Então, a relação definidora é  $I = ABD = ACE = BCDE$ .

ii) No caso do planejamento  $2^{6-3}$ , os geradores são dados por  $D = AB$ ,  $E = AC$  e  $F = BC$ , em que a relação definidora é  $I = ABD = ACE = BCF$ . O produto de  $ABD(ACE) = BCDE$ ; o produto  $ABD(BCF) = ACDF$ ; e o produto  $ACE(BCF) = ABEF$ . O resultado

desses produtos é equivalente a DEF. Então, a relação definidora é  $I = ABD = ACE = BCDE = ACDF = ABEF = DEF$ .

iii) No caso do planejamento  $2^{7-4}$ , os geradores são dados por  $D = AB$ ,  $E = AC$ ,  $F = BC$  e  $G = ABC$ , em que a relação definidora é  $I = ABD = ACE = BCF = ABCG$ . Multiplicando os geradores 2 a 2, a relação é  $I = BCDE = ACDF = CDG = ABEF = BEG = AFG$ . Multiplicando os geradores 3 a 3, a relação é  $I = DEF = ADEG = CEFG = BDFG$ . Finalmente, multiplicando 4 de cada vez, a relação é  $I = ABCDEFG$ . A relação definidora completa é dada por  $I = ABD = ACE = BCF = ABCG = BCDE = ACDF = CDG = ABEF = BEG = AFG = DEF = ADEG = CEFG = BDFG = ABCDEFG$ .

Este último planejamento ( $2^{7-4}_{III}$ ) é chamado de planejamento fatorial fracionário saturado, pois todos os graus de liberdade disponíveis são usados para estimar efeitos principais, ou seja, todas as novas variáveis são confundidas com todas interações entre as variáveis originais.

No planejamento  $2^{7-4}_{III}$  temos uma fração principal e 15 frações alternativas. No caso da fração principal, os geradores são dados por:  $4 = +12$ ,  $5 = +13$ ,  $6 = +23$  e  $7 = +123$ . Portanto, neste planejamento, as 16 frações possíveis são dadas pelos geradores  $I = \pm 124$ ,  $I = \pm 135$ ,  $I = \pm 236$  e  $I = \pm 1237$  (ver por exemplo, Kempthorne, 1975).

### 1.8.5 Objetivos principais da dissertação

Nesta dissertação pretendemos considerar o uso de métodos Bayesianos nas técnicas de planejamentos de experimentos. As técnicas Bayesianas apesar de serem muito utilizadas na análise estatística de dados, especialmente usando métodos de simulação para obtenção das características a posteriori de interesse, ainda não são muito usadas na construção de planejamentos de experimentos. É importante salientar que o uso de métodos Bayesianos pode levar a planejamentos de experimentos com menores custos e maiores eficiências. A seguir introduzimos algumas técnicas Bayesianas para a construção de planejamentos de experimentos. Em especial vamos considerar uma comparação entre métodos clássicos e Bayesianos para planejamentos de experimentos na presença de tendências lineares. A possível presença de tendência linear pode invalidar as conclusões obtidas por dados obtidos usando um planejamento fatorial. Isso é comum em aplicações industriais. Apesar da aleatorização ser considerada peça importante nos planejamentos

industriais, o pesquisador em geral tem conhecimento de possíveis tendências relacionado à ordem dos ensaios. Vários critérios são introduzidos na literatura em geral envolvendo precisão dos efeitos estimados e custos associados à mudanças no equipamento ou outros fatores importantes. Para isso vamos comparar métodos clássicos e Bayesianos na construção dos planejamentos.

# Capítulo 2

## Planejamentos de Experimentos Bayesianos

### 2.1 Introdução

A metodologia de planejamentos experimentais envolve a especificação de todos os aspectos de um experimento e a fixação de todas as variáveis que podem ser controladas antes do início de um experimento (ver por exemplo, Atkinson e Hunter, 1968; ou Box, 1952).

Como exemplo, considere um experimento para a comparação de vários tratamentos diferentes. Neste caso, deve-se considerar previamente a escolha dos tratamentos para o estudo, a definição precisa dos tratamentos, a escolha dos fatores blocos, a forma de aleatorização, a especificação das unidades experimentais a serem usadas, a especificação da duração de um experimento, a escolha do tamanho amostral e a escolha da proporção de unidades a serem alocadas a cada tratamento.

Sob a abordagem Bayesiana, considerar um modelo linear com  $n$  observações dado por,

$$\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta} \sim N(X\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 I_n) \quad (2.1)$$

onde  $X$  é uma matriz ( $n \times k$ ) de planejamento, e  $\boldsymbol{\theta}$  é um vetor ( $k \times 1$ ) de parâmetros de regressão com distribuição a priori normal, dada por,

$$\boldsymbol{\theta} \sim N(\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2 R^{-1}) \quad (2.2)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}_0$  é um vetor ( $k \times 1$ ) de constantes conhecidas e  $R$  é uma matriz ( $k \times k$ ) também supostamente conhecida. Assumir também  $\sigma^2$  conhecido.

Pela fórmula de Bayes (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973), a distribuição a posteriori para  $\boldsymbol{\theta}$  é dada por,

$$\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, X \sim N(\boldsymbol{\theta}^*, \sigma^2 D(X)) \quad (2.3)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}^* = (X'X + R)^{-1}(X'\mathbf{Y} + R\boldsymbol{\theta}_0)$  e  $\sigma^2 D(X) = \sigma^2(X'X + R)^{-1}$

Observar que a matriz de variâncias-covariâncias a posteriori  $\sigma^2 D(X)$  é uma função da matriz de planejamento  $X$  e da matriz de covariâncias a priori  $\sigma^2 R^{-1}$ .

Deve-se observar também que a matriz de covariâncias do estimador de mínimos quadrados (EMQ) usual para  $\boldsymbol{\theta}$  é dada por,

$$\Sigma = \sigma^2(X'X)^{-1} \quad (2.4)$$

Portanto, observa-se que a diferença entre os resultados clássico e bayesiano é dado pela inclusão da matriz  $R$ .

Um contexto clássico de planejamento experimental assume a escolha da matriz de planejamento  $X$  que minimiza a variância do estimador de mínimos quadrados (EMQ)  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{Y}$  dada por  $\Sigma = \sigma^2(X'X)^{-1}$ .

Portanto, deve-se introduzir como um primeiro critério Bayesiano de planejamento de experimentos, a escolha da matriz de planejamento  $X$  que minimiza a matriz de variância-covariância a posteriori dada por  $\sigma^2 D(X) = \sigma^2(X'X + R)^{-1}$ .

Com esse critério Bayesiano, podemos construir melhores planejamentos experimentais (ver por exemplo, Chaloner e Verdinelli, 1995).

Como um exemplo, considere um planejamento fatorial com 2 níveis para 2 fatores e com o modelo,

$$Y = \theta_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \varepsilon \quad (2.5)$$

onde  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$  com  $\sigma^2$  conhecido. A matriz  $X$  associada a esse experimento é dada por,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ 1 & X_{12} & X_{22} \\ 1 & X_{13} & X_{23} \\ 1 & X_{14} & X_{24} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Portanto,

$$X'X = \begin{bmatrix} 4 & \sum_{j=1}^4 X_{1j} & \sum_{j=1}^4 X_{2j} \\ \sum_{j=1}^4 X_{1j} & \sum_{j=1}^4 X_{1j}^2 & \sum_{j=1}^4 X_{1j}X_{2j} \\ \sum_{j=1}^4 X_{2j} & \sum_{j=1}^4 X_{1j}X_{2j} & \sum_{j=1}^4 X_{2j}^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Sob a abordagem clássica usual, deve-se escolher o planejamento ótimo ortogonal dado pelas escolhas dos níveis  $X_{1j}$  e  $X_{2j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , tal que  $\sum_{j=1}^4 X_{1j} = 0$ ,  $\sum_{j=1}^4 X_{2j} = 0$  e  $\sum_{j=1}^4 X_{1j}X_{2j} = 0$ , onde  $X_{11} = -1$ ,  $X_{12} = 1$ ,  $X_{13} = -1$ ,  $X_{14} = 1$  e  $X_{21} = -1$ ,  $X_{22} = -1$ ,  $X_{23} = 1$ ,  $X_{24} = 1$  (ver por exemplo, Montgomery, 1991; ou Box, Hunter e Hunter, 2005).

Neste caso, a matriz de variância covariância do EMQ  $\hat{\theta}$  é dada por,

$$\sigma^2(X'X)^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_{j=1}^4 X_{1j}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_{j=1}^4 X_{2j}^2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Assumindo agora que o pesquisador tenha informação a priori sobre os parâmetros  $\theta_0, \theta_1$  e  $\theta_2$ , supor uma priori normal dada em (2.2) com matriz  $R$  dada por,

$$R = \begin{bmatrix} r_{00} & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde  $r_{00}$ ,  $r_{11}$  e  $r_{22}$  são constantes positivas conhecidas.

Considerando-se a mesma classe de planejamentos fatoriais  $2^2$  dada anteriormente, observa-se que o planejamento Bayesiano tem melhor precisão, pois a matriz de variância-covariância é dada por,

$$\sigma^2(X'X + R)^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4 + r_{00}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_{j=1}^4 X_{1j}^2 + r_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_{j=1}^4 X_{2j}^2 + r_{22}} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

De (2.10), observamos melhor precisão, ou seja, variâncias menores com os mesmos pontos experimentais.

Na prática, devemos escolher os níveis para  $X_1$  e  $X_2$  que minimizam  $\sigma^2(X'X + R)^{-1}$ , isto é, podemos ter níveis com menor custo para atingir a mesma precisão.

Outros critérios Bayesianos são introduzidos na literatura por vários autores (ver por exemplo, Chaloner e Verdinelli, 1995; Lindley, 1956; Verdinelli e Kadane, 1992; Smith e Verdinelli, 1980).

## 2.2 Informação de Shannon

A quantidade de informação dada por uma função densidade de probabilidade  $p(y)$  de uma variável aleatória  $Y$  (ver Lindley, 1956) é dada por,

$$I[p(y)] = \int p(y) \log(p(y)) dy = E_Y[\log(p(y))] \quad (2.11)$$

Observamos que a informação à priori sobre  $\theta$  no modelo (2.1) é dada por  $I[p(\theta)]$  e a informação a posteriori sobre  $\theta$  é dada por  $I[p(\theta|\mathbf{Y})]$ .

Lindley (1956) define o ganho na informação dada por um experimento por,

$$E_{\mathbf{Y}} \{I[p(\theta|\mathbf{Y})] - I[p(\theta)]\} = \int_{\mathbf{Y}} \{I[p(\theta|\mathbf{Y})] - I[p(\theta)]\} p(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad (2.12)$$

Uma forma alternativa para o ganho na informação de Shannon é dada pela

distância de Kullback-Leibler entre duas densidades  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  e  $p(\boldsymbol{\theta})$ ,

$$E_{\mathbf{Y}} \{I[p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})] - I[p(\boldsymbol{\theta})]\} = \int_{\mathbf{Y}} \left[ \log \left( \frac{p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})}{p(\boldsymbol{\theta})} \right) \right] p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) p(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad (2.13)$$

Um critério Bayesiano para planejamento de experimentos é dado pela escolha de um planejamento  $X^*$  que maximiza a utilidade esperada, dada por,

$$U_1(X) = \int \left[ \log \left( \frac{p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X)}{p(\boldsymbol{\theta})} \right) \right] p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X) p(\mathbf{Y}|X) d\boldsymbol{\theta} d\mathbf{Y} \quad (2.14)$$

Considerando o modelo linear (2.1) com distribuição a priori (2.2); neste caso, a utilidade esperada se reduz a

$$U_1(X) = -\frac{k}{2} [\log(2\pi) + 1] + \frac{1}{2} \log(\det[\sigma^{-2}(X'X + R)]) \quad (2.15)$$

Observar que maximizar  $U_1(X)$  com respeito à  $X$  é equivalente a maximizar a função

$$\phi(X) = \log[\det(X'X + R)] \quad (2.16)$$

Esse critério é definido como critério Bayesiano de Otimalidade-D (ver por exemplo, Chaloner e Verdinelli, 1995; Lindley, 1956; Bernardo, 1979). Observar que o critério não-Bayesiano de otimalidade-D maximiza  $\log[\det(X'X)]$  com respeito à  $X$  (ver por exemplo, Fedorov, 1972).

Outras funções utilidade podem ser consideradas usando a informação esperada de Shannon.

Como um exemplo prático, assumir que o valor da variável dependente  $Y$  seja de interesse num modelo linear, como por exemplo, num ensaio clínico para indicar se um tratamento foi bem sucedido para os pacientes. Assim, seria de esperar um planejamento que produza um valor total grande como também com grande informação no efeito do novo tratamento.

Neste caso, poderíamos considerar um planejamento que maximiza uma combinação do resultado total esperado e a informação esperada de Shannon para a distribuição a posteriori. Desta forma, Verdinelli e Kadane (1992) introduzem a seguinte informação esperada:

$$U_2(X) = \int [\rho_1 \mathbf{Y}'\mathbf{1} + \rho_2 \ln p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X)] p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X) p(\mathbf{Y}|X) d\mathbf{Y} d\boldsymbol{\theta} \quad (2.17)$$

Observe que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  ( $\rho_1 + \rho_2 = 1$ ) são pesos representando a importância relativa dos dois componentes de  $U_2(X)$ . Num modelo linear normal, um planejamento que maximiza  $U_2(X)$  é equivalente a um planejamento que maximiza,

$$\phi(X) = \rho_1 E_{\mathbf{Y}}[\mathbf{Y}'\mathbf{1}] + \rho_2 \log\{\det[D^{-1}(X)]\} \quad (2.18)$$

e os pesos afetam a escolha do planejamento somente através de sua razão  $\rho_2/\rho_1$ .

Portanto, devemos escolher um planejamento que maximiza,

$$U_2(X) = \rho_1 E_{\mathbf{Y}}[\mathbf{Y}'\mathbf{1}] + \rho_2 \log |D^{-1}(X)|, \quad (2.19)$$

onde  $D(X) = (X'X + R)^{-1}$  e  $E_{\mathbf{Y}}(\cdot)$  é esperança com relação à distribuição marginal para  $\mathbf{Y}$ .

