

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E
TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

*“Ansatz de Bethe para Cadeias Quânticas de Spin-1 com
Condições de Contorno”*

Elton Casado Fireman

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em física da Universidade Federal de São Carlos com parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em física.

Orientador : Antônio Lima Santos

São Carlos – SP
Março – 2002

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

F523ab

Fireman, Elton Casado.

Ansatz de Bethe para cadeias quânticas de spin-1 com condições de contorno / Elton Casado Fireman. -- São Carlos : UFSCar, 2008.

90 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2002.

1. Ansatz de Bethe. 2. Cadeias quânticas. 3. Condições de contorno. I. Título.

CDD: 530 (20^a)

ELTON CASADO FIREMAN

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovado em: 21/3/2002

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Antonio Lima Santos
Presidente

Antonio Lima Santos

Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes
Membro

Esmerindo de Sousa Bernardes

Prof. Dr. Luis Agostinho Ferreira
Membro

Luis Agostinho Ferreira

Prof. Dr. Michel Louis O'Carroll
Membro

Michel Louis O'Carroll

Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga
Membro

Paulo Afonso Faria da Veiga

Sr. Benedito Wilson de Oliveira
Secretário do PPG-FIS

Benedito Wilson de Oliveira

**Dedico este trabalho a
Jesus Cristo de Nazaré, o
Verbo que se fez Carne, e
habitou entre nós.**

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Antônio Lima Santos pela paciência, compreensão e orientação.

Aos professores do DF-UFSCar, e em especial ao Prof. Dr. Francisco C. Alcaraz.

Agradeço ao Programa de Pós-graduação em Física pelo apoio material. A Benedito Wilson de Oliveira pelo apoio da secretaria. Aos demais funcionários do DF-UFSCar.

Ao Wagner Utiel pela amizade e discussões. Ao Carlos pelo apoio. Aos amigos e colegas da pós-graduação que estiveram e estão comigo nestes 4 anos.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos amigos Ozéias, Bernadete, Marcelo e Rosângela pela amizade. Ao casal amigo Jamal e Satomi que nos receberam primeiramente em São Carlos.

Agradeço ao Pr. Jarbas e família pela recepção carinhosa e pela hospitalidade que mostraram quando cheguei em São Carlos, prova do amor de Deus na vida deles.

Agradeço à minha esposa pelo companheirismo, carinho, amor que tem demonstrado durante estes anos de casados. Obrigado, pela filhinha linda que nós temos!

Agradeço aos meus pais e pais da minha esposa pelo carinho e amor que nos têm dado.

Agradeço ao povo de Deus que tem orado pela minha família.

E de forma muito especial, eu agradeço ao meu Deus porque: *“Tudo foi criado por Ele. Ele é antes de todas as coisas. Nele tudo subsiste.”* Cl. 1:16b,17. A Ele que sustenta todas as coisas, me tem sustentado, e levantou todas estas pessoas que me abençoaram. A Ele eu agradeço de todo coração!

RESUMO

O procedimento para resolução de cadeias quânticas integráveis de spin 1 com termos de superfícies diagonais para os modelos de vértices de três estados é apresentado. Consideramos os modelos de 19-vértices Zamolodchikov-Fateev e Izergin-Korepin e os modelos de 19-vértices com graduação Z_2 $sl(2|1)$ e $osp(1|2)$. Em cada caso os autovalores de energia são determinados pela aplicação do ansatz de Bethe de coordenadas.

ABSTRACT

The procedure for obtaining integrable open spin chain Hamiltonians via reflection matrices explicitly carried out for some three-state vertex models. We have considered the 19-vertex models of Zamolodchikov-Fateev and Izergin-Korepin and the Z_2 – graded 19-vertex models with $sl(2|1)$ and $osp(1|2)$ invariances. In each case the eigenspectrum is determined by application of the coordinate Bethe ansatz.

Sumário

1	Introdução	1
2	Equação de Yang-Baxter	6
2.1	Integrabilidade	6
2.2	Equação de Yang-Baxter	7
2.3	Propriedades da Matriz $R(u)$	9
2.4	Modelos Graduados	11
2.5	Matrizes R - Modelos 19-vértices	12
2.5.1	Modelo Zamolodchikov-Fateev (ZF)	13
2.5.2	Modelo Izergin-Korepin (IK)	13
2.5.3	Modelo $sl(2j_1)$	14
2.5.4	Modelo $osp(1j_2)$	15
2.6	Hamiltonianos	16
3	Equação de Reflexão - Cadeias Abertas	20
3.1	Introdução	20
3.2	Equação de Reflexão	21
3.3	Equação de Reflexão Graduada	23
3.4	Matrizes K^i e K^+	24
3.4.1	Modelo Zamolodchikov-Fateev	25
3.4.2	Modelo Izergin-Korepin	26

3.4.3	Modelo $sl(2j1)$:	29
3.4.4	Modelo $osp(1j2)$:	30
3.5	Hamiltonianos	31
3.5.1	Modelo Zamolodchikov-Fateev:	34
3.5.2	Modelo Izergin-Korepin:	35
3.5.3	Modelo $sl(2j1)$:	37
3.5.4	Modelo $osp(1j2)$:	37
4	Ansatz de Bethe de Coordenadas para Cadeias Quânticas de Spin-1	40
4.1	Introdução	40
4.2	A Cadeia de Spin	41
4.3	Setor $r = 0$	42
4.4	Setor $r = 1$	43
4.5	Setor $r = 2$	44
4.6	Setor $r = 3$	48
4.7	Setor r geral	53
5	Ansatz de Bethe de Coordenadas para Cadeias Quânticas Abertas de Spin-1	55
5.1	Introdução	55
5.2	Setor $r = 0$	56
5.3	Setor $r = 1$	57
5.4	Setor $r = 2$	59
5.5	Setor r geral	68
6	Soluções para os Modelos de 19-vértices com Termos de fronteiras	71
6.1	Modelo Zamolodchikov-Fateev	72
6.2	Modelo Izergin-Korepin	74
6.3	Modelo $sl(2j1)$:	77
6.4	Modelo $osp(1j2)$	78

6.5	Relação Modelo Graduado e Não-Graduado	80
6.5.1	Equação de Yang-Baxter	80
6.5.2	Modelo Graduado e Não-Graduado	81
6.5.3	Relação entre Modelo Izergin-Korepin e Modelo osp(1j2)	82
6.5.4	Relação entre Modelo Zamolodchikov-Fateev e o Modelo sl(2j1)	84
7	Conclusões e Perspectivas	86
	Bibliografia	87

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Cadeias quânticas de spin em uma dimensão são um dos problemas fundamentais em mecânica quântica e mecânica estatística. As cadeias de spin surgiram para tentar explicar a temperatura de transição de fase ferromagnética-paramagnética presente em alguns materiais. O primeiro método em obter êxito na resolução de cadeias quânticas de spin foi o ansatz de Bethe [1]. O ansatz de Bethe considera que a função de onda pode ser escrita com uma superposição de ondas planas. As ondas planas são escritas em função de certos parâmetros que são interpretados como pseudomomentuns. Essa técnica vem sendo usada nos mais diversos problemas em uma dimensão: cadeias de spin [2], modelos de elétrons fortemente correlacionados [3], modelos de difusão de partículas [4], etc.

Os modelos de vértices são outro grupo de sistemas integráveis bidimensionais que têm destaque em mecânica estatística. Estes modelos surgiram em função de explicar a entropia residual do gelo [2], e têm sua estrutura matemática associada a certas matrizes conhecidas como matrizes R . Os elementos da matriz R estão associados aos pesos de Boltzmann das configurações dos sítios da rede bidimensional. Se R satisfaz uma equação conhecida como equação de Yang-Baxter é possível mostrar que as matrizes de transferência para diferentes parâmetros, chamados de parâmetros espectrais, comutam entre si, garantimos desta forma a integrabilidade do modelo. Esta condição de integrabilidade,

bem conhecida na literatura, é uma condição suficiente [2, 5, 6].

Contudo, esses dois grupos de modelos integráveis aparentemente distintos têm uma relação próxima entre si. Associada a cada modelo de vértices existe uma cadeia quântica de spin. Essa relação é observada no Hamiltoniano. Para uma matriz R podemos calcular o Hamiltoniano, e este Hamiltoniano descreve a interação entre as variáveis de spin de uma certa cadeia quântica de spin. Por exemplo, o modelo estatístico conhecido como 8-vértices está relacionado a cadeia quântica de spin-1/2 XYZ [2]. Assim, estes dois grupos de sistemas integráveis têm uma estrutura matemática idêntica, logo, dada uma solução de uma cadeia quântica temos simultaneamente a solução para o modelo de vértices associado ou achada a solução para o modelo de vértices temos a solução para a cadeia quântica de spin.

O ansatz de Bethe se tornou um método conhecido e eficaz na resolução de sistemas integráveis. Esta técnica foi inicialmente introduzida por Bethe [1] para resolver uma cadeia de spin-1/2, conhecida como XXX. Hoje, ela possui várias novas versões: o ansatz de Bethe algébrico [7], ansatz de Bethe analítico [8], etc. Dentro destas várias versões a mais simples continua sendo a apresentada por Bethe, que passou a ser conhecida como ansatz de Bethe de coordenadas. Com o ansatz de Bethe de coordenadas podemos calcular autofunções e autovalores do Hamiltoniano de uma dada cadeia quântica.

Outra versão do ansatz de Bethe que merece destaque é a versão conhecida como ansatz de Bethe algébrico, também chamada de Método do Espalhamento Inverso Quântico. O ansatz de Bethe algébrico é um tratamento matematicamente mais elegante. A sua idéia central é baseada na construção das autofunções da matriz de transferência por operadores de criação e aniquilação agindo sobre um escolhido estado de referência. A matriz de transferência é calculada como o traço de um operador conhecido como operador de monodromia num dado espaço V . Os elementos do operador de monodromia são operadores definidos no espaço quântico, e são alguns deles que exercem o papel de operadores de criação e aniquilação.

Com a diagonalização do Hamiltoniano de uma cadeia quântica para uma apropriada

condição na superfície podemos fazer o limite de $N \rightarrow \infty$, onde N é o número de sítios da cadeia, e então calcularmos toda a termodinâmica desta cadeia quântica. É possível calcularmos a energia do estado fundamental, primeiras excitações de energia, velocidade do som, etc.

Além disso, nos últimos anos uma nova conexão muito importante foi feita entre o ansatz de Bethe e a teoria de campo conforme. Usando o ansatz de Bethe algébrico, Korepin [9] encontrou várias correlações com modelos integráveis, e mais recentemente, Babujian e Flume [10] desenvolveram um método tomando o limite semiclássico através de uma constante tipo-Planck qual revela uma ligação com os modelos de Gaudin [11] e as soluções para as equações de Knizhnik-Zamolodchikov para o modelo $SU(2)$ Wess-Zumino-Novikov-Witten em teoria conforme.

Em matéria condensada, sistemas integráveis que contêm campos de Fermi têm atraído interesse crescente devido as suas aplicações potenciais. Os exemplos mais comuns para tais sistemas são as generalizações supersimétrica para os modelos de Hubbard e t - J [12]. Para estes modelos temos uma generalização da equação de Yang-Baxter associada aos modelos graduados Z_2 , esta generalização implica no aparecimento de sinais adicionais na equação de Yang-Baxter [13]:

Quando consideramos sistemas em um intervalo finito com fronteiras, nós introduzimos as matrizes de reflexões para descrever tais condições limites. Este conjunto de modelos integráveis finitos podem ser construídos através de duas matrizes de reflexões $K^{\pm}(u)$ além de suas matrizes $R(u)$: As matrizes $K^{-}(u)$ e $K^{+}(u)$ descrevem a interação dos sítios nas extremidades: à esquerda e à direita, respectivamente, e satisfazem a duas equações conhecidas como equações de reflexões à direita e à esquerda.

O estudo de cadeias abertas integráveis segundo o Método do Espalhamento Inverso Quântico foi proposto por Sklyanin [14], usando resultados prévios de Cherednik [15]. Sklyanin estendeu o tratamento dado pelo Método do Espalhamento Inverso Quântico para cadeias abertas, e exemplificou o tratamento resolvendo o modelo de 6-vértices, ou seja, uma cadeia quântica de $spin=1/2$ (XXZ) com termos de fronteiras para matrizes

de reflexões $K^i(u)$ e $K^+(u)$ diagonais. Este mesmo problema já tinha sido resolvido por Alcaraz et al [16] usando o ansatz de Bethe de coordenadas.

Neste trabalho nós consideramos o ansatz de Bethe de coordenadas para resolvermos os modelos trigonométricos de três estados (modelos de 19-vértices) com termos de fronteiras diagonais. Estes modelos são bem conhecidos na literatura, e são: o modelo Zamolodchikov-Fateev (ZF) ou modelo $A_1^{(1)}$ [17], o modelo Izergin Korepin (IK) ou modelo $A_2^{(2)}$ [18], os modelos graduados Z_2 , que são os modelos $sl(2|1)$ [19], e o modelo $osp(1|2)$ [20].

Dentro da abordagem do ansatz de Bethe de coordenadas propomos uma parametrização para as funções de onda. Para os modelos de 19-vértices a parametrização proposta em [21], torna o problema simples como um modelo de dois estados [2]. Com esta parametrização podemos unificar o tratamento dado aos quatro modelos de 19-vértices devido a existência de uma estrutura semelhante entre eles.

Para os modelos de 19-vértices soluções com matrizes de reflexões diagonais foram encontradas para alguns modelos usando o ansatz de Bethe algébrico [22, 23], e o analítico [24, 25]. Para o ansatz de Bethe de coordenadas o trabalho apresentado nesta tese é o único conhecido na literatura [26]. Este trabalho trata-se de uma generalização não-trivial de [16], onde não só apresentamos uma generalização para o ansatz de Bethe de coordenadas para as cadeias quânticas abertas de spin-1 com termos de fronteiras diagonais, como apresentamos as soluções para todos os modelos 19-vértices, ou seja, reproduzimos os resultados já conhecidos para os modelos Zamolodchikov-Fateev [22] e Izergin-Korepin [24, 23], como também, apresentamos novos resultados para os modelos supersimétricos $sl(2|1)$ e $osp(1|2)$:

Dividiremos este trabalho na seguinte forma: No capítulo 2 nós apresentaremos um resumo da integrabilidade para cadeias quânticas com condições periódicas de contorno, apresentaremos as matrizes R associadas a cada modelo de 19-vértices, bem como, suas Hamiltonianas. Seguiremos, no capítulo 3; generalizando este tratamento para o caso de cadeias abertas, mostraremos as soluções diagonais para as equações de reflexões, e cal-

cularemos os termos de fronteiras das Hamiltonianas. O ansatz de Bethe de coordenadas para uma cadeia quântica de spin-1 com condições periódicas de contorno é apresentado no capítulo 4. No capítulo 5, apresentaremos a nossa generalização do ansatz de Bethe para cadeias quânticas de spin-1 com termos de fronteiras diagonais. No capítulo seguinte, explicitaremos para cada um dos modelos de 19-vértices as soluções encontradas para o ansatz de Bethe com termos de superfície, reproduzindo os resultados já conhecidos para os modelos Zamolodchikov-Fateev e Izergin- Korepin, e mostrando novos resultados para os modelos supersimétricos $sl(2j_1)$ e $osp(1j_2)$. Neste mesmo capítulo, mostraremos a relação entre os modelos ZF e $sl(2j_1)$; e os modelos IK e $osp(1j_2)$. E terminamos este trabalho com a conclusão e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Equação de Yang-Baxter

2.1 Integrabilidade

Na mecânica clássica o conceito de integrabilidade está muito bem definido. Um sistema Hamiltoniano de dimensão finita é considerado como integrável se possui um conjunto de integrais de movimento independentes comutando:

$$f(I_j; I_k) = 0 \quad (2.1)$$

onde o número total de integrais de movimento é metade da dimensão do espaço de fase.

Na mecânica quântica, a definição de integrabilidade é bem mais difícil. A princípio, podemos tentar estender o teorema de Liouville para o domínio quântico, ou seja, pela existência de N operadores constantes (equivalente aos graus de liberdade do sistema) que comutam entre si:

$$[I_j; I_k] = 0 \quad (2.2)$$

Contudo, esta idéia não pode ser desenvolvida com o devido rigor, principalmente

pela dificuldade de estabelecermos corretamente a independência funcional das integrais de movimento. Assim, não temos até o momento uma boa definição do que representa integrabilidade do ponto de vista da mecânica quântica.

De um ponto de vista prático, aceitamos que um sistema quântico é integrável se conseguirmos calcular exatamente algumas quantidades de interesse físico tais como: espectro das integrais de movimento e algumas funções de correlações.

A integrabilidade, segundo o Método do Espalhamento Inverso Quântico, é estabelecida através da relação de comutação entre as matrizes de transferência para parâmetros espectrais diferentes, ou seja:

$$[L(u); L(v)] = 0 \quad (2.3)$$

Todas as cargas conservadas surgem da comutação dos coeficientes da expansão no parâmetro espectral (u) da matriz de transferência. Isto gera infinitas quantidades conservadas que nos leva a denotar o sistema quântico como integrável.

2.2 Equação de Yang-Baxter

Os estudos da integrabilidade dos modelos estatísticos clássicos em duas dimensões (modelos de vértices) e das cadeias quânticas de spin em uma dimensão estão vinculados às matrizes R . A matriz R é função de um parâmetro complexo u que é conhecido como parâmetro espectral. $R(u)$ pode ser interpretado como a matriz de espalhamento de duas partículas, em teoria quântica de campos, ou os elementos de $R(u)$ são associados aos pesos de Boltzmann dos modelos de vértices, em mecânica estatística. Quando $R(u)$ satisfaz a equação conhecida como equação de Yang-Baxter este modelo é considerado como um modelo exatamente integrável.

A ação de $R(u)$ é estabelecida pelo produto tensorial de dois espaços vetoriais $V^1 - V^2$,

onde $R(u)$ deve satisfazer a equação de Yang-Baxter

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u); \quad (2.4)$$

em $V^1 - V^2 - V^3$, onde $R_{12} = R - 1$, $R_{23} = 1 - R$, etc.

A equação de Yang-Baxter é uma condição suficiente para garantirmos a integrabilidade de um modelo. Não somente para estudarmos a integrabilidade, mas a matriz $R(u)$ também é o principal ingrediente do ansatz de Bethe algébrico [27].

O Método do Espalhamento Inverso Quântico (QISM) tem por regra central a equação

$$\mathfrak{R}(u|v) [T(u) - T(v)] = [T(v) - T(u)] \mathfrak{R}(u|v) \quad (2.5)$$

onde a matriz \mathfrak{R} é obtida a partir da matriz R ($\mathfrak{R} = PR$), e P é o operador permutação entre dois espaços $V^1 - V^2$; com $P(j^{\otimes i} - j^{-i}) = j^{-i} - j^{\otimes i}$ para $j^{\otimes i}; j^{-i} \in V$. $T(u)$ é a matriz de monodromia escrita num espaço auxiliar V^A . Os elementos da matriz de monodromia são operadores que atuam nos espaços quânticos. Estes operadores obedecem a álgebra estabelecida pela equação (2.5), e são alguns destes elementos que desempenham o papel de operadores de criação e aniquilação que vão atuar num escolhido estado de referência.

A matriz de monodromia é definida como um produto de operadores que atuam nos espaços quânticos locais. Estes operadores são conhecidos como operadores de Lax (L). Os operadores de Lax são soluções da equação

$$\mathfrak{R}(u|v) [L(u) - L(v)] = [L(v) - L(u)] \mathfrak{R}(u|v): \quad (2.6)$$

E uma das soluções possíveis para L é $L_{ab} = R_{ab}$. Assim, a matriz de monodromia é

$$T(u) = R_{AN}(u) \cdots R_{A2}(u) R_{A1}(u) \quad (2.7)$$

onde o espaço V^A é o espaço auxiliar em que escrevemos a matriz de monodromia, e $V^1; V^2; \dots$ e V^N são os espaços quânticos.

A matriz de transferência é definida como

$$t(u) = \text{Tr}:T(u) \quad (2.8)$$

onde o traço é feito no espaço V^A .

Com a definição acima é possível mostrar que

$$[t(u); t(v)] = 0 \quad (2.9)$$

o que nos garante infinitas quantidades conservadas.

2.3 Propriedades da Matriz $R(u)$

As matrizes $R(u)$ foram bastante estudadas e classificadas [20, 28, 29], e podem ter várias propriedades importantes. Algumas destas propriedades são:

² Regularidade

$$R_{12}(u = 0) = f^{1=2}(0)P_{12} \quad (2.10)$$

onde P_{12} é o operador permutação que atua no espaço $V^1 - V^2$: Fisicamente podemos dizer que nenhum espalhamento ocorre se os pseudomomentuns das partículas são iguais, pois o parâmetro espectral u pode ser interpretado como os pseudomomentuns das partículas. Em outras palavras, as trajetórias são paralelas.

