

Família Weibull de Razão de Chances na Presença de Covariáveis

André Yoshizumi Gomes

Família Weibull de Razão de Chances na Presença de Covariáveis

André Yoshizumi Gomes

Orientador: Prof. Dr. Francisco Louzada-Neto

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

UFSCar - São Carlos

Fevereiro/2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

G633fw

Gomes, André Yoshizumi.

Família Weibull de razão de chances na presença de covariáveis / André Yoshizumi Gomes. -- São Carlos : UFSCar, 2012.

115 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Estatística. 2. Distribuição Weibull. 3. Razão de chances. 4. Estimador de máxima verossimilhança. 5. Bootstrap (Estatística). 6. Cadeias de Markov. I. Título.

CDD: 519.5 (20^a)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Estatística

Via Washington Luís, Km 235 - C.P.676 - CGC 45358058/0001-40

FONE: (016) 260-8292/260-8241 - FAX: (016) 260-8243

13565-905 - SÃO CARLOS-SP-BRASIL

ATA DO EXAME DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO CANDIDATO:

André Yoshizumi Gomes

Aos dois dias do mês de março do ano de dois mil e nove, às dez horas, na Sala de Reuniões do Departamento de Estatística, reuniu-se a Comissão Examinadora nas formas e termos do Artigo 25º do Regimento Interno do Programa de Pós-Graduação em Estatística da UFSCar, composta pelos membros: Prof. Dr. Francisco Louzada Neto (Orientador), Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos (DEs-UFSCar) e Profª Drª Gleici da Silva Castro Perdoná (FMRP-USP) para Exame de Dissertação de Mestrado do candidato André Yoshizumi Gomes, sob o título "Família weibull de razão de chances na presença de covariáveis". A sessão foi aberta pelo Prof. Dr. Francisco Louzada Neto (Presidente), iniciando-se pela apresentação da dissertação. Em seguida, foi feita a arguição do candidato pelos membros da Comissão Examinadora. A Comissão Examinadora considerou o tema relevante para Estatística e julgou a exposição feita pelo candidato clara e objetiva. O candidato respondeu satisfatoriamente as questões formuladas. Pelo apresentado acima, a comissão atribuiu as seguintes avaliações: Prof. Dr. Francisco Louzada Neto, nível A; Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos, nível A; e Profª Drª Gleici da Silva Castro Perdoná, nível A. De acordo com os parágrafos 5º e 6º do Artigo 25º, o candidato foi considerado **aprovado**. Encerrada a sessão secreta, o Presidente informou o resultado da defesa. Nada mais havendo a tratar, eu, Maria Isabel Rinaldo Pessoa de Araujo, Secretária deste Programa, lavrei a presente ata, que assino juntamente com os membros da Banca Examinadora.

Maria Isabel R. P. Araujo

Prof. Dr. Francisco Louzada Neto

Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos

Profª Drª Gleici da Silva Castro Perdoná

Sumário

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	v
Agradecimentos	ix
Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 A Família Weibull de Razão de Chances	3
2.1 Introdução	3
2.2 Formulação do Modelo	4
2.3 A Presença de Censuras	8
2.4 A Função de Verossimilhança	9
2.5 Testes de Hipótese	11
2.6 Gráficos TTT (Tempo Total em Teste)	12
2.7 Família Weibull de Razão de Chances na Presença de Covariáveis	13
2.8 Considerações Finais	16

3	Estudo de Simulação: Inferência Clássica	17
3.1	Introdução	17
3.2	Tamanho e Poder do Teste da Razão de Verossimilhança	18
3.2.1	Especificações da Simulação	18
3.2.2	Resultados e Discussão	20
3.3	Propriedades Assintóticas dos Estimadores de Máxima Verossimilhança	21
3.3.1	Resultados e Discussão	24
3.4	Estimação via Reamostragem	25
3.4.1	Bootstrap (Efron & Tibshirani, 1993)	25
3.4.2	Resultados e Discussão	27
3.5	Considerações Sobre o Risco em Forma de Banheira	28
3.6	Considerações Finais	30
4	Inferência Bayesiana	31
4.1	Introdução	31
4.2	Procedimentos Bayesianos de Estimação	32
4.2.1	Determinação das <i>Prioris</i>	34
4.3	Estimação Bayesiana para a Família Weibull de Razão de Chances	35
4.4	Considerações Finais	36
5	Aplicações	37
5.1	Introdução	37
5.2	Exemplo 1 - Kimball (1961)	38
5.3	Exemplo 2 - Efron (1988)	40
5.4	Exemplo 3 - Halley (1693)	43
5.5	Exemplo 4 - Prentice (1973)	45

5.6	Considerações Finais	47
6	Conclusões e Propostas Futuras	51
	Referências Bibliográficas	53
A	Resultados Assintóticos	56
B	Resultados <i>Bootstrap</i>	61
C	Bancos de Dados	66
D	Algoritmos Computacionais	71
	D.1 O Algoritmo BFGS de otimização global	71
	D.2 O Algoritmo Metropolis-Hastings	72
E	Códigos Utilizados	75

Lista de Figuras

2.1	Curvas de risco da família Weibull de razão de chances. A linha pontilhada ($\alpha = 9, \beta = 0.7, \theta = 85$), a linha tracejada ($\alpha = 0.5, \beta = 0.3, \theta = 100$), a linha de traços e pontos ($\alpha = 1, \beta = 1, \theta = 50$), a linha sólida escura ($\alpha = 8, \beta = 0.01, \theta = 45$) e a linha sólida ($\alpha = -1.5, \beta = -0.1, \theta = 75$), respectivamente, representam taxas de risco crescente, decrescente, constante, banheira e unimodal	7
2.2	Densidades da família Weibull de razão de chances correspondentes aos riscos da Figura 1	7
2.3	Curvas das transformadas TTT empíricas. As curvas A, B, C, D e E, respectivamente, indicam que os dados possuem taxas de risco crescente, decrescente, constante, banheira e unimodal	13
3.1	Função de distribuição acumulada da família Weibull de razão de chances quando $\alpha = 8, \beta = 0.01$ e $\theta = 45$ (esquerda), e <i>zoom</i> no ponto de salto (direita)	29
5.1	Gráfico TTT dos dados de mortalidade de ratos	38
5.2	Risco estimado para os dados de mortalidade dos ratos	40
5.3	Gráfico TTT dos dados de câncer de cabeça e pescoço	41
5.4	Risco estimado pelas metodologias assintótica (traços), <i>bootstrap</i> (sólido) e Bayesiana (pontos) para os dados de câncer de cabeça e pescoço	43
5.5	Gráfico TTT dos dados de mortalidade de Wroclaw	44

5.6	Risco estimado para os dados de mortalidade de Wroclaw	45
5.7	Cadeias geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings para os dados de câncer de pulmão	48

Lista de Tabelas

3.1	Poder do Teste para $H_{01} : \beta = 1$ (0% censura)	20
3.2	Poder do Teste para $H_{01} : \beta = 1$ (5% censura)	20
3.3	Poder do Teste para $H_{02} : \eta_1 = 0$ ou $\exp(\eta_1) = 1$ (0% censura) . .	21
3.4	Poder do Teste para $H_{02} : \eta_1 = 0$ ou $\exp(\eta_1) = 1$ (5% censura) . .	21
5.1	Inferência para os dados de mortalidade de ratos	39
5.2	Comparação entre modelos para os dados de mortalidade de ratos	40
5.3	Inferência para os dados de câncer de cabeça e pescoço	42
5.4	Comparação entre modelos para os dados de câncer de cabeça e pescoço	42
5.5	Inferência para os dados de mortalidade de Wroclaw	45
5.6	Comparação entre modelos para os dados de mortalidade de Wroclaw	46
5.7	Inferência para os dados de câncer de pulmão	49
5.8	Comparação entre modelos para os dados de câncer de pulmão . .	50
A.1	Risco Constante (0% censura)	56
A.2	Risco Crescente (0% censura)	56
A.3	Risco Decrescente (0% censura)	57
A.4	Risco Unimodal (0% censura)	57
A.5	Risco Constante (5% censura)	57

A.6	Risco Crescente (5% censura)	57
A.7	Risco Decrescente (5% censura)	58
A.8	Risco Unimodal (5% censura)	58
A.9	Risco Constante com Covariável (0% censura)	58
A.10	Risco Crescente com Covariável (0% censura)	58
A.11	Risco Decrescente com Covariável (0% censura)	59
A.12	Risco Unimodal com Covariável (0% censura)	59
A.13	Risco Constante com Covariável (5% censura)	59
A.14	Risco Crescente com Covariável (5% censura)	59
A.15	Risco Decrescente com Covariável (5% censura)	60
A.16	Risco Unimodal com Covariável (5% censura)	60
B.1	Risco Constante (0% censura)	61
B.2	Risco Crescente (0% censura)	61
B.3	Risco Decrescente (0% censura)	62
B.4	Risco Unimodal (0% censura)	62
B.5	Risco Constante (5% censura)	62
B.6	Risco Crescente (5% censura)	62
B.7	Risco Decrescente (5% censura)	63
B.8	Risco Unimodal (5% censura)	63
B.9	Risco Constante com Covariável (0% censura)	63
B.10	Risco Crescente com Covariável (0% censura)	63
B.11	Risco Decrescente com Covariável (0% censura)	64
B.12	Risco Unimodal com Covariável (0% censura)	64
B.13	Risco Constante com Covariável (5% censura)	64

B.14 Risco Crescente com Covariável (5% censura)	64
B.15 Risco Decrescente com Covariável (5% censura)	65
B.16 Risco Unimodal com Covariável (5% censura)	65
C.1 Dados de mortalidade de ratos (Kimball, 1961)	66
C.2 Dados do estudo de câncer de cabeça e pescoço, em meses - grupo A (Efron, 1988)	67
C.3 Dados de mortalidade de Wroclaw (Halley, 1693)	68
C.4 Dados do estudo de câncer de pulmão (Prentice, 1973)	69
C.5 Dados do estudo de câncer de pulmão (continuação)	70

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Francisco Louzada-Neto, pela orientação concedida a este projeto, por confiar em meu trabalho e pelo suporte toda vez em que se fez necessário.

Também agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) por ter financiado este projeto por boa parte do tempo em que estive no programa de Pós-Graduação.

Ainda, agradeço a todos os meus amigos, desde colegas da universidade, professores e amigos de longa data, cuja presença constante ao meu lado mostra-se fundamental para que eu possa ter perseverança e superar os obstáculos da vida. Também agradeço à Priscila, por todo o apoio, amor e carinho compartilhados neste tempo juntos.

Finalmente, um agradecimento à minha família, que sempre me incentivou a seguir este caminho, e em especial, à minha mãe, que me amou durante toda a sua vida, desde o momento em que nasci, e ainda está a me vigiar. Alguém que foi, e ainda é, tudo para mim, cuja presença estará sempre em meu coração.

Resumo

A distribuição Weibull é uma escolha inicial freqüente para modelagem de dados com taxas de risco monótonas. Entretanto, esta distribuição não fornece um ajuste paramétrico razoável quando as funções de risco assumem um formato unimodal ou em forma de banheira. Neste contexto, Cooray (2006) propôs uma generalização da família Weibull considerando a distribuição da razão de chances das famílias Weibull e Weibull inversa, referida como família Weibull de razão de chances. Esta família não é apenas conveniente para modelar taxas de risco unimodal e banheira, mas também é adequada para testar a adequabilidade do ajuste das famílias Weibull e Weibull inversa como submodelos. Neste trabalho, estudamos sistematicamente a família Weibull de razão de chances e suas propriedades, apontando as motivações para o seu uso, inserindo covariáveis no modelo, verificando as dificuldades referentes ao problema da estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo e propondo metodologia de estimação intervalar e construção de testes de hipóteses para os parâmetros do modelo. Comparamos os resultados obtidos por meio dos métodos de reamostragem com os resultados obtidos via teoria assintótica. Tanto a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança propostos quanto o tamanho e poder dos testes de hipóteses considerados foram estudados via simulação de Monte Carlo. Além disso, propusemos uma metodologia Bayesiana de estimação para os parâmetros do modelo baseados em técnicas de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov.

Palavras-chave: Distribuição Weibull, razão de chances, estimador de máxima verossimilhança; teoria assintótica; *bootstrap*; probabilidade de cobertura; inferência Bayesiana; Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC).

Abstract

The Weibull distribution is a common initial choice for modeling data with monotone hazard rates. However, such distribution fails to provide a reasonable parametric fit when the hazard function is unimodal or bathtub-shaped. In this context, Cooray (2006) proposed a generalization of the Weibull family by considering the distributions of the odds of Weibull and inverse Weibull families, referred as the odd Weibull family which is not just useful for modeling unimodal and bathtub-shaped hazards, but it is also convenient for testing goodness-of-fit of Weibull and inverse Weibull as submodels. In this project we have systematically studied the odd Weibull family along with its properties, showing motivations for its utilization, inserting covariates in the model, pointing out some troubles associated with the maximum likelihood estimation and proposing interval estimation and hypothesis test construction methodologies for the model parameters. We have also compared resampling results with asymptotic ones. Coverage probability from proposed confidence intervals and size and power of considered hypothesis tests were both analyzed as well via Monte Carlo simulation. Furthermore, we have proposed a Bayesian estimation methodology for the model parameters based in Monte Carlo Markov Chain (MCMC) simulation techniques.

Keywords: Weibull distribution, odds ratio, maximum likelihood estimator; asymptotic theory; *bootstrap*; coverage probability; Bayesian inference; Monte Carlo Markov Chains (MCMC).

Capítulo 1

Introdução

Na modelagem de dados de sobrevivência com taxas de risco monótonas, a distribuição Weibull é freqüentemente uma escolha inicial. Porém, a distribuição Weibull não fornece um ajuste paramétrico razoável para situações em que as funções de risco assumem um formato unimodal ou de banheira, o que é comum na prática (Louzada-Neto, 1999). Para descrever adequadamente tais comportamentos, extensões com três parâmetros do modelo Weibull foram propostas, como a distribuição gama generalizada (Stacy, 1962) e a família Weibull exponenciada (Mudholkar *et al.*, 1995). Porém, mesmo tais modelos não são capazes de acomodar a modelagem de uma função de risco em formato de banheira.

Neste contexto, Cooray (2006) propôs uma generalização da família Weibull considerando a distribuição da razão de chances das famílias Weibull e Weibull inversa, referida como família Weibull de razão de chances. Esta família não é apenas conveniente para modelar taxas de risco em forma de banheira, mas também é adequada para testar a adequabilidade do ajuste das famílias Weibull e Weibull inversa como submodelos. Além disso, a família Weibull de razão de chances acomoda os cinco principais formatos de risco: constante, crescente, decrescente, unimodal e banheira.

Apesar da flexibilidade do modelo para acomodar funções de risco não-monótonas, a presença de covariáveis não é considerada na modelagem de Cooray (2006). Como conseqüência, métodos formais de testes de hipótese e estimação

por intervalo não foram ainda plenamente desenvolvidos e testados com relação às suas propriedades assintóticas.

O presente trabalho estuda sistematicamente a Família Weibull de Razão de Chances, indexada por dois parâmetros de forma e um parâmetro de escala, e suas propriedades, apontando as motivações para seu uso; desenvolve o modelo com a inclusão de covariáveis; verifica as dificuldades referentes ao problema de estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo na presença de covariáveis e propõe metodologia de estimação intervalar e construção de testes de hipóteses para os parâmetros do modelo via método *bootstrap* (Efron & Tibshirani, 1993; Davison & Hinkley, 1997). Estes procedimentos também são comparados com os resultados obtidos por meio de teoria assintótica. Além disso, também é proposta metodologia de estimação Bayesiana para os parâmetros do modelo baseada em técnicas de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov (Geman & Geman, 1984; Chib & Greenberg, 1995).

O Capítulo 2 mostra maiores detalhes sobre a formulação do modelo, assim como a inclusão de covariáveis no mesmo. No Capítulo 3, são conduzidos estudos de simulação considerando cada uma das possíveis formas de risco, a fim de verificar as propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da família Weibull de Razão de Chances e as características dos testes pertinentes ao modelo. O Capítulo 4 contém as especificações sobre os procedimentos bayesianos adotados para a estimação dos parâmetros, enquanto que o Capítulo 5 mostra aplicações de todas as metodologias apresentadas a fim de compará-las. Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais e possíveis linhas de pesquisa futuras.

Capítulo 2

A Família Weibull de Razão de Chances

2.1 Introdução

A análise de sobrevivência ganhou nítido destaque nos últimos anos e hoje possui inúmeras aplicações, principalmente na área médica. Segundo Colosimo & Giolo (2006), é uma das áreas de aplicação da estatística que mais têm crescido nos últimos 20 anos, em razão do desenvolvimento e do aprimoramento de técnicas estatísticas, combinados com computadores cada vez mais rápidos.

Em análise de sobrevivência, a variável de interesse no estudo é o tempo até a ocorrência de um evento de interesse, freqüentemente chamado de **falha**. Exemplos de tempos de falha incluem os períodos de vida de máquinas industriais até a quebra, tempos de sobrevivência de pacientes em um estudo clínico até a morte e o período de fidelidade de clientes a um determinado tipo de seguradora, na área financeira. Dados de sobrevivência caracterizam-se pela presença de **censuras**, que representam a observação incompleta do tempo de falha de um determinado indivíduo. Textos introdutórios à Análise de Sobrevivência compreendem Colosimo & Giolo (2006) e Lee (1992).

Embora exista uma série de modelos probabilísticos utilizados em análise de dados de sobrevivência, alguns destes modelos ocupam uma posição de destaque

por sua comprovada adequação a várias situações práticas, como o modelo exponencial e o de Weibull. Neste contexto, a família Weibull de razão de chances aparece como uma alternativa que se destaca por sua flexibilidade em acomodar ambos os modelos anteriores, além de útil em diversas outras situações.

O presente Capítulo apresenta a família Weibull de razão de chances, definindo suas características, a função de verossimilhança e os testes associados aos estimadores dos seus parâmetros. Breves comentários sobre o gráfico TTT (tempo total em teste) e a presença de censuras precedem a extensão do modelo considerando a presença de covariáveis, com o intuito de aumentar ainda mais sua flexibilidade.

2.2 Formulação do Modelo

A Família Weibull de razão de chances (Cooray, 2006) surgiu para responder duas perguntas encontradas em análise de sobrevivência:

1. Quais são as chances de um indivíduo morrer antes do tempo T , sabendo que T segue uma certa distribuição W ?
2. Se estas chances seguem alguma outra distribuição L , então qual a correção a ser feita sobre a distribuição de T ?

Enquanto a resposta da primeira pergunta pode ser dada de maneira imediata por depender apenas da distribuição de W , a resposta da segunda questão pode variar devido às escolhas de L e W . A primeira resposta pode ser dada ao considerar a “razão de chances de falha” de um determinado indivíduo, dado em termos da função de sobrevivência por $(1 - S_T(t))/S_T(t)$, onde $S_T(t) = P(T \geq t) = 1 - F_T(t)$, $t \in (0, \infty)$, sendo $F_T(t)$ a função de distribuição acumulada de T . Esta razão pode ser denotada por y ($y \in (0, \infty)$) e ser considerada uma variável aleatória. O interesse reside em modelar Y através de uma distribuição paramétrica apropriada $F_Y(y)$, isto é,

$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = F_Y\left(\frac{1 - S_T(t)}{S_T(t)}\right). \quad (2.1)$$

Consideremos a distribuição log-logística para modelar a aleatoriedade da “razão de chances de falha”, cuja função de distribuição acumulada é dada por $F_Y(y) = 1 - (1 + y^\gamma)^{-1}$; $0 < \gamma < \infty$, e foi sugerida por Cooray (2006) pela existência da seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{1 - S_Y(y)}{S_Y(y)} &= \frac{1 - (1 + y^\gamma)^{-1}}{(1 + y^\gamma)^{-1}} = \\ &= \frac{(1 + y^\gamma - 1)(1 + y^\gamma)^{-1}}{(1 + y^\gamma)^{-1}} = \\ &= y^\gamma = \\ &= \left(\frac{1 - S_T(t)}{S_T(t)} \right)^\gamma, \end{aligned}$$

onde $S_Y(y) = 1 - F_Y(y)$. Isto implica que

$$y = \frac{1 - S_T(t)}{S_T(t)} = \left(\frac{1 - S_Y(y)}{S_Y(y)} \right)^{1/\gamma}. \quad (2.2)$$

Dessa forma, γ pode ser considerado um parâmetro de correção da distribuição W .

Agora suponha que a variável aleatória de tempo de vida T segue uma distribuição Weibull, com sua função de sobrevivência dada por $S_T(t) = e^{-(t/\theta)^\alpha}$; $0 < t < \infty$, $\alpha > 0$, $\theta > 0$. Então, de (2.1), a função distribuição acumulada da distribuição corrigida de T é dada por

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \left(1 + \left(\frac{1 - S_T(t)}{S_T(t)} \right)^\gamma \right)^{-1} = \\ &= 1 - \left(1 + \left(\frac{1 - e^{-(t/\theta)^\alpha}}{e^{-(t/\theta)^\alpha}} \right)^\gamma \right)^{-1} = \\ &= 1 - \left(1 + \left(\frac{1}{e^{-(t/\theta)^\alpha}} - 1 \right)^\gamma \right)^{-1} = \\ &= 1 - \left(1 + (e^{(t/\theta)^\alpha} - 1)^\gamma \right)^{-1}; \quad (2.3) \\ &0 < t < \infty, \alpha > 0, \gamma > 0, \theta > 0. \end{aligned}$$

Se a variável aleatória T segue a distribuição Weibull inversa, com a função de sobrevivência dada por $S_T(t) = 1 - e^{-(t/\theta)^{-\alpha}}$; $0 < t < \infty$, $\alpha < 0$, $\theta > 0$,

então podemos calcular de maneira análoga e escrever a distribuição corrigida de T como

$$F_T(t) = 1 - \left(1 + \left(e^{(t/\theta)^{-\alpha}} - 1 \right)^{-\gamma} \right)^{-1}; \quad 0 < t < \infty, \alpha > 0, \gamma > 0, \theta > 0. \quad (2.4)$$

As equações (2.3) e (2.4) podem ser combinadas ao escrever o parâmetro de correção $\beta = \pm\gamma$, $\gamma > 0$, para obter a função de distribuição acumulada da família Weibull de razão de chances por

$$F(t; \alpha, \beta, \theta) = 1 - \left(1 + \left(e^{(t/\theta)^\alpha} - 1 \right)^\beta \right)^{-1}; \quad 0 < t < \infty, \theta > 0, \alpha\beta > 0. \quad (2.5)$$

As correspondentes funções de densidade, risco e quantil são dados, respectivamente, por

$$f(t; \alpha, \beta, \theta) = \left(\frac{\alpha\beta}{t} \right) \left(\frac{t}{\theta} \right)^\alpha e^{(t/\theta)^\alpha} \left(e^{(t/\theta)^\alpha} - 1 \right)^{\beta-1} \left(1 + \left(e^{(t/\theta)^\alpha} - 1 \right)^\beta \right)^{-2}, \quad (2.6)$$

$$h(t; \alpha, \beta, \theta) = \left(\frac{\alpha\beta}{t} \right) \left(\frac{t}{\theta} \right)^\alpha e^{(t/\theta)^\alpha} \left(e^{(t/\theta)^\alpha} - 1 \right)^{\beta-1} \left(1 + \left(e^{(t/\theta)^\alpha} - 1 \right)^\beta \right)^{-1}, \quad (2.7)$$

e

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \theta \ln^{1/\alpha} \left(1 + \left(\frac{u}{1-u} \right)^{1/\beta} \right); \quad 0 < u < 1. \quad (2.8)$$

Notação: $t \sim WeibullRC(\alpha, \beta, \theta)$.

A densidade encontrada é reduzida à Weibull quando $\beta = 1$, e à Weibull inversa quando $\beta = -1$. Claramente, a família Weibull de razão de chances é assintoticamente equivalente à distribuição log-logística para grandes valores de θ . Quando ambos os parâmetros de forma, α e β , da família Weibull de razão de chances são iguais a 1, a função de risco dada pela equação (2.7) é constante, isto é, temos uma distribuição exponencial. Quando temos $(\alpha > 1, \alpha\beta > 1)$, $(\alpha < 1, \alpha\beta < 1)$, $(\alpha > 1, \alpha\beta \leq 1)$ e $(\alpha < 1, \alpha\beta \geq 1)$, as formas da função de risco são, respectivamente, crescente, decrescente, banheira e unimodal.

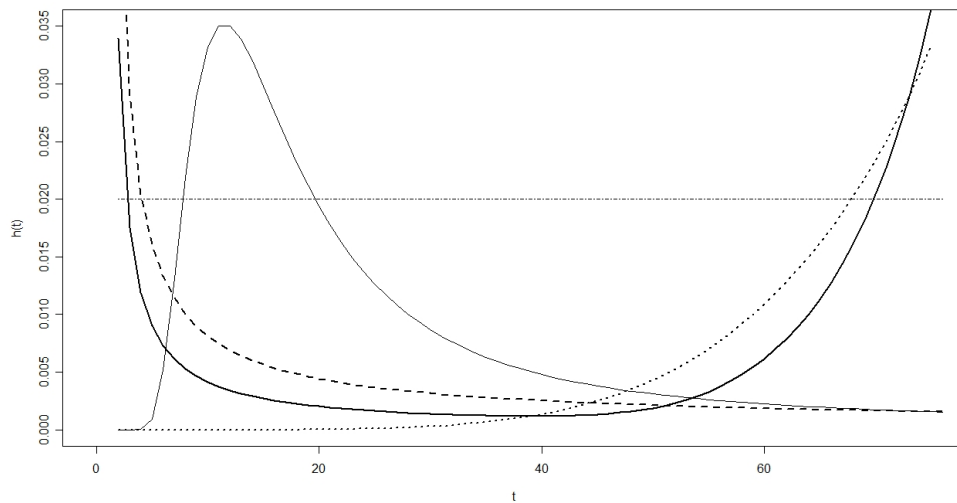


FIGURA 2.1: Curvas de risco da família Weibull de razão de chances. A linha pontilhada ($\alpha = 9, \beta = 0.7, \theta = 85$), a linha tracejada ($\alpha = 0.5, \beta = 0.3, \theta = 100$), a linha de traços e pontos ($\alpha = 1, \beta = 1, \theta = 50$), a linha sólida escura ($\alpha = 8, \beta = 0.01, \theta = 45$) e a linha sólida ($\alpha = -1.5, \beta = -0.1, \theta = 75$), respectivamente, representam taxas de risco crescente, decrescente, constante, banheira e unimodal

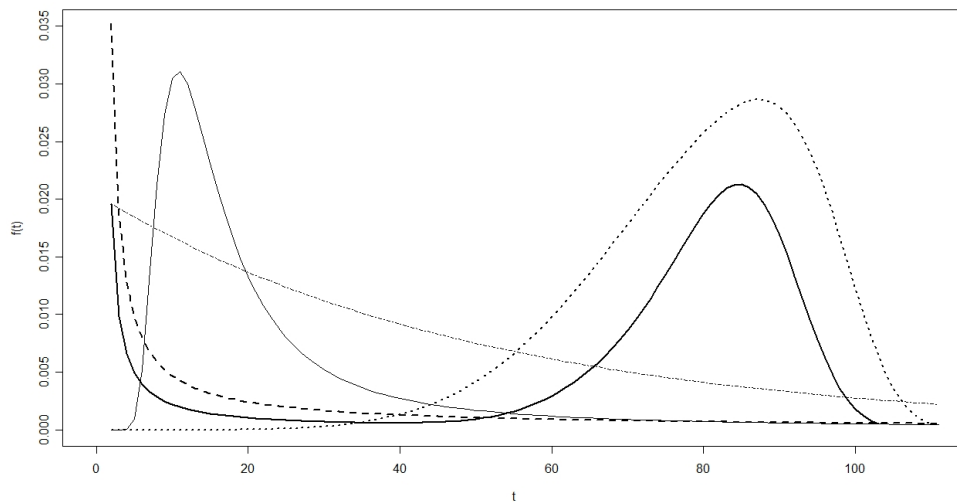


FIGURA 2.2: Densidades da família Weibull de razão de chances correspondentes aos riscos da Figura 1

O k -ésimo momento da variável aleatória com distribuição Weibull de razão de chances é dado por (Jiang *et al.*, 2008)

$$E(T^k) = \frac{k\theta^k}{|\alpha|} \int_0^\infty \frac{(\log(1+y))^{\frac{k}{\alpha}-1}}{(1+y)(1+y^\beta)} dy. \quad (2.9)$$

Os momentos não possuem forma fechada e, portanto, devem ser calculados numericamente. Como pode ser observado em (2.9), se α é inteiro positivo e $\beta = 1$, então para $k = \alpha$,

$$E(T^\alpha) = \theta^\alpha \int_0^\infty \frac{1}{(1+y^2)} dy = \theta^\alpha.$$

2.3 A Presença de Censuras

A principal característica de dados de sobrevivência é a presença de censura, que se resume à observação incompleta da variável tempo, causada por algum fator externo. Isto é, o acompanhamento de algum elemento foi interrompido por uma causa diferente da esperada: se esta fosse a morte do paciente por câncer, ele poderia ter mudado de cidade, o estudo poderia ter terminado para a análise dos dados ou ele ainda poderia ter morrido devido a outra causa.

Todos os resultados provenientes de um estudo de sobrevivência, mesmo censurados, devem ser usados na análise estatística e este procedimento é justificado por duas razões:

1. mesmo sendo incompletas, as informações fornecidas pelas observações censuradas são importantes;
2. a omissão das censuras no cálculo das estatísticas de interesse certamente acarretará em conclusões viciadas.

Formalmente, uma observação é dita *censurada a direita* em um determinado tempo L quando não é conhecido o valor exato da observação: apenas que é maior ou igual a L . Similarmente, uma observação é dita *censurada a esquerda* em L quando se sabe apenas que a observação é menor ou igual a L . Censuras à

direita são muito comuns em dados de tempo de vida, enquanto que censuras à esquerda são bastante raras (Lawless, 1982).

Os três mecanismos de censura mais comuns são:

1. **censura do tipo I:** é aquela em que se pré-estabelece um período de tempo para o término do estudo;
2. **censura do tipo II:** é aquela onde o estudo será encerrado após a ocorrência da falha em um número pré-estabelecido de indivíduos;
3. **censura aleatória:** é a que mais ocorre na prática médica e acontece quando um paciente é retirado do estudo sem ter ocorrido a falha.

