

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

O EFEITO DE REPARAMETRIZAÇÃO EM
TESTES DE SOBREVIVÊNCIA ACELERADOS

Wagner Aparecido Cavali

Orientador: Prof. Dr. Francisco Louzada Neto

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de São Carlos - PPGEs/UFSCar, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Estatística.

São Carlos
Junho/2003

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C376er

Cavali, Wagner Aparecido.

O efeito de reparametrização em testes de sobrevivência acelerados / Wagner Aparecido Cavali. -- São Carlos : UFSCar, 2008.

81 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2003.

1. Distribuição exponencial. 2. Testes de sobrevivência acelerados. 3. MCMC. I. Título.

CDD: 519.54 (20^a)

**Dedico este trabalho a meus pais,
João e Martha, e aos meus filhos
Danilo, Vinícius e Priscila.**

Agradecimentos

A Deus pela oportunidade que me foi dada.

A meus pais, João e Martha, sem os quais eu nem teria começado o mestrado.

Ao meu amigo, Silvio Tadao Fujisaki, por ter-me feito perceber que ainda era capaz de acreditar, pelo exemplo de determinação e garra e amparo incondicional, em todos os momentos.

Ao meu amigo Josmar Mazuchelli, pela amizade, apoio e pelos inúmeros auxílios.

Ao meu amigo Marcelo Ângelo Cirillo, pelo apoio e incentivo nos momentos mais difíceis, desde os tempos de graduação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Louzada Neto, pelo incentivo durante todo mestrado e por ter acreditado em mim.

A todos funcionários e professores do departamento de Estatística/UFSCar, em especial à professora Teresa Cristina Martins Dias, pela revisão, críticas e sugestões.

A todos amigos, professores e funcionários, da Unesp de Presidente Prudente.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

E à CAPES, pelo incentivo financeiro.

Resumo

Testes de vida acelerados são frequentemente utilizados em experimentos industriais para obter medidas sobre a confiabilidade de produtos. Nestes testes, as unidades são submetidas à níveis de estresse mais altos que os usuais e as informações obtidas são utilizadas para inferir sobre a confiabilidade dos produtos, em condições normais de operação. Um problema prático, refere-se à precisão de inferências obtidas por aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, quando o tamanho da amostra é pequeno ou moderado. Nesta dissertação são descritos os efeitos de algumas reparametrizações na precisão da estimação intervalar do parâmetro de interesse, aqui representado pelo tempo médio de falha. O interesse é obter uma parametrização que proporcione estimativas de máxima verossimilhança independentes com boa aproximação normal assintótica. Um estudo de simulação apresenta a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança quando somente pequenos ou moderados tamanhos de conjuntos de dados são considerados. O efeito da presença de censura também foi investigado no estudo de simulação. A metodologia é ilustrada com dados reais de um teste de sobrevivência acelerado com containers pressurizados de Kevlan/Epoxy 49. Sob o enfoque Bayesiano, métodos "Markov Chain Monte Carlo" são propostos para avaliar a confiabilidade das unidades. O efeito da reparametrização na convergência das cadeias é estudado.

Abstract

Accelerated life tests are frequently used in industrial experiments to obtain measures on the reliability of products. In these tests, the units are submitted at higher levels of stress than usual and the informations obtained are utilized to inference on the reliability of the product, under normal operating conditions. A practical problem, refers to the accuracy of inferences obtained by asymptotic normal approximation of the maximum likelihood estimator, when the sample size is small or moderate. In this dissertation are described the effects of several reparametrizations on the accuracy of the interval estimation of the parameter of interest, here represented by the mean lifetime. The idea is to obtain a parametrization in order to have independent maximum likelihood estimates with good asymptotic normal approximation. A simulation study presents the coverage probability of the confidence intervals when only small or moderate size datasets are available. The effect of the presence of censoring was also investigated in the simulation study. The methodology is illustrated on a real dataset of an accelerated life test at pressurized containers of Kevlan/Epoxy 49. Under the bayesian perspective, Markov Chain Monte Carlo methods are proposed to evaluate the reliability of products. The effect of reparametrization on convergency of the chains is studied.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Relações Estresse-Resposta	2
1.2	Algumas das Relações Estresse-Resposta mais utilizadas em Testes de Sobrevivência Acelerados	3
1.2.1	O Modelo Lei de Potência Inversa	3
1.2.2	O Modelo de Taxa de Reação Arrhenius	4
1.2.3	O Modelo de Eyring	4
1.2.4	A Relação Estresse-Resposta Geral	5
1.3	Dados Censurados	5
1.4	Revisão Bibliográfica e Objetivos	6
2	Análise Clássica do Modelo Estresse-Resposta Geral	8
2.1	O Experimento em Testes de Sobrevivência Acelerados com Dados Censurados e uma Variável Estresse	9
2.2	Formulação do Modelo	9
2.3	Estudo das diferentes reparametrizações	11
2.3.1	Inferências baseadas nos parâmetros de regressão	12
2.3.2	Inferências sobre θ_u	17
2.4	Aplicação numérica e resultados obtidos	22
2.5	Retrospecto das reparametrizações estudadas	24
3	Probabilidade de Cobertura dos Intervalos de Confiança	26
3.1	Intervalos de Confiança	26

3.1.1	Procedimento por aproximação normal	27
3.1.2	Probabilidade de cobertura	27
3.2	Estudo de simulação	27
3.2.1	Especificações Gerais	28
3.2.2	Probabilidades de Cobertura	28
4	Análise Bayesiana do Modelo Estresse-Resposta Geral	39
4.1	Elementos básicos da Inferência Bayesiana	40
4.2	Métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC - <i>Markov Chain Monte Carlo</i>)	41
4.2.1	Amostrador de Gibbs	42
4.2.2	Algoritmo de Metropolis-Hastings	42
4.3	Diagnósticos de Convergência	44
4.3.1	O risco da convergência lenta não diagnosticada	44
4.3.2	Diagnóstico de Gelman e Rubin	45
4.3.3	Diagnóstico de Raftery e Lewis	47
4.3.4	Diagnóstico de Geweke	47
4.3.5	Diagnóstico de Heidelberger e Welch	48
4.4	Estimação Bayesiana	48
4.4.1	Densidades a Priori Não-Informativas	50
4.4.2	Densidades a Posteriori Conjuntas	50
4.4.3	Densidades Condicionais	51
4.5	Aplicação numérica e resultados obtidos	52
4.6	Retrospecto das Parametrizações estudadas	55
4.6.1	Diagnósticos de Convergência	60
5	O Efeito de Presença de Censura na Convergência das Cadeias	65
5.1	Resultados Obtidos	66
5.1.1	Diagnósticos de Convergência	71
6	Considerações Finais	76

Capítulo 1

Introdução

Os constantes avanços tecnológicos, aliados à grande competição em escala mundial, têm obrigado as empresas a investir cada vez mais na produção de bens confiáveis, com menor custo de produção possível. A confiabilidade de um produto está intimamente ligada à sua durabilidade e é um fator fundamental na decisão de compra do consumidor. Nas últimas décadas, a definição de confiabilidade mais encontrada nos textos específicos é a seguinte: "Confiabilidade de um produto é a probabilidade de bom funcionamento do mesmo, durante período de tempo e condições de uso especificados" (Freitas e Colosimo, 1997).

Para a obtenção de medidas sobre a confiabilidade de um componente é necessário o planejamento de um experimento baseado em uma amostra de n componentes, tendo como variável resposta os tempos de sobrevivência. Um experimento considerado simples, pode ser realizado colocando-se todos os n componentes em funcionamento, sob condições usuais, e esperar até que todos falhem. Porém, dependendo das características do componente sob teste, um experimento realizado em condições normais de funcionamento, pode ter uma duração excessivamente longa ou gerar um custo elevado. Além disso, com os constantes avanços tecnológicos, o produto pode tornar-se ultrapassado mesmo antes de seu lançamento no mercado.

Neste contexto, surgem os testes de sobrevivência acelerados, nos quais os produtos são testados sob condições de estresse, como por exemplo pressão ou temperatura, em níveis mais altos do que os usuais. Então, os tempos de sobrevivência desses componentes são utilizados para fazer inferências sobre quantidades de interesse, tal como o tempo médio de sobrevivência do componente em condições normais de funcionamento.

Formalmente, seja T uma variável aleatória não negativa, denotando o tempo de sobrevivência de um componente, com função densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por $f(t, \underline{\lambda})$, onde $\underline{\lambda}$ é um vetor de parâmetros e seja \underline{S} um vetor de variáveis físicas que estressam o componente com níveis maiores do que os usuais de funcionamento. Deve-se supor que (Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974):

- a) a intensidade do nível de estresse (caracterizado por \underline{S}) não altera a distribuição do tempo de sobrevivência, mas os níveis de estresse influenciam os valores dos parâmetros em $\underline{\lambda}$;
- b) a relação entre $\underline{\lambda}$ e \underline{S} (relação estresse-resposta) é conhecida, isto é, $\underline{\lambda} = g(\underline{S}, \alpha, \beta, \dots)$, exceto por um ou mais parâmetros α, β, \dots , e é válida para um determinado intervalo de variação das variáveis em \underline{S} .

Nos testes de sobrevivência acelerados, consideram-se k níveis aleatorizados de uma ou mais variáveis estresse em \underline{S} , aplicados ao componente. Em cada nível i de estresse, $i = 1, \dots, k$, uma ou mais unidades são submetidas a teste. Neste tipo de experimento, o objetivo é fazer inferências sobre $\underline{\lambda}$ ou funções de $\underline{\lambda}$ (sob especificações de projeto do componente), baseadas nos tempos de sobrevivência obtidos para valores das variáveis em \underline{S} mais altos que os usuais (dentro do intervalo válido para a relação entre $\underline{\lambda}$ e \underline{S}).

1.1 Relações Estresse-Resposta

A repetição de um experimento, seja qual for sua finalidade, mesmo mantidas fixas as condições originais (por exemplo, tensão, temperatura ou pressão), nem sempre apresentará os mesmos resultados. No caso dos testes de sobrevivência acelerados, podem ocorrer tempos de sobrevivência distintos para um mesmo nível de estresse, ou seja, uma variabilidade dentro de cada nível de estresse. Portanto, pode-se dizer que o tempo de sobrevivência está relacionado à variável estresse, segundo um modelo:

$$tempo = f(estresse) + erro . \quad (1.1)$$

Ou seja, pode-se dizer que os modelos utilizados em testes de sobrevivência acelerados possuem dois componentes, um determinístico e outro probabilístico (Freitas e Colosimo, 1997).

O componente probabilístico que explica a variabilidade dos tempos de sobrevivência, dentro de cada nível de estresse, está representado na expressão (1.1) pelo termo do *erro*, sendo definido pela distribuição de probabilidade suposta para os tempos de sobrevivência. O componente determinístico é representado pela função f (*estresse*), mais conhecida como relação estresse-resposta.

O tempo de sobrevivência de um componente pode estar ligado à inúmeras variáveis físicas, e em geral torna-se inviável considerar todas estas variáveis, possíveis causadoras da falha. Portanto, são utilizados como relação estresse-resposta, modelos que tenham algum significado físico ou químico, que objetivam isolar somente as variáveis com maior influência sobre o mecanismo de falha do componente e conseqüentemente, sobre o tempo de sobrevivência do mesmo (Louzada-Neto, 1991).

1.2 Algumas das Relações Estresse-Resposta mais utilizadas em Testes de Sobrevivência Acelerados

Considere a variável aleatória T , definida anteriormente, com f.d.p. $f(t, \underline{\lambda})$. Em particular, seja $T \geq 0$ com distribuição exponencial, com f.d.p. dada por

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i \exp \{-\lambda_i t\}, \quad (1.2)$$

onde $\lambda_i > 0$, ($\lambda_i \in \underline{\lambda}$) é um parâmetro desconhecido representando a taxa constante de falha em um determinado nível i de estresse, $i = 1, \dots, k$.

Entre as relações estresse-resposta mais utilizadas na prática, destacam-se o modelo Lei de Potência Inversa, o modelo de Taxa de Reação de Arrhenius e o modelo de Eyring (Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974).

1.2.1 O Modelo Lei de Potência Inversa

Este modelo é determinado a partir de considerações da teoria cinética e energia de ativação. Alguns exemplos de aplicação incluem lâmpadas incandescentes, fadiga de metais, isolantes,

dielétricos, etc. A relação de Potência Inversa tem a seguinte forma,

$$\lambda_i^{-1} = \frac{\alpha}{V_i^\beta}, \quad (1.3)$$

onde V_i é o i -ésimo nível da variável estresse de voltagem V , e α e β são parâmetros tais que, $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$.

1.2.2 O Modelo de Taxa de Reação Arrhenius

O modelo de Taxa de Reação de Arrhenius, também conhecido como modelo de Arrhenius, representa a taxa de falha como uma função da variável estresse temperatura. Este modelo é dado por

$$\lambda_i = \exp \left\{ \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right\}, \quad (1.4)$$

onde V_i é o i -ésimo nível da variável estresse de temperatura V , e α e β são parâmetros desconhecidos, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

1.2.3 O Modelo de Eyring

Este modelo, derivado dos princípios de mecânica quântica, expressa a variação da taxa de falha como uma função da temperatura de operação e é dado por,

$$\lambda_i = V_i \exp \left\{ \alpha - \frac{\beta}{V_i} \right\}, \quad (1.5)$$

onde V_i é o i -ésimo nível da variável de estresse temperatura V , e α e β são parâmetros desconhecidos, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

É importante salientar que as relações estresse-resposta descritas acima podem ser válidas somente dentro de um determinado intervalo de variação das variáveis estresse envolvidas, e não podem ser aplicadas fora deste limite. Isto é devido ao fato que pode ocorrer uma mudança no mecanismo básico de falha, impondo a necessidade de utilização de um outro modelo (Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974).

1.2.4 A Relação Estresse-Resposta Geral

As relações estresse-resposta mais comumente encontradas na literatura e utilizadas na prática em testes acelerados, que consideram somente uma variável física de estresse (modelo Lei de Potência Inversa (1.3), modelo de Taxa de Reação de Arrhenius (1.4) e modelo de Eyring (1.5)), podem ser expressas como casos particulares da relação estresse-resposta geral (Klein e Basu, 1981). Ou seja, assuma que o relacionamento entre λ_i e a variável estresse X , com k níveis aleatorizados é dado pela relação estresse-resposta geral,

$$\lambda_i = \exp \{ - (Z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i) \}, \quad (1.6)$$

$$\text{onde } X = \begin{cases} -\log V_i, & \text{para o modelo Potência} \\ \frac{1}{V_i}, & \text{para os modelos Arrhenius e Eyring} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} -\log V_i, & \text{para o modelo de Eyring} \\ 0, & \text{para os modelos Potência e Arrhenius} \end{cases}$$

$$\beta_0 = \begin{cases} \log \alpha, & \text{para o modelo Potência} \\ -\alpha, & \text{para os modelos Arrhenius e Eyring} \end{cases}$$

e $\beta_1 = \beta$, para os três modelos (Potência, Arrhenius e Eyring).

1.3 Dados Censurados

Ainda tendo como interesse o planejamento de experimentos eficientes, isto é, experimentos que permitam a obtenção de estimativas em um curto espaço de tempo e com um custo reduzido, é possível utilizar mecanismos de censura, ou seja, informações incompletas ou parciais.

Geralmente os testes terminam com alguns itens ainda em funcionamento, e isto ocorre principalmente com itens submetidos a níveis de estresse menos intensos. É importante ressaltar que, mesmo censurados, todos os resultados provenientes do experimento devem ser considerados nas inferências. Se os dados censurados não forem considerados, podem ocorrer resultados viciados. Por exemplo, se não forem consideradas as observações censuradas de um experimento, realizado para obtenção de estimativas para o tempo médio de sobrevivência de um componente, resultados subestimados podem ser obtidos.

Existem três mecanismos de censura diferenciados. Censura por tempo, ou do tipo I é aquela em que o teste é terminado após um período preestabelecido de tempo. É usada em combinação com informações anteriores sobre o produto, possibilitando o planejamento do tempo de duração do experimento. Neste tipo de censura, o número de falhas e todos os tempos de sobrevivência são variáveis aleatórias. Censura por falha ou do tipo II é aquela em que o teste é finalizado após um número preestabelecido de falhas. Este tipo de censura é geralmente utilizado quando não se tem informação sobre a durabilidade do produto em estudo. Assim, garante-se um número mínimo de dados necessários à análise estatística. Um terceiro mecanismo de censura é o do tipo aleatório. Neste esquema, um item pode ser retirado (ou substituído) durante o transcorrer do teste, sem ter falhado. Isto pode ocorrer, por exemplo, se o item falhar por uma razão diferente da estudada (Freitas e Colosimo, 1997).

1.4 Revisão Bibliográfica e Objetivos

Os testes de sobrevivência acelerados têm sido tema de pesquisa de vários autores. Entre estes, pode-se citar, Louzada-Neto e Achcar (1993). Considerando um modelo exponencial, uma relação estresse-resposta geral e dados sob um esquema de censura do tipo II, os autores desenvolvem uma metodologia Bayesiana para determinar o nível de estresse X_j , e qual o período de tempo Y_j , devem ser considerados no teste de controle de qualidade de um determinado lote. Mattos e Migon (2001), assumindo uma distribuição Weibull para os tempos de sobrevivência, propõem o uso de métodos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) para avaliar a confiabilidade de componentes submetidos a experimentos acelerados na presença de censuras.

Assumindo uma distribuição exponencial, um esquema de censura do tipo II e o modelo de Eyring como relação estresse-resposta, Louzada-Neto e Pardo-Fernández (2001) estudam o efeito de reparametrização na precisão de inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, quando o tamanho da amostra é pequeno ou moderado.

Considerando dados censurados do tipo I, com distribuição Weibull, obtidos em experimento acelerado, Vander Wiel e Meeker (1990) mostram que intervalos de confiança baseados na razão de verossimilhanças, apresentam probabilidade de cobertura mais próximas às nominais, quando comparadas às probabilidades de cobertura de intervalos de confiança obtidos via aproximação

Normal assintótica.

Jeng e Meeker (2000), comparam diferentes procedimentos para obtenção de intervalos de confiança para dados com distribuição Weibull e censura do tipo I. Os procedimentos são classificados em três grupos: intervalos obtidos via aproximação normal assintótica, razão de verossimilhanças e *bootstrap* paramétrico. A probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança é verificada através de um estudo de simulação

Nesta dissertação são consideradas a distribuição exponencial e a relação estresse-resposta geral para descrever os tempos de sobrevivência dos componentes. Também é considerado um esquema de censura do tipo II.

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2, é apresentada uma análise clássica sobre inferência em testes de sobrevivência acelerados, considerando-se o modelo estresse-resposta geral (1.6). O problema da precisão dos intervalos de confiança, baseados na teoria normal assintótica, para pequenas amostras é discutido. Ainda neste capítulo, são estudadas algumas reparametrizações dos parâmetros envolvidos com a finalidade de se obter além de uma melhor aproximação normal assintótica, ortogonalidade entre os parâmetros. No capítulo 3, são detalhados os procedimentos para obtenção de intervalos de confiança via aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Um estudo de simulação, sobre a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança é considerado. Considerando densidades a priori vagas para os parâmetros envolvidos, é determinada no Capítulo 4 uma análise Bayesiana do modelo estresse-resposta geral (1.6). Métodos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) são propostos para avaliar a confiabilidade de componentes submetidos a experimentos acelerados na presença de censuras. É estudado também o efeito de reparametrização na convergência das cadeias obtidas. Finalmente, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões alcançadas e perspectivas futuras de trabalho, relacionadas aos temas abordados nesta dissertação.

Capítulo 2

Análise Clássica do Modelo Estresse-Resposta Geral

Dentre as técnicas estatísticas existentes, a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança é um dos procedimentos mais utilizados em problemas práticos. Como esses resultados são válidos assintoticamente, devem ser usados com cautela para pequenas amostras. Na área de confiabilidade é comum a presença de pequenas amostras, devido à necessidade de contenção de custos e obtenção de dados num curto período de tempo. Neste caso, é importante salientar a necessidade da verificação da precisão de inferências baseadas nesta aproximação. Além da obtenção de estimadores com uma boa aproximação normal assintótica, também tem-se interesse na obtenção de estimadores assintoticamente independentes.

Neste capítulo, considerando uma distribuição exponencial para os tempos de sobrevivência, o modelo estresse-resposta geral e um esquema de censura do tipo II, são encontrados os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros envolvidos. Além disso, é estudada a precisão das inferências obtidas a partir da aproximação normal assintótica de tais estimadores. Para obtenção de melhores aproximações normais e estimadores assintoticamente independentes, o uso de reparametrizações é explorado.

2.1 O Experimento em Testes de Sobrevivência Acelerados com Dados Censurados e uma Variável Estresse

Considere um teste de sobrevivência acelerado, com k níveis aleatorizados de uma variável estresse $V \in \underline{S}$. Em cada nível de estresse V_i , $i = 1, \dots, k$, colocam-se n_i unidades em teste, e o término do experimento ocorre quando uma quantidade pré-fixada r_i das unidades falha em cada nível, caracterizando um esquema de censura do tipo II.

Assim, denotando por T o tempo de sobrevivência de uma unidade em teste, para cada nível de estresse V_i , $i = 1, \dots, k$, têm-se $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$ tempos observados, ordenados e não censurados, e $n_i - r_i$ observações censuradas iguais a t_{ir_i} , como pode-se observar na Tabela 1.

Tabela 1. Esquema de um experimento utilizado em testes de sobrevivência acelerados com uma variável estresse e dados com censuras de tipo II

i	V_i	n_i	r_i	Dados do experimento
1	V_1	n_1	r_1	$t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}, t_{1r_1}^+, \dots, t_{1r_1}^+$
2	V_2	n_2	r_2	$t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}, t_{2r_2}^+, \dots, t_{2r_2}^+$
...
k	V_k	n_k	r_k	$t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{kr_k}, t_{kr_k}^+, \dots, t_{kr_k}^+$

(+) Observações censuradas

2.2 Formulação do Modelo

Seja T uma variável aleatória não-negativa, como definida anteriormente, denotando o tempo de sobrevivência de um componente ou dispositivo, seguindo uma distribuição exponencial com f.d.p. dada por

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i \exp \{-\lambda_i t\}, \quad (2.1)$$

onde $\lambda_i > 0$ é um parâmetro desconhecido representando a taxa constante de falha no i -ésimo nível de estresse V_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

O tempo médio de sobrevivência sob o nível de estresse V_i é dado por,

$$\theta_i = 1/\lambda_i. \quad (2.2)$$

Sob o nível usual de funcionamento, o tempo médio de sobrevivência será denotado por θ_u .

