

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Medições destrutivas e não-destrutivas em
campos eletromagnéticos e
processos não-estacionários em
Eletrodinâmica Quântica de circuitos

Alexandre Dodonov

São Carlos – SP
- Fevereiro – 2009 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Medições destrutivas e não-destrutivas em
campos eletromagnéticos e
processos não-estacionários em
Eletrodinâmica Quântica de circuitos

Alexandre Dodonov

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de São Carlos
como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi

São Carlos – SP
- Fevereiro – 2009 -

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

D646md

Dodonov, Alexandre.

Medições destrutivas e não-destrutivas em campos eletromagnéticos e processos não-estacionários em eletrodinâmica quântica de circuitos / Alexandre Dodonov. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
173 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Óptica quântica. 2. Fotodeteção. 3. Salto quântico. 4. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 5. Sistemas quânticos abertos. 6. Efeito Casimir dinâmico. I. Título.

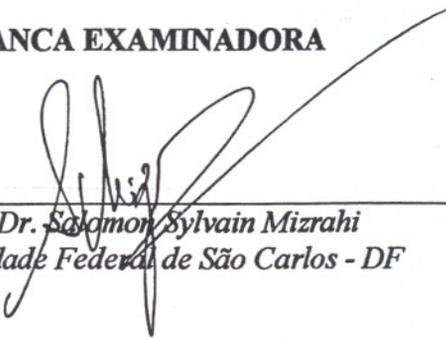
CDD: 530 (20^a)

Alexandre Dodonov

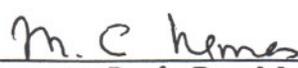
Tese de Doutorado submetida à
Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física, da Universidade
Federal de São Carlos, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.

Aprovado em 10 de Fevereiro de 2009.

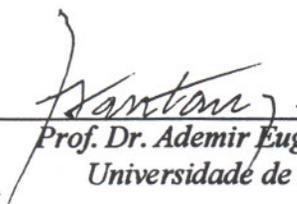
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi
Universidade Federal de São Carlos - DF



Prof. Dra. Maria Carolina Nemes
Universidade Federal de Minas Gerais - DF



Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana
Universidade de Brasília - IF



Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranejo
Universidade Estadual de Campinas - IFGW



Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa
Universidade de São Paulo - IFSC
Universidade Federal de São Carlos - DF

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a:

- meu orientador, Prof. Dr. Salomon S. Mizrahi
- FAPESP (projeto No. 04/13705-3) pelo suporte financeiro
- Institute for Theoretical Atomic, Molecular and Optical Physics (ITAMP - Harvard University), onde realizei o estágio de doutorado, pelo suporte
- Profa. Dra. Susanne F. Yelin e Prof. Dr. Mikhail D. Lukin, que me orientaram durante o estágio de doutorado em ITAMP

Resumo

Nesta tese são abordados três assuntos. O primeiro está ligado ao Modelo de Fotodeteção Contínua, que descreve a evolução do campo eletromagnético dentro de uma cavidade, sujeito a medições destrutivas por meio de um detector. Nós analisamos dois modelos microscópicos para descrever a interação entre o campo e o detector, em que este pode ser representado por um átomo de dois níveis, ou por um oscilador harmônico, acoplado ao mecanismo de amplificação. Nós deduzimos o Superoperador de Salto Quântico, que descreve o estado do campo imediatamente após a detecção, e mostramos que em regimes específicos podemos recuperar os Superoperadores de Salto Quântico propostos originalmente *ad hoc* na literatura. Ademais, nós incluímos os efeitos de não-idealidade no Modelo de Fotodeteção Contínua, tais como a eficiência quântica, contagens escuras, o tempo morto do detector e a relaxação do campo na cavidade, e propomos alguns esquemas experimentais para verificar qual Superoperador de Salto Quântico prevalece.

Como segundo assunto, mostramos como uma grande família de equações mestras quânticas para um oscilador harmônico pode ser obtida usando uma abordagem fenomenológica, baseada na suposição de que o meio ambiente pode ser simulado por duas forças clássicas estocásticas. Em casos especiais, as equações mestras conhecidas da literatura são recuperadas, cuja parte dissipativa é bilinear com respeito aos operadores de posição e momentum.

O último tópico da tese está relacionado com a Eletrodinâmica Quântica de circuitos. Nós demonstramos que é possível engendrar interações efetivas no sistema em que a frequência de transição do átomo artificial, ou o acoplamento átomo-campo, tem uma pequena modulação temporal periódica ou não-periódica, prescrita externamente. Assim, mostramos que um efeito análogo ao efeito Casimir dinâmico pode ser simulado em Eletrodinâmica Quântica de circuitos, e vários fótons, bem como estados emaranhados átomo-campo, podem ser gerados a partir do vácuo devido ao termo “contragirante” presente no Hamiltoniano de Rabi.

Abstract

In this dissertation three topics are studied. The first one is related to the Continuous Photodetection Model, that describes the evolution of the electromagnetic field confined in a cavity, subjected to destructive measurements by a detector. We analyzed two microscopic models for describing the field-detector interaction, in which the detector can be represented by a two-level atom, or an harmonic oscillator, coupled to the detector's amplification mechanism. We deduced a general Quantum Jump Superoperator, describing the field state upon a detection, and showed that in specific regimes it reduces to the Quantum Jump Superoperators proposed originally *ad hoc* in the literature. Moreover, we included the effects of non-ideality in the Continuous Photodetection Model, such as the quantum efficiency, dark counts, detector dead time and cavity field relaxation, and proposed several schemes to verify experimentally which Quantum Jump Superoperator prevails.

As the second subject, we showed how a large family of quantum master equations for an harmonic oscillator can be obtained via a phenomenological approach, based on the hypothesis that the environment can be simulated by two stochastic classical forces. As special cases, we recovered known master equations of the literature, whose dissipative kernel is bilinear with respect to the position and momentum operators.

The last topic regards the circuit Quantum Electrodynamics (circuit QED). We demonstrated that it is possible to engineer effective interactions in circuit QED architecture, where the artificial atom transition frequency, or the atom-field coupling, has a small periodic or nonperiodic time modulation, prescribed externally. We showed that an analog of the dynamical Casimir effect can be simulated in nonstationary circuit QED, and several photons, as well as atom-cavity entangled states, can be generated from vacuum due to the “anti-rotating” term in the Rabi Hamiltonian.

Lista de Abreviaturas

AJC: Anti-Jaynes-Cummings

$C\mathcal{D}k$: subtração de k fótons usando um detector com resolução

$C\mathbb{D}k$: adição de k fótons usando um detector com resolução

CPB: Cooper Pair Box

DT: Dependente de tempo

DPC: Densidade de probabilidade de coincidência

DPE: Densidade de probabilidade elementar

DUF: Detector de um único fóton

ECD: Efeito Casimir dinâmico

EDQ: Eletrodinâmica Quântica

EDQC: Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

EDQc: Eletrodinâmica Quântica de circuitos

EQ: Eficiência quântica

$h.c.$: Hermitiano conjugado

JC: Jaynes-Cummings

MA: Mecanismo de amplificação

MFC: Modelo de Fotodeteção Contínua

PC: Parâmetro de controle

(medição) QND: (medição) Quântica Não-demolidora

SAF: Superoperador de adição de fótons

$S\mathcal{D}k$: subtração de k fótons usando um detector sem resolução

$S\mathbb{D}k$: adição de k fótons usando um detector sem resolução

SSF: Superoperador de subtração de fótons

SSQ: Superoperador de Salto Quântico

Lista de Figuras

2.1	a) Representação de DPC: regiões preenchidas correspondem à evolução não-condicionada entre os clicks nos tempos t_1, t_2, \dots, t_m . b) Representação de DPE, com operações de não-contagem entre os clicks.	20
3.1	Esquema do modelo microscópico de interação campo-aparelho de medição.	29
3.2	Dependência do coeficiente diagonal f_{nn} para pequenos e moderados valores do parâmetro χ	40
3.3	Dependência do coeficiente diagonal f_{nn} para grandes valores do parâmetro χ	41
3.4	Comparação entre a integração numérica das equações (3.43), (3.57) e fórmulas analíticas aproximadas (3.54), (3.61).	42
3.5	Razão sinal-ruído em função de b	50
3.6	Taxa de contagens claras em função do comprimento de onda.	52
3.7	O termo de taxa de contagens claras normalizado em função de n	53
3.8	O termo de contagens escuras normalizado em função de n	54
4.1	Número médio de fotocontagens \bar{m}_t nos modelos E e A.	66
4.2	Segundo momento fatorial normalizado K_t para modelos A e E.	67
4.3	Tempo de espera médio $\bar{\tau}_t$ versus N_{CAV}	69
4.4	Esboço do esquema para verificar SSQ usando uma cavidade e átomos de Rydberg.	72
4.5	Probabilidades de encontrar 0 e 1 fótons depois de um salto quântico para os estados iniciais coerente e o térmico.	74
4.6	O mesmo que figura 4.5b, mas como função da probabilidade p_1	75

4.7	p_n^H para o modelo H em função de y para $p_0 = 0, 6$	76
4.8	a) Esquema para subtração de fótons, usando um divisor de feixes (DF) e um detector (D). b) Esquema para adição de fótons, usando um feixe de bombeio, um cristal óptico não-linear e um detector.	79
4.9	Resultados para $SD1$ e $CD1$ para o estado de “luz mista”.	82
4.10	Comparação entre duas detecções sequenciais e a detecção de dois fótons simultaneamente.	83
4.11	Resultados de $SD1$ para o estado térmico.	86
6.1	Esboço esquemático e representação em termos de elementos de circuito para EDQc e CPB.	110
6.2	Integração numérica de Hamiltoniano de Rabi para a ressonância de AJC.	122
6.3	P_{g0} , P_{e1} e P_{g2} obtidos pela integração numérica de Hamiltoniano de Rabi no regime ressonante átomo-campo para a ressonância de AJC.	123
6.4	Integração numérica de Hamiltoniano de Rabi para a ressonância de JC.	125
6.5	Integração numérica de Hamiltoniano de Rabi para a ressonância de ECD.	129
6.6	A dinâmica exata de $\langle n \rangle$ e P_e versus tempo para a ressonância de ECD e a estatística de fótons criados.	131
6.7	Número médio de fótons e a inversão de população atômica para o Hamiltoniano exato e o efetivo para o deslocamentos de ressonância a) $\xi = -\delta_0$ e b) $\xi = \tilde{\xi}(t)$	136

Sumário

1	Visão geral da tese	1
2	Teorias quânticas de fotodeteção	4
2.1	Introdução	4
2.2	Teorias convencionais de fotodeteção	8
2.3	Teoria de medições contínuas	10
2.4	Trajetórias quânticas	15
2.5	Densidades de probabilidade e tempos de espera	17
2.6	Modelo de Srinivas e Davies	20
2.7	Modelo microscópico de Saltos Quânticos	22
3	Modelos microscópicos de SSQ	25
3.1	Modelo de detector ideal	25
3.1.1	Introdução	25
3.1.2	Modelo de átomo de 2-níveis	28
3.1.3	Modelo de oscilador harmónico	35
3.1.4	Conclusões	41
3.2	Detector à temperatura não-nula	43
3.2.1	Introdução	43
3.2.2	Modelo de detector imperfeito	45
3.2.3	Comparação com dados experimentais	49
3.2.4	Forma operacional de SSQ	51
3.2.5	Conclusões	55

4	Verificação experimental de SSQ	56
4.1	Modelo de fotodeteccção contínua: inclusão de defeitos experimentais	56
4.1.1	Introdução	56
4.1.2	Modelo A	59
4.1.3	Modelo E	63
4.1.4	Esquema para verificação de SSQ usando cavidade e DUF	66
4.1.5	Discussão e conclusões	70
4.2	Esquema para verificar SSQ usando uma cavidade e átomos de Rydberg	71
4.2.1	Introdução	71
4.2.2	O método para verificar SSQ	72
4.2.3	Discussão e conclusões	76
4.3	Subtração e adição de fótons em ondas viajantes	77
4.3.1	Introdução	78
4.3.2	Subtração de fótons	80
4.3.3	Adição de fótons	83
4.3.4	Discussão e conclusões	85
5	Equações mestras fenomenológicas	87
5.1	Introdução	87
5.2	Equações mestras usuais	89
5.3	De forças clássicas estocásticas a equações mestras quânticas	94
5.3.1	Tratamento clássico	94
5.3.2	Tratamento quântico	96
5.4	Sumário e conclusões	102
6	Processos não-estacionários em EDQ de circuitos	104
6.1	Introdução	104
6.2	Eletrodinâmica Quântica de cavidades	105
6.3	Eletrodinâmica Quântica de circuitos	108
6.3.1	A cavidade	109

6.3.2	O átomo artificial	112
6.3.3	Sistema átomo-campo	114
6.3.4	Medição em EDQc	115
6.3.5	Resultados recentes em EDQc	116
6.4	Processos não-estacionários em EDQc	118
6.4.1	Formulação do problema	119
6.4.2	Ressonância de Anti-Jaynes-Cummings	120
6.4.3	Ressonância de Jaynes-Cummings	124
6.4.4	Ressonância do efeito Casimir dinâmico	126
6.4.5	Discussão de resultados para modulação periódica	131
6.4.6	Modulação não-periódica em EDQc	134
6.5	Conclusões	137
7	Conclusões	139
A	Dissipação e o tempo morto do detector no MFC	144
B	Cálculo de expressões para modelos A e E	146
C	Expressões para subtração e adição de fótons	149
C.1	Expressões para subtração de fótons	149
C.2	Expressões para subtração de fótons sequencial	151
C.3	Expressões para adição de fótons	151
D	Dedução da equação mestra fenomenológica	153

Capítulo 1

Visão geral da tese

Os primeiros três capítulos desta tese são dedicados ao Modelo de Fotodeteção Contínua (MFC), que descreve a evolução temporal do estado do campo eletromagnético em uma cavidade, sujeito à perda de fótons e à atualização contínua da informação devido ao monitoramento por um detector. No capítulo 2 revemos brevemente as teorias quânticas de fotodeteção convencionais, esquematizamos o arranjo usado nos experimentos de fotocontagem e descrevemos as propriedades fundamentais do MFC.

Um dos ingredientes principais do MFC é o chamado Superoperador de Salto Quântico (SSQ) que descreve formalmente o estado do campo imediatamente após um “click” (uma ativação do detector). Existem na literatura duas propostas diferentes para o SSQ, ambas são postulações *ad hoc*. Por conseguinte, um dos objetivos da tese é formular um modelo quântico microscópico para a interação entre o campo e o detector, a partir do qual possamos identificar o SSQ. Isto é feito no capítulo 3, onde apresentamos dois diferentes tipos de descrição para o detector, que foi modelado como um “sensor” (objeto “quântico”, que interage diretamente com o campo) acoplado ao Mecanismo de Amplificação (objeto “clássico”, responsável pelo decaimento do estado excitado do sensor e da subsequente produção de fotoelétrons). Como primeiro exemplo, o sensor será descrito como um sistema efetivo de dois níveis, e no segundo como um oscilador harmônico. Será mostrado que diferentes modelagens do detector predizem diferentes expressões formais para o SSQ, e sob certas condições pode-se recuperar os SSQ propostos originalmente *ad hoc* na literatura.

O assunto seguinte tratado na tese consiste em sugerir três experimentos de

fotocontagem que possam verificar (ou não) a expressão formal do SSQ que propomos; isto é tratado no capítulo 4. Neste, consideramos primeiramente o caso de uma cavidade não-ideal acoplada a um detector imperfeito com eficiência quântica não-unitária, com uma taxa finita de contagens escuras e com um tempo morto não-nulo. Serão estudados os valores médios de vários observáveis associados às fotocontagens, que comparados com dados experimentais, permitam verificar qual é o SSQ que descreve melhor o processo de medição. Em seguida, vamos descrever um método bastante direto para verificar a forma do SSQ, baseado em absorções monitoradas de fótons e medições não-demolidoras do número de fótons feitas em cavidades com um fator de qualidade extremamente alto, cujo estado do campo é medido por meio de átomos de Rydberg, na área de pesquisa conhecida como Eletrodinâmica Quântica de cavidades. Finalmente, analisamos um método para estudar o SSQ em ondas viajantes incidentes sobre um divisor de feixes ou um cristal não-linear, onde a fotodeteção contínua feita sobre um dos modos resultantes leva a implementação condicional do SSQ que descreve as operações de subtração ou adição de fótons, respectivamente, no modo complementar. Será mostrado que o SSQ resultante depende, essencialmente, da intensidade do feixe incidente, e que nos casos limite os SSQ propostos originalmente *ad hoc* podem ser recuperados.

O capítulo 5 é dedicado ao estudo de equações mestras para o movimento Browniano quântico de um oscilador harmônico com dissipação translacionalmente invariante. Vamos mostrar que uma grande família de equações mestras pode ser deduzida no contexto de abordagem fenomenológica, em que o meio ambiente é modelado por duas forças clássicas estocásticas. Esta família será determinada por três funções de correlação dependentes do tempo, e portanto ela incluirá o caso de reservatórios não-Markovianos. Vamos apontar que a equação mestra resultante inclui como casos especiais as equações mestras conhecidas de Óptica Quântica, cuja parte dissipativa é bilinear com respeito aos operadores de posição e momentum.

Como o último assunto apresentado nesta tese, no capítulo 6, estudamos processos não-estacionários em Eletrodinâmica Quântica de circuitos. Nos últimos cinco anos foram realizados diversos experimentos que demonstraram a interação coerente entre um átomo artificial supercondutor de dois níveis (formado por duas Junções Josephson) e um campo eletromagnético (no regime de microondas) na cavidade sobre um *chip*. Esta

área de pesquisa foi batizada de Eletrodinâmica Quântica de circuitos (EDQc), em analogia a Eletrodinâmica Quântica de cavidades, que estuda a interação entre átomos reais e o campo eletromagnético em cavidades tridimensionais. Vamos analisar o sistema de EDQc não-estacionário, quando a frequência de transição do átomo artificial, ou o acoplamento átomo-campo, tem uma pequena modulação temporal periódica, conduzida por um campo externo. Vamos mostrar que no *regime dispersivo*, quando a periodicidade da modulação é ajustada às “ressonâncias”, a dinâmica do sistema apresenta os comportamentos de efeito Casimir dinâmico, o modelo de Jaynes-Cummings ou o de Anti-Jaynes-Cummings, sendo descritos por Hamiltonianos efetivos correspondentes. Por outro lado, é mostrado que no *regime ressonante*, sob a respectiva “ressonância”, a dinâmica é similar àquela que ocorre para um átomo de dois níveis estacionário em uma cavidade vibrante, e estados emaranhados com dois fótons podem ser criados para o estado inicial de vácuo. Assim, é demonstrado que (1) um efeito análogo ao efeito Casimir dinâmico pode ser simulado em EDQc, e (2) vários fótons, bem como estados emaranhados átomo-campo, podem ser gerados para o estado inicial de vácuo devido ao termo “contragirante” presente no Hamiltoniano de Rabi. Por último, vamos considerar brevemente o caso de modulação temporal *não-periódica*, dada por uma soma de duas funções harmônicas com frequências e amplitudes diferentes, e mostrar que a geração de fótons a partir do vácuo também é possível.

Cada capítulo contém uma introdução própria, e no capítulo 7 serão apresentadas as conclusões finais da tese.

Capítulo 2

Teorias quânticas de fotodeteccção

2.1 Introdução

Um dos principais instrumentos na descrição quântica da radiação eletromagnética é a sua distribuição de probabilidades de fótons, ou no caso mais geral, o seu *operador densidade*. Medições de *graus de coerência quântica*, através de experimentos de interferometria [1], fornecem uma parte de informação a respeito dos elementos de matriz do *operador estatístico*¹. Informação adicional é obtida através de experimentos de contagem de fótons, ou *fotocontagem*. Experimentos de fotocontagem fornecem uma medida bastante direta da distribuição de probabilidades de fótons para todos os tipos de radiação descritos pela teoria quântica. Tais experimentos formam a base observacional de óptica quântica e têm um papel fundamental no estudo de fenômenos quânticos nos feixes de luz.

O assunto medição quântica é tão antigo quanto os fundamentos da própria Mecânica Quântica. Por muito tempo o esquema de redução brusca de estado, proposto por *von Neumann* [2], prevaleceu. Ele conjecturou que a medição de um observável do sistema provoca a redução do seu estado quântico a um dos seus autoestados, ou em outras palavras, uma mudança brusca do sistema através de *colapso da função de onda*. No entanto, ao medir o campo eletromagnético através de processo de fotocontagem, os fótons são detectados e contados um a um. Um fóton que entra na válvula fotomultiplicadora provoca uma rajada de fotocorrente, que é interpretada como devida à absorção de um único fóton. Assim, uma única fotodeteccção é registrada e contada. Uma sequência de

¹Nesta tese, os termos “*operador densidade*” e “*operador estatístico*” têm o mesmo significado.

rajadas de corrente elétrica é associada ao processo de fotocontagem [1].

Portanto, a determinação do estado do campo não é feita numa única medição instantânea e projetiva, mas decorre um certo tempo t para contar-se uma sequência de fotocontagens, cuja estatística fornece a informação sobre o estado do campo. A teoria clássica que descreve este processo foi proposta por *Mandel* [3]. Teorias quânticas de fotocontagem foram desenvolvidas por diversos autores [4–8] (ver a revisão [9] para mais referências). Estas teorias são baseadas na suposição de que uma medição de m fótons é feita instantaneamente, independentemente da duração do processo de medição. No entanto, na realidade os fótons são contados em sequência, um a um, e o intervalo de tempo entre as contagens é irregular e incontável.

