

# USO DE MÉTODOS BAYESIANOS EM TESTES DE VIDA ACELERADOS NO CONTROLE DA QUALIDADE DE PRODUTOS INDUSTRIAIS

Denilton da Silva Vieira

Orientador: Prof. Dr. Jorge Alberto Achcar

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

São Carlos

fevereiro de 2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

V658mb

Vieira, Denilton da Silva.

Uso de métodos bayesianos em testes de vida acelerados no controle da qualidade de produtos industriais / Denilton da Silva Vieira. -- São Carlos : UFSCar, 2006.  
141 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Análise de regressão. 2. Inferência bayesiana. 3. Método de Monte Carlo. 4. Controle de qualidade. 5. Teste de sobrevivência acelerado. I. Título.

CDD: 519.536 (20<sup>a</sup>)

*Agradeço,*

*à Deus, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, e por toda força concedida para que eu lutasse em busca dos meus objetivos.*

*à Nossa Senhora, aos anjos e aos santos que sempre intercederam por mim junto a Deus nos momentos em que o fardo estava mais pesado!*

*ao meu pai Argecinio (in memoriam), que me ensinou a persistir com paciência rumo ao caminho dos meus objetivos.*

*à minha mãe Doralice, ao meu irmão Edson e a minha noiva Jucinéia pela paciência, apoio e compreensão durante todo esse processo.*

*ao professor Dr. Jorge Alberto Achcar pela experiência em desenvolver este trabalho sob sua orientação. Mais do que isso, agradeço por poder usufruir do seu rico e criterioso estilo de pesquisa, da sua maneira sábia e especial de ensinar e por me aceitar.*

*à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior) pela possibilidade de dedicação integral e exclusiva ao mestrado.*

*à todos os professores do Departamento de Estatística da UFSCar, em especial aqueles aos quais tive o privilégio de ser aluno.*

*ao funcionário da Secretaria de Pós-Graduação em Estatística, pela solicitude ao longo destes dois anos.*

*aos professores Dr. Vicente Garibay Cancho e Dra. Teresa Cristina Dias pelas sugestões e correções em meu exame de qualificação,*

*à todos meus colegas de pós-graduação, pela convivência, amizade e apoio durante todo o período de realização do mestrado.*

*aos meus amigos, pelo companheirismo e por toda ajuda que recebi.*

*à Universidade Federal de São Carlos por toda infra-estrutura.*

*a todos que de uma maneira ou de outra contribuíram para o sucesso deste trabalho.*

# *Resumo*

Neste trabalho propomos uma metodologia Bayesiana de controle da qualidade de produtos industriais, considerando unidades em teste sob níveis de estresse mais severos que os usualmente utilizados. Assumimos algumas distribuições para os tempos de vida das unidades, dados sob esquema de censura do tipo II e um modelo estresse-resposta geral que inclui alguns dos modelos mais utilizados em testes acelerados. Usando a densidade preditiva para uma observação futura, apresentamos um critério para ser usado por engenheiros no controle da qualidade de um determinado lote de produtos industriais. Este critério permite escolher o tempo necessário para o teste ou o nível de estresse no teste de controle da qualidade. O controle da qualidade de um lote de componentes poderá ser baseado na proporção de unidades que falham quando testadas durante o período de tempo fixo, sob o nível especificado de estresse. Uma implementação do código WinBugs (ver por exemplo, Spiegelhalter *et al.*, 1999) é considerada.

**Palavras-chave:** Testes de Vida Acelerados, Inferência Bayesiana, Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov, Controle da Qualidade.

# *Abstract*

In this work, we introduce a Bayesian approach for quality control of industrial products, assuming units in test under stress levels higher than the usual level. We assume different distributions for the lifetimes of the units under a type II censoring mechanism and a general stress-response model that includes the usual accelerated life test models. Using a predictive density of a future observation, we present some criteria to be used by engineers in the quality control of a batch of industrial products. These criteria permit a choice for the best time in test or for the best stress level in the quality control test. The quality control procedure is based on the observed proportion of failures tested during a specified time and a specified stress level. We use the software WinBugs (Spiegelhalter et al, 1999) to obtain the posterior summaries of interest.

**keywords:** Accelerated lifetime test, Bayesian Inference, Markov Chain Monte Carlo, Quality Control.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Algumas Relações Estresse-Resposta Geral: Lei da Potência Inversa, Arrhenius e Eyring . . . . .	4
1.2	Teorema de Bayes . . . . .	6
1.3	Algoritmos de Simulação . . . . .	8
1.3.1	O Amostrador Gibbs Sampling . . . . .	8
1.3.2	O Algoritmo Metropolis-Hastings . . . . .	9
1.4	Objetivos . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Alguns Conceitos Básicos de Testes Acelerados</b>	<b>13</b>
2.1	Formas de Aceleração de um Teste Acelerado . . . . .	14
2.1.1	Formas de Aplicação da Carga (ou Nível) de Estresse . . . . .	16
2.2	Algumas Considerações Importantes para a Realização de um Teste Acelerado	19
2.3	A Presença de Censuras . . . . .	22
2.4	Esquema do Experimento Acelerado . . . . .	24
2.5	Algumas Funções Importantes . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Uso de Testes de Vida Acelerados no Controle da Qualidade de Produtos Industriais Assumindo uma Distribuição Exponencial e um Modelo Estresse-Resposta Geral</b>	<b>29</b>
3.1	Introdução . . . . .	29
3.2	Formulação do Modelo . . . . .	30
3.3	Análise Bayesiana do Modelo Lei da Potência Inversa com Dados Completos	31

3.3.1	Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um nível de Estresse $V_j$ . . . . .	33
3.3.2	Controle da Qualidade de um Determinado Lote de Unidades . . . . .	35
3.4	Estimadores de Máxima Verossimilhança para $\alpha$ e $\beta$ com Amostras Censuradas Considerando o Modelo Lei da Potência Inversa . . . . .	37
3.5	Exemplos de Aplicação . . . . .	39
3.5.1	Exemplo 1 com Amostras Completas . . . . .	39
3.5.2	Exemplo 2 com Amostras Censuradas . . . . .	44
3.5.3	Exemplo 3 com Amostras Censuradas . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Uso de Métodos Bayesianos em Testes de Vida Acelerados no Controle da Qualidade de Produtos Industriais Assumindo uma Distribuição Weibull e o Modelo de Eyring</b> . . . . .	<b>54</b>
4.1	Introdução . . . . .	54
4.2	Formulação do modelo . . . . .	55
4.3	Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Assumindo $\alpha$ , $\beta$ e $p$ Desconhecidos . . . . .	60
4.3.1	Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um Nível de estresse $V_j$ com $\beta$ e $p$ conhecidos . . . . .	62
4.3.2	Controle da Qualidade de um Determinado Lote de Componentes . . . . .	64
4.4	Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Considerando um Conhecimento a priori sobre os parâmetros $\alpha$ , $\beta$ e $p$ . . . . .	67
4.5	Exemplo numérico . . . . .	69
4.5.1	Controle da qualidade de um Lote de Componentes . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Análise Bayesiana do Modelo de Arrhenius Considerando uma Distribuição Weibull e Dados com Censuras do Tipo II</b> . . . . .	<b>78</b>
5.1	Introdução . . . . .	78
5.2	Formulação do Modelo . . . . .	78
5.3	Análise Bayesiana do Modelo de Arrhenius . . . . .	82
5.3.1	Densidades Preditivas em Controle da Qualidade . . . . .	84
5.4	Algumas Aplicações . . . . .	88
5.4.1	Aplicação 1 considerando a distribuição Exponencial . . . . .	88

5.4.2	Controle da qualidade de um Lote de Componentes . . . . .	93
5.4.3	Aplicação 2 Considerando a distribuição Weibull . . . . .	94
5.4.4	Controle da qualidade de um Lote de Componentes . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Uso de Métodos Bayesianos em Testes de Vida Acelerados Assumindo uma Distribuição Weibull-exponenciada e o Modelo Lei da Potência Inversa</b>	<b>98</b>
6.1	Introdução . . . . .	98
6.2	A distribuição Weibull-exponenciada . . . . .	99
6.3	Análise Clássica do Modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa	101
6.4	Análise Bayesiana do Modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa	106
6.4.1	Densidade Preditiva Para Uma Observação Futura . . . . .	110
6.4.2	Controle da Qualidade de um Determinado Lote de Componentes .	114
6.5	Aplicação Numérica . . . . .	116
6.5.1	Análise Clássica . . . . .	117
6.5.2	Análise Bayesiana . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Conclusões Finais e Perspectivas Futuras de Trabalho</b>	<b>124</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>O Método de Aproximação de Laplace para Integrais</b>	<b>126</b>
<b>B</b>	<b>Verificação de Convergência</b>	<b>127</b>
<b>C</b>	<b>Alguns Programas</b>	<b>129</b>
C.1	Programa 1 . . . . .	129
C.2	Programa 2 . . . . .	130
C.3	Programa 3 . . . . .	131
C.4	Programa 4 . . . . .	133
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>134</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O rápido desenvolvimento tecnológico, a grande competição em escala mundial, a sofisticação dos padrões de consumo e os novos instrumentos de proteção dos consumidores, têm pressionado os empresários na luta pela sobrevivência de seus empreendimentos, a reconhecer a importância de se produzir bens de melhor qualidade.

Em engenharia, estudos voltados para o tempo de duração até a ocorrência da falha do produto (um produto pode ser uma peça ou um componente, um sistema de componentes, ou mesmo um equipamento) submetidos a testes, referem-se à área de confiabilidade. Melhorar a confiabilidade de um produto é sem dúvida um dos aspectos importantes de um programa de melhoria da qualidade. A consecução desse objetivo depende da realização de uma série de tarefas destinadas a avaliar diversos aspectos de seu desempenho, que constituem o que se costuma chamar de Análise de Confiabilidade.

Assim não é necessário esperar pelas experiências de campo para melhorar a confiabilidade de um produto. Para resolver esse problema, a confiabilidade deve resultar de uma boa especificação. O desenvolvimento e análise (de confiabilidade) devem integrar-se na construção e melhoria da qualidade de tais produtos, para que os problemas de desempenho insatisfatório sejam previstos e corrigidos a tempo e com o menor custo possível.

Os métodos modernos de controle de qualidade desempenham hoje papel fundamental no processo de aumento da produtividade em empresas industriais. A crescente importância do controle da qualidade está associada a uma competição cada vez mais acirrada pelos mercados de produtos manufaturados que demandam artigos cada vez melhores a preços sempre decrescentes. A única saída para empresas que desejam per-

manecer competitivas nessas condições é o contínuo aperfeiçoamento dos seus processos de produção.

Na realidade, melhorias na qualidade levam, em geral, a melhorias na produtividade. A razão é muito simples: as perdas serão menores. A melhoria da qualidade é alcançada pelo aperfeiçoamento do processo. Aperfeiçoamentos no processo resultam numa maior uniformidade do produto, reduzem o desperdício de mão-de-obra, de equipamentos e de materiais. Outros benefícios são custos mais baixo e melhor posição frente aos concorrentes. A longo prazo, isso levará a um maior nível de emprego e maior satisfação entre os empregados, resultados da melhor situação da companhia.

No controle da qualidade de produtos manufaturados torna-se imprescindível a obtenção permanente de medidas da confiabilidade do produto produzido, em particular, sobre o parâmetro de interesse dado pelo tempo médio de sobrevivência (duração). Em geral, esse controle é feito em meio a linha de produção, selecionando-se uma amostra aleatória para teste, e um resultado rápido com custo reduzido, se faz necessário.

Em um teste de sobrevivência realizado sob as condições normais de uso, certamente pouquíssimas unidades iriam falhar, dificultando a análise dos resultados para o controle de qualidade. Um procedimento eficiente consiste em submetermos um certo número de componentes para serem testados sob vários níveis de estresse mais severos que os usuais (ex: voltagem mais alta) de uma variável física  $X$ , resultando nos chamados Testes de Sobrevivência Acelerados (TSA), (ver Nelson, 1990), durante um período fixo de tempo,  $Y$ . Para verificarmos se a linha de produção está sob controle, observamos se a proporção de componentes que falham em teste, sob o nível severo de estresse,  $X_j$ , no período de tempo fixo,  $Y_j$ , é menor que uma quantidade especificada,  $\gamma$ . Assim, desta forma, os tempos registrados nos testes acelerados são então utilizados para estudar a performance do produto nas condições normais de uso.

Experimentos industriais eficientes para análise da confiabilidade de componentes manufaturados muitas vezes consistem em submeter as unidades a níveis de estresse mais elevados do que as condições normais de uso. Em tais testes, para cada nível pré-fixado e aleatorizado de estresse, o experimento termina após uma certa proporção dos componentes falharem (ver por exemplo Lawless, 1982). Isto faz com que alguns dos tempos obtidos sejam censurados, o que introduz dificuldade extra ao problema de estimação

(pontual e por intervalo) do tempo médio de vida das unidades nas condições usuais de funcionamento.

Neste trabalho, propomos uma metodologia Bayesiana para o controle da qualidade de produtos manufaturados. A escolha dessa metodologia é justificada principalmente, por permitir incorporação à análise de informações já conhecidas previamente.

Métodos estatísticos clássicos de análise da confiabilidade, utilizam somente os dados de operação ou de teste do item para avaliar a performance do mesmo; métodos Bayesianos permitem combinar esses dados com outras informações relevantes já disponíveis. A origem dessas informações suplementares pode estar em dados de testes já realizados, dados de operação em diferentes ambientes, experiências pessoais e resultados experimentais em itens similares. O uso dessas informações relevantes, é quantificado pela distribuição a priori, que combinada com a função de verossimilhança, após a observação dos dados, conduz à densidade a posteriori.

Na verdade, a análise Bayesiana se encontra entre dois limites: assumir um único valor para o parâmetro (assumindo uma priori sem variação) e usar o método clássico, que corresponde ao uso de prioris vagas ou não informativas.

Entre as motivações práticas para o uso da inferência Bayesiana, podemos citar o fato desta usualmente requerer menos dados para atingir a mesma qualidade das inferências (mesma precisão) que a inferência clássica. Essa é uma consideração importante, especialmente nas áreas de aplicação onde a coleta de dados é dificultada por limitações de tempo e de custo levando à escassez de dados, como é o caso da análise da confiabilidade, que pode tornar os métodos clássicos inapropriados. Uma outra vantagem dos métodos Bayesianos é ter a interpretação dos resultados facilitada para pesquisadores aplicados, pelos gráficos das densidades a posteriori de interesse.

Na análise Bayesiana da confiabilidade, as densidades a posteriori resultantes são com frequência, matematicamente intratáveis, não sendo possível apresentá-las através de uma forma paramétrica conhecida. Surgem dificuldades com integrações para as quais não existe solução analítica exata. Métodos aproximados analíticos têm sido bastante utilizados, mas dependendo da dimensão do espaço paramétrico podem ser tornar ineficientes pois podem exigir grandes amostras de observações, o que pode ser inviável, especialmente se os testes são destrutivos.

Os métodos baseados em amostragem (métodos de Monte Carlo), especialmente os métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC-Markov Chain Monte Carlo) cujo desenvolvimento teve início antes da década de 1960, se mantiveram esquecidos até os anos 70. Este fato deve-se à deficiência computacional da época, o que hoje não constitui problemas. Atualmente esses métodos são amplamente utilizados na inferência Bayesiana, como alternativa para aproximar integrais para as quais não existe solução analítica.

Quando a relação entre tempos de vida/de falha e variáveis explicativas é reconhecida, utiliza-se modelos de regressão para a análise da confiabilidade. Nesses casos, têm-se os coeficientes da regressão como parâmetros do modelo. A especificação de priors para esses parâmetros constitui tarefa difícil para os especialistas pois podem não ter significado prático, sendo portanto, desconhecida a sua variação.

## 1.1 Algumas Relações Estresse-Resposta Geral: Lei da Potência Inversa, Arrhenius e Eyring

Considere uma situação para um experimento real onde se deseja acelerar o tempo até a ocorrência da falha de um componente considerando níveis de estresse mais severos que os usuais de uma variável,  $X$ . Desta maneira, podemos dizer que o tempo até a falha (resposta) está relacionado com o estresse (variável de estresse) segundo o modelo relação estresse-resposta geral denotado por, (ver por exemplo, Klein e Basu, 1981)

$$\lambda_i = e^{-(z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)} \quad (1.1)$$

onde  $\lambda_i > 0$  e  $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$  são parâmetros desconhecidos,  $X_i$  é o nível de estresse e  $Z_i = g(X_i)$ .

Como casos particulares de (1.1) temos:

(a) se  $X_i = -\log V_i$ ,  $Z_i = 0$ ,  $\beta_0 = \log \alpha$  e  $\beta_1 = \beta$  temos o modelo Lei da Potência Inversa, dado por

$$\lambda_i = \frac{V_i^\beta}{\alpha}, \quad (1.2)$$

para  $V_i$  representando o  $i$ -ésimo nível da variável estresse de voltagem,  $V$ , e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros característicos do produto, como por exemplo, unidade, geometria, fabricação, método de teste, etc., desconhecidos, tais que,  $\alpha > 0$  e  $-\infty < \beta < \infty$ . Alguns exemplos de aplicações incluem:

- lâmpadas incandescentes;
- fadiga de metais;
- isolantes, dielétricos, etc.

(b) se  $X_i = \frac{1}{V_i}$ ,  $Z_i = 0$ ,  $\beta_0 = -\alpha$  e  $\beta_1 = \beta$  temos o modelo de Arrhenius, dado por

$$\lambda_i = \exp\left(\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right), \quad (1.3)$$

no qual  $V_i$  é o  $i$ -ésimo nível da variável estresse de temperatura e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros desconhecidos,  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ . O modelo de Arrhenius é utilizado para relacionar o tempo de falha do produto e a variável de estresse temperatura. Alguns exemplos de aplicação incluem:

- dielétricos;
- plásticos;
- filamentos de lâmpadas incandescentes.

(c) se  $X_i = \frac{1}{V_i}$ ,  $Z_i = -\log V_i$ ,  $\beta_0 = -\alpha$  e  $\beta_1 = \beta$  temos o modelo de Eyring. Este modelo, derivado dos princípios da mecânica quântica com uma variável estresse, expressa a variação da taxa de falha como uma função da temperatura de operação (ver por exemplo, Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974), e é dado por

$$\lambda_i = V_i \times \exp\left(\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right). \quad (1.4)$$

no qual  $V_i$  é o  $i$ -ésimo nível da variável estresse de temperatura,  $V$ , e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros desconhecidos,  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ . O modelo de Eyring é utilizado para relacionar o tempo de falha do produto e a variável de estresse temperatura.

## 1.2 Teorema de Bayes

Em análise de confiabilidade, quando assumimos um modelo para os tempos de vida, temos interesse em determinar os valores dos parâmetros que caracterizam o modelo. Embora estes parâmetros sejam considerados fixos, não temos certeza do seu verdadeiro valor e assim procuramos uma forma de, através dos dados, expressar essa incerteza.

Uma alternativa é considerar uma distribuição para o parâmetro de interesse, que sob este ponto de vista é considerado uma variável aleatória (ver, por exemplo, Box e Tiao, 1973). Com esta formulação usamos o teorema de Bayes, que fornece uma maneira para computar a distribuição do parâmetro, expressando nossa incerteza condicionada aos dados. Em análise de confiabilidade, vários trabalhos utilizando abordagem Bayesiana já foram realizados (ver, por exemplo, Achcar e Louzada-Neto, 1992; Rodrigues, Bolfarine e Louzada-Neto, 1993).

Suponha que  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  é um vetor de  $n$  observações onde a distribuição de probabilidade  $\pi(t | \underline{\lambda})$  depende de  $p$  parâmetros. O vetor de parâmetros  $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  sob o ponto de vista Bayesiano, é considerado um vetor aleatório, representando características que se deseja conhecer. Se  $\underline{\lambda}$  tem uma distribuição de probabilidade (denominada distribuição a priori),  $\pi(\underline{\lambda})$ , então,

$$\pi(t | \underline{\lambda}) \times \pi(\underline{\lambda}) = \pi(t, \underline{\lambda}) = \pi(\underline{\lambda} | t) \times \pi(t). \quad (1.5)$$

A distribuição de  $\underline{\lambda}$  dado as observações é dada por

$$\pi(\underline{\lambda} | t) = \frac{\pi(t | \underline{\lambda}) \times \pi(\underline{\lambda})}{\pi(t)}, \quad (1.6)$$

onde

$$\pi(t) = \frac{1}{c} = \int \pi(t | \underline{\lambda}) \times \pi(\underline{\lambda}) d\underline{\lambda}. \quad (1.7)$$

Observe que  $\pi(t)$  é a esperança matemática de  $\pi(t | \underline{\lambda})$  em relação a densidade a priori  $\pi(\underline{\lambda})$ .

Se denotarmos a função de verossimilhança  $\pi(t | \underline{\lambda})$  por  $L(\underline{\lambda})$ , pelo teorema de

Bayes podemos escrever (1.6) como

$$\pi(\underline{\lambda} | t) = c \times L(\underline{\lambda}) \times \pi(\underline{\lambda}), \quad (1.8)$$

onde  $c$  é a constante normalizadora de  $\pi(\underline{\lambda} | t)$ .

Portanto a densidade a posteriori (1.8) pode ser escrita como  $\pi(\underline{\lambda} | t) \propto L(\underline{\lambda}) \times \pi(\underline{\lambda})$ .

O procedimento de inferência Bayesiana baseia-se na distribuição a posteriori das componentes de  $\underline{\lambda}$ . Neste ponto surgem duas dificuldades; a primeira na obtenção da distribuição a posteriori marginal e a segunda no cálculo de momentos a posteriori de interesse. Em ambos os casos é necessário a resolução de integrais que muitas vezes não apresentam uma solução analítica. Nesse caso, métodos numéricos (ver por exemplo Naylor e Smith, 1982) ou métodos de aproximação de integrais, tal como o método de Laplace (ver por exemplo Tierney e Kadane, 1986) são necessários. Ocorre que para a aplicação deste último método é necessário determinar o valor que maximiza a função de densidade a posteriori e assim, à medida que a dimensão do espaço paramétrico aumenta, aumentam as dificuldades para sua obtenção e a aplicação do método de Laplace vai ser implementada. Neste sentido, uma alternativa, é utilizar os algoritmos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov tais como os algoritmos de Gibbs (ver por exemplo, Gelfand e Smith, 1990) e Metropolis-Hasting (ver por exemplo, Chib e Greenberg, 1995 ou Roberts e Smith, 1993).

Um outro elemento importante na inferência Bayesiana é a distribuição preditiva. O uso de densidades preditivas em análise de dados tem sido muito divulgado na literatura de estatística aplicada.

Usualmente estamos interessados em fazer inferência sobre alguma observação futura,  $s$ , utilizando as observações passadas  $t$ . Tal inferência deve ser baseada na distribuição a posteriori conjunta de  $s$ ,  $\pi(s | t)$ . Observamos que  $\pi(s | t)$  pode ser obtida a partir da distribuição a posteriori conjunta de  $s$  e  $\underline{\lambda}$  por integração, ou seja,

$$\pi(s | t) = \int \pi(s, \underline{\lambda} | t) d\underline{\lambda} = \int \pi(s | \underline{\lambda}, t) \times \pi(\underline{\lambda} | t) d\underline{\lambda}, \quad (1.9)$$

onde  $\pi(s | \lambda, t)$  em muitos modelos se reduz a  $\pi(s | \lambda)$ .

## 1.3 Algoritmos de Simulação

O amostrador Gibbs Sampling e o algoritmo de Metropolis-Hasting são métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov. O Amostrador de Gibbs é um esquema iterativo de amostragem de uma Cadeia de Markov cujo núcleo de transição é formado pelas distribuições condicionais completas. O algoritmo Metropolis-Hastings é usado para gerar amostras de uma densidade de forma indireta, quando não se sabe gerar diretamente.

### 1.3.1 O Amostrador Gibbs Sampling

Para descrever esse algoritmo, supor que  $\pi(\lambda)$  seja a distribuição de interesse onde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  e que seja praticamente impossível gerar amostras diretamente de  $\pi(\lambda)$ ; se as densidades condicionais a posteriori  $\pi_i(\lambda_i) = \pi(\lambda | \lambda_{-i})$ , onde  $\lambda_{-i}$  é o vetor de todos  $\lambda_i$  exceto  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  estiverem disponíveis, então podemos gerar amostras de  $\pi(\lambda)$  através de sucessivas gerações dessas distribuições condicionais  $\pi_i(\lambda_i)$ .

Este método pode ser descrito da seguinte forma:

Passo 1: Inicialize o contador de iterações da cadeia  $k = 1$  e escolha valores iniciais para  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_p^{(0)})$ ;

Passo 2: Obtenha um novo valor para  $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_p^{(k)})$  a partir de  $\lambda^{(k-1)}$  através de sucessivas gerações de valores,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(k)} &\sim \pi(\lambda_1 \mid \lambda_2^{(k-1)}, \dots, \lambda_p^{(k-1)}) \\ \lambda_2^{(k)} &\sim \pi(\lambda_2 \mid \lambda_1^{(k)}, \lambda_3^{(k)}, \dots, \lambda_p^{(k-1)}) \\ \lambda_3^{(k)} &\sim \pi(\lambda_3 \mid \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_4^{(k-1)}, \dots, \lambda_p^{(k-1)}) \\ &\vdots \\ \lambda_p^{(k)} &\sim \pi(\lambda_p \mid \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)}, \dots, \lambda_{p-1}^{(k)}) \end{aligned}$$

Passo 3: Atualize o contador de k para k+1 e retorne ao passo 2 até atingir convergência.



Dentro do contexto bayesiano, esse é um dos algoritmos utilizados para gerar amostras da distribuição a posteriori dos parâmetros. Esse tipo de abordagem vem dando um grande impulso a área da inferência bayesiana, pois permite analisar parâmetros de modelos bastante complexos, cujos tratamentos analíticos seriam praticamente impossíveis sem esta técnica.

A questão principal a ser analisada na aplicação deste algoritmo é se a distribuição geradora da amostra converge para a distribuição desejada.

À medida que o número de iterações aumenta, a cadeia se aproxima de sua condição de equilíbrio. Assim, assume-se que convergência é atingida em uma iteração cuja distribuição esteja arbitrariamente próxima da distribuição de equilíbrio  $\pi$ .

### 1.3.2 O Algoritmo Metropolis-Hastings

Seja a distribuição de interesse denotada por  $\pi$  e supor que seja muito difícil ou impossível gerar amostras diretamente de  $\pi$ , se as densidades condicionais a posteriori não tiverem formas conhecidas. Neste caso, usamos o algoritmo Metropolis-Hastings.

Nesse algoritmo, se no estágio  $k$  a cadeia está no estado  $x$ , o próximo estado da cadeia é encontrado gerando um valor candidato  $y$  de uma densidade arbitrária  $q(x, y)$ . Dessa forma, deve-se construir um núcleo de transição  $q(x, y)$  de forma que  $\pi$  seja a distribuição de equilíbrio da Cadeia. Uma forma simples de fazer isso é através de cadeias onde o núcleo  $q$  satisfaça a:

$$q(x, y)\pi(x) = q(y, x)\pi(y),$$

e assim temos um núcleo de transição satisfatório e todos os valores gerados serão aceitos. Mas, no entanto, para algum  $(x, y)$  podemos ter que

$$q(x, y)\pi(x) > q(y, x)\pi(y),$$

nesse caso, a cadeia se move de  $x$  para  $y$  com maior frequência do que de  $y$  para  $x$ . Para corrigir isso, o número de movimentos de  $x$  para  $y$  é reduzido introduzindo a probabilidade de ocorrer este movimento  $\alpha(x, y) < 1$ . Se o movimento ocorre, então  $x^{(k+1)} = y$ , caso

contrário  $x^{(k+1)} = x^k$ . Assim, temos a relação:  $q(x, y) \pi(x) \alpha(x, y) = q(y, x) \pi(y)$ .

A partir da relação acima, temos que a condição de reversibilidade da cadeia é satisfeita por construção e a probabilidade de aceitação do valor gerado é:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \min\left\{\frac{q(y,x)\pi(y)}{q(x,y)\pi(x)}, 1\right\} & \text{se } q(x, y) \pi(x) > 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com as definições acima o algoritmo segue da seguinte forma:

Passo 1: Inicie o contador da cadeia  $k = 1$  e escolha o valor inicial para  $x$ ,  $x^{(0)}$ ;

Passo 2: Mova a cadeia para um novo valor gerado da densidade  $q(x^{(k-1)}, y)$ ;

Passo 3: Calcule a probabilidade de aceitação do movimento,  $\alpha(x^{(k-1)}, y)$  e compare com um valor  $u$  gerado de uma distribuição Uniforme[0,1]. Se o movimento for aceito, ou seja, se  $u \leq \alpha(x^{(k-1)}, y)$ , então  $x^{(k)} = y$ , se não for aceito,  $x^{(k)} = x^{(k-1)}$  e a cadeia não se move;

Passo 4: Mude o contador de  $k$  para  $k+1$  e retorne ao passo 2 até obter uma distribuição estacionária.

Para o uso da convergência, pode-se consultar Gelfand e Smith (1990), Casella e George (1992) ou Gelman e Rubin (1992). Contudo, o método proposto por Gelman e Rubin (1992) indica a convergência do processo apenas quando a variância entre as cadeias for bem menor que a variância dentro da cadeia é mais utilizado em inferência Bayesiana (veja, por exemplo, Achcar e Pereira, 1998).

## 1.4 Objetivos

Muitos autores têm trabalhado com Testes de Vida Acelerados em suas pesquisas considerando algumas distribuições para os tempos de vida.

Entre outros, quando a distribuição dos tempos de vida dos produtos (componentes) é Exponencial e os dados são não censurados (completos), Nelson (1972) descreve métodos gráficos para a estimação dos parâmetros do Modelo Lei da Potência Inversa.

Considerando um esquema de censura do tipo II (ver por exemplo, Lawless, 1982), Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974), determinam os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de diversos modelos (relações estresse-resposta) com uma var-

iável estresse, obtendo estimadores assintoticamente independentes, e um estimador não-viciado para o tempo médio de vida,  $\theta_i$ , sob o  $i$ -ésimo nível de estresse. Também sugerem a obtenção dos limites de confiança para esses parâmetros via função de verossimilhança relativa maximizada (ver, por exemplo, Kalbfleisch, 1985). Além disso, determinam os estimadores de mínimos quadrados para os parâmetros do modelo de Eyring Generalizado e discutem estratégias de planejamento de experimentos acelerados. Rodrigues, Achcar e Louzada-Neto (1990), encontram uma expressão em forma fechada para a moda da densidade a posteriori de  $\theta_1$ , obtida via reparametrização Ortogonal, considerando o Modelo Potência Inversa.

Na literatura, a aplicação de densidades preditivas tem sido de grande importância (ver por exemplo, Box e Tiao, 1973 ou Aitchinson e Dunsmore, 1975). Uma aplicação é dada por Achcar (1984), que determina a densidade preditiva para uma observação futura, para dados com censuras do Tipo II, onde o logaritmo dos tempos de sobrevivência segue um modelo log-linear. Também, o autor verifica a adequabilidade do modelo proposto através de densidades preditivas. Achcar e Bolfarine (1988), discutem alguns problemas de verificação do modelo de regressão Gama Generalizado, usando densidades preditivas. Considerando uma reparametrização ortogonal, Rodrigues (1991), obtém a densidade preditiva de uma observação futura sob o nível usual de estresse.

Achcar (1991), desenvolve um procedimento de controle da qualidade usando densidades preditivas quando o modelo de Potência Inversa é adequado aos dados, assumindo uma distribuição exponencial. Através do Procedimento obtido, considerando um determinado nível de estresse fixo, o autor obtém o tempo requerido de experimentação em um teste acelerado, e também, o nível de estresse, sob o qual o teste deve ser feito, considerando o tempo de experimentação fixo.

Finalmente, Nelson (1990), é uma referência indispensável, onde encontramos vários tópicos relacionados a esse tema. Entre outros, modelos para testes de vida acelerados com estresse constante, análises de mínimos quadrados e de máxima verossimilhança, planejamento de experimentos acelerados, modelos de sobrevivência com riscos competitivos, etc.

Este trabalho é apresentado em 7 capítulos; no Capítulo 2 iniciamos um estudo sobre dados de confiabilidade, onde apresentamos alguns conceitos básicos de testes acel-

erados (ver por exemplo, Borges, Colosimo e Freitas, 1996, Nelson, 1990); no Capítulo 3, apresentamos uma análise clássica e bayesiana do modelo lei da potência inversa considerando a distribuição Exponencial. No Capítulo 4, desenvolvemos uma análise clássica e bayesiana do modelo de Eyring considerando a distribuição Weibull. No Capítulo 5, desenvolvemos as mesmas análises realizadas no Capítulo 4, mas considerando o modelo (relação estresse-resposta) de Ahrrenius. No Capítulo 6 apresentamos uma análise clássica e bayesiana do modelo lei da potência inversa considerando a distribuição Weibull-exponenciada (ver por exemplo, Mudholkar *et al.*, 1999) com ênfase nos métodos de MCMC. Conclusões Finais e Perspectivas Futuras de Trabalho se encontram no Capítulo 7.

O principal objetivo deste trabalho é propor uma Análise Bayesiana para o problema de Testes de Vida Acelerados para determinar o nível de estresse  $V_j$ , e qual o período de tempo,  $Y_j$ , que devem ser considerados no teste de controle da qualidade de um determinado lote de produtos manufaturados considerando unidades em teste sob níveis de estresse mais severos que os usualmente utilizados. Densidades a priori não informativas e densidades informativas para os parâmetros de interesse são considerados (Análise Bayesiana com priori não informativa para os parâmetros de interesse pode ser encontrada em por exemplo, Achcar e Louzada-Neto, 1992), considerando a densidade preditiva para uma observação futura (ver Aitchinson e Dunsmore, 1975), sob um nível especificado de estresse e sua função de confiabilidade a posteriori.

## Capítulo 2

# Alguns Conceitos Básicos de Testes Acelerados

Neste capítulo, apresentamos a teoria básica de testes de vida acelerados que engloba alguns conceitos como testes de vida acelerados, variável de estresse, formas de aceleração de testes e conceitos específicos somente utilizados nestes tipos de testes.

Um problema de grande interesse prático para indústrias de várias áreas é controlar a qualidade de seus produtos com rapidez e baixo custo operacional. Além disso, uma vez que determinados produtos estão sujeitos à utilização em diferentes situações de esforço (estresse), por exemplo, temperatura, pressão, voltagem etc., mais severas que as usuais, existe interesse em estudar a confiabilidade do produto exposto a cada uma dessas situações particulares, incluindo os níveis usuais de funcionamento. Uma forma, frequentemente utilizada para obter informações de maneira mais rápida com custo reduzido, facilitando a predição da confiabilidade é a realização de testes acelerados.