A contribuição individual de cada unidade não censurada para a composição final da função de verossimilhança é dada pela densidade (2.1), enquanto que cada unidade censurada contribuirá com a sua função de confiabilidade, que no i -ésimo nível de estresse, é dada por

$$S(t, \lambda_i) = P(T \geq t) = \int_t^\infty f(u, \lambda_i) du = \int_t^\infty \lambda_i \exp\{-\lambda_i u\} du = \exp\{-\lambda_i t\}. \quad (2.3)$$

Dessa forma, a função de verossimilhança para λ_i , sob o i -ésimo nível de estresse V_i , é dada por

$$L_i(\lambda_i) = \left[\prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij}, \lambda_i) \right] (S(t_{ir_i}, \lambda_i))^{n_i - r_i}. \quad (2.4)$$

Desenvolvendo (2.4) obtém-se

$$L_i(\lambda_i) = \left[\prod_{j=1}^{r_i} \lambda_i e^{-\lambda_i t_{ij}} \right] \left[e^{-\lambda_i t_{ir_i}} \right]^{n_i - r_i} = \lambda_i^{r_i} \exp \left\{ -\lambda_i \left[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i} \right] \right\}.$$

Definindo o tempo total de teste para o i -ésimo nível como $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i}$, tem-se

$$L_i(\lambda_i) = \lambda_i^{r_i} \exp\{-\lambda_i A_i\}. \quad (2.5)$$

Para k níveis aleatorizados de estresse, a função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ é

$$L(\underline{\lambda}) = \prod_{i=1}^k \{\lambda_i^{r_i} \exp[-\lambda_i A_i]\}. \quad (2.6)$$

2.3 Estudo das diferentes reparametrizações

Por simplicidade, considere um vetor de parâmetros bidimensional $\underline{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2)$. Entretanto, os conceitos descritos permanecem válidos para o caso multidimensional. Seja $L(\underline{\theta})$ a correspondente função de verossimilhança e $l(\underline{\theta}) = \log L(\underline{\theta})$. Seja $\hat{\underline{\theta}}$ o estimador de máxima verossimilhança de $\underline{\theta}$. Para se fazer inferências sobre $\underline{\theta}$ pode-se usar a aproximação assintótica do estimador de máxima verossimilhança dada por (Cox e Hinkley, 1974),

$$\hat{\underline{\theta}}^T = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \xrightarrow{d} N_2 \left((\theta_1, \theta_2), I^{-1}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \right), \quad (2.7)$$

sendo $I(\theta_1, \theta_2)$ a matriz de informação de Fisher, com elementos definidos por

$$I_{ij}(\theta_1, \theta_2) = E \left(\frac{\partial l}{\partial \theta_i} \frac{\partial l}{\partial \theta_j} \right) = -E \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right). \quad (2.8)$$

Em algumas situações, pode-se ter interesse em inferências sobre funções dos parâmetros originais, $g(\underline{\theta})$. Neste caso pode-se utilizar o método Delta (Miller, 1981) dado por

$$g(\hat{\underline{\theta}}) = g(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \xrightarrow{d} N \left(g(\theta_1, \theta_2), \nabla^T g(\theta) I^{-1}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \nabla g(\underline{\theta}) \right), \quad (2.9)$$

onde

$$\nabla^T g(\theta) = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_1}, \frac{\partial g}{\partial \theta_2} \right). \quad (2.10)$$

Estes resultados são válidos assintoticamente e portanto devem ser utilizados quando o tamanho da amostra é grande. Se a amostra for pequena ou moderada esta aproximação pode não ser válida. Por isso é sensato tomar-se precauções ao aplicá-las na prática, verificando se a distribuição dos estimadores com os quais se está trabalhando realmente aproxima-se da distribuição normal. Um bom indicador para poder considerar (2.7) como uma boa aproximação é o fato da matriz de informação de Fisher para esses parâmetros ser constante (elementos não dependerem dos parâmetros) (Spratt, 1973, 1980).

Por outro lado, também têm-se interesse em estimadores que, de alguma forma, sejam independentes. Se $I(\theta_1, \theta_2)$ é a matriz de informação de Fisher, diz-se que os parâmetros θ_1 e θ_2 são ortogonais quando em (2.8),

$$I_{12}(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (2.11)$$

O fato de dois parâmetros serem ortogonais, tem como importante consequência o fato de seus estimadores de máxima verossimilhança serem assintoticamente independentes, isto é, quando estima-se um parâmetro, tal estimativa não é influenciada pela estimativa do outro. Uma proposta para a obtenção de parâmetros ortogonais é dada pela solução da seguinte equação diferencial (Cox e Reid, 1987),

$$-I_{ij} = I_{ii} \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j}, \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (2.12)$$

Como pode-se observar, a matriz de informação de Fisher é que informa se a parametrização apresenta, ou não, as propriedades desejadas.

Sempre visando encontrar uma melhor aproximação assintótica e independência entre os parâmetros, pode-se fazer dois tipos de parametrizações da função de verossimilhança (2.6). Aplicar uma parametrização nos parâmetros de regressão β_0 e β_1 do modelo estresse-resposta geral e então usar o método Delta (Miller, 1981) para fazer inferências sobre o parâmetro de interesse θ_u , ou ainda introduzir o parâmetro θ_u na verossimilhança e assim fazer inferências diretamente a respeito deste.

2.3.1 Inferências baseadas nos parâmetros de regressão

Considerando a verossimilhança dada em (2.6) e o modelo estresse-resposta geral em (1.6), obtém-se a função de verossimilhança para os parâmetros β_0 e β_1 ,

$$L(\beta_0, \beta_1) \propto \exp \left\{ -\beta_0 r - \beta_1 a_1 - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i} \right\}, \quad (2.13)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$ é o número total de falhas observadas e $a_1 = \sum_{i=1}^k r_i X_i$.

O logaritmo da função de verossimilhança para β_0 e β_1 é dado por,

$$l(\beta_0, \beta_1) \propto \left\{ -\beta_0 r - \beta_1 a_1 - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i} \right\}. \quad (2.14)$$

As primeiras derivadas de $l(\beta_0, \beta_1)$ com respeito a β_0 e β_1 são dadas por,

$$\frac{\partial l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} \propto -r + e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} \propto -a_1 + e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k X_i A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}. \quad (2.16)$$

Igualando a zero as primeiras derivadas (2.15) e (2.16) e resolvendo o sistema de equações em β_0 e β_1 , obtêm-se os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros dados por,

$$\widehat{\beta}_0 = -\log \left[\frac{r}{\sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \widehat{\beta}_1 X_i}} \right], \quad (2.17)$$

e $\widehat{\beta}_1$ que é solução da equação

$$\frac{\sum_{i=1}^k X_i A_i e^{-Z_i - \widehat{\beta}_1 X_i}}{\sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \widehat{\beta}_1 X_i}} = \frac{a_1}{r}. \quad (2.18)$$

As segundas derivadas parciais da função *log*-verossimilhança $l(\beta_0, \beta_1)$ (2.14), com respeito a β_0 e β_1 são dadas por,

$$\frac{\partial^2 l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0^2} = -e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1^2} = -e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k X_i^2 A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k X_i A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}. \quad (2.21)$$

Assumindo-se que os tempos de sobrevivência são censurados utilizando o esquema de censura do tipo II, os r_i são fixos, $i = 1, \dots, k$, logo $E(A_i) = \frac{r_i}{\lambda_i}$. Substituindo λ_i por (1.6), obtêm-se

$$E(A_i) = \frac{r_i}{\exp\{-(Z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)\}}. \quad (2.22)$$

Substituindo a expressão (2.22) em (2.19), (2.20) e (2.21), respectivamente, têm-se

$$\begin{aligned} E \left\{ \frac{-\partial^2 l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0^2} \right\} &= r, \\ E \left\{ \frac{-\partial^2 l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1^2} \right\} &= a_2, \\ E \left\{ \frac{-\partial^2 l(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} \right\} &= -a_1, \end{aligned}$$

onde $a_2 = \sum_{i=1}^k r_i X_i^2$.

Logo, a matriz de informação de Fisher para β_0 e β_1 é dada por,

$$I(\beta_0, \beta_1) = \begin{bmatrix} r & -a_1 \\ -a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

e

$$I^{-1}(\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{ra_2 - a_1^2} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & r \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Considerando a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, tem-se que,

$$\left(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1 \right) \stackrel{a}{\sim} N \left\{ (\beta_0, \beta_1); I^{-1} \left(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1 \right) \right\} \quad (2.25)$$

isto é,

$$\text{var} \left(\widehat{\beta}_0 \right) \cong \frac{a_2}{ra_2 - a_1^2}, \quad \text{var} \left(\widehat{\beta}_1 \right) \cong \frac{r}{ra_2 - a_1^2} \quad \text{e} \quad \text{cov} \left(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1 \right) \cong \frac{a_1}{ra_2 - a_1^2}.$$

Observe que os elementos da matriz (2.23) são constantes, o que implica numa boa aproximação normal assintótica para os estimadores de máxima verossimilhança, $\widehat{\beta}_0$ e $\widehat{\beta}_1$ (Sprott, 1973 e 1980), e portanto as inferências sobre $\widehat{\beta}_0$ e $\widehat{\beta}_1$ podem ser baseadas em (2.25). Entretanto, pode-se notar que a matriz de informação de Fisher não é diagonal, indicando uma dependência entre os parâmetros. Visando a obtenção de estimadores assintoticamente independentes, Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974), sugerem um pequeno melhoramento na relação estresse-resposta

(1.5), sem modificar sua característica básica, definindo,

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i}}{\sum_{i=1}^k r_i} \quad (2.26)$$

como a média ponderada dos V_i^{-1} 's. Logo, o modelo de Eyring com uma variável estresse (1.5), pode ser reescrito na forma,

$$\lambda_i = V_i \exp \{ \alpha^* - \beta^* (V_i^{-1} - \bar{V}) \}. \quad (2.27)$$

Rescrevendo a relação estresse-resposta geral (1.6), segundo o modelo de Eyring modificado (2.27), tem-se

$$\lambda_i = \exp \{ - (Z_i + \beta_0^* + \beta_1^* (X_i - \bar{X})) \}, \quad (2.28)$$

onde $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i X_i}{\sum_{i=1}^k r_i}$.

Considerando a expressão (2.28) e a função de verossimilhança (2.6), a nova função de verossimilhança para β_0^* e β_1^* é dada por,

$$L(\beta_0^*, \beta_1^*) \propto \exp \left\{ -\beta_0^* r - \beta_1^* d_1 - e^{-\beta_0^*} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1^* (X_i - \bar{X})} \right\}, \quad (2.29)$$

onde $d_1 = \sum_{i=1}^k r_i (X_i - \bar{X})$ e A_i como definido na página (10).

Os estimadores de máxima verossimilhança de β_0^* e β_1^* são dados por,

$$\hat{\beta}_0^* = -\log \left[\frac{r}{\sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \hat{\beta}_1^* (X_i - \bar{X})}} \right], \quad (2.30)$$

e $\hat{\beta}_1^*$ é a solução da equação

$$\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}) A_i e^{-Z_i - \hat{\beta}_1^* (X_i - \bar{X})} = 0. \quad (2.31)$$

Considerando a relação estresse-resposta (2.28), obtém-se

$$E(A_i) = \frac{r_i \exp\{\beta_1^*(X_i - \bar{X})\}}{e^{-Z_i - \beta_0^*}}. \quad (2.32)$$

As esperanças das segundas derivadas parciais $\partial^2 l(\beta_0^*, \beta_1^*) / \partial \beta_0^{*2}$, $\partial^2 l(\beta_0^*, \beta_1^*) / \partial \beta_0^* \partial \beta_1^*$ e $\partial^2 l(\beta_0^*, \beta_1^*) / \partial \beta_1^{*2}$, a menos do sinal, são dadas por,

$$E\left\{\frac{-\partial^2 l(\beta_0^*, \beta_1^*)}{\partial \beta_0^{*2}}\right\} = r;$$

$$E\left\{\frac{-\partial^2 l(\beta_0^*, \beta_1^*)}{\partial \beta_0^* \partial \beta_1^*}\right\} = -\sum_{i=1}^k r_i (X_i - \bar{X}) = 0;$$

$$E\left\{\frac{-\partial^2 l(\beta_0^*, \beta_1^*)}{\partial \beta_1^{*2}}\right\} = \sum_{i=1}^k r_i (X_i - \bar{X})^2 = d_1 = a_2 - \frac{a_1^2}{r}, \text{ respectivamente.}$$

Logo, a matriz de informação de Fisher com respeito a β_0^* e β_1^* é dada por,

$$I(\beta_0^*, \beta_1^*) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & a_2 - \frac{a_1^2}{r} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

e

$$I^{-1}(\beta_0^*, \beta_1^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{r}{ra_2 - a_1^2} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Considerando a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, tem-se que

$$\left(\widehat{\beta}_0^*, \widehat{\beta}_1^*\right) \overset{a}{\sim} N\left\{(\beta_0^*, \beta_1^*); I^{-1}\left(\widehat{\beta}_0^*, \widehat{\beta}_1^*\right)\right\}, \quad (2.35)$$

isto é,

$$\text{var}\left(\widehat{\beta}_0^*\right) \cong \frac{1}{r}, \text{var}\left(\widehat{\beta}_1^*\right) \cong \frac{r}{ra_2 - a_1^2} \text{ e } \text{cov}\left(\widehat{\beta}_0^*, \widehat{\beta}_1^*\right) \cong 0.$$

Nota-se que a matriz (2.33) é constante e diagonal, ou seja, além de uma boa aproximação

normal assintótica, os parâmetros são ortogonais.

2.3.2 Inferências sobre θ_u

Como em geral o interesse é obter inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, sob o nível de funcionamento usual θ_u e de (2.2) e (1.6), tem-se que $\theta_u = \exp(Z_u + \beta_0 + \beta_1 X_u)$, isto é,

$$\beta_0 = \log(\theta_u) - Z_u - \beta_1 X_u, \quad (2.36)$$

pode-se rescrever a função de verossimilhança (2.13) em termos de θ_u e β_1 . Substituindo β_0 por (2.36) na função de verossimilhança (2.13), obtém-se

$$L(\theta_u, \beta_1) \propto \theta_u^{-r} \exp \left\{ -\beta_1 (a_1 - r X_u) - \theta_u^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} \right\}. \quad (2.37)$$

A função *log*-verossimilhança para θ_u e β_1 é dada por,

$$l(\theta_u, \beta_1) \propto -r \log \theta_u - \beta_1 (a_1 - r X_u) - \theta_u^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)}. \quad (2.38)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de θ_u e β_1 são dados por,

$$\hat{\theta}_u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k A_i \exp \left\{ -(Z_i - Z_u) + \hat{\beta}_1 (X_u - X_i) \right\}, \quad (2.39)$$

e $\hat{\beta}_1$ que é solução da equação,

$$\frac{\sum_{i=1}^k A_i (X_i - X_u) \exp \left\{ -(Z_i - Z_u) + \hat{\beta}_1 (X_u - X_i) \right\}}{\sum_{i=1}^k A_i \exp \left\{ -Z_i + \hat{\beta}_1 (X_u - X_i) \right\}} = \frac{a_1}{r} - X_u. \quad (2.40)$$

Calculando as segundas derivadas parciais da função *log*-verossimilhança (2.38), obtém-se

$$\frac{\partial^2 l(\theta_u, \beta_1)}{\partial \theta_u^2} = \frac{r}{\theta_u^2} - \frac{2}{\theta_u^3} \sum_{i=1}^k A_i \exp \left\{ -(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i) \right\}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta_u, \beta_1)}{\partial \theta_u \partial \beta_1} = -\frac{1}{\theta_u^2} \sum_{i=1}^k A_i (X_i - X_u) \exp \{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)\} \quad (2.42)$$

e

$$\frac{\partial^2 l(\theta_u, \beta_1)}{\partial \beta_1^2} = -\frac{1}{\theta_u} \sum_{i=1}^k A_i (X_i - X_u)^2 \exp \{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)\}. \quad (2.43)$$

Como $E(A_i) = r_i / \lambda_i$, $\lambda_i = \exp \{-(Z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)\}$ e $\beta_0 = \log \theta_u - Z_u - \beta_1 X_u$, tem-se que

$$E(A_i) = \frac{r_i \theta_u}{\exp \{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)\}}.$$

Desta forma, a matriz de informação de Fisher para θ_u e β_1 é dada por,

$$I(\theta_u, \beta_1) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\theta_u^2} & \frac{b_1}{\theta_u} \\ \frac{b_1}{\theta_u} & b_2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

e sua inversa por,

$$I^{-1}(\theta_u, \beta_1) = \frac{\theta_u^2}{rb_2 - b_1^2} \begin{bmatrix} b_2 & -\frac{b_1}{\theta_u} \\ -\frac{b_1}{\theta_u} & \frac{r}{\theta_u^2} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

onde $b_1 = \sum_{i=1}^k r_i (X_i - X_u)$ e $b_2 = \sum_{i=1}^k r_i (X_i - X_u)^2$.

Considerando a matriz de informação de Fisher (2.44), observa-se que seus elementos não são constantes (dependem de θ_u). Em geral, isto implica em uma aproximação assintótica normal imprecisa para os estimadores de máxima verossimilhança de θ_u e β_1 , quando são consideradas amostras pequenas e moderadas (Sprott, 1973, 1980).

Se a partir da função de verossimilhança para θ_u e β_1 (2.37), for considerada a reparametrização $\delta = \log \theta_u$, isto é, $\theta_u = e^\delta$, obtém-se a função de verossimilhança para δ e β_1 ,

$$L(\delta, \beta_1) \propto e^{-\delta r} \exp \left\{ -\beta_1 (a_1 - r X_u) - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} \right\}. \quad (2.46)$$

Resolvendo o sistema de equações $\partial l(\delta, \beta_1) / \partial \delta = 0$ e $\partial l(\delta, \beta_1) / \partial \beta_1 = 0$, com respeito a δ

e β_1 , respectivamente, obtêm-se os estimadores de máxima verossimilhança,

$$\widehat{\delta} = \log \left[\frac{\sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)}}{r} \right] \quad (2.47)$$

e $\widehat{\beta}_1$ que é a solução da equação

$$\frac{\sum_{i=1}^k A_i (X_i - X_1) e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)}}{\sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)}} = \frac{a_i}{r} - X_u. \quad (2.48)$$

Como $E(A_i) = r_i e^{-(Z_u - \delta)} / \exp \left\{ -Z_i + \widehat{\beta}_1 (X_u - X_i) \right\}$, a matriz de informação de Fisher e a sua inversa para δ e β_1 são dadas por,

$$I(\delta, \beta_1) = \begin{bmatrix} r & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

e

$$I^{-1}(\delta, \beta_1) = \frac{1}{rb_2 - b_1^2} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -b_1 & r \end{bmatrix} \text{ respectivamente.}$$

Os elementos de (2.49) são constantes, indicando uma boa precisão na aproximação assintótica à distribuição normal. Entretanto a matriz não é diagonal, ou seja, existe correlação entre os parâmetros.

Como verificado anteriormente, as reparametrizações (θ_u, β_1) e (δ, β_1) não proporcionam as duas propriedades desejadas simultaneamente. A seguir é considerada a reparametrização ortogonal proposta por Cox e Reid (1987), associada a uma reparametrização logarítmica, com o objetivo de obter uma parametrização que possibilite ao mesmo tempo uma boa aproximação normal assintótica e parâmetros ortogonais, isto é, uma parametrização assintoticamente independente.

Como observado em (2.37), β_1 é estimado na presença do parâmetro θ_u . Para simplificar esta estimação, pode-se utilizar a reparametrização ortogonal (Cox e Reid, 1987), que consiste em transformar os parâmetros originais θ_u e β_1 em parâmetros ortogonais φ e β_1 . O parâmetro

ortogonal φ é obtido resolvendo-se a equação diferencial (2.12), dada por,

$$-I_{\theta_u, \beta_1} = I_{\theta_u, \theta_u} \frac{\partial \theta_u}{\partial \beta_1}, \quad (2.50)$$

onde I_{θ_u, θ_u} e I_{θ_u, β_1} são os elementos da matriz de informação de Fisher (2.44) com respeito a θ_u e do produto cruzado (θ_u, β_1) , respectivamente.

Inicialmente, pode-se observar que a função de verossimilhança para θ_u e β_1 (2.37) pode ser rescrita na forma

$$L(\theta_u, \beta_1) \propto \theta_u^{-r} \exp \left\{ \beta_1 r \bar{\bar{X}} - \theta_u^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} \right\}, \quad (2.51)$$

onde $\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i (X_u - X_i)}{r}$ é a média ponderada de $(X_u - X_i)$, $i = 1, \dots, k$.

A matriz de informação de Fisher (2.44), rescrita em função de $\bar{\bar{X}}$, é dada por,

$$I(\theta_u, \beta_1) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\theta_u^2} & -\frac{r \bar{\bar{X}}}{\theta_u} \\ -\frac{r \bar{\bar{X}}}{\theta_u} & b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Substituindo os elementos de (2.52) na equação diferencial (2.50), tem-se

$$\bar{\bar{X}} d\beta = \frac{d\theta_u}{\theta_u}$$

Uma solução dessa equação diferencial é dada por $\bar{\bar{X}} \beta_1 = \log(\theta_u) + c(\varphi)$, onde $c(\varphi)$ é uma função arbitrária de φ .

Considerando $c(\varphi) = -\log(\varphi)$, obtém-se

$$\theta_u = \varphi e^{\beta_1 \bar{\bar{X}}}. \quad (2.53)$$

Como, de (2.2) e (1.6), $\theta_u^{-1} = \exp\{-(Z_u + \beta_0 + \beta_1 X_u)\}$, tem-se que

$$\varphi = \frac{e^{\beta_1 (X_u - \bar{\bar{X}})}}{e^{-(Z_u + \beta_0)}}. \quad (2.54)$$

Logo, β_0 pode ser escrito como,

$$\beta_0 = -\log \left\{ \frac{e^{\beta_1(X_u - \bar{X})}}{e^{-z_u \varphi}} \right\}. \quad (2.55)$$

Substituindo a expressão (2.55) na função de verossimilhança (2.13), obtém-se a função de verossimilhança para os parâmetros ortogonais φ e β_1 , dada por

$$L(\varphi, \beta_1) \propto \varphi^{-r} \exp \left\{ -\varphi^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1(X_u - X_i - \bar{X})} \right\}. \quad (2.56)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança para φ e β_1 são dados por,

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \hat{\beta}_1(X_u - X_i - \bar{X})}}{r}. \quad (2.57)$$

e $\hat{\beta}_1$ é a solução da equação,

$$\sum_{i=1}^k A_i (X_u - X_i - \bar{X}) e^{-(Z_i - Z_u) + \hat{\beta}_1(X_u - X_i - \bar{X})} = 0. \quad (2.58)$$

A matriz de informação de Fisher com respeito aos parâmetros φ e β_1 é dada por,

$$I(\varphi, \beta_1) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\varphi^2} & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

onde $e_1 = \sum_{i=1}^k r_i (X_u - X_i - \bar{X})^2$.