² unitaridade

$$R_{12}(u)R_{12}^{t_1 t_2}(i u) = f(u); \quad (2.11)$$

com t_i denotando a transposição no espaço i . $f(u)$ é uma função do parâmetro espectral. Na prática, podemos sempre normalizar $R(u)$:

2 Simetria PT

Podemos encontrar matrizes $R(u)$ que possuem separadamente a simetria P (de permutação) e T (reversão temporal), assim devem ser válidas as seguintes relações

$$P_{12}R_{12}(u)P_{12} = R_{12}(u) \quad \text{e} \quad R_{12}^{t_1 t_2}(u) = R_{12}(u); \quad (2.12)$$

respectivamente. Mas existem matrizes que possuem somente simultaneamente estas simetrias. Estas matrizes satisfazem a relação

$$P_{12}R_{12}(u)P_{12} = R_{21}^{t_1 t_2}(u); \quad (2.13)$$

2 Simetria de Crossing

$$R_{12}(u) = U_1 R_{12}^{t_2}(i u_i^{-1/2}) U_1^{-1} \quad (2.14)$$

onde $1/2$ é o parâmetro de crossing, e U determina a matriz de crossing

$$M = U^t U = M^t; \quad (2.15)$$

e $U_1 = U - 1$:

Nós podemos com o uso da propriedade de unitariedade e da simetria de crossing escrevermos a relação

$$M_1 R_{12}^{t_2}(i, u, j, \frac{1}{2}) M_1^{-1} R_{12}^{t_1}(u, j, \frac{1}{2}) = f(u): \quad (2.16)$$

Ela é conhecida como relação de crossing-unitariedade.

2.4 Modelos Graduados

No conjunto dos modelos de 19-vértices estão incluídos os modelos supersimétricos $sl(2|1)$ e o modelo $osp(1|2)$: Para estudar esses modelos tornou-se necessário a introdução de uma graduação no espaço V .

A generalização que vamos apresentar é válida para quaisquer modelos supersimétricos com graduação Z_2 .

Consideremos $V = V_0 \oplus V_1$ um espaço vetorial com graduação Z_2 ; onde 0 e 1 denotam as partes pares e ímpares respectivamente. A regra de multiplicação para o produto tensorial graduado difere da regra ordinária por adição de um sinal. Como resultado os elementos de matriz de um produto tensorial entre dois operadores tem a forma

$$(A \otimes B)_{\otimes}^{\circ \pm} = (i)^{p(-)(p(\otimes)+p(\circ))} A_{\otimes} \otimes B_{\pm}: \quad (2.17)$$

A ação do operador permutação graduado P sobre o vetor $j \otimes i \in V \otimes V$ é definido por

$$P(j \otimes i) = (i)^{p(\otimes)p(-)} j \otimes i = (P)_{\otimes}^{\circ \pm} = (i)^{p(\otimes)p(-)} \otimes_{\pm \otimes \pm} \pm \circ: \quad (2.18)$$

A transposição graduada (st) e o traço graduado (str) são definidos por

$$i A_{\otimes}^{st \circ} = (i)^{(p(\otimes)+1)p(-)} A_{\otimes}; \quad \text{str} A = \sum_{\otimes} (i)^{p(\otimes)} A_{\otimes}: \quad (2.19)$$

onde $p^{(j)} = 1$ (0) se j é ímpar (par).

A versão graduada da equação de Yang-Baxter é dada por (2.4), somente substituímos o produto tensorial convencional pelo produto tensorial graduado.

2.5 Matrizes R - Modelos 19-vértices

Os modelos de três estados conhecidos como modelos de 19-vértices possuem uma forma comum para suas matrizes R. Este fato nos auxiliará na hora de resolvermos os modelos, pois com uma única abordagem podemos resolver os quatro modelos, e posteriormente, estudarmos cada um separadamente. A forma comum de R é

$$R(u) = \begin{array}{c|cc|cc|c} \text{0} & & & & & \text{1} \\ \hline & x_1 & & & & \\ \hline & x_2 & & x_5 & & \\ & & x_3 & & x_6 & \\ & & & & & x_7 \\ \hline & y_5 & & x_2 & & \\ & & y_6 & & x_4 & \\ & & & & & x_6 \\ & & & & x_2 & \\ & & & & & x_5 \\ \hline & & y_7 & & y_6 & \\ & & & & & x_3 \\ & & & & y_5 & \\ & & & & & x_2 \\ & & & & & \\ & & & & & x_1 \\ \hline \text{1} & & & & & \end{array} \quad (2.20)$$

Os elementos de $R(u)$ dependerão das soluções para cada modelo. Vamos especificar cada um deles:

2.5.1 Modelo Zamolodchikov-Fateev (ZF)

Este modelo é conhecido também por modelo A_1^1 , pois está associado a álgebra A_1^1 [17]: Para a representação fundamental desta álgebra os elementos de $R(u)$ são

$$\begin{aligned} x_1(u) &= \sinh(u + \eta) \sinh(u + 2\eta); & x_2(u) &= \sinh u \sinh(u + \eta); \\ x_3(u) &= \sinh u \sinh(u - \eta); & x_4(u) &= \sinh u \sinh(u + \eta) + \sinh \eta \sinh 2\eta; \\ y_5(u) &= x_5(u) = \sinh(u + \eta) \sinh 2\eta; & y_6(u) &= x_6(u) = \sinh u \sinh 2\eta; \\ y_7(u) &= x_7(u) = \sinh \eta \sinh 2\eta; \end{aligned} \quad (2.21)$$

Esta matriz $R(u)$ é regular, unitária, com $f(u) = x_1(u)x_1(-u)$, e possui simetria P e T , e simetria de crossing com

$$M = \begin{matrix} & \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}; \quad (2.22)$$

e $\frac{1}{2} = \eta$:

Este modelo é considerado uma generalização do modelo de Heisenberg ferromagnético (XXZ) para $\text{spin-}1=2$, e pode ser obtido por fusão de dois modelos de 6-vértices [36]. Ele é considerado o mais simples dos modelos de 19-vértices.

2.5.2 Modelo Izergin-Korepin (IK)

Ele foi apresentado originalmente por Izergin e Korepin em 1981 [18], e possui uma álgebra A_2^2 . Este modelo é uma generalização quântica do modelo Shabat-Mikhailov.

A solução da equação de Yang-Baxter (2.4) que corresponde a representação funda-

matriz A_2^2 tem seus elementos dados por

$$\begin{aligned}
 x_1(u) &= \sinh(u + \eta) + \sinh \eta; & x_2(u) &= \sinh(u + 3\eta) + \sinh 3\eta; \\
 x_3(u) &= \sinh(u + \eta) + \sinh \eta; & x_4(u) &= \sinh(u + 3\eta) + \sinh 5\eta + \sinh 3\eta + \sinh \eta; \\
 x_5(u) &= -i 2e^{i(u+2\eta)} \sinh 2\eta \cosh\left(\frac{u}{2} + 3\eta\right); & y_5(u) &= -i 2e^{u+2\eta} \sinh 2\eta \cosh\left(\frac{u}{2} + 3\eta\right) \\
 x_6(u) &= 2e^{i(u+2\eta)} \sinh 2\eta \sinh\left(\frac{u}{2}\right); & y_6(u) &= -i 2e^{u+2\eta} \sinh 2\eta \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \\
 x_7(u) &= -i 2e^{i(u+2\eta)} \sinh \eta \sinh 2\eta + e^{i\eta} \sinh 4\eta; \\
 y_7(u) &= 2e^{u+2\eta} \sinh \eta \sinh 2\eta + e^\eta \sinh 4\eta;
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Esta matriz $R(u)$ é regular, e unitária, onde $f(u)$ vale $x_1(u)x_1(i - u)$. Ela tem simetria PT, e simetria de crossing, com $\frac{1}{2} = i - \eta + i\eta$; e sua matriz de crossing é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{2\eta} & 1 \\ 1 & e^{i2\eta} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

2.5.3 Modelo $sl(2|1)$

O modelo $sl(2|1)$ é um dos modelos de 19-vértices supersimétrico. Os elementos de $R(u)$ foram obtidos por Kulish e Sklyanin em 1982 [19]. Os elementos de $R(u)$ para a representação fundamental $sl(2|1)$ são

$$\begin{aligned}
 x_1(u) &= \cosh(u + \eta) \sinh(u + 2\eta); & x_2(u) &= \sinh u \cosh(u + \eta); \\
 x_3(u) &= \sinh u \cosh(u + \eta); & x_4(u) &= \sinh u \cosh(u + \eta) + \sinh 2\eta \cosh \eta; \\
 y_5(u) &= x_5(u) = \sinh 2\eta \cosh(u + \eta); & y_6(u) &= x_6(u) = \sinh 2\eta \sinh u; \\
 y_7(u) &= x_7(u) = \sinh 2\eta \cosh \eta;
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Esta matriz $R(u)$ é regular, e unitária, com simetria P e T e de crossing, com $f(u) = x_1(u)x_1(j-u); \frac{1}{2} = \hat{\cdot}; e$

$$M = \begin{matrix} & \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (2.26)$$

Destacamos que a relação de crossing-unitaridade (2.16), para modelos com graduação é escrita como

$$M_1 R_{12}^{t_2}(j-u; \frac{1}{2}) M_1^{-1} R_{12}^{t_1}(u; j-\frac{1}{2}) = f^0(u): \quad (2.27)$$

com $f^0(u) = x_1(u + i\frac{1}{2})x_1(j-u - i\frac{1}{2})$:

2.5.4 Modelo osp(1|2)

O modelo osp(1|2) é um outro modelo supersimétrico: Ele foi classificado por Bazhanov e Shadrnikov, em 1989 [20]. Os elementos de $R(u)$ são dados por

$$\begin{aligned} x_1(u) &= \sinh(u + 2\hat{\cdot}) \sinh(u + 3\hat{\cdot}); & x_2(u) &= \sinh u \sinh(u + 3\hat{\cdot}) \\ x_3(u) &= \sinh u \sinh(u + \hat{\cdot}); & x_4(u) &= \sinh u \sinh(u + 3\hat{\cdot}) - \sinh 2\hat{\cdot} \sinh 3\hat{\cdot} \\ x_5(u) &= e^{i u} \sinh 2\hat{\cdot} \sinh(u + 3\hat{\cdot}); & y_5(u) &= e^u \sinh 2\hat{\cdot} \sinh(u + 3\hat{\cdot}) \\ x_6(u) &= -i e^{i u} \sinh 2\hat{\cdot} \sinh u; & y_6(u) &= e^{u+2\hat{\cdot}} \sinh 2\hat{\cdot} \sinh u \\ x_7(u) &= e^{i u} \sinh 2\hat{\cdot} \sinh(u + 3\hat{\cdot}) + e^{i \hat{\cdot}} \sinh u \\ y_7(u) &= e^u \sinh 2\hat{\cdot} (\sinh(u + 3\hat{\cdot}) + e^{\hat{\cdot}} \sinh u) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Semelhante ao modelo Izergin-Korepin, a matriz $R(u)$ do modelo $osp(1|2)$ é regular, unitária, tem simetria PT , e de crossing, com $f(u) = x_1(u)x_1(1/u)$, $h = 3/2$; e

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{2\eta} & 1 \\ 1 & e^{i2\eta} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Nesta secção, apresentamos os elementos da matriz $R(u)$ para cada um dos modelos de 19-vértices. Todas estas matrizes $R(u)$ são regulares, unitárias, e tem simetria de crossing. Os modelos ZF e $sl(2|1)$ têm simetria P e T , e os modelos IK e $osp(1|2)$ têm simetria PT .

2.6 Hamiltonianos

A conexão entre os modelos estatísticos clássicos bidimensionais e as cadeias quânticas em uma dimensão é observada quando geramos as Hamiltonianas associados a uma dada matriz $R(u)$: A primeira observação foi feita por R. Baxter [2] onde ele mostrou o vínculo entre uma cadeia XYZ e o modelo de 8-vértices.

Dada uma matriz $R(u)$ regular de um dado modelo de vértices, com o operador de Lax dado por $L_{ab} = R_{ab}(u)$, o Hamiltoniano pode ser calculado por

$$H = \frac{d \ln t(u)}{du} \Big|_{u=0} = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k;k+1} + H_{b;t} \quad (2.30)$$

que para o caso de considerarmos condições periódicas de contorno, temos $H_{b;t} = H_{N;1}$, mas em outros casos que serão tratados no próximo capítulo, $H_{b;t}$ descreve a interação na superfície. $H_{k;k+1}$ é obtido por

$$H_{k;k+1} = \frac{d}{du} \ln \text{tr} R_{k;k+1}(u) \Big|_{u=0} \quad (2.31)$$

Lembramos que $H_{k;k+1}$ age no espaço quântico dos sítios k e $k + 1$.

Para os modelos de 19-vértices, da mesma maneira em que escrevemos $R(u)$ de uma forma geral, podemos escrever $H_{k;k+1}$. O Hamiltoniano local é escrito por

$$H_{k;k+1} = \begin{array}{c} \text{O} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & & \\ \hline \bar{z}_5 & 1 & \\ \hline \bar{z}_7 & \bar{z}_6 & z_3 \\ \hline 1 & z_5 & \\ \hline {}^2\bar{z}_6 & {}^2z_4 & {}^2z_6 \\ \hline & & \bar{z}_5 & 1 \\ \hline z_3 & z_6 & z_7 & \\ \hline & & 1 & z_5 \\ \hline & & & z_1 \\ \hline \end{array} \\ \text{A} \end{array}; \quad (2.32)$$

$H_{k;k+1}$ está escrito na base em que S_k^z é apresentado na forma diagonal, ou seja: $j > k > j - 1$; $0 > k > j - 1$; $j > k > j - 1$, com seus respectivos autovalores $+1$, 0 , e -1 ; e k indicando o sítio.

Na forma de operadores usuais de spin-1; nós podemos escrever $H_{k;k+1}$ como

$$\begin{aligned} H_{k;k+1} = & {}^2z_4 + \frac{1}{2}(\bar{z}_5 i z_5)[S_k^z i S_{k+1}^z] + \frac{1}{2}(z_5 + \bar{z}_5 i {}^2z_4)[(S_k^z)^2 + (S_{k+1}^z)^2] \\ & + \frac{1}{4}(2z_1 i z_7 i \bar{z}_7)S_k^z S_{k+1}^z + \frac{1}{4}(2z_1 + z_7 + \bar{z}_7 + {}^4z_4 i 4z_5 i 4\bar{z}_5)(S_k^z S_{k+1}^z)^2 \\ & + \frac{1}{4}(z_7 i \bar{z}_7 i 2z_5 + 2\bar{z}_5)[(S_k^z)^2 S_{k+1}^z i S_k^z (S_{k+1}^z)^2] \\ & + \frac{1}{4}{}^2z_3[(S_k^+ S_{k+1}^i)^2 + (S_k^i S_{k+1}^+)^2] \\ & i \frac{1}{2}[(z_6 S_k^+ S_{k+1}^i + \bar{z}_6 S_k^i S_{k+1}^+)S_k^z S_{k+1}^z + S_k^z S_{k+1}^z (\bar{z}_6 S_k^+ S_{k+1}^i + z_6 S_k^i S_{k+1}^+)] \\ & + \frac{1}{2}[S_k^+ S_k^z S_{k+1}^z S_{k+1}^i + S_k^i S_k^z S_{k+1}^z S_{k+1}^+ + S_k^z S_k^+ S_{k+1}^i S_{k+1}^z + S_k^z S_k^i S_{k+1}^+ S_{k+1}^z]: \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aqui 2 pode valer $\S 1$; assim incluímos os modelos graduados BFB, que são os modelos

$sl(2|1)$ e $osp(1|2)$, para estes casos $z^2 = j \cdot 1$, e para os modelos não-graduados ZF e IK, $z^2 = 1$. Os operadores S^z , S^+ e S^- , são dados por

$$S^z = \begin{matrix} \text{O} & & \text{1} \\ \text{1} & 0 & 0 \\ \text{0} & 0 & 0 \\ \text{0} & 0 & j \cdot 1 \end{matrix} \begin{matrix} \text{C} \\ \text{C} \\ \text{A} \end{matrix}; \quad S^+ = \frac{p_-}{2} \begin{matrix} \text{O} & & \text{1} \\ \text{0} & 1 & 0 \\ \text{0} & 0 & 1 \\ \text{0} & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \text{C} \\ \text{C} \\ \text{A} \end{matrix}; \quad S^- = \frac{p_-}{2} \begin{matrix} \text{O} & & \text{1} \\ \text{0} & 0 & 0 \\ \text{1} & 0 & 0 \\ \text{0} & 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \text{C} \\ \text{C} \\ \text{A} \end{matrix}; \quad (2.34)$$

Agora, usando (2.31) apresentaremos os elementos de $H_{k;k+1}$ para cada um dos modelos. Estes elementos são:

² Para o modelo ZF:

$$\begin{aligned} z^2 &= 1; \quad \text{R} = \sinh 2\zeta; \quad z_1 = 0; \quad z_3 = j \cdot 1; \quad z_4 = j \cdot 2 \cosh 2\zeta; \\ \bar{z}_5 &= z_5 = j \cdot \cosh 2\zeta; \quad \bar{z}_6 = z_6 = 2 \cosh \zeta; \quad \bar{z}_7 = z_7 = j \cdot 1 \cdot j \cdot 2 \cosh 2\zeta; \end{aligned} \quad (2.35)$$

² Para o modelo IK:

$$\begin{aligned} z^2 &= 1; \quad \text{R} = j \cdot 2 \sinh 2\zeta; \quad z_1 = 0; \quad z_3 = \frac{\cosh \zeta}{\cosh 3\zeta}; \quad z_4 = j \cdot 2 \frac{\sinh \zeta \sinh 4\zeta}{\cosh 3\zeta} \\ z_5 &= j \cdot e^{i 2\zeta}; \quad \bar{z}_5 = j \cdot e^{2\zeta}; \quad z_6 = e^{2\zeta} \frac{\sinh 2\zeta}{\cosh 3\zeta}; \quad \bar{z}_6 = j \cdot e^{i 2\zeta} \frac{\sinh 2\zeta}{\cosh 3\zeta} \\ z_7 &= j \cdot \frac{\cosh \zeta}{\cosh 3\zeta} \cdot i \cdot e^{i 4\zeta} + 2 \sinh 2\zeta; \quad \bar{z}_7 = j \cdot \frac{\cosh \zeta}{\cosh 3\zeta} \cdot i \cdot e^{4\zeta} \cdot j \cdot 2 \sinh 2\zeta; \end{aligned} \quad (2.36)$$

² Para o modelo $sl(2|1)$:

$$\begin{aligned} z^2 &= j \cdot 1; \quad \text{R} = \sinh 2\zeta; \quad z_1 = 0; \quad z_3 = 1; \quad z_4 = 2 \cosh 2\zeta; \\ \bar{z}_5 &= z_5 = j \cdot \cosh 2\zeta; \quad \bar{z}_6 = z_6 = 2 \sinh \zeta; \quad \bar{z}_7 = z_7 = 1 \cdot j \cdot 2 \cosh 2\zeta \end{aligned} \quad (2.37)$$

² E, para o modelo osp(1j2):

$$\begin{aligned}
 z^2 &= i; \quad \mathbb{R} = \sinh 2\tau; \quad z_1 = 0; \quad z_3 = \frac{\sinh \tau}{\sinh 3\tau}; \quad z_4 = 2 \frac{\cosh \tau \sinh 4\tau}{\sinh 3\tau} \\
 z_5 &= i e^{2\tau}; \quad \bar{z}_5 = i e^{i 2\tau}; \quad z_6 = i e^{i 2\tau} \frac{\sinh 2\tau}{\sinh 3\tau}; \quad \bar{z}_6 = e^{2\tau} \frac{\sinh 2\tau}{\sinh 3\tau}; \\
 z_7 &= i e^{2\tau} + e^{i \tau} \frac{\sinh 2\tau}{\sinh 3\tau}; \quad \bar{z}_7 = i e^{i 2\tau} + e^{-\tau} \frac{\sinh 2\tau}{\sinh 3\tau}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

A constante \mathbb{R} é um fator de normalização, e será usada no capítulo posterior.

No capítulo 4 nós apresentaremos a solução via ansatz de Bethe de coordenadas para cadeias quânticas de spin-1 com condições periódicas de contorno. Estas soluções podem ser aplicadas para os elementos de H_{kk+1} dos modelos ZF, IK, sl(2j1) e osp(1j2), dados pelas equações (2.35) à (2.38).

Capítulo 3

Equação de Reflexão - Cadeias Abertas

3.1 Introdução

O Método do Espalhamento Inverso Quântico foi desenvolvido originalmente para sistemas com condições periódicas de contorno.

Na direção das soluções de cadeias abertas o ansatz de Bethe de coordenadas foi o primeiro a dar um passo significativo. Alcaraz et al [16] resolveram uma cadeia quântica de spin-1=2 com termos de fronteiras utilizando o ansatz de Bethe de coordenadas. Na época não se tinha informação sobre a integrabilidade para cadeias abertas.

O Método do Espalhamento Inverso Quântico teve a sua contribuição marcada pela generalização feita por Sklyanin em 1988 [14]. Essa generalização tem por base o tratamento dado por Cherednik [15] para a fatoração de matrizes S com reflexões. Sklyanin aplicou sua generalização para resolver a mesma cadeia resolvida por Alcaraz et al.

O formalismo original de Sklyanin exige que as matrizes R tenham simetria P e T . Mezincescu e Nepomechie generalizaram a proposta de Sklyanin para modelos em que as matrizes R possuem simetria PT [30].

Neste capítulo apresentaremos as idéias básicas da generalização de Mezincescu e

Nepomechie, bem como, suas aplicações para os modelos 19-vértices.

