

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PROCESSOS QUÂNTICOS EM CAVIDADES  
COM A GEOMETRIA VARIÁVEL

Mauro Antonio Andreata

Tese submetida ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Viktor Dodonov

São Carlos, 11 de março de 2004

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

A557pq

Andreata, Mauro Antonio.

Processos quânticos em cavidades com a geometria variável / Mauro Antonio Andreata . -- São Carlos : UFSCar, 2004.

129 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Mecânica quântica. 2. Efeito Casimir dinâmico. 3. Deflexão quântica. I. Título.

CDD: 530.12 (20<sup>a</sup>)

"Aplausos, quando os não fundamenta o mérito, afagam certamente o espírito e dão algum verniz de celebridade; mas quem tem vontade de aprender e quer fazer alguma coisa, prefere a lição que melhora ao ruído que lisonjeia."

Machado de Assis, escritor brasileiro.

Dedico este trabalho à minha noiva,  
Luciana Custodio

## Agradecimentos

Agradeço ao professor Dodonov por partilhar suas brilhantes idéias comigo.  
Agradeço à Luciana Custodio por ser tão prestativa e carinhosa.  
Agradeço à Maria das Graças Reis Martins por ter lido este trabalho.  
Agradeço ao Eduardo de Paula Abreu por me ajudar em computação.  
Agradeço o companheirismo de todos os colegas e professores do doutorado.  
Agradeço ao CNPq pelo apoio ...nanceiro (projeto 140685/00-6).

## Dívida impagável

Em visita aos meus pais na serra gaúcha, eu lhes falei sobre um importante assunto que me a†igia.

- Preciso de um bom conselho dos senhores, pai e mãe. - Estou com uma grande dívida.

- Receio não poder ajudá-lo - respondeu meu pai. - Temos pouco dinheiro.

- Mas minha dívida não é de dinheiro - acrescento.

- Explique-se, por favor - pede minha mãe.

- O professor Viktor Dodonov sempre me orientou com muito zelo e atenção. Sim, sim, o professor Dodonov ousou acreditar em mim. Percebeu meu profundo despreparo em Física e, assim mesmo, aceitou a pouco prometedora tarefa de me orientar. Cercou-me de cuidados, habituou-se a descer ao meu nível para me passar ensinamentos matemáticos e físicos. Foi assim que contraí minha grande dívida.

- Sim - concorda papai – você está grandemente endividado.

- Ainda não falei, mas o professor Dodonov é um ser humano exemplar. Saibam que um dia entrei cabisbaixo na sala dele, pois durante dois meses tentei realizar um cálculo e não tive sucesso. Contei-lhe o ocorrido pensando que iria aborrecê-lo. Grande foi minha surpresa ao vê-lo sorrir e declarar:

- Ainda bem que você demorou, Mauro, pois durante esse tempo pude pensar e acabei encontrando a solução analítica do problema! Se você tivesse feito o cálculo numérico rapidamente, eu não iria procurar a complicada solução analítica (Esse foi o primeiro resultado analítico obtido no estudo da densidade de energia do vácuo quântico numa cavidade oscilante e unidimensional. Antes disso, só se conheciam soluções numéricas para o problema.).

- Pai e mãe, como poderei pagar essa altíssima dívida?

Meus pais nem precisaram re†eter, imediatamente concluíram que ninguém no mundo saberia como pagar tal dívida.

## Resumo

Nesta tese, estudamos a reflexão quântica de partículas ultrafrias por espelhos, o encolhimento de pacotes de ondas de matéria livres, o tunelamento de estreitos pacotes de ondas gaussianos através de potenciais do tipo delta de Dirac e o emaranhamento entre os modos do campo eletromagnético numa cavidade vibrante.

# Abstract

In this thesis, we study the quantum detection of ultracold particles by mirrors, the shrinking of free wave packets, the tunnelling of narrow Gaussian packets through delta potentials and the entanglement between the modes of electromagnetic field in a vibrating cavity.

# Conteúdo

1	Introdução	3
2	Reflexão de pacotes quânticos, lentos e estreitos, por espelhos	6
2.1	Introdução	6
2.2	Reflexão de pacotes por espelhos não-absorvedores e arbitrários	8
2.2.1	Coefficiente de transformação do momento	12
2.2.2	Espelhos parcialmente refletivos: médias padronizadas e condicionais	14
2.2.3	Matrizes-densidade assintóticas para misturas quânticas	17
2.3	Exemplos: reflexão de pacotes gaussianos	18
2.3.1	Parede infinita e impenetrável	18
2.3.2	Potenciais do tipo degrau	27
2.3.3	Espelho estreito	28
2.3.4	Potencial do tipo delta de Dirac	28
2.3.5	O produto de incertezas	31
2.3.6	Reflexão de pacotes largos por uma parede ideal	32
2.4	Discussão	34
3	Encolhimento de pacotes de ondas quânticos	38
3.1	Introdução	38
3.2	Alargamento de pacotes de ondas aneliformes	40
3.2.1	Distribuição de probabilidade	41
3.2.2	Distribuição de velocidades	45
3.3	Média do raio generalizado como uma medida de extensão	47
3.3.1	Raios médios de pacotes com $k$ arbitrário	51
3.4	Medidas entrópicas da extensão do pacote	52
3.4.1	Pacotes com $k$ arbitrário	56
3.5	Encolhimento de pacotes unidimensionais	57
3.5.1	Evolução livre de estados coerentes, pares e ímpares	57
3.5.2	Média do valor absoluto da posição como medida do alargamento do pacote	62
3.5.3	Medidas $\mathcal{R}$ do alargamento	64
3.5.4	Extensões $\mathcal{T}$ dos pacotes	67
3.6	Conclusão	69
4	Tunelamento de pacotes gaussianos e estreitos através de potenciais do tipo delta de Dirac	70
4.1	Introdução	70



4.2	Evolução de pacotes num potencial-delta estacionário . . . . .	71
4.2.1	Pacote refletido . . . . .	73
4.2.2	Pacote transmitido . . . . .	74
4.2.3	Probabilidade de transmissão dependente do tempo . . . . .	76
4.3	Tempos de transmissão . . . . .	77
4.4	Potencial-delta dependente do tempo . . . . .	83
4.5	Conclusão . . . . .	87
5	Emaranhamento dos modos do campo numa cavidade oscilante	88
5.1	Introdução . . . . .	88
5.2	Medidas emaranhamento-pureza, emaranhamento-covariância e emaranhamento-distância . . . . .	90
5.2.1	Medida emaranhamento-pureza . . . . .	90
5.2.2	Medida emaranhamento-distância . . . . .	91
5.2.3	Medida emaranhamento-covariância . . . . .	92
5.2.4	Medidas entrópicas para estados gaussianos . . . . .	93
5.3	Cavidade de Fabry-Perot com uma fronteira oscilante . . . . .	95
5.3.1	Emaranhamento no caso da ressonância paramétrica ( $p = 2$ ) . . . . .	97
5.3.2	Os coeficientes de Bogoliubov no caso da ressonância paramétrica e unidimensional . . . . .	104
5.3.3	Cálculo das integrais . . . . .	104
5.3.4	Emaranhamento no caso semi-ressonante ( $p = 1$ ) . . . . .	105
5.4	Conclusão . . . . .	108
6	Conclusão	110

# Capítulo 1

## Introdução

Durante o mestrado em Física de Mauro Antonio Andreata, feito sob a orientação do professor Viktor Dodonov de 1998 a 2000, estudamos as propriedades estatísticas da luz gerada a partir do vácuo eletromagnético acondicionado numa cavidade oscilante com paredes ideais. Embora a cavidade esteja inicialmente vazia, fenômenos interessantes ocorrem: geração de fótons a partir do vácuo (efeito Casimir dinâmico), compressão dos componentes de quadratura do campo eletromagnético, surgimento de pulsos de energia na cavidade, etc.

Em continuação aos nossos estudos sobre o efeito Casimir dinâmico, no doutorado tentávamos responder à pergunta: o que acontecerá se inicialmente a cavidade vibrante contiver partículas? Para responder a esse questionamento, começamos, em virtude da complexidade dos cálculos, considerando uma partícula neutra e em repouso, representada por um pacote de ondas, e uma "cavidade" composta por uma só parede neutra e em repouso. Mesmo nesse caso simplíssimo, descobrimos um curioso efeito (que denominamos de *deixão* quântica): a partícula será repelida pela parede e essa repulsão não depende da distância entre elas. Essa descoberta nos levou a estudar a *deixão* quântica em situações mais gerais. Ou seja, durante dois anos e meio deixamos de estudar o efeito Casimir dinâmico e ...zemos uma proveitosa digressão no reino dos pacotes de ondas de matéria quânticos.

Nesse entretanto, nossa atenção foi atraída pelo encolhimento de pacotes de ondas livres, pequenino efeito (encolhimento menor do que 0,5% do raio médio do pacote de ondas) descoberto por J. A. Wheeler e colaboradores para o espaço bidimensional. Nossas análises mostraram que o efeito existe em qualquer dimensão espacial.

Estudamos também o tunelamento de pacotes de ondas, gaussianos e estreitos, através de potenciais do tipo delta de Dirac, estacionários e dependentes do tempo.

Finalmente, retornamos ao efeito Casimir dinâmico e analisamos várias medidas do emaranhamento entre os modos do campo eletromagnético acondicionado numa cavidade ideal com paredes oscilantes.

Os estudos acima mencionados são apresentados em detalhes nesta tese, a qual foi dividida em capítulos independentes e completos, arranjados da maneira a seguir exposta.

No capítulo 2, estudamos a reflexão de pacotes de ondas, quânticos e estreitos (no espaço de posição), por espelhos que não absorvem (total ou parcialmente transparentes). Se o valor médio e inicial do componente do momento perpendicular à superfície do espelho for menor do que a incerteza no momento, então o valor médio desse componente aumentará gradualmente com o passar do tempo às custas do encolhimento do pacote no espaço de momento. Uma consequência disso é a deflexão (por ângulos consideráveis) de partículas lentas que, inicialmente, se moviam paralelamente à superfície do espelho. A deflexão ocorre mesmo quando a partícula se move a uma distância macroscópica do espelho. Damos expressões analíticas que descrevem o comportamento assintótico das funções de onda e das matrizes-densidade, nas representações de posição e de momento, para pacotes iniciais, estreitos e arbitrários. Mostramos que assintoticamente os valores médios e as variâncias não dependem das fases dos coeficientes de reflexão e de transmissão complexos, e que, além disso, eles são “insensíveis” à forma concreta do potencial refletor no caso dos espelhos totalmente refletores. Para espelhos parcialmente refletores, introduzimos valores médios e funções de onda condicionais. As relações de dependência entre os valores assintóticos das diferentes quantidades que caracterizam o pacote (por exemplo, o coeficiente de transformação do momento e o produto de incertezas) e os parâmetros do potencial refletor (a altura e a largura ou o comprimento característico da região de transição) são analisadas para alguns potenciais de Epstein e seus casos-limites (a parede refletora e ideal e o potencial do tipo delta de Dirac). A possibilidade de verificar o efeito em experimentos com átomos ultrafrios é discutida brevemente.

No capítulo 3, damos exemplos do encolhimento de pacotes de ondas, livres e unidimensionais, com velocidades inicialmente nulas. Considerando diferentes medidas da extensão espacial dos pacotes, mostramos que estados coerentes e pares encolhem mais do que suas contrapartidas mistas e mais do que os estados coerentes, ímpares e puros. Estudamos também o encolhimento de pacotes de ondas radiais e aneliformes, com distribuição de velocidades inicialmente nula, em duas e mais dimensões. Considerando a evolução temporal das densidades de probabilidade, descritas por soluções exatas e explícitas da equação de Schrödinger livre em  $d$  dimensões, introduzimos e comparamos duas famílias diferentes de medidas da extensão espacial. As medidas do primeiro tipo são baseadas nos valores médios de potências arbitrárias do raio do pacote. Elas caracterizam a extensão total do pacote. As medidas do segundo tipo quantificam o tamanho interno do pacote (uma largura efeti-

va do anel). Encontramos que o encolhimento, que é muito pequeno em duas dimensões e ausente em dimensões superiores, em relação à medida usando o raio médio, é muito mais pronunciado quando usamos valores médios de potências negativas do raio,  $\langle r^\alpha \rangle$ , com  $\alpha < 1$  e especialmente  $\alpha < 0$ , como medida da extensão do pacote. Nesse caso, o espaço bidimensional não é distinguido e o encolhimento dos pacotes existe também em dimensões superiores a dois. Mostramos também que uma escolha adequada da medida de extensão do pacote ajudará a visualizar ou a enfatizar o efeito quando ele existir. Além disso, as conclusões relacionadas à evolução da extensão interna do pacote, baseadas na densidade de probabilidade volumétrica,  $j\tilde{A}j^2$ , podem ser, às vezes, opostas às conclusões baseadas na densidade de probabilidade radial,  $r^{d-1}j\tilde{A}j^2$ .

No capítulo 4, consideramos a transmissão e a reflexão de pacotes de ondas, gaussianos e estreitos, através de potenciais do tipo delta de Dirac nos casos em que a intensidade é constante e quando há uma específica dependência temporal. Várias definições do tempo de transmissão são introduzidas e comparadas.

No capítulo 5, estudamos a dependência temporal de várias medidas do emaranhamento (medidas entrópicas, medida emaranhamento-covariância, medida emaranhamento-pureza e medida emaranhamento-distância) entre os modos do campo eletromagnético, ressonantemente acoplados, numa cavidade ideal com fronteiras oscilantes. Consideramos uma cavidade unidimensional (Fabry–Perot) com espectro equidistante,  $\omega_n = n\omega_1$ , cuja distância entre os espelhos perfeitos oscila com frequências  $\omega_1$  e  $2\omega_1$ . Diferentes estados iniciais do campo são considerados: vácuo, vácuo comprimido, estados de Fock e estados coerentes, pares e ímpares.

No capítulo 6, apresentamos nossas conclusões e propostas para futuros trabalhos.

## Capítulo 2

# Reflexão de pacotes quânticos, lentos e estreitos, por espelhos

Neste capítulo, estudamos a reflexão quântica de partículas ultralentas por espelhos arbitrários. Para exemplificar, consideramos vários tipos de potencial refletor. Além disso, discutimos a possibilidade de verificar a reflexão quântica em laboratório.

### 2.1 Introdução

Embora diferentes aspectos da evolução de pacotes de ondas quânticas no espaço livre e em campos externos sejam estudados há décadas [1]-[14], esse assunto ainda não se exauriu. Recentemente, a reflexão e a difração de ondas de matéria por diferentes tipos de espelhos atômicos ou por feixes de laser atraíram a atenção devido aos grandes progressos em experimentos com átomos ultrafrios [15]-[21]. Entretanto, em todos esses trabalhos apenas ondas planas ou pacotes espacialmente largos foram considerados. O objetivo de nosso trabalho é estudar as peculiaridades da reflexão de pacotes quânticos, lentos e estreitos (no espaço de posição), por espelhos parcialmente refletores (e que não são absorvedores). Mais precisamente, supomos que a largura inicial do pacote,  $s$ , a distância inicial entre o pacote de ondas e a fronteira,  $x_c$ , e a velocidade inicial,  $v_0$ , satisfazem as condições  $x_c \gg s$  e  $v_0 \ll \hbar/(ms)$  (onde  $m$  é a massa da partícula). Até agora, a condição contrária  $\hbar p(0) \gg \sqrt{3/4} p(0)$  (onde  $p$  é o componente do momento na direção perpendicular à superfície e  $\sqrt{3/4} p(0)$  é a variância da distribuição de momentos) foi assumida desde o começo em todos os estudos: veja-se, por exemplo, [12] e as referências lá indicadas. Todavia, foi mostrado recentemente em [22] que para pacotes estreitos e lentos, correspondendo às partículas ultrafrias, alguns efeitos novos e

interessantes, tais como a reflexão quântica por espelhos refletivos, poderão ser observados.

Suponhamos que uma partícula foi lançada na direção paralela à superfície de uma parede impenetrável. Se fosse uma partícula clássica, ela nem ao menos “sentiria” a presença da parede. No entanto, a situação é diferente no caso quântico devido às propriedades ondulatórias da partícula, que é representada por um pacote de ondas. Sabemos que o pacote rapidamente se alarga, de modo que após um intervalo de tempo ele alcança a fronteira e, eventualmente, todas suas ondas componentes são refletidas. Como consequência, a partícula é desviada de sua direção inicial de movimento. O que mais impressiona é o fato de que o ângulo de reflexão pode ser arbitrariamente grande, dependendo da velocidade inicial e da incerteza transversa e inicial na posição da partícula, e, além disso, ele não depende da distância inicial entre a fronteira e a partícula [22], a qual pode ser macroscópica (10 cm, por exemplo, com a largura inicial do pacote na direção transversa da ordem de  $10^{15}$  cm). Isso significa que a partícula quântica “sente” a parede mesmo quando passa muito distante dela, na região livre de qualquer força. A reflexão quântica tem origem na não-localidade quântica e na existência de propriedades ondulatórias dos objetos quânticos.

Em [22] a reflexão quântica foi estudada no caso de uma parede ideal, equivalente à condição de fronteira  $\Psi(0; t) = 0$ , e sob várias restrições. Consideramos nulos os valores iniciais do componente transverso do momento e do coeficiente de correlação entre a posição e o momento, e assumimos que o pacote inicial estava bastante localizado e descrevia um estado puro. Algumas dessas restrições foram removidas num estudo mais detalhado [23], onde mostramos explicitamente que o efeito só será relevante sob a condição  $\hbar p(0) \ll \frac{p}{3/4 p(0)}$ . Porém, desde que o potencial do tipo barreira infinita é uma idealização, permaneceu a questão se o efeito poderia existir no caso de espelhos realísticos. O objetivo principal do presente trabalho é mostrar que a reflexão quântica é suficientemente robusta diante de possíveis imperfeições do espelho e de misturas quânticas de estados.

Este capítulo está arranjado como segue. Na subseção 2.2, damos expressões analíticas que descrevem o comportamento assintótico de pacotes inicialmente estreitos (puros e mistos) refletidos por espelhos não-absorvedores e arbitrários, mostrando que as características principais da reflexão quântica são “insensíveis” à forma concreta do potencial refletor, no caso de espelhos totalmente refletivos. Para espelhos parcialmente refletivos, introduzimos valores médios e funções de onda condicionais. Na subseção 2.3, consideramos como exemplos concretos a parede impenetrável e os potenciais de Epstein, os quais têm expressões analíticas e explícitas para os coeficientes de reflexão: o potencial-degrau suavizado de altura infinita e o potencial  $\cosh^2$ . Além disso, um exemplo de pacote largo refletido pela

parede ideal mostra a diferença qualitativa entre o comportamento de pacotes estreitos e de largos. Os resultados de nosso estudo são analisados na subseção 2.4, onde a possibilidade de verificar o efeito em experimentos com átomos ultrafrios é discutida e alguns problemas que ainda não foram resolvidos são apontados.

## 2.2 Reflexão de pacotes por espelhos não-absorvedores e arbitrários

Em geral, a evolução detalhada dos pacotes de ondas refletidos por espelhos não-ideais só pode ser obtida pela solução aproximada ou numérica da equação de Schrödinger. Porém, o comportamento assintótico de pacotes inicialmente estreitos pode ser calculado, praticamente, para qualquer potencial fisicamente razoável.

Supomos que o potencial do espelho só depende da coordenada  $x$  na direção perpendicular à superfície do espelho. Nesse caso, o valor médio do componente paralelo do momento,  $p_z$  (onde  $z$  é a coordenada ao longo da superfície na direção do movimento da partícula), não mudará no tempo. Se as distribuições iniciais (em  $t = 0$ ) nas direções  $x$  e  $z$  não forem correlacionadas, permanecerão assim para  $t > 0$ .

Assumimos, por simplicidade, que o potencial descrevendo o espelho é diferente de zero num domínio finito  $-\ell < x < 0$  (em verdade, ele deve decrescer suficientemente rápido fora desse domínio: veja-se abaixo). Um conjunto completo de soluções da equação de Schrödinger, nas regiões de movimento livre  $x > 0$  e  $x < -\ell$ , pode ser escolhido como superposições das ondas planas, incidentes e refletidas, indo para a direita e para a esquerda:

$$\tilde{\Psi}_k = \frac{e^{i(k^2 - t)x}}{2^{1/4}} \begin{cases} \frac{1}{2} [e^{i(kx - t)} + \hat{A}(k)e^{i(kx + t)}], & x > 0 \\ \hat{B}(k)e^{i(kx + t)}, & x < -\ell \end{cases}; \quad (2.1)$$

$$\tilde{\Psi}_{-k} = \frac{e^{i(k^2 - t)x}}{2^{1/4}} \begin{cases} \hat{B}(-k)e^{i(kx - t)}, & x > 0 \\ e^{i(kx + t)} + \hat{A}(-k)e^{i(kx - t)}, & x < -\ell \end{cases}; \quad (2.2)$$

onde  $k > 0$  e  $t = \hbar^{-1}(2m)$ .  $\hat{A}(k)$  e  $\hat{B}(k)$  são as amplitudes dos coeficientes de reflexão e de transmissão, respectivamente, satisfazendo à condição

$$|\hat{B}(k)|^2 + |\hat{A}(k)|^2 = 1; \quad (2.3)$$

A suposição de que o movimento é livre para  $x > 0$  e  $x < -\ell$  não é essencial, embora ela permita simplificar algumas fórmulas. Realmente, (2.1) e (2.2) são formas assintóticas da solução em  $x \rightarrow \pm\infty$  para qualquer potencial decaindo rapidamente (a comparação com os

modelos exatamente solúveis mostra que é suficiente supor que o potencial decai como  $x^{-2}$  ou mais rápido).

As soluções (2.1) e (2.2) são normalizadas como segue [24],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_k(x) \tilde{A}_{k^0}^*(x) dx = \pm(k - k^0); \quad (2.4)$$

e a condição (2.3) é importante para tal normalização. Fisicamente, essa condição significa a ausência de absorção no espelho. Matematicamente, é equivalente à requisição de que a evolução seja unitária. Essa requisição resulta em muitas identidades entre os coeficientes de reflexão e de transmissão para valores positivos e negativos de  $k$  [25]-[27]. Em particular,

$$R(k) = R(-k); \quad |T(k)|^2 = |T(-k)|^2; \quad (2.5)$$

$$R(k)T(k) + R(-k)T(-k) = 0; \quad (2.6)$$

A primeira igualdade em (2.5) segue do fato que o potencial é real, enquanto (2.6) equivale à ortogonalidade dos estados  $\tilde{A}_k$  e  $\tilde{A}_{-k}$ .

Usando a fórmula geral para o propagador da equação de Schrödinger, na forma de uma integral sobre um conjunto completo de estados ortonormais

$$G(x; x^0; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_k(x; t) \tilde{A}_k^*(x^0; 0) dk; \quad (2.7)$$

e as expressões (2.1) e (2.2), podemos escrever representações integrais e explícitas para o propagador nas regiões  $x > 0$  e  $x < -d$  em termos dos coeficientes de reflexão e de transmissão. Há quatro diferentes formas:  $G_{++}$ ,  $G_{+-}$ ,  $G_{-+}$  e  $G_{--}$ , dependendo dos sinais do primeiro e segundo argumentos espaciais do propagador. Contudo, para os pacotes inicialmente localizados totalmente à direita ( $x > 0$ ) do espelho, necessitamos somente de duas formas:  $G_{++}$  e  $G_{-+}$ . Levando em conta as identidades (2.3) e (2.5), podemos verificar que a parte do propagador  $G_{++}(x; x^0; t)$  para valores positivos de  $x$  e  $x^0$  é dada pela fórmula

$$G_{++}(x; x^0; t) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i k^2 t} \left[ e^{i k(x - x^0)} + e^{i k(x + x^0)} + \tilde{A}(k) e^{i k(x + x^0)} + \tilde{A}^*(k) e^{i k(x - x^0)} \right]; \quad (2.8)$$

Usando a identidade (2.6), podemos encontrar também a parte do propagador  $G_{-+}(x; x^0; t)$  para  $x < -d$  e  $x^0 > 0$ :

$$G_{-+}(x; x^0; t) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i k^2 t} \left[ R(k) e^{i k(x - x^0)} + R^*(k) e^{i k(x + x^0)} \right]; \quad (2.9)$$

Não poderemos escrever de maneira explícita o propagador para  $-d < x$  e  $x^0 < 0$  sem conhecermos a forma do potencial que descreve o espelho e encontrarmos as soluções da equação



de Schrödinger para  $j d < x < 0$ . Logo, não poderemos calcular a evolução de pacotes inicialmente largos que estejam localizados próximos ao espelho. Outrossim, não poderemos seguir a evolução do pacote de ondas quando ele alcançar o espelho. Todavia, considerando pacotes inicialmente localizados longe do espelho, será suficiente conhecer as partes do propagador (2.8) e (2.9) para encontrarmos o comportamento assintótico dos pacotes, tendo em mente que quando  $t \rightarrow \infty$  apenas uma parte desprezível do pacote permanecerá na vizinhança do espelho (naturalmente, isso conduz a algumas limitações sobre as formas admissíveis para o potencial que representa o espelho, tais como a ausência de estados ligados).

Aplicando os propagadores (2.8) e (2.9) a um pacote inicial,  $\tilde{A}_0(x^0)$ , localizado à direita e distante do espelho, obtemos

$$\tilde{A}(x > 0; t) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{2^{1/4}} e^{ikx} [\psi_0(k) + \hat{A}(k) \psi_0(j k)] + e^{i k x} [\psi_0(j k) + \hat{A}^*(k) \psi_0(k)] e^{i k^2 t}; \quad (2.10)$$

$$\tilde{A}(x < j d; t) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{2^{1/4}} e^{i k x_3} \psi_0(k) + e^{i k x_3} \psi_0(j k) e^{i k^2 t}; \quad (2.11)$$

onde

$$\psi_0(k) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2^{1/4}} \tilde{A}_0(x) e^{i k x} \quad (2.12)$$

é a função de onda inicial na representação do número de onda (a integração poderá ser estendida ao eixo inteiro, se  $\tilde{A}_0(x)$  estiver localizada longe do espelho).

Quando  $t \rightarrow \infty$ , a parte do integrando em (2.10) que contém o termo  $\exp(j i k x + i k^2 t)$  oscila muito e, devido a essas oscilações, a contribuição dessa parte desaparece. O mesmo acontece com a parte do integrando em (2.11) que contém o termo  $\exp(i k x + i k^2 t)$ . Em consequência, assintoticamente a função de onda tende à expressão

$$\tilde{A}_{as}(x; t) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{2^{1/4}} e^{i k^2 t} \begin{cases} [\psi_0(k) + \hat{A}(k) \psi_0(j k)] e^{i k x}; & x > 0 \\ \psi_0(k) e^{i k x}; & x < j d \end{cases} \quad (2.13)$$

que não se anula porque os integrandos têm o ponto estacionário  $k_x = |x| = (2t)$ . A função de onda assintótica consiste de dois pacotes: um (a primeira linha na expressão acima) se move para a direita, estando localizado principalmente à direita e longe do ponto  $x = 0$ , e o outro (a segunda linha) se move para a esquerda, estando localizado à esquerda e longe do ponto  $x = 0$ . As "caudas" desses pacotes na região próxima a  $x = 0$  se tornam desprezíveis no limite  $t \rightarrow \infty$ . Portanto, ao calcular a transformada de Fourier da função (2.13), podemos estender os limites de integração em  $dx$  de  $j \infty$  até  $\infty$  para cada pacote. Então, as integrais em  $dx$  são reduzidas a deltas de Dirac e obtemos a seguinte função de onda assintótica na

representação de momento (relembremos que  $\psi^3(k) = \psi^3(i-k)$ ):

$$\psi_{as}(k) = e^{i k^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} \frac{1}{2} [\psi_0(k) + \hat{A}(k) \psi_0(i-k)]; & k > 0 \\ \psi^3(k) \psi_0(k); & k < 0; \end{cases} \quad (2.14)$$

Se o pacote inicial estiver localizado perto do ponto central  $x_c$ , então poderemos escrever

$$\tilde{A}_0(x) = \tilde{A}_0(x - x_c); \quad \psi_0(k) = \tilde{\psi}_0(k) \exp(i k x_c); \quad (2.15)$$

onde a função  $\tilde{\psi}_0(k)$  não depende de  $x_c$ . Portanto

$$\psi_{as}(k) = e^{i k^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{\psi}_0(k) e^{i k x_c} + \hat{A}(k) \tilde{\psi}_0(i-k) e^{i k x_c}; & k > 0 \\ \psi^3(k) \tilde{\psi}_0(k) e^{i k x_c}; & k < 0; \end{cases} \quad (2.16)$$

A distribuição de momentos assintótica,  $P_{as}(k) = |\psi_{as}(k)|^2$ , para  $k > 0$  é dada por

$$P_{as}(k) = |\tilde{\psi}_0(k)|^2 + |\hat{A}(k) \tilde{\psi}_0(i-k)|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_0(k) \tilde{\psi}_0(i-k) \hat{A}(k) e^{2i k x_c}; \quad (2.17)$$

O último termo em (2.17) depende da posição inicial e oscila muito quando  $x_c \gg 1$ . Mas esse termo que oscila muito não afetará as características observáveis do pacote, tais como o momento médio e assintótico ou a dispersão do momento, se no início o pacote estiver suficientemente longe do espelho (porque o argumento da função exponencial,  $k x_c$ , é da ordem de  $x_c \approx \frac{1}{s} \gg 1$  na região do espaço  $k$  que produz a principal contribuição às integrais contendo  $P_{as}(k)$ , onde  $s$  é a largura inicial do pacote no espaço de posição). Portanto, no regime assintótico podemos usar uma distribuição média, simplificada e não-oscilante:

$$\bar{P}_{as}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} |\tilde{\psi}_0(k)|^2 + |\hat{A}(k) \tilde{\psi}_0(i-k)|^2; & k > 0 \\ |\psi^3(k) \tilde{\psi}_0(k)|^2; & k < 0; \end{cases} \quad (2.18)$$

Notemos que a distribuição de momentos assintótica depende apenas dos valores absolutos dos coeficientes de reflexão e de transmissão e não de suas fases.

Para espelhos totalmente refletivos ( $\psi^3(k) \approx 0$ , isto é, para potenciais que tendem a  $\infty$  quando  $x \rightarrow \pm 1$ ), a distribuição de momentos (média) assintótica é dada por

$$\bar{P}_{as}(k) = \begin{cases} 0; & k < 0 \\ |\tilde{\psi}_0(k)|^2 + |\tilde{\psi}_0(i-k)|^2; & k > 0; \end{cases} \quad (2.19)$$

e ela não depende nem da posição inicial do pacote e nem das características do espelho totalmente refletor (ou seja, da forma concreta do potencial refletor,  $V(x)$ , ou da fase do coeficiente de reflexão  $\hat{A}(k)$ ). Para qualquer espelho totalmente refletor, o valor assintótico do número de onda é igual ao do espelho ideal estudado detalhadamente em [22, 23]:

$$h k_1 i_W = \int_0^{\infty} k |\tilde{\psi}_0(k)|^2 + |\tilde{\psi}_0(i-k)|^2 dk; \quad (2.20)$$

onde o índice  $W$  signi...ca o caso da parede impenetrável e ideal. O valor inicial é

$$hk(0)i = \int_{-i}^0 k j_{-0}(k) j^2 dk = \int_0^0 k j_{-0}(k) j^2 + j_{-0}(i-k) j^2 dk; \quad (2.21)$$

enquanto

$$hk_1^2 i = hk^2(0)i = \int_0^0 k^2 j_{-0}(k) j^2 + j_{-0}(i-k) j^2 dk; \quad (2.22)$$

A forma concreta do potencial totalmente re\refletor é importante apenas para o conhecimento minucioso da evolução no regime intermediário (ou seja, o tempo de aproximação do estado assintótico) e dos detalhes das oscilações nas distribuições exatas (sem tomar a média), tais como (2.17).

## 2.2.1 Coe...ciente de transformação do momento

Se a distribuição de momentos inicial estiver localizada perto de algum valor negativo  $|jk_0j \gg hk(0)i$ , então a distribuição assintótica terá praticamente a mesma forma, mas estará localizada próximo a  $|jk_0j$ , de modo que  $hk_1 i_W \approx |jk_0j$ . Contudo, se  $|jk_0j$  for menor do que a largura da distribuição de momentos inicial, então a forma ...nal da distribuição diferirá signi...cativamente da inicial, e  $hk_1 i_W$  poderá ser totalmente diferente de  $hk(0)i$ , especialmente se a última quantidade tiver valor próximo de zero. As mudanças do valor absoluto do momento médio e da largura da distribuição de momento podem ser caracterizadas pelo coe...ciente de transformação do momento médio,  $\bar{\mu}$ , e pelo coe...ciente de transformação da variância do momento,  $\bar{\sigma}$ , respectivamente

$$\bar{\mu} = \frac{hk_1 i}{hk(0)i}; \quad \bar{\sigma} = \frac{hk_1^2 i - \bar{\mu}^2 hk(0)i^2}{hk(0)i^2} = \frac{hk_1^2 i}{hk(0)i^2} - \bar{\mu}^2. \quad (2.23)$$

Consideremos, por exemplo, o pacote inicial, estreito e gaussiano

$$j_{-0}(x; 0) j^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \exp \left[ -\frac{(x - x_c)^2}{2s^2} \right]; \quad x_c \in \mathbb{R}; \quad (2.24)$$

$$j_{-0}(k) j^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2} \right]; \quad k = ps = (m\hbar)^{-1}; \quad (2.25)$$

Nesse caso

$$hk(1) i = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[ -\frac{k_0^2}{2\sigma^2} \right] + k_0 \operatorname{erf}(k_0 \sigma); \quad (2.26)$$

onde a função-erro é definida como [28]

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp \left[ -y^2 \right] dy; \quad (2.27)$$

Ambos os coeficientes,  $\alpha$  e  $\beta$ , tenderão rapidamente a zero se  $|j\rho_0| \gg 1$  (notemos que (2.26) é uma função par de  $p_0$ ):

$$\alpha \approx \frac{1}{4} i \frac{2 \exp(i p_0^2)}{|j\rho_0|^{3/4}}; \quad \beta \approx \frac{1}{4} i \frac{4 |j\rho_0| \exp(i p_0^2)}{|j\rho_0|^{3/4}}; \quad |j\rho_0| \gg 1:$$

A mudança do valor absoluto do momento para os estados gaussianos será máxima para  $k_0 = 0$ , quando  $\alpha = \beta = \alpha_0 = 2^{-1/4} |j\rho_0|^{-3/4}$ . Porém, escolhendo de maneira adequada os estados iniciais, podemos obter valores de  $\alpha$  e  $\beta$  arbitrariamente próximos de 1 (para uma fronteira totalmente refletora).

Suponhamos que a partícula deixou uma armadilha atômica, passando entre duas placas infinitas separadas por uma distância  $s$ . Então, a função de onda inicial,  $\tilde{A}_0(y)$ , tem a forma (para os modos ímpares,  $n = 1; 3; 5; \dots$ ):

$$\tilde{A}_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2s}{\pi}} e^{ik_0 y} \cos\left(\frac{n}{4}y\right); & |y| < s/2; \\ 0; & |y| > s/2 \end{cases}; \quad (2.28)$$

e a distribuição de momento inicial é a seguinte função do número de onda,  $k$ :

$$P_0(k) = \frac{4s^2 \cos^2[s(k - k_0)/2]}{[(n/4)^2 + s^2(k - k_0)^2]^2}; \quad \hbar k(0) = k_0; \quad \frac{1}{4}k(0) = (n/4s)^2; \quad (2.29)$$

Para  $k_0 = 0$  e  $n \geq 1$ , a função (2.29) terá máximos altos e agudos em  $k_n = \pm n/4s$  (a razão  $P(k_n)/P(0)$  será igual a  $1/n^2 = 1/16$ , enquanto a largura do pico será da ordem de  $1/s$ : veja-se a figura 2.1). O valor assintótico do número de onda é igual a

$$\begin{aligned} \hbar k(1) &= \frac{1}{4^2 n s} \left[ \text{Si}\left(\frac{n}{4} - k_0 s\right) + \text{Si}\left(\frac{n}{4} + k_0 s\right) \right] \\ &+ \frac{n}{4} k_0 s \left[ \text{Si}\left(\frac{n}{4} + k_0 s\right) - \text{Si}\left(\frac{n}{4} - k_0 s\right) \right] \\ &+ k_0 s \left[ \text{Ci}\left(\frac{n}{4} + k_0 s\right) - \text{Ci}\left(\frac{n}{4} - k_0 s\right) \right] \\ &- 2 \frac{n}{4} [1 + \cos(k_0 s)]; \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo que a integral-cosseno modificada e a integral-seno são dadas por

$$\text{Ci}(z) = \int_0^z \frac{1 - \cos(t)}{t} dt; \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt;$$

O coeficiente de transformação do momento,  $\alpha$  (2.23), será máximo para  $k_0 = 0$ , quando

$$\hbar k(1) = \frac{2}{4^2 n s} \left[ \text{Si}\left(\frac{n}{4}\right) - 2 \frac{n}{4} \right];$$

Para  $n \geq 1$  e ímpar,  $\text{Si}(n/4) = 1/2 + 1/(n/4) + \dots$ ; e o coeficiente  $\alpha$  poderá se aproximar da unidade o quanto desejarmos:

$$\hbar k(1) = \frac{n/4}{s} \left[ 1 - \frac{2}{n/4} + \dots \right]; \quad \alpha_{\text{máx}} = 1 - \frac{4}{n/4} + \dots$$

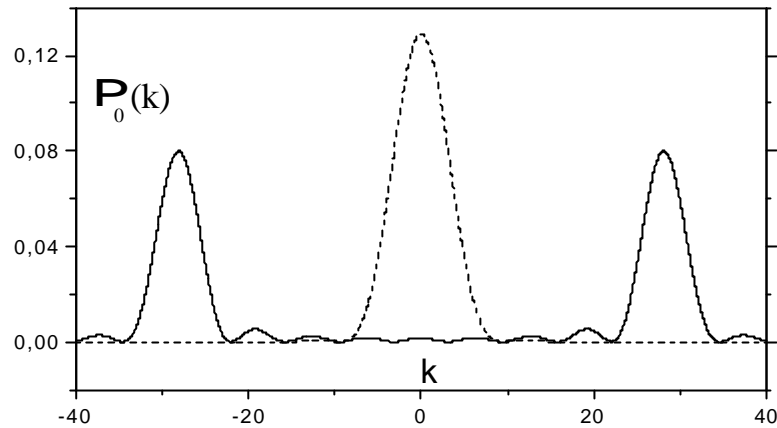


Figura 2.1: A distribuição de momentos inicial para os pacotes do tipo guia de ondas com  $n = 1$  (curva tracejada) e  $n = 9$  (curva sólida);  $k_0 = 0, s = 1$ .

Em contraste, se  $jk_0js = (n/4) \gg 1$ , então a equação (2.30) produzirá  $h(k) \approx jk_0j + Ok_0^2$ , de modo que  $\zeta \gg jk_n = k_0j$  e  $\eta \gg jk_n = k_0j^3$ . No caso dos modos pares do guia de ondas, temos relações similares: devemos trocar  $\cos$  por  $\sin$  nas equações (2.28) e (2.29), e mudar o sinal antes do  $\cos$  na última linha da equação (2.30), tomando  $n = 2; 4; \dots$ . A relação de dependência entre o coeficiente de transformação do momento, (2.23), e o momento inicial,  $\rho_0 \approx h(p(0)) = \frac{p_0}{\hbar p(0)}$ , para diferentes estados iniciais é mostrada na figura 2.2. Vemos claramente que mudanças significativas da distribuição de momentos, resultando numa grande deflexão, poderão ser observadas somente se  $\rho_0 \ll 1$ .

## 2.2.2 Espelhos parcialmente refletivos: médias padronizadas e condicionais

Para um espelho parcialmente refletor, há uma probabilidade assintótica (não-nula) de encontrarmos a partícula à esquerda da barreira dada por:  $\int_{-1}^0 j\tilde{A}_{as}(x)j^2 dx$ . Usando a equação (2.13) para  $\tilde{A}_{as}(x)$  na região  $x < -1$ , podemos estender formalmente a integração em  $dx$  até  $+1$ , porque a região adicionada não contribui para a integral no limite  $t \rightarrow 1$ . Então, chegamos às expressões para as probabilidades assintóticas e totais de encontrar a partícula à esquerda, (L), e à direita, (R), da barreira (espelho), as quais têm clara interpretação física:

$$L = \int_{-1}^0 j^3(k)j^2j_{-0}(i k)j^2 dk = 1 - R; \quad (2.31)$$

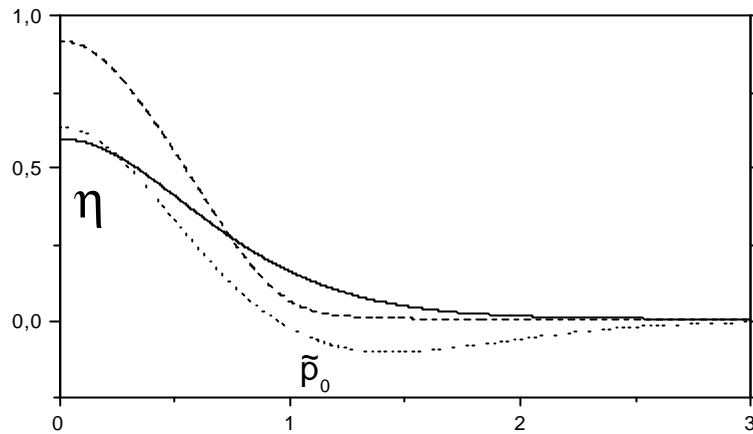


Figura 2.2: O coeficiente de mudança do momento contra o momento inicial,  $\rho_0 = \langle \hat{p}(0) \rangle = [\rho_p(0)]^{1/2}$ , para diferentes estados inicialmente localizados: pacotes gaussianos (curva pontilhada assumindo valores negativos para  $\rho_0 > 1$ ), pacotes do tipo guia de ondas com  $n = 1$  (curva sólida) e com  $n = 5$  (curva tracejada).

$$R = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} |j_{-\infty}^{\pm}(k)|^2 + |j_{\infty}^{\pm}(k)|^2 dk \quad (2.32)$$

Para espelhos parcialmente refletivos, temos

$$\langle \hat{k}_1 \rangle = \int_0^{\infty} k dk \int_{-\infty}^{\infty} |j_{-\infty}^{\pm}(k)|^2 + |j_{\infty}^{\pm}(k)|^2 dk \quad (2.33)$$

enquanto  $\langle \hat{k}_1^2 \rangle$  ainda é igual a  $\langle \hat{k}^2(0) \rangle$ . A fórmula (2.33) é uma consequência da definição-padrão do valor médio:  $\langle \hat{k}_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k \overline{\rho_{as}}(k) dk$ . Entretanto, essa definição, onde a integração é realizada em todos os pontos do espaço de momento (ou, equivalentemente, do espaço de posição) de  $-\infty$  a  $+\infty$ , é baseada na suposição implícita de que podemos medir os observáveis do estado assintótico em qualquer região dos espaços de posição e de momento, em particular, na região  $x < -d$  (atrás do espelho). Podemos imaginar outra situação, na qual apenas o semi-espaço  $x > 0$  é acessível aos experimentos (verdadeiramente, isso parece mais adequado no caso dos experimentos com átomos ultrafrios, quando uma partícula atingindo o espelho e passando ou sendo absorvida por ele estará perdida para as medidas posteriores). Em tal caso, o estado assintótico será descrito pela parte da função de onda total dada na primeira linha do lado direito da equação (2.13), na representação de posição, e pela primeira linha da equação (2.14) na representação do momento. Essas funções reduzidas devem ser renormalizadas através da divisão pelo fator  $\overline{\rho_R}$  (2.32). Se  $R$  for significativamente diferente de 1, então os valores médios e condicionais dos observáveis, calculados com a ajuda das

probabilidades reduzidas (vamos identi...cá-los pelo índice  $R$ ), serão totalmente diferentes dos padronizados (Idéias similares foram discutidas em [29] em conexão com o problema do tunelamento. Todavia, as probabilidades condicionais introduzidas em [29] são complexas no caso genérico.):

$$\langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR} = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} k^n dk \frac{\int j_{-\nu_0}(k)j^2 + j_{\hat{A}}(k)j^2 j_{-\nu_0}(i/k)j^2}{\int j_{-\nu_0}(k)j^2 + j_{\hat{A}}(k)j^2} : \quad (2.34)$$

A diferença entre as médias padronizadas e as condicionais se tornará signi...cante para espelhos fracamente re...toretos, quando  $j_{\hat{A}}(k)j \ll 1$  para aqueles valores de  $k$  que produzem a contribuição principal para as integrais. Por exemplo, para a distribuição inicial e simétrica,  $\nu_0(k) = \nu_0(i/k)$ , o coe...ciente de transformação usual do momento,  $\hat{\nu}$  (2.23), será pequeno. Sob as mesmas condições,  $R$  vale aproximadamente  $1/2$ , logo  $\langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR} \approx \frac{1}{2} \langle \hat{h}k_1 \rangle_{iW}$ . Portanto, o coe...ciente de transformação condicional é, aproximadamente, o mesmo do caso da fronteira ideal. Se inicialmente  $\nu_0(k) \ll \nu_0(i/k)$  para  $k > 0$  (isto é, a partícula se aproxima do espelho), então  $R \ll 1$  para  $j_{\hat{A}}(k)j \ll 1$ . Nesse caso  $\langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR} \approx \frac{1}{2} \langle \hat{h}k_1 \rangle_{iW} < 0$ , enquanto  $\langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR}$  será positivo.