Um teste acelerado consiste basicamente de uma variedade de métodos para reduzir a vida de produtos ou provocar a degradação da performance deste rapidamente. O principal objetivo é obter rapidamente os tempos a serem analisados e desta forma produzir informações sobre a vida de um produto ou sua performance sob condições normais de uso. Desta forma, os testes acelerados podem ser divididos em dois tipos. Esta classificação é feita basicamente em função do tipo de dados obtidos a partir destes testes.

Os tipos de Testes Acelerados são:

- *testes de vida acelerados*: consistem na indução da falha do equipamento (a resposta de interesse é o "tempo até a ocorrência da falha") por meio de um planejamento adequado. O objetivo neste caso é estimar o tempo médio de sobrevivência, a função de confiabilidade ( $S(t)$ ), etc. Através da modelagem de tais dados, podemos, com certo cuidado, extrapolar os resultados obtidos nos testes para as condições normais de uso. Neste trabalho, estaremos tratando deste tipo de testes;
- *testes de degradação acelerados*: neste caso, a resposta de interesse é alguma medida de performance do produto ou componente (resistência a tração, oxidação, etc.), medida ao longo do tempo. O objetivo aqui é estudar a degradação da performance do produto ao longo do tempo e utilizar esta informação para estimar a distribuição do tempo de vida do produto (componente). Este é um tema importante de pesquisa e assunto de vários artigos recentes na literatura. Uma referência básica é Nelson (1990). Não estaremos tratando de modelos para este tipo de estudo, pois o assunto foge ao escopo deste trabalho.

*Variável de Estresse* é aquela que, utilizada num teste em níveis diferentes daqueles considerados em condições normais de uso (normalmente em níveis mais elevados), encurta o tempo até a falha do produto ou material.

## 2.1 Formas de Aceleração de um Teste Acelerado

Basicamente, um teste é acelerado submetendo as unidades a níveis mais altos de estresse do que aqueles encontrados nas condições normais de uso. Em outras palavras, escolhe-se níveis para as variáveis de estresse bem mais altos do que aqueles aos quais o produto é submetido em condições normais de uso (não é muito comum, mas certos testes podem ser acelerados usando níveis baixos ao invés de altos para as variáveis de estresse). As formas de aceleração podem ser divididas de acordo com dois tipos de variáveis de estresse:

- *aceleração por alta taxa de uso*: neste caso, fica claro que a variável de estresse é o uso. Coloca-se o produto em operação, porém com uma taxa de uso mais elevada do que a normal. Isto pode ser conseguido de duas formas:

- velocidade mais alta: por exemplo, coloca-se um motor em funcionamento a uma velocidade mais alta do que ele funcionaria normalmente;
  - redução do tempo de descanso: um exemplo, é o de uma máquina de lavar roupas. Em uma residência, acredita-se que ela fique em funcionamento uma ou duas horas por dia. Num teste, poder-se-ia colocá-la em funcionamento por 24 horas, ininterruptamente.
- *aceleração por altos níveis de estresse*: consiste em colocar o produto em uso submetido a níveis altos das variáveis de estresse com o objetivo de encurtar o tempo de vida ou degradar a performance do produto de maneira mais rápida. Neste caso, estamos tratando de variáveis de estresse como temperatura, vibração, entre outras (ver por exemplo Nelson, 1990).

Para alguns tipos de produtos, já se tem uma boa idéia de quais são as variáveis de estresse mais comuns. Alguns exemplos são apresentados nas Tabelas 2.1 e 2.2 a seguir.

Produtos		
Tipo	Medida de Performance	Variável de Estresse
1.semicondutores e componetes microeletrônicos	tempo até a falha e características de operação	temperatura; voltagem umidade; pressão
2.capacitores	tempo até a falha	temperatura; voltagem
3.resistores	tempo até a falha	temperatura; voltagem
4.contatos elétricos	corrosão; tempo até a falha	temperatura; corrente
5.lâmpadas	tempo até a falha;	voltagem; temperatura;

Tabela 2.1: Exemplos de Produtos; Medidas de Performance e Variáveis de Estresse

Materiais		
Tipo	Medida de Performance	Variável de Estresse
1.metais	trinca; corrosão; oxidação	temperatura; umidade; sal
2.dielétricos e isolamentos	tempo até a falha; alongamento	temperatura; voltagem vibração
3.alimentos e drogas	tempo de estocagem; pH reações químicas específicas	temperatura; umidade; radiação solar;
4.plásticos	propriedades mecânicas; firmeza da cor;	temperatura; vibração; choque;

Tabela 2.2: Exemplos de Materiais; Medidas de Performance e Variáveis de Estresse

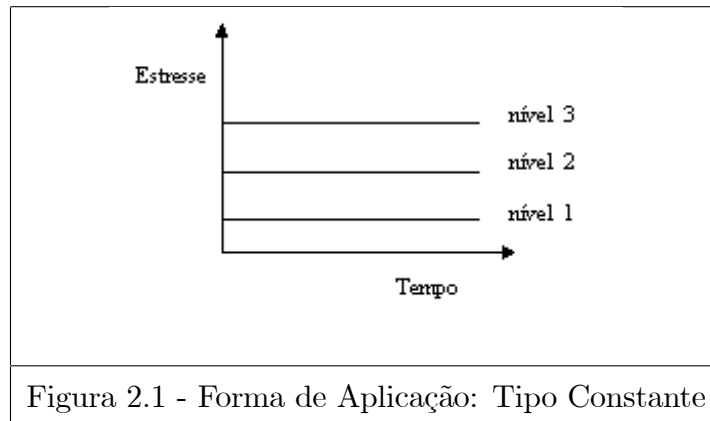
### 2.1.1 Formas de Aplicação da Carga (ou Nível) de Estresse

A carga de estresse num teste acelerado pode ser aplicada de várias formas (ver, por exemplo, Nelson, 1990). Estas formas só se aplicam para aceleração por altos níveis de estresse, isto é, outras variáveis que não o "uso". Algumas formas de aplicação da carga (ou nível) de estresse são:

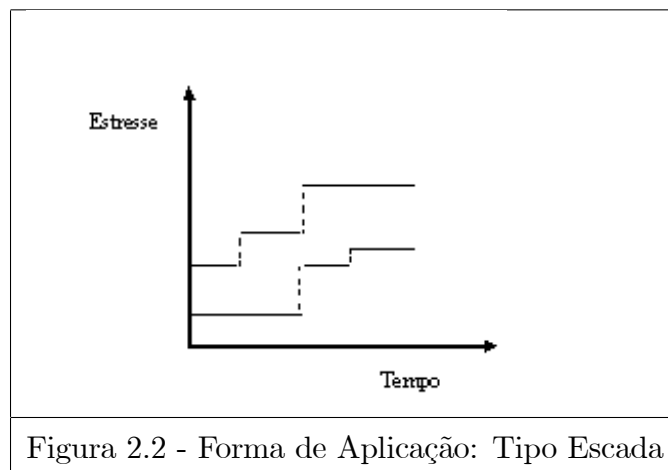
- *Constante*: é o tipo mais comum. Cada componente é submetido a um nível de estresse constante (vide Figura 2.1). Note que para que possamos fazer alguma modelagem dos dados obtidos, devemos utilizar vários níveis de estresse. No entanto, uma vez fixado o nível de estresse para um determinado componente, este ficará submetido a este nível até o final do teste. As vantagens desta forma de aplicação de estresse vão desde a simplicidade na realização do teste até o uso de modelos simples na análise dos resultados. Os modelos com base em estresse constante estão bem definidos na literatura e empiricamente verificados para alguns materiais e produtos, quando em uso, estão submetidos a níveis de estresse constante. Todas estas razões levam a recomendar esta forma de aplicação da carga



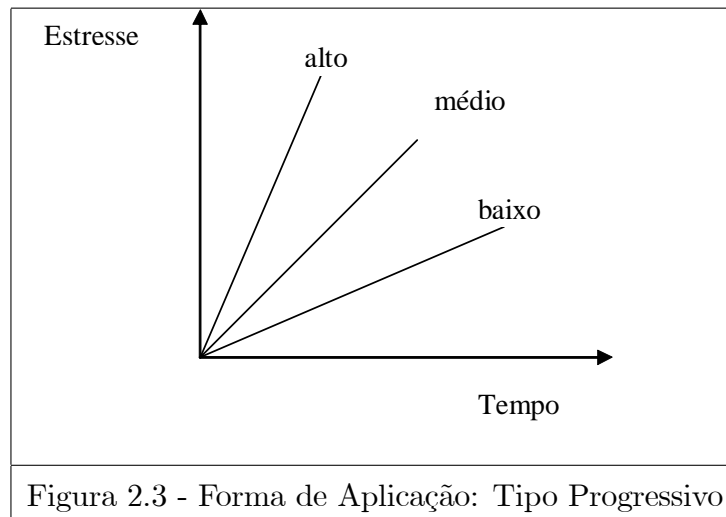
de estresse.



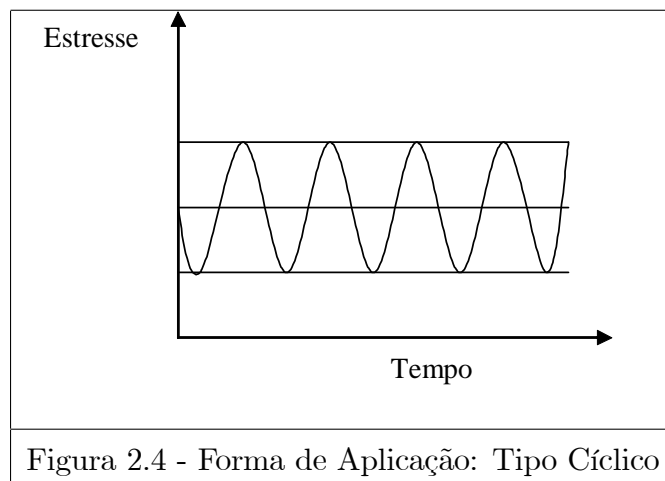
- *Escada ("Step Stress")*: cada componente é submetido a um nível de estresse por um período de tempo. Se o componente não falhar, o nível de estresse é elevado para um novo patamar, e o procedimento se repete. Portanto, nesta forma de aplicação da carga, o nível de estresse é aumentado em pequenos "degraus" até que ocorra a falha. A Figura 2.2 ilustra este tipo de aplicação da carga de estresse. A principal vantagem do *step stress* é levar rapidamente à ocorrência de falhas. A maior desvantagem está na estimação das medidas de confiabilidade. A maioria dos produtos em condições normais de uso é submetida a uma carga constante e não do tipo *escada*. Portanto, o modelo deve de maneira adequada levar em consideração o efeito cumulativo da exposição a estresses sucessivos. O modelo a ser utilizado é mais complexo do que aquele para estresse constante. Uma outra desvantagem do *step stress* é que os modos de falha que ocorrem nos patamares mais altos, em geral, diferem daqueles que ocorrem em condições normais de uso.



- *Progressivo*: cada componente é submetido a um nível crescente de estresse, porém esse aumento não é feito em patamares, mas progressivamente (vide Figura 2.3). O uso de testes com estresse progressivo apresenta as mesmas vantagens do tipo *escada*. Além disso, pode ser difícil em um teste acelerado controlar o aumento progressivo do nível de estresse.

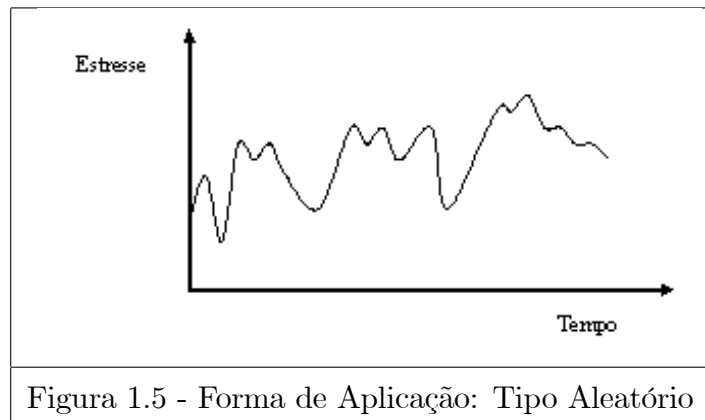


- *Cíclico*: cada componente é submetido a estresses de níveis alto e baixo de maneira cíclica (ex: ciclo senoidal). A Figura 2.4 ilustra o estresse cíclico.



- *Aleatório*: alguns produtos, quando em uso, estão sujeitos a níveis de estresse que se alteram de maneira aleatória. Exemplos incluem componentes de pontes e elevados e componentes estruturais de aviões. Num teste acelerado, os níveis de estresse serão aplicados seguindo uma distribuição que mais se aproxima da que ocorre na

realidade, porém a níveis mais elevados.



A motivação principal para a utilização de estresses do tipo *step* ou *progressivo* está na possibilidade de estressar ainda mais as unidades sobreviventes e fazer com que todas ou quase todas falhassem mais rapidamente. Em particular, quando o modo de falha e o efeito de aceleração da variável de estresse são bem entendidos, e quando se deseja fazer inferências para um ambiente cujo o estresse é aproximadamente constante, utilizar testes com outra forma de aplicação de estresse que não a constante, significa complicar desnecessariamente a situação. Entretanto, em outros casos é necessário realizar testes com aplicação de *step-stress* para identificar e fazer inferências sobre as constantes de um modelo cinético.

## 2.2 Algumas Considerações Importantes para a Realização de um Teste Acelerado

Alguns elementos importantes devem ser considerados, em condições de projeto, para a realização de um teste acelerado, pois a validade e precisão das informações oriundas de um teste acelerado, dependem do cuidado dispensado ao planejamento e a realização do mesmo. Este é um trabalho que deve ser desenvolvido de forma conjunta, por Engenheiros e Estatísticos (ver Nelson, 1990). Dentre muitas considerações importantes para a realização de um Teste Acelerado, podemos citar:

- *Objetivo*: testes acelerados são realizados com vários objetivos. Os mais comuns incluem (ver por exemplo, Nelson, 1990, Borges et al., 1996):

- identificar falhas de projeto: eliminá-las ou reduzi-las através de redundâncias, melhores componentes, etc;
- *burn in*: uma etapa do processo de manufatura que visa eliminar falhas que ocorrem logo no início do período de vida útil do produto;
- obter medidas de confiabilidade: para determinar se um projeto deve ser liberado para a fabricação ou se um produto deve ser liberado para um cliente. Estimar custos de garantia e serviço, taxas de falha, tempo médio até a falha, taxas de degradação, etc;
- controle de qualidade: monitorar a confiabilidade do produto e tomar ações corretivas conforme necessário, por exemplo, quando um novo modo de falha aparece, ou quando a vida ou performance se degradam.

Um teste acelerado pode ter um ou mais destes objetivos, que dizem respeito a projeto, fabricação, controle de qualidade, marketing, serviço de assistência técnica, etc. O importante é definir de maneira clara os objetivos do teste antes de realizá-lo, uma vez que ele determinará os cuidados a serem seguidos durante o planejamento e sua realização.

- *Escolha da medida de performance*: para muitos produtos, já existem normas técnicas que definem quais são as medidas de performance a serem utilizadas e como medi-las (ver Tabelas 2.1 e 2.2). Na terminologia estatística, a medida de performance é chamada *variável resposta*.
- *Definição de "falha"*: é importante que fabricante e consumidor concordem antecipadamente com a definição de *falha* para evitar problemas futuros.
- *Determinação de Condições Realistas de Teste*: o ideal é que um teste acelerado tente ao máximo simular as condições reais de uso, exceto pelos níveis utilizados da variável de estresse. Apesar dos esforços, muitos testes diferem das condições reais de uso. Os engenheiros são então levados a assumir (baseados em experiência) que um produto cuja performance é boa nos testes terá boa performance em uso.
- *Definição das Variáveis de Estresse*: aqui também nos deparamos com o fato de que para muitos produtos, existem padrões (normas) para os testes e para os estresses

de aceleração (ver exemplos de variáveis de estresse nas Tabelas 2.1 e 2.2). Para outros produtos pode não haver nenhum padrão já estabelecido. Neste caso, é preciso determinar através de experimentação, os estresses apropriados. Há casos ainda em que pode ser conveniente e necessário utilizar mais do que uma variável de estresse, o importante é reconhecer qual estresse de fato acelera a falha do produto.

- *Escolha do Plano Experimental:* um plano experimental é formado pelos três elementos que serão citados a seguir. Portanto, escolher um plano experimental significa:
  - determinar os níveis de estresse: os níveis de estresse que serão utilizados não devem ser tão altos que produzam outros modos de falha que raramente ocorrem nas condições de projeto. Mesmo assim, os níveis devem ser altos o suficiente para provocar o aparecimento das falhas ativas no projeto. Isto requer uma experimentação anterior ao teste para que possam ser bem definidos,
  - determinar o tamanho da amostra: quantos componentes ao todo serão submetidos a teste,
  - determinar a proporção de alocação: em outras palavras, dada uma amostra de  $n$  componentes, e o número de níveis de estresse, devemos colocar um certo número de componentes que deverão ser submetidos a teste em cada um dos níveis. A Engenharia tradicional, fixa 3 (três) ou 4 (quatro) níveis de estresse e aloca o mesmo número de unidades para cada nível. Esta prática gera resultados menos precisos de tempo de vida em níveis baixos, uma vez que as falhas ocorrem com menor frequência. Mais unidades devem ser submetidas a teste nos níveis mais baixos do que nos mais altos.

A determinação destes 3 elementos e conseqüentemente do plano experimental deve ser feita em função da precisão desejada para os estimadores das quantidades de interesse.

- *Outras Variáveis:* além da variável de estresse, existem outras variáveis que afetam a vida do produto. O primeiro tipo consiste das *variáveis experimentais*, estas variáveis são controláveis e são investigadas em vários níveis com o objetivo de estudar

seus efeitos. O outro tipo consiste das variáveis constantes, estas são mantidas constantes durante o teste como por exemplo, manter o mesmo lote, mesmo operador, etc. Existem também as variáveis não *controláveis* mas *observáveis*. Seus valores são anotados para que se aprenda a respeito do seu efeito. Finalmente, o último tipo consiste das variáveis não *controláveis* e não *observáveis*. A aleatorização evita que o efeito destas variáveis se confunda com o efeito do estresse.

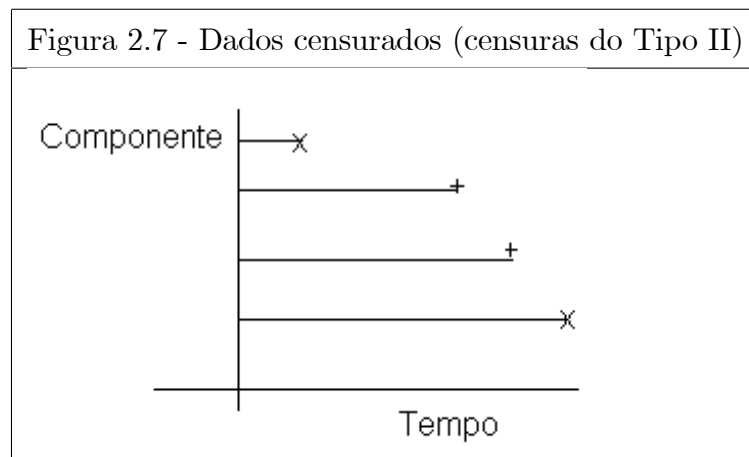
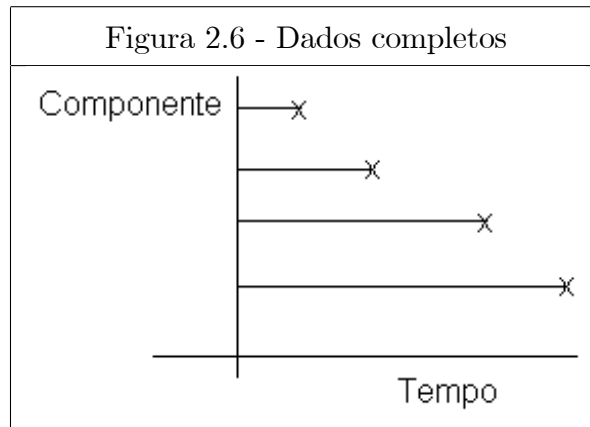
- *Análise Estatística*: a análise estatística envolve a escolha de um modelo matemático apropriado para a realização de inferências a respeito da população em estudo. A escolha de um modelo deve ser baseada na teoria e experiência da Engenharia. Um modelo para um teste de vida acelerado consiste na escolha de uma distribuição probabilística para o tempo de falha e de uma relação estresse-resposta. Existem alguns candidatos para a distribuição probabilística e para a relação estresse-resposta que são muito utilizados e conhecidos na literatura. Após a escolha de um possível modelo, os dados experimentais são utilizados inicialmente para verificar sua adequação. A validade do modelo deve ser verificada através de técnicas estatísticas. Caso necessário, o modelo deve ser modificado até que um adequado seja obtido. As conclusões são extraídas do modelo final, ajustado para responder aos objetivos do teste, Estas conclusões envolvem estimação pontual e por intervalos, além de testes de hipóteses.

## 2.3 A Presença de Censuras

Os testes realizados para obter as medidas de durabilidade de produtos são demorados e caros. Mesmo sendo demorados, usualmente os testes são concluídos antes que todos os itens falhem. Uma característica decorrente destes testes é então, a presença de observações incompletas ou parciais. Estas observações são mais especificamente chamadas por censura à direita pois o tempo de falha fica à direita do tempo de censura. Censura à esquerda praticamente não ocorre em testes industriais. No entanto, existe um outro tipo de observação incompleta chamada de truncamento à esquerda, que se difere ligeiramente da censura à direita. Eles ocorrem com menos frequência e não serão tratados neste trabalho. Exemplos e métodos de análise para dados truncados à esquerda podem ser

encontrados em Nelson (1990) e Lawless (1982).

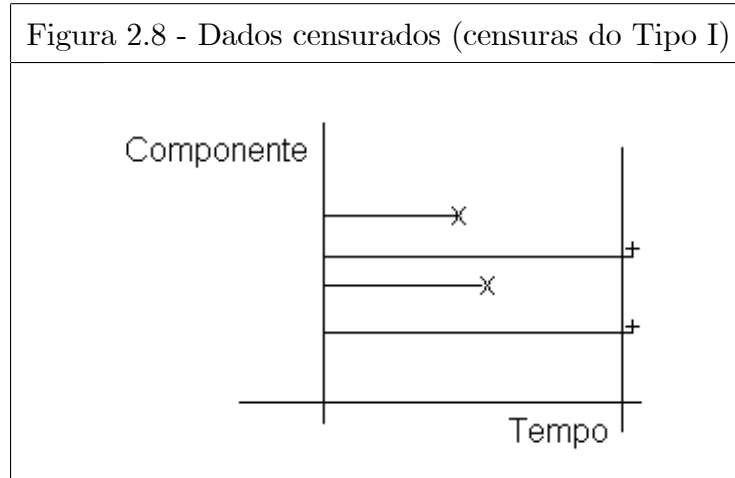
As Figuras 2.6 e 2.7 apresentam duas situações de um conjunto de dados em análise de confiabilidade. Na Figura 2.6 não temos a presença de observações censuradas, ou seja, temos o tempo de falha de cada unidade da amostra em teste. Já na Figura 2.7, alguns tempos de vida são censurados à direita, ou seja, sabemos apenas que estes tempos são maiores que o tempo final do experimento (pré fixado).



(+) Observações censuradas

As censuras podem ocorrer de várias formas, de acordo com diferentes mecanismos, dentre os quais podemos citar: censuras de tipo I, censuras de tipo II e censuras aleatórias (Lawless, 1982). Se o estudo termina em um período pré-estabelecido de tempo, temos censuras de tipo I (ver, Figura 2.8). Caso o estudo termine após a ocorrência de uma determinada quantidade de falhas pré estabelecida, dentre os indivíduos em estudo,

temos censuras de tipo II (ver, Figura 2.7).



(+) Observações censuradas

Em algumas aplicações, especialmente na área médica ou em engenharia, os tempos censurados, muitas vezes, são aleatórios; por exemplo, quando um item é retirado no decorrer do teste sem ter atingido a falha, temos censura do tipo aleatório. Em um experimento médico os pacientes podem entrar em estudo de uma forma aleatória, de acordo com a data do diagnóstico. Se o estudo terminar numa data pré-estabelecida, então, os tempos de censuras, que são os intervalos entre o instante que o indivíduo entra em estudo até o término do mesmo, são aleatórios. Frequentemente, nestes casos, deve ser considerado censuras do tipo I, assumindo dados condicionais nos tempos de censuras observados.

Geralmente, censuras de tipo I e aleatórias são observadas com mais frequência em estudos biomédicos, enquanto que, em experimentos industriais, as censuras de tipo II são predominantes.

## 2.4 Esquema do Experimento Acelerado

Para gerar o experimento acelerado consideram-se  $k$  níveis aleatorizados da variável estresse  $X$ , submetem-se  $n_i$  unidades em teste sob cada nível de estresse  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  e o experimento termina quando  $r_i$  unidades falham. Dessa forma, tem-se  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$  tempos observados dentre  $n_i$  unidades e  $(n_i - r_i)$  observações censuradas iguais a  $t_{ir_i}$ ,



caracterizando um esquema de censura do tipo II (ver Tabela 2.3).

Com relação a escolha do número adequado  $k$  de níveis de estresse, devemos utilizar técnicas de planejamento de experimentos.

Tabela 2.3. Esquema do Experimento Acelerado.

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Dados Observados
1	$V_1$	$n_1$	$r_1$	$t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}, t_{1r_1}^+, \dots, t_{1r_1}^+$
2	$V_2$	$n_2$	$r_2$	$t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}, t_{2r_2}^+, \dots, t_{2r_2}^+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k$	$V_k$	$n_k$	$r_k$	$t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{kr_k}, t_{kr_k}^+, \dots, t_{kr_k}^+$

(+) Observações censuradas.

Os  $k$  testes são realizados aplicando-se constantemente o estresse  $V_i$  nas  $n_i$  unidades. Os testes são interrompidos logo após a  $r_i$ -ésima falha ocorrer e seus respectivos tempos de falhas são registrados. Os tempos não-censurados  $t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ir_i}$  são observados e as  $(n_i - r_i)$  observações censuradas restantes são iguais à  $t_{ir_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Em confiabilidade, é fundamental que os experimentos sejam eficientes em relação ao seu tempo de duração e custo e para tal, duas características essenciais são consideradas:

(i) o término do experimento se dá num instante  $T_0$  correspondente à falha de uma proporção pré-fixada,  $p\%$ , dos componentes sob teste;

(ii) os componentes são testados não somente sob condições normais de funcionamento, isto é, condições usuais de estresse, mas sobretudo sob condições aceleradas de estresse, como por exemplo com tensão elétrica e/ou temperaturas mais elevadas que as usuais. Assim, uma quantidade  $n_1$  de componentes é submetida às condições usuais de estresse, e quantidades  $n_2, n_3, \dots, n_k$  são submetidas a diferentes níveis de estresse maiores do que os usuais.

Quando não temos dados censurados, observamos todos os tempos de sobrevivência  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$  (dados completos ou sem censuras).

## 2.5 Algumas Funções Importantes

Seja uma variável aleatória  $T$  não negativa representando o tempo de vida de um produto ou de um certo equipamento. A função de densidade de  $T$ , tempo eventual de vida de um produto é dada por

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.1)$$

e a probabilidade acumulada de falha de um componente até o tempo  $t$  é determinada pela função distribuição, dada por

$$F(t) = \Pr[T \leq t] = \int_0^t f(x) d(x). \quad (2.2)$$

Considerando  $f(t)$  a função de densidade de probabilidade de  $T$ , a função de confiabilidade é entendida como a probabilidade de um produto desenvolver sua função sem falhar até um certo tempo  $t$ , dada respectivamente por

$$S(t) = \Pr(T > t) = \int_t^{+\infty} f(t) dt. \quad (2.3)$$

A função de taxa de falha denotada por

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T < t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (2.4)$$

é entendida como a probabilidade de um produto falhar no intervalo  $(t, t + \Delta t)$ , dado que ele não falhou até o tempo  $t$ .

Várias relações importantes ligam essas funções, destacando-se:

$$f(t) = \frac{\partial[F(t)]}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$f(t) = h(t) \times S(t) \text{ e} \quad (2.6)$$

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u) d(u)\right). \quad (2.7)$$

Suponha uma amostra aleatória de observações  $T_1, \dots, T_n$  representando os tem-

pos de vida de uma amostra de interesse. Considere inicialmente que todas as observações são não-censuradas. A população é caracterizada pela sua função de densidade  $f(t_i)$ . A função de verossimilhança para um parâmetro  $\lambda_i$  é dada por,

$$L(\lambda_i) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \lambda_i). \quad (2.8)$$

A função de verossimilhança  $L(\lambda_i)$  mostra que a contribuição de cada observação não-censurada é a sua função de densidade. A contribuição de cada observação censurada não é a sua função de densidade. Estas observações somente nos informam que o tempo de falha é maior que o tempo de censura observado e portanto, a sua contribuição para  $L(\lambda_i)$  é a sua função de confiabilidade  $S(t_i)$ . As observações podem então ser divididas em dois conjuntos, as  $r$  primeiras são as não-censuradas, e as  $(n - r)$  seguintes, são as censuradas. Assim, a função de verossimilhança é dada por,

$$L(\lambda_i) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \lambda_i) \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \lambda_i). \quad (2.9)$$

Suponha que um teste foi realizado, submetendo-se os itens a uma variável de estresse  $X$ , e que  $k$  níveis foram escolhidos para esta variável ( $i = 1, \dots, k$ ). Em cada nível  $i$  da variável de estresse,  $n_i$  itens são submetidos a teste. Ao final do teste, as  $r_i$  primeiras observações não-censuradas e as  $(n_i - r_i)$  restantes são as censuradas. Utilizando a expressão (2.9), a função de verossimilhança para cada nível toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{nível 1} & : L_1(\lambda_i) = \prod_{j=1}^{r_1} f(t_{1j}; \lambda_i) \prod_{j=r_1+1}^{n_1} S(t_{1j}; \lambda_i) \\ \text{nível 2} & : L_2(\lambda_i) = \prod_{j=1}^{r_2} f(t_{2j}; \lambda_i) \prod_{j=r_2+1}^{n_2} S(t_{2j}; \lambda_i) \\ & \vdots \\ \text{nível } k & : L_k(\lambda_i) = \prod_{j=1}^{r_k} f(t_{kj}; \lambda_i) \prod_{j=r_k+1}^{n_k} S(t_{kj}; \lambda_i) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Desta forma, a função de verossimilhança da amostra composta de  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$

observações é dada por,

$$\prod_{i=1}^k L_i(\lambda_i) = \prod_{i=1}^k \left[ \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij}; \lambda_i) \prod_{j=r_i+1}^{n_i} S(t_{ij}; \lambda_i) \right]. \quad (2.11)$$

## Capítulo 3

# Uso de Testes de Vida Acelerados no Controle da Qualidade de Produtos Industriais Assumindo uma Distribuição Exponencial e um Modelo Estresse-Resposta Geral

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, propomos uma análise bayesiana para determinar um procedimento de controle da qualidade de produtos industriais que pode ser aplicado rapidamente, com custo reduzido usando testes de vida acelerados. Considerando o modelo Lei da Potência Inversa, uma distribuição Exponencial para os tempos de vida dos componentes, densidades a priori informativas para os parâmetros de interesse e uma densidade preditiva para uma observação futura (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore,1975), propomos também um critério para o controle da qualidade de um lote de componentes que será baseado na quantidade de falhas quando testados durante um período fixo de tempo, sob o nível de estresse especificado.

## 3.2 Formulação do Modelo

Suponha um teste de vida acelerado aplicado em um conjunto com  $n_i$  unidades (componentes), como descrito no Capítulo 2. Sob o nível de estresse  $X_i$ , tempo de sobrevivência  $T$  a função densidade de probabilidade exponencial (*f.d.p.*), para a variável aleatória  $T$ , é dada por,

$$f_i(t, \lambda_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (3.1)$$

para  $t > 0$  e  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , no qual  $\lambda_i$  é um parâmetro desconhecido que denota a taxa constante de falha sob o nível de estresse  $X_i$ .

Considerando a função densidade de probabilidade (3.1), a função distribuição é dada por,

$$F_i(t) = \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx = 1 - e^{-\lambda_i t}. \quad (3.2)$$

A função de confiabilidade  $S(t)$  que é a probabilidade do produto continuar funcionando além do tempo  $t$ , é dada para a distribuição exponencial por,

$$S_i(t) = \Pr(T > t) = \int_t^{+\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx = e^{-\lambda_i t}. \quad (3.3)$$

A função de risco  $h(t)$  num nível fixado de estresse fornece a taxa constante de falha, dada por (ver, por exemplo, Lawless, 1982)

$$h_i(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda_i. \quad (3.4)$$

O tempo médio de sobrevivência  $\theta_i$  (função de  $\lambda_i$ ) sob um particular nível de estresse  $V_i$ , considerando o modelo lei da potência inversa, é dado por:

$$\theta_i = \frac{\alpha}{V_i^\beta}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.5)$$

Assumindo que o relacionamento entre  $\lambda_i$  e a variável estresse  $X$  com  $k$  níveis aleatorizados de estresse é dado pela relação estresse-resposta geral, (ver por exemplo, Klein e Basu, 1981)

$$\lambda_i = e^{-(z_i + \beta_0 + \beta_1 X_i)} \quad (3.6)$$

para  $-\infty < \beta_0 < \beta_1 < \infty$  parâmetros desconhecidos.

Como um caso especial, considerando o experimento acelerado descrito como no Capítulo 2, a variável aleatória  $T$  com f.d.p. (3.1) e o modelo estresse-resposta geral (3.6), a função de verossimilhança para  $\beta_0$  e  $\beta_1$  considerando dados com censuras de tipo II é dada por,

$$\begin{aligned} L(\beta_0, \beta_1) &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij} | \lambda_i) [S(t_{ir_i} | \lambda_i)]^{(n_i - r_i)} \right\} \\ &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{r_i} \lambda_i \exp(-(\lambda_i t_{ij})) \times \exp(-(\lambda_i t_{ir_i}))^{(n_i - r_i)} \right\} \\ &\propto \exp\left(\sum_{i=1}^k r_i Z_i - \beta_0 r - \beta_1 \sum_{i=1}^k r_i X_i - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^k A_i e^{-Z_i - \beta_1 X_i}\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $-\infty < \beta_0, \beta_1 < +\infty$ ,  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  (é o número total de falhas observadas) e  $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)t_{ir_i}$ .