3.2 Equação de Reflexão

No formalismo proposto por Sklyanin [14] é considerado que a matriz R satisfaz as propriedades de regularidade, unitaridade, simetria P e T , juntamente com simetria de crossing. Estas exigências são satisfeitas pelos modelos Zamolodchikov-Fateev e o modelo supersimétrico $sl(2|1)$, mas para os modelos Izergin-Korepin e $osp(1|2)$, não temos simetrias P e T , e sim a simetria PT .

Mezincescu e Nepomechie [30] generalizaram a proposta inicial de Sklyanin incluindo o caso em que a matriz R possui simetria PT . Assim, podemos tratar os modelos Izergin-Korepin e $osp(1|2)$ com a proposta de Sklyanin. Destacamos que as principais matrizes R conhecidas na literatura satisfazem a exigência de regularidade, unitaridade e simetrias P e T ou simetria PT , entre estas matrizes R estão as classificadas por Bazhanov [20] e Jimbo [29].

Para garantirmos a integrabilidade de cadeias quânticas abertas se faz suficiente que além da matriz R ser uma solução da equação de Yang-Baxter, que certas matrizes conhecidas como matrizes de reflexões ($K^-(u)$ e $K^+(u)$) satisfaçam:

1) A equação de reflexão (à esquerda)

$$R_{12}(u|v)K_1^-(u)R_{12}^{t_1 t_2}(u+v)K_2^-(v) = K_2^-(v)R_{12}(u+v)K_1^-(u)R_{12}^{t_1 t_2}(u|v); \quad (3.1)$$

2) E a equação de reflexão dual (à direita)

$$\begin{aligned} & R_{12}(i|u+v)(K_1^+)^{t_1}(u)M_1^{-1}R_{12}^{t_1 t_2}(i|u|v|2i)M_1(K_2^+)^{t_2}(v) \\ & = (K_2^+)^{t_2}(v)M_1R_{12}(i|u|v|2i)M_1^{-1}(K_1^+)^{t_1}(u)R_{12}^{t_1 t_2}(i|u+v); \end{aligned} \quad (3.2)$$

com $K_1 = K - 1$ e $K_2 = 1 - K$:

Dentro da abordagem do Método do Espalhamento Inverso Quântico, nós definimos o operador de Lax a partir da matriz R , como no capítulo anterior $L_{Aq}(u) = R_{Aq}(u)$, onde A representa o espaço auxiliar e q representa um espaço quântico. A matriz de monodromia row-to-row $T(u)$ é definida como um produto de N operadores de Lax sobre todos os sítios da rede,

$$T(u) = L_{AN}(u)L_{AN-1}(u)\dots L_{A1}(u): \quad (3.3)$$

Podemos definir a matriz de monodromia double-row como

$$U(u) = T(u)K^-(u)T^{-1}(u): \quad (3.4)$$

Com $U(u)$ satisfazendo a seguinte equação

$$R_{12}(u_j - v)U_1(u)R_{21}(u + v)U_2(u) = U_2(u)R_{12}(u + v)U_1(u)R_{21}(u_j - v): \quad (3.5)$$

Esta equação é que estabelece a álgebra para os elementos de $U(u)$. Alguns dos elementos de $U(u)$ desempenharam o papel de operadores de criação e aniquilação agindo sob um escolhido estado de referência.

A matriz de transferência é definida por

$$t(u) = \text{Tr}_a \left[K^+(u)T(u)K^-(u)T^{-1}(u) \right]; \quad (3.6)$$

Com a definição acima para a matriz de transferência juntamente com a condição que R seja unitária, e satisfaça a relação de crossing-unitaridade, e as matrizes $K^-(u)$ e $K^+(u)$ sejam soluções das equações de reflexão (3.1) e (3.2), podemos provar que

$$[t(u); t(v)] = 0; \quad \forall u, v \quad (3.7)$$

semelhante ao caso de condições periódicas de contorno, nos assegura a integrabilidade para cadeias abertas com matrizes de reflexão que são soluções para as equações de reflexão.

3.3 Equação de Reflexão Graduada

Para estudarmos os modelos com graduação Z_2 em cadeias quânticas abertas temos que usar as definições apresentadas na secção 2.3. Na equação de reflexão (3.1) devemos substituir o produto tensorial convencional pelo definido na equação (2.17). Para a equação de reflexão dual, além da substituição do produto tensorial, devemos observar que sua forma depende em geral das relações de unitaridade e de crossing-unitaridade para a matriz R e estas relações são diferentes para modelos graduados e não-graduados. Para os modelos graduados nós escrevemos a equação de reflexão dual na seguinte forma [31]:

$$\begin{aligned} & R_{21}^{st_1st_2}(j|u+v)(K_1^+)^{st_1}(u)M_j^{-1}R_{12}^{st_1st_2}(j|u|v|j-2\frac{1}{2})M_1(K_2^+)^{st_2}(v) \\ &= (K_2^+)^{st_2}(v)M_1R_{12}^{st_1st_2}(j|u|v|j-2\frac{1}{2})M_j^{-1}(K_1^+)^{st_1}(u)R_{21}^{st_1st_2}(j|u+v); \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde temos considerado : $p(1) = p(3) = 0$ and $p(2) = 1$, uma graduação BFB (Bóson-Férmion-Bóson).

E são observadas as seguintes relações para as matrizes R e K^+ :

$$R_{12}^{st_1st_2}(u) = I_1R_{21}(u)I_1; \quad R_{21}^{st_1st_2}(u) = I_1R_{12}(u)I_1 \quad \text{and} \quad IK^+(u)I = K^+(u) \quad (3.9)$$

com

$$I = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3.10)$$

e,

$$[M_1 M_2; R(u)] = 0; \quad (3.11)$$

Estas relações serão usadas posteriormente.

3.4 Matrizes K^i e K^+

A partir do formalismo de Sklyanin ...ca aberta a pergunta: dada uma matriz R associada a um conhecido modelo que satisfaz uma representação fundamental algébrica, quais são as matrizes de reflexões K^i e K^+ que garantem a integrabilidade segundo o Método do Espalhamento Inverso Quântico?

Vários modelos vêm sendo estudados, e em sua grande maioria para soluções diagonais de K^i e K^+ :

As matrizes de reflexões K^i e K^+ são obtidas como soluções das equações de reflexões (reflexão e reflexão dual, ou reflexão à direita e à esquerda) para uma determinada R : Para os modelos de nosso interesse (modelos de 19-vértices) é observado um isomorfismo entre K^i e K^+

$$K^i(u) :! K^+(u) = K^i(j u_j \frac{1}{2})^t M; \quad (3.12)$$

ou seja, a partir de uma solução da equação de reflexão (K^i), podemos encontrar uma solução para a equação de reflexão dual (K^+), conforme (3.12). No caso dos modelos supersimétricos, graduação BFB, as propriedades (3.9) e (3.11) são importantes para

observarmos o isomorfismo.

Neste trabalho nos resolvemos todos os modelos de três estados para o caso de matrizes de reflexões diagonais. Para o caso de matrizes de reflexões não-diagonais, mesmo para modelos de dois estados (spin-1=2) é um problema ainda em aberto.

As matrizes K^i , em sua forma diagonal, podem ser escritas como

$$K^i = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ k_{11} & 0 & 0 & \\ 0 & k_{22} & 0 & \\ 0 & 0 & k_{33} & \end{pmatrix} :$$

Seguiremos apresentando as soluções diagonais K^i e K^+ para cada modelo de 19-vértices.

3.4.1 Modelo Zamolodchikov-Fateev

A solução mais geral das equações de reflexões (3.1) e (3.2) para a matriz $R(u)$ do modelo ZF, foi obtida na referência [22], e é

$$K^i(u; \tau_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ k_{11}^i(u) & & & \\ & 1 & & \\ & & & k_{33}^i(u) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

com

$$\begin{aligned} k_{11}^i(u) &= i \frac{\tau_{11} \sinh u + 2 \cosh u}{\tau_{11} \sinh u - 2 \cosh u} \\ k_{33}^i(u) &= i \frac{\tau_{11} \sinh(u + \tau) - 2 \cosh(u + \tau)}{\tau_{11} \sinh(u - \tau) + 2 \cosh(u - \tau)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

note que K^i depende de um parâmetro livre α_{11} . Usando o isomorfismo 3.12, a solução para $K^+(u)$ é dada por $K^i(u; \alpha_{11})$

$$K^+(u; \alpha_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & k_{11}^+(u) & & \\ & & 1 & \\ & & & k_{33}^+(u) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

com

$$\begin{aligned} k_{11}^+(u) &= i \frac{\alpha_{11} \sinh(u + \gamma) + 2 \cosh(u + \gamma)}{\alpha_{11} \sinh(u + \gamma) + 2 \cosh(u + \gamma)} \\ k_{33}^+(u) &= i \frac{\alpha_{11} \sinh u + 2 \cosh u}{\alpha_{11} \sinh(u + 2\gamma) + 2 \cosh(u + 2\gamma)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde α_{11} é outro parâmetro livre.

3.4.2 Modelo Izergin-Korepin

As soluções para a equação de reflexão e reflexão dual para o modelo Izergin-Korepin foram obtidas por Mezincescu e Nepomechie em [32]. Eles encontraram três soluções. A primeira é a solução trivial

$$K^i(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

e conseqüentemente, pelo isomorfismo (3.12)

$$K^+(u) = K^i(u; \alpha_{11})M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & e^{2\gamma} & & \\ & & 1 & \\ & & & e^{i 2\gamma} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

As outras duas soluções podem ser escritas como $K^+(u) = F^+$ e $K^-(u) = F^-$, com

$$F^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{i u f^{(\pm)}(u)} & 1 \\ 1 & e^{i u f^{(\pm)}(u)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.19)$$

onde nós definimos

$$f^{(\pm)}(u) = \frac{\cosh(u \mp i \frac{3}{2}) \pm i \sinh(u \mp i \frac{3}{2})}{\cosh(u \mp i \frac{3}{2}) \mp i \sinh(u \mp i \frac{3}{2})}; \quad (3.20)$$

Pelo isomorfismo (3.12), podemos encontrar as outras soluções para $K^+(u)$; que podem ser escrita na forma de $K^+(u) = G^+$ e $K^-(u) = G^-$, com

$$G^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{i u g^{(\pm)}(u)} & 1 \\ 1 & e^{i u g^{(\pm)}(u)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.21)$$

onde

$$g^{(\pm)}(u) = \frac{\cosh(u \mp i \frac{3}{2}) \pm i \sinh(u \mp i \frac{3}{2})}{\cosh(u \mp i \frac{3}{2}) \mp i \sinh(u \mp i \frac{3}{2})}; \quad (3.22)$$

O modelo Izergin-Korepin também pode ser estudado através de um mapeamento nos pesos de Boltzmann. Esta nova matriz $R(u)$ pode ser obtida pela transformação

$$R(u; \eta) = R^0(u; \eta) = \frac{1}{2i} R(2u; \eta; i \frac{1}{2}); \quad (3.23)$$

Esta matriz R^0 difere da forma apresentada por Martins em [33] por uma transformação de Gauge

$$R_{12}^{00}(u) = V_1 R_{12}^0(u) V_1^{-1}; \quad (3.24)$$

com

$$V = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ e^{i u} & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & e^u & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ A \end{matrix} \quad (3.25)$$

A matriz obtida por Martins é oriunda de uma transformação no modelo osp(1j2):

A matriz R^0 é regular, e unitária, com $f^0(u) = x_1^0(u)x_1^0(i u)$, tendo simetria PT; e simetria de crossing com

$$M^0 = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ i e^{i 2^{\cdot}} & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & i e^{2^{\cdot}} & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ A \end{matrix} \quad (3.26)$$

e $\frac{1}{2}^0 = 3^{\cdot}$. R^{00} satisfaz as mesmas propriedades com

$$M^{00} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ i e^{i 4^{\cdot}} & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & i e^{4^{\cdot}} & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ A \end{matrix}; \quad (3.27)$$

e, $\frac{1}{2}^{00} = \frac{1}{2}^0$. Para este caso (R^{00}) uma das soluções para a equação de reflexão e reflexão dual (K^i, K^+) são

$$F^{00} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & i \frac{\sinh(u_i \frac{3}{2}^{\cdot})}{\sinh(u + \frac{3}{2}^{\cdot})} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ A \end{matrix}; \quad G^{00} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ e^{4^{\cdot}} & 0 & 0 & \\ 0 & i \frac{\sinh(u + \frac{3}{2}^{\cdot})}{\sinh(u + \frac{3}{2}^{\cdot})} & 0 & \\ 0 & 0 & e^{i 4^{\cdot}} & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ A \end{matrix}; \quad (3.28)$$

Esta solução foi encontrada por Fan [23].

3.4.3 Modelo $sl(2j+1)$:

Para o modelo $sl(2j+1)$ a solução diagonal mais geral foi apresentada em [34], e é dada por

$$K^i(u; \tau_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & k_{11}^i(u) & & \\ & & 1 & \\ & & & k_{33}^i(u) \end{pmatrix}; \quad (3.29)$$

com

$$k_{11}^i(u) = i \frac{\tau_{11} \sinh u + 2 \cosh u}{\tau_{11} \sinh u - 2 \cosh u}; \quad k_{33}^i(u) = \frac{\tau_{11} \cosh(u + \gamma) - 2 \sinh(u + \gamma)}{\tau_{11} \cosh(u - \gamma) + 2 \sinh(u - \gamma)}; \quad (3.30)$$

onde semelhante ao modelo Zamolodchikov-Fateev, τ_{11} é um parâmetro livre. A matriz K^+ ; que é solução da equação de reflexão dual (3.2), pode ser obtida pelo isomorfismo (3.12), com $K^+(u; \tau_{11}) = K^i(u; \tau_{11})$

$$K^+(u; \tau_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & k_{11}^+(u) & & \\ & & 1 & \\ & & & k_{33}^+(u) \end{pmatrix}; \quad (3.31)$$

onde

$$k_{11}^+(u) = \frac{\tau_{11} \cosh(u + \gamma) - 2 \sinh(u + \gamma)}{\tau_{11} \cosh(u + \gamma) + 2 \sinh(u + \gamma)}; \quad k_{33}^+(u) = i \frac{\tau_{11} \sinh u + 2 \cosh u}{\tau_{11} \sinh(u + 2\gamma) - 2 \cosh(u + 2\gamma)}; \quad (3.32)$$

e τ_{11} é um parâmetro livre.

3.4.4 Modelo osp(1 | 2) :

Soluções diagonais para a equação de reflexão para o modelo osp(1 | 2) foram obtidas em [35]. As soluções apresentadas são semelhantes as apresentadas para o modelo Izergin-Korepin, com três soluções sem parâmetros livres. Estas soluções são

$$K^i(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{mm} & 0 \\ \text{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3.33)$$

$$K^i(u) = F^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{mm} & 1 \\ \text{A} & i e^{2uF^{(+)}}(u) \end{pmatrix}; \quad (3.34)$$

e,

$$K^i(u) = F^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{mm} & 1 \\ \text{A} & e^{2uF^{(-)}}(u) \end{pmatrix}; \quad (3.35)$$

onde nós temos de...

$$f^{(+)}(u) = \frac{\sinh(u + 3^{-2})}{\sinh(u - 3^{-2})}; \quad f^{(-)}(u) = \frac{\cosh(u + 3^{-2})}{\cosh(u - 3^{-2})}; \quad (3.36)$$

As soluções para a equação de reflexão dual podem ser obtidas pelo isomor...simo (3.12), e são

$$K^+(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{mm} & 1 \\ \text{A} & e^{2^-} \end{pmatrix}$$

$$K^+(u) = G^+ = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ i e^{2u+4\tau} g^{(+)}(u) & & & \\ & 1 & & \\ & & i e^{2u+4\tau} g^{(+)}(u) & \\ & & & \end{pmatrix}; \quad (3.37)$$

e,

$$K^+(u) = G^i = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ e^{2u+4\tau} g^{(i)}(u) & & & \\ & 1 & & \\ & & e^{2u+4\tau} g^{(i)}(u) & \\ & & & \end{pmatrix}; \quad (3.38)$$

com

$$g^{(+)}(u) = \frac{\sinh(u + 3\tau=2)}{\sinh(u + 9\tau=2)}; \quad g^{(i)}(u) = \frac{\cosh(u + 3\tau=2)}{\cosh(u + 9\tau=2)}; \quad (3.39)$$

Estas são todas as soluções diagonais possíveis das equações de reflexões para os modelos de 19-vértices. Não somente as soluções diagonais como também todas as soluções não-diagonais para os modelos de 19-vértices foram apresentadas em [35].

3.5 Hamiltonianos

Para uma conhecida matriz $R(u)$ que satisfaz as propriedades de regularidade, unitariedade, e possui as simetrias PT e de crossing, podemos utilizar a generalização para o Método do Espalhamento Inverso Quântico para cadeias abertas proposto por Sklyanin [14, 30]. Achadas as matrizes de reflexões $K^i(u)$ e $K^+(u)$ que são soluções para as equações de reflexões (3.1) e (3.2) para a matriz $R(u)$, podemos nos perguntar: Qual a Hamiltoniana associada à cadeia quântica aberta?

O Hamiltoniano é facilmente calculado quando $R(u)$ e $K^i(u)$ satisfazem as condições:

² O operador de Lax coincide com a matriz $R(u)$, $L_n(u) = R_{na}(u)$:

² A matriz $K^i(u)$ é regular, ou seja, $K^i(u=0) = 1$:

Satisfeitas estas condições o Hamiltoniano para a cadeia aberta é escrito por

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k;k+1} + H_{b;t}; \quad (3.40)$$

com $H_{k;k+1}$ dado por

$$H_{k;k+1} = \frac{d}{du} P_{k;k+1} R_{k;k+1}(u) \Big|_{u=0}; \quad (3.41)$$

E

$$H_{b;t} = \frac{1}{2} \frac{dK_1^i(u)}{du} \Big|_{u=0} + \frac{\text{tr}_0 K_0^+(0) H_{N;0}}{\text{tr} K^+(0)}; \quad (3.42)$$

O termo em K_1^i descreve a ação de H no primeiro sítio (à esquerda), e o termo em $K_0^+(0)$, a ação à direita, ou no sítio N (último sítio). H é dado por (3.40), e comuta com a matriz de transferência dada por (3.6).

Para os modelos de 19-vértices a forma de $H_{k;k+1}$ é dada em (2.32), e os seus respectivos elementos para cada modelo são apresentados na mesma secção, equações (2.35) à (2.38).

Para a interação nas fronteiras, tanto o termo à esquerda como o à direita, depende explicitamente da forma das matrizes $K^i(u)$ e $K^+(u)$. Seguiremos apresentando uma forma comum para o cálculo de $H_{b;t}$: para os casos diagonais, mais especificamente para os modelos de três estados (representação fundamental para spin-1).

A interação de superfície no primeiro sítio, à esquerda, pode ser escrita, para o caso diagonal, por

$$\frac{1}{2} \frac{dK^i(u)}{du} \Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & C \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{matrix}; \quad (3.43)$$

com

$$l_{ii} = \frac{1}{2} \textcircled{R} \frac{dk_{ii}^+(u)}{du} \Big|_{u=0}; \quad i = 1; 2; 3; \quad (3.44)$$

onde \textcircled{R} é um fator devido a normalização de H. E a forma para o termo de superfície à direita é escrito como

$$\frac{\text{tr}_0 K_0^+(0) H_{N;0}}{\text{tr} K^+(0)} = \begin{matrix} \textcircled{0} & & \textcircled{1} \\ \textcircled{A} & \begin{matrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{22} \\ \Gamma_{33} \end{matrix} & \textcircled{A} \end{matrix}; \quad (3.45)$$

Para calcularmos $\text{tr}_0 K_0^+(0) H_{N;0}$ nós usaremos a forma de $H_{k;k+1}$ (2.32), ou seja, consideramos $H_{N0} = H_{21}$; e

$$H_{21} = P_{12} H_{12} P_{12} = \begin{matrix} \textcircled{0} & & \textcircled{1} \\ \textcircled{A} & \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{matrix} & \textcircled{A} \end{matrix}; \quad (3.46)$$

onde h_{ij} são matrizes 3 por 3: Usando (3.46), podemos escrever

$$\frac{\text{tr}_0 K_0^+(0) H_{N;0}}{\text{tr} K^+(0)} = \frac{k_{11}^+(0) h_{11} + k_{22}^+(0) h_{22} + k_{33}^+(0) h_{33}}{\text{tr} K^+(0)}; \quad (3.47)$$

com

$$h_{11} = \begin{matrix} \textcircled{0} & & \textcircled{1} \\ \textcircled{A} & \begin{matrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_5 & 0 \\ 0 & 0 & z_7 \end{matrix} & \textcircled{A} \end{matrix}; h_{22} = \begin{matrix} \textcircled{0} & & \textcircled{1} \\ \textcircled{A} & \begin{matrix} z_5 & 0 & 0 \\ 0 & z_4 & 0 \\ 0 & 0 & z_5 \end{matrix} & \textcircled{A} \end{matrix} \text{ e } h_{33} = \begin{matrix} \textcircled{0} & & \textcircled{1} \\ \textcircled{A} & \begin{matrix} z_7 & 0 & 0 \\ 0 & z_5 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 \end{matrix} & \textcircled{A} \end{matrix}; \quad (3.48)$$

O resultado ...nal para o termo de superfície do lado direito é

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{z_1 k_{11}^+(0) + {}^2z_5 k_{22}^+(0) + \bar{z}_7 k_{33}^+(0)}{k_{11}^+(0) + {}^2k_{22}^+(0) + k_{33}^+(0)}; & r_{22} &= \frac{z_5 k_{11}^+(0) + z_4 k_{22}^+(0) + \bar{z}_5 k_{33}^+(0)}{k_{11}^+(0) + {}^2k_{22}^+(0) + k_{33}^+(0)}; \\ r_{33} &= \frac{z_7 k_{11}^+(0) + {}^2z_5 k_{22}^+(0) + z_1 k_{33}^+(0)}{k_{11}^+(0) + {}^2k_{22}^+(0) + k_{33}^+(0)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde os 2 's aparecem no caso de tomarmos o supertraço (str).