Consideremos, por simplicidade, uma distribuição inicial, simétrica e real:  $\nu_0(k) = \nu_0(i/k)$ , o que garante um valor nulo do momento inicial. Calculando os valores médios na representação de momento para a função de onda (2.16), obtemos os seguintes termos principais para  $t \gg 1$  (os termos omitidos ou diminuem ao menos como  $t^{-1}$  ou são muito menores do que os termos independentes do tempo preservados nas expressões abaixo):

$$\langle \hat{h}x \rangle_{iR} = -\langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR} t = -m + 2x_c L; \quad \langle \hat{h}x^2 \rangle_{iR} = -\langle \hat{h}k_1^2 \rangle_{iR} t^2 = m^2 + x_c^2; \quad (2.35)$$

$$\langle \hat{h}x \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \rangle_{iR} = 2\langle \hat{h}k_1^2 \rangle_{iR} t = m; \quad (2.36)$$

(Relembremos que na representação de momento o operador posição é dado por  $\hat{x} = i\partial/\partial k$ . Se calcularmos apenas as derivadas das funções exponenciais em (2.16), então termos imaginários poderão aparecer nos momentos de segunda ordem. Porém, esses termos serão cancelados se levarmos em conta os termos  $\partial \nu_0(k)/\partial k$ . Desde que os coe...cientes de re...fexão e de transmissão não dependem de  $x_c$ , suas derivadas com respeito a  $k$  produzem correções pequenas em comparação com termos proporcionais ao tempo ou a  $x_c$ .) onde

$$\langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR} = 2 \int_0^{\infty} k j_{\hat{A}}(k)j^2 j_{-\nu_0}(k)j^2 dk; \quad \langle \hat{h}k_1^2 \rangle_{iR} = 2 \int_0^{\infty} k^2 j_{-\nu_0}(k)j^2 dk; \quad (2.37)$$

Calculando as médias condicionais, obtemos:

$$\langle \hat{h}x \rangle_{iR} = -\langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR} t = m + x_c \frac{L}{R}; \quad \langle \hat{h}x^2 \rangle_{iR} = -\langle \hat{h}k_1^2 \rangle_{iR} t^2 = m^2 + x_c^2 + 2x_c t \langle \hat{h}k_1 \rangle_{iR}; \quad (2.38)$$

$$\hbar k \dot{\rho} + \dot{\rho} x i_R = 2^{-2} \hbar k^2 i_{Rt=m} + \sim x_c \dot{\epsilon}; \quad (2.39)$$

onde

$$\hbar k_1^n i_R = \frac{1}{R} \int_0^Z k^n i_1 + j \hat{A}(k) j^2 j_{-0}^{\dagger}(k) j^2 dk; \quad n = 1; 2; \quad (2.40)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{R} \int_0^Z k j^3(k) j^2 j_{-0}^{\dagger}(k) j^2 dk = \frac{\hbar k_1 i_W}{R} i \hbar k_1 i_R; \quad (2.41)$$

### 2.2.3 Matrizes-densidade assintóticas para misturas quânticas

Até aqui, consideramos estados puros descritos em termos da função de onda. Todavia, os estados criados em experimentos quase nunca são perfeitamente puros, são misturas quânticas descritas em termos da matriz-densidade:  $\frac{1}{2}(x; x^0) = \frac{1}{2}^{\alpha}(x^0; x)$ . Sua evolução é governada pela integral dupla

$$\frac{1}{2}(x; x^0; t) = \int \int G(x; y; t) G^{\alpha}(x^0; y^0; t) \frac{1}{2}(y; y^0; 0) dy dy^0; \quad (2.42)$$

Os cálculos nesse caso são mais trabalhosos do que para estados puros, mas o resultado final é totalmente esperado: é suficiente, formalmente, trocar o produto  $\tilde{A}_{as}(x) \tilde{A}_{as}^{\alpha}(x^0)$  por  $\frac{1}{2}_{as}(x; x^0)$ . Para  $x; x^0 > 0$ , obtemos

$$\frac{1}{2}_{as}^{++}(x; x^0; t) = \int_0^Z \frac{dk dk^0}{2^{\frac{1}{4}}} \exp \int i(kx - k^0 x^0) - i t(k^2 - k^{02})^{\alpha}$$

$$\int [\hat{A}(k) \frac{1}{2}_0(j; k; k^0) + \hat{A}^{\alpha}(k^0) \frac{1}{2}_0(k; j; k^0) + \frac{1}{2}_0(k; k^0) + \hat{A}(k) \hat{A}^{\alpha}(k^0) \frac{1}{2}_0(j; k; j; k^0)];$$

A transformada de Fourier de  $\frac{1}{2}(x; x^0)$  resulta na matriz-densidade na representação de momento

$$\frac{1}{2}(k; k^0; t) = \int \frac{dx dx^0}{2^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{2}(x; x^0; t) \exp [i(kx - k^0 x^0)]; \quad (2.43)$$

As matrizes-densidade inicialmente localizadas perto do ponto central  $x_c$  podem ser escritas como

$$\frac{1}{2}_0(x; x^0) = \frac{1}{2}_0(x - x_c; x^0 - x_c); \quad \frac{1}{2}_0(k; k^0) = \frac{1}{2}_0(k; k^0) \exp [i x_c(k - k^0)];$$

onde a função  $\frac{1}{2}_0(k; k^0)$  não depende de  $x_c$ . Fazendo as mesmas aproximações das subseções precedentes e suprimindo os termos que oscilam muito, proporcionais a  $\exp [i x_c(k + k^0)]$  e com  $kk^0 > 0$ , encontramos as matrizes-densidade assintóticas (médias)

$$\frac{1}{2}_{as}^{++}(k; k^0; t) = \exp \int i t(k^2 - k^{02})^{\alpha} \frac{1}{2}_0(k; k^0) \exp [i x_c(k - k^0)]$$

$$+ \hat{A}(k) \hat{A}^{\alpha}(k^0) \frac{1}{2}_0(j; k; j; k^0) \exp [i x_c(k^0 - k)] g; \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{2}_{as}^i(k; k^0; t) = \frac{1}{2}_0(k; k^0) \exp \int i t(k^2 - k^{02}) - i x_c(k - k^0)^{\alpha}; \quad (2.45)$$



onde os índices superiores dão os sinais dos argumentos primeiro e segundo. Vemos que os elementos diagonais não dependem das fases dos coeficientes  $\tilde{A}(k)$  e  $\tilde{B}(k)$  (não apresentamos as expressões para  $\tilde{A}_{\text{AS}}^{+j}(k; k^0; t)$  e  $\tilde{A}_{\text{AS}}^{-j}(k; k^0; t)$  porque elas não contribuem para os elementos diagonais).

## 2.3 Exemplos: reflexão de pacotes gaussianos

### 2.3.1 Parede infinita e impenetrável

Consideremos a evolução da posição e do momento médios

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}^* \hat{x} \tilde{A} dx; \quad \langle \hat{p}_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{A} dx;$$

na direção  $x$ , que é perpendicular à parede, lembrando que os movimentos nas direções  $x$  e  $z$  (ao longo da superfície) são independentes (portanto o componente paralelo,  $p_z$ , não muda). Calculando as derivadas dessas quantidades, levando em conta a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = (-\hbar^2/2m) \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2}; \tag{2.46}$$

lembrando que devemos fazer as integrações na região em que  $x > 0$ , e que a função de onda satisfaz a condição de contorno

$$\tilde{A}(0; t) = 0; \tag{2.47}$$

chegamos às seguintes equações de Ehrenfest na presença da parede ideal:

$$\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt} = \frac{\langle \hat{p}_x \rangle}{m}; \quad \frac{d\langle \hat{p}_x \rangle}{dt} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \tilde{A}^*}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = F_r(t); \tag{2.48}$$

onde  $F_r(t)$  pode ser interpretada como uma “força” quântica, repulsiva e efetiva. Essa “força” é sempre positiva, por isso faz o centro de massa do pacote quântico se afastar da parede.

Analogamente, podemos obter as equações de movimento para as variâncias  $\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$ ,  $\langle \hat{p}_x^2 \rangle - \langle \hat{p}_x \rangle^2$ , e  $\langle \hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x} \rangle - 2\langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p}_x \rangle$ :

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = 2\langle \hat{x} \hat{p}_x \rangle + m^2; \quad \langle \hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x} \rangle = \langle \hat{p}_x^2 \rangle + F_r(t) \langle \hat{x} \rangle;$$

$$\langle \hat{p}_x^2 \rangle = \langle \hat{p}_x \rangle^2 + 2F_r(t) \langle \hat{p}_x \rangle;$$

Se  $\langle \hat{p}_x(0) \rangle = 0$  (a velocidade inicial será paralela à superfície da parede no caso tridimensional), então as quantidades  $F_r(t)$ ,  $\langle \hat{x} \rangle$  e  $\langle \hat{p}_x \rangle$  serão sempre não-negativas e todas as três (co)variâncias

serão menores do que seriam no caso da evolução no espaço livre (para as mesmas condições iniciais). Isso quer dizer que a passagem do pacote próximo à parede o torna mais estreito do que seria no espaço livre, em ambas as representações: de posição e de momento. Além disso, o valor final do componente do momento na direção perpendicular à superfície,  $\langle p_x \rangle$ , será diferente do seu valor inicial, que é nulo. O aumento da energia cinética do centro de massa da partícula,  $E_c = \langle p_x \rangle^2 / (2m)$ , será obtido às custas da energia das flutuações quânticas do pacote,  $E_{flut} = \langle \Delta p_x \rangle^2 / (2m)$ , desde que a energia total é conservada. O ângulo de deflexão é igual a  $\mu_{defl} = \tan^{-1}(\langle p_x \rangle / \langle p_z \rangle)$ . O momento assintótico,  $\langle p_x \rangle$ , tem a mesma ordem de magnitude que a dispersão inicial do momento na direção transversa,  $\Delta p_x = \sqrt{\langle \Delta p_x \rangle^2}$ .

Consideremos a seguinte família de soluções exatas da equação de Schrödinger, (2.46), na semilinha com a condição de fronteira (2.47), descrevendo a evolução de pacotes localizados:

$$\tilde{A}(x; t) = 2N \frac{m^{-1/4} \psi(t)}{\sqrt{2m}} \exp\left[\frac{im}{2} x^2\right] + \frac{1}{2} j^2 \sin\left[\frac{p_x}{2m} x\right]; \quad (2.49)$$

onde  $N = [1 + \exp(j^2)]^{-1/2}$  é o fator de normalização e  $j$  é um parâmetro complexo e arbitrário. A dependência temporal está "escondida" na função complexa  $\psi(t)$ , que é uma solução arbitrária da equação  $\ddot{\psi} = 0$ , satisfazendo o vínculo  $\dot{\psi} + i\psi = 2i$ :

$$\psi(t) = A + iBt; \quad \text{Re}(BA) = 1; \quad (2.50)$$

A solução (2.49) é um caso especial ( $g = 0$ ) de uma família mais geral de soluções, que foram encontradas pela primeira vez em [30], para a equação de Schrödinger com o potencial do oscilador singular  $V(x; t) = m \psi^2(t) x^2 + g x$ . No caso geral,  $\psi(t)$  satisfaz à equação  $\ddot{\psi} + \psi^2(t) = 0$ :

É conveniente escrever o coeficiente complexo  $j$  da seguinte maneira

$$j = \rho + i\tau; \quad \tau > 0; \quad (2.51)$$

onde  $\rho$  é um parâmetro real, e a função  $\psi(t)$  como

$$\psi(t) = b e^{(1+r)t} + b(i+r)t; \quad |1+r| < 1; \quad (2.52)$$

O coeficiente positivo  $b$  é responsável pela largura inicial do pacote de ondas, enquanto o coeficiente  $\tau$  determina a posição inicial do centro do pacote de ondas. Estamos interessados no caso em que o centro do pacote está bem distante da fronteira inicialmente. Isso significa que  $\tau \gg 1$ , de maneira que podemos desprezar pequenas correções da ordem de

$\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + x_c^2)\right]$  em todas as expressões. Em particular, o fator  $N(j^0)$  pode ser trocado por 1. Em tal caso, a distribuição de posição inicial,  $P(x; t) = j\tilde{A}(x; t)j^2$ , é quase gaussiana

$$P(x; 0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{1}{2s^2}(x - x_c)^2\right]; \quad (2.53)$$

onde a distância inicial entre a fronteira e o centro do pacote,  $x_c$ , e a largura do pacote,  $s$ , são dadas pelas expressões

$$x_c = -\frac{p_0}{2r}; \quad s = \frac{p_0}{2r}; \quad (2.54)$$

Logo,  $x_c = s = -\frac{p_0}{2r}$ , e o valor inicial da posição é muito maior do que a largura inicial do pacote. É conveniente introduzir as variáveis adimensionais:

$$x = \frac{x}{x_c}; \quad p = \frac{ps}{p_0}; \quad \zeta = \frac{b^2}{r}t = \frac{p_0}{msx_c}t; \quad (2.55)$$

Os valores médios do momento e da posição para o estado (2.49) são iguais a

$$\langle p(\zeta) \rangle = p_0 \operatorname{erf}\left[\frac{p_0}{R(\zeta)}\right] + \frac{p_0}{2r} \operatorname{er}\left[\frac{p_0}{R(\zeta)}\right] e^{i2(-2+\zeta^2)}; \quad (2.56)$$

$$\langle x(\zeta) \rangle = \left[\frac{\zeta}{r}\right] \operatorname{er}\left[\frac{p_0}{R(\zeta)}\right] e^{i2(-2+\zeta^2)} + \left[\frac{1}{2}\right] \operatorname{erf}\left[\frac{p_0}{R(\zeta)}\right]; \quad (2.57)$$

onde a função-erro imaginária,  $\operatorname{er}(z)$ , é definida assim [28]

$$\operatorname{er}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy;$$

As outras notações são

$$p_0 = \frac{p_0}{2}(1 + r^2); \quad r = -\frac{p_0}{2r}; \quad (2.58)$$

$$1(\zeta) = \frac{p_0}{2} + p_0\zeta; \quad \zeta(\zeta) = -\frac{p_0}{2r}\zeta; \quad (2.59)$$

$$R(\zeta) = 1 + 2r\zeta + (1 + r^2)\zeta^2; \quad (2.60)$$

Para  $\zeta = 0$ , temos  $\langle p(0) \rangle = p_0$  e  $\langle x(0) \rangle = 1$ , com pequenas correções da ordem de  $\exp\left[-\frac{1}{2}\zeta^2\right]$ .

A quantidade  $\langle p^2 \rangle$  não depende do tempo:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2}(1 + r^2) + p_0^2; \quad (2.61)$$

Dois outros valores médios de segunda ordem dependem do tempo

$$\langle p_x + x p \rangle = 2p_0 + \frac{r}{2} + \frac{p_0}{2} \langle p^2 \rangle; \quad (2.62)$$

$$\langle x^2 \rangle = 1 + \frac{1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{p_0}{2} \langle p^2 \rangle; \quad (2.63)$$

Usando a fórmula assintótica [28]

$$\text{erf}(x) \sim 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} \right)^2 e^{-x^2}; \quad (2.64)$$

podemos obter de (2.56) o valor assintótico do momento

$$\langle p(1) \rangle = \frac{1}{1+r^2} \exp \left[ -\frac{2p_0^2}{1+r^2} \right] + p_0 \text{erf} \left[ \frac{p_0}{1+r^2} \right]; \quad (2.65)$$

A mudança do valor absoluto do momento,  $\langle p(1) \rangle$  e  $\langle p(0) \rangle$ , será máxima para  $p_0 = 0$ , quando o coeficiente de transformação do momento médio,

$$\langle [p(1)]^2 \rangle - \langle p(0) \rangle^2 = \langle p^2 \rangle; \quad (2.66)$$

será igual a  $\langle p^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{p_0^2}{4}$ . A relação de dependência entre o coeficiente de transformação e o momento inicial é mostrada na figura 2.3 (para  $r = 0$ ). Vemos que uma parte significativa da energia das flutuações quânticas será transformada em energia do centro de massa somente se  $|p_0| < \frac{1}{2}$  (notemos que  $\langle p_0 \rangle = \langle p(0) \rangle$ ). Além disso, para  $|p_0| > \frac{1}{2}$  o coeficiente  $\langle p \rangle$  será negativo, isto é, o momento final será um pouco menor do que o inicial. Evidentemente, esses efeitos são devidos à interferência entre as diferentes ondas planas que compõem o pacote quântico. Os gráficos com  $r \neq 0$  mostram o mesmo comportamento em relação ao momento  $p_0 = \frac{p_0}{1+r^2}$ .

A "força" quântica, repulsiva e adimensional,  $F = -\frac{1}{2} \langle p^2 \rangle F_r$ , é dada por

$$F = \frac{4 \langle p^2 \rangle}{[R(\zeta)]^3} \exp \left[ -\frac{2 \langle p^2 \rangle \zeta^2}{R(\zeta)} \right]; \quad (2.67)$$

Gráficos de  $F(\zeta)$ ;  $\langle x(\zeta) \rangle$  e  $\langle p(\zeta) \rangle$ , assim como das flutuações médias da posição e do momento, são dados na figura 2.4. Eles mostram que a partícula começa a "sentir" a presença da parede quando  $\zeta > \frac{1}{2}$ . Esse valor concorda, em ordem de magnitude, com o tempo necessário para um pacote de ondas quântico se alargar de sua dimensão inicial,  $s$ , até o valor  $x_c$ . Notemos que a partícula clássica, para a qual formalmente  $\hbar = 0$ , nunca "saberia" sobre a parede.

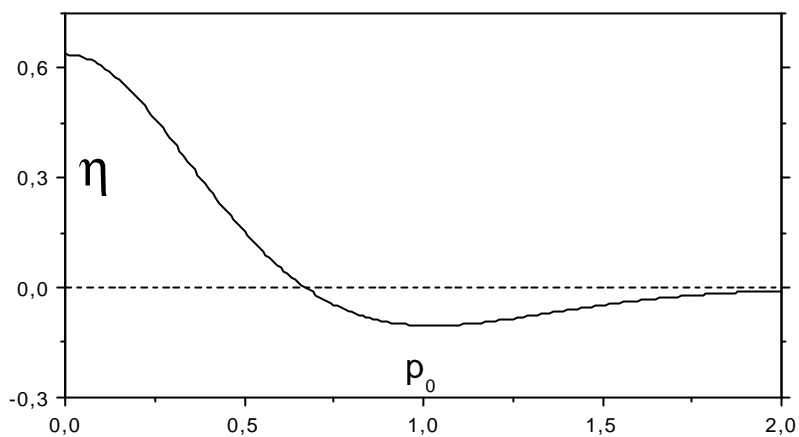


Figura 2.3: O coeficiente de mudança do momento,  $\eta$ , contra o momento inicial,  $p_0$ , para  $r = 0$ .

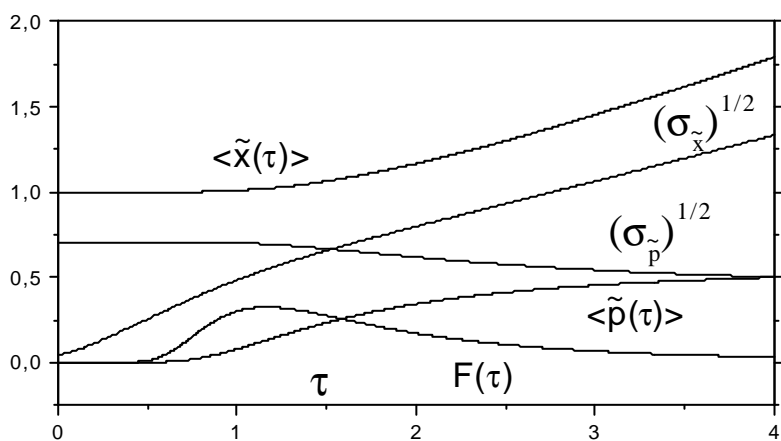


Figura 2.4: Evolução dos valores médios da posição e do momento, suas flutuações e a "força" quântica e repulsiva com  $\bar{\omega} = 10^4$  e  $r = \omega = 0$ .

A densidade de probabilidade no espaço de posição pode ser expressa deste modo

$$P(x; \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\zeta} \right)^2\right] \left( \frac{p_0}{2\zeta} \right) \left[ \sinh^2 \left( \frac{p_0 x}{2\zeta} \right) + \sin^2 \left( \frac{p_0 x}{\zeta} \right) \right]^{-1/2} \quad (2.68)$$

Se  $\zeta \gg 1$ , então

$$P(x; \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\zeta} \right)^2\right] \left( \frac{p_0}{2\zeta} \right) \left[ \sinh^2 \left( \frac{p_0 x}{2\zeta} \right) + \sin^2 \left( \frac{p_0 x}{\zeta} \right) \right]^{-1/2}$$

Para  $\zeta \gg 1$ , a parte principal da densidade de probabilidade estará concentrada na região  $x \gg \zeta$ . Portanto, o comportamento de  $P(x; \zeta)$  dependerá do valor do produto  $p_0 \zeta$  que aparece em  $\frac{1}{\zeta}$ . Se o valor absoluto desse produto for pequeno, o argumento do  $\sinh^2$  será proporcional a  $\zeta^{-1}$ , e poderemos desprezar a contribuição dessa função. Nesse caso, teremos uma distribuição que oscila rapidamente por causa, principalmente, da função  $\sin^2$ , cujo argumento é proporcional a  $\zeta^{-1}$ . Diferentemente, se  $|p_0 \zeta| \gg 1$ , então o argumento da função  $\sinh^2$  praticamente não dependerá de  $\zeta$  para  $x \gg \zeta$ , sendo proporcional a  $p_0$ . Conseqüentemente, se  $|p_0| \gg 1$ , a função  $\sinh^2$  será muito maior do que  $\sin^2$  e teremos uma curva gaussiana e suave sem oscilações significativas. Tal sensibilidade da distribuição de probabilidade para tempos longos em relação ao valor inicial do momento é mostrada na figura 2.5, onde gráficos da distribuição de posição são apresentados para  $\tau = 10$  e  $\zeta = 3$ . Mesmo quando o módulo do valor inicial do momento não for muito grande ( $\tau = 2$ ), teremos uma distribuição gaussiana, alargada e deslocada. Ao mesmo tempo, há uma drástica mudança no comportamento da densidade de probabilidade para  $p_0 = 0$  e  $\zeta \gg 1$ : não é mais uma curva gaussiana e suave, mas oscila fortemente com período espacial da ordem da largura do pacote inicial. Para grandes valores de  $\tau$ , a frequência espacial das oscilações é tão alta que os gráficos com  $|p_0| \gg 1$  são "manchas" contínuas entre os valores máximo, (1), e mínimo, (0), da função  $\sin^2$ .

A distribuição de momentos

$$P(p; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(x; t) \exp(i p x) dx$$

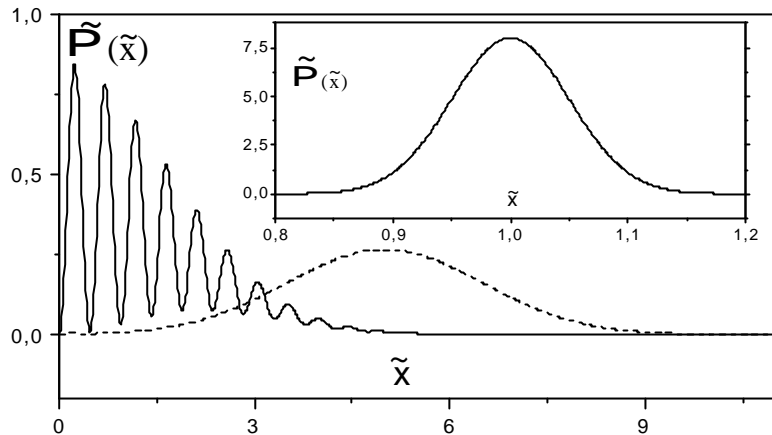


Figura 2.5: Densidade de posição com  $\bar{\nu} = 10$ ,  $r = 0$  e  $\zeta = 3$  para diferentes valores de  $\alpha$ : curva sólida:  $\alpha = 0$ ; curva tracejada:  $\alpha = 1/2$ . Na inserção, mostramos a densidade inicial, a qual praticamente não depende de  $\alpha$ .

tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(p; \zeta) &= \frac{\Gamma}{16^{1/4}} \frac{1}{1+r^2} i^{1-2\alpha} \exp \left[ i \frac{p^2 + p_0^2}{1+r^2} \right] \\
 &\times \exp \left[ i \frac{2\alpha - \nu}{R} p \operatorname{erfc} \left( i \frac{p}{\alpha} \right) \right] \left[ p + \frac{\nu}{R} \right]^{-1} \\
 &+ \exp \left[ \frac{2\alpha - \nu}{R} p \operatorname{erfc} \left( i \frac{p}{\alpha} \right) \right] \left[ p - \frac{\nu}{R} \right]^{-2}; \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

onde

$$2\alpha - (\zeta) = (1 - ir)^{i-1} + i^{-\zeta}; \quad (2.70)$$

$$\nu(\zeta) = \frac{p_0}{2} (\alpha - i^{-\zeta}) [i^{-\zeta} (1 + ir) - 1]; \quad (2.71)$$

e a função-erro complementar,  $\operatorname{erfc}(z)$ , é definida como [28, 31]

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp \left[ -y^2 \right] dy = 1 - \operatorname{erf}(z);$$

Para  $\zeta = 0$ , a parte real da primeira função-erro complementar na equação (2.69) é negativa, com um valor absoluto muito grande, portanto essa função vale quase 2 (desde que  $\bar{\nu} \gg 1$ ). Ao contrário, a segunda função-erro complementar se aproxima de  $\operatorname{erfc}(+1) = 0$ . Conseqüentemente, a distribuição inicial de momentos é quase gaussiana

$$\mathcal{P}(p; 0) = \frac{\Gamma}{16^{1/4}} \frac{1}{1+r^2} i^{1-2\alpha} \exp \left[ i \frac{(p - p_0)^2}{1+r^2} \right];$$

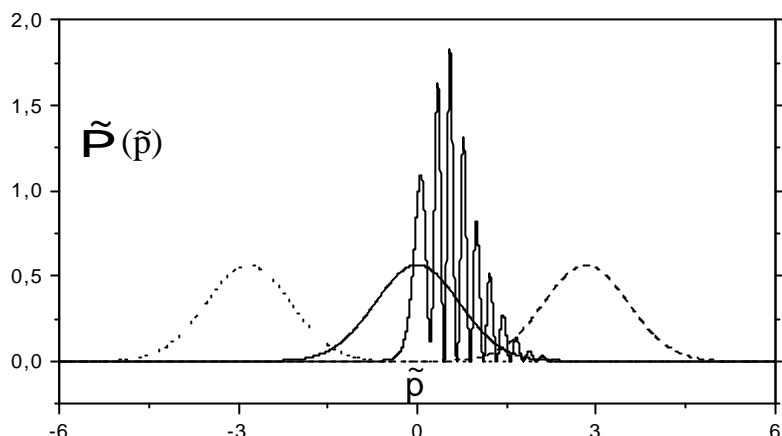


Figura 2.6: Densidade de momento com  $\bar{\tau} = 10$  e  $r = 0$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Curva s3lida e suave:  $\alpha = 0, \zeta = 0$ ; curva s3lida e oscilante:  $\alpha = 0, \zeta = 6$ ; curva pontilhada 3 esquerda:  $\alpha = \frac{1}{2}, \zeta = 0$ ; curva tracejada 3 direita:  $\alpha = \frac{1}{2}, \zeta = 6$ .

Se  $\zeta \ll 1$ , os segundos termos nos argumentos das fun33es-erro complementares poder33o ser desprezados, e as partes reais desses argumentos tender33o a  $\frac{1}{2}$  para  $p > 0$  e a  $-\frac{1}{2}$  para  $p < 0$ . No primeiro caso as fun33es-erro complementares tendem a 2, enquanto no segundo caso v33o a zero. Logo, a distribui33o de momentos assint33tica ser33 diferente de zero apenas para  $p > 0$ , sendo dada pela seguinte express33o (que n33o depende do tempo):

$$P_1(p) = 2^{-1/4} (1+r^2)^{-1/2} \exp\left[-i \frac{p^2 + p_0^2}{1+r^2}\right] \cosh\left[\frac{2p_0}{1+r^2} p\right] \cos\left[\frac{2p_0}{1+r^2} p\right] \quad (2.72)$$

Gr33ficos da distribui33o de momentos para  $\bar{\tau} = 10$  s33o dados na Figura 2.6. Para valores maiores de  $\bar{\tau}$ , o per33odo das oscila33es da densidade de momento se torna t33o pequeno que os gr33ficos parecem "manchas". Todavia, essas oscila33es ser33o signi33ficantes apenas para  $|p_0| < 1$ , isto 33, enquanto o valor inicial do momento n33o exceder a dispers33o do momento. Para valores absolutos maiores do momento inicial, a distribui33o final ser33 semelhante 33 distribui33o inicial refletida pelo eixo  $p = 0$  (se  $p_0 < 0$  e  $|p_0| \gg 1$ ):

$$P_1(p) = 2^{-1/4} (1+r^2)^{-1/2} \exp\left[-i \frac{(p - |p_0|)^2}{1+r^2}\right]$$

Poder33amos ter d33vidas sobre o signi33ficado f33sico do modelo da parede infinita e ideal,



acreditando-o simplificado demais. Em verdade, a parede ideal possui duas características irreais: tem altura infinita e extensão da região de transição nula.

Agora, usando as fórmulas gerais derivadas na precedente seção, analisaremos duas famílias de potenciais suaves com alturas finitas, demonstrando explicitamente que o modelo da parede ideal é o limite bem definido de potenciais mais realísticos. A primeira família descreve o potencial do tipo degrau suave, que pode ser considerado o modelo de barreiras (espelhos) suficientemente espessas:

$$V_1(x) = V_0 \frac{1}{1 + e^{x-w}} \quad (2.73)$$

O segundo potencial pode ser tratado como o modelo de um espelho estreito:

$$V_2(x) = V_0 \cosh^2(x-w) \quad (2.74)$$

Nossa escolha é explicada por duas circunstâncias: primeira, ambos os potenciais de Epstein [32] admitem soluções exatas da equação de Schrödinger estacionária [24, 33]; segunda, ambos os potenciais têm “caudas” exponenciais, o que é uma característica típica dos espelhos evanescentes freqüentemente usados nos experimentos com átomos ultrafrios [19, 21], [34]-[37].

Como vimos na seção anterior, o coeficiente de transformação do momento será diferente de zero apenas sob a condição  $\hbar p(0) \in \mathbb{R}$ . Por isso, consideraremos a partir daqui que  $\hbar p(0) = 0$ . Além disso, usaremos restritos a um exemplo simples de estado inicial, gaussiano e misto com parâmetros reais, o qual tem momento médio e coeficiente de correlação entre a posição e o momento inicialmente nulos (a influência do coeficiente de correlação foi estudada em [23] no caso especial da parede ideal):

$$\frac{1}{2}(y; y^0; 0) = \frac{1}{s} \exp \left[ -\frac{1}{2s^2} \left( \frac{y^2 + y^{02}}{2(1-\zeta)} + \frac{\zeta y y^0}{1-\zeta} + x_c(y + y^0) + x_c^2 \zeta \right) \right] \quad (2.75)$$

onde  $s$  é a largura inicial do pacote no espaço de posição,  $x_c$  é a sua posição inicial e média e o parâmetro  $\zeta$  ( $0 < \zeta < 1$ ) é responsável pela impureza quântica (que é conservada no tempo na ausência de dissipação):

$$C = \text{Tr} \mathbf{b}^2 = \frac{1}{1+\zeta}; \quad \hbar p^2(0) = \frac{\zeta}{2s^2 C^2} \quad (2.76)$$

O estado (2.75) possui a distribuição de momentos simétrica

$$\frac{1}{2}_0(p; p) = \frac{1}{4} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{s^2} + \zeta p^2 \right) \right] = \frac{1}{2}_0(p; p); \quad p = p s C^{-1} \quad (2.77)$$

A característica específica da distribuição gaussiana é que a pureza,  $C$ , pode ser incluída na definição do momento adimensional,  $\beta$ . Para distribuições simétricas, as fórmulas para os valores médios e a probabilidade de estar à direita da barreira podem ser simplificadas como:

$$\langle k \rangle = 2 \int_0^Z k dk j\hat{A}(k) j^2 \frac{1}{2} \rho_0(k; k); \quad (2.78)$$

$$\langle k \rangle_R = \frac{1}{R} \int_0^Z k dk \left[ 1 + j\hat{A}(k) j^2 \frac{1}{2} \rho_0(k; k) \right]; \quad (2.79)$$

$$\langle k^2 \rangle = 2 \int_0^Z k^2 dk \frac{1}{2} \rho_0(k; k); \quad (2.80)$$

$$\langle k^2 \rangle_R = \frac{1}{R} \int_0^Z k^2 dk \left[ 1 + j\hat{A}(k) j^2 \frac{1}{2} \rho_0(k; k) \right]; \quad (2.81)$$

$$R = \frac{1}{2} + \int_0^Z j\hat{A}(k) j^2 \frac{1}{2} \rho_0(k; k) dk; \quad (2.82)$$

### 2.3.2 Potenciais do tipo degrau

No caso do potencial (2.73), o coeficiente de reflexão depende da variável  $\beta$  como ( $k > 0$ ) [24, 33]

$$j\hat{A}_1(\beta) j^2 = \begin{cases} < 1; \\ \frac{\sinh \frac{1}{4} \beta_i \rho_-}{\sinh \frac{1}{4} \beta_i \rho_+} \frac{\rho_-}{\rho_+} \frac{1}{\beta_i^2}; \end{cases} \quad \beta^2 \quad (2.83)$$

onde

$$\rho_{\pm} = 2mV_0 S^2 C^2 = \pm^2; \quad \beta = w = (sC); \quad (2.84)$$

O coeficiente de transformação do momento, (2.23), para o potencial (2.73) é

$$\hat{T}_1 = \frac{2}{\beta} \left[ 1 + \int_0^Z \frac{\sinh \frac{1}{4} \beta_i \rho_-}{\sinh \frac{1}{4} \beta_i \rho_+} \frac{\rho_-}{\rho_+} \frac{1}{\beta_i^2} e^{i z} dz \right] \quad (2.85)$$

Formalmente, a parede impenetrável corresponde a  $\beta = 1$ . Contudo, já para  $\beta \gg 1$  (isto é, se a barreira for apenas duas vezes mais alta do que a energia média do pacote  $\hbar \beta^2(0) = (2m)$ ) o coeficiente  $\hat{T}$  é igual a aproximadamente 50% de seu valor máximo  $\hat{T}_{\max} = 2/\beta$ , e  $\hat{T} = \hat{T}_{\max} < 10\%$  para  $\beta > 3$ , independentemente do parâmetro  $\beta$ , que caracteriza a "agudeza" do potencial.

### 2.3.3 Espelho estreito

No caso do potencial de espelho estreito (2.74), o coeficiente de reflexão será menor do que 1 para qualquer valor de  $\rho$  [24]:

$$|\hat{A}_2(\rho)|^2 = \frac{A}{A + \sinh^2(\frac{1}{4}\rho)}; \quad A = \cos^2 \frac{3}{4} \rho \quad (2.86)$$

onde  $\rho$  e  $\gamma$  são os mesmos da equação (2.84). Se o argumento da raiz quadrada da definição de  $A$  for negativo, então  $\cos$  deverá ser trocado por  $\cosh$ . O coeficiente de transformação do momento é

$$\hat{t}_2 = \frac{2}{\gamma} \int_0^1 \frac{A e^{i z} dz}{A + \sinh^2(\frac{1}{4}\rho z)}; \quad (2.87)$$

Se  $\rho$  for da ordem da unidade (ou maior) e  $\gamma > 1$ , então  $A \approx \cosh^2(\frac{1}{4}\rho)$ . Devido ao fator  $e^{i z}$  no integrando de (2.87), a contribuição principal à integral é dada pelo intervalo  $0 < z < z_m \ll 1$ . Se a razão  $\gamma = z_m$  exceder o valor unitário, então  $A = [A + \sinh^2(\frac{1}{4}\rho z)] \approx 1$  para  $0 < z < z_m \ll 1$ , e a integral terá valor próximo de 1, e de novo não dependerá de  $\rho$ .

Relações de dependência típicas entre o coeficiente de transformação do momento médio, (2.23), e a altura adimensional do potencial,  $\gamma$ , para valores pequenos da largura  $\rho$  são dados na figura 2.7. As duas curvas superiores correspondem ao potencial-degrau, (2.73), e suas larguras diferem por quatro ordens de magnitude:  $\rho = 0,001$  (potencial-degrau agudo) e  $\rho = 10$ . Entretanto, ambas as curvas estarão muito próximas para qualquer valor de  $\gamma$ . Além disso, para  $\gamma > 4$  o parâmetro  $\gamma$  estará muito próximo do valor máximo ( $\gamma = 2$ ), o qual corresponde à parede infinitamente alta. As quatro curvas inferiores correspondem ao potencial do tipo pulso, (2.74) (notemos a ordem inversa das curvas com respeito ao caso do potencial-degrau). Se a espessura da barreira for da ordem da largura inicial do pacote (2.75) no espaço de posição ( $\rho \gg 1$ ), então o coeficiente  $\gamma$  estará próximo do valor-limite para  $\gamma > 4$ , assim como no caso do potencial-degrau. Para  $\rho = 10$  (e maior) as curvas correspondendo aos potenciais (2.73) e (2.74) se tornam praticamente indistinguíveis: veja-se a curva espessa (a segunda a partir do topo).

### 2.3.4 Potencial do tipo delta de Dirac

No caso de potenciais muito estreitos (com  $\rho \ll 1$ ), as propriedades dos pacotes refletidos dependerão só do parâmetro  $K = (\rho)^2$ . Em verdade, para  $\rho \ll 1$  e  $\rho^2 \ll 1$ , e para valores não muito grandes de  $\rho$ ,  $\rho \gg O(1)$  (o que dá a contribuição principal a todas as

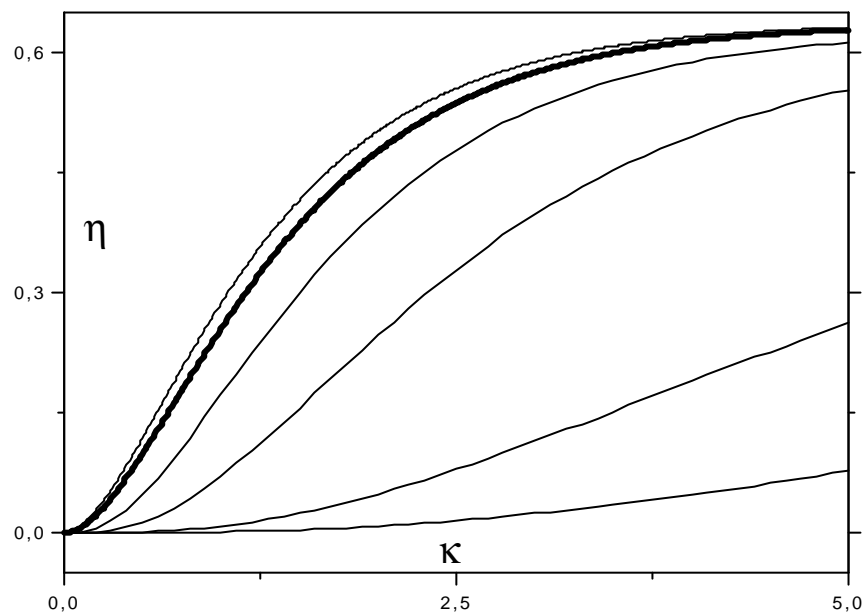


Figura 2.7: O coeficiente de transformação do momento contra a altura adimensional do potencial,  $\eta$ , para vários valores da largura adimensional do potencial,  $\beta$ , para o pacote gaussiano (2.77) e dois potenciais diferentes. As quatro curvas inferiores correspondem ao potencial do tipo pulso, (2.74). Os valores do parâmetro  $\beta$  são como segue (da base para o topo): 0,1; 0,2; 0,5; 1. A curva mais espessa (a segunda a partir do topo) corresponde a  $\beta = 10$  e é comum ao potencial (2.74) e ao potencial do tipo degrau, (2.73), com o mesmo valor de  $\beta$ . A primeira curva a partir do topo corresponde ao potencial-degrau com  $\beta = 0,001$ .

características do pacote), poderemos simplificar as expressões na equação (2.86), obtendo os seguintes coeficientes de reflexão e de transmissão:

$$j\hat{A}(p)j^2 = \frac{K}{K + p^2}; \quad j^3(p)j^2 = \frac{p^2}{K + p^2}; \quad (2.88)$$

As expressões em (2.88) coincidirão exatamente com os coeficientes de reflexão e de transmissão para o potencial-delta [33, 38]:

$$V(x) = Z\delta(x); \quad (2.89)$$

se fizermos  $Z = 2V_0w$ , de modo que  $K = (msKc = \hbar^2)^2$ . Portanto, o potencial-delta pode ser usado como uma boa aproximação simples de barreiras estreitas (em verdade, esse potencial é usado com frequência para modelar fenômenos totalmente diferentes em vários campos da Física quântica: veja-se, por exemplo, [39] para uma revisão recente). Notemos que o coeficiente  $K$  não depende do sinal da intensidade do potencial,  $Z$ . Isso significa que potenciais-delta atrativos e repulsivos produzem os mesmos valores médios e probabilidades assintóticas.

Aproveitamos a simplicidade das fórmulas (2.88) para analisar a diferença entre valores médios, condicionais e não-condicionais, introduzidos na subseção 2.2.2. Calculando as integrais (2.78) - (2.82), obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{f(K)}{p_0}; & \langle p \rangle_R &= \frac{1}{p_0} \frac{1 + f(K)}{1 + g(K)}; & \langle p^2 \rangle_R &= \frac{1 + 2K [1 + g(K)]}{2 [1 + g(K)]}; \\ f(K) &= K \exp(K) E_1(K); \\ g(K) &= 2R \int_0^\infty \exp(-Kt) \operatorname{erfc}(t) dt; \end{aligned}$$

Aqui

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{t} \exp(-t) = \int_x^\infty \frac{dt}{t} \exp(-t) \quad (2.90)$$

é a integral-exponencial [40].

Os coeficientes de transformação do momento

$$\langle p \rangle = \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle; \quad \langle p \rangle_R = \langle p \rangle_R^2 = \langle p^2 \rangle; \quad \langle p^0 \rangle_R = \langle p \rangle_R^2 = \langle p^2 \rangle_R \quad (2.91)$$

dependem apenas de  $K$ :

$$\langle p \rangle = \frac{2}{\hbar} [f(K)]^2; \quad \langle p \rangle_R = \frac{2}{\hbar} \frac{1 + f(K)}{1 + g(K)}; \quad \langle p^0 \rangle_R = \langle p \rangle_R^2 = \frac{1 + g(K)}{1 + 2K [1 + g(K)]}; \quad (2.92)$$

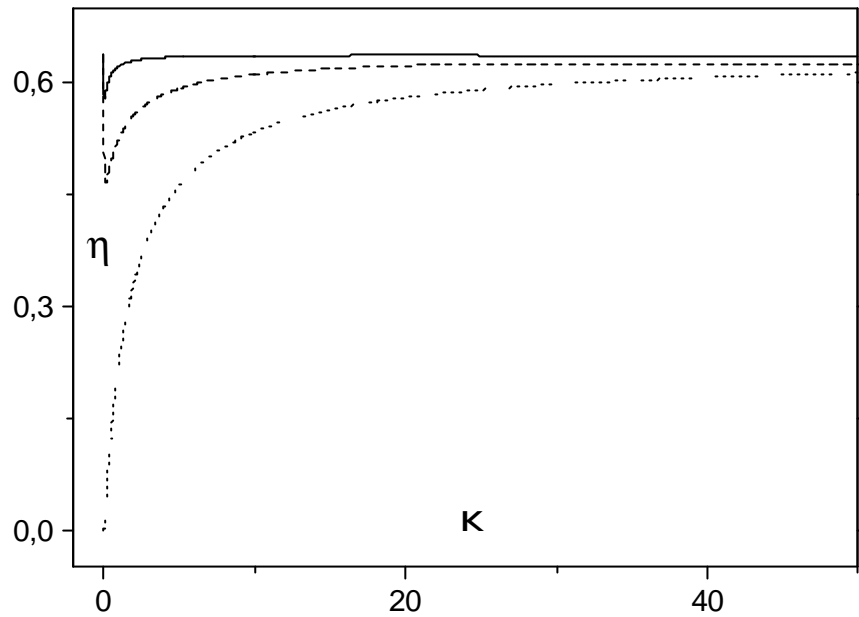


Figura 2.8: Os três coeficientes de transformação do momento contra a intensidade do potencial-delta,  $K$ . A ordem das curvas da base para o topo:  $\eta$ ,  $\eta_R$  e  $\eta_R^0$ .

Os gráficos das três funções da equação (2.92) são mostrados na figura 2.8. A função  $\eta(K)$  é monótona. Portanto, diminuir os valores do parâmetro de pureza,  $C$ , resulta em menores valores de  $\eta$  para um valor fixo da intensidade do potencial-delta,  $Z$ , (exceto para o caso-limite de uma parede impenetrável com  $Z = 1$ ). Contudo, as duas outras funções,  $\eta_R(K)$  e  $\eta_R^0(K)$ , não são monótonas. Por essa razão, estados altamente mistos, com  $C \neq 0$ , podem ter coeficientes de transformação do momento,  $\eta_R$  e  $\eta_R^0$ , com valores iguais aos dos estados puros com  $C = 1$ . Todavia, as relações de dependência entre  $\eta_R$  (e especialmente  $\eta_R^0$ ) e  $K$  são fracas, ao menos para  $K > 5$ .