A presença de censuras acarreta problemas para a inferência estatística, alguns impossíveis de serem completamente resolvidos. Embora o modelo de censuras independentes seja freqüentemente razoável, existem situações onde o mecanismo de censura está ligado ao processo de falha do experimento. Em tais circunstâncias, até mesmo descrever um modelo que represente este processo pode se mostrar uma tarefa árdua. Felizmente, a função de verossimilhança (apresentada a seguir) mostra-se aplicável a várias situações aparentemente complicadas.

Os estudos de simulação realizados nos Capítulos 3 e 4 consideram a presença de censuras aleatórias nas amostras utilizadas, a fim de estudar os efeitos causados na estimação dos parâmetros e em suas propriedades assintóticas.

2.4 A Função de Verossimilhança

O procedimento de estimação é baseado na função de verossimilhança. Suponha uma amostra aleatória de observações t_1, \dots, t_n de uma certa população de interesse. Considere inicialmente que todas as observações são não-censuradas. A função de verossimilhança para um parâmetro genérico θ é

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta).$$

A contribuição de cada observação não-censurada para a verossimilhança é a sua função de densidade. Já as observações censuradas, que somente nos informam que o tempo de falha é maior que o tempo de censura, contribuem para $L(\boldsymbol{\theta})$ com suas funções de sobrevivência $S(t)$, que corresponde à razão entre as funções de densidade e risco (ou, equivalentemente, a 1 menos a função de distribuição acumulada $F(t)$).

Ao supor que as censuras e os tempos observados são independentes, a função de verossimilhança para dados censurados a direita é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}; t) = \prod_{i=1}^n f(t; \theta)^{\delta_i} S(t; \theta)^{1-\delta_i} \quad (2.10)$$

O procedimento padrão de máxima verossimilhança pode ser utilizado para estimar os parâmetros da família Weibull de razão de chances, através da maximização da função de log-verossimilhança $l(\mathbf{t}; \boldsymbol{\theta}) = \ln L(\mathbf{t}; \boldsymbol{\theta})$, onde $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \theta)$ e $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, uma amostra aleatória ordenada (isto é, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$) da família Weibull de razão de chances.

A função log-verossimilhança da família Weibull de razão de chances é dada por

$$\begin{aligned} l(t_1, t_2, \dots, t_n; \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^n \delta_j \left\{ \ln(\alpha\beta\theta^{-\alpha}) + (\alpha - 1) \ln t_j + \left(\frac{t_j}{\theta}\right)^\alpha + \right. \\ &\quad \left. + (\beta - 1) \ln (e^{(t_j/\theta)^\alpha} - 1) \right\} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n (1 + \delta_j) \ln \left(1 + (e^{(t_j/\theta)^\alpha} - 1)^\beta \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & \text{se a } j\text{-ésima observação é censurada à direita, } j = 1, 2, \dots, n \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os estimadores de α , β e θ são obtidos ao encontrar o ponto no espaço paramétrico que maximiza a função de verossimilhança ou, equivalentemente, a log-verossimilhança. Em outras palavras, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros são obtidos ao igualarmos os escores a zero, isto é,

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log(L(\boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0.$$

Este sistema também é chamado de equações de máxima verossimilhança. Métodos numéricos para localizar o ponto que maximiza a função de verossimilhança envolvem uma estimativa inicial $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0, \hat{\theta}_0)$ e um procedimento iterativo que constrói uma seqüência de pontos convergentes para $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$. O algoritmo utilizado para a realização do estudo de simulação envolve o uso da matriz de derivadas segundas (ou matriz Hessiana) da log-verossimilhança e pode ser encontrado no Apêndice D.

2.5 Testes de Hipótese

Testar a adequabilidade do ajuste de um modelo Weibull é uma tarefa complicada devido ao grande número de modelos que o têm como caso particular. Ao restringir tais alternativas à família Weibull de razão de chances, a estatística razão de verossimilhança pode ser utilizada para verificar se os modelos Weibull e Weibull inverso são adequados.

As hipóteses nulas, $H_{011} : \beta = 1$, $H_{012} : (\alpha = 1, \beta = 1)$, $H_{021} : \beta = -1$ e $H_{022} : (\alpha = -1, \beta = -1)$ correspondem, respectivamente, aos submodelos Weibull, Exponencial, Weibull inverso e Exponencial inverso da família Weibull de razão de chances. A estatística razão de verossimilhança para H_{0ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$) é (Rao, 1973; Lawless, 1982)

$$\Lambda = \frac{\sup_{R_{0ij}} L(\alpha, \beta, \theta; t)}{\sup_{UR} L(\alpha, \beta, \theta; t)},$$

onde R_{0ij} representa o espaço paramétrico restrito pela hipótese nula H_{0ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, e UR representa o espaço paramétrico irrestrito.

Em termos das estimativas de máxima verossimilhança, as estatísticas razão de verossimilhança, para cada hipótese, podem ser escritas como

$$\Lambda_{11} = \frac{L(\hat{\alpha}_w, \beta = 1, \hat{\theta}_w)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})}, \quad \Lambda_{12} = \frac{L(\alpha = 1, \beta = 1, \hat{\theta}_e)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})},$$

$$\Lambda_{21} = \frac{L(\hat{\alpha}_{iw}, \beta = -1, \hat{\theta}_{iw})}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})}, \quad \Lambda_{22} = \frac{L(\alpha = -1, \beta = -1, \hat{\theta}_{ie})}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})}.$$

Sob as respectivas hipóteses nulas, $-2 \ln \Lambda_{11}$, $-2 \ln \Lambda_{12}$, $-2 \ln \Lambda_{21}$ e $-2 \ln \Lambda_{22}$ possuem, em princípio, distribuição assintótica χ^2 com, respectivamente, 2, 1, 2 e 1 graus de liberdade.

2.6 Gráficos TTT (Tempo Total em Teste)

Os parâmetros α e β de um membro da família Weibull de razão de chances determinam o formato da sua função de risco. Uma maneira de se predeterminar possíveis valores para os parâmetros em questão é através do gráfico TTT empírico, cujo gráfico prova-se útil ao indicar a forma da função de risco a ser ajustada aos dados analisados.

A transformação TTT empírica é dada por

$$\phi_n \left(\frac{r}{n} \right) = \frac{\sum_{i=1}^r T_{(i)} + (n-r)T_{(r)}}{\sum_{i=1}^n T_i},$$

onde $r = 1, 2, \dots, n$ e $T_{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$ representam as estatísticas de ordem da amostra.

O gráfico de r/n por $\phi_n(r/n)$ definido em um quadrado de área 1 mostra qual o formato da função de risco correspondente aos dados de sobrevivência (Figura 2.3). Se a transformada TTT empírica for convexa, côncava, convexa e côncava, e côncava e convexa (como mostrado na Figura 3), as funções de risco são, respectivamente, decrescente, crescente, banheira e unimodal (Barlow & Campo, 1974; Aarset, 1987; Mudholkar *et al.*, 1996).

Mudholkar *et al.* (1996) e Cooray (2006) apresentam em seus trabalhos uma versão paramétrica da estatística TTT. Cooray (2006) ainda apresenta uma estatística de teste para a adequabilidade do ajuste baseada na transformação TTT e um estudo de simulação para testar sua eficácia.

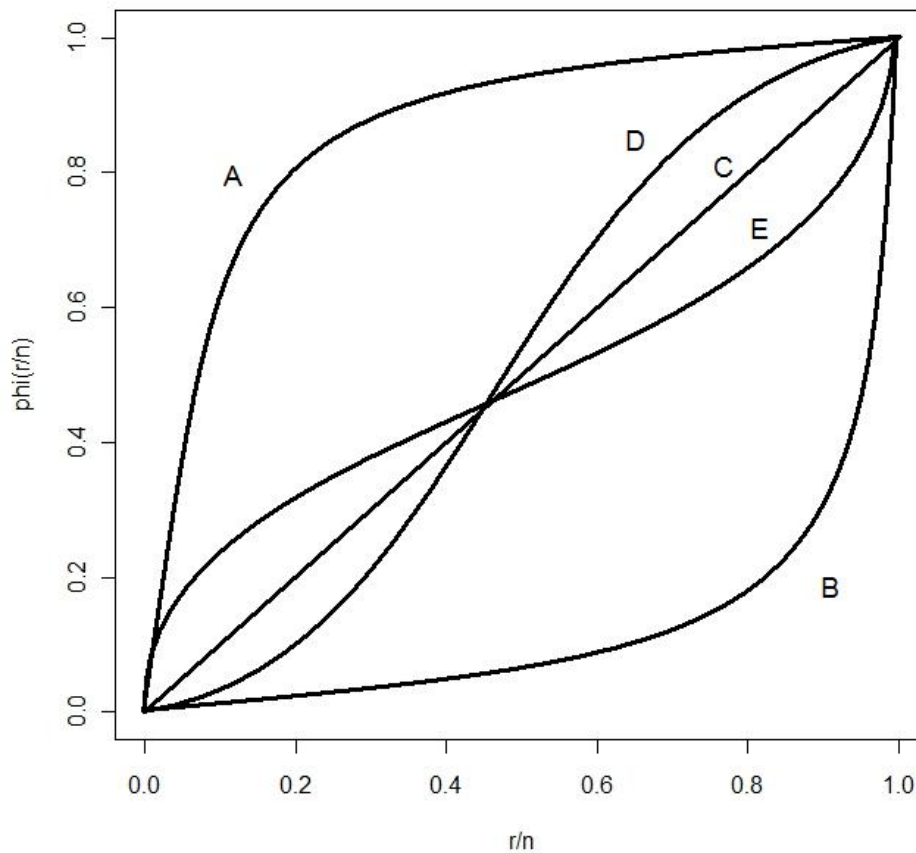


FIGURA 2.3: Curvas das transformadas TTT empíricas. As curvas A, B, C, D e E, respectivamente, indicam que os dados possuem taxas de risco crescente, decrescente, constante, banheira e unimodal

2.7 Família Weibull de Razão de Chances na Presença de Covariáveis

Metodologias inferenciais para lidar com dados de sobrevivência lidam freqüentemente com amostras univariadas provenientes de uma determinada distribuição. Na prática, muitas situações envolvem populações heterogêneas, fazendo-se importante considerar a relação do tempo de vida com outros fatores.

Uma maneira de examinar a relação entre o tempo de vida e certas covariáveis de processo é através de um modelo de regressão, onde o tempo de vida terá uma distribuição que dependerá de tais covariáveis. Os modelos de

regressão paramétricos mais importantes mostram-se como extensões dos modelos de tempo de vida univariados, cujos parâmetros (ou apenas um subconjunto destes) dependem das variáveis regressoras. A família Weibull de razão de chances, caracterizada por dois parâmetros de forma e um de escala, poderia tê-los dependentes de um dado conjunto de covariáveis $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p)'$.

Segundo Lawless (1982), um modelo Weibull que se mostra adequado em diversas situações considera apenas o parâmetro de escala θ como uma função das covariáveis. Uma consideração dessa natureza significa que o formato da função densidade (e, por conseqüência, da função de risco) é o mesmo para qualquer possível configuração das covariáveis analisadas. Como o parâmetro θ é positivo, uma função conveniente para especificar a relação entre o parâmetro e as covariáveis é dada por

$$\theta(\mathbf{x}) = \exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}),$$

onde $\boldsymbol{\eta}' = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$. Dessa forma, é garantido que $\theta(\mathbf{x}) > 0$ sem a necessidade de impor qualquer restrição sobre $\boldsymbol{\eta}$.

Sob o contexto de p covariáveis no parâmetro de escala, as funções de distribuição acumulada, densidade, risco e quantil para a família Weibull de razão de chances são dadas, respectivamente, por

$$F(t; \alpha, \beta, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}) = 1 - \left(1 + \left(e^{(t/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} - 1 \right)^\beta \right)^{-1}; \quad 0 < t < \infty \quad (2.12)$$

$$\alpha\beta > 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in \Re^{p+1}$$

$$f(t; \alpha, \beta, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}) = \left(\frac{\alpha\beta}{t} \right) \left(\frac{t}{\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x})} \right)^\alpha e^{(t/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} \left(e^{(t/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} - 1 \right)^{\beta-1} \quad (2.13)$$

$$\times \left(1 + \left(e^{(t/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} - 1 \right)^\beta \right)^{-2}; \quad 0 < t < \infty, \quad \alpha\beta > 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in \Re^{p+1}$$

$$h(t; \alpha, \beta, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}) = \left(\frac{\alpha\beta}{t} \right) \left(\frac{t}{\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x})} \right)^\alpha e^{(t/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} \left(e^{(t/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} - 1 \right)^{\beta-1} \quad (2.14)$$

$$\times \left(1 + \left(e^{(t/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} - 1 \right)^\beta \right)^{-1}; \quad 0 < t < \infty, \quad \alpha\beta > 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in \Re^{p+1}$$

e

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}) \ln^{1/\alpha} \left(1 + \left(\frac{u}{1-u} \right)^{1/\beta} \right); \quad 0 < u < 1. \quad (2.15)$$

Considerando a extensão do modelo para abordar a presença de covariáveis, a função de log-verossimilhança da família Weibull de razão de chances é dada por

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta, \boldsymbol{\eta}; t, \mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n \delta_j \left\{ \ln(\alpha\beta \exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x})^{-\alpha}) + (\alpha - 1) \ln t_j + \left(\frac{t_j}{\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x})} \right)^\alpha + \right. \\ &\quad \left. + (\beta - 1) \ln \left(e^{(t_j/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} - 1 \right) \right\} - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n (1 + \delta_j) \ln \left(1 + \left(e^{(t_j/\exp(\boldsymbol{\eta}'\mathbf{x}))^\alpha} - 1 \right)^\beta \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Procedimentos de máxima verossimilhança para a estimação dos parâmetros são obtidos de maneira análoga ao caso sem covariáveis. Maiores detalhes podem ser vistos em Cox & Oakes (1984), Kalbfleisch & Prentice (2002), Rao (1973) e Lawless (1982).

A significância dos parâmetros relacionados às covariáveis no modelo Weibull de razão de chances estendido também pode ser verificada através do teste da razão de verossimilhança, sob a hipótese nula $H_0 : \eta_1 = \dots = \eta_p = 0$. A estatística razão de verossimilhança para a hipótese considerada é

$$\Lambda_{Cov} = \frac{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\eta}_0, \eta_1 = \dots = \eta_p = 0)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})},$$

Sob H_0 , $-2 \ln \Lambda_{Cov}$ possui distribuição assintótica χ^2 com 3 graus de liberdade. O teste da razão de verossimilhança também pode ser utilizado para verificar a significância de apenas um subconjunto dos parâmetros envolvidos, seguindo um raciocínio análogo. Para m covariáveis sob teste, $-2 \ln \Lambda_{Cov_m}$ tem distribuição assintótica χ^2 com $3 + p - m$ graus de liberdade, onde p é o número de covariáveis do modelo.

2.8 Considerações Finais

O Capítulo apresentou as características pertinentes à família Weibull de razão de chances e à sua extensão quando são consideradas covariáveis no estudo. A maneira com que o modelo foi criado pode incentivar o estudo de outros modelos, obtidos ao utilizar uma distribuição diferente da log-logística para modelar a aleatoriedade da razão de chances de falha.

Os métodos inferenciais apresentados apontam para a flexibilidade do modelo, embora um estudo mais detalhado se faça necessário para mostrar sua performance em situações diversas. Para verificar as propriedades dos estimadores dos parâmetros (e dos testes associados) da família Weibull de razão de chances, o próximo Capítulo apresenta estudos de simulação sob pontos de vista distintos (assintótico e via reamostragem).

Capítulo 3

Estudo de Simulação: Inferência Clássica

3.1 Introdução

A família Weibull de razão de chances, embora pareça flexível, configura-se como um modelo analiticamente sofisticado como apresentado no Capítulo anterior. Consequentemente, a obtenção de estimadores e seus erros-padrão se apresentam de forma analiticamente intratável. Neste contexto, vários métodos computacionais de simulação estocástica auxiliam na resolução de tais problemas de maneira rápida e eficiente.

Este Capítulo será organizado como segue. A primeira parte trata do teste da razão de verossimilhança, analisando seu tamanho e poder para as situações mais relevantes. Depois, as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança são testadas em cenários diversos. Os mesmos cenários são utilizados para estudar novamente as propriedades dos estimadores sob uma metodologia de reamostragem. Todas as simulações são devidamente especificadas e os algoritmos descritos. O final do Capítulo ainda apresenta considerações feitas sobre o risco em forma de banheira.

Para todos os procedimentos computacionais apresentados a seguir, foi utilizado o software **R** (gratuito).

3.2 Tamanho e Poder do Teste da Razão de Verossimilhança

O teste da razão de verossimilhança apresenta resultados assintóticos conhecidos. Entretanto, é muito comum que, na prática, estejam disponíveis apenas amostras relativamente pequenas para a análise. Dessa forma, é natural que surja o interesse em saber como o teste se comporta em tais situações. Ainda, é possível analisar sua sensibilidade para amostras moderadas e grandes (com o objetivo de confirmar os resultados assintóticos) e, mais ainda, um tamanho “ideal” para o teste pode ser definido.

3.2.1 Especificações da Simulação

O teste da razão de verossimilhança é útil em diversas situações, como já destacado no Capítulo 2. Dentre estas, os testes para o submodelo Weibull e para a significância de covariáveis podem ser considerados dois dos mais freqüentes a serem praticados. Estes testes são caracterizados pelas hipóteses nulas $H_{01} : \beta = 1$ e $H_{02} : \eta_1 = \dots = \eta_p = 0$. Para este último será estudado, para efeito de simplificação, um cenário com apenas uma covariável binária, reduzindo a hipótese nula a $H_{02} : \eta_1 = 0$.

Para verificar as características do teste nessas situações, foram geradas 1000 amostras, e cada uma delas foi maximizada sob a restrição imposta pela hipótese nula e depois, irrestritamente. A estatística da razão de verossimilhança é calculada e comparada com o quantil da distribuição χ^2 com os devidos graus de liberdade. Repetidos os 1000 experimentos, é verificada a proporção de rejeições da hipótese nula causada pelo teste. Todos os testes foram realizados ao nível de 5%. Para a simulação, cinco tamanhos amostrais foram levados em conta: $n = 10, 30, 50, 100$ e 300 .

Para cada hipótese nula, o parâmetro sob teste é variado no procedimento de geração das amostras. Os valores considerados para H_{01} foram

$$\beta = 0.5, 1, 2, 4, 8.$$

Além disso, neste caso, $\alpha = 4$ e $\theta = 20$.

Como o modelo em H_{02} considera $\theta = \exp(\eta_0 + \eta_1 X)$, fixou-se o valor de η_0 tal que, sob $H_{02} : \eta_1 = 0$, $\theta = \exp(\eta_0) = 20$. Desta forma, os valores assumidos para o parâmetro θ foram

$$\theta = 17, 18, 19, 19.5, 20, 20.5, 21, 22, 23 \longrightarrow$$

$$\exp(\eta_1 X) = 0.85, 0.9, 0.95, 0.975, 1, 1.025, 1.05, 1.1, 1.15,$$

quando $X = 1$. No modelo considerado, $\exp(\eta_1)$ pode ser interpretado como um fator multiplicativo que determina a influência da presença da covariável X . Os valores dos parâmetros de forma para esta situação são dados por $\alpha = 4$ e $\beta = 4$.

Ambos os cenários são construídos com a ausência e a presença (5%) de censura aleatória. Fixado uma situação específica e um tamanho amostral n , os passos seguidos para este procedimento estão detalhados a seguir:

1. Fixar um valor para β ou θ dependendo da situação;
2. Gerar uma amostra de tamanho n de uma distribuição $WeibullRC(\alpha, \beta, \theta)$ com o específico parâmetro fixo no valor do Passo 1;
3. Calcular os estimadores de máxima verossimilhança para a amostra dada sob a hipótese nula, e depois recalculá-los sem restrição;
4. Construir a estatística razão de verossimilhança Λ ;
5. Comparar $-2 \ln \Lambda$ com o quantil de 95% da distribuição χ^2 com 2 graus de liberdade para β ou 3 para θ , e rejeitar a hipótese nula se $-2 \ln \Lambda > \chi_k^2(0.95)$;
6. Repetir os Passos 2 a 5 um número suficiente de vezes (no caso, 1000);
7. Calcular a proporção de rejeições obtidas (**poder do teste**);
8. Voltar ao Passo 1 e fixar um valor diferente para o parâmetro estudado.

3.2.2 Resultados e Discussão

As Tabelas 3.1 a 3.4 mostram o poder observado do teste para cada situação, isto é, a probabilidade de rejeitar a hipótese nula condicionada a um determinado valor paramétrico. É possível observar que o teste para $H_{01} : \beta = 1$ é muito pouco sensível para valores de β maiores que 1, sendo que, para amostras pequenas e moderadas, o número de rejeições quando $\beta = 0.5$ mostrou-se maior que quando $\beta = 8$. Apenas para tamanhos amostrais iguais a 100 ou maiores, o teste começa a apresentar uma sensibilidade melhor. É também a partir daí que a hipótese nula começa a ser rejeitada segundo o nível nominal do teste (5%) quando $\beta = 1$. Uma quantidade de 5% de censuras, apesar de diminuir levemente a sensibilidade do teste, apresentou um desempenho parecido ao caso completo.

TABELA 3.1: Poder do Teste para $H_{01} : \beta = 1$ (0% censura)

	β				
n	0.5	1	2	4	8
10	0.236	0.111	0.078	0.067	0.032
30	0.374	0.069	0.081	0.159	0.192
50	0.547	0.069	0.207	0.417	0.491
100	0.836	0.048	0.499	0.779	0.870
300	1.000	0.046	0.932	0.999	1.000

TABELA 3.2: Poder do Teste para $H_{01} : \beta = 1$ (5% censura)

	β				
n	0.5	1	2	4	8
10	0.225	0.109	0.080	0.077	0.042
30	0.357	0.060	0.078	0.140	0.150
50	0.535	0.067	0.200	0.354	0.451
100	0.816	0.053	0.479	0.769	0.833
300	1.000	0.046	0.920	1.000	1.000

O poder do teste para $H_{02} : \exp(\eta_1) = 1$, além de se comportar de maneira simétrica em torno de $\exp(\eta_1) = 1$, apresenta resultados relativamente

satisfatórios para amostras moderadas ($n = 30, 50$). Para amostras de tamanho 100 ou maior, o teste se mostra extremamente sensível para pequenas variações em η_1 . Pode-se dizer que, comparativamente, existe um indício de que o teste para a significância de covariáveis é mais poderoso que o teste para o submodelo Weibull, além de apresentar um desempenho considerável para amostras moderadas. Porém, a utilização do teste com amostras pequenas deve ser cautelosa, já que a probabilidade de rejeição do teste para uma amostra de tamanho 10 quando $\exp(\eta_1) = 1$ é de 0.343, muito maior que o nível nominal do teste.

TABELA 3.3: Poder do Teste para $H_{02} : \eta_1 = 0$ ou $\exp(\eta_1) = 1$ (0% censura)

n	$\exp(\eta_1)$								
	0.850	0.900	0.950	0.975	1	1.025	1.05	1.1	1.15
10	0.890	0.706	0.462	0.381	0.343	0.348	0.420	0.629	0.831
30	1.000	0.930	0.439	0.168	0.084	0.138	0.399	0.875	0.991
50	1.000	0.997	0.633	0.200	0.048	0.238	0.616	0.986	1.000
100	1.000	1.000	0.893	0.352	0.040	0.379	0.891	1.000	1.000
300	1.000	1.000	0.999	0.800	0.053	0.809	1.000	1.000	1.000

TABELA 3.4: Poder do Teste para $H_{02} : \eta_1 = 0$ ou $\exp(\eta_1) = 1$ (5% censura)

n	$\exp(\eta_1)$								
	0.850	0.900	0.950	0.975	1	1.025	1.05	1.1	1.15
10	0.890	0.683	0.481	0.416	0.385	0.376	0.426	0.624	0.825
30	0.998	0.926	0.405	0.162	0.095	0.177	0.393	0.874	0.983
50	1.000	0.994	0.578	0.195	0.057	0.222	0.592	0.986	1.000
100	1.000	1.000	0.882	0.348	0.043	0.337	0.871	1.000	1.000
300	1.000	1.000	0.999	0.777	0.048	0.792	1.000	1.000	1.000

3.3 Propriedades Assintóticas dos Estimadores de Máxima Verossimilhança

Nesta Seção, será conduzido um estudo de simulação com a finalidade de verificar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimi-

lhança, mais precisamente vício, erro-padrão e probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança. Para tanto, considerou-se diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores paramétricos a fim de simular as formas de risco constante, crescente, decrescente e unimodal. O estudo de simulação para o caso de risco em forma de banheira apresentou uma série de dificuldades, relatadas na Seção 3.5.

Para verificar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros, foi necessário abranger diversas situações. Além de o estudo considerar funções de riscos constante, crescente, decrescente e unimodal, também são levadas em conta a ausência e a presença de uma covariável (dicotômica) no modelo, dobrando o número de situações. Mais ainda, a simulação é realizada com dados completos (nenhuma censura) e depois, repetida com 5% de censuras aleatórias em cada amostra, totalizando 16 situações a serem avaliadas.

Em cada uma destas situações foram geradas 1000 amostras de tamanhos iguais a 10, 30, 50, 100 e 300 (totalizando 5000 amostras). A partir de cada amostra, foram estimados os valores paramétricos que maximizavam as log-verossimilhanças (2.8) ou (2.14), dependendo da situação. Para cada estimativa foi construído um intervalo de confiança, cuja obtenção baseou-se na propriedade da normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança. Sob condições suaves de regularidade, um estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (p -dimensional) tem distribuição aproximadamente $N_p(\boldsymbol{\theta}, I^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$, onde $I(\boldsymbol{\theta})$ corresponde à matriz de informação de Fisher, cujos elementos são dados por

$$I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = E \left(-\frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{t}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right).$$

Assim, o intervalo de confiança de 95% para a estimativa obtida para o i -ésimo parâmetro θ_i é dado por $\hat{\theta}_i \pm 1.96\sqrt{I_{ii}^{-1}(\boldsymbol{\theta})}$. A proporção desses intervalos que contenham o verdadeiro valor do parâmetro caracterizam a probabilidade de cobertura do mesmo.

Os parâmetros α e β utilizados para simular as funções de risco conside-

radas foram os seguintes:

- **Risco Constante:** $\alpha = 1, \beta = 1$
- **Risco Crescente:** $\alpha = 9, \beta = 0.7$
- **Risco Decrescente:** $\alpha = 0.9, \beta = 0.7$
- **Risco Unimodal:** $\alpha = -9, \beta = -0.7$

Na ausência de covariáveis, $\theta = 85$ em todas as situações. Considerando a presença de uma covariável dicotômica X no parâmetro de escala θ , isto é,

$$\theta = \exp(\eta_0 + \eta_1 X) = \exp(\eta_0) \exp(\eta_1 X),$$

então $\theta = 80$ quando $X = 0$ e $\theta = 90$ quando $X = 1$, ou seja,

$$\exp(\eta_0) = 80 \longrightarrow \eta_0 = \log(80) = 4.382,$$

$$\exp(\eta_1) = 1.125 \longrightarrow \eta_1 = \log(1.125) = 0.118.$$

Dessa forma, dada uma situação específica e um tamanho amostral n , o algoritmo de simulação pode ser resumido pelos seguintes passos:

1. Gerar uma amostra de tamanho n de uma distribuição $WeibullRC(\alpha, \beta, \theta)$;
2. Calcular os estimadores de máxima verossimilhança para a amostra dada;
3. Construir os intervalos de confiança para α , β e θ através da matriz Hessiana \mathbf{H} do processo de maximização, visto que $-\mathbf{H}$ é um estimador consistente de $I(\boldsymbol{\theta})$ (Lawless, 1982);
4. Verificar se os intervalos de confiança construídos contém os valores reais dos parâmetros;
5. Repetir os passos 1, 2, 3 e 4 um número B de vezes (neste caso, $B = 1000$);
6. Calcular a média e o desvio-padrão das B estimativas de α , β e θ obtidas a fim de verificar o vício e o erro-padrão dos respectivos estimadores;

7. Calcular a proporção de vezes em que os intervalos de confiança construídos abrangeram os valores reais dos parâmetros, para obter a probabilidade de cobertura.

3.3.1 Resultados e Discussão

As Tabelas do Apêndice A mostram os resultados obtidos com a simulação anteriormente descrita. Uma comparação entre as formas de risco consideradas pode ser feita imediatamente ao avaliarmos o erro-padrão de θ dos riscos constante e decrescente com os riscos crescente e unimodal. Nos primeiros, o erro-padrão de θ mostra-se muito grande para amostras pequenas (sendo maior para o risco constante, onde o erro-padrão ultrapassa 8000), enquanto está bem mais controlado nos últimos. Ao avaliar o desempenho do estimador de α , a situação se inverte, ou seja, seu erro-padrão para os riscos crescente e unimodal mostram-se maiores que para os riscos constante e decrescente. A probabilidade de cobertura, para estes casos, parece comportar-se da mesma maneira para qualquer tipo de risco. Também é possível verificar a consistência dos estimadores a medida que seus valores aproximam-se dos parâmetros reais conforme a amostra cresce.

Ao comparar os casos com dados completos e com 5% de censura, percebe-se que os erros-padrão mantêm-se estáveis, com exceção das pequenas amostras para os riscos constante e decrescente, onde os erros-padrão mostraram-se menores para os casos censurados. Porém, foram verificadas estimativas mais viciadas para o parâmetro θ quando os dados são censurados (mais evidentes para os riscos constante e decrescente). Uma outra característica apresentada pelos dados censurados é que a probabilidade de cobertura de θ começa a decrescer após um certo tamanho amostral (geralmente 50 ou 100), confirmando a existência do vício de estimação neste caso. Os dados completos apresentam, para os três parâmetros, probabilidades de cobertura que aproximam-se da cobertura nominal (95%) conforme a amostra cresce.

Para o modelo com covariável, praticamente os mesmos padrões comentados até agora para θ são verificados para η_0 , que corresponde ao termo

sem a covariável. Tanto o vício quanto o erro-padrão comportam-se da mesma maneira que os casos abordados até agora. A probabilidade de cobertura, ao ser comparada com o caso sem covariáveis, é muito menor para amostras pequenas. Porém, amostras de tamanho 300 conseguem probabilidades de cobertura muito próximas à nominal (salvo nos casos censurados, quando a cobertura de η_0 é prejudicada).