A forma mais geral para os termos de fronteiras diagonais $H_{b:t}$, em termos de operadores de spin-1, tem a forma

$$\begin{aligned} H_{b:t} &= \frac{1}{2}(l_{11}^0 \text{ i } l_{33}^0)S_1^z + \frac{1}{2}(l_{11}^0 + l_{33}^0)(S_1^z)^2 + l_{22}1_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(r_{11}^0 \text{ i } r_{33}^0)S_N^z + \frac{1}{2}(r_{11}^0 + r_{33}^0)(S_N^z)^2 + r_{22}1_N; \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde

$$l_{ii}^0 = l_{ii} \text{ i } l_{22}; \quad r_{ii}^0 = r_{ii} \text{ i } r_{22}; \quad i = 1; 2; 3;$$

Seguiremos apresentando os termos de fronteiras para cada modelo.

3.5.1 Modelo Zamolodchikov-Fateev:

Para o modelo ZF, o termo de superfície à esquerda é dado por (3.13) e (3.15)

$$l_{11} = \frac{1}{2} \bar{r}_{11} \sinh 2\zeta; \quad l_{22} = 0; \quad l_{33} = \frac{\bar{r}_{11} \cosh \zeta \text{ i } 2 \sinh \zeta}{r_{11} \sinh \zeta \text{ i } 2 \cosh \zeta} \sinh 2\zeta; \quad (3.51)$$

e, à direita

$$\begin{aligned} r_{11} \text{ i } r_{22} &= \frac{\bar{r}_{11} \cosh \zeta \text{ i } 2 \sinh \zeta}{\bar{r}_{11} \sinh \zeta \text{ i } 2 \cosh \zeta} \sinh 2\zeta; & r_{33} \text{ i } r_{22} &= \frac{1}{2} \bar{r}_{11} \sinh 2\zeta; \\ r_{22} &= \text{ i } \frac{1 \sinh 4\zeta}{4 \sinh 3\zeta} \frac{[\bar{r}_{11} \sinh \zeta + 2 \cosh \zeta]^2 \text{ i } 4[1 + 2 \cosh 2\zeta]}{\bar{r}_{11} \sinh \zeta \text{ i } 2 \cosh \zeta}; \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para as matrizes K^- e K^+ dadas pelas equações .

3.5.2 Modelo Izergin-Korepin:

Para o modelo Izergin-Korepin foram encontradas três soluções para cada uma das equações de reflexões, logo, existem nove possibilidades para o par $(K^-; K^+)$. Nós estudaremos três pares possíveis: $(1; M)$, $(F^-; G^+)$ e $(F^-; G^-)$. F^\pm e G^\pm são apresentados nas equações (3.19) e (3.21).

2 Caso $(1; M)$:

Neste caso, temos $K^-(u) = 1$; e a energia na superfície à esquerda é nula

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = 0: \quad (3.53)$$

O termo à direita é proporcional a identidade

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = i 2 \frac{\cosh 4\zeta \sinh 2\zeta}{\sinh 6\zeta}; \quad (3.54)$$

Assim, o Hamiltoniano para a correspondente cadeia quântica é dado por

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k;k+1} i 2 \frac{\cosh 4\zeta \sinh 2\zeta}{\sinh 6\zeta} 1_N \quad (3.55)$$

2 Caso $(F^-; G^+)$:

Neste caso, os termos de fronteiras à esquerda são

$$I_{11}^{(+)} = \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{3\zeta} - i}{\cosh 3\zeta}; \quad I_{22}^{(+)} = 0; \quad I_{33}^{(+)} = i \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{i 3\zeta} + i}{\cosh 3\zeta} \quad (3.56)$$

e os termos à direita serão dados por

$$\begin{aligned} r_{11}^{(+)} \text{ e } r_{22}^{(+)} &= i \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{i 3\zeta} + i}{\cosh 3\zeta}; \quad r_{33}^{(+)} \text{ e } r_{22}^{(+)} = \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{3\zeta} - i}{\cosh 3\zeta}; \\ r_{22}^{(+)} &= i \frac{\sinh 4\zeta}{\sinh 6\zeta} \frac{\mu \cosh 7\zeta + 4i \sinh 3\zeta \sinh \zeta \sinh 2\zeta}{\cosh 3\zeta + i \sinh 2\zeta}; \end{aligned} \quad (3.57)$$

O Hamiltoniano correspondente pode ser escrito como

$$H^{(+)} = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k;k+1} + \sinh 2\zeta \sum_{i=1}^N S_1^z \text{ e } S_N^z + \frac{\mu \sinh 3\zeta - i}{\cosh 3\zeta} \epsilon (S_1^z)^2 + (S_N^z)^2 + r_{22}^{(+)} 1_N; \quad (3.58)$$

2 Caso (Fⁱ ; Gⁱ):

Este caso é semelhante ao anterior, e seus elementos à esquerda são

$$l_{11}^{(i)} = \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{3\zeta} + i}{\cosh 3\zeta}; \quad l_{22}^{(i)} = 0; \quad l_{33}^{(i)} = i \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{i 3\zeta} - i}{\cosh 3\zeta}; \quad (3.59)$$

E os termos à direita, ou seja, para o sítio N; são

$$\begin{aligned} r_{11}^{(i)} \text{ e } r_{22}^{(i)} &= i \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{i 3\zeta} - i}{\cosh 3\zeta}; \quad r_{33}^{(i)} \text{ e } r_{22}^{(i)} = \sinh 2\zeta \frac{\mu e^{3\zeta} + i}{\cosh 3\zeta}; \\ r_{22}^{(i)} &= i \frac{\sinh 4\zeta}{\sinh 6\zeta} \frac{\mu \cosh 7\zeta - 4i \sinh 3\zeta \sinh \zeta \sinh 2\zeta}{\cosh 3\zeta - i \sinh 2\zeta}; \end{aligned} \quad (3.60)$$

O Hamiltoniano é dado por

$$H^{(i)} = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k;k+1} + \sinh 2\zeta \sum_{i=1}^N S_1^z \text{ e } S_N^z + \frac{\mu \sinh 3\zeta + i}{\cosh 3\zeta} \epsilon (S_1^z)^2 + (S_N^z)^2 + r_{22}^{(i)} 1_N; \quad (3.61)$$

3.5.3 Modelo $sl(2|1)$:

Para o modelo $sl(2|1)$ temos uma solução para a equação de reflexão (3.1), e uma solução para equação de reflexão dual (3.2). De acordo com estas soluções (3.29) e (3.31) o termo à esquerda é

$$l_{11} = \frac{1}{2} \bar{r}_{11} \sinh 2\zeta; \quad l_{22} = 0; \quad l_{33} = \frac{\bar{r}_{11} \sinh \zeta + 2 \cosh \zeta}{\bar{r}_{11} \cosh \zeta + 2 \sinh \zeta} \sinh 2\zeta \quad (3.62)$$

e para o termo à direita, nós temos

$$\begin{aligned} r_{11} + r_{22} &= \frac{\bar{r}_{11} \sinh \zeta + 2 \cosh \zeta}{\bar{r}_{11} \cosh \zeta + 2 \sinh \zeta} \sinh 2\zeta; \quad r_{33} + r_{22} = \frac{1}{2} \bar{r}_{11} \sinh 2\zeta; \\ r_{22} &= \frac{1}{4} \frac{\sinh 4\zeta}{\cosh 3\zeta} \frac{(\bar{r}_{11} \cosh \zeta + 2 \sinh \zeta)^2 + 4(1 + 2 \cosh 2\zeta)}{\bar{r}_{11} \cosh \zeta + 2 \sinh \zeta} : \quad (3.63) \end{aligned}$$

3.5.4 Modelo $osp(1|2)$:

Como no modelo Izergin-Korepin, para o modelo $osp(1|2)$ temos nove possibilidades, pois existem três soluções para cada equação de reflexão. Nós estudaremos somente três casos que são: $(1; M)$, $(F^+; G^+)$ e $(F^-; G^-)$.

² Caso $(1; M)$:

Para este caso, o termo à esquerda é nulo

$$l_{11} = l_{22} = l_{33} = 0 \quad (3.64)$$

e o termo da direita é proporcional a identidade com

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = 2 \frac{\cosh 4\zeta \sinh 2\zeta}{\sinh 6\zeta}; \quad (3.65)$$

Assim, o Hamiltoniano para a correspondente cadeia aberta é dado por

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k;k+1} + 2 \frac{\cosh 4\eta \sinh 2\eta}{\sinh 6\eta} 1_N \quad (3.66)$$

2 Caso (F⁺; G⁺):

Para o caso (F⁺; G⁺) com F⁺ e G⁺ dados pelas equações (3.34) e (3.37), os termos de fronteiras são para a esquerda

$$l_{11} = \frac{e^{i3\eta=2}}{\sinh(3\eta=2)} \sinh 2\eta; \quad l_{22} = 0; \quad l_{33} = \frac{e^{3\eta=2}}{\sinh(3\eta=2)} \sinh 2\eta; \quad (3.67)$$

e para a direita

$$\begin{aligned} r_{11} \text{ ; } r_{22} &= \frac{e^{3\eta=2}}{\sinh(3\eta=2)} \sinh 2\eta; \quad r_{33} \text{ ; } r_{22} = \frac{e^{i3\eta=2}}{\sinh(3\eta=2)} \sinh 2\eta \\ r_{22} &= i \frac{\sinh 4\eta}{\sinh 6\eta} 4 \cosh\left(\frac{3\eta}{2}\right) \cosh\left(\frac{5\eta}{2}\right) \text{ ; } 1 \end{aligned} \quad (3.68)$$

2 Caso (Fⁱ; Gⁱ):

Para o modelo osp(1|2); neste caso (Fⁱ; Gⁱ); temos os seguintes termos de fronteiras

$$\begin{aligned} l_{11} &= i \frac{e^{i3\eta=2}}{\cosh(3\eta=2)} \sinh 2\eta; \quad l_{22} = 0; \quad l_{33} = \frac{e^{3\eta=2}}{\cosh(3\eta=2)} \sinh \eta \\ r_{11} \text{ ; } r_{22} &= \frac{e^{3\eta=2}}{\cosh(3\eta=2)} \sinh 2\eta; \quad r_{33} \text{ ; } r_{22} = i \frac{e^{i3\eta=2}}{\cosh(3\eta=2)} \sinh 2\eta \\ r_{22} &= i \frac{\sinh 4\eta}{\sinh 6\eta} 4 \sinh\left(\frac{3\eta}{2}\right) \sinh\left(\frac{5\eta}{2}\right) \text{ ; } 1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde as matrizes de reflexões são dadas por (3.35) e (3.38).

Estes são os Hamiltonianos para cadeias quânticas de spin-1 com termos de fronteiras diagonais para a generalização do Método do Espalhamento Inverso Quântico proposta

por Sklyanin [14]. Vários destes Hamiltonianos já foram divulgados na literatura e serão comentados no capítulo 6.

Capítulo 4

Ansatz de Bethe de Coordenadas para Cadeias Quânticas de Spin-1

4.1 Introdução

Cadeias quânticas de spin foram resolvidas para os mais diferentes modelos. Para o caso de spin-1=2, todas as variações para condições periódicas de contorno do modelo de Heisenberg foram resolvidas (XXX, XXZ, XYZ e etc) [1, 2, 3]. A solução de cadeias de spin-1=2 foram encontradas por vários métodos diferentes, e entre eles se destacam o ansatz de Bethe de coordenadas como o pioneiro nas soluções.

Quando se trata de modelos com spin-1, o ansatz de Bethe algébrico tem destacado sua eficiência se antecipando ao ansatz de Bethe de coordenadas.

Os modelos para cadeias quânticas de spin-1; conhecidos como modelos de 19-vértices, para condições periódicas de contorno foram resolvidos tanto utilizando o ansatz de Bethe algébrico como o ansatz de Bethe de coordenadas. O modelo ZF foi resolvido primeiramente por uma técnica chamada fusão [36]. O processo de fusão usa o ansatz de Bethe algébrico de dois modelos de 6-vértices (spin-1=2) para resolver um modelo de vértices mais alto, por exemplo: para os modelos de 19-vértices encontramos a solução para o modelo Zamolodchikov-Fateev. Os demais modelos não podem ser resolvidos por fusão.

V. Tarasov [37] apresentou uma generalização do ansatz de Bethe algébrico resolvendo o modelo IK. Na referência [21] é apresentada uma uni...cação das soluções para os modelos de 19-vértices, tanto com o uso do ansatz de Bethe algébrico através da generalização proposta por Tarasov, como numa nova generalização do ansatz de Bethe de coordenadas para spin-1 [21]. Com este trabalho foram reproduzidos as soluções para os modelos: ZF (sem recorrer a técnica de fusão), IK, e novo resultado para o modelo osp(1j2). A solução para o modelo sl(2j1) não é apresentada mas o procedimento é idêntico aos demais modelos.

Seguiremos neste capítulo apresentando a generalização para o ansatz de Bethe de coordenadas para cadeias de spin-1 com condições periódicas de contorno desenvolvida em [21].

4.2 A Cadeia de Spin

O problema a ser abordado é diagonalização de Hamiltonianos das cadeias quânticas de spin-1 para os chamados modelos de 19-vértices. Estes Hamiltonianos são obtidos pelas equações (2.30) e (2.31), e são apresentados para cada um dos modelos nas equações (2.32), (2.35) à (2.38). Os Hamiltonianos são escritos na base em que o operador S_k^z é diagonal que é a base $|j_+; k\rangle$, $|j_0; k\rangle$ e $|j_-; k\rangle$, com seus respectivos autovalores $+1$, 0 e -1 ; e k indicando a localização do sítio com o respectivo estado. É importante utilizarmos esta base pois o Hamiltoniano comuta com o operador S_z^T

$$\mathbb{E} \quad H; S_z^T = 0; \quad S_z^T = \sum_{k=1}^N S_k^z; \quad (4.1)$$

Como o Hamiltoniano H comuta com S_z^T nós iremos separar o espaço de Hilbert de dimensão 3^N em setores identificados por $r = \sum_{j=1}^N S_j^z$. Por exemplo: para o setor $r = 0$ todas as variáveis de spin estão com autovalor $+1$, e para o setor $r = 1$ temos uma das variáveis de spin com autovalor 0 .

A ação de H sobre dois sítios (H_{kk+1}), conforme (2.32), é

$$\begin{aligned}
 H_{k;k+1}j_{++i} &= z_1j_{++i}; & H_{k;k+1}j_{i-ii} &= z_1j_{i-ii}; \\
 H_{k;k+1}j_{+0i} &= \bar{z}_5j_{+0i} + j_{0+i}; & H_{k;k+1}j_{0+i} &= z_5j_{0+i} + j_{+0i}; \\
 H_{k;k+1}j_{0i-i} &= \bar{z}_5j_{0i-i} + j_{i-0i}; & H_{k;k+1}j_{i-0i} &= z_5j_{i-0i} + j_{0i-i}; \\
 H_{k;k+1}j_{+ji} &= \bar{z}_7j_{+ji} + \bar{z}_6j_{0-0i} + z_3j_{+ji}; \\
 H_{k;k+1}j_{0-0i} &= {}^2z_4j_{0-0i} + {}^2\bar{z}_6j_{+ji} + {}^2z_6j_{+ji}; \\
 H_{k;k+1}j_{i-+i} &= z_7j_{i-+i} + z_6j_{0-0i} + z_3j_{+ji};
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nós denotaremos por $H_n^{(N)}$ o subespaço de $H^{(N)}$ com $r = n$. Nós podemos ver que a dimensão do espaço é $\dim H^{(N)} = \sum_{r=0}^N \dim H_r^{(N)}$ com

$$\dim H_r^{(N)} = \sum_{j=0}^{[r]} \binom{N}{r-2j} \binom{N}{j} \tag{4.3}$$

onde $[r]$ significa a parte inteira de $\frac{r}{2}$ e $\binom{a}{b}$ denota o número binominal.

4.3 Setor $r = 0$

Para o setor $r = 0$ temos somente um estado que é o estado em que todos os sítios têm spin assumindo o autovalor $+1$. Este estado é escrito como produto tensorial dos estados $j_{+;ki}$

$$j_{r=0}^a = \prod_{k=1}^N j_{+;ki} = j_{++++} \tag{4.4}$$

$|j^a_{r=0}\rangle$ é um autoestado de H , ou seja, satisfaz a equação

$$H |j^a_{r=0}\rangle = E_0 |j^a_{r=0}\rangle \quad (4.5)$$

com autovalor

$$E_0 = Nz_1 \quad (4.6)$$

Com este estado podemos reescrever a equação de autovalores para o operador Hamiltoniano na forma

$$(H - Nz_1) |j^a_{r=1}\rangle = \sum_r j^a_{r=1} \quad (4.7)$$

Na prática estamos escolhendo $|j^a_{r=0}\rangle$ como nosso estado de referência, pois todas as outras energias podem ser medidas a partir de E_0 :

4.4 Setor $r = 1$

Para construirmos um estado geral no setor $r = 1$ combinamos todos os estados do tipo

$$|j^a_{k=0}\rangle = |j^a_{+ \dots 0_k \dots +}\rangle \quad (4.8)$$

onde k indica a posição do único spin com autovalor 0. Neste setor existem N estados, e o estado geral é escrito como uma combinação destes

$$|j^a_{r=1}\rangle = \sum_{k=1}^N a(k) |j^a_{k=0}\rangle \quad (4.9)$$

com $a(k)$ nos fornecendo a amplitude de probabilidade de encontrarmos o autovalor 0 para a variável de spin no sítio k .

Nossa cadeia possui condições periódicas de contorno, logo nosso sistema possui in-

variância translacional e podemos considerar $a(k)$ como uma onda plana

$$a(k) = m^k \quad (4.10)$$

com $m = e^{i\mu}$, e μ ...xado pelas condições periódicas de contorno

$$a(k + N) = a(k): \quad (4.11)$$

Assim, μ assume os seguintes valores

$$\mu = \frac{2\pi}{N}j; \quad j = 0; \dots; N - 1 \quad (4.12)$$

Usando a equação de autovalores (4.7), temos

$$(E_1 + 2z_1 - z_5 - \bar{z}_5) a(k) = a(k - 1) + a(k + 1): \quad (4.13)$$

E usando (4.10) temos a autoenergia

$$E_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (2z_1 + z_5 + \bar{z}_5 + m^j + m^{j-1}) \quad (4.14)$$

4.5 Setor $r = 2$

Para o setor $r = 2$ temos dois conjuntos de estados distintos. Nestes conjuntos temos:

1) No primeiro conjunto temos uma das variáveis de spin com autovalor ± 1 , e esta condição é satisfeita por N estados.

2) E para o segundo conjunto, duas variáveis de spin com autovalor 0, que são os $\frac{N(N-1)}{2}$ estados $|j, k_1[0]; k_2[0]\rangle = |j, \dots, 0_{k_1}, \dots, 0_{k_2}, \dots, i\rangle$.

O estado geral para este setor é escrito como combinação de todas as possibilidades

destes dois conjuntos distintos

$$a_2 = \sum_{k_1 < k_2} a(k_1; k_2) j_{k_1[0]; k_2[0]i} + \sum_{k=1} b(k) j_{k[i]i} \quad (4.15)$$

$a(k_1; k_2)$ e $b(k)$ são as amplitudes de probabilidade para cada configuração. Estes coeficientes por condições periódicas de contorno devem satisfazer as relações

$$a(k_1; k_2) = a(k_2; k_1 + N) \quad ; \quad b(k) = b(k + N): \quad (4.16)$$

Para o setor $r = 1$ consideraremos cada spin com autovalor 0 como uma pseudopartícula que pode se propagar como uma onda plana. Neste setor nós escreveremos $a(k_1; k_2)$ que descreve a presença de duas pseudopartículas do tipo $k[0]$ como uma superposição de ondas planas

$$a(k_1; k_2) = a_{12} m_1^{k_1} m_2^{k_2} + a_{21} m_1^{k_2} m_2^{k_1}; \quad (4.17)$$

com $m_1 = e^{i\mu_1}$ e $m_2 = e^{i\mu_2}$. Pela relação (4.16) temos

$$\frac{a_{12}}{a_{21}} = m_1^N \quad ; \quad \frac{a_{21}}{a_{12}} = m_2^N: \quad (4.18)$$

Para a equação de autovalores (4.7) teremos três equações distintas para as amplitudes de probabilidades:

1) Duas partículas $k_1[0]; k_2[0]$ separadas

$$[E_2 + 4z_1 j - 2(z_5 + z_5)] a(k_1; k_2) = a(k_1 - 1; k_2) + a(k_1 + 1; k_2) + a(k_1; k_2 + 1) + a(k_1; k_2 - 1); \quad (4.19)$$

2) Duas partículas $k_1[0]; k_2[0]$ juntas

$$[E_2 + 4z_1 \prod_{i=1}^2 (\bar{z}_5 + z_5 + z_4)] a(k; k+1) = a(k-1; k+1) + a(k; k+2) + \prod_{i=1}^2 [\bar{z}_6 a(k+1) + z_6 b(k)]; \quad (4.20)$$

3) Uma partícula $k[i]$;

$$[E_2 + 2z_1 \prod_{i=1}^2 (\bar{z}_7 + z_7)] b(k) = z_6 a(k; k+1) + \bar{z}_6 a(k-1; k) + z_3 [b(k+1) + b(k-1)]; \quad (4.21)$$

Substituindo a parametrização (4.17) em (4.19) obtemos a energia para o setor

$$E_2 = \prod_{i=1}^2 4z_1 + 2(\bar{z}_5 + z_5) \prod_{i=1}^2 m_1^i \prod_{i=1}^2 m_2^i; \quad (4.22)$$

A equação (4.19) deve ser válida para o caso $k_1 = k$ e $k_2 = k+1$: Subtraindo a equação (4.19) para $k_1 = k$ e $k_2 = k+1$ da equação (4.20), teremos

$$\prod_{i=1}^2 [\bar{z}_6 b(k+1) + z_6 b(k)] = a(k; k) + a(k+1; k+1) \prod_{i=1}^2 (z_1 + \prod_{j=1}^2 z_4 \prod_{j=1}^2 \bar{z}_5) a(k; k+1) \quad (4.23)$$

que é a meeting condition . As equações (4.19) e (4.20) são consistentes pela validade de (4.23).