Pode-se observar que através da reparametrização ortogonal adotada para o parâmetro θ_u , um primeiro passo foi dado com relação à obtenção de uma parametrização assintoticamente independente, isto é, a matriz (2.59) é diagonal, implicando em uma parametrização ortogonal (Cox e Reid, 1987). Porém, inferências sobre os parâmetros φ e β_1 via aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, em geral, não terão boa precisão (os elementos de (2.59) não são constantes). Este problema pode ser solucionado utilizando-se a reparametrização logarítmica, isto é, $\psi = \log \varphi$ ($\varphi = e^\psi$).

Considerando $\varphi = e^\psi$ e a função de verossimilhança (2.56), obtém-se a função de verossi-

milhança para ψ e β_1 , dada por,

$$L(\psi, \beta_1) \propto e^{-\psi r} \exp \left\{ -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{X})} \right\}. \quad (2.60)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança para ψ e β_1 são dados por,

$$\hat{\psi} = \log \left\{ \frac{\sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \hat{\beta}_1 (X_u - X_i - \bar{X})}}{r} \right\} \quad (2.61)$$

e $\hat{\beta}_1$ é a solução da equação

$$\sum_{i=1}^k A_i (X_u - X_i - \bar{X}) e^{-(Z_i - Z_u) + \hat{\beta}_1 (X_u - X_i - \bar{X})} = 0. \quad (2.62)$$

A matriz de informação de Fisher para ψ e β_1 é dada por,

$$I(\psi, \beta_1) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

onde e_1 é dado em (2.59).

Pode-se notar que os elementos de $I(\psi, \beta_1)$ são constantes, indicando que inferências baseadas na aproximação normal assintótica terão uma boa precisão. Além disso, $I(\psi, \beta_1)$ é uma matriz diagonal, o que implica em ortogonalidade entre os parâmetros. Ou seja, os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\psi}$ e $\hat{\beta}_1$ são assintoticamente independentes.

2.4 Aplicação numérica e resultados obtidos

Considerando uma distribuição exponencial para os tempos de sobrevivência, um esquema de censura do tipo II e o modelo de Eyring como relação estresse-resposta, Louzada-Neto e Pardo-Fernández (2001) realizam um estudo sobre o efeito de reparametrização na precisão de inferências obtidas por aproximação normal assintótica do estimador de máxima verossimilhança. Como o modelo de Eyring é um caso particular do modelo estresse-resposta geral, é utilizado nesta dissertação o mesmo conjunto de dados utilizado pelos autores citados acima. Os dados

foram obtidos de um experimento feito com recipientes pressurizados de Kevlan/Epoxy 49, submetidos a dois níveis de pressão, V (psi), mais severos que os usuais (3700 e 4000 psi), extraídos de Barlow, Toland e Freeman (1986). Considere-se que o objetivo do experimento é prever o tempo de sobrevivência dos recipientes, sob o nível de estresse usual $V = 3600$ psi.

Tabela 2. Teste de sobrevivência acelerado com recipientes pressurizados de Kevlan/Epoxy 49 (Barlow, Toland e Freeman, 1986).

i	V_i	n_i	r_i	Dados não censurados (horas)						
1	3700	24	18	225.2	503.6	1087.7	1134.3	1824.3		
				1920.1	2383.0	2442.5	3708.9	3708.9		
				4908.9	5556.0	6271.1	7332.0	7918.7		
				7996.0	9240.3	9973.0				
2	4000	24	24	19.1	24.3	69.8	71.2	136.0	199.1	
				403.7	432.2	453.4	514.1	514.2	541.6	
				544.9	554.2	664.5	694.1	876.7	930.4	
				1254.9	1275.6	1536.8	1755.5	2046.2	6177.5	

Os resultados obtidos para os parâmetros β_0 , $\beta_1 \times 10^{-4}$, β_0^* , β_1^* , $\theta_u \times 10^{-4}$, δ , $\varphi \times 10^{-3}$ e ψ , estão resumidos na Tabela 3.

Tabela 3. Estimativas de máxima verossimilhança e I.C. obtidos por aproximação normal assintótica.

Param.	e.m.v.	I.C. 95 %
(β_0, β_1)	$\widehat{\beta}_0 = 10.30$	[2.50 , 18.11]
	$\widehat{\beta}_1 = 10.16$	[7.15 , 13.18]
(β_0^*, β_1^*)	$\widehat{\beta}_0^* = -15.98$	[-16.29, -15.68]
	$\widehat{\beta}_1^* = 10.16$	[7.15 , 13.18]
(θ_u, β_1)	$\widehat{\theta}_u = 1.69$	[0.59 , 2.79]
	$\widehat{\beta}_1 = 10.16$	[7.15 , 13.18]
(δ, β_1)	$\widehat{\delta} = 9.73$	[9.08 , 10.38]
	$\widehat{\beta}_1 = 10.16$	[7.15 , 13.18]
(φ, β_1)	$\widehat{\varphi} = 2.43$	[1.69 , 3.16]
	$\widehat{\beta}_1 = 10.16$	[7.15 , 13.18]
(ψ, β_1)	$\widehat{\psi} = 7.79$	[7.49 , 8.10]
	$\widehat{\beta}_1 = 10.16$	[7.15 , 13.18]

onde **e.m.v.** significa estimativa de máxima verossimilhança.

2.5 Retrospecto das reparametrizações estudadas

Na Figura 1, é apresentada uma síntese sobre o efeito causado pelas reparametrizações consideradas, quanto à ortogonalidade entre os parâmetros (coluna 4) e a viabilidade da aproximação normal assintótica (coluna 5). São apresentados também os contornos da verossimilhança (níveis 0.50, 0.75, 0.90, 0.95), com as respectivas matrizes de informação de Fisher.

Analisando as parametrizações considerando as duas propriedades desejadas, tem-se que as reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) apresentam esta propriedade, e no caso da precisão na aproximação normal, esta é alcançada pela parametrização (β_0, β_1) e pelas reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (δ, β_1) e (ψ, β_1) . Apenas as reparametrizações (β_0^*, β_1^*) e (ψ, β_1) proporcionam as duas propriedades simultaneamente.

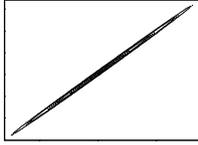
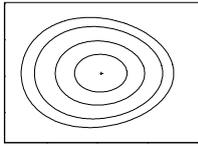
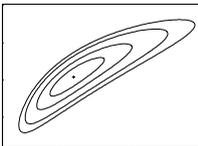
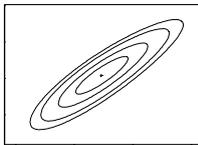
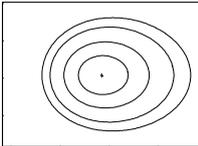
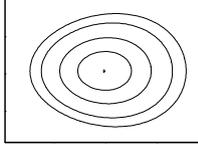
parâmetros	matriz I	contornos	ortogonal.	normal.
(β_0, β_1)	$\begin{bmatrix} r & -a_1 \\ -a_1 & a_2 \end{bmatrix}$		Não	Sim
(β_0^*, β_1^*)	$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & a_2 - \frac{a_1^2}{r} \end{bmatrix}$		Sim	Sim
(θ_u, β_1)	$\begin{bmatrix} r/\theta_u^2 & b_1/\theta_u \\ b_1/\theta_u & b_2 \end{bmatrix}$		Não	Não
(δ, β_1)	$\begin{bmatrix} r & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$		Não	Sim
(φ, β_1)	$\begin{bmatrix} r/\varphi^2 & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}$		Sim	Não
(ψ, β_1)	$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}$		Sim	Sim

Figura 1. Efeito das reparametrizações e contornos das verossimilhanças correspondentes aos níveis 0.50, 0.75 , 0.90 e 0.95.

Capítulo 3

Probabilidade de Cobertura dos Intervalos de Confiança

Um procedimento comum em Inferência Estatística é a utilização da aproximação normal assintótica para obtenção de intervalos de confiança para parâmetros de interesse ou funções destes. Entretanto, estes procedimentos podem não apresentar probabilidades de cobertura próximas aos valores nominais, principalmente quando o número de falhas é pequeno. Jeng e Meeker (2000) mostram que tais procedimentos apresentam uma precisão razoável apenas para um número esperado de falhas grande (maior que 100 unidades).

Neste capítulo, através de um estudo de simulação, são verificadas as probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança obtidos por aproximação normal assintótica. O efeito de reparametrização na precisão dos intervalos é verificada. O efeito da presença de censura foi também investigado no estudo de simulação.

3.1 Intervalos de Confiança

Considere $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ um vetor de parâmetros, onde θ_1 é o parâmetro de interesse e θ_2 o parâmetro *nuisance*. Seja $C_{n;1-\alpha}$ um intervalo de confiança (IC) para θ_1 com probabilidade de cobertura nominal $1 - \alpha$, onde n é o tamanho da amostra. O procedimento para obtenção de $C_{n;1-\alpha}$ é dito ter precisão de k -ésima ordem se $P(\theta_1 \in C_{n;1-\alpha}) = 1 - \alpha + O(n^{-k/2})$. Se não existir o termo $O(\cdot)$ na equação, diz-se que o procedimento para obtenção de $C_{n;1-\alpha}$ é exato. Em

algumas aplicações somente um limite de confiança (LC) é requerido, por exemplo um limite inferior (LI) ou um limite superior (LS). Estes LC's são obtidos utilizando-se os respectivos limites de um IC, com um ajuste adequado no nível de confiança (Jeng e Meeker, 2000).

3.1.1 Procedimento por aproximação normal

Satisfeitas as condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança de um vetor de parâmetros $\hat{\underline{\theta}}$ é assintoticamente normal e eficiente (Serfling, 1980). Denotando a matriz de informação de Fisher por I_{θ} e $n \left[se_{\hat{\theta}_1} \right]^2$ um estimador que converge em probabilidade para $I_{\theta}^{(1,1)}$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $I_{\theta}^{(1,1)}$ é o termo (1,1) da inversa de I_{θ} . Então a distribuição de $\frac{(\hat{\theta}_1 - \theta)}{se_{\hat{\theta}_1}}$ é aproximadamente $N(0, 1)$ para grandes amostras. Portanto, um IC por aproximação normal com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança pode ser obtido de $\hat{\theta}_1 \pm z_{(1-\alpha/2)} \hat{se}_{\hat{\theta}_1}$, onde $z_{(1-\alpha/2)}$ é o quantil $1 - \alpha/2$ da distribuição $N(0, 1)$. O estimador $n \left[se_{\hat{\theta}_1} \right]^2$ é obtido da inversa da matriz de informação de Fisher local (Nelson, 1982).

3.1.2 Probabilidade de cobertura

Embora alguns casos especiais permitam a obtenção de quantidades pivotais, que possibilitam a obtenção de ICs exatos (Lawless, 1982), o procedimento desenvolvido nesta dissertação baseia-se em aproximações estatísticas, ou seja, envolve uma possível discrepância entre as probabilidades de cobertura nominal e a probabilidade de cobertura real, obtida para o IC. Estudamos aqui o coeficiente de confiança ou probabilidade de cobertura (PC), $1 - \alpha$, o qual é a frequência relativa com que o IC deveria conter o verdadeiro valor do parâmetro θ_1 , em uma série de repetições do experimento em que os dados foram gerados.

3.2 Estudo de simulação

Esta seção descreve o experimento de simulação comparando os resultados obtidos para as diferentes reparametrizações.

3.2.1 Especificações Gerais

Este experimento de simulação foi elaborado com o objetivo de analisar o efeito que as reparametrizações descritas no capítulo 2 exercem na precisão dos intervalos de confiança para diferentes tamanhos amostrais e presença de censura do tipo II. Os LC's $100(1 - \alpha)\%$ foram calculados para $\alpha = 0.05$. Portanto, os IC's 90% podem ser obtidos pela combinação dos respectivos limites inferior e superior.

3.2.2 Probabilidades de Cobertura

O estudo de simulação desenvolvido baseia-se em amostras geradas com distribuição exponencial e o modelo estresse resposta-geral para os 3 modelos: Eyring, Arrhenius e Potência. Os valores dos parâmetros do modelo estresse resposta-geral foram fixados em $\beta_0 = -10$ e $\beta_1 = 70000$ para os modelos Eyring e Arrhenius, e $\beta_0 = 5.7$ e $\beta_1 = 0.6$ para o modelo Potência. Dois níveis de estresse foram considerados.

Foram geradas 1000 amostras para cada combinação de relação estresse-resposta (Eyring, Arrhenius e Potência), parametrização, tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70, 100$ para cada nível de estresse) e presença ou não de censura tipo II (nos níveis 30%, 50% e 75%).

Os resultados deste estudo estão sumarizados nos gráficos das probabilidades de cobertura versus o tamanho amostral, para os intervalos de confiança e separadamente para os limites superiores e inferiores. As figuras 2 e 3 apresentam os resultados para a parametrização (β_0, β_1) e reparametrização (β_0^*, β_1^*) , e as figuras 4 a 9 os resultados para as demais reparametrizações. Nos gráficos das Figuras 2, 4, 6 e 8 há uma linha horizontal em $PC = 0.95$ e duas linhas horizontais em $PC = 0.9344$ e 0.9655 , que correspondem respectivamente aos limites inferior e superior do IC de 99% para $PC = 0.95$. Nos gráficos das Figuras 3, 5, 7 e 9 há uma linha horizontal em $PC = 0.90$ e duas linhas horizontais em $PC = 0.8844$ e 0.9156 , que correspondem respectivamente aos limites inferior e superior do IC de 99% para $PC = 0.90$.

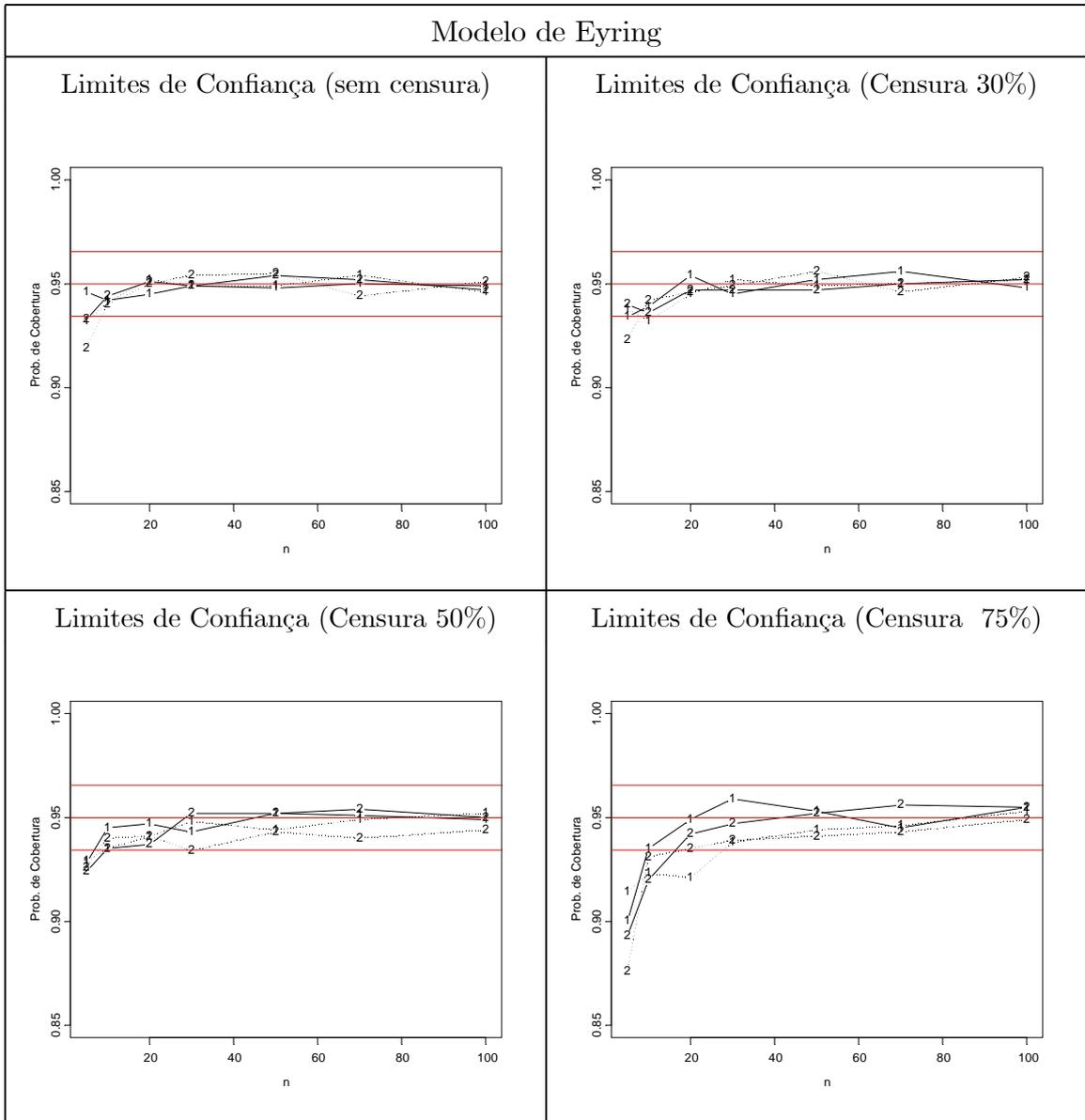


Figura 2. Gráficos das probabilidades de cobertura dos limites inferiores (linhas tracejadas) e superiores (linhas contínuas) dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo de Eyring. Os números (1, 2) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as parametrizações (β_0, β_1) e (β_0^*, β_1^*) , respectivamente.

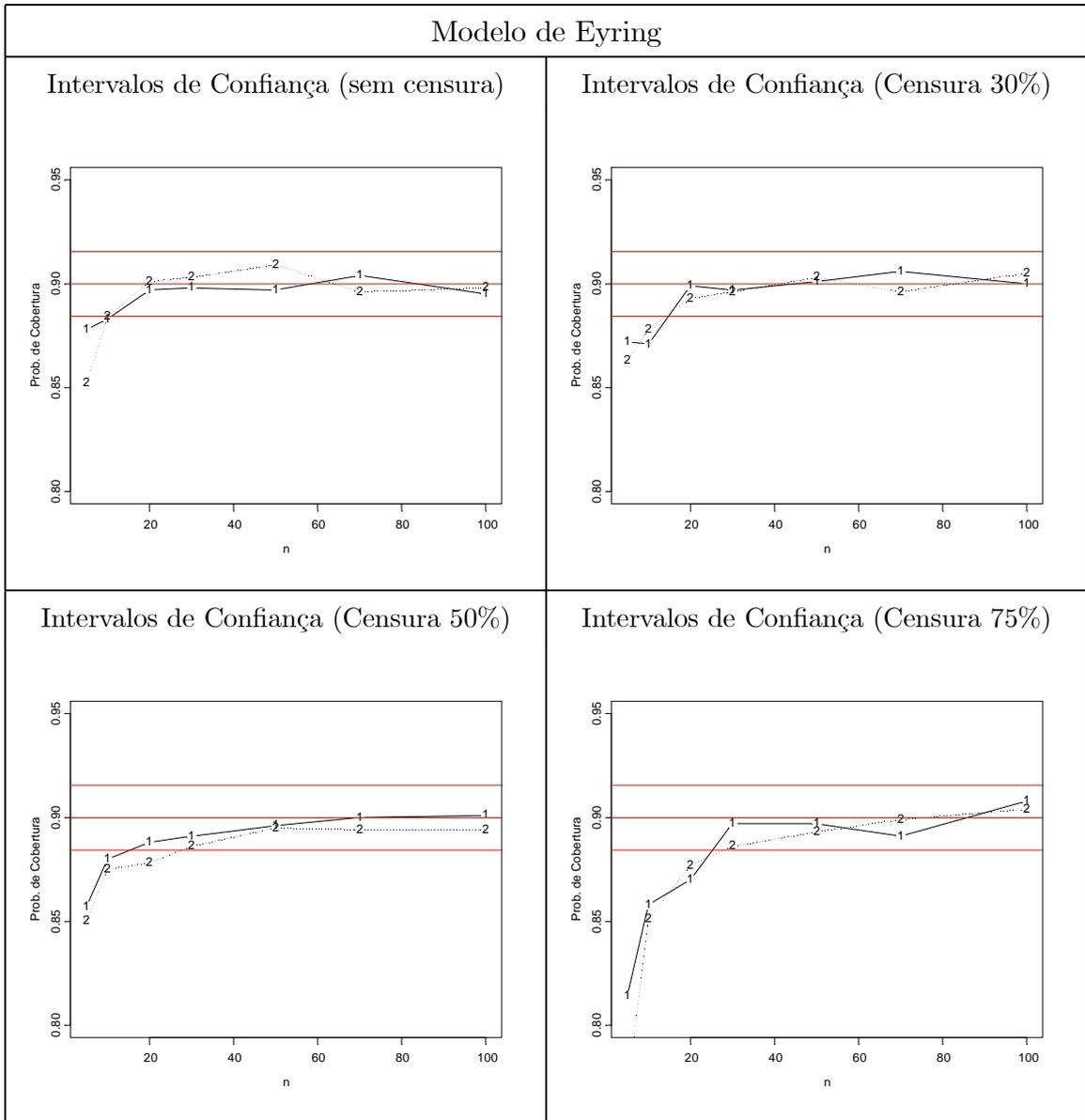


Figura 3. Gráficos das probabilidades de cobertura dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo de Eyring. Os números (1, 2) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as parametrizações (β_0, β_1) e (β_0^*, β_1^*) , respectivamente.