### 2.2.1 Outras Funções Utilidade Usadas em Planejamentos de Experimentos Bayesianos

Considerar agora um planejamento que maximiza a função utilidade esperada dada por,

$$U_3(X) = - \int (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' A (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X) p(\mathbf{Y}|X) d\boldsymbol{\theta} d\mathbf{Y}, \quad (2.20)$$

onde  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é um estimador de  $\boldsymbol{\theta}$  e  $A$  é uma matriz simétrica positiva definida.

Com o estimador Bayesiano  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  em relação à perda quadrática, a utilidade esperada é dada por,

$$U_3(X) = -\sigma^2 \text{tr}[AD(X)] \quad (2.21)$$

Um planejamento que minimiza  $\phi(X) = \text{tr}[AD(X)] = \text{tr}[A(X'X + R)^{-1}]$  é chamado de Bayes-ótimo A, uma generalização do critério não-Bayesiano de otimalidade-A que minimiza  $\text{tr}[A(X'X)^{-1}]$  (ver por exemplo, Fedorov, 1972).

A função utilidade (2.20) é discutida por vários autores (ver por exemplo, Duncan e DeGroot, 1976; Chaloner, 1982, 1984).

## 2.3 Uso da Densidade Preditiva em Planejamento de Experimentos Bayesianos

Considerar agora o problema de predição quando planejamos um experimento. Por exemplo, em confiabilidade ou controle de qualidade, é desejável escolher um planejamento que permite prever a durabilidade de um componente ou mantê-lo sob controle.

A densidade preditiva para a próxima observação futura  $Y_{n+1}$  é dada por,

$$p(y_{n+1}|\mathbf{Y}, X) = \int p(y_{n+1}|\boldsymbol{\theta}, X)p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X)d\boldsymbol{\theta} \quad (2.22)$$

Antes da realização do planejamento de experimentos e antes de observar  $\mathbf{Y}$ , a distribuição marginal para a observação futura  $y_{n+1}$ , dada por,

$$p(y_{n+1}) = \int p(y_{n+1}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}, \quad (2.23)$$

pode ser considerada como a densidade preditiva a priori para uma observação futura. Assim, podemos usar o critério que maximiza o ganho esperado na informação de Shannon dado por um experimento em  $y_{n+1}$ ; a utilidade esperada nas densidades preditivas é dada por,

$$U_4(X) = \int \left\{ \log \left[ \frac{p(y_{n+1}|\mathbf{Y}, X)}{p(y_{n+1})} \right] \right\} p(y_{n+1}|\mathbf{Y}, X)p(\mathbf{Y}|X)dy_{n+1}d\mathbf{Y} \quad (2.24)$$

(ver por exemplo, San Martini e Spezzaferri, 1984; Verdinelli, Polson e Singpurwalla, 1993)

No caso do modelo linear normal (2.1), maximizar  $U_4(X)$  com respeito à  $X$  é equivalente a maximizar

$$-\frac{1}{2} \left\{ \log(2\pi) + 1 + \log [\sigma^2(\mathbf{x}'_{n+1}D(X)\mathbf{x}_{n+1} + 1)]^{-1} \right\}, \quad (2.25)$$

que corresponde a minimizar

$$\phi(X) = \sigma^2 [\mathbf{x}'_{n+1}D(X)\mathbf{x}_{n+1} + 1] = \sigma_{n+1}^2(X), \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{x}_{n+1}$  é o nível da variável  $X$  para a observação futura;  $D(X) = (X'X + R)^{-1}$ ;  $\sigma_{n+1}^2(X)$  é definida como a variância preditiva de  $y_{n+1}$ .

Outro critério Bayesiano baseado na densidade preditiva para uma observação futura  $y_{n+1}$  é introduzida por Verdinelli (1992) assumindo uma utilidade esperada que combina inferência com predição dada por,

$$\begin{aligned} U_5(X) = & \gamma_1 \int \left\{ \log \left[ \frac{p(y_{n+1}|\mathbf{Y}, X)}{p(y_{n+1})} \right] \right\} p(y_{n+1}|\mathbf{Y}, X) p(\mathbf{Y}|X) dy_{n+1} d\mathbf{Y} + \\ & + \gamma_2 \int \left\{ \log \left[ \frac{p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X)}{p(\boldsymbol{\theta})} \right] \right\} p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, X) p(\mathbf{Y}|X) d\boldsymbol{\theta} d\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Observar que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  ( $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ ) são pesos que medem as contribuições relativas da preditiva e do componente inferencial.

Para o caso do modelo linear (2.1) com priori normal (2.2), a utilidade esperada  $U_5(X)$  é maximizada por um planejamento  $X$  que maximiza,

$$\begin{aligned} \phi(X) = & \frac{\gamma_1}{2} \left\{ \log(2\pi) + 1 + \log [\sigma^2(\mathbf{x}'_{n+1}D(X)\mathbf{x}_{n+1} + 1)]^{-1} \right\} + \\ & + \frac{\gamma_2}{2} \left\{ k [\log(2\pi) + 1] - \log [\det (\sigma^{-2} [D^{-1}(X)])] \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde  $k$  é a dimensão do vetor  $\boldsymbol{\theta}$  e  $D(X) = (X'X + R)^{-1}$ .

Isso é equivalente à minimizar  $\sigma_{n+1}^2(X) = \det \{ [\sigma^2 D(X)]^\varpi \}$ , onde  $\sigma_{n+1}^2(X)$  é a variância preditiva dada em (2.26) e  $\varpi$  é a razão de pesos  $\gamma_2/\gamma_1$ .

## 2.4 Exemplos

### 2.4.1 ANOVA com uma Classificação

Considerar um modelo ANOVA com  $v$  tratamentos,

$$Y_{ij} = \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad (2.29)$$

$i = 1, 2, \dots, v$ ;  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , onde  $n_i$  é o número de unidades no  $i$ -ésimo tratamento

Assumir erros normais não-correlacionados, isto é,  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ . Observe que o vetor  $\boldsymbol{\theta}' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v)$  é o vetor dos efeitos (médias) de tratamentos.

Assumir que os parâmetros  $\alpha_i$  são independentes com distribuições a priori normais,

$$\alpha_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad (2.30)$$

com  $\mu_i$  e  $\sigma_i^2$  conhecidos para  $i = 1, 2, \dots, v$

Podemos usar o critério Bayesiano de otimalidade-D (2.16), isto é, maximizar  $\phi(X) = \log[\det(X'X + R)]$  para encontrar a matriz de planejamento  $X$ ; observar que a matriz de variância-covariância a priori  $R$  dada em (2.2) é dada por  $R = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_v^2)$

O modelo (2.29) pode ser escrito na forma matricial por,

$$\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{Y}$  é um vetor de observações ( $n \times 1$ );  $X$  é uma matriz ( $n \times v$ );  $\boldsymbol{\alpha}$  é um vetor ( $v \times 1$ ) e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de erros com distribuição normal multivariada  $N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $n = \sum_{i=1}^v n_i$ .

Assim, temos,

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \vdots \\ y_{v1} \\ \vdots \\ y_{vn_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{v1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{vn_v} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Uma priori para  $\alpha$  dada em (30) é dada por,

$$\alpha \sim N(\mu, R), \quad (2.33)$$

onde  $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v)$  e  $R = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_v^2)$  são conhecidos.

Como  $X'X = \text{diag}(n_1, n_2, \dots, n_v)$  e  $X'X + R = \text{diag}(n_1 + \tau_1^2, n_2 + \tau_2^2, \dots, n_v + \tau_v^2)$ , observamos que  $\det(X'X + R) = \prod_{i=1}^v (n_i + \tau_i^2)$ . Assim, devemos maximizar  $\phi(X) = \log \left[ \prod_{i=1}^v (n_i + \tau_i^2) \right]$  sujeito à restrição  $n = \sum_{i=1}^v n_i$ . Portanto, maximizamos  $\varphi(n_1, n_2, \dots, n_{v-1}) = \sum_{i=1}^v \log(n_i + \tau_i^2)$ , onde  $n_v = n - \sum_{i=1}^{v-1} n_i$ . De  $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 0$  para  $i = 1, \dots, v-1$ , temos o sistema de equações,

$$\begin{cases} n_1 + \tau_1^2 = n - \sum_{i=1}^{v-1} n_i + \tau_v^2 \\ \vdots \\ n_{v-1} + \tau_{v-1}^2 = n - \sum_{i=1}^{v-1} n_i + \tau_v^2 \end{cases} \quad (2.34)$$

A solução do sistema de equações (2.34) é dada por:

$$n_i = \frac{1}{v} \left[ n + \sum_{i=1}^{v-1} \tau_i^2 - (v-1)\tau_v^2 \right] + \tau_v^2 - \tau_i^2, \quad (2.35)$$

para  $i = 1, \dots, v-1$

Como um caso especial, considere  $\tau_1^2 = \tau_2^2 = \dots = \tau_v^2 = \tau^2$  na priori (2.33); neste

caso, temos de (2.35),  $n_i = n/v$ , para  $i = 1, 2, \dots, v$ .

Outra possibilidade na construção do planejamento para ANOVA com uma classificação seria escolher  $X$  que minimiza a variância a posteriori para  $\alpha$ , dada por  $\sigma^2 D(X) = \sigma^2 (X'X + R)^{-1}$ , isto é, com a menor matriz de variância-covariância a posteriori.

A matriz de variância-covariância é dada por  $\sigma^2 D(X) = \sigma^2 \text{diag} \left( \frac{1}{n_1 + \tau_1^2}, \dots, \frac{1}{n_v + \tau_v^2} \right)$ . Observar que dependendo dos valores fixados para  $\tau_i^2$ ,  $i = 1, \dots, v$ , podemos ter menores números de unidades experimentais por tratamento levando á mesma precisão obtida por planejamentos clássicos usuais, isto é, menor custo experimental. Se  $\tau_1^2 = \tau_2^2 = \dots = \tau_v^2 = \tau^2$ , devemos considerar  $n_i = n/v$ , para  $i = 1, \dots, v$ .

Também, podemos usar o critério Bayesiano ótimo-A para construir o planejamento para ANOVA com uma classificação.

Considerando o critério Bayesiano ótimo-A (ver (18)), devemos achar um planejamento que minimiza  $\phi(X) = \text{tr}[A(X'X + R)^{-1}]$  onde  $A$  é uma matriz simétrica positiva-definida. considerando  $A = I$  (matriz identidade), devemos encontrar  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, v$  que minimiza  $\phi(X) = \sum_{i=1}^v \frac{1}{(n_i + \tau_i^2)}$ .

### 2.4.2 Reta Passando pela Origem

Supor a equação da reta passando pela origem, dada por

$$Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i \quad (2.36)$$

para  $i = 1, \dots, n$ ;  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  independentes e identicamente distribuídos com  $\sigma^2$  conhecido. Assumir uma priori normal (2.2) para  $\beta$  com média  $\theta_0$  e variância  $\sigma^2 R^{-1}$  onde  $R = a$  (constante).

Observar que  $X'X = \sum_{i=1}^n X_i^2$  (ver (2.1)), pois  $X' = (X_1, \dots, X_n)$ . Assim,  $|X'X + R| = \det \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 + a \right) = \sum_{i=1}^n X_i^2 + a$ .

Pelo critério Bayesiano de otimalidade-D (ver (2.16)), devemos maximizar a função  $\phi(X) = \log[\det(X'X + a)]$ , isto é,  $\phi(X) = \log \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 + a \right)$  em relação à  $X' = (X_1, \dots, X_n)$ .

Portanto, devemos escolher  $X_1, \dots, X_n$  mais espalhados dentro da amplitude experimental.

Pelo critério Bayes-ótimo A (ver (2.21)), devemos achar que  $X$  que minimiza

$\phi(X) = \text{tr}[AD(X)]$  onde  $D(X) = (X'X + R)^{-1}$ . Escolhendo  $A = I$ , devemos minimizar  $\phi(X) = (X'X + R)^{-1}$ , isto é,  $\phi(X) = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + a\right)^{-1}$ . Isso é dado, maximizando-se  $\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + a\right)$ , isto é, escolhendo  $X_1, \dots, X_n$  o mais espalhado possível dentro da amplitude experimental.

Observar que com a priori normal  $N(\theta_o, \sigma^2 R^{-1})$  com  $R = a$ , a distribuição a posteriori para  $\theta$  é dada por uma distribuição normal  $N(\theta^*, \sigma^2 D(X))$ , onde  $\theta^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i + \theta_o\right)}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + a\right)}$  e  $\sigma^2 D(X) = \frac{\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + a\right)}$ .

Assim, a densidade preditiva para uma resposta futura  $Y_{n+1}$  no nível da variável independente  $X_{n+1}$  é uma distribuição normal com uma variância preditiva para  $Y_{n+1}$  dada por  $\sigma_{n+1}^2(X) = \sigma^2 [\mathbf{x}'_{n+1} D(X) \mathbf{x}_{n+1} + 1]$  onde  $D(X) = (X'X + R)^{-1}$ , isto é,  $D(X) = (X'X + a)^{-1}$ .

Pelo critério baseado na densidade preditiva (ver (2.26)), devemos minimizar,  $\phi(X) = \sigma^2 \left[ X_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + a\right)^{-1} X_{n+1} + 1 \right]$ .

$$\text{Ou, } \phi(X) = \sigma^2 \left\{ \frac{X_n^2 + 1}{\sum_{i=1}^n X_i^2 + a} \right\} + 1.$$

Dai, observamos que minimizar  $\phi(X)$  é equivalente a maximizar  $\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + a\right)$  e temos a mesma conclusão como foi obtida usando os critérios Bayesianos de otimalidade D ou A, isto é, escolher  $X_1, \dots, X_n$  de forma mais espalhada dentro da amplitude experimental.

# Capítulo 3

## Planejamento de Experimentos na Presença de Tendências Lineares

### 3.1 Introdução

Em muitas aplicações de planejamento de experimentos, uma boa aleatorização pode prever a presença de possíveis tendências lineares relacionadas à ordem de observação dos pontos experimentais. Muitas vezes, o pesquisador gostaria de construir um planejamento que pelo menos minimize o efeito de possíveis tendências relacionadas à ordem dos experimentos (ver por exemplo Box e Hunter (1961); ou Daniel e Wilcoxon, 1966), especialmente quando considerados planejamentos fatoriais  $2^k$ , completos ou fracionários.

Podemos tomar como exemplo o planejamento  $2_{III}^{7-4}$  na ordenação padronizada.