### 3.3 Análise Bayesiana do Modelo Lei da Potência Inversa com Dados Completos

Assumindo o modelo lei da potência inversa e um esquema de amostragem completa, ou seja, considerando  $k$  níveis de uma variável stress  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  onde os tempos de sobrevivência têm distribuição Exponencial, uma amostra de  $n_i$  componentes é colocada em teste, para cada nível  $V_i$ . O experimento acelerado termina quando todas as observações falham. A função de verossimilhança é dada como uma função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim a função de verossimilhança (3.7) pode ser escrita na forma,

$$L(\alpha, \beta) \propto \alpha^{-n} \times \prod_{i=1}^k V_i^{n_i \beta} \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta\right) \quad (3.8)$$

para  $\alpha > 0$  e  $-\infty < \beta < \infty$ ,  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  e  $A_i = \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij}$

Vamos considerar distribuições a priori informativas para  $\alpha$  e  $\beta$  assumindo independência a priori entre os parâmetros. Assuma que  $\alpha \sim G[a_1, b_1]$  e  $\beta \sim N[\mu, \sigma^2]$ , com  $a_1, b_1,$

$\mu$  e  $\sigma$  conhecidos, onde  $G[a_1, b_1]$  é uma distribuição gama com  $E(\alpha) = \frac{a_1}{b_1}$ , para  $b_1 > 0$  e  $Var(\alpha) = \frac{a_1}{b_1^2}$ , para  $b_1 > 0$  e  $N[\mu, \sigma^2]$  denota uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  ( $\mu$  e  $\sigma^2$  conhecidos).

Assim, temos a densidade a priori conjunta para  $\alpha$  e  $\beta$  dada por,

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \alpha^{a_1-1} \times \exp(-b_1\alpha) \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2\right) \quad (3.9)$$

Combinando-se a densidade a priori conjunta (3.9) com a função de verossimilhança dada em (3.8) e o teorema de Bayes, a densidade a posteriori conjunta para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta \mid \tilde{t}, \tilde{v}) &\propto \alpha^{a_1-n-1} \times \exp(-b_1\alpha) \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2 + \beta \sum_{i=1}^k n_i \ln(V_i)\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para obter sumários a posteriori de interesse para a distribuição a posteriori conjunta (3.10), usamos métodos MCMC com especial destaque para o algoritmo Gibbs Sampling e o algoritmo Metropolis-Hastings (ver por exemplo Gelfand e Smith, 1990 ou Roberts e Smith, 1993).

As distribuições condicionais necessárias para o algoritmo Gibbs Sampling, são dadas por,

$$\begin{aligned} a) \pi(\alpha \mid \beta, \tilde{t}, \tilde{v}) &\propto \alpha^{-n+a_1+1} \times \exp(-b_1\alpha) \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta\right); \\ b) \pi(\beta \mid \alpha, \tilde{t}, \tilde{v}) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2\right) \times \exp\left(\beta \sum_{i=1}^k n_i \ln(V_i) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observe que precisamos usar o algoritmo Metropolis-Hastings para gerar amostras de  $\alpha$  e  $\beta$ .

É importante salientar que outros métodos poderiam ser utilizados para encontrar os sumários a posteriori de interesse, em especial o método de Laplace (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986) ou métodos numéricos baseados em quadratura Gaussiana (ver por exemplo, Gamerman, 1996).



### 3.3.1 Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um nível de Estresse $V_j$

A densidade preditiva para um tempo futuro  $T_{(n+1)j}$  sob o nível de estresse  $V_j$  onde  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  (número total de unidades em teste) é dada, por,

$$f^j(t_{(n+1)j} | dados) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f_j(t_{(n+1)j} | \alpha, \beta) \pi(\alpha, \beta | dados) d\alpha d\beta \quad (3.12)$$

onde  $f_j(t_{(n+1)j} | \alpha, \beta) = \lambda_j \exp\{-\lambda_j t_{(n+1)j}\}$  é a função densidade de  $T_{(n+1)j}$ ,  $\pi(\alpha, \beta | dados)$  é a densidade a posteriori conjunta dada em (3.10) e  $\lambda_j = \frac{V_j^\beta}{\alpha}$ .

Nas aplicações em engenharia ou industrial, é importante obtermos formas analíticas fechadas para a densidade preditiva de uma observação futura para ser usada na construção de gráficos ou tabelas para controle da qualidade. Portanto, para uso em controle de qualidade, podemos encontrar a densidade preditiva  $f^j(t_{(n+1)j} | dados)$  usando o método de Laplace (ver, por exemplo, Tierney e Kadane, 1986) ou métodos numéricos de Quadratura Gaussiana (ver por exemplo, Gamerman, 1996).

Assumindo que o parâmetro  $\beta$  seja conhecido e uma distribuição a priori para  $\alpha$  dada por uma distribuição gama inversa  $IG[a_2, b_2]$ , com os hiperparâmetros  $a$  e  $b$  conhecidos, na qual  $IG[a_2, b_2]$  denota uma distribuição gama inversa com  $E(\alpha) = \frac{b_2}{a_2 - 1}$ , para  $a_2 > 1$  e  $Var(\alpha) = \frac{b_2^2}{(a_2 - 1)^2(a_2 - 2)}$ , para  $a_2 > 2$ , a distribuição a posteriori para  $\alpha$  é dada por,

$$\pi(\alpha | \beta, t, v) = \frac{\left[ \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2 \right]^{(n+a_2)}}{\Gamma(n+a_2)} \times \alpha^{-(a_2+n+1)} \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2 \right)\right) \quad (3.13)$$

para  $\alpha > 0$ .

Portanto, a densidade preditiva para uma observação futura  $T_{(n+1)j}$ , onde  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  é o número total de observações em teste, considerando o parâmetro  $\beta$  conhecido e um nível de stress  $V_j$ , é dada por (ver por exemplo, Press, 1989 ou Aitchinson e Dunsmore, 1975),

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2\right)^{(n+a_2)} \times V_j^\beta}{\Gamma(n+a_2)} \times \int_0^\infty \alpha^{-(a_2+n+2)} \times \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}(V_j^\beta t_{(n+1)j} + b_2 + \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta)\right\} d\alpha \quad (3.14)$$

Usando o resultado  $\int_0^\infty b_2^{a_2} \theta^{-(a_2+1)} \exp(-\frac{b_2}{\theta}) d\theta = \Gamma(a_2)$  e como  $\Gamma(n+a_2+1) = (n+a_2)\Gamma(n+a_2)$ , a função densidade preditiva para uma observação futura em um nível  $j$  do stress  $V$ ,  $T_{(n+1)j}$  assumindo  $\beta$  conhecido, é dada por:

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{(n+a_2)V_j^\beta \left[\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2\right]^{(n+a_2)}}{\left[V_j^\beta t_{(n+1)j} + b_2 + \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta\right]^{(n+a_2+1)}} \quad (3.15)$$

para  $t_{(n+1)j} > 0$ . Isto é,  $T_{(n+1)j} \mid \text{dados}$  tem uma distribuição de Pareto.

Escrevendo  $C = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2$ , a densidade (3.15) pode ser reescrita na forma,

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{(n+a_2) \left(\frac{C}{V_j^\beta}\right)^{(n+a_2)}}{\left(t_{(n+1)j} + \frac{C}{V_j^\beta}\right)^{(n+a_2+1)}} \quad (3.16)$$

para  $t_{(n+1)j} > 0$ .

Observe em (3.16), que a função densidade preditiva para  $T_{(n+1)j}$ , para  $(n+a_2) > 1$ , tem média da por,

$$E^j(T_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{(n+a_2) \left[\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2\right]}{(n+a_2-1)V_j^\beta}. \quad (3.17)$$

e variância para  $(n+a_2) > 2$  é dada por,

$$Var^j(T_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{(n+a) \left(\sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2\right)^2}{(n+a_2-1)^2(n+a_2-2)V_j^{2\beta}} \quad (3.18)$$

para  $j = 1, 2, \dots, k$ .

### 3.3.2 Controle da Qualidade de um Determinado Lote de Unidades

Em controle de qualidade, em particular, na inspeção de qualidade, um procedimento de interesse é selecionar amostras de um determinado lote de componentes para verificar se estes estão sob controle. Porém, isso deve ser feito com custo e tempo de experimentação mínimos. Assim, consideramos um teste de vida acelerado com um nível alto de estresse  $V_j$  e um período de tempo fixo,  $Y_j$ .

Neste procedimento o objetivo usual é determinar:

- (i) o valor de  $Y_j$  para um dado nível de estresse  $V_j$  fixo, isto é, usando a densidade preditiva  $f^j(t_{(n+1)j} | dados)$  e considerando uma probabilidade fixa  $(1 - \gamma)$ , determinar o valor de  $Y_j$  tal que  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | dados) = 1 - \gamma$ ;
- (ii) considerando  $Y_j$  fixo, determinar o valor de  $V_j$  tal que  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | dados) = 1 - \gamma$ .

Da densidade preditiva (3.15) temos,

$$\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | dados) = \int_{Y_j}^{\infty} f^j(t_{(n+1)j} | dados) dt_{(n+1)j} \quad (3.19)$$

Considerando  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | dados) = 1 - \gamma$ , temos,

$$\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | dados) = \int_{Y_j}^{\infty} \frac{(n + a_2) \times \left(\frac{C}{V_j^\beta}\right)^{n+a_2}}{\left(t_{(n+1)j} + \frac{C}{V_j^\beta}\right)^{n+a_2+1}} dt_{(n+1)j} = 1 - \gamma. \quad (3.20)$$

O resultado da integração acima é dado por:

$$\left(\frac{C}{V_j^\beta}\right)^{n+a_2} \times \left(\frac{1}{\left(Y_j + \frac{C}{V_j^\beta}\right)}\right)^{n+a_2} = 1 - \gamma \quad (3.21)$$

onde  $C = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2$ .

Da expressão (3.21) com  $V_j$  fixo observamos que  $Y_j$  é dado por,

$$Y_j = \frac{C[1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+a_2}}]}{V_j^\beta (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+a_2}}} \quad (3.22)$$

e , com  $Y_j$  fixo,  $V_j$  é a solução da equação:

$$V_j = \left\{ \frac{C \left[ 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+a_2}} \right]}{(1 - \gamma)^{\frac{1}{n+a_2}} Y_j} \right\}^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.23)$$

Daí, encontrados os valores de  $V_j$  e  $Y_j$  tais que,  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j \mid \text{dados}) = 1 - \gamma$  e definindo  $p_j = \Pr(T_{(n+1)j} \leq Y_j \mid \text{dados})$ , podemos colocar  $m$  unidades novas para serem testadas no nível de estresse  $V_j$ , observar seus tempos de duração durante o período de tempo  $Y_j$  e considerar o teste de hipóteses,  $H_0 : p_j \leq \gamma$  (lote aprovado na inspeção por amostragem) contra  $H_1 : p_j > \gamma$  (lote não aprovado na inspeção por amostragem) supondo que o número  $\omega$  de falhas observadas no período  $Y_j$ , no nível de estresse  $V_j$ , na amostra de tamanho  $m$  ( $m \geq 30$ ), tenha uma distribuição Binomial, isto é,  $W \sim \text{Bin}(m, p_j)$ .

Assim, um critério para o teste de controle da qualidade é dado por:

a linha de produção está sob controle se  $Z \leq -Z_\alpha$ , onde

$$Z = \frac{(W - mp_j)}{\sqrt{mp_j(1 - p_j)}} \stackrel{a}{\sim} N[0, 1], \quad (3.24)$$

$\alpha$  é o nível de significância e  $Z_\alpha$  é o percentil tal que  $P_r(Z \leq -Z_\alpha) = \alpha$ .

Assumindo  $\beta$  desconhecido, a densidade preditiva aproximada pelo Método de Laplace (ver, por exemplo, Tierney e Kadane, 1986), ou por métodos numéricos (ver por exemplo, Gamerman, 1996) pode ser usada. Conseqüentemente, os valores  $V_j$  e  $Y_j$  podem ser encontrados satisfazendo  $P(T_{(n+1)j} > Y_j \mid \text{dados}) = 1 - \gamma$ .

### 3.4 Estimadores de Máxima Verossimilhança para $\alpha$ e $\beta$ com Amostras Censuradas Considerando o Modelo Lei da Potência Inversa

Nesta seção vamos considerar a forma geral da função de densidade de probabilidade conjunta, quando algumas unidades na amostra fornecem informações incompletas sobre os seus tempos de vida. Dizemos que o tempo de vida dessas unidades é censurado. As causas de ocorrência de dados censurados são as mais variadas possíveis (ver, por exemplo,

Lawless, 1982). A não consideração destas unidades com informações incompletas sobre seus tempos de vida pode levar à inferências viciadas ou menos eficientes. Portanto, é importante que a informação contida nos tempos de vida censurados também seja levada em consideração.

Assumindo dados com censuras de tipo II e o Modelo Lei da Potência Inversa, a função de verossimilhança (ver (3.7)) é dada por,

$$L(\alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^k \frac{V_i^{r_i \beta}}{\alpha^{r_i}} \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta\right) \quad (3.25)$$

onde  $A_i = \sum_{j=1}^{r_j} t_{ij} + (n_i - r_i)t_{ir_i}$ ,  $r_i$  é o número de observações completas (falhas observadas) no  $i$ -ésimo nível de stress  $V_i$  e  $n_i$  é o número total de observações (obsevações completas e censuradas) no  $i$ -ésimo nível de stress  $V_i$ .

Note que neste caso a expressão da função de verossimilhança para dados com censuras de tipo II é idêntica à do caso com dados completos, assim como um critério para o controle da qualidade de produtos manufaturados apresentado com dados completos pode ser feito considerando dados com censuras do tipo II apenas substituindo  $n$  por  $r$ . Por este motivo, dados completos é um caso particular de dados com censuras do tipo II, no qual  $n_i = r_i$ .

Com  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  (número total de falhas observadas), o logaritmo da função de verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$  é dado por,

$$l(\alpha, \beta) = \beta \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i - r \ln \alpha - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta. \quad (3.26)$$

Da resolução das equações

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}}}{r} = 0 \text{ e} \\ \sum_{i=1}^k r_i \ln V_i &= \frac{r \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}} \ln V_i}{\sum_{i=1}^k A_i V_i^{\hat{\beta}}} = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

encontramos os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$ .

As equações de verossimilhança (3.27) são não lineares. Para solucionar numerica-

mente estas equações, precisamos usar um método iterativo para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança para  $\beta$  e  $\alpha$ .

A partir da função de verossimilhança dada em (3.25) e notando que  $E(A_i) = \frac{r_i \alpha}{V_i^\beta}$ , para todos os níveis de estresse  $i = 1, \dots, k$ , temos

$$\begin{aligned} E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial^2 \alpha} \right\} &= -\frac{r}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \sum_{i=1}^k V_i^\beta \frac{r_i \alpha}{V_i^\beta} = \frac{r}{\alpha^2} \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} &= E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} \right\} = -\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^k V_i^\beta \frac{r_i \alpha}{V_i^\beta} (\ln V_i) = -\frac{\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i}{\alpha} \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial^2 \beta} \right\} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k V_i^\beta \frac{r_i \alpha}{V_i^\beta} (\ln V_i)^2 = \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto, a Matriz de Informação de Fisher é dada por:

$$I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{r}{\alpha^2} & -\frac{\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i}{\alpha} \\ -\frac{\sum_{i=1}^k r_i \ln V_i}{\alpha} & \sum_{i=1}^k r_i (\ln V_i)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Na construção de intervalos de confiança para  $\alpha$  e  $\beta$  ou mesmo funções dos parâmetros, podemos usar a aproximação normal assintótica para os EMVs de  $\alpha$  e  $\beta$ , isto é,  $(\hat{\alpha} \text{ e } \hat{\beta}) \stackrel{a}{\sim} N \left\{ (\alpha, \beta); I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \right\}$ , no qual  $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ , o inverso da Matriz de Informação de Fisher, é a Matriz de Variância e Covariância assintótica de  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ .

Assim, os intervalos de confiança para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , considerando um nível de confiança  $100(1 - \gamma)\%$ , são dados por:

$$\begin{aligned} ic(\alpha) &= \left[ \hat{\alpha} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})}; \hat{\alpha} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \right] \\ ic(\beta) &= \left[ \hat{\beta} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})}; \hat{\beta} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde  $Z_{\frac{\gamma}{2}}$  é um percentil da distribuição Normal padronizada.

O uso da aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança é um dos procedimentos mais difundidos na aplicação de técnicas estatísticas em problemas práticos. Sob certas condições, a aproximação Normal assintótica assegura que os EMVs de  $\alpha$  e  $\beta$  têm assintoticamente uma distribuição Normal Bivariada. É

interessante observar que se a Matriz de Informação de Fisher é composta por constantes, os resultados assintóticos em geral são bem precisos, mesmo para amostras não muito grandes (ver por exemplo, Sprott, 1973, 1980). Para o caso estudado neste capítulo, é necessário muito cuidado em verificar a precisão, especialmente para amostras não muito grandes pois, a Matriz de Informação de Fisher contém termos envolvendo o parâmetro  $\alpha$ .

## 3.5 Exemplos de Aplicação

### 3.5.1 Exemplo 1 com Amostras Completas

Como ilustração numérica vamos considerar um conjunto de dados simulados com  $\alpha = 310$  e  $\beta = 0,6$  (isto é,  $\beta_0 = 5,7366, \beta_1 = 0,6, X_i = -\log V_i$  e  $Z_i = 0$ ) no modelo estresse-resposta geral (3.6) para  $V$  uma variável estresse de voltagem) extraídos de Achcar e Louzada-Neto, 1993. Cada estresse  $V$ , escolhido aleatoriamente, é aplicado a 10 unidades experimentais, até todas as 10 unidades falharem (ver Tabela 3.1).

Tabela 3.1 Dados Simulados ( $\alpha = 310, \beta = 0,6$ )

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Observações não-censuradas
1	4	10	10	18, 31, 47, 61, 65, 65, 70, 73, 78, 92
2	10	10	10	12, 19, 34, 43, 52, 60, 65, 67, 78, 85
3	20	10	10	15, 24, 36, 37, 42, 43, 46, 57, 58, 65

Considerando o Estimador Produto Limite de Kaplan-Meier  $\hat{S}(t)$ , construímos o gráfico de  $\log(-(\log(\hat{S}(t))))$  versus  $\log(t)$  para os três níveis de estresse.

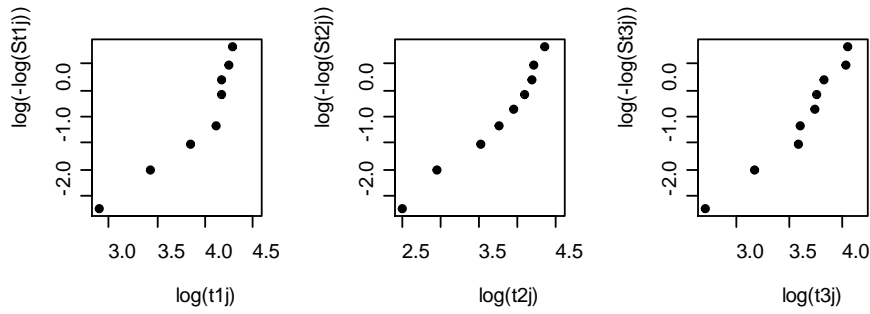


Figura 3.1: Gráfico de  $\log(-\log(S(t_{ij})))$  versus  $\log(t_{ij})$  para  $i = 1, 2$  e  $3$  e  $j = 1, \dots, 10$

Podemos observar na Figura 3.1 que rigorosamente não há uma relação linear aproximada (pequenas curvaturas nos gráficos) para os dados simulados. Apesar disso, assumindo aproximadamente relações lineares, vamos considerar inicialmente a adequabilidade da distribuição Exponencial para uma análise dos dados.

Considerando os dados da Tabela 3.1 com distribuição Exponencial e o estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\lambda}_i = \frac{r_i}{A_i}$  para  $\lambda_i$ , para cada nível de estresse (ver por exemplo, Lawless, 1982), a relação linear entre  $\log(\hat{\lambda}_i)$  versus  $\log(V_i)$  indica a adequabilidade do modelo lei da potência inversa aos dados (ver Figura, 3.2)

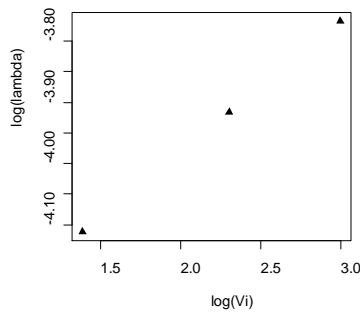


Figura 3.2 Gráfico de  $\log(\hat{\lambda}_i)$  versus  $\log(V_i)$

Os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$  dados por  $\hat{\alpha} = 82,0971813$



e  $\hat{\beta} = 0,2136707$ . A inversa da matriz de informação de Fisher para  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por,

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2850,20920 & 14,3462679 \\ 14,34627 & 0,0783923 \end{pmatrix},$$

e os intervalos de confiança 95% para  $\alpha$  e  $\beta$ , considerando-se a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  e amostras completas, são dados por,  $-22,5420258 < \alpha < 186,7363884$  e  $-0,335102349 < \beta < 0,762443749$ .

Para uma análise bayesiana dos dados da Tabela 3.1 considerando o modelo lei da potência inversa e a distribuição a priori conjunta (3.9) com valores dos hiperparâmetros dados por  $a_1 = 328$ ,  $b_1 = 4$ ,  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 10^6$  temos na Tabela 3.2 os sumários a posteriori de interesse e os valores do fator de redução de escala  $\hat{R}$  (critério de convergência de Gelman e Rubin, 1992). Na geração das amostras, utilizamos o *software* WinBugs (ver Spiegelhalter *et. al*, 1999). Para o modelo proposto geramos duas cadeias paralelas cada uma com 50000 iterações partindo de pontos iniciais diferentes e descartamos as primeiras 5000 iterações para eliminarmos o efeito dos valores iniciais considerados, ("burn-in samples"). A convergência das cadeias foi verificada usando o critério de convergência de Gelman e Rubin, 1992. Para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  observamos a convergência, pois  $\sqrt{\hat{R}} < 1.1$  e através dos gráficos, Figuras 3.3 e 3.4, para todos os casos. Na Figura 3.5, temos os gráficos das densidades a posteriori para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Tabela 3.2. Sumários a posteriori de interesse (Amostra não-censurada)

Parâmetros	Média	E.P.	Intervalo de Credibilidade(95%)	$\hat{R}$
$\alpha$	81,99	4.5	[73,41 ; 91,15]	0,9994
$\beta$	0,2063	0,08282	[0,03673;0,3615]	1.001

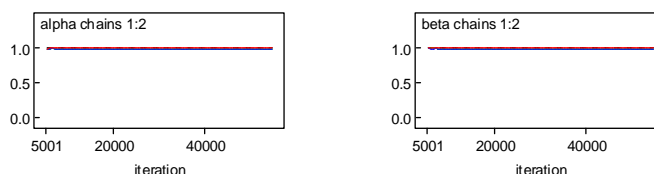


Figura 3.3. Gráficos de Gelman e Rubin

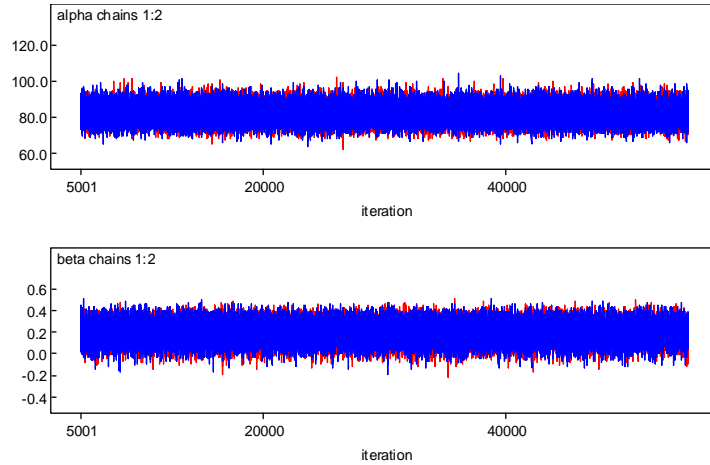


Figura 3.4. Gráficos de Séries Temporais das Amostras Simuladas

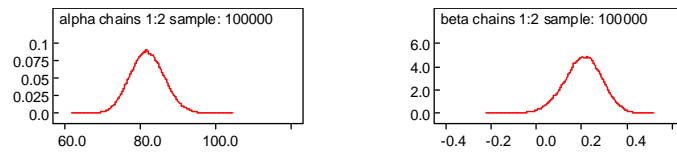


Figura 3.5. Gráficos das densidades a posteriori marginais para  $\alpha$  e  $\beta$

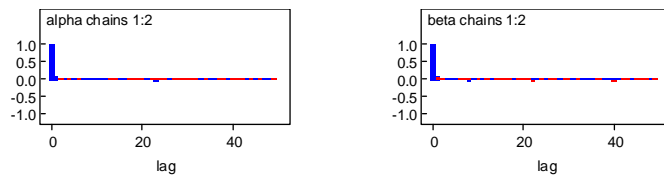


Figura 3.6. Gráficos das autocorrelações das amostras simuladas

A partir dos gráficos dados nas Figuras 3.3 e 3.4, observamos a convergência das cadeias. A partir da Figura 3.6, observamos que as amostras geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings são não correlacionadas.

### Valores de $Y_j$ e $V_j$ para o controle da qualidade

Considere os dados simulados da Tabela 3.1, gerados assumindo uma distribuição Exponencial. Assuma  $\beta = 0,21$  conhecido e  $\gamma = 0,05$ .

Como ilustração, considerando um nível de estresse fixado  $V_* = 2$ , encontramos o período de tempo necessário para colocar  $m$  unidades em teste dado por, (3.22).

Com  $a_2 = 1, b_2 = 1, n = \sum_{i=1}^k n_i = 30$ , temos  $C = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2 = 2442,859 + 1 = 2443,859$ , e encontramos  $Y_*$  por,  $Y_* = 3,498792$ .

Da mesma forma, com  $Y_* = 3$  fixado, achamos o nível necessário de stress  $V_*$  por, (3.23), isto é,  $V_* = 1,349004$ .

Na Tabela 3.3, com  $\beta = 0,21$  conhecido e com  $1 - \gamma = 0,95$  apresentamos alguns valores obtidos para  $Y_j$  com  $V_j$  fixos (para (3.22)).

Tabela 3.3. Valores de  $Y_j$  com  $V_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,95$

$V_j$	$Y_j$
4	3,498792
6	2,777939
10	2,495367
15	2,291687
20	2,157338
24	2,0763

Na Tabela 3.4, com  $\beta = 0,21$  conhecido e com  $1 - \gamma = 0,95$ , apresentamos alguns valores obtidos para  $V_j$  com  $Y_j$  fixos (para (3.23)).

Tabela 3.4. Valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,95$

$Y_j$	$V_j$
4	1,349004
6	0,6745019
8	0,5058764
10	0,4047011
12	0,3372509
14	0,2890722

### 3.5.2 Exemplo 2 com Amostras Censuradas

Nesta subseção é apresentada uma aplicação numérica com dados censurados referente ao modelo (relação estresse-resposta) lei da potência inversa.

Os dados referem-se a um teste de vida acelerado simulado, para o caso de uma distribuição de falhas exponencial com três níveis crescentes de estresse  $V$  de voltagem onde  $V_1 = 4$  é o nível usual de estresse. Cada estresse  $V$ , escolhido aleatoriamente, é

aplicado a 10 unidades experimentais, até  $r$  unidades falharem. Os valores de  $r$  (isto é, o número de observações tomadas a cada nível fixado de estresse, respectivamente 4,6,8, de acordo com a Tabela 3.5) são especificados pelo pesquisador tendo em vista sua disponibilidade e limitação de tempo e custo de experimentação.

Tabela 3.5 Dados Gerados com  $\alpha = 310$  e  $\beta = 0,60$

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Observações não-censuradas
1	4	10	4	18, 31, 47, 61
2	10	10	6	12, 19, 34, 43, 52, 60
3	20	10	8	15, 24, 36, 37, 42, 43, 46, 57

Na identificação de um modelo adequado para analisar dados de testes de vida acelerados com censuras, é usual considerar gráficos envolvendo a função de confiabilidade, a função de risco ou o Estimador Produto Limite de Kaplan-Meier  $\hat{S}(t)$  (ver por exemplo, Kaplan e Meier, 1958).

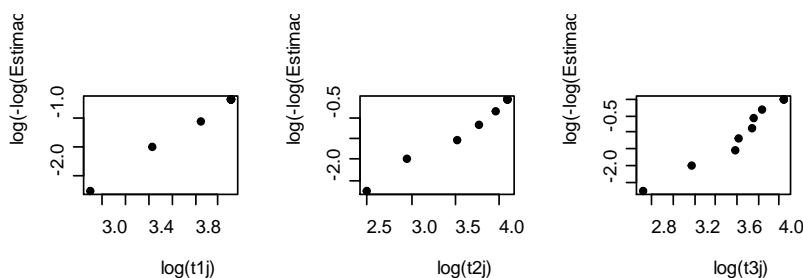


Figura 3.7: Gráfico de  $\log(-\log(\hat{S}(t_{ij})))$  versus  $\log(t_{ij})$  para  $i = 1, 2$  e  $3$  e  $j = 4, 6$  e  $8$

A relação linear entre  $\ln(-\ln(\hat{S}(t_{ij})))$  e  $\ln(t_{ij})$  para  $i = 1, 2$  e  $3$  e  $j = 1, \dots, n_i$  onde  $\hat{S}(t_{ij})$  é o estimador Produto Limite de Kaplan-Meier, indica o ajuste da distribuição aos dados. Esta linearidade é verificada para as 3 amostras (ver Figuras 3.7).

Um procedimento gráfico pode ser adotado para verificarmos a adequabilidade do modelo lei da potência inversa com uma variável estresse de voltagem.

Considere o modelo(1.2) que relaciona a taxa constante de falha,  $\lambda_i$ , e a variável

estresse,  $V$ , sob o  $i$ -ésimo nível de estresse dada por,

$$\lambda_i = \frac{V_i^\beta}{\alpha},$$

para  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $-\infty < \beta < +\infty$  e  $\alpha > 0$ .

Considerando os dados da Tabela 3.5 e os estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\lambda}_i = \frac{r_i}{A_i}$  para cada nível de stress  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (ver por exemplo, Lawless, 1982), podemos construir um gráfico de  $\log(\hat{\lambda}_i)$  versus  $\log(V_i)$ , e verificar a existência ou não de uma relação linear aproximada. Caso exista, dizemos que o modelo de lei da potência inversa com uma variável estresse é válido para a amostra aleatória em questão.

Assim, obtemos a Tabela 3.6 dos valores de  $\log(\hat{\lambda}_i)$  e  $\log(V_i)$  e construímos o gráfico de  $\log(\hat{\lambda}_i)$  versus  $\log(V_i)$ , a relação linear entre  $\log(\hat{\lambda}_i)$  e  $\log(V_i)$  indica a adequabilidade do modelo lei da potência inversa (1.2) aos dados (ver Figura 3.8).

Tabela 3.6 Valores de  $\log(\hat{\lambda}_i)$  e  $\log(V_i)$

$\hat{\lambda}_i$	$V_i$	$\log(\hat{\lambda}_i)$	$\log(V_i)$
0,007410957	4	-4,904796	1,386294
0,012842167	10	-4,355021	2,302585
0,019465085	20	-3,939133	2,995732

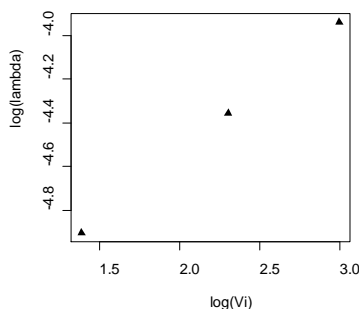


Figura 3.8 Gráfico de  $\log(\hat{\lambda}_i)$  versus  $\log(V_i)$

Considerando os dados da Tabela 3.5, obtemos, numericamente, os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$  dados por  $\hat{\alpha} = 310,0004583$  e  $\hat{\beta} = 0,6018842$ . A

inversa da matriz de informação de Fisher para  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por,

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 93249,4307 & 116,6959031 \\ 116,6559 & 0,1549915 \end{pmatrix},$$

e os intervalos de confiança 95% para  $\alpha$  e  $\beta$ , considerando-se a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  e amostras censuradas (dados com censuras do tipo II), são dados por,  $-288,5202 < \alpha < 908,5211$  e  $-0.1697474 < \beta < 1.373516$ .

Para uma análise bayesiana dos dados sob esquema de censuras do tipo II da Tabela 3.5, consideramos a distribuição a priori conjunta (3.9) com valores dos hiperparâmetros dados por  $a_1 = 930$ ,  $b_1 = 3$ ,  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 10^3$ . Apresentamos na Tabela 3.7 os sumários a posteriori de interesse e os valores do fator de redução de escala  $\hat{R}$  (critério de convergência de Gelman e Rubin, 1992).

Na geração das amostras, utilizamos o *software* WinBugs (ver Spiegelhalter *et al*, 1999). Para o modelo proposto geramos duas cadeias paralelas cada uma com 40000 iterações partindo de pontos iniciais diferentes e descartamos as primeiras 4000 iterações para eliminarmos o efeito dos valores iniciais considerados, ("burn-in samples"). A convergência das cadeias foi verificada usando o critério de convergência de Gelman e Rubin, 1992. Para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  observamos a convergência das cadeias, pois  $\sqrt{\hat{R}} < 1.1$ . Na Figura 3.10, temos os gráficos das densidades a posteriori para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Tabela 3.7. Sumários a posteriori de interesse

Parâmetros.	Média	E.P.	Intervalo de Credibilidade(95%)	$\hat{R}$
$\alpha$	310	10,16	[290,3 ; 330,1]	0,9999
$\beta$	0,5898	0,09745	[0,3851 ; 0,769]	0,9997

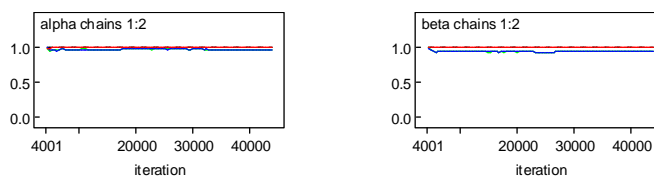


Figura 3.9. Gráficos de Gelman & Rubin



Figura 3.10 Gráficos das densidades geradas pelo amostrador de Gibbs.