3.4 Estimação via Reamostragem

A próxima etapa do trabalho verifica as propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança através de técnicas de reamostragem. As situações consideradas na simulação anterior foram novamente submetidas a estudo, segundo a técnica de reamostragem *bootstrap* não-paramétrica. A primeira parte desta Seção apresenta detalhes sobre a técnica empregada. A próxima parte fornece as especificações da simulação e, por fim, os resultados são comentados e comparados com o estudo anterior.

3.4.1 Bootstrap (Efron & Tibshirani, 1993)

O método *bootstrap* não-paramétrico tem a vantagem de evitar desenvolvimentos analíticos e tem sido uma das técnicas mais utilizadas e expandidas, com aplicações nas mais diversas áreas. Seja $t = (t_1, \dots, t_n)$ o resultado das variáveis aleatórias i.i.d. T_1, \dots, T_n , com distribuição de probabilidade desconhecida F , que depende de um parâmetro desconhecido θ , dado por $\theta = s(F)$, sendo $s(\cdot)$ a função que define θ . O parâmetro θ é estimado por $\hat{\theta} = s(\hat{F})$, onde \hat{F} é um estimador de F obtido a partir da amostra $t = (t_1, \dots, t_n)$. Seja \hat{F} a distribuição empírica de t , que coloca probabilidades iguais a $1/n$ para cada valor da amostra, t_i , $i = 1, \dots, n$, isto é,

$$\hat{F}(t) = \frac{\#\{t_j \leq t\}}{n},$$

onde $\#\{A\}$ indica o número de vezes em que o evento A ocorre. O método *bootstrap* tem como princípio substituir a distribuição desconhecida F por \hat{F} para estimar θ , aproximando a distribuição de $\theta = s(F)$ pela de $\hat{\theta}^* = s(t^*, \hat{F})$, onde t^* é

uma amostra aleatória de tamanho n retirada de \widehat{F} . A amostra $t^* = (t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*)$ é chamada de amostra *bootstrap* e sua definição é análoga a obter uma amostra aleatória de tamanho n retirada com reposição da população de tamanho n (t_1, \dots, t_n) . A partir da amostra *bootstrap* é calculada uma repetição bootstrap de $\widehat{\theta}$, $\widehat{\theta}^* = s(t^*)$. Repetindo este procedimento um número suficientemente grande de vezes, calcula-se uma distribuição empírica de $\widehat{\theta}^*$ e, a partir desta, obtém-se média, erro-padrão, intervalo de confiança etc. A única suposição feita é a de que as observações (t_1, \dots, t_n) são independentes e identicamente distribuídas.

A variante paramétrica do método *bootstrap* funciona sob a suposição de uma certa distribuição para a população da amostra coletada. A partir desta, são estimados os parâmetros da amostra através de $\widehat{\theta}$. A idéia do bootstrap paramétrico é aproximar a distribuição de θ pela distribuição de $\widehat{\theta}^*$, que são as estimativas dos parâmetros calculadas nas reamostras que, diferentemente da versão não-paramétrica, são geradas através da distribuição suposta por meio das estimativas obtidas. Isto é, as estimativas fazem o papel dos verdadeiros parâmetros para a geração das reamostras. Ao repetir o processo um número suficiente de vezes, pode-se obter a distribuição de $\widehat{\theta}^*$, bem como todas as outras medidas citadas para o caso não-paramétrico.

Todas as situações anteriores são novamente consideradas neste estudo, bem como os mesmos tamanhos amostrais e os mesmos valores paramétricos. A técnica de reamostragem utilizada foi o *bootstrap* não-paramétrico, com 399 reamostras geradas de cada uma das 1000 amostras. Em todas as reamostras de cada amostra, foram calculadas as estimativas de máxima verossimilhança através do algoritmo BFGS. Depois, foi calculada a estimativa *bootstrap* da amostra, dada pela média de todas as estimativas das reamostras. O intervalo de confiança da amostra foi construído através dos percentis 2.5% e 97.5% das mesmas. A probabilidade de cobertura foi calculada da mesma forma que a simulação anterior. Por fim, foram calculadas a média e o desvio-padrão das 1000 estimativas *bootstrap*.

Os passos do algoritmo empregado para a simulação, dado um tamanho amostral n , um número M de reamostras e um número B de replicações, foram os seguintes:

1. Gerar uma amostra de tamanho n de uma distribuição $WeibullRC(\alpha, \beta, \theta)$;
2. Gerar M reamostras a partir da amostra obtida (no estudo, $M = 399$);
3. Para cada reamostra, estimar os parâmetros via máxima verossimilhança;
4. Calcular a estimativa *bootstrap* dos parâmetros através da média das estimativas das reamostras;
5. Construir os intervalos de confiança empíricos dos parâmetros segundo os percentis 2.5% e 97.5% das estimativas das reamostras;
6. Verificar se os intervalos de confiança construídos contém os valores reais dos parâmetros;
7. Repetir os passos 1 a 6 um número B de vezes ($B = 1000$);
8. Calcular a média e o desvio-padrão das B estimativas *bootstrap* de α , β e θ ;
9. Calcular a proporção de vezes em que os intervalos de confiança construídos abrangeram os valores reais dos parâmetros, para obter a probabilidade de cobertura.

3.4.2 Resultados e Discussão

Os resultados da simulação *bootstrap* podem ser conferidos no Apêndice B. Os riscos constante e decrescente configuram-se neste estudo como os casos onde o erro-padrão de θ é o mais acentuado para amostras pequenas e moderadas, assim como a estimativa do parâmetro em questão, mostrando-se muito maior que o parâmetro real. Para os riscos crescente e unimodal, o erro-padrão das estimativas em geral é ligeiramente menor para os casos de dados completos. Com 5% de censuras, o erro-padrão de θ para o caso de risco crescente aumenta muito para $n = 10$, mas logo decresce para tamanhos amostrais maiores.

Ao comparar os casos completo e censurado, tanto o vício como o erro-padrão de θ sofrem um aumento explosivo para os riscos constante e decrescente

em amostras pequenas e moderadas. Em amostras grandes ($n = 300$), os resultados obtidos são muito similares aos assintóticos, inclusive quanto ao vício de estimação e à probabilidade de cobertura.

A extensão do modelo com uma covariável mostra que o estimador de η_0 sofreu dos mesmos problemas até aqui apresentados para θ - estimativas muito distantes e erro-padrão muito grande para os casos constante e decrescente (para tamanhos amostrais menores que 100), o que poderia indicar uma possível relação entre as propriedades inerentes ao estimador e a localização dos valores reais no espaço paramétrico.

Vale destacar que, de todos os estudos, a situação em que os erros-padrão dos estimadores mostraram-se mais estáveis, no sentido de apresentarem valores relativamente baixos (em comparação às outras situações) mesmo quando a amostra é pequena, foi quando os parâmetros configuraram uma função de risco unimodal.

3.5 Considerações Sobre o Risco em Forma de Banheira

O caso de risco em forma de banheira merece atenção especial. Todas as amostras geradas por um conjunto de parâmetros que cause esta circunstância ($\alpha > 1$, $\alpha\beta \leq 1$) possuem uma quantidade considerável de elementos computacionalmente iguais a zero, (isto é, extremamente próximos de zero, de tal forma que ultrapassa a precisão do computador), impossibilitando a estimação dos parâmetros do modelo estudado. Eventuais correções na amostra considerada, e até no mecanismo de geração, são capazes de eliminar os “zeros” da amostra. Em contrapartida, as estimativas dos parâmetros tornam-se viciadas e, por conseqüência, a probabilidade de cobertura é assintoticamente muito baixa.

Uma explicação para isso pode ser mostrada através da função de distribuição acumulada da família Weibull de razão de chances, quando os parâmetros de forma assumem valores que resultam em risco em forma de banheira

(Figura 3.1). Apesar de ser uma distribuição contínua, existe um ponto de “salto”, o que faz com que a geração dos valores seja comprometida. Correções no mecanismo de geração podem se mostrar extremamente trabalhosos, visto que o salto muda para cada conjunto de parâmetros e, mesmo para uma situação específica, o vício de estimativa causado por uma correção desse tipo pode ser muito acentuado.

Por exemplo, para o conjunto de parâmetros especificado ($\alpha = 8, \beta = 0.01$ e $\theta = 45$), foi calculado que o salto localiza-se em $t = 0.4559479771$; qualquer valor de t menor que este resulta em $F(t) = 0$. Uma mudança de 1 unidade na última casa decimal causa um salto na função de distribuição acumulada maior que 0.4; mais especificamente, $F(t) \geq 0.4109$, $t \geq 0.4559479772$. Em termos computacionais, a geração pelo método da inversa através de (2.7) irá resultar em um valor igual a zero caso $u < 0.4109$, fazendo com que qualquer amostra gerada por este conjunto paramétrico apresente cerca de 41% de zeros.

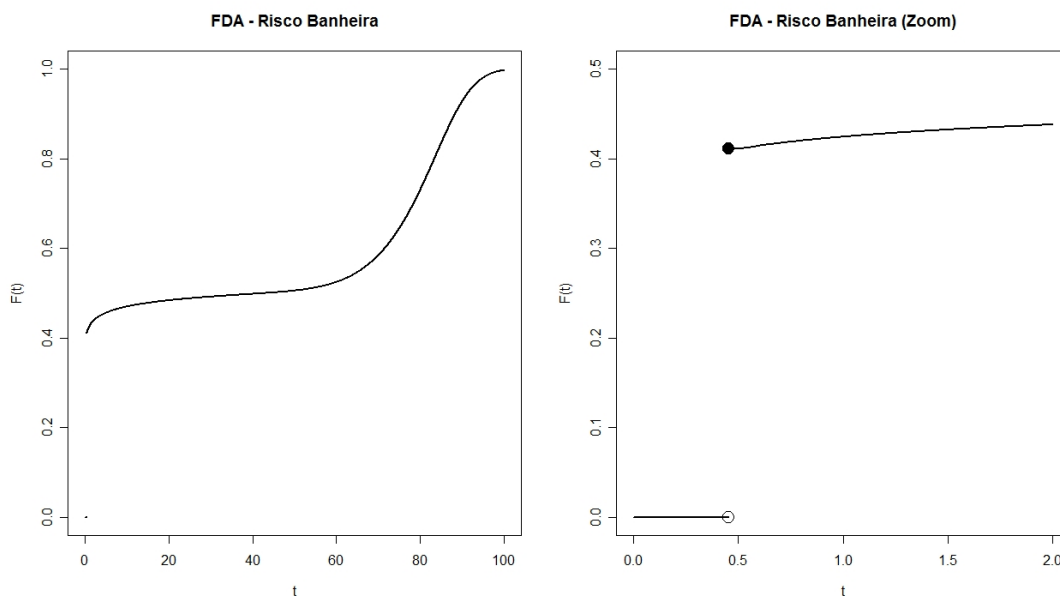


FIGURA 3.1: Função de distribuição acumulada da família Weibull de razão de chances quando $\alpha = 8, \beta = 0.01$ e $\theta = 45$ (esquerda), e *zoom* no ponto de salto (direita)

3.6 Considerações Finais

Os estudos de simulação considerados mostraram-se extremamente relevantes no sentido de apontar como as propriedades dos estimadores são comprometidas de acordo com a situação estudada. Além disso, deve-se reiterar que mais estudos serão necessários para compreendermos melhor o fenômeno apresentado quando temos conjuntos de dados com risco em forma de banheira.

Estudos de simulação, mesmo com computadores potentes, podem consumir muito tempo. Em especial, as simulações *bootstrap* apresentaram um alto custo computacional e, por vezes, gerou reamostras onde o processo de maximização não apresentava convergência após 100 iterações. Neste caso, uma nova reamostra era gerada no lugar. A proporção de reamostras rejeitadas nesse processo variou de 0% a 4%.

Mais impactante que o tamanho amostral, a localização do verdadeiro valor dos parâmetros no espaço paramétrico mostrou influenciar o processo de estimação, causando erros-padrão altos. Nesse sentido, um procedimento alternativo de estimação, como descrito no Capítulo seguinte, poderia levar a melhores resultados.

Capítulo 4

Inferência Bayesiana

4.1 Introdução

O Capítulo anterior abordou a família Weibull de razão de chances sob o ponto de vista freqüentista, conduzindo um estudo de simulação onde os resultados finais evidenciaram um desempenho pouco satisfatório para amostras pequenas e moderadas, no que se refere principalmente ao erro-padrão do estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ e à probabilidade de cobertura de amostras censuradas. Neste contexto, a metodologia de inferência Bayesiana para o modelo em estudo poderia ser considerada.

A inferência Bayesiana é realizada ao combinar uma informação *a priori* sobre os parâmetros do modelo (traduzida em uma distribuição de probabilidade) e a informação amostral (x) naquilo que é conhecido como distribuição *a posteriori* dos parâmetros dado x , de onde todas as decisões e inferências são feitas (Berger, 1985). Aplicações bem-sucedidas da inferência Bayesiana têm surgido nos mais variados campos, incluindo negócios, ciências computacionais, economia, pesquisa educacional, ciências ambientais, epidemiologia, genética e outras. Além disso, a implementação de métodos computacionais aliados a computadores cada vez mais rápidos tornaram possível a implementação de modelo Bayesianos mais sofisticados em grandes conjuntos de dados.

Com o crescimento da utilização da metodologia Bayesiana, é natural

que surjam comparações com a inferência baseada nos princípios frequentistas. Mossman & Berger (2001), Bayarri & Berger (2004) e Berger (2006) mostram aplicações que verificam propriedades clássicas para os métodos Bayesianos empregados (por exemplo, probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade) e que existem casos onde a inferência Bayesiana apresenta uma performance superior, mesmo com a utilização de prioris não-informativas. O último artigo citado ainda discute uma possível unificação das teorias clássica e Bayesiana (objetiva) sob um ponto de vista filosófico.

A partir deste ponto, metodologias Bayesianas de estimação serão sugeridas para que possam ser aplicadas ao problema em estudo. Referências no assunto podem ser encontradas em inúmeros textos, dentre os quais podem ser citados Berger (1985) e Gelman *et al.* (2004). O procedimento de estimação é detalhado, com destaque para a determinação das *prioris* e o algoritmo de geração da *posteriori*, terminando em uma metodologia sugerida de estimação.

4.2 Procedimentos Bayesianos de Estimação

Primeiramente, faz-se necessário entender um pouco sobre o paradigma Bayesiano. Sob o contexto clássico, a inferência é realizada através da função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}; t)$, que indica a plausibilidade do vetor paramétrico através da amostra coletada (ou seja, é uma função de $\boldsymbol{\theta}$ condicionada a t). A partir desta, são estimados os parâmetros de forma a maximizar a função de verossimilhança, isto é, de maneira a tornar a amostra coletada a mais provável dentre todas as possíveis amostras.

A inferência Bayesiana incorpora na verossimilhança uma função dos parâmetros $\pi(\boldsymbol{\theta})$ que expressa a informação anterior ou externa à experiência a ser realizada, geralmente dada por um especialista, ou apenas um conhecimento comum acerca dos parâmetros. Tais informações, traduzidas em distribuições de probabilidade para os parâmetros do modelo em questão, formam aquilo que se conhece por distribuição *a priori* dos parâmetros, e são independentes dos dados.

Ao combinar a informação relativa aos dados e o conhecimento inerente

aos parâmetros do modelo, formula-se a distribuição *a posteriori*

$$\pi(\boldsymbol{\theta}; t) \propto L(\boldsymbol{\theta}; t)\pi(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.1)$$

cuja constante de proporcionalidade, que não depende de $\boldsymbol{\theta}$, é dada por

$$\pi(t) = \int_{\Theta} L(\boldsymbol{\theta}; t)\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}, \quad (4.2)$$

onde Θ denota o espaço paramétrico de $\boldsymbol{\theta}$.

A fórmula (4.1) é chamada de núcleo da distribuição *a posteriori*, enquanto que (4.2) responde pela distribuição preditiva de t . A distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ dado t é obtida ao dividir essas quantias,

$$\pi(\boldsymbol{\theta}; t) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}; t)\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Theta} L(\boldsymbol{\theta}; t)\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.3)$$

Pode-se dizer que a distribuição *a posteriori* $\pi(\boldsymbol{\theta}; t)$ é a descrição completa do conhecimento que se tem sobre $\boldsymbol{\theta}$, obtido através da informação *a priori* $\pi(\boldsymbol{\theta})$ e da informação amostral $L(\boldsymbol{\theta}; t)$. Paulino *et al.* (2003) fornece explicações bastante didáticas sobre os conceitos básicos da metodologia Bayesiana.

O parâmetro de interesse $\boldsymbol{\theta}$ é estimado através de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, que representam os pontos “mais prováveis” segundo sua distribuição *a posteriori*. As estimativas mais utilizadas neste contexto são a moda *a posteriori* (também conhecida como estimador de máxima verossimilhança generalizado), a média *a posteriori* e a mediana *a posteriori* dados, respectivamente, por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \longrightarrow \pi(\hat{\boldsymbol{\theta}}; t) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \pi(\boldsymbol{\theta}; t); \quad (4.4)$$

$$E[\boldsymbol{\theta}; t] = \int_{\Theta} \boldsymbol{\theta} \pi(\boldsymbol{\theta}; t)d\boldsymbol{\theta}; \quad (4.5)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} \longrightarrow P_{\boldsymbol{\theta}|t}[\boldsymbol{\theta} \geq \tilde{\boldsymbol{\theta}}] \geq 1/2 \quad \text{e} \quad P_{\boldsymbol{\theta}|t}[\boldsymbol{\theta} \leq \tilde{\boldsymbol{\theta}}] \geq 1/2. \quad (4.6)$$

Uma medida de $\pi(\boldsymbol{\theta}; t)$ mais informativa que uma estimativa pontual é obtida de uma região de Θ que contenha uma parte substancial da massa probabilística *a posteriori*. Formalmente, $C(t)$ é uma região de credibilidade de $100(1 - \alpha)\%$ para $\boldsymbol{\theta}$ se

$$P_{\theta|t}[\boldsymbol{\theta} \in C(t)] \equiv \int_{C(t)} \pi(\boldsymbol{\theta}; t) d\theta \geq 1 - \alpha. \quad (4.7)$$

A interpretação desta região de credibilidade é que $\boldsymbol{\theta}$ pertence à mesma com probabilidade $1 - \alpha$.

Embora o processo de estimação Bayesiano até agora mostrado pareça demasiadamente trabalhoso (especialmente quando a distribuição *a posteriori* não possui forma funcional conhecida), inferências sólidas sobre um certo modelo podem ser obtidas através de métodos computacionais facilmente implementáveis, baseados em Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC). O objetivo é aproximar uma distribuição conhecida à *posteriori*, gerar valores desta distribuição, e corrigi-los para que melhor se aproximem da distribuição *a posteriori*. Um dos algoritmos mais utilizados é o de Metropolis-Hastings (1970), cujos detalhes podem ser conferidos mais adiante.

4.2.1 Determinação das *Prioris*

Como visto, um elemento fundamental do paradigma Bayesiano é a informação *a priori* a respeito de $\boldsymbol{\theta}$. Uma probabilidade subjetiva é uma medida de um grau de crença pessoal que pode variar de indivíduo para indivíduo. Em oposição, o conceito lógico de probabilidade, ao representar uma medida de um grau de implicação de uma proposição pela informação disponível, traduz assim um grau de crença objetivo, que todo indivíduo racional deve necessariamente possuir (Paulino *et al.*, 2003). Equivalentemente, pode-se definir uma *priori* objetiva como não-informativa, aquela que expressa desconhecimento acerca de $\boldsymbol{\theta}$, isto é, objetiva no sentido de que depende apenas dos dados e do modelo.

Traduzir um conhecimento subjetivo em uma distribuição de probabilidade pode se mostrar uma tarefa árdua e deve ser feita com cautela. Um exemplo

de *priori* subjetiva é a *power prior* (Chen *et al.*, 2000), que utiliza dados históricos em sua construção. Para *prioris* objetivas, várias técnicas estão disponíveis para construí-las, dentre eles, o Método de Bayes-Laplace, Máxima Entropia, a *priori* de Jeffreys (Jeffreys, 1961) e a *priori* de referência (Berger & Bernardo, 1989).

Um dos métodos computacionais mais conhecidos para a obtenção de distribuições a *posteriori* é o algoritmo de Metropolis-Hastings, descrito no Apêndice D.

4.3 Estimação Bayesiana para a Família Weibull de Razão de Chances

Nesta seção, será mostrado um algoritmo descrevendo um procedimento de estimação Bayesiano aplicado à família Weibull de razão de chances. É de extrema importância ressaltar que nenhum procedimento de estimação pode ser tratado como único, haja em vista a quantidade de *prioris* possíveis de serem escolhidas ou os métodos de estimação e simulação disponíveis. O algoritmo irá tratar da extensão do modelo proposta neste trabalho, isto é, considerando a presença de k covariáveis no parâmetro de escala.

Partindo da função de verossimilhança $L(\alpha, \beta, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k; t, \mathbf{x})$, pode-se proceder da seguinte maneira:

1. Definir uma *priori* conjunta para $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$. Uma possível recomendação é a *priori* de Jeffreys (1961), devido à sua obtenção através de métodos numéricos;
2. Encontrar o núcleo da distribuição a *posteriori* $\pi(\alpha, \beta, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k; t, x)$, multiplicando a *priori* pela verossimilhança. Não é necessário encontrar o fator normalizador (a distribuição preditiva de t e x);
3. Implementar o algoritmo Metropolis-Hastings para gerar valores da distribuição a *posteriori* $\pi(\alpha, \beta, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k; t, x)$ através do seu núcleo calculado. Os fatores de normalização se cancelam na probabilidade de rejeição

- daí a não-necessidade de calculá-los;
- 4. Com a amostra aleatória de $(\alpha, \beta, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$ em mãos, encontrar a moda, a média, a mediana e o desvio-padrão de cada parâmetro, marginalmente.
- 5. Construir intervalos de credibilidade para cada parâmetro, empiricamente (isto é, através dos quantis). Uma outra abordagem desta questão é dada através de intervalos HPD - *Highest Posterior Density* (Joseph *et al.*, 1995).

4.4 Considerações Finais

Tanto a escolha das prioris como o refinamento do algoritmo Metropolis-Hastings são cruciais para a análise Bayesiana. Diversos textos na literatura mostram que a função geradora de candidatos do algoritmo pode influenciar toda a análise e é comum que a escolha da mesma seja equivocada ou mesmo algo difícil de ser feito. Gilks *et al.* (1995) apresentam um algoritmo Metropolis adaptativo, enquanto que Tierney & Mira (1999) descrevem uma metodologia multi-estágio para a geração de candidatos.

Apesar da metodologia descrita mostrar-se de fácil aplicação, sua eficácia deve ser comprovada através de situações reais. Propriedades freqüentistas dos estimadores e intervalos de credibilidade podem ser verificados através de estudos de simulação. Os exemplos do Capítulo 5 comparam as metodologias clássica e Bayesiana de estimação.

Capítulo 5

Aplicações

5.1 Introdução

Até agora, foram apresentadas as metodologias clássica e Bayesiana de estimação dos parâmetros da família Weibull de razão de chances. Agora, quatro estudos de caso reais serão analisados com as técnicas descritas para que se possa ter uma idéia da performance do modelo em situações reais. O processo de inferência sobre o modelo é feito sob o ponto de vista clássico assintótico via estimativas de máxima verossimilhança calculadas sobre a amostra original, clássico *bootstrap* por estimativas de máxima verossimilhança obtidas sobre as reamostras da amostra original, e Bayesiano através do algoritmo de Metropolis-Hastings e utilizando a priori de Jeffreys (1961). Os resultados obtidos são comparados e, ainda, o ajuste clássico (assintótico) através do modelo Weibull de razão de chances é comparado com os submodelos Weibull e exponencial através da estatística de razão de verossimilhança e de critérios de informação (AIC, BIC).

O primeiro exemplo é um banco de dados sobre ratos, que possui forma de risco crescente. O segundo exemplo mostrado lida com uma forma de risco unimodal e a presença de censuras. O terceiro exemplo constitui em um estudo pioneiro da taxa de mortalidade humana, apresentando uma função de risco em forma de banheira. Finalmente, o quarto exemplo trata de um problema de alta

dimensionalidade (isto é, muitas covariáveis), para que se possa ter uma idéia da flexibilidade da extensão da família Weibull de razão de chances. Os bancos de dados estão disponíveis no Apêndice C.

5.2 Exemplo 1 - Kimball (1961)

O conjunto de dados analisado neste exemplo apresenta 208 observações que representam a idade até o falecimento (em semanas) de ratos expostos à radiação gama. Cooray (2006) também analisou este conjunto de dados, o que permite fazer um comparativo entre os resultados obtidos. Através do gráfico TTT construído (Figura 5.1), pode-se perceber que os dados possuem uma forma de risco crescente pela forma côncava da figura obtida. Desse modo, é possível ter uma idéia das estimativas iniciais para o processo de maximização da verossimilhança ($\alpha > 1, \alpha\beta > 1$).

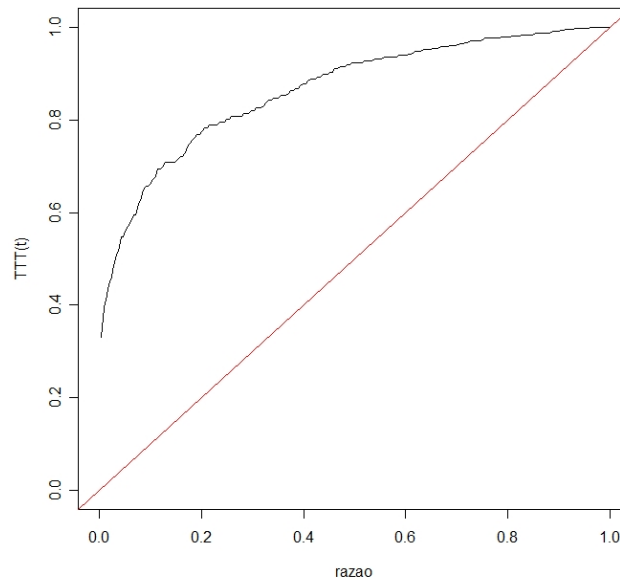


FIGURA 5.1: Gráfico TTT dos dados de mortalidade de ratos

A Tabela 5.1 mostra os resultados da análise realizada através das três metodologias distintas discutidas até aqui. Embora os resultados assintóticos obtidos corroborem com os de Cooray (2006), logo se nota uma leve superioridade obtida pela metodologia *bootstrap*, que gerou intervalos menores. Apesar de ter

apresentado erros-padrão muito maiores no estudo de simulação do Capítulo 3, vale lembrar que a amostra é razoavelmente grande, o que faz com que as metodologias assintótica e *bootstrap* se equiparem.

O processo de estimação Bayesiano apresentou uma performance que ficou entre o *bootstrap* e o assintótico para α e β , produzindo amplitudes intervalares intermediárias para os mesmos. Ao observar θ , porém, o que se vê é uma redução drástica no erro-padrão do estimador (e por conseqüência, da amplitude do intervalo) quando é feita a análise sob o enfoque Bayesiano.

As estimativas pontuais dos três métodos mostraram-se bastante similares, gerando formas de densidade e risco que se sobrepõem. O risco estimado pelas três metodologias é ilustrado pela Figura 5.2.

TABELA 5.1: Inferência para os dados de mortalidade de ratos

Parâmetros	Metodologia	Estimativas	Intervalos	Amplitudes
α	Assintótica	6.228	(4.596, 7.860)	3.264
	<i>Bootstrap</i>	6.306	(5.081, 7.593)	2.513
	Bayesiana	6.104	(4.691, 7.504)	2.813
β	Assintótica	0.749	(0.510, 0.989)	0.478
	<i>Bootstrap</i>	0.752	(0.574, 1.006)	0.432
	Bayesiana	0.779	(0.582, 1.038)	0.456
θ	Assintótica	131.45	(127.621, 135.279)	7.658
	<i>Bootstrap</i>	131.538	(127.599, 135.010)	7.411
	Bayesiana	131.449	(131.361, 131.534)	0.174

A Tabela 5.2 ilustra uma comparação entre o ajuste do modelo Weibull de razão de chances e seus casos particulares, isto é, Weibull e exponencial, para o banco de dados de mortalidade de ratos. Enquanto o submodelo exponencial configura-se como uma alternativa pouco viável, o submodelo Weibull praticamente equivale-se à sua generalização em termos de parcimônia. Como uma confirmação, o teste da razão de verossimilhança também aponta para a adequabilidade do submodelo Weibull para o ajuste dos dados considerados.

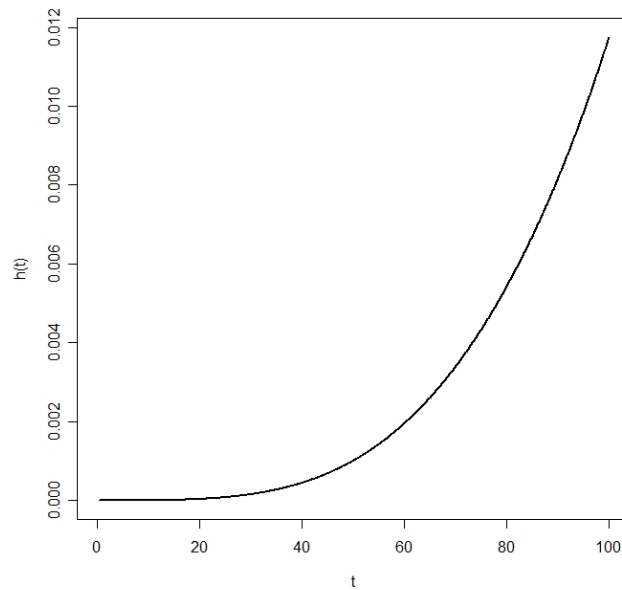


FIGURA 5.2: Risco estimado para os dados de mortalidade dos ratos

TABELA 5.2: Comparação entre modelos para os dados de mortalidade de ratos

Estatística	Weibull RC	Weibull	Exponencial
$\hat{\alpha}$ ($dp(\hat{\alpha})$)	6.228 (0.833)	4.952 (0.274)	–
$\hat{\beta}$ ($dp(\hat{\beta})$)	0.749 (0.122)	–	–
$\hat{\theta}$ ($dp(\hat{\theta})$)	131.450 (1.954)	132.296 (1.947)	121.245 (8.407)
$-2 \ln L$	1977.788	1980.408	2411.891
Λ (p-valor)	–	2.620 (0.270)	434.103 (0.000)
AIC	1983.788	1984.408	2413.891
BIC	1993.801	1991.083	2417.229

5.3 Exemplo 2 - Efron (1988)

O conjunto de dados a ser analisado é formado pelos tempos de sobrevivência de 51 pacientes de câncer de cabeça e pescoço submetidos a um estudo clínico. Este é o primeiro dos dois grupos abordados por Efron, cujos pacientes foram tratados com radioterapia (o segundo grupo foi tratado com radioterapia e quimioterapia). Nove pacientes foram perdidos no meio do estudo, fazendo com que seus tempos de sobrevivência ficassem censurados.