Ensaio	1	2	3	4 (12)	5 (13)	6 (23)	7 (123)	Obs.
1	-	-	-	+	+	+	-	$y_1$
2	+	-	-	-	-	+	+	$y_2$
3	-	+	-	-	+	-	+	$y_3$
4	+	+	-	+	-	-	-	$y_4$
5	-	-	+	+	-	-	+	$y_5$
6	+	-	+	-	+	-	-	$y_6$
7	-	+	+	-	-	+	-	$y_7$
8	+	+	+	+	+	+	+	$y_8$

Tabela 3.1: Planejamento  $2_{III}^{7-4}$  na ordem padronizada

### 3.1.1 Planejamento $2^3$

A Tabela 3.1 mostra o planejamento  $2_{III}^{7-4}$  na ordem padronizada. Esquecendo por um momento as colunas 4, 5, 6 e 7, considerando os experimentos na ordem padronizada, observamos que do ensaio 1 para o ensaio 2 só mudamos o fator 1 (uma mudança); de 2 para 3 mudamos os fatores 1 e 2 (2 mudanças); de 3 para 4 há 1 mudança; de 4 para 5 há 3 mudanças; de 5 para 6: 1 mudança; de 6 para 7: 2 mudanças; e de 7 para 8: 1 mudança. Portanto, podemos concluir que temos 11 mudanças. Supor que existe uma tendência linear (de ensaio para ensaio), podemos colocar os 8 ensaios  $y_i$  iguais a 1,...,8 respectivamente. Temos a tabela abaixo:

$y$	1	2	3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Multiplicar a coluna  $y$  pelas demais:

$$y(1) = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = 4$$

$$y(2) = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 = 8$$

$$y(3) = -1 - 2 - 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 16$$

Número de mudanças: 1,2,1,3,1,2,1, isto é, um total de 11 mudanças.

Podemos concluir que temos contagens de tempo iguais à 4, 8 e 16 (máxima contagem de tempo) para os efeitos 1, 2 e 3, respectivamente. Assim, com o planejamento fatorial  $2^3$  na ordem padronizada, temos 11 mudanças e uma tendência linear que produz as contagens de tempo 4, 8 e 16, nos 3 efeitos principais para os fatores 1, 2 e 3.

Para saber o número de combinações possíveis existentes e saber qual é a melhor ordem de seqüência, a resposta é examinar as  $8! = 40320$  possíveis ordens para os 8 ensaios do planejamento fatorial  $2^3$ . Portanto, recomenda-se desenvolver um programa computacional que classifique cada ordenação possível de 1,...,8, o número possível de mudanças nos fatores e o máximo valor da contagem de tempo. Por exemplo, no planejamento dado na ordem padronizada, temos 11 mudanças e uma contagem máxima igual à

16. Os 40320 arranjos dividem-se em 840 grupos diferentes de 48 ordens equivalentes por grupos. As ordens equivalentes de ensaios podem ser obtidas de uma outra ordem pela permutação do número de variáveis ( $3! = 6$  maneiras) e pela troca de sinais de uma ou mais colunas (8 maneiras;  $6 \times 8 = 48$ ).

Por exemplo, considere uma outra ordem para os experimentos: 1,2,8,7,3,5,6,4.

Ordem	1	2	3	$y_i$
1	-	-	-	1
2	+	-	-	2
8	+	+	+	3
7	-	+	+	4
3	-	+	-	5
5	-	-	+	6
6	+	-	+	7
4	+	+	-	8

Contagens de tempo:

$$y(1) = -1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 = 4$$

$$y(2) = -1 - 2 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 = 4$$

$$y(3) = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 = 4$$

Neste caso, temos o número de mudanças: 1,2,1,1,2,1,2, isto é, um total de 10 mudanças.

Observar que um problema de grande interesse prático é a consideração de um número menor de mudanças dos níveis de um experimento, pois isso pode acarretar em altos custos, especialmente nas aplicações industriais.

Outro exemplo: considere uma outra ordem: 2,4,7,5,1,6,8,3.

Ordem	1	2	3	$y_i$
2	+	-	-	1
4	+	+	-	2
7	-	+	+	3
5	-	-	+	4
1	-	-	-	5
6	+	-	+	6
8	+	+	+	7
3	-	+	-	8

Contagens de tempo:

$$y(1) = 1 + 2 - 3 - 4 - 5 + 6 + 7 - 8 = -4$$

$$y(2) = -1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 = 4$$

$$y(3) = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 = 4$$

Número de mudanças: 1,2,1,1,2,1,2, isto é, um total de 10 mudanças.

Outro exemplo: considere uma outra ordem: 1,4,8,6,5,7,3,2.

Ordem	1	2	3	$y_i$
1	-	-	-	1
4	+	+	-	2
8	+	+	+	3
6	+	-	+	4
5	-	-	+	5
7	-	+	+	6
3	-	+	-	7
2	+	-	-	8

Contagens de tempo:

$$y(1) = -1 + 2 + 3 + 4 - 5 - 6 - 7 - 8 = -2$$

$$y(2) = -1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 - 8 = 0$$

$$y(3) = -1 - 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8 = 0$$

Números de mudanças: 2,1,1,1,1,2, isto é, um total de 9 mudanças.

Temos, na Tabela 3.2, a classificação da ordem dos ensaios num planejamento fatorial  $2^3$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

NM	NOE	NODE	NODE com a CMT de:								
			0	2	4	6	8	10	12	14	16
7	144	3	0	0	0	0	1	0	0	0	2
8	624	13	0	0	0	0	0	2	2	1	8
9	2832	59	0	1	0	0	16	9	13	4	16
10	4464	93	0	0	2	2	13	17	28	11	20
11	8736	182	1	6	17	8	39	37	36	22	16
12	7584	158	0	0	4	11	36	48	28	23	8
13	8352	174	1	10	27	39	42	30	13	10	2
14	3552	74	0	0	8	25	14	16	10	1	0
15	2640	55	1	3	7	17	12	9	6	0	0
16	1008	21	0	2	5	4	9	1	0	0	0
17	336	7	0	2	3	1	1	0	0	0	0
18	48	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Total	40320	840	3	24	74	107	183	169	136	72	72

NM: número de mudanças

NOE: número de ordens dos experimentos

NODE: número de ordens distintas dos experimentos

CMT: contagem máxima de tempo

Tabela 3.2: Classificação da ordem dos ensaios num planejamento  $2^3$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

Ordem dos ensaios	Mudança nas variáveis			Total	Contagem de tempo p/ variável		
	1	2	3		1	2	3
14865732	3	4	2	9	-2	0	0
12873564	3	3	4	10	4	4	4
14856237	4	3	3	10	-4	4	4
12837564	3	3	4	10	4	4	6
14865237	4	3	3	10	-6	4	4
14856732	5	4	2	11	0	0	0
14687532	3	6	2	11	-2	0	0
14685732	3	6	2	11	-2	2	0
14865372	3	4	4	11	-2	0	2
14867532	3	6	2	11	-2	-2	0
18465732	3	4	4	11	-2	0	-2
14687352	3	4	4	11	-2	2	2

Tabela 3.3: Ordens dos experimentos num planejamento  $2^3$ 

Conclusão: A melhor ordem de ensaios sob o ponto de vista da contagem de tempo é a sexta ordem (14856732) (ver Tabela 3.3). Sob o ponto de vista do número de mudanças, a melhor ordem é dada por 7 mudanças, porém, o tempo máximo de contagem é igual a 8, portanto, a mesma não está listada na Tabela 3.3. Para as ordens listadas na Tabela 3.3, a "melhor" escolha é a primeira (14865732), sob o ponto de vista de contagem de mudanças nos fatores. É importante salientar que podemos usar outros critérios para a escolha de um melhor planejamento, como melhores precisões para os estimadores obtidos.

### 3.1.2 Planejamento $2^{4-1}$

Podemos examinar dois tipos de planejamento  $2^{4-1}$ . Um deles é o planejamento de resolução IV, definido por  $I = 1237$  nas variáveis 1, 2, 3 e  $7 = 123$ . O outro é o de resolução III, definido por  $I = 124$  nas variáveis 1, 2, 3 e  $4 = 12$ . Todos os planejamentos de resolução III obtidos das 4 primeiras colunas da tabela de são equivalentes sob o formato da mudança de variáveis. Comparando os dois tipos de planejamento, o planejamento  $2^{4-1}$  de resolução IV é, sem dúvida, melhor, pois teríamos as estimativas de todos os efeitos principais e as interações de 2 fatores, por isso, descartamos os de resolução III.

Existem  $8! = 40320$  possíveis escolhas onde dividimos em 210 conjuntos distintos de 192 ordens de ensaios equivalentes. As ordens de ensaios equivalentes podem ser obtidas de permutação de 1, 2, 3 e  $7 = 123$  ( $4! = 24$  maneiras) e mudando os sinais de uma ou mais das 3 colunas independentes, isto é,  $24 \times 8 = 192$  ordens equivalentes de ensaios.

Considerar o planejamento  $2^{4-1}$  na forma padronizada. A matriz associada ao experimento é dada por::

Ordem	1	2	3	7 = 123
1	-	-	-	-
2	+	-	-	+
3	-	+	-	+
4	+	+	-	-
5	-	-	+	+
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	+

Observar que a contagem de tempo é dada por,

$$y(1) = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = 4$$

$$y(2) = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 = 8$$

$$y(3) = -1 - 2 - 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 16$$

$$y(7) = -1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 - 7 + 8 = 0$$

O número de mudanças é: 2,2,2,4,2,2,2, isto é, um total de 16 mudanças

Nesse caso, podemos concluir que temos contagens de tempo de 4, 8, 16 e 0 nos fatores 1, 2, 3 e 7, respectivamente. Assim, com o planejamento fatorial  $2^{4-1}$  na ordem padronizada, temos 16 mudanças e uma tendência linear que produz as contagens de tempo 4, 8, 16 e 0, nos 4 efeitos principais para os fatores 1, 2, 3 e 7, respectivamente. A ordem padronizada produz uma contagem máxima de tempo muito alta.

Para verificar qual a melhor ordem de ensaios entre as  $8! = 40320$  combinações possíveis, devemos examinar todas as seqüências para os 8 ensaios (arranjos) do planejamento fatorial  $2^{4-1}$ .

Outro exemplo: Considere a ordem 1,2,8,7,3,5,6,4, com matriz de planejamento dada por

Ordem	1	2	3	7	$y_j$
1	-	-	-	-	1
2	+	-	-	+	2
8	+	+	+	+	3
7	-	+	+	-	4
3	-	+	-	+	5
5	-	-	+	+	6
6	+	-	+	-	7
4	+	+	-	-	8

Contagens de tempo:

$$y(1) = -1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 = 4$$

$$y(2) = -1 - 2 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 = 4$$

$$y(3) = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 = 4$$

$$y(7) = -1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 = -4$$

Números de mudanças: 2,2,2,2,2,2,2, isto é 14 mudanças

Temos, na Tabela 3.4, a classificação da ordem dos ensaios num planejamento fatorial  $2^{4-1}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

NM	NOE	NODE	NODE com a CMT de:								
			0	2	4	6	8	10	12	14	16
14	13824	72	0	0	1	1	12	14	18	8	18
16	15744	82	0	0	0	4	15	23	20	14	6
18	8064	42	0	0	3	8	12	11	6	2	0
20	2304	12	0	0	3	5	3	1	0	0	0
22	384	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
Total	40320	210	0	1	8	18	42	49	44	24	24

Tabela 3.4: Classificação da ordem dos ensaios num planejamento  $2^{4-1}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

Ordem dos ensaios	Mudança nas variáveis				Total	Contagem de tempo p/ variável			
	1	2	3	7		1	2	3	7
12873564	3	3	4	4	14	4	4	4	-4
12837564	3	3	4	4	14	4	4	6	-6
12783564	5	3	4	4	16	6	4	4	-2
12837654	5	3	4	4	16	2	4	6	-4
12873546	3	4	5	4	16	4	2	6	-4
18237564	3	5	4	4	16	4	2	4	-6
12873654	5	3	4	6	18	2	4	4	-2
18237654	5	5	4	4	18	2	2	4	-4
18273564	3	5	6	4	18	4	2	2	-4
12873645	4	4	5	5	18	0	2	6	0
18237645	4	6	5	3	18	0	0	6	-2
18273465	4	4	5	5	18	0	-2	6	0
12783546	5	4	5	4	18	6	2	6	-2
12738654	5	3	4	6	18	6	4	6	0
12836754	5	5	4	4	18	0	6	6	-4
18236574	5	5	4	4	18	0	6	4	-6
18237546	3	6	5	4	18	4	0	6	-6

Tabela 3.5: Ordens dos experimentos num planejamento  $2^{4-1}$ 

Conclusão: As melhores seqüências sob o ponto de vista dos "números de mudanças" tem 14 mudanças, sendo que somente 2 seqüências aparecem na Tabela 3.5. A melhor seqüência sob o ponto de vista do tempo de contagem tem uma contagem máxima igual a 2, mas o número de mudanças é igual a 22, pois a seqüência em questão não está listada na Tabela 3.5; de todas as seqüências listadas na Tabela 3.5, a melhor seqüência tem a contagem máxima igual à 4 (12873564).

### 3.1.3 Planejamento $2^{5-2}$

O planejamento  $2^{5-2}$  é de resolução III e pode ser definido, por exemplo, pela relação definidora  $I = 124 = 135 = 2345$ . Todos os planejamentos  $2^{5-2}$  obtidas das 5 primeiras colunas da tabela do planejamento  $2_{III}^{7-4}$  são equivalentes sob o formato da mudança de variável. Podemos novamente classificar várias ordens de ensaios em termos do número de mudanças e tempo de contagem. Existem  $8! = 40320$  possíveis escolhas onde dividimos em 630 conjuntos distintos de 64 ordens de ensaios equivalentes. Os ensaios equivalentes são obtidos da seguinte maneira. Existem  $5! = 120$  permutações possíveis das variáveis 1, 2, 3, 4 = 12 e 5 = 13, porém 8 dão preferência às ordens de ensaios equivalentes. Os sinais de uma ou mais colunas independentes podem ser trocados em 8 maneiras. Assim, existem  $8 \times 8 = 64$  ordens por conjunto.