Agora, podemos estender a parametrização (4.17) para o caso de $k_1 = k_2$, e obtermos a parametrização para $b(k)$. A pseudopartícula $k[i]$ é parametrizada por

$$b(k) = b m_1^k m_2^k; \quad (4.24)$$

que substituindo em (4.23) nos dá

$$b = \prod_{i=1}^2 [X_1 a_{12} + X_2 a_{21}] \quad (4.25)$$

com

$$X_1 = \frac{1 + m_1 m_2 i \Phi_1 m_2}{z_6 + \bar{z}_6 m_1 m_2} ; X_2 = \frac{1 + m_1 m_2 i \Phi_1 m_1}{z_6 + \bar{z}_6 m_1 m_2} ; \quad (4.26)$$

e

$$\Phi_1 = z_1 + z_4 i z_5 i \bar{z}_5 \quad (4.27)$$

Esta parametrização considera que uma pseudopartícula $k [j]$ é descrita pela presença de duas pseudopartículas $k [0]$ no mesmo sítio.

Usando a parametrização (4.17) e (4.24), juntamente com a autoenergia dada por (4.22), na equação (4.21) obtemos

$$\frac{a_{21}}{a_{12}} = \odot_{12} = i \frac{(1 + M)^2 i (1 + M)(\Phi_1 m_1 + \Phi_2 m_2) + \Phi_3 M + \Phi_4 m_2^2}{(1 + M)^2 i (1 + M)(\Phi_1 m_2 + \Phi_2 m_1) + \Phi_3 M + \Phi_4 m_1^2} ; \quad (4.28)$$

com

$$M = m_1 m_2 i ; \quad (4.29)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{z_3} ; \quad (4.30)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{z_3} + \frac{2}{z_3} (z_3 z_4 i z_6 \bar{z}_6) + (z_1 i z_5 i \bar{z}_5) ; \quad (4.31)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{z_3} (z_4 + z_7 + \bar{z}_7) + \frac{3}{z_3} (z_1 i z_5 i \bar{z}_5) i 2 ; \quad (4.32)$$

$$\Phi_5 = \frac{1}{z_3} (z_4 + z_1 i \bar{z}_5 i z_5) \quad (4.33)$$

A equação (4.28) combinada com (4.18) nos fornecem as relações necessárias para obtermos as equações de Bethe para o setor $r = 2$ que são

$$m_1^N = i \frac{(1+M)^2 i (1+M)(\Phi_1 m_2 + \Phi_2 m_1) + \Phi_3 M + \Phi_4 m_1^2}{(1+M)^2 i (1+M)(\Phi_1 m_1 + \Phi_2 m_2) + \Phi_3 M + \Phi_4 m_2^2}, \quad (4.34)$$

e

$$m_2^N = i \frac{(1+M)^2 i (1+M)(\Phi_1 m_1 + \Phi_2 m_2) + \Phi_3 M + \Phi_4 m_2^2}{(1+M)^2 i (1+M)(\Phi_1 m_2 + \Phi_2 m_1) + \Phi_3 M + \Phi_4 m_1^2}. \quad (4.35)$$

4.6 Setor $r = 3$

Para o setor $r = 3$ nos encontramos três conjuntos distintos de estados, são eles:

- 1) $\frac{N(N_i-1)(N_i-2)}{6}$ estados do tipo $jk_1[0]; k_2[0]; k_3[0]i$;
- 2) $\frac{N(N_i-1)}{2}$ estados do tipo $jk_1[i]; k_2[0]i$;
- 3) $\frac{N(N_i-1)}{2}$ estados do tipo $jk_1[0]; k_2[i]i$;

O autoestado é escrito como uma superposição destes três conjuntos de estados

$$j^a_{3i} = \sum_{k_1 < k_2 < k_3} a(k_1; k_2; k_3) |k_1[0]; k_2[0]; k_3[0] \rangle + \sum_{k_1 < k_2} [b_1(k_1; k_2) |k_1[i]; k_2[0] \rangle + b_2(k_1; k_2) |k_1[0]; k_2[i] \rangle] \quad (4.36)$$

Por condições periódicas de contorno temos que

$$\begin{aligned} a(k_2; k_3; k_1 + N) &= a(k_1; k_2; k_3); \\ b_1(k_2; k_1 + N) &= b_2(k_1; k_2); \end{aligned} \quad (4.37)$$

A parametrização para a função de onda $a(k_1; k_2; k_3)$ é uma superposição de três

ondas planas

$$\begin{aligned}
 a(k_1; k_2; k_3) = & a_{123} m_1^{k_1} m_2^{k_2} m_3^{k_3} + a_{132} m_1^{k_1} m_3^{k_2} m_2^{k_3} + a_{213} m_2^{k_1} m_1^{k_2} m_3^{k_3} \\
 & + a_{321} m_3^{k_1} m_2^{k_2} m_1^{k_3} + a_{231} m_2^{k_1} m_3^{k_2} m_1^{k_3} + a_{312} m_3^{k_1} m_1^{k_2} m_2^{k_3}
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

A aplicação de H sobre o estado (4.36) gera para a equação de autovalores (4.7) oito equações distintas que são:

1) Três partículas do tipo $k_1[0]; k_2[0]$ e $k_3[0]$; separadas.

$$\begin{aligned}
 (E_3 + 6z_1 \prod_{j=1}^3 z_5) a(k_1; k_2; k_3) = & a(k_1 - 1; k_2; k_3) + a(k_1 + 1; k_2; k_3) \\
 & + a(k_1; k_2 - 1; k_3) + a(k_1; k_2 + 1; k_3) \\
 & + a(k_1; k_2; k_3 - 1) + a(k_1; k_2; k_3 + 1);
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

Utilizando a parametrização para $a(k_1; k_2; k_3)$ (4.38) o autovalor do Hamiltoniano para o setor $r = 3$ é

$$E_3 = \sum_{j=1}^3 \left(2z_1 + z_5 + z_5 + m_j + m_j^{-1} \right); \tag{4.40}$$

2) Três partículas do tipo $k_1[0]; k_2[0]$ e $k_3[0]$; com $k_2 = k_1 + 1$ e $k_3 \in k_1 + 2$.

$$\begin{aligned}
 (E_3 + 5z_1 \prod_{j=1}^2 z_5 + 2z_5 \prod_{j=1}^2 z_4) a(k_1; k_1 + 1; k_2) = & a(k_1 - 1; k_1 + 1; k_2) + a(k_1; k_1 + 2; k_2) \\
 & + a(k_1; k_1 + 1; k_2 - 1) + a(k_1; k_1 + 1; k_2 + 1) \\
 & + 2z_6 b_1(k_1 + 1; k_2) + 2z_6 b_1(k_1; k_2); \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

3) Três partículas do tipo $k_1[0]; k_2[0]$ e $k_3[0]$; com $k_3 = k_2 + 1$ e $k_2 \in k_1 + 1$.

$$\begin{aligned} (E_3 + 5z_1 \text{ ; } 2z_5 \text{ ; } 2\bar{z}_5 \text{ ; } {}^2z_4) a(k_1; k_1 + 1; k_2) &= a(k_1; k_2 \text{ ; } 1; k_2) + a(k_1 + 1; k_2; k_2 + 2) \\ &+ a(k_1 \text{ ; } 1; k_2; k_2 + 1) + a(k_1; k_2; k_2 + 1) \\ &+ {}^2\bar{z}_6 b_2(k_1 + 1; k_2) + {}^2z_6 b_2(k_1; k_2): \end{aligned} \quad (4.42)$$

É necessário que as equações (4.39), (4.41) e (4.42) sejam consistentes umas com as outras. Substituindo na equação (4.39) $k_2 = k_1 + 1$ e $k_3 = k_2 + 1$, e subtraindo os respectivos resultados das equações (4.41) e (4.42) temos respectivamente

$${}^2\bar{z}_6 b_1(k_1 + 1; k_2) + {}^2z_6 b_1(k_1; k_2) = a(k_1; k_1; k_2) + a(k_1 + 1; k_1 + 1; k_2) + a(k_1; k_1 + 1; k_2) \quad (4.43)$$

e,

$${}^2\bar{z}_6 b_2(k_1; k_2 + 1) + {}^2z_6 b_2(k_1; k_2) = a(k_1; k_2; k_2) + a(k_1; k_2 + 1; k_2 + 1) + a(k_1; k_2; k_2 + 1); \quad (4.44)$$

Note que estas últimas equações são semelhantes a equação (4.23) no setor $r = 2$.

As duas últimas equações são resolvidas com a seguinte parametrização para $b_1(k_1; k_2)$ e $b_2(k_1; k_2)$

$$b_1(k_1; k_2) = b_{11} (m_1 m_2)^{k_1} m_3^{k_2} + b_{12} (m_1 m_3)^{k_1} m_2^{k_2} + b_{13} (m_2 m_3)^{k_1} m_1^{k_2} \quad (4.45)$$

$$b_2(k_1; k_2) = b_{21} m_1^{k_1} (m_2 m_3)^{k_2} + b_{22} m_2^{k_1} (m_1 m_3)^{k_2} + b_{23} m_3^{k_1} (m_1 m_2)^{k_2}: \quad (4.46)$$

Nesta parametrização consideramos a dinâmica da pseudopartícula $k[i]$ descrita por duas pseudopartículas $k[0]$ sobre o mesmo sítio como foi feito no setor $r = 2$.

As funções de onda $b_1(k_1; k_2)$ e $b_2(k_1; k_2)$ devem satisfazer condições periódicas de

contorno (4.37), logo

$$\frac{b_{21}}{b_{13}} = m_1^N, \quad \frac{b_{22}}{b_{12}} = m_2^N, \quad \frac{b_{23}}{b_{12}} = m_3^N; \quad (4.47)$$

e as amplitudes b_{ab} com $a = 1; 2$ e $b = 1; 2; 3$ são escritas de acordo com (4.43) e (4.44) como

$$\begin{aligned} b_{11} &= F_{12}a_{123} + F_{21}a_{213}, & b_{21} &= F_{23}a_{123} + F_{32}a_{132}; \\ b_{12} &= F_{13}a_{132} + F_{31}a_{231}, & b_{22} &= F_{13}a_{213} + F_{31}a_{312}; \\ b_{13} &= F_{23}a_{312} + F_{23}a_{321}, & b_{23} &= F_{12}a_{231} + F_{21}a_{321}; \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde

$$F_{ab} = \frac{1 + m_a m_b i \Phi_1 m_b}{Z_6 + Z_6 m_a m_b}; \quad a \in b = 1; 2; 3; \quad (4.49)$$

Substituindo estas relações na equação (4.41) e (4.42), nós obtemos a relação de espalhamento duas a duas partículas

$$\begin{aligned} \frac{a_{123}}{a_{213}} &= \frac{a_{312}}{a_{321}} = \frac{S_{12}}{S_{21}} \\ \frac{a_{132}}{a_{312}} &= \frac{a_{213}}{a_{231}} = \frac{S_{13}}{S_{31}} \\ \frac{a_{231}}{a_{321}} &= \frac{a_{123}}{a_{132}} = \frac{S_{23}}{S_{32}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

com

$$S_{ab} = (1 + m_a m_b)^2 i (1 + m_a m_b)(\Phi_2 m_a + \Phi_3 m_b) + \Phi_4 m_a m_b + \Phi_5 m_b^2 \quad (4.51)$$

com $a \in b = 1; 2; 3$; e os Φ_a são dados pelas equações (4.27),(4.30) à (4.33). Estas relações nos mostram que a troca entre duas pseudopartículas é independente da posição da terceira. Na linguagem de matriz-S, a amplitude de espalhamento de três partículas

é separada no produto duas a duas.

Usando as condições periódicas de contorno (4.37), temos

$$m_a^N = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^3 \frac{S_{ab}}{S_{ba}}, \quad a = 1; 2; 3: \quad (4.52)$$

que é a equação de Bethe.

Resta-nos verificar os casos seguintes:

4) Três partículas do tipo $k_1[0]; k_2[0]$ e $k_3[0]$; com $k_3 = k_2 + 1$ e $k_2 = k_1 + 1$.

$$\begin{aligned} (E_3 + 4z_1 \prod_{j=1}^3 z_j \prod_{j=1}^2 z_j^{-2}) a(k; k+1; k+2) &= a(k; k+1; k+2) + a(k; k+1; k+3) \\ &+ z_6 b_1(k+1; k+2) + z_6 b_1(k; k+2) \\ &+ z_6 b_2(k; k+2) + z_6 b_2(k; k+1): \end{aligned} \quad (4.53)$$

que é satisfeita pelas parametrizações acima.

5) Uma partícula do tipo $k_1[j]$ e outra $k_2[0]$; separadas.

$$\begin{aligned} (E_3 + 4z_1 \prod_{j=1}^3 z_j \prod_{j=1}^2 z_j^{-2}) b_1(k_1; k_2) &= b_1(k_1; k_2 - 1) + b_1(k_1; k_2 + 1) \\ &+ z_3 b_1(k_1 - 1; k_2) + z_3 b_1(k_1 + 1; k_2) \\ &+ z_6 a(k_1 - 1; k_1; k_2) + z_6 a(k_1; k_1 + 1; k_2): \end{aligned} \quad (4.54)$$

6) Uma partícula do tipo $k_1[0]$ e outra $k_2[j]$; separadas.

$$\begin{aligned}
 (E_r + 4z_1 j - z_5 j - \bar{z}_5 j - z_7 j - \bar{z}_7) b_2(k_1; k_2) &= b_2(k_1 j - 1; k_2) + b_2(k_1 j + 1; k_2) \\
 &+ z_3 b_2(k_1; k_2 j - 1) + z_3 b_2(k_1; k_2 + 1) \\
 &+ \bar{z}_6 a(k_1; k_2 j - 1; k_2) + z_6 a(k_1; k_2; k_2 + 1):
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

7) Uma partícula do tipo $k_1[j]$ e outra $k_2[0]$; juntas.

$$\begin{aligned}
 (E_3 + 3z_1 j - 2z_5 j - z_7) b_1(k; k + 1) &= b_1(k; k + 2) + b_2(k; k + 1) \\
 &+ z_3 b_1(k j - 1; k + 1) + \bar{z}_6 a(k j - 1; k; k + 1);
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

e

8) Uma partícula do tipo $k_1[0]$ e outra $k_2[j]$; juntas.

$$\begin{aligned}
 (E_3 + 3z_1 j - 2z_5 j - z_7) b_2(k; k + 1) &= b_2(k j - 1; k + 1) + b_1(k; k + 1) \\
 &+ z_3 b_2(k; k + 2) + z_6 a(k; k + 1; k + 2):
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

As equações para as possibilidades 5) à 8) são satisfeitas sobre a parametrização descrita e podem ser verificadas com a substituição das relações (4.48), (4.50) e (4.52).

4.7 Setor r geral

Para o setor r geral em que r pode ser escrito por

$$r = N_0 + 2N_j$$

onde N_0 é o número de pseudopartículas $k[0]$, e N_i o número de pseudopartículas $k[i]$:
 O autoestado pode ser escrito por

$$j_{\vec{A}_i} = j_{0i} \in \vec{A}_{r_i 1}^{\otimes} + j_i \in \vec{A}_{r_i 2}^{\otimes} \quad (4.58)$$

com $j_{\vec{A}_0} = 1$ e $j_{\vec{A}_1} = p > 0$:

A energia é escrita como a soma da energia de pseudopartículas $k[0]$ independentes

$$E_r = N z_1 + \sum_{a=1}^{\infty} i_a (2z_1 + z_5 + \bar{z}_5 + m_a + m_a^{-1}) \quad (4.59)$$

onde m_a 's são soluções das equações de Bethe

$$m_a^N = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{\infty} \frac{S_{ab}}{S_{ba}}, \quad a = 1; 2; 3: \quad (4.60)$$

com S_{ab} dado pela equação (4.51).

A idéia principal do ansatz para cadeias de spin-1 é considerarmos uma pseudopartícula j_i como composição de duas j_{0i} : Esta mesma idéia pode ser utilizada para resolução de cadeias de spin mais altos. Por exemplo, para uma cadeia de spin-3=2, os estados $j_{i-1=2i}$ e $j_{i-3=2i}$ podem ser parametrizados por dois estados $j_{1=2i}$ e três estados $j_{1=2i}$, respectivamente, no mesmo sítio multiplicado por um coeficiente.

Neste capítulo apresentamos o ansatz de Bethe de coordenadas para spin-1 com condições periódicas de contorno.

Capítulo 5

Ansatz de Bethe de Coordenadas para Cadeias Quânticas Abertas de Spin-1

5.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado a generalização do ansatz de Bethe de coordenadas para uma cadeia quântica de spin-1 com termos de fronteiras diagonais. O Hamiltoniano destas cadeias pode ser escrito como

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k;k+1} + H_{b;t}; \quad (5.1)$$

onde $H_{b;t}$ descreve os termos de fronteiras, e $H_{k;k+1}$ descreve a interação no meio da cadeia.

Para cadeias de spin-1 podemos ter em cada sítio autovalores $+1; 0$ e -1 : O espaço de Hilbert para estas cadeias de spin é $H^{(N)} = \otimes^N V$ onde $V = \mathbb{C}^3$ com base $|j_i\rangle; |0_i\rangle; |j_i\rangle$ correspondendo a cada um dos autovalores possíveis. Estamos trabalhando na base em que S_z^i é diagonal. A dimensão total para o espaço de Hilbert é $\dim H^{(N)} = 3^N$.

O Hamiltoniano, como no caso do capítulo anterior com condições periódicas de contorno, comuta com S_T^z

$$[H; S_T^z] = 0; \quad S_T^z = \prod_{k=1}^N S_k^z; \quad (5.2)$$

Assim o espaço de Hilbert pode ser separado em setores disjuntos identificados pelos autovalores do operador $r = N - S_T^z$.

A dimensão de cada setor é dada pela equação (4.3).

A ação de $H_{k,k+1}$ sobre dois sítios vizinhos é dada por (4.2), e os termos de fronteiras ($H_{b:t}$) que descreve a ação de H nos sítios 1 e N é

$$H_{b:t} |j_1; \dots; j_N\rangle = E_{ij} |j_1; \dots; j_N\rangle; \quad (5.3)$$

onde $E_{ij} = I_{ii} + r_{jj}$; com $i, j = 1; 2; 3$. Nós estamos utilizando a notação $(+; 0; j) = (1; 2; 3)$. I_{ii} e r_{jj} são dados, respectivamente, pelas equações (3.43) e (3.46).

Seguiremos apresentando as soluções para cada um dos setores identificados por r .

5.2 Setor $r = 0$

O setor $H_0^{(N)}$ contém somente um estado que será o estado de referência. Este estado tem todos os autovalores de spin na componente z igual $+1$. Desta forma, o estado para o setor $r = 0$ é escrito como o produto tensorial dos N estados de cada sítio

$$|j^a_{0i}\rangle = \prod_k |j_{+;ki}\rangle; \quad (5.4)$$

k indica a posição do sítio. Este estado satisfaz a equação

$$H |j^a_{0i}\rangle = E_0 |j^a_{0i}\rangle; \quad (5.5)$$

com autovalor

$$E_0 = (N - 1)z_1 + E_{11} \quad (5.6)$$

Todos os outros setores podem ter suas energias determinadas a partir da energia E_0 : Isto significa que os autoestados de H devem satisfazer a equação de autovalor

$$(H - E_0)j^a_{r,i} = E_r j^a_{r,i} \quad (5.7)$$

em todos os setores.

5.3 Setor $r = 1$

Para o setor $H_1^{(N)}$ temos $N - 1$ sítios com valor $+1$ e um único sítio com valor de spin 0 . Aqui existem N estados $|j_1, \dots, j_{N-1}, 0\rangle$ representando a base para $H_1^{(N)}$. O estado geral para este setor tem a forma

$$j^a_{1,i} = \sum_{k=1}^N a(k) |j_k[0]\rangle \quad (5.8)$$

onde $a(k)$ é uma função de onda não conhecida, ou seja, $|a(k)|^2$ determina a probabilidade de encontrarmos o autovalor $S_k^z = 0$ no sítio k .