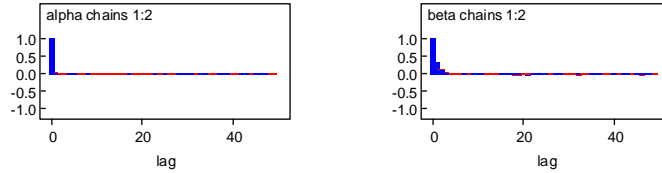


Figura 3.11. Gráficos das autocorrelações das amostras simuladas

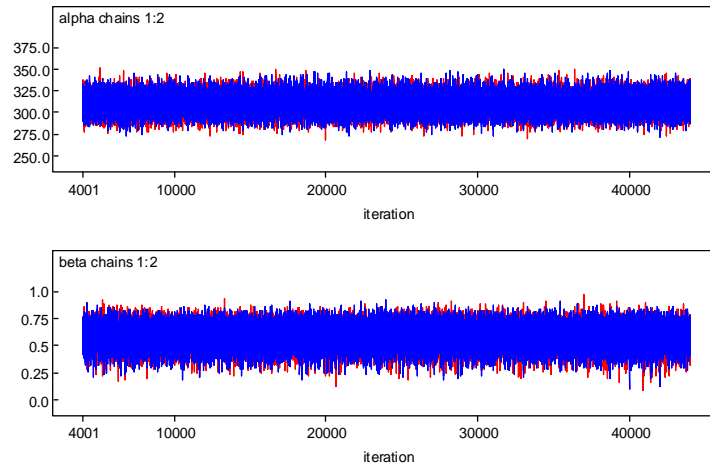


Figura 3.12 Gráficos de Séries Temporais das Amostras Simuladas

A partir dos gráficos dados nas Figuras 3.9 e 3.12, observamos a convergência das cadeias. A partir da Figura 3.11, observamos que as amostras geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings são não correlacionadas.

### Valores de $Y_j$ e $V_j$ para o controle da qualidade

Com  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $r = \sum_{i=1}^k r_i = 18$ ,  $C = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2 = 5531 + 1 = 5532$  e  $\beta = 0,60$  conhecido, encontramos nas Tabelas 3.8 e 3.10 os valores  $Y_j$  para vários valores fixados de  $V_j$ . Por outro lado, construímos as Tabelas 3.9 e 3.11 dos valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo.

Na Tabela 3.8, com  $\beta = 0,60$  conhecido, apresentamos alguns valores obtidos

para  $Y_j$  com  $V_j$  fixos (para (3.22)) e com  $1 - \gamma = 0,95$ .

Tabela 3.8. Valores de  $Y_j$  com  $V_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,95$

$V_j$	$Y_j$
4	6,5094
6	5,1037
10	3,7564
15	2,9452
20	2,4783
24	2,2215

Na Tabela 3.9, com  $\beta = 0,60$  conhecido, apresentamos alguns valores obtidos para  $V_j$  com  $Y_j$  fixos (para (3.23)) e com  $1 - \gamma = 0,95$ .

Tabela 3.9. Valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,95$

$Y_j$	$V_j$
4	9,0060
6	4,5820
8	2,8367
10	1,9560
12	1,4432
14	1,1162

### 3.5.3 Exemplo 3 com Amostras Censuradas

Os dados a seguir (conjunto de dados introduzido por Achcar e Dias, 1990) referem-se a um teste de vida acelerado simulado, para o caso de uma distribuição de falhas exponencial com cinco níveis crescentes de estresse  $V$  de voltagem. Cada estresse  $V$ , escolhido aleatoriamente, é aplicado a 30 unidades experimentais, até  $r$  unidades falharem. Os valores de  $r$  (isto é, o número de observações tomadas a cada nível fixado de estresse, respectivamente 5, 8, 12, 18, 22 de acordo com a Tabela 3.12) são especificados pelo pesquisador tendo em vista sua disponibilidade e limitação de tempo e custo de



experimentação.

Tabela 3.10. Dados Gerados com  $\alpha = 500$  e  $\beta = 0,80$

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Observações não-censuradas
1	10	30	5	6, 8, 10, 12, 14
2	20	30	8	4, 5, 5, 6, 8, 8, 9, 14
3	30	30	12	2, , 3, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 17
4	40	30	18	3, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 10, 10, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15, 24
5	50	30	22	2, 3, 4, 5, 5, 8, 8, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 14, 15, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 27

Para a verificação do ajuste da distribuição Exponencial aos dados, podemos usar o estimador Produto Limite de Kaplan-Meier  $\hat{S}(t)$  (ver Kaplan e Meier, 1958). Isso é feito graficamente.

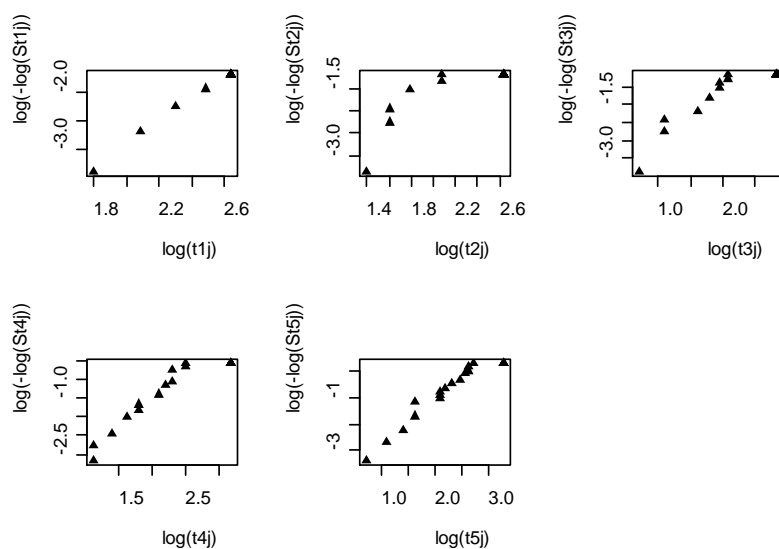


Figura 3.13: Gráfico de  $\log(-\log(\hat{S}(t_{ij})))$  versus  $\log(t_{ij})$  para  $i = 1, \dots, k$  e  $j = 1, \dots, n_i$ .

A relação linear entre  $\ln(-\ln(\hat{S}(t_{ij})))$  e  $\ln(t_{ij})$  indica o ajuste da distribuição aos dados. Esta linearidade é verificada para as 5 amostras (ver Figura 3.13).

Um procedimento gráfico também pode ser adotado para verificarmos a adequa-

bilidade do modelo lei da potência inversa com uma variável estresse de voltagem como foi feito no exemplo 2.

Os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$  dados por  $\hat{\alpha} = 500,5552380$  e  $\hat{\beta} = 0,7994514$ . A inversa da matriz de informação de Fisher para  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por,

$$I^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 232192,6215 & 129,5546725 \\ 129,5547 & 0,0735074 \end{pmatrix},$$

e os intervalos de confiança 95% para  $\alpha$  e  $\beta$ , considerando-se a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  e amostras censuradas (dados com censuras do tipo II), são dados por,  $-443,8976 < \alpha < 1445,008$  e  $0,2680513 < \beta < 1,330851$ .

Para uma análise bayesiana dos dados sob esquema de censuras do tipo II da Tabela 3.10, assumimos a distribuição a priori conjunta (3.9) com  $a_1 = 1500$ ,  $b_1 = 3$ ,  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 10^5$ . Apresentamos na Tabela 3.11 os sumários a posteriori de interesse e os valores do fator de redução de escala  $\hat{R}$  (critério de convergência de Gelman e Rubin, 1992).

Para a geração das amostras, utilizamos o *software* WinBugs (ver Spiegelhalter *et al*, 1999). Geramos duas cadeias paralelas cada uma com 50000 iterações partindo de pontos iniciais diferentes onde as primeiras 5000 iterações iniciais foram descartadas para eliminarmos o efeito dos valores iniciais considerados, ("burn-in samples"). A convergência das cadeias foi verificada usando o critério de convergência de Gelman e Rubin, 1992. Para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  observamos a convergência das cadeias, pois  $\sqrt{\hat{R}} < 1.1$ . Na Figura 3.15, temos os gráficos das densidades a posteriori para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Tabela 3.11. Sumários a posteriori de interesse

Parâmetros.	Média	E.P.	Intervalo de Credibilidade(95%)	$\hat{R}$
$\alpha$	500,0	12,94	[474,9 ; 525,7]	1,0
$\beta$	0,7965	0,0358	[0,7972 ; 0,865]	0,9994

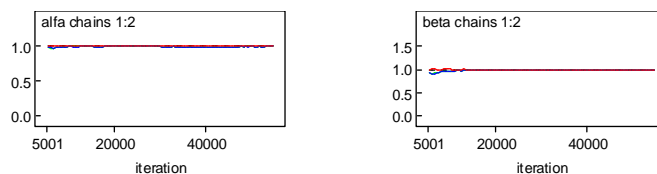


Figura 3.14. Gráficos de Gelman & Rubin

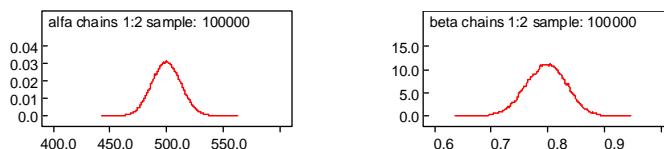


Figura 3.15. Gráficos das densidades a posteriori marginais para  $\alpha$  e  $\beta$

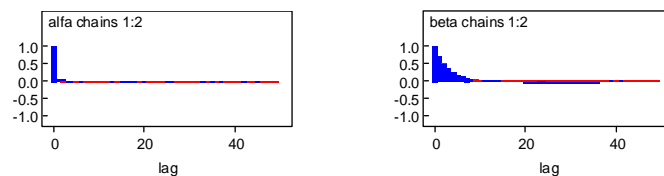


Figura 3.16. Gráficos das autocorrelações das amostras simuladas

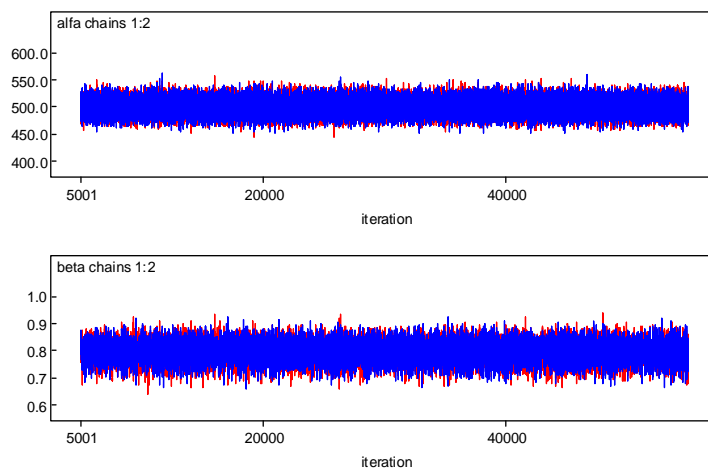


Figura 3.17 Gráficos de Séries Temporais das Amostras Simuladas

A partir dos gráficos dados nas Figuras 3.14 e 3.17, observamos a convergência das cadeias. A partir da Figura 3.16, observamos que as amostras geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings são não correlacionadas.

### Valores de $Y_j$ e $V_j$ para o controle da qualidade

Com  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $r = \sum_{i=1}^k r_i = 65$ ,  $C = \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + b_2 = 32536,09 + 1 = 32537,09$  e  $\beta = 0,7994514$  conhecido, encontramos na Tabela 3.12 os valores  $Y_j$  para vários valores

fixados de  $V_j$ . Por outro lado, construímos a Tabela 3.13 dos valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo.

Na Tabela 3.12, com  $\beta = 0,7994514$  conhecido, apresentamos alguns valores obtidos para  $Y_j$  com  $V_j$  fixos (para (3.22)) e com  $1 - \gamma = 0,95$ .

Tabela 3.12. Valores de  $Y_j$  com  $V_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,95$

$V_j$	$Y_j$
5	6,975840
10	4,008092
15	2,898420
20	2,302920
25	1,926655
30	1,665338

Na Tabela 3.13, com  $\beta = 0,7994514$  conhecido, apresentamos alguns valores obtidos para  $V_j$  com  $Y_j$  fixos (para (3.23)) e com  $1 - \gamma = 0,95$ .

Tabela 3.13. Valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,95$

$Y_j$	$V_j$
2	23,858523
4	10,025311
6	6,037161
8	4,212619
10	3,186629
12	2,536805

Os resultados obtidos no estudo da distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , sujeito a censuras do tipo II ou a dados sem censuras, sugerem que a aproximação normal ainda não é adequada, principalmente no que se refere ao parâmetro  $\alpha$ , o intervalo para  $\alpha$  não respeita o intervalo de validade do parâmetro ( $\alpha > 0$ ) sendo ainda muito grande para amostras de tamanho pequeno.

Nos exemplos desenvolvidos neste Capítulo, observamos que os procedimentos de simulação MCMC adotados, considerando a informação do especialista, permitiram a

verificação de que a teoria assintótica não deve ser adotada, uma vez que a mesma não propicia resultados suficientemente adequados, particularmente em relação ao parâmetro  $\alpha$ .

Observamos que, na metodologia proposta, o pesquisador, além de poder escolher  $(1 - \gamma)$ ,  $V_j$  e  $Y_j$ , com possibilidade de minimizar o tempo e o custo dos experimentos de acordo com cada problema particular, e poder controlar a qualidade de lotes de componentes, poderá considerar informação a priori sobre o parâmetro de interesse, incorporando a informação do especialista ao problema de estimação, o que confere grande flexibilidade ao método proposto para o controle da qualidade de produtos industriais.

# Capítulo 4

## Uso de Métodos Bayesianos em Testes de Vida Acelerados no Controle da Qualidade de Produtos Industriais Assumindo uma Distribuição Weibull e o Modelo de Eyring

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, desenvolvemos uma análise Bayesiana para testes de vida acelerados considerando uma distribuição de Weibull para os tempos de vida dos componentes e uma relação estresse-resposta representada pelo modelo de Eyring com uma variável estresse (1.4). Este modelo encontra-se entre as relações estresse-resposta mais utilizadas na prática para descrever a taxa de falha de um determinado componente manufaturado em função de uma variável estresse de temperatura.

## 4.2 Formulação do modelo

Conforme visto no Capítulo 2, em confiabilidade é fundamental que os experimentos sejam eficientes em relação ao seu tempo de duração e conseqüentemente ao seu custo. Considerando o experimento acelerado com  $k$  níveis aleatorizados de uma variável estresse  $V$  descrito no Capítulo 2, a modelagem descrita nesta seção será definida a partir da relação estresse-resposta representada pelo modelo de Eyring com uma variável estresse (1.4) e a distribuição de Weibull para os tempos de vida dos componentes.

Seja uma variável aleatória  $T$  não-negativa denotando o tempo de sobrevivência de um componente com uma distribuição de Weibull com função densidade de probabilidade (*f.d.p*) dada por,

$$f_i(t | \lambda_i, p) = \lambda_i p (\lambda_i t)^{p-1} \exp(-(\lambda_i t)^p) \quad (4.1)$$

para  $t > 0, p > 0, \lambda_i > 0$  é um parâmetro desconhecido representando a taxa constante de falha no  $i$ -ésimo nível de estresse  $V_i, i = 1, 2, \dots, k$  e assumimos a variável de estresse  $V_i$  afetando o parâmetro de escala  $\lambda_i$ , mas com o mesmo parâmetro de forma  $p$  para todos os níveis de estresse.

Observar que assumimos uma distribuição Exponencial para  $T$  com parâmetro de forma  $\lambda_i$  quando  $p = 1$  em (4.1).

A função de densidade (4.1) especifica a função distribuição  $F_i(t)$ , denotada por,

$$F_i(t) = \Pr[T \leq t] = 1 - \exp(-(\lambda_i t)^p). \quad (4.2)$$

A função de confiabilidade num valor fixado  $t$  e para um nível de estresse  $V_i$  é dada por,

$$S_i(t) = \Pr[T > t] = 1 - F_i(t) = \exp(-(\lambda_i t)^p). \quad (4.3)$$

Pela definição, a função de risco num nível fixado de estresse (ver Lawless, 1982) é dada por,

$$h_i(t) = \frac{f_i(t)}{S_i(t)} = \lambda_i p (\lambda_i t)^{p-1}. \quad (4.4)$$

O tempo médio de vida sob o estresse  $V_i$  é dado por

$$\frac{\Gamma(1 + \frac{1}{p})}{\lambda_i}. \quad (4.5)$$

Note que a distribuição Exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull, quando o parâmetro  $p$  é igual a 1.

Cosideramos o método de máxima verossimilhança (descrito no Capítulo 2) como procedimento básico de estimação. A contribuição individual de cada unidade em testes que falham na composição final da função de verossimilhança é dada pela densidade (4.1), enquanto cada unidade censurada contribui com sua função de confiabilidade (ver por exemplo, Lawless, 1982), que no  $i$ -ésimo nível de estresse, é dada por (4.3).

Assumindo o esquema do experimento acelerado descrito no Capítulo 2 com  $k$  níveis aleatorizados de estresse e um mecanismo de censura do tipo II para os dados, colocamos  $n_i$  unidades em teste no  $i$ -ésimo nível de estresse,  $V_i$ , e o experimento termina quando  $r_i$  falhas são observadas. Dessa forma, temos  $r_i$  observações ordenadas não-censuradas dadas por  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$  e  $n_i - r_i$  observações iguais a  $t_{ir_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . No  $i$ -ésimo nível de estresse  $V_i$ , a função de verossimilhança para  $\lambda_i$  e  $p$  (ver (2.10)) é dada por,

$$L_i(\lambda_i, p) \propto \lambda_i^{pr_i} p^{r_i} \left( \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp(-\lambda_i^p A_i(p)) \quad (4.6)$$

onde  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p$  representa o tempo total em teste para o  $i$ -ésimo nível de estresse, com  $i = 1, 2, \dots, k$ . Com os  $k$  níveis de estresse  $V_i$  a função de verossimilhança para o vetor de parâmetros  $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  e  $p$  é dada por,

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \propto \prod_{i=1}^k \left\{ \lambda_i^{pr_i} p^{r_i} \left( \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \exp[-\lambda_i^p A_i(p)] \right\} \quad (4.7)$$

Considerando os dados de  $k$  níveis aleatorizados de estresse,  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , e a relação estresse resposta representada pelo modelo de Eyring com uma variável de estresse, dada por

$$\lambda_i = V_i \times \exp\left(\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right) \quad (4.8)$$



para  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ , a função de verossimilhança para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  é dada por,

$$L(\alpha, \beta, p) \propto p^r \times \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \left( \prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \times \exp \left[ \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p / V_i)} \right] \quad (4.9)$$

sendo  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  o número total de falhas observadas para  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $A_i(p)$  foi definido em (4.6).

A função log-verossimilhança para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  é dada por,

$$l(\alpha, \beta, p) = \log L(\alpha, \beta, p) \propto r \times \log(p) + (p-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \log(t_{ij}) + p \sum_{i=1}^k r_i \log(V_i) + \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p / V_i)}. \quad (4.10)$$

Os EMVs (Estimadores de Máxima Verossimilhança) de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  podem ser obtidos através da maximização direta de (4.10) ou através da obtenção das soluções do sistema de equações não lineares, formado pelas derivadas de  $l(\alpha, \beta, p)$  com respeito a cada parâmetro  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ ,

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, p)}{\partial \alpha} = pr - p \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p / V_i)} = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, p)}{\partial \beta} = p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - p \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^{p-1}}{\exp(\beta p / V_i)} = 0 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\alpha, \beta, p)}{\partial p} &= \frac{r}{p} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \log(t_{ij}) + \sum_{i=1}^k r_i \log(V_i) + \\
 &+ \alpha r - \beta \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \sum_{i=1}^k \frac{\alpha \exp(\alpha p) A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} - \\
 &- \sum_{i=1}^k \frac{\exp(\alpha p) A_i(p) V_i^p \ln(V_i)}{\exp(\beta p/V_i)} - \\
 &- \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_i}\right) (t_{ij}^p \ln(t_{ij}) + (n_i - r_i) t_{ir_i}^p \ln(t_{ir_i})) + \\
 &+ \sum_{i=1}^k \frac{\beta \exp(\alpha p) A_i(p) V_i^{p-1}}{\exp(\beta p/V_i)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

As segundas segundas derivadas parciais de  $l(\alpha, \beta, p)$  em relação a  $\alpha$  e  $\beta$  para um dado valor  $p$  são dadas por,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial^2 \alpha} &= -p^2 \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \\
 \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial^2 \beta} &= -p^2 \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^{p-2}}{\exp(\beta p/V_i)} \\
 \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial^2 \beta} &= p^2 \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^{p-1}}{\exp(\beta p/V_i)}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

As equações de verossimilhança (4.11), (4.12) e (4.13) são não lineares. Para solucionar numericamente estas equações precisamos usar o método iterativo de Newton-Rapson para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança para  $\beta$ ,  $p$  e  $\alpha$ .

Observando que a variável aleatória  $T^* = T^p$  tem uma distribuição Exponencial com parâmetro  $\lambda^* = \lambda_i^p$  (ver por exemplo Lawless,1982),  $E[A_i(p)] = \frac{r_i}{\lambda_i^*}$ , onde  $\lambda_i^* = V_i^p \times \exp(\alpha p - \frac{\beta p}{V_i})$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ , isto é,  $E[A_i(p)] = \frac{r_i}{V_i^p \exp[p(\alpha - \beta/V_i)]}$ .

Assim, as componentes da matriz de informação de Fisher com  $p$  conhecido são

dadas por,

$$\begin{aligned} E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial^2 \alpha} \right\} &= rp^2 \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} &= E \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial \beta \partial \alpha} \right\} = -p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \\ \left\{ -\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial^2 \beta} \right\} &= p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Portanto, a matriz de informação de Fisher para  $\alpha$  e  $\beta$  dado  $p$  é dada por,

$$I(\alpha, \beta | p) = \begin{pmatrix} rp^2 & -p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \\ -p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} & p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i^2} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Para inferências sobre os parâmetros de um determinado modelo ou funções dos mesmos, usualmente, utiliza-se a aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança (ver por exemplo, Mood, Graybill e Boes, 1974).

Assim consideramos,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) \overset{a}{\sim} N \{ (\alpha, \beta, p); I^{-1}(\alpha, \beta, p) \} \quad (4.17)$$

sendo  $I(\alpha, \beta, p)$  a matriz de informação de Fisher dada pelas esperanças das segundas derivadas parciais de  $l(\alpha, \beta, p)$  com respeito a  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  a menos do sinal (ver, por exemplo, Box e Tiao, 1973).

Utilizando a distribuição normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{p}$ , a qual é dada por (4.17), os intervalos de confiança para os parâmetros  $\alpha$ ,  $p$  e  $\beta$ , considerando um nível de confiança  $100(1 - \gamma)\%$ , são dados por:

$$\begin{aligned} ic(\alpha) &= \left[ \hat{\alpha} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})}; \hat{\alpha} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \right] \\ ic(\beta) &= \left[ \hat{\beta} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})}; \hat{\beta} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})} \right] \\ ic(p) &= \left[ \hat{p} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{p})}; \hat{p} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{p})} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $Z_{\frac{\gamma}{2}}$  é um percentil da distribuição Normal padronizada.

A aproximação (4.17) é válida assintoticamente e deve portanto ser utilizada quando o tamanho da amostra é grande. Se o tamanho da amostra for pequeno ou moderado, a aproximação pode não ser válida, por isso é sensato tomarmos precauções na hora de aplicá-la, verificando se a distribuição dos EMVs realmente se aproxima a uma normal (ver por exemplo, Achcar e Louzada-Neto, 1991; Sprott, 1973 e 1980).

O problema de teste de aderência do modelo Exponencial contra a classe de alternativa irrestrita é complexo. No entanto, podemos usar a estatística da razão de verossimilhança (ver por exemplo, Rao, 1973) para testar a adequabilidade do submodelo Exponencial-Eyring. A hipótese nula,  $H_0 : p = 1$  corresponde ao submodelo Exponencial-Eyring. Se esta hipótese é rejeitada então o submodelo é questionável. A estatística da razão de verossimilhança para testar a adequabilidade do modelo Exponencial-Eyring, isto é,  $H_0 : p = 1$  contra  $H_a : p \neq 1$ , em termos dos EMVs, é dada por,

$$\Lambda = \frac{L(p = 1, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{L(\tilde{p}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} \quad (4.19)$$

sendo  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  os EMVs dos parâmetros do modelo Exponencial-Eyring e  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  os EMVs dos parâmetros do modelo Weibull-Eyring. Sob a hipótese  $H_0$ ,  $-2 \log(\Lambda)$  tem distribuição aproximada qui-quadrado com um grau de liberdade para tamanhos amostrais suficientemente grandes (ver por exemplo, Rao, 1973).

### 4.3 Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Assumindo $\alpha$ , $\beta$ e $p$ Desconhecidos

Para representar o grau de conhecimento sobre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  consideramos a densidade a priori dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, p) = \pi(\alpha, \beta | p) \times \pi_0(p). \quad (4.20)$$

Usando a regra multiparamétrica de Jeffreys (ver, por exemplo, Box e Tiao, 1973),

que determina uma priori não-informativa para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , temos:

$$\pi(\alpha, \beta | p) \propto \{\det[I(\alpha, \beta | p)]\}^{1/2}. \quad (4.21)$$

O determinante de  $I(\alpha, \beta | p)$ , isto é,  $\det I(\alpha, \beta | p)$  é dado por,

$$\det[I(\alpha, \beta | p)] \propto p^4 \left[ r \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i^2} - \left( \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \right)^2 \right] \quad (4.22)$$

sendo  $I(\alpha, \beta | p)$  é a matriz de informação de Fisher com respeito a  $\alpha$  e  $\beta$  dado o parâmetro de forma e  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  é o número total de falhas observadas para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Assim,

$$\pi(\alpha, \beta | p) \propto \{\det[I(\alpha, \beta | p)]\}^{1/2} \propto p^2 \quad (4.23)$$

para  $p > 0$  e  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ .

Assumindo uma densidade a priori localmente uniforme para  $p$ , dada por:

$$\pi_0(p) \propto \frac{1}{p}, \quad (4.24)$$

para  $p > 0$ , a densidade a priori não informativa para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  baseada na regra multi-paramétrica de Jeffreys (ver (4.20)) é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, p) \propto p^2 \times \frac{1}{p} \propto p \quad (4.25)$$

para  $p > 0$  e  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ .

Considerando a priori não-informativa (4.25), a função de verossimilhança (4.9) e o teorema de Bayes, a densidade a posteriori conjunta para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  é dada por,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, p | \text{dados}) &\propto p^{r+1} \times \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \left( \prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \times \\ &\times \exp \left[ \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p / V_i)} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

para  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ ,  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  o número total de falhas observadas para  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p$ .

### 4.3.1 Densidade Preditiva para uma Observação Futura em um Nível de estresse $V_j$ com $\beta$ e $p$ conhecidos

Assumindo que os parâmetros  $\beta$  e  $p$  são conhecidos, a função de verossimilhança para  $\alpha$  é dada por,

$$L(\alpha) \propto \exp \left[ \alpha pr - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] \quad (4.27)$$

para  $p > 0$ ,  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ ,  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  (número total de falhas observadas) para  $i = 1, 2, \dots, k$  em um teste de vida acelerado com  $k$  níveis aleatorizados da variável estresse temperatura e  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p$ .

A informação de Fisher para  $\alpha$ , considerando-se a matriz (4.16), é dada por,

$$I(\alpha) = rp^2 \quad (4.28)$$

Assim, a densidade a priori não-informativa de Jeffreys para  $\alpha$  é dada por,

$$\pi(\alpha) \propto \text{constante}, \quad (4.29)$$

para  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ .

Combinando (4.27) com (4.29), a densidade a posteriori para  $\alpha$  é dada por,

$$\pi(\alpha \mid \text{dados}) \propto \frac{\exp \left[ \alpha pr - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \alpha pr - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right]}. \quad (4.30)$$

Considerando a transformação de variáveis,  $u = \exp(\alpha)$ , e usando o resultado

$$\int_0^{+\infty} u^{b-1} \exp(-au^x) du = \frac{1}{x} a^{-b/x} \Gamma\left(\frac{b}{x}\right) \quad (4.31)$$

(ver por exemplo, Box e Tiao, 1973), a densidade a posteriori para  $\alpha$  é dada por,

$$\pi(\alpha \mid \text{dados}) = \frac{p \times \left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right]^r}{\Gamma(r)} \times \exp \left[ \alpha pr - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] \quad (4.32)$$

A densidade preditiva da observação futura  $T_{(n+1)j}$  onde  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  é o número total de falhas observadas em teste, para  $i = 1, 2, \dots, k$ , considerando um nível de estresse  $V_j$  e a densidade a posteriori (4.32) é dada por (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore, 1975; ou Press, 1989)

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) \times \pi(\alpha \mid \text{dados}) d\alpha \quad (4.33)$$

onde  $f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) = pV_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} (V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j})^{p-1} \times \exp \left[ -(V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j})^p \right]$ , isto é,

$$\begin{aligned} f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} pV_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} (V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j})^{p-1} \times \\ &\times \exp \left[ -(V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j})^p \right] \times \frac{p \times \left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right]^r}{\Gamma(r)} \times \\ &\times \exp \left[ \alpha pr - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Considerando a transformação de variáveis,  $u = \exp(\alpha)$ , observando o resultado (4.31) e que  $\Gamma(r+1) = r \times \Gamma(r)$ , a densidade preditiva para uma observação futura  $T_{(n+1)j}$

em um nível  $j$  do stress  $V$  é dada por:

$$f^j(t_{(n+1)j} | dados) = \frac{prV_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)t_{(n+1)j}^{p-1} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right]^r}{\left[ V_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)t_{(n+1)j}^p + \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right]^{r+1}} \quad (4.35)$$

para  $t_{(n+1)j} > 0$ .

Considerando  $C = \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)}$ , a densidade preditiva (4.35) pode ser reescrita na forma,

$$f^j(t_{(n+1)j} | dados) = \frac{r \left[ \frac{C}{pV_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)t_{(n+1)j}^{p-1}} \right]^r}{\left[ \frac{t_{(n+1)j}}{p} + \frac{C}{pV_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)t_{(n+1)j}^{p-1}} \right]^{r+1}} \quad (4.36)$$

para  $t_{(n+1)j} > 0$ , isto é,  $T_{(n+1)j} | T_1, T_2, \dots, T_n$  tem uma distribuição de Pareto.

Observamos em (4.35), que a função densidade preditiva tem, para  $r > 1$ ,

$$E^j(T_{(n+1)j} | dados) = \frac{r \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)}}{(r-1) \times pV_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)t_{(n+1)j}^{p-1}} \quad (4.37)$$

e variância, para  $r > 2$ , dada por,

$$Var^j(T_{(n+1)j} | dados) = \frac{r \times \left( \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right)^2}{(r-1)^2 \times (r-2) \times p^2 V_j^{2p} \exp\left(\frac{-2\beta p}{V_j}\right)t_{(n+1)j}^{2p-2}}, \quad (4.38)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ .

### 4.3.2 Controle da Qualidade de um Determinado Lote de Componentes

Podemos usar a densidade preditiva para uma observação futura (4.35) para estabelecer um critério de controle da qualidade.

Neste procedimento de controle da qualidade, os principais objetivos consistem



em determinar:

- o valor de  $Y_j$  para um dado nível de estresse  $V_j$  fixo, (estipulado pelos pesquisadores industriais);
- o valor de  $V_j$ , considerando  $Y_j$  fixo.

Usando a densidade preditiva (4.35) com  $\beta$  e  $p$  conhecidos e considerando uma probabilidade fixa  $(1 - \gamma)$ , podemos encontrar os valores requeridos de  $Y_j$  e  $V_j$ , tal que,

$$\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j \mid \text{dados}) = \int_{Y_j}^{+\infty} f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) dt_{(n+1)j} = 1 - \gamma. \quad (4.39)$$

Assumindo  $\beta$  e  $p$  conhecidos, da densidade preditiva (4.35), temos,

$$\begin{aligned} \Pr(T_{(n+1)j} > Y_j \mid \text{dados}) &= \int_{Y_j}^{+\infty} f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) dt_{(n+1)j} \\ &= \int_{Y_j}^{+\infty} \frac{pr V_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right) t_{(n+1)j}^{p-1} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p / V_i)} \right]^r}{\left[ V_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right) t_{(n+1)j}^p + \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p / V_i)} \right]^{r+1}} dt_{(n+1)j} \\ &= (1 - \gamma). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Isto é,

$$\frac{\left[ \frac{C}{V_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)} \right]^r}{\left[ Y_j^p + \frac{C}{V_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)} \right]^r} = (1 - \gamma). \quad (4.41)$$

Portanto, de (4.41), dado  $V_j$  fixo, encontramos  $Y_j$  dado por,

$$Y_j = \left\{ \frac{C [1 - (1 - \gamma)^{1/r}]}{(1 - \gamma)^{1/r} V_j^p \exp\left(\frac{-\beta p}{V_j}\right)} \right\}^{1/p} \quad (4.42)$$

e com  $Y_j$  fixo,  $V_j$  é a solução da equação

$$V_j^p \exp\left(\frac{-p\beta}{V_j}\right) = \left\{ \frac{C [1 - (1 - \gamma)^{1/r}]}{(1 - \gamma)^{1/r} Y_j^p} \right\}. \quad (4.43)$$

Assim, encontrados os valores de  $Y_j$  e  $V_j$  tais que, (4.39) seja satisfeita, e definindo  $p^j = \Pr(T_{(n+1)j} \leq Y_j \mid \text{dados})$ , podemos colocar  $m$  unidades novas para serem testadas no nível de estresse,  $V_j$ , e observar seus tempos de sobrevivência durante um período fixo de tempo  $Y_j$ .

Seja  $X$  o número de componentes que falharam ( $X \leq m$ ) durante o teste. Se  $m$  é grande ( $m \geq 30$ ) então temos,

$$X \stackrel{a}{\sim} N \{ mp^j ; mp^j(1 - p^j) \}, \quad (4.44)$$

e um critério de controle de qualidade pode ser baseado no teste de hipótese usual, isto é, o lote não será aprovado na inspeção por amostragem se  $Z \geq Z_\alpha$ , onde

$$Z = \frac{X - mp^j}{\sqrt{mp^j \times (1 - p^j)}} \stackrel{a}{\sim} N \{0, 1\}, \quad (4.45)$$

e  $\alpha$  é o nível de significância e  $Z_\alpha$  é tal que  $\Pr(Z \geq Z_\alpha) = \alpha$ .