Temos, na Tabela 3.6, a classificação da ordem dos ensaios num planejamento fatorial  $2^{5-2}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

NM	NOE	NODE	NODE com a CMT de:									
			0	2	4	6	8	10	12	14	16	
15	128	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
16	512	8	0	0	0	0	2	0	4	0	0	2
17	2304	36	0	0	0	0	1	6	14	3	12	
18	4096	64	0	0	0	0	7	17	14	10	16	
19	9088	142	0	0	0	1	9	34	41	31	26	
20	8064	126	0	0	2	4	19	29	34	22	16	
21	9088	142	0	0	1	4	27	47	32	19	12	
22	4096	64	0	0	3	10	17	16	12	4	2	
23	2304	36	0	0	2	9	7	6	9	1	2	
24	512	8	0	1	3	2	1	1	0	0	0	
25	128	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	
Total	40320	630	0	1	11	30	92	156	160	90	90	

Tabela 3.6: Classificação da ordem dos ensaios num planejamento  $2^{5-2}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

Ordem dos ensaios	Mudança nas variáveis					Total	Contagem de tempo p/ variável				
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
12486573	2	3	2	5	4	16	-8	8	8	-8	0
13726845	2	4	5	2	3	16	8	0	8	8	-8
13267584	3	5	2	2	5	17	8	8	8	8	-8
12738654	5	3	4	4	3	19	6	4	6	6	-4
17248653	2	5	4	5	4	20	0	2	4	-2	4
12784563	6	3	4	3	4	20	0	4	4	-4	4
17248635	2	6	5	4	3	20	0	0	6	0	2
12748563	6	3	4	3	4	20	0	4	6	-4	6
12748653	4	3	4	5	4	20	-2	4	6	-2	4
17248563	4	5	4	3	4	20	2	2	4	-4	6
12783654	7	3	4	4	3	21	4	4	4	4	-4
12784536	5	4	5	3	4	21	2	2	6	-4	4
12873654	5	3	4	4	5	21	2	4	4	2	-6
12837564	3	3	4	6	5	21	4	4	6	0	-6
17248536	3	6	5	3	4	21	4	0	6	-4	6

Tabela 3.7: Ordens dos experimentos num planejamento  $2^{5-2}$

Conclusão: As melhores seqüências sob o ponto de vista dos "números de mudanças" tem 16 mudanças, sendo que somente 2 seqüências aparecem na Tabela 3.7. A melhor seqüência sob o ponto de vista do tempo de contagem tem uma contagem máxima igual a 2, mas o número de mudanças é igual a 24, pois a seqüência em questão não está listada na Tabela 3.7; de todas as 15 seqüências listadas na Tabela 3.7, a melhor seqüência tem a contagem máxima igual à 8 (12486573).

### 3.1.4 Planejamento $2^{6-3}$

O planejamento  $2^{6-3}$  é de resolução III e pode ser definido, por exemplo, pela relação definidora  $I = 124 = 135 = 236 = 2345 = 1346 = 1256 = 456$ . Todos os planejamentos  $2^{6-3}$  obtidos das 6 primeiras colunas da tabela do planejamento  $2_{III}^{7-4}$  são equivalentes sob o formato da mudança de variável. Existem  $8! = 40320$  possíveis escolhas onde dividimos em 210 conjuntos distintos de 192 ordens de ensaios equivalentes. Os ensaios equivalentes são obtidos da seguinte maneira. Existem  $6! = 720$  permutações possíveis das variáveis 1, 2, 3, 4 = 12, 5 = 13 e 6 = 23, porém 24 dão preferência às ordens de ensaios equivalentes. Os sinais de uma ou mais colunas independentes podem ser trocados em 8 maneiras. Assim, existem  $24 \times 8 = 192$  ordens por conjunto.

Temos, na Tabela 3.8, a classificação da ordem dos ensaios num planejamento fatorial  $2^{6-3}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

NM	NOE	NODE	NODE com a CMT de:								
			0	2	4	6	8	10	12	14	16
21	1152	6	0	0	0	0	1	0	3	0	2
22	3456	18	0	0	0	0	0	4	6	2	6
23	10368	54	0	0	0	0	3	15	14	12	10
24	10368	54	0	0	0	0	1	11	18	14	10
25	10368	54	0	0	0	1	10	16	15	6	6
26	3456	18	0	0	0	0	2	6	6	2	2
27	1152	6	0	0	1	3	2	0	0	0	0
Total	40320	210	0	0	1	4	19	52	62	36	36

Tabela 3.8: Classificação da ordem dos ensaios num planejamento  $2^{6-3}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

Ordem dos ensaios	Mudança nas variáveis						Total	Contagem de tempo p/ variável					
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
12457863	4	5	2	5	2	3	21	0	8	8	-8	8	-8
14268753	2	5	2	5	4	5	23	-8	6	8	-6	0	-6
12468753	2	5	2	7	4	3	23	-8	8	8	-4	0	-8
14268573	2	5	2	3	4	7	23	-8	8	8	-8	0	-4
12367854	7	5	2	2	5	3	24	4	8	8	8	-8	-8
14627853	4	5	4	3	6	3	25	-6	6	6	-4	0	-4
14627538	3	5	5	4	4	4	25	-2	8	8	-2	2	0
14257683	4	5	2	5	2	7	25	0	8	8	-8	8	-4
14627583	4	5	4	3	4	5	25	-4	8	6	-4	2	-2
14627835	4	4	5	4	5	3	25	-6	4	8	-2	-2	-4
14267583	4	5	2	3	4	7	25	-4	8	8	-4	4	-4
14628735	2	4	5	4	7	3	25	-8	4	8	-4	-4	-4
14267853	4	5	2	3	6	5	25	-6	6	8	-4	2	-6
14628753	2	5	4	5	6	3	25	-8	6	6	-6	-2	-4
12467853	4	5	2	5	6	3	25	-6	8	8	-2	2	-8
14628573	2	5	4	3	6	5	25	-8	8	6	-8	-2	-2
12358764	5	5	2	4	7	3	26	8	8	8	0	-4	-8
14628537	2	5	5	3	7	4	26	-8	8	8	-8	-4	0
14672853	4	7	4	3	6	3	27	-4	4	4	-4	0	-4

Tabela 3.9: Ordens dos experimentos num planejamento  $2^{6-3}$ 

Conclusão: As melhores seqüências sob o ponto de vista dos "números de mudanças" tem 21 mudanças, sendo que somente uma seqüência aparece na Tabela 3.9. A melhor seqüência sob o ponto de vista do tempo de contagem tem uma contagem máxima igual a 4, mas o número de mudanças é igual a 27, e a seqüência em questão que está listada na Tabela 3.9 é (14672853), exatamente a 19ª ordem; de todas as 19 seqüências listadas na Tabela 3.9, a melhor seqüência tem a contagem máxima igual à 8 (12457863).

### 3.1.5 Planejamento $2^{7-4}$

O planejamento  $2^{7-4}$  é de resolução III e pode ser definido, por exemplo, pela relação definidora  $I = 124 = 135 = 236 = 2345 = 1346 = 1256 = 456 = 347 = 257 = 167 = 1457 = 2467 = 3567 = 1234567$ . Todos os planejamentos  $2^{7-4}$  obtidos de todas as colunas da tabela do planejamento  $2_{III}^{7-4}$  são equivalentes sob o formato da mudança de variável. Note que todas as ordens de ensaios têm 28 mudanças. Existem  $8! = 40320$  possíveis escolhas onde dividimos em 30 conjuntos distintos de 1344 ordens de ensaios equivalentes. Os ensaios equivalentes são obtidos da seguinte maneira. Existem  $7! = 5040$  permutações possíveis das variáveis 1, 2, 3, 4 = 12, 5 = 13, 6 = 23 e 7 = 123, porém 168 dão preferência às ordens de ensaios equivalentes. Os sinais de uma ou mais colunas

independentes podem ser trocados em 8 maneiras. Assim, existem  $168 \times 8 = 1344$  ordens por conjunto.

Temos, na Tabela 3.10, a classificação da ordem dos ensaios num planejamento fatorial  $2^{7-4}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

NM	NOE	NODE	NODE com a CMT de:								
			0	2	4	6	8	10	12	14	16
28	40320	30	0	0	0	0	1	7	10	6	6

Tabela 3.10: Classificação da ordem dos ensaios num planejamento  $2^{7-4}$  pelo número de mudanças e a contagem de tempo.

Ordem dos ensaios	Mudança nas variáveis							Total	Contagem de tempo p/ variável						
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
12358764	5	5	2	4	7	3	2	28	8	8	8	0	-4	-8	-8
12357648	3	5	3	4	6	4	3	28	10	10	10	4	0	-4	-2
12357846	3	4	3	5	6	3	4	28	10	6	10	0	0	-8	-6
12358674	5	5	2	4	5	5	2	28	6	10	8	0	-6	-6	-8
12357684	3	5	2	4	5	5	4	28	10	10	8	4	-2	-6	-4
12358647	4	5	3	5	5	4	2	28	4	10	10	-2	-6	-4	-8
12357864	3	5	2	6	5	3	4	28	10	8	8	2	-2	-8	-6
12358746	5	4	3	5	6	3	2	28	8	6	10	-2	-2	-8	-8
12356487	4	3	3	5	7	2	4	28	4	12	12	0	-4	0	-4
12356478	5	3	3	6	6	2	3	28	6	12	12	2	-2	0	-2
12356847	4	3	3	5	5	4	4	28	4	12	10	0	-6	-2	-6
12357486	3	4	3	5	4	5	4	28	10	6	12	0	2	-6	-4
12356748	5	3	3	4	6	4	3	28	8	12	10	4	-2	-2	-2
12357468	3	5	3	6	4	4	3	28	10	8	12	2	2	-4	-2
12356784	5	3	2	4	7	3	4	28	8	12	8	4	-4	-4	-4
12358467	4	5	3	3	7	4	2	28	4	8	12	-4	-4	-4	-8
12356874	5	3	2	6	5	3	4	28	6	12	8	2	-6	-4	-6
12358476	5	4	3	3	6	5	2	28	6	6	12	-4	-2	-6	-8
12354678	5	5	3	4	6	2	3	28	6	10	14	0	0	0	-2
12354687	4	5	3	5	5	2	4	28	4	10	14	-2	-2	0	-4
12354768	5	5	3	4	4	4	3	28	8	8	14	0	2	-2	-2
12354876	5	4	3	3	6	3	4	28	6	6	14	-4	0	-4	-6
12354786	5	4	3	5	4	3	4	28	8	6	14	-2	2	-4	-4
12354867	4	5	3	3	5	4	4	28	4	8	14	-4	-2	-2	-6
12345678	7	3	1	4	6	2	5	28	4	8	16	0	0	0	0
12345768	5	5	1	4	4	4	5	28	6	6	16	0	2	-2	0
12345687	6	3	1	5	5	2	6	28	2	8	16	-2	-2	0	-2
12345876	7	4	1	3	6	3	4	28	4	4	16	-4	0	-4	-4
12345786	5	4	1	5	4	3	6	28	6	4	16	-2	2	-4	-2
12345867	6	5	1	3	5	4	4	28	2	6	16	-4	-2	-2	-4

Tabela 3.11: Ordens dos experimentos num planejamento  $2^{7-4}$

Conclusão: Como as 30 ordens distintas de ensaios listadas na Tabela 3.11 possuem 28 mudanças, a melhor seqüência sob o ponto de vista da contagem máxima tem

uma contagem máxima igual a 8, a seqüência em questão que está listada na Tabela 3.11 é (12358764).

### 3.1.6 Comentários Gerais

Para fazer a verificação da melhor ordem de ensaios em um planejamento de 8 ensaios (planejamentos  $2^3$ ,  $2^{4-1}$ ,  $2^{5-2}$ ,  $2^{6-3}$  e  $2^{7-4}$ ) entre todos os 40320 permutações, é necessário o balanceamento entre o número de mudanças e a contagem máxima de tempo, como mostram as Tabelas 3.2, 3.4, 3.6 e 3.8, exceto a Tabela 3.10, em que todas as ordens de ensaios possuem 28 mudanças. No caso do planejamento  $2^{7-4}$ , verificamos a melhor ordem de ensaios baseado somente na contagem máxima de tempo. Portanto, esses exemplos mostram a falta de balanceamento entre o número de mudanças e a contagem máxima de tempo, que acarretam em custos altíssimos, em especial nas aplicações industriais.

Para facilitar a melhor verificação da melhor ordem de ensaios, foi desenvolvido um programa computacional que faz as simulações de todos os 40320 possíveis arranjos para verificar qual apresenta a melhor seqüência de experimentos com relação ao número de mudanças e à contagem de tempo em cada variável.

Com equipamentos computacionais presentes, a verificação exaustiva de planejamentos com 16 ou mais ensaios é uma tarefa complexa em termos de tempo computacional, ou seja, é preciso muito tempo para a simulação, devido ao grande número de arranjos possíveis.

## 3.2 Critério Clássico

### Técnicas de Draper e Stoneman (1968)

Em um planejamento fatorial com 8 ensaios (planejamento fatorial completo  $2^3$ , planejamento fatorial fracionário  $2^{4-1}$ ,  $2^{5-2}$ ,  $2^{6-3}$  e  $2^{7-4}$ ), existem 8 observações, onde elas podem ser consideradas em  $8! = 40320$  ordens de ensaios diferentes. Quando a ordem dos experimentos é de interesse, algumas dessas 40320 ordens são melhores do que as outras.

Na Técnica de Draper e Stoneman (TDS), somente os efeitos principais são de

interesse; a presença de um efeito linear está presente; os custos de mudança de fatores são iguais. Aqui, as 40320 ordens se reduzem à 840 subconjuntos de 48 ordens equivalentes. A TDS avalia todos os 840 subconjuntos e escolhe os 12 melhores.

Dickinson (1974) estendeu os resultados da TDS para planejamentos fatoriais  $2^4$  e  $2^5$ , novamente considerando os efeitos principais, tendência linear e custos iguais para mudanças de níveis dos fatores. Em planejamentos fatoriais  $2^4$  existem  $16! = 2.1 \times 10^{13}$  ordens diferentes; em planejamentos fatoriais  $2^5$  existem  $32! = 2.6 \times 10^{35}$  ordens diferentes. Para esses casos como o planejamento fatorial com grande número de fatores, ou ainda, em planejamentos fatoriais  $2^k$ ,  $k \geq 4$ , é computacionalmente difícil avaliar todas as seqüências possíveis, pois o número de ordens diferentes em planejamentos maiores é muito grande.

