

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CONSTRUÇÃO CIVIL**

**“UMA NOVA ABORDAGEM NA UTILIZAÇÃO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS  
NO ENSINO DE CONTEÚDOS DA DISCIPLINA ESTRUTURAS DE CONCRETO EM  
CURSOS DE ENGENHARIA CIVIL”**

**ANTONIO DE FARIA**

**SÃO CARLOS**

**2009**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CONSTRUÇÃO CIVIL**

**“UMA NOVA ABORDAGEM NA UTILIZAÇÃO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS  
NO ENSINO DE CONTEÚDOS DA DISCIPLINA ESTRUTURAS DE CONCRETO EM  
CURSOS DE ENGENHARIA CIVIL”**

**ANTONIO DE FARIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Construção Civil da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Construção Civil.

**Área de Concentração:** Sistemas Construtivos de Edificações

**Orientador:** Prof. Dr. Roberto Chust de Carvalho

**São Carlos**  
**2009**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

F224un

Faria, Antonio de.

Uma nova abordagem na utilização de ferramentas computacionais no ensino de conteúdos da disciplina estruturas de concreto em cursos de Engenharia Civil / Antonio de Faria. -- São Carlos : UFSCar, 2009.  
171 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Concreto. 2. Estruturas de concreto. 3. Ferramenta computacional. 4. Ensino. I. Título.

CDD: 620.136 (20ª)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Engenharia Civil

**Programa de Pós-Graduação em Construção Civil**

Via Washington Luís, Km 235 - CEP: 13.565-905 - São Carlos/SP/Brasil

Fone:(16) 3351-8262

Site: [www.ppgciv.ufscar.br](http://www.ppgciv.ufscar.br)

Email: [ppgciv@power.ufscar.br](mailto:ppgciv@power.ufscar.br)

**“UMA NOVA ABORDAGEM NA UTILIZAÇÃO DE FERRAMENTAS  
COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE CONTEÚDOS DA DISCIPLINA  
“ESTRUTURAS DE CONCRETO” EM CURSOS DE ENGENHARIA CIVIL”**

**ANTONIO DE FARIA**

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 17 de setembro de 2009

Banca Examinadora constituída pelos membros:

---

**Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho**  
Departamento de Engenharia Civil / PPGCIV / UFSCar  
Orientador

---

**Prof. Dr. Luiz Fernando Martha**  
Departamento de Engenharia Civil / Pontificia Universidade Católica / RJ  
Examinador Externo

---

**Prof. Dr. Alex Sander Clemente de Souza**  
Coordenador do PPGCIV/UFSCar  
Examinador interno

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, por permitir a realização deste trabalho.

À memória de meus pais que me ensinaram os primeiros passos e me incentivaram à buscar sempre um futuro melhor, baseado no processo educacional.

À Angela, Lucas e Thais, pela compreensão no decorrer do período de realização deste programa de Mestrado.

Ao Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho pela dedicação no trabalho de orientação.

À Faculdade de Engenharia de Passos - FEP, Instituto de Ensino e Pesquisa de Divinópolis - INESP e ao Centro Universitário de Varginha – UNIS-MG, pela oportunidade de crescimento profissional.

À Fundação de Ensino e Pesquisa do Sul de Minas - FEPESMIG, pelo apoio incondicional a minha participação neste programa de Mestrado.

## RESUMO

FARIA, Antônio. Uma nova abordagem na utilização de ferramenta computacionais no ensino de conteúdos da disciplina “Estruturas de Concreto” nos cursos de Engenharia Civil, 171 p. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

Neste trabalho, analisam-se duas ferramentas computacionais GPLAN (Grelhas Planas) e FTOOL (Two-Dimensional Frame Analysis Tool), e como estas podem ser utilizadas no ensino de conteúdos da disciplina “Estruturas de Concreto”, em cursos de graduação em Engenharia Civil. O estudo proposto está subdividido em dois tópicos, sendo o primeiro a consideração de grelhas planas (interação laje/viga), na análise de pavimentos de edificações para a determinação de esforços e deslocamentos nas mesmas, em contraponto ao ensino tradicional que consiste na consideração dos elementos de forma isolada, com o estudo das lajes por meio da teoria de placas. O segundo tópico se refere ao estudo de pórtico plano (interação viga/pilar), principalmente para a consideração da ação lateral do vento em estruturas de edificações e a obtenção de esforços e deslocamentos na mesma visando a análise do parâmetro de instabilidade  $\alpha$  e do coeficiente de majoração das ações verticais  $\gamma_z$ , previstos pela NBR 6118:2003. Assim, apresenta-se de forma didática, como a utilização de tais ferramentas pode contribuir para a formação do engenheiro civil na área de estruturas de concreto, mostrando por meio de alguns exemplos a riqueza de detalhes e conceitos que podem ser obtidos com estas ferramentas. Por último mostra-se também que para realizar verificações respeitando as prescrições normativas recentes torna-se indispensável o uso de ferramentas computacionais em detrimento dos métodos manuais.

Palavras-chaves: Estruturas de Concreto; Grelha Plana, Pórtico Plano, Instabilidade, Ferramentas Computacionais Ensino.

## ABSTRACT

FARIA, Antonio. A new approach in the use of computational tools in teaching content of the discipline "Concrete Structures" in the Civil Engineering courses, 171 p. Master Dissertation. Federal University of São Carlos, São Carlos, 2009.

This presentation analyzes the two computational tools, GPLAN (Plan Grills) and FTOOL (Two-Dimensional Frame Analysis Tool), and how they can be used in the content of "Concrete Structures" discipline, in Civil Engineering Graduation. The considered study is divided in two topics, being the first, the plan grills consideration (interaction plate/ beam) in the analysis of buildings floors to determine efforts and displacement, in comparison with the traditional teaching that considerate the elements in a isolated form, with the beams study through the theory of plates. The second topic refers to the porch plan consideration (interaction beam / pillar) for the lateral wind action consideration on buildings structures, and its efforts and displacements in order to analyze the instability  $\alpha$  parameter and the increase coefficient of the vertical actions  $\gamma_z$ , provided by NBR 6118:2003. Thus, this study presents, in a didactic form, how the using of such tools can contribute to a civil engineer graduation regarding concrete structures, indicating through some examples, a variety of details and concepts that can be obtained through these tools. Finally, it is shown also that, to conduct checks according to the recent regulatory requirements, makes essential the use of computational tools, instead of manual methods.

Keywords: Concrete structures; Plan Grills, Plan Porch, Instability, Computational Tools and Education.

## SUMÁRIO

RESUMO .....	i
ABSTRACT .....	ii
LISTA DE FIGURAS.....	vi
LISTA DE SIMBOLOS E ABREVIACOES .....	xii
LISTA DE SIMBOLOS E ABREVIACOES .....	xii
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. Justificativa.....	2
1.2. Objetivo .....	6
1.3. Metodologia.....	7
1.4. Organizao do Trabalho.....	8
<b>2. ANÁLISE ESTRUTURAL – Modelos estruturais de barras prismáticas .....</b>	<b>9</b>
2.1. Projeto Estrutural.....	9
2.1.1. Análise Estrutural .....	11
2.2. A concepção de Global e Local .....	17
2.3. Consideração do pavimento isolado, o uso da grelha equivalente .....	21
2.4. Consideração de pórticos planos para determinação dos efeitos de ação lateral de vento.....	26
2.4.1. Associação de Pórticos .....	28
2.5. Estabilidade Global em Estruturas de Concreto .....	30
2.5.1. Parâmetro de instabilidade $\alpha$ - (NBR 6118:2003 – Item 15.5.1).....	34
2.5.2. Coeficiente $\gamma_z$ – (NBR 6118:2003 – Item 15.5.3).....	35
<b>3. Análise de Ferramentas que podem ser UTILIZADAS No ensino da disciplina ESTRUTURAS DE Concreto armado.....</b>	<b>38</b>
3.1. Fatores que levam a escolha de ferramentas computacionais.....	38
3.2. Análise Técnica da Ferramenta GPlan .....	43
3.3. Análise Técnica da Ferramenta FTOOL.....	49



<b>4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO COM PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE PARA PAVIMENTOS .....</b>	<b>54</b>
4.1. Análise de Laje Isolada.....	54
4.1.1. Resolução por Grelha Equivalente: .....	55
4.1.2. Resolução Processo manual – (Teoria das Placas) .....	57
4.2. Análise de lajes contíguas com contorno vertical indeslocável.....	63
4.2.1. Resolução por Grelha Equivalente: .....	63
4.2.2. Resolução Processo manual – (Teoria das Placas) .....	70
4.3. Análise de lajes contíguas com contorno vertical deslocável.....	76
4.3.1. Resolução por Grelha Equivalente: .....	76
4.3.1. Resolução Processo manual – (Teoria das Placas) .....	87
<b>5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO COM PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE PARA PAVIMENTOS INTERAÇÃO VIGA/PILAR: ESTUDO DA AÇÃO DE VENTO E INSTABILIDADE GLOBAL .....</b>	<b>95</b>
5.1. Introdução.....	95
5.2. Exemplo 5-A – Efeitos de Segunda Ordem em Colunas.....	99
5.3. Exemplo 5-B: Cálculo de Pilar Equivalente.....	105
5.3.1. Dois Pavimentos .....	105
5.3.2. Cinco Pavimentos .....	108
5.4. Exemplo 5-C – Ação Lateral do Vento em Edificações.....	111
5.4.1. Considerando edificação com 02 pavimentos.....	112
5.4.2. Considerando edificação com 05 pavimentos.....	115
5.5. Exemplo 5-D: Esforços Devido a Ação do Vento em Pórticos Associados ....	119
5.5.1. Considerando a edificação com 02 pavimentos:.....	119
5.6. Exemplo 5-E – Determinação do Parâmetro de Instabilidade $\alpha$ .....	122
5.6.1. Edificação com 02 pavimentos .....	125
5.6.2. Edificação com 05 pavimentos: .....	126
5.7. Exemplo 5-F - Verificação da estabilidade Global - Coeficiente $\gamma_z$ .....	127
5.7.1. Edificação com 02 pavimentos – Moldado in-loco; .....	128

5.7.2. Edificação com 05 pavimentos – Moldado in-loco; .....	132
5.7.3. Edificação com 05 pavimentos (ligação viga-pilar rotulada) .....	137
<b>6. COMENTÁRIOS FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>144</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>147</b>
ANEXO I – Listagem ARQUIVOS DE ENTRADA E SAIDA exemplos grelhas- GPLAN .....	<b>150</b>
ANEXO 2 – COEFICIENTES DE FLECHA, MOMENTO FLETOR E REAÇÃO DE APOIO EM PLACAS .....	<b>164</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1- Fluxograma das Etapas do Projeto Estrutural.....	10
Figura 2-2 - Estrutura básica de uma edificação(adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO - 2007) .....	14
Figura 2-3- Subdivisão da estrutura da edificação (adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO - 2007) .....	15
Figura 2-4 - Esquema estrutural de prédio alto 1) perspectiva esquemática; 2) estrutura verticalmente indeformada; 3) edificação sujeita a instabilidade global; 4) instabilidade local de pilares centrais inferiores- (adaptado em Carvalho e Miranda - 2009) .....	19
2-5 - Perspectiva esquemática de uma estrutura de concreto com laje maciça, viga, pilares blocos e estacas (adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO -2007) .....	20
Figura 2-6- Perspectiva esquemática da estrutura de concreto da figura 4 calculada agora de uma só vez com uma grelha equivalente e pórtico tridimensional e subdividida em grelha e pórtico espacial - (adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO - 2007) .....	21
Figura 2-7- Planta de forma de laje maciça com vigas de bordo .....	22
Figura 2-8- Pavimento com forma quadrada - laje nervurada em uma direção.....	22
Figura 2-9 - Seções transversais de lajes pré-moldadas: a) tipo $\pi$ ; b) alveolar; c) tipo trilho; d) tipo treliça; e) amadura da laje tipo treliça (adaptada de CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO - 2007) .....	23
Figura 2-10 - Seção Transversal de Laje com vigotas protendidas (figura 3.1.1b da NBR 14859) .....	23
Figura 2-11- Perspectiva esquemática de um painel de laje sem vigas .....	23
Figura 2-12- Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje maciça e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem.....	24
Figura 2-13 Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje nervurada bidirecional e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem.....	25
Figura 2-14- Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje nervurada unidirecional e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem.....	25

Figura 2-15-Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje nervurada unidirecional e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem considerando também a capa funcionando como elemento trabalhando à flexão .....	26
Figura 2-16 - Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje maciça e vigas em que se considera o sistema de pórtico plano para representar o efeito da viga e pilares.....	27
Figura 2-17- Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje maciça e vigas em que se considera o sistema clássico de viga contínua.....	27
Figura 2-18- Pórtico de uma estrutura sob ações verticais e com as mesmas verticais atuando junto com ações horizontais de vento .....	28
Figura 2-19- Distribuição da ação do vento em pórticos considerando a laje como septo rígido. À esquerda e mostrado corte da estrutura e a direita a planta .....	29
Figura 2-20- Pórticos planos associados em série para resistirem à ação do vento .....	29
Figura 2-21- Estrutura submetida à ação de carga vertical e às ações laterais de vento (v) e os correspondentes efeitos de segunda ordem.....	31
Figura 2-22- Analogia entre um edifício alto e uma coluna engastada na base (extraída de Pinto -2002).....	32
Figura 2-23- Produto de rigidez equivalente para uma estrutura qualquer – (extraída de Pinto - 2002) .....	33
Figura 3-1- Perspectiva esquemática da estrutura de concreto calculada agora de uma só vez com uma grelha equivalente e pórtico tridimensional e subdividida em grelha e pórtico espacial. ....	40
Figura 3-2 – Planta Esquemática do pavimento-tipo .....	41
Figura 3-3– Corte Esquemático para estrutura de 2 e 5 pavimentos .....	42
Figura 3-4– Planta do pavimento a ser analisado .....	44
Figura 3-5- – Esquema dos nós da grelha do pavimento da figura 3-3.....	45
Figura 3-6 – Esquema das barras da grelha equivalente do pavimento da figura 3-3.....	45
Figura 3-7– Arquivo de entrada de dados típico para a grelha da figura 3.4 .....	46
Figura 3-8 - Estrutura do pavimento da figura 3.4 sem pilar intermediário na viga de 10 m. ....	48

Figura 3-9- Estrutura do pavimento da figura 3.4 com pilar intermediário na viga de 10 m .....	49
Figura 3-10- Tela do programa FTOOL – Versão 2.12 .....	51
Figura 3-11- Representação do diagrama de Momento Fletor da estrutura.....	52
Figura 3-12- Representação da estrutura deformada devido a ação lateral.....	53
Figura 4-1 – Esquema estrutural analisado no exemplo numérico 1. ....	55
Figura 4-2 Configuração deformada da placa apoiada nos quatro lados .....	57
Figura 4-3 – Condições de vinculação de placas de laje isoladas.....	58
Figura 4-4 – Esquema de vinculação da laje do exemplo considerado. ....	59
Figura 4-5 – Planta de formas de um pavimento em Concreto Armado Apoiada em pilares.....	64
Figura 4-6 – Esquema dos nós da grelha analisada .....	65
Figura 4-7– Esquema das barras da grelha analisada.....	65
Figura 4-8 – Esquema dos elementos de apoio da grelha analisada .....	66
Figura 4-9 - Configuração deformada das placas com contorno externo e intermediário indeslocável .....	67
Figura 4-10– Diagrama de Momento Fletor na direção X da placa analisada.....	68
Figura 4-11– Diagrama de Momento Fletor na direção Y da placa analisada.....	68
Figura 4-12– Reação de Apoio da Placa sobre a Viga Horizontal Superior.....	69
Figura 4-13– Reação de Apoio da Placa sobre a Viga Vertical da Extremidade.....	69
Figura 4-14– Reação de Apoio da Placa sobre a Viga Vertical Intermediária.....	70
Figura 4-15 – Condição de vinculação das lajes da estrutura que está sendo analisada.	71
Figura 4-16 – Planta de formas de um pavimento em concreto armado.....	77
Figura 4-17 – Esquema dos Nós da grelha analisada.....	78
Figura 4-18 – Esquema dos Elementos da grelha analisada .....	78
Figura 4-19 – Esquema dos Elementos de apoio da grelha analisada.....	79
Figura 4-20 – Esquema das Vigas analisada.....	79
Figura 4-21– Deslocamento Vertical da Placa analisada.....	80
Figura 4-22– Diagrama de Momento Fletor da Faixa Central da Plana na Direção Horizontal .....	81

Figura 4-23– Diagrama de Momento Fletor da Faixa Central da Plana na Direção Vertical.....	82
Figura 4-24– Reação de Apoio da Placa Sobre a Viga Horizontal Superior .....	82
Figura 4-25– Reação de Apoio da Placa Sobre a Viga Vertical Esquerda .....	83
Figura 4-26– Reação de Apoio da Placa Sobre a Viga Vertical Intermediária.....	84
Figura 4-27– Diagrama de Momento Fletor da Viga Superior do Modelo.....	84
Figura 4-28– Diagrama de Momento Fletor da Viga Lateral Esquerda do Modelo .....	85
Figura 4-29– Diagrama de Momento Fletor da Viga Lateral Esquerda do Modelo .....	85
Figura 4-30 – Linha Elástica da Viga Superior do Modelo .....	86
Figura 4-31 – Linha Elástica da Viga Vertical – Lateral Esquerda.....	86
Figura 4-32 – Linha Elástica da Viga Vertical – Lateral Intermediária .....	86
Figura 4-33– Esquema Estático e Carregamento da Viga Horizontal Superior.....	89
Figura 4-34– Diagrama de Momento Fletor da Viga Horizontal Superior.....	89
Figura 4-35– Linha Elástica da Viga Horizontal Superior.....	90
Figura 4-36– Esquema Estático e Carregamento da Viga Vertical Esquerda.....	90
Figura 4-37– Diagrama de Momento Fletor da Viga Vertical Esquerda .....	90
Figura 4-38– Linha Elástica da Viga Vertical Esquerda.....	91
Figura 4-39 – Esquema Estático e Carregamento da Viga Vertical Intermediária .....	91
Figura 4-40 – Diagrama de Momento Fletor da Viga Vertical Intermediária.....	91
Figura 4-41– Linha Elástica da Viga Vertical Intermediária .....	92
Figura 5-1 – Planta Esquemática .....	97
Figura 5-2 – Corte Esquemático 2 e 5 pavimentos .....	98
Figura 5-3 – Estrutura submetida à carga vertical e à ação lateral.....	99
Figura 5-4– Estrutura Carregada após cada incremento de deslocamento horizontal ...	103
Figura 5-5– Conjunto de estruturas apresentando a linha elástica após os incrementos sucessivos de deslocamento horizontal.....	103
Figura 5-6– Conjunto de estruturas apresentando o diagrama de Momento Fletor após os incrementos sucessivos de deslocamento horizontal .....	104
Figura 5-7– Modelo Estrutural com 02 Pavimentos .....	105
Figura 5-8– Modelo Estrutural com Carregamento Externo .....	106

Figura 5-9– Modelo Estrutural Deslocado.....	107
Figura 5-10– Modelo Estrutural com 5 pavimentos .....	108
Figura 5-11– Modelo Estrutural com Carregamento Externo .....	109
Figura 5-12– Modelo Estrutural com 05 Pavimentos deslocado .....	110
Figura 5-13– Carregamento da Estrutura.....	114
Figura 5-14– Diagrama de Momento Fletor da Estrutura.....	114
Figura 5-15– Carregamento da Estrutura.....	117
Figura 5-16– Diagrama de Momento Fletor da estrutura.....	118
Figura 5-17– Ação de vento nos pórticos (1,2), pórticos associados em série .....	120
Figura 5-18– Diagrama de Momentos Fletores devido ao vento no Pórticos 1,2 .....	121
Figura 5-19- Carregamento da Estrutura devido a ação lateral do vento.....	128
Figura 5-20– Estrutura deformada devido a ação do vento .....	128
Figura 5-21– Carregamento da Estrutura devido à ação lateral do vento .....	132
Figura 5-22– Estrutura deformada devido à ação lateral do vento .....	133
Figura 5-23– Estrutura carregada com a ação lateral do ao vento .....	138
Figura 5-24– Estrutura deformada devido à ação lateral do ao vento.....	139

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4-1- Valores e resultados do cálculo dos esforços, pelo processo da Teoria da Elasticidade.....	59
Tabela 4-2- Comparativo das flechas máximas nas lajes –(Grelha Equivalente/Carvalho) .....	61
Tabela 4-3 – Comparativo dos momentos fletores na direção X – (Grelha/Carvalho)....	62
Tabela 4-4 – Comparativo dos momentos fletores na direção Y – (Grelha Equivalente/Carvalho) .....	62
Tabela 4-5 – Coeficientes para determinação dos momentos fletores máximos (positivos e negativos) nas lajes da estrutura.....	72
Tabela 4-6 – Momentos fletores máximos (positivos e negativos) nas lajes da estrutura	72
Tabela 4-7 – Coeficientes de reações de apoio da laje sobre as vigas da estrutura .....	74
Tabela 4-8 – Reações de apoio da laje sobre as vigas da estrutura.....	75
Tabela 5-1- Incrementos de deslocamento na geometria da coluna.....	100
Tabela 5-2- Incrementos acumulados de deslocamento na geometria da coluna .....	101
Tabela 5-3- Cotas da estrutura deslocada, após o incremento do deslocamento anterior .....	101
Tabela 5-4- Valores dos deslocamentos horizontais.....	102
Tabela 5-5- Cargas verticais atuantes na edificação referente ao forro .....	123
Tabela 5-6- Cargas verticais atuantes na edificação referente ao pavimento tipo .....	124
Tabela 5-7- Cargas verticais atuantes na edificação considerando 02 pavimentos (forro + tipo).....	125
Tabela 5-8- Cargas verticais atuantes na edificação – 05 pavimentos (forro+4 pav. Tipo) .....	126
Tabela 5-9 - Determinação do Momento de Segunda Ordem .....	130
Tabela 5-10- Momento fletor de segunda ordem.....	131
Tabela 5-11 Determinação do Momento de Segunda Ordem.....	135
Tabela 5-12 - Determinação do Momento de Segunda Ordem .....	136
Tabela 5-13 - Determinação do Momento de Segunda Ordem .....	141
Tabela 5-14 - Determinação do Momento de Segunda Ordem .....	142



## LISTA DE SIMBOLOS E ABREVIACÕES

- a** – Flecha na região central da laje
- A<sub>c</sub>** – Área bruta da seção transversal
- b** – Largura da seção transversal ou parâmetro de correção da classe da edificação
- C<sub>a</sub>** – Coeficiente de arrasto
- e** – Espessura de parede ou de revestimento
- E<sub>c</sub>** – Módulo de elasticidade longitudinal secante do concreto
- F<sub>a</sub>** – Força de arrasto
- f<sub>ck</sub>** – Resistência característica do concreto
- F<sub>h</sub>** – Força horizontal no topo da coluna ou edificação
- F<sub>r</sub>** – Fator de rajada
- g<sub>1</sub>** – Peso próprio
- g<sub>2</sub>** – Sobrecarga permanente
- G<sub>c</sub>** – Módulo de elasticidade transversal do concreto
- h** – Altura da seção transversal
- H** – Altura total da edificação
- i** – numero do andar considerado;
- I<sub>c</sub>** – Momento de inércia da seção bruta à flexão
- I<sub>f</sub>** – Momento de inércia da seção bruta à flexão
- I<sub>t</sub>** – Momento de inércia da seção bruta à torção
- k<sub>x</sub>** – Coeficiente de distribuição da reação de apoio na direção x, no lado apoiado
- k<sub>x</sub>'** – Coeficiente de distribuição da reação de apoio na direção x, no lado engastado
- k<sub>y</sub>** – Coeficiente de distribuição da reação de apoio na direção y, no lado apoiado
- k<sub>y</sub>'** – Coeficiente de distribuição da reação de apoio na direção y, no lado engastado
- L** – Vão livre da coluna
- L<sub>1</sub>** – Dimensão da edificação
- L<sub>2</sub>** – Dimensão da edificação
- l<sub>x</sub>** – Dimensão da laje na direção x
- l<sub>y</sub>** – Dimensão da laje na direção y
- M<sub>1,tot,d</sub>** – é o momento de tombamento de cálculo

- $m_x$  – momento fletor no centro da placa, na direção x
- $m_{x'}$  – momento fletor no engaste, na direção x
- $m_y$  – momento fletor no centro da placa, na direção y
- $m_{y'}$  – momento fletor no engaste, na direção y
- $n$  – Número de níveis da edificação
- $N_k$  – Força normal característica
- $p$  – Carga total uniformemente distribuída ou concentrada ou parâmetro meteorológico
- $P_{ig}$  – Resultante vertical da carga permanente no andar i
- $P_{q1i}$  – Resultante vertical da carga acidental considerada principal no andar i
- $P_{q2i}$  – Resultante vertical da carga acidental considerada secundária no andar i
- $q$  – Sobrecarga de utilização
- $q_{\text{vento}}$  – Pressão de obstrução do vento
- $S_1$  – Coeficiente referente ao fator topográfico do terreno
- $S_2$  – Coeficiente referente a rugosidade do terreno
- $S_3$  – Coeficiente referente ao tipo e forma de utilização da edificação
- $V_0$  – Velocidade básica do vento
- $V_k$  – Velocidade característica do vento
- $v_x$  – Reação de apoio da laje na direção x, no lado apoiado
- $v_{x'}$  – Reação de apoio da laje na direção x, no lado engastado
- $v_y$  – Reação de apoio da laje na direção y, no lado apoiado
- $v_{y'}$  – Reação de apoio da laje na direção y, no lado engastado
- $z$  – Altura da edificação acima do terreno
- $\alpha$  – Coeficiente para determinação da flecha na região central da laje  
- Parâmetro de instabilidade
- $\Delta M_{\text{tot,d}}$  – Acréscimos de momentos devido ao deslocamento horizontal da estrutura
- $\delta_{hi}$  – deslocamento horizontal na direção considerada do andar i
- $\delta_{\text{pórtico}}$  – Deslocamento horizontal no topo da coluna ou edificação
- $\gamma_f$  – coeficiente de majoração das cargas no estado limite último;
- $\lambda$  – Relação entre  $I_y$  e  $I_x$
- $\mu_x$  – Coeficiente de distribuição do momento fletor positivo na direção x

$\mu_x$  – Coeficiente de distribuição do momento fletor negativo na direção x

$\mu_y$  – Coeficiente de distribuição do momento fletor positivo na direção y

$\mu_{y'}$  – Coeficiente de distribuição do momento fletor negativo na direção y

$\nu$  – Coeficiente de poisson

$\Psi_0$  – coeficiente redutor de carga para consideração de carga acidental secundária principal igual a 1

## 1. INTRODUÇÃO

O interesse pelo estudo das ferramentas computacionais desenvolvidas na área de estruturas de concreto armado e sua aplicabilidade na formação de engenheiros civis surgiu em decorrência da atuação do autor nos últimos 20 anos, como docente na área de Estruturas em cursos de Engenharia Civil, em instituições de ensino particulares do Estado de Minas Gerais. Esta experiência permitiu o acompanhamento do processo de evolução do ensino das disciplinas do curso, em particular aquelas voltadas para a área de estruturas e a configuração da informática como um imperativo para o desenvolvimento das mesmas. Também a atuação como profissional liberal em projetos de estruturas de Concreto Armado permitiu o acompanhamento das mudanças anteriormente mencionadas ao longo do tempo.

Na engenharia civil, a discussão dos modelos teóricos utilizados nas ferramentas computacionais e a validação dos mesmos, ou seja, a comprovação experimental de seu comportamento tornou-se premente, especialmente, no contexto dos cursos de formação de engenheiros civis, notadamente no que se refere aos processos de reestruturação curricular dos Cursos de graduação em Engenharia Civil das diferentes instituições de ensino do país, que vêm ocorrendo nos últimos anos.

Várias circunstâncias que configuram um novo contexto exigem o aprofundamento dessas discussões, como: a expansão dos cursos de graduação em engenharia civil no país; a necessidade de adequação dos cursos aos novos paradigmas tecnológicos; as novas exigências do mercado como, por exemplo, no que se refere à qualidade e durabilidade das estruturas de concreto e a expansão na utilização de estruturas Pré-Fabricadas, Estruturas em Concreto Protendido e a Alvenaria Estrutural.

Porém, apesar da nova configuração mencionada em relação à formação dos engenheiros, que produzem exigências específicas nos processos de reformulação curricular dos cursos de Engenharia Civil, de modo geral, parece não dirigir suas ênfases

para a utilização de ferramentas computacionais no ensino de disciplinas do Curso de Engenharia Civil.

No caso particular da Área de Estruturas, não se observa a organização de disciplinas que contemplem especificamente o uso de ferramentas computacionais como requisito de formação profissional ou orientação. A prática da engenharia de projeto tem mostrado, contudo, que hoje não existe profissional ou escritório que trabalhe sem tais ferramentas. Portanto, os projetos de curso deveriam utilizar ferramentas computacionais como recurso metodológico para o ensino dos diversos conteúdos da área de estruturas em geral e de Concreto Armado em particular.

### **1.1. Justificativa**

As exigências da utilização de ferramentas computacionais na área de Estruturas são evidentes e, desde 2003, vêm se intensificando, pois neste ano, a Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT apresentou a reformulação da NBR 6118:2003 (Projetos de Estruturas em Concreto), passando a mesma a vigorar no meio técnico a partir de abril de 2004. Dentre inúmeras outras questões, cabe aqui destacar a necessidade de “Análise Global das Estruturas” e a consideração da “Não Linearidade Física dos Materiais”, para ilustrar a necessidade imediata de inserção de ferramentas computacionais, nas disciplinas de Estruturas de Concreto.

A NBR 6118:2003 define que as edificações necessitam ser analisadas com teoria de segunda ordem, ou seja, precisam ter sua instabilidade global verificada. Também a análise da ação de vento é obrigatória na elaboração de projetos estruturais. Esta análise mesmo para estruturas simples somente pode ser feita com a consideração da interação viga-pilar, portanto minimamente pórticos planos, que mesmo para estruturas simples tem elevado grau de hiperestaticidade (grande número de equações de compatibilidade e de equilíbrio para serem resolvidas).

No que se refere aos métodos tradicionais de resolução de pavimentos com lajes isoladas os mesmos dão respostas limitadas que dificultam a elaboração dos projetos

atualmente demandados no Brasil. Uma técnica atual para análise de pavimentos de concreto, empregadas por praticamente todos os escritórios de projetos no Brasil é o da Grelha Equivalente, em que se substitui o conjunto placa/viga por barras ortogonais ou não, que formam uma grelha. Também nesta situação a resolução da estrutura consiste em resolver um sistema de equações lineares de grande porte.

Outro aspecto importante a ser ilustrado é quanto à verificação das flechas em lajes, quando se compara a NBR 6118:1978 com a NBR 6118:2003, observa-se que uma simples mudança no texto normativo leva a consequências que muitas vezes foge ao campo de entendimento da maioria dos engenheiros, considerando-se que o efeito da fissuração e da fluência do concreto são aspectos impactantes na verificação das deformações da estrutura e que não podem ser desconsiderados.

É preciso considerar também que o curso de graduação em engenharia civil deve propiciar uma ampla formação aos futuros engenheiros, uma vez que os mesmos poderão atuar em diferentes áreas, tais como: construção (execução), estruturas, infraestrutura urbana, instalações hidráulicas, orçamento e planejamento de obras etc.

As especificidades da atuação profissional do engenheiro e as exigências atuais em relação à atuação desse profissional podem ser observadas também nas indicações expressas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Engenharia, conforme Parecer CNE/CES 1362/2001. Dentre elas, poderíamos destacar: “*VI – desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas*”. Assim, com base principalmente nessa habilidade é que deve-se repensar as formas pelas quais os conteúdos da disciplina de Estruturas em Concreto devem ser ministradas nos cursos de graduação em Engenharia Civil.

A resolução CNE/CES 11, de 11 de março de 2002, do Conselho Nacional de Educação que institui Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, em seu art. 4<sup>o</sup> estabelece:

*Art. 4º A formação do engenheiro tem por objetivo dotar o profissional dos conhecimentos requeridos para o exercício das seguintes competências e habilidades gerais:*

*I – aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;*

*II – projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;*

*III – conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;*

*IV – planejar, supervisionar, elaborar e coordenar projetos e serviços de engenharia;*

*V – identificar, formular e resolver problemas de engenharia;*

*VI – desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas;*

*VII – avaliar criticamente a operação e a manutenção de sistemas;*

*VIII – comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;*

*IX – atuar em equipes multidisciplinares;*

*X – compreender e aplicar a ética e responsabilidade profissionais;*

*XI – avaliar o impacto das atividades da engenharia no contexto social e ambiental;*

*XII – avaliar a viabilidade econômica de projetos de engenharia;*

*XIII – assumir postura de permanecer em busca de atualização profissional;”*

Assim, para centrar a análise numa única habilidade, pode-se enfatizar o item VI da referida resolução do Conselho Nacional de Educação: “desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas”, como sendo uma necessidade do profissional de engenharia do século XXI. É nesse cenário que se coloca a necessidade de as disciplinas relativas à área de Estruturas e, em particular, de Concreto Armado utilizar ferramentas computacionais voltadas a uma análise mais próxima do comportamento real das estruturas de edificações.

Não obstante um dispositivo normativo educacional como o acima citado, é necessário que as habilidades e competências desenvolvidas no decorrer do curso de graduação em engenharia civil, em particular na área de estruturas, não esteja dissociado do contexto normativo brasileiro específico para a área de Estruturas de Concreto (NBR 6118:2003) e das necessidades de mercado, que é na verdade a instância final de todo o processo de formação do engenheiro.

Diante disso, o uso de ferramentas computacionais pelos Engenheiros Civis no exercício de sua atividade profissional e de novas tecnologias presentes na análise e no dimensionamento das diferentes estruturas em concreto, tornou-se uma necessidade evidente.

Atualmente há uma razoável quantidade de ferramentas de informática disponíveis na área de estruturas de concreto armado, tanto aquelas produzidas por profissionais e empresas que atuam diretamente no mercado de trabalho, como aquelas produzidas por professores e pesquisadores de instituições de ensino e pesquisa na área de estruturas de concreto. Assim, o curso de graduação deve aprofundar em temas complexos da área de estruturas, viabilizando a ampliação das possibilidades de atuação profissional dos engenheiros.

Para cumprir as exigências mínimas normativas, no que se refere à disciplina estruturas de concreto e, ainda, assegurar uma formação geral como a mencionada anteriormente, seria necessário um novo processo de ensino que permitiria ao aluno aprender sem gastar tempo em contas, cálculos manuais repetitivos e usar a maior parte



do tempo na análise e interpretações dos resultados referentes ao comportamento estrutural.

Assim, a proposição de estratégias de utilização de ferramentas computacionais no desenvolvimento de determinados conteúdos dessa disciplina visa criar condições para que o aluno tenha uma formação que desde o início do curso lhe assegure uma atuação similar à de um profissional do mercado do século XXI, ou seja, de acordo com as normas técnicas em vigor, a rotina dos escritórios e de profissionais autônomos de projeto, rompendo com a utilização de procedimentos ultrapassados que caíram em desuso e que se aplicam a poucas situações ou tornam os projetos de estruturas inviáveis economicamente.

Cabe ainda considerar que os cursos de engenharia civil formam profissionais para atuarem em diferentes atividades da construção civil, entre elas, execução de obras em geral de pequeno médio e grande porte, projetos em diferentes áreas, tais como estruturas, hidráulica e saneamento, estradas e gerenciamento de empreendimentos. Assim, no que se refere à área de projetos e estruturas e, em particular às de concreto, é preciso discutir “o que” e “em qual intensidade” deve ser apresentado ao futuro profissional uma vez que, durante a graduação, a formação deve ser abrangente.

A quantidade de ferramentas computacionais produzidas e sua importância para o ensino, o elevado número de instituições de ensino que formam engenheiros civis, nas quais são utilizados ou não tais ferramentas, dentre outros fatores, deram origem ao interesse em analisar programas utilizados no ensino da disciplina “Estruturas em Concreto Armado”, nos cursos de graduação em Engenharia Civil.

## **1.2. Objetivo**

Objetiva-se com esta pesquisa analisar como alguns conteúdos da disciplina “Estruturas em Concreto” podem ser entendidos, aprendidos e aplicados com a utilização de ferramentas computacionais gratuitas dentre elas, GPlan (Grelhas Planas) e FTOOL (Two-Dimensional Frame Analysis Tool), assim como, no ensino da referida

disciplina, criar condições para que o estudante de engenharia possa interpretar o comportamento dos pavimentos (laje-viga) e a interação viga-pilar na resistência principalmente das ações laterais provenientes do vento, nas estruturas de edificações, nos cursos de graduação, dada a elevação qualitativa que tal uso permite e, em algumas situações, a indispensabilidade deste uso.

### **1.3. Metodologia**

No desenvolvimento do trabalho, é utilizada a seguinte metodologia:

- I - Estudo de documentos que tratam da formação mínima exigida para o engenheiro em particular no âmbito de estruturas de concreto e dos procedimentos normativos para cálculo de edificações;
- II - Análise e definição de ferramentas computacionais compatíveis com as normatizações e que favoreceriam a formação do engenheiro, de acordo com as novas exigências;
- III - Elaboração e apresentação de exemplos com a utilização destas ferramentas computacionais, mais próximas da realidade, didaticamente eficazes e que atendam às normatizações tanto aquelas relacionadas à formação do engenheiro, quanto àquelas que tratam da elaboração de projetos, no exercício da atividade profissional de projetista estrutural. Dessa forma, mostra-se que de posse de ferramentas gratuitas os alunos de graduação podem fazer análises mais próximas do comportamento real das estruturas de edificações, demonstrando também, que o maior trabalho ao se projetar, deve ser o de análise e interpretação do comportamento estrutural (esforços e deslocamentos) da estrutura e não os processos de resolução da mesma, que estes devem ser feitos por ferramentas automáticas por ser uma etapa intermediária do processo, e por ser o meio e não o fim.

#### 1.4. Organização do Trabalho

O capítulo 2 descreve-se resumidamente alguns conceitos de: projeto estrutural, análise estrutural, concepção sobre análise global e local, considerações sobre o pavimento isolado e o uso de grelha equivalente, uso de pórticos planos para determinação dos efeitos da ação lateral em estruturas de edificações, associação de pórticos e estabilidade global em estruturas de concreto.

No capítulo 3 realiza-se o estudo de ferramentas computacionais que podem ser utilizadas no ensino da disciplina estruturas em concreto armado, em particular o GPLAN (Grelhas Planas) para análise do pavimento (interação laje/viga) e FTOOL (Two-Dimensional Frame Analysis Tool) para análise dos esforços e deformações devido a ações laterais.

O capítulo 4 apresenta exemplos de aplicação com procedimentos para análise de pavimentos (determinação de esforços e deslocamentos verticais) em lajes e vigas, com a utilização da ferramenta computacional GPLAN.

No capítulo 5 são apresentadas-se exemplos de aplicação com procedimentos de análise da ação lateral em estruturas de edificações (ação do vento) em pórticos planos com a utilização da ferramenta computacional FTOOL e ainda a verificação do parâmetro de instabilidade ( $\alpha$ ) e a determinação do coeficiente  $\gamma_z$ .

Por fim, no capítulo 6, são apresentadas algumas conclusões acerca da metodologia de utilização de ferramentas computacionais no ensino de conteúdos da disciplina “Estruturas em Concreto Armado”, em cursos de engenharia civil.

## **2. ANÁLISE ESTRUTURAL – MODELOS ESTRUTURAIS DE BARRAS PRISMÁTICAS**

Neste capítulo apresenta-se inicialmente a rotina de elaboração de um projeto de estruturas em concreto armado, para depois mostrar os principais modelos de barras que são utilizados para análise dessas estruturas, dando ênfase na análise dos pavimentos e o estudo da instabilidade da estrutura.

É apresentada uma avaliação de ferramentas computacionais, GPlan e FTOOL e sua aplicabilidade no ensino da disciplina “Estruturas de Concreto”. Além disso, são apresentadas sugestões sobre quais ferramentas podem ser aplicadas, onde encontrá-las e como introdução aos exemplos ilustrativos os quais serão trabalhados no capítulo 4 e 5, quando serão abordadas as novas possibilidades de tratamento de determinadas temáticas.

### **2.1. Projeto Estrutural**

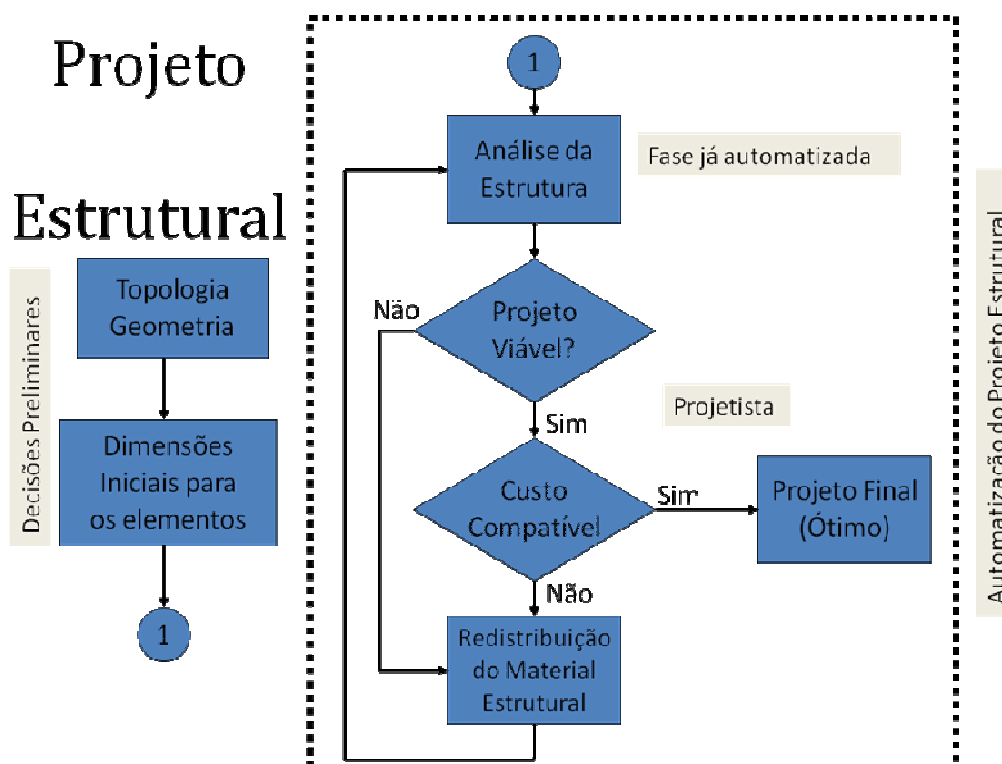
Para Martha (2009), a atividade do desenvolvimento do projeto estrutural tem como objetivo a concepção de uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída, satisfazendo questões de segurança, condições de utilização, condições econômicas, estética, questões ambientais, condições construtivas e restrições legais. O resultado final do projeto estrutural é, portanto, a especificação de uma estrutura de forma completa, isto é, abrangendo todos os seus aspectos gerais, tal como locação, e de todos os detalhes necessários para a sua construção.

Assim, conforme o autor, o projeto estrutural parte de uma concepção geral da estrutura e termina com a documentação que possibilita a sua construção. São inúmeras e muito complexas as etapas de um projeto estrutural. Entre elas está a previsão do comportamento da estrutura de tal forma que ela possa atender satisfatoriamente às condições de segurança e de utilização para as quais ela foi concebida.

De maneira simplificada, a atividade de projetar e detalhar uma estrutura de concreto passa pelas seguintes fases:

- Idealização da estrutura (chamada muitas vezes de lançamento da estrutura);
- Idealização do modelo de análise a ser empregado para representar a estrutura projetada;
- Análise Estrutural nos diversos elementos da estrutura;
- Dimensionamento dos elementos estruturais;
- Detalhamento da armadura ou novo dimensionamento (em funções dos esforços definitivos) das seções dos elementos.

Na figura 2.1 abaixo é apresentado um fluxograma das etapas de desenvolvimento do projeto estrutural sob a ótica da automação dos procedimentos, tomada de decisões preliminares, análise da estrutura e análise da viabilidade do projeto tanto do ponto de vista técnico quanto de custo da solução adotada.



*Figura 2-1- Fluxograma das Etapas do Projeto Estrutural*

As disciplinas de concreto (armado e protendido) deveriam se concentrar em todos os tópicos menos o terceiro, (análise estrutural), que deve ser o objeto da disciplina Teoria das Estruturas.

As disciplinas de Teoria das Estruturas (isostáticas e hiperestáticas), que devem se referir à determinação dos esforços internos nos elementos estruturais, demanda em geral, tanto ou mais tempo que as disciplinas de concreto, pois privilegiam os procedimentos de como fazer as contas, como determinar os esforços da estrutura tipo, evitando a generalização da solução em que com os teoremas e princípios da resistência dos materiais acrescidos das técnicas da teoria do concreto (plastificação, fissuração, etc) pode-se resolver a maior parte das estruturas usuais como fazem os programas comerciais de auxílio ao projeto.

Porém, a necessidade de se considerar a especificidade do comportamento do concreto armado ou protendido faz com que grande parte do curso de concreto seja utilizado para definição e cálculo dos esforços internos nas estruturas, os quais exigem cálculos de grande trabalho numérico.

### **2.1.1. Análise Estrutural**

A análise estrutural é a fase do projeto estrutural em que é feita a idealização do comportamento da estrutura. Esse comportamento pode ser expresso por diversos parâmetros, tais como pelos campos de tensões, esforços solicitantes, deformações e deslocamentos na estrutura. De uma maneira geral, a análise estrutural tem como objetivo a determinação das ações externas e dos esforços internos (esforços solicitantes), e das correspondentes tensões, bem como a determinação dos deslocamentos e correspondentes deformações da estrutura. Essa análise deve ser feita para os possíveis estágios de carregamentos e solicitações que devem ser previamente determinados.

Para Martha (2009), a análise estrutural de uma edificação é a etapa do projeto estrutural na qual é feita uma previsão do comportamento da estrutura. As teorias físicas

e matemáticas resultantes da formalização da Engenharia Estrutural como ciência são utilizadas na análise estrutural.

A análise estrutural moderna trabalha com quatro níveis de abstração para a estrutura da edificação a ser analisada, sendo: Estrutura Real, Modelo Estrutural, Modelo Discreto e Modelo Computacional.

O nível “Estrutura Real” é o mundo físico, representa a estrutura tal como ela será construída. O nível “Modelo Estrutural” é o modelo analítico que é utilizado para representar matematicamente a estrutura que está sendo analisada, podendo também ser denominado modelo matemático, incorporando todas as teorias e hipóteses feitas para descrever o comportamento da estrutura para as diversas solicitações. Tais hipóteses são baseadas em leis físicas, tais como equilíbrio de forças e entre tensões, as relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações e ainda as leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura.

Mas, embora inicialmente o concreto seja considerado como material homogêneo, isotrópico e outras características usadas na resistência dos materiais, são perceptíveis que em certas situações estas hipóteses podem deixar de valer e hipóteses complementares se tornam necessárias para compor o modelo estrutural de concreto.

Na concepção do modelo estrutural é feita uma idealização do comportamento da estrutura real em que se adota uma série de hipóteses simplificadas. Tais hipóteses são baseadas em teorias físicas e em resultados experimentais e estatísticos, sendo que entre elas, podem ser citadas:

- hipóteses sobre a geometria do modelo;
- hipóteses sobre as condições de suporte (ligação com o meio externo, por exemplo, com o solo);
- hipóteses sobre o comportamento dos materiais;
- hipóteses sobre as solicitações que agem sobre a estrutura (cargas de ocupação ou pressão do vento, por exemplo).

O nível “Modelo Discreto” é concebido dentro das metodologias de cálculo dos métodos de análise. A passagem do modelo matemático para o modelo discreto é chamada de discretização da estrutura.

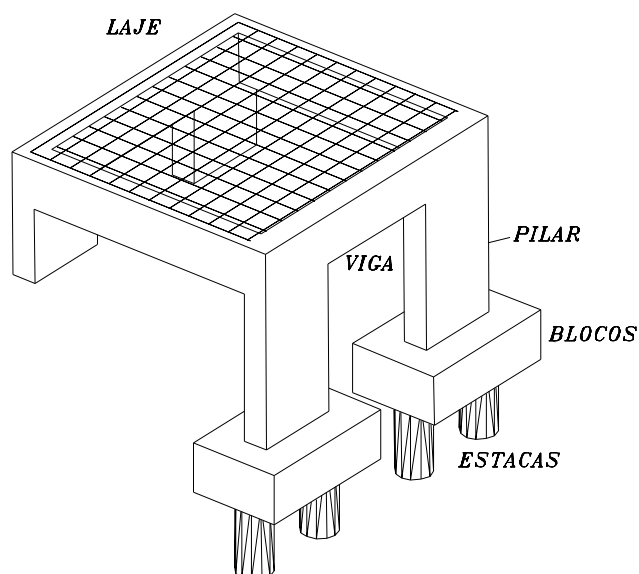
Segundo Carvalho e Figueiredo (2007) antes de se iniciar o estudo do concreto armado é importante analisar o comportamento de uma estrutura simples (a parte da construção que resiste às diversas ações e garante o equilíbrio das edificações), para que seja feita a distinção entre sistema estrutural e elemento estrutural.

Elementos estruturais são peças, geralmente com uma ou duas dimensões preponderantes sobre as demais (vigas, lajes, pilares, etc.), que compõem uma estrutura. O modo como são arranjados pode ser chamado de sistema estrutural. Alguns comportamentos são dependentes apenas desse arranjo, não influenciando o material com que são feitos os elementos. Uma viga biapoiada, com seção transversal na forma de I, pode ser executada tanto em aço quanto em concreto armado.

A interpretação e a análise do comportamento real de uma estrutura são, geralmente, complexas e difíceis, e nem sempre possíveis. Por essa razão é importante entender que para montar modelos físicos e matemáticos na análise de construções de concreto armado é preciso usar a técnica da subdivisão em subsistemas, que consiste em desmembrar a estrutura em elementos cujos comportamentos possam ser idealizados, já conhecidos e de fácil estudo. Essa técnica possibilita, da maneira mais simples possível, a análise de uma estrutura com resultados satisfatórios.

Com o advento dos microcomputadores e dos programas automáticos de cálculo estrutural, em muitos casos é possível um estudo global, sem o uso da subdivisão. Entretanto, é importante compreender profundamente o funcionamento e o comportamento de cada um dos elementos que formam o conjunto estrutural, conforme apresentado na Figura 2-2, a seguir.



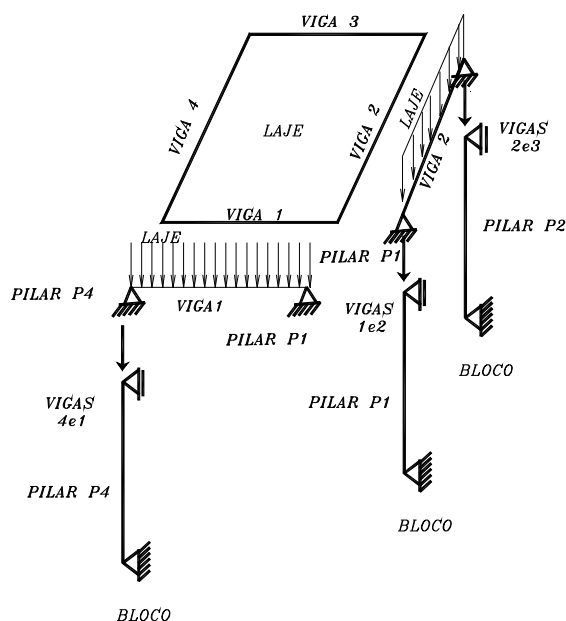


*Figura 2-2 - Estrutura básica de uma edificação (adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO - 2007)*

Essa estrutura pode ser imaginada como a de uma garagem de carros. A subdivisão pode ser feita da seguinte maneira: a laje de concreto (plana) suporta seu peso, os revestimentos e mais alguma carga acidental (água da chuva, pessoas, etc.); as vigas recebem os esforços da laje (placa de concreto) e os transmitem, juntamente com seu próprio peso (mais peso de parede, se houver) para aos pilares; os pilares recebem todas as cargas e as transmitem, também com seu peso, para as fundações (no caso, blocos e estacas).