### 2.3.5 O produto de incertezas

Ao estudar a evolução de pacotes de ondas é comum calcularmos o produto de incertezas,  $\Delta x \Delta p$ , a fim de estimar o quanto o pacote se aproxima de um estado de incerteza mínima. Por exemplo, um rápido crescimento desse produto foi interpretado em [41] como indicando a possibilidade de um "caos semiclássico" nos sistemas quânticos. Verdadeiramente, é melhor usar o produto de incertezas

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.93)$$

que é invariante em relação às transformações canônicas, lineares e arbitrárias. O produto (2.93) satisfaz à relação de incerteza de Schrödinger-Robertson:  $\Phi \geq \frac{1}{4}$  [42]-[44]. Além disso, ele não depende do tempo para qualquer hamiltoniano quadrático com coeficientes dependentes do tempo arbitrários, sendo o exemplo mais simples dos invariantes quânticos e universais [44]-[46]. Para hamiltonianos não-quadráticos (em particular, para o movimento livre no semi-espaço  $x > 0$  com uma fronteira impenetrável em  $x = 0$ ) o produto (2.93), em geral, depende do tempo. Foi proposto em [47, 48] usar a taxa de mudança da função (2.93) (e outras combinações similares) para classificar as não-linearidades dos sistemas quânticos.

Usando as equações (2.35)-(2.37), podemos verificar que assintoticamente (quando  $t \rightarrow \infty$ ) o produto de incertezas (2.93) tende a um valor grande e constante proporcional a  $x_c^2$ . Portanto, é conveniente introduzir o parâmetro adimensional  $\Phi = \Phi_s^2 = (\frac{1}{2} x_c)^2$ . Seu valor assintótico é (relembremos que  $L = 1/2$  para estados inicialmente simétricos)

$$\Phi_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{4L^2} \frac{1}{k_1^2}; \quad (2.94)$$

onde  $k$  foi definido na equação (2.25).

Somente no caso em que  $\frac{1}{2} k = 2L = 1$ , o lado direito de (2.94) se anulará. Mas esse é o caso do movimento livre, quando  $\Phi$  preserva seu valor inicial (o qual não depende de  $x_c$ , de modo que parece nulo na escala definida por  $x_c \rightarrow \infty$ ).

As equações (2.38)-(2.41) resultam no seguinte valor assintótico e constante (relembremos que  $R = 1/2$  para distribuições inicialmente simétricas):

$$\Phi_R^1 = \frac{1}{R^2} (2R - 1) \frac{\hbar^2 k^2}{k_1^2} \frac{1}{R} \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{k_1^2}; \quad (2.95)$$

Na Figura 2.9, mostramos as relações de dependência entre os produtos de incertezas padronizado,  $\Phi_1$ , e condicional,  $\Phi_R^1$ , e a intensidade do potencial-delta,  $K$ , para o pacote gaussiano (2.24). Vemos que as duas curvas são diferentes, embora tendam ao mesmo limite  $\frac{1}{2}(1 \pm \frac{1}{2}) \approx 0,18$  quando  $K \rightarrow \infty$ .

### 2.3.6 Reflexão de pacotes largos por uma parede ideal

Parece interessante apresentar um exemplo explícito mostrando a diferença entre a reflexão de pacotes estreitos e de largos. Isso pode ser feito, por exemplo, no caso de uma parede infinita e ideal, quando diferentes famílias de soluções exatas da equação de Schrödinger dependente do tempo podem ser construídas. Uma dessas famílias consiste das seguintes funções:

$$\psi(x; t) = \frac{2x(m\hbar)^{3/4}}{\sqrt{4\pi\hbar^2 t}} \exp\left(-\frac{im^2 x^2}{2\hbar t}\right); \quad (2.96)$$

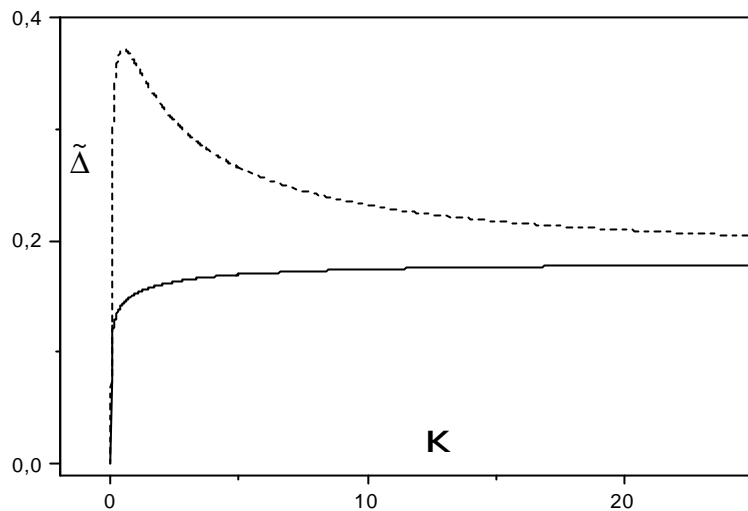


Figura 2.9: Os valores assintóticos do produto de incertezas padronizado (curva tracejada) e condicional (curva sólida) contra a intensidade do potencial-delta,  $K$ , para o pacote gaussiano (2.24).

onde  $\psi(t)$  é uma função linear e complexa do tempo

$$\psi(t) = b e^{i \omega t} + b(i + r)t; \quad |r| < 1 \quad (2.97)$$

O coeficiente positivo  $b$  determina a largura inicial do pacote de ondas, enquanto o parâmetro  $r$  é responsável pela correlação inicial entre a posição e o momento. As soluções na forma (2.96) foram consideradas em [6], enquanto suas extensões para um potencial mais geral, do tipo oscilador singular com frequência dependente do tempo, foram encontradas em [30, 49].

Para uma função arbitrária  $\psi(t)$ , os valores médios dos operadores de posição e de momento, seus produtos e quadrados no estado (2.96) são

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= 2(\hbar m \omega)^{-1/2} \langle j \rangle; & \langle p \rangle &= 2(\hbar m \omega)^{1/2} \text{Re}(\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle); \\ \langle x^2 \rangle &= 3 \langle j^2 \rangle = (2m)^{-1}; & \langle p^2 \rangle + \langle x \rangle \langle p \rangle &= 3 \hbar \omega \text{Re}(\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle); & \langle p^2 \rangle &= 3 \hbar m \omega \langle j^2 \rangle = 2 \hbar m \omega \end{aligned}$$

A característica específica da solução (2.96) é a conservação, no tempo, da razão entre a dispersão e o valor médio da posição:

$$\frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \rangle^2} = \frac{\langle p^2 \rangle}{\langle p \rangle^2} = \frac{3}{2} \quad (2.98)$$

Portanto, a largura relativa do pacote (2.96) no espaço de posição é mais ou menos grande, independentemente da função  $\psi(t)$ . A largura relativa do pacote no espaço de momento,



$\overline{p_{\perp}} = \hbar p_i$ , depende do tempo, mas assintoticamente (quando  $t \rightarrow \infty$ ) ela tenderá ao mesmo valor constante » (2.98), se a função  $\psi(t)$  for dada pela equação (2.97). Se  $\psi(0) = 0$ , então o coeficiente de transformação do momento será igual a  $\gamma = 8 = (3/4)^{1/2}$ ; 85.

A densidade de probabilidade de momento assintótica e exata (assim como a dependente do tempo) não exhibe oscilações (diferentemente do caso em que os pacotes iniciais são estreitos)

$$P_1(P) = 4^{1/2} i^{-1/2} P^{-2} \exp\left\{i \int_0^P P'^2 \Phi\right\}; \quad P > 0; \quad P = \frac{p}{b \sqrt{m^2(1+r^2)}};$$

Além disso, a solução da equação de Schrödinger na forma de pacotes de ondas que preservam a forma, (2.96), possui um produto de incertezas que não depende do tempo

$$\Delta p = \frac{3^{-2}}{4^{1/2}} (3/4 i - 8)^{1/2} 0; 34^{-2}$$

para qualquer função  $\psi(t)$ .

## 2.4 Discussão

Estudamos a influência de diferentes fatores sobre a reflexão de pacotes quânticos, lentos e estreitos, por espelhos atômicos, tendo demonstrado que a forma das distribuições de momentos assintóticas dependem crucialmente da razão entre o momento médio e inicial na direção perpendicular à superfície do espelho,  $\overline{p_{0j}}$ , e a dispersão inicial desse componente,  $\overline{p_{\perp}^2(0)} \gg \Delta s$ , onde  $s$  é a incerteza inicial na posição da partícula (o centro do pacote de ondas) na direção perpendicular. Se  $\overline{p_{0j}} \gg \Delta s$  (o caso considerado na maioria dos estudos prévios), então a distribuição de momentos assintótica será simplesmente a inicial refletida pelo ponto  $p = 0$  no espaço de momento (para  $p_0 < 0$ ). Mas se  $\overline{p_{0j}} \ll \Delta s$ , então a forma da distribuição final de momentos será essencialmente diferente da inicial. Isso resultará num aumento significativo do valor absoluto do momento médio e inicial na direção perpendicular ao espelho, de modo que o valor médio e assintótico,  $\overline{p_1}$ , poderá se tornar da ordem de  $\Delta s$  às custas do encolhimento da distribuição de momentos. Em certo sentido, um efeito oposto, quando o pacote se movendo em direção ao espelho (criado pelo feixe do laser) pára nele, foi discutido em [18]. Contudo, isso ocorre em virtude do emaranhamento entre os graus de liberdade internos e os de translação do átomo frio, enquanto que a característica principal do efeito considerado aqui é a independência em relação ao estado interno do átomo (embora os parâmetros desse estado possam entrar implicitamente no potencial responsável pela reflexão).

Mostramos que os parâmetros concretos do potencial do espelho (tais como a altura,  $V_0$ , e a largura característica,  $w$ ) não são muito importantes para o efeito discutido: se  $V_0$  for só um pouco maior do que a energia característica do pacote  $\sim^2=(ms^2)$ , então as propriedades do pacote refletido estarão próximas daquelas obtidas no caso de uma parede impenetrável e ideal.

No caso tridimensional, o efeito pode ser interpretado como a reflexão quântica [22]. Esse efeito, sendo quase trivial do ponto de vista da teoria da propagação do pacote de ondas, serve, todavia, como uma demonstração impressionante da natureza quântica do movimento de átomos ultralentos. Vamos fazer algumas estimativas, supondo que  $p_0 = 0$ . Para preparar o estado inicial com velocidade média dirigida ao longo da superfície com incerteza pequena na posição transversa, poderemos usar um longo e ...no guia de ondas atômico [50], através do qual os átomos poderiam deixar uma armadilha onde foram resfriados até atingir a baixa energia necessária. Métodos para gerar estados quânticos e arbitrários do movimento do centro de massa de átomos frios foram propostos recentemente em [51]. O valor assintótico da velocidade transversa (na direção perpendicular ao espelho) é  $v_{\perp} \approx \frac{1}{4} \sqrt{2} \approx (2ms)$ . Tomando  $s = 10^{-6}$  cm, obtemos  $v_{\perp} \approx 2$  cm/s para átomos de césio e  $v_{\perp} \approx 2$  m/s para átomos de hidrogênio. O tempo de reflexão é igual, em ordem de magnitude, ao tempo necessário para mudar o sinal da parte principal dos componentes negativos da distribuição de momentos inicial. Para um pacote com largura inicial  $s$ , os componentes mais significativos no espaço de momento estão confinados no intervalo  $|j_{\pm}| \approx \sqrt{2} s$ , e eles alcançarão a fronteira após o tempo  $m x_c = |j_{\pm}|$ , onde  $x_c \approx s$  é a distância inicial entre a partícula e o espelho. Então, podemos estimar o tempo de reflexão como  $t_d \approx m s x_c \approx \dots$ . Soluções exatas para um espelho ideal, consideradas em [22, 23], produzem o mesmo resultado, com o fator numérico 4 no lado direito. Supondo que  $x_c = 1$  cm, o que é um parâmetro totalmente macroscópico ( $x_c = s \approx 10^6$ ), teremos  $t_d \approx 1$  s para átomos de césio e  $t_d \approx 0,01$  s para átomos de hidrogênio. Durante esse tempo, os átomos percorrerão  $2x_c$  na direção paralela e, aproximadamente,  $x_c$  na direção perpendicular. Se a velocidade média e inicial da partícula na direção paralela à superfície,  $v_{\parallel}$ , tiver a mesma ordem de magnitude que  $v_{\perp}$  (a qual é uma velocidade típica em experimentos com átomos ultrafrios [52]), então uma significativa reflexão quântica será totalmente observável.

O efeito é impressionante do ponto de vista clássico: uma partícula passa a 1 cm de distância de uma parede e, na ausência de qualquer força, ela "sente" a presença da fronteira e muda sua direção de movimento por até  $45^\circ$  (ou até mais, se a velocidade inicial e paralela for menor do que  $v_{\perp}$ ). Para átomos leves, do hidrogênio ao berílio, podemos ter uma

distância inicial de até 10 cm.

Naturalmente, existem muitas dificuldades que devem ser superadas para observarmos a difração quântica. Algumas delas foram discutidas em [22, 23]. Entre as outras, podemos mencionar o alargamento da distribuição de momento causado por emissão espontânea [53]. Aqui chamaremos a atenção para vários problemas (teóricos) interessantes que surgem em conexão com nosso estudo.

1) Mostramos que os valores médios do momento e de outros observáveis dependem essencialmente do arranjo experimental, isto é, da possibilidade de observar a partícula atrás do espelho. Todavia, todos os resultados foram derivados sob a condição de que a evolução é unitária e usando as suas consequências, tais como (2.3), (2.5) e (2.6). Nos experimentos com átomos frios, se um deles atingir o espelho e não for refletido, dificilmente ele passará através da base de vidro do espelho evanescente. Logo, será absorvido por essa base vítrea. Portanto, o caso dos espelhos atômicos e absorvedores, para os quais a evolução não é unitária, parece interessante para futuras investigações.

2) Estudos sobre a evolução não-unitária parecem importantes também do ponto de vista dos problemas de amortecimento (relaxação) e descoerência entre diferentes componentes do pacote. Verdadeiramente, a difração é um efeito puramente quântico, porque está ligado de maneira íntima às propriedades ondulatórias da matéria, ou, melhor dizendo, à existência de fenômenos de interferência quântica. Sabemos, contudo, que a interação com o ambiente deteriora as interferências. Por outro lado, demonstramos que, para espelhos altamente refletivos e pacotes gaussianos, o coeficiente de transformação do momento depende fracamente do grau de pureza quântico, sendo praticamente o mesmo para estados puros e para estados mistos. Portanto, preparar o pacote inicial num estado misto poderá ter, em princípio, algumas vantagens, desde que poderemos começar com um pacote tendo maior largura espacial do que os estados puros mas com a mesma energia inicial. A interação com o ambiente poderá fazer o pacote se alargar mais rápido do que no caso da evolução livre (unitária), diminuindo a energia das flutuações e o momento médio. O efeito final dependerá, obviamente, das relações entre o tempo de difração e os tempos de descoerência e de relaxação (termalização). Os experimentos de difração de feixes atômicos (de elétrons, de nêutrons, etc) estão a favor da suposição de que a descoerência não é essencial nesse caso (de outro modo tais experimentos não poderiam ser realizados). Além disso, existem modelos mostrando que, por exemplo, o tempo de descoerência devido à interação com a radiação cósmica de fundo é muito grande (excedendo a idade do universo) para objetos quânticos tais como átomos [54]. Entretanto, existem muitos outros possíveis mecanismos de descoerência

e de relaxação, assim como diversos modelos descrevendo esses mecanismos. Logo, estudar tais modelos levando em conta a reflexão por fronteiras poderá ser interessante.

3) Mostramos que, na presença da parede, o valor absoluto do momento médio da partícula muda devido à deformação da função de distribuição de momentos. Porém, a parede ideal é o caso-limite dos potenciais repulsivos. Desse modo, podemos supor que a forma inicial do pacote de ondas será importante nos processos de colisões entre partículas ultrafrias, quando os valores absolutos de seus momentos iniciais forem comparáveis às raízes quadradas das dispersões dos momentos. O resultado da distorção das formas dos pacotes de ondas das partículas durante a colisão é que os valores absolutos dos momentos médios não são conservados. Nesse sentido, as colisões entre partículas ultrafrias são inelásticas, pois os estados iniciais não são ondas planas e ideais mas pacotes de ondas com extensões espaciais finitas. Esse efeito poderá ser importante para a Física dos átomos ultrafrios (em conexão com esse tema veja-se, por exemplo, os recentes artigos [55]).

4) Consideramos a reflexão quântica de átomos individuais. Contudo, devido ao rápido desenvolvimento da teoria e dos experimentos com feixes de átomos no estado de condensado de Bose-Einstein (lasers atômicos) [56], seria interessante verificar se a reflexão quântica existirá para tais feixes. Nesse caso, teríamos que tratar com modificações não-lineares da equação de Schrödinger. Em verdade, o tratamento do efeito em nosso trabalho foi baseado essencialmente no princípio da superposição para as ondas de de Broglie, ou seja, na linearidade da mecânica quântica. No caso não-linear a situação poderá ser diferente. Por exemplo, equações não-lineares admitem como soluções feixes que não se alargam no espaço livre. Desse modo, podemos supor que nenhuma onda plana e parcial alcançará a fronteira para ser refletida por ela e, conseqüentemente, não haverá reflexão quântica. Foi mostrado recentemente em [57] que a família de cinco parâmetros das generalizações homogêneas de Stenflo–Sabatier–Doebner–Goldin da equação de Schrödinger [58]-[61] contém uma subfamília que admitirá soluções solitônicas de comprimento finito da forma

$$\tilde{A}(x; t) = f \cos[\phi(x; t)] g^{1 \pm \epsilon} e^{i(kx_i - \omega t)}; \quad |j^\circ(x; t)| < \frac{1}{4} = 2;$$

enquanto  $\tilde{A}(x; t) \neq 0$  se  $|j^\circ(x; t)| > \frac{1}{4} = 2$  e  $\epsilon > 0$ . Outros exemplos de equações admitindo tais soluções solitônicas foram considerados em [62]. Desde que as soluções são iguais a zero fora de um domínio finito no espaço, é evidente que qualquer potencial fora desse domínio não afetará essas soluções. O estudo da possibilidade de ocorrência da reflexão quântica por espelhos para outros tipos de modificações não-lineares da equação de Schrödinger poderá estabelecer novos limites para os coeficientes dessas equações.

# Capítulo 3

## Encolhimento de pacotes de ondas quânticos

Neste capítulo, estudamos o encolhimento de pacotes de ondas livres. Analisamos a evolução de estados puros e mistos, mostrando que uma escolha adequada da medida de extensão do pacote ajudará a visualizar ou a enfatizar o efeito quando ele existir.

### 3.1 Introdução

A evolução de pacotes quânticos no espaço livre é estudada desde os primórdios da Física quântica, o que resultou em numerosos artigos, começando com [63], além de ser analisada em quase todos os livros de mecânica quântica. Mais do que sete décadas já se passaram e os pacotes de ondas de matéria continuam frutíferos e surpreendentes [22, 23], [55], [64]-[69]. Por exemplo, mostrou-se [67] que para pacotes de ondas aneliformes em  $d$  dimensões, cujas formas iniciais dependem apenas do raio como (usamos variáveis adimensionais e supomos que  $m = \hbar = 1$ )

$$\tilde{A}_d(r; 0) = N_d r^2 \exp(i r^2); \quad (3.1)$$

o raio médio diminui em algum intervalo  $0 < t < t_*$  para  $d = 2$ ; enquanto que para  $d \geq 3$  ele aumenta monotonamente para todo  $t > 0$ : Essa contração inicial do pacote de ondas foi interpretada como a manifestação de um “potencial” efetivo, quântico e anticentrífugo em duas dimensões [70] (para estudos de diferentes “forças” quânticas e efetivas ou ...ctícias veja-se [22, 65, 69, 71]). Contudo, o efeito contrativo considerado em [67] é muito pequeno, pois a razão entre o raio (médio) mínimo e seu valor inicial é igual a 0;9978 para o pacote inicial (3.1) e 0;9953 para a melhor con...guração entre as usadas em [67]. Comumente, tais

valores são considerados iguais a 1:

O raio médio é apenas uma das muitas medidas razoáveis da extensão do pacote de ondas. Neste trabalho, mostramos que o encolhimento do pacote de ondas poderá ser mais pronunciado se usarmos outras medidas, especialmente os valores médios de diferentes potências (principalmente negativas) do raio ou alguma extensão entrópica. Em termos dessas medidas generalizadas, o caso bidimensional deixa de ser distinto.

O encolhimento existe também no caso unidimensional para certos tipos de pacotes com duas “protuberâncias”, sendo que o exemplo mais simples é o estado coerente e par, introduzido em [30] e freqüentemente considerado nos dias de hoje como um modelo do gato de Schrödinger. Além disso, considerando diferentes medidas quantitativas do alargamento do pacote, descobrimos que os estados coerentes e ímpares (que foram estudados em [22] em conexão com a difração quântica de partículas lentas por espelhos) também podem exibir encolhimento inicial sob certas condições. Para evitar confusão, enfatizamos que vamos considerar pacotes descritos por funções de onda inicialmente reais, de modo que as velocidades iniciais ou os fluxos de densidade de probabilidade são nulos. Comparando as evoluções livres dos pacotes pares e ímpares, que representam estados puros, e a evolução da matriz-densidade, que descreve misturas quânticas de duas gaussianas, mostramos que o encolhimento dos pacotes iniciais é, em verdade, o resultado de interferências quânticas.

Este capítulo está disposto assim: na seção 3.2, obtemos expressões analíticas e explícitas descrevendo a evolução dos pacotes de ondas aneliformes, generalizando (3.1) para um número arbitrário de dimensões espaciais,  $d$ : Embora os casos em que  $d = 2$  e  $d = 3$  pareçam os mais relevantes, o estudo da situação geral provê informação adicional que ajuda na compreensão do fenômeno. Além disso, os casos em que  $d > 3$  podem ser interessantes na análise do comportamento de sistemas com muitas partículas [67, 71]. Na seção 3.3, analisamos os valores médios de potências arbitrárias do raio como medidas do tamanho do pacote de ondas. As medidas entrópicas da extensão do pacote de ondas são consideradas na seção 3.4. Na seção 3.5, discutimos o encolhimento de pacotes unidimensionais. A seção 3.6 contém uma discussão dos resultados e as conclusões.

## 3.2 Alargamento de pacotes de ondas aneliformes

Integrando o propagador da equação de Schrödinger no espaço livre, em  $d$  dimensões espaciais,

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0; t) = (2\pi i t)^{-d/2} \exp \frac{i}{2t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^2 \quad (3.2)$$

nas variáveis angulares, encontramos, usando as representações integrais da função de Bessel (consulte-se, por exemplo, a fórmula 7:12:9 de [28]), que a evolução de funções de onda que dependem só do raio,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$ , é dada pelo propagador radial (veja-se também, por exemplo, [72])

$$\tilde{A}_d(r; t) = \frac{r}{t} \int_0^{\infty} \frac{r_0}{i r} r_0^{d-2} J_{(d-2)/2} \left( \frac{r r_0}{t} \right) \exp \frac{i}{2t} (r^2 + r_0^2) \tilde{A}_d(r_0; 0) dr_0; \quad (3.3)$$

onde  $J_\lambda(z)$  é a função de Bessel e  $d$  é o número de dimensões espaciais.

Consideremos a seguinte generalização do pacote de ondas inicial, (3.1):

$$\tilde{A}_d^{(k)}(r; 0) = N_{d;k} r^k \exp(i r^2); \quad N_{d;k}^2 = \frac{2^{k+d-2} \Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2) \Gamma(k + d/2)}; \quad (3.4)$$

sendo que  $\Gamma(z)$  é a função-gama de Euler. Então, a integral (3.3) pode ser expressa em termos da função hipergeométrica e confluyente,  ${}_2F_1(a; c; z)$  (veja-se, por exemplo, a equação 7:7:3(22) de [28]), de modo que

$$\tilde{A}_d^{(k)}(r; t) = \frac{N_{d;k} \Gamma\left(\frac{k+d}{2}\right) (i\zeta)^{k-2}}{\Gamma(d/2) (1+i\zeta)^{\frac{k+d}{2}}} \exp \left[ i \frac{r^2}{1+i\zeta} \right] {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \frac{k}{2}, \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{matrix}; \frac{i r^2}{\zeta(1+i\zeta)} \right]; \quad (3.5)$$

onde  $\zeta = 2it$ : Se  $k=2 = n$  for um inteiro, o lado direito de (3.5) poderá ser escrito em termos dos polinômios de Laguerre associados devido à fórmula 10:12:(14) de [28]:

$$\tilde{A}_d^{(2n)}(r; t) = \frac{N_{d;2n} n! (i\zeta)^n}{(1+i\zeta)^{n+d-2}} \exp \left[ i \frac{r^2}{1+i\zeta} \right] L_n^{(d-2i-1)} \left( \frac{i r^2}{\zeta(1+i\zeta)} \right); \quad (3.6)$$

Não é difícil generalizar as soluções (3.5) e (3.6) para o caso em que o argumento da exponencial em (3.4) é igual a  $i(1+i\zeta)r^2$ : Tais funções podem ser consideradas como generalizações dos estados coerentes e correlacionados de [43] ou um caso especial deles (os estados contrários de [73]), porque as covariâncias,  $\langle \mathbf{p} + \mathbf{p} \rangle$ , são diferentes de zero para esses estados. Entretanto, se  $\zeta \neq 0$ ; o valor médio e inicial do momento radial será diferente de zero também, de maneira que o encolhimento do pacote se tornará trivial. Por essa razão, ...camos restritos ao caso em que  $\zeta = 0$ :

### 3.2.1 Distribuição de probabilidade

É fácil ver, a partir da equação (3.5) ou da equação (3.6), que para  $\zeta$  grande (e  $r \dots x_0$ ) o pacote “esquece” sua forma inicialmente anular e se alarga como um pacote gaussiano

$$\tilde{A}_d^{(k)}(r; t) \approx \zeta^{i^d} \exp(i 2r^2 = \zeta^2); \quad \zeta \gg 1:$$

Todavia, desde que o pacote anelar e inicial se alarga tanto para fora quanto para dentro, sua forma poderá ser totalmente diferente da gaussiana e da sua própria nos estágios iniciais da evolução (quando  $\zeta < 1$ ) devido às interferências. Por exemplo, usando a fórmula (3.6) com  $n = 1$ , obtemos a solução da equação de Schrödinger correspondendo à função inicial (3.1):

$$\tilde{A}_d^{(2)}(r; t) = N_{d,2} (1 + i\zeta)^{i^2} (r^2 - \zeta^{2d=2} + i\zeta^{d=2}) \exp\left(-i \frac{r^2}{1 + i\zeta}\right); \quad (3.7)$$

Ela tem a densidade de probabilidade

$$\frac{1}{2}_d(r; \zeta) = \tilde{A}_d^{(2)*} \tilde{A}_d^{(2)} = N_{d,2}^2 \frac{r^4 - r^2 \zeta^{2d} + \zeta^{2(1 + \zeta^2)d^2=4}}{(1 + \zeta^2)^{2+d=2}} \exp\left(-i \frac{2r^2}{1 + \zeta^2}\right); \quad (3.8)$$

Essa função tem um mínimo e um máximo no intervalo  $0 < r < 1$  (e um máximo em  $r = 0$ , para  $\zeta > 0$ ): Para  $\zeta \gg 1$ , suas posições são dadas pelas expressões aproximadas  $r_{\min} \approx \frac{1}{\zeta^{d=2}}$  e  $r_{\max} \approx \frac{1}{\zeta^{1+d=2}}$  (para  $d = 2$  são fórmulas exatas), e as seguintes razões são válidas

$$\frac{\frac{1}{2}_{\max}}{\frac{1}{2}(r=0)} \approx \frac{1}{4} (ed=2)^{i^2} e^{i^d}; \quad \frac{\frac{1}{2}_{\min}}{\frac{1}{2}_{\max}} \approx \frac{1}{4} (ed_{\zeta=2})^{i^2};$$

Conseqüentemente, reminiscências do anel inicial sobrevivem para  $\zeta \gg 1$ ; mas esse anel mais externo é muito débil: mede, aproximadamente, 2% da altura do pico central para  $d = 2$  e menos do que 0,5% para  $d = 3$ :

Os estágios iniciais da evolução da densidade de probabilidade volumétrica,  $\frac{1}{2}_d(r; \zeta)$ , e da densidade de probabilidade radial

$$\tilde{A}_d(r; \zeta) = \int_0^r r^{d-1} j \tilde{A}_d(r; \zeta) j^2; \quad \int_0^r r^{d-1} \frac{2^{1/4} r^{d-2}}{i^{(d=2)}}; \quad (3.9)$$

para diferentes valores de  $k$  e  $d$  são mostrados nas figuras 3.1 - 3.6.

Olhando para os gráficos, descobrimos, em primeiro lugar, que a impressão visual depende do tipo de densidade de probabilidade considerada. As distribuições de probabilidade radial para  $\zeta > 0$  sempre parecem mais largas do que as iniciais, embora não seja óbvio se seus alargamentos são sempre monótonos ou não (comparemos as curvas III e IV na figura 3.2 e as curvas II e III na figura 3.4).



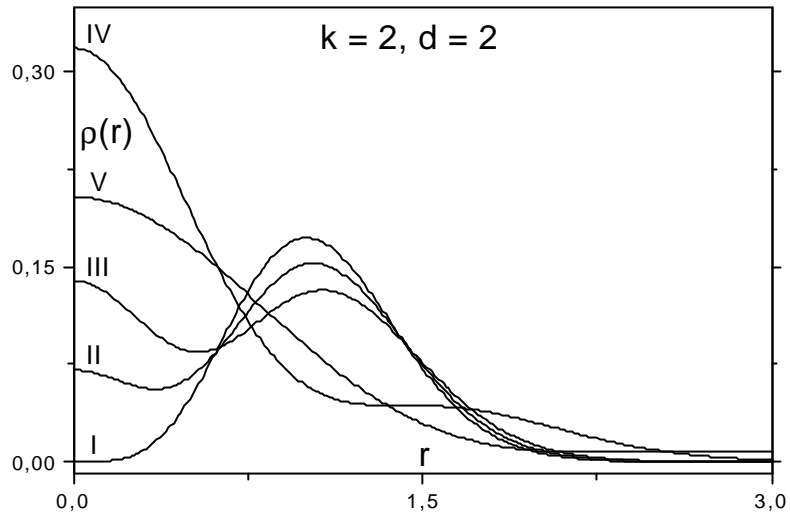


Figura 3.1: A densidade de probabilidade volumétrica,  $\rho(r) = |\vec{A}(r)|^2$ , para  $k = 2$  e  $d = 2$  em diferentes instantes. I:  $t = 0$ ; II:  $t = 0.25$ ; III:  $t = 0.38$ ; IV:  $t = 1$ ; V:  $t = 2$ .

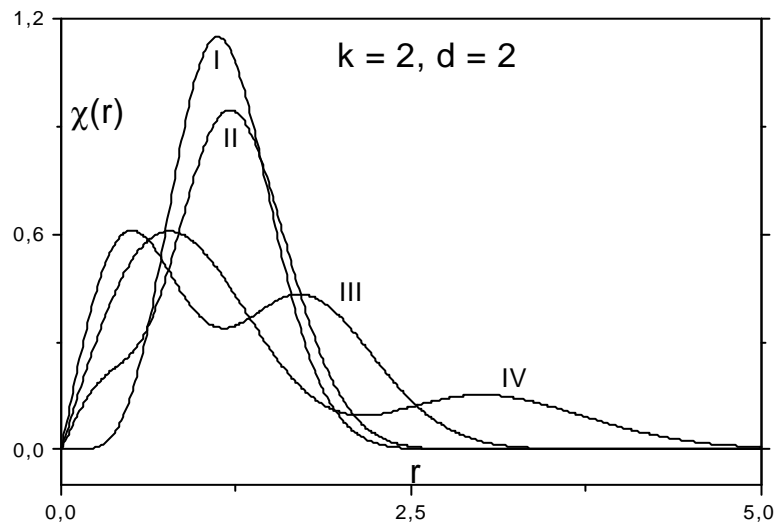


Figura 3.2: A densidade de probabilidade radial,  $\chi(r)$ , para  $k = 2$  e  $d = 2$  em diferentes instantes. I:  $t = 0$ ; II:  $t = 0.25$ ; III:  $t = 1$ ; IV:  $t = 2$ .

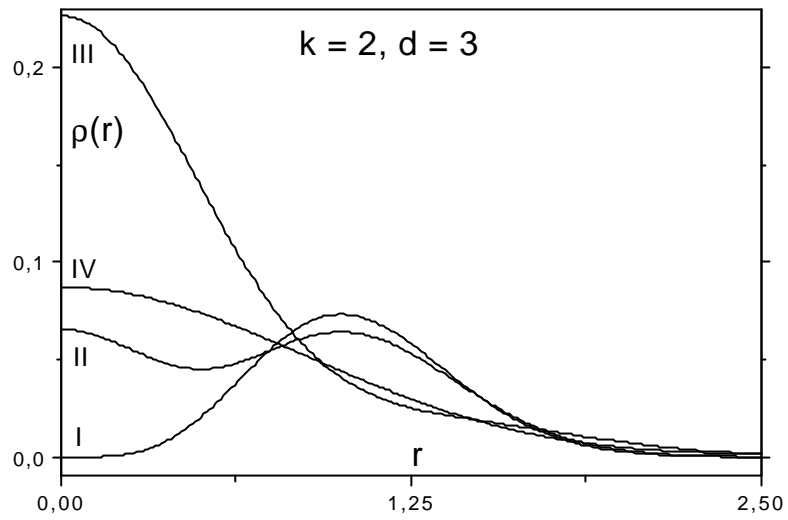


Figura 3.3: A densidade de probabilidade volumétrica  $\rho(r) = |\tilde{A}(r)|^2$  para  $k = 2$  e  $d = 3$  em diferentes instantes. I:  $\zeta = 0$ ; II:  $\zeta = 0;25$ ; III:  $\zeta = 0;82$ ; IV:  $\zeta = 2$ .

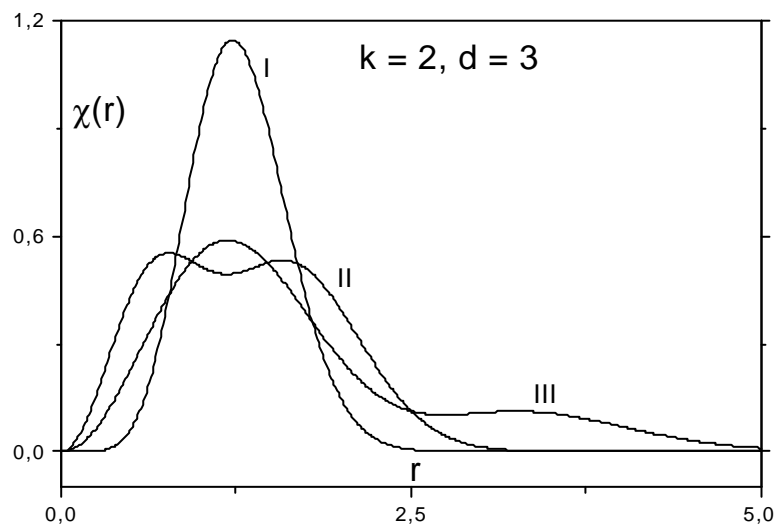


Figura 3.4: A densidade de probabilidade radial,  $\hat{A}(r)$ , para  $k = 2$  e  $d = 3$  em diferentes instantes. I:  $\zeta = 0$ ; II:  $\zeta = 0;82$ ; III:  $\zeta = 2$ .

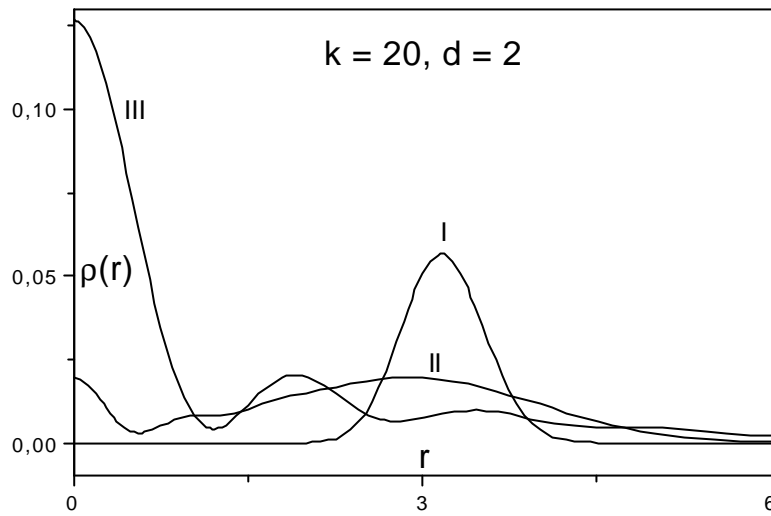


Figura 3.5: A densidade de probabilidade volumétrica,  $\rho_{\frac{1}{2}}(r) = |\tilde{A}(r)|^2$ , para  $k = 20$  e  $d = 2$  em diferentes instantes. I:  $\zeta = 0$ ; II:  $\zeta = 1; 4$ ; III:  $\zeta = 10; 3; 16$ .

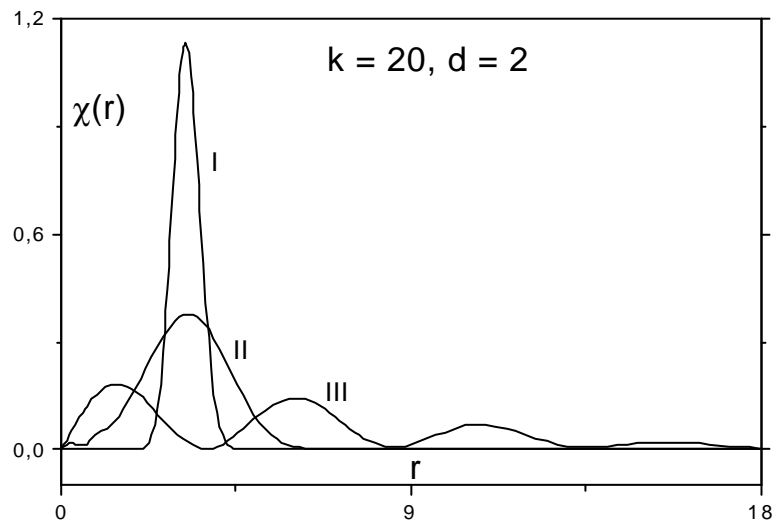


Figura 3.6: A densidade de probabilidade radial,  $\hat{A}(r)$ , para  $k = 20$  e  $d = 2$  em diferentes instantes. I:  $\zeta = 0$ ; II:  $\zeta = 1; 4$ ; III:  $\zeta = 10$ .

A situação se tornará mais complicada ainda se olharmos para a evolução das densidades de probabilidade volumétricas. Por exemplo, no caso em que  $k = d = 2$  (...gura 3.1) as distribuições  $\frac{1}{2}(r)$  nos momentos  $\zeta = 1 = \frac{P}{7}$  (curva III) e  $\zeta = 2$  (curva V) parecem claramente mais largas do que em  $\zeta = 0$ : Porém, não é fácil responder se o pacote no momento  $\zeta = 1$  (curva IV) é mais largo ou mais estreito do que o inicial, especialmente se desprezarmos a "cauda" do pacote para  $r > 1$ : O mesmo pode ser dito sobre as distribuições volumétricas nos instantes  $\zeta = 0; 25$  (curva II),  $\zeta = 2$  (curva IV) e  $\zeta = \frac{P}{2=3}$  (curva III) no caso em que  $k = 2$  e  $d = 3$  (...gura 3.3). E qual é mais estreita ou mais larga com respeito à distribuição inicial: a curva IV na ...gura 3.1 (ela corresponde ao menor tamanho do pacote de acordo com os resultados de [67]: veja-se a próxima seção) ou a curva III na ...gura 3.3? Conforme a medida de extensão adotada em [67], a curva III descreve a distribuição cujo tamanho é maior do que a correspondente à curva II na mesma ...gura, embora visualmente a distribuição III seja mais estreita do que a distribuição II. Analogamente, no caso em que  $k = 20$  e  $d = 2$  (...gura 3.5) a distribuição dada pela curva II parece claramente mais larga do que a inicial, mas o que pode ser dito sobre a distribuição dada pela curva III?

### 3.2.2 Distribuição de velocidades

Informação adicional sobre a dinâmica do processo de encolhimento/alargamento está contida na distribuição de velocidades do pacote. Relembrando que o fluxo da densidade de probabilidade é definido como  $J = \text{Im}(\tilde{A}^* \dot{A})$  (supomos que  $\rho = m = 1$ ), a velocidade local será dada por

$$v = \frac{J}{\frac{1}{2}} = \text{Im}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right); \quad (3.10)$$

Para os pacotes anelares, o vetor  $v$  tem apenas o componente radial. Para o estado (3.7), obtemos

$$v(r; \zeta) = \frac{2r\zeta[r^4 - r^2\zeta^2d + d(1 + \zeta^2)(\zeta^2d - 2) = 4]}{(1 + \zeta^2)[(r^2 - \zeta^2d = 2)^2 + \zeta^2d^2 = 4]}; \quad (3.11)$$

Embora a velocidade cresça com  $r$  quando  $r \gg 1$ , isso não terá conseqüências físicas, porque o fluxo de probabilidade será suprimido pela densidade de probabilidade,  $\frac{1}{2}(r)$ , que decai exponencialmente. As regiões de encolhimento correspondem aos valores negativos de  $v(r)$ . Seus limites são dados pelas duas raízes da expressão quadrática (com respeito a  $r^2$ ) no numerador de (3.11):

$$r_{\pm}^2(\zeta) = \frac{d}{2}\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{d}{2} - 1 + \zeta^2 - \frac{d}{2} + 1}; \quad (3.12)$$

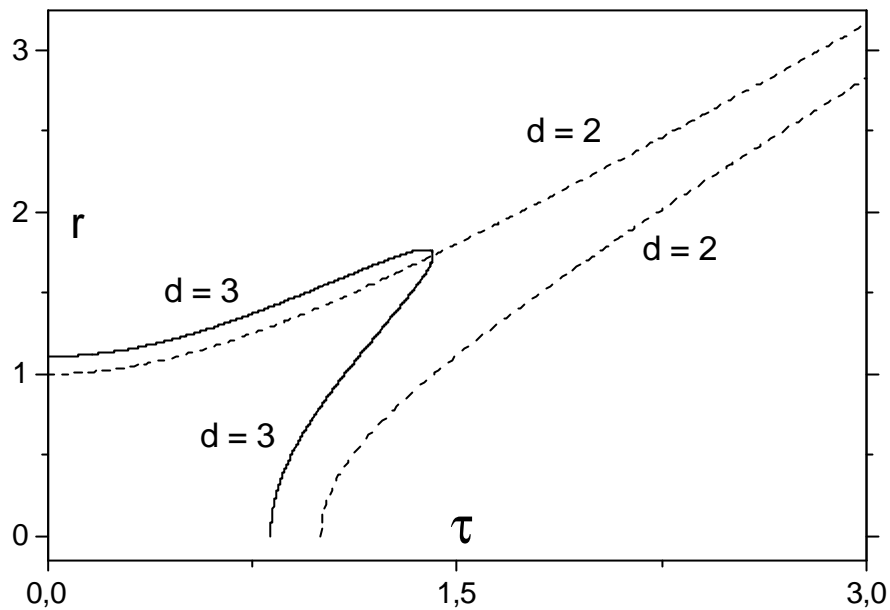


Figura 3.7: As regiões de encolhimento, que correspondem aos valores negativos da velocidade de fase (3.11), estão localizadas entre duas curvas tracejadas para  $d = 2$  e entre duas curvas sólidas para  $d = 3$  (para um pacote inicial com  $k = 2$ ).

Para  $\zeta < \frac{p}{2=d}$  (esse é exatamente o instante em que a densidade de probabilidade na origem,  $j\tilde{A}(0; \zeta)j^2$ , atinge seu máximo) um encolhimento local parece existir para  $0 < r < r_+(\zeta)$ : Depois disso, a região próxima à origem começa a se expandir e o intervalo de encolhimento é limitado por dois valores:  $r_-(\zeta) < r < r_+(\zeta)$ : Aqui notamos uma diferença qualitativa entre os casos em que  $d = 2$  e  $d \geq 3$ : Em três ou mais dimensões, a região de encolhimento intermediário existirá apenas para  $\zeta < \frac{p}{2=(d-2)}$ , enquanto no caso bidimensional ela nunca desaparecerá, embora seu tamanho diminua com o passar do tempo; a região estará con...nada no intervalo  $\frac{p}{\zeta^2-1} < r < \frac{p}{\zeta^2+1}$ : Essas regiões de encolhimento para  $d = 2$  e  $d = 3$  são mostradas na ..gura 3.7.

Todavia, para saber se o pacote inteiro vai encolher ou alargar necessitaremos de medidas da sua extensão.

### 3.3 Média do raio generalizado como uma medida de extensão

Uma das quantidades mais usadas para caracterizar o “tamanho” de uma distribuição, possuindo a densidade de probabilidade  $\rho(x)$ , é o raio quadrático e médio

$$R^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx \quad (3.13)$$

Contudo, essa quantidade é totalmente “insensível” à forma do pacote se alargando livremente, porque, para qualquer distribuição inicial sem correlação entre a posição e o momento ( $\langle xp + px \rangle = 0$ ), a solução exata das equações de movimento de Heisenberg para uma partícula livre resultam numa dependência temporal monótona

$$[R^{(2)}(t)]^2 = [R^{(2)}(0)]^2 + \frac{\hbar^2}{m^2} t^2$$

(calculamos todos os valores médios no referencial do centro de massa do pacote, de modo que  $\langle xp_i \rangle = \langle p_i x \rangle = 0$ ).

Portanto, temos duas possibilidades: a primeira é supor que o raio quadrático e médio é a única medida “verdadeira” da extensão do pacote e concluir, imediatamente, que o encolhimento de pacotes livres não existe e as figuras 3.1 - 3.6 são ilusões óticas; a segunda possibilidade é admitir que existem outras medidas da extensão do pacote, as quais não são piores do que (3.13) e, além disso, podem prover informações adicionais sobre as propriedades dos sistemas quânticos.