Como exemplo, considerar um planejamento fatorial completo  $2^3$  com dois níveis e 3 fatores, com modelo,

$$Y = \beta_o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon, \quad (3.1)$$

ou na forma vetorial,

$$\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{Y} = ((1), a, b, ab, c, ac, bc, abc)$  é o vetor dos experimentos na forma padronizada usual,  $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_o, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8)$  e a matriz de planejamento é dado por:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Na prática, observar que o pesquisador usualmente aleatoriza o experimento entre

as  $8! = 40320$  permutações possíveis dos pontos experimentais (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc. Na presença de uma tendência linear, uma boa escolha para a seqüência experimental pode levar a melhores resultados (ver por exemplo, Daniel e Wilcoxon, 1966; Draper e Stoneman, 1968; ou Joiner e Campbell, 1976).

### Medidas de Eficiência

Na prática é necessário um balanceamento entre planejamentos ótimos (com ótimas propriedades estatísticas), mas com grande custo e planejamentos baratos, mas não muito eficientes.

Um critério clássico para a escolha da ordem dos 8 pontos experimentais seria uma medida de qualidade, dada por  $|X'X| = \det(X'X)$ , em que X é uma matriz de planejamento. Nesse caso, podemos usar este planejamento como um modelo de regressão linear múltipla.

Na presença de uma tendência linear, o modelo é dado por,

$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \varepsilon_i, \quad (3.4)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, 8$ ;  $\beta_4$  mede o efeito da tendência linear;  $\beta' = (\beta_o, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$  e a matriz de planejamento é dada por,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Outro critério clássico para a escolha da ordem dos 8 pontos experimentais seria associada à menores variâncias e covariâncias para os estimadores de mínimos quadrados (EMQ) para  $\beta' = (X'X)^{-1}X'Y$ .

Outro critério clássico seria a escolha de X tal que  $|X'X|^{1/p}$ , onde p é o número

de colunas em  $X$ , tenha maior valor possível. Para isso, a medida de eficiência é dada pela razão da qualidade para o custo, ou seja,

$$EF = \frac{|X'X|^{1/p}}{CUSTO} \quad (3.6)$$

Portanto, devemos escolher uma permutação  $u_1, u_2, \dots, u_8$  entre as  $8! = 40320$  possíveis permutações das ordens experimentais  $1, 2, \dots, 8$  representando os pontos experimentais  $(1), a, b, ab, c, ac, bc$  e  $abc$  usuais da forma padronizada do planejamento fatorial completo  $2^3$ .

Neste caso, a matriz  $X$  é dada por,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & u_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & u_2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u_4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & u_5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & u_6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & u_7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & u_8 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Assim,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{l}'_1 \mathbf{u} \\ 0 & 8 & 0 & 0 & \mathbf{l}'_2 \mathbf{u} \\ 0 & 0 & 8 & 0 & \mathbf{l}'_3 \mathbf{u} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & \mathbf{l}'_4 \mathbf{u} \\ \mathbf{l}'_1 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_2 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_3 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_4 \mathbf{u} & \mathbf{u}' \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{l}'_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ;  $\mathbf{l}'_2 = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$ ;  $\mathbf{l}'_3 = (-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1)$ ;  $\mathbf{l}'_4 = (-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)$  e  $\mathbf{u}' = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$ .

A título de ilustração numérica, considerar a permutação padrão  $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  em  $X$ . Com a matriz de planejamento acima, a matriz  $X'X$  é dada por:

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 \\ 36 & 4 & 8 & 16 & 204 \end{bmatrix}$$

Neste caso,  $|X'X|$  é próximo de zero, portanto, a matriz é singular.

### Outras escolhas para X

A seguir vamos considerar várias permutações possíveis.

**Exemplo 3.1:** Uma ordem para os experimentos: 4,1,7,5,2,8,3,6

A matriz X (ver (3.7)) é dada por,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 36 & 4 & 6 & 2 & 204 \end{bmatrix}$$

$$|X'X| = 143360$$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.70357143 & 0.06428571 & 0.09642857 & 0.03214286 & -0.12857143 \\ 0.06428571 & 0.13214286 & 0.01071429 & 0.00357143 & -0.01428571 \\ 0.09642857 & 0.01071429 & 0.14107143 & 0.00535714 & -0.02142857 \\ 0.03214286 & 0.00357143 & 0.00535714 & 0.12678571 & -0.00714283 \\ -0.12857143 & -0.01428571 & -0.02142857 & -0.00714286 & 0.02857143 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.2:** Uma outra ordem para os experimentos: 2,1,3,5,4,8,7,6

A matriz X (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (2, 1, 3, 5, 4, 8, 7, 6)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 14 \\ 36 & 4 & 6 & 14 & 204 \end{bmatrix}$$

Assim,  $|X'X| = 45056$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.9659091 & 0.2045455 & 0.3068182 & 0.7159091 & -0.4090909 \\ 0.2045455 & 0.1477273 & 0.0340909 & 0.0795455 & -0.0454546 \\ 0.3068182 & 0.0340909 & 0.1761364 & 0.1193182 & -0.0681818 \\ 0.7159091 & 0.0795455 & 0.1193182 & 0.4034091 & -0.1590909 \\ -0.4090909 & -0.0454546 & -0.0681818 & -0.1590909 & 0.0909091 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.3:** Uma outra ordem para os experimentos: 1,2,8,7,3,5,6,4

A matriz X (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (1, 2, 8, 7, 3, 5, 6, 4)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 36 & 0 & 14 & 0 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 71680$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2821429 & 0 & 0.45 & 0 & -0.2571429 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0.3 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ -0.2571429 & 0 & -0.1 & 0 & 0.0571429 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.4:** Uma outra ordem para os experimentos: 2,4,7,5,1,6,8,3

A matriz  $X$  (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (2, 4, 7, 5, 1, 6, 8, 3)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 36 & 0 & 10 & 0 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 120832$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8114407 & 0 & 0.1906780 & 0 & -0.1525424 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1906780 & 0 & 0.1779661 & 0 & -0.0423729 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ -0.1525424 & 0 & -0.0423729 & 0 & 0.0338983 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.5:** Uma outra ordem para os experimentos: 1,4,8,6,5,7,3,2

A matriz X (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (1, 4, 8, 6, 5, 7, 3, 2)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -2 \\ 36 & 2 & 2 & -2 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 165888$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.62500000 & 0.02777778 & 0.02777778 & -0.02777778 & -0.11111111 \\ 0.02777778 & 0.12654321 & 0.00154321 & -0.00154321 & -0.00617284 \\ 0.02777778 & 0.00154321 & 0.12654321 & -0.00154321 & -0.00617284 \\ -0.02777778 & -0.00154321 & -0.00154321 & 0.12654321 & 0.00617284 \\ -0.11111111 & -0.00617284 & -0.00617284 & 0.00617284 & 0.02469136 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.6:** Uma outra ordem para os experimentos: 3,1,7,6,2,8,4,5

A matriz X (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (3, 1, 7, 6, 2, 8, 4, 5)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 36 & 4 & 8 & 2 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 129024$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.76785714 & 0.07142857 & 0.14285714 & 0.03571429 & -0.14285714 \\ 0.07142857 & 0.13293651 & 0.01587302 & 0.00396825 & -0.01587302 \\ 0.14285714 & 0.01587302 & 0.15674603 & 0.00793651 & -0.03174603 \\ 0.03571429 & 0.00396825 & 0.00793651 & 0.12698413 & -0.00793651 \\ -0.14285714 & -0.01587302 & -0.03174603 & -0.00793651 & 0.03174603 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.7:** Uma outra ordem para os experimentos: 7,4,6,1,2,8,3,5

A matriz X (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (7, 4, 6, 1, 2, 8, 3, 5)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 36 & 0 & -6 & 0 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 153600$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.665 & 0 & -0.09 & 0 & -0.12 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ -0.09 & 0 & 0.14 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ -0.12 & 0 & 0.02 & 0 & 0.02666667 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.8:** Uma outra ordem para os experimentos: 5,4,7,1,6,2,8,3

A matriz X (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (5, 4, 7, 1, 6, 2, 8, 3)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 36 & -16 & 2 & 2 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 36864$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.375 & -1 & 0.125 & 0.125 & -0.5 \\ -1 & 0.56944444 & -0.05555556 & -0.05555556 & 0.22222222 \\ 0.125 & -0.05555556 & 0.13194444 & 0.00694444 & -0.02777778 \\ 0.125 & -0.05555556 & 0.00694444 & 0.13194444 & -0.02777778 \\ -0.5 & 0.22222222 & -0.02777778 & -0.02777778 & 0.11111111 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.9:** Uma outra ordem para os experimentos: 8,3,5,6,4,1,7,2

A matriz  $X$  (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (8, 3, 5, 6, 4, 1, 7, 2)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 36 & -12 & 4 & -8 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 57344$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5714286 & -0.4821429 & 0.1607143 & -0.3214286 & -0.3214286 \\ -0.4821429 & 0.2857143 & -0.0535714 & 0.1071429 & 0.1071429 \\ 0.1607143 & -0.0535714 & 0.1428571 & -0.0357143 & -0.0357143 \\ -0.3214286 & 0.1071429 & -0.0357143 & 0.1964286 & 0.0714286 \\ -0.3214286 & 0.1071429 & -0.0357143 & 0.0714286 & 0.0714286 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.10:** Uma outra ordem para os experimentos: 1,7,6,4,3,8,2,5

A matriz  $X$  (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (1, 7, 6, 4, 3, 8, 2, 5)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 36 & 12 & -2 & 0 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 96256$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.98670213 & 0.28723404 & -0.04787234 & 0 & -0.19148936 \\ 0.28723404 & 0.22074468 & -0.01595745 & 0 & -0.06382979 \\ -0.04787234 & -0.01595745 & 0.12765957 & 0 & 0.0106383 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ -0.19148936 & -0.06382979 & 0.0106383 & 0 & 0.04255319 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.11:** Uma outra ordem para os experimentos: 2,1,7,4,3,5,8,6

A matriz  $X$  (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (2, 1, 7, 4, 3, 5, 8, 6)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 36 & -4 & 14 & 8 & 204 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $|X'X| = 30720$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.825 & -0.3 & 1.05 & 0.6 & -0.6 \\ -0.3 & 0.1583333 & -0.1166667 & -0.0666667 & 0.0666667 \\ 1.05 & -0.1166667 & 0.5333333 & 0.2333333 & -0.2333333 \\ 0.6 & -0.0666667 & 0.2333333 & 0.2583333 & -0.1333333 \\ -0.6 & 0.0666667 & -0.2333333 & -0.1333333 & 0.1333333 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.12:** Uma outra ordem para os experimentos: 5,4,1,6,8,3,2,7

A matriz X (ver (3.7)) com  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (5, 4, 1, 6, 8, 3, 2, 7)$  leva à,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 36 & 4 & -4 & 4 & 204 \end{bmatrix}$$

$$|X'X| = 147456$$

Portanto, a inversa de  $X'X$  é dada por:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6875 & 0.0625 & -0.0625 & 0.0625 & -0.125 \\ 0.0625 & 0.13194444 & -0.00694444 & 0.00694444 & -0.01388889 \\ -0.0625 & -0.00694444 & 0.13194444 & -0.00694444 & 0.01388889 \\ 0.0625 & 0.00694444 & -0.00694444 & 0.13194444 & -0.01388889 \\ -0.125 & -0.01388889 & 0.01388889 & -0.01388889 & 0.02777778 \end{bmatrix}$$

Com base nos resultados dos exemplos 3.1 a 3.12, vimos que a seqüência  $\mathbf{u}_5$ , dada no exemplo 3.5 é a mais eficiente, pois o determinante tem o maior valor, em que  $|X'X| = 165888$ , e os números da diagonal principal da matriz inversa são bem menores do que para as outras escolhas, enquanto que a seqüência menos eficiente é a seqüência  $\mathbf{u}_{11}$ , dada no exemplo 3.11, pois o determinante tem o menor valor, em que  $|X'X| = 30720$ , e os números da diagonal principal da matriz inversa são maiores. Portanto, quanto maior

o determinante de  $X'X$ , menores são os valores da diagonal principal da matriz inversa de  $X'X$ , pois a inversa de  $X'X$  é proporcional à  $Var(\boldsymbol{\beta})$ , que é dada por

$$Var(\boldsymbol{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}. \quad (3.9)$$

No caso do planejamento  $2^3$ , a matriz  $X$  tem 5 colunas, ou seja,  $p = 5$  (somente efeitos principais, tendência linear, custos iguais).

### 3.3 Critério Bayesiano

Neste caso, utilizaremos a abordagem Bayesiana, assumindo o modelo,

$$\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta} \sim N(X\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 I_n) \quad (3.10)$$

com distribuição a priori,

$$\boldsymbol{\theta} \sim N(\boldsymbol{\theta}_0, \sigma^2 R^{-1}) \quad (3.11)$$

com  $\boldsymbol{\theta}_0 = (\beta_0^o, \beta_1^o, \beta_2^o, \beta_3^o, \beta_4^o)$  conhecidos e  $R$  dado por  $R = \text{diag}(r_{00}, r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{44})$  conhecido, a distribuição a posteriori para  $\boldsymbol{\beta}$  é dado em (2.3) com  $\boldsymbol{\theta}^* = (X'X + R)^{-1}(X'\mathbf{Y} + R\boldsymbol{\theta}_0)$  e  $\sigma^2 D(X) = \sigma^2(X'X + R)^{-1}$ .

Segundo o critério Bayesiano, escolher a matriz de planejamento que minimiza a matriz de variância-covariância a posteriori  $\sigma^2 D(X) = \sigma^2(X'X + R)^{-1}$ . Outra possibilidade é escolher a ordem experimental tal que  $|X'X + R|^{1/p}$  onde  $p$  é o número de colunas de  $X$ , seja máxima.

Portanto, devemos escolher uma permutação  $u_1, u_2, \dots, u_8$  entre as  $8! = 40320$  possíveis permutações das ordens experimentais 1, 2, ..., 8 representando os pontos experimentais (1), a, b, ab, c, ac, bc e abc usuais da forma padronizada do planejamento fatorial completo  $2^3$ .

Neste caso, a matriz  $X$  é dada por,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & u_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & u_2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u_4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & u_5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & u_6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & u_7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & u_8 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Assim,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{l}'_1 \mathbf{u} \\ 0 & 8 & 0 & 0 & \mathbf{l}'_2 \mathbf{u} \\ 0 & 0 & 8 & 0 & \mathbf{l}'_3 \mathbf{u} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & \mathbf{l}'_4 \mathbf{u} \\ \mathbf{l}'_1 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_2 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_3 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_4 \mathbf{u} & \mathbf{u}' \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{l}'_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ;  $\mathbf{l}'_2 = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$ ;  $\mathbf{l}'_3 = (-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1)$ ;  $\mathbf{l}'_4 = (-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)$  e  $\mathbf{u}' = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$ .