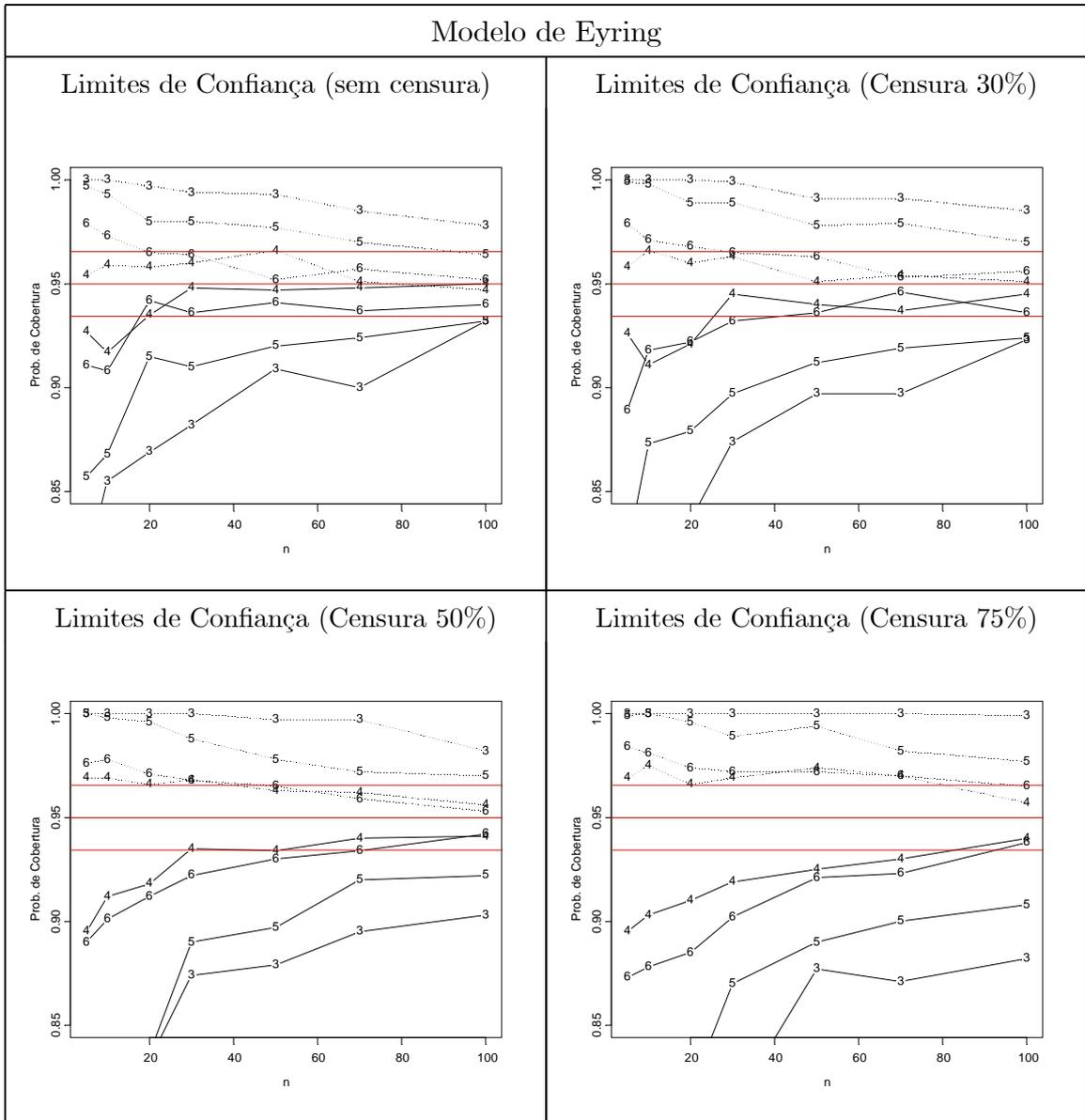


Figura 4. Gráficos das probabilidades de cobertura dos limites inferiores (linhas tracejadas) e superiores (linhas contínuas) dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo de Eyring. Os números (3, 4, 5, 6) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as reparametrizações (θ_u, β_1) , (δ, β_1) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) , respectivamente.

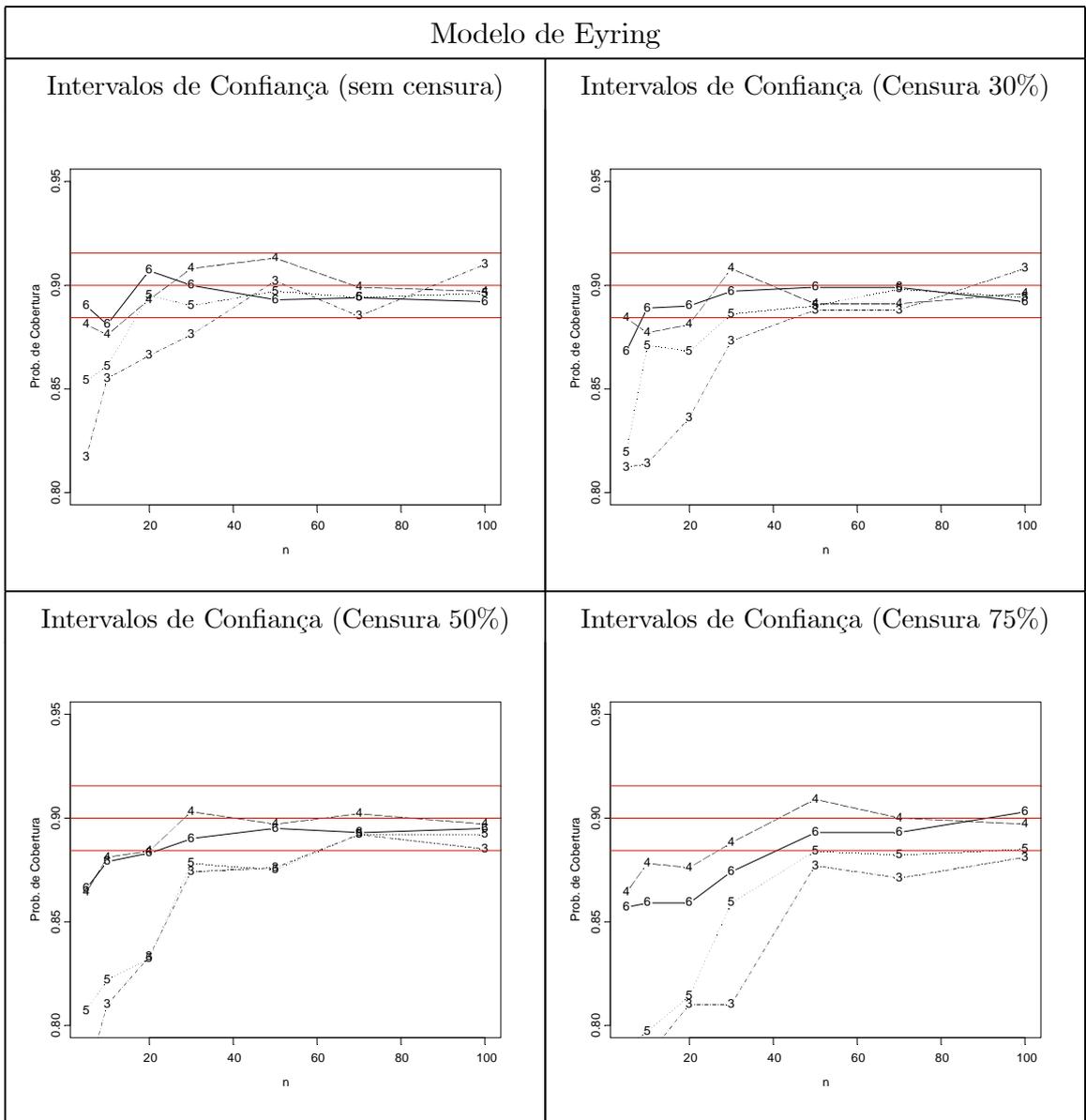


Figura 5. Gráficos das probabilidades de cobertura dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo de Eyring. Os números (3, 4, 5, 6) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as reparametrizações (θ_u, β_1) , (δ, β_1) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) , respectivamente.

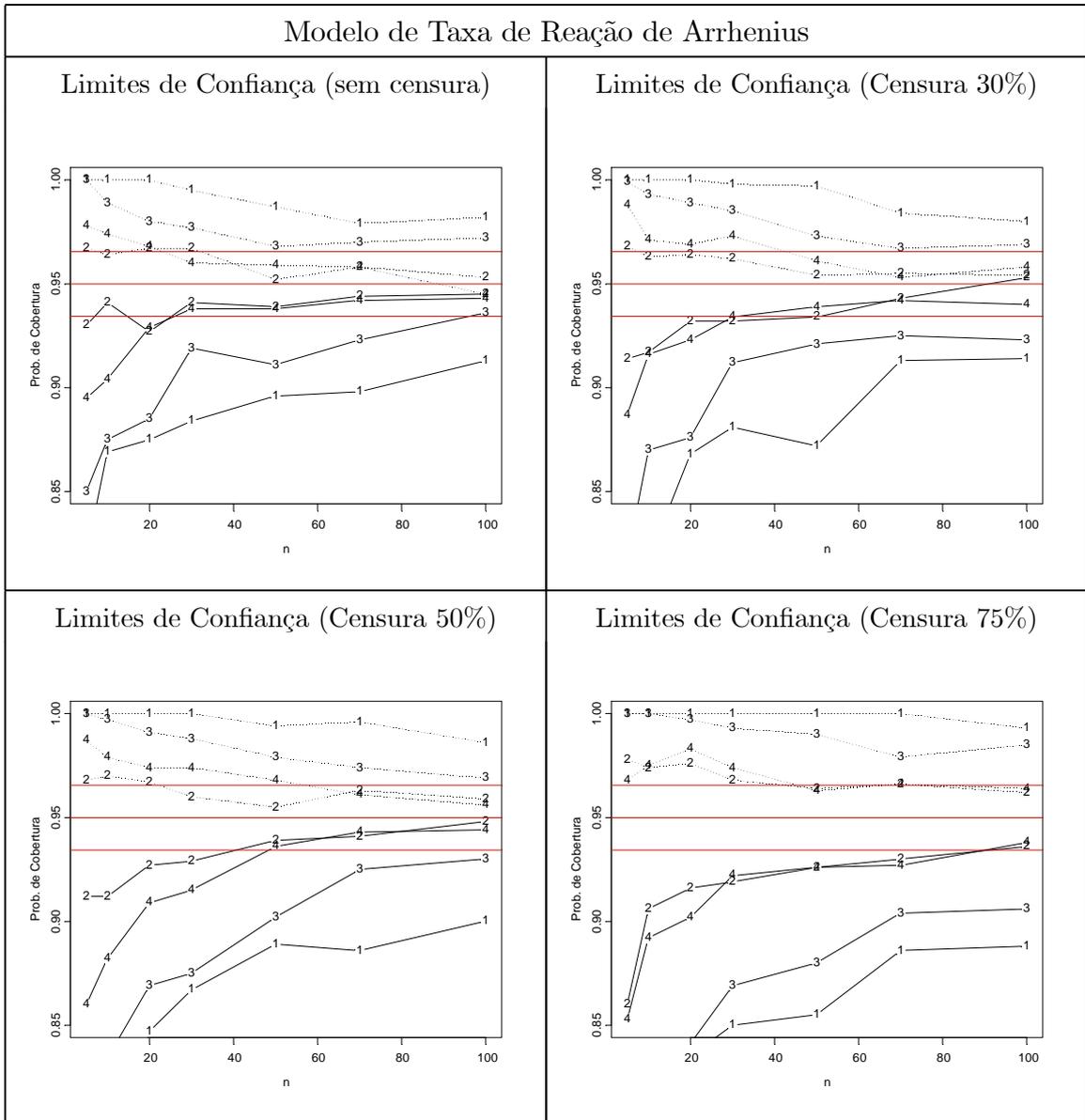


Figura 6. Gráficos das probabilidades de cobertura dos limites inferiores (linhas tracejadas) e superiores (linhas contínuas) dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo de Taxa de Reação de Arrhenius. Os números (3, 4, 5, 6) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as reparametrizações (θ_u, β_1) , (δ, β_1) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) , respectivamente.

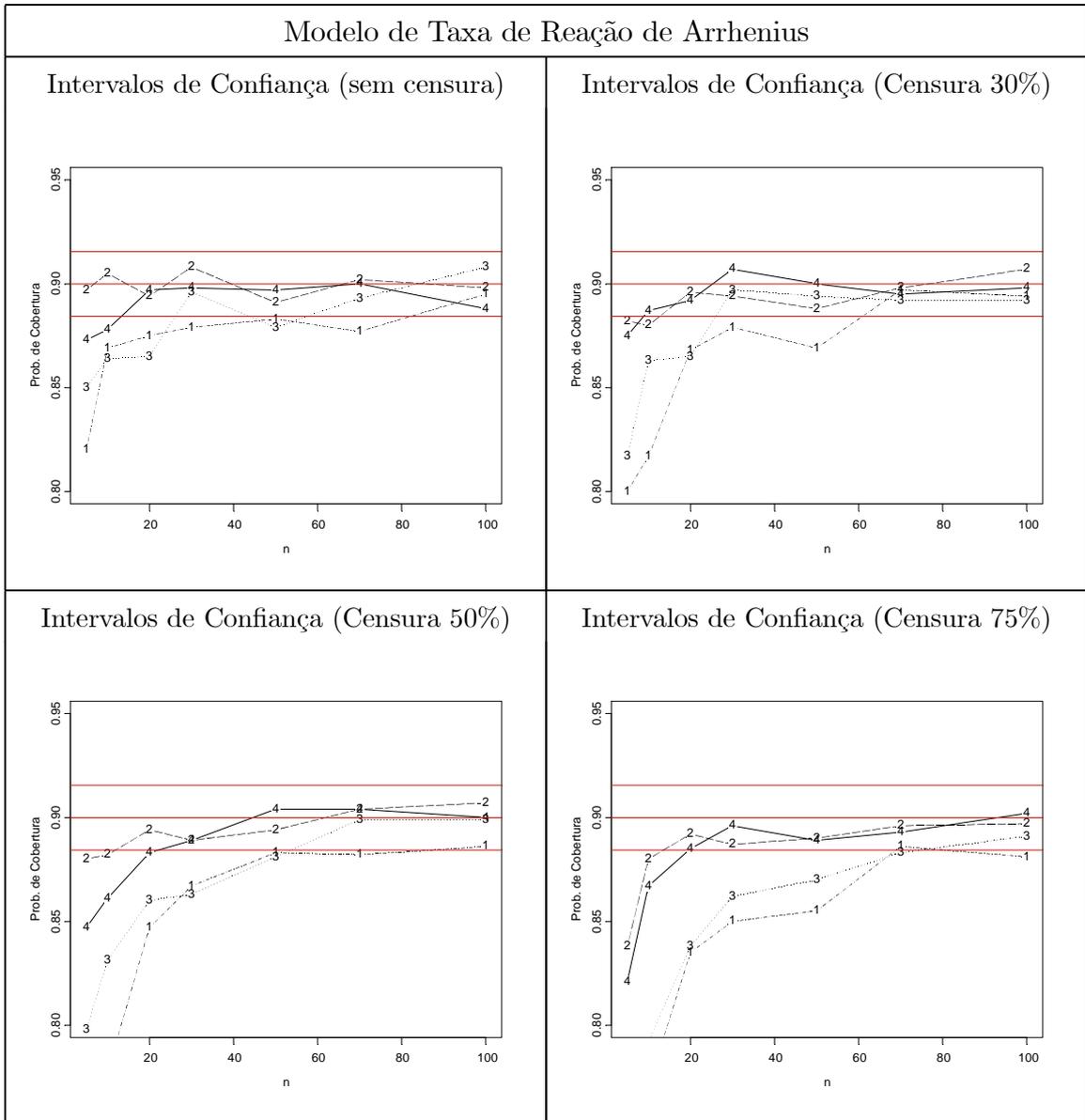


Figura 7. Gráficos das probabilidades de cobertura dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo de Taxa de Reação de Arrhenius. Os números (3, 4, 5, 6) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as reparametrizações (θ_u, β_1) , (δ, β_1) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) , respectivamente.

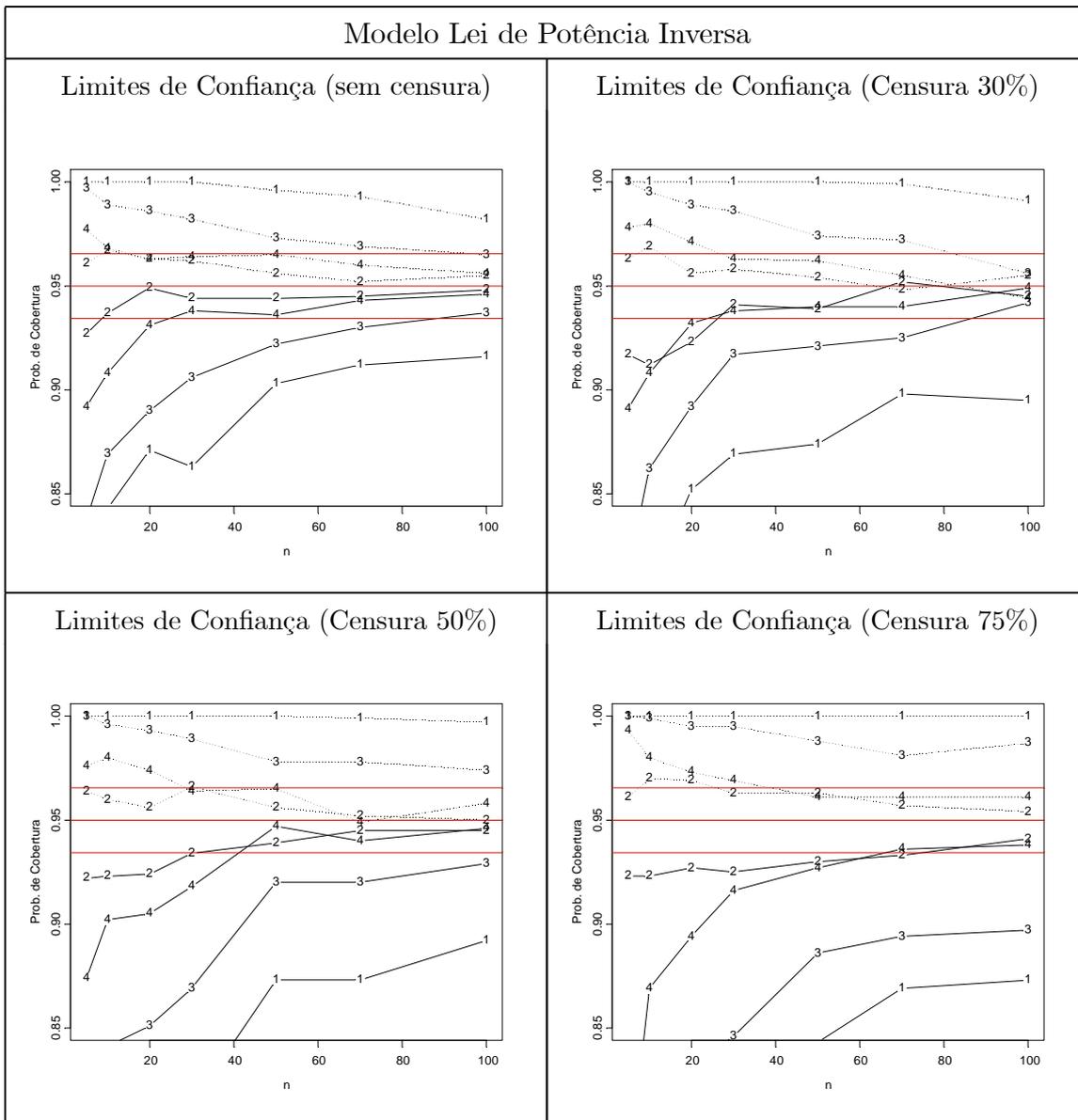


Figura 8. Gráficos das probabilidades de cobertura dos limites inferiores (linhas tracejadas) e superiores (linhas contínuas) dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo Lei de Potência Inversa. Os números (3, 4, 5, 6) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as reparametrizações (θ_u, β_1) , (δ, β_1) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) , respectivamente.

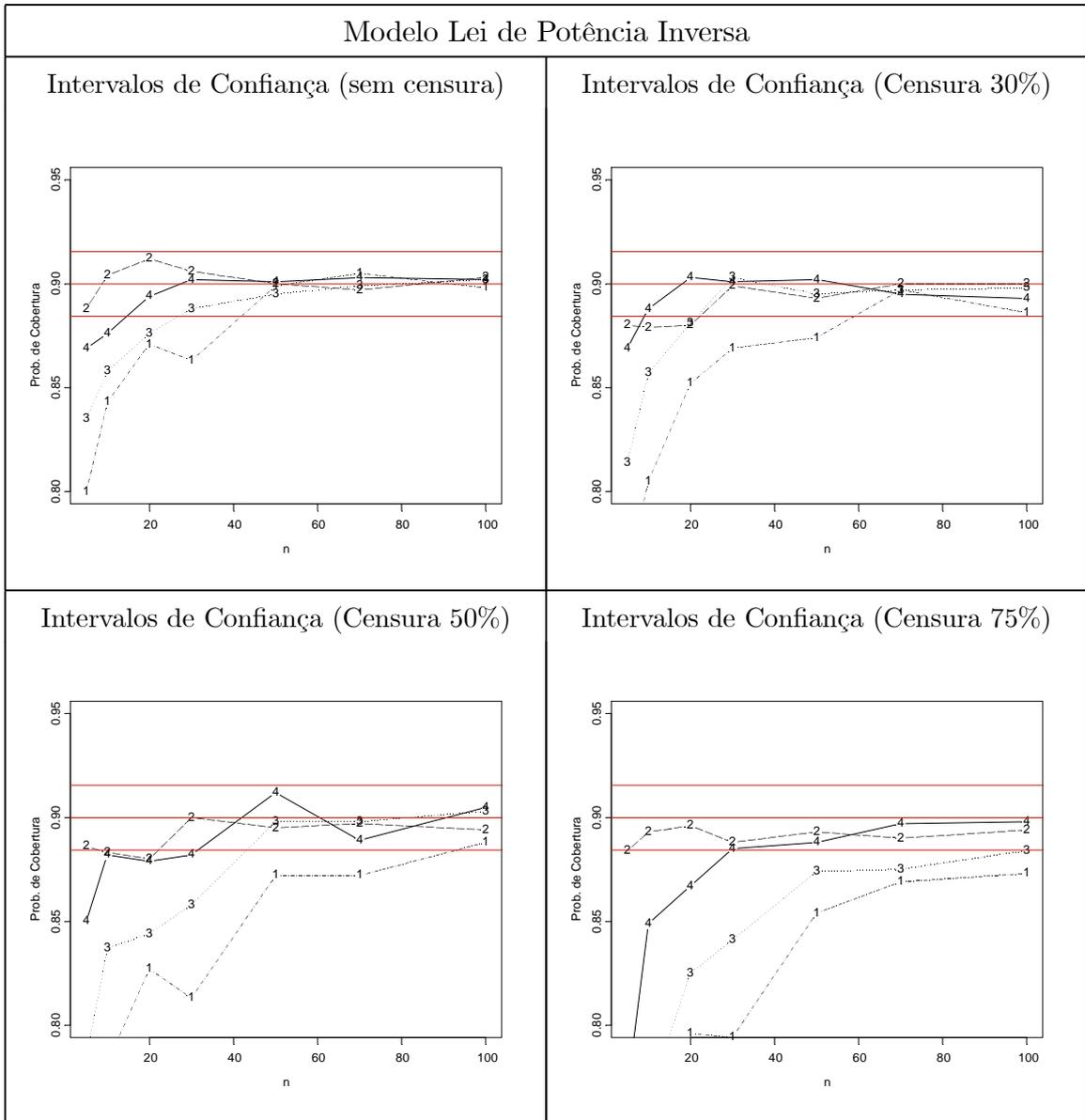


Figura 9. Gráficos das probabilidades de cobertura dos I.C. de 90% versus o tamanho amostral ($n = 5, 10, 20, 30, 50, 70$ e 100), para o modelo Lei de Potência Inversa. Os números (3, 4, 5, 6) nas linhas, correspondem às probabilidades de cobertura obtidas com as reparametrizações (θ_u, β_1) , (δ, β_1) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) , respectivamente.