O arranjo experimental básico nos experimentos de fotocontagem é o seguinte: um feixe de luz sob investigação é manipulado de modo a incidir sobre o detector – uma válvula fotomultiplicadora conectada por eletrônica adequada a um instrumento de contagem, que registra o número de emissões fotoelétricas na válvula fotomultiplicadora. Cada leitura de rajada de elétrons (corrente elétrica) é vista como uma manifestação de um *único* fóton. Um obturador na frente da válvula fotomultiplicadora controla o intervalo de tempo durante o qual a luz incide sobre o detector. Produzida a radiação, o obturador é aberto por um intervalo de tempo T ; depois disso, o obturador é fechado e conta-se o número de fotoelétrons registrados. Desde que o experimentador seja capaz de reproduzir repetidamente um campo nas mesmas condições, este experimento é repetido um grande número de vezes (de ordem de 10^5 , corriqueiramente) e o resultado pode ser expresso como uma distribuição de probabilidades $P_m(T)$ para m contagens durante o tempo de observação T . A distribuição medida $P_m(T)$ contém a informação sobre as propriedades estatísticas de radiação, como detalhado em numerosos livros-texto de Óptica Quântica [1, 10].

Apesar de a distribuição de probabilidade de fótons $P_m(T)$ fornecer o máximo de informação a respeito de elementos diagonais do operador densidade, ela não é a única grandeza que pode ser determinada através de experimentos de fotocontagem. Existem muitas outras quantidades observáveis que ajudam no estudo de características da radiação e vamos descrevê-las na seção 2.5.

Tendo discutido a técnica experimental de fotocontagem, vamos rever breve-

mente as teorias que descrevem o processo de medição quântica. Por muito tempo a teoria de medição de *von Neumann* [2] foi tida como definitiva no que diz respeito aos distintos processos de evolução de sistemas sujeitos a medições. De acordo com esta teoria, o processo quântico de fotodeteção é dividido em duas etapas. Na primeira, o campo de fótons e o detector se acoplam via uma interação e a sua evolução é unitária, estabelecendo-se uma correlação quântica. Este processo é *reversível* porque a interação é unitária. Na segunda etapa, o número de conversões fotoelétricas é lido instantaneamente, produzindo um novo estado quântico do campo de fótons via redução não-unitária do estado. Tal processo denomina-se *medição do primeiro tipo* ou *não-destrutiva* [2].

O processo de fotodeteção realista, entretanto, distingue-se do processo descrito acima, porque o número de fotoelétrons é medido não de uma única vez, mas sequencialmente, um a um. A informação referente ao registro de uma fotocontagem é lida em tempo real ao longo do período de medição. A redução do estado de campo de fótons ocorre, portanto, a cada momento enquanto o detector estiver ativo e, conseqüentemente, o campo de fótons evolui não-unitariamente. Várias repetições do experimento devem ser realizadas, necessárias para calcular valores médios de quantidades relevantes. É claro, então, que o aparato de medida faz medições deste observável *continuamente*, e o estado do campo deve ser atualizado continuamente para refletir o conhecimento mais recente sobre o sistema, resultante do processo de medição. Tal tipo de processo de medição é denominado *processo de medição contínua*, *medição do segundo tipo* ou *destrutiva* [11].

Existem duas abordagens diferentes para a teoria de fotodeteção e vamos descrevê-las brevemente na seção 2.2. A primeira delas foi iniciada por *Mandel* [3] e seguida por *Kelley* e *Kleiner* [6], *Glauber* [4] e outros. Ela descreve experimentos em que um feixe se propaga em espaço aberto, incide sobre o detector, e cada fóton não absorvido é perdido. Tal descrição foi classificada por *Mandel* [5] como modelo de *sistema aberto*.

A segunda abordagem foi iniciada por *Mollow* [7] e seguida por *Scully* e *Lamb* [8], *Shepherd* [12], *Selloni et al.* [13], *Srinivas* e *Davies* [14] e outros. Nela, considera-se que a radiação e o fotodetector encontram-se em uma cavidade fechada, e cada fóton não absorvido pelo detector em um dado tempo está disponível para deteção em um tempo posterior². *Mandel* denominou este processo de modelo de *sistema fechado* [5].

²É claro que este modelo pode ser generalizado, introduzindo os efeitos de perdas devido a paredes

A diferença entre as duas abordagens é bastante clara, se considerarmos os resultados de fotodeteção para tempos de detecção grandes: no caso de sistema fechado, o número de fótons detectados tende a um limite, dado pelo número de fótons presentes inicialmente na cavidade. Já no caso do modelo de sistema aberto, o número de fótons detectados cresce ilimitadamente, pois a radiação atinge continuamente a superfície do detector.

Na prática, o arranjo experimental correspondente ao modelo de sistema aberto tem sido predominante nos experimentos de contagem de fótons até agora, devido a sua simplicidade, pois ele exige apenas a presença de um detector e de uma fonte de radiação. No entanto, com o desenvolvimento tecnológico, o modelo de sistema fechado vem se tornando fundamental no estudo de processos em que são contados poucos fótons, como ocorre em vários cenários atuais de óptica quântica (ver, por exemplo, [15–17]). No entanto, tais experimentos esbarram em dificuldades técnicas, já que são necessárias cavidades ópticas com alto *fator de qualidade* [18], que sejam capazes de armazenar os fótons por um tempo suficientemente grande para serem detectados.

Por intermédio da fotocontagem um grande número de experimentos pode ser realizado, determinando características como a energia de um campo de luz, suas propriedades estatísticas, tais como estados de campo, e a determinação de quadraturas através de mecanismos de *deteção homodina* [10, 19]. Recentemente, a fotodeteção foi utilizada como recurso fundamental em protocolos de informação quântica [20], tais como *teletransporte* de estados de polarização da luz [21], *comunicação quântica* [22], criptografia quântica [23], repetidores quânticos [24] e *computação quântica* em sistemas ópticos não-lineares [25]. No entanto, muitos destes experimentos ainda são descritos teoricamente por processos de medição de *primeiro tipo*, apesar da existência de teorias de *fotodeteção contínua*, como a teoria quântica de fotocontagem desenvolvida na década de 1980 por *Srinivas e Davies* [14].

Neste capítulo pretendemos descrever de uma maneira breve, mas completa, a teoria de *Srinivas e Davies*, tanto a sua formulação axiomática (seção 2.3), quanto a imperfeitas da cavidade, que podem absorver fótons, e detectores imperfeitos, que podem absorver fótons sem produzir corrente elétrica. Estes efeitos farão com que o número médio de fótons detectados seja menor que o número médio de fótons presentes inicialmente. Vamos tratar estes efeitos dissipativos no capítulo 4.

abordagem baseada em *trajetórias quânticas* (seção 2.4). Na seção 2.6 vamos descrever a teoria de Srinivas e Davies aplicada à fotodeteção de um campo monomodal, e apontar algumas inconsistências que surgem neste caso. Na seção 2.7 vamos descrever, sucintamente, os modelos microscópicos para descrever o detector, que serão analisados em detalhes no capítulo 3. Além disso, vamos descrever os experimentos de fotocontagem em condições reais e propor algumas técnicas experimentais para a verificação da teoria, que serão estudadas detalhadamente no capítulo 4.

2.2 Teorias convencionais de fotodeteção

A quantidade aleatória fundamental medida pelo detector é o número de fótons (em forma de fotoelétrons) em um intervalo de tempo qualquer $[t_0, t_0 + t)$. Portanto, o objetivo da maioria das teorias de fotodeteção consiste em chegar a uma fórmula para a probabilidade $P_m([t_0, t_0 + t))$ de que m contagens são registradas no intervalo $[t_0, t_0 + t)$. Para campos ópticos clássicos, tal fórmula de contagem foi obtida pela primeira vez por *Mandel* [3, 26], sob as suposições de que (i) as probabilidades para registrar contagens em diferentes intervalos (infinitesimais) de tempo dt' são estatisticamente independentes, e (ii) a probabilidade de detecção por unidade de tempo é proporcional à intensidade $\bar{I}(t')$ neste tempo, $p(t')dt' = \eta\bar{I}(t')dt'$, onde η é um parâmetro relacionado com a eficiência do detector. Para luz ergódica e estacionária, Mandel deduziu a probabilidade de se contar m fótons durante o tempo t :

$$P_m(t) = \left\langle \frac{[\eta\bar{I}(t_0, t)t]^m}{m!} \exp[-\eta\bar{I}(t_0, t)t] \right\rangle. \quad (2.1)$$

Aqui, os colchetes $\langle \dots \rangle$ denotam uma média sobre os tempos iniciais sucessivos t_0 ou uma média estatística sobre as flutuações da intensidade, e

$$\bar{I}(t_0, t) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} dt' \bar{I}(t'). \quad (2.2)$$

é a intensidade média que incide sobre o detector durante o período de tempo $[t_0, t_0 + t)$.

Como já foi apontado na introdução, existem duas abordagens diferentes para a teoria quântica de fotodeteção, que levam a diferentes probabilidades. A primeira, válida para sistemas abertos, está relacionada de perto com a abordagem clássica de

Mandel [1]. Ela substitui a intensidade clássica pelo operador de intensidade, que controla a taxa de absorção de fótons no efeito fotoelétrico, e leva à fórmula quântica de Mandel

$$P_m(t_0, t_0 + t) = \left\langle : \frac{[\eta \hat{I}(t_0, t)]^m}{m!} \exp -[\eta \hat{I}(t_0, t)] : \right\rangle, \quad (2.3)$$

onde os colchetes denotam agora o valor médio calculado usando o operador densidade apropriado $\hat{\rho}$ e $: \dots :$ representa o ordenamento normal de operadores de criação e aniquilação do campo. O operador de intensidade $\hat{I}(t_0, t)$ é definido em termos de partes de frequência positiva e negativa $\hat{E}^\pm(t')$ de operadores do campo (ver, por exemplo, [1]):

$$\hat{I}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \hat{E}^-(t') \hat{E}^+(t') dt'. \quad (2.4)$$

Se o estado do campo eletromagnético $\hat{\rho}$ for escrito na representação \mathcal{P} de Glauber-Sudarshan como

$$\hat{\rho} = \int \mathcal{P}(z) |z\rangle \langle z| d^2z,$$

onde z denota a amplitude de estado coerente $|z\rangle$, então para uma luz estacionária a fórmula (2.3) é reescrita como

$$P_m(t) = \int \mathcal{P}(z) \frac{(|z|^2 \eta t)^m}{m!} \exp(-|z|^2 \eta t) d^2z, \quad (2.5)$$

que é similar à fórmula semiclassical de Mandel, equação (2.1).

A fórmula (2.5) tem uma série de limitações, quando aplicada ao modelo do sistema fechado. Um simples cálculo baseado na expressão (2.5) mostra que o número médio de fótons contados no intervalo $[0, t)$ é dado por

$$\langle m(t) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m P_m(t) = \eta t \int \mathcal{P}(z) |z|^2 d^2z = \eta t \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{n}],$$

que para $t > \eta^{-1}$ excede o número médio de fótons inicialmente presentes no campo, dado por $\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{n}]$, onde \hat{n} é o operador de número de fótons. Na verdade, para $t \rightarrow \infty$ o número médio de fótons contados sempre será infinito, a menos que $\hat{\rho}$ seja o estado de vácuo. Então, vemos que essa fórmula, a princípio, não se aplica a sistemas fechados.

Em segundo lugar, o fato de que a função de distribuição quântica $\mathcal{P}(z)$ assume valores negativos para uma grande classe de estados torna o lado direito da equação (2.5) suspeito como uma probabilidade. Por exemplo, para um estado de n fótons, $|n\rangle$, a probabilidade de contagem (2.3) para $m < n$ reduz-se a

$$P_m(t) = \binom{n}{m} (\eta t)^m (1 - \eta t)^{n-m}, \quad (2.6)$$

que assume valores negativos para tempos $t > \eta^{-1}$.

As duas limitações descritas acima surgem porque não foi levada em conta a atenuação do feixe devido ao processo de medição. Estas dificuldades foram resolvidas usando-se a abordagem de sistemas fechados, iniciada por *Mollow* [7]. O método adotado se resumia a determinar a evolução do sistema composto detector³-campo durante o intervalo de tempo $[0, t)$, e depois calcular a probabilidade de que um total de m fótons tenha sido registrado pelo detector até o instante t . Para o caso de um campo livre monomodal este método leva à probabilidade (ver, por exemplo, [7])

$$P_m(t) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} [1 - \exp(-\eta t)]^m [\exp(-\eta t)]^{n-m} \langle n | \hat{\rho} | n \rangle. \quad (2.7)$$

O lado direito da equação (2.7) satisfaz todas as propriedades requeridas para ser uma probabilidade de contagens, tais como não-negatividade e normalização. Apesar disso, vários argumentos apresentados nas referências [7, 8, 13, 27] são *parcialmente* precisos do ponto de vista da teoria de medição: de fato, na dedução da expressão (2.7), considera-se que uma única medição sobre o sistema detector-campo foi realizada no instante t para se descobrir quantas contagens foram registradas, sendo, portanto, uma medição de *primeiro tipo*. Logo, à medida que t varia, cada um dos valores de $P_m(t)$ refere-se a um experimento independente, e não é permitido combinar esses valores em função do tempo t em uma tentativa de determinar se as contagens individuais ocorreram nos tempos t_1 , t_2 , etc. Neste contexto, *Srinivas e Davies* propuseram a *Teoria de Medições Contínuas*.

2.3 Teoria de medições contínuas

Na década de 1970 foi desenvolvida uma teoria axiomática quântica de medições contínuas, cujo enfoque era a análise de resultados de experimentos de contagem. O estudo de tais processos de fotocontagem foi iniciado sob o nome de “*processos quânticos estocásticos*” por *Davies* [28] e está detalhado em [29–32] por *Davies e Srinivas*. O princípio básico por trás de toda a teoria é que toda vez que o sistema, descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$, está sujeito a um experimento (instantâneo ou qualquer outro), e um certo resultado é

³Em [7], o detector foi modelado como um grande número de átomos, cujo comportamento dinâmico é similar àquele de osciladores harmônicos.

observado, então o estado pós-medição sempre terá a forma $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \hat{\zeta}\hat{\rho}/\text{Tr}[\hat{\zeta}\hat{\rho}]$, onde $\hat{\zeta}$ é um operador linear positivo, tal que

$$0 \leq \text{Tr}[\hat{\zeta}\hat{\rho}] \leq 1$$

para cada operador-densidade normalizado $\hat{\rho}$. Tais transformações lineares positivas são chamadas de *operações*⁴ [33, 34]. A probabilidade de que um resultado específico seja observado no experimento é $\text{Tr}[\hat{\zeta}\hat{\rho}]$. Se o sistema no estado $\hat{\rho}$ está sujeito a uma sequência de dois experimentos, com resultados correspondentes a operações $\hat{\zeta}_1$ e $\hat{\zeta}_2$, respectivamente, então o estado do sistema imediatamente após o segundo experimento será $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}'' = \hat{\zeta}_2\hat{\zeta}_1\hat{\rho}/\text{Tr}[\hat{\zeta}_2\hat{\zeta}_1\hat{\rho}]$ e a probabilidade conjunta de que os dois resultados sejam observados será $\text{Tr}[\hat{\zeta}_2\hat{\zeta}_1\hat{\rho}]$.

A medição realizada pelo detector de fótons pode ser caracterizada por um conjunto de operações $\hat{N}_{[t,t+\tau)}(m)$, para cada inteiro $m > 0$ e cada intervalo $[t, t + \tau)$. Esta operação, tem a seguinte interpretação: se $\hat{\rho}$ é o estado do sistema no tempo t e o detector registra m contagens, fazendo medições contínuas no intervalo de tempo $[t, t + \tau)$, então o estado do sistema no tempo $t + \tau$ será $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}^{(m)} = \hat{N}_{[t,t+\tau)}(m)\hat{\rho}/\text{Tr}[\hat{N}_{[t,t+\tau)}(m)\hat{\rho}]$. A probabilidade $P_m([t, t + \tau))$ de que m contagens foram registradas no dado intervalo é

$$P_m([t, t + \tau)) = \text{Tr}[\hat{N}_{[t,t+\tau)}(m)\hat{\rho}]. \quad (2.8)$$

A teoria matemática de processos quânticos de contagem depende, portanto, do estudo das propriedades das operações $\hat{N}_{[t,t+\tau)}(m)$.

Daqui em diante estudaremos os “*processos homogêneos*” de contagem⁵, para os quais $\hat{N}_{[t,t+\tau)}(m)$ não depende do tempo inicial t , ou seja,

$$\hat{N}_{[t,t+\tau)}(m) = \hat{N}_\tau(m).$$

O processo homogêneo de contagem é caracterizado pelas seguintes axiomas [14]:

- (I) Para cada intervalo de tempo t e cada inteiro $m \geq 0$, existe uma operação $\hat{N}_t(m)$, tal que

$$0 \leq \text{Tr}[\hat{N}_t(m)\hat{\rho}] \leq 1,$$

⁴Na verdade, as *operações* são equivalentes a *superoperadores*, pois elas atuam sobre o operador simultaneamente, à esquerda e à direita do mesmo; para diferenciá-los dos operadores usuais costuma-se chamá-los superoperadores. Por isso, às vezes chamaremos *operações* de *superoperadores*.

⁵Aqui, homogêneo tem sentido de estacionário.

para cada operador densidade normalizado. Essa condição assegura que a probabilidade (2.8) está entre 0 e 1.

(II) A operação \hat{T}_t , definida pela soma infinita

$$\hat{T}_t = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{N}_t(m), \quad (2.9)$$

satisfaz à condição $\text{Tr}[\hat{T}_t \hat{\rho}] = 1$ para cada operador densidade normalizado. Esta hipótese assegura a normalização de probabilidade

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m([0, t]) = 1.$$

(III) Propriedade associativa: as operações \hat{N}_t satisfazem à propriedade

$$\hat{N}_{t_1+t_2}(m) = \sum_{m_1+m_2=m} \hat{N}_{t_2}(m_2) \hat{N}_{t_1}(m_1). \quad (2.10)$$

Esta condição relaciona a probabilidade conjunta

$$P([0, t_1], m_1; [t_1, t_2], m_2)$$

de que m_1 contagens sejam registradas no intervalo $[0, t_1)$ e m_2 no intervalo $[t_1, t_2)$ com a probabilidade $P_m(t_2)$ de que m contagens são registradas no intervalo $[0, t_2)$ pela seguinte relação

$$P([0, t_2], m) = \sum_{m_1+m_2=m} P([0, t_1], m_1; [t_1, t_2], m_2). \quad (2.11)$$

(IV) Identidade

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{N}_t(0) \hat{\rho} = \hat{\rho}$$

para qualquer operador densidade $\hat{\rho}$, assegurando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_0(t) = 1.$$

A caracterização matemática complementar do processo quântico da contagem foi proposta em [28] com as seguintes suposições adicionais.

(V) - Grau limitado de interação: existe um número $K < \infty$ tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \text{Tr}[\hat{N}_t(m)\hat{\rho}] = 1 - P_0(t) < Kt \quad (2.12)$$

para todos $t > 0$ e todos os operadores positivos normalizados $\hat{\rho}$.

(VI) - Idealidade: a operação de não-contagem durante o intervalo de tempo $[0, t)$

$$\hat{S}_t = \hat{N}_t(0) \quad (2.13)$$

transforma estados puros em estados puros.

Sob as condições (I)-(VI), os seguintes resultados podem ser estabelecidos:

(a) Lei de composição da teoria de grupos:

$$\hat{T}_{t_1}\hat{T}_{t_2} = \hat{T}_{t_1+t_2}, \quad \hat{S}_{t_1}\hat{S}_{t_2} = \hat{S}_{t_1+t_2}.$$

(b) Existe um operador positivo limitado \hat{J} tal que

$$\hat{J}\hat{\rho} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{N}_t(1)\hat{\rho}}{t} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Tr}[\hat{N}_t(m)\hat{\rho}]}{t} = 0 \quad \text{para } m \geq 2 \quad (2.14)$$

usado para escrever a relação

$$\hat{T}_t = \hat{S}_t + \int_0^t \hat{T}_{t-\tau} \hat{J} \hat{S}_\tau d\tau. \quad (2.15)$$

A operação \hat{J} é chamada de operação de *salto quântico*, pois ela é responsável pela absorção “instantânea” de um único fóton do campo.

(c) Se um operador positivo limitado \hat{R} é definido por⁶

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{R}] = \text{Tr}[\hat{J}\hat{\rho}], \quad (2.16)$$

e se um outro operador \hat{Y} é definido tal que

$$\hat{S}_t\hat{\rho} = e^{\hat{Y}t}\hat{\rho}e^{\hat{Y}^\dagger t}, \quad (2.17)$$

então \hat{R} e \hat{Y} estão relacionados pela equação

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{R}] = -\text{Tr}[\hat{Y}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{Y}^\dagger] \quad (2.18)$$

para todos operadores densidade $\hat{\rho}$.

⁶Note-se que \hat{J} é um *superoperador*, enquanto que \hat{R} é um *operador*.

O fato de que os geradores \hat{J} e \hat{Y} caracterizam completamente o processo de fotocontagem é estabelecido pela seguinte identidade

$$\hat{N}_t(m) = \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \hat{S}_{t-t_m} \hat{J} \hat{S}_{t_m-t_{m-1}} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1}, \quad (2.19)$$

que implica na seguinte fórmula de contagem

$$P_m(t) = \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \text{Tr}[\hat{S}_{t-t_m} \hat{J} \hat{S}_{t_m-t_{m-1}} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1} \hat{\rho}]. \quad (2.20)$$

A evolução do estado do campo, em que a informação a respeito de detecções de m fótons é colhida, é chamada *evolução condicionada* (“condicionada a m contagens”). Quando a informação sobre as detecções é descartada, é dito que a evolução do campo é *não-condicionada* – neste caso, o campo evolui com o operador \hat{T}_t , dado pela equação (2.9).