Fizemos a segunda escolha e fomos em busca de medidas mais “sensíveis” aos detalhes da evolução do pacote. O motivo pelo qual a medida (3.13) não “percebe” a forma do pacote parece clara: o pacote inicialmente anular se expande em ambas as direções, interna e externa, mas o fator  $x^2$  no integrando de (3.13) (junto com o fator  $r^{d-1}$  na densidade de probabilidade radial) “dá preferência” às partes externas do pacote, de modo que o comportamento interno se torna totalmente irrelevante. Então, a maneira de resolver o problema é quase óbvia: devemos usar medidas que tratam as partes internas e externas do pacote igualmente.

A possibilidade mais simples é diminuir a potência do fator  $|x|$  na equação (3.13) e caracterizar a extensão do pacote através do raio médio

$$\langle r \rangle_d = \int_0^{\infty} r \rho_d(r; \zeta) dr \quad (3.14)$$

Essa medida foi usada em [67]. Calculando a integral (3.14) para a função (3.8) com a ajuda da relação

$$\int_0^{\infty} r^n e^{-2r^2/a} dr = \frac{1}{2} \frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (3.15)$$

e da propriedade da função gama  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , obtemos a fórmula (apresentada em [67] sem derivação)

$$hr(\zeta) i_d = hr(0) i_d \frac{1 + b\zeta^2}{1 + \zeta^2}; \quad b = \frac{d^2 + 3}{(d+3)(d+1)} \quad (3.16)$$

Em particular, para  $d = 2$  e  $d = 3$ , temos [67]

$$hr(\zeta) i_2 = hr(0) i_2 = \frac{1 + 7\zeta^2 = 15}{1 + \zeta^2}; \quad hr(\zeta) i_3 = hr(0) i_3 = \frac{1 + \zeta^2 = 2}{1 + \zeta^2} \quad (3.17)$$

O caráter da evolução inicial do raio médio é determinado pelo parâmetro

$$b_{i=2} = \frac{(d+3)(d+1)}{2(d+3)(d+1)}$$

que é o coeficiente do primeiro termo não-nulo,  $\zeta^2$ , na expansão de Taylor de  $hr(\zeta) i = hr(0) i$ . Esse parâmetro será negativo somente para  $d = 2$ . Baseados nisso, os autores de [67] concluíram que o encolhimento inicial de pacotes radiais só é possível no caso bidimensional. Entretanto, para  $\zeta \ll 1$  a diferença entre as duas funções em (3.17) será muito pequena:

$$\frac{hr(\zeta) i_2}{hr(0) i_2} = 1 + \frac{\zeta^2}{30} + \frac{17}{120}\zeta^4 + \dots; \quad \frac{hr(\zeta) i_3}{hr(0) i_3} = 1 + \frac{\zeta^2}{8} + \dots$$

A função  $hr(\zeta) i_2 = hr(0) i_2$  atingirá seu mínimo quando  $\zeta = 1 = \sqrt{\frac{15}{7}}$  (isso explica a escolha dos parâmetros nas figuras 3.1 e 3.2), mas o valor mínimo  $hr(\zeta) i_2 = hr(0) i_2 = \frac{15}{224} = 225$  está muito próximo de 1 e do valor  $hr(\zeta) i_3 = hr(0) i_3 = 1 + 1 = 392$ . Logo, é provável que mesmo pequenas variações na definição da medida da extensão mudem a situação.

Por outro lado, se concordarmos que a medida (3.13) não é a única possível, não haverá motivo para crer que só existem duas medidas “verdadeiras”, (3.13) e (3.14). Além disso, a caracterização da dimensão do pacote por seu raio médio, (3.14), ou seja, pelo valor médio da primeira potência de  $|x|$ , embora muito natural à primeira vista, não tem vantagens visíveis sobre as medidas baseadas em outras potências de  $|x|$ , como, por exemplo,  $|x|^{1/2}$ , mesmo do ponto de vista da simplicidade dos cálculos. Em verdade, diferentemente do raio quadrático e médio, o qual pode ser calculado facilmente através da resolução de um conjunto fechado e simples de equações, não há equações fechadas para a função  $hr(\zeta) i$ . Para calculá-la, temos

que resolver primeiro a equação de Schrödinger, encontrar a função de onda dependente do tempo e integrar a equação (3.14). Por exemplo, para obter o resultado (3.17) devemos calcular 3 integrais do tipo (3.15) com  $n = d + 2s$  e  $s = 0; 1; 2$ . Porém, a forma analítica permanece a mesma para valores arbitrários (não necessariamente inteiros) do expoente  $n$ . Por isso, é razoável supor que as medidas (3.13) e (3.14) são apenas casos especiais de uma família de raios médios e generalizados caracterizados pelo parâmetro real e contínuo  $\mathbb{R}$ :

$$R_d^{(\mathbb{R})} = \int_0^{\infty} dr r^{\mathbb{R}-1} \hat{A}_d(r) \quad (3.18)$$

No caso da densidade de probabilidade (3.8), isto é, para  $k = 2$ , os cálculos das extensões  $R_d^{(\mathbb{R})}$  são reduzidos novamente à integral (3.15), com a diferença de que no caso geral  $n = d + 1 + \mathbb{R} + 2s$ . Então, obtemos a seguinte expressão para a função normalizada  $R_d^{(\mathbb{R})}(\zeta) = R_d^{(\mathbb{R})}(\zeta)/R_d^{(\mathbb{R})}(0)$ :

$$R_d^{(\mathbb{R})}(\zeta) = (1 + \zeta^2)^{1-2i} \left[ 1 + \frac{(\mathbb{R} + d)^2 + 2(\mathbb{R} + d)}{(\mathbb{R} + d)^2 + 2(\mathbb{R} + d)} \zeta^2 \right]^{1-\mathbb{R}} \quad (3.19)$$

Para  $\zeta \ll 1$ :

$$R_d^{(\mathbb{R})}(\zeta) = 1 + \frac{(\mathbb{R} + d)^2 + 2\mathbb{R} + 6d}{2(\mathbb{R} + d)(\mathbb{R} + d + 2)} \zeta^2 + \dots \quad (3.20)$$

Para  $\mathbb{R} = 1$ , as fórmulas (3.19) e (3.20) produzirão os mesmos resultados que as equações (3.16) e (3.17).

É interessante notar que as extensões generalizadas de pacotes quânticos, baseadas nos valores médios de potências arbitrárias do raio, são usadas há muito tempo, começando, talvez, com o trabalho de Bargmann [74] sobre relações de incerteza e suas generalizações posteriores [75]- [77] (em verdade, relações de incerteza nos informam sobre as limitações das extensões de pacotes quânticos em espaços complementares e as desigualdades mais simples, do tipo Weyl-Heisenberg ou Schrödinger-Robertson, baseadas nos valores quadráticos e médios, constituem apenas uma pequenina porção de uma grande família de relações baseadas em outras definições de extensão [44]).

O coeficiente de  $\zeta^2$  em (3.20) será negativo para  $\mathbb{R} < \mathbb{R}_c$ , onde  $\mathbb{R}_c$  é dado por

$$\mathbb{R}_c = \frac{1}{1 + 8d} \quad (3.21)$$

Para  $d = 2$ ,  $\mathbb{R}_c = \frac{1}{17}$ ; para  $d = 3$ ,  $\mathbb{R}_c = \frac{1}{12}$ . É notável que para  $d = 3$ ,  $\mathbb{R}_c = 1$ . Portanto, o raio efetivo e generalizado do pacote inicial (3.1) diminuirá mesmo no caso tridimensional para qualquer  $\mathbb{R} < 1$ . O valor mínimo da função  $R_d^{(\mathbb{R})}(\zeta)$ , com parâmetros  $d$  e  $\mathbb{R}$  dados, é igual a

$$R_{d \text{ min}}^{(\mathbb{R})} = \frac{1}{8d(1 + \mathbb{R})^{1-2i}} \frac{1}{[(\mathbb{R} + d)^2 + 2(\mathbb{R} + d)]^{1-2i} [(\mathbb{R} + d)^2 + 2(\mathbb{R} + d)]^{1-\mathbb{R}}}; \quad (3.22)$$



e será atingido quando

$$\zeta_m^2 = \frac{6d \zeta_i^{2\otimes} \zeta_i (\otimes + d)^2}{(\otimes \zeta_i d)^2 + 2(\otimes + d)^2} \quad (3.23)$$

Os valores numéricos para alguns casos especiais são dados a seguir:

$\otimes$	0; 9	0; 75	0; 5	0; 25	0	$\zeta_i$ 0; 5	$\zeta_i$ 1
$R_{2, mfn}^{(\otimes)}$	0; 9929	0; 9808	0; 9499	0; 9080	0; 8576	0; 7401	0; 6042
$R_{3, mfn}^{(\otimes)}$	0; 9989	0; 9948	0; 9816	0; 9617	0; 9368	0; 8763	0; 8046

O caso em que  $\otimes = 0$  é entendido como o limite  $\otimes \rightarrow 0$  nas equações (3.19) e (3.22):

$$R_d^{(0)}(\zeta) = \frac{P}{1 + \zeta^2} \exp \left[ -i \frac{4\zeta^2}{(1 + \zeta^2)(d + 2)} \right]$$

$$R_{d, mfn}^{(0)} = \frac{r}{2 + d} \exp \left[ -i \frac{6 \zeta_i d}{2(2 + d)} \right]; \quad R_{2, mfn}^{(0)} = \frac{r}{e}$$

Diminuindo o valor do expoente  $\otimes$ ; podemos tornar os mínimos de  $R_d^{(\otimes)}(\zeta)$  bastante pronunciados, especialmente para  $\otimes$  negativo. Em nossa opinião, não há motivos para excluir valores negativos de  $\otimes$ , desde que  $\otimes > \zeta_i d$  para garantir a convergência das integrais. O valor  $R_d^{(i-1)}$  poderia ser chamado de raio de Coulomb do pacote, pois ele caracteriza a energia potencial e eletrostática do estado (de um átomo de hidrogênio, por exemplo). Notemos que uma relação de incerteza incluindo o valor médio  $\langle r^{-1} \rangle$  (e não  $\langle r^{-2} \rangle$  ou  $\langle r \rangle$ ) é necessária para provar rigorosamente a existência da energia mínima e não-nula do átomo de hidrogênio, como foi mostrado por Lieb [78] (veja-se também [44, 77]). Além disso, sabemos que o valor médio do raio no estado fundamental do átomo de hidrogênio é igual a  $3a_B = 2$  (onde  $a_B$  é o raio de Bohr). Nesse caso,  $R_d^{(i-1)} = a_B$ . O valor  $R_d^{(i-2)}$  (para  $d > 3$ ) caracteriza o tamanho efetivo do pacote com respeito ao potencial centrífugo e relações de incerteza contendo essa quantidade também foram estudadas [74, 75, 77]. Observemos também que o expoente crítico,  $\otimes_c$  (3.21), se anula para  $d = 6$  e se torna negativo para  $d < 6$ .

Escolhendo  $\otimes$  próximo de  $\zeta_i d$ , podemos obter  $R_{d, mfn}^{(\otimes)}$  tão perto de zero quanto quisermos. Naturalmente, isso não significa que o encolhimento é só uma questão de convenção. Por exemplo, no caso de pacotes gaussianos e simétricos ( $k = 0$ ), obtemos  $R_{d,0}^{(\otimes)}(\zeta) = \frac{P}{1 + \zeta^2}$  para quaisquer valores de  $d$  e  $\otimes > \zeta_i d$ , de modo que nenhuma medida poderá encolher pacotes que realmente se alargam. Todavia, uma escolha adequada da medida ajudará a visualizar ou a enfatizar o efeito quando ele existir. Para  $\otimes \rightarrow \zeta_i d$ , o tempo  $\zeta_m$ , (3.23), o qual indica quando o valor  $R_{d, mfn}^{(\otimes)}$  será atingido, tenderá a  $\frac{r}{2=d}$ , e esse é exatamente o momento em que a função  $\tilde{A}_d^{(2)}(0; \zeta)$ , a densidade de probabilidade (3.8) na origem, atingirá seu máximo. Claramente, medidas com  $\otimes$  próximo de  $\zeta_i d$  são muito "sensíveis" ao comportamento da função de onda perto da origem, e elas praticamente não "levam em conta" a forma do

pacote longe da origem (uma situação oposta é observada para o raio quadrático e médio: é "sensível" ao comportamento da "cauda" do pacote, mas praticamente não "percebe" o que ocorre nas regiões internas). Portanto, parece razoável usar valores negativos de  $\mu$  que sejam maiores do que  $1 - d$  ou, talvez,  $j - 1$ .

### 3.3.1 Raios médios de pacotes com $k$ arbitrário

Podemos obter algumas conclusões sobre a evolução inicial do raio médio,  $\langle r(t) \rangle$ , para um pacote radial e arbitrário, calculando as derivadas temporais do lado direito da equação (3.14) no momento inicial,  $t = 0$ , com a ajuda da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tilde{A} = \frac{\hbar^2}{2m} r^{1-d} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d-1} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial r} \right) \quad (3.24)$$

A derivada primeira,  $d\langle r \rangle/dt$ , é igual a zero em  $t = 0$  para o pacote (3.4). Usando a equação (3.24) duas vezes, obtemos a seguinte fórmula:

$$\langle r_{d,k}^{(1)}(\zeta) \rangle = 1 + \frac{(d-j-3)(d-j-1)\zeta^2}{2(2k+d-j-3)(2k+d-j-1)} + O(\zeta^4) \quad (3.25)$$

O coeficiente de  $\zeta^2$  será negativo para  $d = 2$  e  $k > 1/2$ , e seu valor absoluto diminuirá com o aumento de  $k$ . Portanto, podemos supor que pacotes da forma (3.4), com  $1/2 < k < 2$ , exibem encolhimento inicial mais forte do que o pacote (3.1). Entretanto, cálculos numéricos mostram diferenças somente na quinta casa após a vírgula. Por exemplo, para  $k = 1/5$  obtemos o valor mínimo  $\langle r_{2,1/5}^{(1)}(\zeta) \rangle = 0,99774$ , enquanto para  $k = 2$  temos o valor mínimo  $\langle r_{2,2}^{(1)}(\zeta) \rangle = 0,99778$ . Contudo, ignoramos se essa pequena diferença é o resultado de erros numéricos ou não.

O coeficiente de  $\zeta^2$  em (3.25) também será negativo para  $d > 3$ , se um dos dois termos no denominador for negativo (o outro sendo positivo). Por exemplo, para  $d = 6$  e  $k = j/2$  (embora  $\tilde{A}(r)$  diverja para  $r = 0$  nesse caso, não há divergência na densidade de probabilidade radial,  $\tilde{A}(r)$ ). Todavia, esse caso deve ser excluído, pois a fórmula (3.25) tem sentido apenas para  $2k + d - j - 3 > 0$  (se essa condição não for atendida, algumas integrais que surgem durante a derivação se tornarão divergentes). Em verdade, no caso em que  $d = 6$  e  $k = j/2$  o raio médio pode ser calculado analiticamente, porque a função hipergeométrica e confluente se reduz a uma função elementar [79]

$${}_2F_1(1; 3; z) = 2z^{j-2}(e^z - 1 - z):$$

Encontramos

$$R_{6;i,2}^{(1)}(\zeta) = (1 + \zeta^2)^{i-1/2} [5\zeta^2 + 6\zeta^{3-2i}(\zeta + \frac{1}{1+\zeta^2})^{1-2i}]$$

Então, a expansão de  $R_{6;i,2}^{(1)}(\zeta)$  não começa com um termo negativo proporcional a  $\zeta^2$ , mas com um termo positivo proporcional a  $\zeta^{3-2i}$  e a derivada segunda em relação ao tempo simplesmente não existe para  $\zeta = 0$ .

### 3.4 Medidas entrópicas da extensão do pacote

Uma desvantagem óbvia dos raios médios e generalizados, é que essas medidas possuem certa seletividade em relação às diferentes partes do pacote. Os valores de  $R_d^{(\otimes)}$  com  $\otimes < 0$  são mais “sensíveis” aos detalhes da densidade de probabilidade perto da origem, enquanto os raios médios com  $\otimes > 0$  são mais “sensíveis” ao comportamento da “cauda” da densidade de probabilidade, ou seja, aos valores de  $r$  grandes. Diferentes medidas da extensão espacial (temporal) de pacotes de ondas (sinais), as quais não dão “preferência” aos valores pequenos ou grandes das coordenadas, foram introduzidas por vários autores [80]-[82] (para uma revisão, veja-se [44]). Por exemplo, uma família de volumes intrínsecos de um sistema quântico, descrito pela distribuição de probabilidade normalizada,  $\frac{1}{2}(\mathbf{x}) = j\tilde{A}(\mathbf{x})j^2$  (onde  $\mathbf{x}$  é o vetor-posição em  $d$  dimensões), pode ser definida, seguindo [80], como

$$V^{(\zeta)} = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} [\frac{1}{2}(\mathbf{x})]^{-\zeta} d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^d} [\frac{1}{2}(\mathbf{x})]^{-\zeta} d\mathbf{x}} \quad (3.26)$$

Tais quantidades também foram consideradas, por exemplo, ao derivar algumas desigualdades que caracterizam os estados ligados de sistemas quânticos [77, 78]. No caso de uma distribuição uniforme,  $\frac{1}{2}(\mathbf{x}) = V^{-1}$ , numa região do espaço de volume  $V$ , a definição (3.26) resulta em  $V^{(\zeta)} = V$  para qualquer  $\zeta$ . Naturalmente, a transição do volume efetivo ao comprimento efetivo não é única. Entretanto, parece razoável simplesmente extrair a  $d$ -ésima raiz de (3.26). De modo que definimos a extensão  $\bar{r}$  total da distribuição de probabilidade simétrica,  $\frac{1}{2}(r)$ , em  $d$  dimensões, como

$$E_d^{(\zeta)} = \frac{\int_0^\infty \omega_d r^{d-1} [\frac{1}{2}(r)]^{-\zeta} dr}{\int_0^\infty \omega_d r^{d-1} [\frac{1}{2}(r)]^{-\zeta} dr} \quad (3.27)$$

onde a área da esfera de raio unitário no espaço com  $d$  dimensões,  $\omega_d$ , foi definida na equação (3.9). Grosseiramente falando, no caso dos pacotes anulares as medidas  $\bar{r}$  caracterizam a largura efetiva do anel, enquanto as medidas  $\otimes$  caracterizam o raio efetivo desse anel (para  $\otimes > 0$ ).

Tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 1$  na equação (3.26), chegamos ao volume interno e entrópico

$$V^{(1)} \sim \exp(S_x); \quad S_x = \int_0^Z \frac{1}{2}(x) \ln [\frac{1}{2}(x)] dx$$

introduzido em [81] (consulte-se também [83]; há uma literatura vasta sobre as relações de incerteza entrópicas formuladas em termos de “entropias” como  $S_x$ : veja-se, por exemplo, [84, 85] e as revisões [44, 86]).

Preferimos considerar, visando simplificar os cálculos, o caso especial em que  $\epsilon = 2$  na equação (3.27):

$$E_d^{(2)} = \int_0^Z \frac{1}{d} r^{d-1} [\frac{1}{2}(r)]^2 dr \quad (3.28)$$

Para a distribuição (3.8), temos

$$E_d^{(2)} = \frac{(1 + \zeta^2)^{(d-2+2) \cdot 1=d}}{a\zeta^4 + b\zeta^2 + 1}; \quad (3.29)$$

onde

$$E_d^{(-)}(\zeta) = E_d^{(-)}(\zeta) = E_d^{(-)}(0) \quad (3.30)$$

e

$$a = \frac{81d^2 + 54d + 24}{d^2 + 10d + 24}; \quad b = \frac{18d^2 + 44d + 48}{d^2 + 10d + 24};$$

A expansão de Taylor de (3.29), para  $\zeta$  pequeno, produz

$$E_d^{(2)} = 1 + \frac{d^2 + 22d + 152}{2(d+6)(d+4)} \zeta^2 + \dots$$

Podemos verificar que o coeficiente de  $\zeta^2$  é sempre positivo. Em consequência, a função  $E_d^{(2)}(\zeta)$  aumenta inicialmente para qualquer número de dimensões espaciais. Porém, ela tem mínimos locais para  $d \geq 12$ : veja-se a figura 3.8, a qual mostra que o caso em que  $d = 4$  é o melhor do ponto de vista da medida  $E_d^{(1)}$ .

Outra expressão simples para a extensão surge no caso em que  $\epsilon = 1$ , pois podemos verificar que [80]

$$E_d^{(1)} \sim (\max[\frac{1}{2}(x)])^{1=d}; \quad (3.31)$$

A utilidade dessa forma de extensão foi mostrada no tratamento de outros problemas (determinação do grau de coerência de feixes óticos e generalizações de relações de incerteza) em [87, 88]. Seguindo [88], chamamos  $E^{(1)}$  de superextensão. Para a distribuição  $\frac{1}{2}(r)$  dada pela equação (3.8),  $E_d^{(1)}(\zeta)$  pode ser obtida analiticamente. Na realidade, para  $\zeta > 0$  a função  $\frac{1}{2}(r)$  tem um máximo em  $r = 0$  e outro para  $r > 1$  (ele não existe para todos os

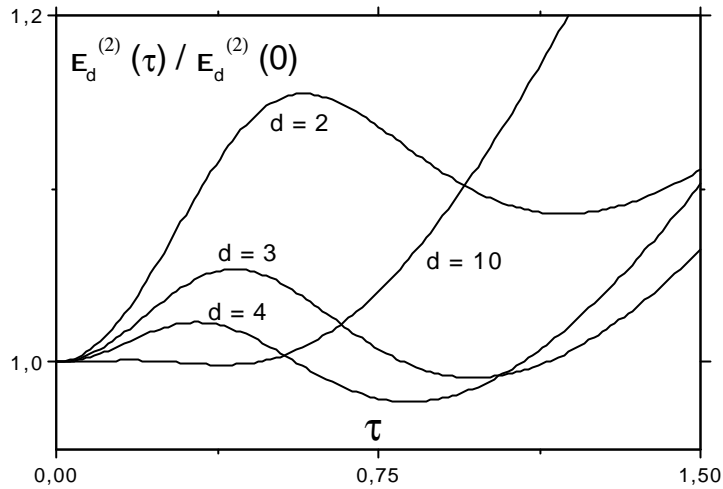


Figura 3.8: A dependência temporal da extensão volumétrica,  $E_d^{(2)}$ , para  $k = 2$  e diferentes dimensões espaciais:  $d = 2; 3; 4; 10$ .

valores de  $\zeta$ ). A posição do máximo à direita pode ser encontrada a partir da resolução de uma equação quadrática. Logo, para determinar  $\overset{\gg(1)}{E}_d(\zeta)$  devemos comparar duas funções:

$$f_0(\zeta) = (\zeta \text{ de}=2)^i 2^{-d}(1 + \zeta^2)^{(2+d)=2d} \quad (3.32)$$

e

$$f_1(\zeta) = \frac{2^{1-d} \sqrt{1 + \zeta^2}}{(1 + R)^{1-d}} \exp \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} i \frac{1}{d} R^{\zeta^2}; \quad R = 1 + \frac{\zeta^2 d^2}{(1 + \zeta^2)^2} \quad (3.33)$$

escolhendo aquela que fornece o menor valor. Para pequenos valores de  $\zeta$ , devemos usar a função (3.33) (veja-se as figuras 3.1 e 3.3), enquanto que para valores maiores de tempo a função  $\overset{\gg(1)}{E}_d(\zeta)$  é dada pela fórmula (3.32) (veja-se a figura 3.9). Expandindo a função  $f_1(\zeta)$  em série de potências de  $\zeta$ , obtemos

$$\overset{\gg(1)}{E}_d(\zeta) \approx 1 + \frac{6 i d}{4} \zeta^2 + \dots; \zeta \ll 1:$$

Logo, os pacotes anelares (3.1) inicialmente aumentarão sua superextensão,  $E_d^{(1)}$ , nos espaços com  $d < 6$ , ao passo que encolherão desde o começo se  $d > 6$  (notemos que a dimensão  $d = 6$  é distinguida também do ponto de vista do expoente crítico,  $\otimes_c$  (3.21), o qual se tornará negativo se  $d > 6$ ). Não obstante, mesmo para  $d = 6$  a expansão inicial é trocada por encolhimento após um curto intervalo de tempo. Para  $d$  grande, a troca de  $f_1$  por  $f_0$  ocorrerá em  $\zeta_c \approx 2=(ed)$  (essa relação é uma boa aproximação mesmo para  $d = 2$ ). O

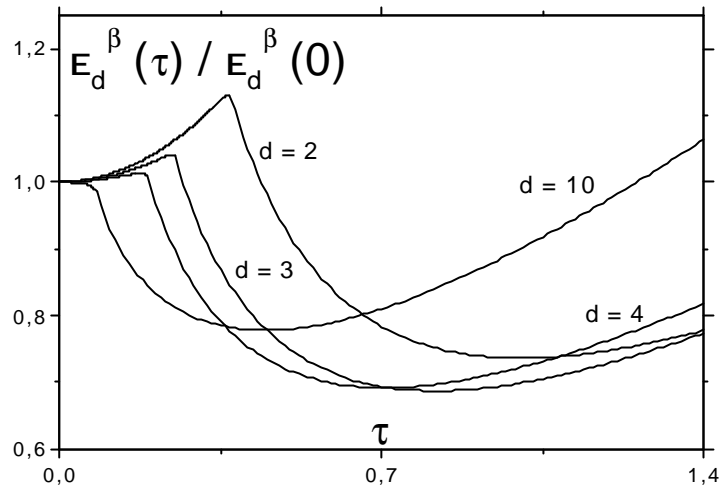


Figura 3.9: A dependência temporal da extensão volumétrica,  $E_d^{(1)}$ , para  $k = 2$  e diferentes dimensões espaciais:  $d = 2; 3; 4; 10$ .

mínimo da função  $f_0(\zeta)$  ocorrerá quando  $\zeta^2 = 2=d$ ; então, o valor mínimo de  $E_d^{(1)}$  será igual a

$$E_{\min}^{(1)}(d) = (de^2=2)^{i^{1-d}}(1 + 2=d)^{(2+d)=2d}, \quad (3.34)$$

que é menor do que 1 para qualquer  $d > 2$ . Em particular,  $E_{\min}^{(1)}(2) = 2=e$ . Além disso, a tabela abaixo mostra que os pacotes tridimensionais exibem encolhimento mais forte do que os bidimensionais, de acordo com a medida  $E^{(1)}$ :

d	2	3	4	6	10	20	100	1000
$E_{\min}^{(1)}$	0;7358	0;6866	0;6915	0;7226	0;7776	0;8499	0;9522	0;9926

Para  $\zeta \gg 1$ , a medida  $E_d^{(1)}$  cresce assim:  $E_d^{(1)}(\zeta) \sim \zeta (ed=2)^{i^{2-d}}$ .

Para pacotes radiais e simétricos, podemos definir também a extensão radial como

$$F_d^{(1)} = \int_0^{\infty} [\hat{A}(r)]^{-1} dr = \int_0^{\infty} r^{-(d+1)} [i_d^{1/2}(r)]^{-1} dr; \quad (3.35)$$

onde  $\hat{A}(r)$  é a densidade de probabilidade radial introduzida em (3.9). Em especial, temos

$$F_d^{(2)} = i_d^{-2} \int_0^{\infty} r^{2(d+1)} j_{\hat{A}_d}(r) dr; \quad (3.36)$$

$$F_d^{(1)} = (\max[\hat{A}_d(r)])^{-1} \int_0^{\infty} i_d^{-1} \max[r^{d+1/2}(r)] dr; \quad (3.37)$$

No caso em que  $\bar{r} = 2$  e para a densidade de probabilidade (3.8), obtemos, ao invés de (3.29), a seguinte expressão para a extensão radial e normalizada (definida da mesma maneira que  $\bar{E}_d^{(1)}$  na equação (3.30)):

$$\bar{F}_d^{(2)} = \frac{C(1 + \zeta^2)^{5=2}}{A\zeta^4 + B\zeta^2 + C}; \quad (3.38)$$

onde

$$A = 16d^4 + 128d^3 + 8d^2 + 32d + 15;$$

$$B = 2(16d^4 + 32d^3 + 56d^2 + 8d + 15);$$

$$C = 16d^4 + 64d^3 + 56d^2 + 16d + 15;$$

Como  $B=C < 2$ , a função  $\bar{F}_d^{(2)}(\zeta)$  aumentará com  $\zeta$  para qualquer  $d$  se  $\zeta > 1$ . Além disso, fazendo gráficos (os quais não são apresentados aqui, porque nada exibem de interessante) podemos ver que essa função nunca se tornará menor do que 1 para quaisquer valores de  $\zeta$  e  $d$ , assim como a função  $\bar{F}_d^{(1)}(\zeta)$ .

### 3.4.1 Pacotes com $k$ arbitrário

A superextensão  $E^{(1)}$  nos permite analisar a evolução de pacotes que têm inicialmente a forma (3.4) com valores arbitrários do parâmetro  $k$ . Como vimos para  $k = 2$ , o comportamento da função  $E^{(1)}(\zeta)$ , para valores de  $\zeta$  que não sejam muito pequenos, é determinado pela dependência temporal da densidade de probabilidade volumétrica,  $j\tilde{A}(r; \zeta)j^2$ , na origem. A densidade de probabilidade inicial tem um máximo em  $r = \sqrt{\frac{2}{k=2}}$ ; logo, a extensão inicial é igual a

$$E_{d;k}^{(1)}(0) = \frac{\sqrt{\frac{2}{k}}}{2} \frac{e^{-2} (k + d=2)^{d-1}}{k^k (d=2)}; \quad (3.39)$$

Usando a fórmula de Stirling, podemos verificar que a extensão inicial aumenta lentamente, em função de  $k$ , para  $k \gg d$ :  $E_{d;k}^{(1)}(0) \approx k^{-(d-1)=2d}$ . Tomando o valor de  $j\tilde{A}(0; \zeta)j^2$  da equação (3.5), obtemos a função

$$G_{d;k}(\zeta) = (2e\zeta=k)^{k=d} (1 + \zeta^2)^{(k+d)=2d} \frac{\zeta^{d=2}}{\zeta^{(d+k)=2}}; \quad (3.40)$$

que estabelece um limite superior para a extensão relativa  $\bar{E}_{d;k}^{(1)}(\zeta)$ . Esse limite é ruim para  $\zeta \rightarrow 0$ , mas como estamos interessados no valor mínimo da extensão  $E^{(1)}$ , trocar a função  $\bar{E}_{d;k}^{(1)}(\zeta)$  por  $G(\zeta)$  resulta numa boa (provavelmente exata) estimativa. O mínimo da

função (3.40) será atingido quando  $\zeta = \sqrt{\frac{d+k}{k}}$  (essa fórmula explica a escolha dos instantes  $\zeta = 1; \sqrt{\frac{d+k}{2}}$  e  $\sqrt{\frac{d+k}{10}}$  nas figuras 3.1, 3.3 e 3.5):

$$G_{\text{mfn}}(d; k) = \frac{r}{d+k} \frac{k(d+k)^{k-2d}}{4e^2} \frac{i^{(d=2)}}{i^{([d+k]=2)}} \quad (3.41)$$

Se  $k = 2$ , então (3.41) coincidirá com (3.34). Para  $d > 1$ , podemos trocar as funções-gama por suas representações de Stirling e simplificar (41) assim

$$G_{\text{mfn}}(d; k) \approx \frac{k}{d+k} \frac{\Gamma_{k=2d}}{\Gamma_{d+k}} \frac{\Gamma_{d+k}}{\Gamma_{1=d_i=1=2}} \quad (3.42)$$

Em particular, se  $d > k$ , então  $G_{\text{mfn}}(d; k) \approx (e/k)^{k-2d}$ . Se  $k > d$ , então a fórmula (3.42) produzirá

$$G_{\text{mfn}}(d; k) \approx e^{i^{1=2}(k=d)^{1=d_i=1=2}} \quad (3.43)$$

Conseqüentemente, será possível obter encolhimento arbitrariamente grande se escolhermos pacotes com  $k > d > 2$ . Nesse sentido, o caso bidimensional é o pior, pois a fórmula (3.41) para  $d = 2$  se torna

$$G_{\text{mfn}}(2; k) = \frac{r}{1+k=2} [k=2(1+k=2)]^{k=4} e^{i^{k=2}} [i^{(1+k=2)}]^{i=1} \quad (3.44)$$

de modo que para  $k \rightarrow \infty$  ela tende ao valor-limite  $\frac{r}{e=(2\sqrt{1})} \approx 0,66$  (que é menor do que o valor de  $\frac{r}{e} \approx 0,66$ ). Por outro lado, a forma assintótica de (3.41) para  $d = 3$  e  $k > 1$  é dada por

$$G_{\text{mfn}}(3; k) = \frac{r}{e=3(4k)^{i=1=6}} \quad (3.45)$$

que difere de (3.43) apenas no coeficiente numérico. É interessante notar que a evolução da densidade de probabilidade do pacote gaussiano ( $k = 0$ ) é reduzida a uma transformação uniforme de escala  $r = \frac{r}{1+\zeta^2}$ , e todas as medidas fornecem o mesmo resultado nesse caso específico: a extensão normalizada aumenta como  $\frac{r}{1+\zeta^2}$ .

## 3.5 Encolhimento de pacotes unidimensionais

### 3.5.1 Evolução livre de estados coerentes, pares e ímpares

Fazendo um "corte" de um pacote anelar e multidimensional, possuindo a função de onda radial (3.1), ao longo do eixo  $x$ , obtemos uma função par de  $x$  com duas "corcovas". Portanto, poderemos supor que, se o encolhimento existir no caso unidimensional, ele deverá estar



relacionado às funções pares,  $\tilde{A}(x) = \tilde{A}(j x)$ , com duas "protuberâncias". Para verificar essa idéia, vamos comparar as evoluções livres dos estados coerentes, pares e ímpares, de um oscilador harmônico com frequência, massa e constante de Planck iguais a 1 [30] (normalizados em todo o eixo:  $j^{-1} < x < j$ ), após o potencial harmônico ter sido desligado em  $t = 0$ :

$$\tilde{A}^{(S)}(x; t) = N_S [j''(t)]^{i-1/2} \exp \left[ i \frac{x^2 + x_c^2}{2j''(t)} \right] \begin{cases} \cosh \frac{xx_c}{j''(t)} \\ \sinh \frac{xx_c}{j''(t)} \end{cases}; \quad (3.46)$$

onde

$$j''(t) = 1 + it; \quad (3.47)$$

$$N_S = \frac{1}{2^{1/4} j^{i-1/2}} \exp \left[ i \frac{x_c^2}{2j''(t)} \right]; \quad (3.48)$$

As funções de onda iniciais, em  $t = 0$ , são obtidas simplesmente fazendo  $j'' = 1$ . Para garantir a ausência de quaisquer fluxos iniciais de probabilidade, o parâmetro  $x_c$  deverá ser real, e o escolheremos positivo por conveniência.

A densidade de probabilidade é dada por

$$j\tilde{A}^{(S)}(x; t)j^2 = \frac{N_S^2}{2j''(t)j} \exp \left[ i \frac{x^2 + x_c^2}{j''(t)j^2} \right] \begin{cases} \cosh \frac{2xx_c}{j''(t)j^2} \\ \cos \frac{2xx_c t}{j''(t)j^2} \end{cases}; \quad (3.49)$$

A distribuição de probabilidade ímpar sempre terá dois picos, pois ela se anula para  $x = 0$ . A distribuição de probabilidade par terá, inicialmente, dois picos (cujas posições serão determinadas pela equação  $\tanh(xx_c) = x/x_c$ ) se  $x_c > 1$  (se  $x_c \leq 1$ , os picos estarão localizados perto dos pontos  $\pm x_c$ ). A evolução dos pacotes, dada pela equação (3.49) com  $x_c = \frac{1}{2}$  (essa escolha ficará clara na próxima subseção), é mostrada nas figuras 3.10 e 3.11. O valor  $t_1 = \frac{1}{3}$  (ou  $t_1 = \frac{1}{(x_c^2 - 1) + (x_c^2 + 1)}$  para  $x_c$  arbitrário) corresponde ao instante em que a segunda derivada espacial da densidade de probabilidade par no ponto  $x = 0$  muda de sinal. No instante  $t_2 = \frac{1}{3}$  (ou  $t_2 = \frac{1}{2x_c^2 - 1}$  no caso genérico), a função  $j\tilde{A}^{(+)}(0; t)j^2$  atinge seu máximo.

É interessante comparar os pacotes coerentes com uma mistura quântica de duas gaussianas, descrita pela matriz-densidade dependente do tempo (veja-se a figura 3.12)

$$\frac{1}{2}(x; x^0; t) = \exp \left[ i \frac{x^{2''} + x^{02''} + 2x_c^2}{2j''(t)j^2} \right] \begin{cases} \cosh \frac{x_c}{j''(t)j^2} (x^{''} + x^{0''}) \\ \cos \frac{x_c}{j''(t)j^2} (x^{''} - x^{0''}) \end{cases}; \quad (3.50)$$

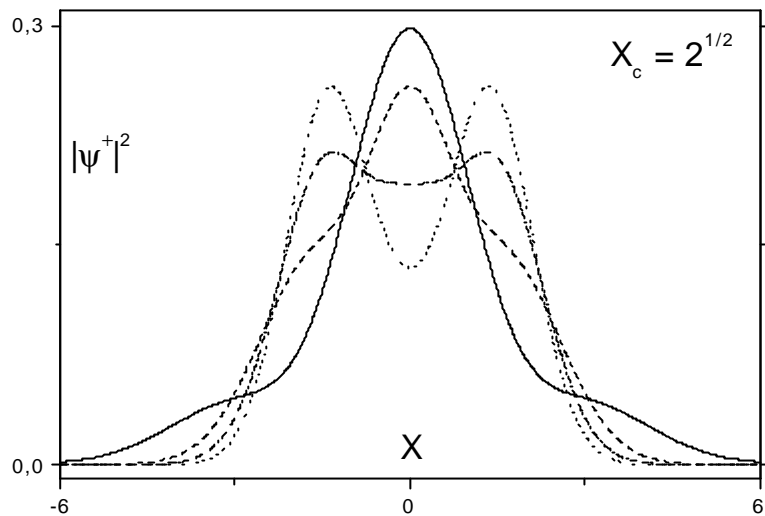


Figura 3.10: Densidades de probabilidade dos pacotes coerentes e pares com  $x_c = 2^{1/2}$  e em diferentes instantes:  $t = 0$  (curva pontilhada com dois picos agudos),  $t = 3i^{1-2}$  (curva tracejada-pontilhada),  $t = 1$  (curva tracejada) e  $t = 3^{1-2}$  (curva sólida).

Podemos verificar que a densidade de probabilidade e as demais quantidades caracterizando o estado misto (3.50) podem ser obtidas das expressões correspondentes para os estados pares/ímpares através de uma receita simples: devemos trocar  $N_{\mathbb{S}}^2$  por  $2^{1/2} i^{1-2}$  e suprimir os termos com o sinal  $\mathbb{S}$ .

Para a função de Wigner

$$W(x; p) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(x + y/2) \tilde{A}^*(x - y/2) \exp(i py) dy;$$

obtemos

$$W_{\mathbb{S}}(x; p; t) = N_{\mathbb{S}}^2 \frac{1}{\sqrt{4}} \exp\left[-\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} (x - pt)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2} x^2 \cosh[2x_c(x - pt)]\right] \mathbb{S} \cos(2px_c) : \quad (3.51)$$

Olhando para a Figura 3.10, temos a impressão clara de que no instante  $t = \frac{1}{3}$  o pacote é mais estreito do que era inicialmente, em especial se não dermos atenção às “asas” da distribuição, que ocorrem quando  $|x| > 2.5$ . Por outro lado, parece óbvio, conforme a Figura 3.11, que o pacote ímpar se expande monotonamente. Informações adicionais sobre o comportamento do pacote estão contidas no fluxo da densidade de probabilidade

$$J(x) = \text{Im}[\tilde{A}_x(x) \tilde{A}^*(x)] = \text{Im}\left[\frac{1}{2} \dot{A}(x; x^0)\right]_{x^0=x} : \quad (3.52)$$

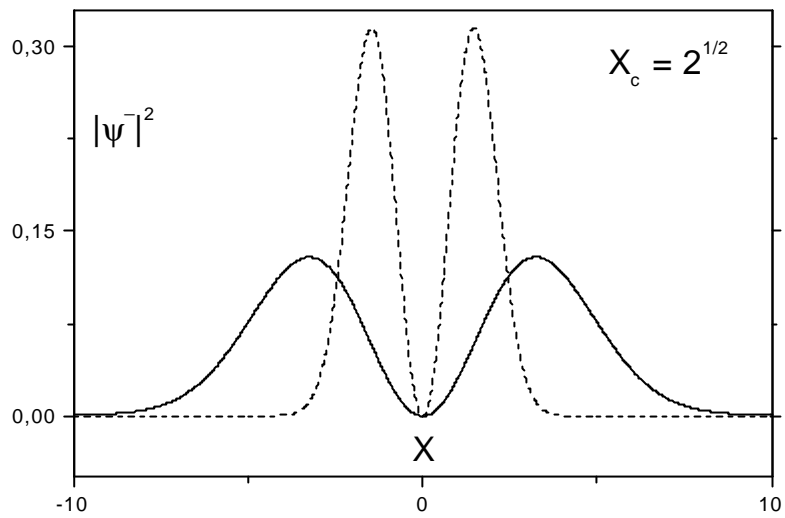


Figura 3.11: Densidades de probabilidade dos pacotes coerentes e ímpares com  $x_c = 2^{1/2}$  e em diferentes instantes:  $t = 0$  (curva pontilhada com picos altos) e  $t = 4$  (curva sólida).

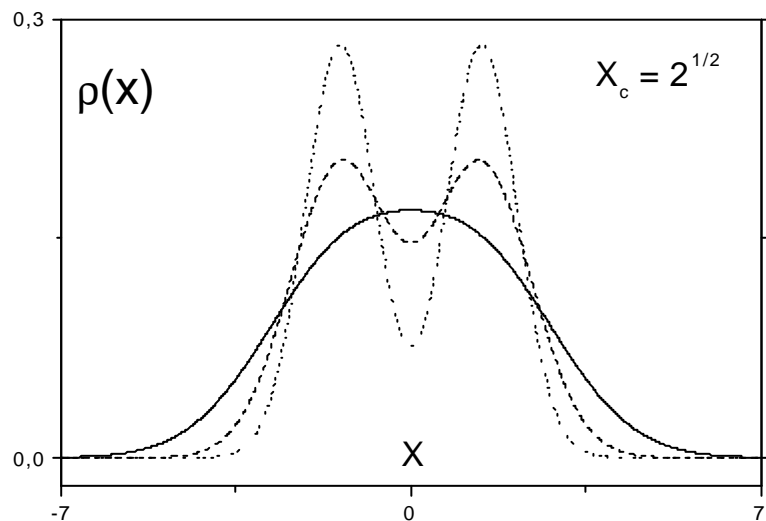


Figura 3.12: Densidades de probabilidade do pacote misto com  $x_c = 2^{1/2}$  e em diferentes instantes:  $t = 0$  (curva pontilhada com picos altos),  $t = 1$  (curva tracejada) e  $t = 3^{1/2}$  (curva sólida).

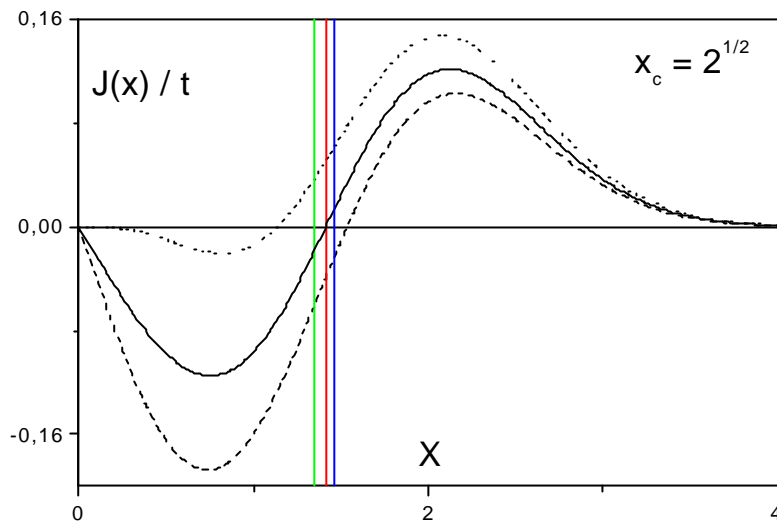


Figura 3.13: Derivada temporal e inicial do fluxo da densidade de probabilidade para os pacotes pares (curva tracejada), ímpares (curva pontilhada) e mistos (curva sólida) no caso em que  $x_c = 2^{1/2}$ . As linhas verticais mostram as posições iniciais do máximo de cada pacote:  $x_{\text{máx}}^{(+)} = 1,35$ ;  $x_{\text{máx}}^{(\text{mis})} = 1,41$ ;  $x_{\text{máx}}^{(-)} = 1,46$ .

Para o estado (3.46), obtemos

$$\begin{aligned}
 J^{(s)}(x; t) = & \frac{N_S^2 x t}{2 j''(t) j^3} \exp \left[ i \frac{x^2 + x_c^2}{j''(t) j^2} \right] \\
 & \times \left[ \cosh \frac{2 x x_c}{j''(t) j^2} + i \frac{x_c}{x} \sinh \frac{2 x x_c}{j''(t) j^2} \right] \\
 & \times \left[ \cos \frac{2 x x_c t}{j''(t) j^2} + i \frac{x_c}{x t} \sin \frac{2 x x_c t}{j''(t) j^2} \right] ; \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

No caso do estado misto (3.50), devemos usar a receita dada acima. Para  $t \gg 1$ , temos

$$\begin{aligned}
 J^{(s)}(x) = & \frac{x t}{2} N_S^2 \exp \left[ i \frac{x^2 + x_c^2}{j''(t) j^2} \right] \left[ \cosh(2 x x_c) + i \frac{x_c}{x} \sinh(2 x x_c) \right] \\
 & \times \left[ \cos \frac{2 x x_c t}{j''(t) j^2} + i \frac{x_c}{x t} \sin \frac{2 x x_c t}{j''(t) j^2} \right] ;
 \end{aligned}$$

e podemos verificar facilmente que nesse limite  $J^{(+)}(x)$  será negativo (para  $x$  positivo) no intervalo  $0 < x < x_c$ , se  $x_c > 1$ , enquanto  $J^{(-)}(x)$  e  $J^{(\text{mis})}(x)$  serão positivos para  $x = x_c$ . A Figura 3.13 também indica que a densidade de probabilidade do pacote par foi inicialmente para o centro, enquanto a tendência principal do pacote ímpar é se mover para fora. Mas como quantificar o encolhimento ou a expansão?