A aplicação de H em $j^a_{1,i}$ nos fornece três equações distintas para $a(k)$. Estas equações dependem de $k[0]$; e podem mudar de acordo com a posição de k . Estas equações para os valores de k são

² Para $(1 < k < N)$

$$(E_1 + 2z_1 - z_5 - z_5) a(k) = a(k-1) + a(k+1); \quad (5.9)$$

z com k no sítio 1

$$(E_1 + E_{11} - E_{21} + z_1 - z_5)a(1) = a(2); \quad (5.10)$$

z e k no sítio N

$$(E_1 + E_{11} - E_{12} + z_1 - \bar{z}_5)a(N) = a(N - 1); \quad (5.11)$$

A parametrização para $a(k)$ é

$$a(k) = a(\mu)m^k - a(j - \mu)m^{j-k}; \quad (5.12)$$

onde $m = e^{i\mu}$, μ é o momentum da pseudopartícula k [0]. No caso do capítulo 4 com condições periódicas de contorno é facilmente calculado por invariância translacional. Para uma cadeia aberta não temos invariância translacional, mas μ é determinado pelas condições de fronteiras.

Substituindo $a(k)$ na equação (5.9) nós encontramos a autoenergia para o setor $r = 1$

$$E_1 = j - 2z_1 + z_5 + \bar{z}_5 + m + m^{-1}; \quad (5.13)$$

A equação (5.9) deve ser válida para os casos em que $k = 1$ e $k = N$, ou seja, as expressões

$$(E_1 + 2z_1 - z_5 - \bar{z}_5)a(1) = a(0) + a(2); \quad (5.14)$$

$$(E_1 + 2z_1 - z_5 - \bar{z}_5)a(N) = a(N - 1) + a(N + 1); \quad (5.15)$$

são válidas com $a(0)$ e $a(N + 1)$ determinados por (5.12). Estas equações devem ser consistentes

com (5.10) e (5.11). Combinando (5.10) com (5.14) temos

$$a(0) = \Phi_1 a(1); \quad \Phi_1 = E_{21} + z_1 E_{11} + \bar{z}_5 = z_1 + \bar{z}_5 + l_{11}^0; \quad (5.16)$$

e, combinando (5.11) com (5.15) obtemos

$$a(N + 1) = \Phi_2 a(N); \quad \Phi_2 = E_{12} + z_1 E_{11} + z_5 = z_1 + z_5 + r_{11}^0; \quad (5.17)$$

Usando a definição (5.12) em (5.16), chegamos a seguinte relação

$$\frac{a(\mu)}{a(i, \mu)} = m^{i-2} \frac{\Phi_1(i, m)}{\Phi_1(i, m^{-1})} \quad (5.18)$$

e para a equação (5.17) temos

$$\frac{a(\mu)}{a(i, \mu)} = m^{i-2N} \frac{\Phi_2(i, m^{-1})}{\Phi_2(i, m)}; \quad (5.19)$$

Podemos agora determinar μ pela equivalência entre (5.18) e (5.19)

$$m^{2N} = \frac{\Phi_1(m, i^{-1})}{\Phi_1(i, m)} \frac{\Phi_2(m, i^{-1})}{\Phi_2(i, m)}; \quad (5.20)$$

Esta é a equação de Bethe para o setor $r = 1$.

O autovalor para H para o setor $r = 1$ pelas equações (5.7) e (5.13) é dado por

$$E_1 = (N - 3)z_1 + l_{11} + r_{11} + z_5 + \bar{z}_5 + m + m^{-1}; \quad (5.21)$$

onde m é solução de (5.20).

5.4 Setor $r = 2$

No espaço de Hilbert $H_2^{(N)}$ temos dois tipos de estados possíveis

1) N estados do tipo $j^a_{k_1} |i\rangle = |j_1, j_2, \dots, j_k, \dots, j_N\rangle$;

2) $N(N-1)/2$ estados do tipo $j^a_{k_1[0]; k_2[0]} |i\rangle = |j_1, 0_{k_1}, \dots, 0_{k_2}, \dots, j_N\rangle$.

O estado geral para o setor $r = 2$ é escrito como uma combinação de todos os estados possíveis

$$j^a_{k_1} |i\rangle = \sum_{k_1 < k_2} a(k_1; k_2) j^a_{k_1[0]; k_2[0]} |i\rangle + \sum_{k=1}^N b(k) j^a_{k[0]} |i\rangle \quad (5.22)$$

$a(k_1; k_2)$ e $b(k)$ são funções de ondas a serem parametrizadas.

A parametrização para a primeira parte do estado geral com autofunção $a(k_1; k_2)$ pode ser escrita usando uma superposição de ondas planas do tipo $a(k)$ (5.12), onde incluímos o espalhamento de duas pseudopartículas com momentum μ_1 e μ_2 . Esta parametrização é devida a Bethe [1]. Assim para $a(k_1; k_2)$ temos

$$\begin{aligned} a(k_1; k_2) = & A(\mu_1; \mu_2) m_1^{k_1} m_2^{k_2} + A(\mu_2; \mu_1) m_1^{k_2} m_2^{k_1} \\ & + A(i; \mu_1; \mu_2) m_1^{i k_1} m_2^{k_2} + A(i; \mu_2; \mu_1) m_1^{k_2} m_2^{i k_1} \\ & + A(\mu_1; i; \mu_2) m_1^{k_1} m_2^{i k_2} + A(\mu_2; i; \mu_1) m_1^{i k_2} m_2^{k_1} \\ & + A(i; \mu_1; i; \mu_2) m_1^{i k_1} m_2^{i k_2} + A(i; \mu_2; i; \mu_1) m_1^{i k_2} m_2^{i k_1} \end{aligned} \quad (5.23)$$

com $m_j = e^{i\mu_j}$; $j = 1, 2$. Podemos escrever esta parametrização de uma forma compacta

$$a(k_1; k_2) = \sum_P \epsilon_P \left[a(\mu_1; \mu_2) m_1^{k_1} m_2^{k_2} + a(\mu_2; \mu_1) m_1^{k_2} m_2^{k_1} \right] \quad (5.24)$$

onde o somatório é sobre todas as permutações possíveis de μ_1 e μ_2 , com seus respectivos valores negativos $i\mu_1$ e $i\mu_2$; e ϵ_P é um fator sinal que pode valer (± 1) e muda de sinal com as permutações μ_1 e μ_2 e mudanças de sinais em μ_1 e μ_2 . Esta forma compacta é importante para escrevermos $a(k_1; k_2)$ para setores mais altos. A parametrização para $b(k)$ será feita posteriormente.

O nosso próximo passo é analisarmos a equação de Schrödinger $H j^a_{k_1} |i\rangle = E_2 j^a_{k_1} |i\rangle$;

onde H agora agirá em dois sítios com estados locais do tipo $jk_1[0]i$ e $jk_2[0]i$ ou somente em um sítio com um estado do tipo $jk[i]$: Assim podemos ver que temos os seguintes conjunto de equações referentes a diferentes situações:

² Duas pseudopartículas $jk_1[0]i$ e $jk_2[0]i$ no meio da cadeia ($1 < k_1 < k_2 + 1 < N$)

$$(E_2 + 4z_1j - 2z_5j - 2\bar{z}_5)a(k_1; k_2) = a(k_1j - 1; k_2) + a(k_1 + 1; k_2) + a(k_1; k_2j - 1) + a(k_1; k_2 + 1): \quad (5.25)$$

² H agindo somente no sítio $jk[i]$ com ($1 < k < N$)

$$(E_2 + 2z_1j - z_7j - \bar{z}_7)b(k) = z_3b(kj - 1) + z_3b(k + 1) + \bar{z}_6a(kj - 1; k) + z_6a(k; k + 1): \quad (5.26)$$

² Para duas pseudopartículas juntas $k_2[0] = k + 1$ e $k_1[0] = k$ com ($1 < k < N - 1$)

$$(E_2 + 3z_1j - z_5j - \bar{z}_5 - 2z_4)a(k; k + 1) = a(kj - 1; k + 1) + a(k; k + 2) + 2z_6b(k) + 2\bar{z}_6b(k + 1): \quad (5.27)$$

Estas equações também estão presentes para o caso de condições periódicas de contorno. Para a cadeia aberta teremos mais sete equações que descreveram a dinâmica das partículas na fronteira. Elas podem ser separadas em:

1) Cinco delas com duas partículas $jk_1[0]i$ e $jk_2[0]i$:

² Com $k_1[0]$ à esquerda ($k_1[0] = 1$) e $2 < k_2[0] < N - 1$

$$(E_2 + E_{11j} - E_{21} + 3z_1j - 2z_5j - \bar{z}_5)a(1; k_2) = a(2; k_2) + a(1; k_2j - 1) + a(1; k_2 + 1); \quad (5.28)$$

² Com $k_2[0]$ à direita ($k_2[0] = N$) e $2 < k_1[0] < N - 1$

$$(E_2 + E_{11} - E_{12} + 3z_1 - z_5 - 2\bar{z}_5)a(k_1; N) = a(k_1 - 1; N) + a(k_1 + 1; N) + a(k_1; N - 1); \quad (5.29)$$

² As duas pseudopartículas nas bordas, uma à esquerda e a outra à direita, $k_1[0] = 1$ e $k_2[0] = N$

$$(E_2 + E_{11} - E_{22} + 2z_1 - z_5 - \bar{z}_5)a(1; N) = a(2; N) + a(1; N - 1); \quad (5.30)$$

² As duas pseudopartículas à esquerda $k_1[0] = 1$ e $k_2[0] = 2$

$$(E_2 + E_{11} - E_{21} + 2z_1 - z_5 - 2z_4)a(1; 2) = a(1; 3) + z_6 b(1) + \bar{z}_6 b(2); \quad (5.31)$$

² As duas pseudopartículas à direita, $k_1[0] = N - 1$ e $k_2[0] = N$

$$(E_2 + E_{11} - E_{12} + 2z_1 - \bar{z}_5 - 2z_4)a(N - 1; N) = a(N - 2; N) + z_6 b(N - 1) + \bar{z}_6 b(N); \quad (5.32)$$

2) As outras duas equações com H agindo no sítio com estado do tipo $jk[i]$, que são para:

² $k[i] = 1$

$$(E_2 + E_{11} - E_{31} + z_1 - z_7)b(1) = z_3 b(2) + z_6 a(1; 2); \quad (5.33)$$

² $k[i] = N$

$$(E_2 + E_{11} - E_{13} + z_1 - \bar{z}_7)b(N) = z_3 b(N - 1) + \bar{z}_6 a(N - 1; N); \quad (5.34)$$

Temos um total de dez equações que devem ser consistentes entre si e satisfeitas. Por uma simples substituição do ansatz (5.23) na equação (5.25) encontramos que

$$E_2 = \sum_j (4z_1 + 2z_5 + 2\bar{z}_5 + m_1 + m_1^{-1} + m_2 + m_2^{-1}) \quad (5.35)$$

Note que os autovalores de H são escritos como uma simples soma da energia de pseudopartículas independentes

$$E_{r=2} = \sum_{l=1}^{\infty} E_1(\mu_l) = E_1(\mu_1) + E_1(\mu_2) \quad (5.36)$$

onde $E_1(\mu_l)$ é a energia para uma pseudopartícula livre com momentum μ_l .

Para obtermos uma parametrização para $b(k)$ vamos seguir os seguintes passos:

1) Tomamos $k_1 = k$ e $k_2 = k + 1$ na equação (5.25), pois esta equação deve ser válida para esta configuração.

2) Subtraímos o resultado anterior por (5.27).

O resultado é

$$\sum_j \bar{z}_j b(k+1) + \sum_j z_j b(k) = a(k; k) + a(k+1; k+1) \sum_j (z_1 + z_4 + z_5 + \bar{z}_5) a(k; k+1) \quad (5.37)$$

As equações (5.25) e (5.27) são consistentes quando a equação acima é satisfeita. Assim podemos relacionar $b(k)$ com $a(k_1; k_2)$. A parametrização para $b(k)$ pode ser escrita por

$$\begin{aligned} b(k) &= \sum_P a_P b(\mu_1; \mu_2) m_1^k m_2^k \\ &= \sum_j b(\mu_1; \mu_2) m_1^k m_2^k + \sum_j b(\mu_1; \mu_2) m_1^k m_2^k + \\ &\quad b(\mu_1; \mu_2) m_1^k m_2^k + b(\mu_1; \mu_2) m_1^k m_2^k \end{aligned} \quad (5.38)$$

o que estamos fazendo é estender o ansatz (5.23) para o caso de duas pseudopartículas k no mesmo sítio, ou seja, $k_1 = k_2 = k$: Em outras palavras a pseudopartícula k [i]

é descrita por duas pseudopartículas $k[0]$ situadas no mesmo sítio. Substituindo (5.38) em (5.37) temos as relações entre $b(\mu_1; \mu_2)$ e $a(\mu_1; \mu_2)$ que são

$${}^2b(\mu_1; \mu_2) = \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1 m_2} \mathbb{1} a(\mu_1; \mu_2)_i \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1 m_2} \mathbb{1} a(\mu_2; \mu_1); \quad (5.39)$$

$${}^2b(i \mu_1; \mu_2) = \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1^{i-1} m_2} \mathbb{1} a(i \mu_1; \mu_2)_i \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1^{i-1} m_2} \mathbb{1} a(\mu_2; i \mu_1); \quad (5.40)$$

$${}^2b(\mu_1; i \mu_2) = \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1 m_2^{i-1}} \mathbb{1} a(\mu_1; i \mu_2)_i \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1 m_2^{i-1}} \mathbb{1} a(i \mu_2; \mu_1); \quad (5.41)$$

$${}^2b(i \mu_1; i \mu_2) = \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1^{i-1} m_2^{i-1}} \mathbb{1} a(i \mu_1; i \mu_2)_i \frac{\mu}{z_6 + \bar{z}_6 m_1^{i-1} m_2^{i-1}} \mathbb{1} a(i \mu_2; i \mu_1); \quad (5.42)$$

com

$$\Phi = z_5 + \bar{z}_5 i - z_1 i - z_4;$$

Observemos que a partir de (5.39) podemos obter todas as outras relações por troca de sinal em μ_1 e μ_2 .

As relações entre as pseudopartículas do tipo $jk[i]_j$ com as $jk_1[0]_i$ e $jk_2[0]_i$ podem ser observadas na ação de H . Pois a ação de H_{kk+1} no sítio $j00i$ gera configurações $j+i$ ou $j-i$ além do termo diagonal, veja equação (4.2).

Substituindo as parametrizações para $b(k)$ (5.38) e para $a(k_1; k_2)$ (5.23) em (5.26), obtemos quatro equações que relacionam os $a(\mu_i; \mu_m)$: Estas relações são escritas na lin-

guagem de matriz S, como

$$\begin{aligned}
 a(\mu_2; \mu_1) &= \frac{s(\mu_2; \mu_1)}{s(\mu_1; \mu_2)} a(\mu_1; \mu_2); \\
 a(\mu_2; i \mu_1) &= \frac{s(\mu_2; i \mu_1)}{s(i \mu_1; \mu_2)} a(i \mu_1; \mu_2); \\
 a(i \mu_2; \mu_1) &= \frac{s(i \mu_2; \mu_1)}{s(\mu_1; i \mu_2)} a(\mu_1; i \mu_2); \\
 a(i \mu_2; i \mu_1) &= \frac{s(i \mu_2; i \mu_1)}{s(i \mu_1; i \mu_2)} a(i \mu_1; i \mu_2);
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

com

$$\begin{aligned}
 s(\mu_2; \mu_1) &= (1 + m_1 m_2 + \Phi m_2) z_3 (1 + m_1^2 m_2^2) i (1 + m_1 m_2) (m_1 + m_2) + \alpha m_1 m_2 \\
 &+ 2 m_2 i z_6 + \bar{z}_6 m_1 m_2 \Phi i \bar{z}_6 + z_6 m_1 m_2 \Phi;
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

e,

$$\alpha = 2(z_1 i z_5 i \bar{z}_5) + z_7 + \bar{z}_7;$$

Até o momento temos tratado o comportamento das pseudopartículas no meio da cadeia. Vamos a partir de agora estudar o comportamento nas fronteiras.

A equação (5.25) deve ser consistente com as equações para k_1 e k_2 nas fronteiras. Vamos tomar em (5.25) $k_1 = 1$ e subtraímos o resultado da equação (5.28), assim

$$\Phi_1 a(1; k) = a(0; k); \quad \Phi_1 = z_1 i \bar{z}_5 i E_{11} + E_{21}; \tag{5.45}$$

Agora consideramos em (5.25) $k_2 = N$ e subtraindo de (5.29) temos

$$\Phi_2 a(k; N) = a(k; N + 1); \quad \Phi_2 = z_1 i z_5 i E_{11} + E_{12} \tag{5.46}$$

A consistência das equações nas fronteiras é satisfeita quando as equações (5.45) e (5.46)

são válidas.

Com a substituição da parametrização (5.23) em (5.45) e (5.46), temos dois conjuntos de equações

$$\begin{aligned}
 a(i; \mu_1; \mu_2) &= \frac{\mathcal{E}(\mu_1)}{\mathcal{E}(i; \mu_1)} a(\mu_1; \mu_2) \\
 a(i; \mu_1; i; \mu_2) &= \frac{\mathcal{E}(\mu_1)}{\mathcal{E}(i; \mu_1)} a(\mu_1; i; \mu_2) \\
 a(i; \mu_2; \mu_1) &= \frac{\mathcal{E}(\mu_2)}{\mathcal{E}(i; \mu_2)} a(\mu_2; \mu_1) \\
 a(i; \mu_2; i; \mu_1) &= \frac{\mathcal{E}(\mu_2)}{\mathcal{E}(i; \mu_2)} a(\mu_2; i; \mu_1); \tag{5.47}
 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 a(\mu_1; i; \mu_2) &= \frac{i(\mu_2)}{i(i; \mu_2)} a(\mu_1; \mu_2) \\
 a(i; \mu_1; i; \mu_2) &= \frac{i(\mu_2)}{i(i; \mu_2)} a(i; \mu_1; \mu_2) \\
 a(\mu_2; i; \mu_1) &= \frac{i(\mu_1)}{i(i; \mu_1)} a(\mu_2; \mu_1) \\
 a(i; \mu_2; i; \mu_1) &= \frac{i(\mu_1)}{i(i; \mu_1)} a(i; \mu_2; \mu_1); \tag{5.48}
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\mu_l) &= 1 - \Phi_l m_l; \\
 i(\mu_l) &= m_l^N (\Phi_l - i m_l);
 \end{aligned}$$

Os conjuntos de equações (5.47) e (5.48) descrevem as reflexões à esquerda e à direita, respectivamente.

Iremos agora combinar as relações (5.43), (5.47) e (5.48) o que nos leva a relação do

tipo

$$\frac{E(\mu_1) \prod_{i=1}^N s(\mu_1; \mu_2)}{E(i; \mu_1) \prod_{i=1}^N s(\mu_2; \mu_1)} = 1 \quad (5.49)$$

ou ainda

$$\frac{E(\mu_2) \prod_{i=1}^N s(\mu_2; \mu_1)}{E(i; \mu_2) \prod_{i=1}^N s(\mu_1; \mu_2)} = 1: \quad (5.50)$$

Estas relações podem ser reescritas como

$$m_1^{2N} = \frac{\mu_1 \prod_{i=1}^N \Phi_{1m_1}}{\Phi_{1i} m_1} \prod_{i=1}^N \frac{\mu_1 \prod_{i=1}^N \Phi_{2m_1}}{\Phi_{2i} m_1} \prod_{i=1}^N \frac{s(\mu_1; \mu_2)}{s(\mu_2; \mu_1)} \prod_{i=1}^N \frac{s(\mu_2; i; \mu_1)}{s(i; \mu_1; \mu_2)}; \quad (5.51)$$

$$m_2^{2N} = \frac{\mu_1 \prod_{i=1}^N \Phi_{1m_2}}{\Phi_{1i} m_2} \prod_{i=1}^N \frac{\mu_1 \prod_{i=1}^N \Phi_{2m_2}}{\Phi_{2i} m_2} \prod_{i=1}^N \frac{s(\mu_2; \mu_1)}{s(\mu_1; \mu_2)} \prod_{i=1}^N \frac{s(\mu_1; i; \mu_2)}{s(i; \mu_2; \mu_1)}; \quad (5.52)$$

São estas as equações de Bethe para o setor $r = 2$.

A equação (5.30), onde temos $k_j = 0$ para cada borda da cadeia é satisfeita, pois as reflexões à esquerda e à direita já estão estabelecidas.

Similarmente, nós consideramos a consistência da equação (5.26), para $k_j = 1$ e $k_j = N$. Esta equação deve ser válida para $k = 1$ e $k = N$ com $b(0)$ e $b(N + 1)$ determinados por (5.38). Combinando as equações que descrevem a partícula k_j nas fronteiras, equações (5.33) e (5.34) com (5.26) nós obtemos duas condições

$$\Phi_3 b(1) = z_3 b(0) + \bar{z}_6 a(0; 1); \quad \Phi_3 = z_1 \prod_{i=1}^N \bar{z}_7 \prod_{i=1}^N E_{11} + E_{31}; \quad (5.53)$$

$$\Phi_4 b(N) = z_3 b(N + 1) + z_6 a(N; N + 1); \quad \Phi_4 = z_1 \prod_{i=1}^N z_7 \prod_{i=1}^N E_{11} + E_{13};$$

Substituindo as relações já estabelecidas para $a(k_1; k_2)$ e $b(k)$ e usando as equações de Bethe observamos que estas equações são satisfeitas.