Portanto, devemos escolher uma permutação  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$  para a ordem dos experimentos que maximiza  $|X'X + R|^{1/5}$  onde,

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 8 + r_{00} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{l}'_1 \mathbf{u} \\ 0 & 8 + r_{11} & 0 & 0 & \mathbf{l}'_2 \mathbf{u} \\ 0 & 0 & 8 + r_{22} & 0 & \mathbf{l}'_3 \mathbf{u} \\ 0 & 0 & 0 & 8 + r_{33} & \mathbf{l}'_4 \mathbf{u} \\ \mathbf{l}'_1 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_2 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_3 \mathbf{u} & \mathbf{l}'_4 \mathbf{u} & \mathbf{u}' \mathbf{u} + r_{44} \end{bmatrix}$$

A título de ilustração numérica, considerar a permutação padrão  $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  em X. Como temos a matriz de planejamento na Seção 3.2, a matriz  $X'X$  é dada por,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 \\ 36 & 4 & 8 & 16 & 204 \end{bmatrix}$$

Neste caso,  $|X'X|$  é próximo de zero, portanto, a matriz  $X'X$  é singular.

Considere o critério Bayesiano  $|X'X + R|$  com  $R = \text{diag}(1, 2, 3, 2, 2)$ . Assim,

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 16 \\ 36 & 4 & 8 & 16 & 206 \end{bmatrix}$$

Neste caso,  $|X'X + R| = 286920$ , portanto, a matriz  $X'X+R$  já não é mais singular. Portanto, este determinante tem o menor valor.

Com relação aos exemplos 1 à 12, já temos a matriz  $X$ , a matriz  $X'X$  e  $|X'X|$ . Considerando o critério Bayesiano  $|X'X + R|$  com  $R = \text{diag}(1, 2, 3, 2, 2)$ , vamos apresentar alguns exemplos:

**Exemplo 3.13:** Uma ordem para os experimentos: 4,1,7,5,2,8,3,6

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 36 & 4 & 6 & 2 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 561600$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3931624 & 0.0282051 & 0.0384615 & 0.0141026 & -0.0705128 \\ 0.0282051 & 0.1028205 & 0.0038462 & 0.0014103 & -0.0070513 \\ 0.0384615 & 0.0038462 & 0.0961539 & 0.0019231 & -0.0096154 \\ 0.0141026 & 0.0014103 & 0.0019231 & 0.1007051 & -0.0035256 \\ -0.0705128 & -0.0070513 & -0.0096154 & -0.0035256 & 0.0176282 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.14:** Uma outra ordem para os experimentos: 2,1,3,5,4,8,7,6

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 36 & 4 & 6 & 14 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 371520$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5374677 & 0.0426357 & 0.0581395 & 0.1492248 & -0.1065891 \\ 0.0426357 & 0.1042636 & 0.0058140 & 0.0149225 & -0.0106589 \\ 0.0581395 & 0.0058140 & 0.0988372 & 0.0203488 & -0.0145349 \\ 0.1492248 & 0.0149225 & 0.0203488 & 0.1522287 & -0.0373062 \\ -0.1065891 & -0.0106589 & -0.0145349 & -0.0373062 & 0.0266473 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.15:** Uma outra ordem para os experimentos: 1,2,8,7,3,5,6,4

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 36 & 0 & 14 & 0 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 437400$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4732510 & 0 & 0.1152263 & 0 & -0.090535 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1152263 & 0 & 0.1275720 & 0 & -0.0288066 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.090535 & 0 & -0.0288066 & 0 & 0.0226337 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.16:** Uma outra ordem para os experimentos: 2,4,7,5,1,6,8,3

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 36 & 0 & 10 & 0 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 523800$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4135166 & 0 & 0.0687285 & 0 & -0.0756014 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0687285 & 0 & 0.1065292 & 0 & -0.0171821 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.0756014 & 0 & -0.0171821 & 0 & 0.0189003 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.17:** Uma outra ordem para os experimentos: 1,4,8,6,5,7,3,2

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 \\ 36 & 2 & 2 & -2 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 602280$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3741117 & 0.0131500 & 0.0119546 & -0.0131500 & -0.0657501 \\ 0.0131500 & 0.1006575 & 0.0005977 & -0.0006575 & -0.0032875 \\ 0.0119546 & 0.0005977 & 0.0914525 & -0.0005977 & -0.0029886 \\ -0.0131500 & -0.0006575 & -0.0005977 & 0.1006575 & 0.0032875 \\ -0.0657501 & -0.0032875 & -0.0029886 & 0.0032875 & 0.0164375 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.18:** Uma outra ordem para os experimentos: 3,1,7,6,2,8,4,5

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 36 & 4 & 8 & 2 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 536400$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4064131 & 0.0295302 & 0.0536913 & 0.0147651 & -0.0738255 \\ 0.0295302 & 0.1029530 & 0.0053691 & 0.0014765 & -0.0073825 \\ 0.0536913 & 0.0053691 & 0.1006711 & 0.0026846 & -0.0134228 \\ 0.0147651 & 0.0014765 & 0.0026846 & 0.1007383 & -0.0036913 \\ -0.0738255 & -0.0073825 & -0.0134228 & -0.0036913 & 0.0184564 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.19:** Uma outra ordem para os experimentos: 7,4,6,1,2,8,3,5

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 36 & 0 & -6 & 0 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 581400$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3835569 & 0 & -0.0371517 & 0 & -0.0681115 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0371517 & 0 & 0.0959752 & 0 & 0.0092879 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.0681115 & 0 & 0.0092879 & 0 & 0.0170279 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.20:** Uma outra ordem para os experimentos: 5,4,7,1,6,2,8,3

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 36 & -16 & 2 & 2 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 352800$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5600907 & -0.1795918 & 0.0204081 & 0.0224490 & -0.1122449 \\ -0.1795918 & 0.1718367 & -0.0081633 & -0.0089796 & 0.0448980 \\ 0.0204081 & -0.0081633 & 0.0918367 & 0.0010204 & -0.0051020 \\ 0.0224490 & -0.0089796 & 0.0010204 & 0.1011224 & -0.0056122 \\ -0.1122449 & 0.0448980 & -0.0051020 & -0.0056122 & 0.0280612 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.21:** Uma outra ordem para os experimentos: 8,3,5,6,4,1,7,2

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -8 \\ 36 & 12 & 4 & -8 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 393480$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5136729 & -0.1207685 & 0.0365965 & -0.0805123 & -0.1006404 \\ -0.1207685 & 0.1362306 & -0.0109790 & 0.0241537 & 0.0301921 \\ 0.0365965 & -0.0109790 & 0.0942360 & -0.0073193 & -0.0091491 \\ -0.0805123 & 0.0241537 & -0.0073193 & 0.1161025 & 0.0201281 \\ -0.1006404 & 0.0301921 & -0.0091491 & 0.0201281 & 0.0251601 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.22:** Uma outra ordem para os experimentos: 1,7,6,4,3,8,2,5

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 36 & 12 & -2 & 0 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 467640$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4498332 & 0.1016166 & -0.0153965 & 0 & -0.0846805 \\ 0.1016166 & 0.1304850 & -0.0046189 & 0 & -0.0254042 \\ -0.0153965 & -0.0046189 & 0.0916089 & 0 & 0.0038491 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.0846805 & -0.0254042 & 0.0038491 & 0 & 0.0211701 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.23:** Uma outra ordem para os experimentos: 2,1,7,4,3,5,8,6

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 8 \\ 36 & -4 & 14 & 8 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 358200$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5533222 & -0.0442211 & 0.1407035 & 0.0884422 & -0.1105528 \\ -0.0442211 & 0.1044221 & -0.0140704 & -0.0088442 & 0.0110553 \\ 0.1407035 & -0.0140704 & 0.1356784 & 0.0281407 & -0.0351759 \\ 0.0884422 & -0.0088442 & 0.0281407 & 0.1176884 & -0.0221105 \\ -0.1105528 & 0.0110553 & -0.0351759 & -0.0221105 & 0.0276382 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.24:** Uma outra ordem para os experimentos: 5,4,1,6,8,3,2,7

A matriz  $X'X + R$  é dada por:

$$X'X + R = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 \\ 36 & 4 & -4 & 4 & 206 \end{bmatrix}$$

$$|X'X + R| = 567720$$

Portanto, a inversa de  $(X'X+R)$  é dada por:

$$(X'X + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3901219 & 0.0279011 & -0.0253646 & 0.0279011 & -0.0697527 \\ 0.0279011 & 0.1027901 & -0.0025365 & 0.0027901 & -0.0069753 \\ -0.0253646 & -0.0025365 & 0.0932150 & -0.0025365 & 0.0063412 \\ 0.0279011 & 0.0027901 & -0.0025365 & 0.1027901 & -0.0069753 \\ -0.0697527 & -0.0069753 & 0.0063412 & -0.0069753 & 0.0174382 \end{bmatrix}$$

Na Tabela 3.12, temos os valores dos determinantes  $|X'X|$  para outras permutações  $\mathbf{u}' = (u_1, \dots, u_8)$ . Também temos na Tabela 3.12, os valores dos determinantes  $|X'X + R|$  com  $R = \text{diag}(1, 2, 3, 2, 2)$  (Critério Bayesiano).

$j$	$\mathbf{u}'_j$	$ X'X $	$ X'X + R $
1	41752836	144360	561600
2	21354876	45056	371520
3	12873564	71680	437400
4	24751683	120832	523800
5	14865732	165888	602280
6	31762845	129024	536400
7	74612835	153600	581400
8	54716283	36864	352800
9	83564172	57344	393480
10	17643825	96256	496440
11	21743586	30720	358200
12	54168327	147456	567720

Tabela 3.12: Valores de  $|X'X|$  e  $|X'X + R|$ 

A partir dos resultados da Tabela 3.12, verificamos que a permutação  $\mathbf{u}_5$  é a mais eficiente, pois o determinante  $|X'X|$  tem maior valor. Além disso, os valores da diagonal principal da matriz inversa  $(X'X)^{-1}$  tem menores valores, isto é, variâncias menores para os estimadores dos coeficientes de regressão. Verificamos também que a permutação  $\mathbf{u}_{11}$  é a menos eficiente, pois o determinante  $|X'X|$  tem menor valor, e os valores da diagonal principal da matriz inversa  $(X'X)^{-1}$  tem maiores valores. Usando o critério Bayesiano  $|X'X + R|$  com  $R = \text{diag}(1, 2, 3, 2, 2)$ , observamos novamente que a permutação  $\mathbf{u}_5$  é a mais eficiente, pois o determinante  $|X'X + R|$  também tem maior valor. Além disso, os valores da diagonal principal da matriz inversa  $(X'X + R)^{-1}$  tem menores valores, isto é, variâncias menores para os estimadores dos coeficientes de regressão. Verificamos também que a permutação  $\mathbf{u}_8$  é a menos eficiente, pois o determinante  $|X'X + R|$  tem menor valor, e os valores da diagonal principal da matriz inversa  $(X'X + R)^{-1}$  tem maiores valores. Portanto, podemos concluir que a permutação  $\mathbf{u}_5$  é a melhor escolha nos dois critérios.

Com todos os resultados acima, observamos que o determinante  $|X'X + R|$  é sempre maior que o determinante  $|X'X|$ , pois a matriz  $R$  faz com que  $|X'X + R|$  seja maior que  $|X'X|$ . Se a matriz  $R$  fosse diagonal em componentes muito pequenos (próximos

de zero), então  $|X'X + R| \approx |X'X|$ , ou seja, trata-se de um planejamento de experimentos Bayesianos usando uma priori não informativa.

### 3.4 Aplicações: Estudos de Casos

Muito tem se dito que a melhor ordem de ensaios se resume tanto sob o ponto de vista de número de mudanças e contagem de tempo quanto sob o ponto de vista dos valores dos determinantes nos enfoques clássico e Bayesiano, utilizando a matriz  $R$  diagonal ou não em cada planejamento. Para isso, escolhemos o planejamento de 8 ensaios em dois níveis, seja ele completo ou fatorial fracionário, em que seria necessário citarmos o artigo "Factor Changes and Linear Effects in Eight-Run Two-Level Factorial Designs", proposto por Draper e Stoneman (1968) com o objetivo de medir a tendências lineares, mostrando qual a melhor escolha de sequências em cada ponto de vista, dependendo da escolha da matriz.

Para isso, devemos considerar as situações em que é fisicamente difícil mudar os fatores ou o tempo necessário para o preparo do equipamento é muito elevado. Portanto, devemos examinar as  $8! = 40320$  ordens de seqüências possíveis para 8 ensaios de cada planejamento. Como exemplo, faremos para o planejamento fatorial  $2^3$  e para o planejamento fatorial fracionário  $2^{4-1}$ . Para os demais planejamentos, seria muito trabalhosa a montagem da matriz correlacionada.

A partir dos sub-itens seguintes, verificamos qual é a melhor seqüência usando os critérios clássico e Bayesiano, utilizando as matrizes diagonais ou correlacionadas.