Na Figura 2-3, é mostrado como cada elemento da estrutura pode ser analisado. Dessa forma já está sendo montado um modelo físico de funcionamento do sistema e, para que seja aplicado os conhecimentos da teoria das estruturas, é necessário fazer diversas simplificações. Por exemplo, as vigas são apoios indeformáveis na direção vertical para as lajes; os pilares fazem o papel de apoios indeslocáveis na vertical para as vigas e podem ser considerados, de modo grosseiro, como bi-rotulados em suas extremidades; as lajes são simplesmente apoiadas ou totalmente engastadas nas vigas; as ações nas vigas são uniformemente distribuídas, etc. Note-se que a viga 1 descarrega nos

pilares P1 e P4 e a viga 2 nos pilares P1 e P2; para encontrar a carga atuante no pilar P1, é preciso somar as reações das vigas 1 e 2.



**Figura 2-3- Subdivisão da estrutura da edificação (adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO - 2007)**

Com essas simplificações é possível identificar algumas das estruturas estudadas em teoria das estruturas e calcular os esforços solicitantes máximos nas seções, com a ajuda dos conceitos da análise estrutural.

O processo físico e matemático que possibilita o cálculo e o detalhamento dos diversos elementos de concreto armado em que ficou dividida a estrutura é visto ao longo de um curso usual de estruturas de concreto. Por outro lado, antes do cálculo é importante entender, ainda que de modo simplificado, o processo de construção de uma estrutura.

É fácil perceber que uma estrutura de concreto armado (ou mesmo seus elementos), depois de pronta, tem um peso próprio significativo ( $\gamma_{\text{concreto}} = 25,0 \text{ kN/m}^3$ ) e, portanto, se não houver equipamentos adequados é impossível contruí-la de uma só

vez; tem-se, então, de executá-la aos "pedaços", ou seja, confeccionando pequenas quantidades de concreto, transportando-os aos poucos e depositando-os nas formas, já preparadas e com as armaduras posicionadas.

Porém, se houver a necessidade de executar um grande número de estruturas (ou elementos) e pouco tempo para isso, será possível utilizar o mesmo procedimento anterior? Não seria mais lógico e interessante fazer diversas peças de maneira simultânea? Nesse caso, cada elemento não poderia ser feito em outro local, transportado até a obra e colocado em sua posição final de funcionamento? Caso não se disponha de equipamentos adequados (elevação e transporte, formas, etc.), seria mais viável adquiri-los ou alugá-los?

A resposta a cada uma dessas questões depende de muitos fatores e de cada situação, mas é possível perceber que, basicamente, pode-se optar por um entre dois tipos de estruturas: as moldadas no local e as pré-moldadas.

No primeiro caso, os diversos elementos são moldados (concretados) no local onde irão trabalhar e, para isso, além das fôrmas, deverá haver um sistema de escoramento adequado.

Caso a opção seja por estrutura pré-moldada, que praticamente elimina a necessidade de escoramento, pois elementos são apenas montados no local definitivo, ainda uma questão deverá ser resolvida: os elementos serão produzidos no próprio canteiro (nesse caso será necessário providenciar formas) ou serão encomendados de fabricantes especializados?

Também nessa situação não é possível uma resposta exata, mas a tendência atual é empregar estruturas pré-moldadas encomendadas, pois para produzi-las em canteiro seria preciso um investimento inicial muito grande, o que, na maioria das vezes, não seria compensador.

No que se refere a análise e dimensionamento, as hipóteses de cálculo deverão levar em conta o tipo de estrutura escolhida. No caso das peças pré-moldadas deve-se

dimensioná-las, também, para as operações de transporte e considerar que, em princípio, não haverá **monolitismo** entre as ligações, característico das moldadas no local.

Finalmente, é importante destacar que para determinar o esforço que a estrutura transmite ao solo, deve-se efetuar o cálculo na seguinte seqüência: lajes, vigas, pilares (superestrutura) e fundações (infra-estrutura), nota-se que o cálculo é efetuado na seqüência inversa da construção.

Com relação ao nível “Modelo Computacional”, é preciso destacar que desde a década de 1960, o computador tem sido utilizado na análise estrutural, embora inicialmente somente nas universidades e institutos de pesquisa, nos anos setenta essa utilização passou a ser corriqueira. Nos anos oitenta e noventa, com a criação de programas gráficos interativos, a análise estrutural passou a ser feita com o uso de computador em praticamente todos os escritórios de cálculo estrutural e empresas de consultoria.

## 2.2. A concepção de Global e Local

Das considerações anteriores, depreende-se que a principal discussão acerca da concepção do modelo estrutural está no que se refere à consideração do **monolitismo** da estrutura de concreto armado moldada “in-loco”. Ao se imaginar que existe o **monolitismo**, seria de se esperar que a análise da estrutura seja feita como um todo. Contudo no sistema tradicional de ensino é em geral feita a subdivisão da estrutura de uma edificação, em diversos subsistemas ou elementos. Isso se dá para simplificar os procedimentos de cálculo e são considerados isolados os elementos que compõem a estrutura, qual sejam: laje, viga e pilar. Esse modelo tradicional que vem sendo utilizado ao longo dos anos nas instituições de ensino de engenharia mostra-se afastado de um comportamento real da estrutura.

Neste sentido, um avanço em relação à idéia anterior é imaginar que a edificação possa ser analisada para fins estruturais inicialmente através do estudo do seu pavimento,

submetido às ações verticais e, posteriormente, o conjunto de elementos do tipo viga e pilar para a interação entre ações laterais (vento em geral) e as ações verticais.

Dessa forma deseja-se que o aluno consiga visualizar a estrutura, tomando a edificação de múltiplos pavimentos como exemplo, inicialmente como um todo, mesmo que seja necessário separar o pavimento da estrutura toda em um primeiro momento. Vencida a etapa de estabilidade da estrutura como um todo (estabilidade global) é preciso analisar os diversos subsistemas que constituem o pavimento, tais como laje-viga e viga-pilar.

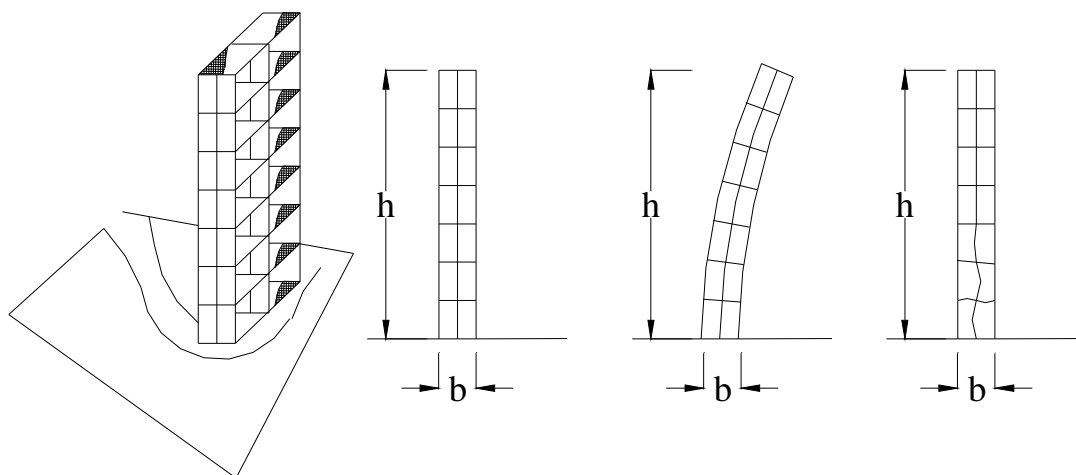
Esta idéia está implícita na NBR 6118:2003 quando se analisa a estabilidade de uma estrutura, como também é mostrado por Carvalho e Pinheiro (2009). De acordo com essa norma, as estruturas de concreto devem ser projetadas, construídas e utilizadas de modo que sob as condições ambientais previstas e respeitadas às condições de manutenção preventiva especificadas no projeto, conservem sua segurança, estabilidade, aptidão em serviço e aparência aceitável, durante um período pré-fixado de tempo, sem exigir medidas extras de manutenção e reparo.

As deformações existentes nas estruturas permitem calcular os efeitos de segunda ordem que de acordo com o item 15.3.1 da NBR 6118:2003 podem ser divididos em efeitos globais, locais e localizados de segunda ordem.

Sob a ação das cargas verticais e principalmente das horizontais, os nós da estrutura deslocam-se horizontalmente. Os esforços de segunda ordem decorrentes desses deslocamentos são chamados efeitos globais de 2ª ordem. Nas barras da estrutura, os respectivos eixos não se mantêm retilíneos, surgindo aí efeitos locais de 2ª ordem que, em princípio, afetam principalmente os esforços solicitantes ao longo delas. Em pilares parede (simples ou compostos) pode-se ter uma região que apresenta não retilineidade maior do que a do pilar como um todo. Nestas regiões surgem efeitos de 2ª ordem maiores, chamados de efeito de 2ª ordem localizados. O efeito de 2ª ordem localizado além de aumentar nesta região a flexão no sentido longitudinal, aumenta também a

flexão no sentido transversal da estrutura, havendo a necessidade de aumentar os estribos nestas regiões.

Na figura 2-4 estão representadas as possibilidades de instabilidade que podem ser causadas por cada uma das duas primeiras situações.



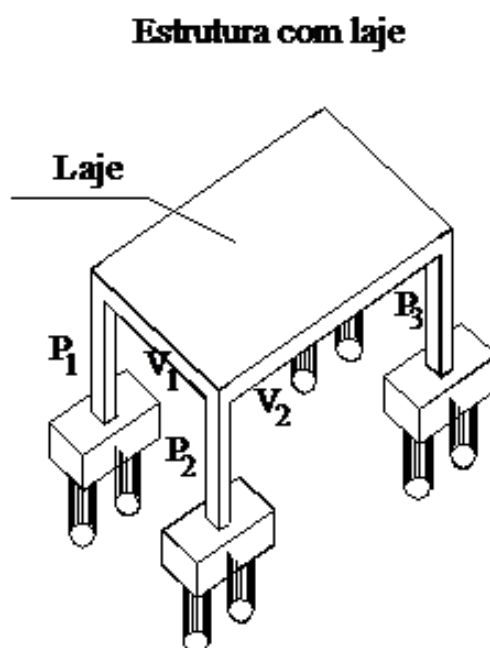
**Figura 2-4 - Esquema estrutural de prédio alto 1) perspectiva esquemática; 2) estrutura verticalmente indeformada; 3) edificação sujeita a instabilidade global; 4) instabilidade local de pilares centrais inferiores- (adaptado em Carvalho e Miranda - 2009)**

As três situações descritas anteriormente devem ser verificadas, preferencialmente considerando-se a não linearidade geométrica e física do material e o comportamento tridimensional da estrutura. É fácil perceber a dificuldade na realização de uma análise desse tipo, e assim é comum separar os problemas e verificar inicialmente a estabilidade global, a local e, finalmente, a localizada. Na sequência será estudada apenas a estabilidade global da estrutura.

Assim, como a NBR 6118:2003 preconiza o estudo da estabilidade como global e local, pode-se também pensar na análise de uma estrutura (determinação de esforços e deslocamentos) como sendo uma análise global (a estrutura funcionando como um todo) e análise local (cada elemento analisado isoladamente).

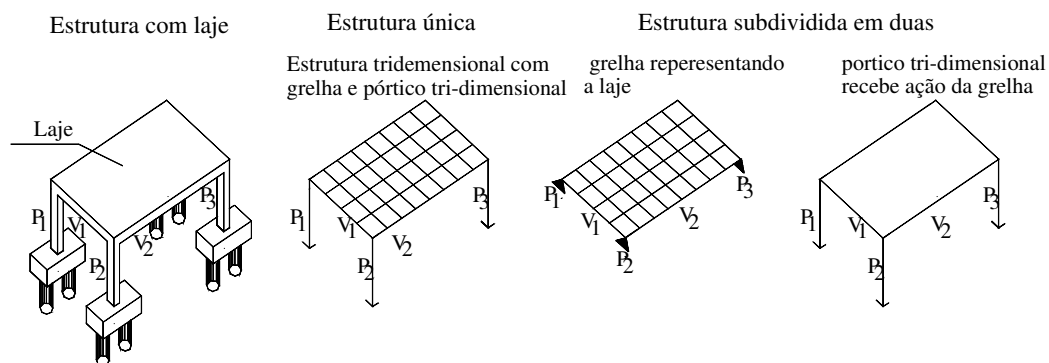
Para entender como pode ser feita esta análise global e localizada pode-se usar um caso de uma estrutura simples, (como já mostrado anteriormente nas figuras 2.2 e

2.3) tirado de Carvalho e Figueiredo (2006) em que se tem novamente a estrutura de uma garagem com laje maciça, vigas pilares, blocos e estaca. A análise local seria aquela descrita anteriormente e mostrada na figura 2.3. A mesma estrutura com o advento dos microcomputadores e dos programas de cálculo estrutural pode ser estudada de forma global, sem o uso da subdivisão da estrutura. Assim, a estrutura da figura 2.4 (similar a da figura 2.2) pode ser analisada como mostra a figura 2-5, apresentada a seguir.



*2-5 - Perspectiva esquemática de uma estrutura de concreto com laje maciça, viga, pilares blocos e estacas (adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO -2007)*

Nota-se que diferentemente que foi feito em relação a figura 2.3, pelo menos o pavimento é tratado como um todo. Assim, em uma análise global a estrutura é calculada como um todo de forma tri-dimensional considerando pilares, vigas e laje (através de uma grelha) com um único modelo. De uma segunda maneira as lajes e viga são tratadas como uma grelha plana e com os esforços desta transferidos para um pórtico tridimensional.



*Figura 2-6- Perspectiva esquemática da estrutura de concreto da figura 4 calculada agora de uma só vez com uma grelha equivalente e pórtico tridimensional e subdividida em grelha e pórtico espacial - (adaptada de CARVALHO E FIGUEIREDO - 2007)*

Na primeira solução (estrutura tridimensional), o número de equações é muito grande e, por isso, os programas comerciais de estruturas de concreto preferem a segunda solução (grelha e pórtico tridimensional). Em ambas as soluções o aspecto global está sendo considerado, pois não se subdividiu a mesma em lajes, pilares vigas etc. Mesmo na segunda situação quando se subdivide em pavimento e pórtico, o aspecto global não foi perdido.

### **2.3. Consideração do pavimento isolado, o uso da grelha equivalente**

Como é mostrado por Carvalho et al. (2009), o pavimento pode ser considerado isoladamente do restante da estrutura. Para projetar o pavimento o projetista pode se valer de sistemas com vigas e lajes maciças, ou lajes nervuradas unidirecional, ou nervuradas bi-direcionais todas moldadas no local. Ainda com vigas pode ser utilizadas lajes pré-fabricadas com nervuras pré-fabricada alveolares e tipo duplo tê. Finalmente ainda é possível utilizar pavimentos com lajes lisas, ou seja, sem vigas.

Nas figuras de 2-7 a 2-11 são mostradas as lajes citadas anteriormente,



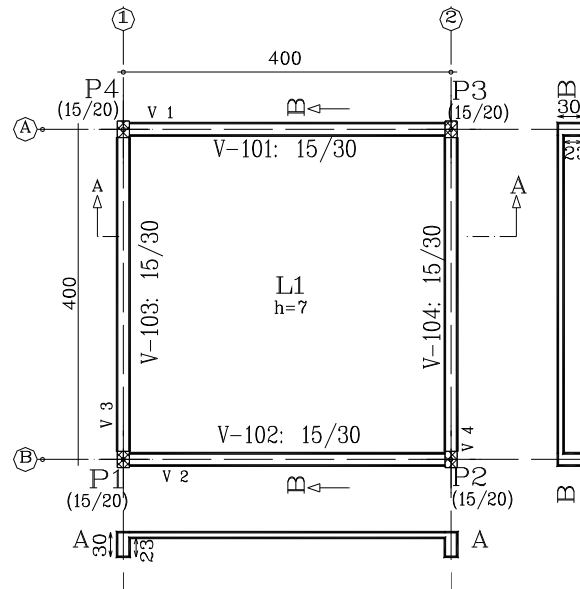


Figura 2-7- Planta de forma de laje maciça com vigas de bordo

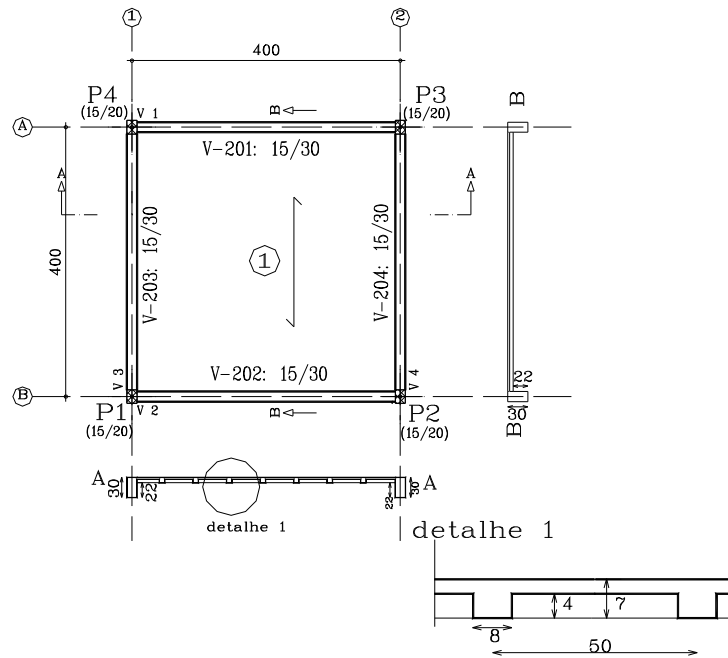
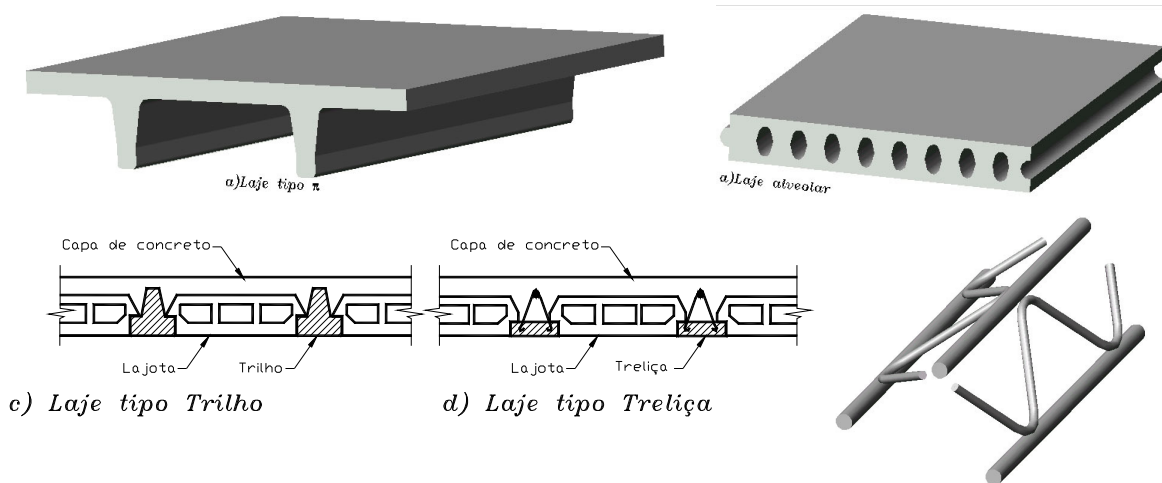
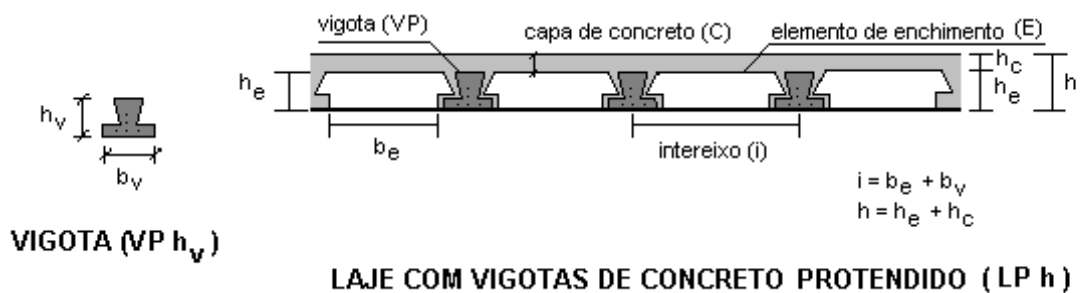


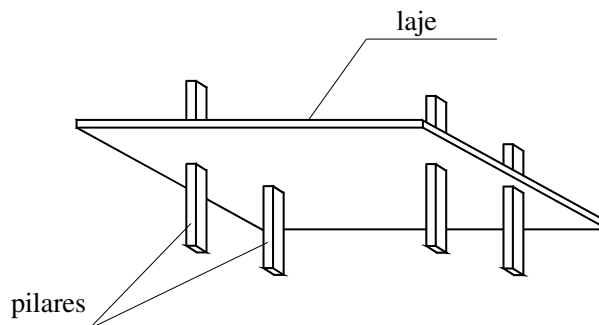
Figura 2-8- Pavimento com forma quadrada - laje nervurada em uma direção



**Figura 2-9 - Seções transversais de lajes pré-moldadas: a) tipo  $\pi$ ; b) alveolar; c) tipo trilho; d) tipo treliça; e) amadura da laje tipo treliça (adaptada de CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO - 2007)**

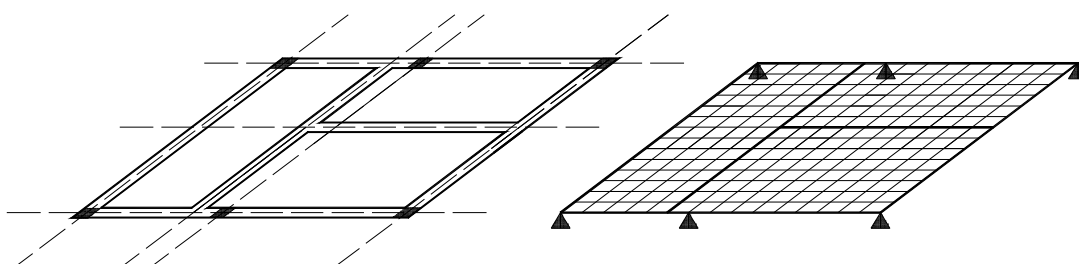


**Figura 2-10 - Seção Transversal de Laje com vigotas protendidas (figura 3.1.1b da NBR 14859)**



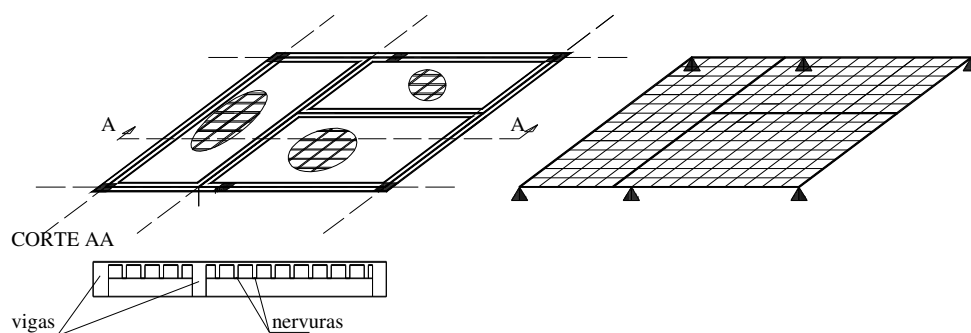
**Figura 2-11- Perspectiva esquemática de um painel de laje sem vigas**

Todos os tipos de pavimentos citados anteriormente podem ser modelados por um sistema de grelhas e tratado isoladamente dos pilares e dos demais andares. A ação lateral de vento ou outras podem ser consideradas atuantes em um pórtico tridimensional e depois aplicadas as vigas.



*Figura 2-12- Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje maciça e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem*

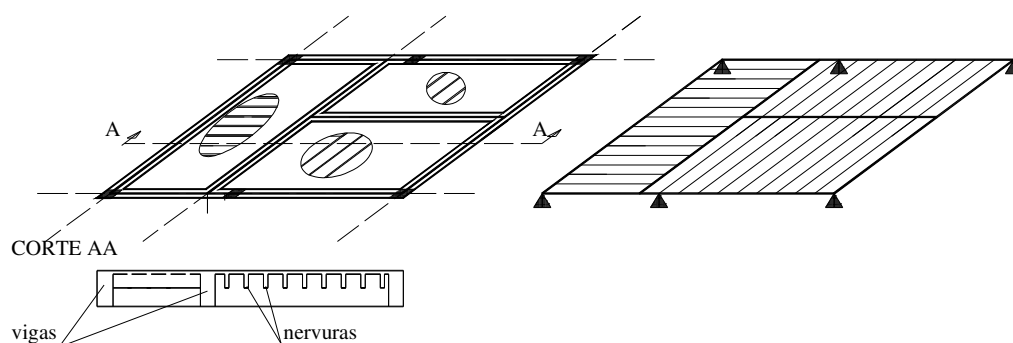
Na figura 2-12 é mostrada a perspectiva esquemática da forma de pavimento com laje maciça, vigas e pilares e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem. Em princípio tanto as vigas como as lajes são modeladas por barras. A diferença está no valor da inércia à flexão e na inércia à torção. As vigas costumam ter baixa inércia à torção e alta inércia à flexão. Os elementos de laje ao contrário. No caso em questão como se trata de laje maciça a modelagem deve considerar barras em duas direções. Os pilares são considerados apoios indeslocáveis na vertical. O impedimento da rotação da viga dos pilares pode ser considerado ao se colocar uma mola nos mesmos. Esta mola só faz sentido se for usada nos pilares de extremidade, ou seja, para pilares internos com razoável simetria de cargas e geometria o momento absorvido pelos mesmos é pequeno. Ainda assim a mola não conseguirá representar todo o efeito do pórtico espacial que os pilares e vigas dos diversos andares formam. A figura 2-13 apresenta a perspectiva esquemática de forma de um pavimento com laje nervurada bidirecional e o esquema de grelha equivalente utilizada na sua modelagem.



**Figura 2-13** *Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje nervurada bidirecional e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem*

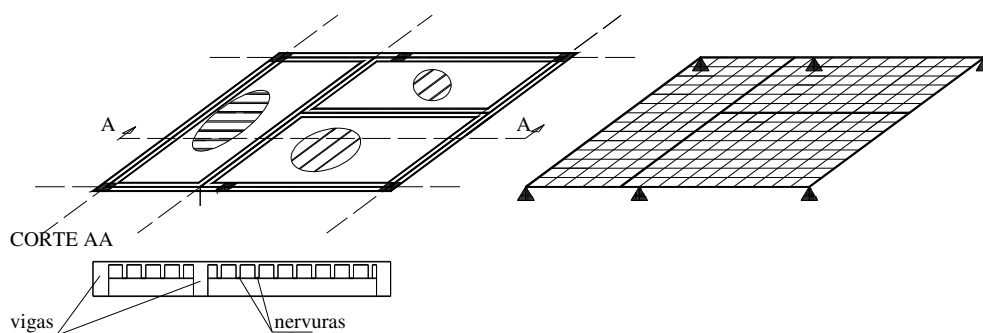
No caso de pavimento com lajes nervuradas, como o da figura 2-13, pode-se usar também uma grelha para sua modelagem. Torna-se interessante neste caso que as barras usadas nas lajes coincidam com as nervuras da estrutura. Neste caso a inércia à torção destes elementos (barras que representam as nervuras) será menor do que a usada nas barras que representam elementos de laje maciça.

Na figura 2-14 é mostrado o esquema de uma grelha equivalente usada para modelar o pavimento com lajes nervuradas unidirecionais. Notar que as barras representam as nervuras e, portanto, para cada trecho de laje só há barras em uma direção.



**Figura 2-14** *Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje nervurada unidirecional e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem*

Na figura 2-15 é apresentado o mesmo pavimento da figura 2-13, porém modelado com barras que representam as nervuras e barras que podem representar a capa das lajes como foi feito por Carvalho e Figueiredo Filho (2006) e Flório (2005).

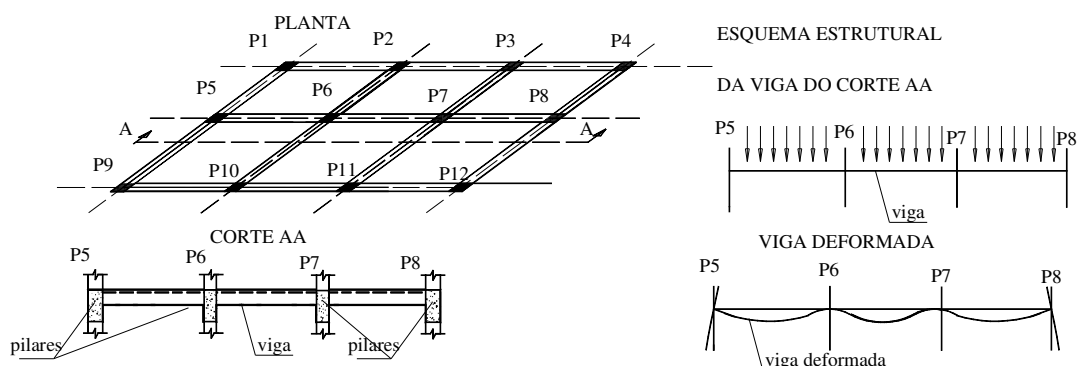


*Figura 2-15-Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje nervurada unidirecional e o esquema da grelha equivalente usada na sua modelagem considerando também a capa funcionando como elemento trabalhando à flexão*

#### **2.4. Consideração de pórticos planos para determinação dos efeitos de ação lateral de vento.**

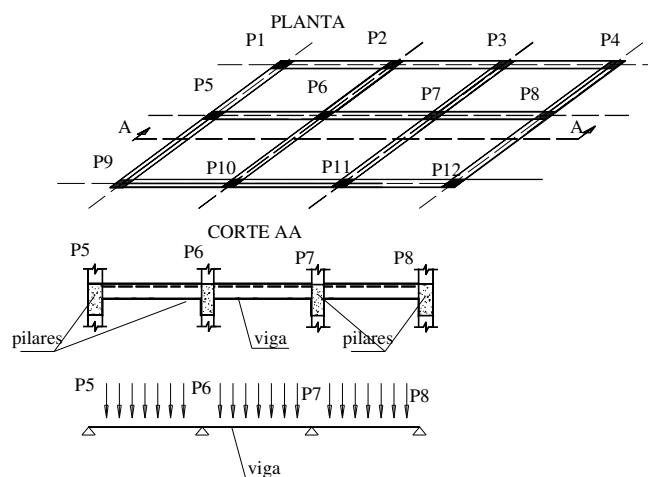
As estruturas, mesmo as mais simples, estão sempre sujeitas, além das ações gravitacionais, às ações laterais decorrentes normalmente de vento. Assim a mesma estrutura que serve para absorver os esforços verticais, o pórtico plano, serve também para absorver os esforços laterais de vento como mostra as figuras a seguir.

Para mostrar como podem ser feitas as análises das estruturas usando pórticos, pode-se considerar, como fonte principal, o trabalho de Carvalho e Pinheiro (2009).



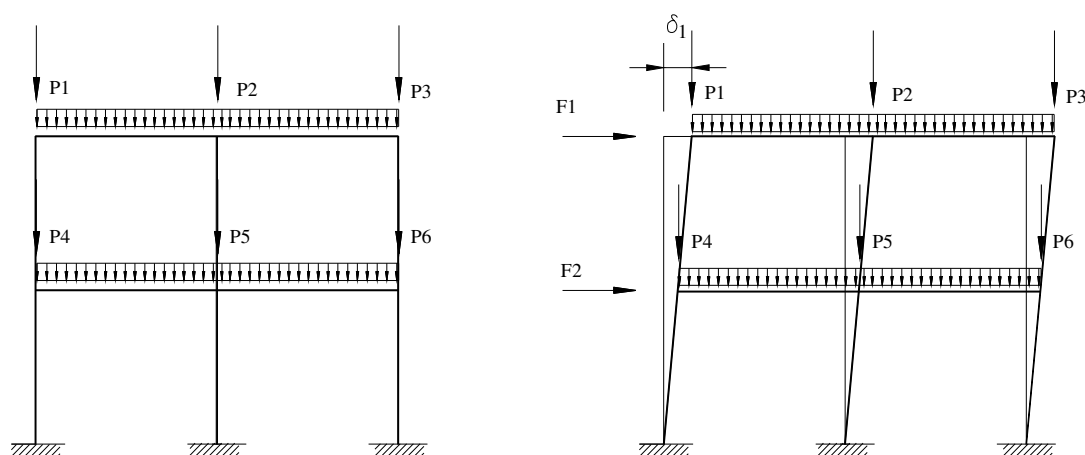
**Figura 2-16 - Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje maciça e vigas em que se considera o sistema de pórtico plano para representar o efeito da viga e pilares.**

Na figura 2-16 mostra-se o sistema pilares e vigas como pórtico plano suportando as ações verticais. Percebe-se que se os vãos forem iguais e as ações também iguais em todos os vãos, não havendo deformação dos pilares P6 e P7 apenas os pilares P5 e P8 ao impedir a rotação da viga e, portanto, surgindo momentos fletores. Por esse motivo a NBR 6118:2003 no item 14.6.7.1 indica que pode ser usado o modelo clássico de calculo de vigas contínuas, como mostrado na figura 2-17 abaixo.



**Figura 2-17 - Perspectiva esquemática da forma de um pavimento com laje maciça e vigas em que se considera o sistema clássico de viga contínua**

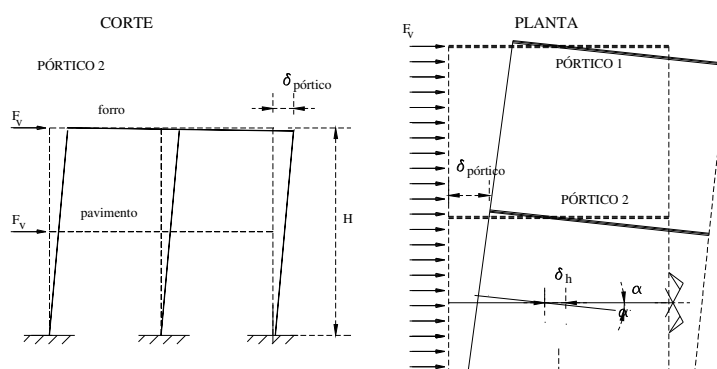
No caso de estruturas de grande altura ou de relação entre altura e dimensão em planta grande os efeitos da ação lateral do vento tornam-se mais importantes e podem, inclusive, serem desencadeadores de situações de instabilidade. Desta forma, embora em algumas situações as estruturas tenham rigidez suficiente para não se considerar os efeitos de segunda ordem da instabilidade global, os quais serão definidos adiante, ainda assim é preciso pelo menos avaliar se as ações de vento são significativas e necessitam serem consideradas no cálculo, conforme é apresentado na figura 2-18.



*Figura 2-18- Pórtico de uma estrutura sob ações verticais e com as mesmas verticais atuando junto com ações horizontais de vento*

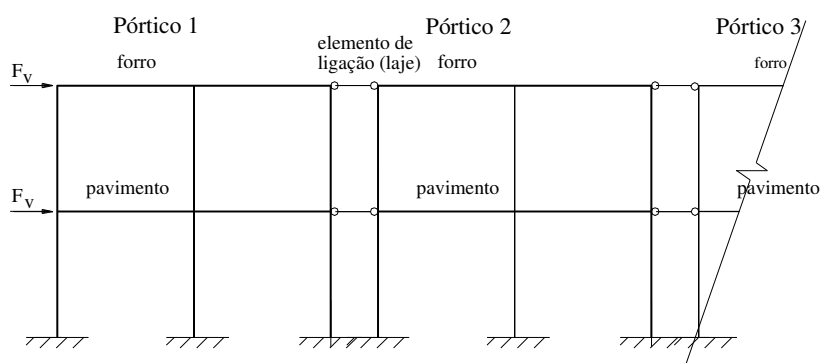
#### 2.4.1. Associação de Pórticos

Quando a estrutura é composta de diversos pórticos e está submetida à ação lateral de vento, as ações nos elementos podem ser calculadas ao se resolver um pórtico tridimensional. Em algumas situações é possível simplificar o problema e considerar o vento atuando em uma associação de pórticos em série.



**Figura 2-19- Distribuição da ação do vento em pórticos considerando a laje como septo rígido. À esquerda e mostrado corte da estrutura e a direita a planta**

Imaginando uma estrutura formada de pórticos P1, P2, etc., como a mostrada na figura 2-19 e submetida à ação lateral do vento  $F_v$ , ao se fazer um corte vertical tem-se, por exemplo, o pórtico 2 que se deforma, e tem no último pavimento um deslocamento de  $\delta_{\text{pórtico}}$  que será o mesmo deslocamento em planta dos outros pórticos se não houver a rotação  $\alpha$ . Imaginando que haja simetria de distribuição de pilares e de vigas com características geométricas e de ação de vento pode-se dizer que  $\alpha=0$ . Neste caso a ação do vento pode ser analisada considerando os pórticos alinhados em série, ligados por elementos de grande área, porém que não conseguem transmitir momentos fletores (fazem o papel das lajes) com indicado na figura 2-20 e sujeitos a ação total do vento.



**Figura 2-20- Pórticos planos associados em série para resistirem à ação do vento**



Resolvendo o sistema estrutural indicado na figura 2-20 obtêm-se o efeito da ação lateral do vento em cada pórtico, em função da rigidez do mesmo. Ressalta-se que o procedimento descrito anteriormente se baseia no fato que a laje tem uma área muito grande e assim é praticamente indeformável no sentido do seu plano e, portanto, tem movimento de corpo rígido e funciona como um septo. Havendo simetria, os deslocamentos da parte superior de todos os pilares serão iguais, pois a laje sofre apenas translação e, portanto os esforços em cada pórtico serão proporcionais a rigidez de cada um deles.

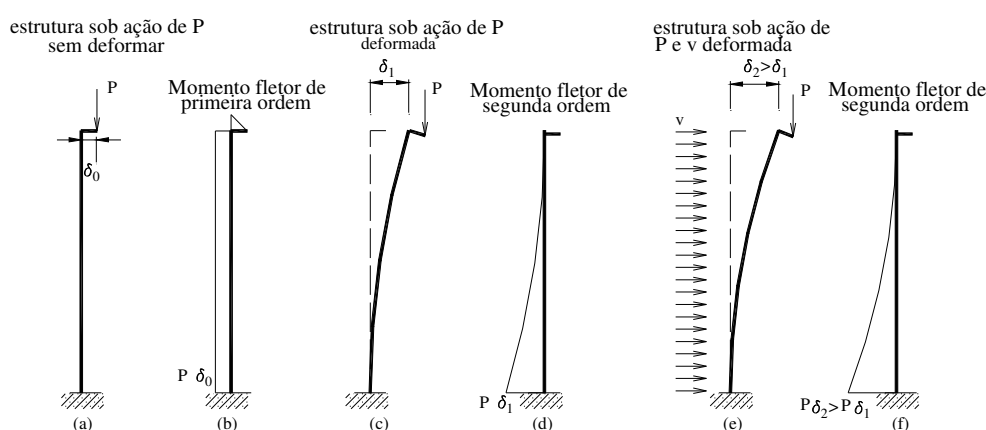
## 2.5. Estabilidade Global em Estruturas de Concreto

De acordo com Pinto (2002) no cálculo estrutural de edifícios altos em concreto armado, deve-se estar atento ao comportamento não-linear da estrutura. Isso porque a mudança de posição da estrutura no espaço e o comportamento não-linear do concreto e do aço fazem com que as estruturas ofereçam uma resposta bem diferente daquela obtida segundo um processamento elástico-linear.

Os efeitos não-lineares se dividem, segundo a sua natureza, em efeitos devidos à mudança de posição da estrutura no espaço, conhecidos por não-linearidade geométrica (NLG) e aqueles referentes ao comportamento não-linear do material, conhecidos por não-linearidade física (NLF).

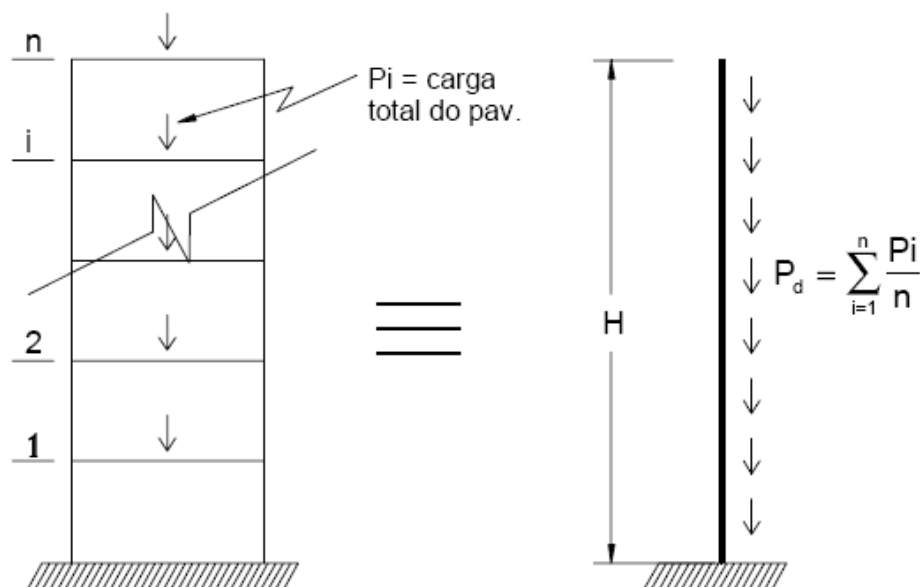
A figura 2-21 mostra uma haste reta, vertical, engastada na base e solta no topo sujeita inicialmente a uma carga vertical (no topo) excêntrica de  $\delta_0$ . Não se considerando a deformação da haste o diagrama de momento fletor, chamado de primeira ordem apresenta, no trecho vertical, o mesmo valor para todas as seções (figura 2-21b) e igual  $M=P \times \delta_0$ . Ao considerar a estrutura se deformando surge devido a própria deformação da estrutura um estado de deformação (figura 2-21c) que origina os momentos fletores, chamados agora de segunda ordem, dados pela figura 2-21d. Ao se

considerar a mesma haste submetida também à ação lateral do vento, representado por um carregamento uniforme de intensidade  $v$ , tem-se a situação da figura 2-21e que resultará nos momentos fletores de segunda ordem representado na figura 2-21d. Os efeitos chamados de segunda ordem são em geral, maiores quando se considera ações laterais atuando em uma estrutura. Se a estrutura em questão possuir uma grande rigidez os valores tanto de  $\delta_1$  como de  $\delta_2$  serão pequenos resultando em momentos de segunda ordem desprezíveis para efeito de cálculo. Como será visto posteriormente considera-se que o momento de segunda ordem é pequeno quando não supera a 10% do momento de primeira ordem. Ressalta-se que tanto no caso do exemplo em questão como também nas estruturas usuais os esforços de primeira ordem devido ao vento devem ser considerados, exceto nas situações em que também forem de baixa intensidade.



**Figura 2-21- Estrutura submetida à ação de carga vertical e às ações laterais de vento ( $v$ ) e os correspondentes efeitos de segunda ordem**

Outra forma de entender conceitualmente a não-linearidade geométrica é a citada por Pinto (2002), para edifícios altos, uma vez que pode-se associar um edifício alto a uma coluna engastada na base, com pavimentos tipo conferindo às cargas verticais o caráter de carregamento uniformemente distribuído (figura 2-22).



*Figura 2-22- Analogia entre um edifício alto e uma coluna engastada na base (extraída de Pinto -2002)*

Para que se possa efetuar esta analogia, no entanto, deve-se estender às estruturas dos edifícios altos os conceitos de produto de rigidez equivalente ( $EI_{eq}$ ) e parâmetro de forma da linha elástica, conforme definido a seguir.

Considere-se uma estrutura submetida a uma ação horizontal uniformemente distribuída  $q_d$  sendo  $a_d$  o deslocamento horizontal do topo (figura 2-23) O produto de rigidez ( $EI_{eq}$ ) é aquele equivalente ao de uma estrutura prismática engastada na base, de módulo de rigidez  $E$  constante ao longo de sua altura  $H$ , que sob a ação de  $q_d$  apresenta o mesmo deslocamento  $a_d$  no topo.

Recorrendo-se então à expressão da linha elástica correspondente a um pilar engastado na base com uma ação lateral uniformemente distribuída, tem-se;

$$EI_{eq} = \frac{q_d \cdot H^4}{8 \cdot a_d}$$

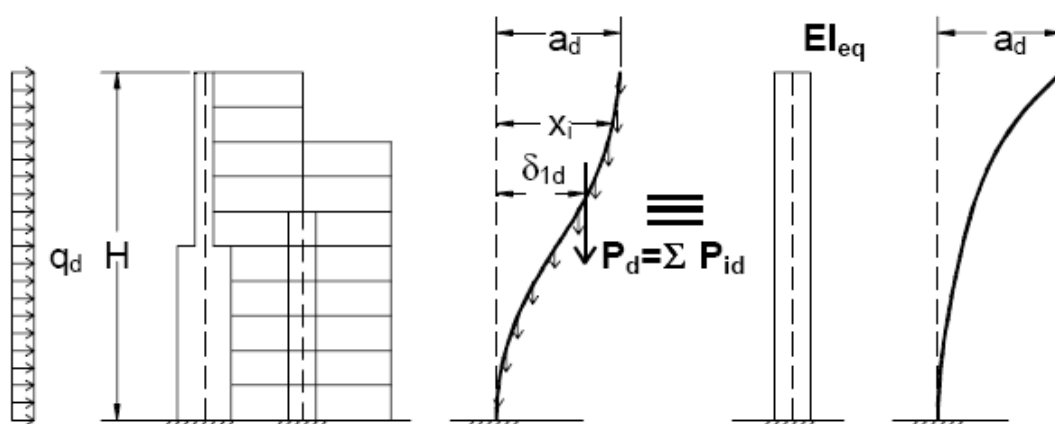


Figura 2-23- Produto de rigidez equivalente para uma estrutura qualquer – (extraída de Pinto - 2002)

Assim, conhecidas as ações globais do vento, ou seja, as forças de arrasto do vento ao longo da altura é possível determinar o esforços internos resolvendo (para uma estrutura composta de pilares e vigas) pórticos planos. Em muitas situações, principalmente as de simetria, é possível obter os esforços de vento considerando o efeito de septo (diafragma), dos pavimentos compostos de lajes de concreto.

Para fins de análise da estabilidade global das estruturas de edificações, as mesmas de acordo com a NBR 6118:2003 são classificadas como sendo de nós fixos ou de nós móveis.

As estruturas de nós fixos são aquelas em que os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos, sendo assim os efeitos globais de segunda ordem desprezíveis (consideram-se desprezíveis quando os esforços de segunda ordem decorrentes destes deslocamentos forem inferiores a 10% dos esforços de primeira ordem). Assim, nessas estruturas, basta considerar os efeitos locais de segunda ordem.

Por outro lado, as estruturas de nós móveis são aquelas em que os deslocamentos horizontais dos nós não são pequenos e, portanto os efeitos globais de segunda ordem são importantes e devem ser obrigatoriamente considerados, tanto os globais como os locais.

A NBR 6118:2003, no seu item 15.5 estabelece as condições para a dispensa da consideração dos esforços globais de segunda ordem, por meio de dois processos aproximados apresentados respectivamente nos itens 15.5.1 e 15.5.2, o parâmetro de instabilidade  $\alpha$  e o coeficiente  $\gamma_z$ , que são abordados a seguir.

### 2.5.1. Parâmetro de instabilidade $\alpha$ - (NBR 6118:2003 – Item 15.5.1)

Uma estrutura reticulada poderá ser considerada como sendo de nós fixos se seu parâmetro de instabilidade  $\alpha$  for menor que o valor  $\alpha_1$ , conforme a expressão abaixo:

$$\alpha = H_{\text{tot}} \sqrt{\frac{N_k}{E_{cs} I_c}} \leq \alpha_1$$

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1.n \quad \text{se: } n \leq 3$$

$$\alpha_1 = 0,6 \quad \text{se: } n \geq 4$$

Onde:

$n$  – é o número de níveis de barras horizontais (andares) acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;

$H_{\text{tot}}$  – é a altura total da estrutura, medida a partir do topo da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;

$N_k$  – é o somatório de todas as cargas verticais atuantes na estrutura (a partir do nível considerado para o cálculo de  $H_{\text{tot}}$ ), com seu valor característico;

$E_{cs} I_c$  – representa o somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada.

No caso de estruturas de pórticos, de treliças ou mistas, ou com pilares de rigidez variável ao longo da altura, pode ser considerado o valor da expressão  $E_{cs} I_c$  de um pilar equivalente de seção constante.

Cabe ainda observar que, na análise de estabilidade global, pode ser adotado o valor do módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial ( $E_c = 5600 \cdot f_{ck}^{1/2}$ ), sendo  $f_{ck}$  em MPa.

O valor de  $I_c$  deve ser calculado considerando as seções brutas dos pilares, sendo que no caso de se utilizar pilar equivalente, a rigidez do mesmo deverá ser determinada da seguinte forma:

- calcular o deslocamento do topo da estrutura de contraventamento, sob a ação do carregamento horizontal;
- calcular a rigidez de um pilar equivalente de seção constante, engastado na base e livre no topo, de mesma altura  $H_{tot}$ , tal que, sob a ação do mesmo carregamento, sofra o mesmo deslocamento no topo;

Finalmente, há que se observar que o valor limite  $\alpha_1 = 0,6$  prescrito para  $n \geq 4$  é, em geral, aplicável às estruturas usuais de edifícios. Pode ser adotado para associações de pilares-parede e para pórticos associados a pilares-parede. Pode ser aumentado para  $\alpha_1 = 0,7$  no caso de contraventamento constituído exclusivamente por pilares-parede e deve ser reduzido para  $\alpha_1 = 0,5$ , quando só houver pórticos.

### **2.5.2. Coeficiente $\gamma_z$ – (NBR 6118:2003 – Item 15.5.3)**

O coeficiente  $\gamma_z$  de avaliação da importância dos esforços de segunda ordem globais é válido para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares. Ele pode ser determinado a partir dos resultados de uma análise linear de primeira ordem, para cada caso de carregamento, adotando-se os valores de rigidez com a consideração aproximada da não-linearidade física, conforme abaixo descrito e previsto no item 15.7.3 da NBR 6118:2003.

O valor de  $\gamma_z$  para cada combinação de carregamento é dado pela seguinte expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{\text{tot,d}}}{M_{1,\text{tot,d}}}}$$

Onde:

$M_{1,\text{tot,d}}$  – é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus respectivos valores de cálculo, em relação à base da estrutura;

$\Delta M_{\text{tot,d}}$  – é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais e de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem;

Considera-se que a estrutura é de nós fixos se for obedecida a condição:

$$\gamma_z \leq 1,10;$$

Na análise estrutural de estruturas de nós móveis, devem ser obrigatoriamente considerados os efeitos da não-linearidade geométrica e da não-linearidade física e, portanto no dimensionamento devem ser obrigatoriamente considerados os efeitos globais e locais de 2ª ordem.