Na presença de j_i nas bordas não temos nenhuma alteração nas condições já estabelecidas. Isto é devido a parametrização para a função de onda $b(k)$, que nos diz que

dinâmica de uma pseudopartícula $jk[i]$ é descrita por duas pseudopartículas $jk[0]i$, e isto é válido também nas reflexões.

A energia para o setor $r = 2$ é

$$E_2 = (N - 1)z_1 + l_{11} + r_{11} + \sum_{j=1}^N i_j (2z_1 + z_5 + \bar{z}_5 + m_j + m_j^{-1})^{\epsilon_j}; \quad (5.54)$$

com

$$m_j^{2N} = \prod_{i=1}^j \frac{\mu_i - \epsilon_1 m_j}{\epsilon_1 i - m_j} \prod_{i=j+1}^N \frac{\mu_i - \epsilon_2 m_j}{\epsilon_2 i - m_j} \prod_{k=1; k \neq j}^N \frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} \prod_{i=1}^j \frac{s(\mu_k; i - \mu_j)}{s(i - \mu_j; \mu_k)}; \quad (5.55)$$

$j = 1; 2;$

onde as funções $s(\mu_j; \mu_k)$ são dadas por (5.44).

5.5 Setor r geral

Os resultados obtidos podem ser generalizados para valores arbitrários de r , pois setores mais altos não trazem novas informações.

Em geral, o autoestado do setor r é construído por produtos diretos de N_0 estados $jk[0]i$ e N_i estados $jk[i]i$, com $r = N_0 + 2N_i$. Este autoestado é escrito como uma superposição de termos da forma

$$j\hat{A}_r i = j_0 i \in \hat{A}_{r-1}^{\otimes} + j_1 i \in \hat{A}_{r-2}^{\otimes}; \quad (5.56)$$

com $j\hat{A}_0 i = 1$, $j\hat{A}_1 i = j_0 i$. Para o setor $r = 3$ o autoestado de H tem a forma

$$j^a_{-3} i = \sum_{k_1 < k_2 < k_3} a(k_1; k_2; k_3) j_{k_1[0]; k_2[0]; k_3[0]} i + \sum_{k_1 < k_2} f b_1(k_1; k_2) j_{k_1[i]; k_2[0]} i + b_2(k_1; k_2) j_{k_1[0]; k_2[i]} i; \quad (5.57)$$

O ansatz para a função de onda do termo com N_0 estados $jk[0]i$; torna-se

$$a(k_1; k_2; \dots; k_r) = \sum_P \sum_{\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_r} a(\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_r) m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_r^{k_r}; \quad (5.58)$$

onde a soma é sobre todas as permutações, considerando as trocas de sinais em $\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_r$ e \sum_P troca de sinal a cada permutação. $a(k_1; k_2; \dots; k_r)$ é escrito com uma superposição de r ondas planas.

Para a função de onda com N_i estados $jk[i]i$; segue de (5.58), que temos o ansatz com a soma sobre as trocas de sinais dos $2N_i$ estados $jk[0]i$; situados dois a dois no mesmo sítio. Vejamos o exemplo para o setor $r = 3$

$$b_1(k_1; k_2) = \sum_P \sum_{\mu_1; \mu_2} \tilde{a} b_{11}(\mu_1; \mu_2) m_1^{k_1} m_2^{k_1} m_3^{k_2} + \sum_P \sum_{\mu_1; \mu_3} \tilde{a} b_{12}(\mu_1; \mu_3) m_1^{k_1} m_3^{k_1} m_2^{k_2} + \sum_P \sum_{\mu_2; \mu_3} \tilde{a} b_{13}(\mu_2; \mu_3) m_1^{k_1} m_2^{k_1} m_3^{k_2}; \quad (5.59)$$

com equação similar para $b_2(k_1; k_2)$.

Uma visão mais detalhada para o setor $r = 3$ pode ser vista no capítulo anterior, pois a parametrização para o caso de condições periódicas de contorno ou com termos de superfície é a mesma.

A correspondente energia para um dado setor r tem a forma da soma da energia de partículas livres,

$$E_r = (N_i - 1)z_1 + l_{11} + r_{11} + \sum_{j=1}^i i_j (2z_1 + z_5 + \bar{z}_5 + m_j + m_j^{-1})^{\epsilon_j}; \quad (5.60)$$

onde m_j são soluções das equações de Bethe

$$m_j^{2N} = \frac{\mu_{1j} \Phi_{1j} m_j}{\Phi_{1j} m_j} \prod_{k=1}^r \frac{\mu_{kj} \Phi_{kj} m_j}{\Phi_{kj} m_j} \prod_{k=1; k \neq j}^r \frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} \prod_{k=1}^r \frac{s(\mu_k; i \mu_j)}{s(i \mu_j; \mu_k)}; \quad (5.61)$$

$j = 1; \dots; r$

com

$$s(\mu_j; \mu_k) = (1 + m_j m_k + \Phi m_j) \frac{f}{z_3} (1 + m_j^2 m_k^2) i (1 + m_j m_k)(m_j + m_k) + \alpha m_j m_k + 2m_j i z_6 + \bar{z}_6 m_j m_k \Phi i \bar{z}_6 + z_6 m_j m_k \Phi ; \quad (5.62)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(z_1 i z_5 i \bar{z}_5) + z_7 + \bar{z}_7; \\ \Phi_1 &= z_1 i \bar{z}_5 i l_{11} + l_{22}; \quad \Phi_2 = z_1 i z_5 i r_{11} + r_{22}; \end{aligned} \quad (5.63)$$

As equações de Bethe de...nem um sistemas de r equações a serem satisfeitas pelos parâmetros μ_j ($m_j = e^{i\mu_j}$):

Seguiremos no próximo capítulo explicitando para cada modelo o espectro de energia.

Capítulo 6

Soluções para os Modelos de 19-vértices com Termos de fronteiras

Neste capítulo nós usaremos os resultados apresentados no capítulo anterior para mostrarmos as soluções para cada modelo de 19-vértices. Aqui reproduziremos os modelos ZF e IK resultados já conhecidos na literatura e mostraremos novos resultados para os modelos supersimétricos $sl(2|1)$ e $osp(1|2)$ aplicando a generalização do ansatz de Bethe de coordenadas para cadeias quânticas de spin-1 abertas que foi apresentado no capítulo anterior. Os Hamiltonianos aqui diagonalizados estão associados ao formalismo desenvolvido por Sklyanin [14] para cadeias quânticas abertas.

Para cadeias quânticas de spin-1 a primeira solução foi apresentada por Mezincescu et al [22] para o modelo ZF utilizando o processo de fusão [36]. Posteriormente, foram encontradas soluções para o modelo IK [25, 23]. No entanto, nenhum tratamento conseguiu fechar as soluções para todos os modelos 19-vértices.

6.1 Modelo Zamolodchikov-Fateev

Os elementos de H_{kk+1} (2.32) para o modelo ZF são dados por (2.35)

$$\begin{aligned} z^2 &= 1; \quad \bar{z} = \sinh 2\zeta; \quad z_1 = 0; \quad z_3 = i; \quad z_4 = i 2 \cosh 2\zeta; \\ \bar{z}_5 &= z_5 = i \cosh 2\zeta; \quad \bar{z}_6 = z_6 = 2 \cosh \zeta; \quad \bar{z}_7 = z_7 = i 1 i 2 \cosh 2\zeta; \end{aligned}$$

Para $H_{b.t.}$ que descreve a energia nas fronteiras os termos à esquerda e à direita, segundo (3.50), são dados em (3.51) e (3.52) e valem

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{1}{2} \bar{z}_{11} \sinh 2\zeta; \quad l_{22} = 0; \quad l_{33} = \frac{\bar{z}_{11} \cosh \zeta i 2 \sinh \zeta}{\bar{z}_{11} \sinh \zeta i 2 \cosh \zeta} \sinh 2\zeta; \\ r_{11} i r_{22} &= \frac{\bar{z}_{11} \cosh \zeta i 2 \sinh \zeta}{\bar{z}_{11} \sinh \zeta i 2 \cosh \zeta} \sinh 2\zeta; \quad r_{33} i r_{22} = \frac{1}{2} \bar{z}_{11} \sinh 2\zeta; \\ r_{22} &= i \frac{1 \sinh 4\zeta}{4 \sinh 3\zeta} \frac{[\bar{z}_{11} \sinh \zeta + 2 \cosh \zeta]^2 i 4[1 + 2 \cosh 2\zeta]}{\bar{z}_{11} \sinh \zeta i 2 \cosh \zeta}; \end{aligned}$$

Usando estas equações nós podemos usar o resultado para o autovalor do Hamiltoniano, equação (5.60), para descrevermos a energia para a cadeia de spin-1 com termos de superfície ZF para um setor r

$$E_r = \sinh 2\zeta \left[\frac{\mu}{2} \bar{z}_{11} + \frac{\bar{z}_{11} \cosh \zeta i 2 \sinh \zeta}{\bar{z}_{11} \sinh \zeta i 2 \cosh \zeta} + r_{22} + \sum_{j=1}^{\infty} (i 2 \cosh 2\zeta + m_j + m_j^{-1}) \right]; \quad (6.1)$$

com $m_j = e^{i\mu_j}$ satisfazendo as equações de Bethe descritas na equação (5.61), que para o modelo ZF são

$$\begin{aligned} m_j^{2N} &= \frac{\mu}{\Phi_1 i m_j} \prod_{k=1}^{\mu} \frac{\Phi_2 m_j i 1}{\Phi_2 i m_j} \prod_{k \neq j}^{\mu} \frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} \prod_{k=1}^{\mu} \frac{s(\mu_k; i \mu_j)}{s(i \mu_j; \mu_k)}; \\ j &= 1; 2; \dots; n \end{aligned} \quad (6.2)$$

com

$$\Phi_1 = \sinh 2\zeta \coth 2\zeta_i \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_{11}}; \quad \Phi_2 = \sinh 2\zeta \coth 2\zeta_i \frac{\mu}{\mu_{11}} \frac{\cosh \zeta_i + 2 \sinh \zeta_i}{\sinh \zeta_i + 2 \cosh \zeta_i}; \quad (6.3)$$

E para o modelo ZF quando duas partículas sofrem espalhamento, ele é descrito por

$$\frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} = \frac{1 + m_j + m_k + m_j m_k i (\Phi + 2)m_j}{1 + m_j + m_k + m_j m_k i (\Phi + 2)m_k}; \quad (6.4)$$

segundo as funções s dadas por (5.62), com

$$\Phi = 2 \cosh 2\zeta; \quad (6.5)$$

Este espectro de energia (E_r) foi apresentado primeiramente por Mezincescu et al[22], através da generalização do processo chamado fusão[36] para o Método do Espalhamento Inverso Quântico desenvolvido por Sklyanin[14] para cadeias quânticas abertas. Esta generalização do processo de fusão foi utilizada por Yung e Batchelor[25] para resolver o modelo ZF com não homogeneidade.

Para o caso particular dos parâmetros livres μ_{11}^- e μ_{11}^+ serem escritos por

$$\mu_{11}^- = 2 \coth \zeta_i; \quad \mu_{11}^+ = 2 \coth \zeta_+$$

a cadeia quântica tem simetria de grupo quântico se nós fizermos $\mu_{11}^- = 1$; assim o Hamiltoniano desta cadeia tem invariância $U_q(\mathfrak{su}(2))$ [22].

6.2 Modelo Izergin-Korepin

A energia no interior da cadeia para o modelo Izergin-Korepin é descrita por H_{kk+1} (2.32), e tem seus elementos dados por (2.36). São eles

$$\begin{aligned} z^2 &= 1; & \theta &= i 2 \sinh 2\zeta; & z_1 &= 0; & z_3 &= \frac{\cosh \zeta}{\cosh 3\zeta}; & z_4 &= i 2 \frac{\sinh \zeta \sinh 4\zeta}{\cosh 3\zeta} \\ z_5 &= i e^{i 2\zeta}; & \bar{z}_5 &= i e^{2\zeta}; & z_6 &= e^{2\zeta} \frac{\sinh 2\zeta}{\cosh 3\zeta}; & \bar{z}_6 &= i e^{i 2\zeta} \frac{\sinh 2\zeta}{\cosh 3\zeta} \\ z_7 &= i \frac{\cosh \zeta}{\cosh 3\zeta} i e^{i 4\zeta} + 2 \sinh 2\zeta; & \bar{z}_7 &= i \frac{\cosh \zeta}{\cosh 3\zeta} i e^{4\zeta} - i 2 \sinh 2\zeta; \end{aligned}$$

Para os termos de fronteiras descrito por $H_{b,t}$: temos nove possibilidades, pois eles são construídos a partir das matrizes de reflexões, e existem três soluções para cada equação de reflexão. Assim, nós podemos escrever $H_{b,t}$: de acordo com os pares de soluções $(K^-(u), K^+(u))$. Vamos detalhar três pares possíveis que são:

2 Caso $K^-(u) = 1$ e $K^+(u) = M$:

Os termos à esquerda e à direita são dados segundo (3.50), por (3.53) e (3.54), e são

$$l_{11} = l_{22} = l_{33} = 0$$

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = i 2 \frac{\cosh 4\zeta \sinh 2\zeta}{\sinh 6\zeta};$$

O ansatz de Bethe de coordenadas, pela equação (5.60), descreve para este caso o espectro

$$E_r = i 2 \frac{\cosh 4\zeta \sinh 2\zeta}{\sinh 6\zeta} + \sum_{j=1}^{\infty} i \left(2 \cosh 2\zeta + m_j + m_j^{-1} \right); \quad (6.6)$$

com $m_j = e^{i\mu_j}$: As equação de Bethe (5.61), para o modelo IK com $K^i(u) = 1$ e $K^+(u) = M$; são

$$m_j^{2N} = \prod_{i=1}^N \frac{1 - e^{2\tau} m_j}{e^{2\tau} - m_j} \prod_{i=1}^N \frac{1 - e^{i 2\tau} m_j}{e^{i 2\tau} - m_j} \prod_{k=1; k \neq j}^N \frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} \prod_{i=1}^N \frac{s(\mu_k; i \mu_j)}{s(i \mu_j; \mu_k)} ; \quad (6.7)$$

$j = 1; \dots; r$

e, o espalhamento entre duas partículas é dado por

$$\frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} = \frac{1 + m_j m_k i \Phi m_j}{1 + m_j m_k i \Phi m_k} \prod_{i=1}^N \frac{1 + m_j m_k i m_j i m_k i (\Phi i 2) m_k}{1 + m_j m_k i m_j i m_k i (\Phi i 2) m_j} ; \quad (6.8)$$

Esta função s é obtida a partir de (5.62), e

$$\Phi = 2 \cosh 2\tau;$$

Mezincescu e Nepomechie [32], tem observado que o Hamiltoniano (3.55)

$$H = \sum_{k=1}^N H_{k;k+1} i 2 \frac{\cosh 4\tau \sinh 2\tau}{\sinh 6\tau} 1_N;$$

para este caso ($K^i(u) = 1$ e $K^+(u) = M$), é grupo quântico invariante. Este Hamiltoniano tem a fronteira à esquerda livre e à direita as reflexões são acrescentadas de uma constante multiplicativa.

A matriz de transferência deste caso foi diagonalizada pelo ansatz de Bethe analítico[24] onde é usado a invariância $U_q(\mathfrak{su}(2))$: Esta mesma invariância por grupo quântico foi utilizada por Yung e Batchelor[25] para determinar propriedades dos autovalores da matriz de transferência para o caso de uma cadeia não homogênea através do ansatz de Bethe analítico.

² Casos ($K^i(u) = F^+$; $K^+(u) = G^+$) e ($K^i(u) = F^-$; $K^+(u) = G^-$):

Para os casos em que temos os pares $(K^-(u) = F^+; K^+(u) = G^+)$ e $(K^-(u) = F^-; K^+(u) = G^-)$ onde F^\pm e G^\pm são dadas pelas equações (3.19) e (3.21), podemos estudar como um único caso.

O Hamiltoniano para estes dois casos tem uma forma que difere de um para o outro por trocas de sinais. Estes dois Hamiltonianos são escritos por

$$H^{(S)} = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k,k+1} + \sinh 2\tau \sum_{i=1}^N S_1^z S_N^z + \frac{\sinh 3\tau \dots i}{\cosh 3\tau} \left[(S_1^z)^2 + (S_N^z)^2 \right] + r_{22}^{(S)} 1_N; \quad (6.9)$$

onde $+$ se refere ao par $(F^+; G^+)$ e $-$ ao par $(F^-; G^-)$: Estes Hamiltonianos foram apresentados na subsecção 3.5.2.. Nestes casos os Hamiltonianos não possuem invariância $U_q(\mathfrak{su}(2))$ [24], mas Nepomechie [38] destacou que as soluções para a matriz de transferência têm simetria $U_q(\mathfrak{o}(3))$.

As energias para estas cadeias pelo ansatz de Bethe de coordenadas é

$$E_r^{(S)} = 2 \sinh 2\tau \frac{\sinh 3\tau \dots i}{\cosh 3\tau} + r_{22}^{(S)} + \sum_{j=1}^N i \left[2 \cosh 2\tau + m_j + m_j^{-1} \right]; \quad (6.10)$$

com $m_j = e^{i\mu_j}$ satisfazendo as equações de Bethe

$$m_j^{(S)} \prod_{j=1}^N = \frac{\tilde{A}_1 \prod_{i=1}^N \phi_1^{(S)} m_j}{\phi_1^{(S)} i m_j} \frac{\tilde{A}_2 \prod_{i=1}^N \phi_2^{(S)} m_j}{\phi_2^{(S)} i m_j} \prod_{k=1; k \neq j}^N \frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} \frac{s(\mu_k; i \mu_j)}{s(i \mu_j; \mu_k)}; \quad (6.11)$$

$j = 1; \dots; r$

onde

$$\phi_1^{(S)} = e^{2\tau} i \sinh 2\tau \frac{e^{3\tau \dots i}}{\cosh 3\tau}; \quad \phi_2^{(S)} = e^{i 2\tau} + \sinh 2\tau \frac{e^{i 3\tau} S i}{\cosh 3\tau}; \quad (6.12)$$

e, para $\frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)}$ temos o mesmo espalhamento do caso $(1; M)$ (6.8), pois ele é independente dos termos de fronteiras. Este mesmo problema só que para uma cadeia não homogênea

foi estudado em [25] usando o ansatz de Bethe analítico.

O modelo Izergin-Korepin também foi estudado por Fan [23] para matrizes de reflexões dadas por (3.28). Neste trabalho é apresentado a solução do modelo IK com matrizes de reflexão diagonais usando o ansatz de Bethe algébrico.

6.3 Modelo $sl(2j1)$:

O Hamiltoniano para o modelo $sl(2j1)$ foi apresentado na equação (2.32) com os elementos de H_{kk+1} dados pela equação (2.37), e o termo de fronteira na forma (3.50) foi obtido pelas expressões de l_{ii} e r_{ii} dadas pelas equações (3.62) e (3.63).

O ansatz apresentado no capítulo anterior descreve a energia, de acordo com (5.60), para o modelo $sl(2j1)$ como

$$E_r = \sinh 2\tau \left[\frac{\mu}{2} \frac{1}{11} + \frac{\textcircled{11} \sinh \tau}{\textcircled{11} \cosh \tau} \frac{i}{2} \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \right] + r_{22} + \sum_{j=1}^{\infty} (i \cosh 2\tau + m_j + m_j^{-1}) \quad (6.13)$$

onde $m_j = e^{i\mu_j}$ são soluções das equações de Bethe (5.61)

$$m_j^{2N} = \frac{\mu}{\Phi_1} \frac{m_j - i}{m_j} \frac{1}{\Phi_2} \frac{m_j - i}{m_j} \prod_{k \in j} \frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} \frac{s(\mu_k; i - \mu_j)}{s(i - \mu_j; \mu_k)} \quad (6.14)$$

$j = 1; 2; \dots; n$

com,

$$\Phi_1 = \sinh 2\tau \coth 2\tau \frac{i}{2} \frac{1}{11} \quad ; \quad \Phi_2 = \sinh 2\tau \coth 2\tau \frac{i}{2} \frac{\textcircled{11} \sinh \tau}{\textcircled{11} \cosh \tau} \frac{i}{2} \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \quad (6.15)$$

e,

$$\frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} = \frac{1 + \kappa_j \kappa_k + \kappa_j \kappa_k (\Phi - 2)^{\kappa_j}}{1 + \kappa_j \kappa_k + \kappa_j \kappa_k (\Phi - 2)^{\kappa_k}} \quad (6.16)$$

com

$$\Phi = 2 \cosh 2\tau:$$

Estes resultados foram apresentados pela primeira vez em [26], e tratam-se de resultados inéditos que fazem parte deste trabalho.