Com  $\beta$  e  $p$  desconhecidos, usando métodos numéricos (ver por exemplo, Gaman, 1996), podemos achar  $V_j$  e  $Y_j$  tais que  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j \mid \text{dados}) = 1 - \gamma$ , a partir da densidade preditiva dada por:

$$\begin{aligned} f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) \times \pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados}) dp d\alpha d\beta \\ &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} (V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j})^{p-1} \times \\ &\quad \times \exp \left[ - (V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j})^p \right] \times p^{r+1} \times \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \left( \prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left[ \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] dp d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (4.46)$$

## 4.4 Análise Bayesiana do Modelo de Eyring Considerando um Conhecimento a priori sobre os parâmetros $\alpha$ , $\beta$ e $p$

Considerando que o pesquisador tem um conhecimento a priori da distribuição dos parâmetros do modelo de Eyring (1.4), assumimos para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned}\alpha &\sim N[\mu_1, \sigma_1^2] ; \mu_1, \sigma_1^2 \text{ conhecidos;} \\ p &\sim G[a, b]; a, b \text{ conhecidos;} \\ \beta &\sim N[\mu_2, \sigma_2^2] ; \mu_2, \sigma_2^2 \text{ conhecidos.}\end{aligned}\tag{4.47}$$

Assumindo independência a priori entre os parâmetros de interesse, a densidade a priori conjunta de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  considerando o grau de conhecimento do especialista sobre os parâmetros é dada por,

$$\pi(\alpha, \beta, p) \propto p^{a-1} \exp(-bp) \times \exp\left[-\frac{(\alpha - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \times \exp\left[-\frac{(\beta - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\tag{4.48}$$

Combinando (4.9) com (4.48), a posteriori conjunta para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  é dada por:

$$\begin{aligned}\pi(\alpha, \beta, p \mid \underline{t}, \underline{v}) &\propto p^r \times \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1}\right) \times \left(\prod_{i=1}^k V_i^{pr_i}\right) \times \\ &\exp\left[\alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p) V_i^p}{\exp(\beta p / V_i)}\right] \times \\ &\times p^{a-1} \exp(-bp) \times \exp\left[-\frac{(\alpha - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \times \exp\left[-\frac{(\beta - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\end{aligned}\tag{4.49}$$

para  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  o número total de falhas observadas em teste para  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ ,  $p > 0$ ,  $\underline{t}$  e  $\underline{v}$  denotam o conjunto de dados observados e

$$A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p.$$

Para obter sumários a posteriori de interesse para a distribuição a posteriori

conjunta (4.49), usamos métodos MCMC.

As distribuições condicionais necessárias para o algoritmo Metropolis-Hastings, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha \mid \beta, p, t, v) &\propto \exp \left[ \alpha pr - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] \times \exp \left[ -\frac{(\alpha - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \\
 \pi(\beta \mid \beta, p, t, v) &\propto \exp \left[ -\beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] \times \exp \left[ -\frac{(\beta - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \\
 \pi(p \mid \beta, p, t, v) &\propto p^r \times \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \left( \prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \times p^{a-1} \exp(-bp) \\
 &\times \exp \left[ \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Observar que precisamos usar o algoritmo Metropolis-Hastings para gerar amostras de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ .

Considerando que o especialista tem conhecimento a priori sobre os parâmetros do modelo de Eyring (1.4), a função densidade preditiva a posteriori de uma observação futura  $T_{(n+1)j}$  (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore, 1975 ou Press, 1989), é dada por:

$$\begin{aligned}
 f^j(t_{(n+1)j} \mid t, v) &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) \times \pi(\alpha, \beta, p \mid t, v) \, dp d\alpha d\beta \\
 &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p^{r+1} V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} \left( V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j} \right)^{p-1} \times \\
 &\times \exp \left[ -\left( V_j \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\beta/V_j)} t_{(n+1)j} \right)^p \right] \times \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \left( \prod_{i=1}^k V_i^{pr_i} \right) \times \\
 &\times \exp \left[ \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \times \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} \right] \times \\
 &\times p^{a-1} \exp(-bp) \exp(-bp) \times \\
 &\times \exp \left[ -\frac{(\alpha - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \times \exp \left[ -\frac{(\beta - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \, dp d\alpha d\beta. \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Uma alternativa prática nas aplicações em engenharia ou indústria, seria achar

uma aproximação de Monte Carlo de(4.51), dada por,

$$f^j(\widehat{t_{(n+1)j}} | \underline{t}, \underline{v}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{V_j \exp(\alpha^{(s)})}{\exp(\frac{\beta^{(s)}}{V_j})} \times p^{(s)} \left( \frac{V_j \exp(\alpha^{(s)})}{\exp(\frac{\beta^{(s)}}{V_j})} t_{(n+1)j} \right)^{p^{(s)}-1} \times \exp \left[ - \left( \frac{V_j \exp(\alpha^{(s)})}{\exp(\frac{\beta^{(s)}}{V_j})} t_{(n+1)j} \right)^{p^{(s)}} \right] \quad (4.52)$$

baseado nas  $S$  amostras geradas de Gibbs ou encontrar a densidade preditiva (4.51) usando o método de Laplace (ver, por exemplo, Tierney e Kadane, 1986) ou métodos numéricos de Quadratura Gaussiana (ver por exemplo, Gamerman, 1996).

## 4.5 Exemplo numérico

Nesta seção é apresentada uma aplicação numérica referente ao modelo (relação estresse-resposta) de Eyring.

Os dados a seguir, extraídos de Achcar e Louzada-Neto, 1991, referem-se a um teste de vida acelerado simulado, para o caso de uma distribuição de falhas Exponencial e uma relação estresse-resposta tipo Eyring com dez níveis crescentes de estresse  $V$  de temperatura. Cada estresse  $V$ , escolhido aleatoriamente, é aplicado a 20 unidades experimentais, até  $r$  unidades falharem, obtendo-se a Tabela 4.1. Os valores de  $r$  (isto é, o número de observações tomadas a cada nível fixado de estresse, respectivamente 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15 e 18, de acordo com a Tabela 4.1) são especificados pelo pesquisador tendo em vista sua disponibilidade e limitação de tempo e custo de experimentação.

Tabela 4.1. Dados Simulados com  $\alpha = -10$  e  $\beta = 5$

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Observações não Censuradas
1	10	20	5	178, 301, 574, 920, 1007
2	15	20	6	101, 115, 147, 609, 705, 767
3	20	20	7	89, 96, 106, 246, 315, 347, 622
4	25	20	9	95, 98, 131, 221, 236, 283, 377, 561, 637
5	30	20	10	24, 62, 245, 314, 332, 338, 386, 401, 491, 553,
6	35	20	12	73, 96, 132, 177, 211, 345, 361, 378, 399, 416, 560, 624
7	40	20	13	13, 16, 52, 52, 148, 229, 255, 288, 317, 359, 560, 581, 621
8	45	20	14	17, 21, 32, 52, 68, 87, 112, 197 366, 384, 395, 490, 611, 662
9	50	20	15	10, 13, 83, 87, 129, 135, 196, 244, 250, 262, 264, 293, 318, 624, 705
10	55	20	18	11, 39, 53, 90, 96, 115, 153, 228, 259, 323, 356, 388, 411, 597, 761, 763, 823, 969

Através de uma análise gráfica baseada no Estimador Produto Limite de Kaplan-Meier (ver, Kaplan e Meier, 1958) verificamos o possível ajuste da distribuição Weibull com parâmetros de forma  $p = 1$  e de escala  $\lambda_i$ . Assim, a relação linear entre  $\log(-\log(\hat{S}(t_{ij})))$  e  $\log(t_{ij})$  para  $j = 1, 2, \dots, n_i$  e  $i = 1, 2, \dots, k$ , onde  $\hat{S}(t_{ij})$  é o estimador Produto Limite de Kaplan-Meier, indica o possível ajuste dos dados à distribuição Weibull. Esta linearidade é verificada para as dez amostras (ver, Figuras 4.1 e 4.2).

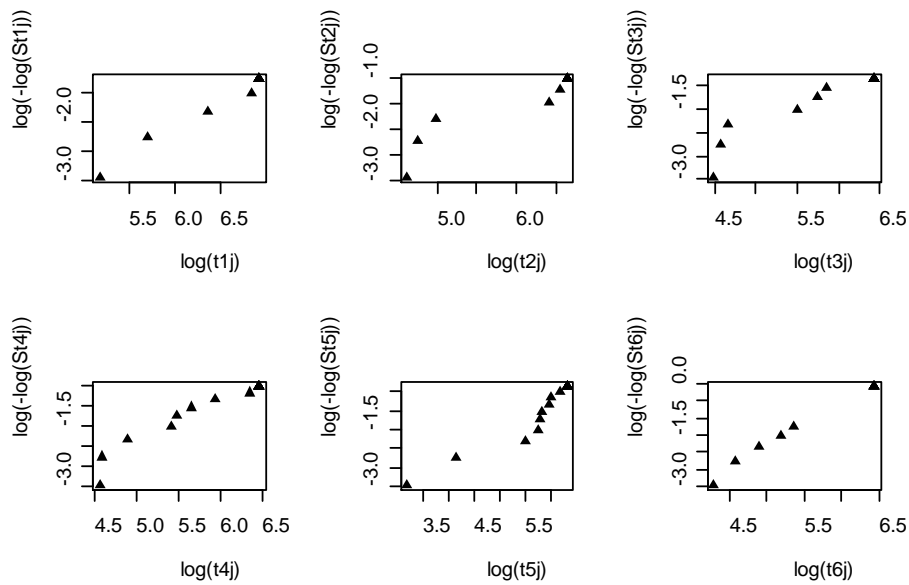


Figura 4.1 Gráfico de  $\log(-\log(\hat{S}(t_{1j})))$  versus  $\log(t_{1j})$   
Amostras de 1 a 6

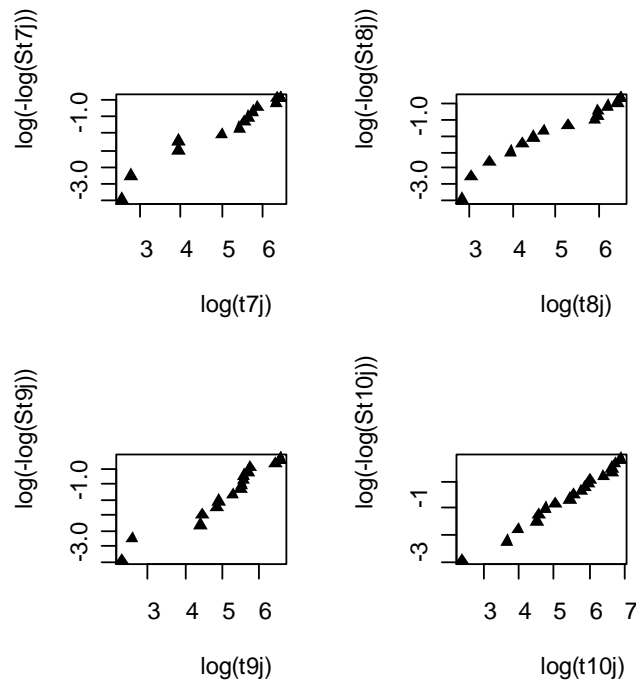


Figura 4.2 Gráfico de  $\log(-\log(\hat{S}(t_{ij})))$  versus  $\log(t_{ij})$   
Amostras de 7 a 10

A estatística da razão de verossimilhança para testar  $H_0 : p = 1$  versus  $H_a : p \neq 1$  resultou em  $\Lambda = 0,0301149$ , com  $p$ -valor igual a  $0,863330$  indicando um ajuste adequado

do modelo Exponencial-Eyring ao nível de significância de 5%.

Considerando que os tempos simulados tem distribuição Exponencial de parâmetro  $\lambda_i$  e a aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$ , obtidos numericamente são dados por,  $\hat{\alpha} = -9,997164$ , e  $\hat{\beta} = 5,204642$ .

A matriz de informação de Fisher para  $\alpha$  e  $\beta$ , dado  $p = 1$ , é dada por

$$I(\alpha, \beta | p) = \begin{pmatrix} 109,010421 & -3,5497068 \\ -3,549707 & 0,1564763 \end{pmatrix}$$

e o inverso da matriz de informação de Fisher, é a matriz de variância e covariância assintótica de  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , dada por:

$$I^{-1}(\alpha, \beta | p) = \begin{pmatrix} 0,03510698 & 0,7964112 \\ 0,79641123 & 24,4575463 \end{pmatrix}.$$

Os intervalos de confiança 95% para  $\alpha$  e  $\beta$ , considerando-se a distribuição Exponencial e a aproximação assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , são dados por:

$$\begin{aligned} -10,36440639 &\leq \alpha \leq -9,629921609 \\ -4,48845399 &\leq \beta \leq 14,89773799 \end{aligned}$$

Considerando que os tempos simulados têm distribuição Weibull de parâmetros de forma  $p = 1$  e de escala  $\lambda_i$ , a adequabilidade do modelo de Eyring aos dados, é verificada observando que,

$$\lambda_i = V_i \times \exp\left(\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right),$$

$i = 1, 2, \dots, k$ . Daí temos a relação linear  $\log(\lambda_i) = \log(V_i) + \left(\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right)$ . Considerando os dados da Tabela 4.1 e o estimador de máxima verossimilhança para  $\lambda_i = \frac{r_i}{A_i}$ , para cada nível de stress (ver, por exemplo, Lawless, 1982), dessa forma, obtemos a Tabela 4.2 dos valores de  $\log\left(\frac{\lambda_i}{V_i}\right)$  e  $\frac{1}{V_i}$ . A relação linear entre  $\log\left(\frac{\lambda_i}{V_i}\right)$  versus  $\frac{1}{V_i}$  indica a adequabilidade do



modelo de Eyring aos dados (ver Figura 4.3)

Tabela 4.2. Valores de  $\hat{\lambda}_i$ ,  $V_i$ ,  $\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$  e  $\frac{1}{V_i}$

$\hat{\lambda}_i$	$V_i$	$\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$	$\frac{1}{V_i}$
0,0002764722	10	-10,49599	0,10000000
0,0004551661	15	-10,40290	0,06666667
0,0007065711	20	-10,25082	0,05000000
0,0009330292	25	-10,19595	0,04000000
0,0011526049	30	-10,16693	0,03333333
0,0013692378	35	-10,14885	0,02857143
0,0016585864	40	-10,09067	0,02500000
0,0018751674	45	-10,08572	0,02222222
0,0021014290	50	-10,07716	0,02000000
0,0021497671	55	-10,14973	0,01818182

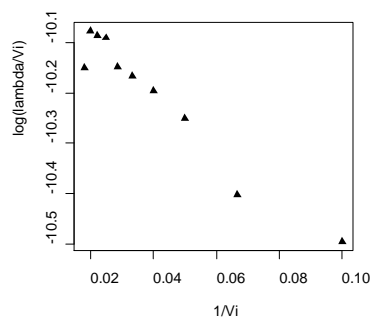


Figura 4.3 Gráfico de  $\log(\frac{\hat{\lambda}_i}{V_i})$  versus  $\frac{1}{V_i}$

Considerando as expressões (4.11), (4.12) e (4.13) e a aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  quando  $T$  têm distribuição de Weibull, os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ , obtidos numericamente são dados por,  $\hat{\alpha} = -10,003$  (0,18703),  $\hat{\beta} = 4,8951$  (5,1770) e  $\hat{p} = 1,0148$  (0,085419).

Cada valor entre parênteses ao lado das estimativas representa a raiz quadrada do correspondente elemento da diagonal da matriz  $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$ , onde  $I(\alpha, \beta, p)$  é a matriz de informação de Fisher. Os intervalos de confiança 95% para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ , considerando-se

a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{p}$ , são dados por:

$$-10,36958 \leq \alpha \leq -9,636421$$

$$-5,25182 \leq \beta \leq 15,04202$$

$$0,8473788 \leq p \leq 1,182221$$

Para uma análise bayesiana dos dados introduzidos na Tabela 4.1, assumimos a densidade a priori conjunta (4.48) para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  com valores dos hiperparâmetros dados por  $\mu_1 = 0$ ,  $\sigma_1 = 10^4$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10^4$ ,  $a = 2$  e  $b = 1$ . Na geração das amostras, utilizamos o software WinBugs (ver Spiegelhalter *et al* 1999). Para o modelo proposto geramos duas cadeias paralelas cada uma com 300000 amostras de Gibbs das densidades condicionais (4.50) usando o algoritmo de Metropolis-Hastings, onde as 6000 amostras iniciais foram descartadas para eliminarmos o efeito dos valores iniciais considerados ("burn-in samples") e daí foram escolhidas amostras de 15 em 15 o que totaliza uma amostra final de tamanho 40000 para eliminar a correlação entre as amostras. A convergência das cadeias foi verificada usando o critério de Gelman e Rubin, 1992.

Na Tabela 4.3 temos os sumários a posteriori e os valores do fator de redução de escala  $\hat{R}$  (critério de convergência de Gelman e Rubin). Para todos os parâmetros observamos a convergência das cadeias, pois  $\sqrt{\hat{R}} \leq 1.1$  para todos os parâmetros. Na Figura 4.4, temos os gráficos das densidades a posteriori para todos os parâmetros e nas Figuras 4.5 e 4.6 podemos examinar os gráficos e verificar a convergência das cadeias.

Tabela 4.3. Sumários a posteriori de interesse

Parâmetros.	Média	E.P.	Intervalo de Credibilidade.(95%)	$\hat{R}$
$\alpha$	-10,02	0,1907	[-10,39 ; -9,637]	1,0
$\beta$	5,253	5,301	[-4,217 ; 16,06]	0,9993
$p$	1,013	0,08549	[0,8524 ; 1,186]	1,001

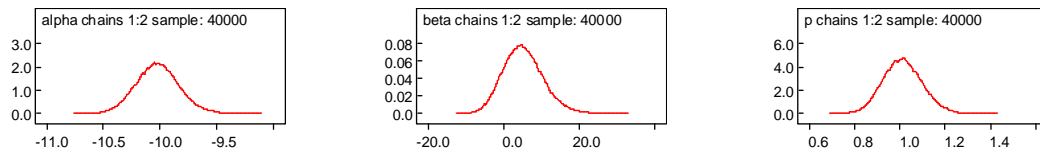


Figura 4.4 Gráficos das densidades geradas pelo amostrador de Gibbs.

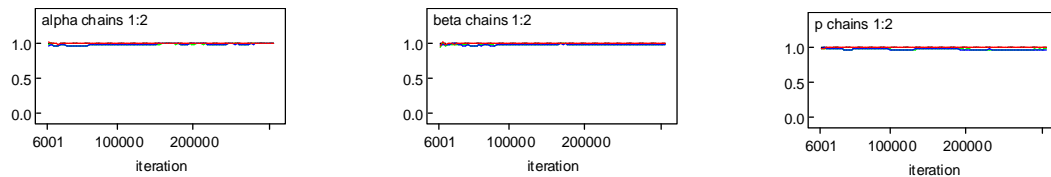


Figura 4.5 Gráficos de Gelman e Rubin para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$

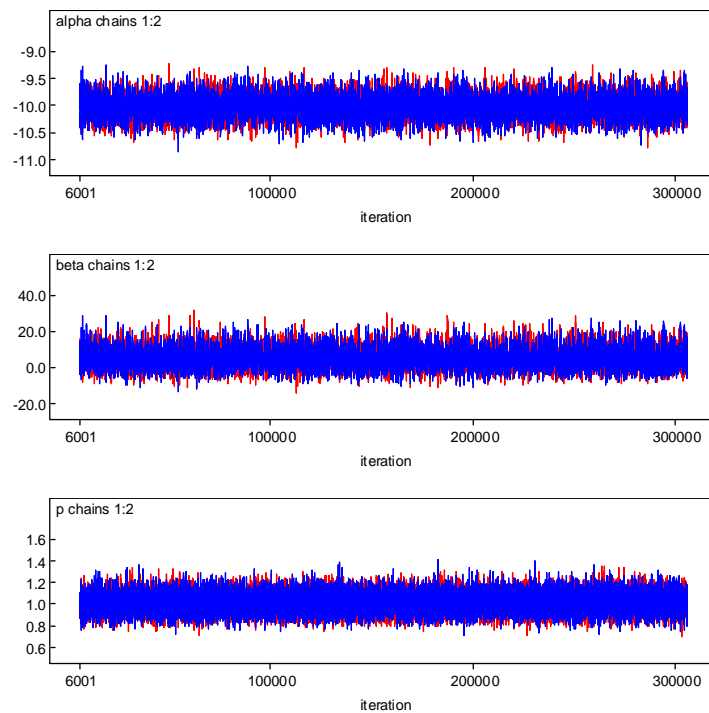


Figura 4.6 Gráficos de Séries Temporais dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$

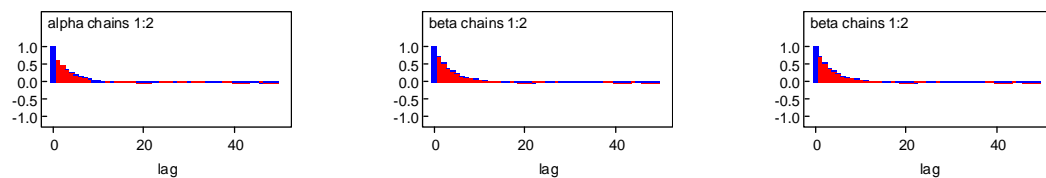


Figura 4.7 Gráficos das autocorrelações das amostras simuladas

A partir dos gráficos dados na Figura 4.7, observamos que as amostras geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings são não correlacionadas.

### 4.5.1 Controle da qualidade de um Lote de Componentes

Considerando o conjunto de dados da Tabela 4.1, assumindo  $\beta = 4,8951$ ,  $p = 1,0148$  conhecidos e  $\gamma = 0,10$  com  $r = \sum_{i=1}^k r_i = 109$  e  $C = \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} = 2791072$  encontramos na Tabela 4.4 os valores de  $Y_j$  considerando  $1 - \gamma = 0,90$  para vários valores fixados de  $V_j$ . Por outro lado, construímos a Tabela 4.5 dos valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo.

Tabela 4.4. Valores de  $Y_j$  com  $V_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,90$

$V_j$	$Y_j$
5	1280,57106
10	392,44807
15	222,24250
20	153,62308
25	117,02733
30	94,39159

Tabela 4.5. Valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,90$

$Y_j$	$V_j$
1200	5,16829
1100	5,40713
1000	5,68790
900	6,02377
800	6,43432
700	6,94995

Dessa forma, por exemplo, se temos interesse em verificar se os componentes de um determinado lote estão sob controle, considerando uma probabilidade de sobrevivência após  $Y_j$  igual a 0,90, e temos para esse experimento  $Y_j = 1100$  unidades de tempo, pela Tabela 4.5, devemos usar nesse teste um nível de estresse  $V_j \cong 5,40713$  unidades de voltagem. Analogamente, se tecnicamente só é possível testar os componentes à  $V_j = 5$  unidades de voltagem, pela Tabela 4.4, devemos conduzir o experimento até  $Y_j \cong 1280,57106$  unidades de tempo. Em ambos os casos devemos submeter  $r_i$  unidades em

teste, sob o nível severo de stress,  $V_j$ , no período de tempo fixo,  $Y_j$ , e observar a proporção  $p^j$  de unidades que falham. Se  $p^j \leq 0,10$ , o lote está sob controle, isto é, é aprovado na inspeção por amostragem.

# Capítulo 5

## Análise Bayesiana do Modelo de Arrhenius Considerando uma Distribuição Weibull e Dados com Censuras do Tipo II

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, exploramos o uso de métodos Bayesianos para obter inferências para os parâmetros do modelo (relação estresse-resposta) de Arrhenius usando métodos MCMC. Em especial, usamos o algoritmo de Metropolis-Hastings (ver por exemplo, Chib e Greenberg, 1995 ou Roberts e Smith, 1993) para gerar amostras da distribuição a posteriori conjunta para os parâmetros do modelo. Também utilizamos o software WinBugs (Spiegelhalter *et al.*, 1999) para encontrar sumários a posteriori de interesse. Na Seção 5.3, propomos uma metodologia de análise bayesiana para o controle da qualidade de componentes manufaturados. Ilustramos a metodologia com dois conjuntos de dados.

### 5.2 Formulação do Modelo

Considere um teste de vida acelerado em um experimento com dados censurados (censuras do tipo II), onde são aplicados nos componentes,  $k$  valores de stress  $V_i$ ,  $i =$

$1, \dots, k$ , como descrito no Capítulo 2. O comportamento de falha desses componentes é especificado pela distribuição de Weibull. A distribuição de Weibull é uma das principais distribuições utilizadas para modelar tempos de vida de um componente e sua função densidade de probabilidade é dada em (4.1) e o tempo médio de vida é definido em (4.5).

Assumindo o Modelo de Arrhenius (ver capítulo 1) dado por, (1.3), a relação existente entre o parâmetro  $\lambda_i$  da distribuição do tempo de vida dos produtos manufacturados e a variável estresse desse modelo é dada por

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{\exp\left(\frac{\beta}{V_i}\right)}{\exp(\alpha)} \quad (5.1)$$

para  $i = 1, \dots, k$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$  e  $-\infty < \beta < \infty$ .

A função de verossimilhança num nível de estresse fixado  $V_i$  considerando a variável aleatória  $T$  com f.d.p. (4.1), o modelo de Arrhenius (5.1) e dados com censuras do tipo II é dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, p) \propto & p^r \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \exp \left( \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \right) \\ & \times \exp \left( - \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p$  e  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  o número total de falhas observadas para  $i = 1, \dots, k$ .

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta, p) = \ln L(\alpha, \beta, p) = & r \ln(p) + (p-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \ln(t_{ij}) + \alpha pr - \\ & - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha, \beta$  e  $p$  são obtidos resolvendo-se

o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, p)}{\partial \alpha} = pr - p \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, p)}{\partial \beta} = -p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} + p \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right) \times V_i} = 0 \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \beta, p)}{\partial p} &= \frac{r}{p} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \ln(t_{ij}) + \alpha r - \beta \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \alpha \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)} - \\ &- \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} (t_{ij}^p \ln(t_{ij}) + (n_i - r_i) t_{ir_i}^p \ln(t_{ir_i})) \exp\left(\frac{-\beta p}{V_i}\right) + \\ &+ \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right) V_i} = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

As expressões (5.4), (5.5) e (5.6), para as derivadas parciais da função de log verossimilhança, podem ser utilizadas para o cálculo das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  através do método de Newton-Raphson.

Para  $n$  grande é usual fazer inferências sobre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ , usando a aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dada por,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) \overset{a}{\sim} N \{(\alpha, \beta, p); I^{-1}(\alpha, \beta, p)\} \quad (5.7)$$

sendo  $I(\alpha, \beta, p)$  a matriz de informação de Fisher dada pelas esperanças das segundas derivadas parciais de  $l(\alpha, \beta, p)$  com respeito a  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  a menos do sinal (ver, por exemplo, Box e Tiao, 1973).

O problema de teste de aderência do modelo Exponencial contra a classe de alternativa irrestrita é complexo. No entanto, podemos usar a estatística da razão de verossimilhança (ver por exemplo, Rao, 1973) para testar a adequabilidade do submodelo Exponencial-Arrhenius. A hipótese nula,  $H_0 : p = 1$  corresponde ao submodelo Exponencial-Arrhenius. Se esta hipótese é rejeitada então o submodelo é questionável. A estatística da razão de verossimilhança para testar a adequabilidade do modelo Weibull,



isto é,  $H_0 : p = 1$  contra  $H_a : p \neq 1$ , em termos dos EMVs, é dada por,

$$\Lambda = \frac{L(p = 1, \hat{\alpha}, \hat{\beta})}{L(\tilde{p}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} \quad (5.8)$$

sendo  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  os EMVs dos parâmetros do modelo Exponencial-Arrhenius e  $\tilde{p}, \tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  os EMVs dos parâmetros do modelo Weibull-Arrhenius. Sob a hipótese  $H_0$ ,  $-2 \log(\Lambda)$  tem distribuição aproximada qui-quadrado com um grau de liberdade para tamanhos amostrais suficientemente grandes (ver por exemplo, Rao, 1973).

Utilizando a distribuição normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{p}$ , a qual é dada por (5.7), é possível calcular por meio de expressões simples os intervalos de confiança dos estimadores de máxima verossimilhança. Portanto, os intervalos de confiança para os parâmetros  $\alpha$ ,  $p$  e  $\beta$ , considerando um nível de confiança  $100(1 - \gamma)\%$ , são dados por,

$$\begin{aligned} ic(\alpha) &= \left[ \hat{\alpha} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})} ; \hat{\alpha} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \right] \\ ic(\beta) &= \left[ \hat{\beta} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})} ; \hat{\beta} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})} \right] \\ ic(p) &= \left[ \hat{p} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{p})} ; \hat{p} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{p})} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde  $Z_{\frac{\gamma}{2}}$  é um percentil da distribuição Normal padronizada.

Considerando  $p$  conhecido, temos que  $E\{A_i(p)\} = E\left\{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p\right\} = \frac{r_i \exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)}{\exp(\alpha p)}$  (ver Lawless, 1982), as componentes da matriz de informação de Fisher para um dado valor de  $p$  são dadas por

$$\begin{aligned} E\left\{-\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial^2 \alpha}\right\} &= rp^2 \\ E\left\{-\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial \alpha \partial \beta}\right\} &= E\left\{-\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial \beta \partial \alpha}\right\} = -p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \\ E\left\{-\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta | p)}{\partial^2 \beta}\right\} &= p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Portanto, a Matriz de informação de Fisher é dada por

$$I(\alpha, \beta | p) = \begin{pmatrix} rp^2 & -p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \\ -p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} & p^2 \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

### 5.3 Análise Bayesiana do Modelo de Arrhenius

Para representar o grau de conhecimento sobre os parâmetros do modelo de Arrhenius (1.3), vamos considerar as seguintes densidades a priori para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ :

$$\begin{aligned} \alpha &\sim N[\mu_1, \sigma_1^2]; \mu_1, \sigma_1^2 \text{ conhecidos;} \\ \beta &\sim N[\mu_2, \sigma_2^2]; \mu_2, \sigma_2^2 \text{ conhecidos;} \\ p &\sim G[a, b]; a, b \text{ conhecidos.} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Assumindo independência entre os parâmetros a densidade a priori conjunta de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  considerando o grau de conhecimento do especialista sobre os parâmetros é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, p) &\propto p^{a-1} \times \exp(-bp) \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\alpha - \mu_1)^2\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(\beta - \mu_2)^2\right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Combinando (5.13) com (5.3) a densidade conjunta a posteriori de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, p | t, v) &\propto p^{r+a-1} \times \exp(-bp) \times \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\alpha - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(\beta - \mu_2)^2\right) \times \\ &\times \exp\left(\alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)}\right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

sendo  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p$ ,  $-\infty < \alpha < +\infty$ ,  $p > 0$ ,  $-\infty < \beta < +\infty$  e  $\underline{t}$  e  $\underline{v}$  denotam o conjunto de dados observados.

Notamos que a densidade a posteriori conjunta (5.14) não possui uma forma conhecida, portanto só podemos avaliar a densidade a posteriori marginal por meio de métodos de aproximação, tais como o método de Laplace (ver Kass, Tierney e Kadane, 1986) ou usando métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov, tais como Gibbs Sampling (ver Casela e George, 1992) e Metropolis-Hasting (ver Chib e Greenberg, 1995). Nesta análise consideramos os métodos de simulação por serem de fácil implementação computacional.

Da densidade a posteriori conjunta dada em (5.14) pode-se mostrar que as densidades condicionais a posteriori para o algoritmo de Gibbs Sampling são dadas por

$$\pi(\alpha \mid \beta, p, \underline{t}, \underline{v}) \propto \exp \left( \alpha pr - \frac{1}{2\sigma_1^2}(\alpha - \mu_1)^2 - \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)} \right) \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \pi(\beta \mid \alpha, p, \underline{t}, \underline{v}) &\propto \exp \left( -\beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \frac{1}{2\sigma_2^2}(\beta - \mu_2)^2 \right) \times \\ &\times \exp \left( -\exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \pi(p \mid \alpha, \beta, \underline{t}, \underline{v}) &\propto p^{r+a-1} \times \exp(-bp) \times \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \\ &\times \exp \left( \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} - \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)} \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

sendo  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p$ ,  $-\infty < \alpha < +\infty$ ,  $p > 0$ ,  $-\infty < \beta < +\infty$  e  $\underline{t}$  e  $\underline{v}$  denotam o conjunto de dados observados.

Observe que as densidades dadas em (5.15), (5.16) e (5.17) não são conhecidas de modo que faremos uso do algoritmo de Metropolis-Hasting para gerar amostras para  $\alpha, \beta$

e  $p$ . Uma simplificação possível é dada pelo uso do software WinBugs (ver Spiegelhalter *et al* 1999) que só exige a especificação da função de verossimilhança e as distribuições a priori para os parâmetros de interesse.

### 5.3.1 Densidades Preditivas em Controle da Qualidade

Assumindo que os parâmetros  $p$  e  $\beta$  são conhecidos, a função de verossimilhança para  $\alpha$  é dada por,

$$L(\alpha) \propto \exp\left(\alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i}\right) \times \exp\left(-\exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)}\right), \quad (5.18)$$

sendo  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i)t_{ir_i}^p$  e  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  é o número total de falhas observadas para  $i = 1, \dots, k$ . Considerando uma priori de Jeffreys para o parâmetro  $\alpha$  do modelo de Arrhenius dada por  $\pi(\alpha) \propto \text{constante}$ , onde  $-\infty < \alpha < \infty$ , a densidade a posteriori para  $\alpha$  é dada por,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \mid \text{dados}) &\propto p \frac{\left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)} \right]^r}{\Gamma(r)} \times \\ &\times \exp\left(\alpha pr - \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp\left(\frac{\beta p}{V_i}\right)}\right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

A densidade preditiva a posteriori para um tempo futuro  $T_{(n+1)j}$ , sob o nível de estresse  $V_j$  sendo  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  o número total de falhas observadas, é dada por

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) \times \pi(\alpha \mid \text{dados}) d\alpha,$$

onde

$$f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) = p \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\frac{\beta}{V_j})} \left( \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\frac{\beta}{V_j})} t_{(n+1)j} \right)^{p-1} \times \exp \left( - \left( \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\frac{\beta}{V_j})} t_{(n+1)j} \right)^p \right) \quad (5.20)$$

é a função densidade de  $T_{(n+1)j}$ ,  $\pi(\alpha \mid \beta, p, \text{dados})$  é a densidade a posteriori dada em (5.19) e  $\lambda_j = \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\frac{\beta}{V_j})}$ . Isto é,

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{pr \exp(-\frac{\beta p}{V_j}) t_{(n+1)j}^{p-1} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})} \right]^r}{\left[ \exp(-\frac{\beta p}{V_j}) t_{(n+1)j}^p + \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})} \right]^{r+1}} \quad (5.21)$$

para  $t_{(n+1)j} > 0$ . Observamos que  $T_{(n+1)j} \mid T_1, \dots, T_n$  tem uma distribuição de Pareto.