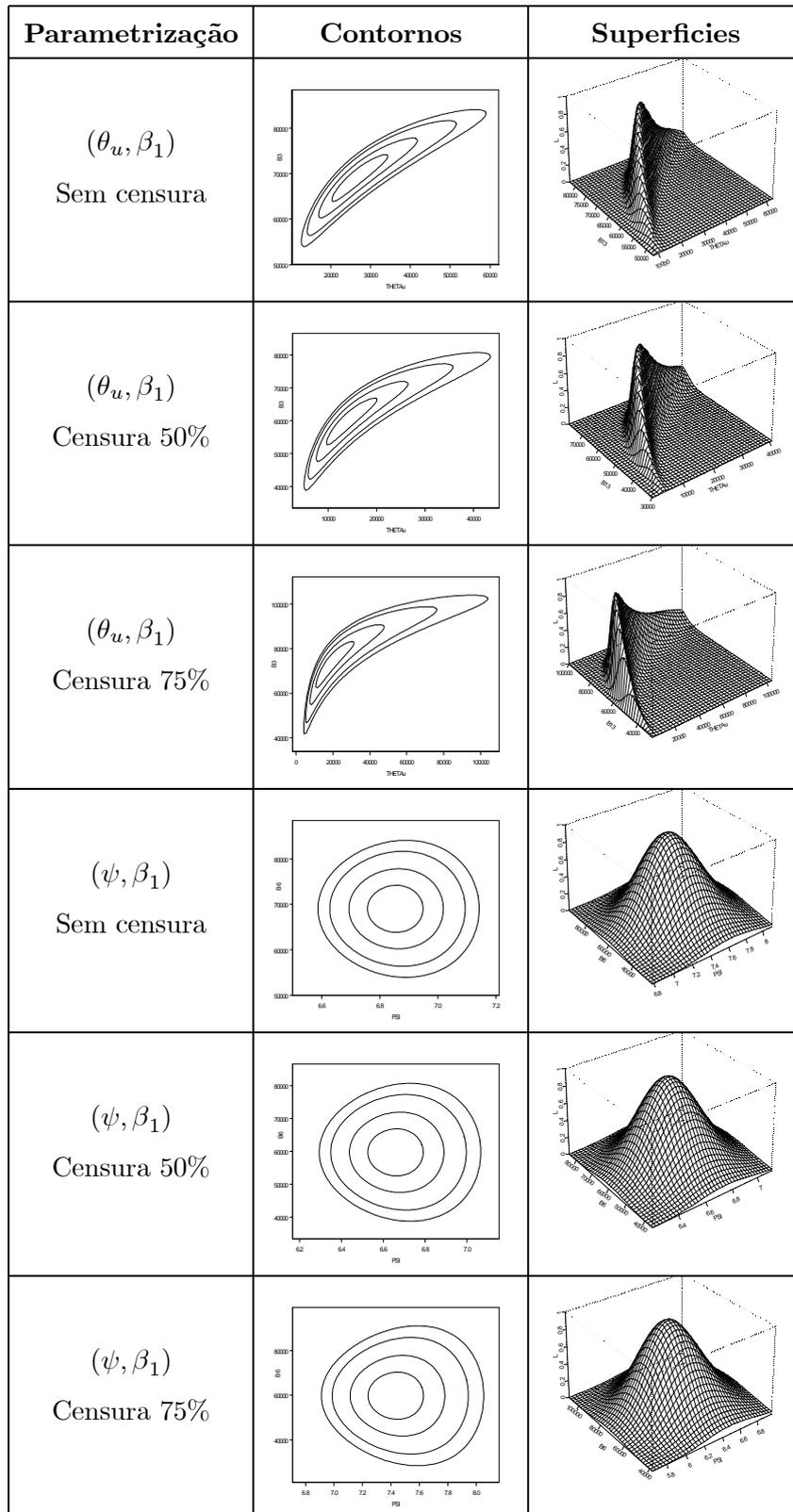


Figura 10. Contornos e Superficies

Considerando as Figuras 2 e 3, pode-se notar que os LCs e ICs obtidos para a parametrização (β_0, β_1) e reparametrização (β_0^*, β_1^*) apresentam boa precisão mesmo para pequenas amostras e níveis altos de censura.

Para as demais reparametrizações (Figuras 4 a 9), os resultados são compatíveis para todos os modelos. As PCs dos ICs 90% para os parâmetros são próximas a 0.90 quando as parametrizações (δ, β_1) e (ψ, β_1) são consideradas, mesmo quando o tamanho da amostra é pequeno e para um alto nível de censura. Da mesma forma, as PCs para os limites de confiança aproximam-se de 0.95 quando n cresce, somente para estas reparametrizações (cujas matrizes de informação de Fisher apresentaram elementos constantes). As baixas PCs dos ICs são relacionadas às baixas PCs dos ICs dos limites superiores.

Na figura 10 são apresentados os contornos e superfícies das verossimilhanças para as reparametrizações (θ_u, β_1) e (ψ, β_1) considerando dois níveis de censura. Observando-se os contornos, nota-se que a reparametrização (θ_u, β_1) é mais sensível à presença de censura.

Capítulo 4

Análise Bayesiana do Modelo Estresse-Resposta Geral

Entre as motivações para o uso de inferência Bayesiana, alguns autores destacam a possibilidade de obter-se a mesma qualidade nas inferências obtidas por métodos clássicos, com um número menor de dados disponíveis. Esta consideração é importante em análise de confiabilidade, pois nesta área é comum a presença de pequenas amostras, resultante da pressão por contenção de custos e da necessidade de obtenção de estimativas para os parâmetros de interesse num curto período de tempo (Martz e Waller, 1982).

No capítulo 2, é estudada a precisão das inferências sobre o tempo médio de sobrevivência θ_u , obtidas por aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Para se obter melhor precisão em tais aproximações, o uso de reparametrizações é explorado.

Neste capítulo, sob o enfoque Bayesiano, é avaliado o efeito que as mesmas reparametrizações consideradas no capítulo 2, exercem na convergência das cadeias. Assim como naquele capítulo, é assumida uma distribuição exponencial para os tempos de sobrevivência, um esquema de censura do tipo II e o modelo estresse-resposta geral. Como observado por Mattos (1999), em algumas das parametrizações analisadas no capítulo 2, existe uma alta correlação entre os parâmetros, tornando lenta a convergência das cadeias. Isto pode indicar a necessidade de uma reparametrização do modelo.

Para a obtenção de inferências sobre os parâmetros de interesse, é utilizada uma metodologia

Bayesiana via MCMC, e o efeito de reparametrização na convergência das cadeias é estudado.

4.1 Elementos básicos da Inferência Bayesiana

Sob uma perspectiva Bayesiana, não há uma distinção fundamental entre as observações e os parâmetros do modelo. Seja $P(T, \theta)$ a distribuição de probabilidade conjunta de todas as quantidades aleatórias. Esta distribuição conjunta é composta por duas partes: uma distribuição a priori $P(\theta)$ e a verossimilhança $L(\theta)$. Especificando $P(\theta)$ e $L(\theta)$ tem-se o modelo de probabilidade, $P(T, \theta) = L(\theta) P(\theta)$.

Após a observação dos dados, o teorema de Bayes é usado para determinar a distribuição condicional de θ dado T ,

$$P(\theta|T) = \frac{P(\theta) L(\theta)}{\int P(\theta) L(\theta) d\theta}. \quad (4.1)$$

Esta é a chamada distribuição a posteriori de θ e é o objeto de estudo de toda Inferência Bayesiana. Qualquer função de (4.1), por exemplo, momentos e quantis, podem ser expressos em termos de esperanças a posteriori de funções de θ . A esperança a posteriori de uma função $f(\theta)$ é dada por,

$$E[f(\theta) | T] = \frac{\int f(\theta) P(\theta) L(\theta)}{\int P(\theta) L(\theta) d\theta}. \quad (4.2)$$

As integrais desta expressão têm sido a fonte da maioria das dificuldades em Inferência Bayesiana, especialmente quando θ tem dimensão grande. Em muitas aplicações, avaliar analiticamente $E[f(\theta) | T]$ é impossível. Uma alternativa é a utilização de métodos aproximados de integração, tal como a aproximação de Laplace (Kass, Tierney e Kadane, 1990). Este método é considerado mais preciso quando comparado aos métodos baseados em simulação, mas pode apresentar uma dificuldade na implementação. Além disso, tal método pode tornar-se ineficiente em alguns casos, como por exemplo em densidades a posteriori multimodais.

Uma outra alternativa, é a utilização de métodos aproximados, baseados em simulação estocástica ou de Monte Carlo, tal como os métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov, MCMC.

4.2 Métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC - *Markov Chain Monte Carlo*)

Os métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov, fazem parte de uma classe de métodos aproximados, para obtenção de amostras para os parâmetros de interesse, baseados em simulação estocástica ou de Monte Carlo. A metodologia MCMC está baseada na substituição da expressão analítica da densidade, por uma amostra gerada a partir desta densidade. A grande vantagem deste método é a possibilidade de gerar uma amostra de uma densidade, sem a necessidade de conhecê-la.

Seja $\pi(\theta)$ a densidade que se tem interesse em amostrar e $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ o parâmetro de interesse. A metodologia MCMC está baseada na construção de uma densidade de transição $q(\theta, \theta^*)$ tal que a cadeia de Markov correspondente, irredutível e aperiódica (Gilks, Richardson e Spiegelhalter, 1996), tenha $\pi(\cdot)$ como função de equilíbrio. Um valor gerado θ de $\pi(\cdot)$ é obtido através do seguinte algoritmo:

1. Iniciar com $\theta = \theta^{(0)}$ e o contador da cadeia $t = 1$;
2. Gere um valor $\theta^{(t)}$ através de $q(\theta^{(t-1)}, \theta)$;
3. Incremente t de uma unidade e retorne à etapa 2.

Algumas observações devem ser consideradas:

1. Para t suficientemente grande, $\theta^{(t)}$ é um valor de θ gerado por $\pi(\cdot)$. Condições de convergência podem ser encontradas em Tierney (1994);
2. Uma amostra de $\pi(\cdot)$ pode ser construída através de um conjunto de valores da cadeia após convergência;
3. A independência entre esses valores pode ser obtida, selecionando-se os valores da cadeia única, após cada salto de tamanho s , ou gerar várias cadeias e escolher os valores para compor a amostra de $\pi(\cdot)$ após a convergência. (Gelman e Rubin (1992), Geyer (1992), entre outros).

Em Inferência Bayesiana, os métodos de MCMC são extremamente importantes, devido à frequente complexidade das distribuições a posteriori. Entre os métodos mais utilizados, pode-se destacar o algoritmo Metropolis-Hastings (Hastings, 1970) e o amostrador de Gibbs (Geman e Geman, 1984).

4.2.1 Amostrador de Gibbs

O Amostrador de Gibbs foi desenvolvido por Geman e Geman (1984), no contexto de restauração de imagens. Gelfand e Smith (1990) generalizaram seu uso, como uma aproximação para o ajuste de modelos estatísticos. A partir de então, devido à facilidade de implementação, o amostrador de Gibbs passou a ter uma grande utilização em Inferência Bayesiana.

Este método permite gerar uma amostra de $\pi(\underline{\theta})$, a partir de amostragens iterativas das densidades condicionais completas dos parâmetros. A transição é feita através das densidades condicionais, da seguinte forma: Dados os valores iniciais $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$, gera-se $\theta_1^{(1)}$ de $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$, $\theta_2^{(1)}$ de $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$, ..., $\theta_m^{(1)}$ de $\pi(\theta_m | \theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{m-1}^{(1)})$ e obtém-se a primeira iteração $\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_m^{(1)}$.

Após a M-ésima iteração, toma-se o conjunto de N valores $(\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_m^{(t)})$ para $t = M + si$, $i = 0, \dots, N - 1$.

4.2.2 Algoritmo de Metropolis-Hastings

O algoritmo proposto por Metropolis et al. (1953) foi desenvolvido para estudar as propriedades de equilíbrio de grandes sistemas de partículas, tais como elétrons em um átomo. Hastings (1970) sugere uma generalização deste algoritmo, para utilização na simulação de desvios normais e Poisson, e de matrizes aleatórias ortogonais. A seguir é apresentada uma descrição resumida deste algoritmo.

Seja $q(\theta, \theta^*)$ uma transição, isto é, uma probabilidade de movimento de θ para θ^* . Geralmente o processo se move de θ para θ^* com mais frequência do que de θ^* para θ , violando a condição de reversibilidade

$$\pi(\theta) q(\theta, \theta^*) = \pi(\theta^*) q(\theta^*, \theta).$$

Este fato pode ser eliminado diminuindo-se o número de movimento de θ para θ^* , introduzindo uma probabilidade de movimento α . O algoritmo de Metropolis-Hastings (Hastings, 1970) é definido por:

1. Inicialize θ com o valor arbitrário $\theta^{(0)}$ e $t = 1$;
2. Gere θ^* de $q(\theta^{(t)}, \theta^*)$ e u de uma distribuição uniforme $(0,1)$;
3. Seja $\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^*) q(\theta^*, \theta^{(t)})}{\pi(\theta^{(t)}) q(\theta^{(t)}, \theta^*)} \right\}$;

4. Se $u < \alpha$ faça $\theta^{(t+1)} = \theta^*$; senão faça $\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)}$;
5. Repita (2) e (3) até que a distribuição estacionária (Gilks, Richardson e Spiegelhalter, 1996), tenha sido obtida.

Escolha de $q(\theta, \theta^*)$

Para implementação do algoritmo Metropolis-Hastings é preciso escolher uma densidade geradora de candidatos adequada. Um considerável número de trabalhos têm sido dedicados à questão de como esta escolha deve ser feita. A seguir são descritos, de forma resumida, apenas as mais usadas na prática.

a) Uma família de densidades geradora de candidatos, que consta do trabalho de Metropolis et al. (1953), é dada por $q(\theta, \theta^*) = q_1(\theta^* - \theta)$, onde $q_1(\cdot)$ é uma densidade multivariada (Muller, 1993). Neste caso, $\theta^* = \theta + \epsilon$ onde ϵ é a variável incremento com distribuição $q_1(\cdot)$. Note que quando q_1 é simétrica, $q_1(\epsilon) = q_1(-\epsilon)$, então a probabilidade de movimento se reduz a:

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta^{(t)})} \right\}.$$

b) Uma segunda família de densidades geradoras de candidatos é dada pela forma $q(\theta, \theta^*) = q_2(\theta^*)$ (Hastings, 1970). Neste caso os candidatos são gerados independentemente da iteração anterior.

c) Uma terceira escolha, que parece ser uma solução eficiente quando possível, é explorar a forma conhecida de $\pi(\cdot)$ para especificar uma densidade geradora de candidatos (Chib e Greenberg, 1995). Ou seja, se $\pi(\theta) \propto \phi(\theta)h(\theta)$, onde $h(\theta)$ é uma densidade que pode ser amostrada e $\phi(\theta)$ uniformemente limitada, toma-se

$$q(\theta, \theta^*) = h(\theta^*).$$

Neste caso particular, tem-se

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\phi(\theta^*)}{\phi(\theta^{(t)})} \right\}.$$

Uma questão importante a ser considerada é a variância da geradora de candidatos $q(\theta, \theta^*)$,

pois esta tem uma grande influência na eficiência do algoritmo. Pelo menos dois fatores dependem diretamente dela: o primeiro é a taxa de aceitação (porcentagem de vezes que ocorre um movimento de θ para θ^*) e o segundo é a região do espaço amostral que é coberta pela cadeia. Como exemplo, considere-se a situação em que a cadeia tenha alcançado a convergência e a densidade esteja sendo amostrada em torno da moda. Logo, se a variância de $q(\theta, \theta^*)$ for muito grande, muitos dos candidatos gerados serão muito distantes do valor corrente e conseqüentemente terão uma baixa probabilidade de aceitação. Por outro lado, se a variância de $q(\theta, \theta^*)$ for muito pequena, a cadeia mover-se-á muito lentamente e regiões com baixa probabilidade serão pouco visitadas. Estas duas situações provavelmente implicarão numa alta autocorrelação entre os elementos da cadeia (Chib e Greenberg, 1995).

4.3 Diagnósticos de Convergência

Por tratar-se de um método aproximado, uma questão fundamental no uso de métodos MCMC é a garantia de que as cadeias geradas realmente pertençam à distribuição de interesse. Desta forma, alguns aspectos importantes devem ser considerados. Se as iterações não forem efetuadas em um número necessário ao alcance da convergência, as simulações podem ser não-representativas da distribuição de interesse. Além disto, as iterações dentro da fase inicial de uma cadeia (*burn-in*) devem ser descartadas para reduzir a possibilidade de tendências, causadas pelos valores iniciais.

Existem outras questões críticas, como por exemplo, o número de cadeias a ser gerado, comprimento das mesmas e escolha de valores iniciais. Recomendações na literatura têm sido divergentes, variando desde muitas cadeias de comprimento curto (Gelfand e Smith, 1990), até várias cadeias de comprimento longo com diferentes valores iniciais (Gelman e Rubin, 1992).

4.3.1 O risco da convergência lenta não diagnosticada

Um problema grave ao fazer inferência utilizando simulação via Cadeia de Markov é que ao término das iterações, podem haver áreas do espaço paramétrico que não foram visitadas pela cadeia finita. Isto deve-se ao fato das simulações moverem-se muito lentamente, ou estarem presas à regiões restritas da distribuição de interesse. Gelman e Rubin (1992) verificam que

quando analisadas separadamente, algumas cadeias parecem ter convergido, mas replicações independentes, com pontos de partida dispersos, podem mostrar que a convergência ainda não ocorreu. Isto pode ser causado por uma alta correlação entre os parâmetros e nestes casos indica-se uma reparametrização do modelo.

Da mesma forma, uma autocorrelação acentuada dentro das cadeias, também pode implicar em convergência lenta. Na presença de autocorrelação, os gráficos de trajetórias das cadeias (*traces*) apresentarão um comportamento mais suavizado, com uma oscilação menos intensa. Uma reparametrização pode auxiliar a reduzir a autocorrelação. Alternativamente, pode-se aumentar o intervalo para escolha dos elementos da cadeia que irão compor a amostra (Gilks, Richardson e Spiegelhalter, 1996).

Para monitorar a convergência das cadeias existem vários critérios, denominados diagnósticos de convergência. Best, Cowles e Vines (1995) salientam que nenhum critério de convergência é isento de falhas e recomendam o uso de uma combinação de diagnósticos. Dentre os métodos de diagnóstico de convergência existentes, os mais utilizados são os diagnósticos de Gelman e Rubin (1992), Raftery e Lewis (1992), Geweke (1992) e Heidelberger e Welch (1983). Estes métodos estão implementados no *software* CODA - *Convergence Diagnostics and Outputs Analysis Software for Gibbs Sampling Output* (Best et al., 1995) e são utilizados nesta dissertação para verificação da convergência das cadeias geradas pelo *software* WinBUGS - *Bayesian inference Using Gibbs Sampling for Windows* (Spiegelhalter et al., 2001). A seguir é apresentado um breve resumo da teoria e implementação destes diagnósticos. Para maiores detalhes sobre estes *software* e diagnósticos, consultar as referências específicas.

4.3.2 Diagnóstico de Gelman e Rubin

O diagnóstico de convergência de Gelman e Rubin (1992) analisa a convergência das cadeias geradas, comparando sequências com diferentes pontos de partida e verificando se são indistinguíveis. Este diagnóstico exige duas ou mais cadeias paralelas, cada uma com diferentes valores iniciais. Este método está baseado na comparação das variâncias dentro da cadeia e entre as cadeias, para cada variável.

Considere J sequências paralelas a partir da iteração M , com saltos s e de comprimentos N . Seja O_{ij} o elemento i ($i = 1, \dots, N$) da sequência j ($j = 1, \dots, J$). Defina as seguintes variâncias:

variância dentro da sequência j

$$s_j^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\theta_{ij} - \bar{\theta}_{.j})^2,$$

e variância dentro das cadeias

$$W = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J s_j^2.$$

Observe que W é um estimador não viciado de σ^2 (variância a posteriori). Defina também a variância entre as cadeias

$$B = \frac{N}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{\theta}_{.j} - \bar{\theta}_{..})^2,$$

onde $\bar{\theta}_{.j} = \sum_{i=1}^N \theta_{ij} / N$ e $\bar{\theta}_{..} = \sum_{i=1}^N \bar{\theta}_{.j} / J$.

Considerando a variabilidade global envolvendo os JN valores, que estima a variância da distribuição a posteriori,

$$\hat{\sigma}^2 = Var(\theta | y) = \frac{N-1}{N} W + \frac{1}{N} B,$$

é possível monitorar a convergência da cadeia de Markov, estimando-se o fator para o qual o parâmetro de escala da distribuição a posteriori marginal de cada variável pode ser reduzido,

$$\sqrt{\widehat{R}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{W}}.$$

Assim, monitorando o tamanho da sequência N através de $\sqrt{\widehat{R}}$, isto é, escolhendo N tal que $\sqrt{\widehat{R}} \sim 1$, tomam-se as JN observações como a amostra final da distribuição limite π . Geralmente M é escolhido como sendo a metade da sequência gerada para um determinado valor de s , dependendo do grau de independência da conjunta π . Segundo Gelman, Carlin, Stern et al. (1995), a condição $\sqrt{\widehat{R}}$ aproximadamente igual a 1, depende do problema em questão. Para muitos casos, valores abaixo de 1.2 são aceitáveis, mas para a análise final de um conjunto de dados específico, um nível maior de precisão pode ser exigido.