A NBR 6118:2003 em seu item 15.7.2 define uma solução aproximada para a determinação dos esforços globais de 2ª ordem que consiste na avaliação dos esforços finais (1ª ordem + 2ª ordem) a partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação de carregamento considerada por 0,95.  $\gamma_z$  quando o valor de  $\gamma_z$  for menor que 1,3.

No que se refere a consideração aproximada da não-linearidade física, a NBR 6118:2003 em seu item 15.7.3 estabelece que para a análise dos esforços globais de 2ª ordem, em estruturas reticuladas com no mínimo quatro andares, pode ser considerada a não-linearidade física de maneira aproximada, tomando-se como rigidez dos elementos estruturais os seguintes valores;

- lajes:  $(EI)_{\text{sec}} = 0,3E_{ci}I_c$

- vigas:  $(EI)_{sec} = 0,4E_{ci}I_c$  para  $A_s' \neq A_s$  e  
 $(EI)_{sec} = 0,5E_{ci}I_c$  para  $A_s' = A_s$
- pilares:  $(EI)_{sec} = 0,8E_{ci}I_c$

Onde:

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto, incluindo, quando for o caso, as mesas colaborantes;

Finalmente, há que se observar que quando a estrutura de contraventamento for composta exclusivamente por vigas e pilares e  $\gamma_z$  for menor que 1,3, permite-se calcular a rigidez das vigas e pilares por:  $(EI)_{sec} = 0,7E_{ci}I_c$ .



### **3. ANÁLISE DE FERRAMENTAS QUE PODEM SER UTILIZADAS NO ENSINO DA DISCIPLINA ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

Diversas ferramentas podem ser usadas no ensino das disciplinas de concreto. O maior empecilho é que a maioria delas é inacessível aos alunos, pois ou precisam de licenças para seu uso ou demandam conhecimentos específicos para geração de dados sem contudo contribuir na formação dos mesmos.

Aqui se pretende mostrar que usando duas ferramentas de resolução de estruturas prismáticas um aluno de graduação, que preferencialmente já tenha conhecimento de análise matricial, pode facilmente montar modelos que façam análise de pavimentos e a iteração de vigas e pilares de edificações de concreto armado.

A idéia é que o aluno usará para fazer estas análises apenas modelos de grelhas e pórticos planos, sistemas estruturais já estudados. Com estas duas ferramentas o aluno poderá evitar gastar muito tempo na determinação dos deslocamentos e esforços solicitantes reservando seu tempo para a análise do comportamento da estrutura e o detalhamento da armadura de forma conveniente.

#### **3.1. Fatores que levam a escolha de ferramentas computacionais**

A primeira pergunta a se responder é:

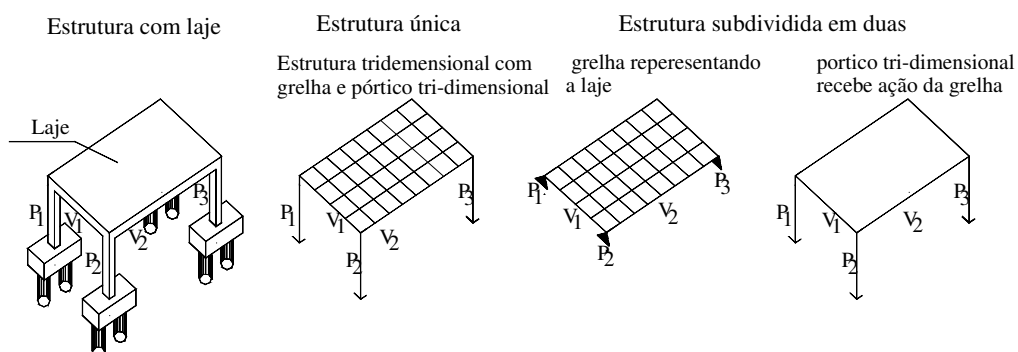
É necessário utilizar programas de computador para aprender estruturas de concreto?

O capítulo anterior mostra que o engenheiro civil precisa conhecer como uma estrutura de concreto de uma edificação usual de múltiplos andares se comporta submetida às ações de vento. Não há como evitar esse tema sem prejuízo da formação do engenheiro. Nesse caso, é preciso considerar a associação de pilares e vigas resistindo a ação lateral do vento.

Da mesma forma a análise de um pavimento precisa ser feita de forma integrada. Não há mais como se considerar que em um momento a viga sirva de apoio indeslocável na vertical para a laje e em outro momento de cálculo passa a ser deformável. São raciocínios simplistas que não traduzem o comportamento real da estrutura. Assim, se o paradigma do ensino de estruturas de concreto armado é a busca da representação cada vez melhor da realidade, é preciso considerar a deformabilidade de cada elemento. Mais correto ainda é considerar a deformabilidade relativa de cada trecho (elemento) da estrutura.

Assim o primeiro fator a se considerar em se levar em conta pela escolha do uso de ferramentas computacionais é a representação mais próxima da realidade com a consideração das deformabilidades relativas numericamente. Sem programas de computador essas análises são apenas qualitativas do tipo: a viga é indeslocável na vertical quando comparada à laje, ou pórticos com geometria similar absorvem mesma parcela de ação de vento. Essas considerações levam a cálculos com pouca precisão.

O maior obstáculo para emprego de modelos de pórticos e grelha para determinar as ações em estruturas de concreto é o alto grau de hiperestaticidade (ou de quantidade de equações a serem resolvidas) para representar estruturas bem simples. Fica fácil de identificar isso ao se analisar a estrutura simples já mostrada na figura 2-6 e repetida na figura 3-1. Considerando a grelha que representa a laje do forro da garagem percebe-se que há 45 nós, e como se considera que o sistema é constituído por uma grelha, é necessário, portanto resolver um sistema de 135 equações.



**Figura 3-1- Perspectiva esquemática da estrutura de concreto calculada agora de uma só vez com uma grelha equivalente e pórtico tridimensional e subdividida em grelha e pórtico espacial.**

Assim, fica claro que não é possível resolver uma grelha desse tipo manualmente, mesmo considerando dupla simetria geométrica (laje quadrada).

Pórticos para estruturas de dois andares como a resolvida no capítulo 5, cuja planta é repetida na figura 3.2 terão pelo menos 9 nós (veja a figura 3.3) que demandará a resolução de um sistema de 27 equações lineares.

Assim, o segundo fator para se decidir por um programa de computador está na necessidade de, ao se adotar modelos mais complexos de análise, (pórtico plano e grelha), resolver sistemas com grande número de equações só ao alcance de programas de computadores.

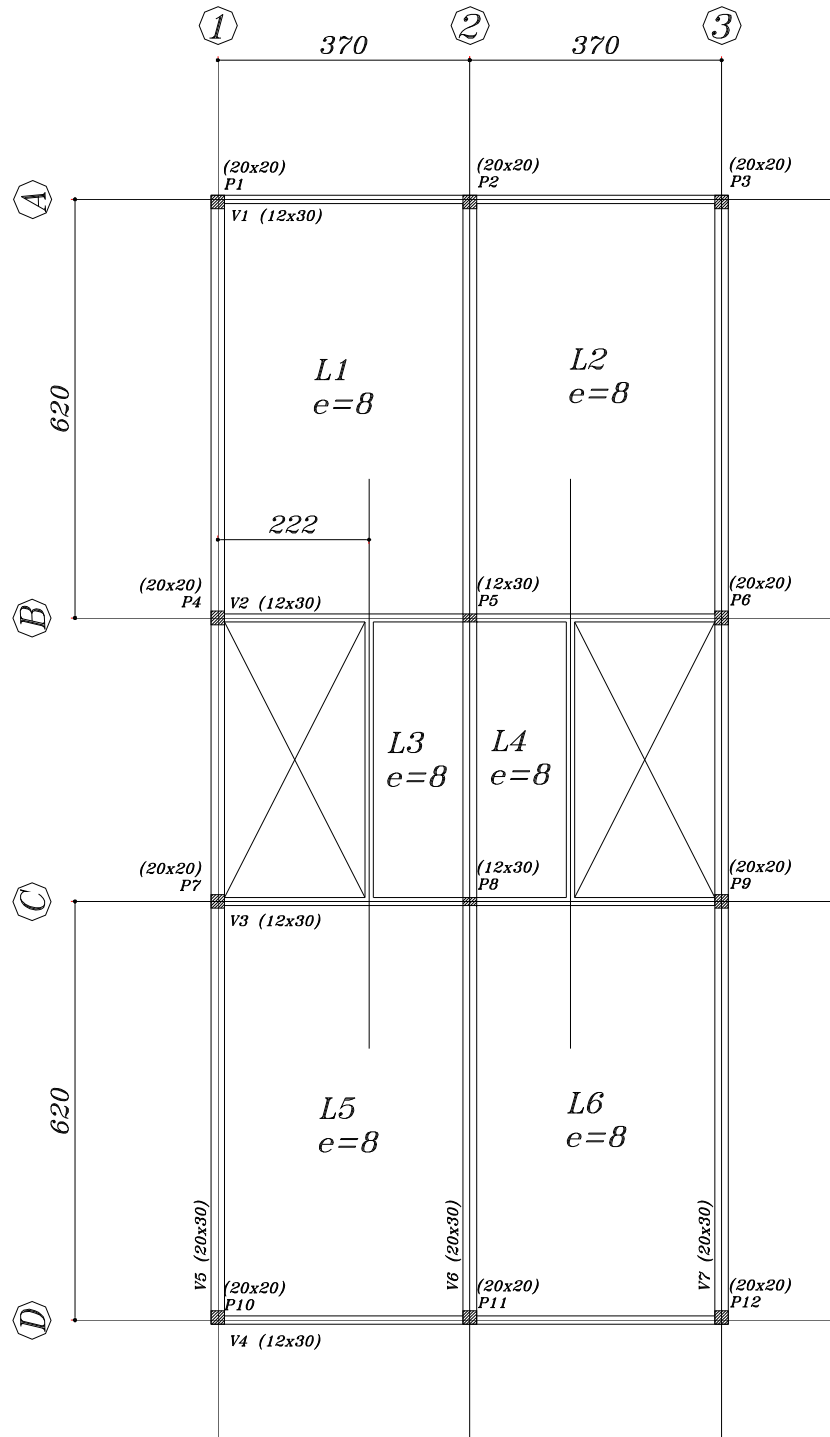
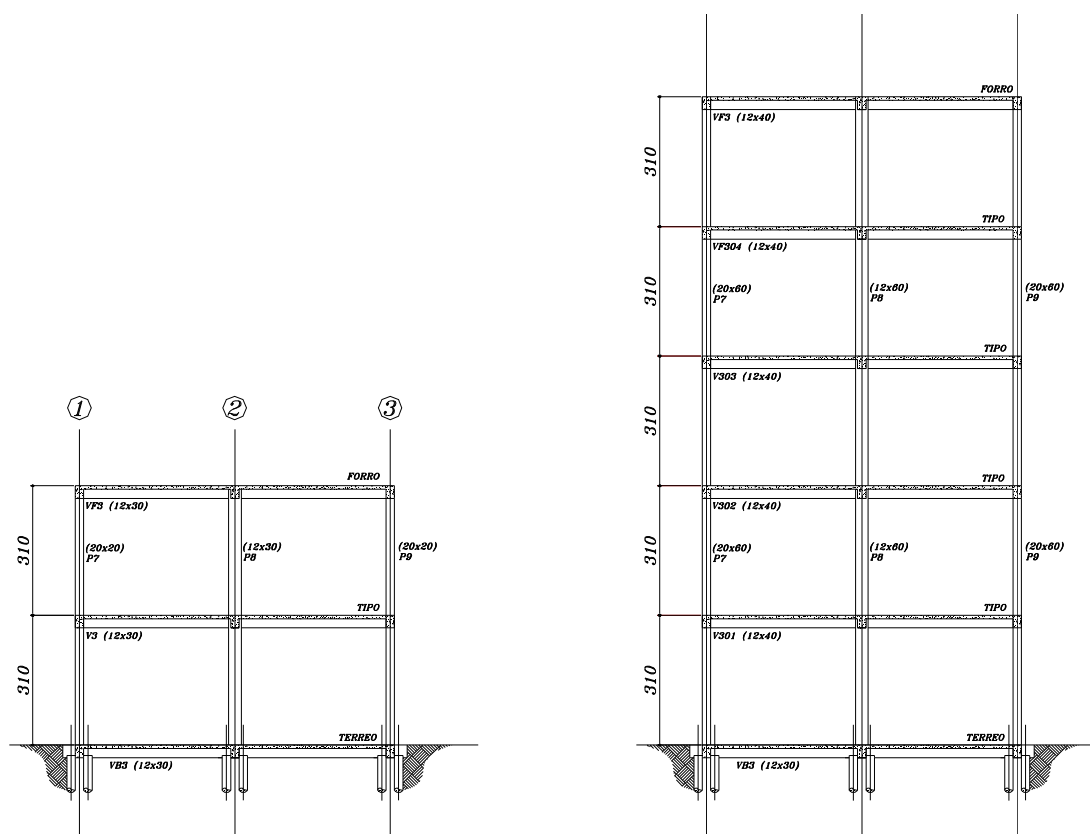


Figura 3-2 – Planta Esquemática do pavimento-tipo



*Figura 3-3– Corte Esquemático para estrutura de 2 e 5 pavimentos*

Ainda que, se atenda os dois fatores anteriores é preciso considerar:

Com o uso de programas um aluno pode ou consegue com rapidez adequada fazer a análise de estruturas simples de concreto armado?

A resposta para essa questão é que devem ser utilizadas ferramentas que são simples de ser usadas, tem precisão adequada, permitam introduzir as ações, demandem pouco tempo para introdução de dados e geração dos modelos e finalmente apresentem saídas de esforços e deslocamentos detalhadas e possíveis de serem armazenadas em arquivo.

Finalmente o fator mais determinante é que tais ferramentas computacionais sejam acessíveis, de preferência gratuitas, caso contrário os alunos não poderão dispor das mesmas para estudar no momento oportuno.

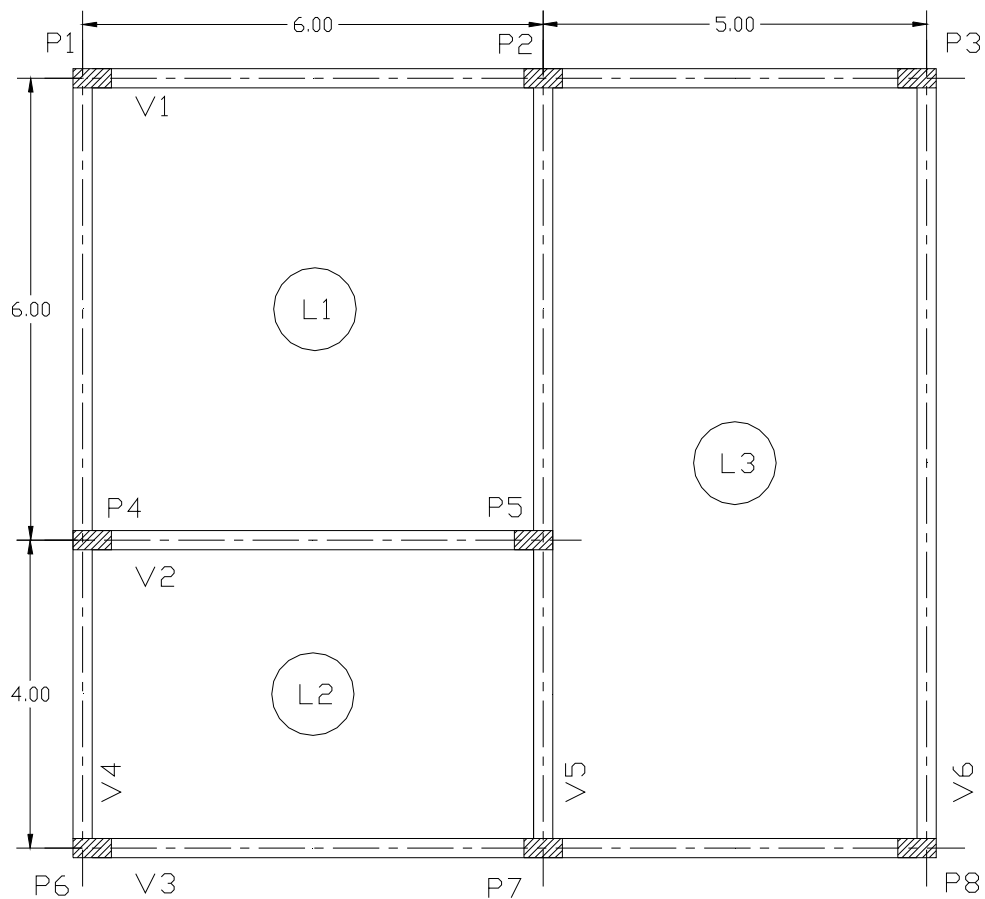
Neste trabalho analisam-se duas ferramentas computacionais o GPLAN e o FTOOL que podem ser utilizadas no ensino da disciplina de concreto armado. Elas se caracterizam principalmente por:

- Permitirem a modelagem de pavimentos por grelha equivalente e a análise de pórticos planos;
- Terem capacidade para resolverem modelos que reproduzam estruturas usuais;
- Serem gratuitas, simples de usar, possuírem documentação para seu emprego, permitirem uma rápida análise sem necessidade de horas de cálculo manual e possuírem saídas detalhadas e adequadas;

### **3.2 Análise Técnica da Ferramenta GPlan**

Trata-se de um programa para resolver sistemas de grelha planas, desenvolvido pelos professores Márcio Roberto Silva Correa, Márcio Antonio Ramalho da EESC-USP e Luiz Henrique Ceotto da UFSCar na década de 80. Foi desenvolvido em linguagem FORTRAN para ser operado no sistema DOS. Tem sido usado desde então nos cursos de graduação nas disciplinas de concreto, nos cursos de especialização e nas dissertações de mestrado e mesmo doutorado de diversos engenheiros, tanto na UFSCar como na EESC-USP. Assim, pode-se iniciar a apresentação do programa GPLAN afirmando que já foi amplamente testado, sendo consistente, poderoso e bastante completo levando-se em conta a época em que foi idealizado e os recursos empregados para o seu desenvolvimento. O programa na verdade existe em duas versões: a mais simples denominada GPLAN; outra de maior capacidade e recursos denominada de GPLAN4. Neste trabalho utilizou-se a versão GPLAN.

O programa GPLAN não possui entrada nem saída gráfica como é comum aos programas mais modernos que podem ser desenvolvidos com interfaces gráficas. Apresenta apenas um módulo de verificação de entrada denominada de PLOLASER que permite a visualização dos dados introduzidos mostrando o esquema da grelha como apresentado nas figuras 3-4 e 3-5 correspondentes ao pavimento apresentado na figura 3-3. Por outro lado, esta é uma oportunidade para utilizarmos por exemplo a planilha EXEL, para obtenção da estrutura deformada e dos diagramas, como foi utilizado neste trabalho.



**Figura 3-4- Planta do pavimento a ser analisado**

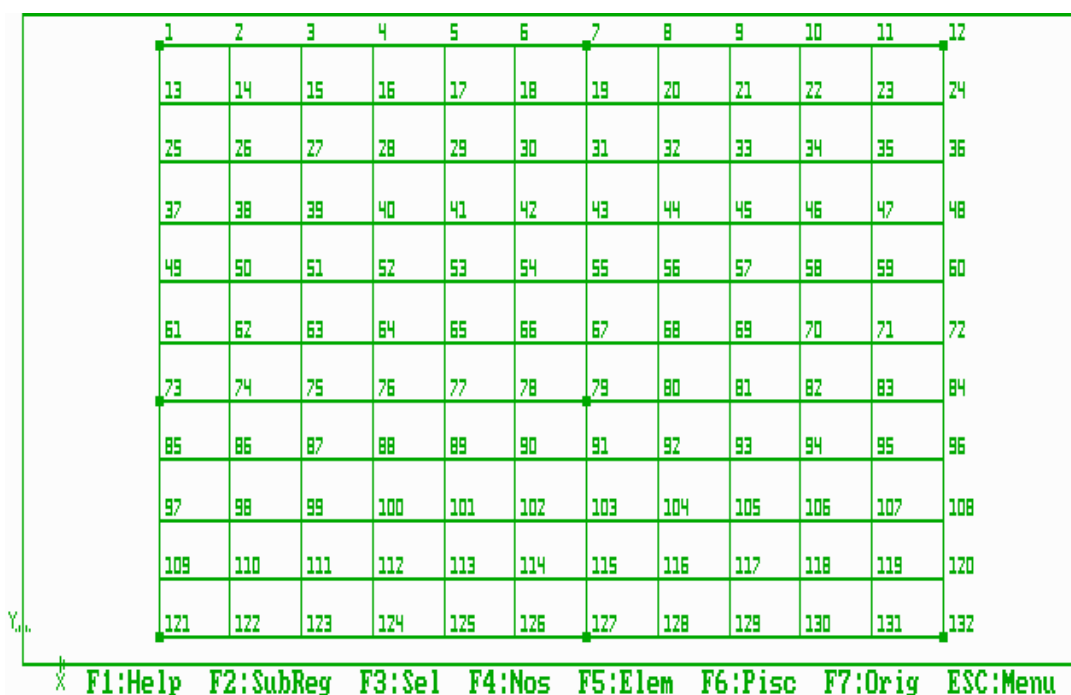


Figura 3-5- – Esquema dos nós da grelha do pavimento da figura 3-3

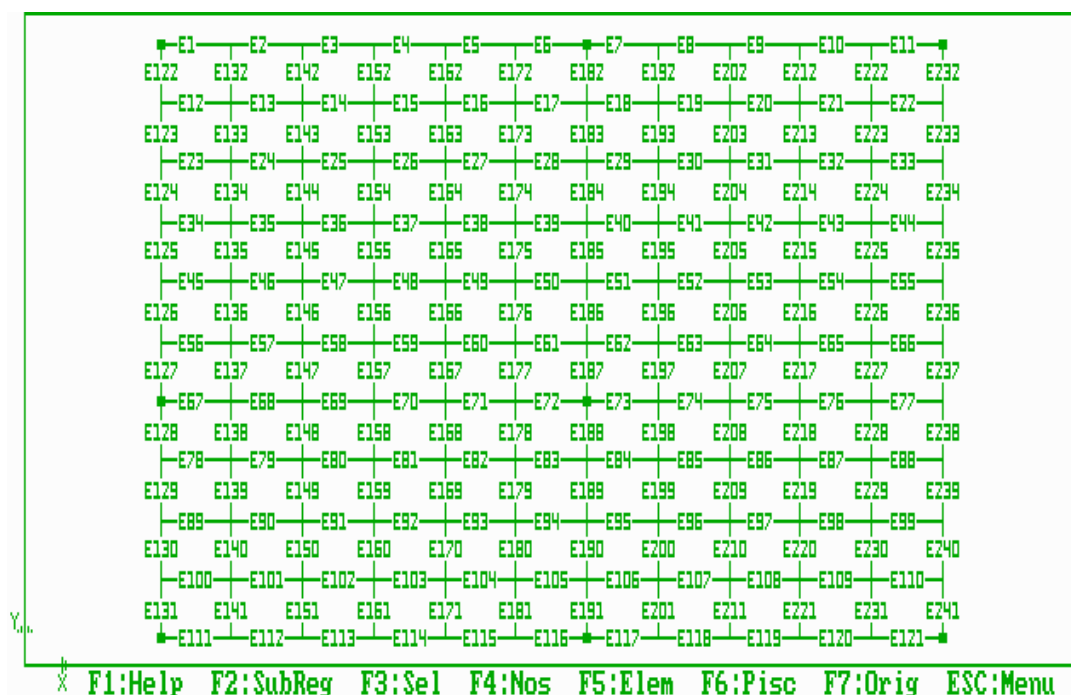


Figura 3-6 – Esquema das barras da grelha equivalente do pavimento da figura 3-3



Como se vê nas figuras 3.5 e 3.6, embora o esquema seja graficamente simples o usuário consegue identificar facilmente como foram gerados os nós e as barras. Este módulo permite ainda representar os nós de apoio, as barras com certas características, sendo de grande utilidade para a verificação da consistência dos dados de entrada, antes do processamento final.

A entrada de dados é feita por meio de arquivo de dados que segue uma lógica similar a de uma linguagem, ou seja, são escritas palavras que significam comandos, seguidos de dados numéricos. Exemplo de arquivo com entrada de dados é mostrado na figura 3-6.

OPTE,0,3,3,3,3,	97,104,1,4,9,13,9,1,
TESTE DA TESE	105,112,1,5,9,14,9,1,
ROBERTO CHUST CARVALHO	113,120,1,6,9,15,9,1,
LAJE6DAT	121,128,1,7,9,16,9,1,
NOGP	129,136,1,8,9,17,9,1,
1,9,1,0,8,8,8,8,	RESG
73,81,9,0,0,8,0,0,	1,9,1,1,0,0,
BARG	73,81,1,1,0,0,
1,8,1,1,1,2,1,2,	10,64,9,1,0,0,
65,72,1,73,1,74,1,2,	18,72,9,1,0,0,
73,80,1,1,9,10,9,2,	PROP
137,144,1,9,9,18,9,2,	1,1,01,4.226E-3,8.44E-3,08,
9,16,1,10,1,11,1,1,	2,1,37,9.38E-2,2.83E-4,08,
17,24,1,19,1,20,1,1,	MATL
25,32,1,28,1,29,1,1,	1,2.90E+06,1.21E+06,
33,40,1,37,1,38,1,1,	FIMG
41,48,1,46,1,47,1,1,	CARR1
49,56,1,55,1,56,1,1,	CNOG
57,64,1,64,1,65,1,1,	1,81,1,-1.325
81,88,1,2,9,11,9,1,	FIMC
89,96,1,3,9,12,9,1,	FIME

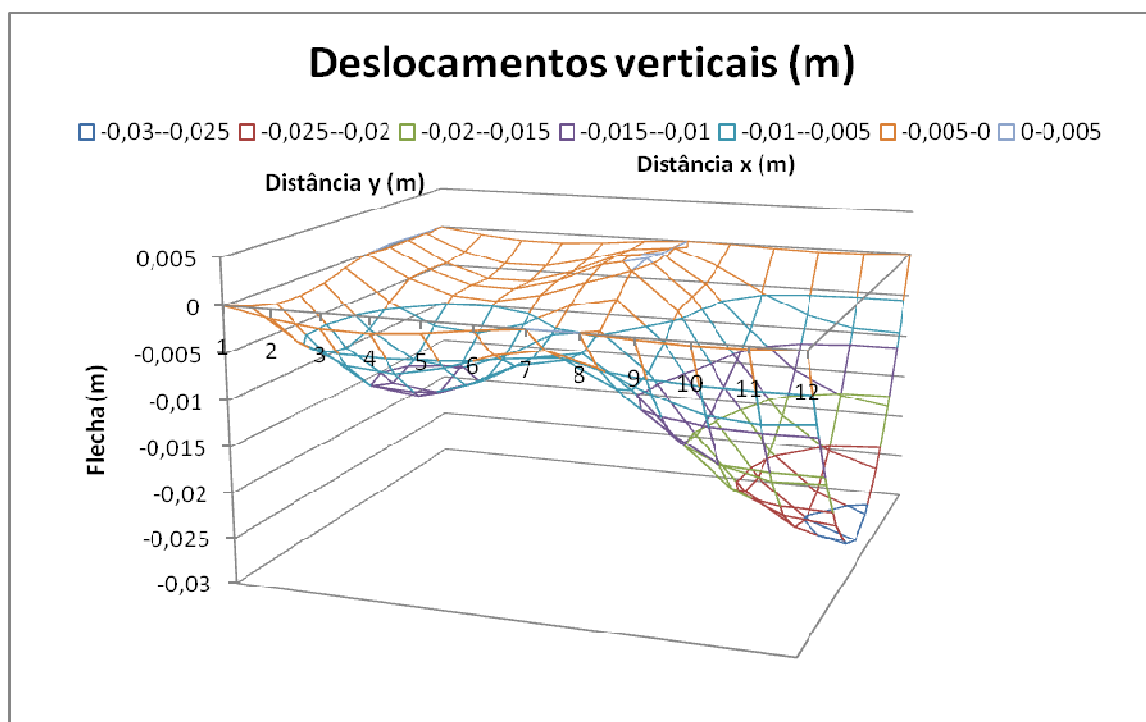
Figura 3-7– Arquivo de entrada de dados típico para a grelha da figura 3.4

A geração de dados através de um arquivo como o mostrado pela figura 3.6 embora seja engenhosa, pois com poucas linhas podem ser gerados muitos nós, barras, características e carregamentos ou ações atuantes, é bastante laboriosa. Para uma pessoa que conhece a lógica da confecção de programa de barras prismáticas através de análise matricial é bastante fácil entender e todo aluno que cursa uma disciplina de análise matricial aprende rapidamente a criar o arquivo. Porém, sem dúvida esta é a principal desvantagem do emprego desse programa, pois é preciso inicialmente fazer um croqui com o esquema para gerar o arquivo já que é preciso conhecer toda a numeração dos nós e das barras.

O arquivo GPLAN consiste na verdade de um arquivo de execução de “lotes”, ou seja, um arquivo que aciona outros programas no sistema DOS que permite chegar aos resultados esperados. Assim, inicialmente um módulo do sistema lê os dados gerando toda a geometria da estrutura, com os nós e as barras, identificando as características das mesmas, seus cossenos diretores e identificando as restrições a deslocamentos existentes. Dessa forma, um arquivo de saída do tipo texto é criado com todo o relatório das informações geométricas e elásticas que podem ser conferidas, armazenadas ou mesmo lidas por outro programa. O segundo módulo lê os dados devidos às ações atuantes e calcula os esforços nodais equivalentes necessários para resolver a estrutura. Também este módulo gera um arquivo contendo as informações das ações nodais para cada carregamento dado (podem ser criados diversos carregamentos). Por último, o terceiro módulo tem a função de, a partir da leitura dos arquivos anteriores, montar a matriz de rigidez e de cargas da estrutura, resolver o sistema, determinar os deslocamentos (resolvendo o sistema de equações lineares), esforços solicitantes internos e reações de apoios. Este módulo gera ainda o arquivo final de saída que, fornece os deslocamentos nodais, os esforços solicitantes nas extremidades das barras (pode até calcular os esforços em décimos de vão em cada elemento) e reações de apoio finalizando o programa.

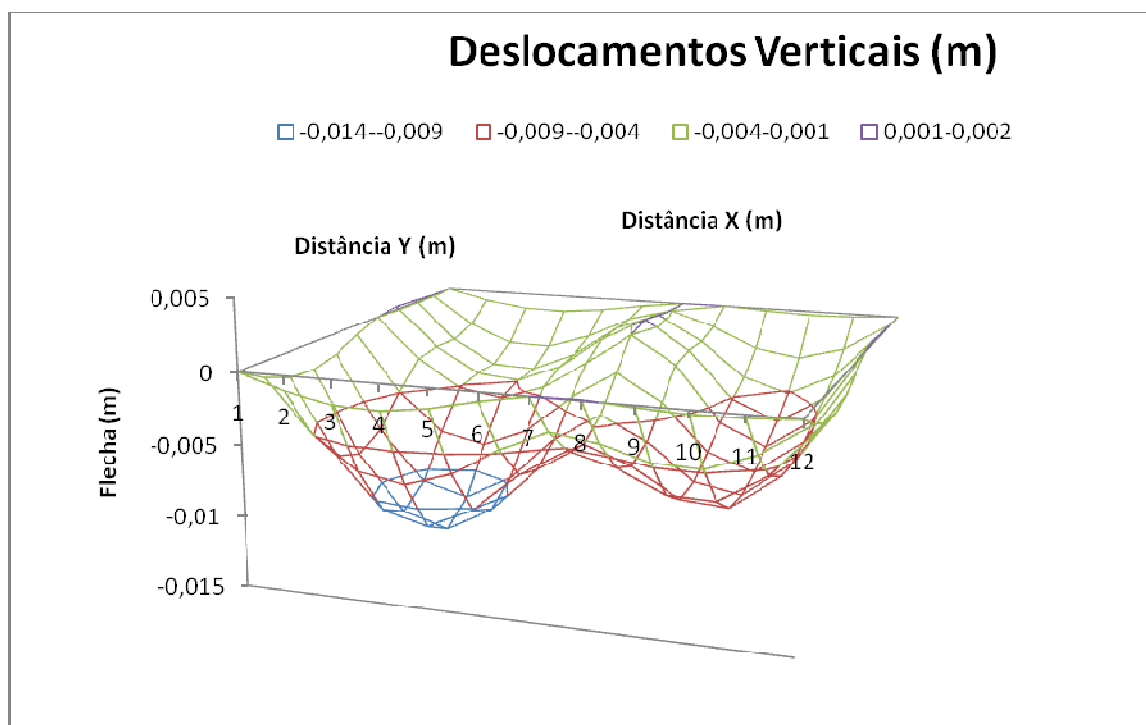
Assim, apesar de sua idade o programa GPLAN ainda pode ser utilizado com sucesso no ensino de estruturas de concreto. Permite, a partir de um arquivo gerado, fazer mudanças estruturais de forma rápida.

Um exemplo desta aplicação pode ser obtido quando ao manipular o arquivo de saída do GPLAN para resolver a grelha equivalente do pavimento da figura 3.4. Este arquivo com os dados do deslocamento vertical devidamente ordenado e colocado em uma planilha EXCEL gera o esquema de deformação da estrutura indicado na figura 3-7. que mostra por exemplo que a viga de 10 m de vão se deforma excessivamente.



**Figura 3-8 - Estrutura do pavimento da figura 3.4 sem pilar intermediário na viga de 10 m.**

Com apenas uma mudança na restrição de um apoio é possível resolver a mesma estrutura considerando que na viga de vão de 10m de vão haja um pilar intermediário resultando na estrutura deformada apresentada na figura 3-8.



*Figura 3-9- Estrutura do pavimento da figura 3.4 com pilar intermediário na viga de 10 m*

### 3.3. Análise Técnica da Ferramenta FTOOL

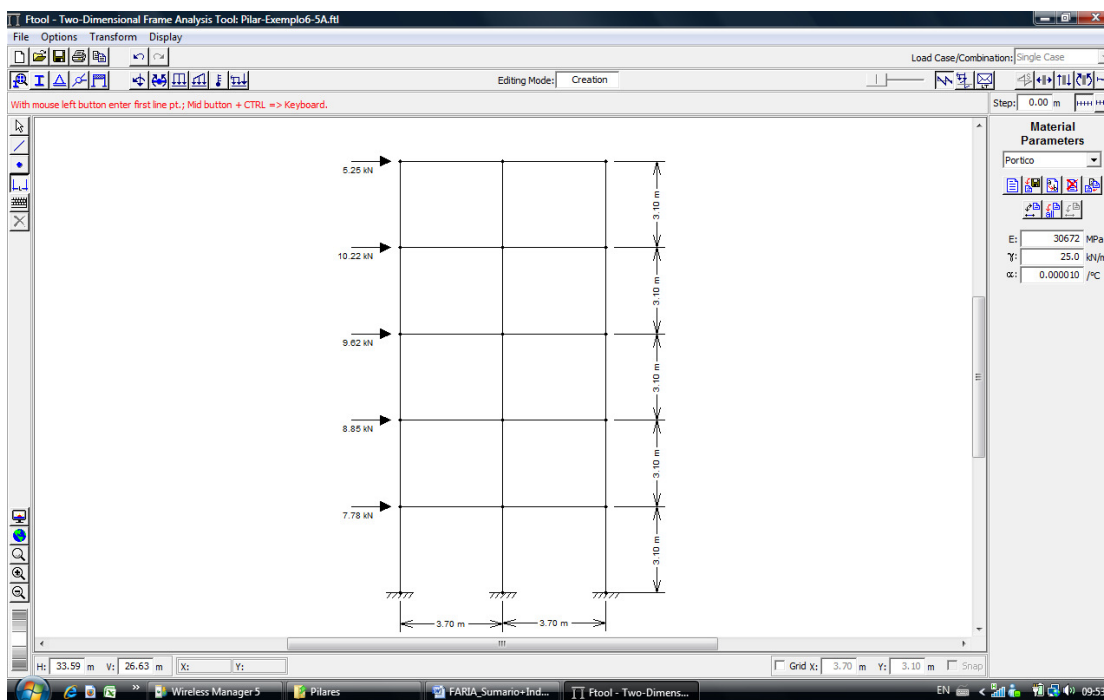
De acordo com MARTHA (2002), o FTOOL (Two Dimensional Frame Analysis Tool) é um sistema gráfico interativo cujo objetivo principal é fornecer ao estudante de engenharia estrutural uma ferramenta para aprender o comportamento estrutural de pórticos planos. O sistema consiste de uma interface gráfica com o usuário baseada em manipulação direta, utilizando um sistema de janelas, com menus em cascata e botões.

O estudante tem controle total sobre o modelo estrutural a ser analisado. A manipulação no modelo é feita através de entrada via mouse e/ou teclado. O programa integra todas as fases do processo de análise estrutural: criação e manipulação do modelo com aplicação de atributos (pré-processamento). Uma estrutura de dados bastante eficiente, baseada em topologia computacional, permite uma integração natural entre estas fases e uma poderosa capacidade de modelagem e visualização. Essa integração é o

aspecto fundamental no processo de aprendizagem, permitindo ao estudante experimentar com rapidez diferentes concepções estruturais para uma estrutura e assim entender melhor o seu comportamento estrutural.

A figura 3.10 ilustra a tela inicial do programa, onde se percebe que o mesmo é uma ferramenta simples, unindo em uma única interface recursos para uma eficiente criação de manipulação do modelo (pré-processamento) aliados a uma análise da estrutura rápida e transparente e a uma visualização de resultados também rápida e efetiva (pós-processamento), o que facilita o entendimento por parte do aluno iniciante.

O FTOOL foi desenvolvido inicialmente por meio de um projeto de pesquisa integrado, coordenado pelo professor Marcelo Gattass do Departamento de Informática da PUC-Rio e diretor do grupo de Tecnologia em Computação Gráfica (Tecgraf/PUC-RIO) e com apoio do CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico). O idealizador e responsável pelo programa é o professor Luiz Fernando Martha do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio. A primeira versão do programa foi desenvolvida na plataforma DOS, em 1992, sofrendo aprimoramentos até abril de 1995. Durante o período do final de 1997 ao início de 1998, o FTOOL foi reescrito pelo professor Luiz Fernando Martha utilizando o sistema de interface IUP e o sistema gráfico CD, desenvolvidos pelo Tecgraf/PUC-Rio. Esta interface gráfica permite que o programa seja executado tanto no ambiente Windows quanto no ambiente Unis/X-Windows. Em fevereiro de 1998 foi lançada a versão 2.00 do programa e desde então sucessivas versões do FTOOL foram lançadas, cada uma com pequenos melhoramentos. A última versão lançada do FTOOL é a 2.12, datada de fevereiro de 2008.



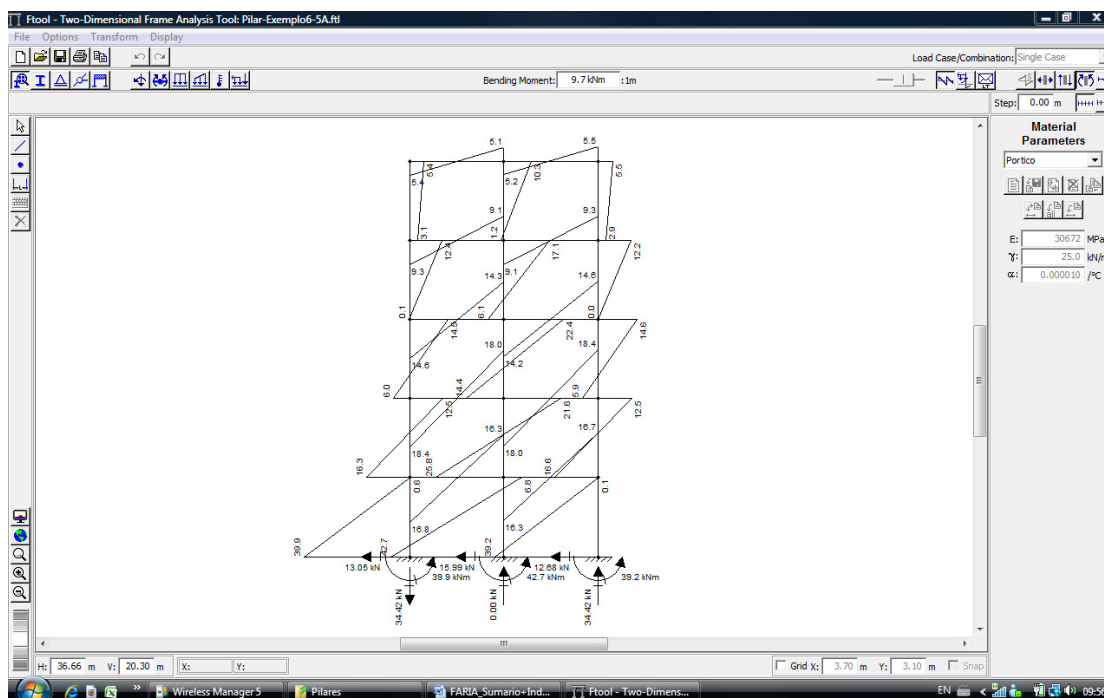
*Figura 3-10– Tela do programa FTOOL – Versão 2.12*

Dessa forma, pode-se dizer que o FTOOL ocupa um espaço pouco explorado. É um programa gráfico interativo que objetiva ensinar o comportamento estrutural de quadros planos. Não há preocupação em ensinar os diversos processos matemáticos e computacionais disponíveis para o cálculo destas estruturas, tampouco iniciar os estudantes em sofisticadas plataformas de análise. Seu objetivo básico é motivar o aluno a aprender a teoria dos métodos de análise mostrando como o modelo se comporta na prática. A experiência tem mostrado que a filosofia utilizada no FTOOL funciona, pois ele é usado com sucesso em disciplinas de Análise Estrutural, Estruturas de Concreto Armado e Estruturas de aço em diversas instituições de ensino de engenharia no Brasil e em outros países.

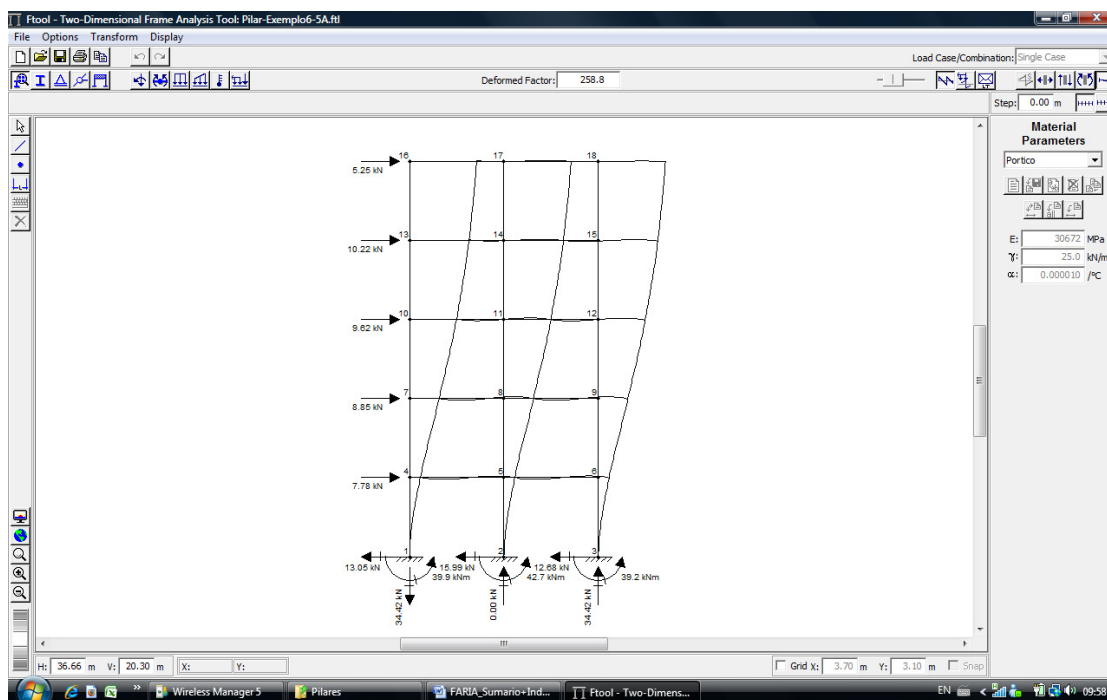
Outro aspecto importante a se ressaltar no caso do software FTOOL, é a disponibilidade do software e do respectivo manual on-line, onde o estudante ou mesmo

o profissional pode fazer download, a partir do seguinte endereço eletrônico: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool> .

Considerando a figura 3-2 mostrada anteriormente, na qual se observa o corte da edificação de 05 pavimentos, que será utilizada nos exemplos do capítulo 5, o lançamento dessa estrutura no FTOOL, é o que está mostrado a título de ilustração na figura 3-9. Considerando a mesma com cargas horizontais provenientes da ação lateral do vento na estrutura, as figuras 3-10 e 3-11 abaixo, mostram como o programa apresenta a saída de resultados, tanto do diagrama de momento fletor nas barras, quanto da estrutura deformada.



**Figura 3-11- Representação do diagrama de Momento Fletor da estrutura, devido à ação lateral do vento**



*Figura 3-12- Representação da estrutura deslocada horizontalmente devido a ação lateral, devido à ação lateral do vento*



## 4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO COM PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE PARA PAVIMENTOS

Escolhe-se uma série de exemplos didáticos, porém práticos, ou seja, procura-se mostrar aqui como as ferramentas em questão e o conhecimento de mecanismos básicos de concreto armado é possível realizar análise de elementos ou trechos de estruturas. Inicia-se o capítulo mostrando como pode ser analisado o pavimento de laje maciça. Para tanto, são feitos diversos exemplos procurando-se mostrar a validação da teoria de grelha equivalente

### 4.1. Análise de Laje Isolada

Para validar a aplicação da teoria da grelha equivalente resolve-se inicialmente, uma placa isolada, apoiada no seu contorno, comparando os resultados com os da teoria de placas delgadas, comumente utilizado na obtenção de esforços e deslocamentos de lajes isoladas.

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos mediante o emprego do processo de analogia de grelha com os obtidos por meio da teoria das placas delgadas, será analisada inicialmente uma placa quadrada de 8,0 x 8,0m e de 10 cm de espessura, suposta simplesmente apoiada em seu contorno, este considerado indeslocável verticalmente. Após a apresentação do detalhamento do procedimento relativo a laje simplesmente apoiada no seu contorno, o mesmo procedimento será extrapolado para as demais tipos de lajes, de acordo com suas condições de vinculação, conforme apresentado na figura 4-3. A laje objeto do exemplo tem ainda os seguintes dados complementares:

#### **Concreto:**

- Resistência característica do concreto à compressão:  $f_{ck} = 30,0$  MPa
- Módulo de deformação longitudinal do concreto:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{30} = 26072 \text{ MPa} = 2,6072 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,2$
- Módulo de deformação transversal do concreto:

$$G_c = 0,40 \cdot E_c = 0,4 \cdot 26072 = 10429 \text{ MPa} = 1,0429 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

#### Dados do carregamento da placa:

- Peso próprio:  $g_1 = 0,10 \cdot 25 = 2,5 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga permanente:  $g_2 = 1,0 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga de utilização:  $q = 2,0 \text{ kN/m}^2$
- Carga total:  $p = 5,5 \text{ kN/m}^2$

#### 4.1.1. Resolução por Grelha Equivalente:

Adotou-se uma grelha equivalente composta de 81 nós e 144 barras, com espaçamento de 100 cm entre as barras nas duas direções.

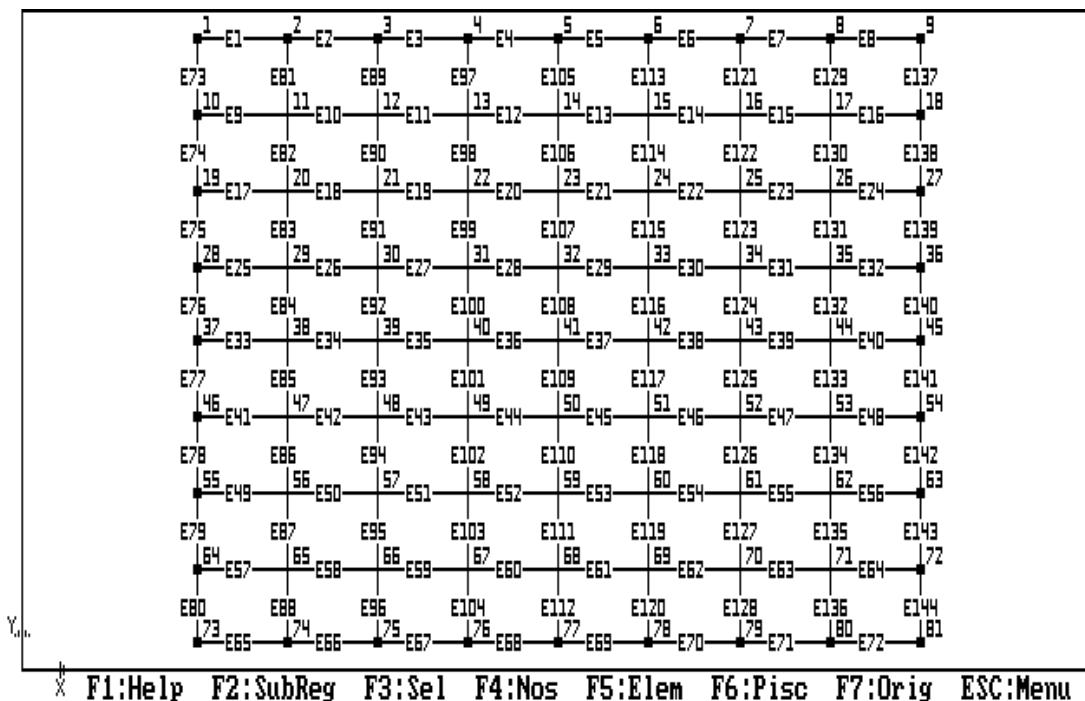


Figura 4-1 – Esquema estrutural analisado no exemplo numérico 1.