Também podem ser calculadas propriedades mais gerais do tipo

$$P_{[0,t]}([t_1, t_2], m) \quad \text{e} \quad P_{[0,t]}([t_1, t'_1], m_1; [t_2, t'_2], m_2),$$

que são, respectivamente, a probabilidade de que m contagens são registradas no intervalo $[t_1, t_2]$ e a probabilidade conjunta de que m_1 contagens são registradas em $[t_1, t'_1]$ e m_2 em $[t_2, t'_2]$ (onde $0 < t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < t$), dado que o detector realiza medições contínuas no intervalo $[0, t]$ sobre o sistema cujo estado no tempo $t = 0$ é $\hat{\rho}$. Essas probabilidades são dadas pelas equações

$$P_{[0,t]}([t_1, t_2], m) = \text{Tr}[\hat{T}_{t-t_2} \hat{N}_{t_2-t_1}(m) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{N}_{t_2-t_1}(m) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}], \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} P_{[0,t]}([t_1, t'_1], m_1; [t_2, t'_2], m_2) &= \text{Tr}[\hat{T}_{t-t'_2} \hat{N}_{t'_2-t_2}(m_2) \hat{T}_{t_2-t'_1} \hat{N}_{t'_1-t_1}(m_1) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}] \\ &= \text{Tr}[\hat{N}_{t'_2-t_2}(m_2) \hat{T}_{t_2-t'_1} \hat{N}_{t'_1-t_1}(m_1) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}], \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde foi usada a propriedade **(II)** da operação \hat{T}_t (equação (2.9)).

Para a caracterização do processo de contagem, \hat{J} e \hat{S}_t se relacionam apenas pela relação (2.18). Se for estipulado que na ausência de qualquer medição o campo tem sua evolução regida pelo Hamiltoniano \hat{H} , então a escolha

$$\hat{Y} = -i\hat{H}/\hbar - \hat{R}/2 \quad (2.23)$$

satisfaz, automaticamente, a equação (2.18).

Na situação em que o detector não está realizando nenhuma medição, devemos ter $\hat{J} = 0$, o que implica $\hat{R} = 0$. Então obtemos $\hat{Y} = -i\hat{H}$, de forma que $\hat{S}_t\hat{\rho}$, dado pela equação (2.17), reduz-se a $e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}e^{i\hat{H}t/\hbar}$, como deveria. Se a escolha (2.23) for adotada para o gerador \hat{Y} , o superoperador \hat{S}_t é *completamente determinado pelo superoperador \hat{J} e pelo Hamiltoniano do sistema \hat{H}* . O processo quântico de medição em que \hat{Y} é dado pela equação (2.23) é conhecido como *processo quântico canônico de contagem*. Ele é totalmente caracterizado pela transformação linear positiva limitada \hat{J} [14].

A teoria de medições contínuas recebeu bastante atenção nos anos posteriores, devido à sua (nova) interpretação microscópica do processo de fotodetecção [35–38] e sua relação com a teoria de trajetórias quânticas [39–44], e permitiu variadas propostas para aplicações. Dentre elas, podemos encontrar estudos sobre estatística de fotocorrentes em diversos sistemas [16, 45–48], medições quânticas não-demolidoras [37, 49, 50] e de outros tipos [51–53], preparação de estados quânticos [54–58], controle quântico via fotodetecção [15, 17], e computação quântica [59]. Além do mais, esta teoria foi amplamente usada para diferentes propostas experimentais: por exemplo, para mudar a estatística do campo de sub-Poissoniana para super-Poissoniana [47], para controlar o emaranhamento entre dois modos através de contagem de fótons sobre um terceiro modo acoplado aos dois primeiros [15] ou para induzir compressão de spin (*spin squeezing*) de átomos em cavidades [17].

2.4 Trajetórias quânticas

Existe outro formalismo para tratar o processo quântico de fotocontagem. Ele consiste no uso da equação mestra que descreve a evolução do campo na cavidade na presença do detector⁷. Vamos descrever esta técnica, que será útil posteriormente.

Vamos considerar por hipótese que o campo acoplado ao detector obedece à seguinte equação de operadores para qualquer tempo $t \geq 0$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\gamma}{2} \left(\hat{O}^\dagger \hat{O} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{O}^\dagger \hat{O} - 2\hat{O} \hat{\rho} \hat{O}^\dagger \right), \quad (2.24)$$

onde \hat{O} é algum operador de “abaixamento”, que depende do sistema estudado, γ é a taxa

⁷Como veremos no capítulo 4, esse tratamento permite modelar o processo de fotodetecção mais geral, como na presença de perdas devido à dissipação.

de dissipação e \hat{H} é o Hamiltoniano deste sistema. Podemos reescrever (2.24) como uma equação diferencial parcial inhomogênea

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} - \hat{L}_0 \hat{\rho} = \hat{J} \hat{\rho} \quad (2.25)$$

com $\hat{J} \hat{\rho} \equiv \gamma \hat{O} \hat{\rho} \hat{O}^\dagger$ no papel do termo de salto quântico e

$$\hat{L}_0 \hat{\rho} \equiv \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\gamma}{2} \{ \hat{O}^\dagger \hat{O}, \hat{\rho} \}, \quad (2.26)$$

onde $\{ \cdot, \cdot \}$ é o anticomutador.

Como a solução formal da equação (2.25) é

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\hat{L}_0 t} \hat{\rho}_0 + \int_0^t dt' e^{-(t-t')\hat{L}_0} \hat{J} e^{-\hat{L}_0 t'} \hat{\rho}(t'), \quad (2.27)$$

a solução da equação (2.24) pode ser obtida por sucessivas iterações, resultando em [39]

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 e^{\hat{L}_0(t-t_m)} \hat{J} e^{\hat{L}_0(t_m-t_{m-1})} \cdots \hat{J} e^{\hat{L}_0 t_1} \hat{\rho}_0. \quad (2.28)$$

Agora, a quantidade dentro das integrais é o *operador densidade condicionado* não normalizado $\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)$, para um estado inicial $\hat{\rho}_0$. Podemos interpretar (2.28) como uma soma generalizada sobre todas as possibilidades de absorção de fótons, que o detector pode ter acusado durante sua evolução, no intervalo de tempo $[0, t)$. Em cada uma dessas “trajetórias” qualquer número de absorções de fótons, de $m = 0$ até $m = \infty$, pode ocorrer, e os tempos entre as absorções podem ser qualquer sequência ordenada de m intervalos de tempo no intervalo maior $[0, t)$. Ao definir o operador densidade condicionado é usual normalizar a quantidade dentro das integrais e interpretá-la fisicamente em termos de evolução sem detecção de fótons, porém interrompida por colapsos instantâneos nos momentos de absorção de fótons. No tempo t , para um estado inicial $\hat{\rho}_0$ e uma sequência particular de tempos de absorções de fótons, o operador densidade condicionado *normalizado* é dado por

$$\bar{\rho}_c^{(m)}(t) = \frac{\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)}{\text{Tr}[\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)]},$$

onde $\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)$ é o operador não normalizado

$$\tilde{\rho}_c^{(m)}(t) = e^{\hat{L}_0(t-t_m)} \hat{J} e^{\hat{L}_0(t_m-t_{m-1})} \cdots \hat{J} e^{\hat{L}_0 t_1} \hat{\rho}_0. \quad (2.29)$$

Cada ocorrência \hat{J} corresponde à detecção “instantânea” de um fóton, por isso \hat{J} é chamado superoperador de *salto quântico* (SSQ). Os termos exponenciais descrevem a

evolução não-unitária do sistema entre as absorções. Logo, $\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)$ pode ser interpretado como o operador densidade evoluído (não normalizado), condicionado à perda sequencial de m fótons nos tempos t_1, t_2, \dots, t_m . A norma de $\tilde{\rho}_c(t)$ é a probabilidade de ocorrência dessa sequência particular de detecções. A evolução *não-condicionada*, descrita pela equação (2.28), é obtida fazendo uma média sobre todas as possíveis *histórias*, isto é, somando sobre o número m de fótons detectados, e integrando sobre seus tempos de absorção correspondentes t_1, \dots, t_m . Isso recupera o operador T_t definido em (2.9).

Este procedimento gera uma decomposição da dinâmica quântica, contida na equação mestra, em uma infinidade de caminhos quânticos, ou *trajetórias quânticas*. Sua definição está baseada em separar os tempos em que fótons são detectados em forma de fotoelétrons pelo detector da evolução quântica sobre intervalos de tempo durante os quais fótons, embora monitorados, não foram detectados.

2.5 Densidades de probabilidade e tempos de espera

Vamos agora descrever alguns observáveis que podem ser medidos em um experimento de fotocontagem, além da fórmula de contagem $P_m(t)$, já descrita na seção 2.2. A quantidade que pode ser medida diretamente nos experimentos de fotocontagem é o *grau de coerência temporal de segunda ordem* $g^{(2)}(\tau)$ [10]. Ele é definido como a probabilidade conjunta de registrar fotoelétrons nos intervalos de tempo $[t, t + \Delta t)$ e $[t + \tau, t + \tau + \Delta t)$ (onde $\Delta t \ll \tau$), normalizada pela probabilidade de duas contagens fotoelétricas independentes. Por exemplo, no caso do fenômeno de *antibunching* [1], a probabilidade conjunta de registrar mais de uma contagem em um pequeno intervalo de tempo cai abaixo da probabilidade de contagens estatisticamente independentes (separadas por um tempo maior que o tempo de coerência); logo, $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$. No caso de *bunching* ocorre o contrário, ou seja, $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$. O que ocorre fisicamente, é que para um campo com propriedade de *bunching*, os fótons são emitidos em grupos, e no caso de *anti-bunching* os fótons são emitidos com maior espaçamento temporal.

O processo de fotodetecção também pode ser caracterizado pelos *tempos de espera* [60], cujo significado é o seguinte: se escolhermos um instante de tempo arbitrário e perguntarmos quanto tempo devemos esperar até detectar um fotoelétron, estamos nos

referindo ao *tempo de espera não-condicional*. Por outro lado, o *tempo de espera condicional*, ou *intervalo de tempo*, é a duração de tempo entre duas contagens consecutivas. A diferença entre o tempo de espera não-condicional e o condicional é a seguinte: no primeiro caso, o instante inicial é escolhido arbitrariamente, enquanto que no segundo caso ele deve coincidir com o evento de uma contagem. A estatística de intervalos de tempo é especialmente importante por causa da simplicidade com que as distribuições de tempos de espera podem ser medidas sobre um intervalo muito grande de escalas de tempo [61].

Os tempos de espera podem ser descritos por distribuições de intervalos de tempo, deduzidas por Barakat e Blake [62]. A distribuição não-normalizada para o tempo de espera *não-condicional*, dada por

$$W_u(t_0 + \tau|t_0) = \frac{\text{Tr}[\hat{J}\hat{S}_\tau\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]}{\text{Tr}[\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]} = \text{Tr}[\hat{J}\hat{S}_\tau\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}], \quad (2.30)$$

representa a densidade de probabilidade para a detecção do primeiro fóton no tempo $t_0 + \tau$, caso a detecção seja iniciada em t_0 e o detector esteja em funcionamento no intervalo $[0, t)$, $0 \leq t_0 \leq t_0 + \tau < t$. O tempo de espera *não-condicional* é definido como

$$\langle \tau_{unc} \rangle = \frac{\int_0^\infty \tau W_u(t_0 + \tau|t_0) d\tau}{\int_0^\infty W_u(t_0 + \tau|t_0) d\tau}. \quad (2.31)$$

A distribuição não-normalizada para o tempo de espera *condicional*, dada por

$$W_c(t_0 + \tau|t_0) = \frac{\text{Tr}[\hat{J}\hat{S}_\tau\hat{J}\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]}{\text{Tr}[\hat{J}\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]}, \quad (2.32)$$

é interpretada como a probabilidade, por unidade de tempo, de que, caso um fóton seja detectado em t_0 , o *próximo* será detectado em $t_0 + \tau$, com a condição de que o detector realiza medições contínuas no intervalo $[0, t)$. O tempo de espera *condicional* é dado por

$$\langle \tau_{con} \rangle = \frac{\int_0^\infty \tau W_c(t_0 + \tau|t_0) d\tau}{\int_0^\infty W_c(t_0 + \tau|t_0) d\tau}. \quad (2.33)$$

O tratamento de Kelley-Kleiner [6] de contagens fotoelétricas é formulado em termos de densidade de probabilidade *não-exclusiva*, ou densidade de probabilidade de *coincidência* (DPC), $h_t(t_1, t_2, \dots, t_m)$

$$h_t(t_1, t_2, \dots, t_m) = \text{Tr}[\hat{T}_{t-t_m}\hat{J}\dots\hat{J}\hat{T}_{t_1}\hat{\rho}]. \quad (2.34)$$

$h_t(t_1, t_2, \dots, t_m)\Delta t_1\Delta t_2\cdots\Delta t_m$ é a probabilidade de que um fóton é detectado em cada um dos intervalos de tempo não-superpostos

$$[t_1, t_1 + \Delta t_1), [t_2, t_2 + \Delta t_2), \dots, [t_m, t_m + \Delta t_m)$$

$(t_1 < t_2 < \dots < t_m)$, onde os intervalos de tempo Δt_i , $i = 1, \dots, m$, são as resoluções temporais do detector em cada tempo t_i (que, a princípio, podem ser diferentes). Nenhuma restrição é imposta sobre o número de contagens registradas fora desses intervalos. A hierarquia de funções de correlação do campo introduzida por Glauber [63] é definida em termos dessas probabilidades não-exclusivas. Em particular, o grau de coerência de segunda ordem $g^{(2)}(t_0, t_0 + \tau)$ é dado por

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{h_t(t_0, t_0 + \tau)}{[h_t(t_0)]^2}. \quad (2.35)$$

Quantidades de interesse experimental são expressas naturalmente em termos de probabilidades não exclusivas (DPC), e também em termos de momentos fatoriais de contagens

$$\langle m^{(k)}(t) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} m^k \mathbf{P}_m(t). \quad (2.36)$$

A densidade de probabilidade exclusiva, ou densidade de probabilidade elementar (DPE), é definida como

$$p(t_1, \dots, t_m) = \text{Tr} \left[\hat{S}_{t-t_m} \hat{J} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1} \hat{\rho} \right], \quad (2.37)$$

onde $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$ e o estado do campo no tempo $t = 0$ é $\hat{\rho}$. A DPE é a probabilidade de que uma contagem é observada em cada um dos tempos t_1, \dots, t_m e nenhuma no resto do intervalo $[0, t)$. A diferença entre DPC e DPE está ilustrada na figura 2.1

De fato, existe uma outra densidade de probabilidade que deve ser distinguida de DPC e DPE (uma discussão a respeito deste assunto é feita em [32, 64]). Ela é dada por

$$w(t_1, \dots, t_m) = \text{Tr} [\hat{U}_{t-t_m} \hat{J} \cdots \hat{J} \hat{U}_{t_1} \hat{\rho}], \quad (2.38)$$

onde

$$\hat{U}_t \hat{\rho} = \exp(-i\hat{H}t/\hbar) \hat{\rho} \exp(i\hat{H}t/\hbar), \quad (2.39)$$

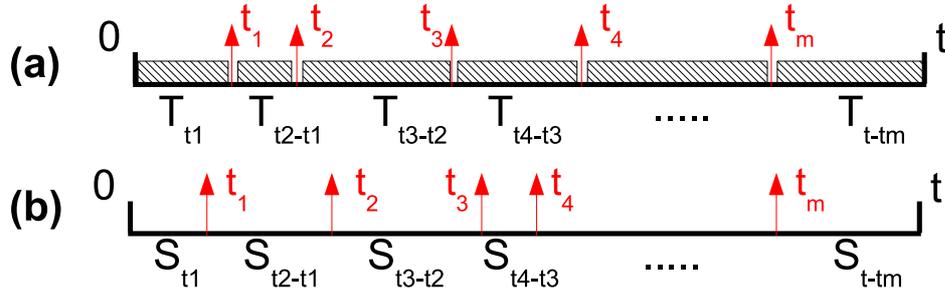


Figura 2.1: **a)** Representação de DPC: regiões preenchidas correspondem à evolução não-condicionada entre os clicks nos tempos t_1, t_2, \dots, t_m . **b)** Representação de DPE, com operações de não-contagem entre os clicks.

é o superoperador de evolução livre (diferente de \hat{S}_t). Esta densidade de probabilidade leva à fórmula quântica de Mandel, equação (2.3). No entanto, a distribuição (2.38) descreve corretamente o processo de fotodeteção somente caso o detector seja desligado entre as contagens (pois só assim o campo na cavidade evoluiria livremente entre as contagens), por isso ela não pode ser utilizada nas teorias realistas de fotodeteção contínua, em que o detector permanece ativo e monitora o campo entre as contagens.

2.6 Modelo de Srinivas e Davies

Num trabalho pioneiro, Srinivas e Davies [14] aplicaram o modelo de fotodeteção contínua a um campo monomodal livre, contido dentro de uma cavidade, sendo medido por um detector localizado numa das paredes, tratando-se assim de um sistema fechado. Uma suposição fundamental do modelo é que, *exceto pelas contagens, nenhum outro processo não-coerente (dissipativo) ocorre*. Sob estas condições a evolução do campo, quando não sujeito a nenhuma medição, é governada pelo Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (2.40)$$

onde ω é a frequência do modo da radiação e \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os operadores não-limitados de “aniquilação” e “criação”.

Como um modelo simples para descrever a reação (*back-action*) do detector sobre o campo, em que um estado de n fótons é convertido em um estado de $n - 1$ fótons

toda vez que um fóton é detectado, os autores propuseram o seguinte SSQ

$$\hat{J}\hat{\rho} = \varsigma\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger, \quad (2.41)$$

onde ς é um parâmetro que caracteriza o acoplamento entre o detector e o campo. Neste modelo de detecção, o fóton é absorvido no processo, caracterizando uma medição do segundo tipo.

Escolhendo \hat{J} de acordo com a equação (2.41), o operador \hat{R} , equação (2.18), é

$$\hat{R} = \varsigma\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.42)$$

Então, o superoperador de não-contagem é dado por

$$\hat{S}_t\hat{\rho} = \exp\left[-\left(i\omega + \frac{\varsigma}{2}\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}t\right]\hat{\rho}\exp\left[\left(i\omega - \frac{\varsigma}{2}\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}t\right]. \quad (2.43)$$

A partir dos operadores \hat{J} e \hat{S}_t várias quantidades observáveis podem ser calculadas. Por exemplo, a densidade de probabilidade elementar (DPE) é

$$p(t_1, t_2, \dots, t_m) = \sum_{n=m}^{\infty} \varsigma^m m! \binom{n}{m} e^{-\varsigma(t_1+t_2+\dots+t_m)-\varsigma(n-m)t} p_n, \quad p_n = \langle n|\hat{\rho}|n\rangle. \quad (2.44)$$

e a probabilidade de contagem de m fótons no intervalo $[0, t)$ é

$$P_m(t) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} (1 - e^{-\varsigma t})^m (e^{-\varsigma t})^{n-m} p_n, \quad (2.45)$$

que coincide com a fórmula (2.7) obtida por Mollow e outros. De fato, pode-se mostrar que ambas as DPE (2.44) e a probabilidade de contagem (2.45) são bem definidas e não negativas para todos os estados $\hat{\rho}$ e tempos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$, e além disso

$$0 \leq P_m(t) \leq 1.$$

Durante a fotodeteção, o estado do campo muda continuamente à medida que o tempo passa. Para um “click”, o campo perde um fóton, realizando o Salto Quântico. Na ausência dos “clicks”, o estado do campo também é modificado continuamente devido ao monitoramento feito pelo detector [35, 36, 65]. Assim, além de permitir a determinação das propriedades estatísticas do campo ao contar um certo número de fótons num dado intervalo do tempo, o detector também exerce uma reação sobre o campo, pela qual o

resultado da medição modifica o estado do campo na cavidade [38]. O modelo de Srinivas e Davies fornece um caminho sistemático para calcular probabilidades mais complicadas, conforme descrito em [14], e o estudo de tais probabilidades foi feito em [65].

Finalmente, vale ressaltar que os operadores \hat{J} e \hat{S}_t no modelo de Srinivas e Davies para o campo livre podem ser deduzidos da seguinte equação mestra

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\varsigma}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger), \quad (2.46)$$

onde \hat{H} é o Hamiltoniano do campo monomodal livre, $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Esta é a “equação mestra padrão” [39] para o modelo de relaxação de amplitude na cavidade. Ela pode ser deduzida a partir da interação de um único modo do campo (ou oscilador harmônico unidimensional) com o meio ambiente, constituído por um número infinito de osciladores harmônicos à temperatura 0K (ver, por exemplo, [18, 66]).

Em seu trabalho original, Srinivas e Davies tinham apontado uma irregularidade na definição do superoperador de salto quântico: o superoperador \hat{J} , definido pela equação (2.41), não satisfaz à condição (V) – a hipótese de limitação. Realmente, \hat{J} é um superoperador linear não-limitado, e em geral $\text{Tr}[\hat{J}^k \rho] = \varsigma^k \text{Tr}[\hat{\rho} : \hat{n}^k :]$ também é não-limitado, portanto, não definido para todos os estados. A discordância da equação (2.41) com a suposição (V) impossibilita uma definição consistente de algumas distribuições de probabilidade, em particular, a densidade de probabilidade de coincidência, como já antecipado no artigo original [14] e estudado em detalhes na referência [65].

2.7 Modelo microscópico de Saltos Quânticos

Como descrito na seção 2.3, SSQ é o principal ingrediente formal na teoria, pois ele também dita a forma do superoperador de não-contagem [14]. Dois modelos diferentes para SSQ foram propostos *ad hoc*. O primeiro foi proposto por Srinivas e Davies [14], o chamado modelo **A**, definido como

$$\hat{J}_A \rho = \varsigma \hat{a} \rho \hat{a}^\dagger, \quad (2.47)$$

onde ς é a constante de acoplamento entre o detector e o campo (aproximadamente a taxa de contagem ideal do detector [14, 65]). A outra proposta [67, 68] considera uma expressão

para SSQ escrita em termos de operadores $\hat{E}_- = (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)^{-1/2} \hat{a}$ e $\hat{E}_+ = \hat{E}_-^\dagger$ (também conhecidos como *operadores exponenciais de fase* [69–73])

$$\hat{J}_E \rho = \varsigma \hat{E}_- \rho \hat{E}_+. \quad (2.48)$$

Em [65] chamamos esta escolha de modelo **E**, para diferenciá-lo do modelo A (2.47). É importante notar que ς pode ser diferente para os modelos E e A, mas a notação acima não vai provocar confusão nesta tese. Além de eliminar as inconsistências do modelo A, o uso do modelo E leva a previsões quantitativas e qualitativas diferentes para diversas quantidades observáveis [65].