Os diagnósticos de Gelman e Rubin, reportados pelo *software* CODA, são os quantis 50% e 97% da distribuição amostral de $\sqrt{\widehat{R}}$. Estes quantis são estimados somente da segunda metade de cada cadeia. Se ambos quantis são aproximadamente 1.0, a convergência pode ser diagnosticada,

isto é, as amostras da segunda metade de cada cadeia podem ser consideradas como originadas da distribuição estacionária.

4.3.3 Diagnóstico de Raftery e Lewis

O diagnóstico de Raftery e Lewis (1992b) aplica-se à cadeias únicas. A proposta deste método é determinar com antecedência o número de iterações necessárias, para um determinado nível de precisão.

Baseando-se numa amostra inicial de tamanho n e uma precisão especificadas pelo usuário, o diagnóstico de Raftery e Lewis, implementado no *software* CODA, apresenta os seguintes valores

a) *thin* (S): o salto de tamanho s para seleção dos elementos da cadeia que irão compor a amostra;

b) *burn-in* (M): o número de iterações iniciais que devem ser descartadas;

c) *total* (N): o número total de iterações que devem ser geradas;

d) *lower bound* (Nmin): o número mínimo de iterações necessárias para estimar um determinado quantil (padrão do CODA = 2,5^o percentil) se as amostras na cadeia fossem independentes;

e) *dependence factor* (I): fator de dependência, $\frac{N}{N_{\min}}$, que mede o incremento no número de iterações necessárias ao alcance da convergência, devido à dependência entre as amostras na cadeia. Valores de I muito maiores que 1.0 indicam uma elevada autocorrelação dentro da cadeia e conseqüentemente problemas com convergência. Raftery e Lewis (1992a) sugerem que $I > 5.0$ indica falha na convergência e neste caso uma reparametrização do modelo é aconselhada.

4.3.4 Diagnóstico de Geweke

O diagnóstico de convergência de Geweke (1992) é apropriado para cadeias simples. Para cada variável, a cadeia de tamanho n é dividida em duas partes, onde a primeira contém $x\%$ (padrão do CODA é 10%) das primeiras iterações e a segunda, $y\%$ (padrão do CODA é 50%) das últimas iterações da cadeia. Se a cadeia inteira é estacionária, as médias das 1^a e 2^a partes devem ser similares. Segundo o método, calcula-se a média amostral e variância assintótica para as duas partes, sendo Z a diferença entre as duas médias dividido pelo desvio-padrão de suas diferenças. Se a cadeia convergir, quando $n \xrightarrow{d} \infty$, a distribuição amostral de $Z \xrightarrow{d} N(0, 1)$. Valores de Z nos extremos de uma distribuição Normal padrão indicam que a cadeia não convergiu na

primeira parte (10% primeiras iterações). Deve-se descartar estas primeiras iterações e executar novamente o diagnóstico com $x\%$ das iterações seguintes.

4.3.5 Diagnóstico de Heidelberger e Welch

O método de Heidelberger e Welch (1983), inicialmente desenvolvido para detectar um estado transiente em sequências simuladas de eventos discretos, também é apropriado para ser utilizado como um diagnóstico de convergência para cadeias geradas via método MCMC. O método usa a estatística de *Cramer-von-Mises* para testar a hipótese nula, de que os valores gerados para cada variável formam um processo estacionário. Se a hipótese nula é rejeitada, o teste é repetido após 10% das iterações iniciais serem descartadas. Se a hipótese é novamente rejeitada, mais 10% das iterações são descartadas. Este processo é repetido até que uma porção das iterações (de comprimento $\geq 50\%$ do número total de iterações) passe pelo teste de estacionaridade, ou até que 50% das já tenham sido descartadas e a hipótese nula ainda for rejeitada. Se este último caso ocorre, o *software* CODA apresenta a estatística de *Cramer-von-Mises* e indica que o teste de estacionaridade falhou (*failed*), valores ausentes (NA) são mostrados em todas as outras colunas da tabela gerada pelo método. Isto indica que um número maior de iterações é necessário para o alcance da convergência.

Se o teste de estacionaridade (*stationarity test*) é aceito (*passed*), o *software* CODA apresenta o número de iterações a ser mantido (*# of iters. to keep*), o número de iterações iniciais a ser descartado (*# of iters. to discard*) e a estatística de *Cramer-von-Mises* (*C-vonM stat.*).

4.4 Estimação Bayesiana

Nesta seção é utilizada uma metodologia Bayesiana via MCMC para obtenção de inferências sobre parâmetros de interesse. Assumindo uma distribuição exponencial para os tempos de sobrevivência, um esquema de censura do tipo II e a relação estresse-resposta geral, são obtidas as funções de verossimilhança para cada parametrização,

i) Parametrização original,

$$L(\beta_0, \beta_1) \propto \exp \left\{ -\beta_0 r - \beta_1 a_1 - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i} \right\}, \quad (4.3)$$

onde $r = \sum_{i=1}^k r_i$ é o número total de falhas observadas, $a_1 = \sum_{i=1}^k r_i X_i$ e $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$;

ii) Modificação proposta por Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974),

$$L(\beta_0^*, \beta_1^*) \propto \exp \left\{ -\beta_0^* r - \beta_1^* d_1 - e^{-\beta_0^*} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1^* (X_i - \bar{X})} \right\},$$

onde $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i X_i}{\sum_{i=1}^k r_i}$;

iii) Reparametrização em termos de θ_u ,

$$L(\theta_u, \beta_1) \propto \theta_u^{-r} \exp \left\{ -\beta_1 r \bar{\bar{X}} - \theta_u^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} \right\}, \quad (4.4)$$

onde $\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i (X_u - X_i)}{r}$ e $\theta_u > 0$;

iv) Reparametrização logarítma em θ_u ,

$$L(\delta, \beta_1) \propto e^{-\delta r} \exp \left\{ -\beta_1 r \bar{\bar{X}} - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} \right\}, \quad (4.5)$$

onde $\delta = \log \theta_u$ e $-\infty < \delta < \infty$;

v) Reparametrização ortogonal,

$$L(\varphi, \beta_1) \propto \varphi^{-r} \exp \left\{ -\varphi^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{\bar{X}})} \right\}, \quad (4.6)$$

onde $\varphi = \theta_u e^{\beta_1 \bar{\bar{X}}}$ é um parâmetro ortogonal a θ_u , obtido resolvendo-se a equação diferencial (2.12) (Cox e Reid, 1987);

vi) Reparametrização logarítma em φ ,

$$L(\psi, \beta_1) \propto e^{-\psi r} \exp \left\{ -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{\bar{X}})} \right\}, \quad (4.7)$$

onde $\psi = \log \varphi$ e $-\infty < \psi < \infty$.

4.4.1 Densidades a Priori Não-Informativas

Para representar o grau de conhecimento sobre os parâmetros de interesse, foram consideradas para os parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_0^*, \beta_1^*, \delta$ e ψ prioris normais com média $\mu_1 = 0$ e variâncias $\sigma_1^2, \dots, \sigma_6^2$, respectivamente. Para os parâmetros não-negativos θ_u e φ , foram consideradas prioris log-normais com parâmetros $\mu_2 = 0$ e variâncias σ_7^2 e σ_8^2 , respectivamente.

4.4.2 Densidades a Posteriori Conjuntas

Denotando por $P(\theta|T)$ a densidade a posteriori para um vetor de parâmetros genérico bidimensional, $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, e supondo prioris independentes para θ_1 e θ_2 , obtém-se

$$P(\theta_1, \theta_2|T) \propto P(\theta_1)P(\theta_2)L(\theta_1, \theta_2).$$

Assim, para cada parametrização, obtém-se as respectivas densidades a posteriori,

$$P(\beta_0, \beta_1|t) \propto \exp \left\{ -\beta_0 r - \beta_1 a_1 - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i} - \frac{\beta_0^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.8)$$

$$P(\beta_0^*, \beta_1^*|t) \propto \exp \left\{ -\beta_0^* r - \beta_1^* d_1 - e^{-\beta_0^*} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1^* (X_i - \bar{X})} \right\} - \frac{\beta_0^{*2}}{2\sigma_3^2} - \frac{\beta_1^{*2}}{2\sigma_4^2}, \quad (4.9)$$

$$P(\theta_u, \beta_1|t) \propto \theta_u^{-(r+1)} \exp \left\{ -\beta_1 r \bar{\bar{X}} - \theta_u^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} - \frac{(\log \theta_u)^2}{2\sigma_7^2} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.10)$$

$$P(\delta, \beta_1|t) \propto e^{-\delta r} \exp \left\{ -\beta_1 r \bar{\bar{X}} - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} - \frac{\delta^2}{2\sigma_5^2} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.11)$$

$$P(\varphi, \beta_1|t) \propto \varphi^{-(r+1)} \exp \left\{ -\varphi^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{\bar{X}})} - \frac{(\log \varphi)^2}{2\sigma_8^2} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.12)$$

$$P(\psi, \beta_1|t) \propto e^{-\psi r} \exp \left\{ -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{\bar{X}})} - \frac{\psi^2}{2\sigma_6^2} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}. \quad (4.13)$$

4.4.3 Densidades Condicionais

As densidades condicionais para cada parametrizaçã são dadas por,

$$P(\beta_0|\beta_1, t) \propto \exp \left\{ -\beta_0 r - e^{\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i} - \frac{\beta_0^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (4.14)$$

$$P(\beta_1|\beta_0, t) \propto \exp \left\{ -\beta_1 a_1 - e^{\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.15)$$

$$P(\beta_0^*|\beta_1^*, t) \propto \exp \left\{ -\beta_0^* r - e^{-\beta_0^*} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1^* (X_i - \bar{X})} \right\} - \frac{\beta_0^{*2}}{2\sigma_3^2}, \quad (4.16)$$

$$P(\beta_1^*|\beta_0^*, t) \propto \exp \left\{ \beta_1^* d_1 - e^{-\beta_0^*} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1^* (X_i - \bar{X})} \right\} - \frac{\beta_1^{*2}}{2\sigma_4^2}, \quad (4.17)$$

$$P(\theta_u|\beta_1, t) \propto \theta_u^{-(r+1)} \exp \left\{ -\theta_u^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} - \frac{(\log \theta_u)^2}{2\sigma_7^2} \right\}, \quad (4.18)$$

$$P(\beta_1|\theta_u, t) \propto \exp \left\{ -\beta_1 r \bar{X} - \theta_u^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.19)$$

$$P(\delta|\beta_1, t) \propto e^{-\delta r} \exp \left\{ -e^{-\delta} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} - \frac{\delta^2}{2\sigma_5^2} \right\}, \quad (4.20)$$

$$P(\beta_1|\delta, t) \propto \exp \left\{ -\beta_1 r \bar{X} - e^{-\delta} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i)} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.21)$$

$$P(\varphi|\beta_1, t) \propto \varphi^{-(r+1)} \exp \left\{ -\varphi^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{X})} - \frac{(\log \varphi)^2}{2\sigma_8^2} \right\}, \quad (4.22)$$

$$P(\beta_1|\varphi, t) \propto \exp \left\{ -\varphi^{-1} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{X})} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (4.23)$$

$$P(\psi|\beta_1, t) \propto e^{-\psi r} \exp \left\{ -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{X})} - \frac{\psi^2}{2\sigma_6^2} \right\} e \quad (4.24)$$

$$P(\beta_1|\psi, t) \propto \exp \left\{ -e^{-\psi} \sum_{i=1}^k A_i e^{-(Z_i - Z_u) + \beta_1 (X_u - X_i - \bar{X})} - \frac{\beta_1^2}{2\sigma_1^2} \right\}. \quad (4.25)$$

4.5 Aplicação numérica e resultados obtidos

Considerando uma distribuição exponencial para os tempos de sobrevivência, um esquema de censura do tipo II e o modelo de Eyring como relação estresse-resposta, Louzada-Neto e Pardo-Fernández (2001) realizam um estudo sobre o efeito de reparametrização na precisão de inferências obtidas por aproximação normal assintótica do estimador de máxima verossimilhança.

Como o modelo de Eyring é um caso particular do modelo Estresse-Resposta Geral, neste capítulo é utilizado como aplicação o mesmo conjunto de dados utilizado por Louzada-Neto e Pardo-Fernández (2001) e que também foi utilizado como aplicação numérica no capítulo 2. Os dados (Tabela 2), foram obtidos de um experimento feito com recipientes pressurizados de Kevlan/Epoxy 49, submetidos a dois níveis de pressão, V (psi), mais severos que os usuais (3700 e 4000 psi), extraídos de Barlow, Toland e Freeman, (1986). Considere-se que o objetivo do experimento é prever o tempo de sobrevivência dos recipientes, sob o nível de estresse usual $V = 3600$ psi.

As estimativas obtidas via método MCMC, para cadeias de 10.000 iterações, geradas pelo *software WinBUGS*, são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4. Estimativas

Parametrização		Média	Mediana	Intervalos de Credibilidade
(β_0, β_1)	β_0	10.02	10.01	[1.11, 19.92]
	β_1	10.06	10.05	[6.64, 13.91]
(β_0^*, β_1^*)	β_0^*	-16.01	-16.00	[-16.32, -15.71]
	β_1^*	10.19	10.19	[7.17, 13.25]
(θ_u, β_1)	θ_u	1.83	1.71	[0.90, 3.49]
	β_1	10.12	10.14	[6.88, 13.21]
(δ, β_1)	δ	9.74	9.73	[9.13, 10.50]
	β_1	10.08	10.10	[6.89, 13.30]
(φ, β_1)	φ	2.58	2.54	[1.90, 3.51]
	β_1	10.24	10.28	[7.17, 13.31]
(ψ, β_1)	ψ	7.82	7.82	[7.52, 8.14]
	β_1	10.12	10.12	[7.28, 13.30]

Na Figura 11, têm-se as densidades a posteriori obtidas, para as parametrizações estudadas.

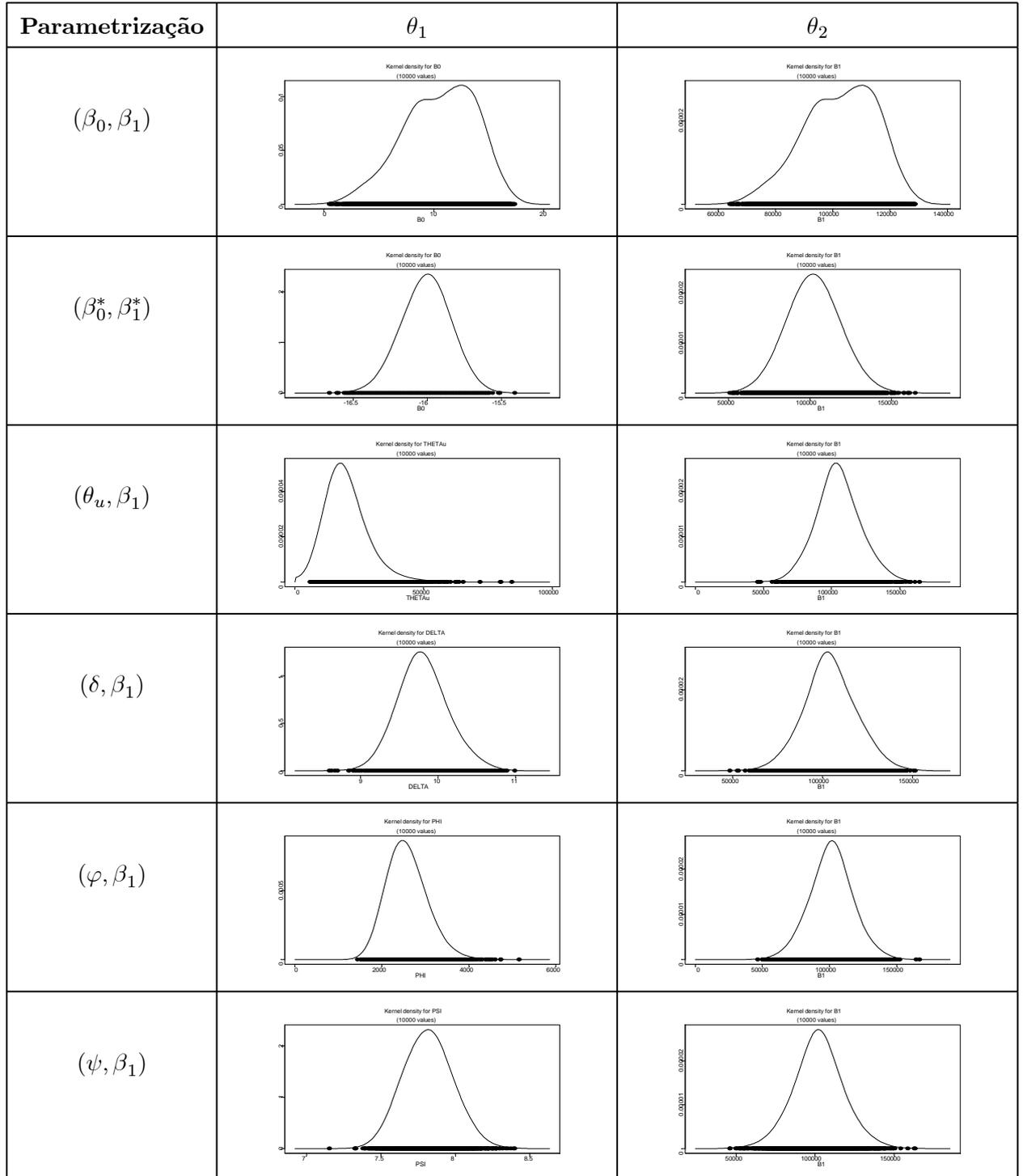


Figura 11. Densidades a Posteriori

4.6 Retrospecto das Parametrizações estudadas

Nesta seção, é analisado o efeito causado pelas reparametrizações, com relação à convergência das cadeias. Inicialmente, são apresentadas algumas tabelas e figuras, pelas quais pode-se avaliar se de fato, os itens: correlação entre os parâmetros, autocorrelação dentro das cadeias e comportamento das mesmas, são influenciados pelas reparametrizações em estudo. Logo após, são apresentados os resultados reportados pelos diagnósticos de convergência implementados no *software* CODA.

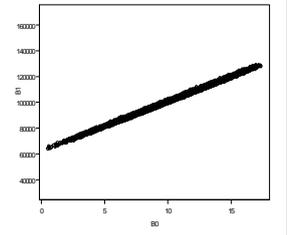
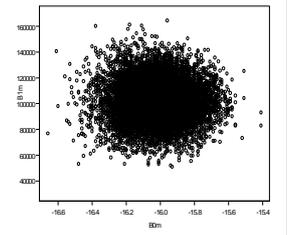
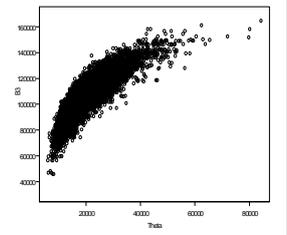
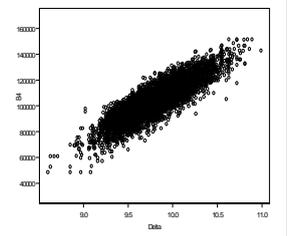
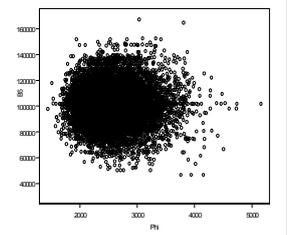
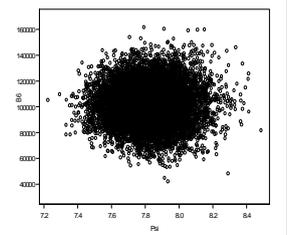
Parametrização	Scatter Plot	Correlação
(β_0, β_1)		0.9990
(β_0^*, β_1^*)		-0.01080
(θ_u, β_1)		0.84900
(δ, β_1)		0.88800
(φ, β_1)		-0.02340
(ψ, β_1)		0.00293

Figura 12. Correlação entre os parâmetros

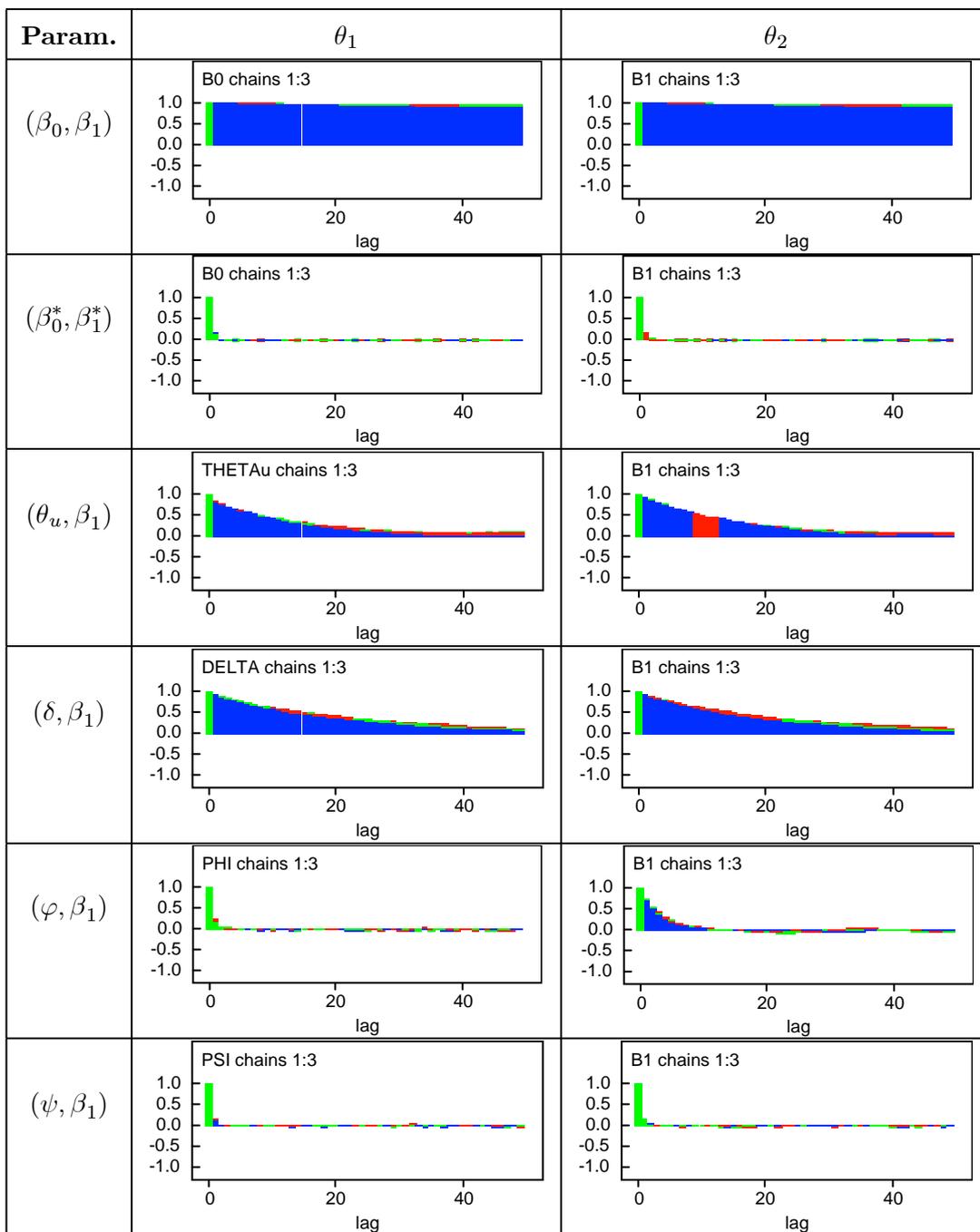


Figura 13. Autocorrelação dentro das cadeias

Tabela 5. Autocorrelação dentro da cadeia

Parametrização		Lag 1	Lag 5	Lag 10	Lag 50
(β_0, β_1)	β_0	0.99800	0.98900	0.97900	0.89500
	β_1	0.99800	0.98900	0.97900	0.89400
(β_0^*, β_1^*)	β_0^*	0.13900	0.00814	0.00376	0.01490
	β_1^*	0.15900	0.01620	0.00161	-0.00598
(θ_u, β_1)	θ_u	0.80100	0.59300	0.41000	-0.01920
	β_1	0.92800	0.69500	0.47200	-0.00159
(δ, β_1)	δ	0.93000	0.74900	0.57800	0.09380
	β_1	0.92100	0.72900	0.56200	0.07260
(φ, β_1)	φ	0.21900	0.01150	-0.00557	0.01030
	β_1	0.72300	0.19700	0.05470	-0.00720
(ψ, β_1)	ψ	0.15000	0.01010	0.00483	0.01660
	β_1	0.15500	-0.00827	-0.00557	-0.01480

Observando as Figuras 12 e 13, nota-se que a parametrização original (β_0, β_1) apresenta uma forte correlação entre os parâmetros e também uma autocorrelação acentuada, mesmo para um $lag = 50$ (Tabela 5), enquanto que este problema é solucionado quando a reparametrização (β_0^*, β_1^*) é utilizada.