### Propriedades dos elementos da grelha equivalente:

Elementos internos da grelha (laje)

$$\text{Area da seção} \Rightarrow A_c = b.h = 1,0.0,10 = 0,10 \text{ m}^2$$

$$\text{Inércia à Flexão (estádio I)} \Rightarrow I_f = \frac{b.h^3}{12} = \frac{1,0.0,10^3}{12} = 8,333.10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\text{Inércia à Torção (estádio I)} \Rightarrow I_t = \frac{b.h^3}{6} = \frac{1,0.0,10^3}{6} = 1,667.10^{-4} \text{ m}^4$$

Elementos externos da grelha (laje)

$$\text{Area da seção} \Rightarrow A_c = b.h = 0,5.0,10 = 0,05 \text{ m}^2$$

$$\text{Inércia à Flexão (estádio I)} \Rightarrow I_f = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,5.0,10^3}{12} = 4,167.10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\text{Inércia à Torção (estádio I)} \Rightarrow I_t = \frac{b.h^3}{6} = \frac{0,5.0,10^3}{6} = 0,833.10^{-4} \text{ m}^4$$

### Carregamento da grelha equivalente:

O carregamento da grelha equivalente foi considerado como concentrado nos nós da grelha, determinados a partir da área de influência dos mesmos, a saber:

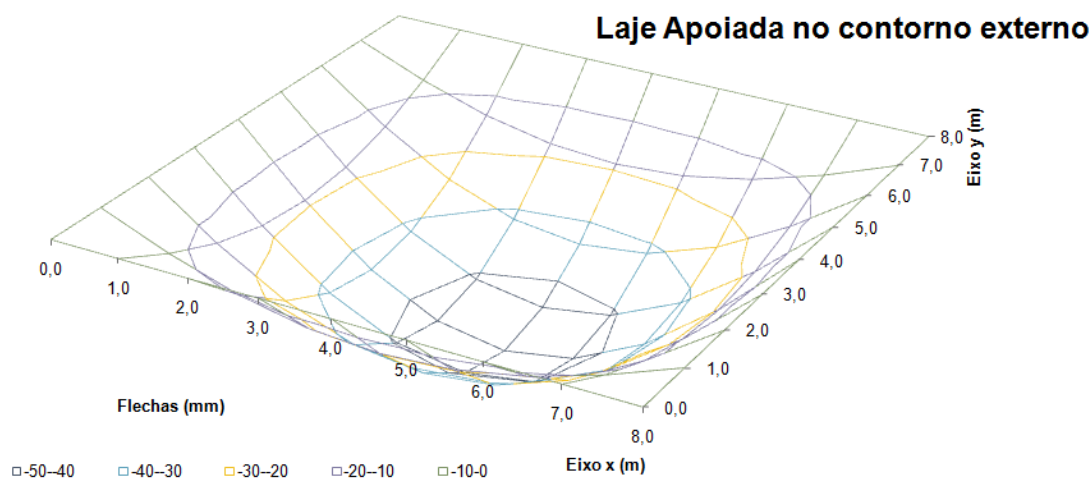
- Para nós centrais:  $p = 5,50 \text{ kN}$
- Para nós laterais:  $p = 2,75 \text{ kN}$
- Para nós dos cantos:  $p = 1,375 \text{ kN}$

Listagem de entrada de dados e resultados do programa GPLAN3 – (ver anexo I)

Resultados para análise:

- Máximo deslocamento vertical da laje = 47,4 mm (nó 41)
- Máximo momento positivo na laje = 15,06 kN.m/m (membro 36 → nó 41)

Apresenta-se abaixo, a configuração deformada da placa estudada pelo Método da Grelha Equivalente, cujos dados numéricos foram tratados em planilha excel.



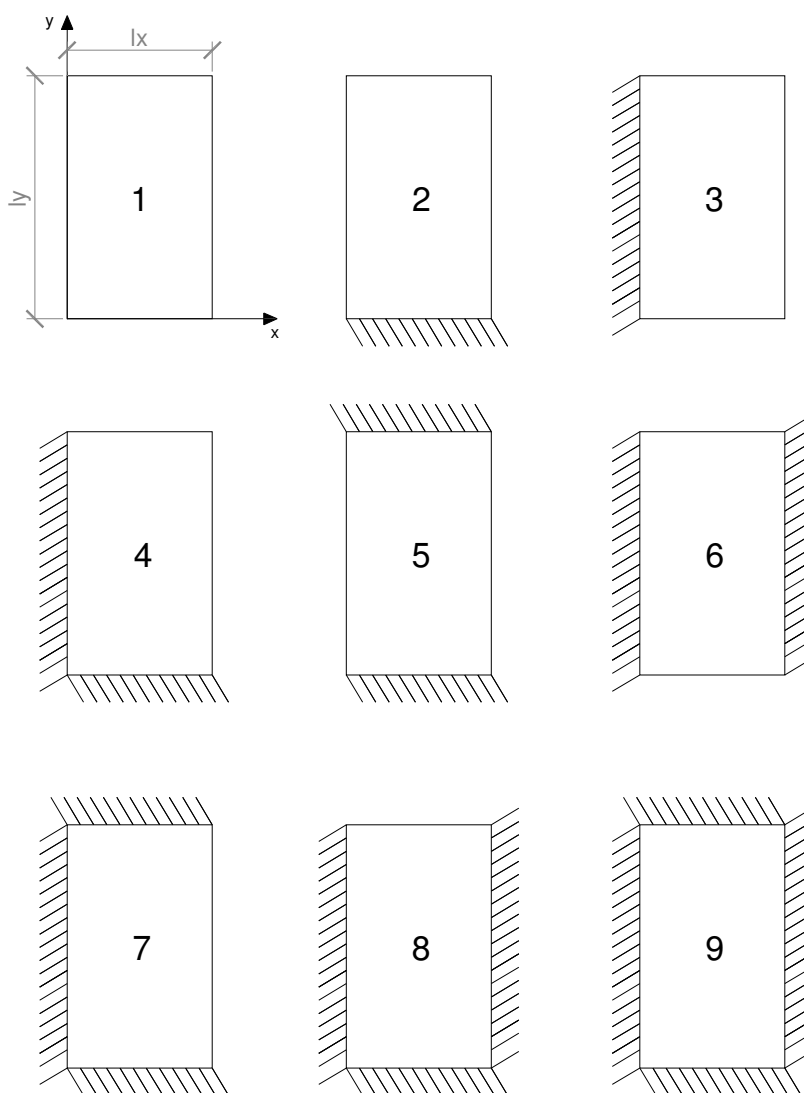
*Figura 4-2 Configuração deformada da placa apoiada nos quatro lados*

#### 4.1.2. Resolução Processo manual – (Teoria das Placas)

Para resolver o mesmo pavimento com a Teoria de Placas, é preciso seguir alguns procedimentos de ordem prática indicado em, por exemplo, Carvalho e Figueiredo (2007) nos quais subdivide-se os trechos do pavimento (lajes) para que se possa usar as tabelas oriundas da Teoria da Elasticidade.

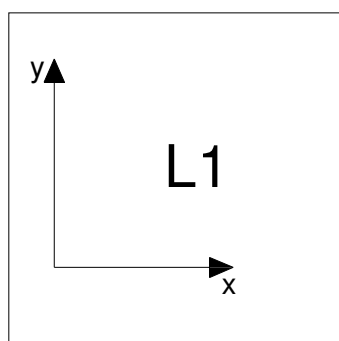
Assim, o pavimento deve ser discretizado, ou seja, cada laje deve ser tratada individualmente, de acordo com sua vinculação às demais (só é possível bordas – contornos – simplesmente apoiadas ou engastadas). As tabelas apresentadas no anexo I são baseadas nas soluções em séries desenvolvidas por Bares (1972) e devidamente adaptadas por Carvalho e Figueiredo (2007) considerando o coeficiente de Poisson  $\nu$  igual a 0,20. As diversas condições de vinculação possíveis estão esquematizadas na figura 4-3, sendo que o contorno representado por linha simples indica borda simplesmente apoiada e o contorno representado por uma linha com hachura indica borda engastada.

Verificar que nesta situação a solução, que era o processo usual antes do advento dos computadores, passa a ser apenas aproximado, pois entre as diversas hipóteses usadas está a de considerar as vigas indeslocáveis na direção vertical. Assim, o processo de cálculo deste pavimento consiste em analisar cada laje individualmente, seguindo seus modos de vinculação com as vigas de extremidade e com lajes vizinhas. A figura 4-3 mostra diversas condições de vinculação e lajes.



**Figura 4-3 – Condições de vinculação de placas de laje isoladas.**

Considerando a figura 4-3 acima, chega-se a conclusão que a laje deste exemplo se enquadra na condição de vinculação do tipo 1, ou seja, somente apoiada nas laterais, com o movimento vertical impedido. A figura 4-4 indica a vinculação considerada para a placa em questão.



*Figura 4-4 – Esquema de vinculação da laje do exemplo considerado.*

Inicialmente será calculado o valor do momento máximo para a laje, por meio das seguintes expressões:

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (\text{momento máximo positivo na direção do eixo } x)$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (\text{momento máximo positivo na direção do eixo } y)$$

Como a laje não está engastada em nenhuma direção não haverá momento fletor negativo.

Para facilitar os cálculos novamente foi montada uma tabela com os valores utilizados e obtidos, indicados na tabela 4-1.

*Tabela 4-1- Valores e resultados do cálculo dos esforços, pelo processo da Teoria da Elasticidade*

Laje	$l_x$ (m)	$\lambda$	$p$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\mu_x^I$	$m_x$ (kN.m/m)	$\mu_y^I$	$m_y$ (kN.m/m)	$\mu'_x$	$m_{x'}$	$\mu'_y$	$m_{y'}$
<b>L1</b>	8,0	1,0	5,50	4,41	15,52	4,41	15,52	0	0	0	0

<sup>I</sup> os valores dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  forem obtidos da tabela constante do anexo II

A seguir é descrito o processo de cálculo para obtenção do valor de deslocamento máximo para a laje, por meio da seguinte expressão:

$$a = \frac{p \cdot l_x^4}{E_c \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100}$$

Onde:

p: valor do carregamento distribuído sobre a laje;

$\alpha$ : coeficiente retirado das tabelas constantes do anexo II, que depende do valor de  $\lambda$ ;

$l_x$ : menor vão da laje;

$E_c$ : módulo de deformabilidade longitudinal do concreto;

h: espessura da laje;

$$a = \frac{5,5 \cdot 8,0^4}{2,6072 \cdot 10^7 \cdot 0,10^3} \cdot \frac{4,67}{100} = 0,0404 \text{ m} = 40,4 \text{ mm}$$

Conclui-se que o maior deslocamento da placa se dará no centro da mesma. Assim, os valores de momento máximo se encontram nesta posição.

A partir de agora resume-se os valores encontrados anteriormente, considerando os diferentes processos de cálculo:

- Momento fletor máximo:

- Método da Grelha Equivalente: a partir da média dos valores de momento fletor no nó 41 encontrou-se um valor médio de momento de 15,06 kN.m/m;

- Teoria da Elasticidade: a partir da tabela 4-1, o valor do máximo momento fletor encontrado é de 15,52 kN.m/m;

A relação entre o momento fletor obtido pelo método da grelha equivalente em relação ao momento fletor obtido pela teoria da elasticidade é de 97,0%, estando, portanto, dentro de valores bastante aceitáveis;

- Deslocamento vertical da placa (flecha)

- Método da Grelha Equivalente: 44,7 mm (nó 41);

- Teoria da Elasticidade: 40,4 mm;

Em relação ao deslocamento vertical do ponto central da placa (nó 41), a relação entre o método da grelha equivalente em relação ao encontrado pela teoria da elasticidade é 10,6% superior, estando também dentro de uma variação aceitável;

O procedimento acima descrito relativo a placa simplesmente apoiada, foi efetuado para os demais casos conforme figura 4-3, obtendo-se as tabelas 4-2, 4-3 e 4-4, abaixo para os deslocamentos máximos na placa e os momentos fletores máximo e no engaste, conforme o caso:

**Tabela 4-2- Comparativo das flechas máximas nas lajes –(Grelha Equivalente/Carvalho)**

Avaliação de Flechas Elásticas				
	Tabelas – (Carvalho) <sup>2</sup>		Anál. Grelha <sup>3</sup>	Rel. Grelha/Carvalho
	Alfa ( $\alpha$ )	Flecha (mm)	Flecha (mm)	%
Caso 1	4,67	40,4	44,7	10,6%
Caso 2	3,20	27,7	31,9	15,2%
Caso 3	3,20	27,7	31,9	15,2%
Caso 4	2,42	20,9	23,8	13,9%
Caso 5	2,21	19,1	21,3	11,5%
Caso 6	2,21	19,1	21,3	11,5%
Caso 7	1,81	15,6	17,4	11,5%
Caso 8	1,81	15,6	17,4	11,5%
Caso 9	1,46	12,6	14,0	11,1%

<sup>2</sup> – Valores obtidos utilizando as tabelas de Carvalho (2007);

<sup>3</sup> – Valores obtidos utilizando o programa GPLAN



**Tabela 4-3 – Comparativo dos momentos fletores na direção X – (Grelha/Carvalho)**

	$m_x$ (kN.m/m)		Rel.Grelha/Carvalho	$m_{x'}$ (kN.m/m)		Rel.Grelha/Carvalho
	Carvalho	Grelha	%	Carvalho	Grelha	%
Caso 1	15,52	15,06	97,0%	xxx	xxx	xxx
Caso 2	10,80	9,82	90,9%	xxx	xxx	xxx
Caso 3	13,87	13,78	99,4%	29,99	30,76	102,6%
Caso 4	9,89	10,05	101,6%	24,60	24,72	100,5%
Caso 5	7,57	6,21	82,0%	xxx	xxx	xxx
Caso 6	11,16	11,39	102,1%	24,60	25,26	102,7%
Caso 7	7,50	7,12	94,9%	19,22	19,52	101,6%
Caso 8	9,15	9,09	99,3%	21,72	21,54	99,2%
Caso 9	7,43	7,06	95,1%	18,13	18,25	100,7%

**Tabela 4-4 – Comparativo dos momentos fletores na direção Y – (Grelha Equivalente/Carvalho)**

	$m_y$ (kN.cm/m)		Rel.Grelha/Carvalho	$m_{y'}$ (kN.cm/m)		Rel.Grelha/Carvalho
	Carvalho	Grelha	%	Carvalho	Grelha	%
Caso 1	15,52	15,06	97,0%	xxx	xxx	xxx
Caso 2	13,87	13,78	99,4%	29,99	30,76	102,6%
Caso 3	10,81	9,82	90,9%	xxx	xxx	xxx
Caso 4	9,89	10,05	101,6%	24,60	24,73	100,5%
Caso 5	11,16	11,39	102,1%	24,60	25,26	102,7%
Caso 6	7,57	6,21	82,0%	xxx	xxx	xxx
Caso 7	9,15	9,09	99,3%	21,72	21,54	99,2%
Caso 8	7,50	7,12	94,9%	19,22	19,52	101,6%
Caso 9	7,43	7,06	95,1%	18,13	18,25	100,7%

### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 1:**

- Os valores obtidos pelo método da grelha equivalente são bastante próximos dos obtidos pela teoria de placa delgada, resolvidas pelo procedimento numérico de séries (considerado o procedimento mais aproximado para esse conjunto de condições de contorno);

- Depreende-se dos resultados apresentados nos quadros 4-3 e 4-4, referentes do momento fletor, que a utilização do método da grelha equivalente pode ser considerado tanto preciso quanto o da teoria de placas delgadas, com a vantagem de que tal método pode ser melhor adequado às estruturas correntes de concreto armado, notadamente para atender às limitações de natureza arquitetônica.

- Constata-se, no entanto que em relação aos deslocamentos verticais, o método da grelha equivalente permite uma avaliação mais próxima do comportamento real que o método da teoria das placas.

## **4.2. Análise de lajes contíguas com contorno vertical indeslocável**

### **4.2.1. Resolução por Grelha Equivalente:**

Para comparar os resultados obtidos mediante o emprego do processo de analogia de grelha com os obtidos por meio da teoria das placas delgadas, serão analisadas duas placas quadradas contíguas de 8,0 x 8,0m e de 10 cm de espessura, suposta apoiada em elementos indeslocáveis verticalmente no seu contorno, conforme mostrado na figura 4-5, com os seguintes dados complementares:

#### **Concreto:**

- Resistência característica do concreto à compressão:  $F_{ck} = 30,0 \text{ MPa}$
- Módulo de deformação longitudinal do concreto:

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{30} = 26072 \text{ MPa} = 2,6072 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,2$

- Módulo de deformação transversal do concreto:

$$G_c = 0,40 \cdot E_c = 0,4 \cdot 26072 = 10429 \text{ MPa} = 1,0429 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

#### Dados do carregamento da placa:

- Peso próprio:  $g_1 = 0,10 \cdot 25 = 2,5 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga permanente:  $g_2 = 1,0 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga de utilização:  $q = 2,0 \text{ kN/m}^2$
- Carga total:  $p = 5,5 \text{ kN/m}^2$

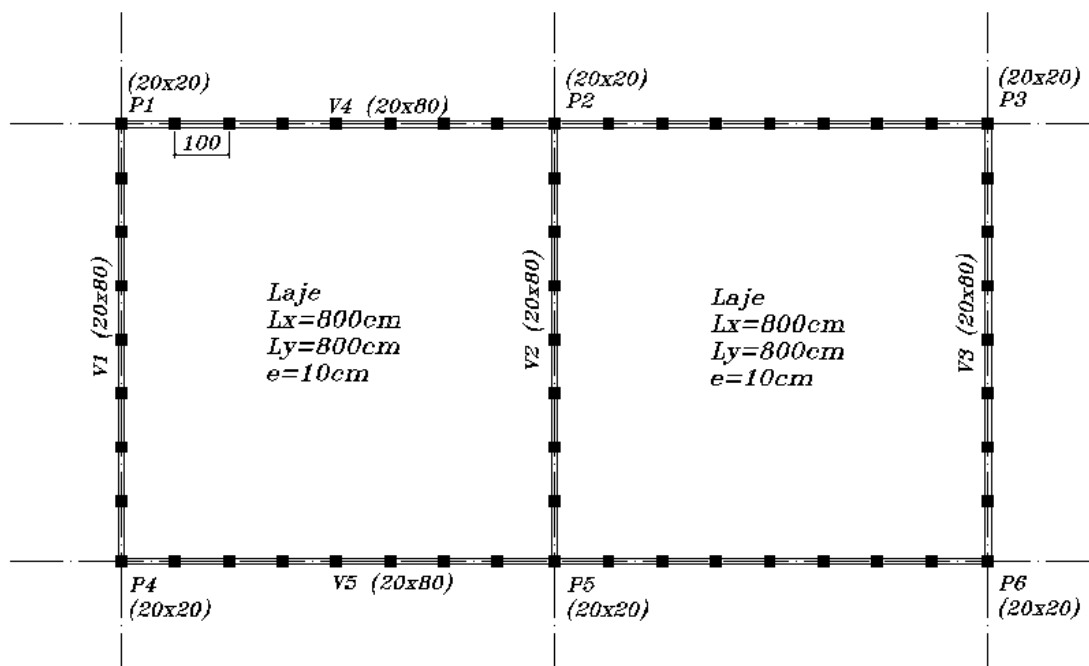
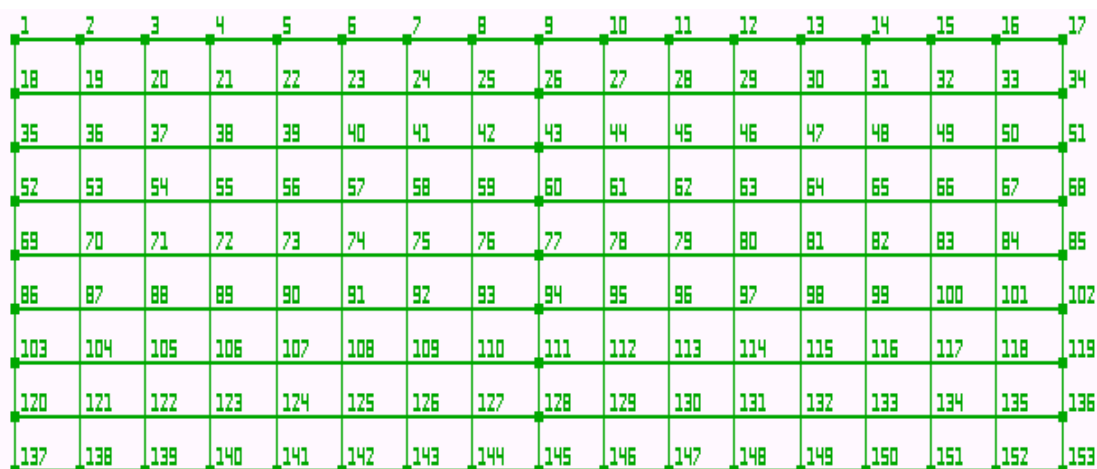
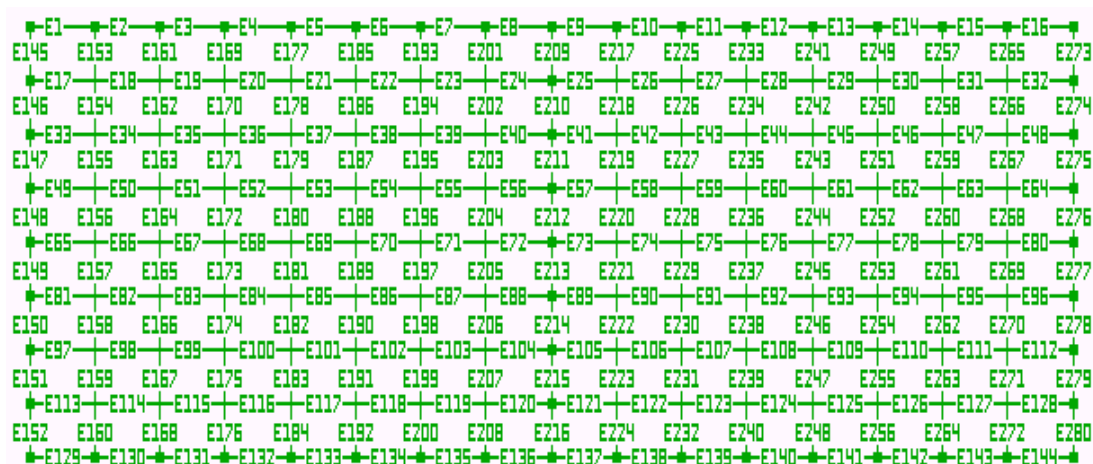


Figura 4-5 – Planta de formas de um pavimento em Concreto Armado Apoiada em pilares

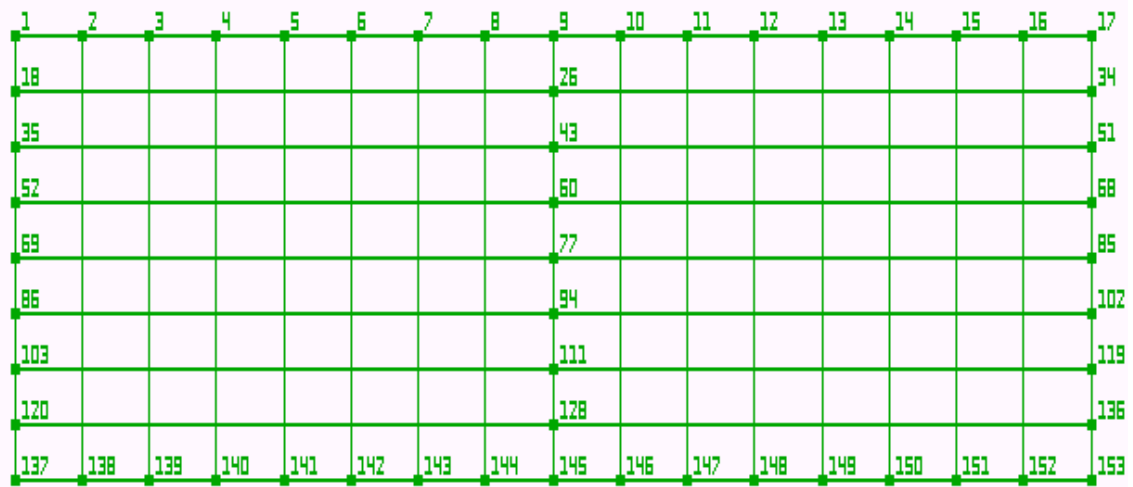
Adotou-se uma grelha equivalente composta de 153 nós e 280 barras, com espaçamento de 100 cm entre as barras nas duas direções.



*Figura 4-6 – Esquema dos nós da grelha analisada*



*Figura 4-7 – Esquema das barras da grelha analisada*



*Figura 4-8 – Esquema dos elementos de apoio da grelha analisada*

### **Propriedades dos elementos da grelha equivalente:**

Elementos externos da grelha (laje)

$$\text{Area da seção} \Rightarrow A_c = b \cdot h = 1,0 \cdot 0,10 = 0,10 \text{ m}^2$$

$$\text{Inércia à Flexão (estádio I)} \Rightarrow I_f = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{1,0 \cdot 0,10^3}{12} = 8,333 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\text{Inércia à Torção (estádio I)} \Rightarrow I_t = \frac{b \cdot h^3}{6} = \frac{1,0 \cdot 0,10^3}{6} = 1,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Elementos internos da grelha (viga)

$$\text{Area da seção} \Rightarrow A_c = b \cdot h = 0,2 \cdot 0,80 = 0,16 \text{ m}^2$$

$$\text{Inércia à Flexão (estádio I)} \Rightarrow I_f = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,20 \cdot 0,80^3}{12} = 8,533 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\text{Inércia à Torção (estádio I)} \Rightarrow I_t = 0,10 \cdot \frac{b^3 \cdot h}{6} = 0,10 \cdot \frac{0,20^3 \cdot 0,80}{6} = 1,067 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

### **Carregamento da grelha equivalente:**

O carregamento da grelha equivalente foi considerado como concentrado no nós da grelha, determinados a partir da área de influência dos mesmos, a saber:

- Para nós centrais – (laje):  $p = 5,50 \text{ kN}$
- Para nós laterais – (viga):  $p = 2,75 \text{ kN}$
- Para nós dos cantos – (viga):  $p = 1,375 \text{ kN}$

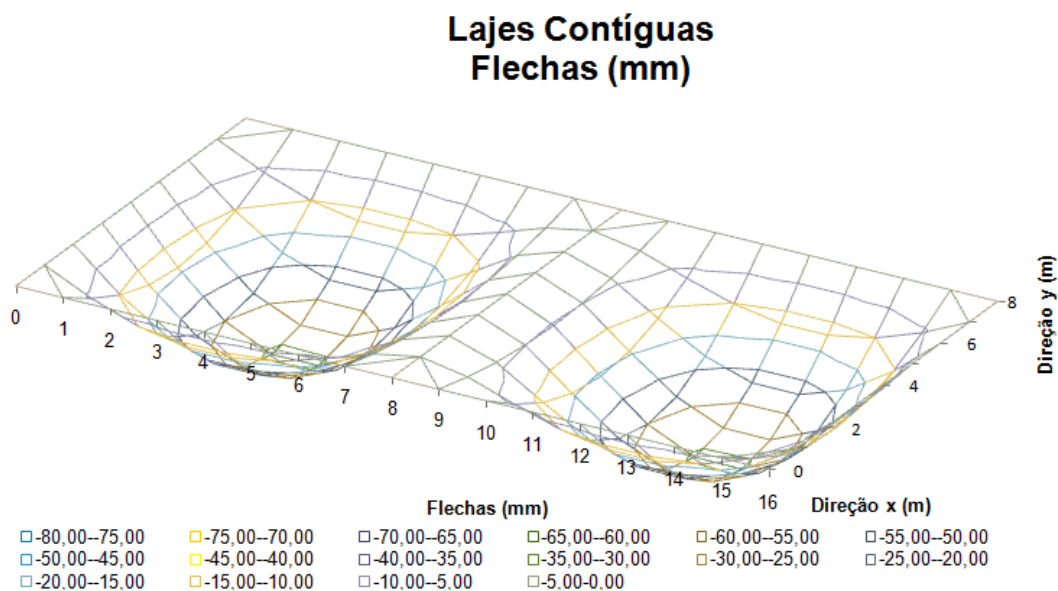
Listagem de entrada de dados e resultados do programa GPLAN3 – (ver anexo I)

Resultados para análise:

Flechas:

- Máximo deslocamento vertical da laje = 30,73 mm (nós 77 e 82)

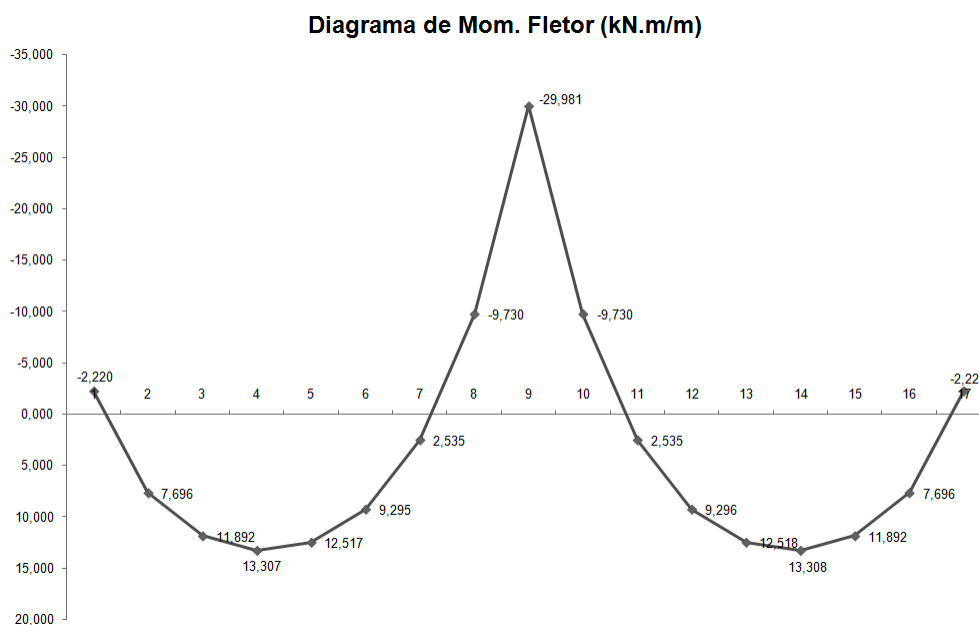
A figura 4-9 abaixo, mostra as deflexões das lajes, por meio de isolinhas.



*Figura 4-9 - Configuração deformada das placas com contorno externo e intermediário indeslocável*

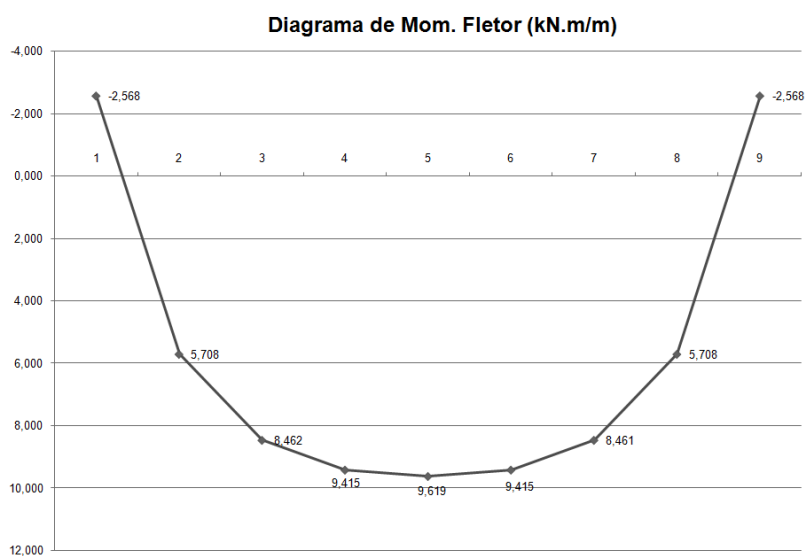
#### **Momento Fletor:**

Apresenta-se a seguir o diagrama de Momento Fletor no centro da laje, no sentido longitudinal (direção x), mostrando o comportamento das barras 65 a 80 (nós 69 a 85).



*Figura 4-10– Diagrama de Momento Fletor na direção X da placa analisada*

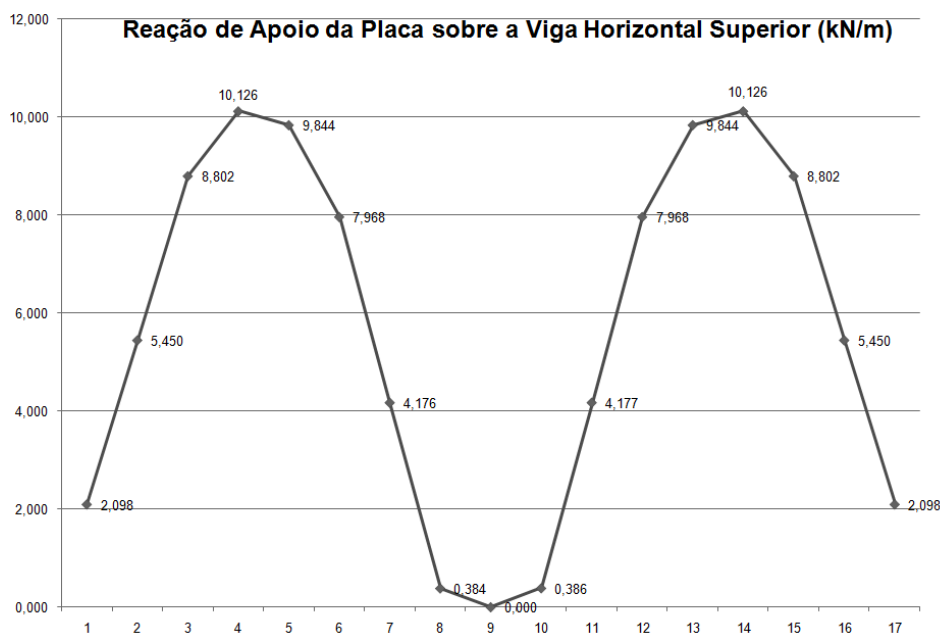
Apresenta-se a seguir o diagrama de Momento Fletor próximo ao centro da laje, no sentido transversal (direção y), de uma das placas, mostrando o comportamento dos elementos 169 a 176.



*Figura 4-11– Diagrama de Momento Fletor na direção Y da placa analisada*

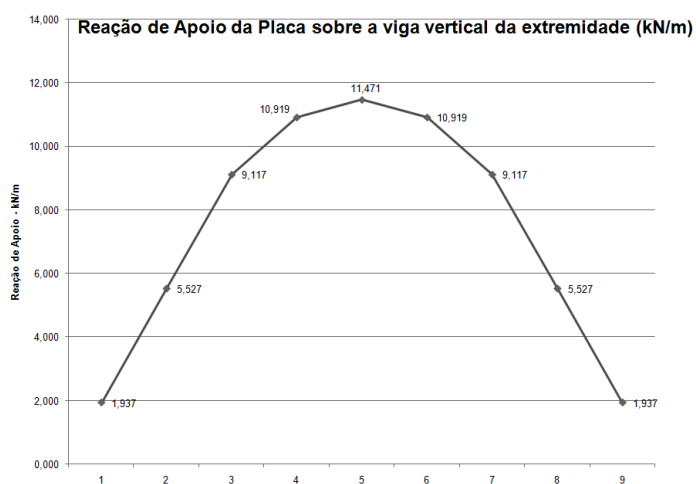
## Reações de Apoio da Laje sobre a viga

1 – Reação de Apoio sobre a viga horizontal superior do modelo:



*Figura 4-12– Reação de Apoio da Placa sobre a Viga Horizontal Superior*

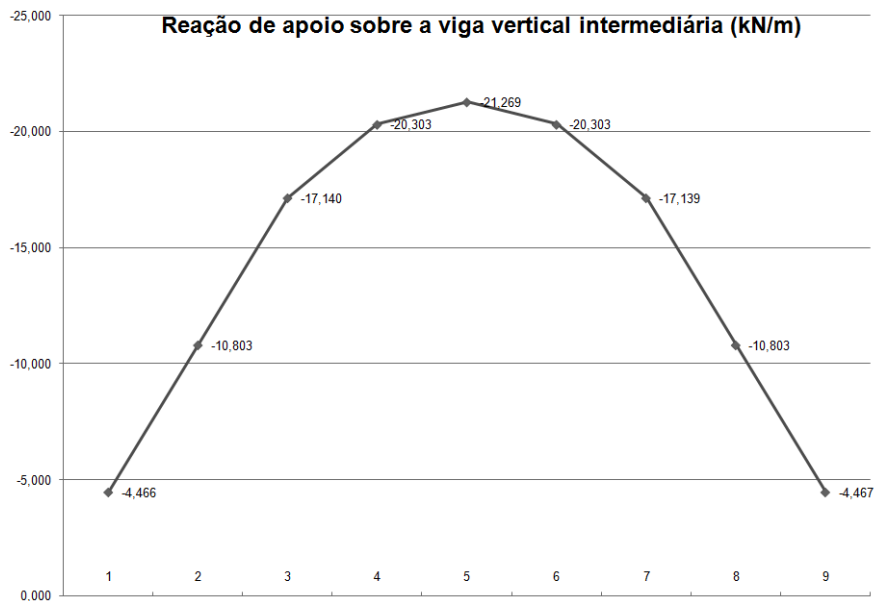
2 – Reação de Apoio sobre a viga vertical esquerda do modelo:



*Figura 4-13– Reação de Apoio da Placa sobre a Viga Vertical da Extremidade*



## 2 – Reação de Apoio sobre a viga vertical intermediária do modelo:



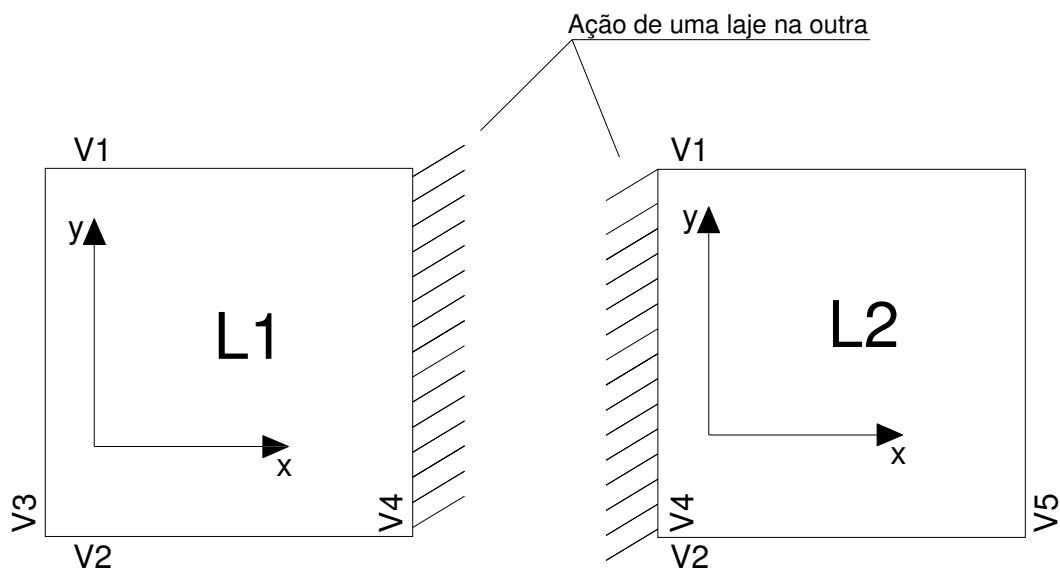
*Figura 4-14– Reação de Apoio da Placa sobre a Viga Vertical Intermediária*

### 4.2.2. Resolução Processo manual – (Teoria das Placas)

O processo é o mesmo apresentado no exemplo 1, sendo que para este exemplo, verifica-se que a condição de vinculação é a 3 (ou a condição 2, uma vez que as lajes que compõem o pavimento são quadradas –  $l_x = l_y$ ), conforme pode ser verificado pela figura 4-3, mostrada anteriormente.

Para se chegar à conclusão de qual a condição de vinculação a ser utilizada, considerou-se que as lajes não estão engastadas nas vigas (hipótese de cálculo de placas). Considerou-se apenas a ligação entre uma laje e outra, ou seja, uma laje está engastada na outra, em função de sua continuidade.

As lajes do pavimento deste exemplo foram discretizadas, de acordo com as condições da figura 4-15, estas são mostradas na figura 4-3.



*Figura 4-15 – Condição de vinculação das lajes da estrutura que está sendo analisada.*

Inicialmente serão calculados os valores de momento máximo para ambas as lajes, através das seguintes expressões:

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (\text{momento máximo positivo na direção do eixo } x)$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (\text{momento máximo positivo na direção do eixo } y)$$

$$m_x' = \mu_x' \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad (\text{momento máximo negativo na direção do eixo } x)$$

Para facilitar a manipulação e obtenção dos resultados, foi esquematizado o tabela 4-5 abaixo, Os valores dos coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  e  $\mu_x'$  estão indicados nas tabelas constantes do anexo II.

*Tabela 4-5 – Coeficientes para determinação dos momentos fletores máximos (positivos e negativos) nas lajes da estrutura*

Laje	Condição de vinculação	$l_x$ (m)	$\lambda$	$p$ (kN/m <sup>2</sup> )	$p.l_x^2$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_x$	$\mu'_y$
L1	3	8,0	1,0	5,5	352	3,94	3,07	8,52	0
L2	3	8,0	1,0	5,5	352	3,94	3,07	8,52	0

*Tabela 4-6 – Momentos fletores máximos (positivos e negativos) nas lajes da estrutura*

Laje	$p.l_x^2$	$m_x$ (kN.m/m)	$m_y$ (kN.m/m)	$x_x$ (kN.m/m)	$x_y$ (kN.m/m)
L1	352	13,87	10,81	29,99	0
L2	352	13,87	10,81	29,99	0

Como se observa pela análise da estrutura, não há momentos negativos em ambas as lajes na direção do eixo y, uma vez que as mesmas são engastadas apenas na direção do eixo x, ou seja, os momentos negativos ocorrerão nessa direção, indicados na tabela 4-6, por  $x_x$ .

A seguir é descrito o processo de cálculo para obtenção dos valores de deslocamento máximo para ambas as lajes, através da seguinte expressão:

$$a = \frac{p.l_x^4}{E_c.h^3} \cdot \frac{\alpha}{100}$$

Onde:

p: valor do carregamento distribuído sobre a laje;

$\alpha$ : coeficiente retirado da tabela constante do anexo I, que depende do valor de  $\lambda$ ;

$l_x$ : menor vão da laje;

$E_c$ : módulo de deformabilidade longitudinal do concreto;

h: espessura da laje;

$$a = \frac{5,5.8,0^4}{2,607.10^7.0,10^3} \cdot \frac{3,20}{100} = 0,0277 \text{ m} = 27,7 \text{ mm}$$

Por meio do método da grelha equivalente, conforme explanado acima, foi encontrado o valor de máximo deslocamento vertical da laje = 30,73 mm (nós 77 e 82). Assim, conclui-se que o valor encontrado pelo método da grelha equivalente está 10,9% acima do encontrado pela teoria das placas, o que está dentro de valores aceitáveis, ainda mais se considerando que o contorno da laje no caso do método da grelha equivalente está apoiado em vigas deformáveis.

- Momento Máximo Positivo - Direção x:
  - Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 13,87 kN.m/m de momento máximo;
  - Grelha equivalente: nos nós 72 e 82 (simétricos) foi encontrado um valor de 13,31 kN.m/m;
  - Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 4,21%;
- Momento Máximo Positivo - Direção Y:
  - Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 10,81 kN.m/m de momento máximo;
  - Grelha equivalente: nós 72 e 82 (simétricos) foi encontrado um valor de 9,62 kN.m/m;
  - Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 12,34%;
- Momento Máximo Negativo – Direção X
  - Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 29,99 kN.m/m de momento máximo;
  - Grelha equivalente: nó 77 foi encontrado um valor de 29,98 kN.m/m;

- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 0,03%;

### Reações das Lajes sobre os elementos de apoio (vigas)

Conforme Carvalho e Figueiredo (2007), a ação das lajes nas vigas, no estado elástico, ocorre por meio de carregamento com intensidade variável ao longo do seu comprimento (depende, principalmente, das condições de apoio e da relação entre os vãos) e não-uniforme, conforme se verifica no presente exemplo pelo cálculo realizado por meio da teoria da grelha equivalente. De modo simplificado, pode-se considerar que a ação das lajes maciças nas vigas se faça de maneira uniforme, por meio dos quinhões de carga, método este preconizado pela NBR 6118:2003, no item 14.7.6.1, da seguinte forma:

$$v_x = k_x \cdot \frac{p \cdot l_x}{10} \quad (\text{reação da laje sobre a viga ao longo do eixo } y \text{ no lado apoiado})$$

$$v_y = k_y \cdot \frac{p \cdot l_x}{10} \quad (\text{reação da laje sobre a viga ao longo do eixo } x \text{ no lado apoiado})$$

$$v_x' = k_x' \cdot \frac{p \cdot l_x}{10} \quad (\text{reação da laje sobre a viga ao longo do eixo } y \text{ no lado engastado})$$

Para facilitar a obtenção e interpretação dos resultados, foram esquematizados os quadros 4-7 e 4-8. Os valores dos coeficientes  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_x'$  estão indicados nas tabelas constantes do anexo I.

*Tabela 4-7 – Coeficientes de reações de apoio da laje sobre as vigas da estrutura*

Laje	Condição de vinculação	$l_x$ (m)	$\lambda$	$p$ (kN/m <sup>2</sup> )	$p \cdot l_x$	$k_x$	$k_y$	$k'_x$	$k'_y$
L1	3	8,0	1,0	5,5	44	2,32	1,83	4,02	0
L2	3	8,0	1,0	5,5	44	2,32	1,83	4,02	0

Tabela 4-8 – Reações de apoio da laje sobre as vigas da estrutura

Laje	p.l <sub>x</sub>	v <sub>x</sub> (kN/m)	v <sub>y</sub> (kN/m)	v <sub>x</sub> ' (kN/m)	v <sub>y</sub> ' (kN/m)
L1	44	10,21	8,05	17,69	0
L2	44	10,21	8,05	17,69	0

- Reação da Laje sobre a viga, ao longo da direção y no lado apoiado:
  - Método da NBR 6118:2003 foi encontrado um valor de 10,21 kN/m – (constante ao longo da direção y no lado apoiado);
  - Grelha equivalente: foi encontrado um valor máximo de 11,47 kN/m – (variável sob a forma de uma parábola, conforme figura 4-13);
  - Diferença entre o método da NBR 6118:2003 e o da Grelha Equivalente em relação ao valor de pico é 11,01% inferior;
- Reação da Laje sobre a viga, ao longo da direção y no lado engastado:
  - Método da NBR 6118:2003 foi encontrado um valor de 17,688 kN/m – (constante ao longo da direção x no lado apoiado);
  - Grelha equivalente: foi encontrado um valor máximo de 21,269 kN/m – (variável sob a forma de uma parábola, conforme figura 4-14);
  - Diferença entre o método da NBR 6118 e o da Grelha Equivalente em relação ao valor de pico é 16,84% inferior;
- Reação da Laje sobre a viga, ao longo da direção x no lado apoiado (2 lados):
  - Método da NBR 6118:2003 foi encontrado um valor de 8,05 kN/m – (constante ao longo da direção x no lado apoiado);
  - Grelha equivalente: foi encontrado um valor máximo de 10,13 kN/m – (variável sob a forma de uma parábola, conforme figura 4-12);
  - Diferença entre o método da NBR 6118 e o da Grelha Equivalente em relação ao valor de pico é 20,48% inferior;

### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 2:**

- Constata-se que para obter os resultados do pavimento com a grelha equivalente, basta introduzir o arquivo de dados e executar o programa, ao contrário do processo manual, há uma série de operações a serem realizadas até se chegar ao valor das reações no pilar. É necessário neste caso, determinar as ações das lajes sobre as vigas, resolver as respectivas vigas que concorrem no pilar e somar suas reações.

- Quanto maior o pavimento, mais diferença haverá entre o tempo gasto num e noutro processo.

- Outro aspecto importante neste exemplo é que com a obtenção de um número maior de dados, é possível se ter o comportamento conjunto das placas deformadas.