Entretanto, o SSQ (2.48) foi introduzido em [67, 68] também *ad hoc*. Portanto, é desejável ter não apenas uma teoria fenomenológica, mas também alguns modelos microscópicos, que possam justificar as escolhas fenomenológicas. O caso mais simples de tal modelo foi considerado pela primeira vez em [74], onde o SSQ do modelo A foi deduzido sob a consideração de detecção altamente eficiente. As duas considerações fundamentais deste modelo foram: (a) pequeno tempo de interação entre o campo e o detector, em relação ao inverso da constante de acoplamento, e (b) presença de apenas poucos fótons na cavidade. Apenas sob estas condições pode-se usar uma abordagem perturbativa simples e chegar a uma expressão matemática para o SSQ, que independe dos detalhes de interação entre o campo e o detector.

Se as condições (a) ou (b) não forem satisfeitas, o SSQ deveria depender de vários fatores, tais como o tipo de interação entre o campo e o detector, a intensidade de interação e o tempo T da interação. Além disso, deve-se enfatizar que o instante exato t_j em que o salto quântico ocorre não pode ser determinado exatamente — ele pode acontecer aleatoriamente a qualquer momento dentro do intervalo $[0, T)$. Fazendo diferentes considerações sobre o instante de salto quântico, podemos obter diferentes expressões formais para o SSQ. Em [65] nós propusemos um simples modelo heurístico para a obtenção de SSQ “não-linear”, da forma

$$J \rho = \varsigma F(a^\dagger a) a \rho a^\dagger F(a^\dagger a). \quad (2.49)$$

Nesta linha, um dos objetivos desta tese é fornecer uma dedução mais rigorosa de SSQ, usando um modelo mais sofisticado que leva em consideração os efeitos dissipativos devidos ao “mecanismo de amplificação” do detector. Nossa abordagem está baseada na hipótese

de que devemos fazer uma média da probabilidade de fotodeteção sobre o tempo de interação T , durante o qual um fóton pode ser absorvido em qualquer instante no intervalo $[0, T)$. Considerando dois diferentes modelos de detectores interagindo com um campo eletromagnético monocromático – um átomo de 2-níveis e um oscilador harmónico – vamos demonstrar que diferentes tipos de interação resultam em diferentes SSQ.

A seguir, na seção 3.1, vamos deduzir o SSQ para o modelo de detector de átomo de 2-níveis, levando em conta a dissipação, que se deve ao decaimento do estado excitado do átomo. Na seção 3.2 vamos aplicar o mesmo procedimento ao modelo do detector de oscilador harmónico, mostrando explicitamente como uma variação das constantes de acoplamento resultam na mudança da função $F(a^\dagger a)$ na equação (2.49). Na seção 3.2 apresentaremos o nosso modelo microscópico para o detector em condições reais, supondo que o detector é composto por um sensor (objeto quântico de 2 níveis) e um mecanismo de amplificação com um número finito de excitações intrínsecas. Vamos comparar as previsões do nosso modelo com dados experimentais e mostraremos que SSQ (2.47) e (2.48) são casos particulares do *superoperador de transição*, cada um ocorrendo em um regime particular de parâmetros do detector [75–78]. Além disso, analisaremos a inclusão de contagens escuras no SSQ e apontaremos que manipulando certos parâmetros do detector pode-se engendrar a forma do SSQ.

Uma maneira de verificar a validade do MFC e decidir qual SSQ descreve melhor o fenômeno na prática é através de experimentos de fotocontagem em cavidades com alto fator de qualidade, fazendo a comparação dos resultados experimentais com aqueles preditos pela teoria. Porém, detectores e cavidades reais estão longe de serem ideais. Por isso, na seção 4.1 vamos incluir não-idealidades no MFC, tais como eficiência quântica e contagens escuras, e deduzir expressões gerais para distribuições de fotocontagens e de tempos de espera. Como aplicação prática, também na seção 4.1, daremos algumas dicas experimentais para decidir qual SSQ prevalece de fato num experimento de fotocontagem. Ademais, no capítulo 4 vamos apresentar mais dois esquemas experimentais para verificar a forma do SSQ. Um deles envolve a passagem de átomos de Ryberg pela cavidade com alto fator de qualidade e um baixo número médio de fótons (seção 4.2), e a outra faz uso de um divisor de feixes, ou um cristal ótico não-linear, e de um conjunto de detectores (seção 4.3).

Capítulo 3

Modelos microscópicos de Superoperador de Salto Quântico

3.1 Modelo de detector ideal

Nesta seção vamos analisar a operação de salto quântico em um sistema aberto, e mostrar que o *Superoperador de Salto Quântico* (SSQ) pode ser deduzido a partir da interação do sistema sendo medido com um *aparelho de medição* quântico. Vamos considerar dois exemplos para a interação de um modo do campo eletromagnético na cavidade (o sistema) com um átomo de dois níveis e um oscilador harmônico, que representarão dois tipos diferentes de detector. Será mostrado que o SSQ obtido tem a forma “não-linear” $J\rho = \zeta \text{diag} [F(a^\dagger a) \rho a^\dagger F(a^\dagger a)]$, onde a expressão formal para a função $F(n)$ depende das suposições feitas sobre a interação entre o sistema e o detector. Sob certas condições, vamos obter a dependência assintótica de lei de potências $F(n) = (n+1)^{-\beta}$, e uma transição contínua para o SSQ de Srinivas e Davies (correspondente a $\beta = 0$) será obtida.

3.1.1 Introdução

Detector de um único fóton (DUF) representa o limite definitivo da sensibilidade de fotodetectores quânticos, e muitas aplicações de óptica quântica e informação quântica estão baseadas em sua existência [79]. Atualmente, há vários tipos de DUF [80, 81], sensíveis a diferentes comprimentos de onda da luz e com uma faixa extensa de eficiências

quânticas (EQ), que é a eficiência com que um fóton é absorvido e registrado como um “click”) [82–92]. Alguns exemplos de DUF são: fotodetector de transistor de um único elétron, consistindo de um ponto quântico em campo magnético forte (EQ \sim 1% [82]), detector de avalanche de fotodiodo (EQ \sim 20% [83], 75% [84]), DUF supercondutor de NbN (EQ \sim 25% [85]), válvula fotomultiplicadora (EQ \sim 25% [86]), sensor supercondutor de transistor de fronteira (EQ \sim 40-50% [87]), contador da luz visível usando efeito de multiplicação por avalanche (EQ \sim 70-90% [88]). Entre muitas aplicações, o DUF é o ingrediente principal nas situações em que se mede o campo eletromagnético, com poucos fótons, confinado numa cavidade, onde os fótons são contados um a um. O tratamento teórico deste problema foi proposto por Srinivas e Davies em 1981 e foi chamado de *Modelo de Fotodeteção Contínua* (MFC) [14], tendo encontrado várias aplicações desde então [15, 17, 48, 49, 52, 55].

No MFC, o fotodetector tem apenas dois possíveis desfechos em um intervalo de tempo infinitesimal: ou um único fóton é detectado (visto através do “click” do detector), ou não é detectado. Em ambos os casos, o estado do campo muda *continuamente* à medida que o tempo passa. Para um “click”, o campo perde um fóton e sofre um salto quântico. Na ausência de “clicks”, o estado de campo também é modificado continuamente e não-unitariamente, devido ao monitoramento feito pelo detector [36, 65, 93]. Assim, além de permitir a determinação de propriedades do campo através da estatística de fotocontagem [1], o detector também exerce uma *reação* (*back-action*, em inglês) sobre o campo, quando a medição modifica o seu estado [35]. Este fenômeno foi amplamente empregado em diversas propostas teóricas, tais como modificação da estatística do campo de sub-Poissoniana para super-Poissoniana [47], controle de emaranhamento entre dois modos de campo [15] ou indução de compressão de spin (*spin squeezing*, em inglês) em uma cavidade [17].

Segundo MFC, todas as possíveis ramificações do processo de fotodeteção podem ser determinados se conhecermos uma única entidade caracterizando o fotodetector — o superoperador de salto quântico (SSQ), \hat{J} , que representa a reação do detector sobre o campo devido a uma única fotocontagem. Imediatamente após a fotodeteção, o estado inicial do campo, descrito pelo operador estatístico ρ , é abruptamente modificado para $\rho' = \hat{J}\rho/\text{Tr}[\hat{J}\rho]$, e a probabilidade de se registrar uma contagem durante o intervalo do

tempo $[t, t + \Delta t)$ é $\text{Tr}[\hat{J}\rho]\Delta t$, onde Δt é a resolução temporal do detector. Supõe-se que Δt é pequeno comparado a outras escalas características do tempo e que SSQ é independente do tempo, no caso ideal sendo dado por

$$\hat{J}\rho \equiv \varsigma_O \hat{O}\rho\hat{O}^\dagger, \quad (3.1)$$

onde \hat{O} é um operador de abaixamento responsável pela subtração de um fóton, e ς_O está relacionado com a taxa de contagem [65], tendo a dimensionalidade (tempo^{-1}) .

Srinivas e Davies propuseram *ad hoc* $\hat{O} = a$, que é o operador de aniquilação. Vamos chamar esta escolha de **modelo A**. Apesar de ter algumas inconsistências, como notado desde o início pelos próprios autores [14], o modelo A foi amplamente usado desde então. Recentemente, outro SSQ, definido com $\hat{O} = E_- \equiv (n + 1)^{-1/2} a$ (onde $n \equiv a^\dagger a$), foi proposto, também *ad hoc*, em [67, 68]. Vamos chamar esta escolha de **modelo E**. As diferenças entre os dois modelos foram estudadas em [65], onde foi mostrado que as inconsistências presentes no modelo A estão ausentes no modelo E.

No entanto, o modelo E também foi introduzido *ad hoc* em [67, 68]. Consequentemente, é desejável ter não apenas uma teoria fenomenológica, mas também algum modelo microscópico, que justifique as escolhas intuitivas. O exemplo mais simples de tal modelo foi considerado pela primeira vez em [74], onde o SSQ de Srinivas e Davies foi deduzido sob a suposição de um detector altamente eficiente. As duas suposições fundamentais daquele modelo foram: (a) tempo de interação infinitesimal entre o campo e o detector, e (b) presença de poucos fótons no campo. Apenas sob estas condições é possível usar um tratamento perturbativo simples e chegar a uma expressão matemática para SSQ, que é independente dos detalhes da interação entre o campo e o detector. Porém, se estas suposições forem substituídas por outras, podemos obter outros superoperadores \hat{J} . Por exemplo, $\hat{J}\rho = a^\dagger a \rho a^\dagger a$ foi considerado em [94] no contexto de medições quânticas não-demolidoras contínuas do número de fótons.

Se as condições (a) ou (b) não forem satisfeitas, SSQ deveria depender de muitos fatores, tais como o tipo de interação entre o campo e o detector, a intensidade de interação e o tempo de interação T . Além disso, o instante de tempo t_{SQ} , em que o salto quântico ocorre, não pode ser determinado exatamente – ele pode acontecer aleatoriamente a qualquer momento dentro do intervalo de tempo T . Fazendo diferentes suposições quanto ao momento de salto quântico, podemos obter diferentes expressões

formais para SSQ. Em [65] nós propusemos um modelo heurístico simples para obter um SSQ “não-linear” (não-linear com respeito ao operador a) da forma

$$J\rho = \varsigma F(a^\dagger a) a \rho a^\dagger F(a^\dagger a). \quad (3.2)$$

Na mesma linha, o objetivo deste capítulo é apresentar uma dedução mais rigorosa de SSQ, usando um modelo mais sofisticado, que leva em consideração os efeitos dissipativos devidos à “parte macroscópica” do aparelho de medição. O nosso tratamento está baseado na hipótese de que, para definir SSQ, podemos fazer uma média temporal da probabilidade de “clicks” sobre o tempo de interação T , durante o qual o fóton pode ser absorvido a qualquer instante. Considerando dois modelos diferentes de detectores, um átomo de dois níveis e um oscilador harmônico, vamos demonstrar que diferentes tipos de interação resultam em diferentes SSQ.

Esta seção é organizada da seguinte maneira: na subseção 3.1.2 vamos deduzir um SSQ usando o modelo de Jaynes-Cummings modificado (incluindo o decaimento espontâneo do estado excitado de átomo) e calculando a média temporal do “superoperador de transição”. Na subseção 3.1.3 aplicaremos o mesmo procedimento para o modelo de dois osciladores acoplados, mostrando explicitamente como a variação da razão entre as constantes de acoplamento afeta a função $F(a^\dagger a)$ na equação (2.49). Na subseção 3.1.4 apresentaremos o sumário e nossas conclusões.

3.1.2 Modelo de átomo de 2-níveis

Vamos considerar inicialmente uma generalização direta do modelo estudado em [74]. O papel do sistema medido é feito por um único modo do campo eletromagnético e o *sensor* do aparelho de medida (sub-sistema quântico constituindo o aparelho de medição, que interage diretamente com o campo) é um sistema de 2-níveis, que chamaremos de átomo de 2-níveis para facilitar a compreensão. O Hamiltoniano para o sistema sensor-campo adotado é aquele conhecido como o de Jaynes-Cummings [95]

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \omega\hat{n} + g a\sigma_+ + g^* a^\dagger\sigma_-, \quad (3.3)$$

onde os pseudo-operadores de Pauli σ_z e σ_\pm representam o sensor ($\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ e $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$), que tem o estado fundamental $|g\rangle$ com energia $\hbar\omega_g$ e o

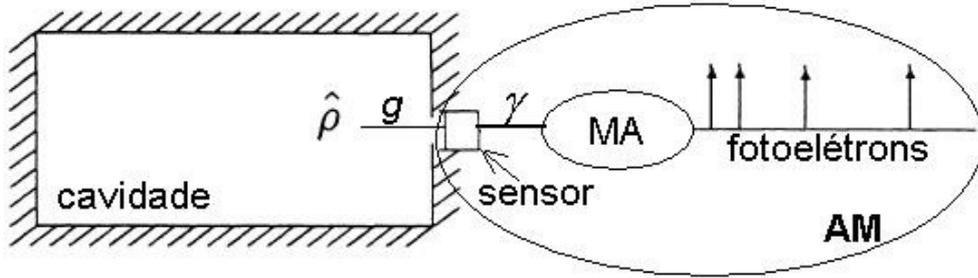


Figura 3.1: Esquema do modelo microscópico de interação campo-aparelho de medição (AM), constituído de sensor (objeto quântico) e mecanismo de amplificação (MA, objeto clássico).

estado excitado $|e\rangle$ com energia $\hbar\omega_e = \hbar(\omega_g + \omega_0)$. a , a^\dagger e $\hat{n} = a^\dagger a$ são os operadores de abaixamento, levantamento e o operador de número de fótons do campo. Como o acoplamento entre o campo e os átomos é geralmente “fraco”, nós consideramos que $\omega, \omega_0 \gg |g|$.

Até agora, o sensor pode absorver e reemitir os fótons de volta para o campo, coerentemente, através de oscilações de Rabi, pois ele não está acoplado a nenhum aparelho macroscópico, que absorva irreversivelmente os fótons e os transforme em fotoelétrons. No entanto, ao absorver um fóton, o sensor, inicialmente no estado $|g\rangle$, realiza uma transição para $|e\rangle$, e depois de um tempo aleatório decai espontaneamente de volta, emitindo um *fotoelétron* dentro do “*mecanismo de amplificação*” (MA). O MA é uma estrutura macroscópica complexa (por exemplo, uma válvula fotomultiplicadora e a eletrônica associada), que de alguma maneira (por exemplo, fenômeno de avalanche [1]) amplifica o fotoelétron e dá origem a algum efeito macroscópico observável, gerando assim o “click”. O esboço esquemático do nosso modelo está mostrado na figura 3.1

Portanto, o sensor sofre efeitos dissipativos por parte de MA, responsáveis pelo decaimento espontâneo do estado excitado do sensor e o alargamento da largura de linha. E é precisamente este processo físico que representa uma fotodetecção — o estado excitado do átomo decai, emitindo um fotoelétron no MA, que é amplificado por eletrônica apropriada e é medido como uma rajada de corrente elétrica macroscópica. Em certa idealização, podemos levar os efeitos dissipativos em conta ao descrever o processo

completo de fotodeteção, incluindo o decaimento espontâneo, pela equação mestra

$$\frac{d\rho_t}{dt} + i \left(H_{eff} \rho_t - \rho_t H_{eff}^\dagger \right) = 2\gamma \sigma_- \rho_t \sigma_+, \quad (3.4)$$

que é um caso particular da equação (2.24), onde $O = \sigma_-$, $O^\dagger = \sigma_+$, $H_{eff} = H_0 - i\gamma \sigma_+ \sigma_-$, e 2γ é o acoplamento do estado excitado do átomo ao MA. O termo de perda

$$R\rho = 2\gamma \sigma_- \rho \sigma_+ \quad (3.5)$$

representa a transição $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ dentro do detector – o processo de decaimento atômico. Se $\gamma = 0$, o detector interage com o campo eletromagnético, mas os fotoelétrons não são emitidos. Teoricamente, contagens não seriam registradas, porque os fótons absorvidos seriam emitidos de volta para o campo e reabsorvidos em um tempo posterior, periodicamente, analogamente a oscilações de Rabi.

De acordo com MFC, o cálculo da média de SSQ, aplicado sobre o operador estatístico do campo, $\text{Tr}(\hat{J}\rho)$, fornece a densidade de probabilidade $p(t)$ para a fotodeteção, isto é, emissão de um fotoelétron no tempo t , dado que no tempo $t = 0$ o sistema campo-detector estava no estado separável

$$\rho_0 = |g\rangle\langle g| \otimes \rho, \quad (3.6)$$

onde ρ é o operador estatístico do campo. Microscopicamente, isto significa que inicialmente o detector estava no seu estado fundamental. Depois, durante o intervalo de tempo $[0, t)$, o sensor interagiu com o campo e pode ter absorvido um fóton, fazendo a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$. Assim, $p(t)\Delta t$ é a probabilidade de o sensor decair de volta ao estado $|g\rangle$ durante o intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, emitindo ao mesmo tempo um fotoelétron, que posteriormente dará origem a um “click” do detector. A emissão do fotoelétron é apenas a nossa interpretação de como o detector opera, e este fenômeno não aparece explicitamente no formalismo.

A seguir, vamos aplicar a abordagem de trajetórias quânticas [39]. O Hamiltoniano efetivo é escrito como

$$H_{eff} = H - i\gamma \sigma_+ \sigma_- = \frac{1}{2} (\omega_0 - i\gamma) \sigma_z + \omega \hat{n} + g a \sigma_+ + g^* a^\dagger \sigma_- - i\gamma/2, \quad (3.7)$$

onde usamos $\sigma_+ \sigma_- = (1 + \sigma_z)/2$. A evolução do sistema entre dois decaimentos espontâneos é dada pelo *superoperador de não-decaimento*

$$\mathcal{D}_t \rho_0 = \mathcal{U}(t) \rho_0 \mathcal{U}^\dagger(t), \quad \mathcal{U}(t) = \exp(-iH_{eff}t). \quad (3.8)$$

Após manipulações algébricas usuais [95, 96] obtemos a seguinte forma explícita do operador de evolução não-unitário $\mathcal{U}(t)$ (note que $\mathcal{U}^\dagger \neq \mathcal{U}^{-1}$, caracterizando um elemento de um semi-grupo):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) = & e^{-\gamma t/2} \exp[-i\omega(\sigma_z/2 + \hat{n})t] \left\{ \frac{1}{2} \left[C_{\hat{n}+1}(t) - i\frac{\delta}{|g|} S_{\hat{n}+1}(t) \right] (1 + \sigma_z) \right. \\ & \left. - i\frac{g}{|g|} S_{\hat{n}+1}(t) a \sigma_+ - i\frac{g^*}{|g|} a^\dagger S_{\hat{n}+1}(t) \sigma_- + \frac{1}{2} \left[C_{\hat{n}}(t) + i\frac{\delta}{|g|} S_{\hat{n}}(t) \right] (1 - \sigma_z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$C_{\hat{n}}(t) \equiv \cos(|g| B_{\hat{n}} t), \quad S_{\hat{n}}(t) \equiv \sin(|g| B_{\hat{n}} t) / B_{\hat{n}}, \quad (3.10)$$

$$B_{\hat{n}} = \sqrt{\hat{n} + (\delta/|g|)^2}, \quad \delta = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega - i\gamma) \quad (3.11)$$

(note que o parâmetro δ é um número complexo e \hat{n} é o operador número).