### 3.5.2 Média do valor absoluto da posição como medida do alargamento do pacote

No caso unidimensional, a fórmula (3.14) se torna:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi(x)|^2 dx; \quad (3.54)$$

que é a média quântica do módulo do deslocamento a partir do centro do pacote. A integral (3.54), para a distribuição (3.49), pode ser expressa assim

$$\bar{x}_+(t) = N_+^2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi_+(x,t)|^2 dx = N_+^2 \left[ \frac{\rho_-}{2} x_c \operatorname{erf} \left( \frac{x_c}{j''} \right) + \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{x_c^2}{j''^2} \right) \right]; \quad (3.55)$$

$$\bar{x}_i(t) = \frac{\rho_-}{2} N_i^2 x_c \operatorname{erf} \left( \frac{x_c}{j''} \right) + \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{x_c^2}{j''^2} \right); \quad (3.56)$$

$$\bar{x}_{\text{mis}}(t) = x_c \operatorname{erf} \left( \frac{x_c}{j''} \right) + \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{x_c^2}{j''^2} \right); \quad (3.57)$$

A expansão de Taylor do lado direito de (3.55), com respeito a  $t$ , para  $t \ll 1$ , produz

$$\bar{x}_+ = \bar{x}_+(0) + \frac{t^2}{2} N_+^2 e^{-x_c^2} \frac{1}{j''^2} x_c^3 + O(t^4); \quad (3.58)$$

Em consequência, o pacote par encolherá inicialmente, desde que  $x_c > 1$ , e o efeito máximo será obtido para  $x_c = \frac{\rho_-}{2}$  (isso explica nossa escolha desse parâmetro nas figuras). O valor mínimo da razão  $\bar{x}_+(t)/\bar{x}_+(0)$  será obtido quando  $t \approx 1/2$ . E será igual a 0,973 (comparemos com o valor 0,9978 dos pacotes radiais e bidimensionais de [67]). A desigualdade  $\bar{x}_+(t) > \bar{x}_+(0)$  vale para  $t > 1/8$  (esses valores numéricos correspondem a  $x_c = \frac{\rho_-}{2}$ ).

A coincidência da condição  $x_c > 1$  com a de existência de dois picos na distribuição de probabilidade inicial não é acidental. Para mostrar isso, vamos calcular a derivada segunda da integral (3.54) com respeito ao tempo, levando em conta a equação de Schrödinger,  $\tilde{A}_t = (i-2)\tilde{A}_{xx}$ , e a condição de fronteira,  $\tilde{A}_x|_{x=0} = 0$ , a qual deve ser satisfeita por qualquer função par de  $x$ . Após álgebra simples (incluindo integração por partes), obtemos a equação

$$\frac{d^2 \bar{x}_+}{dt^2} = i \operatorname{Re} (\tilde{A}^* \tilde{A}_{xx})|_{x=0}; \quad (3.59)$$

onde o lado direito pode ser interpretado como uma "aceleração" quântica e efetiva causada pela presença de uma "fronteira impenetrável" e específica no ponto  $x = 0$ , caracterizada pela condição de contorno  $\tilde{A}_x|_{x=0} = 0$ , a qual resulta num fluxo de densidade nulo em  $x = 0$

(assim como no caso em que  $\tilde{A}(0) = 0$ ). Se usarmos variáveis dimensionais, o lado direito de (3.59) deverá ser multiplicado por  $(\sim=m)^2$ . Vemos que a “aceleração” efetiva será negativa, se a derivada segunda da função de onda em  $x = 0$  tiver o mesmo sinal que a função de onda. Porém, se  $x_c < 1$ , então a função de onda inicial (real) terá um só máximo na origem, de maneira que o produto  $\tilde{A}''\tilde{A}_{x=0}$  será negativo e a “força” efetiva será repulsiva. Ao contrário, para  $x_c > 1$  a função de onda inicial terá um mínimo na origem e a “aceleração” efetiva será negativa (para  $t = 0$  e em algum intervalo  $0 < t < t_*$ ).

Para todos os pacotes descritos por funções de onda ímpares,  $\tilde{A}(x) = j \tilde{A}(j x)$ , a média do valor absoluto da posição aumentará monotonamente para  $t > 0$ . Por exemplo, os primeiros termos da expansão de Taylor de (3.56) são

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(0) + \frac{t^2}{2} N_i^2 x_c^2 e^{i x_c^2} + O(t^4); \quad (3.60)$$

A média do valor absoluto da posição do pacote misto também crescerá monotonamente, embora a “aceleração” inicial do estado misto seja menor do que a metade daquela do estado ímpar e puro com o mesmo valor de  $x_c$ :

$$\bar{x}_{\text{mis}}(t) = \bar{x}(0) + \frac{t^2 x_c^2}{2^{1/4}} e^{i x_c^2} + \dots$$

Existem ao menos duas explicações para a diferença de comportamento dos pacotes pares e dos ímpares. Uma delas, é que o pacote ímpar pode ser considerado, em certo sentido, como um análogo unidimensional dos estados multidimensionais com momento angular diferente de zero (pois a transformação  $x \rightarrow j x$  pode ser considerada como um análogo da rotação pelo ângulo  $\pi/4$ ), para os quais uma “força” radial, centrífuga e efetiva será sempre positiva. Outra explicação, é que os pacotes ímpares são equivalentes aos estados no semi-eixo  $x > 0$  confinados pela parede impenetrável, representada pela condição de contorno  $\tilde{A}(0) = 0$ . Nesse caso, o lado direito da equação (3.59) será igual a  $[22, 89] (\sim=m)^2 j \tilde{A}_{x=0}'' j_{x=0} = 0$  (em variáveis dimensionais e para funções de onda normalizadas em todo o eixo:  $j^{-1} < x < j$ ). Possíveis manifestações dessa “força” quântica e repulsiva, para partículas ultrafrias, foram discutidas em [22, 64].

A primeira derivada de  $\bar{x}_i(t)$  em relação ao tempo é igual a

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\rho_{1/4}}{2} N_i^2 x_c t e^{-\frac{\mu}{j''j} x_c t} e^{i x_c^2}; \quad (3.61)$$

enquanto

$$\frac{d\bar{x}_+}{dt} = N_+^2 \exp \left[ i \frac{x_c^2}{j''(t)j^2} \right] \frac{t}{j''j} - \frac{\rho_{1/4}}{2} x_c e^{-\frac{\mu}{j''j} x_c t} \exp \left[ i \frac{t^2 x_c^2}{j''(t)j^2} \right]; \quad (3.62)$$

O lado direito de (3.62) será negativo para pequenos valores do tempo,  $t$  (desde que  $x_c > 1$ ), mas para  $t \gg 1$  ele tenderá ao valor constante e positivo

$$\frac{d\bar{x}_+}{dt} \Big|_{t=1} = N_+^2 - 1 + \frac{1}{2} x_c \text{erfc}(x_c) e^{-x_c^2} :$$

Se  $x_c \gg 1$ , então a fórmula assintótica para a função-erro imaginária conduzirá a valores-limites idênticos  $(d\bar{x}_S/dt)_{t=1} = 1/4^{1-2}$ . No caso da parede ideal na origem, descrita pela condição de contorno  $\tilde{A}(0) = 0$  (isto é, para pacotes ímpares), esse resultado foi obtido em [22] e sua independência em relação à forma concreta da barreira impenetrável foi explicada em [64].

Nem todo pacote inicialmente par, com dois ou mais picos, exhibe encolhimento (em termos do parâmetro  $\bar{x}$ ). Por exemplo, qualquer pacote do tipo de Fock

$$\tilde{A}_n(x; t) = \frac{N_n (i\bar{x})^{n-2}}{(n+1)^2} \exp \left[ i \frac{x^2}{2} \right] H_n \left[ \frac{x}{j''(t)} \right] \quad (3.63)$$

se alarga monotonamente,  $\bar{x}(t) \gg j''(t)$ , porque a função (3.63) satisfaz à equação de Schrödinger estacionária,  $i \tilde{A}_n'' + x^2 \tilde{A}_n = 2E_n \tilde{A}_n$ , com autovalores positivos  $E_n$  ( $H_n(z)$  é o polinômio de Hermite). Logo, para qualquer solução (par) desse tipo, a derivada segunda,  $\tilde{A}''$ , em  $x = 0$  tem sinal oposto ao da função de onda,  $\tilde{A}$ , resultando numa "aceleração" positiva, (3.59). O mesmo será verdade para qualquer estado que estiver, inicialmente, num auto-estado com energia positiva de algum potencial  $V(x)$  possuindo a propriedade  $V(0) = 0$ . Entretanto, para auto-estados com energia negativa (por exemplo, em potenciais simétricos do tipo dois poços com um máximo local em  $x = 0$  e mínimos absolutos em algum  $|x_{mj}| > 0$ ) a "aceleração" efetiva e inicial, (3.59), será negativa. Essa observação poderá ser usada para encontrar pacotes com menor valor mínimo da razão  $\bar{x}(t) = \bar{x}(0)$  do que no caso dos pacotes coerentes e pares.

Notemos que a função de onda (3.63) não contém qualquer parâmetro (exceto  $n$ ). Por essa razão, a forma da densidade de probabilidade não muda durante a evolução, a qual se reduz à transformação de escala  $x \rightarrow x = j''(t)j$ . Ao contrário, todos os pacotes que exibem encolhimento não são invariantes às mudanças de escala, pois eles dependem de parâmetros adicionais, tais como  $x_c$ .

### 3.5.3 Medidas $\bar{x}$ do alargamento

No caso unidimensional, a fórmula (3.18) se torna:

$$\bar{x}^{(R)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |j(x)|^2 \tilde{A}(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |j(x)|^2 dx} : \quad (3.64)$$

Para o estado (3.46), a integral em (3.64) pode ser expressa através das funções cilindro-parabólicas ou da função hipergeométrica e conflüente,  ${}_1F_1(a; c; z)$  [28]:

$$\begin{aligned} x_S^{(\otimes)}(t) &= j''(t) j \frac{1}{2} N_S^2 i \frac{\mu_{1+\otimes} \Gamma_{\rightarrow 1=\otimes}}{2} \\ &= {}_1F_1\left(\otimes; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; i \frac{x_c^2}{j'' j^2}\right) \\ &= e^{i x_c^2 \otimes} {}_1F_1\left(\otimes; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x_c^2 t^2}{j'' j^2}\right) \Gamma_{\rightarrow 1=\otimes} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Para expandir o lado direito de (3.65) em série de Taylor com respeito ao tempo, usamos as seguintes relações para a função  ${}_1F_1(a; c; z)$  [28]:

$$\frac{d}{dz} {}_1F_1(a; c; z) = \frac{a}{c} {}_1F_1(a+1; c+1; z);$$

$${}_1F_1(a; c; i z) = e^{i z} {}_1F_1(c-i; a; c; z);$$

$${}_1F_1(a-i; c; z) - {}_1F_1(a; c; z) = z {}_1F_1(a; c+1; z);$$

Após um pouco de álgebra, chegamos à expressão

$$x_S^{(\otimes)} = \frac{i \frac{1+\otimes}{2} A_S}{\sqrt{4} (e^{x_c^2} \otimes 1)} \left( 1 + \frac{B_S}{A_S} t^2 + \dots \right);$$

onde

$$A_S = {}_1F_1\left(\otimes; \frac{\otimes+1}{2}; \frac{1}{2}; x_c^2 \otimes 1\right);$$

$$B_S = \frac{1}{2} {}_1F_1\left(\otimes; \frac{\otimes-1}{2}; \frac{1}{2}; x_c^2 \otimes \frac{1}{2}\right) \dots x_c^2;$$

O raio  $\otimes$  inicialmente diminuirá com o tempo se  $B_S = A_S < 0$ . Usando a fórmula assintótica

$${}_1F_1(a; c; z) \gg \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{z a i c}; \quad |z| \gg 1;$$

podemos ver que para  $x_c \gg 1$  ( $e^{\otimes} \ll 1$ ),

$$B_S = A_S \gg i \frac{\mu_{\otimes+1}}{2} \Gamma_{\rightarrow 2x_{ci}} \frac{\mu_{\otimes-1}}{2} \Gamma_{\rightarrow i 1};$$

Conseqüentemente, em termos dos raios  $\otimes$ , todos os pacotes (pares, ímpares e mistos) com picos bem separados exibirão encolhimento inicial para  $\otimes < 1$ , o qual será bastante pronunciado para valores de  $\otimes$  próximos de  $i 1$ : veja-se a figura 3.14. A explicação de tal comportamento se tornará clara se olharmos a figura 3.15: cada pico inicial se expande quase simetricamente a partir de seu máximo inicial, portanto observamos um aumento da densidade de probabilidade na região entre os picos iniciais. Desde que as medidas  $\otimes$ , com  $\otimes < 1$ , são mais "sensíveis" às contribuições dessa região interna, os raios  $\otimes$  exibem rápido decréscimo no estágio inicial da evolução.



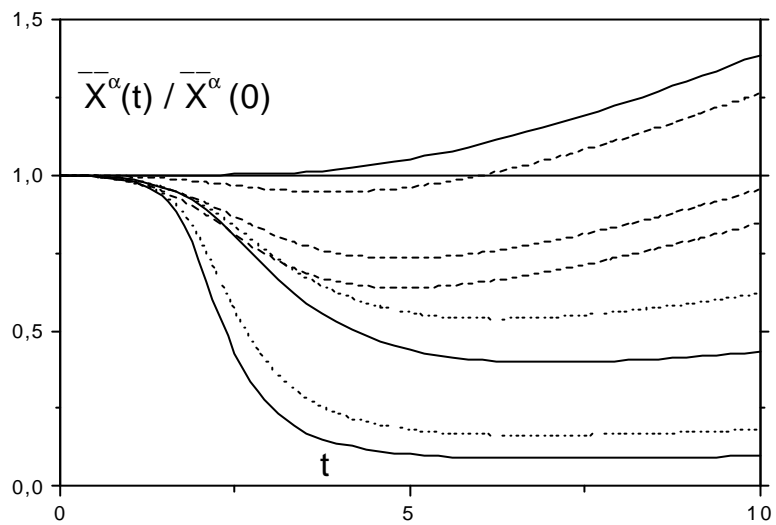


Figura 3.14: Raios  $\mathbb{R}$  normalizados para os pacotes ímpares, mistos e pares no caso em que  $x_c = 5$ . Curvas sólidas, do topo para a base:  $\mathbb{R} = 1; i 1=2; i 9=10$ . Curvas tracejadas, do topo para a base:  $\mathbb{R} = 1=2; i 1=2; i 9=10$ . Curvas pontilhadas, do topo para a base:  $\mathbb{R} = i 1=2; i 9=10$ . Para  $\mathbb{R} > 1=2$ , as curvas correspondendo a diferentes pacotes ...cam muito próximas com a mesma aparência dos casos mostrados: ímpar, misto e par (do topo para a base). Os valores iniciais de  $\bar{X}^{(\mathbb{R})}$  praticamente não dependem do tipo de pacote, só dependendo levemente de  $\mathbb{R}$ :  $\bar{X}^{(1)}(0) = 5; 00$  e  $\bar{X}^{(i 9=10)}(0) = 4; 90$ .

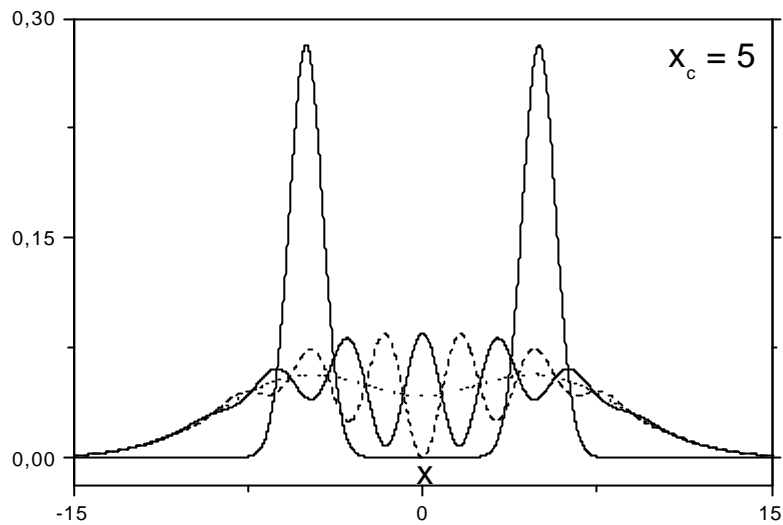


Figura 3.15: Densidades de probabilidade de diferentes tipos de pacotes com  $x_c = 5$ . A curva sólida e espessa com dois picos representa a distribuição inicial em  $t = 0$ , a qual é praticamente a mesma para todos os pacotes. As outras curvas correspondem ao momento  $t = 5$ . Pacote par: curva sólida (com máximo em  $x = 0$ ), pacote ímpar: curva tracejada (com mínimo em  $x = 0$ ) e pacote misto: curva pontilhada.

### 3.5.4 Extensões dos pacotes

No caso unidimensional, a fórmula (3.28) se torna:

$$E^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x)]^2 dx \quad (3.66)$$

Para a distribuição (3.49), obtemos

$$E_S^{(2)} = \frac{8 \rho_0}{\rho_0 N_S^4} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |j''(t)|^2 dx \left[ 1 + e^{i 2x_c^2} + 2 \exp \left( i \frac{2x_c^2}{j''^2} \right) \right] \cos \left( \frac{x_c^2 t}{2(1+t^2)} \right) \cos \left( \frac{x_c^2 t}{j''^2} \right) \quad (3.67)$$

Para o estado misto (3.50), devemos suprimir o termo com o sinal  $S$  e trocar  $N_S^4$  por  $4=1/4$ .

A superextensão, equação (3.31), no caso unidimensional se torna:

$$E^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \quad (3.68)$$

As dependências temporais de diferentes medidas são mostradas na Figura 3.16. Para  $\nu = 2$ , nenhum pacote exibe encolhimento, embora a dependência temporal não seja monótona no caso dos pacotes pares. Os pacotes pares claramente demonstram um decréscimo

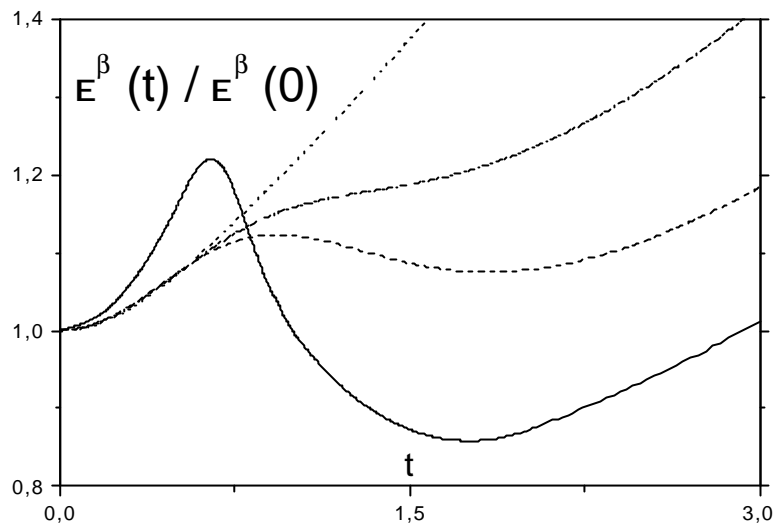


Figura 3.16: Extensões  $\bar{E}^{(1)}$  normalizadas para diferentes pacotes iniciais com  $x_c = 2^{1=2}$ . As três curvas com valores maiores do que ou iguais a 1 correspondem a  $\bar{E}^{(1)} = 2$ . Sua ordem, do topo para a base, é a seguinte: pacotes ímpares (curva pontilhada), pacotes mistos (curva tracejada-pontilhada) e pacotes pares (curva tracejada). A curva sólida corresponde à razão  $E^{(1)}(t)/E^{(1)}(0)$  para pacotes pares.

intermediário da razão-limite  $\bar{E}^{(1)}(t) \sim E^{(1)}(t)/E^{(1)}(0)$  abaixo do nível inicial, em completo acordo com a Figura 3.10. O máximo da curva sólida na Figura 3.16 é atingido no momento  $t_{\max} \approx 0,65$ , quando a altura do pico central em  $x = 0$  se torna igual à altura dos picos laterais (simétricos). O mínimo da curva sólida,  $\bar{E}_{\min}^{(1)} \approx 0,856$ , corresponde ao momento  $t_2 = \frac{\rho_c}{3}$ , quando a densidade de probabilidade na origem,  $\rho(0; t)$ , atinge seu máximo. Supondo que a posição do máximo em  $t = 0$  coincida com  $x_c$  (essa aproximação é razoavelmente boa já para  $x_c = \frac{\rho_c}{2}$ , sendo muito melhor para  $x_c \gg 1$ ), poderemos obter uma fórmula aproximada:  $\bar{E}_{\min}^{(1)} \approx x_c \frac{\rho_c}{8}$ . Portanto, o encolhimento de pacotes pares, com respeito à medida  $E^{(1)}$ , existirá para os valores de  $x_c$  no intervalo  $1 < x_c < \frac{\rho_c}{8} \approx 1,7$ .

No caso dos pacotes mistos, a expressão para  $t_1^{\text{mis}}$  coincide com a de  $t_2$  (e é igual a dos pacotes pares). Por conseguinte, os pacotes mistos não encolhem com respeito à medida  $E^{(1)}$ , assim como os ímpares (os quais se expandem mais rapidamente), em acordo com as Figuras 3.11 e 3.12.

### 3.6 Conclusão

Mostramos que pacotes de ondas anelares podem exibir encolhimento significativo nos estágios iniciais de sua evolução livre. Uma escolha adequada da medida de extensão do pacote ajudará a visualizar ou a enfatizar o efeito quando ele existir. O caso bidimensional não é distinto do ponto de vista de diferentes medidas do valor médio do raio. Encontramos exemplos de medidas para as quais as dimensões distintas são  $d = 3; 4$  ou  $6$ : Além disso, escolhas adequadas dos parâmetros  $k$  e  $d$ ; que caracterizam o pacote de ondas inicial, e dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , que caracterizam a medida da extensão do pacote, permitem obter um valor mínimo da extensão normalizada tão pequeno quanto se queira.

Demonstramos também que existem famílias de pacotes quânticos e unidimensionais que exibem encolhimento inicial durante suas evoluções livres, embora os valores médios e iniciais do momento, das covariâncias ou do fluxo da densidade de probabilidade sejam nulos. Todos esses pacotes têm mais do que um pico no instante inicial. O efeito é mais pronunciado para pacotes pares do que para pacotes ímpares ou mistos e, além disso, em muitos casos não há encolhimento para os dois últimos tipos de pacotes. Consideramos essa diferença como uma manifestação das interferências quânticas.

Supuseram em [67] que a existência de encolhimento para pacotes radiais no caso bidimensional (e sua ausência no caso tridimensional) poderia estar ligada ao fato de que os pacotes bidimensionais são mais “não-clássicos”, o que é caracterizado pelo peso relativo da parte negativa da função de Wigner. Todavia, nossos exemplos unidimensionais não confirmam essa conjectura. Calculando as integrais sobre as partes positiva e negativa da função de Wigner,

$$V_{\pm} = \frac{1}{2} \int [W(q; p) \pm jW(q; p)] \frac{dqdp}{2^{1/4}};$$

(usando a normalização  $V_+ + V_- = 1$ ), obtivemos para a função (3.51), com  $x_c = \frac{p_c}{2}$ , os seguintes valores:

$$V_i^{par} = 0; 104; \quad V_+^{par} = 1; 104;$$

$$V_i^{impar} = 0; 217; \quad V_+^{impar} = 1; 217;$$

De acordo com esses números, o estado ímpar é mais “não-clássico” do que o estado par. Porém, o encolhimento é observado não para os estados ímpares, mas para os pacotes pares.

## Capítulo 4

# Tunelamento de pacotes gaussianos e estreitos através de potenciais do tipo delta de Dirac

Neste capítulo, estudamos a transmissão e a reflexão de pacotes de ondas de matéria por potenciais do tipo delta de Dirac. Várias definições de tempo de transmissão são introduzidas e comparadas.

### 4.1 Introdução

Sabemos que a equação de Schrödinger com o potencial-delta

$$V(x) = Z\delta(x) \quad (4.1)$$

admite um conjunto completo e simples de soluções explícitas e exatas [33, 38, 90]. Por essa razão, tal potencial é usado com frequência para modelar diferentes fenômenos em vários campos da Física quântica, nos casos-limites em que a forma detalhada do potencial concreto não é essencial. Em particular, tal aproximação pode ser aplicada com sucesso à análise de vários dispositivos de tunelamento em Física do estado sólido [91], onde a técnica experimental de dopagem-delta é usada para criar diferentes camadas-deltas há mais de duas décadas [92]. Aplicações de potenciais do tipo delta tridimensionais aos problemas da Física atômica foram revistas em [93]. Tais potenciais também são amplamente usados na teoria dos condensados de Bose-Einstein [56, 94, 95]. Modelos exatamente solúveis de sistemas de muitos corpos interagindo através de potenciais do tipo delta foram considerados em [96, 97].

Diversas soluções para a equação de Schrödinger dependente do tempo com o potencial

(4.1) foram consideradas por muitos autores, começando, talvez, com o artigo [98], onde um tratamento original para o problema de valor inicial foi usado. Em especial, foram despendidos muitos esforços para encontrar o propagador  $G(x; x^0; t)$  [99]-[104], o qual permite calcular a evolução de qualquer função de onda inicial,  $\tilde{A}(x; 0)$ , de acordo com a relação

$$\tilde{A}(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x; x^0; t) \tilde{A}(x^0; 0) dx^0 \quad (4.2)$$

Generalizações para o caso de uma intensidade dependente do tempo,  $Z(t)$ , foram consideradas em [105]-[107]. Propagadores para potenciais do tipo delta de Dirac móveis foram obtidos em [106], [108]-[110]. Para outros estudos e generalizações consulte-se, por exemplo, [111]-[125].

Todavia, cálculos concretos da integral (4.2) e a análise da evolução de diferentes pacotes de ondas iniciais e localizados na presença de potenciais do tipo delta de Dirac foram realizados apenas em poucos estudos [98, 102, 126]. O objetivo de nosso trabalho é considerar a reflexão e a transmissão pelo potencial (4.1) (com intensidade constante ou com específica dependência temporal  $Z(t)$ ) de pacotes iniciais, estreitos e gaussianos, com ênfase em pacotes que se movam lentamente. Esse caso especial poderá ser realizado em experimentos com átomos ultrafrios. Em particular, ele está intimamente relacionado ao fenômeno da difração quântica de pacotes lentos por espelhos refletivos e semitransparentes [22, 23, 64]. Para outras publicações recentes devotadas à propagação e à reflexão de pacotes quânticos (ondas de matéria) veja-se [55], [66]-[68], [127]-[130].

Este capítulo está arranjado assim: na seção 4.2, derivamos fórmulas analíticas descrevendo a reflexão e a transmissão de pacotes iniciais, estreitos e gaussianos, através do potencial-delta estacionário; na seção 4.3, comparamos diferentes definições do tempo de transmissão; na seção 4.4, consideramos uma generalização: o potencial-delta com intensidade dependente do tempo específica (linear e inversa); na seção 4.5, apresentamos nossas conclusões.

## 4.2 Evolução de pacotes num potencial-delta estacionário

A forma explícita do propagador para o potencial-delta foi encontrada em vários artigos [99, 101, 102]

$$G_Z(x; x^0; t) = (2\pi i t)^{-1/2} \exp \frac{i(x - x^0)^2}{2t} - i \frac{Z}{2} \exp \left[ -Z(x - x^0) + \frac{iZ^2 t}{2} \operatorname{erfc} \frac{|x - x^0| + iZt}{\sqrt{2it}} \right] \quad (4.3)$$

Para simplificar as fórmulas, supomos que  $\hbar = m = 1$ . O retorno às variáveis dimensionais é obtido pelas trocas

$$t \rightarrow \frac{\hbar t}{m}, \quad Z \rightarrow \frac{mZ}{\hbar^2} \quad (4.4)$$

Para um tempo imaginário, isto é, para a matriz-densidade do equilíbrio, uma fórmula equivalente a (4.3) foi obtida em [131] e a função de Wigner do equilíbrio foi calculada em [132]. O segundo termo no lado direito de (4.3) é chamado às vezes de função de Moshinsky [102, 133, 134], porque uma expressão similar apareceu no artigo [135], devotado ao problema da difração no tempo. A equação (4.3) vale para qualquer sinal de  $Z$  (embora em alguns artigos tenha sido derivada apenas para potenciais atrativos ou repulsivos). Outras representações (integrais) para o propagador foram obtidas em [100, 103, 104]. Para  $Z = 1$  e valores reais de  $x$ ,  $x^0$  e  $t$ , a equação (4.3) tenderá ao propagador no semi-espaço confinado com uma parede impenetrável (para  $x; x^0 > 0$ )

$$G_1(x; x^0; t) = (2i\hbar t)^{-1/2} \exp i \frac{(x^0 - x)^2}{2\hbar t} + \exp i \frac{(x^0 + x)^2}{2\hbar t} \quad (4.5)$$

devido à fórmula assintótica [28, 31]

$$\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{\exp(-x^2)}{x^{1/2}}; \quad |x| \gg 1; \quad |\arg x| < \frac{3\pi}{4} \quad (4.6)$$

Propagadores exatos ou quase-clássicos na presença de potenciais adicionais e para várias condições de fronteira numa semilinha ou em domínios tridimensionais separados por telas e fendas foram obtidos, por exemplo, em [136]-[143].

Ao levar a expressão (4.3) na integral (4.2), deveremos lembrar que  $G(x; x^0; t)$  tem diferentes formas analíticas para  $x^0 > 0$  e  $x^0 < 0$ , de modo que a integração deverá ser feita separadamente nas regiões  $x^0 > 0$  e  $x^0 < 0$  (e o resultado será diferente para  $x > 0$  e  $x < 0$ ). Todavia, se a função de onda inicial for bem localizada, à direita e distante da origem, sendo igual a zero para  $x < 0$ , então a integração em (4.2) deverá ser feita para  $x^0 > 0$  apenas, isto é, poderemos trocar  $|x^0|$  por  $x^0$ . Consideramos neste trabalho o estado inicial e gaussiano (Uma fórmula exata descrevendo a evolução de um pacote inicial da forma  $\exp(i a x + i x^2)$  foi obtida e analisada em [102].):

$$\tilde{A}(x; 0) = (\hbar s^2)^{-1/4} \exp i \frac{(x - x_c)^2}{2s^2} + i p_0 x; \quad x_c \in \mathbb{R}; \quad (4.7)$$

onde  $s$  é a largura do pacote de ondas e  $x_c$  é a distância inicial entre o centro do pacote e o potencial. A forma (4.7) implica que estudamos estados sem correlações iniciais entre a posição e o momento (foi mostrado em [23, 64] que correlações inicialmente não-nulas

não mudam essencialmente a descrição da reflexão ou da transmissão de pacotes estreitos e lentos por barreiras). Embora a função (4.7) tenha uma "cauda" não-nula na região  $x < 0$ , ela é exponencialmente pequena (sob a condição assumida  $x_c \ll \lambda$ ) e não produz qualquer contribuição significativa. Logo, a integração em (4.2) pode ser estendida ao eixo inteiro:  $-\infty < x < \infty$ . Usando a integral [144]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(iax^2 + bx) \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{a(1+a)}}\right) \quad (4.8)$$

e introduzindo novos parâmetros adimensionais

$$x = \frac{x}{x_c}; \quad \rho = \frac{\rho_0}{\rho_0}; \quad \zeta = \frac{t - t_0}{msx_c}; \quad B = \frac{msZ}{\rho_0}; \quad \tilde{A} = 1 + i\zeta; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho_0}; \quad (4.9)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x; \zeta) = & \frac{1}{\sqrt{4\tilde{A}^2}} \exp\left[-i\frac{1}{\tilde{A}}(x + i\rho_0\zeta)^2 + i\rho_0(2x + \rho_0\zeta)\right] \\ & + \frac{B}{\sqrt{4\tilde{A}^2}} \exp\left[-B^2\tilde{A} + 2B(jx + 1) + \rho_0^2 + 2i\rho_0(- + B)\right] \\ & + \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{\tilde{A}}(jx + 1) + B\sqrt{\tilde{A}} + \frac{i\rho_0}{\tilde{A}}\right] \quad (4.10) \end{aligned}$$

Para  $B > 0$  (potencial repulsivo) e  $\tilde{A} \gg 1$ , a parte real do argumento da função-erro complementar no lado direito da equação (4.10) será grande e positivo para qualquer valor de  $\zeta$ , de modo que poderemos simplificar essa expressão usando a fórmula assintótica (4.6):

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x; \zeta) \approx & \frac{1}{\sqrt{4\tilde{A}^2}} \exp\left[-i\frac{1}{\tilde{A}}(x + i\rho_0\zeta)^2 + i\rho_0(2x + \rho_0\zeta)\right] \\ & + \frac{B\tilde{A}}{(jx + 1) + B\tilde{A} + i\rho_0} \exp\left[-i\frac{1}{\tilde{A}}(jx + 1 + \rho_0\zeta)^2 + i\rho_0(2jx + \rho_0\zeta)\right] \quad (4.11) \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Pacote refletido

Se  $B \gg 1$ , o fator antes da exponencial na segunda linha da equação (4.11) tenderá a 1 (para  $x$  e  $\zeta$  finitos). Nesse limite, para  $x > 0$  o lado direito de (4.11) se tornará uma superposição de um pacote gaussiano se expandindo livremente (com momento médio e inicial igual a zero) e de um pacote refletido por uma fronteira ideal [22], enquanto tenderá a zero para  $x < 0$ . A densidade de probabilidade,  $j\tilde{A}(x; \zeta)j^2$ , oscilará rapidamente no semi-espaço  $x > 0$  (se  $B \neq 0$ ) devido às interferências entre a parte do pacote de ondas se propagando livremente e a refletida pelo potencial. A distribuição de momento,  $j'(\rho)j^2$ , assintótica



( $\zeta \neq 1$ ) não depende de  $\zeta$ , mas ela contém funções senos e cossenos, de argumento grande  $\sim \rho$ , que oscilam rapidamente. Após tomar a média sobre essas oscilações (as quais não afetam as quantias mensuráveis [23, 64]), obtemos uma distribuição suave que tem formas diferentes para valores positivos e negativos do momento

$$\overline{P}_{as}^{(S)}(\rho) = \begin{cases} j'_0(\rho)j^2(1 + j\tilde{A}(\rho)j^2) & \rho > 0 \\ j'_0(\rho)j^2(1 - j\tilde{A}(\rho)j^2) & \rho < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

onde

$$j\tilde{A}(\rho)j^2 = \frac{B^2}{B^2 + \rho^2} \quad (4.13)$$

é o coeficiente de reflexão da barreira-delta [33, 38, 97] e

$$j'_0(\rho)j^2 = (2^{-1/4})^{1-2} \exp\left[\frac{\hbar}{2}(\rho - \rho_0)^2\right] \quad (4.14)$$

é a distribuição de momento inicial correspondendo ao estado (4.7) (...camos restritos ao caso dos estados gaussianos e puros; estados mistos foram discutidos em [23, 64]). A equação (4.12) mostra que o valor assintótico do momento é diferente do valor inicial  $\rho_0$ . Essa diferença se tornará especialmente perceptível se  $\rho_0 = 0$ . Nesse caso, a distribuição de momento inicial será simétrica com respeito ao sinal de  $\rho$ , mas a distribuição final não o será, de modo que o valor médio e assintótico do momento será diferente de zero. Isso significa que o centro de massa do pacote adquire momento não-nulo às custas da energia das flutuações quânticas (então o pacote se tornará mais estreito do que era inicialmente no espaço de momento). Esse efeito é a deflexão quântica discutida em [22, 23, 64]. Para uma parede perfeitamente refletora ou para  $B \gg 1$ , o valor assintótico do momento vale  $\hbar\rho_1 = 1 - \frac{\rho_0}{2}$  (para uma distribuição gaussiana com  $\rho_0 = 0$ ; notemos que a definição do momento adimensional,  $\rho$ , na equação (4.9) difere pelo fator  $\frac{\rho_0}{2}$  daquela adotada em [22, 23, 64]).

## 4.2.2 Pacote transmitido

Agora vamos discutir as propriedades do pacote transmitido. Para  $x < 0$ , os argumentos de ambas as exponenciais da fórmula (4.11) são iguais, de modo que

$$\tilde{A}(x; \zeta) \sim \frac{\mu}{\sqrt{4\tilde{A}^2}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x - \rho_0) + i\rho_0}}{e^{-\frac{1}{2}(x - \rho_0) + B\tilde{A} + i\rho_0}} \exp\left[-\frac{2}{\tilde{A}}(x - \rho_0)^2 + i\rho_0(2x - \rho_0)\right] \quad (4.15)$$

Para suficientemente grande, podemos desprezar  $\rho_0$  no fator pré-exponencial, assim como o parâmetro  $B$  na parte real do denominador (relembremos que  $\tilde{A} = 1 + i\tau$  e  $x < 0$ ). Portanto,

a distribuição de probabilidade à esquerda da barreira não dependerá de  $\tau$  sob as condições

$$B \gg 1 \quad \text{e} \quad j\beta_0 \ll \zeta \quad \text{e} \quad B \gg \zeta \quad \text{e} \quad \zeta \gg 1 \quad (4.16)$$

(as quais implicam que  $B$  é infinito, isto é, a barreira não é totalmente refletora):

$$P^{(i)}(x; \zeta) \sim j\tilde{A}(x; \zeta)j^2 \frac{1}{4} \frac{\mu}{\zeta^2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - |x|)^2}{(1 - |x|)^2 + \zeta^2 B^2} \exp\left[-i \frac{2}{\zeta^2} (x - 1 + \beta_0 \zeta)^2\right] dx \quad (4.17)$$

É claro que para  $\beta_0 < 0$  e  $j\beta_0 \ll \zeta \ll B$  o máximo da distribuição (4.17) será atingido quando  $x - 1 = \beta_0 \zeta$ . Nesse caso, poderemos trocar o termo  $x - 1$  no fator pré-exponencial por  $\beta_0 \zeta$  nos pontos próximos do máximo. Logo, o pacote transmitido (no sentido de sua densidade de probabilidade) assintoticamente se aproximará do pacote gaussiano e inicial se expandindo livremente, multiplicado pelo coeficiente de transmissão

$$T(\beta) = 1 - j\tilde{A}(\beta)j^2 = \frac{\beta^2}{B^2 + \beta^2} \quad (4.18)$$

correspondendo ao momento inicial  $\beta_0$ . Isso foi notado (sem prova explícita) há muito tempo em [98].

Entretanto, esse resultado simples valerá somente se  $j\beta_0 \ll \zeta$  não for muito pequeno. Se  $j\beta_0 \ll \zeta$ , a situação será diferente. Aqui consideraremos a situação extrema em que  $\beta_0 = 0$ . Nesse caso, a parte principal do pacote inicial se expandindo livremente alcançará a barreira quando  $\zeta \gg 1$ ; portanto, o regime mais interessante será aquele em que  $\zeta > 1$ . Em contraste com um pacote se expandindo livremente, cujo máximo está fixado no ponto  $x = 1$ , a posição do máximo do pacote transmitido (4.17), com  $\beta_0 = 0$ , será gradualmente deslocado para a esquerda de acordo com a fórmula

$$(1 - x_m)^2 = \zeta^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{2 + B^2} \quad (4.19)$$

Em particular,  $j\tilde{A}(x_m)j^2 \frac{1}{4} \frac{\mu}{\zeta^2} \frac{1}{B}$  para uma barreira quase transparente ( $B \gg 1$ ). Por outro lado, a velocidade máxima do pacote não depende de  $B$  para barreiras refletoras quase perfeitas ( $B \gg 1$ ):

$$(1 - x_m)^2 = \zeta^2 \Rightarrow \frac{dx_m}{d\zeta} = \frac{1}{2} \quad (4.20)$$

(embora a altura do máximo se torne muito pequena). No último caso

$$P^{(i)}(x) \frac{1}{4} \frac{\mu}{\zeta^2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - |x|)^2}{\zeta^3 B^2} \exp\left[-i \frac{2}{\zeta^2} (1 - |x|)^2\right] dx \quad (4.21)$$

Usando a aproximação  $P^{(i)}(x) \frac{1}{4} P(x_m) \exp[-i 4(x - x_m)^2 = \zeta^2]$  na vizinhança do máximo, podemos verificar que a razão entre a largura do pacote,  $\Delta x = \zeta = (2 \frac{\mu}{B})$ ; e a posição do seu máximo,  $x_m$ , não depende do tempo:  $\Delta x = x_m \frac{1}{4} = 1/2$ .

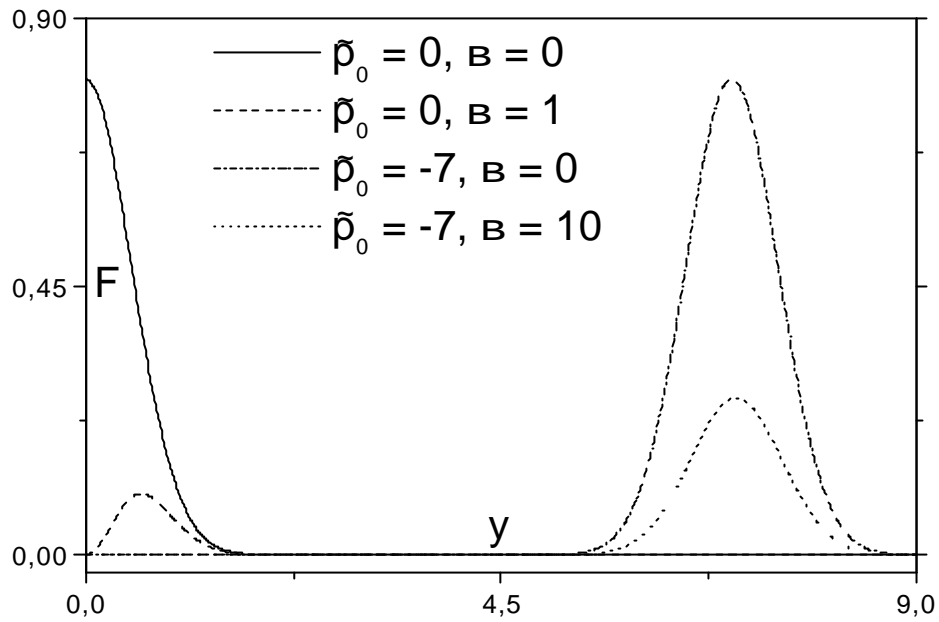


Figura 4.1: A função  $F(y)$  para  $p_0 = 0; B = 0$  (curva superior à esquerda),  $p_0 = 0; B = 1$  (curva inferior à esquerda),  $p_0 = -7; B = 0$  (curva superior à direita) e  $p_0 = -7; B = 10$  (curva inferior à direita).

É conveniente reescrever a densidade de probabilidade (4.17) em função da variável escalada  $y = (1 - x)/\zeta$  (cujo intervalo varia de  $\zeta^{-1}$  até 1):

$$P^{(i)}(x; \zeta) = \frac{F(y)}{\zeta}; \quad F(y) = \frac{r}{2} \frac{y^2}{\frac{1}{4}y^2 + B^2} \exp\left[-\frac{1}{2}(y + p_0)^2\right]; \quad y = \frac{1 - x}{\zeta}; \quad (4.22)$$

Os gráficos da função  $F(y)$  para diferentes valores de  $p_0$  e  $B$  são dados na figura 4.1.

### 4.2.3 Probabilidade de transmissão dependente do tempo

A probabilidade de transmissão dependente do tempo pode ser definida como a probabilidade de encontrar a partícula à esquerda da barreira:

$$L(\zeta) = \int_{\zeta^{-1}}^{Z_0} P^{(i)}(x; \zeta) dx \quad (4.23)$$

Tomando o limite  $\zeta \rightarrow 1$  na equação (4.23), obtemos a probabilidade de transmissão assintótica para o pacote [64]

$$L_1 = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \int_{\zeta^{-1}}^{Z_0} P^{(i)}(x; \zeta) dx = \int_{\zeta^{-1}}^{Z_0} j'_0(p) j^2_{i-1} j \hat{A}(p) j^2 dp \quad (4.24)$$

O valor médio, assintótico e condicional de uma função do momento pode ser definido como [29, 64]

$$\langle hf(p) \rangle_{i-1} = L_1^{-1} \int_{-1}^0 f(p) j'_{0}(p) j^2_{i-1} j \hat{A}(p) j^2 dp \quad (4.25)$$

O significado físico dessa definição parece claro: ela corresponde somente à estatística daqueles eventos que estão relacionados à detecção de uma partícula atrás da barreira. Para grandes valores negativos de  $p_0$ ,  $L_1 = T(p_0)$ . Além disso, podemos trocar o coeficiente de reflexão que varia lentamente,  $j \hat{A}(p) j^2$ , por seu valor quando  $p = p_0$  (tendo em mente que a contribuição principal à integral em (4.25) é dada por uma pequena região perto do ponto  $p_0$ , devido à forma exponencial da distribuição de momento inicial). Logo, nesse caso assintótico, temos  $\langle hf(p) \rangle_{i-1} \approx hf(p)_{t=0}$ . Em particular,  $\langle hp \rangle_{i-1} \approx p_0$ .