### **4.3. Análise de lajes contíguas com contorno vertical deslocável**

#### **4.3.1. Resolução por Grelha Equivalente:**

Para comparar os resultados obtidos mediante o emprego do processo de analogia de grelha com os obtidos por meio da teoria das placas delgadas será analisada duas placas quadradas contíguas de 8,0 x 8,0m e de 10 cm de espessura, suposta simplesmente apoiada em vigas no seu contorno, e as vigas apoiadas em pilares, com o seguintes dados complementares:

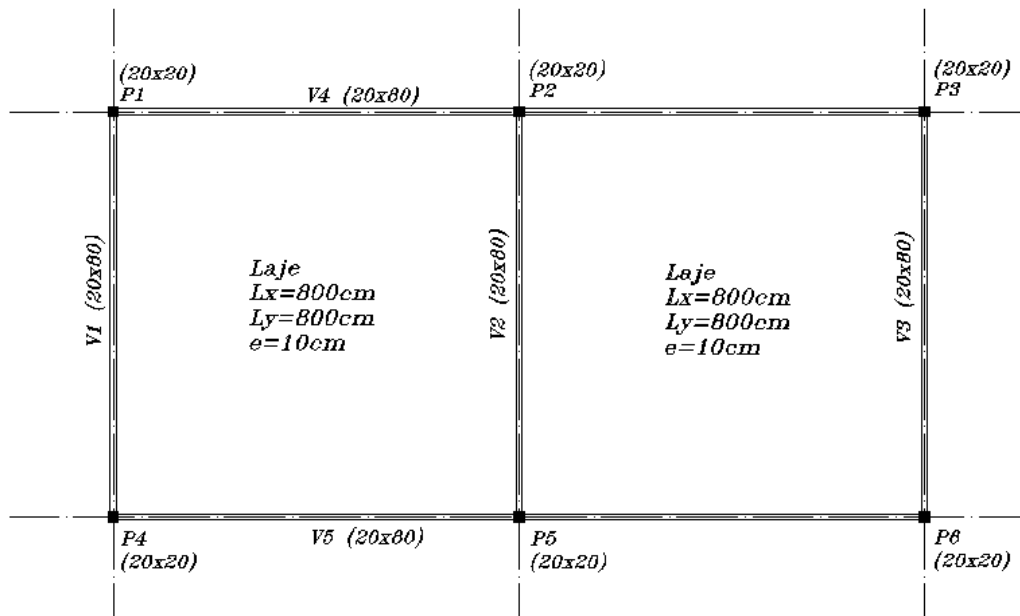


Figura 4-16 – Planta de formas de um pavimento em concreto armado

#### Concreto:

- Resistência característica do concreto à compressão:  $f_{ck} = 30,0 \text{ MPa}$
- Módulo de deformação longitudinal do concreto:  

$$E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{30} = 26072 \text{ MPa} = 2,6072 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,2$
- Módulo de deformação transversal do concreto:  

$$G_c = 0,40 \cdot E_c = 0,4 \cdot 26072 = 10429 \text{ MPa} = 1,0429 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

#### Dados do carregamento da placa:

- Peso próprio:  $g_1 = 0,10 \cdot 25 = 2,5 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga permanente:  $g_2 = 1,0 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga de utilização:  $q = 2,0 \text{ kN/m}^2$
- Carga total:  $p = 5,5 \text{ kN/m}^2$



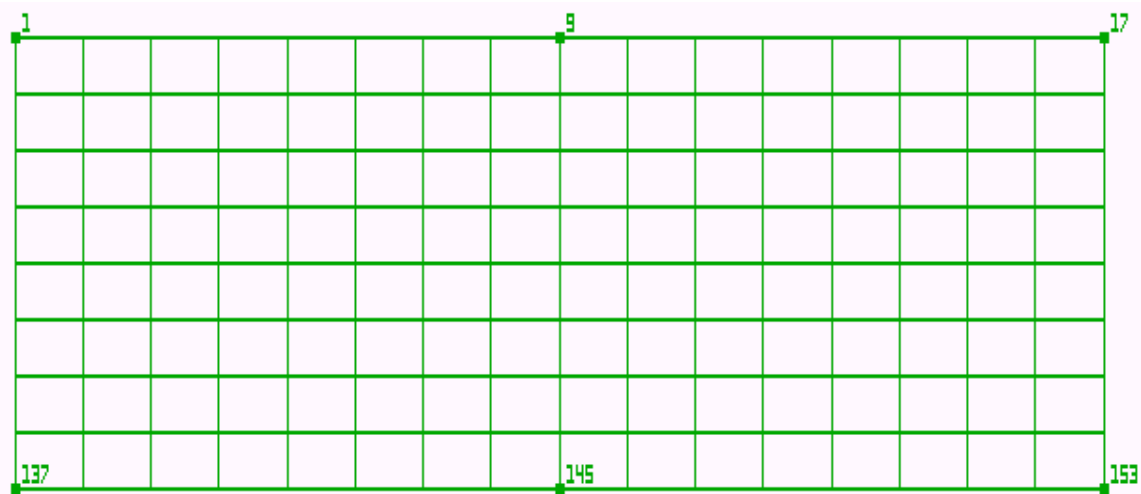
Adotou-se uma grelha equivalente composta de 153 nós e 280 barras, com espaçamento de 100 cm entre as barras nas duas direções.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136
137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153

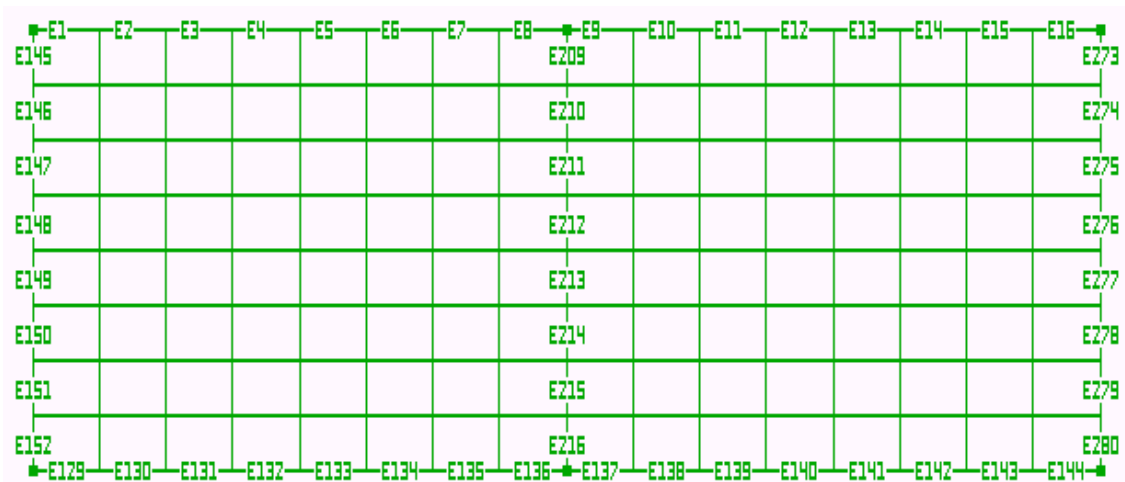
*Figura 4-17 – Esquema dos Nós da grelha analisada*

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	
E145	E153	E161	E169	E177	E185	E193	E201	E209	E217	E225	E233	E241	E249	E257	E265	E273
E17	E18	E19	E20	E21	E22	E23	E24	E25	E26	E27	E28	E29	E30	E31	E32	E33
E146	E154	E162	E170	E178	E186	E194	E202	E210	E218	E226	E234	E242	E250	E258	E266	E274
E33	E34	E35	E36	E37	E38	E39	E40	E41	E42	E43	E44	E45	E46	E47	E48	E49
E147	E155	E163	E171	E179	E187	E195	E203	E211	E219	E227	E235	E243	E251	E259	E267	E275
E49	E50	E51	E52	E53	E54	E55	E56	E57	E58	E59	E60	E61	E62	E63	E64	E65
E148	E156	E164	E172	E180	E188	E196	E204	E212	E220	E228	E236	E244	E252	E260	E268	E276
E65	E66	E67	E68	E69	E70	E71	E72	E73	E74	E75	E76	E77	E78	E79	E80	E81
E149	E157	E165	E173	E181	E189	E197	E205	E213	E221	E229	E237	E245	E253	E261	E269	E277
E81	E82	E83	E84	E85	E86	E87	E88	E89	E90	E91	E92	E93	E94	E95	E96	E97
E150	E158	E166	E174	E182	E190	E198	E206	E214	E222	E230	E238	E246	E254	E262	E270	E278
E97	E98	E99	E100	E101	E102	E103	E104	E105	E106	E107	E108	E109	E110	E111	E112	E113
E151	E159	E167	E175	E183	E191	E199	E207	E215	E223	E231	E239	E247	E255	E263	E271	E279
E113	E114	E115	E116	E117	E118	E119	E120	E121	E122	E123	E124	E125	E126	E127	E128	E129
E152	E160	E168	E176	E184	E192	E200	E208	E216	E224	E232	E240	E248	E256	E264	E272	E280
E129	E130	E131	E132	E133	E134	E135	E136	E137	E138	E139	E140	E141	E142	E143	E144	E145

*Figura 4-18 – Esquema dos Elementos da grelha analisada*



*Figura 4-19 – Esquema dos Elementos de apoio da grelha analisada*



*Figura 4-20 – Esquema das Vigas analisadas*

### Propriedades dos elementos da grelha equivalente:

Elementos internos da grelha (laje)

$$\text{Area da seção} \Rightarrow A_c = b \cdot h = 1,0 \cdot 0,10 = 0,10 \text{ m}^2$$

$$\text{Inércia à Flexão (estádio I)} \Rightarrow I_f = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{1,0 \cdot 0,10^3}{12} = 8,333 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\text{Inércia à Torção (estádio I)} \Rightarrow I_t = \frac{b \cdot h^3}{6} = \frac{1,0 \cdot 0,10^3}{6} = 1,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Elementos externos da grelha (viga)

$$\text{Area da seção} \Rightarrow A_c = b \cdot h = 0,2 \cdot 0,80 = 0,16 \text{ m}^2$$

$$\text{Inércia à Flexão (estádio I)} \Rightarrow I_f = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,20 \cdot 0,80^3}{12} = 8,533 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\text{Inércia à Torção (estádio I)} \Rightarrow I_t = 0,10 \cdot \frac{b^3 \cdot h}{6} = 0,10 \cdot \frac{0,20^3 \cdot 0,80}{6} = 1,067 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

### Carregamento da grelha equivalente:

O carregamento da grelha equivalente foi considerado como concentrado no nós da grelha, determinados a partir da área de influência dos mesmos, a saber:

- Para nós centrais – (laje):  $p = 5,50 \text{ kN}$
- Para nós laterais – (viga):  $p = 2,75 \text{ kN}$
- Para nós dos cantos – (viga):  $p = 1,375 \text{ kN}$

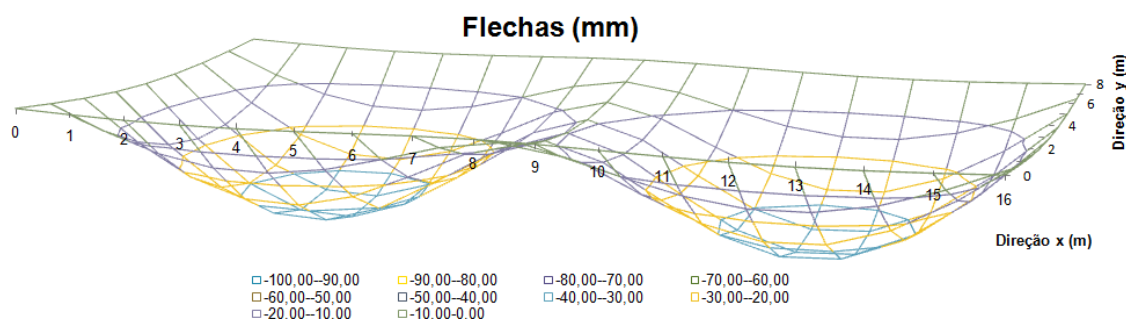
Listagem de entrada de dados do programa GPLAN3 – (ver Anexo I)

Listagem contendo os resultados do programa GPLAN3 –(ver Anexo I)

### Resultados para análise:

#### Deslocamento Vertical – (Flechas):

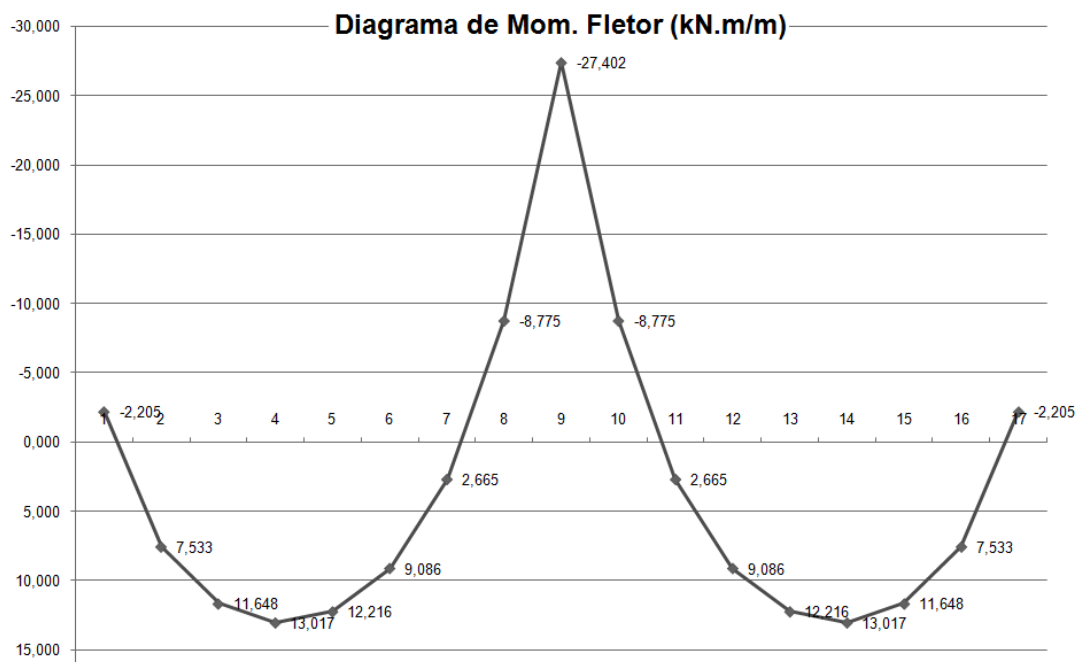
- Máximo deslocamento vertical da laje = 37,04 mm (nós 73 e 81)



**Figura 4-21– Deslocamento Vertical da Placa analisada**

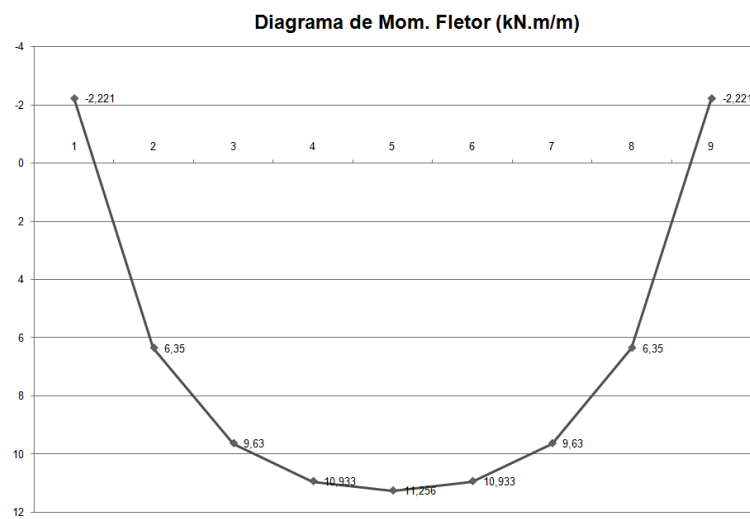
### Diagrama de Momento Fletor na Placa:

Apresenta-se a seguir pela figura 4-22, o diagrama de Momento Fletor na faixa central da laje, no sentido longitudinal (direção x), mostrando o comportamento das barras 65 a 80 (nós 69 a 85);



*Figura 4-22– Diagrama de Momento Fletor da Faixa Central da Placa na Direção Horizontal*

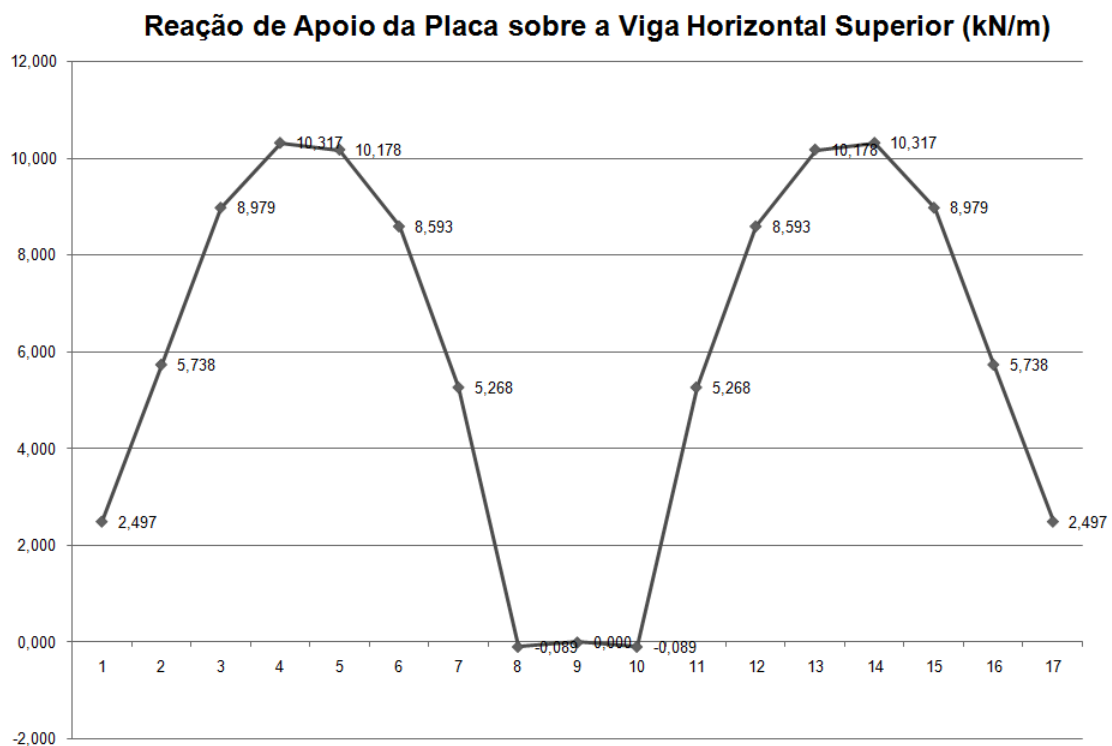
Apresenta-se a seguir pela figura 4-23, o diagrama de Momento Fletor próximo ao centro da laje, no sentido transversal (direção y), de uma das placas, mostrando o comportamento dos elementos 169 a 176;



*Figura 4-23– Diagrama de Momento Fletor da Faixa Central da Placa na Direção Vertical*

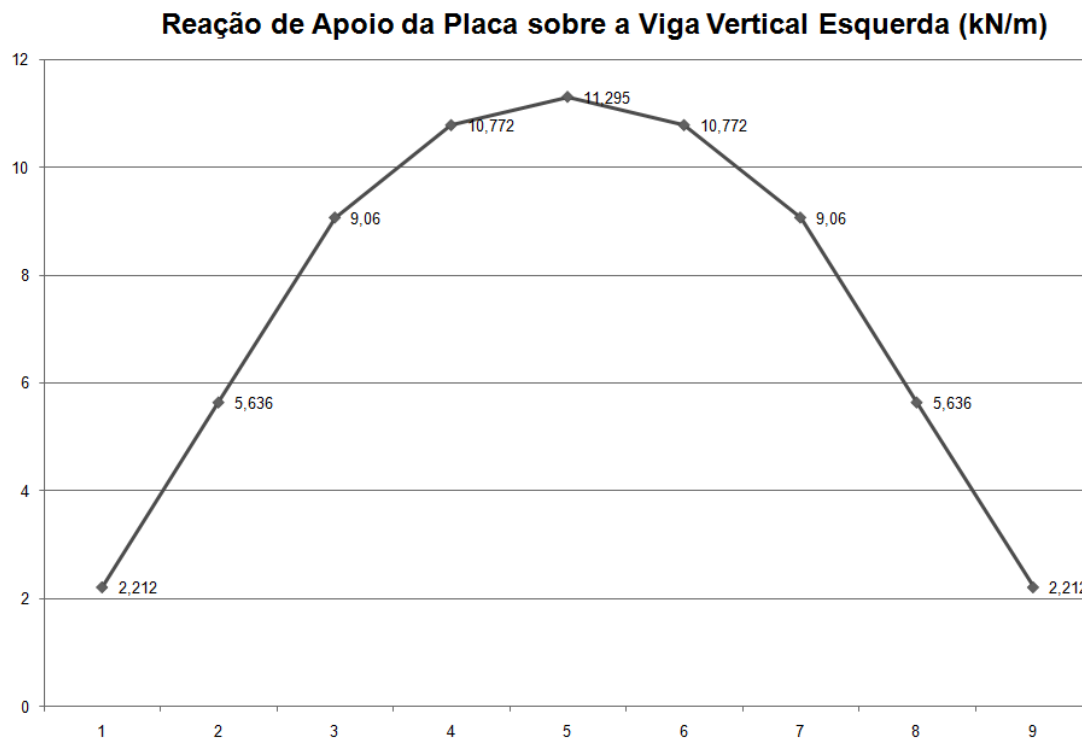
### Reações de Apoio da Laje sobre as vigas

1 – Reação de Apoio sobre a viga horizontal superior do modelo:



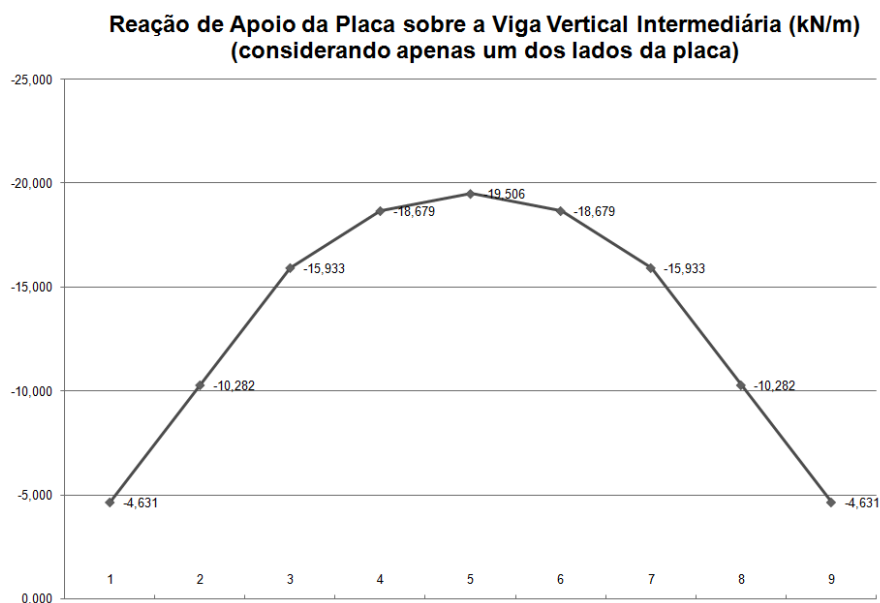
*Figura 4-24– Reação de Apoio da Placa Sobre a Viga Horizontal Superior*

2 – Reação de Apoio sobre a viga vertical esquerda do modelo:



*Figura 4-25– Reação de Apoio da Placa Sobre a Viga Vertical Esquerda*

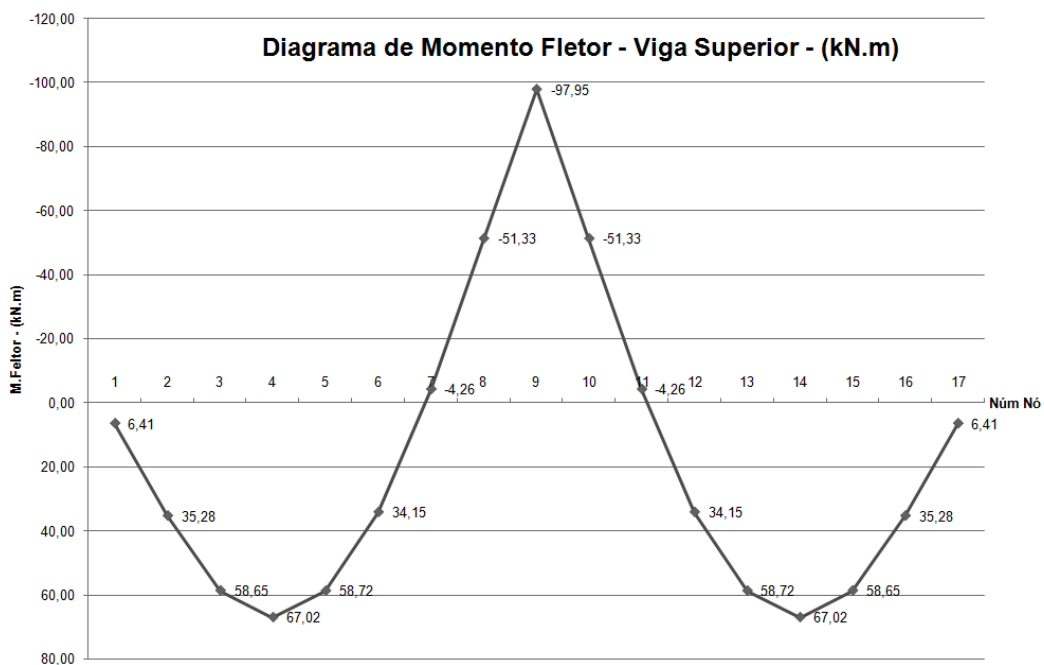
3 – Reação de Apoio sobre a viga vertical intermediária do modelo, considerando-se apenas um dos lados da placa:



*Figura 4-26– Reação de Apoio da Placa Sobre a Viga Vertical Intermediária*

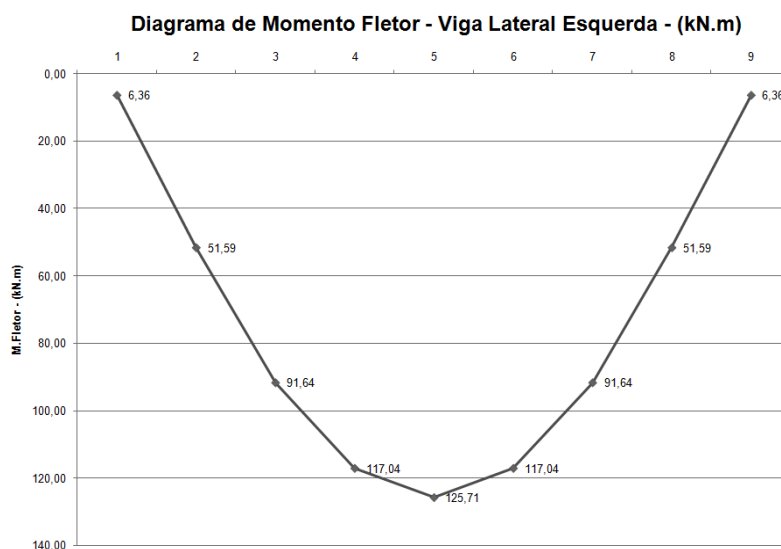
## Diagrama de Momento Fletor das Vigas

### 1 – Diagrama de Momento Fletor da Viga Horizontal Superior – (Elementos 1 a 15)



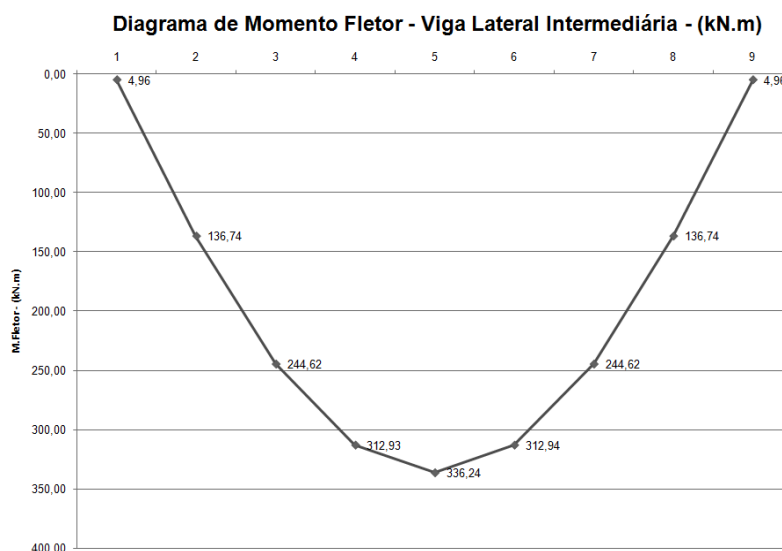
*Figura 4-27– Diagrama de Momento Fletor da Viga Superior do Modelo*

**2 – Diagrama de Momento Fletor da Viga Vertical da Lateral Esquerda – (elementos 145 a 152)**



*Figura 4-28– Diagrama de Momento Fletor da Viga Lateral Esquerda do Modelo*

**3 – Diagrama de Momento Fletor da Viga Vertical Intermediária – ( Elementos 209 a 216)**

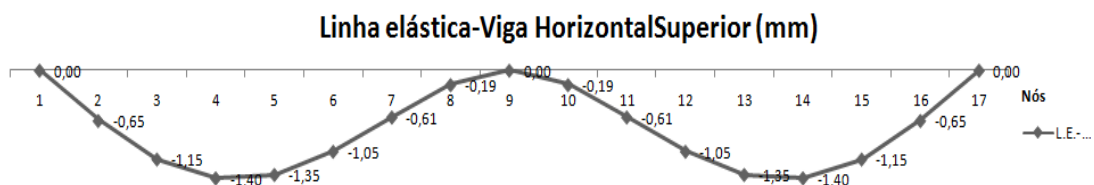


*Figura 4-29– Diagrama de Momento Fletor da Viga Lateral Esquerda do Modelo*



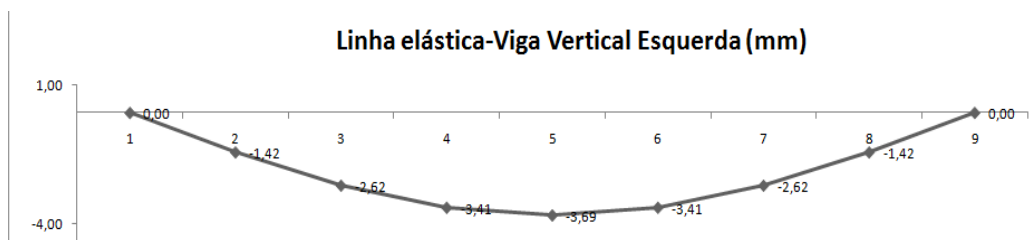
## Linha Elástica das Vigas

### Linha Elástica da Viga Horizontal Superior – (Elementos 1 a 15)



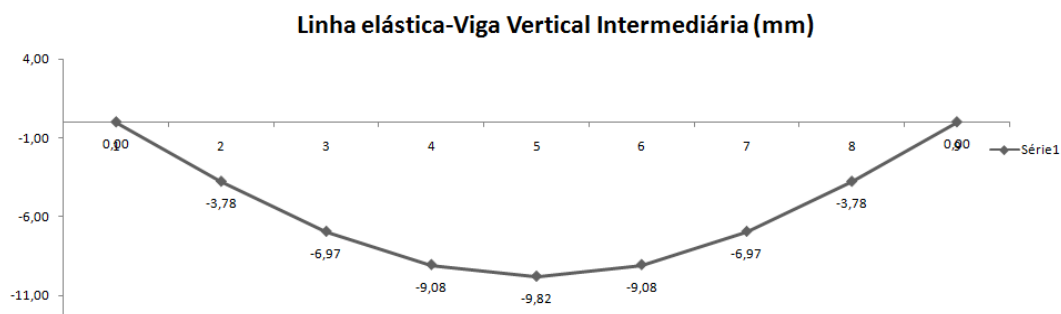
*Figura 4-30 – Linha Elástica da Viga Superior do Modelo*

### Linha Elástica da Viga Vertical – Lateral Esquerda – ( Elementos 145 a 152)



*Figura 4-31 – Linha Elástica da Viga Vertical – Lateral Esquerda*

### Linha Elástica da Viga Vertical – Intermediária – ( Elementos 209 a 216)



*Figura 4-32 – Linha Elástica da Viga Vertical – Lateral Intermediária*

#### 4.3.1. Resolução Processo manual – (Teoria das Placas)

A resolução do presente exemplo pela teoria das placas é o mesmo resolvido no exemplo anterior – (item 4.2.2).

Assim, a seguir é apresentado a análise dos resultados entre a Teoria das Placas e o Método da Grelha Equivalente.

- Momento Máximo Positivo - Direção x:
  - Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 13,87 kN.m/m de momento máximo;
  - Grelha equivalente: nos nós 72 e 82 (simétricos) foi encontrado um valor de 13,02 kN.m/m;
  - Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 6,54% a maior;
- Momento Máximo Positivo - Direção Y:
  - Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 10,81 kN.m/m de momento máximo;
  - Grelha equivalente: nós 72 e 82 (simétricos) foi encontrado um valor de 11,04 kN.m/m;
  - Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 2,12% a menor;
- Momento Máximo Negativo – Direção X
  - Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 29,99 kN.m/m de momento máximo;
  - Grelha equivalente: nó 77 foi encontrado um valor de 27,40 kN.m/m;
  - Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 9,45%;

### Reações das Lajes sobre os elementos de apoio (vigas)

A obtenção das reações de apoio pelo método previsto pela NBR 6118:2003, foi o mesmo resolvido no exemplo constante do item 4.2.2, assim, limitarei à comparação dos resultados obtidos.

- Reação da Laje sobre a viga, ao longo da direção y no lado apoiado:
  - Método da NBR 6118:2003 foi encontrado um valor de 10,208 kN/m – (constante ao longo da direção y no lado apoiado);
  - Grelha equivalente: foi encontrado um valor máximo de 11,295 kN/m – (variável sob a forma de uma parábola, conforme figura 4-25);
  - Diferença entre o método da NBR 6118:2003 e o da Grelha Equivalente em relação ao valor de pico é 9,62% inferior;
- Reação da Laje sobre a viga, ao longo da direção y no lado engastado:
  - Método da NBR 6118:2003 foi encontrado um valor de 17,688 kN/m – (constante ao longo da direção x no lado apoiado);
  - Grelha equivalente: foi encontrado um valor máximo de 19,506 kN/m – (variável sob a forma de uma parábola, conforme figura 4-26);
  - Diferença entre o método da NBR 6118 e o da Grelha Equivalente em relação ao valor de pico é 9,32% inferior;
- Reação da Laje sobre a viga, ao longo da direção x no lado apoiado (2 lados):
  - Método da NBR 6118: foi encontrado um valor de 8,052 kN/m – (constante ao longo da direção x no lado apoiado);
  - Grelha equivalente: foi encontrado um valor máximo de 10,317 kN/m – (variável sob a forma de uma parábola, conforme figura 4-24);
  - Diferença entre o método da NBR 6118 e o da Grelha Equivalente em relação ao valor de pico é 21,95% inferior;

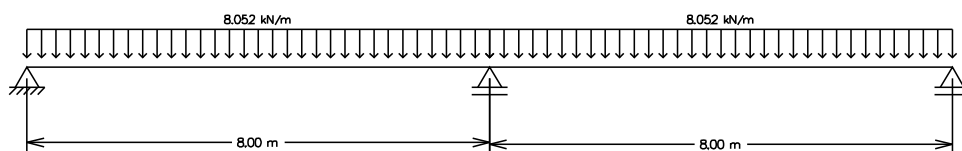
## Momento Fletor e Linha Elástica nas Vigas de Contorno da Laje

Será determinado a linha elástica das vigas de contorno da laje, considerando:

- Carregamento obtido pelo método da NBR 6118:2003;
- Comportamento elástico do material e momento inércia da seção bruta (sem fissuração), uma vez que o objetivo é comparar com os resultados obtidos pela teoria da Grelha.

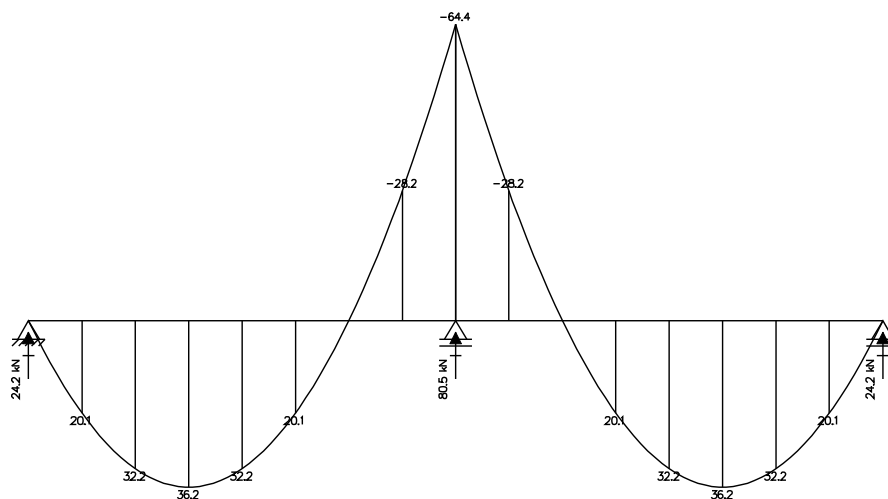
1 – Viga Horizontal Superior

Esquema de carregamento:



*Figura 4-33– Esquema Estático e Carregamento da Viga Horizontal Superior*

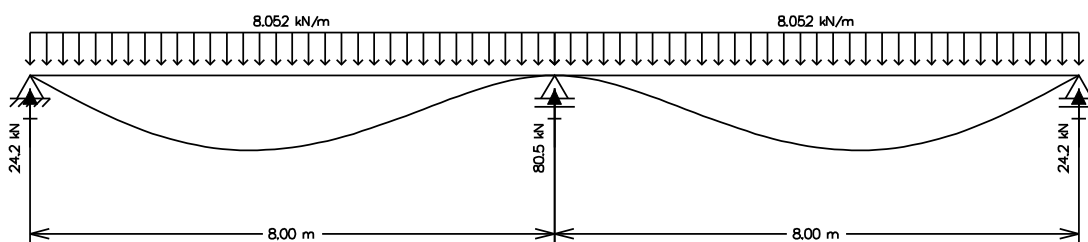
Diagrama de Momento Fletor (kN.m)



*Figura 4-34– Diagrama de Momento Fletor da Viga Horizontal Superior*

Linha Elástica (mm)

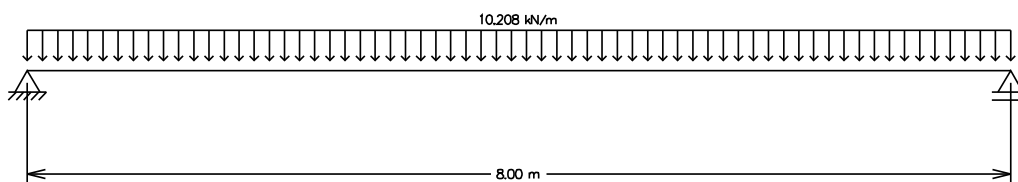
Deslocamento Vertical Máximo: 0,803 mm à 3,40 m do apoio da extremidade esquerda.



*Figura 4-35– Linha Elástica da Viga Horizontal Superior*

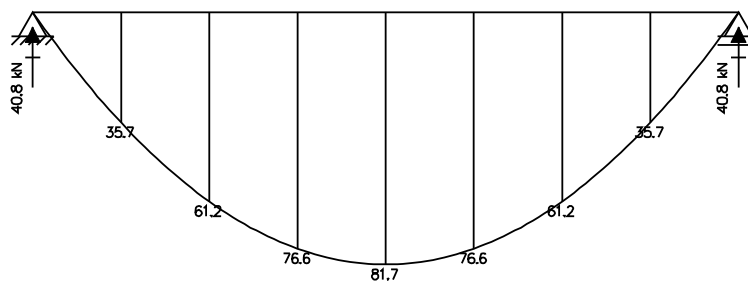
2 – Viga Vertical Esquerda

Esquema de Carregamento da Viga



*Figura 4-36– Esquema Estático e Carregamento da Viga Vertical Esquerda*

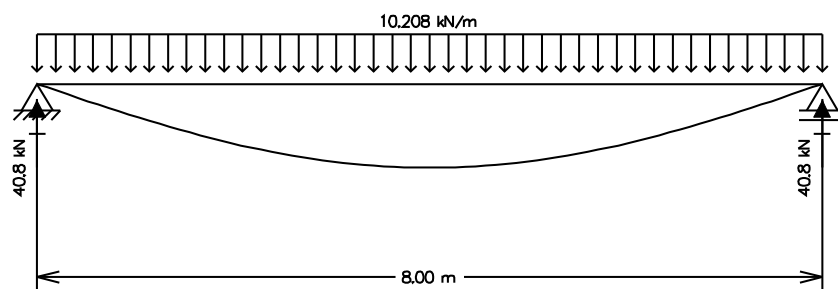
Diagrama de Momento Fletor (kN.m)



*Figura 4-37– Diagrama de Momento Fletor da Viga Vertical Esquerda*

Linha Elástica (mm)

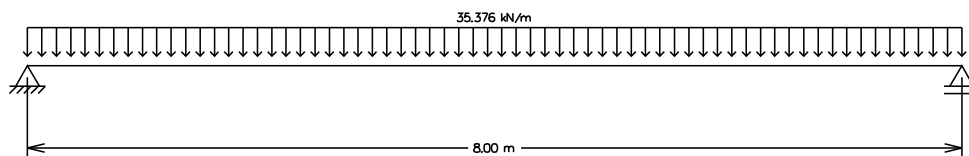
Deslocamento Vertical Máximo: 2,447 mm à 4,00 m do apoio da extremidade esquerda.



*Figura 4-38 – Linha Elástica da Viga Vertical Esquerda*

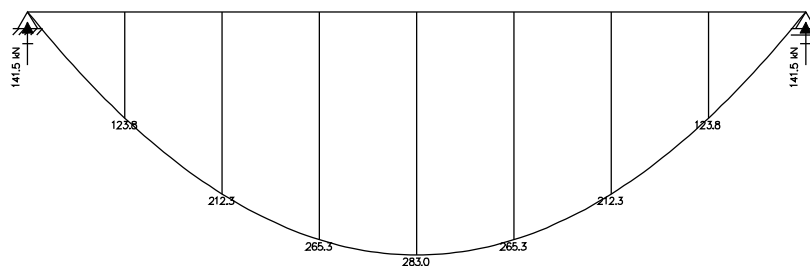
3 – Viga Vertical Intermediária

Esquema de carregamento da viga



*Figura 4-39 – Esquema Estático e Carregamento da Viga Vertical Intermediária*

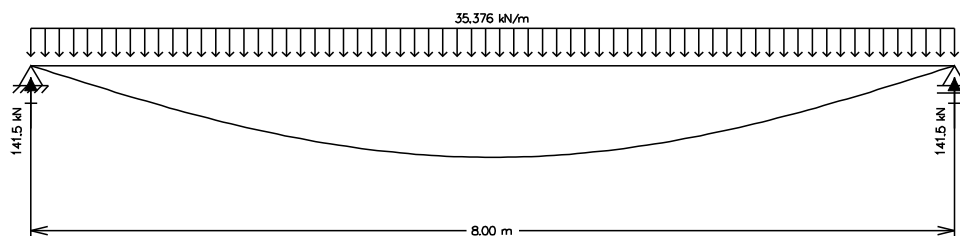
Diagrama de Momento Fletor (kN.m)



*Figura 4-40 – Diagrama de Momento Fletor da Viga Vertical Intermediária*

Linha Elástica (mm)

Deslocamento Vertical Máximo: 8,480 mm à 4,00 m do apoio da extremidade esquerda.



**Figura 4-41– Linha Elástica da Viga Vertical Intermediária**

Comparativo dos resultados obtidos:

- Viga Horizontal Superior

Momento Fletor Positivo:

- Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 36,2 kN.m de momento máximo;
- Grelha equivalente: nos nós 04 e 14 (simétricos) foi encontrado um valor de 67,02 kN.m;
- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 46% a menor;

Momento Fletor Negativo:

- Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 64,4 kN.m de momento máximo;
- Grelha equivalente: nos nó 09 foi encontrado um valor de 97,95 kN.m;
- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 34,3% a menor;

Flecha Máxima:

- Teoria da Elasticidade: foi encontrado o valor de 0,803 mm;
- Grelha equivalente: nos nó 04 foi encontrado o valor de 1,40 mm;

- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 42,6% a menor;

- Viga Vertical Esquerda

Momento Fletor Positivo:

- Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 81,7 kN.m de momento máximo;

- Grelha equivalente: nos nó 05 foi encontrado um valor de 125,71 kN.m;

- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 35% a menor;

Flecha Máxima:

- Teoria da Elasticidade: foi encontrado o valor de 2,447 mm;

- Grelha equivalente: nos nó 04 foi encontrado o valor de 3,69 mm;

- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 33,7% a menor;

- Viga Vertical Intermediária

Momento Fletor Positivo:

- Teoria da Elasticidade: foi encontrado um valor de 283,0 kN.m de momento máximo;

- Grelha equivalente: nos nó 05 foi encontrado um valor de 336,24 kN.m;

- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 15,84% a menor;

Flecha Máxima:

- Teoria da Elasticidade: foi encontrado o valor de 8,48 mm;

- Grelha equivalente: nos nó 04 foi encontrado o valor de 9,82 mm;

- Diferença entre a Teoria da Elasticidade e Grelha Equivalente é de 13,6% a menor;



### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 3:**

- Pode-se perceber que os resultados obtidos no presente exemplo ficaram um pouco menores que o anterior, fato este que pode ser explicado em razão dos elementos de contorno da laje (vigas) serem passíveis de deslocamento vertical;
- No século passado os projetistas de forma geral como não dispunham de ferramentas numéricas para tal análise, costumavam considerar o momento fletor negativo para o apoio indeslocável como valor de dimensionamento do elemento estrutural, estando assim em princípio a favor da segurança. Porém no que se refere ao momento fletor positivo próximo ao centro da placa havia o cuidado de considerá-lo com um valor acrescido como forma compensatória do procedimento empregado anteriormente;
- Embora esse raciocínio seja bastante lógico e aparentemente procedente, tal fato (momento positivo) não se verificou quando se compara os exemplos 1 e 2, ou seja, o momento fletor positivo do exemplo 2 (apoio da placa em viga), deveria ser maior que do exemplo 1 (apoio da placa indeslocável verticalmente) o que não ocorreu. Ele foi ligeiramente inferior e a falha do raciocínio anterior está no fato de se imaginar que se tem um elemento linear nessa direção, quando a resolução pela teoria de grelha mostrou-se que o comportamento é de placa. Ou seja, a um decréscimo  $\Delta M$  negativo, não corresponde a um acréscimo linear no momento fletor positivo.
- O exemplo resolvido pelo método da grelha equivalente, mostra que a rigidez da viga intermediária interfere significativamente nos esforços de continuidade das placas. O processo de resolução por tabelas como o de placas não conseguem considerar tal efeito.

## **5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO COM PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE PARA PAVIMENTOS INTERAÇÃO VIGA/PILAR: ESTUDO DA AÇÃO DE VENTO E INSTABILIDADE GLOBAL**

### **5.1. Introdução**

Para ilustrar a necessidade de consideração da interação viga/pilar no projeto e dimensionamento de estruturas de concreto de edificações será, apresentado uma série de exemplos seqüenciais, com o intuito de mostrar a utilização da ferramenta computacional FTOOL, sendo que em cada um deles buscar-se-á apresentar um determinado conceito, que ao final tem como um dos objetivos, dar ao estudante de engenharia ou ao profissional recém formado uma idéia de como utilizar os procedimentos na elaboração de projetos reais.

Exemplo 5-A: Demonstrar conceito básico da não-linearidade geométrica (efeito de segunda ordem), de uma haste reta vertical, engastada na base e livre no topo, sujeita inicialmente à cargas horizontal e vertical, a partir da utilização do software FTOOL;

Exemplo 5-B: Determinação da dimensão de um pilar equivalente, a partir do pórtico plano (interação viga-pilar), com o objetivo de utilização da rigidez equivalente, para a determinação posteriormente do parâmetro de instabilidade ( $\alpha$ ) previsto pela NBR 6118:2003. Para tanto, serão realizados dois exemplos de uma edificação com 02 e 05 pavimentos, utilizando o software FTOOL;

Exemplo 5-C: Estudo da ação do vento em estruturas de edificações, de acordo com a NBR 6123:1988 e a determinação dos esforços na estrutura, utilizando o software FTOOL, considerando a planta básica, com 02 e 05 pavimentos respectivamente;

Exemplo 5-D: Determinação dos esforços devido a ação lateral do vento em pórticos associados em série, para resistir a ação do vento, com os pilares contendo inércia variável;

Exemplo 5-E: Determinação do parâmetro de instabilidade  $\alpha$ , que define se a estrutura pode ser considerada de nós fixos;

Exemplo 5-F: Determinação do coeficiente  $\gamma_z$  de avaliação da importância dos esforços globais de segunda ordem;

Para os exemplos 5-B a 5-F, será utilizada edificação cuja planta baixa e corte e a apresentada nas figuras 5-1 e 5-2, sendo que a referida edificação será resolvida considerando dois e cinco pavimentos respectivamente.

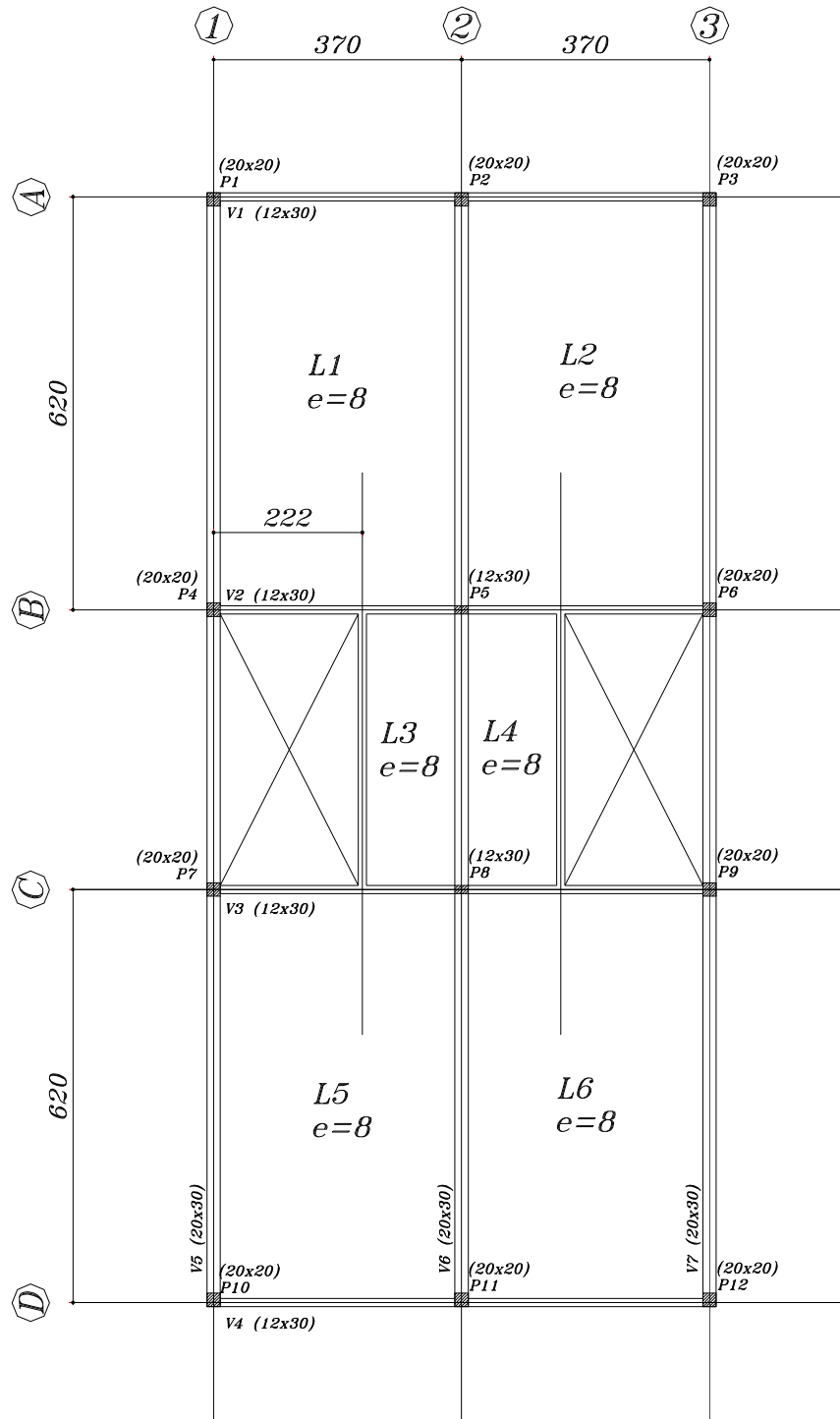


Figura 5-1 – Planta Esquemática

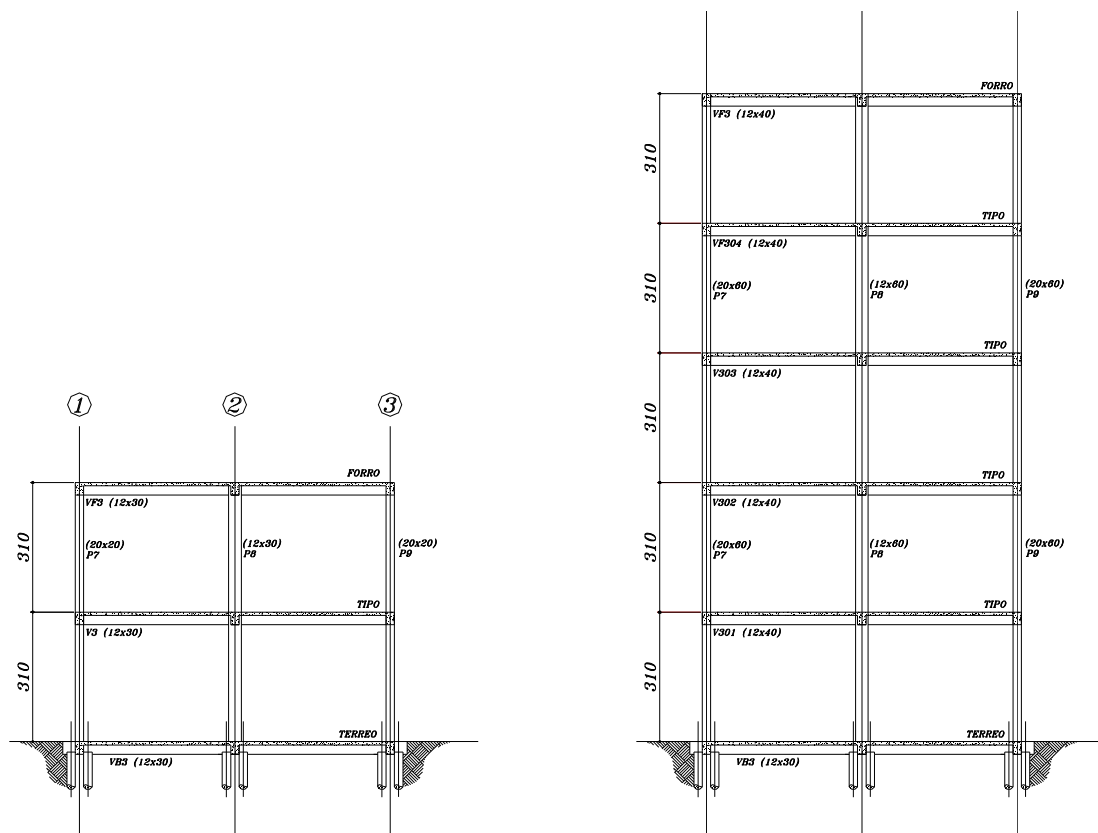


Figura 5-2 – Corte Esquemático 2 e 5 pavimentos

Dados complementares:

Gerais:

$$f_{ck}=30,0 \text{ MPa.}$$

Concreto

$$E_c = 5600 \times \sqrt{f_{ck}} = 5600 \times \sqrt{30} = 30.672 \text{ MPa}$$

$$G_c = 0,4 \times E_c = 0,4 \times 30.672 = 12.269 \text{ MPa}$$

Específicos: Edificação com 02 pavimentos

Pilares - (20x20 cm)

$$\text{Area} = 400 \text{ cm}^2$$

$$\text{Inércia} = 13.333,33 \text{ cm}^4$$

Vigas - (12x40 cm)

$$\text{Area} = 480 \text{ cm}^2$$

$$\text{Inércia} = 64.000 \text{ cm}^4$$

Específicos: Edificação com 05 pavimentos

Pilares - (20x60 cm)

Area = 1200 cm<sup>2</sup>

Inércia = 360000 cm<sup>4</sup>

Vigas - (12x40 cm)

Area = 480 cm<sup>2</sup>

Inércia = 64.000 cm<sup>4</sup>

## 5.2. Exemplo 5-A – Efeitos de Segunda Ordem em Colunas

Objetivo: Demonstração do efeito de segunda ordem em função da não linearidade-geométrica;

Seja determinar o deslocamento do topo do pilar engastado na base e livre no topo, apresentado na figura 5-1, considerando o efeito  $Px\Delta$  ( não linearidade geométrica - sem considerar a fissuração) com os seguintes dados preliminares:  $f_{ck} = 30,0$  MPa,  $L = 300$  cm e seção transversal de 20 x 20 cm, carga horizontal no topo do pilar 10,0 kN e carga vertical de 200,0 kN.