Para o estado inicial (3.6), a probabilidade de que a próxima emissão do fotoelétron ocorra no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$ é dada por [14, 39, 97]

$$P(t) = \text{Tr}_{C-D} [R\mathcal{D}_t \rho_0] \Delta t \quad (3.12)$$

(os índices C e D são um lembrete de que a operação de traço é feita sobre o campo e o detector), onde Δt é a resolução temporal do aparelho de medição. Avaliando primeiro o traço sobre as variáveis do detector, a probabilidade por unidade de tempo de que a próxima fotoemissão ocorrerá no tempo t é [97]

$$p(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t)}{\Delta t} = \text{Tr}_F [\Xi(t)\rho], \quad (3.13)$$

onde o “*superoperador de transição*”, que depende do tempo

$$\Xi(t)\rho = 2\gamma\Gamma(t)\rho\Gamma^\dagger(t), \quad (3.14)$$

age sobre o campo. Ele representa o efeito da emissão de um fotoelétron no MA (“click”) sobre o campo. Na equação (3.14) $\Gamma(t)$ é o “*operador de transição*” dependente do tempo

$$\Gamma(t) = \langle e|\mathcal{U}(t)|g\rangle, \quad (3.15)$$

que tira um único fóton do estado do campo. Substituindo a equação (3.9) na equação (3.15), podemos escrever $\Gamma(t)$ como

$$\Gamma(t) = -i\frac{g}{|g|} \exp(-\gamma t/2 - i\omega\hat{n}t) S_{\hat{n}+1}(t)a, \quad (3.16)$$

e, portanto, o superoperador de transição dependente do tempo (3.14) torna-se

$$\Xi(t)\rho = 2\gamma e^{-\gamma t} e^{-i\omega\hat{n}t} S_{\hat{n}+1}(t) a \rho a^\dagger S_{\hat{n}+1}^\dagger(t) e^{i\omega\hat{n}t}. \quad (3.17)$$

No caso ressonante, $\omega_0 = \omega$, temos

$$B_{\hat{n}} = \sqrt{\hat{n} - \chi^2}, \quad \chi \equiv \gamma/(2|g|). \quad (3.18)$$

Se o tempo de interação Δt for pequeno, e o número de fótons do campo não é muito alto, de modo que a condição

$$|g|\Delta t\sqrt{n+1} \ll 1 \quad (3.19)$$

seja satisfeita para todos os autovalores de n , para os quais as probabilidades $p_n = \langle n|\rho|n\rangle$ são significativas, então podemos trocar o operador $\sin(B_{\hat{n}+1}|g|\Delta t)$ na equação (3.10) simplesmente por seu argumento. Com isso, obtemos o SSQ

$$J\rho = e^{-i\omega\hat{n}\Delta t} [2\gamma(|g|\Delta t)^2 a \rho a^\dagger] e^{i\omega\hat{n}\Delta t}, \quad (3.20)$$

que tem quase a forma proposta por Srinivas e Davies (2.41), com a constante de acoplamento

$$\varsigma_A = 2\gamma(|g|\Delta t)^2. \quad (3.21)$$

Identificando $2\gamma = (\Delta t)^{-1}$, obtemos a constante de acoplamento ς_A obtida em [74], porém esta suposição não é a única escolha possível. Note que o superoperador (3.20) contém os fatores $\exp(\pm i\omega\hat{n}\Delta t)$, que são essencialmente diferentes da unidade, mesmo sob a condição (3.19), por dois motivos: (1) a condição $|g|\Delta t \ll 1$ não implica em $\omega\Delta t \ll 1$, porque $\omega \gg |g|$; (2) a condição (3.19) contém a raiz quadrada de n , enquanto que os fatores $\exp(\pm i\omega\hat{n}\Delta t)$ dependem do autovalor n , que é muito maior que \sqrt{n} se $n \gg 1$. Consequentemente, mesmo o modelo microscópico mais simples dá origem a um SSQ que é diferente do modelo A, coincidindo com este apenas para os elementos diagonais $|n\rangle\langle n|$ da matriz densidade na base de Fock.

Se a condição (3.19) não for satisfeita, nós propomos que o SSQ seja definido como uma média temporal do superoperador de transição (3.17) sobre o tempo de interação T , pois o instante exato em que a fotodeteccção ocorre é desconhecido. Logo, uma

hipótese razoável é de que estes eventos acontecem aleatoriamente com uma probabilidade uniforme, e podemos definir o SSQ como:

$$J_T \rho = \frac{1}{T} \int_0^T dt \Xi(t) \rho. \quad (3.22)$$

Escrevendo o operador densidade na base de Fock

$$\rho = \sum_{m,n=0}^{\infty} \rho_{mn} |m\rangle \langle n|, \quad (3.23)$$

temos

$$J_T \rho = \sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{mn} \sqrt{mn} f_{mn} |m-1\rangle \langle n-1|, \quad (3.24)$$

onde

$$f_{mn} = \frac{2\gamma}{T} \int_0^T e^{i\omega t(n-m) - \gamma t} S_m(t) S_n(t) dt. \quad (3.25)$$

É natural supor que o produto γT é grande o suficiente para que a fotodeteção ocorra com alta probabilidade. Matematicamente, isto significa que $\exp(-\gamma T) \ll 1$. Se $\gamma \ll \omega$ (esta também é uma suposição natural), então os coeficientes não-diagonais f_{mn} com $m \neq n$ são muito pequenos devido a rápidas oscilações do integrando na equação (3.22), portanto eles podem ser desprezados (uma estimativa grosseira prevê para estes elementos uma ordem de magnitude $\mathcal{O}(\gamma/\omega)$, em relação aos coeficientes diagonais f_{nn}). Consequentemente, o modelo microscópico resulta em um SSQ “não-linear”, de forma

$$J\rho = \varsigma \text{diag} [F(\hat{n}) a \rho a^\dagger F(\hat{n})], \quad (3.26)$$

onde $\text{diag}(\hat{O})$ denota a parte diagonal do operador \hat{O} na base de Fock. A função $F(n)$ pode ser extraída dos coeficientes f_{nn} (a menos de um fator de fase constante, que pode ser incluído no coeficiente ς) como

$$F(n) = \sqrt{f_{n+1,n+1}}. \quad (3.27)$$

Com a condição $\exp(-\gamma T) \ll 1$, o limite superior de integração na equação (3.22) pode ser estendido formalmente ao infinito, com um erro exponencialmente pequeno. Então, levando em conta a definição da função $S_n(t)$ (3.10), chegamos a integrais de tipo

$$\int_0^\infty dt e^{-\gamma t} \times \begin{cases} \sin^2(\mu t)/\mu^2 & \text{para } \chi < 1 \\ t^2 & \text{para } \chi = 1 \\ \sinh^2(\mu t)/\mu^2 & \text{para } \chi > 1 \end{cases},$$

que podem ser calculadas exatamente (ver, por exemplo, equações 3.893.2 e 3.541.1 de [98]). O resultado final não depende de γ ou χ (e é o mesmo para $\chi < 1$ e $\chi > 1$):

$$f_{nn} = (nT)^{-1}. \quad (3.28)$$

Assim, obtemos o SSQ

$$J_T \rho = \varsigma_T \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{nn} |n-1\rangle \langle n-1| = \varsigma_T \text{diag} (E_- \rho E_+), \quad (3.29)$$

onde $\varsigma_T = T^{-1}$, e os operadores E_- e E_+ são definidos pela equação (2.48). Note-se que, a princípio, ς_T é diferente de ς_A . Além disso, o superoperador (3.29) deduzido do modelo microscópico é diferente do SSQ fenomenológico (2.48) estudado em [65, 67]. A diferença é que J_T não tem elementos não-diagonais, enquanto que J_E os tem. Vemos que o modelo microscópico considerado (que pode ser justificado no caso de um grande número de fótons no modo do campo) prediz que cada fotocontagem não apenas diminui o número de fótons no campo de um, mas também implica em decoerência dos elementos não-diagonais do campo, devido à interação com o detector.

Observe-se, entretanto, que a fórmula (3.28) mantém-se sob a suposição de que o limite superior da integração na equação (3.25) pode ser estendido ao infinito. Mas isto não pode ser feito se o parâmetro χ for muito grande. De fato, para $\chi > 1$ e $\gamma T \gg 1$, o integrando em (3.25) para $t = T$ é proporcional a $\exp \left[-\gamma T \left(1 - \sqrt{1 - n/\chi^2} \right) \right]$, portanto ele não é pequeno quando $n/\chi^2 \ll 1$. Calculando a integral nos limites finitos sob as condições $n/\chi^2 \ll 1$ e $\gamma T \gg 1$, obtemos a fórmula aproximada

$$f_{nn} = (Tn)^{-1} \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma T n / (2\chi^2) \right] \right\}, \quad (3.30)$$

que mostra que f_{nn} não depende de n se $\gamma T n / (2\chi^2) \ll 1$. Portanto, vemos que SSQ (3.29) pode ser transformado continuamente no modelo A (2.41), quando o número de fótons muda de valores grandes a relativamente pequenos. Devemos enfatizar que, mesmo assim, os coeficientes não-diagonais f_{mn} permanecem pequenos neste limite. Sua magnitude aproxima-se da amplitude dos coeficientes diagonais apenas no caso de $\gamma \sim \omega$, que não parece ser muito realista.

3.1.3 Modelo de oscilador harmónico

Agora vamos considerar outro modelo, onde o papel do detector é feito por um oscilador harmónico interagindo com um modo do campo. Esta é uma versão simplificada do modelo proposto por Mollow [7] (para suas aplicações em outras áreas ver, por exemplo, [99] e referências lá). Na aproximação de onde girante (cuja validade foi estudada em Ref. [100], por exemplo) o Hamiltoniano do sistema detector-campo é

$$H = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + gab^\dagger + g^* a^\dagger b, \quad (3.31)$$

onde o modo b assume o papel de detector e o modo a corresponde ao campo (ω_b e ω_a são as respectivas frequências e g é a constante de acoplamento sensor-campo). A seguir, repetimos os mesmos procedimentos que fizemos na seção 3.1.2. Os efeitos dissipativos devidos ao MA, associadas ao modo b , podem ser levados em conta através da equação mestra

$$\frac{d\rho}{dt} + i [H_{eff}\rho - \rho H_{eff}^\dagger] = 2\gamma b\rho b^\dagger \quad (3.32)$$

com o Hamiltoniano efetivo

$$H_{eff} = H - i\gamma b^\dagger b = (\omega_b - i\gamma) b^\dagger b + \omega_a a^\dagger a + gba^\dagger + g^* b^\dagger a. \quad (3.33)$$

O operador de evolução $\mathcal{U}(t) = \exp(-iH_{eff}t)$ para o Hamiltoniano quadrático (3.33) pode ser calculado por meio de diferentes técnicas [101]. Aqui, usamos a abordagem algébrica [102–105], já que o Hamiltoniano (3.33) é uma combinação linear dos geradores da álgebra $su(1,1)$

$$K_+ \equiv b^\dagger a, \quad K_- \equiv -ba^\dagger, \quad K_0 \equiv (b^\dagger b - a^\dagger a)/2,$$

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad [K_-, K_+] = 2K_0.$$

O operador de evolução pode ser fatorado como

$$\mathcal{U}(t) = e^{-i\Omega t N} e^{A(t)K_+} e^{B(t)K_0} e^{C(t)K_-}, \quad (3.34)$$

onde

$$N \equiv (b^\dagger b + a^\dagger a) / 2, \quad \Omega \equiv \omega_b + \omega_a - i\gamma.$$

Os coeficientes dependentes do tempo são

$$A(t) = -\frac{ig^* \sin(\eta t)}{\eta \Upsilon(t)}, \quad C(t) = \frac{ig \sin(\eta t)}{\eta \Upsilon(t)}, \quad (3.35)$$

$$B(t) = -2 \ln \Upsilon(t), \quad (3.36)$$

com

$$\Upsilon(t) = \cos(\eta t) + i(\omega_{ba}/2\eta) \sin(\eta t), \quad (3.37)$$

$$\omega_{ba} \equiv \omega_b - \omega_a - i\gamma, \quad \eta \equiv (|g|^2 + \omega_{ba}^2/4)^{1/2}. \quad (3.38)$$

Considerando que o sensor está em ressonância com o campo, temos $\omega_{ba} = -i\gamma$ e

$$\Upsilon(t) = \cos(\eta_0 t) + (\gamma/2\eta_0) \sin(\eta_0 t), \quad (3.39)$$

$$\eta_0 = (|g|^2 - \gamma^2/4)^{1/2}. \quad (3.40)$$

Se, inicialmente, o detector estava no estado fundamental $|0_b\rangle$, o operador de transição, definido em (3.15), é

$$\Gamma(t) = \langle 1_b | \mathcal{U}(t) | 0_b \rangle = A(t) \exp \left[-\frac{1}{2} (i\Omega t + B(t)) (a^\dagger a + 1) \right] a \quad (3.41)$$

e o superoperador de transição torna-se

$$\Xi(t)\rho = 2\gamma |A(t)|^2 e^{-(i\Omega t + B(t))(a^\dagger a + 1)/2} a \rho a^\dagger e^{(i\Omega^* t - B^*(t))(a^\dagger a + 1)/2}. \quad (3.42)$$

Para $t = \Delta t$ “pequeno” e poucos fótons na cavidade, SSQ (3.20) é recuperado. Considerando, em vez disso, a média temporal sobre SSQ, obtemos as equações (3.22)-(3.24). Para $\chi = \gamma/(2|g|) < 1$ (quando o parâmetro η_0 é real) podemos representar os coeficientes f_{mn} como (considerando o caso de ressonância com $\omega_a = \omega_b = \omega$)

$$f_{mn} = \frac{4\chi}{T(1-\chi^2)^{3/2}} \int_0^Z dz [\cos(z) + \xi \sin(z)]^{m+n-2} \times \sin^2(z) \exp[i\bar{\omega}z(n-m) - \xi z(m+n)], \quad (3.43)$$

onde

$$\xi = \frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{|g|\sqrt{1-\chi^2}}, \quad Z = \frac{\gamma T}{2\xi}. \quad (3.44)$$

Como o parâmetro $\bar{\omega}$ é grande, os coeficientes não-diagonais f_{mn} com $n \neq m$ são muito pequenos devido ao fator oscilante $\exp[i\bar{\omega}t(n-m)]$. Consequentemente, eles podem ser desprezados em primeira aproximação, e chegamos novamente no SSQ diagonal da forma (3.26).

Aqui, notamos que a expressão analítica exata para a integral na equação (3.43) é bastante complicada (mesmo se $m = n$), e que torna-se difícil usá-la. Por exemplo, no limite $\chi \rightarrow 1$ a equação (3.43) pode ser reduzida à forma

$$f_{nm} = \frac{4}{T} \int_0^{\gamma T/2} dy y^2 (1+y)^{2n-2} \exp(-2ny). \quad (3.45)$$

Trocando o limite superior por infinito, reconhecemos a representação integral da função hipergeométrica confluyente de Tricomi $\Psi(a; c; z)$ [106]. Portanto, desprezando pequenas correções da ordem de $\exp(-\gamma T)$, temos

$$f_{nm} = \frac{8}{T} \Psi(3; 2n+2; 2n). \quad (3.46)$$

Embora a função Ψ do lado direito da equação (3.46) pode ser reescrita em termos de polinômios associados de Laguerre [106] como

$$\Psi(3; 2n+2; 2n) = \frac{(2n)!}{2(2n)^{1+2n}} L_{2n-2}^{(-1-2n)}(2n), \quad (3.47)$$

nem a equação (3.46), nem (3.47) ajudam-nos a entender o comportamento do coeficiente f_{nm} como função de n . Por isso, vamos tentar encontrar algumas fórmulas aproximadas simples para a integral em (3.43).

Se $\chi \ll 1$, então também $\xi \ll 1$, logo podemos desprezar o termo $\xi \sin(z)$ no integrando da equação (3.43), e a função $\sin^2(z)[\cos(z)]^{2n-2}$ pode ser trocada por seu valor médio, tomado sobre o período 2π de oscilações rápidas (na escala determinada pelo tempo característico ξ^{-1}). Após manipulações algébricas simples (substituindo o limite superior da integração, Z , por infinito) obtemos

$$f_{nm} = \frac{4(2n-2)!}{T(2^n n!)^2}, \quad \chi \ll 1. \quad (3.48)$$

Usando a fórmula de Stirling, $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, podemos escrever para $n \gg 1$

$$f_{nm} \approx \left(T\sqrt{\pi n^5}\right)^{-1}. \quad (3.49)$$

Esta função corresponde ao SSQ (3.26) com

$$F(n) = F_5(n) \equiv (n+1)^{-5/4}, \quad \varsigma = \varsigma_5 \equiv (T\sqrt{\pi})^{-1}. \quad (3.50)$$

Portanto, diferentemente do caso de detector de 2-níveis, na versão mais simples do detector de oscilador harmônico o operador de abaixamento contém o fator $(\hat{n}+1)^{-5/4}$ em vez de $(\hat{n}+1)^{-1/2}$, como no modelo E (2.48), ou simplesmente $\hat{1}$, como no modelo A (2.41).

O caso $\chi \ll 1$ não é muito realista de ponto de vista prático, pois ele corresponde ao detector com eficiência muito baixa. Entretanto, podemos calcular a integral (3.43) aproximadamente com ξ arbitrário, considerando que $n \gg 1$ e usando o *Método do Ponto Sela*. Reescrevendo o integrando como $\exp[G(z)]$, podemos facilmente verificar que os pontos de máximos da função

$$G(z) = 2 \ln[\sin(z)] + 2(n-1) \ln[\cos(z) + \xi \sin(z)] - 2\xi n z$$

são dados pela fórmula $z_k = \pm z_0 + k\pi$, onde

$$z_0 = \tan^{-1}(\mu), \quad \mu = (\xi^2 n + n - 1)^{-1/2}, \quad (3.51)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ para o sinal positivo e $k = 1, 2, \dots$ para o sinal negativo. Pode-se verificar que

$$\exp[G(z_k)] = \frac{\mu^2(1 + \xi\mu)^{2n-2}}{(1 + \mu^2)^n} \exp(-2z_0\xi n - 2\xi\pi n k). \quad (3.52)$$

As segundas derivadas da função $G(z)$ nos pontos de máximos não dependem de k :

$$G''(z_k) = -\frac{4n(\xi^2 + 1)}{1 + \xi\mu}. \quad (3.53)$$

Usando equações (3.52) e (3.53) e fazendo a somatória sobre os valores encontrados de k , obtemos (fazendo $Z = \infty$)

$$f_{nn} = \frac{\chi\sqrt{8\pi}(1 + \xi\mu)^{2n-3/2} \exp(-2z_0\xi n)}{T\sqrt{n}(n + \chi^2 - 1)(1 + \mu^2)^n} \coth(\xi n \pi), \quad (3.54)$$

Embora o uso do Método do Ponto Sela pode ser justificado para $n \gg 1$, a fórmula (3.54) parece ser uma boa aproximação para $n \sim 1$ também. Por exemplo, para $n = 1$ (quando $\mu = \xi^{-1}$) ela fornece

$$Tf_{11} \approx 4\chi\sqrt{\pi} \coth(\pi\xi) \exp[-2\xi \tan^{-1}(\xi^{-1})], \quad (3.55)$$

e os valores numéricos de (3.55) em todo o intervalo $0 < \chi < 1$ não são muito distintos do valor exato $Tf_{11} = 1$, que é mantido independentemente de χ , desde que o limite superior da integração em (3.43) possa ser estendido ao infinito.

Para $n \gg 1$ (quando $\mu \ll 1$) a equação (3.54) pode ser simplificada como

$$f_{nn}(\chi) \approx \frac{\chi\sqrt{8\pi}}{eT} n^{-3/2} \coth\left(\frac{\chi n \pi}{\sqrt{1 - \chi^2}}\right), \quad \chi \leq 1. \quad (3.56)$$

Para $\chi \ll 1$ a função (3.56) assume a forma (3.49), com coeficiente ligeiramente diferente $\zeta' = (eT)^{-1} \sqrt{8/\pi} \approx 1,04\zeta_3$.

Para $\chi > 1$ (quando o parâmetro η_0 é imaginário), em vez da relação (3.43), temos a integral (considerando apenas os coeficientes diagonais)

$$f_{nn} = \frac{4\chi}{T(\chi^2 - 1)^{3/2}} \int_0^Y dz [\cosh(z) + \zeta \sinh(z)]^{2n-2} \sinh^2(z) \exp(-2n\zeta z), \quad (3.57)$$

onde

$$\zeta = \chi/\sqrt{\chi^2 - 1}, \quad Y = \gamma T/(2\zeta). \quad (3.58)$$

Aplicando novamente o Método do Ponto Sela, temos agora apenas um ponto de máximo

$$z_{max} = \tanh^{-1}(\nu), \quad \nu = [(\zeta^2 - 1)n + 1]^{-1/2}. \quad (3.59)$$

Levando em conta o valor da segunda derivada do logaritmo do integrando neste ponto,

$$G''(z_{max}) = -\frac{4n(\zeta^2 - 1)}{1 + \zeta\nu}, \quad \zeta\nu = \frac{\chi}{\sqrt{n + \chi^2 - 1}}, \quad (3.60)$$

obtemos

$$f_{nn} = \frac{\chi\sqrt{8\pi}(1 + \zeta\nu)^{2n-3/2}(1 - \nu)^{n(\zeta-1)}}{T\sqrt{n}(n + \chi^2 - 1)(1 + \nu)^{n(\zeta+1)}}. \quad (3.61)$$

Pode ser verificado que o limite da fórmula (3.61) em $\chi \rightarrow 1$ coincide com o limite análogo da fórmula (3.54), logo a transição no ponto $\chi = 1$ é contínua.

A forma assintótica da equação (3.61) para $n \gg \chi^2$ é a mesma que aquela em (3.56), exceto pelo fator $\coth\left(\chi n\pi/\sqrt{1 - \chi^2}\right)$:

$$f_{nn}(\chi) \approx \frac{\chi\sqrt{8\pi}}{eT} n^{-3/2}, \quad \chi \geq 1, \quad (3.62)$$

Aplicando o Método do Ponto Sela à integral (3.45) (para $n \gg 1$), obtemos o mesmo resultado (3.62) com $\chi = 1$. Portanto para $\chi \sim 1$ (nem muito pequeno e nem muito grande) obtemos SSQ na forma (3.26) com

$$F(n) = F_3(\bar{n}) \equiv (n + 1)^{-3/4}, \quad \zeta = \zeta_3 \equiv \frac{\chi\sqrt{8\pi}}{eT}. \quad (3.63)$$

Para valores muito grandes do parâmetro χ (excedendo \sqrt{n}) o Método do Ponto Sela não pode ser usado, porque a segunda derivada do logaritmo do integrando, dada pela equação (3.60), torna-se pequena, e a coordenada z_{max} , determinada pela

equação (3.59), tende ao infinito, enquanto que o limite superior Y da integração em (3.57) tende ao valor fixo $\gamma T/2$. Para $\chi \gg 1$, a equação (3.63) mantém-se para valores de n satisfazendo aproximadamente a desigualdade $n > n_* \sim 4\chi^2 \exp(-\gamma T)$. Se $n < n_*$, pode ser mostrado que a equação (3.57) leva à mesma fórmula aproximada (3.30) que se faz presente no modelo do detector de 2-níveis, portanto o modelo A é recuperado para valores relativamente pequenos de n (embora sem elementos não-diagonais).