A situação será diferente se  $|p_0| < 1$ . Consideraremos o caso em que  $p_0 = 0$ , quando o efeito será máximo. Os cálculos serão mais simples no caso da barreira refletora quase perfeita com  $B \gg 1$ , quando o coeficiente de transmissão poderá ser simplificado como  $1 - j \hat{A}(p) j^2 \approx p^2/B^2$ . Então, as equações (4.14) e (4.24) produzirão  $L_1 = (8B^2)^{-1}$ . Além disso, o valor assintótico do momento condicional do pacote transmitido não dependerá de  $B$  nesse caso-limite:  $\langle hp \rangle_{ij} = \frac{p_0}{2} = 0$ . Notemos que esse valor é duas vezes maior do que o momento médio das partículas refletidas e do que o valor do momento condicional das partículas se movendo para a esquerda na ausência de qualquer barreira (para o pacote gaussiano). Também, o valor  $\langle hp \rangle_{ij}$  será levemente ( $2 = \frac{p_0}{4}$  vezes) maior do que o momento correspondente à velocidade do pico do pacote transmitido, equação (4.20), devido à sua largura finita no espaço de momento.

### 4.3 Tempos de transmissão

Há uma literatura vasta sobre o problema do tempo de tunelamento [145]-[147] ou tempo de chegada [148] de partículas quânticas se movendo em vários potenciais ou passando através de barreiras de potencial. Todavia, o caso do tunelamento através de uma barreira do tipo delta de Dirac foi esquecido (o tempo de atraso para barreiras do tipo delta foi considerado recentemente em [149, 150]). Expressões explícitas para os pacotes dependentes do tempo nos dão uma possibilidade rara de estudar o problema em detalhes nesse caso especial.

Há vários modos possíveis de definir o tempo de transmissão. Por exemplo, introduzindo a probabilidade de transmissão normalizada  $\mathcal{T}(\xi) = L(\xi)/L_1$ , podemos supor que a transmissão estará praticamente terminada quando a diferença  $1 - \mathcal{T}(\xi)$  atingir um pequeno valor

$^2$ , de...nindo o tempo de transmissão convencional,  $\zeta_2$ , através da equação 1;  $L(\zeta_2) = ^2$ . Usando as equações (4.22) e (4.23), obtemos

$$L(\zeta) = \frac{r}{\frac{1}{4}} \frac{Z}{1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^2 + B^2} e^{i 2(y+p_0)^2} dy; \quad (4.26)$$

Uma fórmula analítica e aproximada para a integral (4.26) pode ser facilmente encontrada para momentos iniciais, negativos e grandes:  $p_0 < 0$ ,  $j|p_0| \gg 1$ . Em verdade, é claro que a probabilidade de transmissão será exponencialmente pequena enquanto  $j|p_0|\zeta < 1$ , e ela praticamente coincidirá com  $T(j|p_0|)$  quando  $j|p_0|\zeta \gg 1$ . Um rápido aumento de  $L(\zeta)$ , indo de zero ao valor assintótico  $L_1 = T(j|p_0|)$ , ocorrerá durante um intervalo de tempo mais ou menos curto, quando  $j|p_0|\zeta \approx 1$ . Escrevendo  $j|p_0|\zeta = 1 + \pm$ , com  $j \gg 1$ , poderemos trocar  $y$  por  $j|p_0|$  no fator pré-exponencial. Então, a integral será reduzida à função-erro complementar, e obteremos uma fórmula analítica e aproximada

$$L(\zeta) \approx \frac{1}{2} \text{erfc}(\pm); \quad \pm = \frac{p_0}{2j|p_0|} (1 \pm j|p_0|\zeta); \quad j|p_0| \gg 1; \quad (4.27)$$

Dependências típicas de  $L(\zeta)$  para  $j|p_0|\zeta \gg 1$ , resultantes da integração numérica de (4.26), são mostradas na Figura 4.2. Podemos ver que com o aumento do valor absoluto do momento inicial,  $j|p_0|$ , a região de transmissão se desloca para tempos menores e se torna mais estreita. O mesmo comportamento será observado se aumentarmos a intensidade do potencial-delta,  $B$ , para um valor fixo de  $p_0$ . Contudo, esse efeito é razoavelmente fraco e foi desprezado na fórmula (4.27). Levando em conta a fórmula (4.6), obtemos expressões assintóticas para  $j \gg 1$ :

$$L(\zeta) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\exp(-\frac{1}{2} \pm^2)}{\pm}; & \pm > 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{\exp(-\frac{1}{2} \pm^2)}{\pm}; & \pm < 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Efetivamente, desvios do valor assintótico são menores do que 1% já para  $j \gg 1$ . Então, o tempo de transmissão  $\zeta_{0,01}$  é igual, aproximadamente, à diferença entre dois valores de  $\zeta$ , o que produz  $\pm = \pm 2$ . Portanto,  $\zeta_{0,01} \approx \frac{1}{2} \frac{p_0}{2j|p_0|} = \frac{p_0}{4j|p_0|}$  (ou  $4m^{-1}x_c = (p_0^2 s)$  em variáveis dimensionais). Esse valor não depende da intensidade do potencial-delta (relembremos que estamos considerando o limite em que os pacotes têm grandes momentos iniciais,  $p_0$ , excedendo a largura da distribuição de momento inicial, a qual é da ordem de  $\sim s$ ), sendo determinado completamente pela diferença entre os instantes de tempo em que as ondas planas componentes do pacote inicial, correspondendo às "bordas" efetivas,  $p = p_0 \pm 2\sim s$ , da distribuição de momento (4.14), alcançam a posição da barreira,  $x = 0$ , a partir da posição inicial,  $x_c$ .

No caso em que o momento inicial for nulo,  $p_0 = 0$ , a integral (4.26) poderá ser calculada exatamente se  $B = 0$  e aproximadamente se  $jB \gg 1$  (quando podemos desprezar o termo  $y^2$

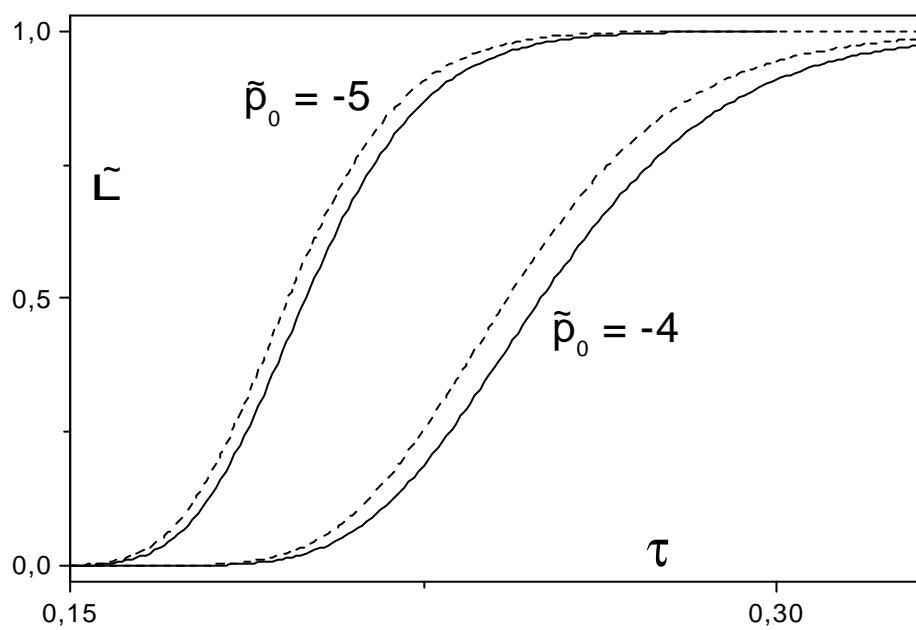


Figura 4.2: A probabilidade normalizada  $\tilde{L}(\zeta) = L(\zeta)/L_1$  para momentos negativos,  $\tilde{p}_0 = \pm 4$  (curvas à direita) e  $\tilde{p}_0 = \pm 5$  (curvas à esquerda) e diferentes valores da intensidade do potencial-delta:  $B = 0$  (curvas sólidas) e  $B = 20$  (curvas tracejadas).

no denominador do integrando):

$$L(\zeta) = \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{p_0}}{2\zeta} \quad B = 0 \quad (4.29)$$

$$L(\zeta) = \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{p_0}}{2\zeta} + \frac{p_0}{8\zeta} \exp \left[ -\frac{p_0}{4\zeta} \right] \quad B \gg 1 \quad (4.30)$$

Então, obtemos o seguinte comportamento assintótico da probabilidade de transmissão normalizada para  $\zeta \gg 1$  nesses dois limites opostos:

$$L(\zeta) = \begin{cases} < 1 - \frac{p_0}{3\sqrt{4}\zeta^3} + O(\zeta^{-5}) & B \gg 1 \\ 1 - \frac{p_0}{8\zeta} + O(\zeta^{-3}) & B \ll 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

Resultados de cálculos numéricos da função  $L(\zeta)$  para diferentes valores de  $B$  são mostrados na Figura 4.3. Vemos que o tempo de transmissão do pacote para o semi-espaço à esquerda, na presença da barreira-delta, é menor do que para um pacote se expandindo livremente com momento inicialmente nulo, e ele tende a um valor assintótico e finito para  $B \gg 1$ . A equação (4.31) mostra que para  $p_0 = 0$ , grosseiramente falando,  $\zeta^2 \gg 2B^2$  para  $B \ll 1$  e  $\zeta^2 \gg 2B^2$  para  $B \gg 1$ .

Uma desvantagem óbvia do parâmetro  $\zeta^2$  é a arbitrariedade na escolha de  $\zeta$ . Essa ambigüidade poderá ser removida se notarmos que a função  $L(\zeta)$  é monótona: vejam-se as Figuras 4.2 e 4.3. Logo, a derivada  $M(\zeta) = -dL(\zeta)/d\zeta$  é não-negativa e pode ser considerada como a densidade de probabilidade de transmissão da partícula através da barreira no intervalo entre  $\zeta$  e  $\zeta + d\zeta$ , porque  $\int_0^{\infty} [dL(\zeta) = -d\zeta] d\zeta = 1$ . Então, podemos definir o tempo de transmissão médio como (consulte-se [151])

$$\bar{\zeta} = \int_0^{\infty} \zeta M(\zeta) d\zeta \quad (4.32)$$

Em vista da equação (4.26), temos

$$M(\zeta) = \frac{\sqrt{p_0}}{2\zeta} \frac{\exp \left[ -\frac{p_0}{4\zeta} \right]}{L_1 \zeta^2 (1 + B^2 \zeta^2)} \quad (4.33)$$

No caso especial em que  $p_0 = 0$ , a integral (4.32) com a função (4.33) pode ser reduzida à integral-exponencial através da substituição  $t = 2B^2 \zeta^2 + \frac{p_0}{4\zeta}$ , e encontramos

$$\bar{\zeta} = \frac{L_1^{-1}}{2\sqrt{p_0}} E_1(2B^2) e^{2B^2} \quad (4.34)$$

Para  $B \gg 1$ , podemos usar as expressões assintóticas de  $E_1(x)$  para  $x \gg 1$  ou calcular a integral (4.32) diretamente, desprezando 1 com respeito a  $B^2 \zeta^2$  no denominador de (4.33) e

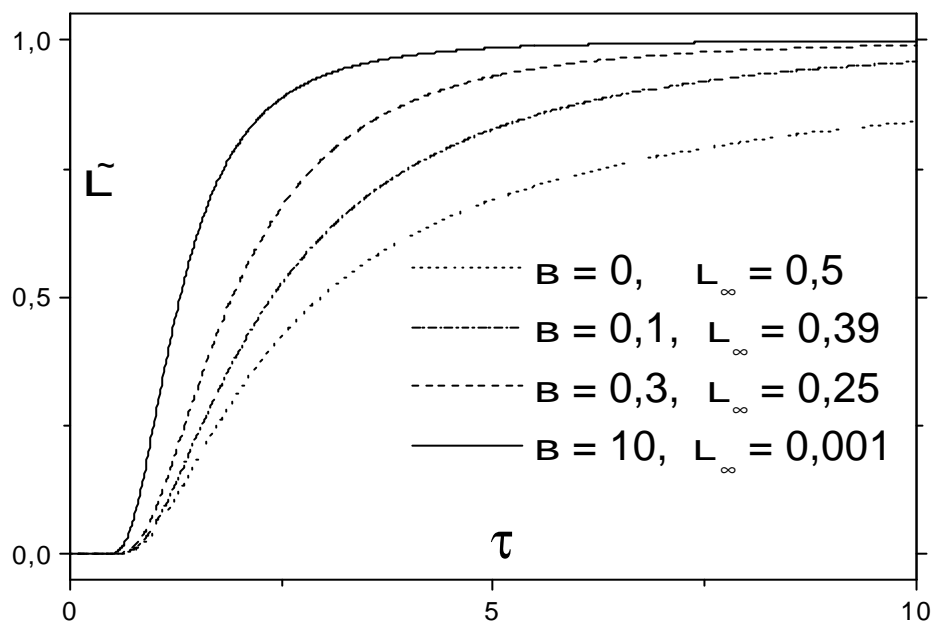


Figura 4.3: A probabilidade de transmissão normalizada,  $\tilde{L}(\zeta) = L(\zeta)/L_1$ , para pacotes iniciais com valores médios do momento nulos,  $p_0 = 0$ , para diferentes valores da intensidade adimensional do potencial-delta,  $B$  (da base para o topo): 0; 0,1; 0,3; 10.



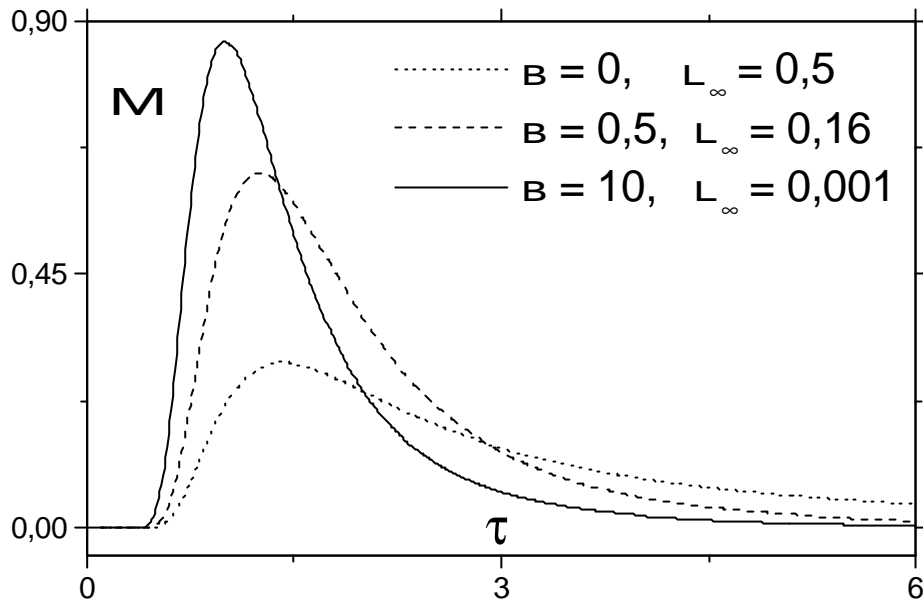


Figura 4.4: A densidade de probabilidade do tempo de transmissão,  $M(\zeta)$ ; para  $\rho_0 = 0$  e diferentes valores de  $B$ .

fazendo a substituição  $t = \zeta^2$  na integral. Ambos os modos conduzem ao mesmo resultado: desde que  $L_1 \gg B^2$ , o tempo de transmissão médio tenderá ao valor assintótico e constante  $\bar{\tau}_1 = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{h}{\rho_0}}$  para  $B \gg 1$  e  $\rho_0 = 0$ . Todavia, a integral (4.32) com a função (4.33) divergirá quando  $B \rightarrow 0$ , de maneira que  $\bar{\tau} = 1$  para o pacote livre com qualquer  $\rho_0$ . Poderíamos buscar uma explicação para tal comportamento no caso em que  $\rho_0 = 0$ , quando a função  $M(\zeta)$  se comporta de maneira mais ou menos diferente para  $B = 0$  e  $B \gg 1$  (veja-se a figura 4.4), mas não há explicação física razoável para a divergência do tempo de transmissão quando  $B \rightarrow 0$  para  $|\rho_0| \gg 1$ , situação em que os gráficos de  $M(\zeta)$  praticamente não dependem de  $B$ : veja-se a figura 4.5. Essa divergência parece um artefato matemático, indicando que a integral (4.32) não é, em verdade, uma boa medida do tempo de transmissão.

Por essas razões, é mais natural definir o tempo de transmissão como

$$T_{tr} = \frac{h}{\rho_0} \max_{0 < \zeta < 1} M(\zeta) \quad (4.35)$$

(uma definição similar para a extensão espacial dos pacotes foi usada em [130]), porque essa definição concorda com a estimativa usual da largura da distribuição normalizada,  $M(\zeta)$ , através da relação  $T_{tr} \zeta \max M = 1$ . Para  $\rho_0$  negativo e  $|\rho_0| \gg 1$ , o máximo da função (4.33) será atingido para  $\zeta_m \approx \frac{1}{4} |\rho_0|^{-1/2}$  (quando o argumento da exponencial se aproxima de zero),

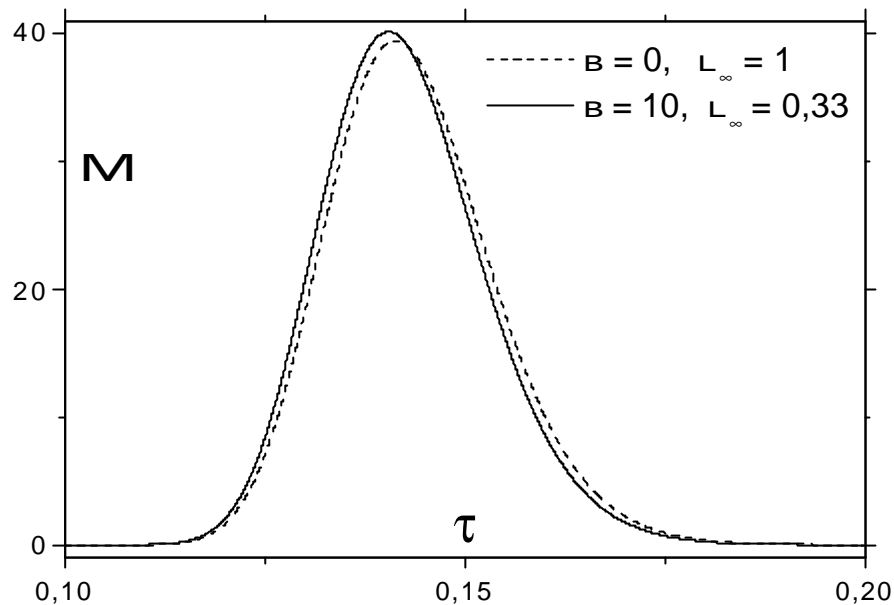


Figura 4.5: A densidade de probabilidade do tempo de transmissão,  $M(\zeta)$ ; para  $\rho_0 = \frac{1}{2}$  e diferentes valores de  $B$ .

e encontraremos  $T_{tr} \propto \frac{1}{\sqrt{1-2\rho_0^2}}$ , independentemente de  $B$ , isto é, a mesma dependência (exceto por um coeficiente numérico) de  $\rho_0$ . Para  $\rho_0 = 0$ , a mudança de  $B$  de 0 até 1 desloca a posição do máximo da função  $M(\zeta)$  de  $\zeta = \frac{1}{2}$  até  $\zeta = 1$  e diminui o tempo de transmissão,  $T_{tr}(B; \rho_0)$ , de  $T_{tr}(0; 0) = e^{\frac{1}{1-2\rho_0^2}}$  até  $T_{tr}(1; 0) = e^{\frac{1}{1-2\rho_0^2}}$  (aproximadamente três vezes).

#### 4.4 Potencial-delta dependente do tempo

Foi mostrado em [107] (seguindo as idéias de [152]) que o propagador (4.3) pode ser facilmente generalizado para o caso de uma dependência temporal da intensidade do potencial-delta do tipo

$$V(x; t) = \frac{Z_{\pm}(x)}{3(t)}; \quad 3(t) = 1 + \alpha t; \quad (4.36)$$

O propagador generalizado, em variáveis adimensionais (para retornar aos valores dimen-

sionais devemos usar as transformações (4.4) e a substituição  $\mu = -\nu$ , é dado por

$$G_Z^{(\mu)}(x; x^0; t) = G_0(x; x^0; t) \left[ \frac{Z}{2\mu} \operatorname{erfc} \frac{jxj + jx^0j^3 + Zit}{2it^3} \right. \\ \left. \pm \exp \frac{i\mu}{2^3} x^2 \pm x^{023} + \frac{Z}{3} \mu [jxj + jx^0j^3] + \frac{iZt}{2} \right]; \quad (4.37)$$

onde  $G_0(x; x^0; t)$  é o propagador para o espaço livre, dado pelo primeiro termo do lado direito da equação (4.3). A fórmula (4.37) valerá para  $0 < t < 1$  se  $\mu$  for positivo e para  $0 < t - t_c = |j\mu|^{-1}$  se  $\mu$  for negativo, porque no último caso a intensidade do potencial-delta se torna infinita no instante de tempo  $t_c$ , quando  $\phi(t_c) = 0$ , e não há uma maneira inequívoca de continuar as soluções para  $t > t_c$ . No instante crítico,  $t_c$ , podemos usar a fórmula assintótica (4.6) para obter uma expressão semelhante a (4.5), mas com algumas modificações:

$$G_{\pm}(x; x^0; t_c) = (2i\mu t_c)^{-1/2} \left( \exp \frac{i(x^0 - x)^2}{2t_c} \pm \frac{\mu}{Z t_c} \exp \frac{i(jx^0j + jxj)^2}{2t_c} \right); \quad (4.38)$$

Notemos que o fator pré-exponencial não depende do segundo argumento,  $x^0$ , do propagador (sobre o qual a integração na fórmula (4.2) é realizada).

Aplicando o propagador (4.37) ao estado inicial (4.7), obtemos a generalização da fórmula (4.10)

$$\tilde{A}(x; \zeta) = \frac{\mu}{\sqrt{4A^2}} \exp \left[ i \frac{-2}{A} (x - 1 + \mu\zeta)^2 + i \mu (2x - \mu\zeta) \right] \\ \pm \frac{B}{[3(1 + iA)]^{1/2}} \operatorname{erfc} \frac{-(1 + iA)jxj + B\zeta + 3(- + i\mu)}{[3(1 + iA)A]^{1/2}} \\ \pm \exp \frac{-jxj}{3} (2B + iA^{-1}jxj) + \frac{B^2\zeta}{3(1 + iA)} + \frac{2i\mu(- + B) + (2B - iA) \mu}{1 + iA} \zeta^2 \quad (4.39)$$

onde

$$\zeta = 1 + A^{-1}\zeta; \quad A = \mu s^2 = - \quad (4.40)$$

e as outras variáveis e parâmetros foram definidos em (4.9). Obviamente, o parâmetro  $\mu^{-1}$  significa o tempo de existência da barreira (para  $\mu > 0$ ), enquanto a quantidade  $\mu s^2 = -$  caracteriza o tempo de alargamento do pacote inicial. Portanto, ...caremos restritos ao estudo do caso em que  $|jA| \ll 1$  (de outro modo, o potencial-delta praticamente desaparece bem antes da parte principal do pacote alcançar o ponto  $x = 0$ ). O produto  $A^{-1} \gg \mu s x_c = -$  significa a razão entre o tempo necessário para alcançar a posição da barreira ( $x_c = v_s$ , onde a velocidade de alargamento é da ordem de  $\mu s$ ) e o tempo de existência da barreira, logo

é razoável admitir que  $jAj^-$  pode ser da ordem da unidade ou maior (de outra maneira, teremos praticamente o caso do potencial-delta estacionário). Suporemos que

$$A^- \ll 1; \quad \zeta \ll 1; \quad A^- \ll j\beta_0; \quad A^- \ll jB; \quad (4.41)$$

Consideremos primeiro o caso em que  $\mu$  é positivo. Trocando a função-erro complementar em (4.39) por sua forma assintótica (4.6) e levando em conta as restrições (4.41), verificamos que a densidade de probabilidade da parte transmitida do pacote (para  $x < 0$ ) pode ser expressa quase da mesma maneira que na equação (4.17), com a diferença de que os termos  $1 \pm x$  devem ser trocados por  $3(\zeta \pm x)$  no fator pré-exponencial (mas não no argumento da exponencial):

$$P^{(i)}(x; \zeta) \approx \frac{\mu}{\zeta^2} \frac{\Gamma_{1=2}}{\Gamma_{1=2}} \frac{(3 \pm x)^2}{(3 \pm x)^2 + \zeta^2 B^2} \exp \left[ -\frac{2}{\zeta^2} (x \pm 1 \pm \beta_0 \zeta)^2 \right]; \quad (4.42)$$

Em conseqüência, temos a seguinte generalização para a densidade de probabilidade do tempo de transmissão (fórmula (4.33)):

$$M(\zeta) = L_1^{-1} \frac{\mu}{\zeta^2} \frac{\Gamma_{1=2}}{\Gamma_{1=2}} \frac{3^2}{\zeta^2 (3^2 + B^2 \zeta^2)} \exp \left[ -\frac{2}{\zeta^2} (1 + \beta_0 \zeta)^2 \right]; \quad (4.43)$$

onde

$$L_1 = \frac{\mu}{\zeta^2} \int_0^\infty dy \frac{(y + A^-)^2}{(y + A^-)^2 + B^2} \exp \left[ -\frac{2}{\zeta^2} (y + \beta_0 \zeta)^2 \right]; \quad (4.44)$$

Se  $A^- \ll 1$  e  $\beta_0 = 0$ , então  $L_1 \approx \frac{1}{2} [1 + (B/A^-)^2]^{-1}$ . Na figura 4.6, mostramos a relação de dependência entre a razão  $T_{tr}(B) = T_{tr}(0)$  e  $B$  para alguns valores típicos dos parâmetros  $\beta_0$  e  $A^-$ . Vemos que em todos os casos essa razão decresce com o aumento da intensidade do potencial-delta,  $B$ , tendendo a valores assintóticos que não são nulos. Por sua vez, os valores assintóticos crescerão com o aumento do  $j\beta_0$  e de  $A^-$ , se aproximando do valor unitário quando um desses parâmetros se tornar suficientemente grande.

Para  $\mu$  negativo, é interessante analisar o que acontece no instante de tempo crítico e adimensional,  $\zeta = (-jAj)^{-1}$ , quando a "passagem" para trás do espelho se fecha. Sob as condições (4.41), a densidade de probabilidade de posição atrás do espelho ( $x < 0$ ) será dada por

$$P^{(i)}(x; \zeta) = (-jAj)^{-1} \frac{\mu}{\zeta^2} \frac{\Gamma_{1=2}}{\Gamma_{1=2}} \frac{x^2}{x^2 + B^2 \zeta^2} \exp \left[ -\frac{2}{\zeta^2} (-jAj)^2 (x \pm 1 \pm \beta_0 \zeta)^2 \right]; \quad (4.45)$$

O fator pré-exponencial é dependente da posição poderá ser trocado pela unidade se  $-jAj \gg B$ . Nesse caso, a probabilidade de transmissão derradeira será igual a

$$L(\zeta) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{-jAj + \beta_0}{\zeta} \right); \quad (4.46)$$

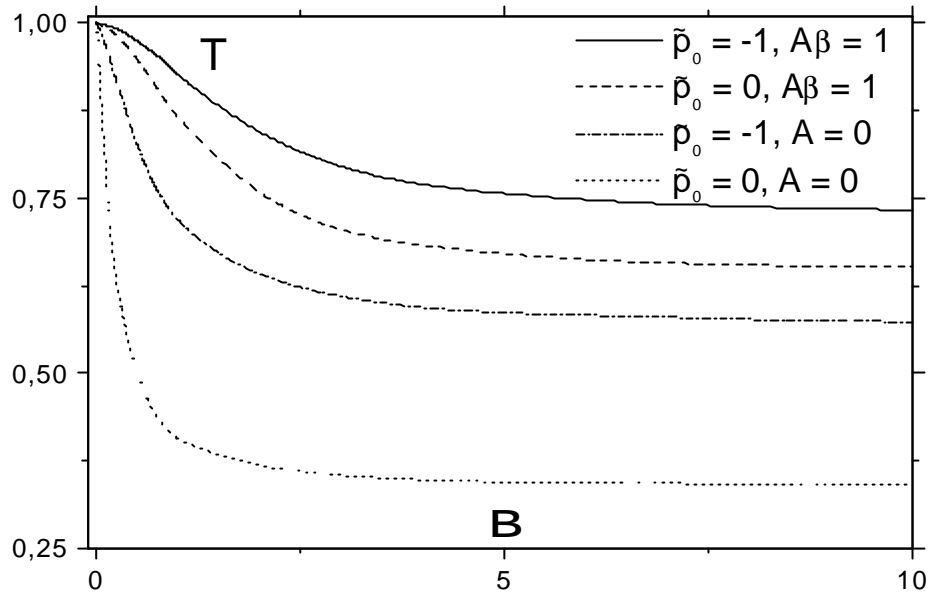


Figura 4.6: A razão  $T(B) = T_{tr}(B; \rho_0) = T_{tr}(0; \rho_0)$  contra  $B$  para  $\rho_0 = 0; \eta = 1$ . O parâmetro  $A^-$  caracteriza a taxa de decaimento da barreira.

Para a parte refletida do pacote, será interessante conhecer o valor assintótico (quando  $\eta \rightarrow 1$ , com  $A > 0$ ) do momento médio quando  $\rho_0 = 0$ . Sob as condições (4.41), ele poderá ser reduzido à integral

$$\langle \rho_1 \rangle \approx \frac{4B}{(2\eta)^{1-2}} \int_0^{\infty} \frac{dy (By + Ay^2) \exp(\eta - 2y^2)}{(A^- + y)^2 + (Ay + B)^2} \quad (4.47)$$

Devido à presença do fator exponencial no integrando, a contribuição principal à integral (4.47) é do domínio  $y < 2$ . Se  $B \gg 1$  (barreira inicial quase perfeitamente refletora) e  $A \ll B$ , então poderemos desprezar a variável  $y$  no denominador do integrando (retendo o fator  $A^-$ , o qual poderá ser grande) e o termo  $Ay^2$  no numerador. Após isso, a integral se tornará trivial e obteremos a expressão

$$\langle \rho_1 \rangle \approx \frac{1}{(2\eta)^{1-2}} \frac{1}{1 + (A^- = B)^2} \eta^a \quad (4.48)$$

onde aparece uma vez mais a combinação característica  $(A^- = B)^2$ .

## 4.5 Conclusão

Analisamos o problema da transmissão e da reflexão de pacotes, inicialmente estreitos e gaussianos, por potenciais do tipo delta de Dirac com intensidade constante e com específica dependência temporal. Obtivemos expressões analíticas e aproximadas para a densidade de probabilidade da posição atrás da barreira. Introduzimos duas funções que podem ser interpretadas como a densidade de probabilidade do tempo de transmissão e a probabilidade total de transmissão dependente do tempo. Usando essas funções, consideramos várias definições possíveis do tempo de transmissão e analisamos suas relações de dependência com os parâmetros do pacote inicial e do potencial. Qualitativamente, todas as definições conduzem à conclusão de que o tempo de transmissão diminui com o aumento da intensidade do potencial-delta. Contudo, esse efeito só será significativo para pacotes inicialmente lentos, sendo praticamente inobservável no caso de pacotes com momentos iniciais, grandes e negativos. Além disso, os tempos de transmissão não se reduzirão ilimitadamente, mas tenderão a valores assintóticos finitos quando a intensidade do potencial-delta for a infinito (caso em que a probabilidade total de transmissão vai a zero). cremos que a melhor definição do tempo de transmissão, no caso sob estudo, é o inverso da altura do máximo da densidade de probabilidade de transmissão.

# Capítulo 5

## Emaranhamento dos modos do campo numa cavidade oscilante

Neste capítulo, analisamos o emaranhamento dos modos do campo eletromagnético numa cavidade unidimensional com paredes móveis. Comparamos várias medidas do emaranhamento. Diferentes estados iniciais do campo eletromagnético são considerados.

### 5.1 Introdução

Durante a década passada, foi reconhecido que o conceito de emaranhamento, introduzido por Schrödinger em 1935 [153, 154], não é apenas um dos mais profundos em mecânica quântica (como foi mostrado no mesmo ano por Einstein, Podolsky e Rosen no famoso artigo [155], embora sem usar explicitamente essa palavra), mas é crucial para muitas promissoras aplicações novas tais como a criptografia quântica, a comunicação quântica, o teletransporte, a computação quântica, etc. Isso explica a recente explosão de interesse em vários problemas conectados a esse conceito. Um de tais problemas é a busca de medidas quantitativas do emaranhamento.

Na maioria dos casos, medidas baseadas em diferentes tipos de entropias foram consideradas [156]-[161]. Por exemplo, para um sistema consistindo das partes 1 e 2 e descrito pelo operador estatístico  $\rho_0$ , a medida do emaranhamento é frequentemente expressa em termos das entropias total e parcial como o índice de correlação [156]

$$I_c = S_1 + S_2 - S_0; \quad S_k = - \text{Tr}_k \rho_k \ln \rho_k; \quad (5.1)$$

onde o operador estatístico e reduzido é definido como  $\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho_0$ . Para estados puros, a fórmula (5.1) é reduzida a  $I_c = 2S_1 = 2S_2$ .

Entretanto, a despeito das muitas vantagens, medidas como (5.1) não são muito convenientes do ponto de vista prático: a ...m de calculá-las temos que diagonalizar os operadores estatísticos e reduzidos e esse é um problema razoavelmente difícil no caso genérico, especialmente para os espaços de Hilbert de dimensão infinita (correspondendo aos sistemas de variável contínua), exceto para poucos casos especiais e simples. Portanto, muitos autores procuraram outras medidas, as quais poderiam ser calculadas mais facilmente.

Em nosso trabalho, consideramos várias famílias de medidas simplificadas. A primeira é baseada nas noções de pureza,  $S^1 = \text{Tr} \rho^2$ , ou entropia linear,  $S^L = -\text{Tr} \rho \ln \rho$ . Diferentes medidas contendo essas quantidades foram propostas em [159]-[163]. Medidas baseadas na distância de Hilbert–Schmidt entre o estado dado e sua contrapartida desemaranhada foram propostas em [164, 165]. Medidas mais simples (embora não sendo universais) do emaranhamento de sistemas quânticos de variável contínua, expressas em termos das covariâncias cruzadas dos componentes de quadratura ou dos operadores de aniquilação e de criação, foram introduzidas recentemente em [166, 167]. Essas medidas são discutidas na seção 5.2.

Uma das numerosas aplicações possíveis das medidas do emaranhamento é a caracterização quantitativa e compacta da evolução de sistemas quânticos e acoplados. Começamos esses estudos em [166], onde dois osciladores harmônicos com frequências constantes, mas com acoplamento geral, ressonante e dependente do tempo, foram considerados. O objetivo do presente trabalho é comparar diferentes medidas no caso em que os modos do campo na cavidade estão emaranhados devido ao movimento de sua fronteira (a razão física desse emaranhamento é o efeito Doppler). Tal caso pode ser reduzido aos modelos de dois ou mais osciladores com acoplamento (do tipo posição–momento) e frequências dependentes do tempo.

Uma cavidade unidimensional é considerada na seção 5.3. Nesse caso, todos os modos são acoplados devido à equidistância do espectro (imperturbado) das autofrequências do campo. Foi descoberto em [168] que a evolução do campo nas cavidades tri e unidimensional é qualitativamente diferente. Por exemplo, na tridimensional o número de fótons nos modos ressonantes cresce exponencialmente no tempo, enquanto no caso unidimensional esse crescimento é apenas linear. Foi apontado em [168] que o crescimento do número de fótons na cavidade unidimensional é desacelerado devido à forte interação entre os modos, que é equivalente, nesse caso, ao emaranhamento. Agora somos capazes de caracterizar quantitativamente tal emaranhamento. Os resultados de nosso estudo são discutidos na seção 5.4.



## 5.2 Medidas emaranhamento-pureza, emaranhamento-covariância e emaranhamento-distância

### 5.2.1 Medida emaranhamento-pureza

Raciocinando por analogia com a definição (5.1), a entropia linear do emaranhamento pode ser definida como

$$L = S_1^L + S_2^L; \quad S_0^L = 1 + \text{Tr} \rho_1^2; \quad \text{Tr} \rho_1^2; \quad \text{Tr} \rho_2^2. \quad (5.2)$$

Tal definição parecerá razoável se o sistema global estiver num estado puro. Então,  $\text{Tr} \rho_1^2 = 1$  e  $\text{Tr} \rho_1^2 = \text{Tr} \rho_2^2$ , de modo que  $L = 2S_1^L = 2S_2^L$ . Em verdade, apenas esse caso foi considerado nos estudos anteriores [162, 163], onde medidas do emaranhamento foram identificadas com a entropia linear do estado de um subsistema ou com quantidades equivalentes, tais como a pureza, a razão de participação,  $1 - \text{Tr} \rho_k^2$ , ou a entropia de Renyi,  $S^R = -\ln \text{Tr} \rho_k^2$ .

Contudo, se o estado do sistema total for misto, a definição (5.2) conduzirá a consequências inesperadas. Consideremos, por exemplo, um estado gaussiano e genérico, de dois modos, descrito pela função de Wigner (supomos que  $\hbar = 1$  neste trabalho)

$$W(q) = \frac{1}{\sqrt{\det(Q)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (q - hq) Q^{-1} (q - hq) \right]; \quad \int W(q) dq = (2\pi)^2 = 1; \quad (5.3)$$

onde  $q = (x_1; p_1; x_2; p_2)$  e a matriz de covariância,  $Q$ , simétrica e  $4 \times 4$ , consiste de blocos  $2 \times 2$

$$Q = k q \otimes k = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & Q_{11} & Q_{12} & \circ \\ \circ & Q_{21} & Q_{22} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}; \quad Q_{11} = Q_{11}; \quad Q_{22} = Q_{22}; \quad Q_{12} = Q_{21} \quad (5.4)$$

(um til sobre  $Q_{ij}$  significa matriz transposta).

As covariâncias simétricas e reais são definidas como

$$q \otimes q = \frac{1}{2} (q \otimes q + q \otimes q) = q \otimes q; \quad \overline{ab} = \frac{1}{2} (ab + ba) \quad (5.5)$$

(ou seja, um segmento de reta sobre o produto de dois observáveis indica a média ordenada, enquanto um grande til indica a média simetrizada). Então,

$$1 = \text{Tr} \rho^2 = \int [W(q)]^2 dq = (2\pi)^2 = [\det(2Q)]^{-1}: \quad (5.6)$$

Para estados fatorados (desemaranhados),  $Q_{12} = 0$ , por conseguinte  $\det Q = \det Q_{11} \det Q_{22}$  e  $1 = 1_1 1_2$ , resultando nas relações

$$L_{\text{fat}} = 1 + 1_1 1_2 = (1 + 1_1) (1 + 1_2):$$

Portanto, para estados mistos ( $\rho < 1$ ) poderemos encontrar a situação em que  $L > 0$  na ausência de qualquer emaranhamento, se  $\rho_1 \in [0, 1]$  e  $\rho_2 \in [0, 1]$ .

Parece melhor usar a diferença  $L_{\text{m}} = L - L_{\text{fat}} = \rho - \rho_1 \rho_2$ . Porém, ela tenderá a zero quando  $\rho \rightarrow 0$ . Por essa razão, introduzimos o coeficiente emaranhamento-pureza normalizado

$$\mathcal{E} = \rho - \rho_1 \rho_2 \quad (5.7)$$

Para estados gaussianos, (5.3), ele pode ser escrito como

$$\mathcal{E} = \rho - \rho_1 \rho_2 = \rho \frac{\det Q}{\det Q_{11} \det Q_{22}} = \rho \frac{\det \begin{pmatrix} E & Q_{12} \\ Q_{21} & E \end{pmatrix}}{\det Q_{11} \det Q_{22}} \quad (5.8)$$

A segunda igualdade (onde  $E$  indica a matriz-identidade) é obtida com a ajuda da fórmula para o determinante de uma matriz-bloco [169]

$$\det Q = \det \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \det Q_{11} \det \begin{pmatrix} E & Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det Q_{11} \det Q_{22}$$

Em particular, para estados puros ( $\rho = 1$ ), temos

$$\mathcal{E} = \rho - \rho_1 \rho_2 = 1 - \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{4} L(4 - L) \quad (5.9)$$

Uma medida do emaranhamento entre dois modos acoplados, parecida com (5.8), foi introduzida em [170] (onde a denominaram de coeficiente de correlação de grupo):

$$K^2 = \rho - \rho_1 \rho_2 = \frac{\det Q}{\det Q_{11} \det Q_{22}} = \mathcal{E} \quad (5.10)$$

Teoricamente, as medidas (5.8) e (5.10) podem ser usadas para estados arbitrários (não apenas gaussianos), embora, às vezes, elas forneçam um valor nulo mesmo para estados emaranhados (quando a matriz das variâncias de segunda ordem for fatorada, mas existir correlação entre os modos para os momentos de mais elevada ordem). Poderíamos usar também, ao invés de (5.7), a seguinte extensão da fórmula (5.10) para estados arbitrários:

$$\mathcal{E}^2 = \rho - \rho_1 \rho_2 \quad (5.11)$$

## 5.2.2 Medida emaranhamento-distância

Outra possibilidade para caracterizar o emaranhamento é usar a distância de Hilbert-Schmidt entre o estado dado e diferentes estados desemaranhados. Ela foi considerada, por exemplo, em [159, 164, 165] (tratamento análogo foi desenvolvido em [171] para determinar o

quanto são “não-clássicos” os estados). Em [165], a medida do emaranhamento foi definida como  $\text{Tr}(\rho_1 - \rho_2)^2$ . Entretanto, preferimos normalizá-la dividindo por  $\text{Tr}\rho^2$ , a fim de que a medida do emaranhamento não vá a zero para estados mistos. Então, consideraremos a seguinte quantidade:

$$Z = \frac{\text{Tr}(\rho_1 - \rho_2)^2}{\text{Tr}\rho^2} = 1 + \frac{1}{1} \frac{\text{Tr}(\rho_1 - \rho_2)}{\text{Tr}\rho} : \quad (5.12)$$

Para quaisquer estados  $\rho$  e  $\hat{R}$ ; temos (o fator de normalização corresponde aqui ao caso bimodal)

$$\text{Tr}(\rho \hat{R}) = \int W_{\rho}(q) W_{\hat{R}}(q) dq = (2\pi)^2 : \quad (5.13)$$

Para os estados gaussianos, (5.3), as integrais podem ser calculadas com a ajuda da fórmula

$$\int \exp(i q A q + b q) dq = [\det(A)]^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{4} b A^{-1} b\right) : \quad (5.14)$$

A matriz inversa,  $Q^{-1}$ , pode ser representada em forma de bloco com o auxílio da fórmula de Frobenius [169]

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{-1} + Q_{11}^{-1} Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21} Q_{11}^{-1} & -Q_{11}^{-1} Q_{12} Q_{22}^{-1} \\ -Q_{22}^{-1} Q_{21} Q_{11}^{-1} & Q_{22}^{-1} \end{pmatrix} ; \quad (5.15)$$

$$Q_{\alpha} = Q_{22} - Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12} :$$

Levando em conta as equações (5.3), (5.4), (5.14) e (5.15), podemos verificar que a função de Wigner do estado fatorado  $\rho_1 - \rho_2$  é dada pela fórmula (5.3) com a matriz-bloco diagonal

$$Q_d = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} ;$$

onde as matrizes  $Q_{11}$  e  $Q_{22}$  são as mesmas que aparecem em (5.4). Então, chegamos à seguinte expressão para a medida  $Z$  (equivalente, exceto pelo fator de normalização  $(2\pi)^2$ , ao resultado dado em [165], mas escrito em forma explícita mais simples):

$$Z = 1 + \frac{\det Q}{\det Q_{11} \det Q_{22}} = 2 \frac{\det(2Q)}{\det Q_z} ; \quad Q_z = Q + Q_d = \begin{pmatrix} 2Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & 2Q_{22} \end{pmatrix} : \quad (5.16)$$

### 5.2.3 Medida emaranhamento-covariância

Outras medidas do emaranhamento foram introduzidas recentemente em [166, 167]. Elas são expressas diretamente em termos das covariâncias cruzadas dos componentes de

quadratura ou dos equivalentes operadores de aniquilação e de criação assim:

$$Y = \frac{\text{Tr}(Q_{12}Q_{21})^{-1=2}}{\text{Tr}Q_{11}\text{Tr}Q_{22}} \quad (5.17)$$

$$= \frac{4 \frac{\overline{j a_1 a_2^y j^2} + \overline{j a_1 a_2 j^2}}{2 \overline{a_1^y a_1} + 1=2} \cdot 5}{4 E_1 E_2} = \frac{(\overline{x_1 x_2})^2 + (\overline{p_1 p_2})^2 + (\overline{x_1 p_2})^2 + (\overline{p_1 x_2})^2}{4 E_1 E_2} ;$$

$$Y = \frac{2 \overline{\text{Tr}(Q_{12}Q_{21})}}{\text{Tr}Q} = \frac{2 \overline{j a_1 a_2^y j^2} + \overline{j a_1 a_2 j^2}}{\overline{a_1^y a_1} + \overline{a_2^y a_2} + 1} = \frac{(\overline{x_1 x_2})^2 + (\overline{p_1 p_2})^2 + (\overline{x_1 p_2})^2 + (\overline{p_1 x_2})^2}{E_1 + E_2} ; \quad (5.18)$$

onde (usamos variáveis de quadratura adimensionais e apropriadamente normalizadas)

$$\hat{a}_k = (\hat{x}_k + i\hat{p}_k) = \frac{\overline{p_k}}{2}; \quad E_k = \overline{a_k^y a_k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\overline{x_k x_k} + \overline{p_k p_k}); \quad k = 1; 2; \quad (5.19)$$

Desde que os coeficientes (5.17) e (5.18) estão expressos em termos de traços de produtos dos blocos fora da diagonal da matriz de covariância total, Q, eles são obviamente invariantes em relação à rotações no plano de fase de cada subsistema. (Outra quantidade invariante, o determinante dos blocos fora da diagonal,  $\det Q_{12}$ , desempenha um papel importante no problema da separabilidade de sistemas de variáveis contínuas [172]). Podemos mostrar que  $0 \leq Y \leq 1$ .