Este conjunto de dados também foi abordado por Mudholkar *et al.* (1996) e Barriga *et al.* (2008) utilizando, respectivamente, o modelo Weibull exponenciado e o modelo IDUB. A Figura 5.3 mostra um padrão um pouco menos comportado do gráfico TTT, mas a concavidade seguida da convexidade sugere o ajuste de uma função de risco unimodal ($\alpha < 1, \alpha\beta > 1$).

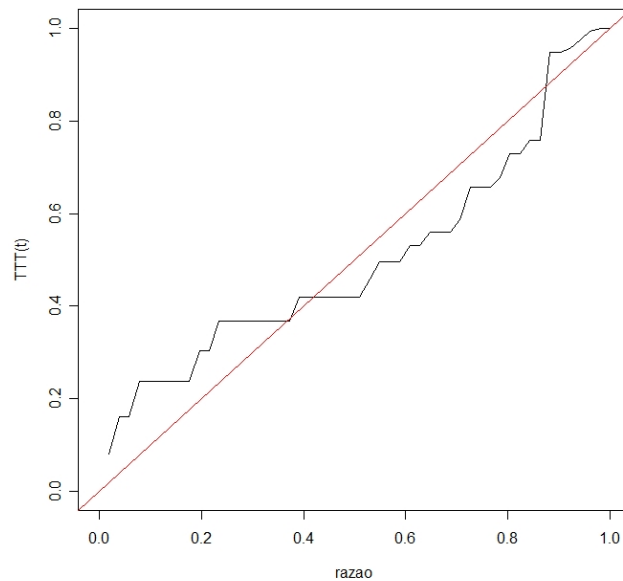


FIGURA 5.3: Gráfico TTT dos dados de câncer de cabeça e pescoço

A Tabela 5.3 exibe os resultados obtidos com as três metodologias a serem comparadas e, logo de início, percebe-se que a metodologia assintótica, desta vez, produziu comprimentos intervalares menores que o caso *bootstrap*, novamente confirmando os resultados obtidos pelo estudo de simulação: o erro-padrão assintótico é menor que o *bootstrap* para amostras moderadas. As estimativas pontuais desses dois métodos são ligeiramente diferentes desta vez. A Figura 5.4 mostra as funções de risco estimadas para as metodologias assintóticas, *bootstrap* e Bayesiana.

A metodologia Bayesiana produziu os intervalos mais concentrados para os três parâmetros, com destaque para θ , cuja estimativa mostra um erro-padrão extremamente baixo. As estimativas pontuais Bayesianas assemelham-se às assintóticas.

Barriga *et al.* (2008) comparou os ajustes dos modelos IDUB e Weibull exponenciado através do AIC (critério de informação de Akaike), cujos valores

mostraram-se iguais a 311.46 e 311.61 respectivamente. O AIC avaliado para a modelagem com a família Weibull de razão de chances resultou em 300.524, favorecendo-o para o ajuste deste específico banco de dados. A Tabela 5.4 mostra que a família Weibull de razão de chances também apresenta uma adequabilidade maior que seus submodelos Weibull e exponencial, tanto em termos de AIC quanto de BIC (critério de informação Bayesiano).

TABELA 5.3: Inferência para os dados de câncer de cabeça e pescoço

Parâmetros	Metodologia	Estimativas	Intervalos	Amplitudes
α	Assintótica	-0.891	(-1.502, -0.280)	1.222
	Bootstrap	-1.156	(-2.353, -0.355)	1.997
	Bayesiana	-0.905	(-1.297, -0.604)	0.693
β	Assintótica	-1.306	(-2.377, -0.235)	2.142
	Bootstrap	-1.464	(-4.214, -0.486)	3.729
	Bayesiana	-1.323	(-1.883, -0.840)	1.043
θ	Assintótica	5.381	(3.451, 7.311)	3.86
	Bootstrap	5.108	(2.636, 7.298)	4.662
	Bayesiana	5.384	(5.208, 5.563)	0.355

TABELA 5.4: Comparação entre modelos para os dados de câncer de cabeça e pescoço

Estatística	Weibull RC	Weibull	Exponencial
$\hat{\alpha}$ ($dp(\hat{\alpha})$)	-0.891 (0.312)	0.999 (0.116)	–
$\hat{\beta}$ ($dp(\hat{\beta})$)	-1.306 (0.546)	–	–
$\hat{\theta}$ ($dp(\hat{\theta})$)	5.381 (0.985)	14.591 (2.339)	14.950 (2.307)
$-2 \ln L$	294.524	311.209	311.209
Λ (p-valor)	–	16.685 (0.000)	16.685 (0.000)
AIC	300.524	315.209	313.209
BIC	306.319	319.073	315.141

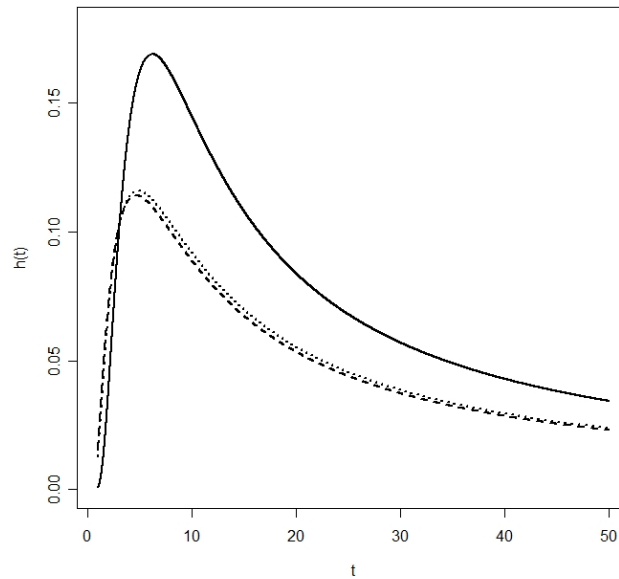


FIGURA 5.4: Risco estimado pelas metodologias assintótica (traços), *bootstrap* (sólido) e Bayesiana (pontos) para os dados de câncer de cabeça e pescoço

5.4 Exemplo 3 - Halley (1693)

Os dados abordados por Halley (1693) em seu estudo filosófico sobre a mortalidade da raça humana consiste no acompanhamento de uma amostra de 1000 pessoas da cidade de Wroclaw, capital da região da Silésia (região histórica dividida entre a Polônia, a República Checa e a Alemanha), outrora conhecida como Breslau. A variável aqui observada é o número de anos até a morte de cada pessoa. Como mostra a Figura 5.5, um gráfico convexo e depois côncavo indica o ajuste de uma função de risco em forma de banheira.

Através da Tabela 5.5, observa-se que a metodologia *bootstrap* novamente produziu os menores intervalos em comparação com a assintótica, como no caso de risco crescente. Embora não haja como estabelecer uma comparação mais detalhada devido a ausência do estudo de simulação para dados com função de risco banheira, o exemplo dado fornece, além de certa noção do comportamento das propriedades das estimativas obtidas, uma indicação de que o modelo pode ser adequado para ajustes de dados nesta categoria.

O processo Bayesiano de estimação forneceu intervalos com amplitudes

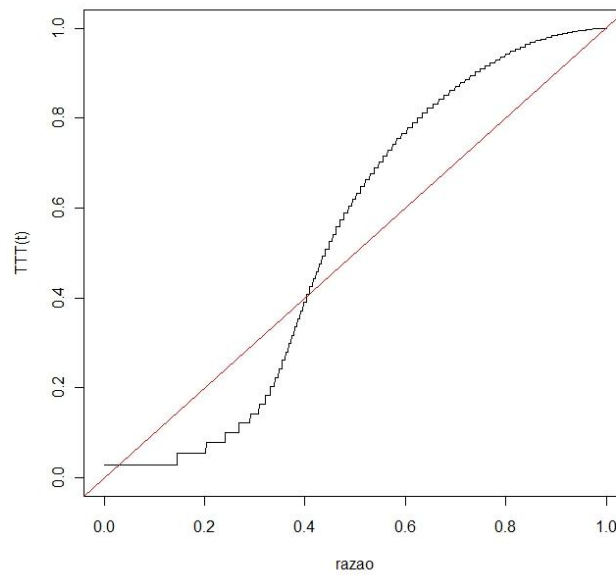


FIGURA 5.5: Gráfico TTT dos dados de mortalidade de Wrocław

inferiores aos métodos clássicos para os três parâmetros. Além do intervalo super concentrado de θ , também é importante apontar para a amplitude intervalar de α . Tal como no Exemplo 2 (função de risco unimodal), a amplitude de α corresponde a metade do valor dos seus paralelos clássicos.

Como observado no Exemplo 1, novamente as estimativas pontuais dos três métodos são muito parecidas. O risco em forma de banheira correspondente aos dados em estudo, estimado pelas metodologias consideradas, é mostrado pela Figura 5.6.

Os resultados observados na Tabela 5.6 servem para ilustrar a utilidade do modelo Weibull de razão de chances sobre seus casos particulares para este específico banco de dados. Como os modelos exponencial e Weibull não são adequados para ajustes de dados com função de risco em forma de banheira, já era de se esperar que o modelo proposto mostrasse superioridade, confirmada através do teste da razão de verossimilhança e dos critérios de informação considerados.

TABELA 5.5: Inferência para os dados de mortalidade de Wroclaw

Parâmetros	Metodologia	Estimativas	Intervalos	Amplitudes
α	Assintótica	3.688	(3.297, 4.079)	0.782
	Bootstrap	3.702	(3.391, 4.074)	0.682
	Bayesiana	3.681	(3.484, 3.841)	0.356
β	Assintótica	0.182	(0.159, 0.204)	0.045
	Bootstrap	0.181	(0.163, 0.201)	0.039
	Bayesiana	0.183	(0.164, 0.202)	0.037
θ	Assintótica	36.479	(34.406, 38.551)	4.145
	Bootstrap	36.565	(34.589, 38.557)	3.968
	Bayesiana	36.479	(36.469, 36.488)	0.019

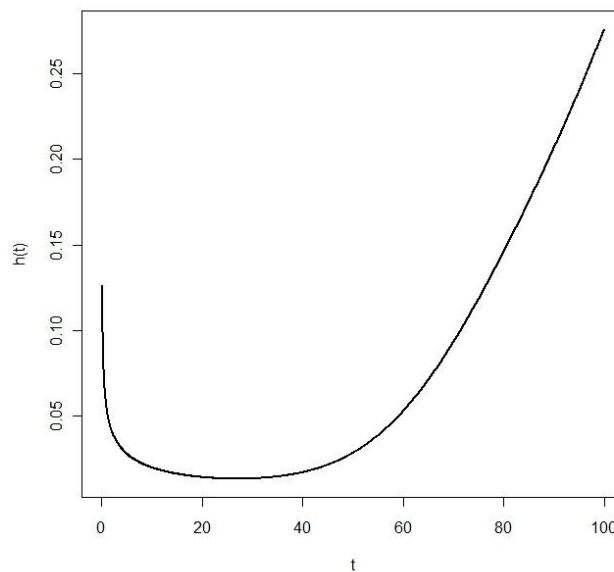


FIGURA 5.6: Risco estimado para os dados de mortalidade de Wroclaw

5.5 Exemplo 4 - Prentice (1973)

O quarto exemplo aborda o conjunto de dados discutido em Prentice (1973) e, mais tarde, em Lawless (1982). Trata-se dos tempos de vida de 40 pacientes com câncer de pulmão, onde o propósito do estudo era comparar o efeito de dois tipos de quimioterapia com o intuito de prolongar o tempo de vida. Para isso, os pacientes foram separados em grupos tratamento e teste. Um certo

TABELA 5.6: Comparação entre modelos para os dados de mortalidade de Wrocław

Estatística	Weibull RC	Weibull	Exponencial
$\hat{\alpha}$ ($dp(\hat{\alpha})$)	3.688 (0.199)	0.891 (0.024)	–
$\hat{\beta}$ ($dp(\hat{\beta})$)	0.182 (0.011)	–	–
$\hat{\theta}$ ($dp(\hat{\theta})$)	36.479 (1.057)	32.354 (1.203)	33.896 (1.072)
$-2 \ln L$	8509.549	9027.825	9046.594
Λ (p-valor)	–	518.276 (0.000)	537.045 (0.000)
AIC	8515.549	9031.825	9048.594
BIC	8530.272	9041.641	9053.502

número de variáveis concomitantes que poderiam ter potencial importância ao relacionarem-se com os tempos de vida também foram consideradas na análise, como os diferentes tipos de tumor e o grupo do paciente. Ao todo, sete covariáveis foram analisadas:

- $X1$: nota para o status do paciente (0-100)
- $X2$: idade (anos)
- $X3$: tempo desde o diagnóstico até a entrada no estudo (meses)
- $X4$: 1 se tipo de tumor escamoso, 0 caso contrário
- $X5$: 1 se tipo de tumor pequeno, 0 caso contrário
- $X6$: 1 se tipo de tumor adeno, 0 caso contrário
- $X7$: 1 se tratamento teste, 0 caso contrário

Os resultados da análise deste conjunto de dados são mostrados pela Tabela 5.7. Novamente, o erro-padrão produzido pelas estimativas *bootstrap* é maior que os das estimativas assintóticas ($n = 40$). Certos parâmetros ainda mostram grande discrepância entre os métodos clássicos de estimação quanto às estimativas pontuais, como os parâmetros de forma α e β . Assim como

nos exemplos anteriores, destacam-se as amplitudes extremamente baixas dos intervalos de credibilidade obtidos com a análise Bayesiana.

Apesar de ser tentador afirmar que os métodos Bayesiano sobressaem-se em comparação aos clássicos, é importante atentar-se para o fato de que um intervalo muito concentrado pode apresentar baixa probabilidade de cobertura, mesmo que nominalmente seja um intervalo de 95% de credibilidade. Entretanto, seria preciso um estudo mais detalhado do problema para que uma afirmação desse porte possa ser confirmada.

Através da Tabela 5.8, tanto os submodelos Weibull quanto exponencial mostram-se escolhas adequadas para o ajuste dos dados de câncer de pulmão, com maior vantagem para o segundo devido à maior simplicidade do mesmo sobre suas generalizações.

5.6 Considerações Finais

Os quatro exemplos apresentados mostraram resultados que corroboram com o estudo de simulação realizado no Capítulo 3, onde os métodos clássicos mostram-se praticamente equivalentes quando a amostra é consideravelmente grande. Os procedimentos Bayesianos de estimação, nos quatro exemplos, concentraram o parâmetro de escala de tal forma a destoar fortemente dos outros métodos, produzindo intervalos com comprimentos até 40 vezes menores (caso do primeiro exemplo).

Tal discrepância pode estar relacionada com o método de estimação proposto. Para assegurar a consistência de uma metodologia desse tipo, faz-se necessário um estudo de simulação para verificar propriedades clássicas em intervalos Bayesianos de credibilidade, por exemplo. Um erro-padrão muito pequeno poderia ser traduzido em uma cobertura muito baixa dos parâmetros. Como uma pré-análise, o método Bayesiano de estimação proposto apresentou-se adequado no que se refere a convergência das cadeias do algoritmo de Metropolis, que é uma característica importante a ser observada (Figura 5.7). Porém, linhas horizontais nas cadeias indicam rejeições acentuadas do algoritmo, mostrando

que a função geradora poderia ser refinada para melhor traduzir a distribuição.

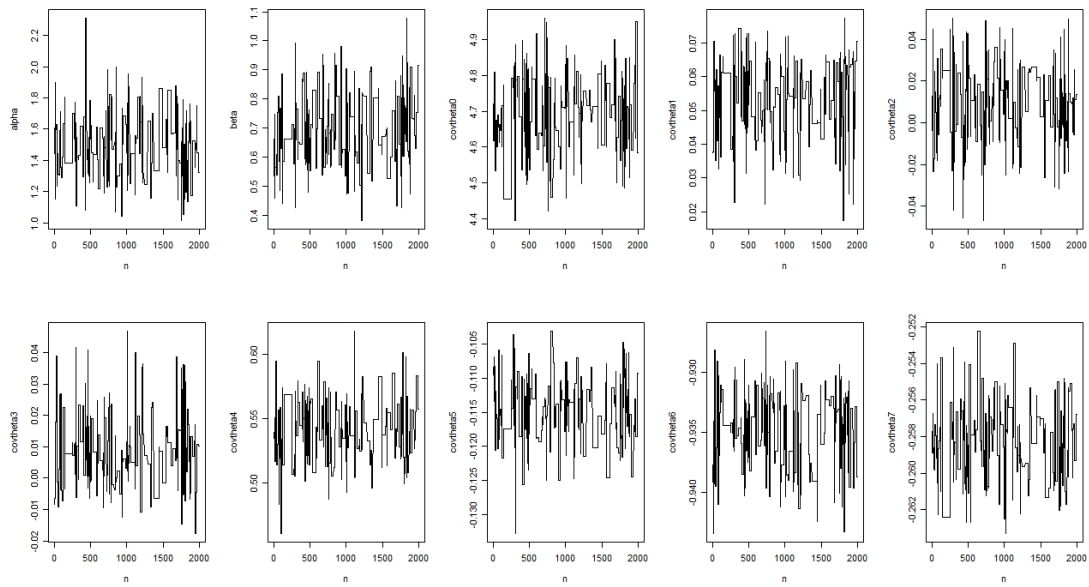


FIGURA 5.7: Cadeias geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings para os dados de câncer de pulmão

TABELA 5.7: Inferência para os dados de câncer de pulmão

Parâmetros	Metodologia	Estimativas	Intervalos	Amplitudes
α	Assintótica	1.563	(0.188, 2.938)	2.75
	Bootstrap	5.865	(0.102, 11.050)	10.948
	Bayesiana	1.501	(1.058, 2.032)	0.974
β	Assintótica	0.689	(-0.045, 1.422)	1.466
	Bootstrap	2.088	(0.076, 14.920)	14.844
	Bayesiana	0.731	(0.495, 0.920)	0.425
γ_0	Assintótica	4.668	(3.888, 5.449)	1.561
	Bootstrap	5.720	(3.731, 8.177)	4.446
	Bayesiana	4.728	(4.329, 4.940)	0.611
γ_1	Assintótica	0.056	(0.034, 0.077)	0.043
	Bootstrap	0.054	(0.014, 0.097)	0.083
	Bayesiana	0.055	(0.033, 0.070)	0.037
γ_2	Assintótica	0.013	(-0.027, 0.052)	0.079
	Bootstrap	0.021	(-0.077, 0.100)	0.177
	Bayesiana	0.010	(-0.030, 0.035)	0.065
γ_3	Assintótica	1.563	(-0.016, 0.027)	0.043
	Bootstrap	5.865	(-0.066, 0.062)	0.128
	Bayesiana	1.501	(-0.013, 0.028)	0.042
γ_4	Assintótica	0.689	(-0.344, 1.421)	1.766
	Bootstrap	2.088	(-1.129, 1.908)	3.036
	Bayesiana	0.731	(0.490, 0.612)	0.122
γ_5	Assintótica	4.668	(-0.860, 0.631)	1.491
	Bootstrap	5.720	(-2.092, 1.995)	4.087
	Bayesiana	4.728	(-0.126, -0.102)	0.023
γ_6	Assintótica	0.056	(-1.839, -0.031)	1.808
	Bootstrap	0.054	(-3.724, 0.415)	4.139
	Bayesiana	0.055	(-0.947, -0.926)	0.021
γ_7	Assintótica	0.013	(-1.010 0.493)	1.503
	Bootstrap	0.021	(-2.692 0.729)	3.421
	Bayesiana	0.010	(-0.265 -0.249)	0.016

TABELA 5.8: Comparação entre modelos para os dados de câncer de pulmão

Estatística	Weibull RC	Weibull	Exponencial
$\hat{\alpha}$ ($dp(\hat{\alpha})$)	1.563 (0.701)	1.146 (0.151)	–
$\hat{\beta}$ ($dp(\hat{\beta})$)	0.689 (0.374)	–	–
$\hat{\gamma}_0$ ($dp(\hat{\gamma}_0)$)	4.668 (0.398)	4.745 (0.358)	4.722 (0.151)
$\hat{\gamma}_1$ ($dp(\hat{\gamma}_1)$)	0.056 (0.011)	0.054 (0.010)	0.054 (0.010)
$\hat{\gamma}_2$ ($dp(\hat{\gamma}_2)$)	0.013 (0.020)	0.010 (0.017)	0.009 (0.010)
$\hat{\gamma}_3$ ($dp(\hat{\gamma}_3)$)	0.006 (0.011)	0.004 (0.010)	0.004 (0.017)
$\hat{\gamma}_4$ ($dp(\hat{\gamma}_4)$)	0.539 (0.450)	0.395 (0.392)	0.359 (0.358)
$\hat{\gamma}_5$ ($dp(\hat{\gamma}_5)$)	-0.115 (0.380)	-0.137 (0.427)	-0.132 (0.392)
$\hat{\gamma}_6$ ($dp(\hat{\gamma}_6)$)	-0.935 (0.461)	-0.885 (0.512)	-0.873 (0.427)
$\hat{\gamma}_7$ ($dp(\hat{\gamma}_7)$)	-0.258 (0.383)	-0.260 (0.342)	-0.272 (0.512)
$-2 \ln L$	406.849	407.265	408.272
Λ (p-valor)	–	0.416 (0.812)	1.423 (0.233)
AIC	426.849	425.265	424.272
BIC	443.738	440.465	437.783

Capítulo 6

Conclusões e Propostas Futuras

O trabalho apresentado teve como objetivo principal a extensão da família Weibull de razão de chances para a abordagem de covariáveis e o estudo das propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança sob o ponto de vista assintótico e via reamostragem. Métodos Bayesianos de estimação também foram mostrados, e todas as metodologias distintas foram comparadas através de exemplos ilustrativos.

Os estudos de simulação mostraram que os estimadores de máxima verossimilhança possuem sua robustez comprometida quando a amostra é pequena, e até para amostras de tamanho moderado, é necessário cautela em determinadas situações, como quando o risco é constante ou decrescente. Nesse sentido, os estimadores apresentaram as melhores propriedades em situação de risco unimodal. Como modelos que ajustam essa forma de risco são mais escassos, a família Weibull de razão de chances mostra-se uma boa alternativa, funcionando com certa robustez até para amostras pequenas e moderadas (a partir de $n = 30$, o erro-padrão de α cai drasticamente).

A presença de censuras afetou os estimadores de maneiras diferentes conforme a situação, mas em todas as vezes contribuíram para que o estimador de θ (ou de γ_0) apresentasse um vício de estimação, o que diminuía a probabilidade de cobertura conforme a amostra aumentava. Embora apenas 5% de censuras tenham sido consideradas, é importante lembrar que censuras aleatórias

configuram o pior caso possível em termos de estimação.

A metodologia Bayesiana de estimação mostrou-se fácil de ser implementada, e os resultados obtidos pelos exemplos através da metodologia apresentada parecem ser adequados.

Ainda há muito a ser feito a respeito da família Weibull de razão de chances. Espera-se que este trabalho possa encorajar pesquisas futuras com o intuito de se ampliar os conhecimentos por este adquiridos. Um estudo cuidadoso sobre o problema do risco em forma de banheira seria um dos principais pontos a serem analisados para que a aplicação do modelo possa ser estendida a uma gama ainda maior de problemas. A presença de uma proporção maior de censuras, bem como estudos de simulação relativos às propriedades freqüentistas dos procedimentos Bayesianos, também são de grande importância.

Referências Bibliográficas

- Aarset, M. V. (1987). How to identify a bathtub hazard rate. *IEEE transactions on reliability*, **36**(1), 106–108.
- Barlow, R. E. & Campo, R. A. (1974). Total time on test processes and applications to failure data analysis. *Reliability and fault tree analysis*, pages 451–481.
- Barriga, G. D. C., Louzada-Neto, F. & Cancho, V. G. (2008). A New Lifetime Distribution. Technical report, DEs, Universidade Federal de São Carlos, Brazil.
- Bayarri, M. J. & Berger, J. O. (2004). The Interplay of Bayesian and Frequentist Analysis. *Statistical Science*, **19**(1), 58–80.
- Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, volume 2 of *Springer Series in Statistics*. Springer-Verlag, New York.
- Berger, J. O. (2006). The case for objective Bayesian analysis. *Bayesian Analysis*, **1**(3), 385–402.
- Berger, J. O. & Bernardo, J. M. (1989). Estimating a Product of Means: Bayesian Analysis with Reference Priors. *Journal of the American Statistical Association*, **84**(405), 200–207.
- Broyden, C. G. (1970). The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, **6**, 76–90.
- Chen, M. H., Ibrahim, J. G. & Shao, Q. M. (2000). Power prior distributions for generalized linear models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **84**(1-2), 121–137.
- Chib, S. & Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, **49**(4), 327–335.
- Colosimo, E. A. & Giolo, S. R. (2006). *Análise de sobrevivência Aplicada*. ABE - Projeto Fisher. Edgard Blücher, São Paulo.
- Cooray, K. (2006). Generalization of the Weibull distribution: the odd Weibull family. *Statistical Modelling*, **6**(3), 265–277.

- Cox, D. R. & Oakes, D. (1984). *Analysis of Survival Data*, volume 21 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. CRC Press, London.
- Davison, A. C. & Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Efron, B. (1988). Logistic Regression, Survival Analysis, and the Kaplan-Meier Curve. *Journal of the American Statistical Association*, **83**(402), 414–425.
- Efron, B. & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, volume 57 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, New York.
- Fletcher, R. (1970). A New Approach to Variable Metric Algorithms. *Computer Journal*, **13**, 317–322.
- Gelman, A. & Rubin, D. B. (1992). Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences. *Statistical Science*, **7**(4), 457–472.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S. & Rubin, D. B. (2004). *Bayesian Data Analysis*, volume 2 of *Texts in Statistical Science*. Chapman & Hall, New York.
- Geman, S. & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions and Bayesian restoration of images. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, 721–741.
- Gilks, W. R., Best, N. G. & Tan, K. K. C. (1995). Adaptive Rejection Metropolis Sampling within Gibbs Sampling. *Applied Statistics*, **44**(4), 455–472.
- Goldfarb, D. (1970). A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means. *Mathematics of Computation*, **24**, 23–26.
- Halley, E. (1693). An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind. *Philosophical Transactions*, **196**, 596–610.
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, **57**, 97–109.
- Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability*. Oxford University Press, New York.
- Jiang, H., Xie, M. & Tang, L. C. (2008). On the Odd Weibull Distribution. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, **222**(4), 583–594.
- Joseph, L., Wolfson, D. B. & Berger, R. D. (1995). Sample Size Calculations for Binomial Proportions via Highest Posterior Density Intervals. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, **44**(2), 143–154.
- Kalbfleisch, J. D. & Prentice, R. L. (2002). *The Statistical Analysis of Failure Data*. John Wiley, New York.
- Kimball, A. W. (1961). Estimation of mortality intensities in animal experiments. *Biometrics*, **16**, 505–521.

- Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, New York.
- Lee, E. T. (1992). *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Louzada-Neto, F. (1999). Polyhazard Models for Lifetime Data. *Biometrics*, **55**(4), 1281–1285.
- Metropolis, M., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. & Teller, E. (1953). Equations of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087–1093.
- Mossman, D. & Berger, J. O. (2001). Intervals for Posttest Probabilities: A Comparison of 5 Methods. *Medical Decision Making*, **21**(6), 498–507.
- Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. & Freimer, M. (1995). The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, **37**(4), 436–445.
- Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. & Kollia, G. D. (1996). A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. *Journal of the American Statistical Association*, **91**, 1575–1583.
- Paulino, C. D., Turkman, M. A. & Murteira, B. (2003). *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Prentice, R. L. (1973). Exponential survival with censoring and explanatory variables. *Biometrika*, **60**, 279–288.
- Rao, C. R. (1973). *Linear statistical inference and its applications*. John Wiley, New York.
- Shanno, D. F. (1970). Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization. *Mathematics of Computation*, **24**, 647–656.
- Stacy, E. W. (1962). A generalization of the gamma distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**(3), 1187–1192.
- Tierney, L. & Mira, A. (1999). Some Adaptive Monte Carlo Methods for Bayesian Inference. *Statistics in Medicine*, **18**(17-18), 2507–2515.