### Características Geométricas:

Pilar - (20x20 cm)

Area = 400 cm<sup>2</sup>

Inércia = 13.333,33 cm<sup>4</sup>

Concreto

$E_c = 5600 \times \sqrt{f_{ck}} = 5600 \times \sqrt{30} = 30.672$  MPa

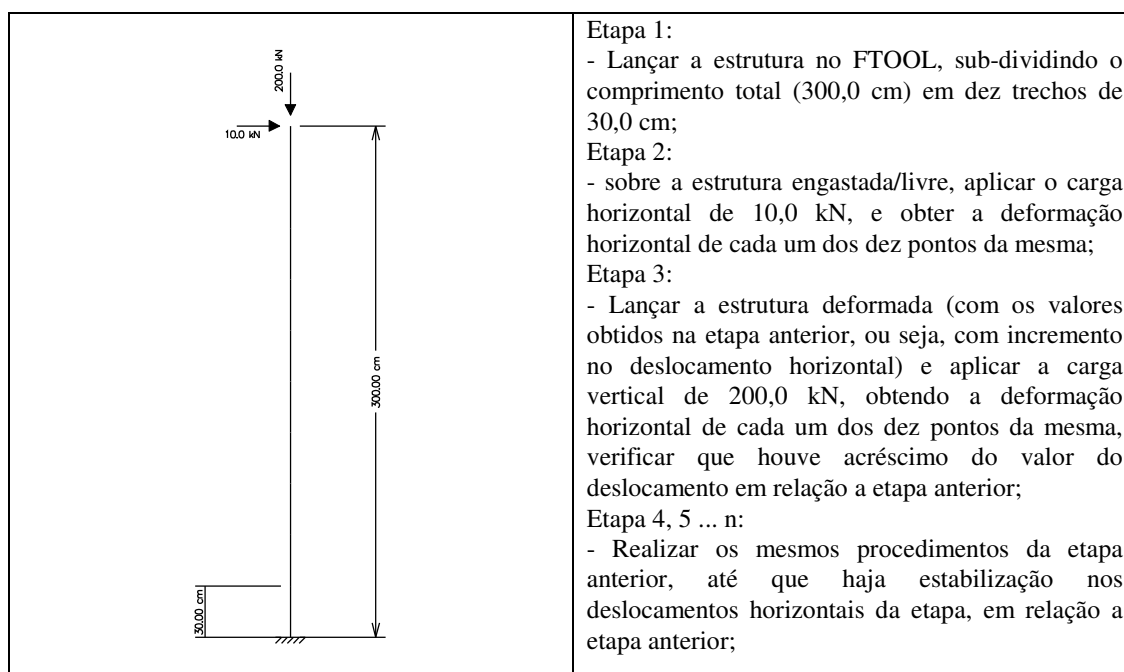


Figura 5-3 – Estrutura submetida à carga vertical e à ação lateral

A tabela 5-1 mostra os incrementos de deslocamento que foram obtidos a partir de cada uma das iterações ao longo da coluna. Cabe observar que a primeira coluna se refere ao deslocamento horizontal devido a carga horizontal de 10,0 kN e os demais incrementos se referem a estrutura deslocada com o carregamento vertical de 20,0 kN.

Cabe observar que os valores dos deslocamentos horizontais das duas últimas colunas (W-Int.4 e W-Int.5), foram muito próximos, demonstrando-se assim que a partir de um certo número de incrementos, a mesma estabilizou sua deformação.

*Tabela 5-1- Incrementos de deslocamento na geometria da coluna*

Cotas (cm)	W-Hor. (cm)	W-Int. 1 (cm)	W-Int. 2 (cm)	W-Int. 3 (cm)	W-Int. 4 (cm)	W-Int. 5 (cm)
300	2,700	0,581	0,708	0,736	0,742	0,743
270	2,296	0,491	0,598	0,621	0,626	0,627
240	1,901	0,403	0,490	0,509	0,513	0,514
210	1,521	0,319	0,388	0,403	0,406	0,407
180	1,166	0,241	0,293	0,305	0,308	0,308
150	0,844	0,173	0,209	0,217	0,219	0,219
120	0,567	0,113	0,136	0,142	0,143	0,143
90	0,328	0,064	0,078	0,081	0,084	0,082
60	0,151	0,029	0,035	0,036	0,037	0,037
30	0,039	0,007	0,009	0,009	0,009	0,009
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

A tabela 5-2 mostra o valor acumulado do deslocamento na coluna em cada incremento.

**Tabela 5-2- Incrementos acumulados de deslocamento na geometria da coluna**

Cota (cm)	W-Hor. (cm)	W-Int. 1 (cm)	W-Int. 2 (cm)	W-Int. 3 (cm)	W-Int. 4 (cm)	W-Int. 5 (cm)
300	2,70	3,28	3,41	3,44	3,44	3,44
270	2,30	2,79	2,89	2,92	2,92	2,92
240	1,90	2,30	2,39	2,41	2,41	2,42
210	1,52	1,84	1,91	1,92	1,93	1,93
180	1,17	1,41	1,46	1,47	1,47	1,47
150	0,84	1,02	1,05	1,06	1,06	1,06
120	0,57	0,68	0,70	0,71	0,71	0,71
90	0,33	0,39	0,41	0,41	0,41	0,41
60	0,15	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19
30	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

A tabela 5-3, é apresentada as cotas finais verticais (constante) e horizontais (variáveis) para se lançar a estrutura deslocada a partir de cada incremento no programa FTOOL.

**Tabela 5-3- Cotas da estrutura deslocada, após o incremento do deslocamento anterior**

Cotas Y (cm)	Cota X1 (cm)	Cota X2 (cm)	Cota X3 (cm)	Cota X4 (cm)	Cota X5 (cm)	Cota X6 (cm)
300	100	102,700	203,281	303,408	403,436	503,442
270	100	102,296	202,787	302,894	402,917	502,922
240	100	101,901	202,304	302,391	402,410	502,414
210	100	101,521	201,840	301,909	401,924	501,927
180	100	101,166	201,407	301,459	401,471	501,474
150	100	100,844	201,017	301,053	401,061	501,063
120	100	100,567	200,680	300,703	400,709	500,710
90	100	100,328	200,392	300,406	400,409	500,412
60	100	100,151	200,180	300,186	400,187	500,188
30	100	100,039	200,046	300,048	400,048	500,048
0	100	100,000	200,000	300,000	400,000	500,000

Analisando a tabela 5-4 verifica-se os valores finais do deslocamento em centímetros em cada um dos pontos discretizados da coluna e verifica-se por exemplo na seção 10 (topo da coluna) nas três últimas interações que o valor do deslocamento



horizontal permaneceu em 3,44 cm, portanto estabilizada.

*Tabela 5-4- Valores dos deslocamentos horizontais*

Seção	W-Hor. (cm)	W-Int. 1 (cm)	W-Int. 2 (cm)	W-Int. 3 (cm)	W-Int. 4 (cm)	W-Int. 5 (cm)
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
2	0,15	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19
3	0,33	0,39	0,41	0,41	0,41	0,41
4	0,57	0,68	0,70	0,71	0,71	0,71
5	0,84	1,02	1,05	1,06	1,06	1,06
6	1,17	1,41	1,46	1,47	1,47	1,47
7	1,52	1,84	1,91	1,92	1,93	1,93
8	1,90	2,30	2,39	2,41	2,41	2,42
9	2,30	2,79	2,89	2,92	2,92	2,92
10	2,70	3,28	3,41	3,44	3,44	3,44

A seguir, apresenta-se respectivamente nas figura 5-4, a estrutura carregada após cada incremento de deslocamento horizontal (total de 5 incrementos), e na figura 5-5, o conjunto de estruturas apresentando a linha elástica, após cada um dos incrementos deslocamento horizontal e finalmente na figura 5-6 o diagrama de momento fletor de cada uma das etapas, onde constata-se que para um momento fletor inicial na base do pilar de 30,0 kN.m (momento de primeira ordem), houve um aumento de 6,9 kN.m (momento de segunda ordem), o que corresponde a 23% do valor do momento inicial.

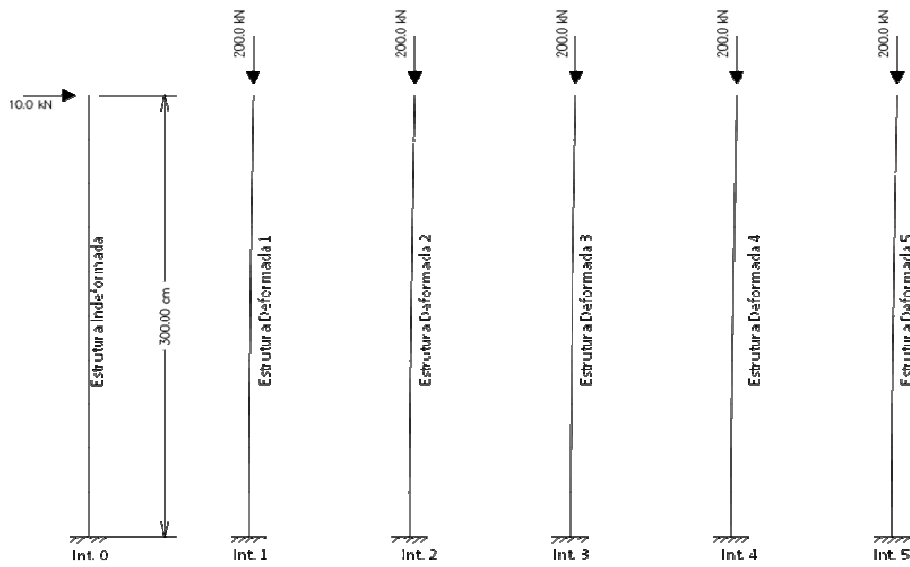


Figura 5-4– Estrutura Carregada após cada incremento de deslocamento horizontal

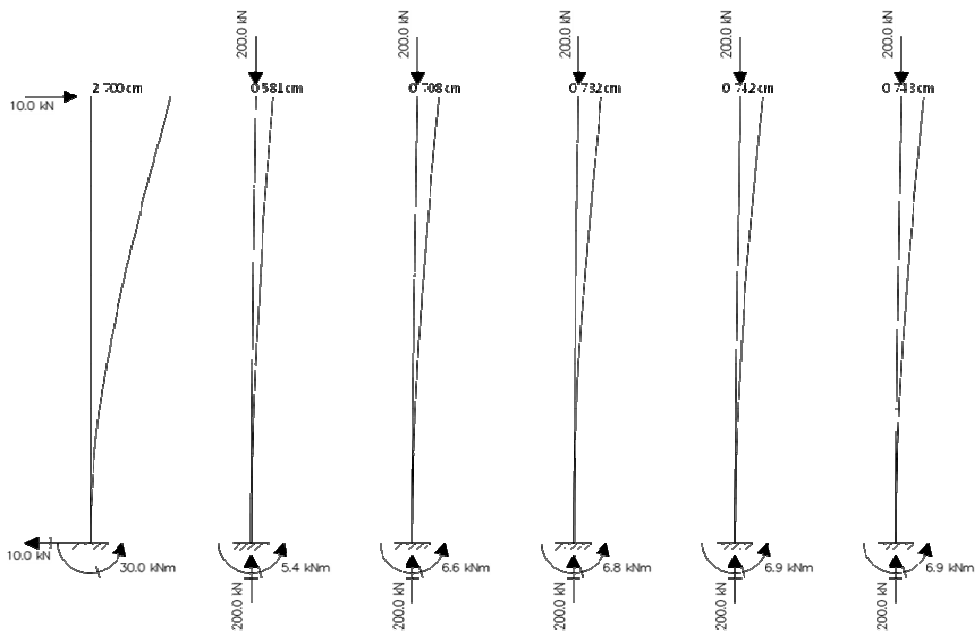
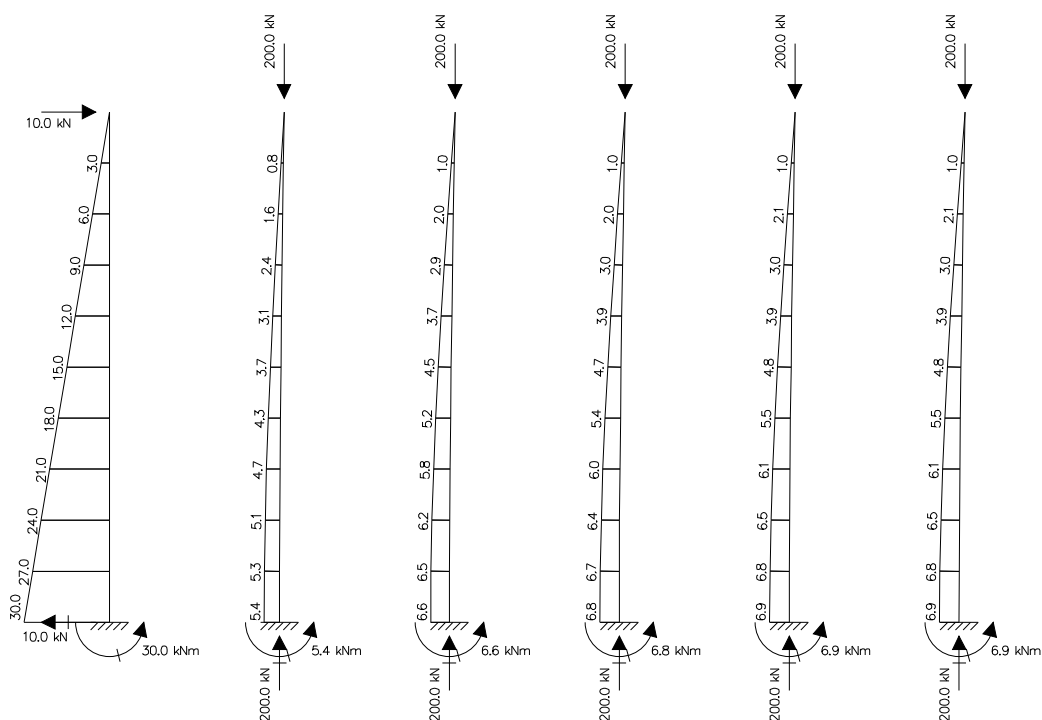


Figura 5-5– Conjunto de estruturas apresentando a linha elástica após os incrementos sucessivos de deslocamento horizontal



**Figura 5-6– Conjunto de estruturas apresentando o diagrama de Momento Fletor após os incrementos sucessivos de deslocamento horizontal**

Conclusões:

- 1 – Há uma estabilização da deformação a partir do quinto incremento de deslocamento na coluna;
- 2 – Houve um aumento de 23% no valor do momento fletor determinado estaticamente, ou seja, sem a consideração do deslocamento causado pela carga horizontal;

#### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 5-A:**

- Com esse exemplo, é possível perceber o comportamento do efeito de segunda ordem, o que levará ao aluno melhor compreender o conceito da não-linearidade geométrica.

- Neste exemplo, utilizou-se uma estratégia não prevista pelo FTOOL, para fazer o incremento de deslocamento, que foi a de lançar a estrutura deslocada com entrada

manual, uma vez que a versão atual do referido programa não prevê este procedimento, o que poderia ser incorporado nas versões posteriores.

### 5.3. Exemplo 5-B: Cálculo de Pilar Equivalente

Objetivo: Demonstração do processo de determinação do pilar com rigidez equivalente, utilizando o programa FTOOL.

Seja, determinar a dimensão de um pilar com rigidez equivalente ao pórtico formado pelos pilares P1, P2, P3 do sobrado cujas planta e corte estão definidos nas figuras 5-1 e 5-2 acima, nas seguintes situações: 02 e 05 pavimentos. Considerar que a geometria da estrutura assim como as demais características são as definidas na introdução deste capítulo.

#### 5.3.1. Dois Pavimentos

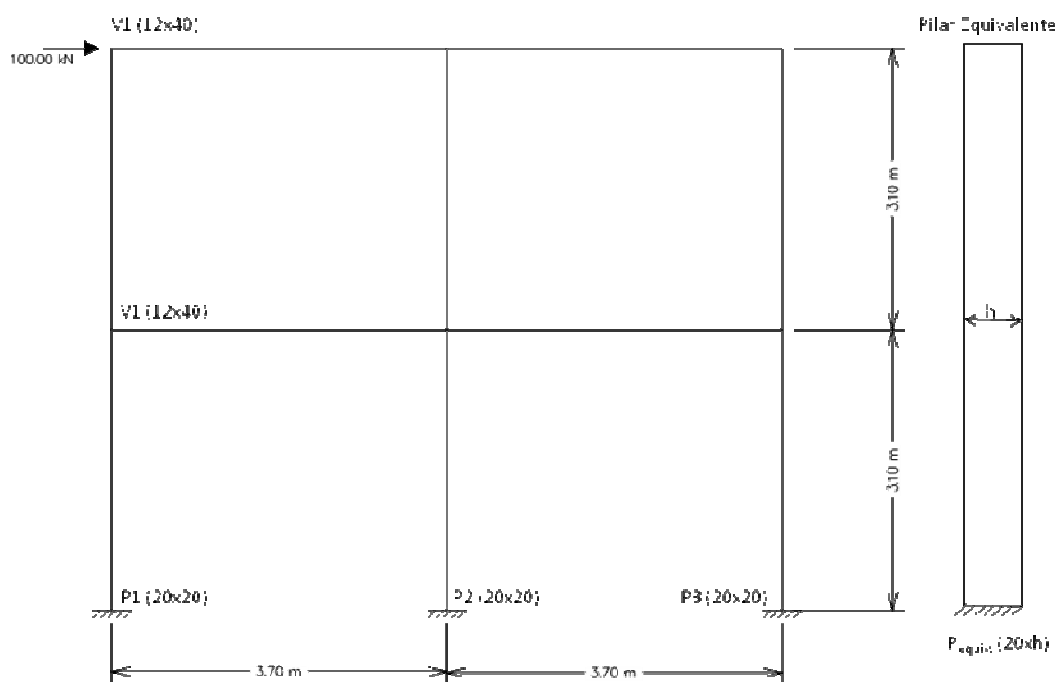
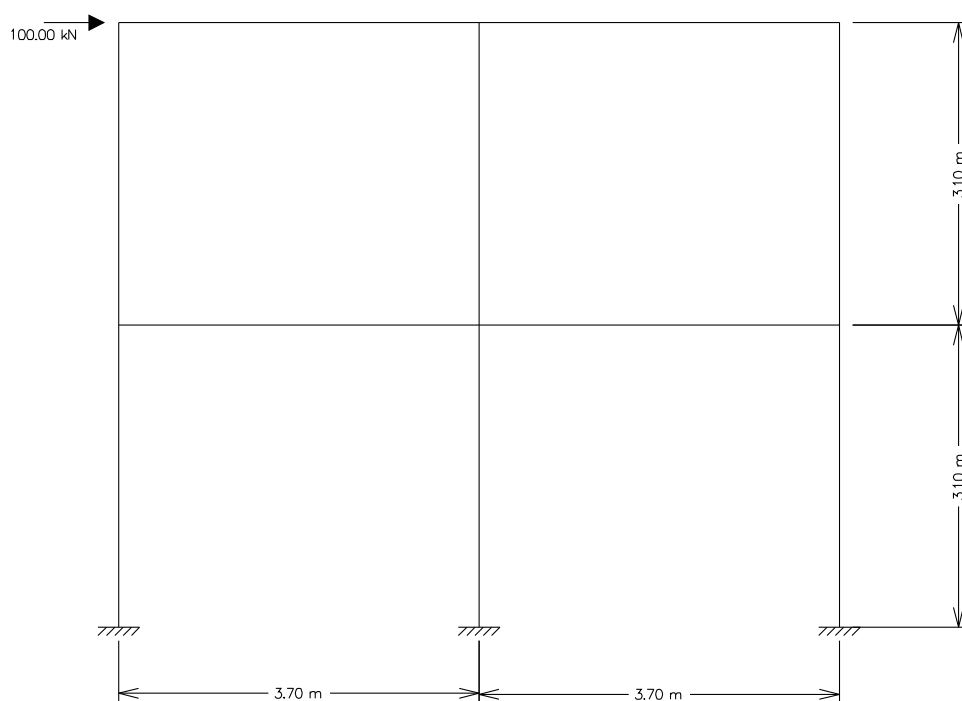


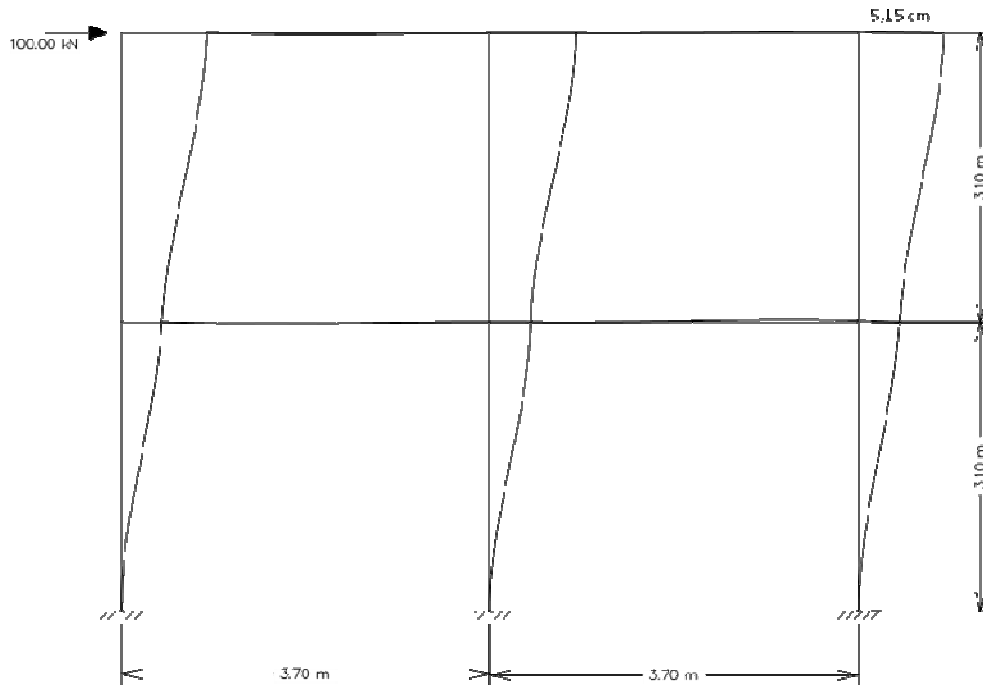
Figura 5-7— Modelo Estrutural com 02 Pavimentos

Resolução:

Considerando que uma força  $F = 100 \text{ kN}$  atuando horizontalmente no nó superior do pórtico, conforme se observa na figura 5-7 e utilizando-se do programa FTOOL, determina-se o deslocamento horizontal do topo do pórtico, que no caso corresponde a  $5,15 \text{ cm}$ , conforme se demonstra na figura 5-9.



**Figura 5-8– Modelo Estrutural com Carregamento Externo**



**Figura 5-9– Modelo Estrutural Deslocado**

Utilizando-se do conceito de produto de rigidez equivalente ( $EI_{eq}$ ), chega-se á:

$$\delta_{\text{pórtico}} = 5,15 \text{ cm}$$

$$E.I = \frac{F.h^3}{3.\delta_{\text{pórtico}}} \Rightarrow I = \frac{100.620^3}{3.3067,2.5,15} = 502.926 \text{ cm}^4$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12.502926}{20}} = 67,07 \text{ cm}$$

Assim, um pilar de 20x67 cm é equivalente em rigidez à do pórtico com a configuração definida acima.

### 5.3.2. Cinco Pavimentos

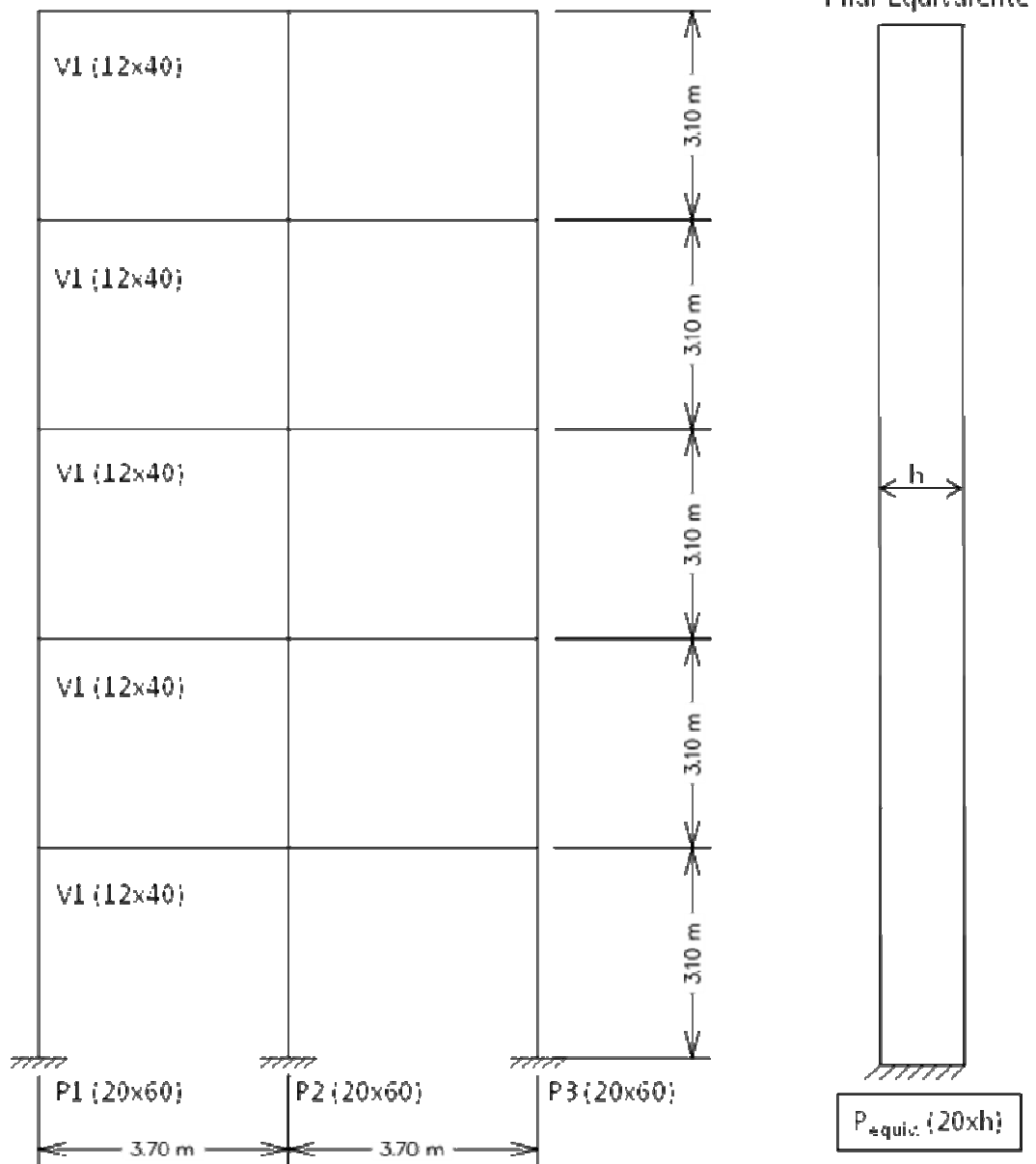
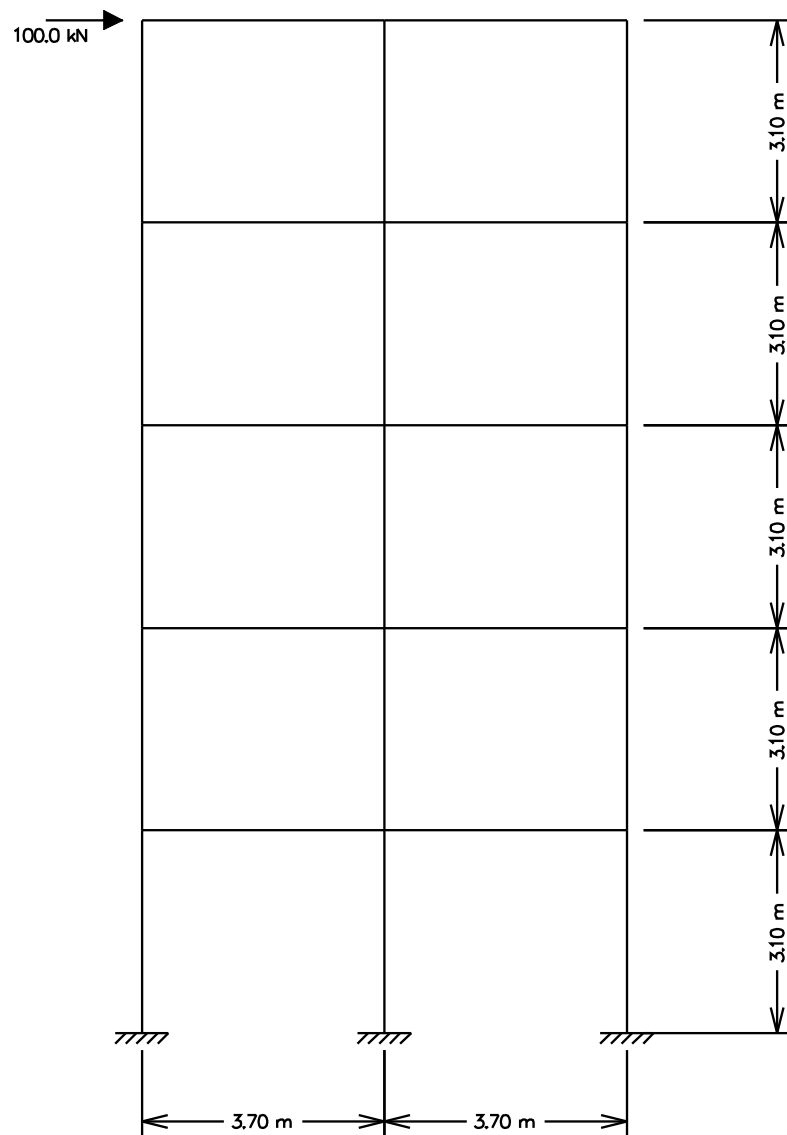


Figura 5-10– Modelo Estrutural com 5 pavimentos

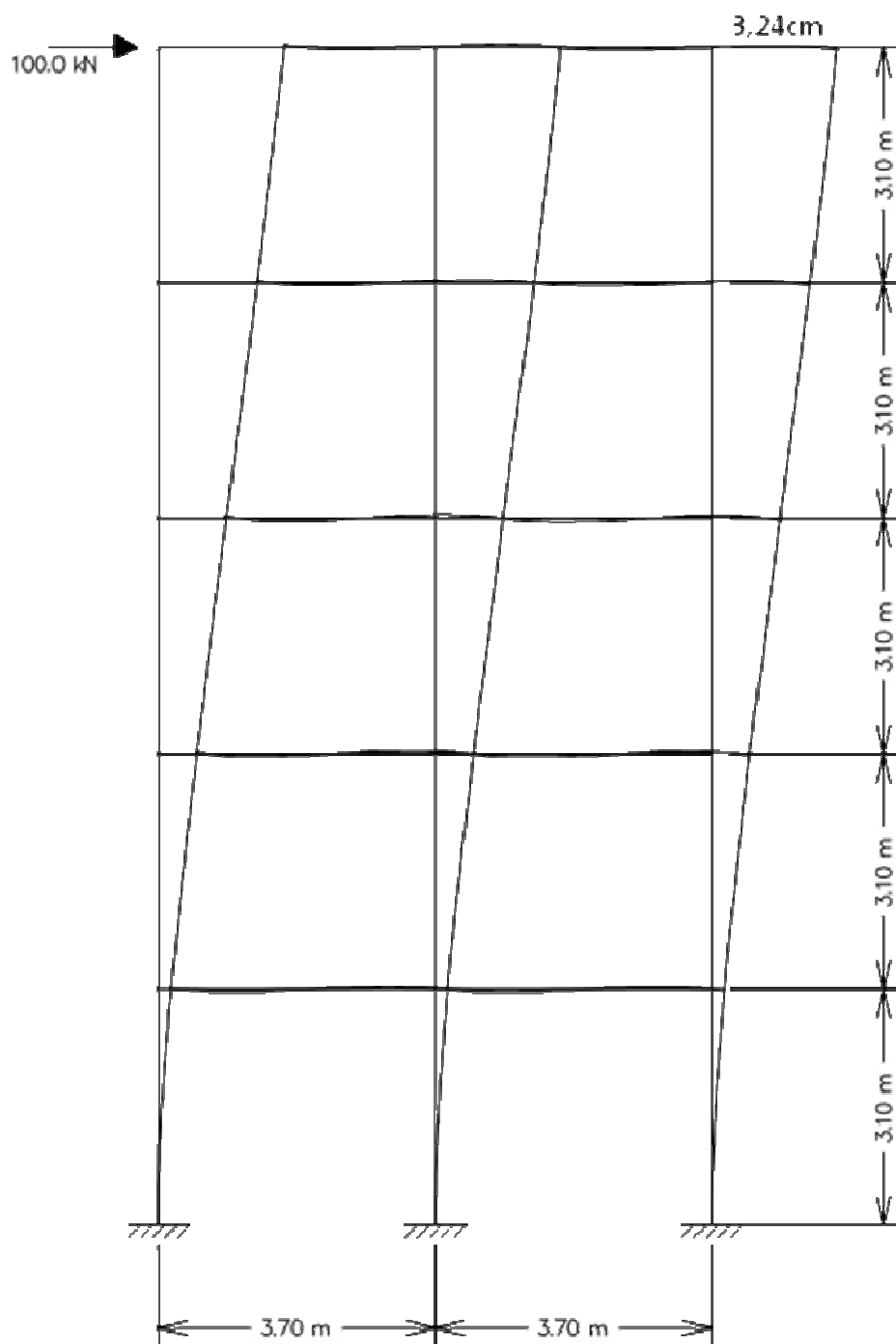
Resolução:

Repetindo-se os mesmos procedimentos utilizados para a edificação com 02 pavimentos analisado anteriormente, chega-se a:



*Figura 5-11– Modelo Estrutural com Carregamento Externo*





*Figura 5-12– Modelo Estrutural com 05 Pavimentos deslocado*

$$\delta_{\text{p\acute{o}rtico}} = 3,24 \text{ cm}$$

$$E.I = \frac{F.h^3}{3.\delta_{\text{p\acute{o}rtico}}} \Rightarrow I = \frac{100.1550^3}{3.3067,2.3,24} = 12.490.698,75 \text{ cm}^4$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12.12490698,75}{20}} = 195,69 \text{ cm}$$

Assim, um pilar de 20x196 cm é equivalente em rigidez à do pórtico com a configuração definida acima.

#### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 5-B:**

- Com este exemplo, é possível perceber como se determinar a dimensão de uma coluna (engastada/livre), equivalente a um pórtico plano, de tal forma que seu comportamento estrutural em relação ao deslocamento horizontal sejam equivalentes.
- O conceito de pilar equivalente, será útil na determinação do parâmetro de instabilidade  $\alpha$ , previsto no item 15.5.2 da NBR 6118:2003, objeto do exemplo 5-D.

#### **5.4. Exemplo 5-C – Ação Lateral do Vento em Edificações**

Objetivo: Determinação da ação do vento em estruturas de edificações:

Seja, determinar os esforços na estrutura apresentadas nas figuras 5-1 e 5-2 acima, nas seguintes situações: 02 e 05 pavimentos sendo que a ação do vento é considerada perpendicular a maior dimensão de um sobrado cujas plantas do tipo e forro assim como o corte são apresentados anteriormente, constantes das figuras 5-1 e 5-2. Considerar que a geometria da estrutura assim como as demais características são as definidas na introdução deste capítulo. Para fins de determinação da velocidade básica

do vento, admitir-se-á que a edificação esteja localizada na cidade de Ribeirão Preto-SP em uma região em que o terreno é plano e o bairro densamente habitado.

Condições gerais:

Velocidade básica do vento:

Analisando o gráfico das isopleias (NBR 6123:1988) – região de Ribeirão Preto-SP'

$$V_0 = 40 \text{ m/s}$$

Fator Topográfico –  $S_1$

$$S_1 = 1,0 \rightarrow \text{terreno plano}$$

Rugosidade do Terreno –  $S_2$

Maior dimensão da edificação < 20,0 m – CLASSE A – Categoria IV

$$S_2 = b \times F_r \times \left( \frac{z}{10} \right)^p$$

Sendo:

$z$  – é a altura acima do terreno – (1<sup>o</sup> Pavimento  $z = 3,1$  m 2<sup>o</sup> Pavimento  $z = 6,2$  m)

$F_r$  – Fator de rajada correspondente à classe B, categoria II

$b$  – parâmetro de correção da classe de edificação (tabela 3.1 – NBR 6123:1988)

$p$  – parâmetro meteorológico (tabela 3.1 – NBR 6123:1988)

$$F_r = 1,0 - b = 0,86 - p = 0,12$$

#### 5.4.1. Considerando edificação com 02 pavimentos

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow S_2 = 0,86 \times 1,00 \times \left( \frac{3,10}{10} \right)^{0,12} = 0,747$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow S_2 = 0,86 \times 1,00 \times \left( \frac{6,20}{10} \right)^{0,12} = 0,812$$

O parâmetro  $S_3$  será igual a 1,0, pois se trata de residência (grupo 2);

Assim, pode-se calcular a velocidade característica do vento:

$$V_k = V_0 \times S_1 \times S_2 \times S_3$$

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow V_k = 40.1.0.0,747.1,0 = 29,89 \text{ m/s}$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow V_k = 40.1.0.0,812.1,0 = 32,48 \text{ m/s}$$

A pressão de obstrução é dada por:

$$q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot V_k^2 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot 29,89^2 = 547,7 \text{ N/m}^2 = 0,548 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot 32,48^2 = 646,7 \text{ N/m}^2 = 0,647 \text{ kN/m}^2$$

A força de arrasto por andar é dada por:

$$F_a = C_a \cdot q \cdot A$$

O valor do coeficiente de arrasto será calculado para a situação de vento com alta turbulência por se tratar de bairro densamente habitado e portanto com muitas casas e sobrados nas proximidades;

Assim, os coeficientes de entrada são:

$$L_1/L_2 = 16,80/7,60 = 2,21$$

$$h/L_1 = 6,20/16,80 = 0,37$$

Com esses valores, obtém-se  $C_a = 1$

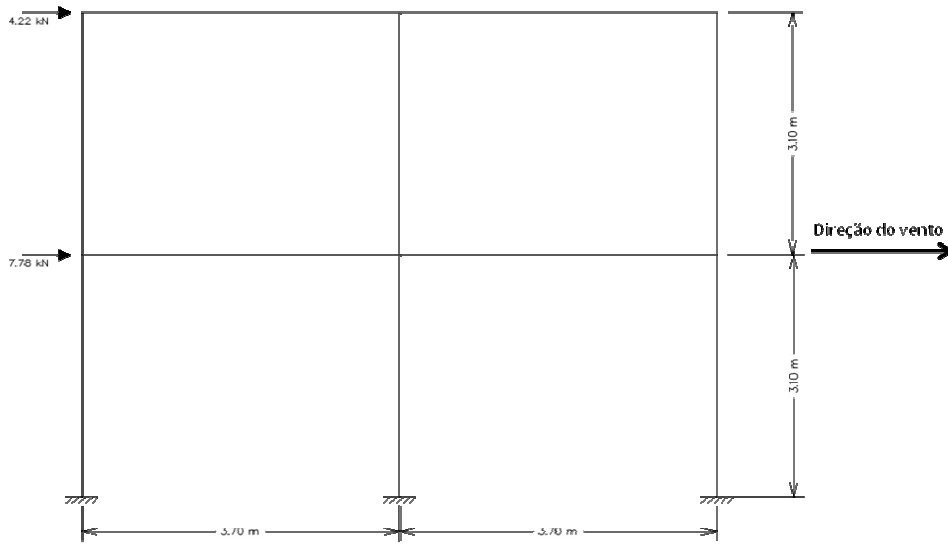
$$\text{para } z = 0,00 \text{ m} \rightarrow F_{a1} = 0 \text{ kN}$$

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow F_{a2} = 1,0 \cdot 0,548 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) + 1,0 \cdot 0,647 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) = 31,12 \text{ kN}$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow F_{a3} = 1,0 \cdot 0,647 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) = 16,85 \text{ kN}$$

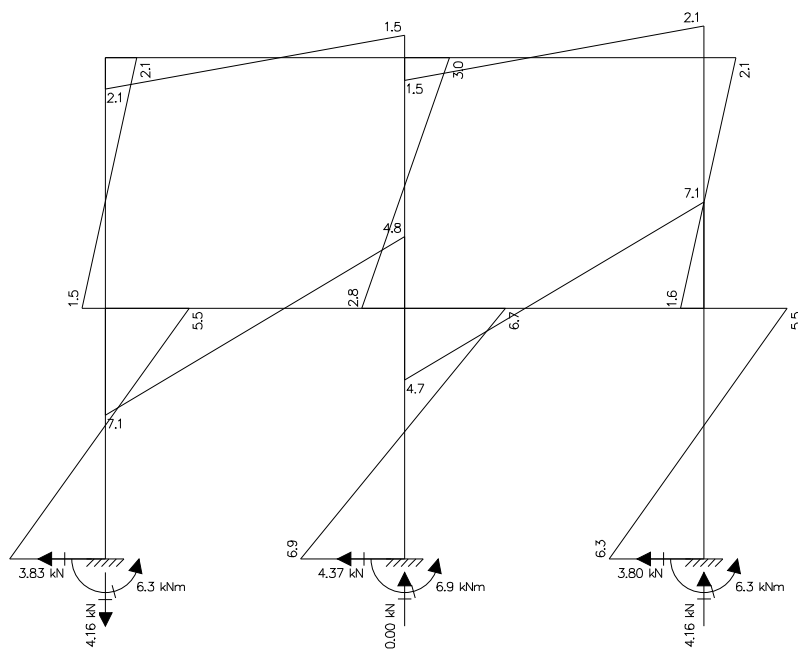
Determinação dos esforços na estrutura:

Considerando que na direção horizontal (direção da ação do vento) existem quatro pórticos, os valores obtidos no exemplo anterior serão divididos por quatro (efeito de septo);



**Figura 5-13– Carregamento da Estrutura**

Diagrama de Momento Fletor – (kN.m):



**Figura 5-14– Diagrama de Momento Fletor da Estrutura**

**Conclusões:**

- Para edificações de pequena altura como é o sobrado em questão, a ação vento nas vigas é bem pequena;

- A mesma edificação situada em terreno com aclive e sem obstrução poderia ter ação de vento superior na medida em que o coeficiente  $S_1$  aumentaria e o coeficiente de arrasto a ser considerado seria o de regime laminar;

**5.4.2. Considerando edificação com 05 pavimentos**

Considerando os mesmos dados do exemplo anterior, tem-se:

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow S_2 = 0,86 \times 1,00 \times \left(\frac{3,10}{10}\right)^{0,12} = 0,747$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow S_2 = 0,86 \times 1,00 \times \left(\frac{6,20}{10}\right)^{0,12} = 0,812$$

$$\text{para } z = 9,30 \text{ m} \rightarrow S_2 = 0,86 \times 1,00 \times \left(\frac{9,30}{10}\right)^{0,12} = 0,853$$

$$\text{para } z = 12,40 \text{ m} \rightarrow S_2 = 0,86 \times 1,00 \times \left(\frac{12,40}{10}\right)^{0,12} = 0,882$$

$$\text{para } z = 15,50 \text{ m} \rightarrow S_2 = 0,86 \times 1,00 \times \left(\frac{15,50}{10}\right)^{0,12} = 0,906$$

O parâmetro  $S_3$  será igual a 1,0, pois se trata de residência (grupo 2);

Assim, pode-se calcular a velocidade característica do vento:

$$V_k = V_0 \times S_1 \times S_2 \times S_3$$

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow V_k = 40.1.0.0.747.1,0 = 29,89 \text{ m/s}$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow V_k = 40.1.0.0.812.1,0 = 32,48 \text{ m/s}$$

$$\text{para } z = 9,30 \text{ m} \rightarrow V_k = 40.1.0.0.853.1,0 = 34,10 \text{ m/s}$$

$$\text{para } z = 13,40 \text{ m} \rightarrow V_k = 40.1.0.0.882.1,0 = 35,30 \text{ m/s}$$

$$\text{para } z = 15,50 \text{ m} \rightarrow V_k = 40.1.0.0.906.1,0 = 36,26 \text{ m/s}$$

A pressão de obstrução é dada por:

$$q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot V_k^2 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot 29,89^2 = 547,7 \text{ N/m}^2 = 0,548 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot 32,48^2 = 646,7 \text{ N/m}^2 = 0,647 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{para } z = 9,30 \text{ m} \rightarrow q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot 34,10^2 = 712,80 \text{ N/m}^2 = 0,713 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{para } z = 12,40 \text{ m} \rightarrow q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot 35,30^2 = 763,85 \text{ N/m}^2 = 0,764 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{para } z = 15,50 \text{ m} \rightarrow q_{\text{vento}} = 0,613 \cdot 36,26^2 = 805,96 \text{ N/m}^2 = 0,806 \text{ kN/m}^2$$

A força de arrasto por andar é dada por:

$$F_a = C_a \cdot q \cdot A$$

O valor do coeficiente de arrasto será calculado para a situação de vento com alta turbulência, por se tratar de bairro densamente habitado e portanto com muitas casas e sobrados nas proximidades;

Assim, os coeficientes de entrada são:

$$L_1/L_2 = 16,80/7,60 = 2,21$$

$$h/L_1 = 15,50/16,80 = 0,92$$

Com esses valores, obtém-se  $C_a = 1$

$$\text{para } z = 0,00 \text{ m} \rightarrow F_{a1} = 0 \text{ kN}$$

$$\text{para } z = 3,10 \text{ m} \rightarrow F_{a2} = 1,0,548 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) + 1,0,647 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) = 31,12 \text{ kN}$$

$$\text{para } z = 6,20 \text{ m} \rightarrow F_{a2} = 1,0,647 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) + 1,0,713 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) = 35,41 \text{ kN}$$

$$\text{para } z = 9,30 \text{ m} \rightarrow F_{a2} = 1,0,713 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) + 1,0,764 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) = 38,46 \text{ kN}$$

$$\text{para } z = 12,40 \text{ m} \rightarrow F_{a2} = 1,0,764 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) + 1,0,806 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) = 40,88 \text{ kN}$$

$$\text{para } z = 15,50 \text{ m} \rightarrow F_{a3} = 1,0,806 \cdot 16,8 \cdot (3,1/2) = 20,99 \text{ kN}$$

Determinação dos esforços na estrutura:

Considerando que na direção horizontal (direção da ação do vento) existem quatro pórticos, os valores obtidos no exemplo anterior serão divididos por quatro (efeito de septo);

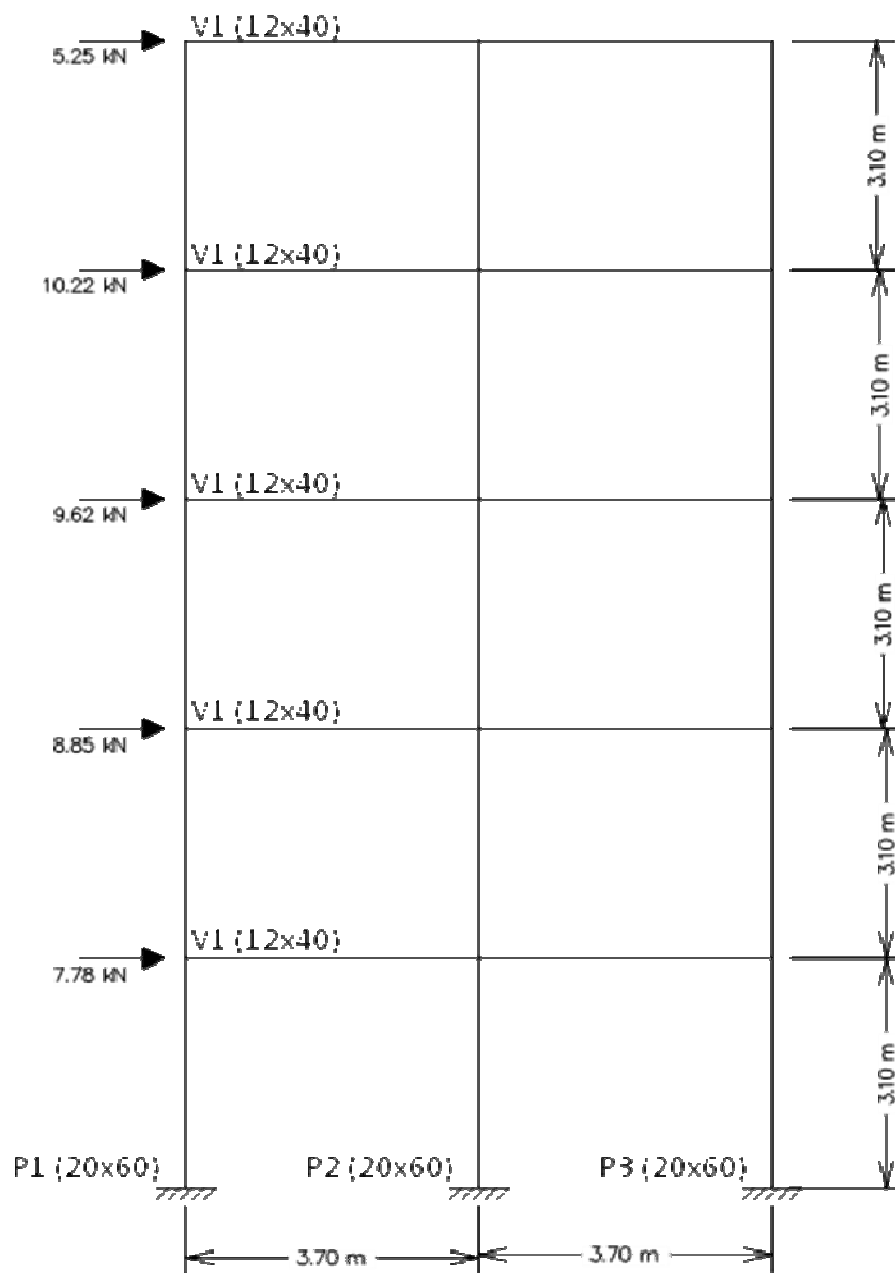


Figura 5-15- Carregamento da Estrutura





**Conclusões:**

- Não foi considerada a excentricidade de ação do vento na edificação;
- A norma estabelece que, em caso de regime turbulento, deve ser considerado excentricidades do vento em relação a planta da edificação;
- O momento fletor máximo causado na estrutura pela ação do vento na base do pilar não é tão pequena (42,8 kN.m – Pilar central);

**Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 5-C:**

- Optou-se pela resolução do presente exemplo, a fim de demonstrar a determinação da ação lateral do vento em estruturas de edificações de acordo com os procedimentos da NBR 6123:1988, uma vez que o referido assunto não faz parte do conteúdo curricular da disciplina “Estruturas de Concreto Armado”;
- Ainda este exemplo teve com objetivo mostrar que com a utilização do programa FTOOL ou similar, pode-se rapidamente obter os esforços devido à ação lateral do vento, que deve ser considerada no dimensionamento dos elementos estruturais (viga e pilar) da edificação.