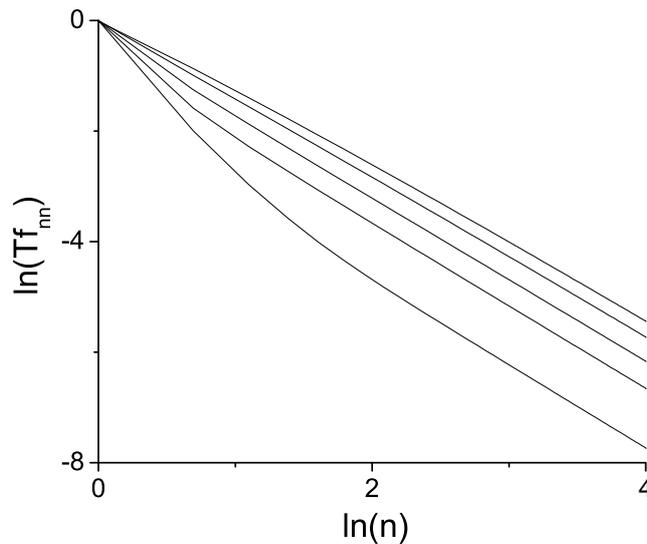


Figura 3.2: Dependência do coeficiente diagonal f_{nn} com número n , obtida por integração numérica de (3.43) e (3.57) com valor fixo $\gamma T = 10$, para pequenos e moderados valores do parâmetro χ (de baixo pra cima): $\chi = 0, 1; 0, 3; 0, 5; 0, 8; 1, 1$.

Nas figuras 3.2 e 3.3 mostramos a dependência dos coeficientes diagonais f_{nn} com o número n para diferentes valores do parâmetro χ , obtida pela integração numérica de (3.43) e (3.57) para valor fixo do parâmetro $\gamma T = 10$; na figura 3.4 eles são comparados com as fórmulas analíticas aproximadas (3.54) e (3.61). Vemos que a coincidência é bastante satisfatória para grandes valores de n , embora há algumas diferenças para $n \sim 1$. Na figura 3.3 vemos também que o aumento do parâmetro χ resulta no aparecimento de “platôs de Srinivas e Davies” para pequenos valores de n , que se transformam numa inclinação correspondente a dependência polinomial para grandes valores de n . A altura dos platôs diminui como χ^{-2} , em concordância com a equação (3.30), porque grandes

valores de χ correspondem (para valores fixos de γ e T) ao coeficiente de acoplamento entre o campo e o sensor ($|g|$) pequeno e, conseqüentemente, pequena probabilidade de fotocontagem.

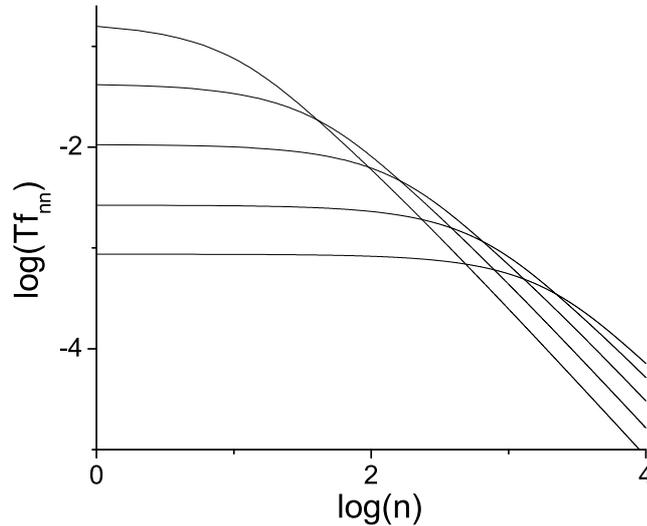


Figura 3.3: Dependência do coeficiente diagonal f_{nm} com número n , obtida pela integração numérica de (3.57) com o valor fixo do parâmetro $\gamma T = 10$, para grandes valores do parâmetro χ (de cima para baixo): $\chi = 5, 10, 20, 40, 70$. Note a aparição de platôs, correspondentes ao modelo A para valores iniciais de n ; para n grande eles se transformam em curvas com inclinação, dada por uma dependência polinomial.

3.1.4 Conclusões

Nesta seção apresentamos dois modelos microscópicos para a dedução de SSQ. No primeiro caso, supusemos que o detector se comporta como um átomo de dois níveis, e no segundo – como um oscilador harmônico. A diferença principal entre a nossa modelagem e as anteriores é que nós levamos em consideração os efeitos dissipativos, que surgem quando o detector é acoplado ao “mecanismo de amplificação” (válvula fotomultiplicadora). Tal modelagem inclui o efeito do decaimento espontâneo do estado excitado do sensor, que dá origem à emissão de um fotoelétron dentro da válvula fotomultiplicadora, que é amplificado e visto como uma rajada de corrente elétrica macroscópica.

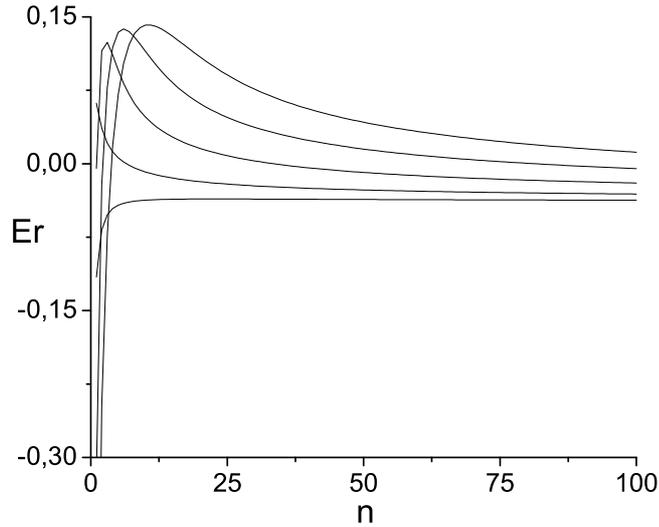


Figura 3.4: Comparação entre a integração numérica das equações (3.43), (3.57) e fórmulas analíticas aproximadas (3.54), (3.61) para $\chi = 0, 5; 1, 1; 2; 3; 4$ (de baixo para cima). Definimos o erro relativo como $Er = (f_{nn}^{num} - f_{nn}^{an})/f_{nn}^{num}$.

Usando a abordagem de trajetórias quânticas, nós deduzimos o superoperador de transição geral, dependente do tempo, responsável por tirar um fóton do campo. Como ele depende explicitamente do tempo de interação, propusemos dois esquemas diferentes para obter o SSQ independente do tempo. No primeiro caso, consideramos que o tempo de interação é curto e que há poucos fótons na cavidade. Nesta situação recuperamos o SSQ proposto inicialmente por Srinivas e Davies para ambos os modelos de detector. No segundo caso, definimos o SSQ como uma média temporal do superoperador de transição sobre o intervalo de tempo, durante o qual o fóton é certamente absorvido. Como resultado, obtivemos diferentes SSQ “não-lineares” para o modelo de átomo de dois níveis e o do oscilador harmônico.

Em particular, mostramos que para estados quânticos com a contribuição dominante de componentes de Fock com valores altos de n , SSQ tem a forma “não-linear” (3.26), com a função assintótica apresentando comportamento de uma lei de potência $F(n) = (n + 1)^{-\beta}$. No entanto, o valor do expoente β é dependente do modelo. Para o átomo de dois níveis nós obtivemos $\beta = 1/2$, enquanto que para o modelo de oscilador

harmônico os valores $\beta = 5/4$ e $\beta = 3/4$ foram encontrados, dependendo da razão entre a taxa do decaimento espontâneo do estado excitado e o acoplamento entre o detector e o campo. Não obstante, demonstramos como o SSQ simples de Srinivas e Davies surge no caso de estados com um número pequeno de fótons. Outro resultado importante que obtivemos foi que SSQ, quando aplicado aos elementos não-diagonais da matriz densidade na base de Fock, é nulo em média em ambos os modelos, devido a oscilações rápidas dos termos de campo livre.

3.2 Detector à temperatura não-nula

Nesta seção vamos estudar a reação (*back-action*) de um detector de único fóton sobre o campo eletromagnético devido à fotodetecção, considerando um modelo microscópico mais sofisticado, em que o detector possui excitações intrínsecas. Usando a abordagem de trajetórias quânticas, vamos encontrar o SSQ que consiste de duas partes. A primeira é o termo de “contagens claras”, que representa fotoabsorções reais, e a segunda descreve as “contagens escuras”, representando a amplificação das excitações intrínsecas dentro do detector. Vamos comparar os nossos resultados para as taxas de contagem com dados experimentais, mostrando a existência de uma boa concordância entre ambos, e que, dependendo da frequência do campo eletromagnético, podemos obter o modelo A ou o modelo E para regimes específicos alcançados a partir da variação dos parâmetros.

3.2.1 Introdução

Vamos estudar como o estado do campo após um “click” do detector depende de seus parâmetros. Para isso, vamos rever como DUF opera de fato. Apesar de detalhes técnicos e estruturais associados a cada tipo de detector, o processo de fotodetecção está baseado no mesmo princípio. O sensor, iniciado no estado fundamental, interage com o campo e se ele absorver um fóton, fará uma transição para o estado excitado. Depois de um intervalo de tempo aleatório, o sensor decai de volta para o estado fundamental, emitindo um fotoelétron que ativa o mecanismo de amplificação (MA) do DUF (por exemplo, através do processo de avalanche), produzindo um pulso macroscópico de corrente elétrica, que dispara o “click” do detector, registrando-se assim uma contagem. Além disso, em

detectores reais ocorre um fenômeno chamado “*contagens escuras*”, que são fotoelétrons originários de excitações intrínsecas de dentro do MA, e não devidos a uma absorção de um fóton do campo eletromagnético. A influência das contagens escuras sobre os resultados de vários experimentos foi estudada em [107–111], e diferentes esquemas para determinar a probabilidade de contagens escuras e a eficiência quântica da detecção de um único fóton foram relatados em [112–114].

Na seção anterior nós consideramos um modelo microscópico para o detector à “temperatura nula”, supondo que não havia excitações intrínsecas dentro de MA, e que o sensor estava em ressonância com o modo do campo. Nesta seção vamos afrouxar estas condições, levando em consideração os efeitos devidos a “temperaturas não-nulas” e admitindo uma dessintonia entre o detector e o campo. Além disso, vamos atribuir valores numéricos para os parâmetros do modelo para reproduzir os dados experimentais. Mostraremos que as contagens escuras aparecem naturalmente no nosso modelo, e comparando as taxas de contagem e a razão sinal-ruído com dados experimentais, será obtida uma boa concordância qualitativa e quantitativa. Ademais, vamos demonstrar que a expressão para SSQ deve ser modificada para (confira a referência [107])

$$\hat{J}_\rho = \varsigma_O \hat{O} \rho \hat{O}^\dagger + \varsigma_D \hat{D} \rho \hat{D}^\dagger, \quad (3.64)$$

onde ς_D é (aproximadamente) a taxa de contagens escuras e o operador \hat{D} descreve a reação do detector sobre o campo devido a elas. Finalmente, será mostrado que, ao modificar a frequência do campo, pode-se obter o modelo A ou E, em regimes específicos.

O plano desta seção é o seguinte. Na subseção 3.2.2 modelamos o sensor do fotodetector como um sistema quântico de dois níveis e, levando em consideração os efeitos do acoplamento sensor - MA, obtemos a forma explícita do superoperador de transição e o SSQ. Na subseção 3.2.3 vamos comparar os nossos resultados para as taxas de contagem com dados experimentais e, na subseção 3.2.4, iremos obter expressões concretas para o SSQ em diferentes regimes de operação do detector. Finalmente, na subseção 3.2.5 apresentamos o sumário e nossas conclusões.

3.2.2 Modelo de detector imperfeito

Para descrever as propriedades fundamentais de DUF, independentemente do seu tipo, nós o modelamos como um átomo de dois níveis acoplado a um reservatório com o número médio \bar{n} de excitações intrínsecas. Neste caso, o sistema campo-DUF pode ser descrito efetivamente pela equação mestra [39]

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_T &= \frac{1}{i} [H_0, \rho_T] - \gamma \bar{n} (\sigma_- \sigma_+ \rho_T - 2\sigma_+ \rho_T \sigma_- + \rho_T \sigma_- \sigma_+) \\ &\quad - \gamma (\bar{n} + 1) (\sigma_+ \sigma_- \rho_T - 2\sigma_- \rho_T \sigma_+ + \rho_T \sigma_+ \sigma_-), \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde γ é a constante de acoplamento entre o sensor e o MA (aqui não vamos considerar as perdas devidas à relaxação do campo na cavidade).

O operador de decaimento do sensor (3.5) é neste caso

$$\hat{R}\rho_0 = 2\gamma (\bar{n} + 1) \sigma_- \rho_0 \sigma_+. \quad (3.66)$$

O superoperador de não-decaimento $\hat{\mathcal{U}}_t \rho_0 \equiv \rho_{\mathcal{U}}(t)$ descreve a evolução não-unitária do sistema campo-DUF do tempo $t = 0$ até $t > 0$ sem emissão de fotoelétrons. $\rho_{\mathcal{U}}(t)$ é a solução da equação mestra (3.65) sem o termo de decaimento (3.66)

$$\frac{d}{dt} \rho_{\mathcal{U}} = -i(H_e \rho_{\mathcal{U}} - \rho_{\mathcal{U}} H_e^\dagger) + 2\gamma \bar{n} \sigma_+ \rho_{\mathcal{U}} \sigma_-, \quad (3.67)$$

onde o Hamiltoniano efetivo não-Hermitiano é

$$H_e = \frac{(\omega_0 - i\gamma)}{2} \sigma_z + \omega \hat{n} + g a \sigma_+ + g a^\dagger \sigma_- - i\gamma (\bar{n} + \frac{1}{2}). \quad (3.68)$$

Portanto, a densidade de probabilidade para a observação de um “click” no tempo t é

$$p(t) = \text{Tr}_{C-D} \left[\hat{R} \hat{\mathcal{U}}_t \rho_0 \right],$$

onde $\hat{R} \hat{\mathcal{U}}_t \rho_0$ representa a evolução do sistema campo-DUF do estado inicial ρ_0 , equação (3.6), no intervalo $[0, t)$ sem nenhum decaimento do sensor, e um decaimento instantâneo no tempo t . Além disso, avaliando o traço apenas sobre as variáveis do detector, obtemos a expressão para o superoperador de transição

$$\hat{\Xi}(t) \rho = \text{Tr}_D \left[\hat{R} \hat{\mathcal{U}}_t \rho_0 \right], \quad (3.69)$$

e a densidade de probabilidade para o “click” torna-se $p(t) = \text{Tr} [\hat{\Xi}(t) \rho]$.

Para obter o superoperador de transição, primeiro devemos determinar o superoperador de não-decaimento $\hat{\mathcal{U}}_t$ e depois calcular a equação (3.69) usando o estado inicial (3.6). Para resolver a equação (3.67) fazemos a transformação

$$\rho_{\mathcal{U}} = X_t \tilde{\rho}_{\mathcal{U}} X_t^\dagger, \quad (3.70)$$

onde

$$X_t = \exp(-iH_e t). \quad (3.71)$$

Com isso, obtemos uma equação simples para $\tilde{\rho}_{\mathcal{U}}$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{\mathcal{U}} = 2\gamma\bar{n}\tilde{\sigma}_+\tilde{\rho}_{\mathcal{U}}\tilde{\sigma}_-, \quad \tilde{\sigma}_+ = X_{-t}\sigma_+X_t, \quad \tilde{\sigma}_- = \tilde{\sigma}_+^\dagger, \quad (3.72)$$

cuja solução formal é

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{U}}(t) = \rho_0 + 2\gamma\bar{n} \int_0^t dt' \tilde{\sigma}_+(t') \tilde{\rho}_{\mathcal{U}}(t') \tilde{\sigma}_-(t'). \quad (3.73)$$

Agora vamos iterar a equação (3.73) e obter uma expansão em série de potências de \bar{n} . Substituímos o resultado na equação (3.70) e, calculando a equação (3.69), obtemos finalmente

$$\hat{\Xi}(t)\rho = 2bg(1 + \bar{n}) \sum_{l=0}^{\infty} (2\gamma\bar{n})^l \hat{\Xi}_l(t)\rho, \quad (3.74)$$

onde para $l > 0$

$$\hat{\Xi}_l(t)\rho = \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{l-1}} dt_l \hat{\Pi}_l \rho \hat{\Pi}_l^\dagger \quad (3.75)$$

$$\hat{\Pi}_l(t, t_1, \dots, t_l) = \langle e | X_t \tilde{\sigma}_+(t_1) \tilde{\sigma}_+(t_2) \cdots \tilde{\sigma}_+(t_l) | g \rangle, \quad (3.76)$$

e para $l = 0$ temos

$$\hat{\Xi}_0(t)\rho = \hat{\Pi}_0 \rho \hat{\Pi}_0^\dagger, \quad \hat{\Pi}_0(t) = \langle e | X_t | g \rangle. \quad (3.77)$$

Após algumas manipulações algébricas bem estabelecidas [96, 124], obtemos para (3.71) a expressão

$$\begin{aligned} X_t = & \exp[-\gamma t(\bar{n} + 1/2) - i\omega\hat{n}t] \\ & \times \left\{ \chi_{\hat{n}+1}(t) |e\rangle\langle e| + \chi_{\hat{n}}(-t) |g\rangle\langle g| - ie^{-i\omega t/2} S_{\hat{n}+1}(t) a \sigma_+ - ie^{i\omega t/2} S_{\hat{n}}(t) a^\dagger \sigma_- \right\}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde

$$C_{\hat{n}}(t) = \cos(\gamma t B_{\hat{n}}/b), \quad S_{\hat{n}}(t) = \sin(\gamma t B_{\hat{n}}/b) / B_{\hat{n}}, \quad (3.79)$$

$$\chi_{\hat{n}} = e^{-i\omega t/2} [C_{\hat{n}}(t) - i\delta S_{\hat{n}}(t)], \quad (3.80)$$

$$B_{\hat{n}} = \sqrt{\hat{n} + \delta^2}, \quad (3.81)$$

$$\delta = (q - ib)/2, \quad q \equiv (\omega_0 - \omega)/g, \quad b \equiv \gamma/g. \quad (3.82)$$

Como será mostrado a seguir, em casos realistas precisamos apenas dos três primeiros termos da expansão (3.74), que são,

$$\hat{\Pi}_0 = -ie^{-\gamma t(\bar{n}+1/2)-i\omega(\hat{n}+1/2)t} S_{\hat{n}+1}(t)a \quad (3.83)$$

$$\hat{\Pi}_1 = e^{-\gamma t(\bar{n}+1/2)-i\omega\hat{n}t} \chi_{\hat{n}+1}(t-t_1)\chi_{\hat{n}}(-t_1) \quad (3.84)$$

$$\hat{\Pi}_2 = -ie^{-\gamma t(\bar{n}+1/2)-i\omega(\hat{n}-1/2)t} \chi_{\hat{n}+1}(t-t_1)S_{\hat{n}}(t_1-t_2)\chi_{\hat{n}-1}(-t_2)a^\dagger. \quad (3.85)$$

Substituindo estas expressões de volta nas equações (3.74) - (3.77), obtemos o superoperador de transição dependente do tempo. Nós procedemos como na seção anterior, definindo o SSQ como a média temporal do superoperador de transição sobre o intervalo de tempo T (a ser determinado posteriormente), durante o qual o fotoelétron é emitido com alta probabilidade

$$\hat{J}\rho \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \hat{\Xi}(t)\rho. \quad (3.86)$$

Consideremos o acoplamento fraco ($\omega, \omega_0 \gg \gamma, |g|$) para o qual o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (3.3) e a equação mestra (3.65) são válidos. Expressando o operador densidade do campo na base de Fock, equação (3.23), os elementos de matriz não diagonais de $\hat{J}\rho$ se anulam fazendo a média temporal em (3.86), devido a oscilações rápidas dos termos $\exp[\pm(m-n)i\omega t]$. Isto significa que o processo de fotodetecção destrói a coerência da matriz densidade. Tal fato pode ser entendido do ponto de vista da teoria de informação: a informação flui do sistema campo-sensor para o MA, portanto a decoerência está ativa. Além disso, como a contagem de fótons fornece informação apenas sobre os elementos diagonais, proporcionais ao número de fótons, os elementos não-diagonais podem ser ignorados. Portanto, de agora em diante vamos estar interessados apenas nos elementos diagonais de $\hat{J}\rho$ na equação (3.86). Aplicando os superoperadores $\hat{\Xi}_l$ sobre a matriz densidade, como na equação (3.74), após avaliar a equação (3.86) ficamos com

$$\hat{J}\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn} [nJ_n^{(C)}|n-1\rangle\langle n-1| + J_n^{(E)}|n\rangle\langle n| + (n+1)J_n^{(S)}|n+1\rangle\langle n+1| + \dots], \quad (3.87)$$

que é constituída de infinitos termos.