Apêndice A

Resultados Assintóticos

TABELA A.1: Risco Constante (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	2.753	1.009	196.814	2.985	2.021	1496.009	0.763	0.807	0.845
30	1.251	1.196	366.696	0.637	1.581	8183.667	0.890	0.907	0.950
50	1.111	1.125	110.714	0.399	1.083	429.176	0.919	0.938	0.975
100	1.046	1.039	86.446	0.245	0.368	12.854	0.943	0.947	0.955
300	1.025	1.001	85.312	0.139	0.162	5.850	0.943	0.952	0.951

TABELA A.2: Risco Crescente (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	21.118	0.716	86.632	20.492	1.290	6.577	0.787	0.826	0.809
30	10.784	0.742	85.491	4.690	0.499	2.705	0.925	0.941	0.928
50	9.790	0.735	85.297	2.941	0.324	1.946	0.933	0.949	0.943
100	9.402	0.708	85.129	1.872	0.176	1.345	0.940	0.944	0.951
300	9.178	0.697	85.015	1.011	0.097	0.735	0.944	0.937	0.953

TABELA A.3: Risco Decrescente (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	2.022	0.745	286.699	1.864	1.543	4356.674	0.800	0.824	0.821
30	1.072	0.733	94.403	0.437	0.488	72.606	0.925	0.937	0.935
50	0.995	0.718	88.295	0.293	0.314	19.948	0.931	0.943	0.948
100	0.945	0.706	86.709	0.189	0.178	13.647	0.944	0.945	0.948
300	0.913	0.700	85.274	0.097	0.092	7.558	0.958	0.949	0.959

TABELA A.4: Risco Unimodal (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	-16.948	-0.652	84.593	13.360	0.627	4.355	0.901	0.750	0.839
30	-10.604	-0.751	84.666	4.497	0.499	2.601	0.976	0.864	0.942
50	-9.858	-0.710	84.874	2.932	0.247	1.925	0.976	0.909	0.940
100	-9.444	-0.700	84.960	1.796	0.172	1.297	0.964	0.918	0.948
300	-9.104	-0.704	84.987	0.963	0.094	0.773	0.954	0.943	0.942

TABELA A.5: Risco Constante (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	3.090	0.962	175.685	3.194	2.255	1034.800	0.733	0.777	0.817
30	1.267	1.183	202.206	0.752	1.548	2043.237	0.903	0.908	0.945
50	1.117	1.190	122.950	0.436	1.306	432.239	0.913	0.924	0.958
100	1.065	1.034	91.980	0.281	0.363	12.640	0.920	0.932	0.939
300	1.010	1.016	89.981	0.140	0.174	6.373	0.967	0.965	0.886

TABELA A.6: Risco Crescente (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	22.649	0.810	88.429	21.254	2.260	21.061	0.755	0.796	0.783
30	11.155	0.727	85.939	4.904	0.703	4.556	0.922	0.934	0.924
50	10.128	0.757	86.082	3.399	0.975	6.496	0.923	0.942	0.919
100	9.548	0.710	85.712	2.031	0.249	1.459	0.950	0.947	0.916
300	9.251	0.696	85.620	1.075	0.098	0.746	0.950	0.952	0.878

TABELA A.7: Risco Decrescente (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	2.121	0.661	244.294	1.873	1.222	2451.809	0.786	0.827	0.789
30	1.092	0.755	111.210	0.524	0.604	319.412	0.917	0.942	0.912
50	1.005	0.724	96.681	0.318	0.328	22.926	0.928	0.946	0.911
100	0.956	0.707	93.689	0.200	0.192	14.730	0.942	0.951	0.885
300	0.930	0.695	91.873	0.114	0.104	8.338	0.932	0.933	0.855

TABELA A.8: Risco Unimodal (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	-16.470	-0.618	85.111	12.922	0.496	4.647	0.909	0.734	0.864
30	-10.655	-0.723	85.342	4.907	0.495	2.808	0.964	0.838	0.939
50	-9.918	-0.687	85.459	2.964	0.286	1.976	0.968	0.879	0.950
100	-9.211	-0.697	85.551	1.765	0.170	1.396	0.964	0.921	0.945
300	-8.975	-0.688	85.595	1.011	0.100	0.826	0.946	0.918	0.893

TABELA A.9: Risco Constante com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	5.975	0.712	506.177	1.546	4.887	2.392	5854.472	1.455	0.446	0.475	0.556	0.451
30	1.439	1.069	107.799	1.229	0.821	1.309	310.886	0.523	0.826	0.875	0.926	0.859
50	1.186	1.113	108.842	1.171	0.464	1.172	448.951	0.360	0.876	0.894	0.938	0.893
100	1.081	1.011	81.678	1.141	0.269	0.399	18.703	0.233	0.915	0.932	0.954	0.933
300	1.016	1.009	80.432	1.129	0.134	0.163	7.106	0.127	0.948	0.959	0.950	0.948

TABELA A.10: Risco Crescente com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	43.452	0.409	82.360	1.130	30.950	1.120	8.841	0.134	0.421	0.443	0.498	0.426
30	12.318	0.755	80.738	1.129	6.525	1.230	7.201	0.059	0.856	0.877	0.911	0.860
50	10.650	0.687	80.197	1.127	3.612	0.305	2.425	0.046	0.900	0.923	0.920	0.881
100	9.635	0.694	80.072	1.126	1.979	0.178	1.665	0.030	0.930	0.937	0.937	0.938
300	9.171	0.699	79.974	1.125	1.035	0.097	0.937	0.017	0.939	0.936	0.941	0.942

TABELA A.11: Risco Decrescente com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	4.184	0.477	163523.224	2.305	3.125	1.615	5161496.285	6.709	0.460	0.481	0.516	0.444
30	1.260	0.678	96.071	1.327	0.637	0.566	131.626	0.762	0.852	0.898	0.885	0.833
50	1.074	0.678	85.697	1.234	0.365	0.290	25.386	0.512	0.899	0.917	0.925	0.903
100	0.972	0.689	82.541	1.161	0.198	0.174	16.766	0.317	0.926	0.936	0.944	0.926
300	0.919	0.696	80.876	1.128	0.104	0.096	9.549	0.181	0.938	0.938	0.938	0.940

TABELA A.12: Risco Unimodal com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	-34.753	-0.388	78.888	1.136	21.864	0.695	7.227	0.131	0.529	0.374	0.535	0.488
30	-12.391	-0.676	79.811	1.124	6.359	0.496	3.531	0.062	0.955	0.783	0.893	0.831
50	-10.570	-0.704	79.897	1.123	3.404	0.527	2.525	0.045	0.960	0.862	0.927	0.901
100	-9.683	-0.692	79.934	1.127	1.994	0.181	1.673	0.031	0.948	0.901	0.937	0.922
300	-9.176	-0.699	79.972	1.126	1.081	0.103	0.952	0.017	0.941	0.930	0.951	0.945

TABELA A.13: Risco Constante com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	6.633	0.658	11966.066	1.588	4.929	2.497	367055.367	2.844	0.386	0.413	0.514	0.414
30	1.522	1.199	213.035	1.240	0.918	2.034	1467.020	0.553	0.822	0.848	0.911	0.854
50	1.180	1.195	164.547	1.184	0.489	1.437	1273.254	0.375	0.877	0.900	0.940	0.907
100	1.087	1.023	86.370	1.146	0.302	0.414	16.259	0.247	0.909	0.927	0.951	0.932
300	1.030	1.001	85.174	1.126	0.150	0.182	7.713	0.130	0.937	0.946	0.918	0.960

TABELA A.14: Risco Crescente com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	47.411	0.493	83.275	1.139	32.185	1.954	10.030	0.162	0.372	0.408	0.466	0.439
30	13.434	0.729	81.400	1.128	7.646	1.256	6.916	0.061	0.848	0.868	0.876	0.826
50	10.770	0.762	81.358	1.125	3.857	1.068	6.246	0.045	0.893	0.920	0.902	0.903
100	9.815	0.688	80.610	1.126	2.072	0.188	1.703	0.032	0.928	0.948	0.922	0.926
300	9.399	0.687	80.568	1.126	1.108	0.098	0.988	0.019	0.930	0.944	0.887	0.919

TABELA A.15: Risco Decrescente com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	4.546	0.511	11527.814	2.313	3.327	1.901	239113.291	7.382	0.412	0.437	0.480	0.440
30	1.279	0.689	105.014	1.325	0.668	0.670	124.622	0.819	0.857	0.893	0.885	0.837
50	1.075	0.698	92.769	1.232	0.366	0.393	36.243	0.555	0.896	0.920	0.914	0.891
100	0.971	0.691	87.746	1.176	0.201	0.182	18.329	0.314	0.934	0.950	0.922	0.938
300	0.931	0.693	86.736	1.137	0.111	0.101	10.609	0.178	0.944	0.948	0.894	0.942

TABELA A.16: Risco Unimodal com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	-33.656	-0.406	79.595	1.128	21.585	0.719	7.612	0.128	0.552	0.385	0.577	0.511
30	-12.253	-0.674	80.055	1.128	6.037	0.596	3.673	0.063	0.949	0.759	0.898	0.846
50	-10.275	-0.691	80.356	1.127	3.415	0.347	2.668	0.047	0.954	0.840	0.931	0.885
100	-9.580	-0.670	80.577	1.123	1.906	0.172	1.783	0.031	0.963	0.890	0.926	0.922
300	-9.017	-0.685	80.574	1.125	0.985	0.094	0.974	0.017	0.954	0.919	0.915	0.942

Apêndice B

Resultados *Bootstrap*

TABELA B.1: Risco Constante (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	6.018	0.988	1482.227	2.674	0.727	9570.555	0.798	0.904	0.894
30	1.619	1.395	846.973	0.695	1.488	4396.049	0.882	0.933	0.952
50	1.263	1.334	432.638	0.443	0.985	1404.368	0.884	0.920	0.942
100	1.107	1.108	149.969	0.261	0.500	475.523	0.910	0.930	0.947
300	1.031	1.019	85.800	0.130	0.163	5.729	0.934	0.939	0.946

TABELA B.2: Risco Crescente (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	38.578	0.880	88.806	14.841	0.717	5.544	0.836	0.937	0.880
30	13.478	0.933	86.752	5.277	0.874	4.179	0.904	0.943	0.940
50	10.990	0.807	85.792	3.346	0.442	2.396	0.904	0.933	0.947
100	9.813	0.722	85.154	1.924	0.194	1.333	0.928	0.939	0.956
300	9.228	0.708	85.050	0.957	0.094	0.744	0.944	0.937	0.953

TABELA B.3: Risco Decrescente (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	4.067	0.713	387121.346	1.758	0.489	> 1.1E07	0.835	0.931	0.883
30	1.340	0.879	3521.434	0.520	0.839	26703.003	0.904	0.943	0.939
50	1.098	0.788	527.304	0.333	0.396	3677.875	0.904	0.934	0.945
100	0.981	0.723	130.020	0.192	0.197	1025.641	0.927	0.939	0.956
300	0.923	0.708	86.114	0.096	0.094	7.485	0.944	0.937	0.953

TABELA B.4: Risco Unimodal (0% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	-27.219	-0.660	84.021	9.560	0.420	4.216	0.866	0.942	0.862
30	-12.931	-0.788	84.359	4.662	0.398	2.519	0.922	0.953	0.941
50	-10.935	-0.751	84.618	3.127	0.306	1.942	0.922	0.943	0.942
100	-9.761	-0.724	84.832	1.839	0.183	1.326	0.936	0.959	0.950
300	-9.239	-0.708	84.965	1.011	0.096	0.741	0.943	0.946	0.952

TABELA B.5: Risco Constante (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	6.369	1.020	71141.344	2.856	0.933	1379581.664	0.792	0.893	0.882
30	1.713	1.442	2864.804	0.751	1.456	30068.815	0.875	0.921	0.925
50	1.297	1.391	666.942	0.483	1.047	2625.517	0.886	0.923	0.914
100	1.112	1.192	359.507	0.288	0.702	2127.777	0.905	0.924	0.912
300	1.033	1.025	90.644	0.142	0.178	6.546	0.933	0.935	0.873

TABELA B.6: Risco Crescente (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	40.501	0.940	689.303	15.860	1.200	18920.929	0.824	0.932	0.868
30	14.213	0.974	87.868	5.677	0.921	4.929	0.897	0.938	0.914
50	11.353	0.843	86.723	3.673	0.525	3.032	0.896	0.938	0.908
100	9.993	0.728	85.831	2.128	0.221	1.381	0.919	0.931	0.921
300	9.364	0.704	85.675	1.041	0.098	0.759	0.929	0.938	0.864

TABELA B.7: Risco Decrescente (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	4.282	0.740	4022693.491	1.894	0.668	> 7.4E07	0.822	0.928	0.869
30	1.410	0.904	21164.874	0.557	0.814	335823.152	0.898	0.937	0.914
50	1.134	0.808	1314.791	0.365	0.439	10815.336	0.896	0.938	0.907
100	0.999	0.733	221.351	0.213	0.240	1494.087	0.919	0.931	0.921
300	0.936	0.704	92.667	0.104	0.098	8.177	0.929	0.938	0.864

TABELA B.8: Risco Unimodal (5% censura)

n	Estimativas MV			Erro Padrão			Prob. Cobertura		
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
10	-26.747	-0.653	84.638	9.893	0.419	4.418	0.881	0.944	0.886
30	-12.650	-0.780	85.003	4.535	0.396	2.651	0.933	0.950	0.950
50	-10.731	-0.740	85.210	3.121	0.308	2.079	0.933	0.941	0.952
100	-9.601	-0.708	85.457	1.811	0.183	1.394	0.948	0.953	0.944
300	-9.071	-0.693	85.597	0.989	0.094	0.789	0.940	0.934	0.894

TABELA B.9: Risco Constante com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	12.624	0.781	12103.868	2.862	5.062	0.603	108433.265	13.283	0.721	0.849	0.860	0.838
30	2.400	1.291	1038.947	1.312	0.973	0.971	4105.643	0.540	0.902	0.942	0.947	0.936
50	1.488	1.322	668.409	1.253	0.549	1.057	3332.758	0.383	0.910	0.941	0.943	0.940
100	1.156	1.100	138.959	1.185	0.285	0.466	382.144	0.239	0.914	0.947	0.954	0.947
300	1.051	1.002	80.825	1.147	0.136	0.164	7.266	0.138	0.938	0.944	0.940	0.933

TABELA B.10: Risco Crescente com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	70.781	0.613	82.249	1.140	19.390	0.629	6.248	0.135	0.703	0.815	0.843	0.825
30	19.266	0.885	82.375	1.126	6.961	0.680	3.868	0.059	0.907	0.936	0.941	0.926
50	12.820	0.810	80.922	1.129	4.118	0.538	2.908	0.045	0.904	0.935	0.942	0.935
100	10.308	0.705	80.184	1.127	2.129	0.193	1.601	0.029	0.910	0.945	0.953	0.946
300	9.413	0.695	80.052	1.126	1.009	0.093	0.956	0.018	0.936	0.945	0.938	0.922

TABELA B.11: Risco Decrescente com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	8.326	0.582	172676.275	45.212	3.360	0.484	1865422.902	1024.854	0.706	0.811	0.868	0.840
30	1.892	0.829	74432.912	1.514	0.682	0.579	1607575.801	0.915	0.908	0.940	0.942	0.926
50	1.276	0.793	4171.513	1.354	0.407	0.515	48300.632	0.570	0.903	0.935	0.941	0.936
100	1.031	0.706	119.512	1.224	0.213	0.194	412.172	0.326	0.910	0.946	0.953	0.946
300	0.941	0.695	81.561	1.159	0.101	0.093	9.728	0.184	0.936	0.945	0.938	0.921

TABELA B.12: Risco Unimodal com Covariável (0% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	-54.417	-0.392	80.259	1.144	13.567	0.268	6.853	0.142	0.714	0.854	0.834	0.838
30	-18.562	-0.702	79.073	1.126	6.437	0.394	3.171	0.061	0.889	0.929	0.945	0.924
50	-12.638	-0.742	79.402	1.129	3.799	0.358	2.462	0.046	0.901	0.946	0.942	0.934
100	-10.259	-0.701	79.940	1.126	1.987	0.193	1.619	0.030	0.903	0.931	0.946	0.940
300	-9.361	-0.698	80.006	1.126	1.032	0.098	0.923	0.017	0.929	0.934	0.955	0.942

TABELA B.13: Risco Constante com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	12.674	0.839	1623377.400	659.346	5.217	0.681	> 3.3E07	15964.638	0.722	0.861	0.867	0.843
30	2.568	1.338	4101.111	1.335	1.050	1.040	35735.692	0.652	0.894	0.942	0.933	0.942
50	1.561	1.387	1292.085	1.260	0.605	1.157	8652.759	0.396	0.906	0.940	0.940	0.939
100	1.166	1.167	193.401	1.193	0.313	0.581	414.903	0.249	0.910	0.943	0.943	0.951
300	1.054	1.006	85.395	1.148	0.147	0.184	9.764	0.140	0.928	0.939	0.908	0.926

TABELA B.14: Risco Crescente com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	71.072	0.660	84.567	1.143	20.102	0.687	37.288	0.138	0.707	0.818	0.846	0.832
30	20.469	0.917	83.295	1.127	7.480	0.726	4.271	0.060	0.893	0.934	0.931	0.929
50	13.463	0.851	81.842	1.129	4.531	0.608	3.359	0.046	0.897	0.931	0.928	0.937
100	10.531	0.716	80.821	1.128	2.359	0.227	1.670	0.031	0.902	0.939	0.934	0.940
300	9.567	0.689	80.625	1.126	1.095	0.098	0.967	0.018	0.919	0.939	0.893	0.923

TABELA B.15: Risco Decrescente com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	8.363	0.610	> 1.2E09	808384.994	3.470	0.538	> 3.3E10	> 1.5E7	0.701	0.807	0.861	0.839
30	2.006	0.860	606308.000	3.841	0.735	0.635	> 1.2E07	71.754	0.891	0.935	0.933	0.933
50	1.339	0.819	22351.910	1.369	0.448	0.566	460961.800	0.594	0.896	0.930	0.927	0.937
100	1.053	0.718	264.053	1.236	0.235	0.233	1505.817	0.342	0.902	0.939	0.933	0.940
300	0.957	0.689	87.621	1.161	0.109	0.098	10.514	0.187	0.919	0.939	0.891	0.926

TABELA B.16: Risco Unimodal com Covariável (5% censura)

n	Estimativas MV				Erro Padrão				Prob. Cobertura			
	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$	α	β	$\exp(\gamma_0)$	$\exp(\gamma_1)$
10	-53.705	-0.451	80.736	1.145	14.275	0.470	7.256	0.147	0.728	0.842	0.827	0.814
30	-18.162	-0.696	79.655	1.125	6.232	0.391	3.299	0.062	0.899	0.926	0.953	0.920
50	-12.404	-0.730	79.981	1.129	3.681	0.350	2.571	0.048	0.909	0.939	0.952	0.926
100	-10.081	-0.687	80.515	1.126	1.972	0.189	1.700	0.031	0.924	0.921	0.937	0.937
300	-9.184	-0.684	80.592	1.126	1.009	0.097	0.963	0.018	0.934	0.921	0.907	0.948

Apêndice C

Bancos de Dados

TABELA C.1: Dados de mortalidade de ratos (Kimball, 1961)

40	48	50	54	56	59	62	63	67	67	69	70	71	73	73
76	77	80	81	81	82	83	84	86	86	87	88	88	88	88
88	89	90	90	91	93	94	95	96	97	97	98	99	99	100
100	100	100	101	101	101	102	102	103	103	103	103	103	104	104
104	105	105	106	106	106	107	108	109	109	110	110	110	111	111
111	112	113	113	114	114	115	116	116	117	118	118	118	119	119
120	120	120	121	121	123	123	124	124	124	125	125	126	126	126
126	126	127	127	127	127	128	128	128	128	129	129	129	129	129
129	130	130	130	130	131	131	132	133	133	133	134	134	134	134
135	135	135	136	136	136	136	137	137	137	138	139	139	140	140
141	141	141	141	141	142	144	144	144	144	144	145	145	146	146
146	146	147	147	147	147	148	148	148	148	149	150	151	151	151
151	152	152	153	155	156	157	158	158	160	161	162	162	163	163
164	165	165	166	168	169	171	171	172	172	174	177	177		

TABELA C.2: Dados do estudo de câncer de cabeça e pescoço, em meses - grupo A (Efron, 1988)

Meses	Censura	Meses	Censura
1	1	7	0
2	1	8	1
2	1	8	1
3	1	8	1
3	1	9	1
3	0	9	1
3	1	10	1
3	1	10	0
3	1	10	1
4	1	11	0
4	1	14	1
5	1	14	1
5	1	14	1
5	1	15	1
5	1	18	1
5	1	18	0
5	1	20	1
5	1	20	1
5	1	37	1
6	1	37	0
6	1	38	1
6	1	41	0
6	1	45	0
6	1	47	0
6	1	47	1
6	1		

TABELA C.3: Dados de mortalidade de Wroclaw (Halley, 1693)

t	n	t	n	t	n	t	n
1	145	22	6	43	10	64	10
2	57	23	6	44	12	65	10
3	38	24	6	45	10	66	10
4	28	25	7	46	10	67	10
5	22	26	7	47	10	68	10
6	18	27	7	48	10	69	10
7	12	28	7	49	11	70	11
8	10	29	8	50	11	71	11
9	9	30	8	51	11	72	11
10	8	31	8	52	11	73	11
11	7	32	8	53	11	74	10
12	6	33	8	54	10	75	10
13	6	34	9	55	10	76	10
14	6	35	9	56	10	77	10
15	6	36	9	57	10	78	9
16	6	37	9	58	10	79	8
17	6	38	9	59	10	80	7
18	6	39	9	60	10	81	6
19	6	40	9	61	10	82	5
20	6	41	9	62	10	83	3
21	7	42	8	63	10	84	20

TABELA C.4: Dados do estudo de câncer de pulmão (Prentice, 1973)

t	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	cens
411	70	64	5	1	0	0	1	1
126	60	63	9	1	0	0	1	1
118	70	65	11	1	0	0	1	1
92	40	69	10	1	0	0	1	1
8	40	63	58	1	0	0	1	1
25	70	48	9	1	0	0	1	0
11	70	48	11	1	0	0	1	1
54	80	63	4	0	1	0	1	1
153	60	63	14	0	1	0	1	1
16	30	53	4	0	1	0	1	1
56	80	43	12	0	1	0	1	1
21	40	55	2	0	1	0	1	1
287	60	66	25	0	1	0	1	1
10	40	67	23	0	1	0	1	1
8	20	61	19	0	0	1	1	1
12	50	63	4	0	0	1	1	1
177	50	66	16	0	0	0	1	1
12	40	68	12	0	0	0	1	1
200	80	41	12	0	0	0	1	1
250	70	53	8	0	0	0	1	1

TABELA C.5: Dados do estudo de câncer de pulmão (continuação)

t	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	cens
100	60	37	13	0	0	0	1	1
999	90	54	12	1	0	0	0	1
231	50	52	8	1	0	0	0	0
991	70	50	7	1	0	0	0	1
1	20	65	21	1	0	0	0	1
201	80	52	28	1	0	0	0	1
44	60	70	13	1	0	0	0	1
15	50	40	13	1	0	0	0	1
103	70	36	22	0	1	0	0	0
2	40	44	36	0	1	0	0	1
20	30	54	9	0	1	0	0	1
51	30	59	87	0	1	0	0	1
18	40	69	5	0	0	1	0	1
90	60	50	22	0	0	1	0	1
84	80	62	4	0	0	1	0	1
164	70	68	15	0	0	0	0	1
19	30	39	4	0	0	0	0	1
43	60	49	11	0	0	0	0	1
340	80	64	10	0	0	0	0	1
231	70	67	8	0	0	0	0	1

Apêndice D

Algoritmos Computacionais

D.1 O Algoritmo BFGS de otimização global

Uma forma de se obter estimativas dos parâmetros de uma determinada distribuição é através dos algoritmos iterativos de obtenção de máximos globais de uma função. Tais métodos, em sua maioria, são baseados no algoritmo iterativo de Newton. O método BFGS (Broyden, 1970; Fletcher, 1970; Goldfarb, 1970; Shanno, 1970), implementado para melhorar a convergência do algoritmo de Newton, tem como idéia principal construir uma matriz Hessiana aproximada da função a ser maximizada (no caso, a log-verossimilhança) através da análise de sucessivos vetores gradiente. Esta aproximação das derivadas da função permite a aplicação de um método de ajuste Quasi-Newton, com a finalidade de encontrar o ponto de máximo no espaço paramétrico.

Algoritmo:

A partir de uma estimativa inicial $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0, \hat{\theta}_0)$, onde $\hat{\alpha}_0 \hat{\beta}_0 > 0$ e $\hat{\theta}_0 > 0$, uma matriz Hessiana inicial $\hat{\mathbf{H}}_0 \in \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$ e $k = 0, 1, \dots$:

1. Resolva o sistema linear $\hat{\mathbf{H}}_k \mathbf{s}_k = -\nabla l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$, onde

$$\nabla l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k} ;$$

2. Faça $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{s}_k$, e $\hat{\mathbf{y}}_k = \nabla l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}) - \nabla l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$;
3. Calcule

$$\hat{\mathbf{H}}_{k+1} = \hat{\mathbf{H}}_k + \frac{\hat{\mathbf{y}}_k \hat{\mathbf{y}}_k'}{\hat{\mathbf{y}}_k' \mathbf{s}_k} - \frac{\hat{\mathbf{H}}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k' \hat{\mathbf{H}}_k}{\mathbf{s}_k' \hat{\mathbf{H}}_k \mathbf{s}_k}.$$

D.2 O Algoritmo Metropolis-Hastings

O algoritmo de Metropolis (Metropolis *et al.*, 1953) é um método MCMC criado como uma adaptação do passeio aleatório, que utiliza uma regra de aceitação/rejeição para convergir para a distribuição alvo especificada (no caso, a *posteriori*). Requer uma distribuição geradora de candidatos $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}_0)$, da qual observações de $\pi(\boldsymbol{\theta}; t)$ podem ser obtidas para qualquer $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$. Enquanto o algoritmo de Metropolis exige que a distribuição geradora de candidatos deva ser simétrica, a generalização dada por Hastings (1970), descrita a seguir, pode gerar candidatos de distribuições assimétricas.

1. Defina um valor inicial $\boldsymbol{\theta}_0$ e um contador de iterações $i = 0$;
2. Gerar $\boldsymbol{\theta}^*$ de $q(\boldsymbol{\theta}^*|\boldsymbol{\theta}_i)$;

3. Gerar U de uma Uniforme(0, 1);
4. Se $U > \min \left\{ 1, \frac{\pi(\boldsymbol{\theta}^*; t)q(\boldsymbol{\theta}_i; \boldsymbol{\theta}^*)}{\pi(\boldsymbol{\theta}_i; t)q(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{\theta}_i)} \right\}$, então $\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i$, senão $\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}^*$.

A amostra gerada depois de um número suficiente de iterações tem distribuição cuja densidade é $\pi(\boldsymbol{\theta}; t)$, mas não é independente (pela definição de Cadeias de Markov). Porém, a dependência entre as observações pode ser eliminada ao aplicar um salto entre as observações geradas, isto é, em vez de considerar a amostra gerada $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3, \dots, \boldsymbol{\theta}_n\}$, a amostra a ser tomada é $\{\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_{2k}, \boldsymbol{\theta}_{3k}, \dots\}$, onde k é o tamanho do salto, determinado através da análise gráfica da função de autocorrelação da amostra obtida (ACF). O salto deve possuir um tamanho tal que a correlação entre as observações da nova amostra seja eliminada. A desvantagem direta desta abordagem é que, para obter uma amostra de tamanho n , deve-se gerar nk observações.

Além do problema de correlação entre as estimativas geradas pelo algoritmo (solucionado através de saltos na cadeia), existem outros problemas que devem ser destacados, como a influência dos pontos iniciais nas primeiras simulações e o fato da cadeia não alcançar convergência. O primeiro problema é resolvido ao se descartar as primeiras iterações, chamadas de *burn-in*. Não existe um número especificado de iterações a serem descartadas: com frequência são utilizados *burn-ins* de tamanho 2000, 10000 ou até mesmo metade da cadeia. O segundo problema deve ser tratado com mais cautela, visto que o algoritmo pode necessitar de uma cadeia mais longa para alcançar convergência à distribuição alvo. Para isso, existem técnicas que monitoram a convergência da cadeia, como o critério de Gelman-Rubin (Gelman & Rubin, 1992).

Um outro problema do método está em escolher uma função geradora de candidatos $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}_0)$ adequada para o problema em questão, já que todo o processo de M-H depende da mesma. Chib & Greenberg (1995) fazem comentários sobre o problema e mostram técnicas a serem utilizadas para a escolha da distribuição geradora de candidatos. Em geral, uma boa distribuição geradora de candidatos possui as seguintes propriedades:

- Para qualquer $\boldsymbol{\theta}$, é fácil gerar valores de $q(\boldsymbol{\theta}^*; \boldsymbol{\theta})$;

- É fácil calcular a probabilidade de rejeição;
- Cada candidato percorre uma distância razoável no espaço paramétrico;
- Os candidatos não são rejeitados com muita frequência.