6.4 Modelo $\text{osp}(1|2)$

Os elementos de matriz para $H_{k,k+1}$ para o modelo $\text{osp}(1|2)$ são dados por (2.38). Para os termos de fronteiras existem nove termos diferentes, pois existem três possibilidades para cada matriz de reflexão $K^-(u)$ e $K^+(u)$: Como procedemos com o modelo Izergin-Korepin apresentaremos três termos dos nove termos de fronteiras possíveis.

² Caso $K^-(u) = 1$ e $K^+(u) = M$:

Neste caso, o Hamiltoniano tem um das bordas livre sem termos de superfície e o outro é proporcional a identidade. Segundo a equação (3.66), este Hamiltoniano é

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} H_{k,k+1} + 2 \frac{\cosh 4\tau \sinh 2\tau}{\sinh 6\tau} 1_N:$$

Note que este Hamiltoniano é similar ao caso do modelo IK, e em [24] é destacado a álgebra quântica invariante.

O espectro de energia correspondente é, segundo (5.60),

$$E_r = 2 \frac{\cosh 4\zeta \sinh 2\zeta}{\sinh 6\zeta} + \sum_{j=1}^r \mu_j \left(2 \cosh 2\zeta + m_j + m_j^{-1} \right)^\zeta \quad (6.17)$$

onde $m_j = e^{i\mu_j}$ são soluções das equações de Bethe

$$m_j^{2N} = \prod_{i=1}^r \frac{1 - e^{i 2\zeta} m_j}{e^{i 2\zeta} - m_j} \prod_{i=1}^r \frac{1 - e^{2\zeta} m_j}{e^{2\zeta} - m_j} \prod_{k=1; k \neq j}^r \frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} \prod_{k=1; k \neq j}^r \frac{s(\mu_k; i \mu_j)}{s(i \mu_j; \mu_k)}; \quad (6.18)$$

$$j = 1; \dots; r$$

A razão entre as funções s que descreve o espalhamento para o modelo $osp(1|2)$ é dada por

$$\frac{s(\mu_j; \mu_k)}{s(\mu_k; \mu_j)} = \frac{1 + m_j m_k i^{-\zeta} m_j}{1 + m_j m_k i^{-\zeta} m_k} \frac{1 + m_j m_k + m_j + m_k i^{-\zeta} (\zeta + 2) m_k}{1 + m_j m_k + m_j + m_k i^{-\zeta} (\zeta + 2) m_j}; \quad (6.19)$$

onde temos utilizado a equação (5.62), com

$$\zeta = 2 \cosh 2\zeta;$$

2 Casos $(K^i(u) = F^S; K^i(u) = G^S)$:

Nós vamos descrever os casos $(K^i(u) = F^+; K^i(u) = G^+)$ e $(K^i(u) = F^-; K^i(u) = G^-)$ com uma só abordagem, pois estes dois casos podem ser diferenciados por um sinal que será $+$ para o par $(F^+; G^+)$ e $-$ para o par $(F^-; G^-)$.

Os termos de fronteiras são descritos na secção 3.4. E, a autoenergia vale

$$E_r = 2 \sin 2\zeta \coth(3\zeta=2) + r_{22} + \sum_{j=1}^r \mu_j \left(2 \cosh 2\zeta + m_j + m_j^{-1} \right)^\zeta \quad (6.20)$$

com equações de Bethe dada por

$$m_j^{2N} = \frac{\mu_{1j} \Phi_{1j}^S m_j}{\Phi_{1j}^S} \prod_{k=1; k \neq j}^r \frac{\mu_{1j} \Phi_{2j}^S m_j}{\Phi_{2j}^S} \prod_{k=1; k \neq j}^r \frac{\mu_{S(\mu_j; \mu_k)}}{S(\mu_k; \mu_j)} \prod_{k=1; k \neq j}^r \frac{\mu_{S(\mu_k; \mu_j)}}{S(\mu_j; \mu_k)}; \quad (6.21)$$

$j = 1; \dots; r:$

A razão $\frac{S(\mu_j; \mu_k)}{S(\mu_k; \mu_j)}$ é apresentada na equação (6.19). E, temos para $(F^+; G^+)$

$$\Phi_1^+ = e^{i 2'} i \frac{e^{i 3' = 2}}{\sinh(3' = 2)} \sinh 2'; \quad \Phi_2^+ = e^{2'} i \frac{e^{3' = 2}}{\sinh(3' = 2)} \sinh 2' \quad (6.22)$$

e para o par $(F^-; G^-)$

$$\Phi_1^- = e^{i 2'} + \frac{e^{i 3' = 2}}{\cosh(3' = 2)}; \quad \Phi_2^- = e^{2'} i \frac{e^{3' = 2}}{\cosh(3' = 2)} \sinh 2' \quad (6.23)$$

Os resultados para todos os casos do modelo $osp(1|2)$; são originais e foram apresentados em [26].

6.5 Relação Modelo Graduado e Não-Graduado

6.5.1 Equação de Yang-Baxter

A equação de Yang-Baxter (2.4) pode ser reescrita em termos de uma matriz \mathcal{R} na forma

$$\mathcal{R}_{12}(u) \mathcal{R}_{23}(u+v) \mathcal{R}_{12}(v) = \mathcal{R}_{23}(v) \mathcal{R}_{12}(u+v) \mathcal{R}_{23}(u); \quad (6.24)$$

Note que somente \mathcal{R}_{12} e \mathcal{R}_{23} estão envolvidos, enquanto na forma (2.4) \mathcal{R}_{13} está presente. A equação de Yang-Baxter escrita em termos de \mathcal{R} tem uma forma comum tanto para modelos não-graduados como para modelos graduados. A matriz \mathcal{R} pode ser escrita por $\mathcal{R} = P R$, onde R satisfaz a equação de Yang-Baxter usual (2.4), e P é o operador de

permutação não-graduado

$$P = \begin{matrix} & \text{O} & & & & & & & & \text{1} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \\ \text{F} \\ \text{G} \\ \text{H} \\ \text{I} \\ \text{J} \\ \text{K} \\ \text{L} \\ \text{M} \\ \text{N} \\ \text{O} \\ \text{P} \\ \text{Q} \\ \text{R} \\ \text{S} \\ \text{T} \\ \text{U} \\ \text{V} \\ \text{W} \\ \text{X} \\ \text{Y} \\ \text{Z} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \end{matrix}; \tag{6.25}$$

com $2 = 1$: Se usarmos o operador de permutação graduado P , a equação (6.25) tem $2 = j 1$ (graduação BFB) e a matriz $R = P R$ satisfaz a versão graduada para a equação de Yang-Baxter.

6.5.2 Modelo Graduado e Não-Graduado

Dada uma matriz R para os modelos 19-vértices não-graduados (2.20), multiplicando esta matriz pela matriz diagonal

$$\text{D} = \text{PP} = \text{PP} = \begin{matrix} & \text{O} & & & & & & & & \text{1} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \\ \text{F} \\ \text{G} \\ \text{H} \\ \text{I} \\ \text{J} \\ \text{K} \\ \text{L} \\ \text{M} \\ \text{N} \\ \text{O} \\ \text{P} \\ \text{Q} \\ \text{R} \\ \text{S} \\ \text{T} \\ \text{U} \\ \text{V} \\ \text{W} \\ \text{X} \\ \text{Y} \\ \text{Z} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \end{matrix}; \tag{6.26}$$

nós obtemos um matriz R para um modelo graduado. Se R é uma matriz de um modelo graduado o resultado é que a nova matriz R corresponde a um modelo não-graduado. Esta nova matriz $R^0 = \pm R$, para modelos inicialmente não-graduados, tem a forma

$$R^0(u) = \begin{array}{c|cc|c} \mathbf{0} & & & \mathbf{1} \\ \hline x_1 & & & \\ \hline & x_2 & x_5 & \\ \hline & x_3 & x_6 & x_7 \\ \hline y_5 & x_2 & & \\ \hline & i y_6 & i x_4 & i x_6 \\ \hline & & x_2 & x_5 \\ \hline & y_7 & y_6 & x_3 \\ \hline & & y_5 & x_2 \\ \hline & & & x_1 \\ \hline \mathbf{1} & & & \end{array} : \quad (6.27)$$

Esta matriz R^0 difere da matriz R pelo fato que a quinta linha apresenta-se multiplicada por -1 devido a graduação BFB.

O Hamiltoniano continua sendo dado por (2.32) só que agora temos uma troca na regra para 2 , com $^2 = \pm 1$ para os modelos não-graduados e $^2 = 1$ para modelos graduados.

6.5.3 Relação entre Modelo Izergin-Korepin e Modelo osp(1j2)

A partir da matriz $R(u; \zeta)$ do modelo não-graduado Izergin-Korepin nós podemos descrever o modelo graduado osp(1j2) como foi apresentado na subsecção anterior. Seguiremos exemplificando estas transformações.

Primeiro vamos fazer a transformação

$$R^0(u; \zeta) = \frac{1}{2i} R(2u; i \zeta i \frac{i}{2}) \quad H_{k;k+1}^0(\zeta) = H_{k;k+1}(i \zeta i \frac{i}{2}); \quad (6.28)$$

A matriz $R_{1Kq}(u; \zeta) = \pm R^0$ é uma solução para a equação de Yang-Baxter com graduação

(2.4), e corresponde a uma versão graduada do modelo Izergin-Korepin. Os elementos de $R_{IKg}(u; \hbar)$ são

$$\begin{aligned}
 x_1(u) &= \sinh(u + 2\hbar) \sinh(u + 3\hbar) \\
 x_2(u) &= i \sinh u \sinh(u + 3\hbar) \\
 x_3(u) &= \sinh u \sinh(u + \hbar) \\
 x_4(u) &= \sinh u \sinh(u + 3\hbar) i \sinh 2\hbar \sinh 3\hbar \\
 x_5(u) &= e^{i u} \sinh 2\hbar \sinh(u + 3\hbar) \\
 y_5(u) &= e^u \sinh 2\hbar \sinh(u + 3\hbar) \\
 x_6(u) &= i e^{i u} \sinh 2\hbar \sinh u \\
 y_6(u) &= i e^{u+2\hbar} \sinh 2\hbar \sinh u \\
 x_7(u) &= e^{i u} \sinh 2\hbar i \sinh(u + 3\hbar) + e^{i \hbar} \sinh u \\
 y_7(u) &= e^u \sinh 2\hbar (\sinh(u + 3\hbar) + e^{\hbar} \sinh u)
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Usando a simetria dos modelos 19-vértices:

$$x_2(u) = S x_2(u)$$

$$x_6(u) = S x_6(u)$$

e,

$$y_6(u) = i y_6(u);$$

nós podemos ver que os elementos de $R_{IKg}(u; \hbar)$ são idênticos aos elementos de $R(u; \hbar)$ para o modelo $osp(1|2)$; exceto por um fator $x_6 = S x_6$ e $y_6 = i y_6$. Contudo, nós encontramos para $R_{IKg}(u; \hbar)$ as mesmas matrizes de reflexões do modelo $osp(1|2)$: Isto

significa que temos as mesmas simetrias. Conseqüentemente, ambos os Hamiltonianos para cadeias abertas tem os mesmos termos de fronteiras. E se olharmos para a equação (5.44) nós podemos ver que o espalhamento (5.43) é invariante pela troca $z_6 \leftrightarrow \bar{z}_6$ e $\bar{z}_6 \leftrightarrow i\bar{z}_6$. Em outras palavras, a descrição prevista pelo ansatz de Bethe de coordenadas mostra o mesmo espectro para ambos os modelos: Izergin-Korepin graduado e modelo $osp(1|2)$.

De forma semelhante podemos mapear o modelo $osp(1|2)$ no modelo Izergin-Korepin.

6.5.4 Relação entre Modelo Zamolodchikov-Fateev e o Modelo $sl(2|1)$

Da mesma forma que relacionamos os modelos Izergin-Korepin e o Modelo $osp(1|2)$; podemos relacionar os modelos Zamolodchikov-Fateev e o Modelo $sl(2|1)$:

Como primeiro passo vamos fazer a transformação

$$R(u; \lambda) = R^0(u; \lambda) = \frac{1}{i} R(u; \lambda; i \frac{\lambda}{2}); \quad (6.30)$$

A versão graduada para o modelo ZF é definida por

$$R_{ZFg}(u; \lambda) = i R^0(u; \lambda); \quad (6.31)$$

cujo elementos são

$$\begin{aligned}
 x_1(u) &= \cosh(u + \eta) \sinh(u + 2\eta); \\
 x_2(u) &= i \sinh u \cosh(u + \eta); \\
 x_3(u) &= \sinh u \cosh(u - \eta); \\
 x_4(u) &= i \sinh u \cosh(u + \eta) + \sinh 2\eta \cosh \eta; \\
 y_5(u) &= x_5(u) = \sinh 2\eta \cosh(u + \eta); \\
 y_6(u) &= x_6(u) = i \sinh 2\eta \sinh u; \\
 y_7(u) &= x_7(u) = \sinh 2\eta \cosh \eta;
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Pelas simetrias dos modelos 19-vértices, nós podemos ver que para uma transformação canônica: $x_6 \rightarrow x_6^0(u) = S i x_6(u)$, os elementos de $R_{ZFg}(u; \eta)$ são idênticos aos de $R(u; \eta)$ para o modelo $sl(2|1)$. Eles também possuem a mesma matriz K ; e o espectro é idêntico segundo o ansatz de Bethe de coordenadas. De forma similar com a matriz $R(u; \eta)$ do modelo $sl(2|1)$ podemos chegar no modelo ZF.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Muitos trabalhos têm mostrado o interesse em encontrar soluções para cadeias quânticas abertas, este interesse é desde modelos de spin-1=2 até modelos de números de estados mais altos.

Soluções pelo ansatz de Bethe para matrizes de reflexões $K^S(u)$ diagonais, ou seja, termos de fronteiras diagonais, foram encontrados para os modelos de dois estados (6-vértices [14, 16] e 8-vértices [39]). Para o caso de $K^S(u)$ não-diagonais trata-se de um problema em aberto.

Para os modelos de 19-vértices o ansatz de Bethe de coordenadas se apresentou como um grande desafio até o trabalho [21] para uma cadeia com condições periódicas de contorno. Para uma cadeia com termos de superfície o ansatz de Bethe algébrico encontrou algumas soluções para os modelos ZF e IK, e para o ansatz de Bethe de coordenadas a generalização para cadeias de spin-1 com fronteiras apresentado neste trabalho é único na literatura.

Usando os resultados do ansatz de Bethe de coordenadas é possível encontramos todos os espectros para termos de superfícies diagonais que satisfazem as equações de reflexões proposta por Sklyanin [14]. São apresentados, utilizando os resultados do ansatz de Bethe de coordenadas, as soluções para os modelos ZF e $sl(2|1)$, e para os modelos IK e $osp(1|2)$ são apresentadas três soluções das nove soluções possíveis para cada modelo. Assim,

reproduzimos os resultados já conhecidos na literatura e apresentamos novos resultados para os modelos $sl(2|1)$ e $osp(1|2)$:

Como uma aplicação direta mostramos que dado um modelo sem graduação nós podemos gerar um modelo graduado, ou vice-versa, assim esclarecemos a relação entre os modelos:

$${}^2 ZF \ni sl(2|1)$$

$${}^2 IK \ni osp(1|2)$$

Logo após divulgarmos nossos resultados Saleur e Wehefritz-Kaufmann [40] apresentaram a conexão entre os modelos $IK \ni osp(1|2)$:

A parametrização apresentada nos capítulos 4 e 5 pode ser usada para modelos de vértices de estados maiores. Podemos então usar a generalização para o ansatz de Bethe de coordenadas apresentada no capítulo 5 para resolvermos cadeias quânticas abertas de spin mais altos. Por exemplo, para uma cadeia de spin $3=2$ temos quatro estados que são: $jk [3=2]i$; $jk [1=2]i$; $jk [i-1=2]i$ e $jk [i-3=2]i$: O estado $jk [1=2]i$ pode ser parametrizado como uma onda plana, e os estados $jk [i-1=2]i$ e $jk [i-3=2]i$ como dois e três estados $jk [1=2]i$ no mesmo sítio, respectivamente, multiplicado por um função peso.

Uma continuação natural deste trabalho é considerarmos uma solução via ansatz de Bethe algébrico para todos os modelos 19-vértices. Podemos, também, incluir não homogeneidade na cadeia, e estudarmos o limite semiclássico [10] gerando os Hamiltonianos de Gaudin [11] com termos de fronteiras [41] associados a estas cadeias quânticas abertas, bem como, encontrarmos as soluções para as equações de Knizhnik-Zamolodchikov para o modelo $SU(2)$ Wess-Zumino-Novikov-Witten. Ainda podem ser feitos estudos do estado fundamental, e primeiros estados excitados que poderão esclarecer diferenças físicas para $K^S(u)$ diagonais diferentes nos modelos IK e $osp(1|2)$:

Referências Bibliográficas

- [1] H. Bethe, Z. Physik 71 (1931), 205.
- [2] R.J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, London-1982. R.J. Baxter, Annals of Physics 70 (1972), 193. R. J. Baxter, Annals of Physics 80 (1972), 323.
- [3] Y. A. Izyumov and Y. N. Skryabin, Statistical of Magnetically Ordered Systems, Plenum Publishing, New York-1988.
- [4] F. C. Alcaraz et al, Annals of Physics 230 (1994), 250.
- [5] V.E. Korepin, A.G. Izergin and N.M. Bogoliubov, Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, Cambridge-1992.
- [6] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla and K. Rothe, Nonperturbative Methods in Two-Dimensional Quantum Field Theory (Second Edition, World Scientific, Singapore, 2001).
- [7] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, Uspekhi Mat. Nauk 34 (1979) 13.
- [8] V.I. Virchirko and N.Yu Reshetikhin, Theor. Math. Phys. 56 (1983) 805.
- [9] V.E. Korepin, Commun. Math. Phys. 94 (1982) 67–113.
- [10] H.M. Babujian and R. Flume, Mod. Phys. Lett. A9 (1994)2029.

- [11] M. Gaudin, La Fonction d 'onde de Bethe, Paris: Masson (1983). M. Gaudin, Phys. Review A 4 (1971), 386.
- [12] V.E. Korepin and F.H.L. Essler (Editors), Exactly Solvable Models of Strongly Correlated Electrons ,World Scienti...c, Singapore-1994.
- [13] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Zap. Nauchn. Semin. LOMI 95 (1980), 129.
- [14] E. K. Sklyanin, J. Phys. A: Math Gen. 21 (1988), 2375.
- [15] I. V. Cherednik, Theor. Math. Phys. 61 (1984), 977.
- [16] F. C. Alcaraz et al, J. Physics A: Math. Gen. 20 (1987), 6397.
- [17] A. B. Zamolodchikov and A. V. Fateev Sov. J. Nucl. Phys. 32 (1980), 298.
- [18] A. G. Izergin and V. E. Korepin Com. Math. Phys. 79 (1981), 303.
- [19] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, J. Sov. Math. 19 (1982), 1596.
- [20] V. V. Bazhanov and A. G. Schadrnikov Theor. Math., Phys. 73 (1989), 1302.
- [21] A. Lima-Santos J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999), 1819.
- [22] L. Mezincescu, R.I. Nepomechie and V. Rittenberg, Phys. Lett. B147 (1990), 5657.
- [23] H. Fan, Nucl. Phys. B488 (1997), 409.
- [24] L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, Nucl.Phys: B 372 (1992), 597.
- [25] C.M. Yung and M.T. Batchelor, Nucl. Phys. B435 (1995), 430.
- [26] E. C. Fireman, A. Lima-Santos and W. Utiel, Nuclear Physics B aceito para publicação (2002).
- [27] L. A. Takhtadzhan and L. D. Faddeev, Russian Math. Survey 34 (1979), 5, 11.
- [28] A. A. Belavin and V. G. Drinfeld, Func. Anal. Appl. 16 (1982), 159.

- [29] M. Jimbo, *Commun. Math. Phys.* 102 (1986), 537.
- [30] L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, *J. Phys. A: Math Gen.* 24 (1991), L17.
- [31] H. Fan and M. Wadati, "Integrable boundary impurities in the t-J model with different gradings", arXiv: cond-mat/0008429.
- [32] L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, *Int. J. Mod. Phys. A* 6 (1991), 5231.
- [33] M.J. Martins, *Nucl. Phys. B* 450 (1995), 768.
- [34] L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, *Quantum Field Theory, Statistic Mechanics, Quantum Group and Topology* (eds T. Curtright, L. Mezincescu and R. Nepomechie) World Scientific 1992.
- [35] A. Lima-Santos, *Nucl. Phys. B* 558 (1999), 637.
- [36] P. P. Kulish et al, *Lett. Math. Phys.* 5 (1981), 393; H. M. Babujian and A. M. Tselick, *Nucl. Phys. B* 265 (1986), 24; A. N. Kirilov and N. Yu Reshetikhin *J. Phys. A: Math Gen.* 19 (1986), 565.
- [37] V. A. Tarasov *Theor. Math. Phys.* 56, 1988, 793.
- [38] R. I. Nepomechie, *J. Phys. A: Math Gen.* 33 (2000), L21.
- [39] H. Fan, B. Hou, K. Shi and Z. Yang, *Nucl. Phys. B* 478 (1996), 723.
- [40] H. Saleur and B. Wehefritz-Kaufmann, *Integrable quantum field theories with $OSP(m/2n)$ symmetries*, arXiv: hep-th/0112095.
- [41] K. Hikami, *J. Phys. A: Math. Gen.* 28 (1995), 4997.