Observamos que a função densidade preditiva para  $T_{(n+1)j}$  tem, para  $r > 1$ , média dada por,

$$E^j(T_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{r \left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})} \right]}{(r-1) \times p \exp(-\frac{\beta p}{V_j}) t_{(n+1)j}^{p-1}}$$

e variância para  $r > 2$  dada por

$$Var^j(T_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{r \left( \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})} \right)^2}{(r-1)^2 (r-2) p^2 \exp(-\frac{2\beta p}{V_j}) t_{(n+1)j}^{2p-2}}$$

para  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Considerando que o pesquisador tem conhecimento a priori sobre os parâmetros do modelo Arrhenius (1.3), a função densidade de  $T_{(n+1)j}$  dada por (5.20) em um nível  $j$  de estresse  $V$  e a função densidade a posteriori conjunta dada em (5.14) sendo  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  o número total de falhas observadas em teste, a densidade preditiva a posteriori de uma observação futura  $T_{(n+1)j}$  (ver por exemplo, Aitchinson e Dunsmore, 1975 ou Press, 1989),

é dada por

$$\begin{aligned}
 f^j(t_{(n+1)j} \mid \underline{t}, \underline{v}) &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) \times \pi(\alpha, \beta, p \mid \text{dados}) dp d\alpha d\beta \\
 &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\frac{\beta}{V_j})} \left( \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\frac{\beta}{V_j})} t_{(n+1)j} \right)^{p-1} \times p^{r+a-1} \times \\
 &\quad \times \exp \left( - \left( \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\frac{\beta}{V_j})} t_{(n+1)j} \right)^p \right) \times \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \\
 &\quad \times \exp \left( - \frac{1}{2\sigma_1^2} (\alpha - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2} (\beta - \mu_2)^2 \right) \times \\
 &\quad \times \exp(-bp) \times \exp \left( \alpha pr - \beta p \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{V_i} \right) \times \\
 &\quad \exp \left( - \exp(\alpha p) \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})} \right) dp d\alpha d\beta \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

Uma alternativa prática nas aplicações em engenharia ou indústria, seria achar uma aproximação de Monte Carlo de (5.22), dada por,

$$\begin{aligned}
 f^j(\widehat{t_{(n+1)j}} \mid \underline{t}, \underline{v}) &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \times p^{(s)} \left( \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} t_{(n+1)j} \right)^{p^{(s)}-1} \times \\
 &\quad \times \exp \left[ - \left( \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} t_{(n+1)j} \right)^{p^{(s)}} \right] \tag{5.23}
 \end{aligned}$$

baseado nas  $S$  amostras geradas de Gibbs ou encontrar a densidade preditiva (5.22) usando o método de Laplace (ver, por exemplo, Tierney e Kadane, 1986) ou métodos numéricos de Quadratura Gaussiana (ver por exemplo, Gamerman, 1996).

### Controle da Qualidade de um Lote de Componentes

Assumindo  $\beta$  e  $p$  conhecidos, considere a densidade preditiva para uma observação futura dada em (5.21). Fixando uma probabilidade  $(1 - \gamma)$  e um nível  $j$  de stress  $V$ , um valor  $Y_j$  pode ser encontrado satisfazendo:

$$\Pr(T_{(n+1)_j} > Y_j \mid \text{dados}) = \int_{Y_j}^{\infty} f(t_{(n+1)_j} \mid \text{dados}) dt_{(n+1)_j} = 1 - \gamma.$$

Daí, considerando  $\Pr(T_{(n+1)_j} > Y_j \mid \text{dados}) = 1 - \gamma$ , temos,

$$\Pr(T_{(n+1)_j} > Y_j \mid \text{dados}) = \int_{Y_j}^{\infty} \frac{pr \exp(-\frac{\beta p}{V_j}) t_{(n+1)_j}^{p-1} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})} \right]^r}{\left[ \exp(-\frac{\beta p}{V_j}) t_{(n+1)_j}^p + \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})} \right]^{r+1}} dt_{(n+1)_j}. \quad (5.24)$$

Considerando  $C = \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)}{\exp(\frac{\beta p}{V_i})}$  temos,

$$\frac{\left[ \frac{C}{\exp(-\frac{\beta p}{V_j})} \right]^r}{\left[ Y_j^p + \frac{C}{\exp(-\frac{\beta p}{V_j})} \right]^r} = (1 - \gamma) \quad (5.25)$$

A partir de (5.25), é possível então determinar os valores de  $Y_j$  e  $V_j$ , assumindo  $\beta$  e  $p$  conhecidos. Assim,

- Fixando-se um nível  $j$  de stress  $V$  o período de tempo  $Y_j$  a ser considerado no teste de vida acelerado é dado por:

$$Y_j = \left[ \frac{C \times [1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{r}}]}{\exp(-\frac{\beta p}{V_j}) \times (1 - \gamma)^{\frac{1}{r}}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (5.26)$$

- Fixando-se o período de tempo  $Y_j$  de aplicação do teste de vida acelerado fixo, o nível de stress  $V_j$  a ser considerado é dado por:

$$V_j = \left\{ \frac{\beta p}{-\log \left( \frac{C \times [1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{r}}]}{Y_j^p (1 - \gamma)^{\frac{1}{r}}} \right)} \right\} \quad (5.27)$$

Encontrados os valores de  $Y_j$  e  $V_j$  tais que,  $\Pr(T_{(n+1)_j} > Y_j \mid \text{dados}) = 1 - \gamma$  seja

satisfeito, e definindo  $p^j = \Pr(T_{(n+1)j} \leq Y_j \mid \text{dados})$ , podemos colocar  $m$  unidades novas para serem testadas no nível de estresse,  $V_j$ , e observar seus tempos de sobrevivência durante um período fixo de tempo  $Y_j$  e considerar o teste de hipóteses,  $H_0 : p^j \leq \gamma$  (lote aprovado na inspeção por amostragem) contra  $H_1 : p^j > \gamma$  (lote não aprovado na inspeção por amostragem) supondo que o número  $w$  de falhas observadas no período de tempo  $Y_j$ , no nível de estresse  $V_j$ , na amostra de tamanho  $m$ , tenha uma distribuição Binomial, isto é,  $W \sim \text{Bin}(m, p^j)$ .

Seja  $X$  o número de componentes que falharam ( $X \leq m$ ) durante o teste. Se  $m$  é grande ( $m \geq 30$ ) então temos,

$$X \stackrel{a}{\sim} N \{mp^j ; mp^j(1 - p^j)\}, \quad (5.28)$$

e um critério de controle de qualidade pode ser baseado no teste de hipótese usual, isto é, o lote não será aprovado na inspeção por amostragem se  $Z \geq Z_\alpha$ , onde

$$Z = \frac{X - mp^j}{\sqrt{mp^j \times (1 - p^j)}} \stackrel{a}{\sim} N \{0, 1\}, \quad (5.29)$$

e  $\alpha$  é o nível de significância e  $Z_\alpha$  é tal que  $\Pr(Z \geq Z_\alpha) = \alpha$ .

Com  $\beta$  e  $p$  desconhecidos, usando métodos numéricos (ver por exemplo, Gaman, 1996), podemos achar  $V_j$  e  $Y_j$  tais que  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j \mid \text{dados}) = 1 - \gamma$ , a partir da densidade preditiva (5.22).

## 5.4 Algumas Aplicações

### 5.4.1 Aplicação 1 considerando a distribuição Exponencial

Nesta seção é apresentada uma aplicação numérica referente ao modelo (relação estresse-resposta) de Arrhenius considerando a distribuição Exponencial.

Os dados a seguir, extraídos de Achcar e Louzada Neto, 1992, referem-se a um teste de vida acelerado simulado, para o caso de uma distribuição de falhas Weibull e uma relação estresse-resposta com cinco níveis crescentes de estresse  $V$  de temperatura. Cada estresse  $V$ , escolhido aleatoriamente, é aplicado a 15 unidades experimentais, até  $r$



unidades falharem, obtendo-se a Tabela 5.1. Os valores de  $r$  (isto é, o número de observações tomadas a cada nível fixado de estresse, respectivamente 5, 7, 8, 10 e 12, de acordo com a Tabela 5.1) são especificados pelo pesquisador tendo em vista sua disponibilidade e limitação de tempo e custo de experimentação.

Tabela 5.1. Dados Simulados com  $\alpha = -12,7$  e  $\beta = 6,2$  e  $p = 2$

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Observações não Censuradas
1	10	20	5	39, 45, 67, 88, 100
2	15	20	7	27, 34, 42, 61, 67, 79, 97
3	20	20	8	22, 32, 37, 48, 53, 70, 79, 88
4	25	20	10	18, 25, 32, 47, 56, 61, 70, 79, 82, 94
5	30	20	12	20, 22, 30, 34, 50, 58, 64, 73, 79, 88, 88, 100

A adequabilidade do modelo é verificada a partir de métodos gráficos baseados no Estimador Produto Limite de Kaplan-Meier (ver, Kaplan e Meier, 1958). A relação linear entre  $\log(-\log(\hat{S}(t_{ij})))$  e  $\log(t_{ij})$  para  $j = 1, 2, \dots, n_i$  e  $i = 1, 2, \dots, k$ , onde  $\hat{S}(t_{ij})$  é o estimador Produto Limite de Kaplan-Meier, indica o ajuste da distribuição Exponencial. Esta linearidade é verificada para as cinco amostras (ver, Figura 5.1).

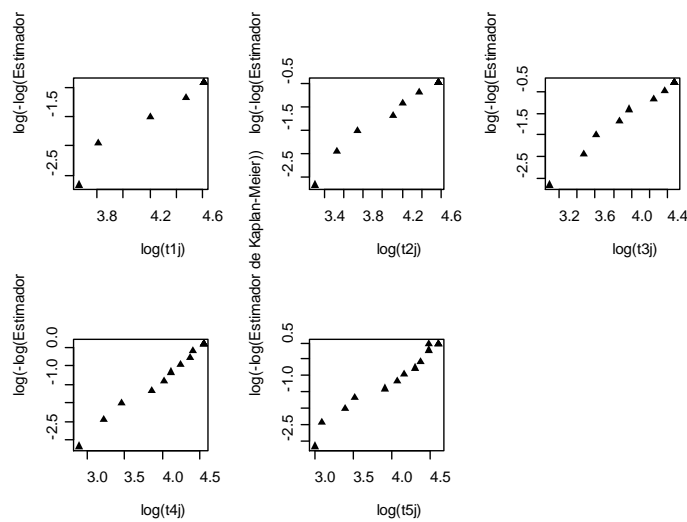


Figura 5.1 Gráfico de  $\log(-\log(\hat{S}(t_{ij})))$  versus  $\log(t_{ij})$

Considerando que os tempos simulados têm distribuição Weibull de parâmetros de forma  $p = 1$  e de escala  $\lambda_i$ , a adequabilidade do modelo de Arrhenius aos dados, pode ser verificada da seguinte forma: de (1.3) tem-se que,

$$\lambda_i = \exp\left(\alpha - \frac{\beta}{V_i}\right),$$

$i = 1, 2, \dots, k$ , daí, temos a relação linear  $\log(\lambda_i) = \alpha - \frac{\beta}{V_i}$ .

Considerando os dados da Tabela 5.1 e os estimadores de máxima verossimilhança para  $\lambda_i = \frac{r_i}{A_i}$ ,  $i = 1, 2 \dots 5$  (ver, por exemplo, Lawless, 1982), podemos construir um gráfico de  $\log(\lambda_i)$  versus  $\frac{1}{V_i}$ , e verificar a existência ou não de uma relação linear aproximada. Caso existe, dizemos que o modelo de Arrhenius com uma variável estresse é válido para a amostra em questão.(ver Figura 5.2)

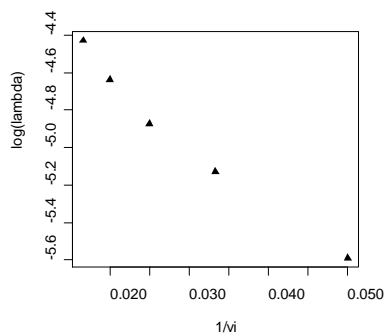


Figura 5.2 Gráfico de  $\log(\lambda_i)$  versus  $\frac{1}{V_i}$

Podemos observar na Figura 5.2 a existência de uma relação linear aproximada, implicando na adequabilidade do conjunto de dados simulados (ver Tabela 5.1).

Os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$  obtidos numericamente são dados por,  $\hat{\alpha} = -3,921521$   $\hat{\beta} = 34,844407$ .

Os intervalos de confiança 95% para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ , considerando-se a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{p}$ , são dados por:

$$-4,740208 \leq \alpha \leq -3,102834$$

$$5,346499 \leq \beta \leq 64,34231$$

Para uma análise bayesiana dos dados introduzidos na Tabela 5.1, assumimos a

densidade a priori conjunta (5.13) para  $\alpha$  e  $\beta$  com valores dos hiperparâmetros dados por  $\mu_1 = 40$ ,  $\sigma_1 = 10^3$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10^3$ . Na geração das amostras, utilizamos o software WinBugs (ver Spiegelhalter *et al* 1999). Para o modelo proposto geramos duas cadeias paralelas cada uma com 100000 amostras de Gibbs das densidades condicionais (5.17) usando o algoritmo de Metropolis-Hastings, onde as 5000 amostras iniciais foram descartadas para eliminarmos o efeito dos valores iniciais considerados ("burn-in samples") e daí foram escolhidas amostras de 10 em 10 o que totaliza uma amostra final de tamanho 20000 para eliminar a correlação entre as amostras. A convergência das cadeias foi verificada usando o critério de Gelman e Rubin, 1992.

Na Tabela 5.2 temos os sumários a posteriori e os valores do fator de redução de escala  $\hat{R}$  (critério de convergência de Gelman e Rubin). Para todos os parâmetros observamos a convergência das cadeias, pois  $\sqrt{\hat{R}} \leq 1.1$  para todos os parâmetros. Na Figura 5.3, temos os gráficos das densidades a posteriori para todos os parâmetros e nas Figuras 5.4 e 5.5 podemos examinar os gráficos e verificar a convergência das cadeias.

Tabela 5.2. Sumários a posteriori de interesse

Parâmetros.	Média	E.P.	Intervalo de Credibilidade.(95%)	$\hat{R}$
$\alpha$	-3,892	0,1901	[-4,656 ; -3,144]	1,0
$\beta$	36,9	13,75	[-10,9 ; 64,52]	0,9988

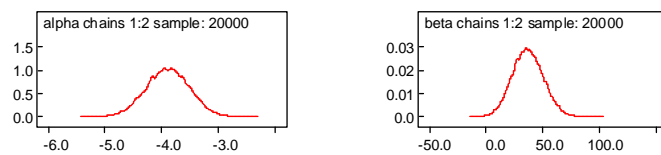


Figura 5.3 Gráficos das densidades geradas pelo amostrador de Gibbs

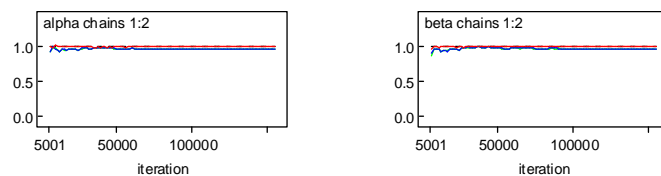


Figura 5.4 Gráficos de Gelman e Rubin para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$

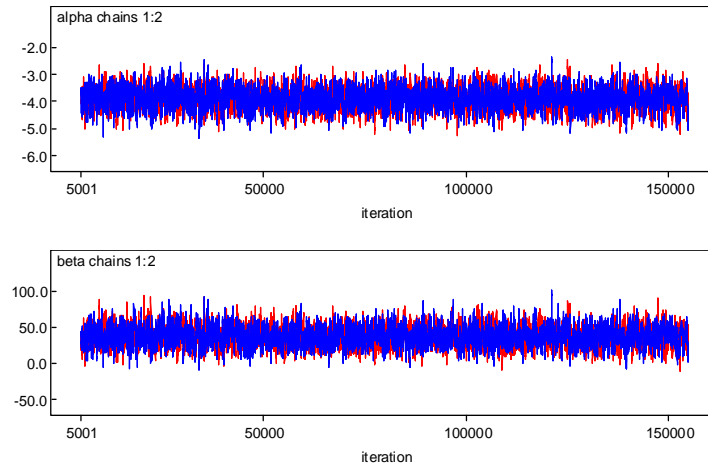


Figura 5.5 Gráficos de Séries Temporais dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$

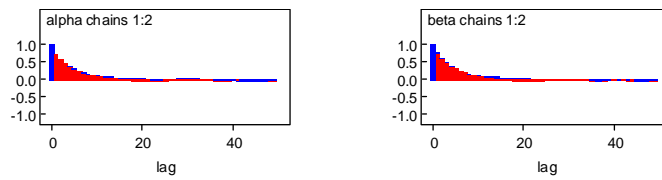


Figura 5.6 Gráficos das autocorrelações das amostras simuladas

A partir dos gráficos dados na Figura 5.6, observamos que as amostras geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings são não correlacionadas.

### 5.4.2 Controle da qualidade de um Lote de Componentes

Com os dados da Tabela 5.1 temos  $r = \sum_{i=1}^k r_i = 109$  e  $C = \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} = 2791072$ . Assumindo  $\beta = 34,844407$  conhecido,  $\gamma = 0,10$  e um nível de estresse  $V_j$  fixo, encontramos na Tabela 5.3 os valores de  $Y_j$  considerando  $1 - \gamma = 0,90$ . Por outro lado, construímos a Tabela 5.4 dos valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo.

Tabela 5.3. Valores de  $Y_j$  com  $V_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,90$ 

$V_j$	$Y_j$
20	30,405576
30	17,011437
40	12,724329
50	10,689840
60	9,517629
70	8,759886

Tabela 5.4. Valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,90$ 

$Y_j$	$V_j$
12	42,88537
16	31,67146
20	26,33092
24	23,14246
28	20,99315
32	19,43000

### 5.4.3 Aplicação 2 Considerando a distribuição Weibull

Nesta seção é apresentada uma aplicação numérica referente ao modelo (relação estresse-resposta) de Eyring considerando a distribuição Weibull.

Os dados da Tabela 5.5, são resultados de um teste acelerado de vida para isolantes de sistemas de uma nova classe H, e referentes ao tempo em horas que os isolantes levaram para tornar-se defeituosos. Os testes foram utilizados em pequenos motores, para temperaturas elevadas. Dez motores foram colocados para funcionar a temperaturas de 190, 220, 240 e 260 °C, e inspecionados periodicamente para detectar a ocorrência de falha. Os dados da Tabela 5.5 são referentes à média entre o tempo em que a falha foi observada e o tempo de inspeção anterior. Os tempos entre checagem foram 7, 4 e 2 dias para as respectivas temperaturas. Estes dados foram analisados por Nelson (1990), que considerou o modelo log-normal para o ajuste dos tempos de vida.

Tabela 5.5. Tempos de vida de isolantes ( em horas) para cada temperatura, em graus centígrados, com + indicando tempos censurados

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Observações não Censuradas
1	190	10	10	7228, 7228, 7228, 8448, 9167, 9167, 9167, 10511, 10511
2	220	10	9	1764, 2436, 2436, 2436 <sup>+</sup> , 2436, 2436, 3108, 3108, 3108, 3108
3	240	10	9	1175, 1521, 1569, 1617, 1665, 1665, 1713, 1761, 1881 <sup>+</sup> , 1953
4	260	10	5	1128, 1464, 1512, 1632, 1632 <sup>+</sup> , 1632 <sup>+</sup> , 1632 <sup>+</sup> , 1632 <sup>+</sup> , 1896

Os estimadores de máxima verossimilhança para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ , obtidos numericamente são dados por,  $\hat{\alpha} = -2,9936 (0,28362)$ ,  $\hat{\beta} = 1129 (62,023)$  e  $\hat{p} = 4,4730 (0,58828)$ .

Cada valor entre parênteses ao lado das estimativas representa a raiz quadrada do correspondente elemento da diagonal da matriz  $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$ , sendo  $I(\alpha, \beta, p)$  a matriz de informação de Fisher. Os intervalos de confiança 95% para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$ , considerando-se a aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{p}$ , são dados por:

$$\begin{aligned}
 -3,549495 &\leq \alpha \leq -2,437705 \\
 1007,435 &\leq \beta \leq 1250,565 \\
 3,319971 &\leq p \leq 5,626029
 \end{aligned}$$

Para verificar a adequabilidade do modelo Exponencial para os dados da Tabela 5.5, consideramos o teste de hipótese ( $H_0 : p = 1$  versus  $H_a : p \neq 1$ ); observamos que a estatística da razão de verossimilhança (5.8), resultou em  $\Lambda = 64,23093$ , com  $p$ -valor igual a 0,000 indicando um ajuste inadequado do modelo Exponencial-Arrhenius ao nível de significância de 1%.

Para analisarmos os dados da Tabela 5.5, sob uma perspectiva Bayesiana, assumimos a densidade a priori conjunta (5.13) para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  com valores dos hiperparâmetros dados por  $\mu_1 = 0$ ,  $\sigma_1 = 10^5$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10^5$ ,  $a = 10^{-3}$  e  $b = 10^{-3}$ . Na geração das amostras, utilizamos o software WinBugs (ver Spiegelhalter *et al* 1999). Para o modelo

proposto geramos duas cadeias paralelas cada uma com 300000 amostras de Gibbs das densidades condicionais (5.17) usando o algoritmo de Metropolis-Hastings, onde as 5000 amostras iniciais foram descartadas para eliminarmos o efeito dos valores iniciais considerados ("burn-in samples") e daí foram escolhidas amostras de 30 em 30 o que totaliza uma amostra final de tamanho 20000 para eliminar a correlação entre as amostras. A convergência das cadeias foi verificada usando o critério de Gelman e Rubin, 1992.

Na Tabela 5.6 temos os sumários a posteriori e os valores do fator de redução de escala  $\hat{R}$  (critério de convergência de Gelman e Rubin). Para todos os parâmetros observamos a convergência das cadeias, pois  $\sqrt{\hat{R}} \leq 1.1$  para todos os parâmetros. Na Figura 5.7, temos os gráficos das densidades a posteriori para todos os parâmetros e nas Figuras 5.8 e 5.9 podemos examinar os gráficos e verificar a convergência das cadeias.

Tabela 5.6. Sumários a posteriori de interesse

Parâmetros.	Média	E.P.	Intervalo de Credibilidade.(95%)	$\hat{R}$
$\alpha$	-2,94	0,2981	[-3,579 ; -2,404]	1,0
$\beta$	1153	64,05	[1017 ; 1270]	1,001
$p$	4,497	0,6637	[3,281 ; 5,86]	0,9997

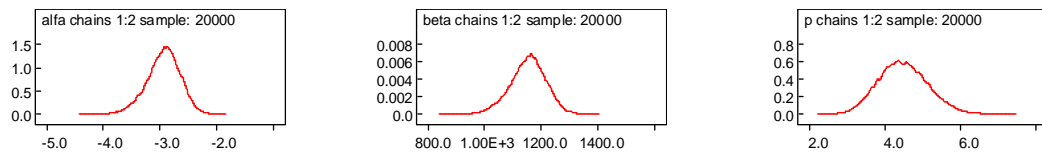


Figura 5.7 Gráficos das densidades a posteriori marginais para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$

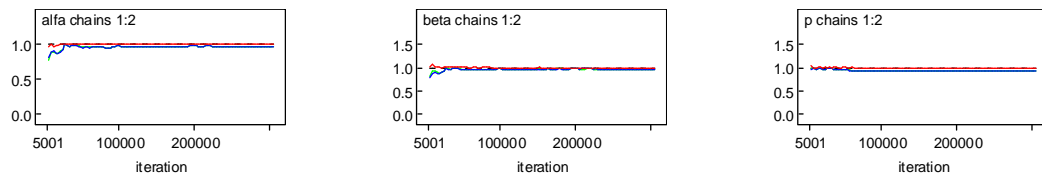


Figura 5.8 Gráficos de Gelman e Rubin para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$

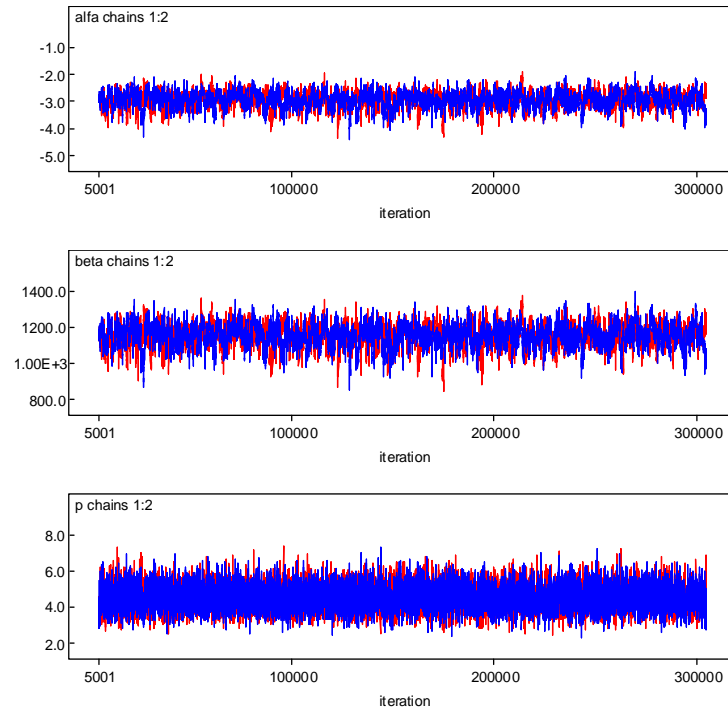


Figura 5.9 Gráficos de Séries Temporais dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$

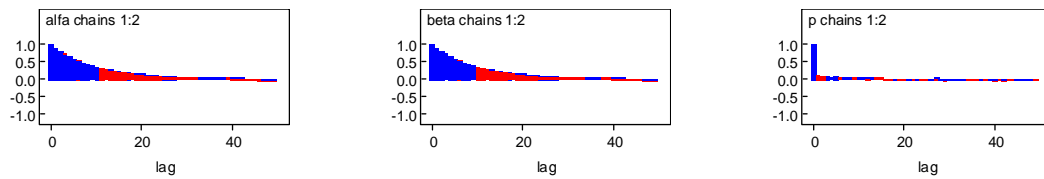


Figura 5.10 Gráficos das autocorrelações das amostras simuladas

A partir dos gráficos dados na Figura 5.10, observamos que as amostras geradas pelo algoritmo Metropolis-Hastings são não correlacionadas.

### 5.4.4 Controle da qualidade de um Lote de Componentes

Considerando o conjunto de dados da Tabela 5.5, assumindo  $\beta = 1129$ ,  $p = 4,473$  conhecidos e  $\gamma = 0,10$  com  $r = \sum_{i=1}^k r_i = 33$  e  $C = \sum_{i=1}^k \frac{A_i(p)V_i^p}{\exp(\beta p/V_i)} = 32078054$ , encontramos na Tabela 5.7 os valores de  $Y_j$  considerando  $1 - \gamma = 0,90$  para vários valores fixados de  $V_j$ . Por outro lado, construímos a Tabela 5.8 dos valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo.



Tabela 5.7. Valores de  $Y_j$  com  $V_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,90$ 

---

$V_j$	$Y_j$
220	2233,6348
230	1786,9454
240	1456,4161
250	1206,6067
260	1014,2199
270	863,5474
280	743,7539

---

Tabela 5.8. Valores de  $V_j$  com  $Y_j$  fixo e  $1 - \gamma = 0,90$ 

---

$Y_j$	$V_j$
1100	255,2279
1200	250,3043
1300	245,9399
1400	242,0326
1500	238,5050
1600	235,2970
1700	232,3611

---

Podemos observar que os resultados obtidos são de grande interesse prático para os pesquisadores e engenheiros da área de qualidade, uma vez que são facilmente utilizáveis e podem ser usados em uma grande quantidade de problemas de controle da qualidade e confiabilidade de produtos industriais.

# Capítulo 6

## Uso de Métodos Bayesianos em Testes de Vida Acelerados Assumindo uma Distribuição Weibull-exponenciada e o Modelo Lei da Potência Inversa

### 6.1 Introdução

O objetivo deste capítulo consiste do estudo e proposição de metodologia Bayesiana para o controle da qualidade de produtos industriais em testes de vida acelerados considerando uma distribuição Weibull-exponenciada para os tempos de vida juntamente com uma relação estresse-resposta de potência inversa para a relação entre o parâmetro de escala da Weibull-exponenciada e os níveis de estresse. Os métodos baseados em amostragem, especialmente os métodos de Monte Carlo são considerados como alternativa para aproximar integrais para as quais não existe solução analítica para a estimação de parâmetros sob o enfoque Bayesiano. Um conjunto de dados reais ilustram a metodologia proposta neste capítulo.

## 6.2 A distribuição Weibull-exponenciada

Mudholkar *et al.* (1995) apresentam uma extensão da distribuição Weibull denominada família de distribuições Weibull-exponenciadas (WE) em aplicações de confiabilidade e sobrevivência. A nova família é obtida ao introduzir um segundo parâmetro de forma  $\delta$  adicional na função quantil da distribuição Weibull.

A distribuição Weibull-exponenciada (WE) introduzida por Mudholkar *et al.* (1995), com parâmetros  $p$ ,  $\delta$  e  $\lambda$  para o tempo de vida  $T$  tem função de densidade dada por,

$$f(t; \lambda, p, \delta) = p\delta\lambda(t\lambda)^{p-1} \exp(-(t\lambda)^p) [1 - \exp(-(t\lambda)^p)]^{\delta-1}, \quad (6.1)$$

para  $0 < t < +\infty$ ,  $p > 0$ ,  $\delta > 0$  são os parâmetros de forma e  $\lambda > 0$  é o parâmetro de escala. A densidade (6.1) pode ser usada para especificar a distribuição Exponencial como caso particular quando  $p = 1$  e  $\delta = 1$  e a distribuição Weibull no caso em que  $\delta = 1$ .

A função de distribuição de  $T$ , denotada por  $F(t; p, \delta, \lambda)$  para  $t > 0$  é dada por,

$$F(t; p, \delta, \lambda) = [1 - \exp(-(t\lambda)^p)]^\delta. \quad (6.2)$$

O  $k$ -ésimo momento da distribuição WE, para  $k = 1, 2, \dots$  é dado por,

$$\begin{aligned} E(t^k) &= \int_0^{+\infty} t^k p\delta\lambda(t\lambda)^{p-1} \exp(-(t\lambda)^p) [1 - \exp(-(t\lambda)^p)]^{\delta-1} dt \\ &= \frac{\delta}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} y^{\frac{k}{p}} \exp(-y) [1 - \exp(-y)]^{\delta-1} dy. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Em geral os momentos são intratáveis analiticamente, porém, podem ser estudados numericamente. Quando  $\delta$  é um número inteiro, (6.3) é dado por,

$$E(t^k) = \frac{\delta}{\lambda^k} \Gamma\left(\frac{k}{p} + 1\right) \sum_{j=1}^{\delta-1} \left(\frac{\delta-1}{j}\right) \frac{1}{(j+1)^{\frac{k}{p+1}}}. \quad (6.4)$$

Também, se  $\frac{k}{p} = c$  é um número inteiro e positivo, (6.3) se reduz a

$$E(t^k) = \frac{\delta}{\lambda^k} (-1)^c \left[ \frac{d^c}{d_s^c} B(s, \delta) \right]_{s=1} \quad (6.5)$$

onde  $B(s, \delta)$  denota a função beta(veja, por exemplo, Abramowitz e Stegun, 1965).

A função de confiabilidade de  $T$  que denotamos por  $S(t; p, \delta, \lambda) = \Pr(T \geq t)$  é dada por

$$S(t; p, \delta, \lambda) = 1 - [1 - \exp(-(t\lambda)^p)]^\delta. \quad (6.6)$$

A função de risco de  $T$ , definida por  $h(t; p, \delta, \lambda) = f(t; \lambda, p, \delta)/S(t; p, \delta, \lambda)$  é obtida a partir das expressões (6.1) e (6.6) e é dada por,

$$h(t; p, \delta, \lambda) = \frac{f(t; \lambda, p, \delta) = p\delta\lambda(t\lambda)^{p-1} \exp(-(t\lambda)^p) [1 - \exp(-(t\lambda)^p)]^{\delta-1}}{1 - [1 - \exp(-(t\lambda)^p)]^\delta}. \quad (6.7)$$

O modelo Weibull-exponenciada (WE) apresenta funções de risco do tipo *bathtub* ("banheira"), unimodal e monótona, isto é,  $h(t; p, \delta, \lambda)$  é,

- (i) monótona crescente se  $p \geq 1$  e  $p\delta \geq 1$ ,
- (ii) monótona decrescente se  $p \leq 1$  e  $p\delta \leq 1$
- (iii) forma de bathtub se  $p > 1$  e  $p\delta < 1$  e
- (iv) unimodal se  $p < 1$  e  $p\delta > 1$ .

As monotonicidades em (i) e (ii) são estritas exceto para a distribuição exponencial correspondente a  $p = \delta = 1$ .

A Figura 6.1, mostra alguns casos especiais da função de risco (6.7) considerando que os parâmetros são constantes.

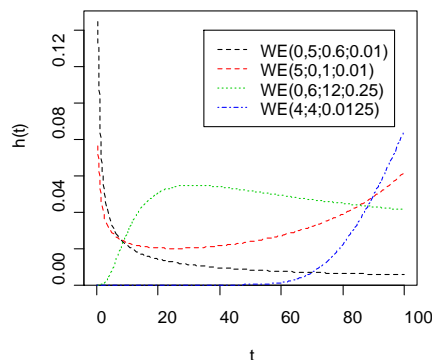


Figura 6.1. Algumas formas especiais da função de risco da família Weibull-exponenciada (WE  $(p, \delta, \lambda)$ ).

As propriedades da distribuição WE foram estudadas em detalhe por Mudholkar e Hutson (1996), Nassar e Eissa (2003) e Nadarajah e Gupta (2005). Aplicações da distribuição WE em análise de dados de confiabilidade e de sobrevivência podem ser encontradas em Mudholkar *et al.* (1995). Cancho *et al.* (1999) apresentam análise clássica e bayesiana dos modelos de regressão Weibull-exponenciada com dados censurados e Cancho e Bolfarine (2001) apresentaram o modelo de mistura Weibull-exponenciada para análise de dados de sobrevivência com fração de cura.