Apêndice E

Códigos Utilizados

```
#####  
##### TTT PLOT #####  
#####  
TTT <- function(falha){ ## Apenas tempos de falha  
t <- sort(falha)  
n <- length(falha)  
den <- sum(falha)  
phi <- numeric(n)  
for (r in 1:n){  
soma <- 0  
for (i in 1:r){  
soma <- soma + t[i]  
}  
phi[r] <- (soma + (n-r)*t[r])/den  
}  
phi  
}  
  
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))(-1) - 1)(1/b)))(1/a)  
set.seed(1235)  
  
a <- rweirc(1000,1,1,50)  
b <- rweirc(1000,9,0.7,85)  
c <- rweirc(1000,0.5,0.3,100)  
d <- rweirc(1000,8,0.01,45) + 2  
e <- rweirc(1000,-2,-1.5,8)  
  
ta <- TTT(a)  
tb <- TTT(b)  
tc <- TTT(c)  
td <- TTT(d)  
te <- TTT(e)  
  
t <- seq(0.001,1,length=1000)  
plot(t,ta,type="l")  
lines(t,tb)  
lines(t,tc)  
lines(t,td)  
lines(t,te)  
  
#####  
##### PODER DO TESTE #####  
#####  
## Geração Weibull RC ##  
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))(-1) - 1)(1/b)))(1/a)  
logL1 <- function(logalpha,logbeta,logtheta){  
# função a ser minimizada: -log L1 reparametrizada  
alpha <- exp(logalpha)  
beta <- exp(logbeta)
```

```

theta <- exp(logtheta)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)^(alpha) +
(beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) - (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}
logL2 <- function(logalpha,logtheta){ # função a ser minimizada: -log L2 reparametrizada
alpha <- exp(logalpha)
theta <- exp(logtheta)
beta <- 1
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)^(alpha) +
(beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) - (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}
tam.amostra <- c(10,30,50,100,300)
beta <- c(0.5,1,2,4,8)
rej <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=length(beta))
B <- 1000 # n de replicações
a <- 0
proc <- 0
for (n in tam.amostra){
a <- a + 1
for (i in 1:length(beta)){
num.rej <- 0
for (j in 1:B){
set.seed(23566 + j)
proc <- proc + 1
ini1 <- c(log(4),log(beta[i]),log(20))
erro <- TRUE
while(erro){
t <- rweirc(n,4,beta[i],20)
cens <- rep(1,n)
k1 <- try(mle(logL1,start=list(logalpha=ini1[1],logbeta=ini1[2],logtheta=ini1[3]),
method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") {erro <- TRUE} else {erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)}
}
ini2 <- c(log(4),log(20))
k2 <- mle(logL2,start=list(logalpha=ini2[1],logtheta=ini2[2]),method="BFGS")
trv <- 2*(k2@details$value - k1@details$value)
if (trv > qchisq(0.95,2)) num.rej <- num.rej + 1 # Chi-square(1)
cat('\n', proc)
}
rej[a,i] <- num.rej/B
}}
plot(beta,rej[1,],type="l",xlim=c(0,8),ylim=c(0,1),xlab="beta",ylab="Power",
main="H0: beta=1")
lines(beta,rej[2,],lty=2)
lines(beta,rej[3,],lwd=2,lty=3)
lines(beta,rej[4,],lwd=2,lty=2)
lines(beta,rej[5,],lwd=2)
##### COM CENSURAS #####
rej2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=length(beta))
B <- 1000 # n de replicações
a <- 0
proc <- 0
for (n in tam.amostra){
a <- a + 1
for (i in 1:length(beta)){
num.rej <- 0
for (j in 1:B){

```

```

set.seed(23566 + j)
proc <- proc + 1
ini1 <- c(log(4),log(beta[i]),log(20))
erro <- TRUE
while(erro){
t <- rweirc(n,4,beta[i],20)
cens <- rbinom(n,1,0.95)
k1 <- try(mle(logL1,start=list(logalpha=ini1[1],logbeta=ini1[2],
logtheta=ini1[3]),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") {erro <- TRUE} else
{erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)) || (k1@details$convergence != 0)}
}
ini2 <- c(log(4),log(20))
k2 <- mle(logL2,start=list(logalpha=ini2[1],logtheta=ini2[2]),
method="BFGS")
trv <- 2*(k2@details$value - k1@details$value)
if (trv > qchisq(0.95,2)) num.rej <- num.rej + 1 # Chi-square(1)
cat('\n', proc)
}
rej2[a,i] <- num.rej/B
}}

#####
##### PODER DO TESTE (COM COVARIÁVEIS) #####
#####

## Geração Weibull RC ##
require(stats4)
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))(-1) - 1)(1/b)))(1/a)
logL1 <- function(logalpha,logbeta,covtheta0,covtheta1){ # função a ser minimizada: -log L re
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*x)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)(alpha) + (beta-1)
-sum(loglik)
}
logL2 <- function(logalpha,logbeta,logtheta){ # função a ser minimizada: -log L reparametriza
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(logtheta + 0*x)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)(alpha) + (beta-1)
-sum(loglik)
}
tam.amostra <- c(10,30,50,100,300)
gamma0 <- log(20)
gamma1 <- c(log(17),log(18),log(19),log(19.5),log(20),log(20.5),log(21),log(22),log(23)) - gamma0
rej <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=length(gamma1))
B <- 1000 # n de replicações
a <- 0
proc <- 0
for (n in tam.amostra){
a <- a + 1
for (i in 1:length(gamma1)){
num.rej <- 0
ini1 <- c(log(4),log(4),gamma0,gamma1[i])
ini2 <- c(log(4),log(4),gamma0)
for (j in 1:B){
set.seed(23566 + j)
proc <- proc + 1
erro <- TRUE
while(erro){
x <- rbinom(n,1,0.5)
t <- rweirc(n,4,4,exp(gamma0 + gamma1[i]*x))

```

```

cens <- rep(1,n)
k1 <- try(mle(logL1,start=list(logalpha=ini1[1],logbeta=ini1[2],covtheta0=ini1[3],covtheta1=ini1[4]),method="BFGS"))
k2 <- try(mle(logL2,start=list(logalpha=ini2[1],logbeta=ini2[2],logtheta=ini2[3]),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error" || class(k2) == "try-error") erro <- TRUE else{
erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)) || (k1@details$convergence != 0) || (any(diag(vcov(k2)) < 0))
}
}

trv <- 2*(k2@details$value - k1@details$value)
if (trv > qchisq(0.95,1)) num.rej <- num.rej + 1 # Chi-square(1)
cat('\n', proc)
}

rej[a,i] <- num.rej/B
}}

##### COM CENSURAS #####

rej2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=length(gamma1))
B <- 1000 # n de replicações
a <- 0
proc <- 0
for (n in tam.amostra){
a <- a + 1
for (i in 1:length(gamma1)){
num.rej <- 0
ini1 <- c(log(4),log(4),gamma0,gamma1[i])
ini2 <- c(log(4),log(4),gamma0)
for (j in 1:B){
set.seed(23566 + j)
proc <- proc + 1
erro <- TRUE
while(erro){
x <- rbinom(n,1,0.5)
t <- rweirc(n,4,4,exp(gamma0 + gamma1[i]*x))
cens <- rbinom(n,1,0.95)
k1 <- try(mle(logL1,start=list(logalpha=ini1[1],logbeta=ini1[2],covtheta0=ini1[3],covtheta1=ini1[4]),method="BFGS"))
k2 <- try(mle(logL2,start=list(logalpha=ini2[1],logbeta=ini2[2],logtheta=ini2[3]),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error" || class(k2) == "try-error") erro <- TRUE else{
erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)) || (k1@details$convergence != 0) || (any(diag(vcov(k2)) < 0))
}
}
trv <- 2*(k2@details$value - k1@details$value)
if (trv > qchisq(0.95,1)) num.rej <- num.rej + 1 # Chi-square(1)
cat('\n', proc)
}
rej2[a,i] <- num.rej/B
}}

#####
##### ESTUDO DE SIMULAÇÃO (ASSINTÓTICO) #####
#####

## Geração Weibull RC ##
require(stats4)
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))^-1) - 1)^(1/b)))^(1/a)
LLL <- function(logalpha,logbeta,logtheta){
# função a ser minimizada: -log L reparametrizada
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(logtheta)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}
tam.amostra <- c(10,30,50,100,300,500)

```

```

B <- 1000 # n de replicações
## RISCO CONSTANTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
for (n in tam.amostra){
  cob.alpha <- 0
  cob.beta <- 0
  cob.theta <- 0
  param <- matrix(0,nrow=B,ncol=3)
  for (j in 1:B){
    set.seed(23566 + j)
    erro <- TRUE
    while(erro){
      t <- rweirc(n,1,1,85)
      cens <- 1
      k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(1),logbeta=log(1),
      logtheta=log(85)),method="BFGS"))
      if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else
      erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)) || (k1@details$convergence != 0)
    }
    param[j,] <- exp(k1@coef)
    sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
    sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
    sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
    li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
    ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
    li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
    ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
    li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
    ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta
    if (log(1) > li.alpha & log(1) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
    if (log(1) > li.beta & log(1) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
    if (log(85) > li.theta & log(85) < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1
    categ <- categ + 1
    cat('\n', categ)
  }
  i <- i+1
  meanparms0[i,1] <- mean(param[,1])
  meanparms0[i,2] <- mean(param[,2])
  meanparms0[i,3] <- mean(param[,3])
  devparms0[i,1] <- sd(param[,1])
  devparms0[i,2] <- sd(param[,2])
  devparms0[i,3] <- sd(param[,3])
  cobertura0[i,1] <- cob.alpha/B
  cobertura0[i,2] <- cob.beta/B
  cobertura0[i,3] <- cob.theta/B
}
## RISCO CRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
for (n in tam.amostra){
  cob.alpha <- 0
  cob.beta <- 0
  cob.theta <- 0
  param <- matrix(0,nrow=B,ncol=3)
  for (j in 1:B){
    set.seed(23566 + j)
    erro <- TRUE

```

```

while(erro){
t <- rweirc(n,9,0.7,85)
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(9),logbeta=log(0.7),
logtheta=log(85)),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)
}
param[j,] <- exp(k1@coef)
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta
if (log(9) > li.alpha & log(9) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(0.7) > li.beta & log(0.7) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (log(85) > li.theta & log(85) < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1
meanparms1[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms1[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms1[i,3] <- mean(param[,3])
devparms1[i,1] <- sd(param[,1])
devparms1[i,2] <- sd(param[,2])
devparms1[i,3] <- sd(param[,3])
cobertura1[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura1[i,2] <- cob.beta/B
cobertura1[i,3] <- cob.theta/B
}
## RISCO DECRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.theta <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=3)
for (j in 1:B){
set.seed(23566 + j)
erro <- TRUE
while(erro){
t <- rweirc(n,0.9,0.7,85)
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(0.9),logbeta=log(0.7),
logtheta=log(85)),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)
}
param[j,] <- exp(k1@coef)
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta

```

```

ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta

if (log(0.9) > li.alpha & log(0.9) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(0.7) > li.beta & log(0.7) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (log(85) > li.theta & log(85) < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1

categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}

i <- i+1

meanparms2[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms2[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms2[i,3] <- mean(param[,3])

devparms2[i,1] <- sd(param[,1])
devparms2[i,2] <- sd(param[,2])
devparms2[i,3] <- sd(param[,3])

cobertura2[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura2[i,2] <- cob.beta/B
cobertura2[i,3] <- cob.theta/B
}

## RISCO UNIMODAL: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)

LLL2 <- function(alpha,beta,theta){
# função a ser minimizada: -log L reparametrizada
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.theta <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=3)
for (j in 1:B){
set.seed(23566 + j)
erro <- TRUE
while(erro){
t <- rweirc(n,-9,-0.7,85)
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha= -9,beta= -0.7,theta=85),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)
}

param[j,] <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])

li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta

if (-9 > li.alpha & -9 < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (-0.7 > li.beta & -0.7 < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (85 > li.theta & 85 < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1

categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}

```



```

}
i <- i+1
meanparms3[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms3[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms3[i,3] <- mean(param[,3])
devparms3[i,1] <- sd(param[,1])
devparms3[i,2] <- sd(param[,2])
devparms3[i,3] <- sd(param[,3])
cobertura3[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura3[i,2] <- cob.beta/B
cobertura3[i,3] <- cob.theta/B
}
meanparms0
devparms0
cobertura0
meanparms1
devparms1
cobertura1
meanparms2
devparms2
cobertura2
meanparms3
devparms3
cobertura3
a0 <- cbind(meanparms0,devparms0,cobertura0)
a1 <- cbind(meanparms1,devparms1,cobertura1)
a2 <- cbind(meanparms2,devparms2,cobertura2)
a3 <- cbind(meanparms3,devparms3,cobertura3)
round(a0,3)
round(a1,3)
round(a2,3)
round(a3,3)

#####
##### ESTUDO DE SIMULAÇÃO (BOOTSTRAP) #####
#####

## Geração Weibull RC ##
require(stats4)
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))^-1) - 1)^(1/b)))^(1/a)
LLL <- function(logalpha,logbeta,logtheta){
  # função a ser minimizada: -log L reparametrizada
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(logtheta)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^-alpha) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}
tam.amostra <- c(10,30,50,100,300,500)
B <- 100 # n de replicações
boot <- 1000 # n bootstrap
set.seed(23566)
## RISCO CONSTANTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.theta <- 0
param <- matrix(0,nrow=B*boot,ncol=3)

```

```

for (jj in 1:B){
base <- rweirc(n,1,1,85)
for (j in 1:boot){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- sample(base,n,replace=T)
k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(1),logbeta=log(1),
logtheta=log(85)),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)
}
param[(jj-1)*boot + j,] <- exp(k1@coef)
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta
if (log(1) > li.alpha & log(1) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(1) > li.beta & log(1) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (log(85) > li.theta & log(85) < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1
}
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1
meanparms0[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms0[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms0[i,3] <- mean(param[,3])
devparms0[i,1] <- sd(param[,1])
devparms0[i,2] <- sd(param[,2])
devparms0[i,3] <- sd(param[,3])
cobertura0[i,1] <- cob.alpha/(B*boot)
cobertura0[i,2] <- cob.beta/(B*boot)
cobertura0[i,3] <- cob.theta/(B*boot)
}
## RISCO CRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.theta <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=3)
for (j in 1:B){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- rweirc(n,9,0.7,85)
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(9),logbeta=log(0.7),
logtheta=log(85)),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)
}
param[j,] <- exp(k1@coef)
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])

```

```

sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta
if (log(9) > li.alpha & log(9) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(0.7) > li.beta & log(0.7) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (log(85) > li.theta & log(85) < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1
meanparms1[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms1[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms1[i,3] <- mean(param[,3])
devparms1[i,1] <- sd(param[,1])
devparms1[i,2] <- sd(param[,2])
devparms1[i,3] <- sd(param[,3])
cobertura1[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura1[i,2] <- cob.beta/B
cobertura1[i,3] <- cob.theta/B
}
## RISCO DECRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.theta <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=3)
for (j in 1:B){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- rweirc(n,0.9,0.7,85)
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(0.9),logbeta=log(0.7),
logtheta=log(85)),method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)
|| (k1@details$convergence != 0)
)
}
param[j,] <- exp(k1@coef)
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta
if (log(0.9) > li.alpha & log(0.9) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(0.7) > li.beta & log(0.7) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (log(85) > li.theta & log(85) < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1

```

```

meanparms2[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms2[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms2[i,3] <- mean(param[,3])

devparms2[i,1] <- sd(param[,1])
devparms2[i,2] <- sd(param[,2])
devparms2[i,3] <- sd(param[,3])

cobertura2[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura2[i,2] <- cob.beta/B
cobertura2[i,3] <- cob.theta/B
}

## RISCO UNIMODAL: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
devparms3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)
cobertura3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=3)

LLL2 <- function(alpha,beta,theta){
# função a ser minimizada: -log L reparametrizada
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)

-sum(loglik)
}

for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.theta <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=3)
for (j in 1:B){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- rweirc(n,-9,-0.7,85)
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha= -9,beta= -0.7,theta=85),
method="BFGS"))
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)
}
param[j,] <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.theta <- k1@coef[3] - 1.96*sd.theta
ls.theta <- k1@coef[3] + 1.96*sd.theta
if (-9 > li.alpha & -9 < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (-0.7 > li.beta & -0.7 < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (85 > li.theta & 85 < ls.theta) cob.theta <- cob.theta + 1
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1
meanparms3[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms3[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms3[i,3] <- mean(param[,3])

devparms3[i,1] <- sd(param[,1])
devparms3[i,2] <- sd(param[,2])
devparms3[i,3] <- sd(param[,3])

cobertura3[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura3[i,2] <- cob.beta/B

```

```

cobertura3[i,3] <- cob.theta/B
}
meanparms0
devparms0
cobertura0
meanparms1
devparms1
cobertura1
meanparms2
devparms2
cobertura2
meanparms3
devparms3
cobertura3

a0 <- cbind(meanparms0,devparms0,cobertura0)
a1 <- cbind(meanparms1,devparms1,cobertura1)
a2 <- cbind(meanparms2,devparms2,cobertura2)
a3 <- cbind(meanparms3,devparms3,cobertura3)

round(a0,3)
round(a1,3)
round(a2,3)
round(a3,3)

#####
##### ESTUDO DE SIMULAÇÃO COM COVARIÁVEIS (ASSINTÓTICO) #####
#####

## Geração Weibull RC ##
require(stats4)
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))(-1) - 1)(1/b)))(1/a)
## Inclusão de uma covariável X no parâmetro de escala ##
LLL <- function(logalpha,logbeta,covtheta0,covtheta1){
# função a ser minimizada: -log L reparametrizada
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*x)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)alpha - 1)beta)
-sum(loglik)
}

tam.amostra <- c(10,30,50,100,300,500)
B <- 1000 # n de replicações
set.seed(23566)

## RISCO CONSTANTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
devparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.covtheta0 <- 0
cob.covtheta1 <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
for (j in 1:B){
erro <- TRUE
while(erro){
x <- rbinom(n,1,0.5)
t <- numeric(n)
for (ii in 1:n) t[ii] <- rweirc(1,1,1,exp(4.382 + 0.118*x[ii]))
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(1),logbeta=log(1),covtheta0=4.382,
covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
|| (k1@details$convergence != 0)
}
}
}
}

```

```

}
param[j,] <- exp(k1@coef)
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.covtheta0 <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
sd.covtheta1 <- sqrt(vcov(k1)[4,4])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.covtheta0 <- k1@coef[3] - 1.96*sd.covtheta0
ls.covtheta0 <- k1@coef[3] + 1.96*sd.covtheta0
li.covtheta1 <- k1@coef[4] - 1.96*sd.covtheta1
ls.covtheta1 <- k1@coef[4] + 1.96*sd.covtheta1

if (log(1) > li.alpha & log(1) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(1) > li.beta & log(1) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (4.382 > li.covtheta0 & 4.382 < ls.covtheta0)
  cob.covtheta0 <- cob.covtheta0 + 1
if (0.118 > li.covtheta1 & 0.118 < ls.covtheta1)
  cob.covtheta1 <- cob.covtheta1 + 1

categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}

i <- i+1

meanparms0[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms0[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms0[i,3] <- mean(param[,3])
meanparms0[i,4] <- mean(param[,4])

devparms0[i,1] <- sd(param[,1])
devparms0[i,2] <- sd(param[,2])
devparms0[i,3] <- sd(param[,3])
devparms0[i,4] <- sd(param[,4])

cobertura0[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura0[i,2] <- cob.beta/B
cobertura0[i,3] <- cob.covtheta0/B
cobertura0[i,4] <- cob.covtheta1/B
}

## RISCO CRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
devparms1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura1 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)

for (n in tam.amostra){
  cob.alpha <- 0
  cob.beta <- 0
  cob.covtheta0 <- 0
  cob.covtheta1 <- 0
  param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)

  for (j in 1:B){
    erro <- TRUE
    while(erro){
      x <- rbinom(n,1,0.5)
      t <- numeric(n)
      for (ii in 1:n) t[ii] <- rweirc(1,9,0.7,exp(4.382 + 0.118*x[ii]))
      cens <- 1
      k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(9),logbeta=log(0.7),covtheta0=4.382,
        covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
      if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)
        || (k1@details$convergence != 0))
    }
  }

  param[j,] <- exp(k1@coef)
  sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
  sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
  sd.covtheta0 <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
  sd.covtheta1 <- sqrt(vcov(k1)[4,4])
}

```

```

li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.covtheta0 <- k1@coef[3] - 1.96*sd.covtheta0
ls.covtheta0 <- k1@coef[3] + 1.96*sd.covtheta0
li.covtheta1 <- k1@coef[4] - 1.96*sd.covtheta1
ls.covtheta1 <- k1@coef[4] + 1.96*sd.covtheta1

if (log(9) > li.alpha & log(9) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(0.7) > li.beta & log(0.7) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (4.382 > li.covtheta0 & 4.382 < ls.covtheta0)
  cob.covtheta0 <- cob.covtheta0 + 1
if (0.118 > li.covtheta1 & 0.118 < ls.covtheta1)
  cob.covtheta1 <- cob.covtheta1 + 1

categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}

i <- i+1

meanparms1[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms1[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms1[i,3] <- mean(param[,3])
meanparms1[i,4] <- mean(param[,4])

devparms1[i,1] <- sd(param[,1])
devparms1[i,2] <- sd(param[,2])
devparms1[i,3] <- sd(param[,3])
devparms1[i,4] <- sd(param[,4])

cobertura1[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura1[i,2] <- cob.beta/B
cobertura1[i,3] <- cob.covtheta0/B
cobertura1[i,4] <- cob.covtheta1/B
}

## RISCO DECRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
devparms2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura2 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)

for (n in tam.amostra){
  cob.alpha <- 0
  cob.beta <- 0
  cob.covtheta0 <- 0
  cob.covtheta1 <- 0
  param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)

  for (j in 1:B){
    erro <- TRUE
    while(erro){
      x <- rbinom(n,1,0.5)
      t <- numeric(n)
      for (ii in 1:n) t[ii] <- rweirc(1,0.9,0.7,exp(4.382 + 0.118*x[ii]))
      cens <- 1
      k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(0.9),logbeta=log(0.7),covtheta0=4.382,
        covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
      if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)
        || (k1@details$convergence != 0))
    }

    param[j,] <- exp(k1@coef)

    sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
    sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
    sd.covtheta0 <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
    sd.covtheta1 <- sqrt(vcov(k1)[4,4])

    li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
    ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha
    li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
    ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
    li.covtheta0 <- k1@coef[3] - 1.96*sd.covtheta0
    ls.covtheta0 <- k1@coef[3] + 1.96*sd.covtheta0

```

```

li.covtheta1 <- k1@coef[4] - 1.96*sd.covtheta1
ls.covtheta1 <- k1@coef[4] + 1.96*sd.covtheta1
if (log(0.9) > li.alpha & log(0.9) < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (log(0.7) > li.beta & log(0.7) < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (4.382 > li.covtheta0 & 4.382 < ls.covtheta0)
  cob.covtheta0 <- cob.covtheta0 + 1
if (0.118 > li.covtheta1 & 0.118 < ls.covtheta1)
  cob.covtheta1 <- cob.covtheta1 + 1
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1
meanparms2[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms2[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms2[i,3] <- mean(param[,3])
meanparms2[i,4] <- mean(param[,4])
devparms2[i,1] <- sd(param[,1])
devparms2[i,2] <- sd(param[,2])
devparms2[i,3] <- sd(param[,3])
devparms2[i,4] <- sd(param[,4])
cobertura2[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura2[i,2] <- cob.beta/B
cobertura2[i,3] <- cob.covtheta0/B
cobertura2[i,4] <- cob.covtheta1/B
}
## RISCO UNIMODAL: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
devparms3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura3 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
LLL2 <- function(alpha,beta,covtheta0,covtheta1){
# função a ser minimizada: -log L reparametrizada
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*x)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
  (t/theta)^alpha + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
  (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}
for (n in tam.amostra){
cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.covtheta0 <- 0
cob.covtheta1 <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
for (j in 1:B){
erro <- TRUE
while(erro){
x <- rbinom(n,1,0.5)
t <- numeric(n)
for (ii in 1:n) t[ii] <- rweirc(1,-9,-0.7,exp(4.382 + 0.118*x[ii]))
cens <- 1
k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=-9,beta=-0.7,covtheta0=4.382,
  covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)
  || (k1@details$convergence != 0))
}
param[j,] <- c(k1@coef[1],k1@coef[2],exp(k1@coef[3]),exp(k1@coef[4]))
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.covtheta0 <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
sd.covtheta1 <- sqrt(vcov(k1)[4,4])
li.alpha <- k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha
ls.alpha <- k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha

```



```

li.beta <- k1@coef[2] - 1.96*sd.beta
ls.beta <- k1@coef[2] + 1.96*sd.beta
li.covtheta0 <- k1@coef[3] - 1.96*sd.covtheta0
ls.covtheta0 <- k1@coef[3] + 1.96*sd.covtheta0
li.covtheta1 <- k1@coef[4] - 1.96*sd.covtheta1
ls.covtheta1 <- k1@coef[4] + 1.96*sd.covtheta1

if (-9 > li.alpha & -9 < ls.alpha) cob.alpha <- cob.alpha + 1
if (-0.7 > li.beta & -0.7 < ls.beta) cob.beta <- cob.beta + 1
if (4.382 > li.covtheta0 & 4.382 < ls.covtheta0)
  cob.covtheta0 <- cob.covtheta0 + 1
if (0.118 > li.covtheta1 & 0.118 < ls.covtheta1)
  cob.covtheta1 <- cob.covtheta1 + 1

categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}

i <- i+1

meanparms3[i,1] <- mean(param[,1])
meanparms3[i,2] <- mean(param[,2])
meanparms3[i,3] <- mean(param[,3])
meanparms3[i,4] <- mean(param[,4])

devparms3[i,1] <- sd(param[,1])
devparms3[i,2] <- sd(param[,2])
devparms3[i,3] <- sd(param[,3])
devparms3[i,4] <- sd(param[,4])

cobertura3[i,1] <- cob.alpha/B
cobertura3[i,2] <- cob.beta/B
cobertura3[i,3] <- cob.covtheta0/B
cobertura3[i,4] <- cob.covtheta1/B
}

meanparms0
devparms0
cobertura0

meanparms1
devparms1
cobertura1

meanparms2
devparms2
cobertura2

meanparms3
devparms3
cobertura3

a0 <- cbind(meanparms0,devparms0,cobertura0)
a1 <- cbind(meanparms1,devparms1,cobertura1)
a2 <- cbind(meanparms2,devparms2,cobertura2)
a3 <- cbind(meanparms3,devparms3,cobertura3)

round(a0,3)
round(a1,3)
round(a2,3)
round(a3,3)

#####
##### ESTUDO DE SIMULAÇÃO COM COVARIÁVEIS (BOOTSTRAP) #####
#####

## Geração Weibull RC ##
require(stats4)
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))^(-1) - 1)^(1/b)))^(1/a)

## Inclusão de uma covariável X no parâmetro de escala ##
LLL <- function(logalpha,logbeta,covtheta0,covtheta1){
  # função a ser minimizada: -log L reparametrizada

alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*x)

loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
  (t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
  (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)

```

```

-sum(loglik)
}
tam.amostra <- c(10,30,50,100,300)
B <- 1000      # n de replicações
boot <- 399    # n bootstrap
## RISCO CONSTANTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
devparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
for (n in tam.amostra){
  cob.alpha <- 0
  cob.beta <- 0
  cob.theta <- 0
  param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
  par.cob <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
  for (jj in 1:B){
    par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=4)
    set.seed(23566 + jj)
    x.base <- rep(0,n)
    while(length(x.base[x.base==0])==n || length(x.base[x.base==1])==n)
      x.base <- rbinom(n,1,0.5)
    base <- numeric(n)
    for (ii in 1:n) base[ii] <- rweirc(1,1,1,exp(4.382 + 0.118*x.base[ii]))
    cens <- rep(1,n)
    for (j in 1:boot){
      erro <- TRUE
      while(erro){
        t <- sample(base,n,replace=T)
        x <- x.base[match(t,base)]
        k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(1),logbeta=log(1),covtheta0=4.382,
          covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
        if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)
          || (k1@details$convergence != 0)
        )
      }
      par.boot[j,] <- exp(k1@coef)
    }
    param[jj,] <- apply(par.boot,2,mean)
    IC.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
    IC.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
    IC.covtheta0 <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
    IC.covtheta1 <- c(quantile(par.boot[,4],0.025),quantile(par.boot[,4],0.975))
    if ((IC.alpha[1] < 1) & (IC.alpha[2] > 1)) par.cob[jj,1] <- 1
    if ((IC.beta[1] < 1) & (IC.beta[2] > 1)) par.cob[jj,2] <- 1
    if ((IC.covtheta0[1] < 80) & (IC.covtheta0[2] > 80)) par.cob[jj,3] <- 1
    if ((IC.covtheta1[1] < 1.125) & (IC.covtheta1[2] > 1.125)) par.cob[jj,4] <- 1
    categ <- categ + 1
    cat('\n', categ)
  }
  i <- i+1
  meanparms0[i,] <- apply(param,2,mean)
  devparms0[i,] <- apply(param,2,sd)
  cobertura0[i,] <- apply(par.cob,2,mean)
}
a0 <- cbind(meanparms0,devparms0,cobertura0)
round(a0,3)
## RISCO CRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)

```

```

devparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
for (n in tam.amostra){
  cob.alpha <- 0
  cob.beta <- 0
  cob.theta <- 0
  param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
  par.cob <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
  for (jj in 1:B){
    par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=4)
    set.seed(23566 + jj)
    x.base <- rep(0,n)
    while(length(x.base[x.base==0])==n || length(x.base[x.base==1])==n)
      x.base <- rbinom(n,1,0.5)
    base <- numeric(n)
    for (ii in 1:n) base[ii] <- rweirc(1,9,0.7,exp(4.382 + 0.118*x.base[ii]))
    cens <- rep(1,n)
    for (j in 1:boot){
      erro <- TRUE
      while(erro){
        t <- sample(base,n,replace=T)
        x <- x.base[match(t,base)]
        k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(9),logbeta=log(0.7),covtheta0=4.382,
          covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
        if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0))
          || (k1@details$convergence != 0)
        }
      par.boot[j,] <- exp(k1@coef)
    }
    param[jj,] <- apply(par.boot,2,mean)
    IC.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
    IC.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
    IC.covtheta0 <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
    IC.covtheta1 <- c(quantile(par.boot[,4],0.025),quantile(par.boot[,4],0.975))
    if ((IC.alpha[1] < 9) & (IC.alpha[2] > 9)) par.cob[jj,1] <- 1
    if ((IC.beta[1] < 0.7) & (IC.beta[2] > 0.7)) par.cob[jj,2] <- 1
    if ((IC.covtheta0[1] < 80) & (IC.covtheta0[2] > 80)) par.cob[jj,3] <- 1
    if ((IC.covtheta1[1] < 1.125) & (IC.covtheta1[2] > 1.125)) par.cob[jj,4] <- 1
    categ <- categ + 1
    cat('\n', categ)
  }
  i <- i+1
  meanparms0[i,] <- apply(param,2,mean)
  devparms0[i,] <- apply(param,2,sd)
  cobertura0[i,] <- apply(par.cob,2,mean)
}
a0 <- cbind(meanparms0,devparms0,cobertura0)
round(a0,3)
## RISCO DECRESCENTE: Prob. Cobertura
categ <- 0
i <- 0
meanparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
devparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
for (n in tam.amostra){
  cob.alpha <- 0
  cob.beta <- 0
  cob.theta <- 0
  param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
  par.cob <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
  for (jj in 1:B){
    par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=4)

```

```

set.seed(23566 + jj)
x.base <- rep(0,n)
while(length(x.base[x.base==0])==n || length(x.base[x.base==1])==n)
  x.base <- rbinom(n,1,0.5)
base <- numeric(n)
for (ii in 1:n) base[ii] <- rweirc(1,0.9,0.7,exp(4.382 + 0.118*x.base[ii]))
cens <- rep(1,n)
for (j in 1:boot){
erro <- TRUE
cont.erro <- 0
while(erro){
if (cont.erro >= 30){
base <- numeric(n)
for (ii in 1:n) base[ii] <- rweirc(1,0.9,0.7,exp(4.382 + 0.118*x.base[ii]))
cont.erro <- 0
}
t <- sample(base,n,replace=T)
x <- x.base[match(t,base)]
k1 <- try(mle(LLL,start=list(logalpha=log(0.9),logbeta=log(0.7),covtheta0=4.382,
covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)
|| (k1@details$convergence != 0)
cont.erro <- cont.erro + 1
}
par.boot[j,] <- exp(k1@coef)
}
param[jj,] <- apply(par.boot,2,mean)
IC.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
IC.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
IC.covtheta0 <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
IC.covtheta1 <- c(quantile(par.boot[,4],0.025),quantile(par.boot[,4],0.975))
if ((IC.alpha[1] < 0.9) & (IC.alpha[2] > 0.9)) par.cob[jj,1] <- 1
if ((IC.beta[1] < 0.7) & (IC.beta[2] > 0.7)) par.cob[jj,2] <- 1
if ((IC.covtheta0[1] < 80) & (IC.covtheta0[2] > 80)) par.cob[jj,3] <- 1
if ((IC.covtheta1[1] < 1.125) & (IC.covtheta1[2] > 1.125)) par.cob[jj,4] <- 1
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1
meanparms0[i,] <- apply(param,2,mean)
devparms0[i,] <- apply(param,2,sd)
cobertura0[i,] <- apply(par.cob,2,mean)
}
a0 <- cbind(meanparms0,devparms0,cobertura0)
round(a0,3)
## RISCO UNIMODAL: Prob. Cobertura
LLL2 <- function(alpha,beta,covtheta0,covtheta1){
# função a ser minimizada: -log L reparametrizada
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*x)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}
tam.amostra <- c(10,30,50,100,300)
B <- 1000 # n de replicações
boot <- 399 # n bootstrap
categ <- 0
i <- 0
meanparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
devparms0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
cobertura0 <- matrix(0,nrow=length(tam.amostra),ncol=4)
for (n in tam.amostra){