Com relação às parametrizações em que θ_u está presente na verossimilhança, verifica-se que a reparametrização (φ, β_1) proporciona a ortogonalização dos parâmetros do modelo. Esta reparametrização apresenta resultados satisfatórios, mas devido a autocorrelação apresentada (Tabela 5), recomenda-se um salto > 10 , para escolha dos elementos que irão compor a amostra, na cadeia gerada para β_1 . A reparametrização (ψ, β_1) , destaca-se pelas pequenas correlação e autocorrelação apresentadas.

O efeito causado pelas baixas correlações e autocorrelações, proporcionadas pelas reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) , fica evidenciado na Figura 14, na qual pode ser observado o comportamento livre das respectivas cadeias. Nesta mesma figura, também pode-se verificar o efeito prejudicial causado ao comportamento das cadeias nas demais parametrizações, devido

às grandes correlações e autocorrelações apresentadas.

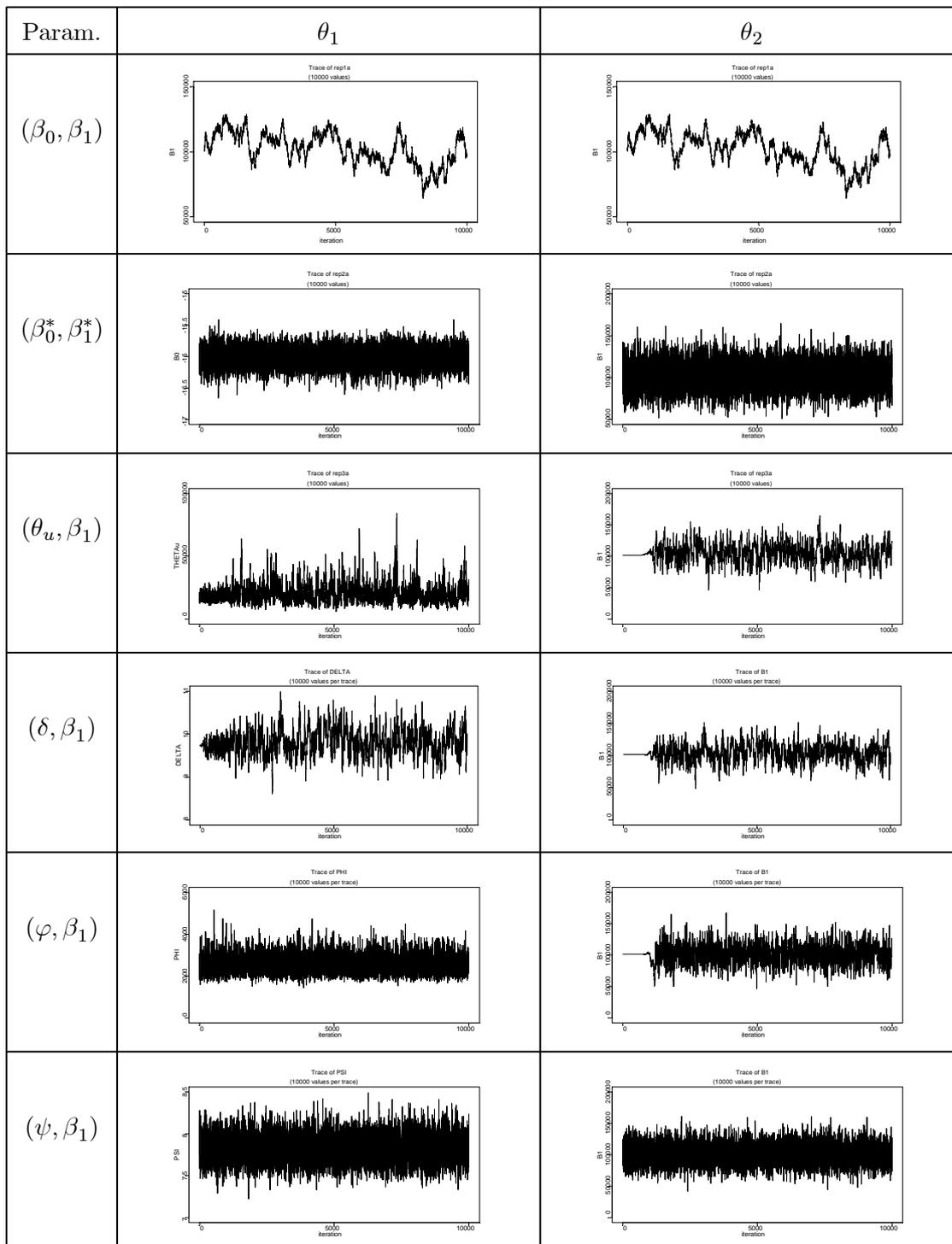


Figura 14. Comportamento das cadeias

4.6.1 Diagnósticos de Convergência

Tabela 6. Diagnóstico de Geweke		
Parametrização		Z
(β_0, β_1)	β_0	19.5
	β_1	19.4
(β_0^*, β_1^*)	β_0^*	0.533
	β_1^*	-1.210
(θ_u, β_1)	θ_u	-7.38
	β_1	-5.23
(δ, β_1)	δ	-5.73
	β_1	-4.39
(φ, β_1)	φ	0.61
	β_1	-1.33
(ψ, β_1)	ψ	-1.14
	β_1	-1.83

No diagnóstico de Geweke (1992), os resultados obtidos para Z (segunda coluna da Tabela 6) não mostram evidência contra a convergência das cadeias nas reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) . Porém, os valores extremos de Z , obtidos para as demais parametrizações, sugerem que os 10% primeiros elementos das respectivas cadeias, não provêm da mesma distribuição dos últimos 50%.

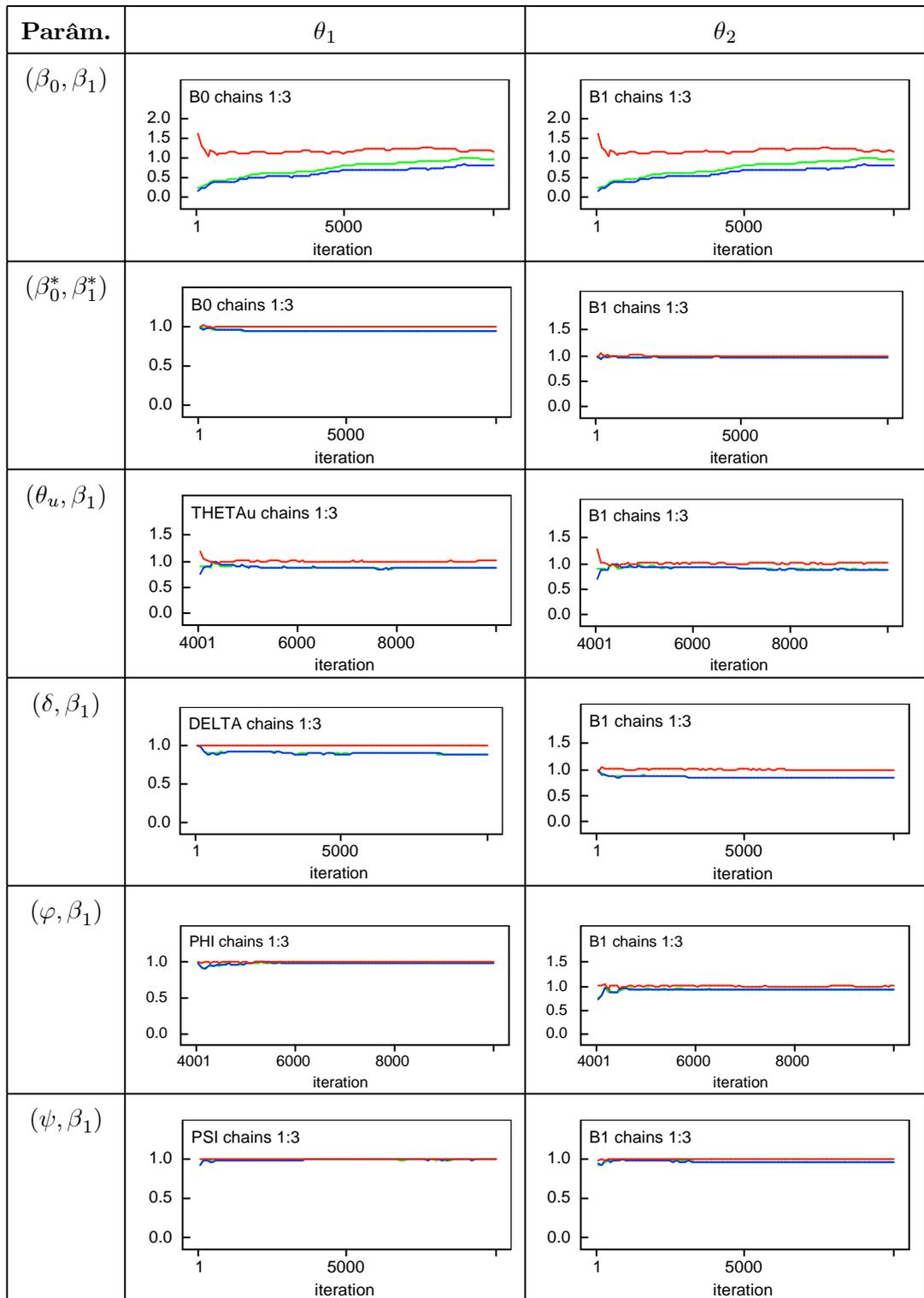


Figura 15. Diagnóstico de Gelman e Rubin

Tabela 7. Diagnóstico de Gelman e Rubin

Parametrização		mediana	quantil 97.5%
(β_0, β_1)	β_0	1.98	3.37
	β_1	1.98	3.38
(β_0^*, β_1^*)	β_0^*	1.00	1.00
	β_1^*	1.00	1.00
(θ_u, β_1)	θ_u	1.01	1.05
	β_1	1.03	1.06
(δ, β_1)	δ	1.03	1.08
	β_1	1.02	1.06
(φ, β_1)	φ	1.00	1.01
	β_1	1.00	1.00
(ψ, β_1)	ψ	1.00	1.00
	β_1	1.00	1.00

Os resultados obtidos para o diagnóstico de Gelman e Rubin (Figura 15 e Tabela 7), sugerem que as amostras 5001 a 10000, das três cadeias geradas nas reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) podem ser consideradas como provindas das respectivas distribuições marginais a posteriori de cada variável. Os resultados apresentados pelas reparametrizações (θ_u, β_1) e (δ, β_1) são aceitáveis. Em contrapartida, os resultados obtidos para a parametrização (β_0, β_1) indicam não convergência das respectivas cadeias, ou seja, existe a necessidade de um número maior de iterações.

Tabela 8. Diagnóstico de convergência de Raftery e Lewis

Parametrização		Salto	Burn-in	Nmin	Total	Fator Dep. (I)
(β_0, β_1)	β_0	4	180	3746	203676	54.37
	β_1	1	102		110486	29.49
(β_0^*, β_1^*)	β_0^*	1	3	3746	4172	1.11
	β_1^*	1	2		4007	1.07
(θ_u, β_1)	θ_u	3	18	3746	21399	5.71
	β_1	1	35		37791	10.08
(δ, β_1)	δ	1	35	3746	39897	10.65
	β_1	1	29		30738	8.20
(φ, β_1)	φ	1	3	3746	4411	1.18
	β_1	1	15		16336	4.36
(ψ, β_1)	ψ	1	2	3746	3897	1.04
	β_1	1	3		4302	1.15

Os resultados da Tabela 8, reportados pelo diagnóstico de Raftery e Lewis, sugerem que as cadeias convergiram quase que imediatamente nas reparametrizações (β_0^*, β_1^*) e (ψ, β_1) . Os baixos valores sugeridos como salto (*thin*), iterações iniciais descartadas (*burn-in*) e total de iterações (*total*), foram possíveis, devido à baixa correlação entre os parâmetros e autocorrelação dentro das cadeias (Figuras 12 e 13), proporcionadas pelas respectivas reparametrizações (Chib e Greenberg, 1995). A reparametrização (φ, β_1) apresenta problemas de convergência para β_1 ($I = 4.36$). Já a parametrização (β_0, β_1) e reparametrizações (θ_u, β_1) e (δ, β_1) , todas com um fator de dependência superior ao limite sugerido por Raftery e Lewis (1992), ($I < 5.0$), indicando a necessidade de uma reparametrização do modelo.

Tabela 9. Diagnóstico de convergência de Heidelberger e Welch

Parametrização		Teste de estacionaridade	Nº de iterações a ser mantido	Nº de iterações iniciais a ser descartado	Estatística C-vonM
(β_0, β_1)	β_0	failed	NA	NA	3.5400
	β_1	failed	NA	NA	3.5000
(β_0^*, β_1^*)	β_0^*	passed	10000	0	0.3110
	β_1^*	passed	10000	0	0.0653
(θ_u, β_1)	θ_u	passed	8000	2000	0.0758
	β_1	passed	8000	2000	0.1390
(δ, β_1)	δ	passed	9000	1000	0.4530
	β_1	passed	8000	2000	0.3260
(φ, β_1)	φ	passed	10000	0	0.1190
	β_1	passed	10000	0	0.2160
(ψ, β_1)	ψ	passed	10000	0	0.1070
	β_1	passed	10000	0	0.0772

Segundo o diagnóstico de Heidelberger e Welch (Tabela 9) os melhores resultados foram obtidos pelas reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) . Pode-se observar que para a parametrização (β_0, β_1) a hipótese de estacionaridade é rejeitada., confirmando os resultados obtidos pelos diagnósticos de Geweke, Gelman e Rubin e Raftery e Lewis.

Analisando os resultados reportados pelos diagnósticos de convergência, conclui-se que as reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) proporcionam uma redução acentuada da correlação entre os parâmetros e também da autocorrelação dentro das cadeias e conseqüentemente, reduzem significativamente o número total de iterações necessárias ao alcance da convergência.

Capítulo 5

O Efeito de Presença de Censura na Convergência das Cadeias

Um problema de interesse é saber qual o efeito da presença de censura na convergência das cadeias. Para estudar este efeito, um conjunto de dados com distribuição exponencial e relação estresse-resposta geral (1.6) com parâmetros fixados em $\beta_0 = -10$ e $\beta_1 = 70000$, tal que $Z_i = -\log V_i$ e $X_i = 1/V_i$. Dois níveis de estresse foram considerados, com $n = 25$ para cada nível de estresse. Censura tipo II foi então introduzida na amostra nos níveis 50% e 75%.

Foram consideradas somente as reparametrizações (θ_u, β_1) e (ψ, β_1) , tendo em vista que ambas contêm o parâmetro de interesse ou uma função do mesmo, sendo que na análise clássica desenvolvida no capítulo anterior, estas reparametrizações apresentaram respectivamente, a pior e a melhor performance.

Os resultados deste estudo, obtidos via método MCMC, para cadeias de 10000 iterações estão sumarizados nas tabelas e gráficos a seguir.

5.1 Resultados Obtidos

Tabela 10. Estimativas

Parametrização		Média	Mediana	Intervalos de Credibilidade	e.m.v	Intervalos de Confiança
(θ_u, β_1) Sem censura	θ_u	28700	26400	[12900, 60500]	26232	[5976, 46487]
	β_1	68900	69400	[54300, 84500]	69017	[54049, 83985]
(θ_u, β_1) Censura 50%	θ_u	17170	14200	[5117, 47060]	13796	[0, 28569]
	β_1	59950	59850	[39020, 81880]	59757	[39000, 80514]
(θ_u, β_1) Censura 75%	θ_u	25300	17300	[4300, 94400]	17951	[0, 46246]
	β_1	71400	70000	[41200, 102000]	72645	[42091, 103198]
(ψ, β_1) Sem censura	ψ	6.87	6.87	[6.60, 7.16]	6.85	[6.57, 7.13]
	β_1	68900	68900	[53700, 84300]	69017	[54049, 83985]
(ψ, β_1) Censura 50%	ψ	6.69	6.68	[6.32, 7.09]	6.65	[6.27, 7.04]
	β_1	59600	59600	[38300, 80200]	59757	[39000, 80514]
(ψ, β_1) Censura 75%	ψ	6.38	6.36	[5.84, 7.01]	6.30	[5.73, 6.86]
	β_1	73100	73300	[42000, 106000]	72645	[42091, 103198]

Na Tabela 10 encontram-se as estimativas obtidas via método MCMC. Para efeito de comparação são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança obtidas utilizando-se o mesmo conjunto de dados.

Parametrização	Scatter Plot	Correlação
(θ_u, β_1) Sem censura		0.887
(θ_u, β_1) Censura 50%		0.862
(θ_u, β_1) Censura 75%		0.781
(ψ, β_1) Sem censura		-0.00225
(ψ, β_1) Censura 50%		-0.0191
(ψ, β_1) Censura 75%		-0.0108

Figura 16. Correlação entre os parâmetros

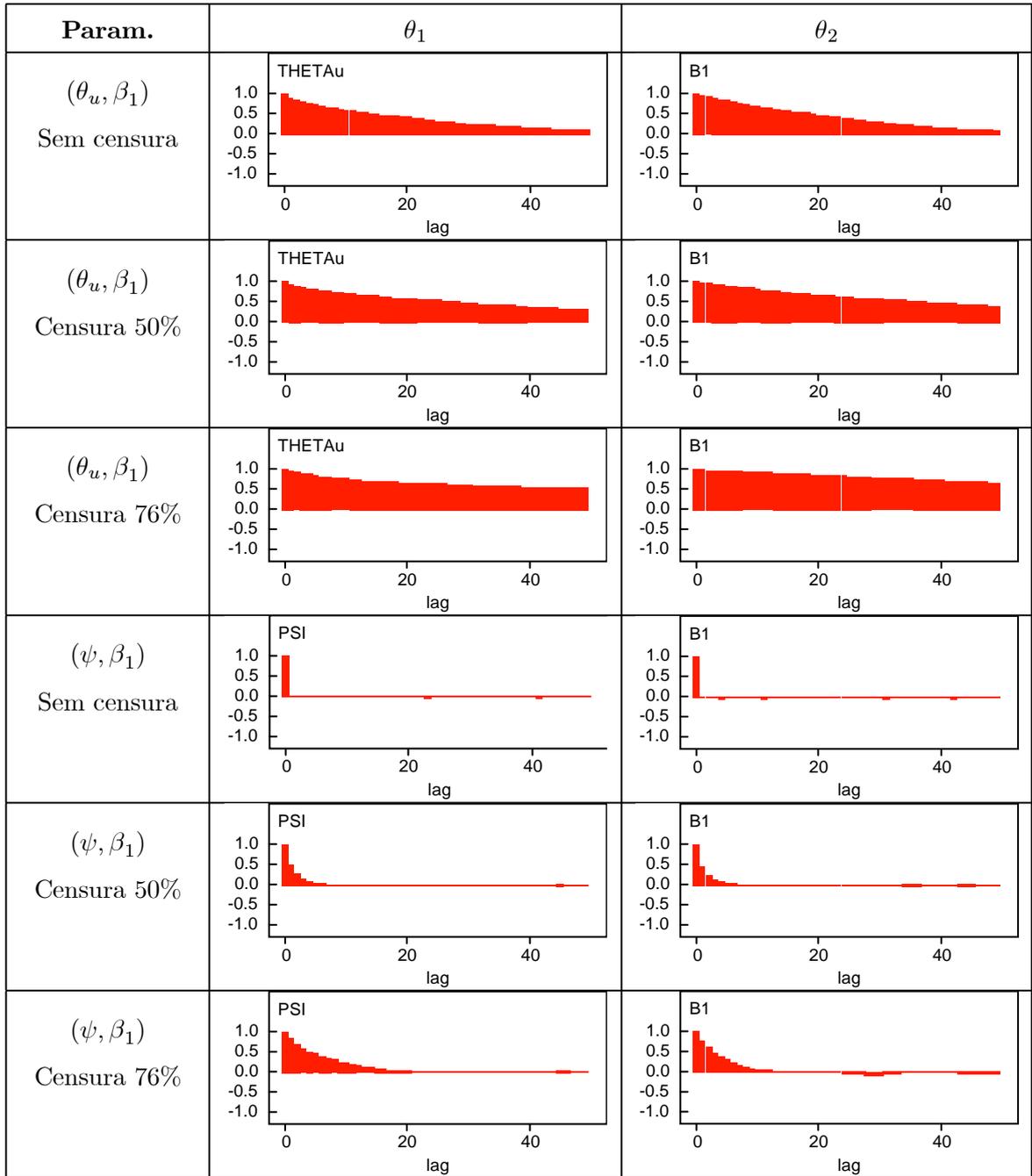


Figura 17. Autocorrelação dentro das cadeias

Tabela 11. Autocorrelação dentro da cadeia

Parametrização		Lag 1	Lag 5	Lag 10	Lag 50
(θ_u, β_1)	θ_u	0.86600	0.73400	0.60300	0.07440
Sem censura	β_1	0.96000	0.82000	0.67500	0.12100
(θ_u, β_1)	θ_u	0.92200	0.78900	0.69900	0.31300
Censura 50%	β_1	0.98000	0.90800	0.82600	0.42500
(θ_u, β_1)	θ_u	0.95800	0.84800	0.77000	0.45100
Censura 75%	β_1	0.99100	0.95400	0.90900	0.58300
(ψ, β_1)	ψ	0.00626	-0.00232	0.00568	0.00263
Sem censura	β_1	0.01120	0.00708	-0.00485	-0.01940
(ψ, β_1)	ψ	0.48900	0.04340	0.00200	0.01800
Censura 50%	β_1	0.48100	0.01920	-0.01890	0.01290
(ψ, β_1)	ψ	0.78100	0.33600	0.11300	-0.00729
Censura 75%	β_1	0.76600	0.28600	0.08510	-0.00338

A Figura 17 e Tabela 11 mostram que a presença de censura na amostra causou um aumento na autocorrelação para a reparametrização (θ_u, β_1) , principalmente no nível de 75% de censura.