Após manipulações diretas, obtemos as seguintes expressões para o primeiro termo em (3.87)

$$J_n^{(C)} = \frac{bg(1+\bar{n})}{\tau} \frac{F_n - G_n}{|B_n|^2}, \quad (3.88)$$

$$G_n = \frac{1}{(1+2\bar{n})^2 + \phi_n^2} \left\{ 1 + 2\bar{n} - \exp[-\tau(1+2\bar{n})] [(1+2\bar{n}) \cos(\tau\phi_n) - \phi_n \sin(\tau\phi_n)] \right\}, \quad (3.89)$$

$$F_n = \begin{cases} \frac{\tau}{2} + \frac{1 - \exp[-2\tau(1+2\bar{n})]}{4(1+2\bar{n})}, & \text{se } \xi_n = \pm(1+2\bar{n}) \\ G_n(\phi_n \rightarrow i\xi_n), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.90)$$

$$\tau \equiv \gamma T, \quad \phi_n \equiv \frac{2\text{Re}(B_n)}{b}, \quad \xi_n \equiv \frac{2\text{Im}(B_n)}{b}. \quad (3.91)$$

Como a expressão (3.88) é muito hermética para ser interpretada analiticamente, vamos tratá-la numericamente, assim como os termos subsequentes. Para calculá-los, expandimos as funções dependentes do tempo [C_n e S_n na equação (3.79)] em termos de exponenciais e integramos as expressões resultantes. Por exemplo, para o segundo termo em (3.87) obtemos [B_n é complexo, ver equação (3.81)]

$$J_n^{(E)} = \frac{g\bar{n}b^2(1+\bar{n})}{\tau} \sum_{j,k=1}^4 \frac{W_j W_k^*}{y_j - y_k^*} \sum_{l=1}^2 (-1)^l \frac{1 - e^{i\alpha_l \tau}}{\alpha_l}, \quad (3.92)$$

onde

$$\alpha_1 = i(1+2\bar{n}) + (\omega_j - \omega_k^*)/b, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + (y_j - y_k^*)/b,$$

$$W_{1(2)} = (1 - \delta/B_{n+1})(1 + \delta/B_n), \quad W_{3(4)} = W_{1(2)}(B_{n+1} \rightarrow -B_{n+1}),$$

$$w_1 = w_2 = -w_3 = -w_4 = B_{n+1},$$

$$y_1 = -y_4 = -(B_{n+1} + B_n), \quad y_2 = -y_3 = B_n - B_{n+1}.$$

Da mesma forma, os termos seguintes podem ser obtidos, mas não vamos escrever as expressões resultantes aqui, pois elas podem ser obtidas da integral (3.86).

O SSQ (3.87) contém um número infinito de termos, portanto a cada vez que o detector acusa um “click”, o estado de campo ρ é reduzido a uma mistura incoerente de estados diferentes (devido ao processo de decoerência), cada um com a sua respectiva probabilidade. Vamos examinar estes termos mais de perto. O primeiro termo, com o coeficiente $J_n^{(C)}$, retira um fóton do campo e modifica o peso relativo das componentes do

estado pós-selecionado, portanto ele representa um “click” proveniente de absorção de um fóton – vamos chamar tal evento de “contagem clara”. O segundo termo, dependente de $J_n^{(E)}$ e proporcional a \bar{n}^1 , não retira fótons do campo, mas apenas modifica o peso relativo das componentes do estado – ele representa uma “contagem escura”, quando o detector emite um “click” devido a amplificação de suas excitações intrínsecas.

Todos os termos seguintes na equação (3.87) são proporcionais a \bar{n}^l , $l \geq 2$. Eles descrevem a emissão de vários fótons no campo após o “click” do detector, portanto vamos chamar o primeiro destes termos $J_n^{(S)}$ de “termo emissor”. Notamos que há muitos diferentes fenômenos que dão origem a contagens escuras [81, 89, 90, 112]. O nosso modelo leva em conta apenas aqueles que causam a transição de estado fundamental para o excitado no sensor, ignorando os outros que ocorrem dentro do mecanismo de amplificação. Como o estado do sensor depende da interação sensor-campo, as contagens escuras acabam modificando indiretamente o peso relativo de componentes do campo, o que explica a dependência com n . Os outros fenômenos físicos, que ocorrem dentro do mecanismo de amplificação não causam tal transição do sensor, não deveriam modificar, em princípio, a relação entre as componentes do campo e poderiam ser incluídos formalmente na equação (3.87) através de um termo constante, igual a taxa de contagens escuras correspondente. Isto será feito no próximo capítulo.

3.2.3 Comparação com dados experimentais

Agora vamos comparar as previsões do nosso modelo com os dados experimentais. Experimentalmente, a dependência de contagens claras e escuras é medida em função do comprimento de onda da luz e do “parâmetro de controle” (PC) do detector. Por PC, nós englobamos tais quantidades, como voltagem, corrente ou qualquer outro parâmetro físico que o experimentador ajusta para alcançar simultaneamente a melhor razão sinal-ruído (S) e a taxa de contagens claras mais alta. S é a razão entre as contagens claras (C_C) e as escuras (C_E), $S \equiv C_C/C_E$, e ela tem a seguinte propriedade útil: quando o valor do PC é aumentado, a taxa de contagens claras aumenta enquanto S permanece a mesma até o valor de colapso, ou *breakdown*, do PC, depois do qual a razão sinal-ruído

¹Como veremos a seguir, \bar{n} é bastante pequeno, por isso podemos fazer a aproximação $1 + \bar{n} \approx 1$ na equação (3.92).

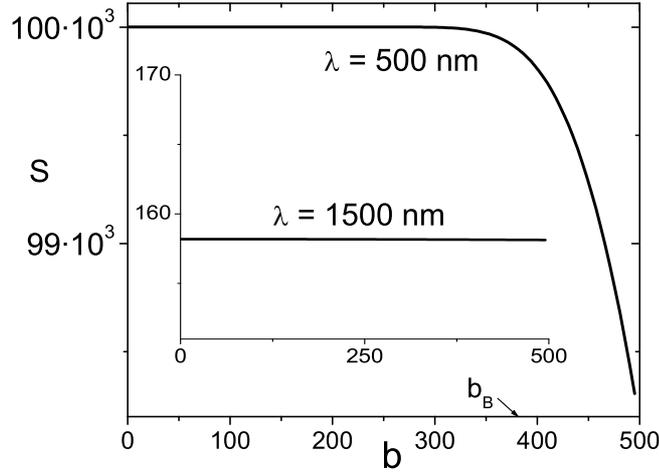


Figura 3.5: Razão sinal-ruído em função de b [equação (3.82)] na ressonância ($\lambda = 500\text{nm}$) e longe dela ($\lambda = 1500\text{nm}$, na inserção). O valor estimado do PC de “breakdown”, para o qual a razão sinal-ruído começa a decrescer rapidamente, é $b_B \approx 380$.

começa a decrescer rapidamente em função do PC [83,89,92,112]. Por isso, a maioria dos detectores opera perto do PC de “breakdown” para alcançar a melhor “performance”². Experimentalmente, C_C é determinado ao fazer incidir um pulso de laser, contendo em média um único fóton, sobre o detector com uma dada taxa de repetição, que permite determinar a taxa de contagens do detector [1]. Logo, no nosso modelo C_C é dado pelo termo $J_1^{(C)}$. Analogamente, C_E é calculado na ausência de sinal de entrada, logo ele é dado por $J_0^{(E)}$.

Para fazer a comparação com os dados experimentais primeiro precisamos fixar os valores dos parâmetros livres do nosso modelo: ω_0 , g , τ e \bar{n} . Por questão de convenção, vamos expressar as frequências ω_0 e ω em termos dos respectivos comprimentos de onda λ_0 e λ . Assim, ficamos apenas com duas variáveis experimentais a serem fixadas: λ e b , onde b faz o papel de PC. No entanto, o nosso modelo não pode levar em consideração a dependência PC *versus* b para qualquer tipo de detector. Mesmo assim, podemos arguir que PC e b devem ser proporcionais entre si, já que para o PC nulo, b também é necessariamente nulo, pois neste caso o detector está desligado. Felizmente, não

²Para uma descrição simples do fenômeno de *breakdown* e de contagens escuras ver referências [80,81]

precisamos conhecer a dependência exata do PC em função de b , desde que determinemos o valor efetivo do PC de “breakdown”, b_B , correspondente ao seu valor na ressonância, e o consideremos como uma medida de b . Assim, b_B será o nosso último parâmetro fixo, mesmo que dependente de outros parâmetros livres, necessário para comparar as previsões do modelo com os dados experimentais.

Após exaustivas simulações numéricas, escolhemos os valores dos parâmetros do nosso modelo que reproduzem qualitativamente o comportamento experimental comum [83, 85, 90, 91] e se encontram dentro da região de aplicabilidade do Hamiltoniano de Jaynes–Cummings (3.3) e equação mestra (3.65): $\lambda_0 = 500$ nm, $g = 10^{11}$ Hz, $\tau = 5 \times 10^5$ e $\bar{n} = 10^{-11}$, de modo que $b_B \approx 380$, como mostrado na figura 3.5³. Podemos perceber que: (i) os valores de $S \simeq 10^5$ na ressonância ($\lambda = 500$ nm, $q = 0$) e 10^2 longe da ressonância ($\lambda = 1,5$ μ m, $q \gg 1$) são bastante realistas, e (ii) o número de excitações intrínsecas \bar{n} escolhido é maior que o número de fótons térmicos, calculado a partir da distribuição de Planck para temperaturas usuais ($\bar{n}_P \sim 10^{-15} - 10^{-20}$), significando que a contribuição dos defeitos intrínsecos dentro do detector é importante. Além disso, verificamos que, para valores de $b < b_B$, tanto C_C , quanto C_E dependem, em boa aproximação, linearmente com b , de acordo com os nossos argumentos qualitativos.

Na figura 3.6 desenhamos C_C para dois valores diferentes de b em função do comprimento de onda do campo, ilustrando o fato de que C_C cresce proporcionalmente a b . Constatamos que há um bom acordo com os dados experimentais, tanto qualitativamente quanto quantitativamente (ver a figura 11 da referência [83], por exemplo). Nós pudemos confirmar numericamente que C_E não depende do comprimento de onda do campo, como esperado, já que as contagens escuras são eventos internos do detector.

3.2.4 Forma operacional de SSQ

Do exposto acima inferimos que o nosso modelo concorda qualitativamente com os dados experimentais. Vamos agora abordar o nosso objetivo principal: como o SSQ depende dos parâmetros experimentais do detector? Primeiro, verificamos que para os parâmetros escolhidos, os termos de emissão $J_n^{(S)}$ e os termos seguintes na equação (3.87) são pelo

³Para notar as semelhanças com os dados experimentais, esta figura pode ser comparada com a figura 3 da referência [92], por exemplo.

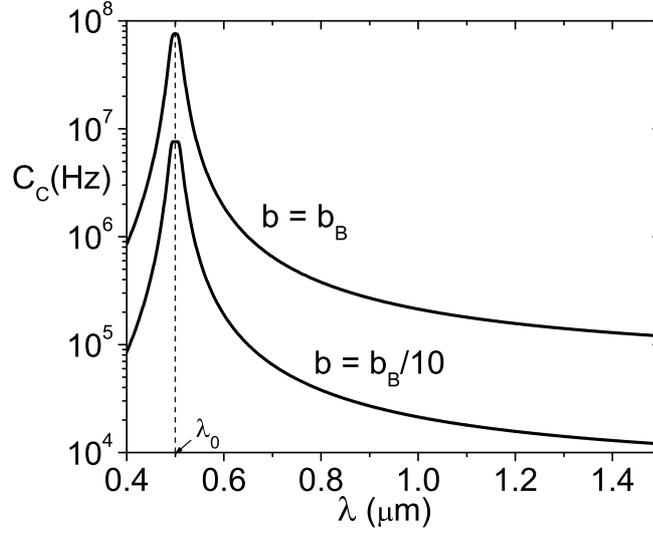


Figura 3.6: Taxa de contagens claras em função do comprimento de onda do campo para diferentes valores de b , mostrando que C_C cresce proporcionalmente a b . O comprimento de onda ressonante é $\lambda_0 = 500$ nm.

menos 10 ordens de magnitude menores que o termo de contagens escuras, e ainda mais do que os termos de contagens claras. Isto confirma o fato de que o detector não emite fótons no campo da cavidade. Intuitivamente, a emissão de fótons pelo detector seria possível apenas para temperaturas muito altas através da radiação do corpo negro, o que não é o caso nos experimentos [83–92].

Logo, na prática, estamos lidando apenas com os termos de contagens claras e escuras que agem simultaneamente sobre o campo toda vez que uma contagem é registrada. Portanto, o SSQ tem a seguinte forma (diagonal) na base de Fock

$$\hat{J}\rho = \text{diag} \left[(\hat{J}_B + \hat{J}_D)\rho \right]. \quad (3.93)$$

Na figura 3.7 mostramos a dependência do termo de contagens claras normalizado, $J_n^{(C)}/J_1^{(C)}$, versus n na escala di-log (para uma melhor visualização, traçamos uma linha que liga os pontos). Podemos ver que na ressonância, e também bem longe dela, temos, aproximadamente, uma dependência polinomial (linear na escala di-log)

$$J_n^{(C)} \approx J_1^{(C)} n^{-2\beta} = C_C n^{-2\beta} \quad (3.94)$$

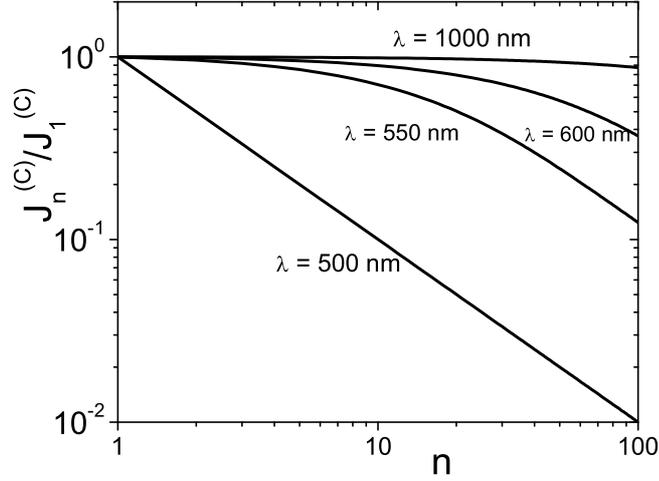


Figura 3.7: O termo de taxa de contagens claras normalizado em função de n na escala di-log para o valor de “breakdown” de PC ($b_B \approx 380$), considerando diferentes comprimentos de onda. Na ressonância ($\lambda = 500$ nm) temos $\beta \simeq 1/2$ e longe dela ($\lambda = 1000$ nm) $\beta \simeq 0$.

com $\beta \simeq 1/2$ na ressonância e $\beta \simeq 0$ bem longe dela. Portanto, nestes casos podemos escrever a dependência operacional do termo das contagens claras como

$$\hat{J}_B \rho = C_C (\hat{n} + 1)^{-\beta} a \rho a^\dagger (\hat{n} + 1)^{-\beta}, \quad (3.95)$$

recuperando o modelo E, com $\beta \simeq 1/2$, na ressonância e o modelo A, com $\beta \simeq 0$, bem longe dela ($\lambda = 1 \mu\text{m}$). Assim, podemos obter os superoperadores dos modelos A ou E, dependendo da dessintonia entre o detector e o campo.

Agora, focamos a nossa atenção para o termo de contagens escuras normalizado, $J_n^{(E)}/J_0^{(E)}$, mostrado na figura 3.8 em escala linear e em escala di-log na inserção. Primeiro, podemos ver que longe da ressonância ($\lambda = 1 \mu\text{m}$) $J_n^{(E)}$ é quase independente de n , e podemos escrever $J_n^{(E)} \simeq C_E = \text{constante}$. Na ressonância ($\lambda = 500$ nm), vemos que para $n = 0$ temos $J_0^{(E)} = C_E$ e para $n > 0$ temos $J_{n>0}^{(E)} \simeq d \cdot C_E \cdot n^{-2\beta}$, onde $\beta \approx 1/2$ e d é um número menor que 1. Isto significa que na ressonância o efeito das contagens escuras é minimizado na presença de luz, e estas são percebidas predominantemente quando o campo está no estado de vácuo. Isto pode ser entendido usando um simples argumento: as contagens escuras ocorrem quando, se encontrando no estado fundamental, o detector é excitado por suas emissões intrínsecas. Mas na ressonância a taxa de excitações por fótons

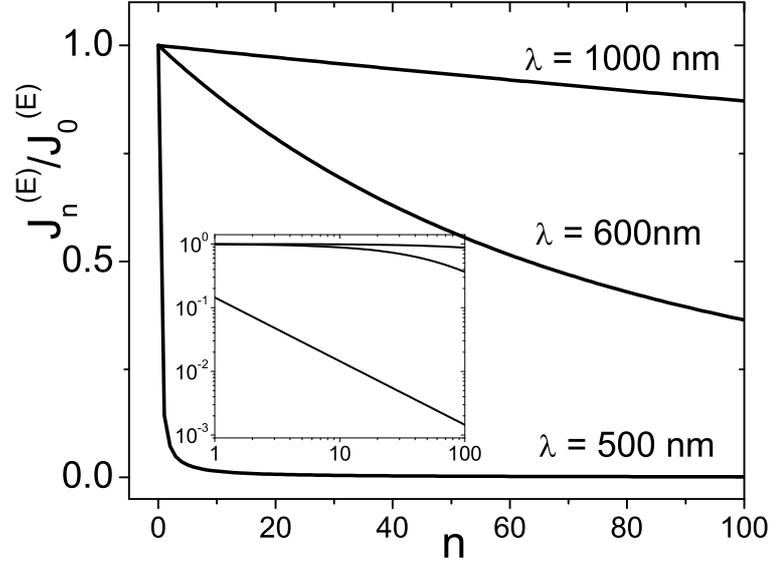


Figura 3.8: O termo de contagens escuras normalizado em função de n para o valor de “break-down” de PC ($b_B \approx 380$) para diferentes comprimentos de onda. O mesmo gráfico na escala di-log está mostrado na inserção.

do campo é muito maior de que a por emissões intrínsecas, de modo que as contagens escuras “não têm tempo” de aparecer⁴, e, portanto, o seu efeito é minimizado. Assim, a forma operacional do termo de contagens escuras na equação (3.87) é

$$\hat{J}_D \rho = C_E [\Lambda_0 \rho \Lambda_0 + d \Lambda \hat{n}^{-\beta} \rho \hat{n}^{-\beta} \Lambda], \quad (3.96)$$

onde $\Lambda_0 \equiv |0\rangle\langle 0|$, $\Lambda \equiv 1 - \Lambda_0$ e na ressonância vale o modelo E com $\beta \simeq 1/2$ e $d < 1$. Longe da ressonância prevalece o modelo A com $\beta \simeq 0$ e $d = 1$.

Portanto, operando perto do valor de “breakdown” de PC e variando a dessintonia entre o detector e o campo, podemos obter diferentes SSQ e prever o comportamento dos termos de contagens claras e escuras. Uma das “inconveniências” para

⁴As contagens escuras ocorrem quando o sensor permanece no estado fundamental por um período prolongado de tempo, mas na ressonância o sensor é rapidamente excitado via fotoabsorção. Fora da ressonância, a taxa de fotoabsorções é menor, por isso o sensor permanece mais tempo no estado fundamental, e a probabilidade de uma contagem escura aumenta. É claro, porém, que este raciocínio não se aplica para as contagens escuras originadas dentro do mecanismo de amplificação, que, em princípio, não devem depender do campo incidente (ver a discussão na página 49)

obter o modelo A é que a razão sinal-ruído (S) é menor que para o modelo E, já que neste caso deve-se operar longe da ressonância. Por questão de completeza, nós também poderíamos adicionar, fenomenologicamente, no lado direito da equação (3.96) o termo $C'_E\rho$, representando as contagens escuras que não induzem a transição $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ dentro do sensor, já que o nosso modelo não contempla tal fenômeno.

3.2.5 Conclusões

Nesta seção apresentamos um modelo microscópico realista para o fotodetector, modelando-o como um sensor quântico, constituído de dois níveis de energias, acoplado a um mecanismo de amplificação macroscópico. Usando a abordagem de trajetórias quânticas, deduzimos um SSQ geral, que descreve a reação do detector sobre o campo devido a uma única fotocontagem, e mostramos que ele pode ser escrito formalmente como uma série infinita de termos. Nesta série identificamos os termos correspondentes a “contagens claras” (fotoabsorções reais), a “contagens escuras” e outros eventos de emissão, cada um ocorrendo com a sua respectiva probabilidade.

Ajustando os parâmetros livres do modelo para reproduzir os dados experimentais, mostramos que os termos de emissão podem ser desprezados em situações realísticas, pois a sua contribuição torna-se insignificante. Assim, o SSQ consiste, efetivamente, de termos descrevendo contagens claras e as escuras. Nós reproduzimos a observação experimental das taxas de contagem e da razão sinal-ruído, mostrando que um efeito análogo ao fenômeno de “breakdown” [92] (que se manifesta na forma de diminuição da razão sinal-ruído à medida que o parâmetro de controle passa do seu valor crítico) está automaticamente incluído no nosso modelo.

Finalmente, demonstramos que, quando o detector opera perto do parâmetro de controle de “breakdown”, vários SSQ aparecem em função da dessintonia entre o detector e o campo. Em particular, pudemos recuperar os SSQ propostos inicialmente *ad hoc*: na ressonância obtivemos o modelo E e longe dela o modelo A. Por último, a contribuição de contagens escuras ao SSQ foi deduzida no contexto de um modelo microscópico de fotodeteção.