**5.5. Exemplo 5-D: Esforços Devido a Ação do Vento em Pórticos Associados**

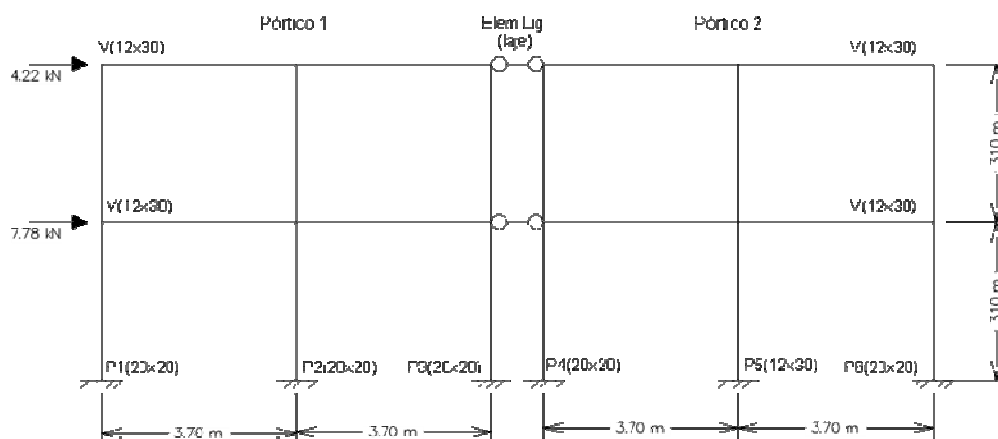
Objetivo: Determinação do efeito da ação do vento em cada um dos pórticos.

Seja, determinar a ação do vento nos pórticos da edificação apresentadas nas figuras 5-1 e 5-2 acima, nas seguintes situações : 02 e 05 pavimentos, com as ações globais devido ao vento determinadas no exemplo anterior.

**5.5.1. Considerando a edificação com 02 pavimentos:**

Como o pilar central nos pórticos 1 e 2, conforme mostrado na figura 5-17 abaixo tem dimensões do pilar central diferentes, a parcela o quinhão de carga absorvido por

cada um deles será diferente. Assim, para sua determinação utilizaremos o conceito de pórtico associado.



**Figura 5-17– Ação de vento nos pórticos (1,2), pórticos associados em série**

Resolução:

- A ação resultante por andar é conhecida do problema anterior, assim como as características das vigas e dos pilares dos pórticos 1 e 4, bastando portanto calcular as características do pilar P5, conforme figura abaixo:

Características do Pilar P5:

Pilar P5 - (12x30 cm)

$$\text{Area} = 12.30 = 360 \text{ cm}^2$$

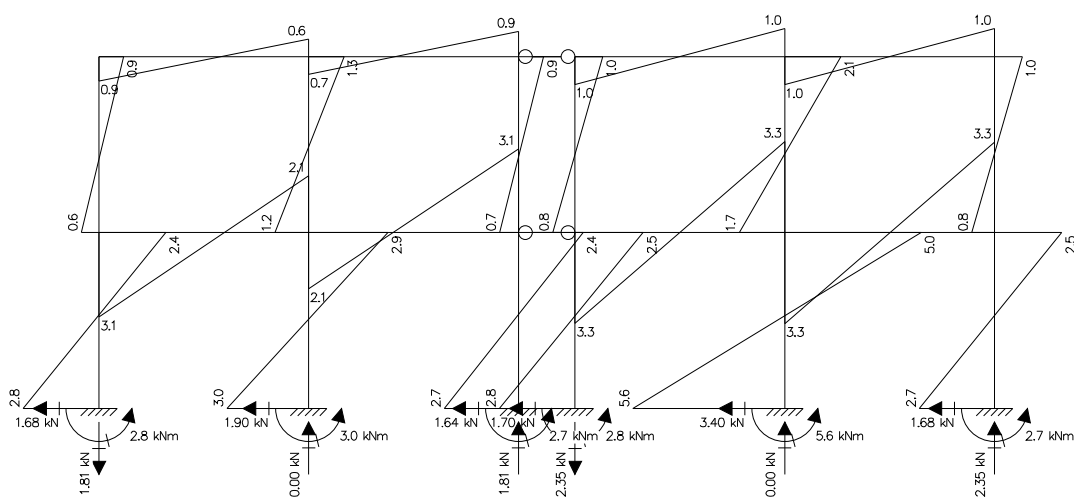
$$\text{Inércia} = \frac{12.30^3}{12} = 27.000 \text{ cm}^4$$

Considerações:

- Como os pórticos da extremidade superior e inferior da edificação são iguais e os pórticos intermediários também são iguais entre si basta, colocar dois deles associados em série submetidos ao esforço total, sendo que como temos no total quatro pórticos, iguais dois a dois, o esforço em cada um deles é a metade do esforço total do vento por andar;

- Verificar o esquema da figura 5-17 em que se considera que a ação total por um andar é dada por  $F_v$  (no caso calculado no problema anterior);
- Na altura do forro considerou-se que houve a contribuição de uma faixa de metade da altura de um pavimento; no primeiro pavimento há a contribuição de metade da altura entre o andar de cima e o de baixo e finalmente na altura da fundação o valor de metade da altura;

Diagrama de momentos fletores devido ao vento nos pórticos (1,2)



*Figura 5-18– Diagrama de Momentos Fletores devido ao vento no Pórticos 1,2*

#### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 5-D:**

- Neste exemplo, pode-se mostrar como pode ser determinado os esforços nos pórticos de uma estrutura de edificação sob a ação lateral de vento, em pórticos com características geométricas diferentes numa mesma estrutura, por meio da associação de pórticos.
- A utilização do programa FTOOL ou similar, é fundamental, pois a resolução deste tipo de estrutura manualmente como se fazia no passado somente era possível por

meio da adoção de medidas simplificadoras com o intuito de reduzir o número de incógnitas a ser determinada no sistema de equações.

### 5.6. Exemplo 5-E – Determinação do Parâmetro de Instabilidade $\alpha$

Objetivo: Determinação do parâmetro de instabilidade  $\alpha$  previsto pela NBR 6118:2003.

Para a edificação apresentada nas figuras 5-1 e 5-2 acima, cujas plantas de formas do primeiro piso e forro foram utilizadas nos exercícios anteriores. Verificar se o esquema estrutural pode ser admitido de nós fixos (na direção dos pilares horizontais – P1, P2 e P3, considerando as seguintes características de carregamento da edificação:

Laje de Forro:

- Peso Próprio (e = 8,0 cm) – 2,0 kN/m<sup>2</sup>;
- Revestimento (e = 2,0 cm) – 0,36 kN/m<sup>2</sup>;
- Carga Acidental – 0,5 kN/m<sup>2</sup>;
- Peso específico do revestimento:  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ;

Laje de Piso:

- Peso Próprio (e = 8,0 cm) – 2,0 kN/m<sup>2</sup>;
- Revestimento (e = 5,0 cm) – 0,9 kN/m<sup>2</sup>;
- Carga Acidental – 1,5 kN/m<sup>2</sup>;

Paredes:

- Paredes externas: e = 20,0 cm;
- Paredes internas: e = 15,0 cm;
- Pé Direito: 3,00 m
- Peso específico da alvenaria e revestimento:  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ;

Pilares:

- 02 Pavimentos: Pilares 20x20 cm;
- 05 Pavimentos: Pilares 20x60 cm;

Cargas verticais atuantes na edificação considerando 02 pavimentos (forro + tipo):

A partir das características de carregamento apresentadas acima, foram elaboradas as tabelas 5-5 e 5-6, apresentadas abaixo, onde se tem um resumo das ações verticais atuantes na estrutura, tanto para o nível do forro como para o nível do pavimento-tipo.

*Tabela 5-5- Cargas verticais atuantes na edificação referente ao forro*

<b>FORRO</b>				
<b>Carga</b>	<b>Tipo</b>	<b>Valor</b>	<b>Total Parcial (kN)</b>	<b>Percent. %</b>
Acidental	Laje de Forro	$16,8 \times 7,6 \times 0,5 =$	63,84	
<b>Total Parcial</b>	<b>Acidental</b>		<b>63,84</b>	<b>11,0%</b>
Peso Próprio da Laje	Laje de Forro	$16,8 \times 7,6 \times 0,08 \times 25 =$	255,36	
Revestimento da Laje	Pavimento	$16,8 \times 7,6 \times 0,02 \times 18 =$	45,95	
Permanente	Vigas (20 x 60)	$16,8 \times 3 \times 0,25 \times 0,60 \times 25 =$	189,00	
Permanente	Vigas (12 x 30)	$7,6 \times 4 \times 0,12 \times 0,30 \times 25 =$	27,36	
<b>Total Parcial</b>	<b>Permanente</b>		<b>517,67</b>	<b>89,0%</b>
<b>Total Final</b>	<b>Acidental + Permanente</b>		<b>581,51</b>	

Tabela 5-6- Cargas verticais atuantes na edificação referente ao pavimento tipo

<b>PAVIMENTO TIPO 1</b>				
<b>Carga</b>	<b>Tipo</b>	<b>Valor</b>	<b>Total Parcial (kN)</b>	<b>Percent. %</b>
Acidental	Laje do Pavimento	$16,8 \times 7,6 \times 1,5 =$	191,52	
<b>Total Parcial</b>	<b>Acidental</b>		<b>191,52</b>	<b>12,4%</b>
Peso Próprio da Laje	Laje do Pavimento	$16,8 \times 7,6 \times 0,08 \times 25 =$	255,36	
Revestimento da Laje	Pavimento	$16,8 \times 7,6 \times 0,05 \times 18 =$	114,91	
Permanente	Paredes Vert. de 25 cm	$(16,8 \times 2 + 7,6 \times 2) \times 0,25 \times 2,5 \times 18 =$	549,00	
Permanente	Paredes Vert. de 15cm	$(16,8 \times 1 + 7,6 \times 2) \times 0,15 \times 2,5 \times 18 =$	216,00	
Permanente	Vigas (20 x 60)	$16,8 \times 3 \times 0,20 \times 0,60 \times 25 =$	151,20	
Permanente	Vigas (12 x 30)	$7,6 \times 4 \times 0,12 \times 0,30 \times 25 =$	27,36	
Permanente	Pilares (20 x 20)	$0,20 \times 0,20 \times 3,0 \times 25 \times 12 =$	36,00	
<b>Total Parcial</b>	<b>Permanente</b>		<b>1349,83</b>	<b>87,6%</b>
<b>Total Final</b>	<b>Acidental + Permanente</b>		<b>1541,35</b>	

### 5.6.1. Edificação com 02 pavimentos

A tabela 5-7 abaixo apresenta o resumo do carregamento da estrutura para 02 pavimentos. Vale salientar que não foi considerado no levantamento das cargas, aquelas referentes à escada da edificação.

*Tabela 5-7- Cargas verticais atuantes na edificação considerando 02 pavimentos (forro + tipo)*

<b>Carregamento Total da Edificação</b>				
<b>Carga</b>	<b>Tipo</b>	<b>num. repetições</b>	<b>Total Parcial (kN)</b>	<b>Total Geral (kN)</b>
Forro	Acidental	1	63,84	63,84
	Permanente	1	517,67	517,67
	<b>Acid.+Perman.</b>		<b>581,51</b>	<b>581,51</b>
Pav. Tipo 1	Acidental	1	191,52	191,52
	Permanente	1	1349,83	1349,83
	<b>Acid.+Perman.</b>		<b>1541,35</b>	<b>1.541,35</b>
<b>TOTAL GERAL</b>	Acidental			255,36
	Permanente			1.867,50
	<b>Acid.+Perman.</b>			<b>2.122,86</b>

H = 6,20 m

$N_k = 2.122,86$  kN

Inércia Equivalente :  $I_{eq} = 502.926$  cm<sup>4</sup> (obtido do exemplo 5-B)

$$\alpha = H_{tot} \cdot \sqrt{\frac{N_k}{E_c \cdot I_c}} = 620 \cdot \sqrt{\frac{2122,86}{3067,2 \cdot 4.502926}} = 0,36$$

De acordo com a NBR 6118:2003, a estrutura reticulada simétrica, pode ser considerada como sendo de nós fixos se seu parâmetro de instabilidade  $\alpha$  for menor que o valor  $\alpha_1$ , dado pela seguinte expressão:

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1 \cdot n \quad \text{se: } n \leq 3$$

$$\alpha_1 = 0,6 \quad \text{se: } n \geq 4$$



Sendo  $n$  o número de níveis de barras horizontais (andares) acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;

Assim, como  $n = 2$  níveis,  $\alpha_1 = 0,2 + 0,1.2 = 0,4$ ;

Considerando que  $\alpha = 0,36$ , portanto menor que  $\alpha_1 = 0,4$ , a estrutura em questão pode ser considerada como sendo de nós fixos.

### 5.6.2. Edificação com 05 pavimentos:

A tabela 5-8 apresenta abaixo, apresenta um consolidado das cargas verticais atuantes na edificação considerando 05 pavimentos (forro + 4 pav. tipo). Também neste caso, não foi considerado o efeito das cargas relativas a escada.

*Tabela 5-8- Cargas verticais atuantes na edificação – 05 pavimentos (forro+4 pav. Tipo)*

<b>Carregamento Total da Edificação</b>				
<b>Carga</b>	<b>Tipo</b>	<b>num. repetições</b>	<b>Total Parcial (kN)</b>	<b>Total Geral (kN)</b>
Forro	Carga Acidental	1	63,84	63,84
	Permanente	1	517,67	517,67
	<b>Acidental + Permanente</b>		<b>581,51</b>	<b>581,51</b>
Pav. Tipo 1	Carga Acidental	4	191,52	766,08
	Permanente	4	1349,83	5.399,32
	<b>Acidental + Permanente</b>		1541,35	<b>6.165,40</b>
<b>TOTAL GERAL</b>	Carga Acidental			829,92
	Permanente			5.916,99
	<b>Acidental + Permanente</b>			<b>6.746,91</b>

$H = 15,50 \text{ m}$

$N_k = 6746,91 \text{ kN}$

Inércia Equivalente :  $I_{eq} = 12.490.698,75 \text{ cm}^4$  (obtida no exemplo 5-B)

$$\alpha = H_{tot} \cdot \sqrt{\frac{N_k}{E_c \cdot I_c}} = 1550 \cdot \sqrt{\frac{6746,91}{3067,2 \cdot 12490698,75}} = 0,33$$

Como  $n = 5$  níveis,  $\alpha_1 = 0,6$ ;

Considerando que  $\alpha = 0,33$ , portanto menor que  $\alpha_1 = 0,6$ , a estrutura em questão pode ser considerada como sendo de nós fixos.

### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 5-E:**

- Descreve-se os procedimentos necessário para a determinação do parâmetro de instabilidade  $\alpha$ , previsto pela NBR 6118:2003.

- Também neste exemplo mostrou-se a importância da utilização do conceito de inércia equivalente, ilustrada no exemplo 5-B, para a determinação do coeficiente  $\alpha$ .

### **5.7. Exemplo 5-F - Verificação da estabilidade Global - Coeficiente $\gamma_z$**

Seja verificar a estabilidade global da estrutura de edificação cujas plantas de formas do primeiro piso e do forro são as apresentadas nas figuras 5-1 e 5-2 acima.

Observar dados dos exemplos anteriores, onde se analisou a ação do vento na edificação, assim como os esforços e deslocamentos causados por este – (exemplo 5-D);

Neste item, serão realizados três exemplos, o primeiro e o segundo se referem à edificação com 02 e 05 pavimentos como nos exemplos anteriores, sendo a estrutura moldada *in-loco*. No terceiro exemplo, será repetido o estudo com a estrutura de 05 pavimentos, porém com a consideração da ligação viga/pilar articulada, simulando uma edificação pré-fabricada.

Resolução:

### 5.7.1. Edificação com 02 pavimentos – Moldado in-loco;

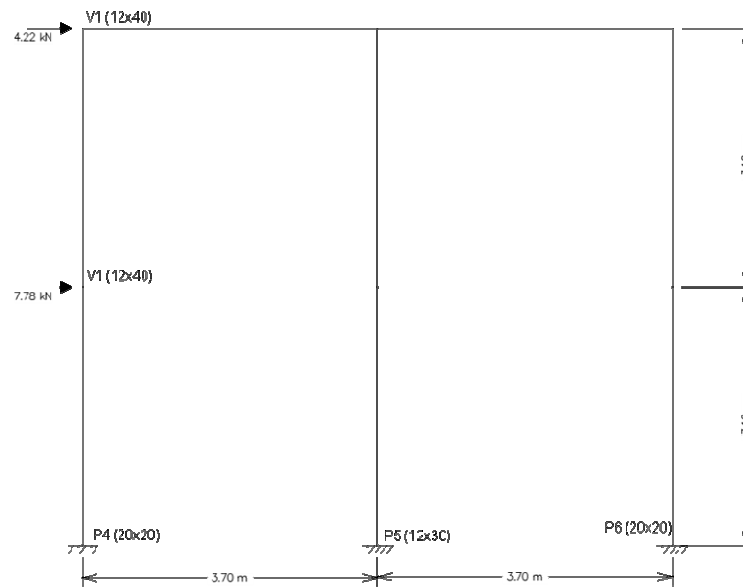


Figura 5-19- Carregamento da Estrutura devido a ação lateral do vento

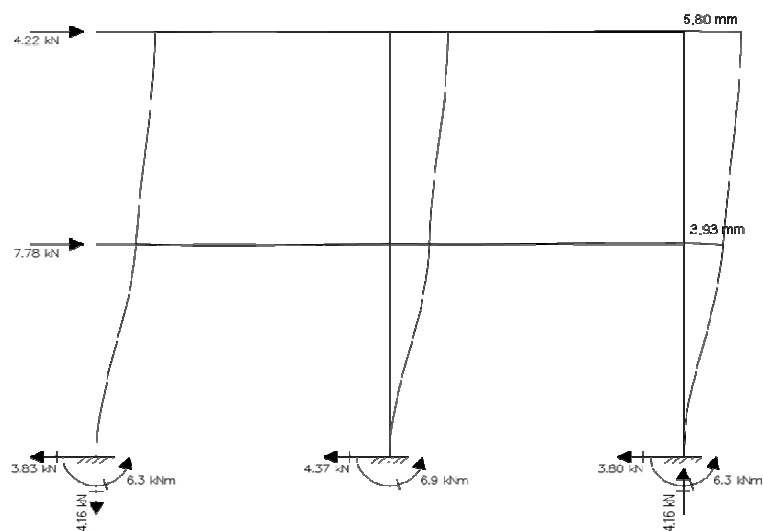


Figura 5-20– Estrutura deslocada devido a ação lateral do vento

Os valores das cargas verticais atuantes na edificação referente ao forro, ao pavimento tipo e o carregamento total, são as constantes das tabelas 5-5, 5-6 e 5-7 respectivamente.

Assim, o Momento de Segunda Ordem é dado por:

$$\Delta M_{\text{tot, d}} = \sum_{i=1}^n (\gamma_f \times P_{gi} + \gamma_f \times P_{qi} + \psi_0 \times \gamma_f \times P_{q2i}) \times \delta_{hi}$$

Onde:

$i$  – numero do andar considerado;

$n$  – número do total de andares da edificação (no caso 4);

$P_{gi}$ - Resultante vertical da carga permanente no andar  $i$ ;

$\gamma_f$  – coeficiente de majoração das cargas no estado limite último;

$\psi_0$  – coeficiente redutor de carga para consideração de carga acidental secundária principal igual a 1;

$P_{q1i}$ - Resultante vertical da carga acidental considerada principal no andar  $i$ ;

$P_{q2i}$ - Resultante vertical da carga acidental considerada secundária no andar  $i$ ;

$\delta_{hi}$  – deslocamento horizontal na direção considerada do andar  $i$ ;

Os valores de  $P$  para os andares do pavimento e do forro para carga acidental e permanente, são os da tabela anterior e os valores de  $\delta_{hi}$  são os calculados utilizando o programa FTOOL;

1ª Situação:

Assim, considerando em uma primeira situação a carga vertical como principal os coeficientes de ponderação das cargas verticais são (tanto permanente como acidental) 1,4 e para ações do vento o valor de 0,84; A expressão fica:

$$\Delta M_{\text{tot, d}} = \sum_{i=1}^n (1,4 \times P_{gi} + 1,1,4 \times P_{qi}) \times (0,84 \times \delta_{hi})$$

Tabela 5-9 - Determinação do Momento de Segunda Ordem

Andar	P(g+q) (kN)	Coefficiente	$\delta_{hi}$ (mm)	$\Delta M_{tot,d}$ (kN.m)
Forro	581,51	1,4	5,80	3,97
1	1541,35	1,4	3,93	7,12
<b>TOTAL</b>				<b>11,09</b>

O momento de tombamento do vento pode ser obtido a partir da expressão dada a seguir, lembrando que é necessário considerar toda a ação do vento pois as cargas verticais foram supostas como as resultantes de todo o pavimento e assim os valores da resultante são multiplicados por 4:

$$M_{1,av} = \sum H_{vi} \times h_i$$

$$M_{1,av} = 0,84.4.(7,78.3,10 + 4,22.6,20) = 168,95 \text{ kN.m}$$

Assim,

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,av}}} = \frac{1}{1 - \frac{11,09}{168,95}} = 1,070 < 1,10$$

Como  $\gamma_z = 1,070 < 1,10 \rightarrow$  a estrutura pode ser considerada de nós fixos;

2ª Situação:

Considerando em uma segunda situação a carga vertical acidental como secundária e portanto submetido a um coeficiente de  $1,4 \times 0,5 = 0,7$  ( $\psi_0 = 0,5$ ) enquanto as permanentes por 1,4 e a de vento por 1,4.

$$\Delta M_{tot,d} = \sum_{i=1}^n (1,4 \times P_{gi} + 0,5 \cdot 1,4 \times P_{qi}) \times (1,4 \times \delta_{hi})$$

Tabela 5-10- Momento fletor de segunda ordem

Andar	Pg (kN)	Pq (kN)	Pg+q (kN)	$\delta_{hi}$ (mm)	$\Delta M_{tot,d}$ (kN.m)
Forro	517,67	63,84	769,43	5,80	6,25
1	1349,83	191,52	2023,83	3,93	11,14
TOTAL					17,39

O momento de tombamento do vento pode ser obtido a partir da expressão dada a seguir, lembrando que é necessário considerar toda a ação do vento pois as cargas verticais foram supostas como as resultantes de todo o pavimento e assim os valores da resultante são multiplicados por 4:

$$M_{1,av} = \sum H_{vi} \times h_i$$

$$M_{1,av} = 1,4 \cdot 4 \cdot (7,78 \cdot 3,1 + 4,22 \cdot 6,20) = 281,58 \text{ kN.m}$$

Assim,

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,av}}} = \frac{1}{1 - \frac{17,39}{281,58}} = 1,066 < 1,10$$

Como  $\gamma_z = 1,066 < 1,10 \rightarrow$  a estrutura pode ser considerada de nós fixos;

5.7.2. Edificação com 05 pavimentos – Moldado in-loco;

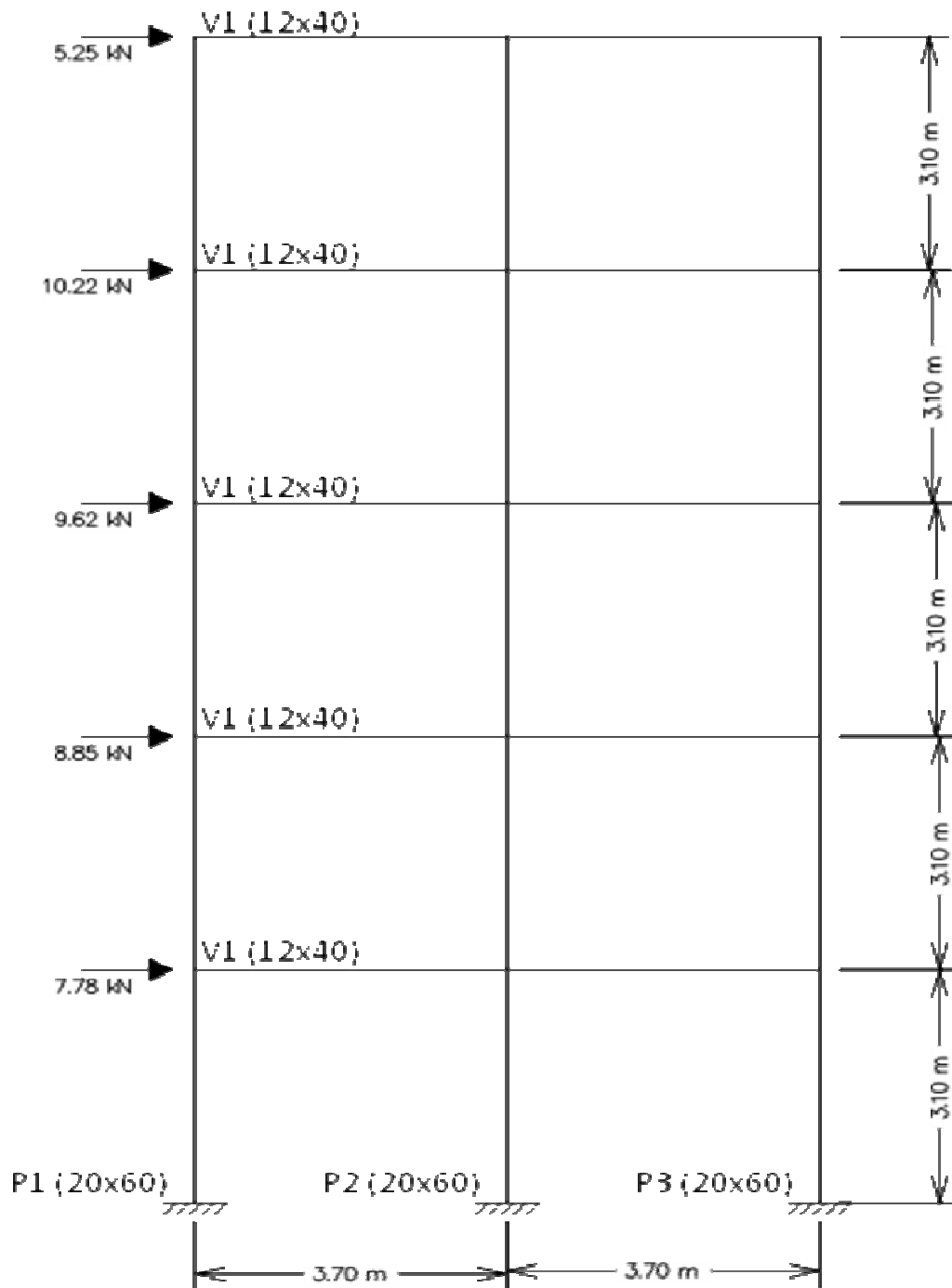


Figura 5-21– Carregamento da Estrutura devido à ação lateral do vento

Estrutura deformada pela lateral ação do vento:

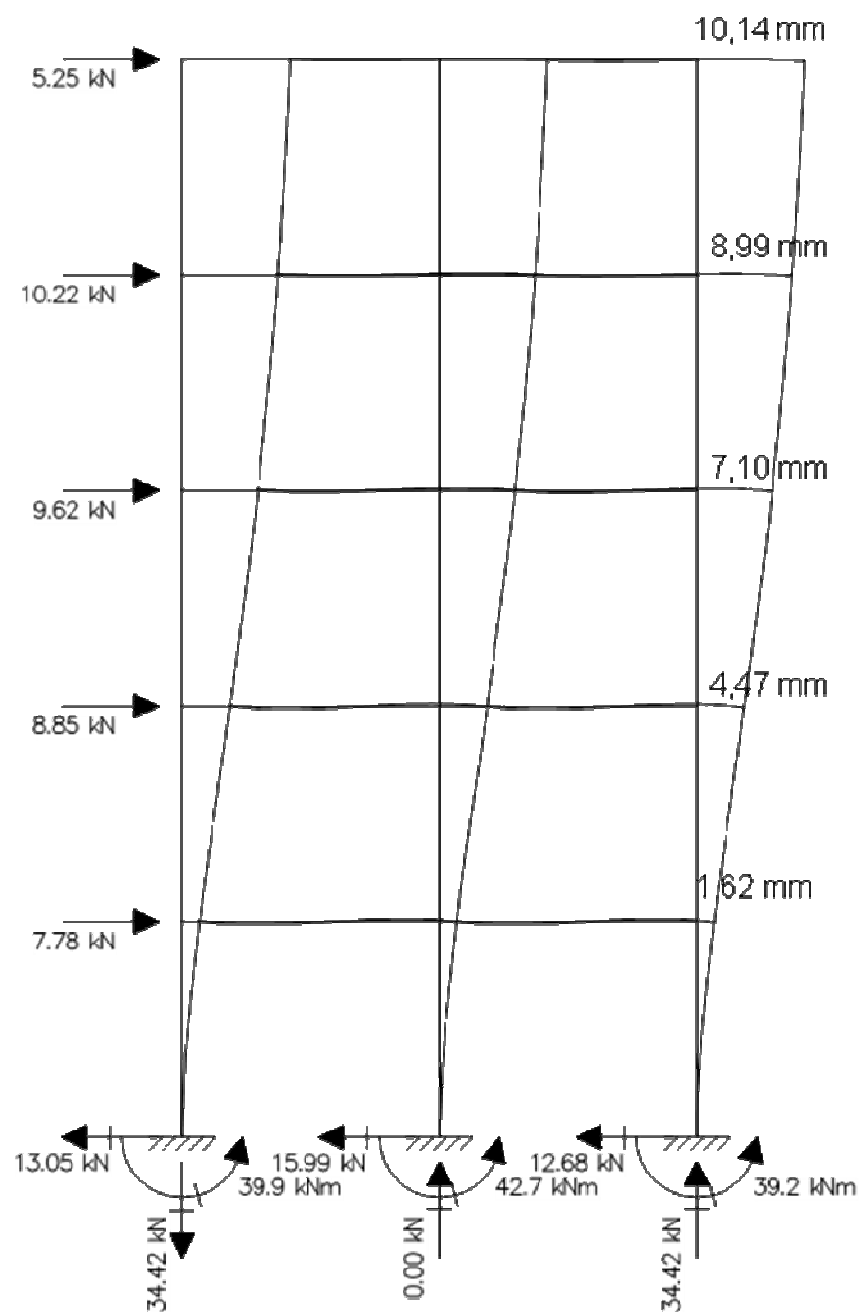


Figura 5-22– Estrutura deslocada devido à ação lateral do vento



Os valores das cargas no forro e nos demais pavimentos são as mesmas do exemplo para dois pavimentos.

Assim, o Momento de Segunda Ordem é dado por:

$$\Delta M_{\text{tot, d}} = \sum_{i=1}^n (\gamma_f \times P_{gi} + \gamma_f \times P_{q1i} + \psi_0 \times \gamma_f \times P_{q2i}) \times \delta_{hi}$$

Com  $i$  – número do andar considerado;

$n$  – número do total de andares da edificação (no caso 4);

$P_{ig}$ - Resultante vertical da carga permanente no andar  $i$ ;

$\gamma_f$  – coeficiente de majoração das cargas no estado limite último;

$\psi_0$  – coeficiente redutor de carga para consideração de carga acidental secundária principal igual a 1;

$P_{q1i}$ - Resultante vertical da carga acidental considerada principal no andar  $i$ ;

$P_{q2i}$ - Resultante vertical da carga acidental considerada secundária no andar  $i$ ;

$\delta_{hi}$  – deslocamento horizontal na direção considerada do andar  $i$ ;

Os valores de  $P$  para os andares do pavimento e do forro para carga acidental e permanente, são os da tabela anterior e os valores de  $\delta_{hi}$  são os calculados utilizando o FTOOL;

1ª Situação:

Assim, considerando em uma primeira situação a carga vertical como principal os coeficientes de ponderação das cargas verticais são (tanto permanente como acidental)

1,4 e para ações do vento o valor de 0,84; A expressão fica:

$$\Delta M_{\text{tot, d}} = \sum_{i=1}^n (1,4 \times P_{gi} + 1,1,4 \times P_{qi}) \times (0,84 \times \delta_{hi})$$

Tabela 5-11 Determinação do Momento de Segunda Ordem

Andar	P(g+q) (kN)	Coefficiente	$\delta_{hi}$ (mm)	$\Delta M_{tot,d}$ (kN.m)
Forro	581,51	1,4	10,14	6,93
4	1541,35	1,4	8,99	16,30
3	1541,35	1,4	7,10	12,87
2	1541,35	1,4	4,47	8,10
1	1541,35	1,4	1,62	2,94
<b>TOTAL</b>				47,14

O momento de tombamento do vento pode ser obtido a partir da expressão abaixo, lembrando que é necessário considerar toda a ação do vento pois as cargas verticais foram supostas como as resultantes de todo o pavimento e assim os valores da resultante são multiplicados por 4:

$$M_{1,av} = \sum H_{vi} \times h_i$$

$$M_{1,av} = 0,84.4.(7,78.3,10 + 8,85.6,20 + 9,62.9,30 + 10,22.12,40 + 5,25.15,50) = 1265,23 \text{ kN.m}$$

Assim,

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,av}}} = \frac{1}{1 - \frac{47,14}{1265,23}} = 1,039 < 1,10$$

Como  $\gamma_z = 1,039 < 1,10 \rightarrow$  a estrutura pode ser considerada de nós fixos;

2ª Situação:

Considerando em uma segunda situação a carga vertical acidental como secundária e, portanto submetido a um coeficiente de  $1,4 \times 0,5 = 0,7$  ( $\psi_0 = 0,5$ ) enquanto as permanentes por 1,4 e a de vento por 1,4.

$$\Delta M_{tot,d} = \sum_{i=1}^n (1,4 \times P_{gi} + 0,5.1,4 \times P_{qi}) \times (1,4 \times \delta_{hi})$$

**Tabela 5-12 - Determinação do Momento de Segunda Ordem**

Andar	P <sub>g</sub> (kN)	P <sub>q</sub> (kN)	P <sub>g+q</sub> (kN)	δ <sub>hi</sub> (mm)	ΔM <sub>tot,d</sub> (kN.m)
Forro	517,67	63,84	769,43	10,14	10,92
4	1349,83	191,52	2023,83	8,99	25,47
3	1349,83	191,52	2023,83	7,10	20,12
2	1349,83	191,52	2023,83	4,47	12,67
1	1349,83	191,52	2023,83	1,62	4,59
TOTAL					73,77

O momento de tombamento do vento pode ser obtido a partir da expressão a seguir, lembrando que o valor de 4 é para considerar todo o vento e o coeficiente majorador neste caso é 1,4;

$$M_{1,av} = \sum H_{vi} \times h_i$$

Assim,

$$M_{1,av} = 1,4 \cdot 4 \cdot (7,78 \cdot 3,10 + 8,85 \cdot 6,20 + 9,62 \cdot 9,30 + 10,22 \cdot 12,40 + 5,25 \cdot 15,50) = 2108,72 \text{ kN.m}$$

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,av}}} = \frac{1}{1 - \frac{73,77}{2108,72}} = 1,036 < 1,10$$

Como  $\gamma_z = 1,036 < 1,10 \rightarrow$  a estrutura pode ser considerada de nós fixos;

#### **Alguns aspectos didáticos importantes acerca do exemplo 5-E:**

- A NBR 6118:2003 em seu item 15.5.3, estabelece que o coeficiente  $\gamma_z$  de avaliação da importância dos esforços de segunda ordem globais é válido para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares. Porém, optou-se em realizar o cálculo do mesmo para a edificação apenas com dois pavimentos, apenas com o intuito de verificar sua ordem de grandeza, para neste caso ratificar o que já havia sido determinado com o parâmetro  $\alpha$  - exemplo 5-D, ou seja, a estrutura pode ser considerada de nós fixos;

- A interpretação dada aqui do dispositivo normativo da NBR 6118:2003 - item 15.3.1, é que quando se considera a relação momento-curvatura  $[M/(1/r)]$ , pode-se adotar também a formulação de segurança em que se calculam os efeitos de 2ª ordem das cargas majoradas de  $\gamma_f/\gamma_{f3}$ , que posteriormente são majorados de  $\gamma_{f3}$ , com  $\gamma_{f3} = 1,1$ . Aqui como a não-linearidade física é considerada de forma simplificada, utilizou-se  $\gamma_f$  normal, ou seja: 1,4;

### **5.7.3. Edificação com 05 pavimentos (ligação viga-pilar rotulada)**

Com o intuito de se comparar a estrutura moldada in-loco com a estrutura pré-fabricada resolver-se-á o mesmo exemplo do item 5.7.2 para cinco pavimentos, agora com a estrutura rotulada, para que o estudante possa perceber como a alteração na ligação viga/pilar, altera significativamente o coeficiente  $\gamma_z$  e ainda, que medidas podem ser adotadas pelo projetista, para compensar a redução da rigidez da estrutura.

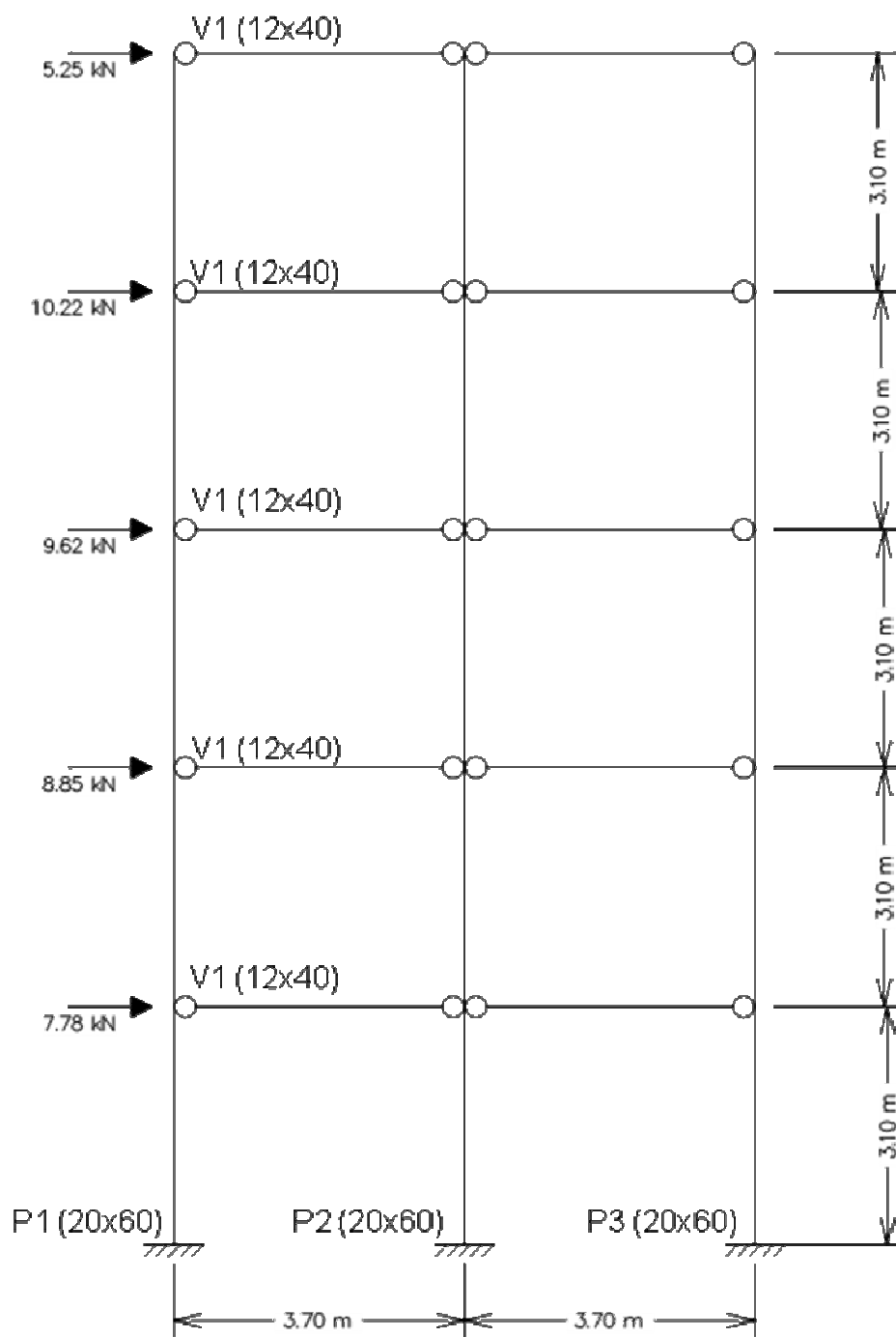
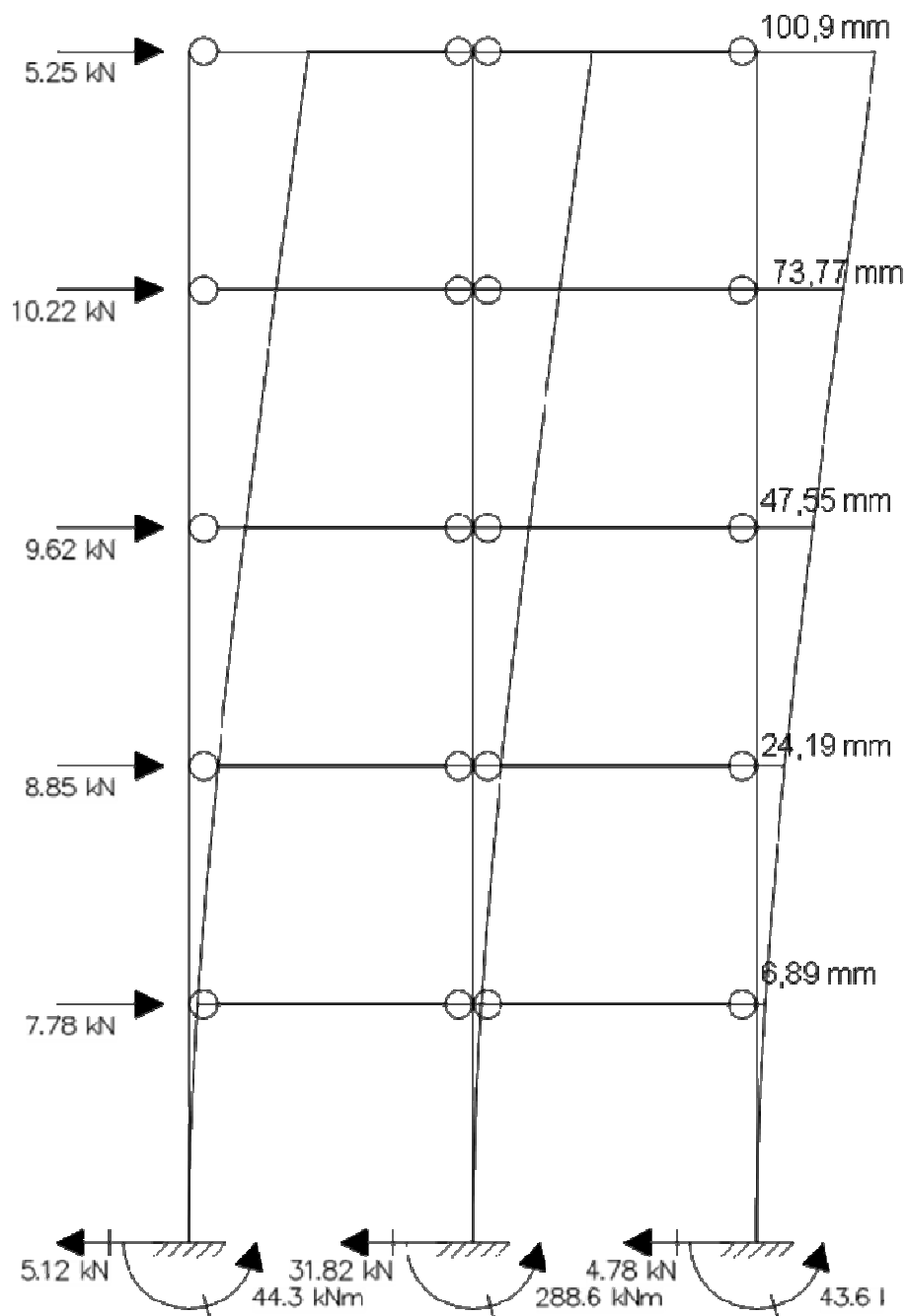


Figura 5-23– Estrutura carregada com a ação lateral do ao vento



*Figura 5-24– Estrutura deslocada devido à ação lateral do ao vento*

Os valores das cargas no forro e nos demais pavimentos são as mesmas do exemplo para dois pavimentos.

Assim, o Momento de Segunda Ordem é dado por:

$$\Delta M_{\text{tot, d}} = \sum_{i=1}^n \left( \gamma_f \times P_{gi} + \gamma_f \times P_{q1i} + \psi_0 \times \gamma_f \times P_{q2i} \right) \times \delta_{hi}$$

Com  $i$  – número do andar considerado;

$n$  – número do total de andares da edificação (no caso 4);

$P_{ig}$  - Resultante vertical da carga permanente no andar  $i$ ;

$\gamma_f$  – coeficiente de majoração das cargas no estado limite último;

$\psi_0$  – coeficiente redutor de carga para consideração de carga acidental secundária principal igual a 1;

$P_{q1i}$  - Resultante vertical da carga acidental considerada principal no andar  $i$ ;

$P_{q2i}$  - Resultante vertical da carga acidental considerada secundária no andar  $i$ ;

$\delta_{hi}$  – deslocamento horizontal na direção considerada do andar  $i$ ;

Os valores de  $P$  para os andares do pavimento e do forro para carga acidental e permanente, são os da tabela anterior e os valores de  $\delta_{hi}$  são os calculados utilizando o programa FTOOL;

1ª Situação:

Assim, considerando em uma primeira situação a carga vertical como principal os coeficientes de ponderação das cargas verticais são (tanto permanente como acidental)

1,4 e para ações do vento o valor de 0,84; A expressão fica:

$$\Delta M_{\text{tot, d}} = \sum_{i=1}^n \left( 1,4 \times P_{gi} + 1,1,4 \times P_{qi} \right) \times (0,84 \times \delta_{hi})$$

Tabela 5-13 - Determinação do Momento de Segunda Ordem

Andar	P(g+q) (kN)	Coefficiente	$\delta_{hi}$ (mm)	$\Delta M_{tot,d}$ (kN.m)
Forro	581,51	1,4	100,9	69,00
4	1541,35	1,4	73,77	133,72
3	1541,35	1,4	47,55	86,19
2	1541,35	1,4	24,19	43,85
1	1541,35	1,4	6,89	12,49
<b>TOTAL</b>				345,25

O momento de tombamento do vento pode ser obtido a partir da expressão dada a seguir lembrando que é necessário considerar toda a ação do vento pois as cargas verticais foram supostas como as resultantes de todo o pavimento e assim os valores da resultante são multiplicados por 4:

$$M_{I,av} = \sum H_{vi} \times h_i$$

$$M_{I,av} = 0,84 \cdot 4 \cdot (7,78 \cdot 3,10 + 8,85 \cdot 6,20 + 9,62 \cdot 9,30 + 10,22 \cdot 12,40 + 5,25 \cdot 15,50) = 1265,23 \text{ kN.m}$$

Assim,

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{I,av}}} = \frac{1}{1 - \frac{345,25}{1265,23}} = 1,375 > 1,10$$

Como  $\gamma_z = 1,375 > 1,10 \rightarrow$  a estrutura não pode ser considerada de nós fixos;

2ª Situação:

Considerando em uma segunda situação a carga vertical acidental como secundária e portanto submetido a um coeficiente de  $1,4 \times 0,5 = 0,7$  ( $\psi_0 = 0,5$ ) enquanto as permanentes por 1,4 e a de vento por 1,4.

$$\Delta M_{tot,d} = \sum_{i=1}^n (1,4 \times P_{gi} + 0,5 \cdot 1,4 \times P_{qi}) \times (1,4 \times \delta_{hi})$$



Tabela 5-14 - Determinação do Momento de Segunda Ordem

Andar	P <sub>g</sub> (kN)	P <sub>q</sub> (kN)	P <sub>g+q</sub> (kN)	δ <sub>hi</sub> (mm)	ΔM <sub>tot,d</sub> (kN.m)
Forro	517,67	63,84	769,43	100,9	108,69
4	1349,83	191,52	2023,83	73,77	209,02
3	1349,83	191,52	2023,83	47,55	134,73
2	1349,83	191,52	2023,83	24,19	68,54
1	1349,83	191,52	2023,83	6,89	19,52
TOTAL					540,5

O momento de tombamento do vento pode ser obtido a partir da expressão dada a seguir lembrando que o valor de 4 é para considerar todo o vento e o coeficiente majorador neste caso é 1,4;

$$M_{1,av} = \sum H_{vi} \times h_i$$

Assim,

$$M_{1,av} = 1,4 \cdot 4 \cdot (7,78 \cdot 3,10 + 8,85 \cdot 6,20 + 9,62 \cdot 9,30 + 10,22 \cdot 12,40 + 5,25 \cdot 15,50) = 2108,72 \text{ kN.m}$$

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,av}}} = \frac{1}{1 - \frac{540,5}{2108,72}} = 1,345 > 1,10$$

O coeficiente  $\gamma_f$ , das ações verticais permanentes, foi adotado 1,4, para efeito de comparação com o exemplo anterior. Porém, como se trata de estrutura pré-fabricada a NBR 9062:2005, permite o emprego do valor de  $\gamma_f = 1,3$ .

Como se pode perceber, como o valor de  $\gamma_z = 1,345 > 1,10 \rightarrow$  a estrutura não pode ser considerada de nós fixos;

Comparando o exemplo do item 5.7.2 com o do item 5.7.3, percebe-se um aumento substancial o valor do  $\gamma_z$ , que passou de 1,036 no exemplo 5.7.2 para 1,375 no exemplo 5.7.3, portanto um aumento de cerca de 33%;

Há que se considerar ainda neste exemplo da edificação com a ligação viga/pilar rotulada, o valor de  $\gamma_z = 1,345$  como sendo superior a 1,3, a análise não linear com 2ª

ordem, não pode ser realizada de maneira aproximada, conforme estabelece o item 15.7.2 da NBR 6118:2003.

Porém há que se considerar que uma solução para o problema seria, por exemplo, o enrijecimento do pilar central da edificação, transformando-o num pilar parede, conforme se mostra a seguir;

Acréscimo na estrutura de pilar parede, de tal forma a se ter a estrutura considerada como de nós indeslocáveis ( $\gamma_z = 1,10$ );

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{\text{tot,d}}}{M_{1,\text{av}}}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{\text{tot,d}}}{1265,23}} \leq 1,10 \quad \Delta M_{\text{tot,d}} \leq 115,02 \text{ kN.m}$$

Considerando que os deslocamentos ao longo do pilar continuarão sendo proporcionais, uma vez que a alteração da rigidez do pilar será no pilar central, portanto, continuará a estrutura com simetria, e utilizando-se de recurso do Excel (atingir meta), chega-se a um deslocamento no topo do pilar da estrutura rotulada de 33,62 mm.

Assim, utilizando-se o programa FTOOL, alterando-se as dimensões do pilar central por tentativa, chega-se a uma dimensão de 115,0 cm.