Desejamos enfatizar que os coeficientes Y e Y são definidos para quaisquer (não apenas gaussianos) estados quânticos. Eles são significativamente mais simples do que outras medidas do emaranhamento do ponto de vista dos cálculos (calcular traços de matrizes é muito mais fácil do que calcular determinantes, sem falar no cálculo dos autovalores dos operadores ou matrizes-densidade, os quais são necessários para obter as medidas entrópicas). Uma desvantagem dos coeficientes Y e Y é que em alguns casos eles serão iguais a zero mesmo quando o estado for emaranhado (mas com momentos de segunda ordem dos componentes de quadratura nulos). Todavia, isso não acontecerá para estados gaussianos e para muitos outros importantes estados quânticos.

## 5.2.4 Medidas entrópicas para estados gaussianos

Para demonstrar como são simples as expressões dadas nas subseções precedentes em comparação com a usual medida entrópica, (5.1), damos aqui a fórmula para a entropia de um estado gaussiano e genérico. É determinada também pela matriz de covariância, mas de modo mais complicado do que os coeficientes considerados acima. Para um estado gaussiano

e arbitrário de N modos, a entropia foi encontrada em diferentes (mas equivalentes) formas em [173, 174] e recentemente em [175]. A expressão mais simples é [176]

$$S_N = -k_B \sum_{j=1}^N \left( \lambda_j + 1 \right) \ln \left( \lambda_j + 1 \right) - \lambda_j \ln \lambda_j; \quad (5.20)$$

onde  $\lambda_j = 1 + \beta \epsilon_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) são N autovalores positivos da matriz X, que é a razão entre a matriz de covariância simétrica, Q, e a matriz-comutador anti-simétrica:

$$X = Q^{-1}; \quad Q_{jk} = \frac{1}{2}(\hbar q_j q_k + q_k q_j); \quad -i_{jk} = \hbar q_j q_k - q_k q_j; \quad (5.21)$$

Poderemos verificar que se  $\lambda_j$  for um autovalor de X, então  $\lambda_j^{-1}$  será outro autovalor. Outrossim, podemos mostrar que todos os autovalores de X são reais. É importante enfatizar que a fórmula (5.20) é válida para conjuntos arbitrários de operadores com comutadores que são números complexos (posições e momentos canônicos, operadores de criação e de aniquilação, momentos cinéticos e posições relativas para partículas se movendo em campos magnéticos e homogêneos, etc.).

No caso monomodal, os autovalores da matriz X são iguais a  $\beta \epsilon_j$  (e  $X^2 = \beta^2 E_2$ , onde  $E_2$  é a matriz-idade  $2 \times 2$ ) e

$$\lambda_j = 1 + \beta \epsilon_j; \quad \det Q = \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\epsilon_j \epsilon_k - \epsilon_k \epsilon_j)^2 = \det Q; \quad (5.22)$$

(A última desigualdade é a relação de incerteza de Schrödinger–Robertson [42]-[44].) Nesse caso, diferentes expressões equivalentes à forma (5.20) foram encontradas em [173, 177, 178].

Calculando o polinômio característico da matriz X ( $4 \times 4$ ) no caso bimodal, chegamos à equação biquadrada (para  $\beta = 1$ ) [174]

$$D_2^2 + D_0 = 0; \quad (5.23)$$

onde os coeficientes  $D_2$  e  $D_0$  são os invariantes quânticos e universais, isto é, funções que são invariantes em relação às transformações canônicas, lineares e arbitrárias (preservando as relações de comutação) [179]:

$$D_2 = \Phi_1 + \Phi_2 + 2(\overline{x_1 x_2} \overline{p_1 p_2} - \overline{p_1 x_2} \overline{p_2 x_1}); \quad (5.24)$$

$$D_0^{(2)} = \det Q = \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\epsilon_j \epsilon_k - \epsilon_k \epsilon_j)^2 + (\overline{x_1 p_1} \overline{x_2 p_2} - \overline{x_1 p_2} \overline{x_2 p_1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\overline{x_1 p_2} \overline{x_2 p_1} - \overline{x_2 p_1} \overline{x_1 p_2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\overline{x_1 p_1} \overline{x_2 p_2} - \overline{x_2 p_2} \overline{x_1 p_1})^2 + 2 \overline{x_1 x_2} \overline{p_1 p_2} - \overline{p_1 x_2} \overline{p_2 x_1} + 2 \overline{p_1 p_2} \overline{x_2 x_1} - \overline{x_2 p_1} \overline{x_1 p_2} + \overline{x_1^2} \overline{x_2^2} \overline{p_1^2} \overline{p_2^2} + 2 \overline{x_1 x_2} \overline{p_1 p_2} (\overline{x_1 p_1} \overline{x_2 p_2} + \overline{x_1 p_2} \overline{x_2 p_1}); \quad (5.25)$$

O símbolo  $\Phi_k$  significa a combinação definida em (5.22) e relacionada ao k-ésimo modo.

As soluções positivas da equação (5.23) são

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{D_2 + 2\sqrt{D_0}} \pm \sqrt{D_2 - 2\sqrt{D_0}} \right) \quad (5.26)$$

As desigualdades a seguir garantem que  $\omega_{\pm}$  é real:

$$D_2 \geq 2\sqrt{D_0} \quad (5.27)$$

e elas podem ser consideradas relações de incerteza generalizadas para sistemas bimodais (para estudos sistemáticos de tais generalizações veja-se [44, 180]).

As fórmulas (5.20), (5.22) e (5.26) nos permitem expressar o índice de correlação entrópico, (5.1), analiticamente em termos das covariâncias dos componentes de quadratura para estados gaussianos e arbitrários. Todavia, a expressão correspondente é muito mais complicada do que qualquer outra medida do emaranhamento discutida nas subseções precedentes.

Na próxima seção, compararemos o comportamento de diferentes medidas do emaranhamento para um modelo físico.

### 5.3 Caverna de Fabry-Perot com uma fronteira oscilante

Fenômenos quânticos e clássicos em cavernas com fronteiras móveis atraem a atenção de numerosos pesquisadores há muito tempo (consulte-se a revisão [181]). Esse tópico se tornou bastante popular na última década, sendo conhecido sob os nomes efeito Casimir não-estacionário [182], efeito Casimir dinâmico [183], ou radiação induzida pelo (movimento do) espelho [184, 185]. Um dos vários resultados teóricos obtidos nos últimos anos foi a previsão do crescimento exponencial da energia do campo sob a condição de ressonância, quando a parede executa vibrações com frequência igual a um múltiplo da autofrequência imperturbada do campo [168, 185, 186].

Uma descrição unificada do campo dentro de uma caverna ideal com fronteiras móveis pode ser obtida com base no tratamento hamiltoniano proposto por Law [186] e desenvolvido em [187] (para outras referências, veja-se [181], e para as mais recentes publicações examine-se [188]-[190]).

O problema do campo escalar, sem massa, numa caverna unidimensional composta por duas placas infinitas e ideais cujas posições são dadas por  $x_{\text{esquerda}} \leq 0$  e

$$x_{\text{direita}} = L(t) = L_0 (1 + \epsilon \sin[p|_1 t]); \quad |j| \leq 1; \quad |_1 = \frac{1}{2}c=L_0; \quad p = 1; 2; \dots \quad (5.28)$$

foi resolvido em [191]. Um componente do operador-potencial vetorial do campo eletromagnético,  $\hat{A}(x; t)$ ; na representação de Heisenberg, pode ser escrito como

$$\hat{A}(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\rho_n} \mathbf{h} \hat{b}_n \tilde{A}^{(n)}(x; t) + \text{c.h.}; \quad \mathbf{h} \hat{b}_n; \hat{b}_k^y = \pm n_k; \quad (5.29)$$

onde

$$\tilde{A}^{(n)}(x; t) = \frac{L_0}{L(t)} \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{2} k x \cdot \frac{1}{L(t)} \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_k^{(n)}(\zeta) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_k^{(n)}(\zeta) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}; \quad (5.30)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}; \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1; \quad (5.31)$$

O fator de normalização  $2 = \frac{L_0}{L(t)}$  em (5.29) foi escolhido de maneira que a energia do campo no caso estacionário pode ser representada como a soma das energias dos osciladores independentes de cada modo. Os coeficientes  $\frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_k^{(n)}(\zeta)$  satisfazem a um sistema infinito de equações acopladas ( $k = 1; 2; \dots; n = 1; 2; \dots$ )

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_k^{(n)} = \frac{1}{2} \mathbf{h} (k+p) \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_{k+p}^{(n)} - \frac{1}{2} \mathbf{h} (k-p) \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_{k-p}^{(n)}; \quad \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_k^{(n)}(\zeta) = (k-1)^p; \quad (5.32)$$

que foi resolvido em [191] (aqui ...caremos restritos ao caso mais simples das soluções encontradas em [191], correspondendo à ressonância estrita).

Devido às condições iniciais  $\frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_k^{(n)}(0) = \pm n_k$ , as soluções de (5.32) satisfarão à relação  $\frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_{j+mp}^{(k+np)} = 0$  se  $j \neq k$ . Os coeficientes não-nulos  $\frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(n)}$  são [191]

$$\frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_{j+mp}^{(j+np)}(\zeta) = \frac{j(1+n+j-p) \left(\frac{1}{2}\right)^{n_i m}}{i(1+m+j-p) i(1+n_i m)} F \left( \begin{matrix} i \\ i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n+j-p; i \\ m; j-p; 1+n; i \end{matrix} \middle| \zeta \right); \quad (5.33)$$

onde

$$F(a; b; c; z) = \tanh(p\zeta) \quad (5.34)$$

e  $F(a; b; c; z)$  é a função hipergeométrica de Gauss. As funções (5.33) são soluções exatas do conjunto de equações (5.32) relacionando os coeficientes com diferentes índices inferiores. Além disso, essas funções satisfazem a outro conjunto de equações, as quais são as relações de recorrência com respeito aos índices superiores, [191]

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(n)} = n \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(n-1)} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(n+p)}; \quad n \geq p; \quad \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(0)} = 0 \quad (5.35)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(n)} = n \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(p+n)} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \hat{b}_m^{(p+n)}; \quad n = 1; 2; \dots; p; i \quad (5.36)$$

Em consequência das equações (5.32), (5.35) e (5.36), temos as identidades

$$\sum_{m=i-1}^{\infty} m \frac{1}{2} \alpha_m^{(n)} \frac{1}{2} \alpha_m^{(k)} = n \pm n_k; \quad n; k = 1; 2; \dots \quad (5.37)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} \frac{1}{2} \alpha_m^{(n)} \frac{1}{2} \alpha_j^{(n)} = \pm n_{mj}; \quad m; j = 1; 2; \dots \quad (5.38)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2} \alpha_m^{(n)} \frac{1}{2} \alpha_j^{(n)} = 0; \quad m; j = 1; 2; \dots \quad (5.39)$$

Supomos que após algum intervalo de tempo  $T$  a parede retorna à sua posição inicial,  $L_0$ . Para  $t \geq T$ , o operador-campo assume a forma

$$\hat{A}(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(\frac{1}{2} n x = L_0) \hat{a}_n e^{i(\omega_n t - kx)} + c.h. \quad (5.40)$$

onde os operadores  $\hat{a}_m$  estão relacionados aos operadores iniciais  $\hat{b}_n$  e  $\hat{b}_n^y$  através da transformação de Bogoliubov ( $t_T \leftarrow \frac{1}{2} \omega T$ )

$$\hat{a}_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n} \frac{1}{2} \hat{b}_n \frac{1}{2} \alpha_m^{(n)}(t_T) + \frac{i}{n} \hat{b}_n^y \frac{1}{2} \alpha_m^{(n)}(t_T); \quad m = 1; 2; \dots \quad (5.41)$$

As relações de comutação  $\hat{a}_n; \hat{a}_k^y = \pm n_k$  continuam valendo devido às identidades (5.37)-(5.39), as quais são as condições para que a transformação (5.41) seja unitária. Essas relações, junto com a expressão para a energia do campo

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{L_0} dx \left[ 4 \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \right]^2 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \hat{a}_n^y \hat{a}_n + \frac{1}{2} \dots \quad (5.42)$$

nos convencem de que  $\hat{a}_n$  e  $\hat{a}_n^y$  são os verdadeiros operadores de aniquilação e de criação de fótons para  $t \geq T$ .

### 5.3.1 Emaranhamento no caso da ressonância paramétrica ( $p = 2$ )

Nosso primeiro objetivo é calcular os coeficientes de emaranhamento entre os diferentes modos no caso da ressonância paramétrica,  $p = 2$ . Se o estado inicial do campo na cavidade for o vácuo, em relação aos operadores iniciais,  $\hat{b}_n$ , teremos:  $\hat{b}_n |0\rangle = 0$  (estamos usando a representação de Heisenberg). Então, o coeficiente emaranhamento-covariância entre o  $r$ -ésimo e o  $s$ -ésimo modos será

$$Y_{r;s} = \frac{2}{4} \frac{j \hbar \hat{a}_r \hat{a}_s + j \hbar \hat{a}_r^y \hat{a}_s^y}{2 \hbar \hat{a}_r^y \hat{a}_r + 1 = 2 \quad \hbar \hat{a}_s^y \hat{a}_s + 1 = 2} \quad (5.43)$$



Usando (5.41), podemos expressar os valores médios contidos na fórmula (5.43) como (supomos, aqui e no que segue, que  $i_1 = 1$ )

$$h_{r,s}^{\alpha} i = i \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2}_r^{(n)} \frac{1}{2}_s^{(n)\alpha} = i \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2}_s^{(n)} \frac{1}{2}_r^{(n)\alpha}; \quad (5.44)$$

$$h_{r,s}^{\beta} i = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2}_i^{(n)} \frac{1}{2}_i^{(n)\alpha}; \quad h_{r,r}^{\beta} i = r \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2}_i^{(n)-2}; \quad (5.45)$$

onde os coeficientes  $\frac{1}{2}_{sm}^{(n)}$  devem ser tomados no momento T, quando o argumento deles é  $\zeta_T$ . Estritamente, as expressões (5.44) e (5.45) têm significado físico só naqueles momentos de tempo T em que a parede retorna à sua posição inicial, isto é, para  $T = N\tau = p$ , sendo N um inteiro. Por conseguinte, o argumento  $\zeta_T$  dos coeficientes  $\frac{1}{2}_{sm}^{(n)}$  em (5.44) e (5.45) assume valores discretos  $\zeta^{(N)} = N\tau = (2p)$ . Devemos lembrar, contudo, que fenômenos interessantes ocorrem para  $\zeta \gg 1$  (ou maior). Então,  $N \gg \tau^{-1} \gg 1$  e o incremento mínimo,  $\tau \ll 1$ , é tão pequeno que  $\zeta_T$  pode ser tratado como uma variável contínua (sob condições realistas,  $\tau \approx 10^{-8}$  [168]). Por essa razão, omitimos o índice T e escrevemos apenas  $\zeta$  ao invés de  $\zeta_T$  ou  $\zeta^{(N)}$ .

Derivando as equações (5.44) e (5.45) em relação ao tempo lento,  $\zeta$ , podemos remover a fração  $1/n$  com a ajuda das relações de recorrência (5.35) e (5.36). Depois, mudando quando necessário o índice de soma n para  $n \leq p$ , podemos verificar que quase todos os termos dos lados direitos são cancelados e as séries infinitas reduzidas a somas finitas. Para  $p = 2$ , obtemos as equações (levando em conta que todas as funções  $\frac{1}{2}_m^{(n)}$  são reais no caso da ressonância estrita, de acordo com a equação (5.33))

$$dh_{r,s}^{\alpha} i = d\zeta = i \prod_{rs} \frac{h}{2}_r^{(1)} \frac{1}{2}_s^{(1)} + \frac{1}{2}_i^{(1)} \frac{1}{2}_s^{(1)} i; \quad (5.46)$$

$$dh_{r,s}^{\beta} i = d\zeta = \prod_{rs} \frac{h}{2}_r^{(1)} \frac{1}{2}_s^{(1)} + \frac{1}{2}_i^{(1)} \frac{1}{2}_s^{(1)} i; \quad dh_{r,r}^{\beta} i = d\zeta = 2r \frac{1}{2}_r^{(1)} \frac{1}{2}_r^{(1)}; \quad (5.47)$$

Para  $p = 2$ , apenas os modos ímpares podem ser excitados a partir do estado de vácuo inicial. Nesse caso, as funções hipergeométricas na fórmula (5.33), com  $j = 1$ , são reduzidas à combinações das integrais elípticas e completas do primeiro e do segundo tipos [191]

$$K(\zeta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - \zeta \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} F \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \zeta \right);$$

$$E(\zeta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - \zeta \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} F \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; -\zeta \right);$$

de maneira que as equações (5.46) e (5.47) podem ser integradas analiticamente para quaisquer valores de r e s: veja-se [191, 192] ou as duas subseções seguintes para os detalhes

técnicos. Em especial, para os primeiros modos

$$h\hat{a}_1^2 i = \frac{2}{\frac{1}{4}^2} \mathbb{F}^{-2} K^2 i \quad 2EK + E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.48)$$

$$h\hat{a}_3^2 i = \frac{2}{\frac{9}{4}^2} \mathbb{F}^{-2} (4 i^2) K^2 i \quad 2(2^4 i^3 + 4)EK + (4^4 i^2 + 4)E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.49)$$

$$h\hat{a}_1 \hat{a}_3 i = i \frac{2^{\mathbb{P}_3}}{\frac{3}{4}^2} \mathbb{F}^{-2} K^2 i \quad 2EK + i_{1+2}^{\mathbb{C}} E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.50)$$

$$h\hat{a}_1^y \hat{a}_3 i = \frac{2^{\mathbb{P}_3}}{\frac{1}{4}^2} \frac{1}{3} K^2 + \frac{2}{3} (i^2 i^2) EK + E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.51)$$

$$h\hat{a}_1 \hat{a}_5 i = \frac{2^{\mathbb{P}_5}}{45 \frac{1}{4}^2} \mathbb{F}^{-2} (i^2 + 8) K^2 i \quad 2(4^4 + 8)EK + (8^4 + 7^2 + 8)E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.52)$$

$$h\hat{a}_1^y \hat{a}_5 i = i \frac{2^{\mathbb{P}_5}}{\frac{3}{4}^2} \frac{1}{5} (2^2 + 1) K^2 + \frac{2}{5} (2^4 i^2 i^2 i^3) EK + (i^2 + 1)E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.53)$$

$$h\hat{a}_3 \hat{a}_5 i = \frac{2^{\mathbb{P}_{15}}}{45 \frac{1}{4}^2} \mathbb{F}^{-2} (i^2 + 2)(i^2 i^2) K^2 + 2(2^6 i^4 i^2 + 4)EK \\ i^4 (i^2 + 1)(4^4 i^2 + 1)E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.54)$$

$$h\hat{a}_3^y \hat{a}_5 i = \frac{2^{\mathbb{P}_{15}}}{45 \frac{1}{4}^2} \mathbb{F}^{-2} (7^2 i^4) K^2 + 2(8^4 i^{15} + 4)EK \quad i (4^4 i^{19} + 4)E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.55)$$

$$E_1 = \frac{2}{\frac{1}{4}^2} K^i \quad 2E_i \quad i^{-2} K^{\mathbb{C}}; \quad (5.56)$$

$$E_3 = \frac{2}{\frac{3}{4}^2} \mathbb{F} i^3 i^2 i^2 \quad i^{\mathbb{C}} K^i \quad 2E_i \quad i^{-2} K^{\mathbb{C}} + 2 i_{1+2}^{\mathbb{C}} E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.57)$$

$$E_5 = i \frac{2}{45 \frac{1}{4}^2} \mathbb{F}^{-2} (47^4 i^{30} i^8) K^2 + 2(4^6 i^{47} + 26^2 + 8)EK \\ i^2 (i^2 + 1)(4^4 + 11^2 + 4)E^{2^{\mathbb{N}}}; \quad (5.58)$$

onde  $\sim \frac{\mathbb{P}_{1j}}{1j^2}$  e usamos  $E_r = h\hat{a}_r^y \hat{a}_r i + 1 = 2$ .

Na Figura 5.1, mostramos  $Y_{1;3}$  e  $Y_{3;5}$ : Vemos que o emaranhamento é mais forte para os primeiros modos. Entretanto, para qualquer par  $r; s$  o coeficiente  $Y_{r;s}$  tenderá assintoticamente a 1 quando  $i \rightarrow \infty$ . Para provar essa propriedade, devemos usar as formas assintóticas dos coeficientes  $\frac{1}{2}_m^{(n)}$  para  $i \rightarrow \infty$ , isto é, para  $n \rightarrow \infty$ . Trocando as funções hipergeométricas, (5.33), por seus valores quando o argumento vale 1 [31],

$$F(a; b; a + b + 1; 1) = \frac{i(a + b + 1)}{i(a + 1)i(b + 1)};$$

obtemos a seguinte fórmula assintótica (veja-se também [192]):

$$\frac{1}{2}_{2m+1}^{(1)}(i) = \frac{1}{2}_{i-2m+1}^{(1)}(i) = \frac{2(i-1)^m}{\frac{1}{4}(2m+1)}; \quad i \rightarrow \infty; \quad (5.59)$$

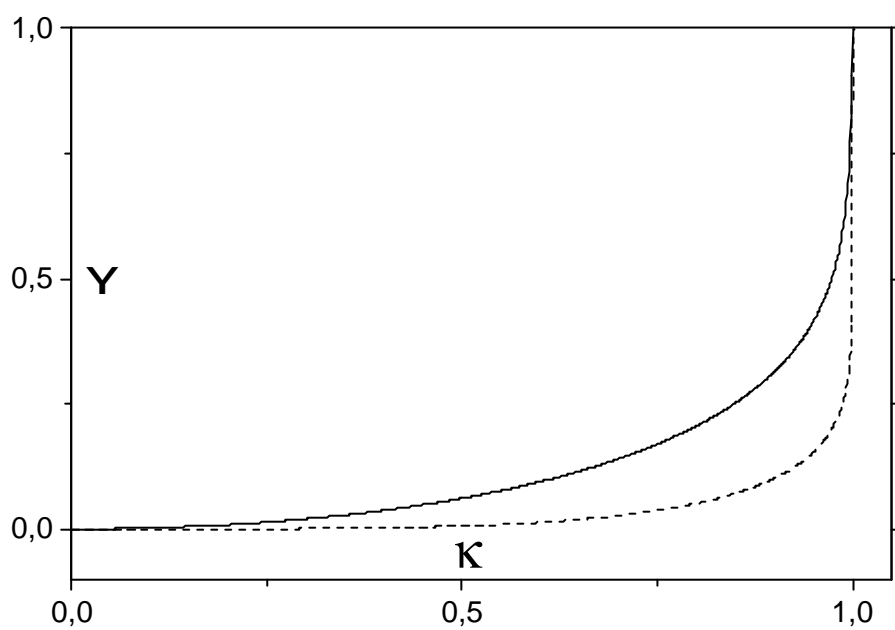


Figura 5.1: O coeficiente emaranhamento-covariância,  $Y_{n;m}$ , na cavidade unidimensional e ressonante ( $p = 2$ ) contra o parâmetro  $K = \tanh(2\zeta)$  quando o estado inicial é o vácuo. Curva sólida:  $Y_{1;3}$ ; curva tracejada:  $Y_{3;5}$ .

Logo, para  $\zeta \rightarrow 1$ , temos

$$\langle \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_s \rangle \approx \langle \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_s \rangle \frac{1}{\sqrt{4}} \frac{8_j}{r_s} (j+1)^{(r_i-s)-2} + O(1); \quad (5.60)$$

e os termos principais do numerador e do denominador da fração em (5.43) se tornam iguais para  $\zeta \rightarrow 1$ .

No caso dissonante, caracterizado pelo parâmetro de dissonância adimensional  $\sigma$ , os coeficientes  $\frac{1}{2} \langle \hat{a}_m^{(n)} \rangle$  se tornam complexos. Todavia, suas formas assintóticas diferem de (5.59) apenas por fatores de fase [192]. Desde que o coeficiente emaranhamento-covariância, (5.43), depende só dos valores absolutos dos momentos de segunda ordem,  $\langle \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_s \rangle$  e  $\langle \hat{a}_r \hat{a}_s^\dagger \rangle$ , esses fatores de fase não influenciam o resultado final, ou seja,  $Y_{rs} \rightarrow 1$  quando  $\zeta \rightarrow 1$ , a menos que o parâmetro de dissonância adimensional exceda o valor crítico  $\sigma = 1$ , situação em que a geração de fótons a partir do vácuo se tornará impossível.

Se o estado inicial for o vácuo, o campo permanecerá gaussiano com o passar do tempo [192], e o coeficiente emaranhamento-pureza poderá ser calculado através da fórmula (5.8). No caso genérico, o determinante da matriz simétrica  $Q$ , equação (5.25), contém 17 termos diferentes. Entretanto, no caso específico em questão todas as covariâncias entre os operadores-posição e os operadores-momento são iguais a zero:  $\langle \hat{x}_i \hat{p}_j \rangle = 0$ , e por essa razão o determinante da matriz de covariância para o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo modos pode ser fatorado assim:

$$\det Q = \langle \hat{x}_i \hat{x}_j \rangle \langle \hat{p}_i \hat{p}_j \rangle - \langle \hat{x}_i \hat{p}_i \rangle \langle \hat{x}_j \hat{p}_j \rangle; \quad (5.61)$$

As covariâncias não-nulas são dadas por:

$$\langle \hat{x}_i \hat{x}_j \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \rangle + \text{Re} \langle \hat{a}_i \hat{a}_j \rangle; \quad \langle \hat{p}_i \hat{p}_j \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \rangle - \text{Re} \langle \hat{a}_i \hat{a}_j \rangle; \quad (5.62)$$

Introduzindo os coeficientes de correlação,

$$r_{x_i x_j} = \frac{\langle \hat{x}_i \hat{x}_j \rangle}{\sqrt{\langle \hat{x}_i \hat{x}_i \rangle \langle \hat{x}_j \hat{x}_j \rangle}}; \quad r_{p_i p_j} = \frac{\langle \hat{p}_i \hat{p}_j \rangle}{\sqrt{\langle \hat{p}_i \hat{p}_i \rangle \langle \hat{p}_j \hat{p}_j \rangle}}; \quad (5.63)$$

podemos representar os coeficientes de emaranhamento  $\mathcal{E}$ , equação (5.8), e  $Z$ , equação (5.16), entre o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo modos como

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left( 1 + r_{x_i x_j}^2 + 1 + r_{p_i p_j}^2 \right); \quad (5.64)$$

$$Z_{ij} = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + r_{x_i x_j}^2 + 1 + r_{p_i p_j}^2 \right) \frac{1}{1 + \frac{1}{4} r_{x_i x_j}^2 + 1 + \frac{1}{4} r_{p_i p_j}^2}; \quad (5.65)$$

Se todos os coeficientes de correlação forem pequenos (em particular, se  $\zeta \ll 1$ ), então

$$E_{ij} \approx \frac{1}{2} Z_{ij} \approx \frac{1}{2} (r_{x_i x_j}^2 + r_{p_i p_j}^2) ;$$

Quando  $\zeta \ll 1$ , devido às equações (5.60), (5.62) e (5.63), os coeficientes  $r_{p_i p_j}$  crescem linearmente com o tempo de tal maneira que o coeficiente de correlação do momento,  $r_{p_i p_j}$ , tende a 1. Ao mesmo tempo, os coeficientes  $r_{x_i x_j}$  e  $r_{x_i x_j}$  tendem a valores finitos. Portanto, o coeficiente emaranhamento-pureza,  $E$ , e o coeficiente emaranhamento-distância,  $Z$ , tendem a 1. Usando as fórmulas assintóticas para as integrais elípticas e completas [31],

$$K(\zeta) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{4}{1-\zeta} + \frac{1}{4} \mu \ln \frac{4}{1-\zeta} \zeta^{-1} \zeta^{-2} + \dots ; \quad E(\zeta) \approx \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{1-\zeta} \zeta^{-1} \zeta^{-2} + \dots \right) ; \quad \zeta \ll 1 ;$$

podemos ver que, para  $\zeta \ll 1$ ,  $1 \gg E \gg 1 \gg Z \gg \zeta^{1/2}$ . Em particular,

$$1 \gg E_{13} \gg \frac{r_{44}}{57\zeta} \approx \frac{0,88}{\zeta} ; \quad 1 \gg Z_{13} \gg \frac{r_{44}}{3\zeta} \approx \frac{8}{219} \zeta^{-1} \approx \frac{1}{19} \zeta^{-1} ;$$

Ao calcular a medida entrópica do emaranhamento, equação (5.1), devemos levar em conta que a entropia reduzida de qualquer subsistema de dois modos depende do tempo na situação em questão, porque a evolução de cada subsistema de dimensão finita não é unitária. Essa entropia é determinada por dois autovalores da matriz  $Q^{-1}$  (4  $\times$  4) correspondente, os quais são dados pela fórmula (5.26). A entropia reduzida do k-ésimo modo é determinada pelo número

$$f_k = \frac{\rho_{x_k x_k}}{\rho_k \rho_k} ; \quad (5.66)$$

enquanto as covariâncias posição-momento são iguais a zero no caso estritamente ressonante considerado. A fórmula explícita para a medida entrópica do emaranhamento entre o k-ésimo e o n-ésimo modos se tornará (se o estado inicial do campo for o vácuo)

$$I_c^{kn} = \sum_{j=k;n}^h (f_j + 1/2) \ln (f_j + 1/2) - \sum_{j=k;n}^h (f_j - 1/2) \ln (f_j - 1/2) ; \quad (5.67)$$

$$\sum_{\pm=S1}^h f_{kn}^{\pm} + 1/2 \ln f_{kn}^{\pm} + 1/2 - \sum_{\pm=S1}^h f_{kn}^{\pm} - 1/2 \ln f_{kn}^{\pm} - 1/2 ;$$

onde

$$2f_{kn}^{\pm} = \frac{q_{\pm 1=2}}{\rho_k \rho_k \overline{x_k x_k} + \rho_n \rho_n \overline{x_n x_n} + 2\rho_k \rho_n \overline{x_k x_n}} + 2 \frac{q_{\pm 1=2}}{(\rho_k \rho_k \rho_n \rho_n - \rho_k \rho_n^2) (\overline{x_k x_k} \overline{x_n x_n} - \overline{x_k x_n}^2)}$$

$$+ \pm \frac{q_{\pm 1=2}}{\rho_k \rho_k \overline{x_k x_k} + \rho_n \rho_n \overline{x_n x_n} + 2\rho_k \rho_n \overline{x_k x_n}} - 2 \frac{q_{\pm 1=2}}{(\rho_k \rho_k \rho_n \rho_n - \rho_k \rho_n^2) (\overline{x_k x_k} \overline{x_n x_n} - \overline{x_k x_n}^2)} ;$$

O comportamento dos diferentes coeficientes de emaranhamento é mostrado na figura 5.2. Todos eles tendem monotonamente a 1 com o passar do tempo.

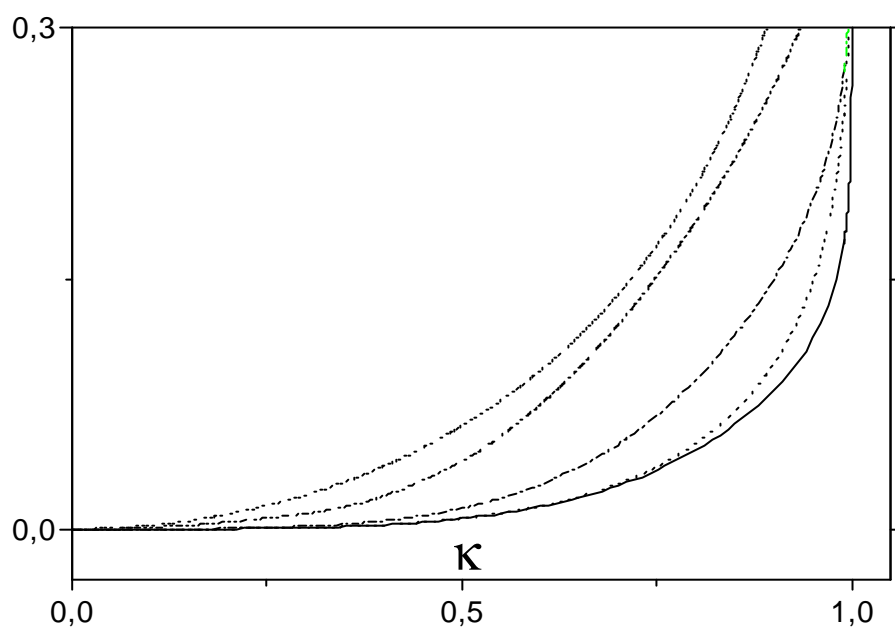


Figura 5.2: Coeficientes caracterizando o emaranhamento entre o primeiro e o terceiro modos na cavidade unidimensional e ressonante ( $p = 2$ ) contra  $\kappa = \tanh(2\zeta)$  para o estado inicial de vácuo. As curvas do topo para a base: coeficiente emaranhamento-covariância,  $Y$ , coeficiente entrópico e compacto,  $J_c$ , coeficiente emaranhamento-pureza,  $\mathcal{E}$ , o quadrado do coeficiente emaranhamento-covariância,  $Y^2$ , e coeficiente emaranhamento-distância,  $Z$ .

### 5.3.2 Os coeficientes de Bogoliubov no caso da ressonância paramétrica e unidimensional

Os coeficientes não-nulos,  $\frac{1}{2}_{2m+1}^{(1)}$ , no caso da ressonância paramétrica ( $p = 2$ ) são [191, 192]

$$\frac{1}{2}_{2m+1}^{(1)} = \frac{(i-1)^m i (m+1) 2^m}{i (1-2) i (1+m)} F_{i, m+1=2; i, 1=2; 1+m; 2}^{(1)}; \quad (5.68)$$

$$\frac{1}{2}_{i, 2m_i-1}^{(1)} = \frac{(i-1)^m i (m+1) 2^{m+1}}{\frac{1}{4} i (2+m)} F_{i, m+1=2; 1=2; 2+m; 2}^{(1)}; \quad (5.69)$$

Em particular ( $\rho = 1, i = 2$ ),

$$\frac{1}{2}_1^{(1)} = \frac{2}{\frac{1}{4}} E(\cdot); \quad \frac{1}{2}_{i, 1}^{(1)} = \frac{2}{\frac{1}{4}} E(\cdot) i^{-2} K(\cdot)^2; \quad (5.70)$$

$$\frac{1}{2}_3^{(1)} = \frac{2}{\frac{3}{4}} E_{i, 1}(\cdot) i^{-2} E(\cdot) i^{-2} K(\cdot)^2; \quad \frac{1}{2}_{i, 3}^{(1)} = i \frac{2}{\frac{3}{4} 2} E_{i, 2}(\cdot) i^{-2} E(\cdot) i^{-2} K(\cdot)^2; \quad (5.71)$$

$$\frac{1}{2}_5^{(1)} = \frac{2}{15 \frac{1}{4} 2} E_{i, 4}(\cdot) i^{-3} i^{-2} E(\cdot) + (i^4 + 2^2 + 2) K(\cdot)^2;$$

$$\frac{1}{2}_{i, 5}^{(1)} = i \frac{2}{15 \frac{1}{4} 3} E_{i, 2}(\cdot) i^{-4} + 3 i^{-2} i^{-2} E(\cdot) i^{-2} (i^4 + 7 i^{-2} + 8) K(\cdot)^2;$$

A estrutura geral dos coeficientes  $\frac{1}{2}_{2m+1}^{(1)}$  em termos das integrais elípticas e completas é [192]

$$\frac{1}{2}_{2m+1}^{(1)} = \frac{2}{\frac{1}{4} m} f_m i^{-2} E(\cdot) + i^{-2} g_m i^{-2} K(\cdot)^2 \quad (5.72)$$

$$\frac{1}{2}_{i, 2m_i-1}^{(1)} = \frac{2}{\frac{1}{4} (m+1)} r_m i^{-2} E(\cdot) + i^{-2} s_m i^{-2} K(\cdot)^2 \quad (5.73)$$

onde  $f_m(x)$ ;  $g_m(x)$ ;  $r_m(x)$  e  $s_m(x)$  são polinômios de grau  $m$  que podem ser encontrados a partir das relações de recorrência (5.32).

### 5.3.3 Cálculo das integrais

Para calcular, por exemplo, o valor médio  $\langle \hat{h}_1^y \hat{a}_3^i \rangle$ , usamos as equações (5.47), (5.70) e (5.71), trocando a derivada em  $\zeta$  pela derivada em respeito a  $\cdot$ , de acordo com a relação  $d = 2^{-2} d_\zeta$ . Dessa maneira, chegamos à equação

$$\frac{d \langle \hat{h}_1^y \hat{a}_3^i \rangle}{d} = i \frac{2^{\rho-3}}{3 \frac{1}{4} 2^{-2}} E_{i, 1}(\cdot) i^{-2} E^2(\cdot) i^{-4} K^2(\cdot) i^{-2} E(\cdot) K(\cdot)^2; \quad (5.74)$$

Levando em conta as regras de diferenciação [31]

$$\frac{dK(\cdot)}{d} = \frac{E(\cdot)}{i^{-2}} i^{-2} \frac{K(\cdot)}{d}; \quad \frac{dE(\cdot)}{d} = \frac{E(\cdot) i^{-2} K(\cdot)}{d}; \quad (5.75)$$

podemos supor que o fator  $\omega^{-2}$  no denominador do lado direito de (5.74) vem da derivada  $dK=d\omega$ . Então, é natural procurar uma solução da forma

$$\hbar \dot{a}_1 \dot{a}_3 = \frac{2\rho_3}{3\omega^2} \left[ A(\omega) K^2(\omega) + B(\omega) K(\omega) E(\omega) + C(\omega) E^2(\omega) \right]; \quad (5.76)$$

onde  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  e  $C(\omega)$  são polinômios em  $\omega$ . Levando a expressão (5.76) na equação (5.74), obtemos um conjunto de equações acopladas para os coeficientes desses polinômios, as quais podem ser resolvidas recursivamente. As equações para os outros momentos de segunda ordem podem ser integradas de maneira semelhante.

### 5.3.4 Emaranhamento no caso semi-ressonante ( $p = 1$ )

Um comportamento qualitativamente diferente de todas as características do campo é observado no caso semi-ressonante, quando a frequência das oscilações da fronteira coincide com a autofrequência fundamental do campo ( $p = 1$ ) [191, 193]. Nesse caso, devemos colocar  $j = 0$  na fórmula (5.33) e todos os coeficientes  $\frac{1}{2}n_m^{(j)}$  com índices  $m$  negativos serão iguais a zero. Conseqüentemente, fótons não poderão ser criados a partir do estado de vácuo inicial, o que pode ser visto claramente através da equação (5.45). Se o campo estiver inicialmente num estado que não seja o vácuo (ao menos um dos modos), então o número total de fótons em todos os modos será conservado, embora a energia total cresça exponencialmente devido ao "aquecimento" dos modos de alta frequência (às custas do "resfriamento" dos modos de baixa frequência).

Suponhamos que inicialmente apenas o primeiro modo estava excitado, enquanto todos os outros estavam no estado de vácuo. Nesse caso, a dinâmica de todos os modos será descrita pelo coeficiente

$$\frac{1}{2}n_m^{(1)} = (\tanh \zeta)^{|m|} = \cosh^{-2} \zeta;$$

Se inicialmente o modo estiver num estado coerente, todos os momentos centrais de segunda ordem que conectam diferentes modos serão iguais a zero, resultando num coeficiente emaranhamento-covariância nulo:  $Y_{r,s}^{\text{coe}} = 0$ . Todavia, para outros estados iniciais obteremos valores não-nulos de  $Y_{r,s}$ .

Caso inicialmente o modo esteja num estado de Fock  $j_{ni}$ , então

$$Y_{r,s}^{\text{Fock}} = \frac{n_r^3 n_s^3}{2^{1+n_r^2} 2^{1+n_s^2}}; \quad (5.77)$$

onde

$$\frac{1}{2}n_m = \rho_m \frac{1}{2}n_m^{(1)} = \rho_m \frac{(\tanh \zeta)^{|m|}}{\cosh^2 \zeta}; \quad (5.78)$$



Se o estado inicial for o vácuo comprimido  $|\tilde{0}\rangle = \exp\left[-\frac{R}{2}(\hat{b}_1^2 - \hat{b}_1^\dagger{}^2)\right] |0\rangle$ , com o número médio de fótons  $\bar{n}_1 = \sinh^2(R)$ , teremos

$$Y_{r,s}^{\text{com}} = \frac{\rho \bar{n}_1 (2\bar{n}_1 + 1)}{2^{1+\bar{n}_1} (1 + \bar{n}_1^2)^{1/2} 2^{1+\bar{n}_1} (1 + \bar{n}_1^2)^{1/2}}; \quad (5.79)$$

Quando inicialmente o modo estiver num estado coerente e par/ímpar [30]

$$|j\rangle_S \Rightarrow \frac{j^{\otimes i} S^j |i\rangle}{2[1 \pm \exp(i 2j^{\otimes i} j^2)]};$$

os números médios de fótons serão dados pelas fórmulas

$$\bar{n}_1^{(+)} = j^{\otimes i} j^2 \tanh(j^{\otimes i} j^2); \quad \bar{n}_1^{(-)} = j^{\otimes i} j^2 \coth(j^{\otimes i} j^2);$$

Em ambos os casos, o coeficiente de emaranhamento pode ser escrito assim:

$$Y_{r,s}^{\text{par-ímpar}} = \frac{\rho \bar{n}_1 (\bar{n}_1 + j^{\otimes i} j^2)}{2^{1+\bar{n}_1} (1 + \bar{n}_1^2)^{1/2} 2^{1+\bar{n}_1} (1 + \bar{n}_1^2)^{1/2}}; \quad (5.80)$$

Quando o número de fótons iniciais nos estados coerente (par/ímpar) e de vácuo comprimido for suficientemente grande,  $\bar{n}_1 \gg 1$ , o coeficiente de emaranhamento se aproximará bastante do valor máximo possível (que é 1), se  $\bar{n}_1 \gg 1$ , mas, com o passar do tempo,  $Y$  vai a zero, porque  $\rho_{r,s}(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . No caso de um estado inicial de Fock, o valor máximo de  $Y$  não excederá  $1/2$ . O comportamento típico do coeficiente emaranhamento-covariância entre o primeiro e o segundo modos para estados iniciais de Fock e comprimidos é apresentado na figura 5.3. A evolução do número médio de fótons no primeiro e segundo modos é mostrada na figura 5.4.

As covariâncias momento-posição são nulas de novo (como no caso em que  $p = 2$ ), e, assim sendo, precisaremos apenas de dois dos coeficientes de correlação definidos em (5.63) para calcular o emaranhamento-pureza e o emaranhamento-distância (quando o primeiro modo for um estado de vácuo comprimido) com a ajuda das equações (5.64) e (5.65). Esses coeficientes de correlação serão

$$r_{x_i x_j} = \frac{\hat{A}^3_i(t) \hat{A}^3_j(t)}{1 + \hat{A}^2_i(t) 1 + \hat{A}^2_j(t)}; \quad r_{p_i p_j} = i \frac{\hat{A}^3_i(t) \hat{A}^3_j(t)}{1 + \hat{A}^2_i(t) 1 + \hat{A}^2_j(t)}; \quad (5.81)$$

onde

$$\hat{A} = e^{2R} - 1; \quad \hat{A} = 1 + e^{2R};$$

As relações de dependência entre os coeficientes de emaranhamento  $Y$  e  $Z$  e o tempo são comparadas na figura 5.5. Vemos que as curvas sólidas e as tracejadas estarão muito próximas, especialmente se o número de fótons for grande.

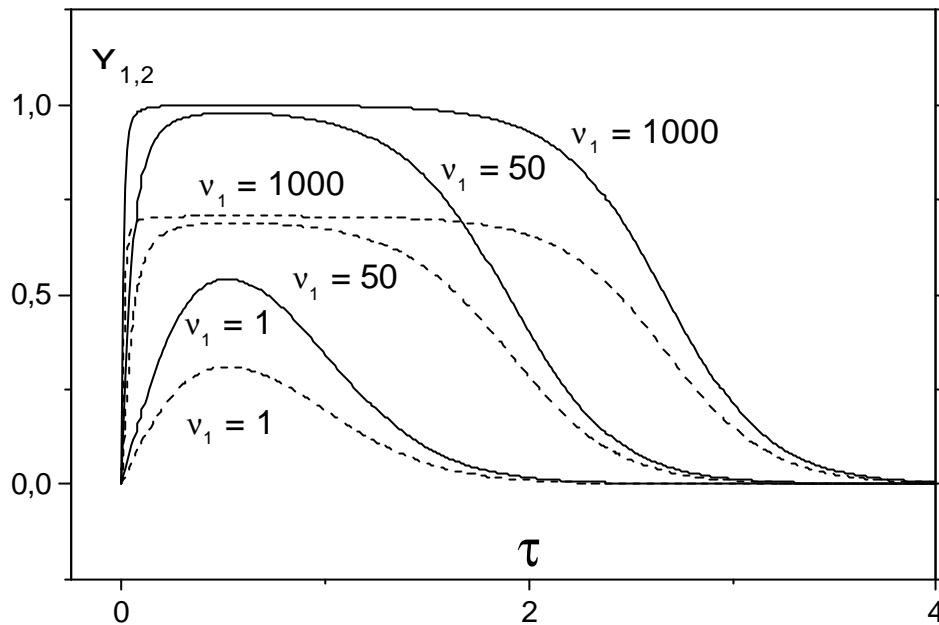


Figura 5.3: O coeficiente emaranhamento-covariância,  $Y_{1,2}$ , na cavidade unidimensional e semi-ressonante ( $p = 1$ ) contra o tempo lento,  $\tau$ , para estados iniciais (do primeiro modo) de Fock (linhas tracejadas) e de vácuo comprimido (linhas sólidas) com números médios de fótons iguais a  $\bar{n}_1 = 1; 50; 1000$ :

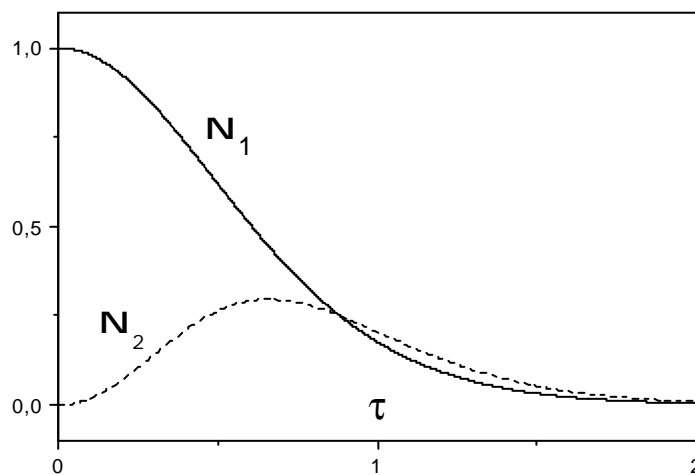


Figura 5.4: O número médio de fótons no primeiro e segundo modos da cavidade unidimensional e semi-ressonante ( $p = 1$ ) contra o tempo lento,  $\tau$ , para um estado inicial de Fock:  $|j\rangle_1$ .