### 6.3 Análise Clássica do Modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa

Nesta seção apresentaremos o procedimento de inferência clássica considerando o modelo lei da potência inversa (1.2) e a distribuição Weibull-exponenciada (6.1) para os tempos de vida. Esse modelo será chamado de Modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa (WE-PI). Como casos particulares podemos obter o modelo Exponencial-Lei da Potência Inversa (E-PI) quando  $p = 1$  e  $\delta = 1$  e quando  $\delta = 1$  temos o modelo Weibull-Lei da Potência Inversa (W-PI). Alternativamente a relação entre o parâmetro de escala e nível de estresse dada em (1.2) pode ser representada pela relação,  $\lambda_i = \exp(-\beta_0 + \beta \log(V_i))$ , sendo  $-\infty < \beta_0 = \log(\alpha) < \infty$ .

Consideramos o método de máxima verossimilhança como procedimento básico de estimação. Considere um teste de vida acelerado de um conjunto com  $n_i$  unidades como descrito no Capítulo 2 sob o nível de estresse  $V_i$ . A contribuição individual de cada unidade em testes que falha na composição final da função de verossimilhança é dada pela densidade

$$f_i(t_{ij}; \lambda_i, p, \delta) = p\delta\lambda_i(t_{ij}\lambda_i)^{p-1} \exp(-(t_{ij}\lambda_i)^p) [1 - \exp(-(t_{ij}\lambda_i)^p)]^{\delta-1}, \quad (6.8)$$

enquanto cada unidade censurada contribui com sua função de confiabilidade (Lawless, 1982), que no  $i$ -ésimo nível de estresse, é dada por,

$$S_i(t_{ij}; \lambda_i, p, \delta) = 1 - [1 - \exp(-(t_{ir_i}\lambda_i)^p)]^\delta. \quad (6.9)$$

Dessa forma, a função de verossimilhança para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$  sob o  $i$ -ésimo nível de estresse  $V_i$ , é dada por (ver, por exemplo, Lawless, 1982), considerando dados com censuras do tipo II,

$$\begin{aligned}
 L_i(\lambda_i, p, \delta) &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij} | \lambda_i, p, \delta) [S(t_{ir_i} | \lambda_i, p, \delta)]^{(n_i - r_i)} \right\} \\
 &\propto \delta^r p^r \alpha^{-pr} \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij})^{p-1} \times \\
 &\quad \times \exp \left( -\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p \right) \times \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right) \right]^{\delta-1} \times \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^k \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p} \right) \right]^{\delta} \right\}^{(n_i - r_i)} \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

onde  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  representa o número total de falhas observadas.

Denotando o vetor de parâmetros por  $\theta = (\alpha, \beta, p, \delta)$ , com a correspondente função de verossimilhança  $L(\theta)$  e  $l(\theta) = \log(L(\theta))$ , os EMV de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ , podem ser obtidos via maximização direta de (6.10) ou através da obtenção das soluções do sistema de equações não-lineares, formado pelas derivadas de  $l(\theta)$  com respeito a cada parâmetro de  $\theta$ . O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \beta, p, \delta) &\propto r \ln(\delta) + r \ln(p) - rp \ln(\alpha) + \\
 &\quad + \beta p \sum_{i=1}^k r_i \ln(V_i) + (p-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \ln(t_{ij}) - \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p + \\
 &\quad + (\delta-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \ln \left( 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right) \right) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \ln \left( 1 - \left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p} \right) \right]^{\delta} \right). \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são dados pela solução do sistema de equações não lineares,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha} = & -\frac{rp}{\alpha} + \frac{p}{\alpha^{p+1}} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p - \\ & -(\delta - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} g_{1\alpha}(t_{ij}) + \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \delta p g_{2\alpha}(t_{ir_i}) = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} = & p \sum_{i=1}^k r_i \ln(V_i) - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} p V_i^{\beta p} \ln(V_i) t_{ij}^p + \\ & +(\delta - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} g_{1\beta}(t_{ij}) - \delta p \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) g_{2\beta}(t_{ir_i}) = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \delta} = & \frac{r}{\delta} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \ln \left( 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right) \right) - \\ & - \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) g_{1\delta}(t_{ir_i}) = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{1\alpha}(t_{ij}) &= \frac{p \left[ \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right) \right] \times V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^{p+1} \times \left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right) \right]} \\ g_{2\alpha}(t_{ir_i}) &= \frac{\left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p} \right) \right]^{\delta-1} \times \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p} \right) \times V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^{p+1} \times \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p} \right) \right]^\delta \right\}} \\ g_{1\beta}(t_{ij}) &= \frac{\exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right) \times \frac{p}{\alpha^p} V_i^{\beta p} \ln(V_i) t_{ij}^p}{1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{2\beta}(t_{ir_i}) &= \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta-1} \times \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right) \frac{\ln(V_i) V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}}{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}} \\
 g_{1\delta}(t_{ir_i}) &= \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta} \times \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]}{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}} \\
 g_{1p}(t_{ij}) &= \frac{\beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \left( V_i^{\beta p} \ln(V_i) t_{ij}^p + \frac{V_i^{\beta p} \ln(t_{ij}) t_{ij}^p}{\beta} \right)}{\alpha^p} \\
 g_{2p}(t_{ij}) &= \frac{\ln(\alpha) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \\
 g_{3p}(t_{ij}) &= \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right) \left[ \beta V_i^{\beta p} \ln(V_i) t_{ij}^p + V_i^{\beta p} \ln(t_{ij}) t_{ij}^p - \ln(\alpha) V_i^{\beta p} t_{ij}^p \right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right] \times \alpha^p} \\
 g_{4p}(t_{ir_i}) &= \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta-1} \times \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)}{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}} \times \\
 &\quad \times \alpha^{-p} \left[ V_i^{\beta p} \ln(t_{ir_i}) t_{ir_i}^p + \beta V_i^{\beta p} \ln(V_i) t_{ir_i}^p - \ln(\alpha) V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p \right]
 \end{aligned}$$

Como não é possível obter de modo análico os valores de  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{p}$  e  $\hat{\delta}$  que satisfazem as equações acima, pode-se recorrer a métodos iterativos, como por exemplo o método de Newton-Rapson para calcular estimativas dos parâmetros.

Para fazer inferências sobre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$ , utiliza-se a aproximação Normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, dada por:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}, \hat{\delta}) \overset{a}{\sim} N \{ (\alpha, \beta, p, \delta); I^{-1}(\alpha, \beta, p, \delta) \} \tag{6.15}$$

onde  $I(\alpha, \beta, p, \delta)$  é a matriz de Informação de Fisher, isto é, a matriz dos valores esperados



das segundas derivadas parciais da função log-verossimilhança  $l(\alpha, \beta, p, \delta)$  em relação a  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$ , a menos do sinal, dada por

$$I(\alpha, \beta, p, \delta) = \begin{pmatrix} E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial p} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \delta} \right\} \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial p} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \delta} \right\} \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial p \partial \alpha} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial p \partial \beta} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial p \partial \delta} \right\} \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \delta \partial \alpha} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \delta \partial \beta} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \delta \partial p} \right\} & E \left\{ -\frac{\partial^2 l}{\partial \delta^2} \right\} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Considerando a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{p}$  e  $\hat{\delta}$  podemos calcular os intervalos de confiança para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$ .

Representando a inversa da matriz de informação de Fisher por

$$I^{-1}(\alpha, \beta, p, \delta) = \begin{pmatrix} Var(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{p}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\delta}) \\ Cov(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) & Var(\hat{\beta}) & Cov(\hat{\beta}, \hat{p}) & Cov(\hat{\beta}, \hat{\delta}) \\ Cov(\hat{p}, \hat{\alpha}) & Cov(\hat{p}, \hat{\beta}) & Var(\hat{p}) & Cov(\hat{p}, \hat{\delta}) \\ Cov(\hat{\delta}, \hat{\alpha}) & Cov(\hat{\delta}, \hat{\beta}) & Cov(\hat{\delta}, \hat{p}) & Var(\hat{\delta}) \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

e considerando um nível de confiança de  $100(1 - \gamma)\%$ , os intervalos de confiança aproximados para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$  são dados por:

$$\begin{aligned} ic(\alpha) &= \left[ \hat{\alpha} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})} ; \hat{\alpha} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \right] \\ ic(\beta) &= \left[ \hat{\beta} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})} ; \hat{\beta} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\beta})} \right] \\ ic(p) &= \left[ \hat{p} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{p})} ; \hat{p} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{p})} \right] \\ ic(\delta) &= \left[ \hat{\delta} - Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\delta})} ; \hat{\delta} + Z_{\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{Var(\hat{\delta})} \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde  $Z_{\frac{\gamma}{2}}$  é o percentil correspondente da distribuição Normal padronizada. Devemos entretanto ressaltar que a precisão dos intervalos assintóticos está diretamente vinculada ao tamanho amostral, que em confiabilidade é, em geral, pequeno.

Teste de aderência do modelo Weibull contra a classe de alternativas irrestrita é complexo. Contudo, restringindo para o modelo WE podemos usar a estatística da razão de verossimilhança (veja, Cox e Hinkley, 1974) para testar a adequabilidade do submodelo Weibull-Lei da Potência Inversa (W-PI). A hipótese nula,  $H_{01} : \delta = 1$  corresponde ao submodelo Weibull e  $H_{02} : \delta = p = 1$  corresponde ao submodelo Exponencial-Lei da Potência Inversa (do modelo WE-PI). Se uma destas hipóteses ou ambas são rejeitadas na classe da família WE então os submodelos são questionáveis.

A estatística da razão de verossimilhança para testar a adequabilidade do modelo W-PI, isto é,  $H_{01} : \delta = 1$  contra  $H_{a1} : \delta \neq 1$ , é dada por,

$$\Lambda_1 = -2 \left( l(\tilde{p}_w, \tilde{\alpha}_w, \tilde{\beta}_w, \delta = 1) - l(\hat{p}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}) \right) \quad (6.19)$$

sendo  $\tilde{p}_w, \tilde{\alpha}_w$  e  $\tilde{\beta}_w$  os EMVs dos parâmetros do modelo W-PI e  $\hat{p}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$  e  $\hat{\delta}$  são os EMVs dos parâmetros do modelo WE-PI. Sob a hipótese  $H_{01}$ ,  $\Lambda_1$  tem distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade para tamanhos amostrais suficientemente grandes (ver por exemplo, Rao, 1973). Similarmente para testar a adequabilidade do modelo exponencial a estatística da razão de verossimilhança é dada por,

$$\Lambda_2 = -2 \left( l(\tilde{\alpha}_e, \tilde{\beta}_e, p = 1, \delta = 1) - l(\hat{p}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}) \right), \quad (6.20)$$

sendo  $\tilde{\alpha}_e$  e  $\tilde{\beta}_e$  os EMVs dos parâmetros do modelo Exponencial-Lei da Potência Inversa. Sob a hipótese  $H_{02} : \delta = p = 1$ ,  $\Lambda_2$  tem distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade para tamanhos amostrais suficientemente grande.

## 6.4 Análise Bayesiana do Modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa

Na seção anterior foi considerada uma análise clássica do modelo Lei da Potência Inversa (1.2) considerando a distribuição Weibull-exponenciada para os tempos de vida, baseada em resultados assintóticos. Para amostras de tamanhos moderados ou pequenos esses resultados podem não ser confiáveis, tornando-se assim um problema sério uma vez

que em geral, trabalha-se com amostras não muito grandes. Um procedimento alternativo que pode contornar esse problema é o uso de métodos bayesianos. O uso de métodos bayesianos, além de serem uma alternativa de análise, permitem ainda a incorporação de conhecimento a priori através de uma densidade a priori que seja informativa. Caso não exista conhecimento a priori, ou seja difícil de expressá-lo, considera-se densidades a priori não informativas. Nesta seção apresentamos uma análise bayesiana do modelo Lei da Potência Inversa (1.2) considerando a distribuição Weibull-exponenciada e o método de simulação via cadeias de Markov (veja, por exemplo, Gelfand e Smith, 1990).

Para representar o grau de conhecimento sobre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$ , consideramos as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned}\alpha &\sim \Gamma(a_1, b_1) \\ p &\sim \Gamma(a_2, b_2) \\ \delta &\sim \Gamma(a_3, b_3) \\ \beta &\sim N(\mu, \sigma^2)\end{aligned}\tag{6.21}$$

onde  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $\mu$ ,  $\sigma^2$  são constantes conhecidas baseadas na informação a priori do especialista e da análise preliminar dos dados (análise Bayesiana empírica).

Assumindo independência entre os parâmetros, a densidade a priori conjunta de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$  é dada por:

$$\pi(\alpha, \beta, p, \delta) \propto \alpha^{a_1-1} p^{a_2-1} \delta^{a_3-1} \exp\left(-\alpha b_1 - p b_2 - \delta b_3 - \frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2\right)\tag{6.22}$$

Combinando (6.10)-(6.22) a densidade a posteriori conjunta para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$  é dada por

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha, \beta, p, \delta \mid \underline{t}, \underline{v}) &\propto \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij})^{p-1} \alpha^{a_1 - p r - 1} p^{a_2 + r - 1} \delta^{a_3 + r - 1} \times \\
 &\times \exp\left(-\alpha b_1 - p b_2 - \delta b_3 - \frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2\right) \times \\
 &\times \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\
 &\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta-1} \times \\
 &\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}\right\}^{(n_i - r_i)}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

para  $\alpha > 0$ ,  $p > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $-\infty < \beta < +\infty$  e  $\underline{t}$  e  $\underline{v}$  denotam o conjunto de dados observados.

Observe que a densidade a posteriori conjunta (6.23) não é uma densidade padrão, portanto só podemos avaliar as densidades a posteriori marginais por meio de métodos de aproximação, tais como o método de Laplace (Tierney e Kadane, 1986) ou usando métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov, tais como Gibbs Sampling (Casela e George, 1992) e Metropolis-Hasting (Chib e Greenberg, 1995). Nesta análise consideramos os métodos de simulação por serem de fácil implementação computacional.

Para obtermos uma amostra a posteriori das densidades marginais de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$ , fazemos uso do algoritmo de Gibbs Sampling que baseia-se em sucessivas gerações das distribuições condicionais a posteriori de  $\pi(\alpha \mid \beta, p, \delta, \underline{t}, \underline{v})$ ,  $\pi(\beta \mid \alpha, p, \delta, \underline{t}, \underline{v})$ ,  $\pi(p \mid \alpha, p, \delta, \underline{t}, \underline{v})$ ,  $\pi(\delta \mid \alpha, p, \delta, \underline{t}, \underline{v})$ .

Da densidade a posteriori conjunta dada em (6.23) podemos mostrar que as densidades condicionais a posteriori para o algoritmo de Gibbs são dadas por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \mid \beta, p, \delta, t, v) &\propto \alpha^{a_1 - pr - 1} \exp\left(-\alpha b_1 - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta-1} \times \\ &\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}\right\}^{(n_i - r_i)} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \pi(\beta \mid \alpha, p, \delta, t, v) &\propto \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\ &\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2\right) \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta-1} \\ &\prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}\right\}^{(n_i - r_i)} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \pi(p \mid \alpha, \beta, \delta, t, v) &\propto \alpha^{-pr} p^{a_2 + r - 1} \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij})^{p-1} \times \\ &\times \exp\left(-pb_2 - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta-1} \times \\ &\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}\right\}^{(n_i - r_i)} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \pi(\delta \mid \alpha, \beta, p, t, v) &\propto \delta^{a_3 + r - 1} \exp(-\delta b_3) \times \\ &\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta-1} \times \\ &\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\delta}\right\}^{(n_i - r_i)}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Observe que as densidades dadas em (6.24), (6.25), (6.26) e (6.27) não são conhecidas e precisamos usar o algoritmo de Metropolis-Hastings para gerar amostras de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$ .

### 6.4.1 Densidade Preditiva Para Uma Observação Futura

A densidade preditiva para uma observação futura  $t_{(n+1)j}$  é dada por,

$$f_j^j(t_{(n+1)j} \mid \underline{t}, \underline{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j, p, \delta) \times \\ \times \pi(\alpha, \beta, p, \delta \mid \underline{t}, \underline{v}) d\alpha dp d\delta d\beta \quad (6.28)$$

onde  $\pi(\alpha, \beta, p, \delta \mid \underline{t}, \underline{v})$  é a distribuição a posteriori conjunta de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$  dada por (6.23) e

$$f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j, p, \delta) = p\delta \frac{V_j^\beta}{\alpha} (t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha})^{p-1} \exp(-(t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha})^p) \times \\ \times \left[ 1 - \exp(-(t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha})^p) \right]^{\delta-1}. \quad (6.29)$$

Portanto, a densidade preditiva para uma observação futura  $t_{(n+1)j}$  é dada por,

$$\begin{aligned}
 f^j(t_{(n+1)j} \mid \underline{t}, \underline{v}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} p \delta \frac{V_j^\beta}{\alpha} \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha} \right)^{p-1} \times \\
 &\times \exp \left( - \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha} \right)^p \right) \times \left[ 1 - \exp \left( - \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha} \right)^p \right) \right]^{\delta-1} \cdot \times \\
 &\times \alpha^{a_1 - pr - 1} p^{a_2 + r - 1} \delta^{a_3 + r - 1} \times \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij})^{p-1} \times \\
 &\times \exp \left( -\alpha b_1 - p b_2 - \delta b_3 - \frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \mu)^2 \right) \times \\
 &\times \exp \left( -\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p \right) \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p} \right) \right]^{\delta-1} \times \\
 &\times \prod_{i=1}^k \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp \left( -\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p} \right) \right]^\delta \right\}^{(n_i - r_i)} d\alpha dp d\delta d\beta \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

onde  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  representa o número total de falhas observadas,  $\alpha > 0$ ,  $p > 0$ ,  $\delta > 0$  e  $-\infty < \beta < +\infty$  e  $\underline{t}$  e  $\underline{v}$  denotam o conjunto de dados observados.

O objetivo da expressão (6.30) é fazer uma previsão para a observação futura  $T_{(n+1)j}$ , isto é, prever  $t_{(n+1)j}$  a partir da informação amostral.

A integral em (6.30) não tem uma solução analítica. Neste caso podemos usar métodos aproximados de integração, tais como o método de Laplace (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986), métodos de integração numérica ou usando métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov. Como caso especial, suponha que temos  $S$  amostras de Gibbs geradas da distribuição a posteriori para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$ , isto é,  $\{(\alpha^{(s)}, \beta^{(s)}, p^{(s)}, \delta^{(s)}), s = 1, \dots, S\}$ . Desta forma, uma estimativa de Monte Carlo de (6.30), é dada por

$$\begin{aligned}
 f^j(t_{(n+1)j} \mid \underline{t}, \underline{v}) &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p^{(s)} \delta^{(s)} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \right)^{p^{(s)}-1} \times \\
 &\times \exp \left( - \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \right)^{p^{(s)}} \right) \times \\
 &\times \left[ 1 - \exp \left( - \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \right)^{p^{(s)}} \right) \right]^{\delta^{(s)}-1}
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

**Uso da Densidade Preditiva em Controle de Qualidade Considerando  $\delta = 1$ ,  $p$  e  $\beta$  conhecidos**

Assumindo  $\delta = 1$  temos uma distribuição de falhas Weibull de parâmetros de forma  $p$  e de escala  $\lambda_i$ . Se testes de vida acelerados são conduzidos considerando um experimento com dados censurados (censuras do tipo II), onde são aplicados nos componentes,  $k$  valores de estresse  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , como descrito no Capítulo 2, a função de verossimilhança para  $\alpha$  considerando  $p$  e  $\beta$  conhecidos, é dada por,

$$L(\alpha) \propto \frac{p^r}{\alpha^{pr}} \times \left( \prod_{i=1}^k V_i^{\beta pr_i} \right) \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \exp \left( - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \right) \tag{6.32}$$

onde  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i) t_{ir_i}^p$  e  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  é o número total de falhas observadas para  $i = 1, \dots, k$ . Considerando uma priori de Jeffreys para o parâmetro  $\alpha$  do modelo potência inversa dada por  $\pi(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha}$ , onde  $\alpha > 0$ , a densidade a posteriori para  $\alpha$  é dada por,

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha \mid \text{dados}) &= \frac{L(\alpha) \times \pi(\alpha)}{\int_0^{+\infty} L(\alpha) \times \pi(\alpha)} \\
 &\propto \frac{\alpha^{-(pr+1)} \times \exp \left( - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \right)}{\int_0^{+\infty} \alpha^{-(pr+1)} \times \exp \left( - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \right) d\alpha}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Do resultado

$$\int_0^{+\infty} x^{-(p+1)} e^{-ax^{-\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \times a^{\frac{-p}{\alpha}} \times \Gamma \left( \frac{p}{\alpha} \right) \tag{6.34}$$



(ver Box e Tiao, 1973), a função densidade a posteriori para  $\alpha$  é dada por,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \mid \text{dados}) &\propto \frac{p \times \left[ \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \right]^r}{\Gamma(r)} \times \alpha^{-(pr+1)} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \right) \end{aligned} \quad (6.35)$$

para  $\alpha > 0$ .

Considerando a função densidade de  $T_{(n+1)j}$  dada por,

$$f_j(t_{(n+1)j} \mid \lambda_j) = p \frac{V_j^\beta}{\alpha} \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha} \right)^{p-1} \exp \left( - \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^\beta}{\alpha} \right)^p \right) \quad (6.36)$$

para  $T_{(n+1)j} > 0$ , a densidade a posteriori para  $\alpha$  dada por (6.35), usando o resultado (6.34) e como  $\Gamma(r+1) = r \times \Gamma(r)$ , a função densidade preditiva para uma observação futura em um nível  $j$  do stress  $V$ , assumindo  $\beta$  e  $p$  conhecidos, é dada por,

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{r V_j^{\beta p} \left[ \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p} \right]^r p t_{(n+1)j}^{p-1}}{\left[ V_j^{\beta p} t_{(n+1)j}^p + \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p} \right]^{(r+1)}} \quad (6.37)$$

para  $t_{(n+1)j} > 0$ . Observamos que, Isto é,  $T_{(n+1)j} \mid T_1, \dots, T_n$  tem uma distribuição de Pareto.

Escrevendo  $C = \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p}$ , a densidade (6.37) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$f^j(t_{(n+1)j} \mid \text{dados}) = \frac{r \left[ \frac{C}{p V_j^{\beta p} t_{(n+1)j}^{p-1}} \right]^r}{\left[ \frac{t_{(n+1)j}}{p} + \frac{C}{p V_j^{\beta p} t_{(n+1)j}^{p-1}} \right]^{r+1}} \quad (6.38)$$

para  $t_{(n+1)j} > 0$ .

Observamos que a função densidade preditiva para  $T_{(n+1)j}$  tem, para  $r > 1$ , média dada por,

$$E^j(T_{(n+1)} \mid \text{dados}) = \frac{r \left[ \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p} \right]}{(r-1) V_j^{\beta p} t_{(n+1)j}^p} \quad (6.39)$$

e variância para  $r > 2$  dada por,

$$Var^j(T_{(n+1)_j} | dados) = \frac{r \left( \sum_{i=1}^k A_i V_i^\beta + d \right)^2}{(r-1)^2 (r-2) V_j^{2\beta p} t_{(n+1)_j}^{2p-2} p^2} \quad (6.40)$$

### 6.4.2 Controle da Qualidade de um Determinado Lote de Componentes

Podemos usar a densidade preditiva  $f^j(t_{(n+1)_j} | dados)$  para formular procedimentos em controle da qualidade em testes de vida acelerados. Usualmente, o engenheiro responsável pelo controle da qualidade seleciona amostras aleatórias de cada lote de componentes manufaturados para verificar se o processo em uma linha de produção está sob controle. Para minimizar o custo e o tempo do experimento, eles consideram unidades em teste de vida com altos níveis de estresse  $V_j$  por um período de tempo fixo,  $Y_j$ .

Usando a densidade preditiva (6.30) e considerando uma probabilidade de  $1 - \gamma$ , pode-se encontrar valores de  $Y_j$  tal que,  $\Pr(T_{(n+1)_j} > Y_j | dados) = 1 - \gamma$ , isto é,

$$\Pr(T_{(n+1)_j} > Y_j | dados) = \int_{Y_j}^{\infty} f(t_{(n+1)_j} | dados) dt_{(n+1)_j} = 1 - \gamma. \quad (6.41)$$

Como a equação (6.41) não tem uma solução analítica, podemos obter valores de  $Y_j$  através de um método numérico (por exemplo, o método de Quadratura Gaussiana (ver por exemplo, Gamerman, 1996)) ou usando o método da composição (veja por exemplo, Tanner e Wong, 1987), onde  $1 - \gamma$  é fixado.

No caso em que  $\delta = 1$  e  $\beta$  e  $p$  são conhecidos, a densidade preditiva para uma observação futura dada em (6.37). Nesse caso a equação em (6.41) resulta em,

$$\Pr(T_{(n+1)_j} > Y_j | dados) = \int_{Y_j}^{\infty} \frac{r \times \left(\frac{C}{V_j^{\beta p}}\right)^r p t_{(n+1)_j}^{p-1}}{\left(t_{(n+1)_j}^p + \frac{C}{V_j^{\beta p}}\right)^{r+1}} dt_{(n+1)_j} = 1 - \gamma \quad (6.42)$$

onde  $C = \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p}$ . Resolvendo a integral dada em (6.42), encontramos,

$$\left(\frac{C}{V_j^{\beta p}}\right)^r \times \left(\frac{1}{(Y_j^p + \frac{C}{V_j^{\beta p}})}\right)^r = 1 - \gamma \quad (6.43)$$

A partir de (6.42), é possível então determinar os valores de  $Y_j$  e  $V_j$ , assumindo  $\delta = 1$  e  $\beta$  e  $p$  conhecidos. Assim,

- Fixando-se um nível  $j$  de stress  $V$  o período de tempo  $Y_j$  a ser considerado no teste de vida acelerado é dado por:

$$Y_j = \left[ \frac{C[1 - (-1 - \gamma)^{\frac{1}{r}}]}{V_j^{\beta p}(1 - \gamma)^{\frac{1}{r}}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (6.44)$$

- Fixando-se o período de tempo  $Y_j$  de aplicação do teste de vida acelerado fixo, o nível de stress  $V_j$  a ser considerado é dado por:

$$V_j = \left\{ \frac{C \left[ 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{r+c}} \right]}{(1 - \gamma)^{\frac{1}{r}} Y_j^p} \right\}^{\frac{1}{\beta p}} \quad (6.45)$$

Encontrados os valores de  $Y_j$  e  $V_j$  tais que,  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j \mid \text{dados}) = 1 - \gamma$  seja satisfeito, e definindo  $p^j = \Pr(T_{(n+1)j} \leq Y_j \mid \text{dados})$ , podemos colocar  $m$  unidades novas para serem testadas no nível de estresse,  $V_j$ , e observar seus tempos de sobrevivência durante um período fixo de tempo  $Y_j$  e considerar o teste de hipóteses,  $H_0 : p^j \leq \gamma$  (lote aprovado na inspeção por amostragem) contra  $H_1 : p^j > \gamma$  (lote não aprovado na inspeção por amostragem) supondo que o número  $x$  de falhas observadas no período de tempo  $Y_j$ , no nível de estresse  $V_j$ , na amostra de tamanho  $m$ , tenha uma distribuição Binomial, isto é,  $X \sim \text{Bin}(m, p^j)$ .

Seja  $W$  o número de componentes que falharam ( $W \leq m$ ) durante o teste. Se  $m$  é grande ( $m \geq 30$ ) então temos,

$$W \stackrel{a}{\sim} N \{mp^j; mp^j(1 - p^j)\},$$

e um critério de controle da qualidade pode ser baseado no teste de hipótese usual, isto é, o lote não será aprovado na inspeção por amostragem se  $Z \geq Z_\alpha$ , onde

$$Z = \frac{W - mp^j}{\sqrt{mp^j \times (1 - p^j)}} \stackrel{a}{\sim} N\{0, 1\},$$

e  $\alpha$  é o nível de significância e  $Z_\alpha$  é tal que  $\Pr(Z \geq Z_\alpha) = \alpha$ .

## 6.5 Aplicação Numérica

Para ilustrar a metodologia apresentada neste Capítulo consideramos o conjunto o conjunto de dados apresentado na Tabela 6.1. Os dados a seguir, extraídos de Nelson, (1990), referem-se ao tempo de ruptura de um tipo de isolamento de fluidos sob vários níveis de voltagens (kv). Este conjunto de dados foi coletado usando um esquema de amostragem completa. Ou seja, considerando  $k$  níveis de uma variável estresse  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , uma amostra de  $n_i$ , é colocada em teste, para cada nível  $V_i$ . O experimento termina quando todas as observações falham. Na Tabela 6.2 apresentamos algumas medidas descritivas desse conjunto de dados.

Tabela 6.1. Tempos de vida de isolamento de fluidos

$i$	$V_i$	$n_i$	$r_i$	Observações não Censuradas
1	26	3	3	5.79, 1579.52, 2323.70
2	28	5	5	68.85, 108.29, 110.29, 426.07, 1067.60
3	30	11	11	7.74, 17.05, 20.46, 21.02, 22.66, 43.40, 47.30, 139.07, 144.12, 175.88, 194.90
4	32	15	15	0.27, 0.40, 0.69, 0.79, 2.75, 3.91, 9.88, 13.95 15.93, 27.80, 53.24, 82.85, 89.29, 100.58, 215.10
5	34	19	19	0.19, 0.78, 0.96, 1.31, 2.78, 3.16, 4.15, 4.67, 4.85, 6.50, 7.35, 8.01, 8.27, 12.06, 31.75, 32.52, 33.91, 36.71, 72.89
6	36	15	15	0.35, 0.59, 0.96, 0.99, 1.69, 1.97, 2.07, 2.58, 2.71, 2.90, 3.67, 3.99, 5.35, 13.77, 25.50
7	38	8	8	0.09, 0.39, 0.47, 0.73, 0.74, 1.13, 1.40, 2.38

Tabela 6.2. Estatísticas descritivas dos dados de tempo de ruptura de um tipo de isolamento de fluidos

$V_i$	$n_i$	Média	Desvio Padrão	$Q_1$	Mediana	$Q_2$
26	3	1303,00	1183,43	5,79	1579,50	2323,70
28	5	356,22	422,93	88,57	110,29	746,84
30	11	75,78	71,91	20,46	43,40	144,12
32	15	41,16	59,75	0,79	13,95	82,85
34	19	14,36	18,88	2,78	6,50	31,75
36	15	4,61	6,63	0,99	2,58	3,99
38	8	0,92	0,72	0,41	0,73	1,33

### 6.5.1 Análise Clássica

Para os dados de Nelson (1990) (Tabela 6.1), ajustando o modelo paramétrico Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa, os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\delta$  são dados por:  $\hat{\alpha} = 5,993 \times 10^{27}$  ( $3,54914 \times 10^{28}$ ),  $\hat{\beta} = 17,654$  ( $1,6483$ ),  $\hat{p} = 0,60083$  ( $0,19344$ ) e  $\hat{\delta} = 1,6266$  ( $0,99458$ ). Cada valor entre parênteses ao lado das estimativas representa a raiz quadrada do correspondente elemento diagonal de  $I^{-1}(\alpha, \beta, p, \delta)$  onde  $I(\alpha, \beta, p, \delta)$  é a matriz de Informação de Fisher. Se admitirmos normalidade assintótica para a distribuição dos EMVs,  $I^{-1}(\alpha, \beta, p, \delta)$  corresponde à estimativa da matriz de covariância assintótica, e pode ser utilizada para fazer inferência sobre os parâmetros.

A estatística da razão de verossimilhança para testar  $H_{01} : \delta = 1$  em (6.19) resultou em  $\Lambda_1 = 0,71147$ , com valor estimado de p-valor = 0,599 indicando um ajuste adequado do modelo Weibull-lei da potência inversa. Os estimadores de máxima verossimilhança (desvios padrão assintóticos) do modelo Weibull-Lei da Potência Inversa são dados por:  $\hat{\alpha} = 1,4548 \times 10^{28}$  ( $8,17524 \times 10^{28}$ ),  $\hat{\beta} = 17,730$  ( $1,6068$ ) e  $\hat{p} = 0,77656$  ( $0,068346$ ).

A estatística da razão de verossimilhança para testar  $H_{02} : p = 1$  e  $\delta = 1$  em (6.20) resultou em  $\Lambda_2 = 10,15177$  (com 2 graus de liberdade) com uma estimativa do  $p$  – valor  $< 0,007$ , que indica um ajuste inadequado do modelo Exponencial-Lei da Potência Inversa para o conjunto de dados de Nelson (1990).

## 6.5.2 Análise Bayesiana

### Modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa

Para analisarmos os dados de Nelson (1990) descritos anteriormente, desde uma perspectiva Bayesiana, inicialmente é considerado o modelo Weibull-exponenciada Lei da Potência Inversa (6.8) com  $\lambda_i = \exp(-\beta_0 + \beta \log(V_i))$  e densidades a priori dada em (6.21), com  $\beta_0 = \log(\alpha) \sim N(0, 10^6)$ ,  $\beta \sim N(0, 10^6)$ ,  $p \sim G(0.1, 0.1)$  e  $\delta \sim G(0.1, 0.1)$ . Com essa escolha foram geradas duas cadeias paralelas cada uma com 220000 iterações; monitorou-se a convergência das amostras de Gibbs usando o método de Gelman e Rubin (1992) que utiliza a técnica de análise de variância para determinar se mais iterações são necessárias. Para cada parâmetro as 20000 primeiras iterações foram descartadas para eliminar o efeito dos valores iniciais e daí foram tomadas amostras de 20 em 20 o que totaliza uma amostra final de tamanho 20000. O amostrador de Gibbs foi implementado usando o aplicativo WinBugs. Na Tabela 6.3, reportamos o resumo a posteriori dos parâmetros do modelo juntamente com os resultados da estimativa dos fatores de redução de escala potencial  $\hat{R}$  (veja, Gelman e Rubin, 1992), para todos os parâmetros. Observamos valores bastante próximos de  $um$ , o que indica que as cadeias convergiram.

Tabela 6.3. Sumários a posteriori para o modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa

Parâmetros.	Média	Mediana	E.P.	Intervalo de Credibilidade.(95%)	$\hat{R}$
$\beta_0$	64,94	64,85	5,413	[55,31 ; 76,32]	1,017
$\beta_1$	18,00	17,97	1,506	[15,36 ; 21,2]	1,001
$p$	0,603	0,575	0,194	[0,003588 ; 1,062]	1,001
$\delta$	2,151	1,693	1,611	[0,03713 ; 6,528]	0,993

Na Figura 6.2, temos as densidades a posteriori marginais aproximadas para o modelo de regressão Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa considerando os 20000

pontos amostrais gerados.