#### 3.4.1 Planejamento $2^3$

Considere um planejamento fatorial completo  $2^3$  com dois níveis e 3 fatores na presença de tendências lineares, com modelo dado na Seção 3.2 (critério clássico)

Considere os critérios Bayesianos  $|X'X + R1|$  com  $R1 = \text{diag}(1, 2, 3, 2, 2)$ ;  $|X'X + R2|$  com  $R2 = I$ , que é uma matriz identidade;  $|X'X + S1|$  com  $S1$  dado por

$$S1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.5 & -0.3 & 0.1 \\ 0.25 & 2 & -0.8 & 0.15 & 1 \\ 0.5 & -0.8 & 3 & 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.15 & 0.6 & 2 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & -0.3 & 0.5 & 2 \end{bmatrix},$$

e  $|X'X + S2|$  com  $S2$  dado por

$$S2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 & -0.25 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.05 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 1 & 0.5 & -0.1 \\ -0.25 & 0.05 & 0.5 & 1 & 0.15 \\ 0.3 & 0.2 & -0.1 & 0.15 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos os valores dos determinantes  $|X'X|$ ,  $|X'X + R1|$ ,  $|X'X + R2|$ ,  $|X'X + S1|$  e  $|X'X + S2|$  na tabela abaixo:

Seqüência	$ X'X $	$ X'X+R1 $	$ X'X+R2 $	$ X'X+S1 $	$ X'X+S2 $	NM	CMT
14865732	165888	602280	391473	593323.6	378392.3	9	2
12873564	71680	437400	257337	473908.3	248798.1	10	4
14856237	120832	523800	327321	542799.4	315539	10	4
12837564	88064	454680	280665	435073.7	245785	10	6
14865237	94208	476280	289413	505693.8	284002.6	10	6
14856732	172032	613800	400221	589272	380464.2	11	0
14687532	165888	602280	391473	593323.6	378392.3	11	2
14685732	149504	570600	368145	562019.7	359046.1	11	2
14865372	100352	484200	298161	515301.9	279429.9	11	2
14867532	165888	602280	391473	593168.5	374504.1	11	2
18465732	100352	478440	298161	449491.9	283049.4	11	2
14687352	149504	573480	368145	582044.4	353199.3	11	2

Tabela 3.13: Valores de  $|X'X|$ ,  $|X'X + R1|$ ,  $|X'X + R2|$ ,  $|X'X + S1|$  e  $|X'X + S2|$ ,

número de mudanças e contagem máxima de tempo (módulo)

Com base na Tabela 3.13, vimos que a seqüência 14856732 é a melhor escolha nos critérios clássico e Bayesiano utilizando a matrizes diagonais R1 e R2 e a matriz correlacionada S2, enquanto que as seqüências 14865732 e 14687532 são as melhores escolhas no critério Bayesiano utilizando a matriz correlacionada S1, e a seqüência 14865732 é a melhor escolha sob o ponto de vista do número de mudanças e contagem de tempo. Portanto, vimos que não há uma forte relação entre o valor dos determinantes e o número de mudanças ou contagem de tempo no planejamento  $2^3$ , e, como conseqüência, é necessário fazer um balanceamento entre precisão, número de mudanças e contagem de tempo para minimizar os custos.

### 3.4.2 Planejamento $2^{4-1}$

Considere um planejamento fatorial completo  $2^{4-1}$  na presença de tendência linear, com  $7 = 123$ , com modelo

$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \beta_5 X_{5i} + \varepsilon_i,$$

onde  $i = 1, 2, \dots, 8$ ;  $\beta_5$  mede o efeito da tendência linear;  $\beta' = (\beta_o, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$  e a matriz de planejamento é dada por

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & u_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & u_2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & u_4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & u_5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & u_6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & u_7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & u_8 \end{bmatrix}.$$

Considere os critérios Bayesianos  $|X'X + R1|$  com  $R1 = \text{diag}(1, 2, 3, 2, 2, 1)$ ;  $|X'X + R2|$  com  $R2 = I$ , que é uma matriz identidade;  $|X'X + S1|$  com  $S1$  dado por

$$S1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.1 & 0.05 & -0.7 & 0.2 \\ 0.25 & 2 & 0.8 & -0.1 & 0.4 & 0.15 \\ -0.1 & 0.8 & 3 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \\ 0.05 & -0.1 & 0.6 & 2 & 0.1 & -0.3 \\ -0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.1 & 2 & -0.4 \\ 0.2 & 0.15 & 0.2 & -0.3 & -0.4 & 1 \end{bmatrix},$$

e  $|X'X + S2|$ , com  $S2$  dado por

$$S2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.25 & 0.4 & -0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 1 & 0.3 & -0.2 & 0.15 & 0.4 \\ 0.25 & 0.3 & 1 & 0.5 & -0.3 & 0.1 \\ 0.4 & -0.2 & 0.5 & 1 & 0.2 & 0.25 \\ -0.1 & 0.15 & -0.3 & 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.1 & 0.25 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos os valores dos determinantes  $|X'X|$ ,  $|X'X + R1|$ ,  $|X'X + R2|$ ,  $|X'X + S1|$  e  $|X'X + S2|$  na tabela abaixo:

Seqüência	$ X'X $	$ X'X+R1 $	$ X'X+R2 $	$ X'X+S1 $	$ X'X+S2 $	NM	CMT
12873564	557056	4235400	2289789	3831231	2394540	14	4
12837564	557056	4091400	2289789	3357171	2385406	14	6
12783564	491520	4077000	2184813	3819484	2332691	16	6
12837654	753664	4548600	2604717	3881378	2680321	16	6
12873546	491520	4077000	2184813	3693186	2256491	16	6
18237564	753664	4566600	2604717	4087048	2534219	16	6
12873654	753664	4663800	2604717	4350574	2696074	18	4
18237654	557056	4116600	2289789	3645110	2180864	18	4
18273564	753664	4537800	2604717	4531932	2583068	18	4
12873645	720896	4584600	2552229	4272694	2627050	18	6
18237645	327680	3562200	1922373	3024203	1805063	18	6
18273465	720896	4469400	2552229	4403102	2548217	18	6
12783546	425984	3918600	2079837	3681588	2194641	18	6
12738654	655360	4300200	2447253	3680572	2546958	18	6
12836754	917504	4944600	2867157	4420210	2961181	18	6
18236574	917504	4944600	2867157	4571792	2833556	18	6
18237546	294912	3457800	1869885	2862951	1782617	18	6

Tabela 3.14: Valores de  $|X'X|$ ,  $|X'X + R1|$ ,  $|X'X + R2|$ ,  $|X'X + S1|$  e  $|X'X + S2|$ , número de mudanças e contagem máxima de tempo (módulo)

Com base na Tabela 3.14, vimos que as seqüências 12836754 e 18236574 são as melhores escolhas nos critérios clássico e Bayesiano utilizando a matrizes diagonais R1 e R2; a seqüência 18236574 é a melhor escolha no critério Bayesiano utilizando a matriz correlacionada S1, enquanto que a seqüência 12836754 é a melhor escolha no critério Bayesiano utilizando a matriz correlacionada S2, apesar de que a seqüência 12873564 é a melhor escolha sob o ponto de vista do número de mudanças e contagem de tempo. Portanto, vimos que não há uma forte relação entre o valor dos determinantes e o número de mudanças ou contagem de tempo no planejamento  $2^{4-1}$ .

### 3.4.3 Conclusões Finais

Com base nas Tabelas 3.13 e 3.14, com as seqüências citadas no artigo "Factor Changes and Linear Effects in Eight-Run Two-Level Factorial Designs", de Draper e Stoneman (1968), vimos que o número de mudanças e o módulo da contagem máxima de tempo não influenciam individualmente nos valores dos determinantes  $|X'X|$ ,  $|X'X + R1|$ ,  $|X'X + R2|$ ,  $|X'X + S1|$  e  $|X'X + S2|$ , mas, com o balanceamento entre o número de mudanças e o módulo da contagem máxima de tempo, há uma forte relação entre os valores dos determinantes (eficiência). Se olharmos com atenção a matriz simétrica  $X'X$  para cada seqüência, podemos perceber que temos a contagem de tempo para seus respectivos fatores, para todos os planejamentos fatoriais, e que, quanto menor for a contagem máxima de tempo, maior o valor do determinante  $|X'X|$ , ou seja, maior a eficiência da permutação correspondente.

Podemos perceber também que, em alguns casos, quando duas ou mais seqüências possuem o mesmo valor do determinante  $|X'X|$ , essas seqüências possuem valores diferentes dos determinantes  $|X'X + R1|$ ,  $|X'X + S1|$  e  $|X'X + S2|$ , mas os determinantes de  $|X'X + R2|$  são iguais, devido à igualdade de todos os valores da diagonal principal da matriz  $R2$  (matriz identidade). Essa diferença nos valores dos determinantes  $|X'X + R1|$ ,  $|X'X + S1|$  e  $|X'X + S2|$  é provocada pelo fato da matriz diagonal  $R1$  e das matrizes correlacionadas  $S1$  e  $S2$  não serem proporcionais à matriz identidade. Nesse caso, isso vale para todos os planejamentos fatoriais com 8 ensaios.

O uso da informação de especialistas é comum, especialmente nas aplicações industriais. Na prática, o engenheiro ou estatístico usa um balanceamento entre precisão e custo, pois muitas vezes a linha de produção deve ser interferida de forma mínima. Isso pode ser melhorado usando diferentes distribuições a priori para os parâmetros do modelo, especialmente usando a informação de um ou mais especialistas. Os critérios Bayesianos introduzidos no Capítulo 2 podem ser usados a qualquer experimento planejado.

# Capítulo 4

## Considerações Finais

Baseado nos capítulos 2 (Planejamentos de experimentos Bayesianos) e 3 (Planejamentos de experimentos com a presença de tendências lineares), após a introdução de técnicas Bayesianas para a construção de planejamento de experimentos, podemos concluir que o critério Bayesiano é sempre melhor que o critério clássico, pois o critério Bayesiano apresenta melhores resultados, como no caso de tendências lineares, em que o valor dos determinantes das matrizes no critério Bayesiano, utilizando a matriz diagonal ou correlacionada, é sempre maior que o valor dos determinantes das matrizes no critério clássico. Constata-se também que, no critério Bayesiano, as variâncias são menores, pois os valores da diagonal principal das matrizes inversas são proporcionais à variância.

Portanto, pelo fato do critério Bayesiano apresentar melhores resultados, o planejamento de experimentos Bayesianos acaba levando também a menores custos e maiores eficiências, levando, por consequência, ao avanço do desenvolvimento industrial, da engenharia e das pesquisas tecnológicas.

# Apêndice A

## Simulação: Tendências Lineares

Programa em R para cálculos dos determinantes e matrizes inversas feitos nas Seções 3.2 e 3.3

```
xx<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,2,3,4,5,6,7,8)
XX<-matrix(xx,8,5)
XX
V<-t(XX)%*%XX
V
det(V)
r<-c(1,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,2)
R<-matrix(r,5,5)
VR<-V+R
VR
xx1<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,4,1,7,5,2,8,3,6)
XX1<-matrix(xx1,8,5)
XX1
V1<-t(XX1)%*%XX1
V1
det(V1)
solve(V1)
```

```
VR1<-V1+R
VR1
det(VR1)
solve(VR1)
xx2<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,2,1,3,5,4,8,7,6)
XX2<-matrix(xx2,8,5)
XX2
V2<-t(XX2)%*%XX2
V2
det(V2)
solve(V2)
VR2<-V2+R
VR2
det(VR2)
solve(VR2)
xx3<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,2,8,7,3,5,6,4)
XX3<-matrix(xx3,8,5)
XX3
V3<-t(XX3)%*%XX3
V3
det(V3)
solve(V3)
VR3<-V3+R
VR3
det(VR3)
solve(VR3)
xx4<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,2,4,7,5,1,6,8,3)
XX4<-matrix(xx4,8,5)
```



```
det(VR6)
solve(VR6)
xx7<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,7,4,6,1,2,8,3,5)
XX7<-matrix(xx7,8,5)
XX7
V7<-t(XX7)%*%XX7
V7
det(V7)
solve(V7)
VR7<-V7+R
VR7
det(VR7)
solve(VR7)
xx8<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,5,4,7,1,6,2,8,3)
XX8<-matrix(xx8,8,5)
XX8
V8<-t(XX8)%*%XX8
V8
det(V8)
solve(V8)
VR8<-V8+R
VR8
det(VR8)
solve(VR8)
xx9<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,8,3,5,6,4,1,7,2)
XX9<-matrix(xx9,8,5)
XX9
V9<-t(XX9)%*%XX9
```

```
V9
det(V9)
solve(V9)
VR9<-V9+R
VR9
det(VR9)
solve(VR9)
xx10<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,7,6,4,3,8,2,5)
XX10<-matrix(xx10,8,5)
XX10
V10<-t(XX10)%*%XX10
V10
det(V10)
solve(V10)
VR10<-V10+R
VR10
det(VR10)
solve(VR10)
xx11<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,2,1,7,4,3,5,8,6)
XX11<-matrix(xx11,8,5)
XX11
V11<-t(XX11)%*%XX11
V11
det(V11)
solve(V11)
VR11<-V11+R
VR11
det(VR11)
solve(VR11)
```

```
xx12<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,5,4,1,6,8,3,2,7)
XX12<-matrix(xx12,8,5)
XX12
V12<-t(XX12)%*%XX12
V12
det(V12)
solve(V12)
VR12<-V12+R
VR12
det(VR12)
solve(VR12)
```

# Apêndice B

## Simulação: Estudos de Casos

Programa em R para cálculos dos determinantes e matrizes inversas feitos nas Seção 3.4