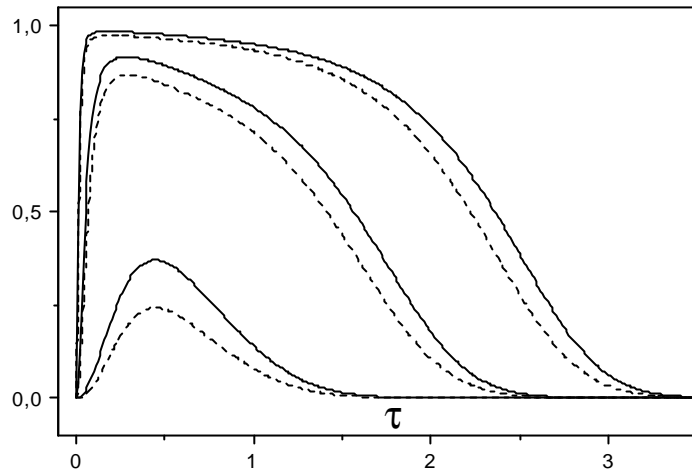


Figura 5.5: O coeficiente emaranhamento-pureza,  $\mathcal{E}_{1;2}$  (linhas sólidas), e o coeficiente emaranhamento-distância,  $Z_{1;2}$  (linhas tracejadas), na cavidade unidimensional e semi-ressonante ( $p = 1$ ) contra o tempo lento,  $\tau$ , quando o estado inicial do primeiro modo é o vácuo comprimido com diferentes números médios de fótons (da base para o topo):  $\bar{n}_1 = 1; 50; 1000$ :

## 5.4 Conclusão

Comparamos as dependências temporais de várias medidas caracterizando o grau de emaranhamento entre os modos do campo numa cavidade ideal com paredes oscilando ressonantemente. Todas essas funções (a medida entrópica e padrão do emaranhamento para estados gaussianos, o coeficiente emaranhamento-covariância introduzido em [166, 167], o coeficiente emaranhamento-distância introduzido em [165] e o coeficiente emaranhamento-pureza introduzido aqui) são baseadas na matriz de covariância de segunda ordem dos componentes de quadratura do campo. Embora tenham formas analíticas diferentes, os coeficientes apresentam comportamentos (qualitativos) similares. Por conseguinte, o coeficiente emaranhamento-covariância, sendo o mais simples do ponto de vista dos cálculos, parece o mais conveniente, especialmente em comparação com a medida entrópica do emaranhamento, cujo cálculo requer tremendo esforço dando praticamente a mesma informação sobre o grau de emaranhamento.

No caso da ressonância paramétrica, todos os coeficientes de emaranhamento tendem a 1 monotonamente. No caso da semi-ressonância, eles rapidamente alcançam valores próximos a 1, permanecem nesse nível durante algum tempo (o qual cresce com o aumento do

número médio e inicial de fótons) e decaem a zero. Portanto, este estudo acrescenta novas características aos resultados obtidos anteriormente em [168], [191]-[192], [194], melhorando nossa compreensão do comportamento dos campos em cavidades com fronteiras móveis.

Ainda não dispomos de uma teoria completa da quantização do campo eletromagnético em meios com fronteiras móveis e não-ideais. Para levar em conta a dissipação, precisaremos introduzir termos adicionais nas equações para descrever a interação entre os modos do campo na cavidade e os graus de liberdade do meio. Pretendemos tratar esse problema em trabalhos futuros.

# Capítulo 6

## Conclusão

Estudamos a influência de diferentes fatores sobre a reflexão de pacotes quânticos, lentos e estreitos, por espelhos atômicos, tendo demonstrado que a forma das distribuições de momento assintóticas dependem crucialmente da razão entre o momento inicial na direção perpendicular à superfície do espelho e a dispersão inicial desse componente.

A passagem de um pacote de ondas gaussiano próximo a uma parede impenetrável o torna mais estreito do que seria no espaço livre, em ambas as representações: de posição e de momento. Além disso, o valor final do componente do momento na direção perpendicular à superfície,  $\langle p_{\perp} \rangle_f$ , será diferente do seu valor inicial, que é nulo. O aumento da energia cinética do centro de massa da partícula será obtido às custas da energia das flutuações quânticas do pacote, desde que a energia total é conservada.

Mostramos que pacotes de ondas livres podem exibir encolhimento significativo nos estágios iniciais de sua evolução e que uma escolha adequada da medida de extensão do pacote ajudará a visualizar ou a enfatizar o efeito quando ele existir. O caso bidimensional não é distinto do ponto de vista de diferentes medidas do valor médio do raio. Encontramos exemplos de medidas para as quais as dimensões distintas são  $d = 3; 4$  ou  $6$ : Além disso, escolhas adequadas dos parâmetros  $k$  e  $d$ ; que caracterizam o pacote de ondas inicial, e dos parâmetros  $\sigma$  e  $\tau$ , que caracterizam a medida da extensão do pacote, permitem obter um valor mínimo da extensão normalizada tão pequeno quanto se queira.

Analisamos o problema da transmissão e da reflexão de pacotes, inicialmente estreitos e gaussianos, por potenciais do tipo delta de Dirac com intensidade constante e com específica dependência temporal. Concluímos que a melhor definição do tempo de transmissão, para o caso sob estudo, é o inverso da altura do máximo da densidade de probabilidade de transmissão.

Consideramos várias medidas caracterizando o grau de emaranhamento entre os modos do

campo numa cavidade ideal com paredes oscilando ressonantemente. No caso da ressonância paramétrica, todos os coeficientes de emaranhamento tendem a 1 monotonamente. No caso da semi-ressonância, eles rapidamente alcançam valores próximos a 1, permanecem nesse nível durante algum tempo e decaem a zero.

Nos últimos anos, a Física experimental dos campos quânticos em cavidades e dos átomos e íons aprisionados progrediu imensamente, ocasionando inúmeros estudos do efeito Casimir não-estacionário. Contudo, na esmagadora maioria dos trabalhos realizados até hoje foram consideradas somente cavidades com paredes ideais. Ninguém tratou ainda as cavidades com paredes oscilantes que não são ideais. Por isso, no futuro pretendemos estudar campos eletromagnéticos acondicionados em cavidades móveis com paredes dissipativas, ou seja, trataremos cavidades mais realísticas, as quais têm perdas.

Em virtude da possibilidade de realização experimental, usando átomos ultrafrios e espelhos atômicos, e em continuação aos nossos trabalhos sobre átomos não-relativísticos na presença de fronteiras em repouso, consideraremos a dejetção quântica no caso em que as fronteiras se movem.

# Bibliogra...a

- [1] MacColl L A 1932 Note on the Transmission and Reflection of Wave Packets by Potential Barriers Phys. Rev. 40 621
- [2] Hartman T E 1962 Tunneling of a Wave Packet J. Appl. Phys. 33 3427
- [3] Heller E 1975 Time-Dependent Approach to Semiclassical Dynamics J. Chem. Phys. 62 1544
- [4] Hasse R W 1978 Multidimensional Wave Packet Motion in Quadratic Potentials with and without Friction – Oscillation and Barrier Penetration J. Phys. A: Math. Gen. 11 1245
- [5] Andrews M 1981 The Spreading of Wave Packets in Quantum-Mechanics J. Phys. A: Math. Gen. 14 1123
- [6] Turner R E e Snider R F 1981 A Phase-Space Moment Method for Classical and Quantal Dynamics Can. J. Phys. 59 457
- [7] Littlejohn R G 1986 The Semiclassical Evolution of Wave-Packets Phys. Rep. 138 193
- [8] Dodonov V V, Man'ko V I e Ossipov D L 1990 Quantum Evolution of the Localized State Physica A 168 1055
- [9] Krause J L, Whitnell R M, Wilson K R, Yan Y J e Mukamel S 1993 Optical Control of Molecular-Dynamics - Molecular Cannons, Reflectrons, and Wave-Packet Focusers J. Chem. Phys. 99 6562
- [10] Bagrov V G, Belov V V e Trifonov A Y 1996 Semiclassical Trajectory-Coherent Approximation in Quantum Mechanics .1. High-Order Corrections to Multidimensional Time-Dependent Equations of Schrödinger Type Ann. Phys. (NY) 246 231
- [11] Brouard S e Muga J G 1998 Collisional Transitory Enhancement of the High Momentum Components of a Quantum Wave Packet Phys. Rev. Lett. 81 2621

- [12] Doncheski M A e Robinett R W 1999 Anatomy of a Quantum 'Bounce' *Eur. J. Phys.* 20 29
- [13] Weis J e Weis O 1999 Misinterpretation Yields Supercelerities During Transmission of Wave Packets Through a Barrier *Eur. Phys. J. B* 12 135
- [14] Petrillo V e Refaldi L 2000 A Time Asymptotic Expression for the Wave Function Emerging from a Quantum-Mechanical Barrier *Opt. Commun.* 186 35
- [15] Zhang W P e Walls D F 1993 Separation and Superposition of Atomic Wave-Packets by Reflection and Transmission by an Optical Ripple Mirror *Phys. Rev. A* 47 626
- [16] Deutschmann R, Ertmer W e Wallis H 1993 Reflection and Diffraction of Atomic de Broglie Waves by an Evanescent Laser Wave *Phys. Rev. A* 47 2169
- [17] Adams C S, Sigel M e Mlynek J 1994 Atom Optics *Phys. Rep.* 240 143
- [18] Pumares L, Plaja L, Roso L e Rzazewski K 1996 Stopped Atomic Wavepackets Generated by Interaction with a Square-Profile Laser Beam *Quantum Semiclass. Opt.* 8 673
- Roso L, Plaja L, Santos L, Pumares L e Rzazewski K 1998 Stopped Reflection of an Atomic Wave Packet by a Laser Beam with an Evanescent Profile *Opt. Commun.* 148 376
- [19] Segev B, Côté R e Raizen M G 1997 Quantum Reflection from an Atomic Mirror *Phys. Rev. A* 56 R3350
- Côté R, Segev B e Raizen M G 1998 Retardation Effects on Quantum Reflection from an Evanescent-Wave Atomic Mirror *Phys. Rev. A* 58 3999
- [20] Witte N S 1998 Exact Solution for the Reflection and Diffraction of Atomic de Broglie Waves by a Travelling Evanescent Laser Wave *J. Phys. A: Math. Gen.* 31 807
- [21] Henkel C, Wallis H, Westbrook C I, Aspect A, Sengstock K e Ertmer W 1999 Theory of Atomic Diffraction from Evanescent Waves *Appl. Phys. B* 69 277
- [22] Dodonov V V e Andreatta M A 2000 Deflection of Quantum Particles by Impenetrable Boundary *Phys. Lett. A* 275 173
- [23] Dodonov V V e Andreatta M A 2002 Quantum Deflection of Ultracold Atoms from Mirrors *Laser Physics* 12 57



- [24] Landau L D e Lifshitz E M 1977 Quantum Mechanics (Oxford: Pergamon)
- [25] Faddeev L D 1958 Doklady AN SSSR 121 63  
 Faddeev L D 1958 The Relation Between S-Matrix and Potential for the One-Dimensional Schrödinger Operator Sov. Phys. – Doklady 3 747
- [26] Lamb G L Jr 1980 Elements of Soliton Theory (New York: Wiley)
- [27] Brouard S e Muga J G 1996 Transient and Asymptotic Effects in Tunneling Phys. Rev. A 54 3055
- [28] Erdélyi A (ed) 1953 Bateman Manuscript Project: Higher Transcendental Functions vol II (New York: McGraw-Hill)
- [29] Steinberg A M 1995 Conditional Probabilities in Quantum-Theory and the Tunneling-Time Controversy Phys. Rev. A 52 32
- [30] Dodonov V V, Malkin I A e Man'ko V I 1974 Even and Odd Coherent States and Excitations of a Singular Oscillator Physica 72 597
- [31] Gradshteyn I S e Ryzhik I M 1994 Tables of Integrals, Series and Products (New York: Academic)
- [32] Epstein P S 1930 Reflection of Waves in an Inhomogeneous Absorbing Medium Proc. Natl. Acad. Sci. USA 16 627
- [33] Flügge S 1974 Practical Quantum Mechanics (Berlin: Springer)
- [34] Cook R e Hill R 1982 An Electromagnetic Mirror for Neutral Atoms Opt. Commun. 43 258
- [35] Balykin V I, Letokhov V S, Ovchinnikov Y B e Sidorov A I 1988 Quantum-State Selective Mirror Reflection of Atoms by Laser-Light Phys. Rev. Lett. 60 2137
- [36] Grimm R, Weidemüller M e Ovchinnikov Y B 2000 Optical Dipole Traps for Neutral Atoms Adv. At. Mol. Opt. Phys. 42 95
- [37] Gea-Banacloche J 2000 Bouncing Wavepacket: Finite-Wall and Resonance Effects Opt. Commun. 179 117
- [38] Mavromatis H A 1987 Exercises in Quantum Mechanics (Dordrecht: Reidel)

- [39] Manakov N L, Frolov M V, Starace A F e Fabrikant I I 2000 Interaction of Laser Radiation with a Negative Ion in the Presence of a Strong Static Electric Field *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* 33 R141
- [40] Abramowitz M e Stegun I A (eds) 1974 *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover)
- [41] Bonci L, Roncaglia R, West B J e Grigolini P 1992 Semiclassical Chaos, the Uncertainty Principle, and Quantum Dissipation *Phys. Rev. A* 45 8490
- [42] Schrödinger E 1930 Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip *Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin* 24 296  
Robertson H P 1930 A General Formulation of the Uncertainty Principle and its Classical Interpretation *Phys. Rev.* 35 667
- [43] Dodonov V V, Kurmyshev E V e Man'ko V I 1980 Generalized Uncertainty Relation and Correlated Coherent States *Phys. Lett. A* 79 150
- [44] Dodonov V V e Man'ko V I 1989 *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems* (Proc. Lebedev Physics Institute 183) (Commack: Nova Science)
- [45] Dodonov V V e Man'ko V I 1985 *Group Theoretical Methods in Physics* (Proceedings of the Second International Seminar, Zvenigorod, 24-26 Nov. 1982) eds M A Markov, V I Man'ko e A E Shabad (New York: Harwood Academic) vol 1 p 591
- [46] Dodonov V V 2000 Universal Integrals of Motion and Universal Invariants of Quantum Systems *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 7721  
Dodonov V V e Man'ko O V 2000 Universal Invariants of Quantum-Mechanical and Optical Systems *J. Opt. Soc. Am. A* 17 2403
- [47] Dragt A J, Neri F e Rangarajan G 1992 General Moment Invariants for Linear Hamiltonian Systems *Phys. Rev. A* 45 2572
- [48] Rivera A L, Atakishiyev N M, Chumakov S M e Wolf K B 1997 Evolution Under Polynomial Hamiltonians in Quantum and Optical Phase Spaces *Phys. Rev. A* 55 876
- [49] Camiz P, Gerardi A, Marchioro C, Presutti E e Scacciatelli E 1971 Exact Solution of a Time-Dependent Quantal Harmonic Oscillator with a Singular Perturbation *J. Math. Phys.* 12 2040

- [50] Ol'shanii M A, Ovchinnikov Y B e Letokhov V S 1993 Laser Guiding of Atoms in a Hollow Optical Fiber Opt. Commun. 98 77
- Marksteiner S, Savage C M, Zoller P e Rolston S L 1994 Coherent Atomic Wave-Guides from Hollow Optical Fibers - Quantized Atomic Motion Phys. Rev. A 50 2680
- Rohwedder B 2001 Self-Imaging in Atom Waveguides Phys. Rev. A 63 053604
- [51] Olshanii M, Dekker N, Herzog C e Prentiss M 2000 de Broglie Wave-Front Engineering Phys. Rev. A 62 033612
- [52] Cohen-Tannoudji C N 1998 Manipulating Atoms with Photons Rev. Mod. Phys. 70 707
- Weiner J, Bagnato V S, Zilio S e Julienne P S 1999 Experiments and Theory in Cold and Ultracold Collisions Rev. Mod. Phys. 71 1
- Wieman C E, Pritchard D E e Wineland D J 1999 Atom Cooling, Trapping, and Quantum Manipulation Rev. Mod. Phys. 71 S253
- Balykin V I, Minogin V G e Letokhv V S 2000 Electromagnetic Trapping of Cold Atoms Rep. Prog. Phys. 63 1429
- [53] Tan S M e Walls D F 1994 Quantum Effects in Atomic Reflection J. Physique 4 1897
- [54] de Oliveira M C, Almeida N G, Mizrahi S S e Moussa M H Y 2000 Quantum to Classical Transition from the Cosmic Background Radiation Phys. Rev. A 62 012108
- [55] Kälbermann G 1999 Coherent Polychotomous Waves from an Attractive Well Phys. Rev. A 60 2573
- Kälbermann G 2001 Wave Packets Scattering from an Attractive Well J. Phys. A: Math. Gen. 34 3841
- Kälbermann G 2001 Diffraction of Wave Packets in Space and Time J. Phys. A: Math. Gen. 34 6465
- Kälbermann G 2002 Single- and Double-Slit Scattering of Wave Packets J. Phys. A: Math. Gen. 35 4599
- Kälbermann G 2002 Wave Packets Falling Under a Mirror J. Phys. A: Math. Gen. 35 9829

- [56] Courteille P W, Bagnato V S e Yukalov V I 2001 Bose-Einstein Condensation of Trapped Atomic Gases *Laser Phys.* 11 659
- [57] Caparelli E C, Dodonov V V e Mizrahi S S 1998 Finite-Length Soliton Solutions of the Local Homogeneous Nonlinear Schrödinger Equation *Phys. Scripta* 58 417
- [58] Gradov O M e Stenþo L 1982 Solitary Surface-Waves *Phys. Fluids* 25 983  
Malomed B A e Stenþo L 1991 Modulational Instabilities and Soliton-Solutions of a Generalized Nonlinear Schrödinger-Equation *J. Phys. A: Math. Gen.* 24 L1149
- [59] Sabatier P C 1990 Multidimensional Nonlinear Schrödinger-Equations with Exponentially Connected Solutions *Inverse Problems* 6 L47  
Auberson G e Sabatier P C 1994 On a Class of Homogeneous Nonlinear Schrödinger-Equations *J. Math. Phys.* 35 4028
- [60] Doebner H-D e Goldin G 1992 On a General Nonlinear Schrödinger-Equation Admitting Diffusion Currents *Phys. Lett. A* 162 397  
Doebner H-D e Goldin G 1994 Properties of Nonlinear Schrödinger-Equations Associated with Diæomorphism Group-Representations *J. Phys. A: Math. Gen.* 27 1771
- [61] Dodonov V V e Mizrahi S S 1993 A New Class of Nonlinear Generalizations of the Schrödinger Equation *J. Phys. A: Math. Gen.* 26 7163  
Dodonov V V e Mizrahi S S 1995 Uniform Nonlinear Evolution-Equations for Pure and Mixed Quantum States *Ann. Phys. (NY)* 237 226
- [62] Rosenau P e Hyman J M 1993 Compactons - Solitons with Finite Wavelength *Phys. Rev. Lett.* 70 564  
Dey B e Khare A 1998 Stability of Compacton Solutions *Phys. Rev. E* 58 R2741
- [63] Darwin C G 1927 Free Motion in Wave Mechanics *Proc. Roy. Soc. A* 117 258.
- [64] Andreatta M A e Dodonov V V 2002 The Reflection of Narrow Slow Quantum Packets from Mirrors *J. Phys. A: Math. Gen.* 35 8373
- [65] Keating J P e Robbins J M 2001 Force and Impulse from an Aharonov-Bohm Flux Line *J. Phys. A: Math. Gen.* 34 807
- [66] Efremov M A e Fedorov M V 2002 Potential Scattering of Electron Wave Packets by Large-Size Targets *Phys. Rev. A* 65 052725

- [67] Bialynicki-Birula I, Cirone M A, Dahl J P, Fedorov M e Schleich W P 2002 In- and Outbound Spreading of a Free-Particle S-Wave Phys. Rev. Lett. 89 060404
- [68] Pérez Prieto A L, Brouard S e Muga J G 2003 Explicit Solution for a Gaussian Wave Packet Impinging on a Square Barrier J. Phys. A: Math. Gen. 36 2371
- [69] Dodonov V V e Andreatta M A 2003 Shrinking Quantum Packets in one Dimension Phys. Lett. A 310 101
- [70] Cirone M A, Rzepewski K, Schleich W P, Straub F e Wheeler J A 2002 Quantum Anticentrifugal Force Phys. Rev. A 65 022101
- [71] Bialynicki-Birula I, Cirone M A, Dahl J P, Seligman T H, Straub F e Schleich W P 2002 Quantum Fictitious Forces Fortschr. Phys. 50 599
- Bialynicki-Birula I, Cirone M A, Dahl J P, O 'Connell R F e Schleich W P 2002 Attractive and Repulsive Quantum Forces from Dimensionality of Space J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 4 S393
- [72] Cirone M A, Dahl J P, Fedorov M, Greenberger D e Schleich W P 2002 Huygens' Principle, the Free Schrödinger Particle and the Quantum Anti-Centrifugal Force J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. 35 191
- [73] Yuen H P 1983 Contractive States and the Standard Quantum Limit for Monitoring Free-Mass Positions Phys. Rev. Lett. 51 719
- Storey P, Sleator T, Collett M e Walls D 1994 Contractive States of a Free Atom Phys. Rev. A 49 2322
- Viola L e Onofrio R 2003 Contractive Schrödinger Cat States for a Free Mass New J. Phys. 5 5
- [74] Bargmann V 1972 Note on Some Integral Inequalities Helv. Phys. Acta 45 249
- [75] Faris W G 1978 Inequalities and Uncertainty Principles J. Math. Phys. 19 461
- [76] Price J F 1983 Inequalities and Local Uncertainty Principles J. Math. Phys. 24 1711
- [77] Exner P 1984 Some Simple Conditions on Bound-States of Schrödinger-Operators in Dimension D-Less-Than-Or-Equal-To-3 Czechosl. J. Phys. B 34 1019
- Exner P 1984 Generalized Bargmann Inequalities Rep. Math. Phys. 19 249

- [78] Lieb E H 1976 Stability of Matter Rev. Mod. Phys. 48 553
- [79] Prudnikov A P, Brychkov Y A e Marichev O I 1986 Integrals and Series. Additional Chapters (Moscow: Nauka)
- [80] Zakai M 1960 A Class of Definitions of 'Duration' (or 'Uncertainty') and the Associated Uncertainty Relations Information and Control 3 101
- [81] Bochvar D A, Stankevich I V e Chistyakov A L 1960 DAN SSSR 135 1095  
Bochvar D A, Stankevich I V e Chistyakov A L 1961 Entropy of Localization and Continuation in the Quantum Mechanical System Sov. Phys. – Doklady 5 1271
- [82] Hilgevoord J e Uffink J B M 1983 Overall Width, Mean Peak Width and the Uncertainty Principle Phys. Lett. A 95 474
- [83] Grabowski M 1981 The Spreading of Free Wave-Packets and the Entropy of Position J. Math. Phys. 22 303
- [84] Hirschmann I I 1957 A Note on Entropy Am. J. Math. 79 152
- [85] Bialynicki-Birula I e Mycielski J 1975 Uncertainty Relations for Information Entropy in Wave Mechanics Commun. Math. Phys. 44 129
- [86] Majerník V e Richterek L 1997 Entropic Uncertainty Relations Eur. J. Phys. 18 79
- [87] Bastiaans M J 1984 New Class of Uncertainty Relations for Partially Coherent-Light J. Opt. Soc. Am. A 1 711
- [88] Dodonov V V 2002 Purity- and Entropy-Bounded Uncertainty Relations for Mixed Quantum States J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt. 4 S98
- [89] Kay B S 1981 On Klauders Pseudo-Free Oscillator J. Phys. A 14 155
- [90] Morse P M e Feshbach H 1953 Methods of Theoretical Physics (New York: McGraw-Hill) p 1644  
Baym G 1969 Lectures on Quantum Mechanics (New York: Benjamin) p 113
- [91] Beltram F e Capasso F 1988 Interaction Phenomena Between Deep Levels and Minibands in Semiconductor Superlattices Phys. Rev. B 38 3580  
Arsenault C J e Meunier M 1989 Resonant-Tunnelling Lifetime Comparison Between Double-Barrier and Delta-Doped Barrier Structures Phys. Rev. B 39 8739

- Pandey L N, George T F e Rustgi M L 1990 Intersubband Transitions in an Asymmetric Quantum-Well with a Thin Barrier or a Delta-Function Potential *J. Appl. Phys.* 68 1933
- [92] Wood C E C, Metzger G, Berry J e Eastman L F 1980 Complex Free-Carrier Properties Synthesis by Atomic-Plane Doping of MBE GAs *J. Appl. Phys.* 51 383
- [93] Demkov Y N e Ostrovsky V N 1988 *Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics* (New York: Plenum)
- [94] Huang K e Yang C N 1957 Quantum-Mechanical Many-Body Problem with Hard-Sphere Interaction *Phys. Rev.* 105 767
- Gross E P 1961 Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems *Nuovo Cimento* 20 454
- [95] Leggett A J 2001 Bose-Einstein Condensation in the Alkali Gases: Some Fundamental Concepts *Rev. Mod. Phys.* 73 307
- [96] Nussenzveig H M 1961 Soluble Model of a Break-Up Process *Proc. R. Soc.* 264 408
- Lieb E H e Liniger W 1963 Exact Analysis of an Interacting Bose Gas .1. General Solution and Ground State *Phys. Rev.* 130 1605
- McGuire J B 1964 Study of Exactly Soluble One-Dimensional N-Body Problems *J. Math. Phys.* 5 622
- [97] Albeverio S, Gesztesy F, Høegh-Krohn R e Holden H 1988 *Solvable Models in Quantum Mechanics* (Berlin: Springer) p 75
- [98] Jánossy L 1952 The Passage of a Wave Packet Through a Potential Barrier *Acta Phys. Hung.* 2 171
- [99] Bauch D 1985 The Path Integral for a Particle Moving in a Delta-Function Potential *Nuovo Cim. B* 85 118
- [100] Gaveau B e Schulman L S 1986 Explicit Time-Dependent Schrödinger Propagators *J. Phys. A: Math. Gen.* 19 1833
- [101] Blinder S M 1988 Greens-Function and Propagator for the One-Dimensional Delta-Function Potential *Phys. Rev. A* 37 973

- [102] Elberfeld W e Kleber M 1988 Time-Dependent Tunnelling Through Thin Barriers - A Simple Analytical Solution Am. J. Phys. 56 154
- [103] Lawande S V e Bhagwat K V 1988 Feynman Propagator for the Delta-Function Potential Phys. Lett. A 131 8
- [104] Manoukian E B 1989 Explicit Derivation of the Propagator for a Dirac-Delta Potential J. Phys. A: Math. Gen. 22 67
- [105] Scheitler G e Kleber M 1988 On the Adiabaticity of Continuum States - Tunnelling Through a Time-Dependent Barrier Z. Phys. D 9 267
- [106] Pimpale A e Razavy M 1991 Quantum Tunnelling in Time-Dependent Potential Barrier - A General Formulation and some Exactly Solvable Models Fortschr. Phys. 39 85
- [107] Dodonov V V, Man'ko V I e Nikonov D E 1992 Exact Propagators for Time-Dependent Coulomb, Delta and Other Potentials Phys. Lett. A 162 359
- [108] Scheitler G e Kleber M 1990 Propagator for 2 Dispersing Delta-Function Potentials Phys. Rev. A 42 55
- [109] Cheng B K e Da Luz M G E 1993 Propagator for the Delta-Function Potential Moving with Constant Velocity Phys. Rev. A 47 4720
- [110] Hughes R J 1995 Unitary Propagators for Time-Dependent Hamiltonians with Singular Potentials J. Math. Anal. Appl. 193 477
- [111] Breit G 1965 A Soluble Semiclassical Particle Transfer Problem Ann. Phys. (NY) 34 377
- [112] Herling G H e Nishida Y 1965 Applications of exactly Soluble 1 Dimensional Model of Transfer Reactions Ann. Phys. (NY) 34 400  
Nishida Y 1965 1 Dimensional Soluble Particle Transfer Problem and Modified Energy Matrix Method Ann. Phys. (NY) 34 415
- [113] Boya L J 1988 Supersymmetric Quantum Mechanics: Two Simple Examples Eur. J. Phys. 9 139
- [114] Grosche C 1990 Path-Integrals for Potential Problems with Sigma-Function Perturbation J. Phys. A: Math. Gen. 23 5205



- [115] Crandall R E 1993 Combinatorial Approach to Feynman Path Integration J. Phys. A: Math. Gen. 26 3627
- [116] Albeverio S, Brzezniak Z e Dabrowski L 1994 Time-Dependent Propagator with Point Interaction J. Phys. A: Math. Gen. 27 4933
- [117] Kleber M 1994 Exact-Solutions for Time-Dependent Phenomena in Quantum-Mechanics Phys. Rep. 236 331
- [118] Olendski O 1995 One-Dimensional Delta-Potential in External Fields J. Phys.: Condens. Matter 7 5067
- [119] Bezak V 1997 The Propagator of Conduction Electrons in Semiconductors with a Delta-Barrier or a Delta-Well Potential .1. General Czechoslovak J. Phys. 47 223
- [120] Grosche C e Steiner F 1998 Handbook of Feynman Path Integrals (Springer Tracts in Modern Physics vol 145) (Berlin: Springer) p 322
- [121] Cheon T e Shigehara T 1998 Realizing Discontinuous Wave Functions with Renormalized Short-Range Potentials Phys. Lett. A 243 111
- [122] Man'ko V I e Chikhachev A S 1998 Integrals of the Motion and Exact Solutions of the Problem of two Dispersing Delta-Well's J. Exp. Theor. Phys. 86 335
- [123] Lee C-C e Ho C-L 2002 Quantum Metastability in a Class of Moving Potentials Phys. Rev. A 65 022111
- [124] Rokhlenko A, Costin O e Lebowitz J L 2002 Decay Versus Survival of a Localized State Subjected to Harmonic Forcing: Exact Results J. Phys. A: Math. Gen. 35 8943
- [125] Schmidt A G M, Cheng B K e da Luz M G E 2002 Green Functions for Generalized Point Interactions in one Dimension: A Scattering Approach Phys. Rev. A 66 062712
- [126] Nakazato H 1997 Time Development of a Wave Packet and the Time Delay Found. Phys. 27 1709
- [127] Robinett R W e Heppelmann S 2002 Quantum Wave-Packet Revivals in Circular Billiards Phys. Rev. A 65 062103
- [128] Vugalter G A, Das A K e Sorokin V A 2002 Revivals in an Infinite Square Well in the Presence of a Delta Well Phys. Rev. A 66 012104

- [129] Kramer T, Bracher C e Kleber M 2002 Matter Waves from Quantum Sources in a Force Field J. Phys. A: Math. Gen. 35 8361  
 Bracher C, Kramer T e Kleber M 2003 Ballistic Matter Waves with Angular Momentum: Exact Solutions and Applications Phys. Rev. A 67 043601
- [130] Andreatta M A e Dodonov V V 2003 On Shrinking and Expansion of Radial Wave Packets J. Phys. A: Math. Gen. 36 7113
- [131] Goovaerts M J, Babenco A e Devreese J T 1973 New Expansion Method in Feynman Path Integral Formalism - Application to a One-Dimensional Delta-Function Potential J. Math. Phys. 14 554
- [132] Lacina A 1980 Quantum-Mechanical Generalization of the Ballistic Electron Wind Theory Czechoslovak J. Phys. B 30 668
- [133] Nussenzveig H M 1972 Causality and Dispersion Relations (New York: Academic)
- [134] Godoy S 2002 Diffraction in Time: Fraunhofer and Fresnel Dispersion by a Slit Phys. Rev. A 65 042111
- [135] Moshinsky M 1952 Diffraction in Time Phys. Rev. 88 625
- [136] Clark T E, Menikoff R e Sharp D H 1980 Quantum-Mechanics on the Half-Line Using Path Integrals Phys. Rev. D 22 3012
- [137] Schulman L S 1982 Exact Time-Dependent Green's Function for the Half-Plane Barrier Phys. Rev. Lett. 49 599
- [138] Akhundova E A, Dodonov V V e Man'ko V I 1985 The Quasi-Classical Propagator of a Quantum Particle in a Uniform-Field in a Half-Space J. Phys. A: Math. Gen. 18 467
- [139] Cheng B K 1990 The 2-Dimensional Harmonic-Oscillator Interacting with a Wedge J. Phys. A: Math. Gen. 23 5807
- [140] Dodonov V V, Klimov A B e Man'ko V I 1991 Quasi-Classical Propagator of a Quantum Particle in the Half-Space Connected with an Ideal Reflecting Wall Nuovo Cim. B 106 1417
- [141] Dodonov V V, Klimov A B e Nikonov D E 1993 Quantum Particle in a Box with Moving Walls J. Math. Phys. 34 3391

- [142] Grosche C 1993 Delta-Function Perturbations and Boundary-Problems by Path Integration Ann. Phys. (Leipzig) 2 557
- [143] Brukner C e Zeilinger A 1997 Diffraction of Matter Waves in Space and in Time Phys. Rev. A 56 3804
- [144] Apelblat A 1983 Table of Definite and Indefinite Integrals (Amsterdam: Elsevier) p 137
- [145] Hauge E H e Støvneng J A 1989 Tunnelling Times - A Critical-Review Rev. Mod. Phys. 61 917
- [146] Olkhovsky V S e Recami E 1992 Recent Developments in the Time Analysis of Tunnelling Processes Phys. Rep. 214 339
- [147] Landauer R e Martin T 1994 Barrier Interaction Time in Tunnelling Rev. Mod. Phys. 66 217
- [148] Muga J G e Leavens C R 2000 Arrival Time in Quantum Mechanics Phys. Rep. 338 353
- [149] Kim S W, Park H K, Sim H S e Schomerus H 2003 Quasibound States at Thresholds in Multichannel Impurity Scattering J. Phys. A: Math. Gen. 36 1299
- [150] Hernández A e García-Calderón G 2003 Quantum Shutter Transient Solutions and the Delay Time for the Delta Potential Phys. Rev. A 68 014104
- [151] Dodonov V V e Mizrahi S S 1996 Decay Times of Quantum States in One- and Two-Photon Absorption Processes Phys. Lett. A 223 404
- [152] Berry M V e Klein G 1984 Newtonian Trajectories and Quantum Waves in Expanding Force-Fields J. Phys. A: Math. Gen. 17 1805
- [153] Schrödinger E 1935 Discussion of Probability Relations Between Separated Systems Proc. Camb. Phil. Soc. 31 555
- [154] Schrödinger E 1935 Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik Naturwissenschaften 23 807, 823 e 844 [Tradução para o inglês em: Quantum Theory and Measurement (J. A. Wheeler e W. H. Zurek, eds.), p. 152, Princeton Univ. Press, Princeton (1983)].

- [155] Einstein A, Podolsky B e Rosen N 1935 Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* 47 777
- [156] Barnett S M e Phoenix S J D 1989 Entropy as a Measure of Quantum Optical Correlation *Phys. Rev. A* 40 2404;  
 Barnett S M e Phoenix S J D 1991 Information-Theory, Squeezing, and Quantum Correlations *Phys. Rev. A* 44 535
- [157] Mann A, Sanders B C e Munro W J 1995 Bells-Inequality for an Entanglement of Nonorthogonal States *Phys. Rev. A* 51 989
- [158] Bennett C H, Herbert H J, Popescu S e Schumacher B 1996 Concentrating Partial Entanglement by Local Operations *Phys. Rev. A* 53 2046  
 Popescu S e Rohrlich D 1997 Thermodynamics and the Measure of Entanglement *Phys. Rev. A* 56 R3319  
 Braunstein S L 1996 Geometry of Quantum Inference *Phys. Lett. A* 219 169  
 Vedral V, Plenio M B, Rippin M A e Knight P L 1997 Quantifying Entanglement *Phys. Rev. Lett.* 78 2275
- [159] Vedral V e Plenio M B 1998 Entanglement Measures and Purification Procedures *Phys. Rev. A* 57 1619
- [160] Wootters W K 1998 Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits *Phys. Rev. Lett.* 80 2245
- [161] Paris M G A 1999 Entanglement in Quantum-Optical Bilinear Devices *J. Opt. B* 1 299  
 Donald M J e Horodecki M 1999 Continuity of Relative Entropy of Entanglement *Phys. Lett. A* 264 257  
 Horodecki M, Horodecki P e Horodecki R 2000 Limits for Entanglement Measures *Phys. Rev. Lett.* 84 2014  
 Horodecki M, Horodecki P e Horodecki R 2000 Information, Relative Entropy of Entanglement, and Irreversibility *Phys. Rev. Lett.* 84 2263  
 Parker S, Bose S e Plenio M B 2000 Entanglement Quantification and Purification in Continuous-Variable Systems *Phys. Rev. A* 61 032305

- Hiroshima T 2001 Decoherence and Entanglement in Two-Mode Squeezed Vacuum States Phys. Rev. A 63 022305
- [162] Horodecki R, Horodecki P e Horodecki M 1996 Quantum Alpha-Entropy Inequalities: Independent Condition for Local Realism? Phys. Lett. A 210 377
- Zyczkowski K, Horodecki P, Sanpera A e Lewenstein M 1998 Volume of the Set of Separable States Phys. Rev. A 58 883
- Santos E e Ferrera M 2000 Linear Entropy and Bell Inequalities Phys. Rev. A 62 024101
- Zanardi P, Zalka C e Faoro L 2000 Entangling Power of Quantum Evolutions Phys. Rev. A 62 030301
- Munro W J, James D F V, White A G e Kwiat P G 2001 Maximizing the Entanglement of Two Mixed Qubits Phys. Rev. A 64 030302
- [163] Furuya K, Nemes M C e Pellegrino G Q 1998 Quantum Dynamical Manifestation of Chaotic Behavior in the Process of Entanglement Phys. Rev. Lett. 80 5524
- Angelo R M, Furuya K, Nemes M C e Pellegrino G Q 2001 Recoherence in the Entanglement Dynamics and Classical Orbits in the N-Atom Jaynes-Cummings Model Phys. Rev. A 64 043801
- Gemmer J e Mahler G 2001 Entanglement and the Factorization-Approximation Eur. Phys. J. D 17 385
- [164] Witte C e Trucks M 1999 A New Entanglement Measure Induced by the Hilbert-Schmidt Norm Phys. Lett. A 257 14
- Ozawa M 2000 Entanglement Measures and the Hilbert-Schmidt Distance Phys. Lett. A 268 158
- [165] Man'ko V I, Marmo G, Sudarshan E C G e Zaccaria F 2002 Interference and Entanglement: An Intrinsic Approach J. Phys. A 35 7137
- [166] de Castro A S M e Dodonov V V 2002 Squeezing Exchange and Entanglement Between Resonantly Coupled Modes J. Russ. Laser Research 23 93
- [167] Dodonov V V, de Castro A S M e Mizrahi S S 2002 Covariance Entanglement Measure for Two-Mode Continuous Variable Systems Phys. Lett. A 296 73

- [168] Dodonov V V e Klimov A B 1996 Generation and Detection of Photons in a Cavity with a Resonantly Oscillating Boundary Phys. Rev. A 53 2664
- [169] Gantmakher F R 1996 The Theory of Matrices (Nauka: Moscow)
- [170] Peřinová V, Lukš A, Křepelka J, Sibilica C e Bertolotti M 1991 Quantum Statistics of Light in a Lossless Linear Coupler J. Mod. Opt. 38 2429
- [171] Dodonov V V, Man'ko O V, Man'ko V I e Wünsche A 2000 Hilbert-Schmidt Distance and Non-Classicality of States in Quantum Optics J. Mod. Opt. 47 633  
Wünsche A, Dodonov V V, Man'ko O V e Man'ko V I 2001 Nonclassicality of States in Quantum Optics Fortschr. Phys. 49 1117
- [172] Duan L M, Giedke G, Cirac J I e Zoller P 2000 Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems Phys. Rev. Lett. 84 2722  
Simon R 2000 Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems Phys. Rev. Lett. 84 2726  
Werner R F e Wolf M M 2001 Bound Entangled Gaussian States Phys. Rev. Lett. 86 3658  
Marian P, Marian T A e Scutaru H 2001 Inseparability of Mixed Two-Mode Gaussian States Generated with a SU(1,1) Interferometer J. Phys. A 34 6969  
Scheel S e Welsch D G 2001 Entanglement Generation and Degradation by Passive Optical Devices Phys. Rev. A 64 063811
- [173] Dodonov V V e Man'ko V I 1986, in: A. A. Komar, (Ed.), Group Theory, Gravitation and Elementary Particle Physics, Anais do Lebedev Phys. Inst., vol. 167, (Nauka: Moscow) p. 7 [traduzido por Nova Science, Commack (1987), p. 7].
- [174] Lukš A e Peřinová V 1989 Entropy of Shifted Gaussian States Czechosl. J. Phys. 39 392
- [175] Holevo A S, Söhma M e Hirota O 1999 Capacity of Quantum Gaussian Channels Phys. Rev. A 59 1820
- [176] Dodonov V V 2003, in: Dodonov V V e Man'ko V I (Eds.), Theory of Non-classical States of Light, (Taylor & Francis: London), p. 153.

- [177] Agarwal G S 1971 Entropy, Wigner Distribution Function, and Approach to Equilibrium of a System of Coupled Harmonic Oscillators Phys. Rev. A 3 828
- [178] Peřinová V, Křepelka J, Peřina J, Lukš A e Szlachetka P 1986 Entropy of Optical-Fields Opt. Acta 33 15
- [179] Dodonov V V e Man'ko O V 2000 Universal Invariants in Quantum Mechanics and Physics of Optical and Particle Beams J. Russ. Laser Res. 21 438
- [180] Trifonov D A 2000 Generalized Uncertainty Relations and Coherent and Squeezed States J. Opt. Soc. Am. A 17 2486
- [181] Dodonov V V 2001, in: M. W. Evans (Ed.), Modern Nonlinear Optics, Série Advances in Chem. Phys., vol. 119, (Wiley: New York), Parte 1, p. 309.
- [182] Dodonov V V, Klimov A B e Man'ko V I 1989 Nonstationary Casimir Effect and Oscillator Energy-Level Shift Phys. Lett. A 142 511
- [183] Schwinger J 1993 Casimir Light - A Glimpse Proc. Nat. Acad. Sci. USA 90 958
- [184] Barton G e Eberlein C 1993 On Quantum Radiation from a Moving Body with Finite Refractive-Index Ann. Phys. (NY) 227 222
- [185] Lambrecht A, Jaekel M T e Reynaud S 1996 Motion Induced Radiation from a Vibrating Cavity Phys. Rev. Lett. 77 615
- [186] Law C K 1994 Effective Hamiltonian for the Radiation in a Cavity with a Moving Mirror and a Time-Varying Dielectric Medium Phys. Rev. A 49 433
- Law C K 1995 Interaction Between a Moving Mirror and Radiation Pressure: A Hamiltonian Formulation Phys. Rev. A 51 2537
- [187] Schützhold R, Plunien G e Soř G 1998 Trembling Cavities in the Canonical Approach Phys. Rev. A 57 2311
- [188] Schützhold R, Plunien G e Soř G 2002 Motion-Induced Particle Creation from a Finite-Temperature State Phys. Rev. A 65 043820
- Schaller G, Schützhold R, Plunien G e Soř G 2002 Dynamical Casimir Effect in a Leaky Cavity at Finite Temperature Phys. Rev. A 66 023812

- [189] Saito H e Hyuga H 2002 Dynamical Casimir Effect Without Boundary Conditions Phys. Rev. A 65 053804
- [190] Machado L A S e Maia Neto P A 2002 Inertial Forces in the Casimir Effect with Two Moving Plates Phys. Rev. D 65 125005
- [191] Dodonov V V 1998 Resonance Photon Generation in a Vibrating Cavity J. Phys. A 31 9835
- [192] Dodonov V V e Andreato M A 1999 Squeezing and Photon Distribution in a Vibrating Cavity J. Phys. A 32 6711
- [193] Dodonov V V 1996 Resonance Excitation and Cooling of Electromagnetic Modes in a Cavity with an Oscillating Wall Phys. Lett. A 213 219
- [194] Andreato M A e Dodonov V V 2000 Energy Density and Packet Formation in a Vibrating Cavity J. Phys. A 33 3209