Com relação à reparametrização (ψ, β_1) , mesmo para um nível de 75% de censura, o problema da autocorrelação acentuada pode ser facilmente solucionado tomando-se os elementos que irão compor a amostra com uma salto maior que 10.

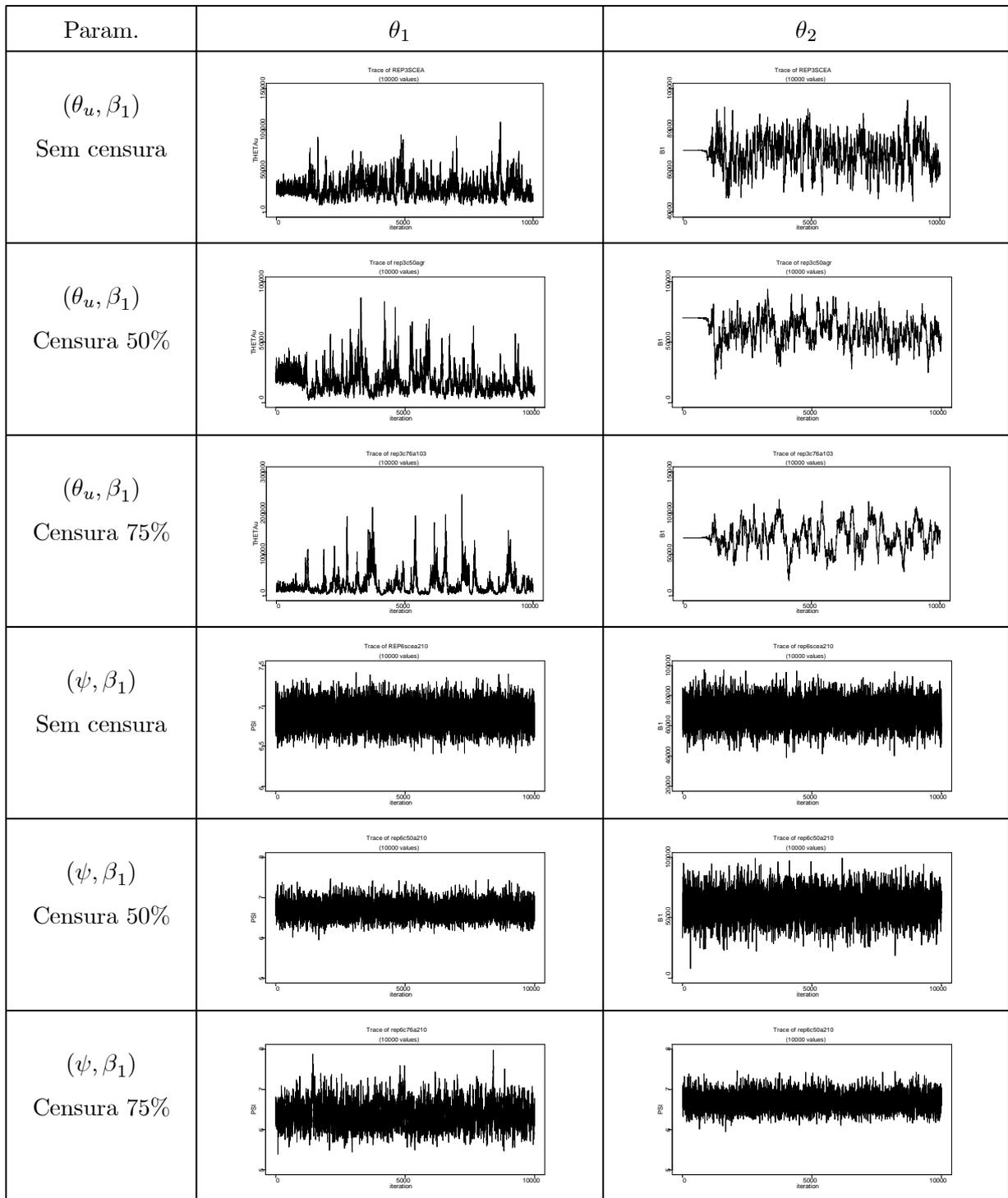


Figura 18. Comportamento das cadeias

5.1.1 Diagnósticos de Convergência

Tabela 12. Diagnóstico de Geweke

Parametrização		Z
(θ_u, β_1)	θ_u	2.55
Sem censura	β_1	1.41
(θ_u, β_1)	θ_u	6.76
Censura 50%	β_1	4.92
(θ_u, β_1)	θ_u	13.00
Censura 75%	β_1	21.80
(ψ, β_1)	ψ	-0.57
Sem censura	β_1	0.61
(ψ, β_1)	ψ	-1.38
Censura 50%	β_1	-0.39
(ψ, β_1)	ψ	0.76
Censura 75%	β_1	-0.28

Pelo diagnóstico de Geweke, os valores obtidos para Z não mostram evidência contra a convergência das cadeias na reparametrização (ψ, β_1) . Já os valores extremos de Z , obtidos para a reparametrização (θ_u, β_1) , sugerem que os 10% primeiros elementos das respectivas cadeias, não provêm da mesma distribuição dos últimos 50%.

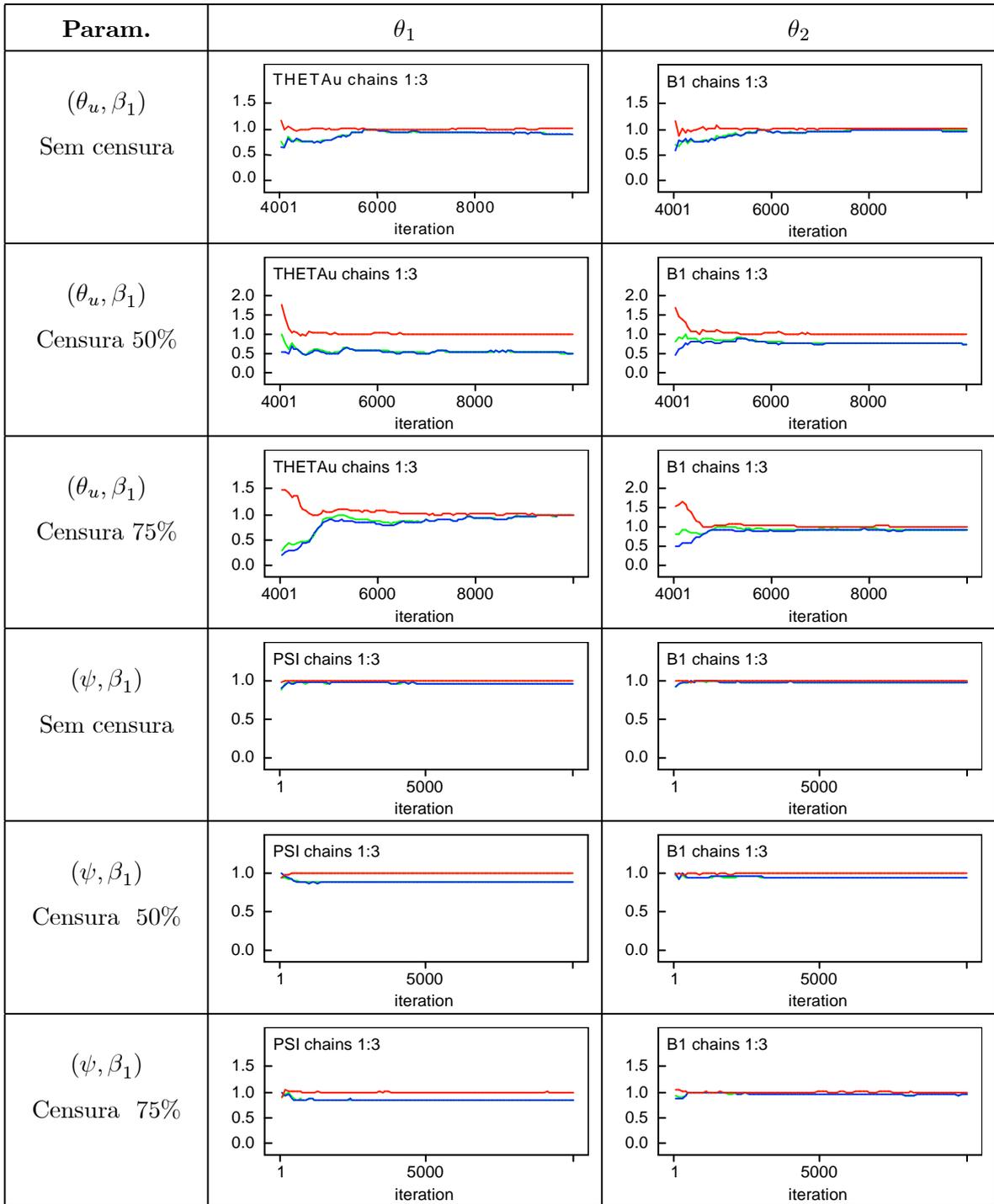


Figura 19. Diagnóstico de Gelman e Rubin

Tabela 13. Diagnóstico de Gelman e Rubin

Parametrização		mediana	quantil 97.5%
(θ_u, β_1)	θ_u	1.01	1.02
Sem censura	β_1	1.01	1.02
(θ_u, β_1)	θ_u	1.04	1.12
Censura 50%	β_1	1.04	1.12
(θ_u, β_1)	θ_u	1.05	1.15
Censura 75%	β_1	1.08	1.24
(ψ, β_1)	φ	1.00	1.00
Sem censura	β_1	1.00	1.00
(ψ, β_1)	ψ	1.00	1.00
Censura 50%	β_1	1.00	1.00
(ψ, β_1)	ψ	1.00	1.01
Censura 75%	β_1	1.00	1.01

Os resultados obtidos para o diagnóstico de Gelman e Rubin (Figura 19 e Tabela 13), sugerem que as amostras 5001 a 10000 das seis cadeias geradas pela reparametrização (ψ, β_1) podem ser consideradas como provindas das respectivas distribuições marginais a posteriori de cada variável. Em contrapartida, os resultados obtidos para a reparametrização (θ_u, β_1) são aceitáveis apenas na ausência de censura.

Tabela 14. Diagnóstico de convergência de Raftery e Lewis

Parametrização		Salto	Burn-in	Nmin	Total	Fator Dep. (I)
(θ_u, β_1) Sem censura	θ_u	6	36	3746	32766	8.75
	β_1	1	42		45802	12.2
(θ_u, β_1) Censura 50%	θ_u	6	60	3746	62802	16.8
	β_1	1	60		65493	17.5
(θ_u, β_1) Censura 75%	θ_u	5	60	3746	72130	19.3
	β_1	1	93		103300	27.6
(ψ, β_1) Sem censura	ψ	1	2	3746	3878	1.04
	β_1	1	2		3723	0.99
(ψ, β_1) Censura 50%	ψ	1	4	3746	4597	1.23
	β_1	1	5		5921	1.58
(ψ, β_1) Censura 75%	ψ	1	6	3746	6952	1.86
	β_1	3	18		17412	4.65

Os resultados da Tabela 14, reportados pelo diagnóstico de Raftery e Lewis, sugerem que as cadeias convergiram quase que imediatamente para a reparametrização (ψ, β_1) , exceto no nível de censura igual a 75% para a cadeia gerada para β_1 , indicando problemas de convergência ($I = 4.65$). Já os resultados para a reparametrização (θ_u, β_1) , indicam a necessidade de uma reparametrização do modelo.

Tabela 15. Diagnóstico de convergência de Heidelberger e Welch

Parametrização		Teste de estacionaridade	Nº de iterações a ser mantido	Nº de iterações iniciais a ser descartado	Estatística C-vonM
(θ_u, β_1)	θ_u	passed	9000	1000	0.168
Sem censura	β_1	passed	9000	1000	0.213
(θ_u, β_1)	θ_u	passed	5000	5000	0.316
Censura 50%	β_1	passed	5000	5000	0.318
(θ_u, β_1)	θ_u	failed	NA	NA	1.51
Censura 75%	β_1	failed	NA	NA	1.02
(ψ, β_1)	ψ	passed	10000	0	0.109
Sem censura	β_1	passed	10000	0	0.180
(ψ, β_1)	ψ	passed	10000	0	0.361
Censura 50%	β_1	passed	10000	0	0.157
(ψ, β_1)	ψ	passed	10000	0	0.201
Censura 75%	β_1	passed	10000	0	0.072

Segundo o diagnóstico de Heidelberger e Welch (Tabela 15), para a reparametrização (θ_u, β_1) a hipótese de estacionaridade é rejeitada, ao nível de 75% de censura.

Como esperado, os melhores resultados foram obtidos pela reparametrização (ψ, β_1) , mostrando-se menos sensível à presença de censura.

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta dissertação, considerando uma distribuição exponencial para os tempos de sobrevivência e a relação estresse resposta-geral, foi verificado o efeito de reparametrização em testes de sobrevivência acelerados, sob abordagens clássica e Bayesiana.

Na abordagem clássica, capítulos 2 e 3, é estudado o efeito de reparametrização na precisão de inferências baseadas na aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. O interesse específico nesta abordagem foi encontrar uma parametrização que proporcionasse uma aproximação normal assintótica precisa, assim como parâmetros assintoticamente independentes. Através de um estudo de simulação, verificou-se a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança obtidos por aproximação normal assintótica. O efeito da presença de censura tipo II também foi investigado no estudo de simulação. Com base nos resultados obtidos, verificou-se que somente as reparametrizações (β_0^*, β_1^*) e (ψ, β_1) apresentaram as duas propriedades simultaneamente. Uma importante observação a ser considerada, é que as parametrizações com parâmetros não limitados apresentaram uma maior precisão.

Nos capítulos 4 e 5, sob o enfoque Bayesiano, foi avaliado o efeito que as mesmas reparametrizações consideradas na abordagem clássica, exercem na convergência das cadeias, ao utilizarem-se métodos MCMC na estimação. Os resultados reportados pelos diagnósticos de convergência evidenciam uma acentuada redução da correlação entre os parâmetros e também da autocorrelação dentro das cadeias e conseqüentemente um significativa redução no número total de iterações necessárias ao alcance da convergência, quando consideradas as reparametrizações (β_0^*, β_1^*) , (φ, β_1) e (ψ, β_1) .

Como continuação deste trabalho, propõe-se o estudo do efeito causado pelas reparametrizações aqui estudadas, considerando outros tipos de intervalos de confiança, tais como, intervalos obtidos por técnicas *bootstrap* e razão de verossimilhanças.

Bibliografia

- [1] BARLOW, R. E; TOLAND, R. H.; FREEMAN, T. (1986). *A Bayesian Analysis of the stress-rupture life of Kevlar/Epoxy Spherical vessels*, in “Accelerated life testing and experts opinions Reliability”. pp. 203-236, Ed. por Claroti, C. A. e Lindiley, D. V., North Holland, Amsterdam.
- [2] BEST, N.; COWLES, M. K.; VINES, K. (1995). *CODA-Convergence Diagnosis and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output*. Relatório Técnico, Unidade de Bioestatística do MRC, Cambridge, Inglaterra.
- [3] CHIB, S.; GREENBERG, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *Journal of the American Statistical Association*, 49, pp. 327-335.
- [4] COX, D. R.; HINKLEY, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. London, Chapman and Hall.
- [5] COX, D. R.; REID, N. (1987). Orthogonal Parameters and Approximated Conditional Inference with Discussion. *Journal Royal Statistical Society B*, 49, 1, pp. 1-39.
- [6] FREITAS, A. F.; COLOSIMO, E. A. (1997). *Confiabilidade: Análise de Tempo de Falha e Testes de Vida Acelerados*. Belo Horizonte, Fundação Christiano Ottoni.
- [7] GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. (1990). Sampling-Based Approaches to Calculating - Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85, pp. 398-409.
- [8] GELMAN, S.; RUBIN, D. R. (1992). Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences (with discussion). *Statistical Science*, 7, pp. 457-511.
- [9] GELMAN, A.; CARLIN, J. B.; STERN, H. S., et al. (1995). *Bayesian Data Analysis*, Chapman & Hall, London.

- [10] GEMAN, S.; GEMAN, D. (1984). Stochastic Relaxation-Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, pp. 721-741.
- [11] GEWEKE, J. (1992). Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to Calculating Posterior Moments. In Bayesian Statistics 4, (eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith), pp. 169-193. Oxford, University Press.
- [12] GEYER, C. J. (1992). Practical Markov Chain Monte Carlo (with discussion). *Statistical Science*, 7, pp. 473-511.
- [13] GILKS, W. R.; RICHARDSON, S.; SPIEGELHALTER, D. J. (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman & Hall, London.
- [14] HASTINGS, W. K. (1970). Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chain and their Applications. *Biometrika*, 57, pp. 97-109.
- [15] HEIDELBERGER, P.; WELCH, P. (1983). Simulation Run Length Control in the Presence of an Initial Transient. *Operations Research*, 31, pp. 1109-44.
- [16] JENG, S.; MEEKER, W. Q. (2000). Comparisons of Approximate Confidence Interval Procedures for Type I Censored Data. *Technometrics*, 42, pp. 135-148.
- [17] KASS, R. E.; TIERNEY, L.; KADANE, J. B. (1990). The Validity of Posterior Expansions based on Laplace's Method, in *Essays in Honor of George A. Barnard*, Hodger, Amsterdam.
- [18] KLEIN, J. P.; BASU, A. P. (1981). Weibull Accelerated Life Tests when There are Competing Causes of Failure. *Communications in Statistics. Part A: Theory and Methods*, 10(20), pp. 2073-2100.
- [19] LAWLESS, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, New York: John Wiley & Sons.
- [20] LOUZADA-NETO, F. (1991). *Testes de Sobrevivência Acelerados: Uma Análise Bayesiana do Modelo de Eyring*. Tese de Mestrado, ICMC/USP.

- [21] LOUZADA-NETO, F.; ACHCAR. (1993). Uso de Dados Acelerados no Controle da Qualidade de Produtos Industriais Assumindo uma Distribuição Exponencial e um Modelo Estresse-resposta Geral. *Estadística*, 45, 144, 145, pp. 81-106.
- [22] LOUZADA-NETO, F.; PARDO-FERNÁNDEZ, J. C. (2001). The Effect of Reparametrization on Accelerated Lifetime Tests. *Journal of Applied Statistics*, vol 28, nº 6, pp. 703-711.
- [23] MANN, N. R.; SCHAFFER, R. E.; SINGPURWALLA, N. D. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Test Data*. New York, John Willey & Sons.
- [24] MARTZ, F. M.; WALLER R. A. (1982). *Bayesian Reliability Analysis*. New York, John Willey & Sons.
- [25] MATTOS, N. M. C. (1999). *Análise Bayesiana da Confiabilidade Via Simulação Estocástica*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- [26] MATTOS, N. M. C.; MIGON, H. S. (2001). A Bayesian Analysis of Reliability in Accelerated Life Tests Using Gibbs Sampler. *Computational Statistics*, 16, pp. 299-312.
- [27] METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. (1953). Equations of State Calculations by Fast Computing Machine. *Journal of Chemical Physics*, 21, pp. 1087-1091.
- [28] MILLER, R. G. (1981). *Survival Analysis*. New York, John Willey & Sons.
- [29] MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A; BOES, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*, 3^a ed., New York, McGraw-Hill.
- [30] MULLER, P. (1993). A Generic Approach to Posterior Integration and Gibbs Sampling, manuscript.
- [31] NELSON, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [32] NELSON, W. (1990). *Accelerated Testing, Statistical Models Tests Plans and Data Analysis*. John Wiley, New York.
- [33] RAFTERY, A. L.; LEWIS, S. (1992a). Comment: One Long Run with Diagnostics: Implementation Strategies for Markov Chain Monte Carlo. *Statistical Science*, 7, pp. 493-7.

- [34] RAFTERY, A. L.; LEWIS, S. (1992b). How Many Iterations in the Gibbs Sampler. In Bayesian Statistics 4, (ed. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith), pp. 763-74. Oxford University Press.
- [35] SERFLING, R. J. (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics. New York, John Wiley & Sons.
- [36] SPIEGELHALTER, D.; THOMAS, A.; BEST, N. (2001). WinBUGS (Bayesian Inference Using Gibbs Sampling for Windows) Version 1.3, MRC Biostatistics Unit, Cambridge, UK.
- [37] SPROTT, D. A. (1973). Normal Likelihood and Their Relation to Large Sample Theory of Estimation. *Biometrika*, 60, 3, pp. 457-465.
- [38] SPROTT, D. A. (1980). Maximum Likelihood in Small Samples: Estimation in the Presence of Nuisance Parameters. *Biometrika*, 67, 3, pp. 515-523.
- [39] TIERNEY, L. (1994). Markov Chains for Exploring Posterior Distributions (with discussion). *Annals of Statistics*, 22, pp. 1701-1762.
- [40] VANDER WIEL, S. A. (1990). Accuracy of Approximate Confidence Bounds Using Censored Weibull Regression Data From Accelerated Life Tests. *EEE Transactions on Reliability*, 39:3, pp. 346-351.