```

```

cob.alpha <- 0
cob.beta <- 0
cob.theta <- 0
param <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
par.cob <- matrix(0,nrow=B,ncol=4)
for (jj in 1:B){
par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=4)
set.seed(23566 + jj)
x.base <- rep(0,n)
while(length(x.base[x.base==0])==n || length(x.base[x.base==1])==n)
  x.base <- rbinom(n,1,0.5)

base <- numeric(n)
for (ii in 1:n) base[ii] <- rweirc(1,-9,-0.7,
  exp(4.382 + 0.118*x.base[ii]))
cens <- rep(1,n)
for (j in 1:boot){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- sample(base,n,replace=T)
x <- x.base[match(t,base)]
k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=-9,beta=-0.7,covtheta0=4.382,
  covtheta1=0.118),method="BFGS"),silent=TRUE)
if (class(k1)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k1)) < 0)
  || (k1@details$convergence != 0)
)
}
par.boot[j,] <- c(k1@coef[1],k1@coef[2],exp(k1@coef[3]),exp(k1@coef[4]))
}
param[jj,] <- apply(par.boot,2,mean)
IC.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
IC.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
IC.covtheta0 <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
IC.covtheta1 <- c(quantile(par.boot[,4],0.025),quantile(par.boot[,4],0.975))
if ((IC.alpha[1] < -9) & (IC.alpha[2] > -9)) par.cob[jj,1] <- 1
if ((IC.beta[1] < -0.7) & (IC.beta[2] > -0.7)) par.cob[jj,2] <- 1
if ((IC.covtheta0[1] < 80) & (IC.covtheta0[2] > 80)) par.cob[jj,3] <- 1
if ((IC.covtheta1[1] < 1.125) & (IC.covtheta1[2] > 1.125)) par.cob[jj,4] <- 1
categ <- categ + 1
cat('\n', categ)
}
i <- i+1
meanparms0[i,] <- apply(param,2,mean)
devparms0[i,] <- apply(param,2,sd)
cobertura0[i,] <- apply(par.cob,2,mean)
}
a0 <- cbind(meanparms0,devparms0,cobertura0)
round(a0,3)

#####
##### EXEMPLOS #####
#####

require(stats4)
TTT <- function(falha){ ## Apenas tempos de falha
t <- sort(falha)
n <- length(falha)
den <- sum(falha)
phi <- numeric(n)
for (r in 1:n){
soma <- 0
for (i in 1:r){
soma <- soma + t[i]
}
phi[r] <- (soma + (n-r)*t[r])/den
}
phi
}

```

```

}
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))^-1) - 1)^(1/b))^(1/a)

LLL <- function(logalpha,logbeta,logtheta){
  # função a ser minimizada: -log L reparametrizada
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(logtheta)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^-alpha) + (alpha-1)*log(t) +
  (t/theta)^alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
  (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

LLL2 <- function(alpha,beta,theta){
  # função a ser minimizada: -log L reparametrizada
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^-alpha) + (alpha-1)*log(t) +
  (t/theta)^alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
  (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

### Exemplo 1 (Kimball, 1960) ###
x <- read.table("dadoscrescente.txt")
attach(x)
t <- as.numeric(V1)
cens <- 1
### TTT Plot ###
razao <- 1:length(t)/length(t)
plot(razao,TTT(t),type="l",xlim=c(0,1),ylim=c(0,1))
abline(0,1,col="red")
#####
##### Inferência Clássica (Assintótica) #####
#####
k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=6.2278,beta=0.7495,theta=131.45),
  method="BFGS"))
param1 <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
IC.alpha <- c(k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha, k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha)
IC.beta <- c(k1@coef[2] - 1.96*sd.beta, k1@coef[2] + 1.96*sd.beta)
IC.theta <- c(k1@coef[3] - 1.96*sd.theta, k1@coef[3] + 1.96*sd.theta)
IC.alpha
IC.beta
IC.theta
#####
##### Inferência Clássica (Bootstrap) #####
#####
boot <- 399 # n bootstrap
base <- t
n <- length(t)
par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=3)
set.seed(23456)
for (j in 1:boot){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- sample(base,n,replace=T)
k2 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=6.2278,beta=0.7495,theta=131.45),
  method="BFGS"))
if (class(k2)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k2)) < 0)
  || (k2@details$convergence != 0))
}
}

```

```

par.boot[j,] <- k2@coef
}
param2 <- apply(par.boot,2,mean)
IC2.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
IC2.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
IC2.theta <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
IC2.alpha
IC2.beta
IC2.theta
#####
##### Inferência Bayesiana #####
#####
t <- base
M.rnorm <- function(n,mu,V){
p <- ncol(V)
if (length(mu) < p) mu <- rep(mu,p)
DVS <- svd(V)
if (prod(DVS$d) <= 0) stop("Matriz de Var Inadequada")
Q <- t(DVS$v%*(t(DVS$u*sqrt(DVS$d))))
X <- matrix(rnorm(n*p),nrow=n)%*%Q
X <- sweep(X,2,mu,"+")
X}
##### POSTERIORI COM PRIORI DE JEFFREYS #####
dlogpost <- function(alpha,beta,theta){
logpost <- -LLL2(alpha,beta,theta) + log(sqrt(det(k1@details$hessian)))
if (logpost == "NaN" || logpost == Inf) logpost <- -Inf
logpost
}
#####
amostra <- 2000
salto <- 15
burnin <- 5000
N.it <- burnin + amostra*salto
dlogmax <- function(alpha,beta,theta) -dlogpost(alpha,beta,theta)
k1@coef
k.post <- try(mle(dlogmax,start=list(alpha=6.2278,beta=0.7495,theta=131.45),
method="BFGS"))
m <- k.post@coef
V <- vcov(k.post)
est.pos <- matrix(0,nrow=N.it,ncol=3)
est.pos[1,1] <- 1
est.pos[1,2] <- 2
est.pos[1,3] <- 30
set.seed(4231)
for (i in 2:N.it){
a <- M.rnorm(1,m,V)
a1 <- a[1]
a2 <- a[2]
a3 <- a[3]
if (dlogpost(est.pos[i-1,1],est.pos[i-1,2],est.pos[i-1,3]) == -Inf)
aceit <- 1 else{
prob <- exp(dlogpost(a1,a2,a3) - dlogpost(est.pos[i-1,1],
est.pos[i-1,2],est.pos[i-1,3]))
aceit <- min(1,prob)}
if (runif(1) <= aceit) est.pos[i,] <- c(a1,a2,a3) else
est.pos[i,] <- est.pos[i-1,]
}
salto.fim <- seq(burnin + salto,N.it,by=salto)
mcmc <- est.pos[salto.fim,]
par(mfrow=c(3,1))
plot(mcmc[,1],type="l",ylab="alpha",xlab="n")
plot(mcmc[,2],type="l",ylab="beta",xlab="n")

```

```

plot(mcmc[,3],type="l",ylab="theta",xlab="n")
param3 <- apply(mcmc,2,mean)
param3
ICred.alpha <- c(quantile(mcmc[,1],0.025),quantile(mcmc[,1],0.975))
ICred.beta <- c(quantile(mcmc[,2],0.025),quantile(mcmc[,2],0.975))
ICred.theta <- c(quantile(mcmc[,3],0.025),quantile(mcmc[,3],0.975))
ICred.alpha
ICred.beta
ICred.theta

IC.alpha[2] - IC.alpha[1]
IC2.alpha[2] - IC2.alpha[1]
ICred.alpha[2] - ICred.alpha[1]
IC.beta[2] - IC.beta[1]
IC2.beta[2] - IC2.beta[1]
ICred.beta[2] - ICred.beta[1]
IC.theta[2] - IC.theta[1]
IC2.theta[2] - IC2.theta[1]
ICred.theta[2] - ICred.theta[1]
hweirc<-function(x,a,b,t){
h<-numeric(length(x))
for (i in 1:length(x))
h[i] <- (a*b/x[i]) * (x[i]/t)^a * exp(-(x[i]/t)^a) * (exp(-(x[i]/t)^a) - 1)^(b-1)
* (1 + (exp(-(x[i]/t)^a) - 1)^b)^(-1)
h}
t <- seq(0.1,100,by=0.1)
h1 <- hweirc(t,param1[1],param1[2],param1[3])
h2 <- hweirc(t,param2[1],param2[2],param2[3])
h3 <- hweirc(t,param3[1],param3[2],param3[3])
plot(t,h1,type="l",ylab="h(t)",lty=2)
lines(t,h2,lwd=2)
a1 <- matrix(c(param1[1],param2[1],param3[1]),nrow=3,ncol=1)
a2 <- matrix(c(param1[2],param2[2],param3[2]),nrow=3,ncol=1)
a3 <- matrix(c(param1[3],param2[3],param3[3]),nrow=3,ncol=1)
estim <- rbind(a1,a2,a3)
inter1 <- rbind(IC.alpha,IC2.alpha,ICred.alpha)
inter2 <- rbind(IC.beta,IC2.beta,ICred.beta)
inter3 <- rbind(IC.theta,IC2.theta,ICred.theta)
inter <- rbind(inter1,inter2,inter3)
amp <- inter[,2] - inter[,1]
total <- cbind(estim,inter,amp)
total <- as.numeric(total)
total <- matrix(total,nrow=9,ncol=4)
total2 <- round(total,3)
nomes <- c("Assintótica","Bootstrap","Bayesiana")
nomes <- matrix(nomes,nrow=3)
nomes2 <- rbind(nomes,nomes,nomes)
tabela <- cbind(nomes2,total2)
tabela
#####
### Comparações - Exemplo 1 ###
#####
LLLa <- function(alpha,beta,theta){ # Modelo Weibull Razão de Chances
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}
LLLb <- function(alpha,theta){ # Modelo Weibull
beta <- 1
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

```



```

LLC <- function(theta){ # Modelo Exponencial
alpha <- 1
beta <- 1
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

x <- read.table("dadoscrescente.txt")
attach(x)
t <- as.numeric(V1)
cens <- 1

#####
##### Modelo Weibull RC #####
#####

k1 <- try(mle(LLLa,start=list(alpha=6.2278,beta=0.7495,theta=131.45),
method="BFGS"))

param1 <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])

ur <- 2*k1@min

#####
##### Modelo Weibull #####
#####

k2 <- try(mle(LLLb,start=list(alpha=4.952,theta= 132.296),method="BFGS"))
param2 <- k2@coef
sd.alpha2 <- sqrt(vcov(k2)[1,1])
sd.theta2 <- sqrt(vcov(k2)[2,2])

r1 <- 2*k2@min
trv1 <- r1 - ur

#####
##### Modelo Exponencial #####
#####

k3 <- try(mle(LLLc,start=list(theta=121.245),method="BFGS"))
param3 <- k3@coef
sd.theta3 <- sqrt(vcov(k3)[1,1])

r2 <- 2*k3@min
trv2 <- r2 - ur

#####
##### Resultados #####
#####

alpha.fim <- c(param1[1],param2[1],0)
beta.fim <- c(param1[2],0,0)
theta.fim <- c(param1[3],param2[2],param3)

sdalpha.fim <- c(sd.alpha,sd.alpha2,0)
sdbeta.fim <- c(sd.beta,0,0)
sdtheta.fim <- c(sd.theta,sd.theta2,sd.theta3)

logvero.fim <- c(ur,r1,r2)
trv.fim <- c(0,trv1,trv2)
pvalue.fim <- c(0,1 - pchisq(trv1,2),1 - pchisq(trv2,1))

aic.fim <- c(AIC(k1),AIC(k2),AIC(k3))
bic.fim <- c(AIC(k1,k=log(length(t))),AIC(k2,k=log(length(t))),
AIC(k3,k=log(length(t))))

resultado <- rbind(alpha.fim,beta.fim,theta.fim,sdalpha.fim,sdbeta.fim,
sdtheta.fim,logvero.fim,trv.fim,pvalue.fim,aic.fim,bic.fim)
round(resultado,3)

#####
### Exemplo 2 (Efron, 1988) ###
#####

LLL2 <- function(alpha,beta,theta){
# função a ser minimizada: -log L reparametrizada

```

```

loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
  (t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
  (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

dias <- c(7,34,42,63,64,74,83,84,91,108,112,129,133,133,139,140,140,146,149,154,157,
  160,160,165,173,176,185,218,225,241,248,273,277,279,297,319,405,417,420,440,
  523,523,583,594,1101,1116,1146,1226,1349,1412,1417)
t <- trunc(dias/30.438) + 1
cens <- c(1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,0,1,1,
  1,1,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1)

### TTT Plot ###
razao <- 1:length(t)/length(t)
plot(razao,TT(t),type="l",xlim=c(0,1),ylim=c(0,1))
abline(0,1,col="red")

#####
##### Inferência Clássica (Assintótica) #####
#####

k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=-0.89,beta=-1.30,theta=5.38),method="BFGS"))
param1 <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
IC.alpha <- c(k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha, k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha)
IC.beta <- c(k1@coef[2] - 1.96*sd.beta, k1@coef[2] + 1.96*sd.beta)
IC.theta <- c(k1@coef[3] - 1.96*sd.theta, k1@coef[3] + 1.96*sd.theta)
IC.alpha
IC.beta
IC.theta

#####
##### Inferência Clássica (Bootstrap) #####
#####

boot <- 399 # n bootstrap
base <- t
c.base <- cens
n <- length(t)
par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=3)

for(j in 1:boot){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- sample(base,n,replace=T)
cens <- c.base[match(t,base)]
k2 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=-0.89,beta=-1.30,theta=5.38),method="BFGS"))
if (class(k2)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k2)) < 0)
  || (k2@details$convergence != 0))
}
par.boot[j,] <- k2@coef
}

param2 <- apply(par.boot,2,mean)
IC2.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
IC2.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
IC2.theta <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
IC2.alpha
IC2.beta
IC2.theta

#####
##### Inferência Bayesiana #####
#####

t <- base
cens <- c.base
M.rnorm <- function(n,mu,V){
p <- ncol(V)

```

```

if (length(mu) < p) mu <- rep(mu,p)
DVS <- svd(V)
if (prod(DVS$d) <= 0) stop("Matriz de Var Inadequada")
Q <- t(DVS$v%*%(t(DVS$u*sqrt(DVS$d))))
X <- matrix(rnorm(n*p),nrow=n)%*%Q
X <- sweep(X,2,mu,"+")
X}

##### POSTERIORI COM PRIORI DE JEFFREYS #####
dlogpost <- function(alpha,beta,theta){
logpost <- -LLL2(alpha,beta,theta) + log(sqrt(det(k1@details$hessian)))
if (logpost == "NaN" || logpost == Inf) logpost <- -Inf
logpost
}

#####
amostra <- 2000
salto <- 15
burnin <- 5000
N.it <- burnin + amostra*salto

dlogmax <- function(alpha,beta,theta) -dlogpost(alpha,beta,theta)
k1@coef

k.post <- try(mle(dlogmax,start=list(alpha=-0.89,beta=-1.30,theta=5.38),
method="BFGS"))

m <- k.post@coef
V <- vcov(k.post)

est.pos <- matrix(0,nrow=N.it,ncol=3)
est.pos[1,1] <- 30
est.pos[1,2] <- 0.5
est.pos[1,3] <- 2
set.seed(4231)

for (i in 2:N.it){
a <- M.rnorm(1,m,V)
a1 <- a[1]
a2 <- a[2]
a3 <- a[3]

if (dlogpost(est.pos[i-1,1],est.pos[i-1,2],est.pos[i-1,3]) == -Inf)
  aceit <- 1 else{
  prob <- exp(dlogpost(a1,a2,a3) - dlogpost(est.pos[i-1,1],est.pos[i-1,2],
  est.pos[i-1,3]))
  aceit <- min(1,prob)}

if (runif(1) <= aceit) est.pos[i,] <- c(a1,a2,a3) else
  est.pos[i,] <- est.pos[i-1,]

}

salto.fim <- seq(burnin + salto,N.it,by=salto)
mcmc <- est.pos[salto.fim,]

par(mfrow=c(3,1))
plot(mcmc[,1],type="l",ylab="alpha",xlab="n")
plot(mcmc[,2],type="l",ylab="beta",xlab="n")
plot(mcmc[,3],type="l",ylab="theta",xlab="n")

param3 <- apply(mcmc,2,mean)
param3

ICred.alpha <- c(quantile(mcmc[,1],0.025),quantile(mcmc[,1],0.975))
ICred.beta <- c(quantile(mcmc[,2],0.025),quantile(mcmc[,2],0.975))
ICred.theta <- c(quantile(mcmc[,3],0.025),quantile(mcmc[,3],0.975))

ICred.alpha
ICred.beta
ICred.theta

IC.alpha[2] - IC.alpha[1]
IC2.alpha[2] - IC2.alpha[1]
ICred.alpha[2] - ICred.alpha[1]

IC.beta[2] - IC.beta[1]
IC2.beta[2] - IC2.beta[1]
ICred.beta[2] - ICred.beta[1]

```

```

IC.theta[2] - IC.theta[1]
IC2.theta[2] - IC2.theta[1]
ICred.theta[2] - ICred.theta[1]

param1
param2
param3

hweirc<-function(x,a,b,t){
h<-numeric(length(x))
for (i in 1:length(x))
h[i] <- (a*b/x[i]) * (x[i]/t)^a * exp((x[i]/t)^a) * (exp((x[i]/t)^a) - 1)^(b-1)
      * (1 + (exp((x[i]/t)^a) - 1)^b)^(-1)
h}

t <- seq(1,50,by=0.001)
h1 <- hweirc(t,param1[1],param1[2],param1[3])
h2 <- hweirc(t,param2[1],param2[2],param2[3])
h3 <- hweirc(t,param3[1],param3[2],param3[3])

plot(t,h1,type="l",ylab="h(t)",lwd=2,lty=2,ylim=c(0,0.16))
lines(t,h2,lwd=2)
lines(t,h3,lwd=2,lty=3)

AIC(k1)

a1 <- matrix(c(param1[1],param2[1],param3[1]),nrow=3,ncol=1)
a2 <- matrix(c(param1[2],param2[2],param3[2]),nrow=3,ncol=1)
a3 <- matrix(c(param1[3],param2[3],param3[3]),nrow=3,ncol=1)
estim <- rbind(a1,a2,a3)

inter1 <- rbind(IC.alpha,IC2.alpha,ICred.alpha)
inter2 <- rbind(IC.beta,IC2.beta,ICred.beta)
inter3 <- rbind(IC.theta,IC2.theta,ICred.theta)
inter <- rbind(inter1,inter2,inter3)

amp <- inter[,2] - inter[,1]

total <- cbind(estim,inter,amp)
total <- as.numeric(total)
total <- matrix(total,nrow=9,ncol=4)
total2 <- round(total,3)

nomes <- c("Assintótica","Bootstrap","Bayesiana")
nomes <- matrix(nomes,nrow=3)
nomes2 <- rbind(nomes,nomes,nomes)
tabela <- cbind(nomes2,total2)

tabela

cbind(base,c.base)

#####
### Comparações - Exemplo 2 ###
#####

LLLa <- function(alpha,beta,theta){ # Modelo Weibull Razão de Chances
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

LLLb <- function(alpha,theta){ # Modelo Weibull
beta <- 1
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

LLLc <- function(theta){ # Modelo Exponencial
alpha <- 1
beta <- 1
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
(t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
(1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

dias <- c(7,34,42,63,64,74,83,84,91,108,112,129,133,133,139,140,140,146,149,154,

```

```

157,160,160,165,173,176,185,218,225,241,248,273,277,279,297,319,405,417,
420,440,523,523,583,594,1101,1116,1146,1226,1349,1412,1417)
t <- trunc(dias/30.438) + 1
cens <- c(1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,0,
1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1)

#####
##### Modelo Weibull RC #####
#####

k1 <- try(mle(LLLa,start=list(alpha=-0.89,beta=-1.30,theta=5.38),method="BFGS"))
param1 <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
ur <- 2*k1@min

#####
##### Modelo Weibull #####
#####

k2 <- try(mle(LLLb,start=list(alpha=0.999,theta=14.950),method="BFGS"))
param2 <- k2@coef
sd.alpha2 <- sqrt(vcov(k2)[1,1])
sd.theta2 <- sqrt(vcov(k2)[2,2])
r1 <- 2*k2@min
trv1 <- r1 - ur

#####
##### Modelo Exponencial #####
#####

k3 <- try(mle(LLLc,start=list(theta=14.950),method="BFGS"))
param3 <- k3@coef
sd.theta3 <- sqrt(vcov(k3)[1,1])
r2 <- 2*k3@min
trv2 <- r2 - ur

#####
##### Resultados #####
#####

alpha.fim <- c(param1[1],param2[1],0)
beta.fim <- c(param1[2],0,0)
theta.fim <- c(param1[3],param2[2],param3)
sdalpha.fim <- c(sd.alpha,sd.alpha2,0)
sdbeta.fim <- c(sd.beta,0,0)
sdtheta.fim <- c(sd.theta,sd.theta2,sd.theta3)
logvero.fim <- c(ur,r1,r2)
trv.fim <- c(0,trv1,trv2)
pvalue.fim <- c(0,1 - pchisq(trv1,2),1 - pchisq(trv2,1))
aic.fim <- c(AIC(k1),AIC(k2),AIC(k3))
bic.fim <- c(AIC(k1,k=log(length(t))),AIC(k2,k=log(length(t))),
AIC(k3,k=log(length(t))))

resultado <- rbind(alpha.fim,beta.fim,theta.fim,sdalpha.fim,sdbeta.fim,
sdtheta.fim,logvero.fim,trv.fim,pvalue.fim,aic.fim,bic.fim)
round(resultado,3)

#####
### Exemplo 3 (Halley, 1693) ###
#####

require(stats4)
TTT <- function(falha){ ## Apenas tempos de falha
t <- sort(falha)
n <- length(falha)
den <- sum(falha)
phi <- numeric(n)
for (r in 1:n){
soma <- 0
for (i in 1:r){
soma <- soma + t[i]
}
phi[r] <- (soma + (n-r)*t[r])/den
}
}

```

```
}
phi
}
rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))(-1) - 1)(1/b)))(1/a)

LLL <- function(logalpha,logbeta,logtheta){ # função a ser minimizada: -log L reparametrizada
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(logtheta)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)(alpha) + (beta-1)
-sum(loglik)
}

LLL2 <- function(alpha,beta,theta){ # função a ser minimizada: -log L reparametrizada
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)(alpha) + (beta-1)
-sum(loglik)
}

t <- c(
rep(1,145),
rep(2,57),
rep(3,38),
rep(4,28),
rep(5,22),
rep(6,18),
rep(7,12),
rep(8,10),
rep(9,9),
rep(10,8),
rep(11,7),
rep(12,6),
rep(13,6),
rep(14,6),
rep(15,6),
rep(16,6),
rep(17,6),
rep(18,6),
rep(19,6),
rep(20,6),
rep(21,7),
rep(22,6),
rep(23,6),
rep(24,6),
rep(25,7),
rep(26,7),
rep(27,7),
rep(28,7),
rep(29,8),
rep(30,8),
rep(31,8),
rep(32,8),
rep(33,8),
rep(34,9),
rep(35,9),
rep(36,9),
rep(37,9),
rep(38,9),
rep(39,9),
rep(40,9),
rep(41,9),
rep(42,8),
rep(43,10),
rep(44,12),
rep(45,10),
rep(46,10),
rep(47,10),
rep(48,10),
```

```

rep(49,11),
rep(50,11),
rep(51,11),
rep(52,11),
rep(53,11),
rep(54,10),
rep(55,10),
rep(56,10),
rep(57,10),
rep(58,10),
rep(59,10),
rep(60,10),
rep(61,10),
rep(62,10),
rep(63,10),
rep(64,10),
rep(65,10),
rep(66,10),
rep(67,10),
rep(68,10),
rep(69,10),
rep(70,11),
rep(71,11),
rep(72,11),
rep(73,11),
rep(74,10),
rep(75,10),
rep(76,10),
rep(77,10),
rep(78,9),
rep(79,8),
rep(80,7),
rep(81,6),
rep(82,5),
rep(83,3),
rep(84,20)
)

cens <- rep(1,1000)
### TTT Plot ###
razao <- 1:length(t)/length(t)
plot(razao,TTT(t),type="l",xlim=c(0,1),ylim=c(0,1))
abline(0,1,col="red")

#####
##### Inferência Clássica (Assintótica) #####
#####

k1 <- try(mle(LL2,start=list(alpha=3.6879874,beta=0.1816192,theta=36.4787230),method="BFGS"))
param1 <- k1@coef

sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])

IC.alpha <- c(k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha, k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha)
IC.beta <- c(k1@coef[2] - 1.96*sd.beta, k1@coef[2] + 1.96*sd.beta)
IC.theta <- c(k1@coef[3] - 1.96*sd.theta, k1@coef[3] + 1.96*sd.theta)

IC.alpha
IC.beta
IC.theta

#####
##### Inferência Clássica (Bootstrap) #####
#####

boot <- 399 # n bootstrap
base <- t
n <- length(t)
par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=3)
set.seed(23456)

for (j in 1:boot){

```

```

erro <- TRUE
while(erro){
t <- sample(base,n,replace=T)
k2 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=3.6879874,beta=0.1816192,theta=36.4787230),method="BFGS"))
if (class(k2)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k2)) < 0)) || (k2@details$
}
par.boot[j,] <- k2@coef
}
param2 <- apply(par.boot,2,mean)
IC2.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
IC2.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
IC2.theta <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
IC2.alpha
IC2.beta
IC2.theta
#####
##### Inferência Bayesiana #####
#####
t <- base
M.rnorm <- function(n,mu,V){
p <- ncol(V)
if (length(mu) < p) mu <- rep(mu,p)
DVS <- svd(V)
if (prod(DVS$d) <= 0) stop("Matriz de Var Inadequada")
Q <- t(DVS$v%*(t(DVS$u*sqrt(DVS$d))))
X <- matrix(rnorm(n*p),nrow=n)%*%Q
X <- sweep(X,2,mu,"+")
X}
##### POSTERIORI COM PRIORI DE JEFFREYS #####
dlogpost <- function(alpha,beta,theta){
logpost <- -LLL2(alpha,beta,theta) + log(sqrt(det(k1@details$hessian)))
if (logpost == "NaN" || logpost == Inf) logpost <- -Inf
logpost
}
#####
amostra <- 2000
salto <- 15
burnin <- 5000
N.it <- burnin + amostra*salto
dlogmax <- function(alpha,beta,theta) -dlogpost(alpha,beta,theta)
k1@coef
k.post <- try(mle(dlogmax,start=list(alpha=3.6879874,beta=0.1816192,theta=36.4787230),method="B
m <- k.post@coef
V <- vcov(k.post)
est.pos <- matrix(0,nrow=N.it,ncol=3)
est.pos[1,1] <- 3.6
est.pos[1,2] <- 0.18
est.pos[1,3] <- 36.4
set.seed(4231)
for (i in 2:N.it){
a <- M.rnorm(1,m,V)
a1 <- a[1]
a2 <- a[2]
a3 <- a[3]
if (dlogpost(est.pos[i-1,1],est.pos[i-1,2],est.pos[i-1,3])) == -Inf) aceit <- 1 else{
prob <- exp(dlogpost(a1,a2,a3) - dlogpost(est.pos[i-1,1],est.pos[i-1,2],est.pos[i-1,3]))
aceit <- min(1,prob)}
if (runif(1) <= aceit) est.pos[i,] <- c(a1,a2,a3) else
est.pos[i,] <- est.pos[i-1,]
}
salto.fim <- seq(burnin + salto,N.it,by=salto)
mcmc <- est.pos[salto.fim,]

```



```

par(mfrow=c(3,1))
plot(mcmc[,1],type="l",ylab="alpha",xlab="n")
plot(mcmc[,2],type="l",ylab="beta",xlab="n")
plot(mcmc[,3],type="l",ylab="theta",xlab="n")

param3 <- apply(mcmc,2,mean)
param3

ICred.alpha <- c(quantile(mcmc[,1],0.025),quantile(mcmc[,1],0.975))
ICred.beta <- c(quantile(mcmc[,2],0.025),quantile(mcmc[,2],0.975))
ICred.theta <- c(quantile(mcmc[,3],0.025),quantile(mcmc[,3],0.975))

ICred.alpha
ICred.beta
ICred.theta

IC.alpha[2] - IC.alpha[1]
IC2.alpha[2] - IC2.alpha[1]
ICred.alpha[2] - ICred.alpha[1]

IC.beta[2] - IC.beta[1]
IC2.beta[2] - IC2.beta[1]
ICred.beta[2] - ICred.beta[1]

IC.theta[2] - IC.theta[1]
IC2.theta[2] - IC2.theta[1]
ICred.theta[2] - ICred.theta[1]

hweirc<-function(x,a,b,t){
h<-numeric(length(x))
for (i in 1:length(x))
h[i] <- (a*b/x[i]) * (x[i]/t)^a * exp((x[i]/t)^a) * (exp((x[i]/t)^a) - 1)^(b-1) * (1 + (exp((x[i]/t)^a) - 1)^(b-1))^(1/b))
h}

t <- seq(0.1,100,by=0.1)
h1 <- hweirc(t,param1[1],param1[2],param1[3])
h2 <- hweirc(t,param2[1],param2[2],param2[3])
h3 <- hweirc(t,param3[1],param3[2],param3[3])

plot(t,h1,type="l",ylab="h(t)",lty=2)
lines(t,h2,lwd=2)

a1 <- matrix(c(param1[1],param2[1],param3[1]),nrow=3,ncol=1)
a2 <- matrix(c(param1[2],param2[2],param3[2]),nrow=3,ncol=1)
a3 <- matrix(c(param1[3],param2[3],param3[3]),nrow=3,ncol=1)
estim <- rbind(a1,a2,a3)

inter1 <- rbind(IC.alpha,IC2.alpha,ICred.alpha)
inter2 <- rbind(IC.beta,IC2.beta,ICred.beta)
inter3 <- rbind(IC.theta,IC2.theta,ICred.theta)
inter <- rbind(inter1,inter2,inter3)

amp <- inter[,2] - inter[,1]

total <- cbind(estim,inter,amp)
total <- as.numeric(total)
total <- matrix(total,nrow=9,ncol=4)
total2 <- round(total,3)

nomes <- c("Assintótica","Bootstrap","Bayesiana")
nomes <- matrix(nomes,nrow=3)
nomes2 <- rbind(nomes,nomes,nomes)
tabela <- cbind(nomes2,total2)

tabela

#####
### Comparações - Exemplo 3 ###
#####

require(stats4)

rweirc <- function(n,a,b,t) t*(log(1 + ((1 - runif(n))^(1/a) - 1)^(1/b)))^(1/a)
LLLa <- function(alpha,beta,theta){ # Modelo Weibull Razão de Chances
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(t/theta))
-sum(loglik)
}

LLLb <- function(alpha,theta){ # Modelo Weibull
beta <- 1