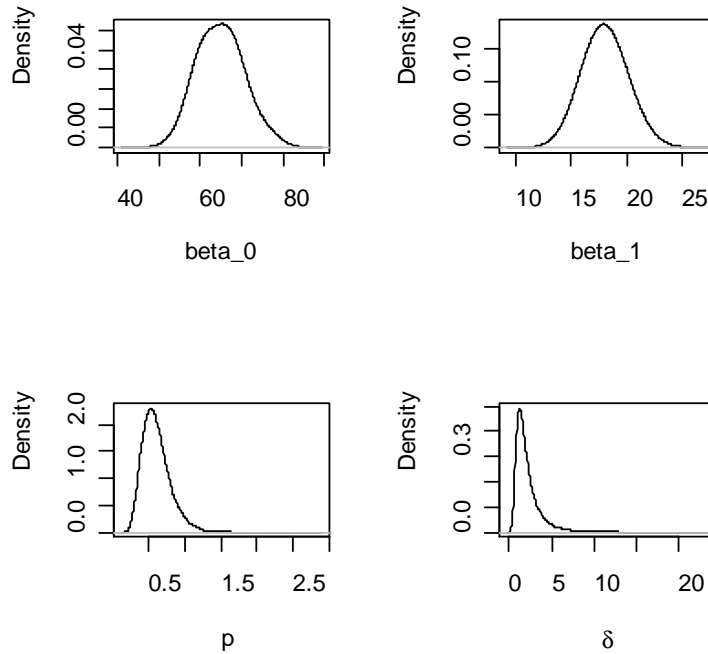


Figura 6.2. Densidades marginais a posteriori aproximadas dos parâmetros do modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa.

### Modelo Weibull-Lei da Potência Inversa

Como foi anteriormente observado, o modelo WE-PI em (6.8) com  $\delta = 1$  é o modelo Weibull-Lei da Potência Inversa (W-PI). Para analisar os dados de Nelson (1990), agora consideramos o modelo W-PI, onde como no caso da análise do Modelo WE-PI, o parâmetro de forma,  $p$  é supostamente constante e o parâmetro de escala muda com o nível de estresse através da relação (Lei da Potência Inversa),  $\lambda_i = \exp(-\beta_0 + \beta \log(V_i))$ . Considerando as densidades a priori para os parâmetros do modelo W-PI, com  $\beta_0 = \log(\alpha) \sim N(0, 10^6)$ ,  $\beta \sim N(0, 10^6)$ , e  $p \sim G(0.1, 0.1)$ , geramos duas cadeias separadas de Gibbs cada uma com 120000 iterações e utilizamos o método de Gelman e Rubin (1992) para verificar a convergência das cadeias. Para cada parâmetro as 20000 primeiras iterações foram descartadas para eliminar o efeito dos valores iniciais e daí foram tomadas amostras de 10 em 10 o que totaliza uma amostra final de tamanho 20000.

As quantidades a posteriori de interesse obtidas a partir das amostras selecionadas

são dadas na Tabela 6.4, onde observamos que os fatores de redução potencial são menores do que 1.1 ( $\sqrt{\hat{R}} \leq 1.1$ ), indicando a convergência das amostras geradas.

Tabela 6.4. Sumários a posteriori para o modelo Weibull-Lei da Potência Inversa

Parâmetros.	Média	Mediana	E.P.	Intervalo de Credibilidade.(95%)	$\hat{R}$
$\beta_0$	65,11	65,1	4,675	[0,3207 ; 7458]	0,9916
$\beta_1$	17,8	17,8	1,337	[15.33 ; 20.51]	0,9959
$p$	0,7656	0,7636	0,06817	[0,6376 ; 0,9025]	1,0001

Na Figura 6.3, temos as densidades marginais a posteriori aproximadas considerando os 20000 pontos amostrais gerados.

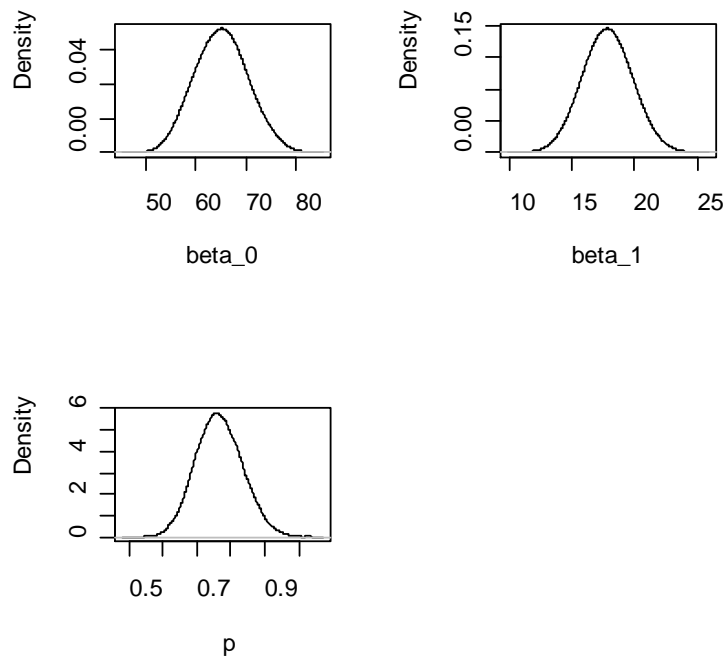


Figura 6.3. Densidades marginais a posteriori aproximadas dos parâmetros do modelo Weibull-Lei da Potência Inversa

Para avaliar o ajuste dos modelos Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa (6.8) e Weibull-Lei da Potência Inversa, aos dados de Nelson (1990), usamos alguns critérios Bayesianos existentes, como o critério BIC ("Bayes information criterion") e o critério DIC ("Deviance information criterion") (veja, Spiegelhalter et al., 2002). Na



Tabela 6.5, reportamos a estimativa do BIC e do DIC baseada nas amostras Gibbs de cada modelo. As estimativas do BIC e do DIC, indica que o modelo Weibull-Lei da Potência Inversa se ajusta melhor aos dados de Nelson (1990). A mesma conclusão podemos chegar ao observar o intervalo de credibilidade do parâmetro  $\delta$  no modelo WE-PI, pois ela contem o valor  $\delta = 1$ .

Modelo	BIC	DIC
Weibull-Lei da Potência Inversa	608,1961	607
Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa	612,9615	608,5

Aplicando o procedimento descrito na subseção 6.4.1, mostramos na figura 6.4, as densidades preditivas aproximadas para uma observação futura  $Y_{(n+1)j}$ , considerando os níveis de estresse  $V_j = 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38$ . A aproximação é baseada no método de composição, isto é, com as 20000 amostras a posteriori dos parâmetros do modelo WE-PI, geramos para cada nível de estresse, uma amostra preditiva de tamanho 20000, com essa amostra obtemos uma aproximação das densidades preditivas de uma observação futura. Na Tabela 6.6, apresentamos uma estimativa para  $Y_{(n+1)j}$  dada em (6.41) considerando  $1 - \gamma = 0,90$

Tabela 6.6. Valores de  $Y_j$  para  $V_j$  fixo com  $1 - \gamma = 0,90$ , considerando o modelo Weibull-exponenciada-Lei da Potência Inversa

$V_j$	26	28	30	32	34	36	38
$Y_j$	882,1	224,8	63,55	19,78	6,616	2,399	0,9109

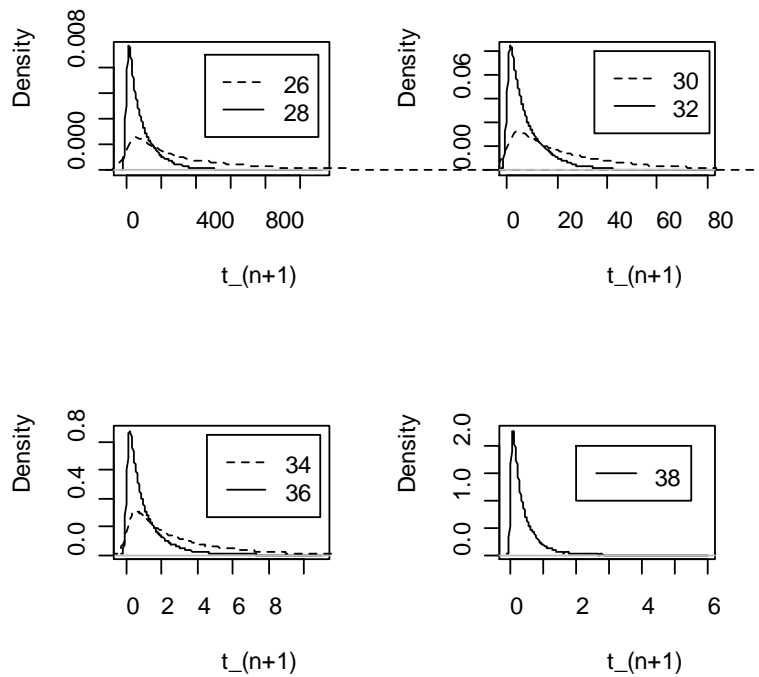


Figura 6.4 Densidades preditivas para uma observação futura para os níveis de estresse,  $V_j = 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38$ .

Usamos a densidade preditiva dada em (6.41) com  $\delta = 1$  e  $\beta$  e  $p$  conhecidos para determinar  $V_j$  e  $Y_j$ , para o problema de controle da qualidade. Neste caso assumindo  $\beta = 17,73$  e  $p = 0,77656$ , na Tabela 6.7 apresentamos os valores de  $Y_j$  dado em (6.44) para valores fixos de  $V_j$ , com  $1 - \gamma = 0,90$ . Os valores de  $V_j$  dado em (6.45) para valores fixo de  $Y_j$  é reportado na Tabela 6.7.

Tabela 6.7. Valores de  $Y_j$  e  $V_j$  com  $1 - \gamma = 0,90$ , considerando o modelo W-PI, com  $\beta$  e  $p$  conhecidos.

$V_j$ fixo		$Y_j$ fixo	
$V_j$	$Y_j$	$Y_j$	$V_j$
26	65,5011516	10	28,90754
28	17,60412726	30	27,17069
30	5,18043882	50	26,39904
32	1,64974674	100	25,38689
34	0,5631255	200	24,41355
36	0,20440102	300	23,86157
38	0,07837241	500	23,18390

Esses resultados podem ser de grande interesse para os engenheiros da qualidade. Por exemplo, se o interesse é verificar se os componentes de um determinado lote estão sob controle, considerando uma probabilidade de sobrevivência após  $Y_j$  igual a 0,90, e temos para o experimento  $Y_j = 50$  unidades de tempo, pela Tabela 6.7, o experimento deve ser realizado com um nível de estresse  $V_j \cong 25,38689$  (kv). Similarmente, suponha que por questões técnicas somente é possível testar os componentes à  $V_j = 32$  (kv), pela Tabela 6.7, deve-se conduzir o experimento até  $Y_j \cong 1,64974674$  unidades de tempo. Em ambos os experimentos deve-se submeter  $m$  unidades em teste, ao nível severo de estresse  $V_j$ , no período de tempo fixo  $Y_j$ , e observar a proporção  $p^j$  de unidades que falham. Se  $p^j \leq 0,10$ , o lote está sob controle, em caso contrário está fora de controle.

# Capítulo 7

## Conclusões Finais e Perspectivas Futuras de Trabalho

Uma abordagem bayesiana foi apresentada em testes de vida acelerados para os modelos Lei da Potência Inversa, Arrhenius e Eyring considerando as distribuições Weibull e Exponencial, onde observamos que o uso de métodos bayesianos via MCMC torna a análise de dados com censuras do tipo II viável e sem necessidade de grande esforço computacional, especialmente usando o software WinBugs.

Considerando a distribuição Weibull-exponenciada para os tempos de vida, podemos observar que o uso de métodos bayesianos em teste de vida acelerados podem ser de grande interesse prático na análise do modelo Lei da Potência Inversa.

O método bayesiano proposto para o controle da qualidade é flexível, dando ao pesquisador possibilidade de minimizar o tempo e o custo de experimentos de produtos industriais (componentes manufaturados), pois pode escolher  $1 - \gamma$ ,  $V_j$  e  $Y_j$  de acordo com cada problema particular. Além disso, o pesquisador tem, ao final da análise, uma idéia concreta de quão fora do padrão da qualidade está um determinado lote de unidades e se de fato a qualidade do produto está sendo garantida permanentemente.

Os procedimentos Bayesianos também permitem realizar inferências sobre o tempo médio de vida de cada produto industrial. Além disso, utilizando a densidade preditiva de uma observação futura podemos formular testes de controle da qualidade. E ainda pelos métodos Bayesianos é possível realizar planejamentos de experimentos.

É importante salientar que num trabalho futuro, resultados similares podem ser

obtidos para o modelo estresse-resposta geral (1.1) considerando outras distribuições para os tempos de vida, como por exemplo, a Distribuição Gama Generalizada, a Birnbaum Saunders, a Gaussiana Inversa, Distribuições Exponenciais Bivariadas, etc.

Nos estudos de confiabilidade são frequentes amostras, onde algumas unidades fornecem informações incompletas sobre os seus tempos de vida. Quando isso ocorre, dizemos que os tempos de vida dessas unidades são censurados. Em função da importância dos dados censurados serem incorporados à análise, métodos e modelos estatísticos foram e têm sido desenvolvidos. A omissão dos tempos censurados no cálculo das estatísticas de interesse produzirão, certamente, resultados e conclusões viciadas. O tempo médio de sobrevivência, por exemplo, pode ser subestimado se os tempos censurados não forem considerados. Estimativas mais próximas da realidade serão, portanto, obtidas se tanto os tempos de falha quanto os tempos censurados forem considerados. Assim é importante que consideremos estas unidades com censuras em nossas análises para não ocorrermos em inferências viciadas ou menos eficientes.

O uso de métodos de Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC) para uma análise Bayesiana em Testes de Vida Acelerados pode ser uma boa alternativa para obter estimadores precisos para os parâmetros do modelo relação estresse-resposta geral (Lei da Potência Inversa, Eyring e Arrhenius). Também observamos que a obtenção das amostras simuladas de Gibbs para a distribuição a posteriori conjunta dos parâmetros do modelo não exige um grande conhecimento computacional e as amostras de Gibbs são facilmente obtidas usando softwares estatísticos disponíveis no mercado. Intervalos de credibilidade Bayesianos com grande precisão são facilmente obtidos das amostras geradas de Gibbs para a distribuição a posteriori conjunta dos parâmetros.

O uso de métodos de simulação MCMC torna viável o desenvolvimento Bayesiano.

# Apêndice A

## O Método de Aproximação de Laplace para Integrais

Um dos métodos mais utilizados em inferência bayesiana aproximada é o Método de Laplace para aproximação de integrais quando não conseguimos encontrar soluções analíticas para as densidades a posteriori marginais (ver por exemplo, Tierney e Kadane, 1986).

Supor que estamos interessados em resolver a integral em  $\mu \in \mathbb{R}$  dada por,

$$\int f(\mu) e^{-nh(\mu)} d\mu. \quad (\text{A.1})$$

Se  $\hat{\mu}$  é o valor que maximiza  $-nh(\mu)$  em (A.1) e  $f(\mu)$  é uma função monótona positiva e  $\sigma = \{nh''(\mu)\}^{-\frac{1}{2}}$ , então o método de aproximação de Laplace é dado por:  $\int f(\mu) e^{-nh(\mu)} d\mu \approx \sqrt{2\pi} f(\hat{\mu}) e^{-nh(\hat{\mu})}$ .

No caso multiparamétrico, com  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , a aproximação de Laplace para (A.1) é dada por,

$$\int f(\mu) e^{-nh(\mu)} d\mu \approx (2\pi)^{m/2} \left| nD^2h(\hat{\mu}) \right|^{1/2} f(\hat{\mu}) e^{-nh(\hat{\mu})},$$

onde  $\hat{\mu}$  maximiza  $-nh(\hat{\mu})$ ,  $D^2h(\hat{\mu})$  é a matriz Hessiana calculada em  $\hat{\mu}$ .

# Apêndice B

## Verificação de Convergência

Uma forma de verificar a convergência dos algoritmos Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings é gerar várias cadeias com diferentes condições iniciais para se certificar que se trata de uma Cadeia de Markov irredutível, ou seja, que existe uma distribuição de equilíbrio. Existem vários critérios para verificar a convergência dos algoritmos.

Uma das propostas iniciais de verificação da convergência foi feita informalmente por Gelfand e Smith (1990). Eles sugeriram técnicas gráficas para a verificação da convergência do seguinte modo:

Gere um grande número de iterações  $N$  em  $m$  cadeias paralelas. Com a amostra gerada, construa um histograma. O mesmo procedimento é repetido com  $N + k$  iterações e se não houver diferença perceptível entre os gráficos, então pode-se concluir pela convergência das cadeias.

Gelman e Rubin (1992) propuseram um método formal para verificação da convergência. Esse método sugere a convergência da cadeia apenas quando a variância entre as cadeias for bem menor que a variância dentro de cada cadeia ou, quando os histogramas das cadeias misturadas são similares aos de cada uma delas isoladamente.

Esse método pode ser descrito da seguinte forma:

Considerando  $m$  cadeias paralelas em uma função real  $t(\theta)$ , tem-se  $m$  trajetórias  $\{t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, \dots, t_i^{(n)}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$  para cada  $t$ . Portanto, podemos obter a variância entre as cadeias  $B$  e a variância dentro das cadeias  $W$ , dadas por:

$$B = \frac{n}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{t}_i - \bar{t})^2 \text{ e } W = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (t_i^{(j)} - \bar{t}_i),$$

no qual  $\bar{t}_i$  é a média das observações da cadeia  $i$  e  $\bar{t}$  é a média dessas médias,  $i = 1, \dots, m$ .

Sob convergência, todos m.n valores são gerados da posteriori e a variância  $t$  pode ser estimada de forma não viciada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}(W) + \frac{1}{n}(B)$$

e a média desejada pode ser estimada por  $\hat{\mu} = \hat{t}$ .

Um indicador da convergência é dado pela redução potencial estimada de escala  $R = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{W}}$ . Assim, à medida que  $n$  cresce,  $R$  convergirá para 1. Logo,  $R$  pode ser usado como indicador da convergência pela avaliação de sua proximidade a 1, e então, admitindo que a convergência ocorreu, admitimos também que as amostras das iterações selecionadas são independentes e identicamente distribuídas sobre a distribuição desejada.



# Apêndice C

## Alguns Programas

Neste apêndice, apresentamos alguns programas computacionais desenvolvidos no *software* WinBugs, utilizados para obter amostras da distribuição de interesse através dos algoritmos Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings.

### C.1 Programa 1

O programa 1 é referente ao exemplo de aplicação 1 do Modelo Lei da Potência Inversa introduzido no capítulo 3 com dados completos.

```
model
{
for (i in 1:M) {
for (j in 1:N) {
t[i, j] ~ dexp(mu[i,j])
log(mu[i,j]) <- -log(alpha) + beta*log(V[i,j])
}
}
beta ~ dnorm(0.0,0.000001)
alpha ~ dgamma(328,4)
}
Data list(t= structure(Data = c(18,31,47,61,65,65,70,73,78,92,
12,19,34,43,52,60,65,67,78,85,15,24,36,37,42,43,46,57,58,65),
```

```

Dim=c(3,10)),
V=structure(Data=c(4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,10,10,10,
10,10,10,10,10,10,10,
20,20,20,20,20,20,20,20,20,20),Dim=c(3,10)),N=10,M=3)
Inits list(alpha=100,beta=0)
Inits list(alpha=200,beta=1).

```

## C.2 Programa 2

O programa 2 é referente ao exemplo de aplicação 3 do Modelo Lei da Potência Inversa introduzido no capítulo 3 com dados censurados (censuras do tipo II).

```

model
{
  for(i in 1:M){
    for(j in 1:N){
      t[i,j] ~ dweib(1, mu[i,j]) I(tcen[i,j])
      log(mu[i, j])<- -log(alpha) + beta*log(V[i,j])
    }
  }
  beta ~ dnorm(0.0,0.00001)
  alpha ~ dgamma(1500,3)
}
list(t=structure(Data=c(6,8,10,12,14,NA,NA,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,4,5,5,6,8,8,9,14,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
2,3,3,5,6,7,7,8,8,9,10,17,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,3,3,4,5,6,6,8,
9,10,10,12,12,13,14,14,14,15,24,NA,NA,NA,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,2,3,4,5,5,8,8,8,9,10,12,13,14,

```

```

14,15,18,18,18,19,20,20,27,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA),Dim=c(5,30)),
tcen=structure(Data=c(0,0,0,0,0,14,14,14,14,14,14,14,14,
14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,
14,0,0,0,0,0,0,0,14,14,14,14,14,14,14,14,
14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,17,17,17,17,17,17,17,17,17,17,
17,17,17,17,17,17,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,27,27,27,27,27,
27,27,27),Dim=c(5,30)),V=structure(Data=c(10,10,10,
10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,
10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,20,20,20,20,20,20,
20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,
20,20,20,20,20,20,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,
30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,
30,30,30,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,
40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,50,
50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,
50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50),
Dim=c(5,30)),N=30,M=5).

```

### C.3 Programa 3

O programa 3 é referente ao exemplo de aplicação do Modelo de Eyring introduzido no capítulo 4.

```

model
{
  for(i in 1:M){
    for(j in 1:N){
      t[i,j] ~ dweib(p, lambda[i,j])I(tcen[i,j])
    }
  }
}

```

```
log(mu[i, j])<-log(V[i,j])+log(exp(alpha-beta/V[i,j]))
log(lambda[i,j])<-log(pow(mu[i,j],p))
}
}
p ~ dgamma(2,1)
beta ~ dnorm(0.0,0.0001)
alpha ~ dnorm(0.0,0.0001)
}
list(t=structure(Data=c(178,301,574,920,1007,NA,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
101,115,147,609,705,767,NA,NA,NA,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
89,96,106,246,315,347,622,NA,NA,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
95,98,131,221,236,283,377,561,637,NA,NA,
NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
24,62,245,314,332,338,386,401,491,
553,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
73,96,132,177,211,345,361,378,399,416,560,
624,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
13,16,52,148,229,255,288,317,359,560,
581,621,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
17,21,32,52,68,87,112,197,366,384,395,
490,611,662,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
10,13,83,87,129,135,196,244,250,262,
264,293,318,624,705,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,
11,39,53,90,96,115,153,228,259,323,356,388,
411,597,761,763,823,969,NA,NA),Dim=c(10,20)),
t.cen=structure(Data=c(0,0,0,0,0,1007,1007,1007,1007,
1007,1007,1007,1007,1007,1007,1007,1007,1007,1007,1007,1007,1007,
0,0,0,0,0,767,767,767,767,767,767,767,767,767,767,767,767,767,767,767,
```

```

0,0,0,0,0,0,0,622,622,622,622,622,622,622,622,622,622,622,
0,0,0,0,0,0,0,0,637,637,637,637,637,637,637,637,637,637,
0,0,0,0,0,0,0,0,553,553,553,553,553,553,553,553,553,553,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,624,624,624,624,624,624,624,624,624,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,621,621,621,621,621,621,621,621,621,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,662,662,662,662,662,662,662,662,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,705,705,705,705,705,705,705,705,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,969,969),Dim=c(10,20)),
V=structure(Data=c(10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,
10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,15,15,15,15,15,
15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,
20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,20,
20,20,20,20,20,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,
25,25,25,25,25,25,25,25,25,30,30,30,30,30,30,
30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,
35,35,35,35,35,35,35,35,35,35,35,35,35,35,35,
35,35,35,35,35,35,40,40,40,40,40,40,40,40,40,
40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,45,45,45,45,
45,45,45,45,45,45,45,45,45,45,45,45,45,45,45,
50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,
50,50,50,50,50,50,55,55,55,55,55,55,55,55,55,55,
55,55,55,55,55,55,55,55,55),Dim=c(10,20)),N=20,M=10).

```

## C.4 Programa 4

O programa 4 é referente ao exemplo de aplicação 1 do Modelo de Arrhenius introduzido no capítulo 5 com dados censurados (censuras do tipo II) considerando a distribuição Exponencial para os tempos de vida.

```

model
{
  for(i in 1:M){

```



# Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M.; Stegun. I. A. (1965). *Handbook of Mathematica functions*. New York: Dover.
- [2] Achcar, J. A. (1984). Densidades preditivas em análise de sobrevivência. In: *VI Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, Rio de Janeiro. Atas Rio de Janeiro, IM/UFRJ, pp. 1-7.
- [3] Achcar, J.A.(1990). A Bayesian Approach to Reparametrization of the Exponential Distribution with Type I Censored Data. *Atas do IX Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística - São Paulo, S.P.*
- [4] Achcar, J.A. (1991). Use of Predictive Densities in Quality Control with Accelerated Life Tests Assuming a Power Rule Model and an Exponential Distribution. *Estatística*, 8 (2): 57-64.
- [5] Achcar, J. A. (1993). Approximate Bayesian methods: some applications in life testing problems. *Revista de Probabilidade e Estatística*, v 7. pp. 135-158.
- [6] Achcar, J. A.; Bolfarine, H. (1988). Predictive Densities in Survival Analysis with a Generalized Gamma Regression Model. *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, 2, pp. 23-31.
- [7] Achcar, J.A. ; Bolfarine, H. (1989). Constant hazard against a change-point alternative: a Bayesian approach with censored data. *Communications in Statistics; Theory and Methods*, 18, 3801-3819.

- [8] Achcar, J. A.; Dias, T. C. M. (1990). Accelerated life tests with an exponential distribution: a Bayesian approach with the power rule model and type II censored data. *Notas do ICMSC-USP*.
- [9] Achcar, J. A.; Louzada-Neto, F. (1991). Accelerated Life Tests with one Stress Variable: A Bayesian Analysis of The Eyring Modelo. *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, 5, pp. 169-179.
- [10] Achcar, J.A.; Louzada-Neto, F. (1992). A Bayesian Approach for Accelerated Life Tests Considering the Weibull Distribution. *Computational Statistics*, 7, 355-368.
- [11] Achcar, J.A.; Louzada-Neto, F. (1993). Uso de Dados Acelerados no Controle da Qualidade de Produtos Industriais Assumindo uma Distribuição Exponencial e um Modelo Estresse-Resposta Geral. *Estatística*, 45, 144, 145. pp. 81-106.
- [12] Achcar, J.A.; Pereira, G. A. (1998). Use of mixture of exponential power distributions for intervals-censored survival data in presence of covariates. *Notas do ICMSC-USP*.
- [13] Aitchinson, J.; Dunsmore, I.R. (1975). *Statistical Prediction Analysis*. Cambridge University Press.
- [14] Barbosa, E. P.; Louzada-Neto, F. (1994). Analysis of Accelerated Life Tests Via Generalized Linear Modelling in the Case of a Weibull Failure Distribution and Stress-Response Relationship. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, vol. 23, 2, pp. 455-465.
- [15] Borges, W. S.; Colosimo, E. A.; Freitas, M. A. (1996). *Métodos Estatísticos e Melhoria da Qualidade: Construindo Confiabilidade em Produtos - 12º SINAPE - Caxambu*.
- [16] Box, G.E.P.; Tiao, G.C. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Addison-Wesley - New York.
- [17] Cancho, G. V.; Bolfarine, H. (2001). Modelling the presence of immunes by using the exponentiated-Weibull model. *Journal Applied Statistical Science*, 28, pp. 659-671.



- [18] Cancho, G. V.; Bolfarine, H.; Achcar, J. A. (1999). A Bayesian analysis for the Exponentiated-Weibull distribution. *Journal Applied Statistical Science*, 8, pp. 227-242.
- [19] Casella, G.; George, E. I. (1992). Explaining the Gibbs Sampler. *The American Statistician*, 46, 3, pp. 167-174.
- [20] Chib, S.; Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hasting algorithm. *The American Statistician*, 49, pp. 327-335.
- [21] Cox, D. R.; Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*, Chapman and Hall.
- [22] Dias, T. C. M. (1992). Testes Acelerados Assumindo um Modelo de Potência Inversa e Dados com Censuras do Tipo II - ICMSC-USP - Tese de Mestrado.
- [23] Gamerman, D. (1996). *Simulação estocástica via Cadeia de Markov*. XII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, Associação Brasileira de Estatística.
- [24] Gamerman, D.; Migon, H. S. (1993). *Inferência Estatística: Abordagem Integrada* - UFRJ.
- [25] Gelfand, A.E.; Smith, A.F.M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85, pp. 398-409.
- [26] Gelman, A.; Rubin, D.B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7, 457-511.
- [27] Kalbfleisch, J.D.; Prentice, R. L. (1980). *The statistical analysis of failure time data*, New York: John Wiley & Sons.
- [28] Kalbfleisch, J. G. (1985) *Probability and statistical inference*. New York: Springer-Verlag, v. 2.
- [29] Kaplan, E. L.; Meier, P. (1958). Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *American Statistical Association Journal*, v.53, n. 2, pp. 457-481.

- [30] Klein, J.P.; Basu, A. P. (1981). Weibull Accelerated Life Tests When There are Competing Causes of Failure *Communications in Statistics; Theory and Methods*, A10 (20), pp. 2073-2100.
- [31] Klein, J.P. ; Basu, A. P. (1982). Accelerated Life Tests Under Competing Weibull Causes of Failure. *Communications in Statistics; Theory and Methods*, 11 (20), pp. 2271-2286.
- [32] Lawless, J.F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons - New York.
- [33] Lee, E. (1980). *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Belmont: Lifetime Learning.
- [34] Louzada-Neto, F. (1991). Testes de Sobrevivência Acelerados: Uma análise Bayesiana do Modelo de Eyring - ICMSC-USP - Tese de Mestrado.
- [35] Louzada-Neto, F.; Rodrigues, J.;Bolfarine, H. (1992). Comparação de Dois Modelos Exponenciais com Dados Acelerados: Uma Abordagem Bayesiana. *Notas do ICMSC-USP*.
- [36] Mann, N.R; Schaffer, R.E.;Singpurwalla, N.R. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Test Data*. John Wiley & Sons - New York.
- [37] Mattos, N. M. C.; Migon, H. S. (2001). A Bayesian Analysis of Reliability in Accelerated Life Tests Using Gibbs Sampler. *Computational Statistics*, 16, pp. 299-312.
- [38] Miller, R. G. (1981). *Survival analysis*, John Wiley & Sons.
- [39] Montgomery, D.C. (1985). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons - New York.
- [40] Mood, A. M.; Graybill, F. A.; Boes, D. C. (1974). *Introduction to the theory of statistics*. 3rd ed. New York: Mcgraw-Hill, 564p.
- [41] Mudholkar, G. S.; Srivastava, D. K.; Friemer, M. (1995). The exponentiated Weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, 37, 436-445.

- [42] Mudholkar G. S.; Hutson A. D. (1996). The exponentiated Weibull distribution. *Communications in Statistics; Theory and Methods*, 25, pp. 59-83.
- [43] Nadarajah, S.; Gupta A. K. (2005). On the moments of the exponentiated Weibull distribution. *Communications in Statistics; Theory and Methods*, 34, pp. 253-256.
- [44] Nassar, M. M.; Eissa, F. H. (2003). On the exponentiated Weibull distribution. *Communications in Statistics; Theory and Methods*, 32, pp. 1317-1336.
- [45] Naylor, J. C.; Smith, A. F. M. (1982) Applications of a method for the efficient computation of posterior distributions. *Applied Statistics*, 31, pp. 214-225.
- [46] Nelson, W. (1972) Graphical analysis of accelerated life test data with inverse power law model. *IEEE Transactions on Reliability*. v. 21, pp.2-11.
- [47] Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*. John Wiley & Sons.
- [48] Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing - Statistical Models, Tests Plans and Data Analysis*. John Wiley & Sons - New York.
- [49] Paulino, C.D.; Amaral Turkman, M. A.; Murteira, B. (2003). *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa.
- [50] Press, S.J. (1989). *Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- [51] Raftery, A. E.; Lewis, S. M. (1992). How many iterations in the Gibbs sampler? *In Bayesian Statistics 4* (J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid e A. F. M. Smith, eds.), pp. 763-773.
- [52] Ripley, B. D. (1987). *Stochastic simulation*. John Wiley, New York.
- [53] Roberts, G.O.; Smith, A.F.M. (1993). Bayesian methods via the Gibbs Sampler and related Markov Chain Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, Cambridge, v.55,n.1, 3-23.
- [54] Rodrigues, J.; Achcar, J. A.; Louzada-Neto, F. (1990). A Bayesian analysis of the accelerated tests via the orthogonal parameters. *Notas do ICMSC-USP*.

- [55] Rodrigues, J. (1991). Bayes predictive likelihood function for the accelerated life. *Notas do ICMSC-USP*.
- [56] Rodrigues, J.; Louzada-Neto, F. (1992). Reparametrização ortogonal em testes de sobrevivência acelerados com o modelo de potência. *Revista de Matemática e Estatística*, v.10, pp. 97-108.
- [57] Rodrigues, J.; Bolfarine,H.; Neto, F.L. (1993). Comparing several accelerated life models. *Communications in Statistics; Theory and Methods*, 22(8), 2297-2308.
- [58] Rodrigues, J.; Louzada-Neto, F. (1995). Uma introdução à inspeção da Qualidade de produtos industriais usando dados acelerados e Opinião de Especialista. *Revista de Matemática e Estatística*, v. 13, pp. 9-28.
- [59] Ross, S. M.(1996). *Stochastic simulation*. John Wiley & Sons, Inc.
- [60] Spiegelhalter, D.J.; Thomas, A.; Best, N.G. (1999). WinBugs: Bayesian inference using Gibbs sampling. Cambridge: MRC Biostatistics Unit.
- [61] Spiegelhalter, D.J.; Best, N. G.; Carlin, B. P.; van der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Sociation, B*, 64, pp. 583-639.
- [62] Sprott, D. A. (1973). Normal likelihoods and their relation to large sample theory of estimation. *Biometrika*, 60, 3, pp. 457-465.
- [63] Sprott, D. A. (1980). Maximum likelihood in small samples: estimation in the presence of nuisance parameters. *Biometrika*, v.67, n.3, pp. 515-523.
- [64] Tanner, L.; Wong, W. H. (1987). The calculation of posterior distributions by data augmentation (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, 82, pp. 528-550.
- [65] Tierney, L.; Kadane, J. B. (1986). Accurate Approximations for Posteriori Moments and Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, 81, pp. 82-86.

- [66] Tierney, L.; Kass, R. E.; Kadane, J. B. (1989). Approximate marginal densities for nonlinear functions. *Biometrika*, v. 76, n. 3, pp 425-433. Corrections (1991) 78, 233-234.