### B.1 Planejamento $2^3$

```
r1<-c(1,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,2)
R1<-matrix(r1,5,5)
r2<-c(1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)
R2<-matrix(r2,5,5)
s1<-c(1,.25,.5,-.3,.1,.25,2,-.8,.15,1,.5,-.8,3,.6,-.3,
-.3,.15,.6,2,.5,.1,1,-.3,.5,2)
S1<-matrix(s1,5,5)
s2<-c(1,.2,.1,-.25,.3,.2,1,.4,.05,0.2,.1,.4,1,.5,-.1,
-.25,.05,.5,1,.15,.3,.2,-.1,.15,1)
S2<-matrix(s2,5,5)
x1<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,4,8,6,5,7,3,2)
X1<-matrix(x1,8,5)
V1<-t(X1)%*%X1
det(V1)
VR11<-V1+R1
```

```
det(VR11)
VR21<-V1+R2
det(VR21)
VS11<-V1+S1
det(VS11)
VS21<-V1+S2
det(VS21)
solve(VS21)
x2<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,2,8,7,3,5,6,4)
X2<-matrix(x2,8,5)
V2<-t(X2)%*%X2
det(V2)
VR12<-V2+R1
det(VR12)
VR22<-V2+R2
det(VR22)
VS12<-V2+S1
det(VS12)
VS22<-V2+S2
det(VS22)
x3<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,4,8,5,6,2,3,7)
X3<-matrix(x3,8,5)
V3<-t(X3)%*%X3
det(V3)
VR13<-V3+R1
det(VR13)
VR23<-V3+R2
det(VR23)
VS13<-V3+S1
```

```
det(VS13)
VS23<-V3+S2
det(VS23)
x4<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,2,8,3,7,5,6,4)
X4<-matrix(x4,8,5)
V4<-t(X4)%*%X4
det(V4)
VR14<-V4+R1
det(VR14)
VR24<-V4+R2
det(VR24)
VS14<-V4+S1
det(VS14)
VS24<-V4+S2
det(VS24)
x5<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,4,8,6,5,2,3,7)
X5<-matrix(x5,8,5)
V5<-t(X5)%*%X5
det(V5)
VR15<-V5+R1
det(VR15)
VR25<-V5+R2
det(VR25)
VS15<-V5+S1
det(VS15)
VS25<-V5+S2
det(VS25)
x6<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,4,8,5,6,7,3,2)
```

```
X6<-matrix(x6,8,5)
V6<-t(X6)%*%X6
det(V6)
VR16<-V6+R1
det(VR16)
VR26<-V6+R2
det(VR26)
VS16<-V6+S1
det(VS16)
VS26<-V6+S2
det(VS26)
x7<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,4,6,8,7,5,3,2)
X7<-matrix(x7,8,5)
V7<-t(X7)%*%X7
det(V7)
VR17<-V7+R1
det(VR17)
VR27<-V7+R2
det(VR27)
VS17<-V7+S1
det(VS17)
VS27<-V7+S2
det(VS27)
x8<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,4,6,8,5,7,3,2)
X8<-matrix(x8,8,5)
V8<-t(X8)%*%X8
det(V8)
VR18<-V8+R1
det(VR18)
```

```
VR28<-V8+R2
det(VR28)
VS18<-V8+S1
det(VS18)
VS28<-V8+S2
det(VS28)
x9<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,4,8,6,5,3,7,2)
X9<-matrix(x9,8,5)
V9<-t(X9)%*%X9
det(V9)
VR19<-V9+R1
det(VR19)
VR29<-V9+R2
det(VR29)
VS19<-V9+S1
det(VS19)
VS29<-V9+S2
det(VS29)
x10<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,4,8,6,7,5,3,2)
X10<-matrix(x10,8,5)
V10<-t(X10)%*%X10
det(V10)
VR110<-V10+R1
det(VR110)
VR210<-V10+R2
det(VR210)
VS110<-V10+S1
det(VS110)
VS210<-V10+S2
```

```
det(VS210)
x11<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,8,4,6,5,7,3,2)
X11<-matrix(x11,8,5)
V11<-t(X11)%*%X11
det(V11)
VR111<-V11+R1
det(VR111)
VR211<-V11+R2
det(VR211)
VS111<-V11+S1
det(VS111)
VS211<-V11+S2
det(VS211)
x12<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,4,6,8,7,3,5,2)
X12<-matrix(x12,8,5)
V12<-t(X12)%*%X12
det(V12)
VR112<-V12+R1
det(VR112)
VR212<-V12+R2
det(VR212)
VS112<-V12+S1
det(VS112)
VS212<-V12+S2
det(VS212)
```

## B.2 Planejamento $2^{4-1}$

```

rr1<-c(1,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,1)
RR1<-matrix(rr1,6,6)
rr2<-c(1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1)
RR2<-matrix(rr2,6,6)
ss1<-c(1,.25,-.1,.05,-.7,.2,.25,2,.8,-.1,.4,.15,-.1,.8,3,.6,.5,.2,.05,
-.1,.6,2,.1,-.3,-.7,.4,.5,.1,2,-.4,.2,.15,.2,-.3,-.4,1)
SS1<-matrix(ss1,6,6)
ss2<-c(1,.1,.25,.4,-.1,.05,.1,1,.3,-.2,.15,.4,.25,.3,1,.5,-.3,.1,.4,
-.2,.5,1,.2,.25,-.1,.15,-.3,.2,1,.3,.05,.4,.1,.25,.3,1)
SS2<-matrix(ss2,6,6)
xx1<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,8,7,3,5,6,4)
XX1<-matrix(xx1,8,6)
VX1<-t(XX1)%*%XX1
det(VX1)
VXR11<-VX1+RR1
det(VXR11)
VXR21<-VX1+RR2
det(VXR21)
VXS11<-VX1+SS1
det(VXS11)
VXS21<-VX1+SS2
det(VXS21)
xx2<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,8,3,7,5,6,4)
XX2<-matrix(xx2,8,6)
VX2<-t(XX2)%*%XX2
det(VX2)
VXR12<-VX2+RR1

```

```
det(VXR12)
VXR22<-VX2+RR2
det(VXR22)
VXS12<-VX2+SS1
det(VXS12)
VXS22<-VX2+SS2
det(VXS22)
xx3<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,7,8,3,5,6,4)
XX3<-matrix(xx3,8,6)
VX3<-t(XX3)%*%XX3
det(VX3)
VXR13<-VX3+RR1
det(VXR13)
VXR23<-VX3+RR2
det(VXR23)
VXS13<-VX3+SS1
det(VXS13)
VXS23<-VX3+SS2
det(VXS23)
xx4<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,8,3,7,6,5,4)
XX4<-matrix(xx4,8,6)
VX4<-t(XX4)%*%XX4
det(VX4)
VXR14<-VX4+RR1
det(VXR14)
VXR24<-VX4+RR2
det(VXR24)
VXS14<-VX4+SS1
det(VXS14)
```

```
VXS24<-VX4+SS2
det(VXS24)
xx5<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,8,7,3,5,4,6)
XX5<-matrix(xx5,8,6)
VX5<-t(XX5)%*%XX5
det(VX5)
VXR15<-VX5+RR1
det(VXR15)
VXR25<-VX5+RR2
det(VXR25)
VXS15<-VX5+SS1
det(VXS15)
VXS25<-VX5+SS2
det(VXS25)
xx6<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,8,2,3,7,5,6,4)
XX6<-matrix(xx6,8,6)
VX6<-t(XX6)%*%XX6
det(VX6)
VXR16<-VX6+RR1
det(VXR16)
VXR26<-VX6+RR2
det(VXR26)
VXS16<-VX6+SS1
det(VXS16)
VXS26<-VX6+SS2
det(VXS26)
xx7<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,8,7,3,6,5,4)
XX7<-matrix(xx7,8,6)
```

```
VX7<-t(XX7)%*%XX7
det(VX7)
VXR17<-VX7+RR1
det(VXR17)
VXR27<-VX7+RR2
det(VXR27)
VXS17<-VX7+SS1
det(VXS17)
VXS27<-VX7+SS2
det(VXS27)
xx8<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,8,2,3,7,6,5,4)
XX8<-matrix(xx8,8,6)
VX8<-t(XX8)%*%XX8
det(VX8)
VXR18<-VX8+RR1
det(VXR18)
VXR28<-VX8+RR2
det(VXR28)
VXS18<-VX8+SS1
det(VXS18)
VXS28<-VX8+SS2
det(VXS28)
xx9<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,8,2,7,3,5,6,4)
XX9<-matrix(xx9,8,6)
VX9<-t(XX9)%*%XX9
det(VX9)
VXR19<-VX9+RR1
det(VXR19)
VXR29<-VX9+RR2
```

```
det(VXR29)
VXS19<-VX9+SS1
det(VXS19)
VXS29<-VX9+SS2
det(VXS29)
xx10<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,8,7,3,6,4,5)
XX10<-matrix(xx10,8,6)
VX10<-t(XX10)%*%XX10
det(VX10)
VXR110<-VX10+RR1
det(VXR110)
VXR210<-VX10+RR2
det(VXR210)
VXS110<-VX10+SS1
det(VXS110)
VXS210<-VX10+SS2
det(VXS210)
xx11<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,8,2,3,7,6,4,5)
XX11<-matrix(xx11,8,6)
VX11<-t(XX11)%*%XX11
det(VX11)
VXR111<-VX11+RR1
det(VXR111)
VXR211<-VX11+RR2
det(VXR211)
VXS111<-VX11+SS1
det(VXS111)
VXS211<-VX11+SS2
det(VXS211)
```

```
xx12<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,8,2,7,3,4,6,5)
XX12<-matrix(xx12,8,6)
VX12<-t(XX12)%*%XX12
det(VX12)
VXR112<-VX12+RR1
det(VXR112)
VXR212<-VX12+RR2
det(VXR212)
VXS112<-VX12+SS1
det(VXS112)
VXS212<-VX12+SS2
det(VXS212)
xx13<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,7,8,3,5,4,6)
XX13<-matrix(xx13,8,6)
VX13<-t(XX13)%*%XX13
det(VX13)
VXR113<-VX13+RR1
det(VXR113)
VXR213<-VX13+RR2
det(VXR213)
VXS113<-VX13+SS1
det(VXS113)
VXS213<-VX13+SS2
det(VXS213)
xx14<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,7,3,8,6,5,4)
XX14<-matrix(xx14,8,6)
VX14<-t(XX14)%*%XX14
det(VX14)
```

```
VXR114<-VX14+RR1
det(VXR114)
VXR214<-VX14+RR2
det(VXR214)
VXS114<-VX14+SS1
det(VXS114)
VXS214<-VX14+SS2
det(VXS214)
xx15<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,2,8,3,6,7,5,4)
XX15<-matrix(xx15,8,6)
VX15<-t(XX15)%*%XX15
det(VX15)
VXR115<-VX15+RR1
det(VXR115)
VXR215<-VX15+RR2
det(VXR215)
VXS115<-VX15+SS1
det(VXS115)
VXS215<-VX15+SS2
det(VXS215)
xx16<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,8,2,3,6,5,7,4)
XX16<-matrix(xx16,8,6)
VX16<-t(XX16)%*%XX16
det(VX16)
VXR116<-VX16+RR1
det(VXR116)
VXR216<-VX16+RR2
det(VXR216)
VXS116<-VX16+SS1
```

```
det(VXS116)
VXS216<-VX16+SS2
det(VXS216)
xx17<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,8,2,3,7,5,4,6)
XX17<-matrix(xx17,8,6)
VX17<-t(XX17)%*%XX17
det(VX17)
VXR117<-VX17+RR1
det(VXR117)
VXR217<-VX17+RR2
det(VXR217)
VXS117<-VX17+SS1
det(VXS117)
VXS217<-VX17+SS2
det(VXS217)
```

# Referências Bibliográficas

- [1] Achcar, J.A., 1995. Planejamento de Experimentos em Engenharia e Indústria, ICMC-USP, Cap. 7, 95-120.
- [2] Atkinson, A.C. & Hunter, W.G., 1968, The design of experiments for parameter estimation. *Technometrics*. Vol. 10, 2, 27-289
- [3] Bernardo, J.M., 1979, Expected Information as Expected Utility. *Ann. Statist.* 7, 686-690
- [4] Box, G.E.P., 1952, Multifactor designs of first order. *Biometrika*, 39, 49-57
- [5] Box, G.E.P. and Hunter, J.S., 1961a.. The  $2^{k-p}$  fractional factorial designs, I. *Technometrics*, 3, 311-351.
- [6] Box, G.E.P. and Hunter, J.S., 1961b. The  $2^{k-p}$  fractional factorial designs, II. *Technometrics*, 3, 449-458.
- [7] Box, G.E.P.; Hunter, W.G.; Hunter, J.S., 2005, *Statistics for experiments: design, innovation and discovery*, 2<sup>nd</sup> edition, New York, Wiley.
- [8] Box, G.E.P.; Tiao, G.C., 1973, *Bayesian Inference in statistical analysis*, Reading: Addison-Wesley.
- [9] Box, J.F., 1978, *R.A. Fisher: The life of a Scientist*, Wiley, New York
- [10] Chaloner, K., 1982, *Optimal Bayesian Experimental Design for Linear Models*. PhD Dissertation. Dept. Statistics, Carnegie Mellon University.
- [11] Chaloner, K., 1984, Optimal Bayesian Experimental Design for Linear Models. *Ann. Statist.* 12, 283-300

- [12] Chaloner, K.; Verdinelli, I., 1995, Bayesian Experimental Design: A Review. Technical Report #599, Dept. Statistics, Carnegie Mellon University.
- [13] Daniel, C.; Wilcoxon, F., 1966, Factorial  $2^{p-q}$  plans robust against linear and quadratic trends. *Technometrics*, 8, 259-278.
- [14] Dickinson, A. W., 1974. Some Run Orders Requiring a Minimum Number of Factor Level Changes for the 24 and 25 Main Effect Plans. *Technometrics*, 16, 31-37.
- [15] Draper, N.R.; Stoneman, D.M., 1968, Factor changes and linear trends in eight-run two level factorial designs. *Technometrics*, 10, 301-311.
- [16] Duncan, G.; DeGroot, M.H., 1976, A mean squared error approach to Optimal Design Theory. Proceedings of the 1976 Conference on Information: Science and Systems. 217-221. The Johns Hopkins University.
- [17] Fedorov, V.V., 1972, Theory of optimal experiments. New York: Academic Press.
- [18] Joiner, B.L.; Campbell, C., 1976, Designing experiments when run order is important, *Technometrics*, 18,3, 249-259.
- [19] Kempthorne, O., 1975, Design and Analysis of experimen. Krieger Pub Co, New York.
- [20] Khury, A.I.; Cornell, J.A., 1996, Response Surfaces. (second ed.), Marcel Dekker, New York.
- [21] Lindley, D.V., 1956, On the Measure of Information provided by na Experiment. *Ann. Statist.* 27, 986-1005
- [22] Myers, R.H., 2002, Response surface methodology, 2<sup>nd</sup> ed. New York, Wiley
- [23] Montgomery, D.C., 1991, Design of analysis of experiments. New York, Wiley.
- [24] Montgomery, D.C. and Runger, G.C., 2003, Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros, 2<sup>a</sup> ed., LTC, Cap. 13, 327-335.
- [25] San Martini, A. & Spezzaferrri, F., 1984, A Predictive Model Selection Criterion. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 46, 296-303

- [26] Smith, A.F.M. & Verdinelli, I., 1980, A note of Bayesian design for inference using a hierarchical linear model. *Biometrika*, 67, 613-619.
- [27] Verdinelli, I., 1992, Advances in Bayesian Experimental Design. *Bayesian Statistics 4*. J.M. Bernardo, J.O.Berger, A.P. Dawid & A.F.M. Smith eds. 467-481. Oxford University Press, Oxford.
- [28] Verdinelli, I., & Kadane, J.B., 1992, Bayesian Designs for maximizing information and outcome. *J. Amer. Statist. Assoc.* 87, 510-515.
- [29] Verdinelli, I., Polson, N. & Singpurwalla, N., 1993, Shannon Information and Bayesian Design for Prediction in Accelerated life testing. *Reliability and Decision Making*. R.E. Barlow, C.A.Clarotti & F, Spizzichino eds. 247-256. Chapman and Hall, London.