```

```
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)^(alpha) + (beta-1)
-sum(loglik)
}
LLlc <- function(theta){ # Modelo Exponencial
alpha <- 1
beta <- 1
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) + (t/theta)^(alpha) + (beta-1)
-sum(loglik)
}
t <- c(
rep(1,145),
rep(2,57),
rep(3,38),
rep(4,28),
rep(5,22),
rep(6,18),
rep(7,12),
rep(8,10),
rep(9,9),
rep(10,8),
rep(11,7),
rep(12,6),
rep(13,6),
rep(14,6),
rep(15,6),
rep(16,6),
rep(17,6),
rep(18,6),
rep(19,6),
rep(20,6),
rep(21,7),
rep(22,6),
rep(23,6),
rep(24,6),
rep(25,7),
rep(26,7),
rep(27,7),
rep(28,7),
rep(29,8),
rep(30,8),
rep(31,8),
rep(32,8),
rep(33,8),
rep(34,9),
rep(35,9),
rep(36,9),
rep(37,9),
rep(38,9),
rep(39,9),
rep(40,9),
rep(41,9),
rep(42,8),
rep(43,10),
rep(44,12),
rep(45,10),
rep(46,10),
rep(47,10),
rep(48,10),
rep(49,11),
rep(50,11),
rep(51,11),
rep(52,11),
rep(53,11),
rep(54,10),
rep(55,10),
rep(56,10),
rep(57,10),
```

```

rep(58,10),
rep(59,10),
rep(60,10),
rep(61,10),
rep(62,10),
rep(63,10),
rep(64,10),
rep(65,10),
rep(66,10),
rep(67,10),
rep(68,10),
rep(69,10),
rep(70,11),
rep(71,11),
rep(72,11),
rep(73,11),
rep(74,10),
rep(75,10),
rep(76,10),
rep(77,10),
rep(78,9),
rep(79,8),
rep(80,7),
rep(81,6),
rep(82,5),
rep(83,3),
rep(84,20)
)
cens <- rep(1,1000)
#####
##### Modelo Weibull RC #####
#####
k1 <- try(mle(LLLa,start=list(alpha=3.6879874,beta=0.1816192,theta=36.4787230),method="BFGS"))
param1 <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.theta <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
ur <- 2*k1@min
#####
##### Modelo Weibull #####
#####
k2 <- try(mle(LLLb,start=list(alpha=0.8909983,theta=32.3542104),method="BFGS"))
param2 <- k2@coef
sd.alpha2 <- sqrt(vcov(k2)[1,1])
sd.theta2 <- sqrt(vcov(k2)[2,2])
r1 <- 2*k2@min
trv1 <- r1 - ur
#####
##### Modelo Exponencial #####
#####
k3 <- try(mle(LLLc,start=list(theta=33.89601),method="BFGS"))
param3 <- k3@coef
sd.theta3 <- sqrt(vcov(k3)[1,1])
r2 <- 2*k3@min
trv2 <- r2 - ur
#####
##### Resultados #####
#####
alpha.fim <- c(param1[1],param2[1],0)
beta.fim <- c(param1[2],0,0)
theta.fim <- c(param1[3],param2[2],param3)
sdalpha.fim <- c(sd.alpha,sd.alpha2,0)
sdbeta.fim <- c(sd.beta,0,0)
sdtheta.fim <- c(sd.theta,sd.theta2,sd.theta3)
logvero.fim <- c(ur,r1,r2)

```

```

trv.fim <- c(0,trv1,trv2)
pvalue.fim <- c(0,1 - pchisq(trv1,2),1 - pchisq(trv2,1))
aic.fim <- c(AIC(k1),AIC(k2),AIC(k3))
bic.fim <- c(AIC(k1,k=log(length(t))),AIC(k2,k=log(length(t))),AIC(k3,k=log(length(t))))
resultado <- rbind(alpha.fim,beta.fim,theta.fim,sdalpha.fim,sdbeta.fim,sdtheta.fim,logvero.fim,t)
round(resultado,3)

#####
### Exemplo 4 (Prentice, 1973) ###
#####

LLL <- function(logalpha,logbeta,covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,
               covtheta4,covtheta5,covtheta6,covtheta7){
alpha <- exp(logalpha)
beta <- exp(logbeta)
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*(x1-mean(x1)) + covtheta2*(x2-mean(x2)) +
            covtheta3*(x3-mean(x3)) + covtheta4*x4 + covtheta5*x5 +
            covtheta6*x6 + covtheta7*x7)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
              (t/theta)^alpha + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
          (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

LLL2 <- function(alpha,beta,covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,covtheta4,
                covtheta5,covtheta6,covtheta7){
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*(x1-mean(x1)) + covtheta2*(x2-mean(x2)) +
            covtheta3*(x3-mean(x3)) + covtheta4*x4 + covtheta5*x5 +
            covtheta6*x6 + covtheta7*x7)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
              (t/theta)^alpha + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
          (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

teste <- read.table("lawless.txt",sep=" ",header=T)
attach(teste)
t <- teste[,1]
cens <- teste[,9]

k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=1.563,beta=0.6885,covtheta0=4.6681,covtheta1=0.0556,
                           covtheta2=0.0128,covtheta3=0.0056,covtheta4=0.5385,covtheta5=-0.1149,
                           covtheta6=-0.9349,covtheta7=-0.2583),method="BFGS"))

### TTT Plot ###
razao <- 1:length(t)/length(t)
plot(razao,TTT(t),type="l",xlim=c(0,1),ylim=c(0,1))
abline(0,1,col="red")

#####
##### Inferência Clássica (Assintótica) #####
#####

k1 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=1.563,beta=0.6885,covtheta0=4.6681,covtheta1=0.0556,
                           covtheta2=0.0128,covtheta3=0.0056,covtheta4=0.5385,covtheta5=-0.1149,
                           covtheta6=-0.9349,covtheta7=-0.2583),method="BFGS"))

param1 <- k1@coef
sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.covtheta0 <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
sd.covtheta1 <- sqrt(vcov(k1)[4,4])
sd.covtheta2 <- sqrt(vcov(k1)[5,5])
sd.covtheta3 <- sqrt(vcov(k1)[6,6])
sd.covtheta4 <- sqrt(vcov(k1)[7,7])
sd.covtheta5 <- sqrt(vcov(k1)[8,8])
sd.covtheta6 <- sqrt(vcov(k1)[9,9])
sd.covtheta7 <- sqrt(vcov(k1)[10,10])

IC.alpha <- c(k1@coef[1] - 1.96*sd.alpha, k1@coef[1] + 1.96*sd.alpha)
IC.beta <- c(k1@coef[2] - 1.96*sd.beta, k1@coef[2] + 1.96*sd.beta)
IC.covtheta0 <- c(k1@coef[3] - 1.96*sd.covtheta0, k1@coef[3] + 1.96*sd.covtheta0)
IC.covtheta1 <- c(k1@coef[4] - 1.96*sd.covtheta1, k1@coef[4] + 1.96*sd.covtheta1)

```

```

IC.covtheta2 <- c(k1@coef[5] - 1.96*sd.covtheta2, k1@coef[5] + 1.96*sd.covtheta2)
IC.covtheta3 <- c(k1@coef[6] - 1.96*sd.covtheta3, k1@coef[6] + 1.96*sd.covtheta3)
IC.covtheta4 <- c(k1@coef[7] - 1.96*sd.covtheta4, k1@coef[7] + 1.96*sd.covtheta4)
IC.covtheta5 <- c(k1@coef[8] - 1.96*sd.covtheta5, k1@coef[8] + 1.96*sd.covtheta5)
IC.covtheta6 <- c(k1@coef[9] - 1.96*sd.covtheta6, k1@coef[9] + 1.96*sd.covtheta6)
IC.covtheta7 <- c(k1@coef[10] - 1.96*sd.covtheta7, k1@coef[10] + 1.96*sd.covtheta7)

IC.alpha
IC.beta
IC.covtheta0
IC.covtheta1
IC.covtheta2
IC.covtheta3
IC.covtheta4
IC.covtheta5
IC.covtheta6
IC.covtheta7

#####
##### Inferência Clássica (Bootstrap) #####
#####

boot <- 399 # n bootstrap
base <- t
c.base <- cens
x1.base <- x1
x2.base <- x2
x3.base <- x3
x4.base <- x4
x5.base <- x5
x6.base <- x6
x7.base <- x7
n <- length(t)
par.boot <- matrix(0,nrow=boot,ncol=10)

for (j in 1:boot){
erro <- TRUE
while(erro){
t <- sample(base,n,replace=T)
cens <- c.base[match(t,base)]
x1 <- x1.base[match(t,base)]
x2 <- x2.base[match(t,base)]
x3 <- x3.base[match(t,base)]
x4 <- x4.base[match(t,base)]
x5 <- x5.base[match(t,base)]
x6 <- x6.base[match(t,base)]
x7 <- x7.base[match(t,base)]
k2 <- try(mle(LLL2,start=list(alpha=1.563,beta=0.6885,covtheta0=4.6681,covtheta1=0.0556,
covtheta2=0.0128,covtheta3=0.0056,covtheta4=0.5385,covtheta5=-0.1149,
covtheta6=-0.9349,covtheta7=-0.2583),method="BFGS"))
if (class(k2)=="try-error") erro <- TRUE else erro <- (any(diag(vcov(k2)) < 0)
|| (k2@details$convergence != 0)
)
}
par.boot[j,] <- k2@coef
}

param2 <- apply(par.boot,2,mean)
IC2.alpha <- c(quantile(par.boot[,1],0.025),quantile(par.boot[,1],0.975))
IC2.beta <- c(quantile(par.boot[,2],0.025),quantile(par.boot[,2],0.975))
IC2.covtheta0 <- c(quantile(par.boot[,3],0.025),quantile(par.boot[,3],0.975))
IC2.covtheta1 <- c(quantile(par.boot[,4],0.025),quantile(par.boot[,4],0.975))
IC2.covtheta2 <- c(quantile(par.boot[,5],0.025),quantile(par.boot[,5],0.975))
IC2.covtheta3 <- c(quantile(par.boot[,6],0.025),quantile(par.boot[,6],0.975))
IC2.covtheta4 <- c(quantile(par.boot[,7],0.025),quantile(par.boot[,7],0.975))
IC2.covtheta5 <- c(quantile(par.boot[,8],0.025),quantile(par.boot[,8],0.975))
IC2.covtheta6 <- c(quantile(par.boot[,9],0.025),quantile(par.boot[,9],0.975))
IC2.covtheta7 <- c(quantile(par.boot[,10],0.025),quantile(par.boot[,10],0.975))

IC2.alpha
IC2.beta
IC2.covtheta0
IC2.covtheta1
IC2.covtheta2
IC2.covtheta3
IC2.covtheta4
IC2.covtheta5
IC2.covtheta6
IC2.covtheta7

#####

```

```
##### Inferência Bayesiana #####
#####

t <- base
cens <- c.base
x1 <- x1.base
x2 <- x2.base
x3 <- x3.base
x4 <- x4.base
x5 <- x5.base
x6 <- x6.base
x7 <- x7.base

M.rnorm <- function(n,mu,V){
p <- ncol(V)
if (length(mu) < p) mu <- rep(mu,p)
DVS <- svd(V)
if (prod(DVS$d) <= 0) stop("Matriz de Var Inadequada")
Q <- t(DVS$v*%(t(DVS$u*sqrt(DVS$d))))
X <- matrix(rnorm(n*p),nrow=n)%%Q
X <- sweep(X,2,mu,"+")
X}

##### POSTERIORI COM PRIORI DE JEFFREYS #####

dlogpost <- function(alpha,beta,covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,covtheta4,
covtheta5,covtheta6,covtheta7){

p1 <- alpha
p2 <- beta
p3 <- covtheta0
p4 <- covtheta1
p5 <- covtheta2
p6 <- covtheta3
p7 <- covtheta4
p8 <- covtheta5
p9 <- covtheta6
p10 <- covtheta7
logpost <- -LLL2(p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10) + log(sqrt(det(k1@details$hessian)))
if (logpost == "NaN" || logpost == Inf) logpost <- -Inf
logpost
}

#####

amostra <- 2000
salto <- 15
burnin <- 5000
N.it <- burnin + amostra*salto

dlogmax <- function(alpha,beta,covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,covtheta4,
covtheta5,covtheta6,covtheta7)
-dlogpost(alpha,beta,covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,covtheta4,
covtheta5,covtheta6,covtheta7)

k1@coef
k.post <- try(mle(dlogmax,start=list(alpha=1.563,beta=0.6885,covtheta0=4.6681,
covtheta1=0.0556,covtheta2=0.0128,covtheta3=0.0056,covtheta4=0.5385,
covtheta5=-0.1149,covtheta6=-0.9349,covtheta7=-0.2583),method="BFGS"))

m <- k.post@coef
V <- vcov(k.post)

est.pos <- matrix(0,nrow=N.it,ncol=10)

est.pos[1,1] <- 1.5
est.pos[1,2] <- 0.6
est.pos[1,3] <- 4.5
est.pos[1,4] <- 0.05
est.pos[1,5] <- 0.01
est.pos[1,6] <- 0
est.pos[1,7] <- 0.5
est.pos[1,8] <- -0.1
est.pos[1,9] <- -0.9
est.pos[1,10] <- -0.25

set.seed(4231)

for (i in 2:N.it){
a <- M.rnorm(1,m,V/10)
a1 <- a[1]
a2 <- a[2]
a3 <- a[3]
```

```

a4 <- a[4]
a5 <- a[5]
a6 <- a[6]
a7 <- a[7]
a8 <- a[8]
a9 <- a[9]
a10 <- a[10]

if (dlogpost(est.pos[i-1,1],est.pos[i-1,2],est.pos[i-1,3],est.pos[i-1,4],
  est.pos[i-1,5],est.pos[i-1,6],est.pos[i-1,7],est.pos[i-1,8],est.pos[i-1,9],
  est.pos[i-1,10]) == -Inf) aceit <- 1 else{
  prob <- exp(dlogpost(a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10) -
    dlogpost(est.pos[i-1,1],est.pos[i-1,2],est.pos[i-1,3],est.pos[i-1,4],
    est.pos[i-1,5],est.pos[i-1,6],est.pos[i-1,7],est.pos[i-1,8],est.pos[i-1,9],
    est.pos[i-1,10]))
  aceit <- min(1,prob)}

if (runif(1) <= aceit) est.pos[i,] <- c(a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10) else
  est.pos[i,] <- est.pos[i-1,]

}

salto.fim <- seq(burnin + salto,N.it,by=salto)
mcmc <- est.pos[salto.fim,]

par(mfrow=c(2,5))
plot(mcmc[,1],type="l",ylab="alpha",xlab="n")
plot(mcmc[,2],type="l",ylab="beta",xlab="n")
plot(mcmc[,3],type="l",ylab="covtheta0",xlab="n")
plot(mcmc[,4],type="l",ylab="covtheta1",xlab="n")
plot(mcmc[,5],type="l",ylab="covtheta2",xlab="n")
plot(mcmc[,6],type="l",ylab="covtheta3",xlab="n")
plot(mcmc[,7],type="l",ylab="covtheta4",xlab="n")
plot(mcmc[,8],type="l",ylab="covtheta5",xlab="n")
plot(mcmc[,9],type="l",ylab="covtheta6",xlab="n")
plot(mcmc[,10],type="l",ylab="covtheta7",xlab="n")

param3 <- apply(mcmc,2,mean)
param3

ICred.alpha <- c(quantile(mcmc[,1],0.025),quantile(mcmc[,1],0.975))
ICred.beta <- c(quantile(mcmc[,2],0.025),quantile(mcmc[,2],0.975))
ICred.covtheta0 <- c(quantile(mcmc[,3],0.025),quantile(mcmc[,3],0.975))
ICred.covtheta1 <- c(quantile(mcmc[,4],0.025),quantile(mcmc[,4],0.975))
ICred.covtheta2 <- c(quantile(mcmc[,5],0.025),quantile(mcmc[,5],0.975))
ICred.covtheta3 <- c(quantile(mcmc[,6],0.025),quantile(mcmc[,6],0.975))
ICred.covtheta4 <- c(quantile(mcmc[,7],0.025),quantile(mcmc[,7],0.975))
ICred.covtheta5 <- c(quantile(mcmc[,8],0.025),quantile(mcmc[,8],0.975))
ICred.covtheta6 <- c(quantile(mcmc[,9],0.025),quantile(mcmc[,9],0.975))
ICred.covtheta7 <- c(quantile(mcmc[,10],0.025),quantile(mcmc[,10],0.975))

ICred.alpha
ICred.beta
ICred.covtheta0
ICred.covtheta1
ICred.covtheta2
ICred.covtheta3
ICred.covtheta4
ICred.covtheta5
ICred.covtheta6
ICred.covtheta7

IC.alpha[2] - IC.alpha[1]
IC2.alpha[2] - IC2.alpha[1]
ICred.alpha[2] - ICred.alpha[1]

IC.beta[2] - IC.beta[1]
IC2.beta[2] - IC2.beta[1]
ICred.beta[2] - ICred.beta[1]

IC.covtheta0[2] - IC.covtheta0[1]
IC2.covtheta0[2] - IC2.covtheta0[1]
ICred.covtheta0[2] - ICred.covtheta0[1]

IC.covtheta1[2] - IC.covtheta1[1]
IC2.covtheta1[2] - IC2.covtheta1[1]
ICred.covtheta1[2] - ICred.covtheta1[1]

IC.covtheta2[2] - IC.covtheta2[1]
IC2.covtheta2[2] - IC2.covtheta2[1]

```

```

ICred.covtheta2[2] - ICred.covtheta2[1]
IC.covtheta3[2] - IC.covtheta3[1]
IC2.covtheta3[2] - IC2.covtheta3[1]
ICred.covtheta3[2] - ICred.covtheta3[1]

IC.covtheta4[2] - IC.covtheta4[1]
IC2.covtheta4[2] - IC2.covtheta4[1]
ICred.covtheta4[2] - ICred.covtheta4[1]

IC.covtheta5[2] - IC.covtheta5[1]
IC2.covtheta5[2] - IC2.covtheta5[1]
ICred.covtheta5[2] - ICred.covtheta5[1]

IC.covtheta6[2] - IC.covtheta6[1]
IC2.covtheta6[2] - IC2.covtheta6[1]
ICred.covtheta6[2] - ICred.covtheta6[1]

IC.covtheta7[2] - IC.covtheta7[1]
IC2.covtheta7[2] - IC2.covtheta7[1]
ICred.covtheta7[2] - ICred.covtheta7[1]

param1
param2
param3

hweirc<-function(x,a,b,t){
h<-numeric(length(x))
for (i in 1:length(x))
h[i] <- (a*b/x[i]) * (x[i]/t)^a * exp((x[i]/t)^a) * (exp((x[i]/t)^a) - 1)^(b-1) *
(1 + (exp((x[i]/t)^a) - 1)^b)^(-1)
h}

t <- seq(1,100,by=0.001)
h1 <- hweirc(t,param1[1],param1[2],exp(param1[3]*param1[4])) ## X1 = 1, X2 = 0
h2 <- hweirc(t,param2[1],param2[2],exp(param2[3]*param2[4]))
h3 <- hweirc(t,param3[1],param3[2],exp(param3[3]*param3[4]))

plot(t,h1,type="l",ylab="h(t)",lwd=2,lty=2,ylim=c(0,0.4))
lines(t,h2,lwd=2)
lines(t,h3,lwd=2,lty=3)

a1 <- matrix(c(param1[1],param2[1],param3[1]),nrow=3,ncol=1)
a2 <- matrix(c(param1[2],param2[2],param3[2]),nrow=3,ncol=1)
a3 <- matrix(c(param1[3],param2[3],param3[3]),nrow=3,ncol=1)
a4 <- matrix(c(param1[4],param2[4],param3[4]),nrow=3,ncol=1)
a5 <- matrix(c(param1[5],param2[5],param3[5]),nrow=3,ncol=1)
a6 <- matrix(c(param1[1],param2[1],param3[1]),nrow=3,ncol=1)
a7 <- matrix(c(param1[2],param2[2],param3[2]),nrow=3,ncol=1)
a8 <- matrix(c(param1[3],param2[3],param3[3]),nrow=3,ncol=1)
a9 <- matrix(c(param1[4],param2[4],param3[4]),nrow=3,ncol=1)
a10 <- matrix(c(param1[5],param2[5],param3[5]),nrow=3,ncol=1)

estim <- rbind(a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10)

inter1 <- rbind(IC.alpha,IC2.alpha,ICred.alpha)
inter2 <- rbind(IC.beta,IC2.beta,ICred.beta)
inter3 <- rbind(IC.covtheta0,IC2.covtheta0,ICred.covtheta0)
inter4 <- rbind(IC.covtheta1,IC2.covtheta1,ICred.covtheta1)
inter5 <- rbind(IC.covtheta2,IC2.covtheta2,ICred.covtheta2)
inter6 <- rbind(IC.covtheta3,IC2.covtheta3,ICred.covtheta3)
inter7 <- rbind(IC.covtheta4,IC2.covtheta4,ICred.covtheta4)
inter8 <- rbind(IC.covtheta5,IC2.covtheta5,ICred.covtheta5)
inter9 <- rbind(IC.covtheta6,IC2.covtheta6,ICred.covtheta6)
inter10 <- rbind(IC.covtheta7,IC2.covtheta7,ICred.covtheta7)

inter <- rbind(inter1,inter2,inter3,inter4,inter5,inter6,inter7,
inter8,inter9,inter10)

amp <- inter[,2] - inter[,1]

total <- cbind(estim,inter,amp)
total <- as.numeric(total)
total <- matrix(total,nrow=30,ncol=4)
total2 <- round(total,3)

nomes <- c("Assintótica","Bootstrap","Bayesiana")
nomes2 <- matrix(nomes,nrow=30)
tabela <- cbind(nomes2,total2)

tabela

```



```
#####
### Comparações - Exemplo 4 ###
#####

LLLa <- function(alpha,beta,covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,covtheta4,
                 covtheta5,covtheta6,covtheta7){
  # Modelo Weibull Razão de Chances
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*(x1-mean(x1)) + covtheta2*(x2-mean(x2)) +
            covtheta3*(x3-mean(x3)) + covtheta4*x4 + covtheta5*x5 +
            covtheta6*x6 + covtheta7*x7)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
              (t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
          (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

LLLb <- function(alpha,covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,covtheta4,
                 covtheta5,covtheta6,covtheta7){
  # Modelo Weibull
beta <- 1
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*(x1-mean(x1)) + covtheta2*(x2-mean(x2)) +
            covtheta3*(x3-mean(x3)) + covtheta4*x4 + covtheta5*x5 +
            covtheta6*x6 + covtheta7*x7)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
              (t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
          (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

LLLc <- function(covtheta0,covtheta1,covtheta2,covtheta3,covtheta4,
                 covtheta5,covtheta6,covtheta7){
  # Modelo Exponencial
alpha <- 1
beta <- 1
theta <- exp(covtheta0 + covtheta1*(x1-mean(x1)) + covtheta2*(x2-mean(x2)) +
            covtheta3*(x3-mean(x3)) + covtheta4*x4 + covtheta5*x5 +
            covtheta6*x6 + covtheta7*x7)
loglik <- cens*(log(alpha*beta*theta^(-alpha)) + (alpha-1)*log(t) +
              (t/theta)^(alpha) + (beta-1)*log(exp((t/theta)^alpha)-1)) -
          (1+cens)*log(1 + (exp((t/theta)^alpha) - 1)^beta)
-sum(loglik)
}

teste <- read.table("lawless.txt",sep=" ",header=T)
attach(teste)
t <- teste[,1]
cens <- teste[,9]

#####
##### Modelo Weibull RC #####
#####

k1 <- try(mle(LLLa,start=list(alpha=1.563,beta=0.6885,covtheta0=4.6681,
                           covtheta1=0.0556,covtheta2=0.0128,covtheta3=0.0056,covtheta4=0.5385,
                           covtheta5=-0.1149,covtheta6=-0.9349,covtheta7=-0.2583),method="BFGS"))

param1 <- k1@coef

sd.alpha <- sqrt(vcov(k1)[1,1])
sd.beta <- sqrt(vcov(k1)[2,2])
sd.covtheta0 <- sqrt(vcov(k1)[3,3])
sd.covtheta1 <- sqrt(vcov(k1)[4,4])
sd.covtheta2 <- sqrt(vcov(k1)[5,5])
sd.covtheta3 <- sqrt(vcov(k1)[6,6])
sd.covtheta4 <- sqrt(vcov(k1)[7,7])
sd.covtheta5 <- sqrt(vcov(k1)[8,8])
sd.covtheta6 <- sqrt(vcov(k1)[9,9])
sd.covtheta7 <- sqrt(vcov(k1)[10,10])

ur <- 2*k1@min

#####
##### Modelo Weibull #####
#####

k2 <- try(mle(LLLb,start=list(alpha=1.1463,covtheta0=4.7446,covtheta1=0.0539,
                           covtheta2=0.0099,covtheta3=0.0042,covtheta4=0.3953,covtheta5=-0.1372,
                           covtheta6=-0.8853,covtheta7=-0.2597),method="BFGS"))

param2 <- k2@coef
```

```

sd.alpha2 <- sqrt(vcov(k2)[1,1])
sd2.covtheta0 <- sqrt(vcov(k2)[2,2])
sd2.covtheta1 <- sqrt(vcov(k2)[3,3])
sd2.covtheta2 <- sqrt(vcov(k2)[4,4])
sd2.covtheta3 <- sqrt(vcov(k2)[5,5])
sd2.covtheta4 <- sqrt(vcov(k2)[6,6])
sd2.covtheta5 <- sqrt(vcov(k2)[7,7])
sd2.covtheta6 <- sqrt(vcov(k2)[8,8])
sd2.covtheta7 <- sqrt(vcov(k2)[9,9])

r1 <- 2*k2@min
trv1 <- r1 - ur

#####
##### Modelo Exponencial #####
#####

k3 <- try(mle(LLC,start=list(covtheta0=4.7446,covtheta1=0.0539,
covtheta2=0.0099,covtheta3=0.0042,covtheta4=0.3953,covtheta5=-0.1372,
covtheta6=-0.8853,covtheta7=-0.2597),method="BFGS"))

param3 <- k3@coef

sd3.covtheta0 <- sqrt(vcov(k2)[1,1])
sd3.covtheta1 <- sqrt(vcov(k2)[2,2])
sd3.covtheta2 <- sqrt(vcov(k2)[3,3])
sd3.covtheta3 <- sqrt(vcov(k2)[4,4])
sd3.covtheta4 <- sqrt(vcov(k2)[5,5])
sd3.covtheta5 <- sqrt(vcov(k2)[6,6])
sd3.covtheta6 <- sqrt(vcov(k2)[7,7])
sd3.covtheta7 <- sqrt(vcov(k2)[8,8])

r2 <- 2*k3@min
trv2 <- r2 - ur

#####
##### Resultados #####
#####

alpha.fim <- c(param1[1],param2[1],0)
beta.fim <- c(param1[2],0,0)
covtheta0.fim <- c(param1[3],param2[2],param3[1])
covtheta1.fim <- c(param1[4],param2[3],param3[2])
covtheta2.fim <- c(param1[5],param2[4],param3[3])
covtheta3.fim <- c(param1[6],param2[5],param3[4])
covtheta4.fim <- c(param1[7],param2[6],param3[5])
covtheta5.fim <- c(param1[8],param2[7],param3[6])
covtheta6.fim <- c(param1[9],param2[8],param3[7])
covtheta7.fim <- c(param1[10],param2[9],param3[8])

sdalpha.fim <- c(sd.alpha,sd.alpha2,0)
sdbeta.fim <- c(sd.beta,0,0)
sdcovtheta0.fim <- c(sd.covtheta0,sd2.covtheta0,sd3.covtheta0)
sdcovtheta1.fim <- c(sd.covtheta1,sd2.covtheta1,sd3.covtheta1)
sdcovtheta2.fim <- c(sd.covtheta2,sd2.covtheta2,sd3.covtheta2)
sdcovtheta3.fim <- c(sd.covtheta3,sd2.covtheta3,sd3.covtheta3)
sdcovtheta4.fim <- c(sd.covtheta4,sd2.covtheta4,sd3.covtheta4)
sdcovtheta5.fim <- c(sd.covtheta5,sd2.covtheta5,sd3.covtheta5)
sdcovtheta6.fim <- c(sd.covtheta6,sd2.covtheta6,sd3.covtheta6)
sdcovtheta7.fim <- c(sd.covtheta7,sd2.covtheta7,sd3.covtheta7)

logvero.fim <- c(ur,r1,r2)
trv.fim <- c(0,trv1,trv2)
pvalue.fim <- c(0,1 - pchisq(trv1,2),1 - pchisq(trv2,1))

aic.fim <- c(AIC(k1),AIC(k2),AIC(k3))
bic.fim <- c(AIC(k1,k=log(length(t))),AIC(k2,k=log(length(t))),
AIC(k3,k=log(length(t))))

parametros.fim <- rbind(alpha.fim,beta.fim,covtheta0.fim,covtheta1.fim,
covtheta2.fim,covtheta3.fim,covtheta4.fim,covtheta5.fim,
covtheta6.fim,covtheta7.fim)
sdpar.fim <- rbind(sdalpha.fim,sdbeta.fim,sdcovtheta0.fim,sdcovtheta1.fim,
sdcovtheta2.fim,sdcovtheta3.fim,sdcovtheta4.fim,sdcovtheta5.fim,
sdcovtheta6.fim,sdcovtheta7.fim)

resultado <- rbind(parametros.fim,sdpar.fim,logvero.fim,trv.fim,pvalue.fim,
aic.fim,bic.fim)
round(resultado,3)

```