Logo, conclui-se que aumentando a inércia do pilar central que inicialmente é de 20 x 60 cm para 20 x 115 cm (parede diafragma), teríamos um  $\gamma_z$  aproximadamente de 1,10, podendo a estrutura, ser considerada de nós indeslocáveis.

## 6. COMENTÁRIOS FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Para a análise de pavimentos de estruturas de concreto, embora a teoria de placas ainda continue como referência para comparações ou para utilizar em casos bem específicos, fica claro pelos exemplos mostrados que a grelha equivalente é mais rica em detalhes de funcionamento. Considerando que o aluno já aprendeu resolver este tipo de sistema estrutural não se justifica o prosseguimento do uso das tabelas de placas e considerações simplificadoras, para resolver pavimento, pois até na prática, a utilização de tabelas já foi abolida.

O exemplo da edificação de cinco pavimentos apresentada no capítulo 5 do presente trabalho é muito ilustrativo, pois mostra que a rotulação das vigas aumenta muito a deslocabilidade lateral da estrutura. Fica fácil com a utilização de ferramentas computacionais (FTOOL) que um estudante ou profissional de engenharia possa por tentativa modificar as dimensões dos pilares tornando a estrutura de nós rígidos ou pouco deslocável às ações laterais.

Toda atividade de projeto, detalhamento e execução de estruturas de concreto, está arraigada ao uso das prescrições das normas específicas. Neste início de século, fica claro que para se acompanhar as prescrições das normas brasileiras, a utilização de ferramentas computacionais se tornou imprescindível. Não há como se estudar a ação de vento e a estabilidade global de forma manual. Fica muito difícil resolver, por exemplo, pórticos planos com 15 ou mais incógnitas, sem a utilização de uma ferramenta computacional.

Imagine-se num curso de engenharia civil à 30 anos atrás, a cadeia de estruturas seria dividida da seguinte forma: um semestre de mecânica geral, dois semestres de resistência dos materiais e dois semestres de teoria das estruturas. Hoje pode-se ter um semestre de mecânica, dois semestres de resistência dos materiais e um semestre de teoria das estruturas e um semestre de análise matricial. Desta forma o estudante ao cursar as disciplinas finais na área de estruturas (concreto armado, protendido, pré-

fabricado e estruturas metálicas), teria os subsídios necessários para realizar uma análise mais próxima do comportamento real das mesmas e com muita rapidez dispendo de maior tempo para concepção estrutural e análise da solução adotada.

Os cursos de engenharia necessitam se atualizar, pois não é possível formar engenheiros civis sem os conhecimentos básicos tais como: solicitações devido à ação lateral do vento e análise de estabilidade global de estruturas de concreto.

Nos dias atuais, não é possível imaginar um profissional de engenharia resolvendo manualmente uma estrutura hiperestática com mais de três incógnitas. Imagina-se que o engenheiro, deve analisar e projetar e não simplesmente fazer contas.

A utilização de ferramentas computacionais permite avaliar o comportamento e tomar a decisão de mudar rapidamente seções transversais dos elementos estruturais ou mesmo a estrutura como um todo e chegar a um melhor nível de detalhamento.

A disciplina de concreto armado deveria se focar apenas nas teorias necessárias ao dimensionamento e detalhamento das armaduras e os esforços solicitantes devem ser objeto de estudo em disciplinas predecessoras e obtidos por meio de ferramentas computacionais.

Acredita-se que os exemplos mostrados nos capítulos 4 e 5 que se referem a estruturas de porte relativamente pequenos, mostram o quanto as ferramentas aqui estudadas (GPLAN e FTOOL) podem colaborar na compreensão do comportamento da estrutura. Com os métodos tradicionais de ensino, tais análises se tornam inviáveis num período normal de aulas, além de desmotivadoras para o estudante.

No presente trabalho, foram realizados vários exemplos com a utilização de muitas figuras e gráficos, cujo objetivo é mostrar que, com a utilização de ferramentas computacionais, gera-se uma grande quantidade de informações, que se devidamente utilizadas enriquece o procedimento de projeto e detalhamento das estruturas de concreto.

Apesar do volume de resultados serem grandes, sua adequada manipulação por meio de programas gráficos, permite se chegar rapidamente aos resultados desejados e,

portanto, utilizá-los como ferramentas de análise, o que é o inverso do processo manual onde se gasta muito tempo em contas para se chegar a poucos resultados representativos.

Em relação às ferramentas computacionais, cabe destacar, no entanto a necessidade de implementação, em novas versões, de interface gráfica para o programa de grelhas planas e a análise de segunda ordem nos programas de pórticos planos, assim como a combinação de vários casos de carregamento e a comunicação automática entre modelos ou subdivisões destes.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações. Rio de Janeiro, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123**: Forças Devido ao Vento em Edificações. Rio de Janeiro, 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062**: Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-Moldado. Rio de Janeiro, 2006.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parece CNE/CES 1.362, de 12 de dezembro de 2001. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 25 fev.2002. Seção 1, p.17.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CES nº 11, de 11 de março de 2002**. Brasília, DF. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br>> Acesso em: 30 out. 2007

CARVALHO R. C.; COTTA I. F. S.; RAYMUNDO H. **CALCO**. Análise de Estruturas de Edifícios em Concreto Armado usando Programas de Computador. São Carlos, 2008. Mimeografado.

CARVALHO R. C.; COTTA I. F. S.; RAYMUNDO H. **CALCO**. Sistema de Cálculo de Concreto Armado. Disponível em: <http://www.deciv.ufscar.br/calco/>. Acesso em: 8 mai. 2008.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO J. R. Cálculo de lajes de concreto armado com a analogia de grelha. In: II CONGRESSO DE ENGENHARIA CIVIL DA UFJF, Juiz de Fora. **Anais...** Juiz de Fora/MG, 1996, p. ...-....

CARVALHO, R. C. **Análise Não-Linear de Pavimentos de Edifícios de Concreto Através da Analogia de Grelha.** 1994. 202 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1994.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118.** 3ª Edição. São Carlos: EdUFSCar, 2007.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado. Vol 2.** 1ª Edição. São Paulo: Editora Pini, 2009.

CARVALHO, R. C.; COTTA, I. F. S.; RAYMUNDO, H. **Modelagem de Estruturas de Concreto.** Apostila 2009. São Carlos.

CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, R. A. **Sistema laser de análise estrutural.** V Simpósio Nacional de Tecnologia de Construção: Software para o projeto de edifícios. EPUSP. São Paulo, SP, 1987.

COTTA I. F. S. **Desenvolvimento de Programa Livre para Análise de Pórticos Tridimensionais Considerando-se a não Linearidade Geométrica, Fissuração do Concreto e Ligações Semi-Rígidas.** 2007. 245 f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil). Universidade Federal de São Carlos. Disponível

em:<[http://www2.ufscar.br/interface\\_frames/index.php?link=http://www.bco.ufscar.br](http://www2.ufscar.br/interface_frames/index.php?link=http://www.bco.ufscar.br)>  
. Acesso em: 12 out. 2007.

KAEFER, L.F.; MARTHA L. F.; BITTENCOURT, T.N. **Ftool: Ensino de Comportamento de Estruturas com Múltiplos Casos e Combinações de Carregamento**. In: IV SIMMEC – SIMPÓSIO MINEIRO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, UFU, Uberlândia/MG, 2000, p.p. 305-312.

PRAVIA, Z. M. C.; KRIPTA, M. Proposta Metodológica para o Uso e Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais no Ensino de Estruturas.

PINTO, R. S. **Análise não-linear das estruturas de Contraventamento de edifícios e Concreto Armado**. 2002. 189 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2002.

MARTHA, L. F. **FTOOL. Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas**. Versão Educacional 2.12. Disponível em <<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>>. Acesso em: 15 out. 2008.

MARTHA, L. F. **Conceitos e Métodos Básicos da Análise de Estruturas**. Editora Campus, [2010] , (no prelo em set/2009).

RAYMUNDO H. **Programas para representação de formas de pavimentos de concreto, geração de dados correspondentes para programas de cálculo de estruturas e representação da estrutura deformada e esforços solicitantes**. Relatório PIBIC-UFSCar São Carlos, Agosto de 2007



## ANEXO I – LISTAGEM ARQUIVOS DE ENTRADA E SAIDA EXEMPLOS GRELHAS-GPLAN

Neste anexo I, são apresentadas as listagens relativas aos dados de entrada e saída do programa GPLAN, relativos aos exemplos do capítulo 4.

1 – Listagem do arquivo de dados de Entrada do Exemplo 1 – laje simplesmente apoiada no seu contorno externo - GPLAN.

OPTE,0,3,3,3,3,

EXEMPLO DISSERTAÇÃO

ANTONIO DE FARIA

1LAJE.DAT

NOGP

1,9,1,0.,8.,8.,8.,

73,81,9,0.,0.,8.,0.,

BARG

1,8,1,1,1,2,1,2,

9,16,1,10,1,11,1,1,

17,24,1,19,1,20,1,1,

25,32,1,28,1,29,1,1,

33,40,1,37,1,38,1,1,

41,48,1,46,1,47,1,1,

49,56,1,55,1,56,1,1

57,64,1,64,1,65,1,1,

65,72,1,73,1,74,1,2,

73,80,1,1,9,10,9,2,

81,88,1,2,9,11,9,1,

89,96,1,3,9,12,9,1,

97,104,1,4,9,13,9,1,

105,112,1,5,9,14,9,1,

113,120,1,6,9,15,9,1,

121,128,1,7,9,16,9,1,

129,136,1,8,9,17,9,1,

137,144,1,9,9,18,9,2,

RESG

1,9,1,1,0,0,

73,81,1,1,0,0,

10,64,9,1,0,0,

18,72,9,1,0,0,

PROP

1,1.,1,8.333E-05,1.667E-04,

2,1,.05,4.167E-05,8.333E-05,  
 MATL  
 1,2.607E+07,1.043E+07,  
 FIMG  
 CARR1  
 CNOG  
 1,81,1,-5.5,  
 1,9,1,2.75,  
 73,81,1,2.75,  
 10,64,9,2.75,  
 18,72,9,2.75,  
 1,9,8,1.375,  
 73,81,8,1.375,  
 FIMC  
 FIME

2 – Listagem do arquivo de resultados obtidos do exemplo 1 – deslocamentos nodais nos elementos da grelha - GPLAN

#### DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC Z (m)	ROTACAO X (rad)	ROTACAO Y (rad)
1	.0000000	.0009559	.0009559
2	.0000000	.0078471	.0008450
3	.0000000	.0140373	.0005968
4	.0000000	.0179734	.0003078
5	.0000000	.0193126	.0000000
6	.0000000	.0179733	-.0003078
7	.0000000	.0140372	-.0005968
8	.0000000	.0078470	-.0008450
9	.0000000	.0009558	-.0009558
10	.0000000	.0008450	.0078471
11	-.0076144	.0070088	.0070088
12	-.0137101	.0126048	.0050207
13	-.0175535	.0161940	.0025922
14	-.0188603	.0174198	-.0000001
15	-.0175534	.0161940	-.0025923
16	-.0137100	.0126047	-.0050207
17	-.0076143	.0070088	-.0070088
18	.0000000	.0008450	-.0078470
19	.0000000	.0005968	.0140373

20	-.0137101	.0050207	.0126048
21	-.0247903	.0091113	.0091113
22	-.0318247	.0117787	.0047242
23	-.0342232	.0126968	-.0000001
24	-.0318246	.0117787	-.0047242
25	-.0247902	.0091113	-.0091113
26	-.0137100	.0050207	-.0126047
27	.0000000	.0005968	-.0140372
28	.0000000	.0003078	.0179734
29	-.0175534	.0025922	.0161940
30	-.0318247	.0047241	.0117787
31	-.0409329	.0061296	.0061297
32	-.0440463	.0066165	-.0000001
33	-.0409329	.0061297	-.0061297
34	-.0318246	.0047242	-.0117787
35	-.0175534	.0025922	-.0161940
36	.0000000	.0003078	-.0179733
37	.0000000	.0000000	.0193126
38	-.0188603	-.0000001	.0174197
39	-.0342231	-.0000001	.0126968
40	-.0440463	-.0000001	.0066166
41	-.0474073	-.0000001	.0000000
42	-.0440463	-.0000001	-.0066166
43	-.0342231	.0000000	-.0126968
44	-.0188602	.0000000	-.0174197
45	.0000000	.0000000	-.0193126
46	.0000000	-.0003078	.0179733
47	-.0175533	-.0025923	.0161939
48	-.0318245	-.0047243	.0117787
49	-.0409328	-.0061298	.0061297
50	-.0440462	-.0066166	.0000000
51	-.0409328	-.0061298	-.0061297
52	-.0318245	-.0047243	-.0117787
53	-.0175533	-.0025923	-.0161939
54	.0000000	-.0003078	-.0179733
55	.0000000	-.0005968	.0140372
56	-.0137100	-.0050207	.0126047
57	-.0247901	-.0091113	.0091113
58	-.0318244	-.0117787	.0047242
59	-.0342230	-.0126968	.0000000
60	-.0318244	-.0117787	-.0047242
61	-.0247901	-.0091113	-.0091112

62	-.0137100	-.0050207	-.0126047
63	.0000000	-.0005968	-.0140372
64	.0000000	-.0008450	.0078470
65	-.0076143	-.0070088	.0070088
66	-.0137100	-.0126047	.0050207
67	-.0175533	-.0161939	.0025922
68	-.0188601	-.0174197	.0000000
69	-.0175533	-.0161939	-.0025922
70	-.0137099	-.0126047	-.0050206
71	-.0076143	-.0070088	-.0070087
72	.0000000	-.0008450	-.0078470
73	.0000000	-.0009558	.0009558
74	.0000000	-.0078470	.0008450
75	.0000000	-.0140372	.0005968
76	.0000000	-.0179732	.0003078
77	.0000000	-.0193125	.0000000
78	.0000000	-.0179732	-.0003078
79	.0000000	-.0140371	-.0005968
80	.0000000	-.0078470	-.0008450
81	.0000000	-.0009558	-.0009558

3 – Listagem do arquivo de dados de entrada do exemplo 2 – Laje contígua indeslocável no seu contorno externo e intermediário – GPLAN.

```

OPTE,3,3,3,3,3,
EXE-21
DUAS LAJES CONTIGUAS
EXE-21.DAT
NOGP
  1,17,1,0.,8.,16.,8.,
  137,153,17,0.,0.,16.,0.,
RESG
  1,17,1,1,0,0,
  137,153,1,1,0,0,
  18,120,17,1,0,0,
  26,128,17,1,0,0,
  34,136,17,1,0,0,
BARG
  1,16,1,1,1,2,1,1,
  129,144,1,137,1,138,1,1,
  145,152,1,1,17,18,17,1,
  209,216,1,9,17,26,17,1,
  273,280,1,17,17,34,17,1,

```

17,32,1,18,1,19,1,2,  
33,48,1,35,1,36,1,2,  
49,64,1,52,1,53,1,2,  
65,80,1,69,1,70,1,2,  
81,96,1,86,1,87,1,2,  
97,112,1,103,1,104,1,2,  
113,128,1,120,1,121,1,2,  
153,160,1,2,17,19,17,2,  
161,168,1,3,17,20,17,2,  
169,176,1,4,17,21,17,2,  
177,184,1,5,17,22,17,2,  
185,192,1,6,17,23,17,2,  
193,200,1,7,17,24,17,2,  
201,208,1,8,17,25,17,2,  
217,224,1,10,17,27,17,2,  
225,232,1,11,17,28,17,2,  
233,240,1,12,17,29,17,2,  
241,248,1,13,17,30,17,2,  
249,256,1,14,17,31,17,2,  
257,264,1,15,17,32,17,2,  
265,272,1,16,17,33,17,2,

**PROP**

1,1,.16,8.533E-3,1.067E-4,  
2,1,.10,8.333E-5,1.667-4,

**MATL**

1,2.607E7,1.043E7,

**FIMG****G1\_LAJE****CNOG**

1,153,1,-5.5,  
1,17,1,2.75,  
137,153,1,2.75,  
18,120,17,2.75,  
34,136,17,2.75,  
1,17,16,1.375,  
137,153,16,1.375

**FIMC****FIME**

4 – Listagem do arquivo de resultados obtidos do exemplo 2 – deslocamentos nodais nos elementos da grelha - GPLAN

DESLOCAMENTOS NODAIS			
NO	DESLOC Z (m)	ROTACAO X (rad)	ROTACAO Y (rad)
1	.0000000	.0000057	.0000058
2	.0000000	.0057674	.0000030
3	.0000000	.0101725	.0000023
4	.0000000	.0124791	.0000007
5	.0000000	.0124784	-.0000008
6	.0000000	.0103355	-.0000021
7	.0000000	.0066242	-.0000028
8	.0000000	.0025239	-.0000029
9	.0000000	.0000051	.0000000
10	.0000000	.0025241	.0000029
11	.0000000	.0066246	.0000028
12	.0000000	.0103361	.0000021
13	.0000000	.0124791	.0000008
14	.0000000	.0124797	-.0000007
15	.0000000	.0101730	-.0000023
16	.0000000	.0057677	-.0000030
17	.0000000	.0000057	-.0000058
18	.0000000	.0000030	.0058296
19	-.0056968	.0052081	.0051400
20	-.0100348	.0092218	.0033277
21	-.0122932	.0113305	.0011086
22	-.0122719	.0113102	-.0011278
23	-.0101260	.0093051	-.0030344
24	-.0064035	.0058623	-.0041498
25	-.0022568	.0021275	-.0036848
26	.0000000	.0000024	.0000001
27	-.0022570	.0021277	.0036850
28	-.0064039	.0058627	.0041500
29	-.0101265	.0093057	.0030345
30	-.0122726	.0113108	.0011279
31	-.0122939	.0113311	-.0011087
32	-.0100353	.0092222	-.0033279
33	-.0056971	.0052083	-.0051403
34	.0000000	.0000030	-.0058298
35	.0000000	.0000026	.0105163
36	-.0102629	.0037122	.0093100
37	-.0181497	.0066271	.0060788

38	-.0222771	.0081784	.0020234
39	-.0222198	.0081460	-.0020932
40	-.0182539	.0066303	-.0055913
41	-.0114245	.0040832	-.0075736
42	-.0039388	.0014266	-.0065629
43	.0000000	.0000020	.0000002
44	-.0039392	.0014267	.0065633
45	-.0114253	.0040835	.0075739
46	-.0182550	.0066308	.0055916
47	-.0222211	.0081465	.0020933
48	-.0222783	.0081789	-.0020236
49	-.0181506	.0066275	-.0060792
50	-.0102634	.0037124	-.0093105
51	.0000000	.0000026	-.0105168
52	.0000000	.0000012	.0134614
53	-.0131225	.0019024	.0119460
54	-.0232626	.0034076	.0078455
55	-.0285905	.0042143	.0026106
56	-.0284977	.0041896	-.0027373
57	-.0233338	.0033843	-.0072641
58	-.0145017	.0020554	-.0097562
59	-.0049387	.0007051	-.0083200
60	.0000000	.0000009	.0000002
61	-.0049392	.0007052	.0083205
62	-.0145026	.0020556	.0097567
63	-.0233352	.0033846	.0072645
64	-.0284994	.0041899	.0027374
65	-.0285922	.0042146	-.0026108
66	-.0232639	.0034078	-.0078460
67	-.0131232	.0019025	-.0119466
68	.0000000	.0000012	-.0134620
69	.0000000	.0000000	.0144587
70	-.0140897	.0000000	.0128406
71	-.0249954	-.0000001	.0084490
72	-.0307332	-.0000001	.0028108
73	-.0306254	-.0000001	-.0029624
74	-.0250463	-.0000001	-.0078416
75	-.0155290	-.0000001	-.0104983
76	-.0052683	.0000000	-.0089052
77	.0000000	.0000000	.0000003
78	-.0052688	.0000000	.0089057
79	-.0155301	.0000000	.0104988

80	-.0250479	.0000000	.0078420
81	-.0306272	-.0000001	.0029625
82	-.0307349	-.0000001	-.0028111
83	-.0249967	-.0000001	-.0084496
84	-.0140904	-.0000001	-.0128413
85	.0000000	.0000000	-.0144595
86	.0000000	-.0000012	.0134613
87	-.0131225	-.0019025	.0119459
88	-.0232625	-.0034077	.0078454
89	-.0285904	-.0042145	.0026105
90	-.0284975	-.0041898	-.0027373
91	-.0233336	-.0033845	-.0072641
92	-.0145015	-.0020555	-.0097561
93	-.0049387	-.0007051	-.0083199
94	.0000000	-.0000009	.0000003
95	-.0049392	-.0007052	.0083205
96	-.0145026	-.0020557	.0097566
97	-.0233351	-.0033847	.0072644
98	-.0284992	-.0041901	.0027373
99	-.0285919	-.0042148	-.0026108
100	-.0232636	-.0034080	-.0078459
101	-.0131231	-.0019026	-.0119466
102	.0000000	-.0000012	-.0134619
103	.0000000	-.0000026	.0105162
104	-.0102628	-.0037122	.0093099
105	-.0181495	-.0066271	.0060787
106	-.0222768	-.0081784	.0020234
107	-.0222195	-.0081460	-.0020932
108	-.0182536	-.0066303	-.0055912
109	-.0114243	-.0040832	-.0075735
110	-.0039387	-.0014266	-.0065628
111	.0000000	-.0000020	.0000002
112	-.0039392	-.0014267	.0065632
113	-.0114252	-.0040835	.0075739
114	-.0182548	-.0066308	.0055915
115	-.0222208	-.0081466	.0020933
116	-.0222780	-.0081789	-.0020236
117	-.0181503	-.0066275	-.0060791
118	-.0102633	-.0037124	-.0093104
119	.0000000	-.0000026	-.0105166
120	.0000000	-.0000030	.0058295
121	-.0056967	-.0052080	.0051399



122	-.0100346	-.0092216	.0033276
123	-.0122930	-.0113303	.0011085
124	-.0122717	-.0113100	-.0011278
125	-.0101258	-.0093050	-.0030343
126	-.0064034	-.0058622	-.0041497
127	-.0022567	-.0021275	-.0036847
128	.0000000	-.0000024	.0000001
129	-.0022569	-.0021277	.0036849
130	-.0064038	-.0058626	.0041499
131	-.0101264	-.0093056	.0030344
132	-.0122724	-.0113107	.0011278
133	-.0122937	-.0113309	-.0011086
134	-.0100351	-.0092221	-.0033278
135	-.0056970	-.0052083	-.0051402
136	.0000000	-.0000030	-.0058297
137	.0000000	-.0000057	.0000058
138	.0000000	-.0057673	.0000030
139	.0000000	-.0101724	.0000023
140	.0000000	-.0124789	.0000007
141	.0000000	-.0124782	-.0000008
142	.0000000	-.0103353	-.0000021
143	.0000000	-.0066241	-.0000028
144	.0000000	-.0025239	-.0000029
145	.0000000	-.0000051	.0000000
146	.0000000	-.0025241	.0000029
147	.0000000	-.0066246	.0000028
148	.0000000	-.0103359	.0000021
149	.0000000	-.0124789	.0000008
150	.0000000	-.0124795	-.0000007
151	.0000000	-.0101728	-.0000023
152	.0000000	-.0057676	-.0000030
153	.0000000	-.0000057	-.0000058

5 – Listagem do arquivo de dados de entrada do exemplo 3 – Laje contígua apoiada no seu contorno externo e intermediário em vigas deformáveis – GPLAN.

```

OPTE,3,3,3,3,3,
EXE-21
DUAS LAJES CONTIGUAS
EXE-21.DAT
NOGP
  1,17,1,0.,8.,16.,8.,
  137,153,17,0.,0.,16.,0.,

```

**RESG**

1,17,8,1,0,0,  
137,153,8,1,0,0,

**BARG**

1,16,1,1,1,2,1,1,  
129,144,1,137,1,138,1,1,  
145,152,1,1,17,18,17,1,  
209,216,1,9,17,26,17,1,  
273,280,1,17,17,34,17,1,  
17,32,1,18,1,19,1,2,  
33,48,1,35,1,36,1,2,  
49,64,1,52,1,53,1,2,  
65,80,1,69,1,70,1,2,  
81,96,1,86,1,87,1,2,  
97,112,1,103,1,104,1,2,  
113,128,1,120,1,121,1,2,  
153,160,1,2,17,19,17,2,  
161,168,1,3,17,20,17,2,  
169,176,1,4,17,21,17,2,  
177,184,1,5,17,22,17,2,  
185,192,1,6,17,23,17,2,  
193,200,1,7,17,24,17,2,  
201,208,1,8,17,25,17,2,  
217,224,1,10,17,27,17,2,  
225,232,1,11,17,28,17,2,  
233,240,1,12,17,29,17,2,  
241,248,1,13,17,30,17,2,  
249,256,1,14,17,31,17,2,  
257,264,1,15,17,32,17,2,  
265,272,1,16,17,33,17,2,

**PROP**

1,1,.16,8.533E-3,1.067E-4,  
2,1,.10,8.333E-5,1.667-4,

**MATL**

1,2.607E7,1.043E7,

**FIMG****G1\_LAJE****CNOG**

1,153,1,-5.5,  
1,17,1,2.75,  
137,153,1,2.75,  
18,120,17,2.75,

34,136,17,2.75,  
 1,17,16,1.375,  
 137,153,16,1.375  
 FIMC  
 FIME

6 – Listagem do arquivo de resultados obtidos do exemplo 3 – deslocamentos nodais nos elementos da grelha – GPLAN.

DESLOCAMENTOS NODAIS			
NO	DESLOC Z (m)	ROTACAO X (rad)	ROTACAO Y (rad)
1	.0000000	.0014669	.0006854
2	-.0006527	.0071838	.0006017
3	-.0011531	.0116317	.0003872
4	-.0013987	.0141225	.0001008
5	-.0013528	.0144677	-.0001859
6	-.0010526	.0128170	-.0003981
7	-.0006074	.0096823	-.0004674
8	-.0001873	.0061144	-.0003418
9	.0000000	.0038879	.0000000
10	-.0001873	.0061145	.0003418
11	-.0006074	.0096824	.0004674
12	-.0010526	.0128171	.0003981
13	-.0013528	.0144678	.0001859
14	-.0013987	.0141225	-.0001008
15	-.0011531	.0116318	-.0003872
16	-.0006527	.0071838	-.0006017
17	.0000000	.0014670	-.0006854
18	-.0014221	.0013467	.0064452
19	-.0077213	.0065133	.0057209
20	-.0125972	.0105676	.0038136
21	-.0152792	.0128471	.0014636
22	-.0155508	.0131476	-.0008995
23	-.0135905	.0115995	-.0028921
24	-.0099966	.0086919	-.0040380
25	-.0059650	.0054477	-.0035802
26	-.0037805	.0035768	.0000000
27	-.0059650	.0054478	.0035802
28	-.0099966	.0086919	.0040381
29	-.0135905	.0115996	.0028921
30	-.0155509	.0131477	.0008995
31	-.0152793	.0128472	-.0014636

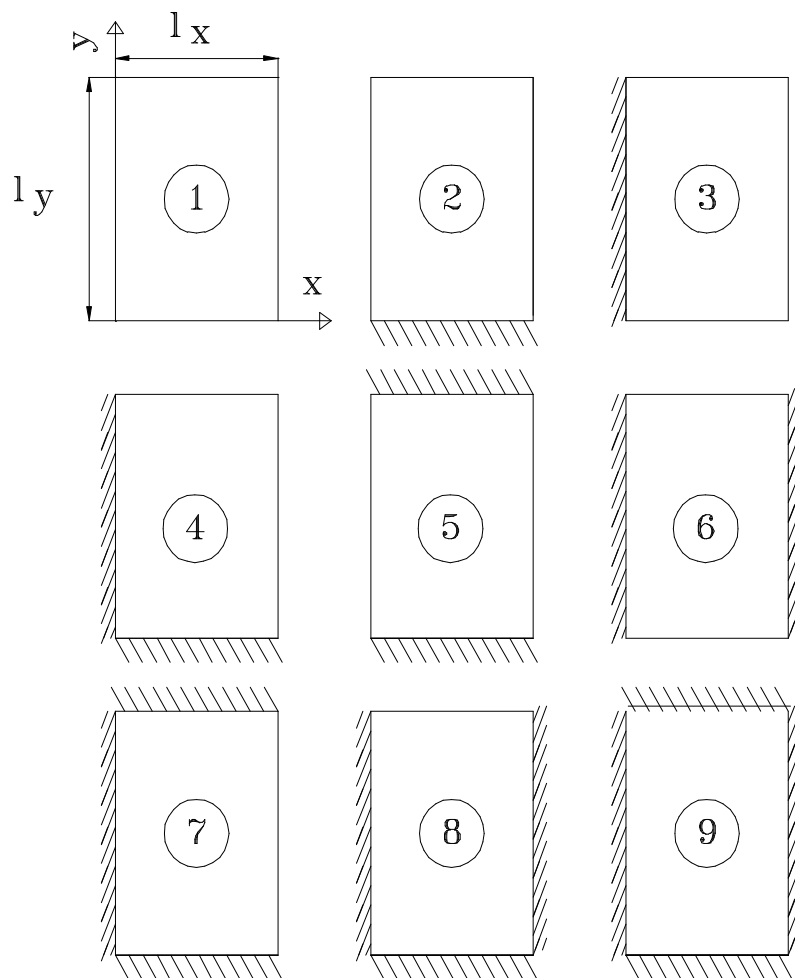
32	-.0125973	.0105677	-.0038136
33	-.0077214	.0065134	-.0057209
34	-.0014221	.0013468	-.0064452
35	-.0026185	.0010219	.0110869
36	-.0134508	.0047125	.0098827
37	-.0219122	.0076649	.0066533
38	-.0266162	.0093497	.0025960
39	-.0271398	.0095631	-.0015143
40	-.0237705	.0083947	-.0049942
41	-.0175523	.0062503	-.0069793
42	-.0106249	.0039568	-.0060958
43	-.0069658	.0027171	.0000000
44	-.0106249	.0039568	.0060959
45	-.0175524	.0062504	.0069793
46	-.0237707	.0083948	.0049942
47	-.0271399	.0095633	.0015143
48	-.0266164	.0093499	-.0025960
49	-.0219124	.0076651	-.0066533
50	-.0134510	.0047126	-.0098827
51	-.0026186	.0010220	-.0110869
52	-.0034118	.0005493	.0140089
53	-.0170889	.0024443	.0125190
54	-.0278330	.0039728	.0084823
55	-.0338419	.0048531	.0033295
56	-.0345223	.0049614	-.0019248
57	-.0302276	.0043425	-.0063664
58	-.0223235	.0032280	-.0088465
59	-.0136058	.0020690	-.0076194
60	-.0090795	.0014615	.0000000
61	-.0136059	.0020691	.0076195
62	-.0223237	.0032281	.0088465
63	-.0302279	.0043426	.0063664
64	-.0345226	.0049615	.0019248
65	-.0338422	.0048533	-.0033294
66	-.0278333	.0039729	-.0084823
67	-.0170892	.0024444	-.0125191
68	-.0034120	.0005494	-.0140090
69	-.0036891	.0000000	.0149996
70	-.0183296	.0000000	.0134149
71	-.0298507	.0000000	.0091084
72	-.0363066	.0000000	.0035813
73	-.0370397	.0000000	-.0020681

74	-.0324249	.0000000	-.0068391
75	-.0239456	.0000000	-.0094794
76	-.0146290	.0000000	-.0081244
77	-.0098186	.0000000	.0000001
78	-.0146292	.0000000	.0081245
79	-.0239459	.0000000	.0094795
80	-.0324252	.0000000	.0068391
81	-.0370401	.0000000	.0020682
82	-.0363071	.0000000	-.0035813
83	-.0298511	.0000000	-.0091084
84	-.0183300	.0000000	-.0134151
85	-.0036893	.0000000	-.0149997
86	-.0034118	-.0005493	.0140089
87	-.0170889	-.0024444	.0125190
88	-.0278329	-.0039728	.0084822
89	-.0338418	-.0048532	.0033295
90	-.0345223	-.0049615	-.0019247
91	-.0302276	-.0043425	-.0063664
92	-.0223234	-.0032280	-.0088465
93	-.0136057	-.0020690	-.0076194
94	-.0090796	-.0014615	.0000001
95	-.0136059	-.0020691	.0076195
96	-.0223237	-.0032281	.0088465
97	-.0302279	-.0043426	.0063664
98	-.0345227	-.0049615	.0019248
99	-.0338423	-.0048532	-.0033294
100	-.0278334	-.0039729	-.0084823
101	-.0170892	-.0024444	-.0125191
102	-.0034120	-.0005494	-.0140090
103	-.0026185	-.0010219	.0110868
104	-.0134507	-.0047125	.0098826
105	-.0219121	-.0076649	.0066533
106	-.0266161	-.0093498	.0025960
107	-.0271397	-.0095632	-.0015142
108	-.0237705	-.0083947	-.0049942
109	-.0175522	-.0062503	-.0069793
110	-.0106249	-.0039568	-.0060958
111	-.0069659	-.0027171	.0000000
112	-.0106250	-.0039569	.0060958
113	-.0175524	-.0062504	.0069793
114	-.0237707	-.0083949	.0049943
115	-.0271400	-.0095633	.0015143

116	-.0266165	-.0093499	-.0025960
117	-.0219125	-.0076651	-.0066533
118	-.0134510	-.0047126	-.0098827
119	-.0026187	-.0010220	-.0110869
120	-.0014221	-.0013467	.0064451
121	-.0077212	-.0065133	.0057208
122	-.0125971	-.0105676	.0038136
123	-.0152791	-.0128471	.0014636
124	-.0155507	-.0131476	-.0008995
125	-.0135904	-.0115995	-.0028921
126	-.0099965	-.0086919	-.0040380
127	-.0059650	-.0054477	-.0035802
128	-.0037805	-.0035768	.0000000
129	-.0059650	-.0054478	.0035802
130	-.0099966	-.0086919	.0040380
131	-.0135905	-.0115996	.0028921
132	-.0155509	-.0131478	.0008996
133	-.0152793	-.0128473	-.0014636
134	-.0125973	-.0105678	-.0038136
135	-.0077214	-.0065134	-.0057209
136	-.0014222	-.0013468	-.0064452
137	.0000000	-.0014669	.0006853
138	-.0006526	-.0071838	.0006016
139	-.0011530	-.0116317	.0003872
140	-.0013985	-.0141225	.0001007
141	-.0013526	-.0144677	-.0001859
142	-.0010524	-.0128171	-.0003981
143	-.0006073	-.0096824	-.0004674
144	-.0001873	-.0061145	-.0003418
145	.0000000	-.0038880	.0000000
146	-.0001873	-.0061145	.0003418
147	-.0006074	-.0096824	.0004674
148	-.0010525	-.0128171	.0003981
149	-.0013527	-.0144678	.0001859
150	-.0013986	-.0141226	-.0001007
151	-.0011530	-.0116318	-.0003872
152	-.0006526	-.0071839	-.0006016
153	.0000000	-.0014670	-.0006853

## ANEXO 2 – COEFICIENTES DE FLECHA, MOMENTO FLETOR E REAÇÃO DE APOIO EM PLACAS

Abaixo é apresentada a figura 4.3, com as situações de vinculação das placas isoladas, constantes das tabelas, retiradas de Carvalho (2007), com as respectivas tabelas para determinação do coeficiente  $\alpha$  (determinação das flechas elásticas), coeficientes  $\mu$  (determinação dos momentos fletores) e coeficientes  $\nu$  (determinação das reações de apoio), nas placas utilizadas no capítulo 4.



Situações de vinculação das placas isoladas constantes nas tabelas.

Coeficientes  $\alpha$  para cálculo de flechas elásticas em lajes retangulares submetidas a carregamento uniformemente distribuído.

$\lambda$	caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9
1,00	4,67	3,20	3,20	2,42	2,21	2,21	1,81	1,81	1,46
1,05	5,17	3,61	3,42	2,67	2,55	2,31	2,04	1,92	1,60
1,10	5,64	4,04	3,63	2,91	2,92	2,41	2,27	2,04	1,74
1,15	6,09	4,47	3,82	3,12	3,29	2,48	2,49	2,14	1,87
1,20	6,52	4,91	4,02	3,34	3,67	2,56	2,72	2,24	1,98
1,25	6,95	5,34	4,18	3,55	4,07	2,63	2,95	2,33	2,10
1,30	7,36	5,77	4,35	3,73	4,48	2,69	3,16	2,42	2,20
1,35	7,76	6,21	4,50	3,92	4,92	2,72	3,36	2,48	2,30
1,40	8,14	6,62	4,65	4,08	5,31	2,75	3,56	2,56	2,37
1,45	8,51	7,02	4,78	4,23	5,73	2,80	3,73	2,62	2,45
1,50	8,87	7,41	4,92	4,38	6,14	2,84	3,91	2,68	2,51
1,55	9,22	7,81	5,00	4,53	6,54	2,86	4,07	2,53	2,57
1,60	9,54	8,17	5,09	4,65	6,93	2,87	4,22	2,87	2,63
1,65	9,86	8,52	5,13	4,77	7,33	2,87	4,37	2,78	2,68
1,70	10,15	8,87	5,17	4,88	7,70	2,88	4,51	2,79	2,72
1,75	10,43	9,19	5,26	4,97	8,06	2,88	4,63	2,81	2,76
1,80	10,71	9,52	5,36	5,07	8,43	2,89	4,75	2,83	2,80
1,85	10,96	9,82	5,43	5,16	8,77	2,89	4,87	2,85	2,83
1,90	11,21	10,11	5,50	5,23	9,08	2,90	4,98	2,87	2,85
1,95	11,44	10,39	5,58	5,31	9,41	2,90	5,08	2,89	2,88
2,00	11,68	10,68	5,66	5,39	9,72	2,91	5,19	2,91	2,91
$\infty$	15,35	15,35	6,38	6,38	15,35	3,07	6,38	3,07	3,07



Coefficientes  $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 1, 2 e 3).

$\lambda$	caso 1		caso 2			caso 3		
	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$
1,00	4,41	4,41	3,07	3,66	8,40	3,94	8,52	2,91
1,05	4,80	4,45	3,42	3,78	8,79	4,19	8,91	2,84
1,10	5,18	4,49	3,77	3,90	9,18	4,43	9,30	2,76
1,15	5,56	4,49	4,14	3,97	9,53	4,64	9,63	2,68
1,20	5,90	4,48	4,51	4,05	9,88	4,85	9,95	2,59
1,25	6,27	4,45	4,88	4,10	10,16	5,03	10,22	2,51
1,30	6,60	4,42	5,25	4,15	10,41	5,20	10,48	2,42
1,35	6,93	4,37	5,60	4,18	10,64	5,36	10,71	2,34
1,40	7,25	4,33	5,95	4,21	10,86	5,51	10,92	2,25
1,45	7,55	4,30	6,27	4,19	11,05	5,64	11,10	2,19
1,50	7,86	4,25	6,60	4,18	11,23	5,77	11,27	2,12
1,55	8,12	4,20	6,90	4,17	11,39	5,87	11,42	2,04
1,60	8,34	3,14	7,21	4,14	11,55	5,98	11,55	1,95
1,65	8,62	4,07	7,42	4,12	11,67	6,07	11,67	1,87
1,70	8,86	4,00	7,62	4,09	11,79	6,16	11,80	1,79
1,75	9,06	3,96	7,66	4,05	11,88	6,24	11,92	1,74
1,80	9,27	3,91	7,69	3,99	11,96	6,31	12,04	1,68
1,85	9,45	3,83	8,22	3,97	12,03	6,38	12,14	1,64
1,90	9,63	3,75	8,74	3,94	12,14	6,43	12,24	1,59
1,95	9,77	3,71	8,97	3,88	12,17	6,47	12,29	1,54
2,00	10,00	3,64	9,18	3,80	12,20	6,51	12,34	1,48
$\infty$	12,57	3,77	9,18	3,80	12,20	7,61	12,76	1,48

Coefficientes  $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 4, 5 e 6).

$\lambda$	caso 4				caso 5			caso 6		
	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$
1,00	2,81	6,99	2,81	6,99	2,15	3,17	6,99	3,17	6,99	2,15
1,05	3,05	7,43	2,81	7,18	2,47	3,32	7,43	3,29	7,20	2,07
1,10	3,30	7,87	2,81	7,36	2,78	3,47	7,87	3,42	7,41	1,99
1,15	3,53	8,28	2,80	7,50	3,08	3,58	8,26	3,52	7,56	1,89
1,20	3,76	8,69	2,79	7,63	3,38	3,70	8,65	3,63	7,70	1,80
1,25	3,96	9,03	2,74	7,72	3,79	3,80	9,03	3,71	7,82	1,74
1,30	4,16	9,37	2,69	7,81	4,15	3,90	9,33	3,79	7,93	1,67
1,35	4,33	9,65	2,65	7,88	4,50	3,96	9,69	3,84	8,02	1,59
1,40	4,51	9,93	2,60	7,94	4,85	4,03	10,00	3,90	8,11	1,52
1,45	4,66	10,41	2,54	8,00	5,19	4,09	10,25	3,94	8,13	1,45
1,50	4,81	10,62	2,47	8,06	5,53	4,14	10,49	3,99	8,15	1,38
1,55	4,93	10,82	2,39	8,09	5,86	4,16	10,70	4,03	8,20	1,34
1,60	5,06	10,99	2,31	8,12	6,18	4,17	10,91	4,06	8,25	1,28
1,65	5,16	11,16	2,24	8,14	6,48	4,14	11,08	4,09	8,28	1,23
1,70	5,27	11,30	2,16	8,15	6,81	4,12	11,24	4,12	8,30	1,18
1,75	5,36	11,43	2,11	8,16	7,11	4,12	11,39	4,14	8,31	1,15
1,80	5,45	11,55	2,04	8,17	7,41	4,10	11,43	4,15	8,32	1,11
1,85	5,53	11,57	1,99	8,17	7,68	4,08	11,65	4,16	8,33	1,08
1,90	5,60	11,67	1,93	8,18	7,95	4,04	11,77	4,17	8,33	1,04
1,95	5,67	11,78	1,91	8,19	8,21	3,99	11,83	4,17	8,33	1,01
2,00	5,74	11,89	1,88	8,20	8,47	3,92	11,88	4,18	8,33	0,97
$\infty$	7,06	12,50	1,95	8,20	12,58	4,13	11,88	4,18	8,33	0,97

Coefficientes  $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 7, 8 e 9).

$\lambda$	caso 7				caso 8				caso 9			
	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$
1,00	2,13	5,46	2,60	6,17	2,60	6,17	2,13	5,46	2,11	5,15	2,11	5,15
1,05	2,38	5,98	2,66	6,46	2,78	6,47	2,09	5,56	2,31	5,50	2,10	5,29
1,10	2,63	6,50	2,71	6,75	2,95	6,76	2,04	5,65	2,50	5,85	2,09	5,43
1,15	2,87	7,11	2,75	6,97	3,09	6,99	1,98	5,70	2,73	6,14	2,06	5,51
1,20	3,11	7,72	2,78	7,19	3,23	7,22	1,92	5,75	2,94	6,43	2,02	5,59
1,25	3,43	8,81	2,79	7,36	3,34	7,40	1,85	5,75	3,04	6,67	1,97	5,64
1,30	3,56	8,59	2,77	7,51	3,46	7,57	1,78	5,76	3,13	6,90	1,91	5,68
1,35	3,76	8,74	2,74	7,63	3,55	7,70	1,72	5,75	3,25	7,09	1,86	5,69
1,40	3,96	8,88	2,71	7,74	3,64	7,82	1,64	5,74	3,38	7,28	1,81	5,70
1,45	4,15	9,16	2,67	7,83	3,71	7,91	1,59	5,73	3,48	7,43	1,73	5,71
1,50	4,32	9,44	2,63	7,91	3,78	8,00	1,53	5,72	3,58	7,57	1,66	5,72
1,55	4,48	9,68	2,60	7,98	3,84	8,07	1,47	5,69	3,66	7,68	1,60	5,72
1,60	4,63	9,91	2,55	8,02	3,89	8,14	1,42	5,66	3,73	7,79	1,54	5,72
1,65	4,78	10,13	2,50	8,03	3,94	8,20	1,37	5,62	3,80	7,88	1,47	5,72
1,70	4,92	10,34	2,45	8,10	3,98	8,25	1,32	5,58	3,86	7,97	1,40	5,72
1,75	5,04	10,53	2,39	8,13	4,01	8,30	1,27	5,56	3,91	8,05	1,36	5,72
1,80	5,17	10,71	2,32	8,17	4,04	8,34	1,20	5,54	3,95	8,12	1,32	5,72
1,85	5,26	10,88	2,27	8,16	4,07	8,38	1,17	5,55	3,98	8,18	1,26	5,72
1,90	5,36	11,04	2,22	8,14	4,10	8,42	1,14	5,56	4,01	8,24	1,21	5,72
1,95	5,45	11,20	2,14	8,13	4,11	8,45	1,11	5,60	4,04	8,29	1,19	5,72
2,00	5,55	11,35	2,07	8,12	4,13	8,47	1,08	5,64	4,07	8,33	1,16	5,72
$\infty$	7,07	12,50	2,05	8,12	4,18	8,33	1,09	5,64	4,19	8,33	1,17	5,72

Coefficientes  $k_x, k_y, k'_x, k'_y$  para o cálculo das reações nas vigas de apoio de lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 1, 2 e 3).

$\lambda$	caso 1		caso 2			caso 3		
	$k_x$	$k_y$	$k_x$	$k_y$	$k'_y$	$k_x$	$k'_x$	$k_y$
1,00	2,50	2,50	1,83	2,32	4,02	2,32	4,02	1,83
1,05	2,62	2,50	1,92	2,37	4,10	2,38	4,13	1,83
1,10	2,73	2,50	2,01	2,41	4,17	2,44	4,23	1,83
1,15	2,83	2,50	2,10	2,44	4,22	2,50	4,32	1,83
1,20	2,92	2,50	2,20	2,46	4,27	2,54	4,41	1,83
1,25	3,00	2,50	2,29	2,48	4,30	2,59	4,48	1,83
1,30	3,08	2,50	2,38	2,49	4,32	2,63	4,55	1,83
1,35	3,15	2,50	2,47	2,50	4,33	2,67	4,62	1,83
1,40	3,21	2,50	2,56	2,50	4,33	2,70	4,68	1,83
1,45	3,28	2,50	2,64	2,50	4,33	2,74	4,74	1,83
1,50	3,33	2,50	2,72	2,50	4,33	2,77	4,79	1,83
1,55	3,39	2,50	2,80	2,50	4,33	2,80	4,84	1,83
1,60	3,44	2,50	2,87	2,50	4,33	2,82	4,89	1,83
1,65	3,48	2,50	2,93	2,50	4,33	2,85	4,93	1,83
1,70	3,53	2,50	2,99	2,50	4,33	2,87	4,97	1,83
1,75	3,57	2,50	3,05	2,50	4,33	2,89	5,01	1,83
1,80	3,61	2,50	3,10	2,50	4,33	2,92	5,05	1,83
1,85	3,65	2,50	3,15	2,50	4,33	2,94	5,09	1,83
1,90	3,68	2,50	3,20	2,50	4,33	2,96	5,12	1,83
1,95	3,72	2,50	3,25	2,50	4,33	2,97	5,15	1,83
2,00	3,75	2,50	3,29	2,50	4,33	2,99	5,18	1,83
$\infty$	5,00	2,50	5,00	2,50	4,33	3,66	6,25	1,83

Coeficientes  $k_x, k_y, k'_x, k'_y$  para o cálculo das reações nas vigas de apoio de lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 4, 5 e 6).

$\lambda$	caso 4				caso 5		caso 6	
	$k_x$	$k'_x$	$k_y$	$k'_y$	$k_x$	$k'_y$	$k'_x$	$k_y$
1,00	1,83	3,17	1,83	3,17	1,44	3,56	3,56	1,44
1,05	1,92	3,32	1,83	3,17	1,52	3,66	3,63	1,44
1,10	2,00	3,46	1,83	3,17	1,59	3,75	3,69	1,44
1,15	2,07	3,58	1,83	3,17	1,66	3,84	3,74	1,44
1,20	2,14	3,70	1,83	3,17	1,73	3,92	3,80	1,44
1,25	2,20	3,80	1,83	3,17	1,80	3,99	3,85	1,44
1,30	2,25	3,90	1,83	3,17	1,88	4,06	3,89	1,44
1,35	2,30	3,99	1,83	3,17	1,95	4,12	3,93	1,44
1,40	2,35	4,08	1,83	3,17	2,02	4,17	3,97	1,44
1,45	2,40	4,15	1,83	3,17	2,09	4,22	4,00	1,44
1,50	2,44	4,23	1,83	3,17	2,17	4,25	4,04	1,44
1,55	2,48	4,29	1,83	3,17	2,24	4,28	4,07	1,44
1,60	2,52	4,36	1,83	3,17	2,31	4,30	4,10	1,44
1,65	2,55	4,42	1,83	3,17	2,38	4,32	4,13	1,44
1,70	2,58	4,48	1,83	3,17	2,45	4,33	4,15	1,44
1,75	2,61	4,53	1,83	3,17	2,53	4,33	4,17	1,44
1,80	2,64	4,58	1,83	3,17	2,59	4,33	4,20	1,44
1,85	2,67	4,63	1,83	3,17	2,66	4,33	4,22	1,44
1,90	2,70	4,67	1,83	3,17	2,72	4,33	4,24	1,44
1,95	2,72	4,71	1,83	3,17	2,78	4,33	4,26	1,44
2,00	2,75	4,75	1,83	3,17	2,84	4,33	4,28	1,44
$\infty$	3,66	6,33	1,83	3,17	5,00	4,33	5,00	1,44

Coefficientes  $k_x, k_y, k'_x, k'_y$  para o cálculo das reações nas vigas de apoio de lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 7, 8 e 9).

$\lambda$	caso 7			caso 8			caso 9	
	$k_x$	$k'_x$	$k'_y$	$k'_x$	$k_y$	$k'_y$	$k'_x$	$k'_y$
1,00	1,44	2,50	3,03	3,03	1,44	2,50	2,50	2,50
1,05	1,52	2,63	3,08	3,12	1,44	2,50	2,62	2,50
1,10	1,59	2,75	3,11	3,21	1,44	2,50	2,73	2,50
1,15	1,66	2,88	3,14	3,29	1,44	2,50	2,83	2,50
1,20	1,73	3,00	3,16	3,36	1,44	2,50	2,92	2,50
1,25	1,80	3,13	3,17	3,42	1,44	2,50	3,00	2,50
1,30	1,88	3,25	3,17	3,48	1,44	2,50	3,08	2,50
1,35	1,94	3,36	3,17	3,54	1,44	2,50	3,15	2,50
1,40	2,00	3,47	3,17	3,59	1,44	2,50	3,21	2,50
1,45	2,06	3,57	3,17	3,64	1,44	2,50	3,28	2,50
1,50	2,11	3,66	3,17	3,69	1,44	2,50	3,33	2,50
1,55	2,16	3,75	3,17	3,73	1,44	2,50	3,39	2,50
1,60	2,21	3,83	3,17	3,77	1,44	2,50	3,44	2,50
1,65	2,25	3,90	3,17	3,81	1,44	2,50	3,48	2,50
1,70	2,30	3,98	3,17	3,84	1,44	2,50	3,53	2,50
1,75	2,33	4,04	3,17	3,87	1,44	2,50	3,57	2,50
1,80	2,37	4,11	3,17	3,90	1,44	2,50	3,61	2,50
1,85	2,40	4,17	3,17	3,93	1,44	2,50	3,65	2,50
1,90	2,44	4,21	3,17	3,96	1,44	2,50	3,68	2,50
1,95	2,47	4,28	3,17	3,99	1,44	2,50	3,72	2,50
2,00	2,50	4,33	3,17	4,01	1,44	2,50	3,75	2,50
$\infty$	3,66	6,34	3,17	5,00	1,44	2,50	5,00	2,50