Capítulo 4

Verificação experimental de Superoperador de Salto Quântico

4.1 Modelo de fotodeteção contínua: inclusão de defeitos experimentais

4.1.1 Introdução

O modelo de fotodeteção contínua (MFC) descreve a evolução do estado quântico do campo eletromagnético dentro de uma cavidade durante o processo de fotodeteção. Ele é formulado em termos de duas operações, que, pela definição, representam os únicos eventos que acontecem em cada intervalo de tempo infinitesimal. (1) A operação de uma contagem, representada pelo Superoperador de Salto Quântico (SSQ), descreve a ação do detector sobre o campo após um único “click” (que representa uma contagem) e o cálculo de traço sobre o SSQ aplicado ao estado de campo fornece a probabilidade por unidade de tempo para a ocorrência da detecção. (2) A operação de não-contagem descreve a evolução não-unitária do campo na ausência de contagens.

Recapitulando, o SSQ é o ingrediente formal mais importante na teoria, pois ele também dita a forma do superoperador de não-contagem [14]. Dois diferentes modelos para SSQ são os mais comuns, eles haviam sido propostos inicialmente *ad hoc*. O primeiro foi proposto por Srinivas e Davies nos anos 1980 [14] e foi amplamente usado na literatura [15–17, 36, 37, 47, 52, 54, 56–58, 93]. Nós o denominamos **modelo A**, e a sua

forma é

$$\hat{J}\rho = \lambda a \rho a^\dagger, \quad (4.1)$$

onde ρ é a matriz densidade do campo e λ é, aproximadamente, a taxa de contagem ideal do detector [14, 65]. A outra proposta, que chamamos de **modelo E** [67, 68], considera que o SSQ é escrito em termos de operadores $E_- = (a^\dagger a + 1)^{-1/2} a$ e $E_+ = E_-^\dagger$

$$\hat{J}\rho = \lambda E_- \rho E_+. \quad (4.2)$$

E_+ e E_- são também conhecidos como operadores exponenciais de fase, embora num contexto completamente diferente [69–73].

Embora por mais de três décadas o modelo A tenha sido usado *ad hoc* em numerosos artigos dedicados a diferentes aplicações [9], parece que a sua validade nunca foi verificada em experimentos diretos numa faixa extensa de parâmetros. Argumentamos aqui que tal verificação não pode ser considerada desnecessária, por diferentes razões. Primeiro, é possível que em algumas situações realistas, a aproximação sob a qual o modelo A foi deduzido falhe. Segundo, o SSQ do modelo A é um superoperador não-limitado e algumas inconsistências no tratamento teórico surgem (elas foram percebidas já no trabalho original [14]; ver também [65, 67, 76, 115]). Terceiro, aplicando (4.1) a alguns estados, chega-se a predições que parecem contraintuitivas, portanto merecendo uma verificação experimental.

Por exemplo, o modelo A não é válido para valores altos do número de fótons, já que a probabilidade de fotodeteccção, $P\Delta t = (\lambda\Delta t) \text{Tr}(a\rho a^\dagger)$, onde Δt é a resolução do detector, pode se tornar maior que 1. Além disso, aplicando o modelo A para estados de campo específicos, os cálculos predizem resultados que parecem contraintuitivos. Por exemplo, é fácil conferir que se o número inicial de fótons no estado ρ (antes da deteção de um fóton) foi $\langle n \rangle_i$, então o número médio de fótons no estado pós-medição

$$\rho' = \hat{J}\rho / \text{Tr}(\hat{J}\rho). \quad (4.3)$$

para o modelo A é [60, 93, 116]

$$\langle n \rangle' = \langle n^2 \rangle_i / \langle n \rangle_i - 1 = \langle n \rangle_i + Q, \quad (4.4)$$

onde

$$Q \equiv \frac{\langle \Delta n \rangle_i^2 - \langle n \rangle_i}{\langle n \rangle_i} \quad (4.5)$$

é o parâmetro Q de Mandel [1, 117], que descreve o tipo de estatística de fótons. Apenas para estados iniciais de Fock temos $\langle n \rangle' = \langle n \rangle_i - 1$, enquanto que a equação (4.4) fornece $\langle n \rangle' = 2\langle n \rangle_i$ para o estado térmico e $\langle n \rangle' > 2\langle n \rangle_i$ para o estado inicial de vácuo comprimido. Embora esta predição tenha sido confirmada experimentalmente para o estado térmico no “limite quântico” de número médio de fótons pequeno [118], $\langle n \rangle_i \lesssim 1$, ela é contraintuitiva do ponto de vista clássico, já que um campo de intensidade alta não pode duplicar a sua intensidade devido à detecção de um único fóton. Portanto, o modelo A pode descrever satisfatoriamente um campo de baixa intensidade, mas não um de alta.

Em contraste, usando o modelo E em vez de (4.4) obtemos a fórmula

$$\langle n \rangle' = \frac{\langle n \rangle_i}{1 - p_0} - 1 \quad (4.6)$$

onde $p_0 \equiv \langle 0 | \rho | 0 \rangle$ é a probabilidade de ocupação de estado de vácuo no estado inicial ρ . Em particular, para o estado térmico o SSQ (4.6) fornece $\langle n \rangle' = \langle n \rangle_i$, que é aceitável para um campo de alta intensidade após a detecção de um fóton, enquanto que ele não reproduz o aumento do número médio de fótons para baixas intensidades, observado experimentalmente [118]. Assim, os modelos E e A devem ser usados para diferentes valores dos parâmetros, como será descrito na seção 4.3.

Uma maneira de verificar a validade de MFC e decidir qual SSQ descreve melhor a fotocontagem pode na prática ser implementada por experimentos feitos em cavidade com alto fator de qualidade, comparando os resultados de medições com as predições teóricas. No entanto, como os detectores e cavidades reais estão longe de serem ideais, por isso, o nosso primeiro objetivo nesta seção é incluir no MFC os efeitos de não-idealidade, tais como *eficiência quântica* (EQ), *contagens escuras*, o tempo morto¹ do detector e a relaxação do campo na cavidade. O nosso segundo objetivo é chamar a atenção para o fato de que medições de fotodetecção usuais podem decidir qual dos modelos de SSQ prevalece.

O plano desta seção é o seguinte. Na subseção 4.1.2 vamos apresentar um modelo simples, que nos permitirá incluir o efeito de EQ não-unitária e contagens escuras no MFC para o modelo A. Em seguida, vamos calcular as quantidades principais que caracterizam o processo de fotodetecção – as distribuições de fotocontagens e de

¹O tempo morto significa que imediatamente após o click, o detector é incapaz de registrar uma outra contagem durante um pequeno intervalo de tempo.

tempos de espera. Na subseção 4.1.3 repetiremos o mesmo procedimento para o modelo E. Na subseção 4.1.4 vamos analisar o comportamento de momentos mais baixos das distribuições em situações realísticas e sugerir como o SSQ pode ser construído dos dados experimentais. A subseção 4.1.5 terá as nossas conclusões.

No apêndice A nós tratamos os efeitos de tempo morto do detector e de relaxação do campo na cavidade. Mostramos que (i) as perdas na cavidade não são relevantes quando comparadas com o efeito de EQ não-unitária e (ii) o efeito de tempo morto leva a inconsistências matemáticas no modelo A; porém, elas não surgem no modelo E, sendo o efeito do tempo morto bastante pequeno em relação ao efeito de EQ não-unitária. O apêndice B contém alguns detalhes formais a respeito de cálculo de quantidades de interesse para diversos estados quânticos.

4.1.2 Modelo A

Consideremos um modo do campo eletromagnético com frequência ω , confinado numa cavidade ideal junto com o detector (no apêndice A mostramos que se o detector possuir uma EQ não-unitária, então a dissipação na cavidade não é crucial). A *evolução temporal não-condicionada* (ETN) do campo na presença do detector, isto é, a evolução quando o detector está ligado, mas os resultados de medição são descartados, é descrita pela equação mestra [49, 52, 67]

$$\dot{\rho} = -i\omega(n\rho - \rho n) - \frac{\lambda}{2}(n\rho + \rho n - 2\mathcal{A}\rho), \quad (4.7)$$

onde

$$\mathcal{A}\rho \equiv a\rho a^\dagger.$$

O primeiro termo na equação (4.7) descreve a evolução livre do campo e o segundo descreve o efeito do detector sobre o campo devido a sua interação mútua. O parâmetro λ é a constante de acoplamento campo-detector, seu valor é, aproximadamente, igual à taxa de contagem ideal [75, 76].

Para descrever um fotodetector com uma eficiência quântica η e a taxa de contagens escuras λd (d é a razão entre a taxa de contagens escuras e a taxa de contagem ideal), supomos a seguinte expressão para o SSQ

$$\hat{J}\rho = \lambda(\eta\mathcal{A} + d)\rho, \quad (4.8)$$

que descreve a ação do detector sobre o campo após uma fotodetecção, e o traço da equação (4.8) fornece a probabilidade por unidade do tempo de um “click”. De fato, o modelo microscópico [75] sugere que (4.8) tem uma forma diagonal na base de Fock, mas isto não será importante aqui, já que estaremos interessados apenas nos elementos diagonais. O primeiro termo entre parênteses descreve a absorção de um fóton do campo com a probabilidade por unidade do tempo $\text{Tr}[\eta\lambda\mathcal{A}\rho] = \eta\lambda\bar{n}$, onde \bar{n} é o número médio de fótons no campo – isto significa que o detector “enxerga” todos os fótons. O segundo termo descreve a ocorrência de uma contagem escura com a densidade de probabilidade λd , independente da intensidade do campo, e este evento por si só não modifica o estado do campo (após uma contagem escura o estado do campo seria $\lambda d \times \rho / \text{Tr}(\lambda\rho d) = \rho$). Porém, quando ambos os termos estão presentes, após um “click” do detector o estado do campo torna-se uma mistura clássica (incoerente) destes dois eventos.

Todas as quantidades relacionadas à fotodetecção podem ser calculadas, desde que o superoperador de não-contagem \hat{S}_t seja conhecido. Agindo com \hat{S}_t sobre o estado inicial do campo ρ_0 , o estado de não-contagem $\rho_S \equiv \hat{S}_t\rho_0$ obedece à equação (4.7) com o termo (4.8) subtraído do lado direito [39, 40]. Como estaremos interessados em calcular probabilidades, vamos desprezar os fatores de fase, $\exp(\pm i\omega nt)$, pois eles se cancelam em qualquer cálculo de traço (aqui $n = a^\dagger a$). Portanto a equação de evolução para ρ_S é

$$\dot{\rho}_S = -\frac{\lambda}{2}(n\rho_S + \rho_S n) + \lambda q\mathcal{A}\rho_S - \lambda d\rho_S, \quad q \equiv 1 - \eta. \quad (4.9)$$

Fazendo a transformação

$$\rho_S = e^{-d\lambda t}\hat{\mathcal{U}}_t\rho_1, \quad \hat{\mathcal{U}}_t\rho = e^{-\lambda tn/2}\rho e^{-\lambda tn/2} \quad (4.10)$$

na equação (4.9), obtemos uma equação simples para ρ_1

$$\dot{\rho}_1 = \lambda q e^{-\lambda t}\mathcal{A}\rho_1. \quad (4.11)$$

A solução da equação (4.11) é

$$\rho_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q\phi_t)^l}{l!} a^l \rho_0 (a^\dagger)^l \equiv \exp(q\phi_t\mathcal{A})\rho_0, \quad (4.12)$$

onde

$$\phi_t = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (4.13)$$

Portanto, o superoperador de não-contagem é

$$\hat{S}_t \rho_0 = e^{-d\lambda t} \hat{\mathcal{U}}_t(e^{q\phi_t \mathcal{A}} \rho_0). \quad (4.14)$$

O superoperador de ETN do campo, \hat{T}_t , definido como a solução da equação (4.7), é dado naturalmente fazendo $d = \eta = 0$ nas equações (4.9) e (4.14)

$$\hat{T}_t = \hat{\mathcal{U}}_t(e^{\phi_t \mathcal{A}} \rho_0). \quad (4.15)$$

Na equação (4.12) introduzimos uma notação compacta para a soma infinita em termos do superoperador exponencial. Podemos trabalhar com tais superoperadores como se eles fossem operadores comuns, desde que usemos as “relações de comutação”

$$\mathcal{A} \hat{\mathcal{U}}_t = e^{-\lambda t} \hat{\mathcal{U}}_t \mathcal{A}, \quad e^{y \mathcal{A}} \hat{\mathcal{U}}_t = \hat{\mathcal{U}}_t \exp(y e^{-\lambda t} \mathcal{A}), \quad (4.16)$$

obtidas ao expandirmos os superoperadores em série.

Agora podemos calcular o superoperador de m -contagens $\hat{N}_t(m)$, que descreve o estado de campo depois de m contagens registradas (não importando se reais ou escuras) no intervalo de tempo $[0, t)$, e cujo traço fornece a probabilidade para tal evento. Nós obtemos

$$\hat{N}_t(m) \rho = \int \cdots \int \hat{h} \rho, \quad (4.17)$$

onde os integrais são calculados sobre todos os intervalos do tempo entre as contagens

$$\int \cdots \int \equiv \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \quad (4.18)$$

e o operador densidade condicionado é

$$\hat{h} \rho \equiv \hat{S}_{t-t_m} \hat{J} \hat{S}_{t_m-t_{m-1}} \hat{J} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1} \rho. \quad (4.19)$$

Expandindo o SSQ (4.8) na equação (4.19) em termos de $\eta \mathcal{A}$ e d , obtemos uma soma finita, cujo primeiro termo descreve a absorção de m fótons:

$$\hat{h}^{(0)} = (\lambda \eta)^m \hat{S}_{t-t_m} \mathcal{A} \cdots \mathcal{A} \hat{S}_{t_1} = (\lambda \eta)^m e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_m)} \hat{S}_t \mathcal{A}^m. \quad (4.20)$$

Depois de integrar (4.20), obtemos o primeiro termo na equação (4.17), que descreve o estado do campo depois de perda de m fótons pela absorção,

$$\hat{n}_t(m) \equiv \int \cdots \int \hat{h}^{(0)} = \hat{S}_t \frac{(\eta \phi_t \mathcal{A})^m}{m!}. \quad (4.21)$$

Calculando de maneira semelhante a contribuição dos termos com potências mais altas de d , obtemos a fórmula

$$\hat{N}_t(m) = \sum_{k=0}^m \frac{(d\lambda t)^k}{k!} n_t(m-k) = \hat{S}_t \frac{(d\lambda t + \eta\phi_t \mathcal{A})^m}{m!}. \quad (4.22)$$

Podemos verificar facilmente que o superoperador de m -contagens (4.22) satisfaz identicamente à relação fundamental [14, 39]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{N}_t(m) = \hat{T}_t. \quad (4.23)$$

Os momentos fatoriais da distribuição de fotocontagens são facilmente calculados, resultando em

$$\begin{aligned} \overline{m \cdots (m-l)}_t &= \sum_{m=0}^{\infty} m \cdots (m-l) \text{Tr}[\hat{N}_t(m)\rho] \\ &= \text{Tr}[\hat{S}_t(d\lambda t + \eta\phi_t \mathcal{A})^{l+1} \exp(d\lambda t + \eta\phi_t \mathcal{A})\rho] = \text{Tr}[\hat{\mathcal{U}}_t(d\lambda t + \eta\phi_t \mathcal{A})^{l+1} e^{\phi_t \mathcal{A}} \rho]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Portanto, precisamos calcular as expressões do tipo

$$\Phi_k(b, x) \equiv \text{Tr} \left[\hat{\mathcal{U}}_b e^{x\mathcal{A}} \mathcal{A}^k \rho \right] = \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{(n+l+k)!}{n!l!} e^{-\lambda b n} x^l p_{n+l+k} = \sum_{n=k}^{\infty} p_n \frac{n!}{(n-k)!} (x + e^{-\lambda b})^{n-k}, \quad (4.25)$$

onde $p_n = \langle n | \rho | n \rangle$. Calculando

$$\Phi_k(t, \phi_t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4.26)$$

[ver equação (4.13) para a expressão de ϕ_t] obtemos expressões gerais para os momentos fatoriais mais baixos

$$\bar{m}_t = d\lambda t + \eta \bar{n} \phi_t \quad (4.27)$$

$$\overline{m(m-1)}_t = (d\lambda t)^2 + 2\eta \bar{n} d\lambda t \phi_t + (\eta \phi_t)^2 \overline{n(n-1)}, \quad (4.28)$$

onde \bar{n} e $\overline{n(n-1)}$ são os momentos fatoriais do operador densidade inicial.

Uma outra quantidade observável que vamos considerar é a distribuição de tempos de espera. Ela descreve a densidade de probabilidade para registrar dois “clicks” consecutivos, separados por um intervalo de tempo τ , sendo que o primeiro “click” ocorreu no instante t . Sua forma não-normalizada é

$$W_t(\tau) = \text{Tr} \left[\hat{J} \hat{S}_\tau \hat{J} \hat{T}_t \rho \right], \quad (4.29)$$

e o tempo de espera médio é

$$\bar{\tau} = \mathcal{N}^{-1} \int_0^T d\tau W_t(\tau) \tau, \quad \mathcal{N} = \int_0^T d\tau W_t(\tau), \quad (4.30)$$

onde T é o intervalo do tempo durante o qual a média temporal é feita, experimentalmente. Como será mostrado na seção 4.1.3, T é um parâmetro importante devido à presença das contagens escuras. Depois de manipulações usuais, usando as “relações de comutação” (4.16), obtemos

$$W_t(\tau) = e^{-d\lambda\tau} [\eta^2 e^{-\lambda(2t+\tau)} \Phi_2^W + \eta d e^{-\lambda t} (1 + e^{-\lambda\tau}) \Phi_1^W + d^2 \Phi_0^W],$$

onde

$$\Phi_k^W = \Phi_k [t + \tau, 1 - e^{-\lambda t} (\eta + (1 - \eta)e^{-\lambda\tau})]. \quad (4.31)$$

No apêndice A consideramos o efeito do tempo morto e mostramos que ele não pode ser incorporado consistentemente no modelo A porque o SSQ (4.8) é um superoperador não-limitado e a probabilidade de contagens resultante é não-normalizável. Esta é mais uma das inconsistências matemáticas do modelo A [65]. No apêndice B calculamos a expressão (4.25) para três tipos de estados: coerente, de número e térmico.

4.1.3 Modelo E

Agora vamos repetir o mesmo procedimento para o modelo E, em que o SSQ é

$$\hat{J}\rho = \lambda(\eta\mathcal{E} + d)\rho, \quad (4.32)$$

onde

$$\mathcal{E}\rho \equiv E_- \rho E_+.$$

A probabilidade por unidade do tempo de detectar um fóton é $\eta\lambda(1 - p_0)$, onde $p_0 = \langle 0|\rho|0\rangle$, logo o detector apenas “enxerga” se há algum fóton na cavidade, não importando o seu número. A princípio, o parâmetro λ é diferente daquele do modelo A, mas no contexto desta seção será sempre claro qual deles está sendo considerado. A ETN do campo é descrita por uma equação similar à equação (4.7), obtida pela substituição $\{a, a^\dagger\} \rightarrow \{E_-, E_+\}$ na evolução não-unitária (o segundo termo do lado direito). Logo, o estado de não-contagem obedece à equação

$$\dot{\rho}_S = -\frac{\lambda}{2} (\hat{\Lambda}\rho_S + \rho_S\hat{\Lambda}) + \lambda q \mathcal{E}\rho_S - d\lambda\rho_S \quad (4.33)$$

[similar a equação (4.9)], onde $\hat{\Lambda} \equiv E_+ E_- = 1 - \hat{\Lambda}_0$, $\hat{\Lambda}_0 \equiv |0\rangle\langle 0|$. Fazendo a transformação

$$\rho_S = e^{-d\lambda t} e^{-\lambda t \hat{\Lambda}/2} \rho_1 e^{-\lambda t \hat{\Lambda}/2} \quad (4.34)$$

na equação (4.33) e usando a propriedade $\exp(\alpha \hat{\Lambda}) = \hat{\Lambda}_0 + e^\alpha \hat{\Lambda}$, obtemos a equação diferencial para ρ_1

$$\dot{\rho}_1 = \lambda q e^{-\lambda t} \left(\hat{\Lambda}_0 + e^{\lambda t/2} \hat{\Lambda} \right) E_- \left(\hat{\Lambda} \rho_1 \hat{\Lambda} \right) E_+ \left(\hat{\Lambda}_0 + e^{\lambda t/2} \hat{\Lambda} \right). \quad (4.35)$$

Nós resolvemos esta equação projetando-a em subespaços ortogonais, definidos pelos projetores $\{\hat{\Lambda}, \hat{\Lambda}_0\}$. Além disso, como estamos interessados em calcular as probabilidades, vamos considerar apenas a parte diagonal na base de Fock das quantidades de interesse, e desprezamos os termos cujo traço é nulo, como $\hat{\Lambda} \rho \hat{\Lambda}_0$ e $\hat{\Lambda}_0 \rho \hat{\Lambda}$.

Multiplicando a equação (4.35) por $\hat{\Lambda}$ de ambos os lados obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{\Lambda} \rho_1 \hat{\Lambda} \right) = \lambda q \hat{\Lambda} E_- \left(\hat{\Lambda} \rho_1 \hat{\Lambda} \right) E_+ \hat{\Lambda}, \quad (4.36)$$

cuja solução formal é

$$\hat{\Lambda} \rho_1 \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \left(e^{q\lambda t \mathcal{E}} \rho_0 \right) \hat{\Lambda} \quad (4.37)$$

e notamos que todos os superoperadores compostos, tais como $\exp(y\mathcal{E})$, são expansões em séries de potências. Agora, multiplicando a equação (4.35) por $\hat{\Lambda}_0$ em ambos os lados e usando a solução (4.37), obtemos uma equação diferencial para $\hat{\Lambda}_0 \rho_1 \hat{\Lambda}_0$

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{\Lambda}_0 \rho_1 \hat{\Lambda}_0 \right) = \lambda q \hat{\Lambda}_0 \left(e^{-\lambda t(1-q\mathcal{E})} \mathcal{E} \rho_0 \right) \hat{\Lambda}_0 \quad (4.38)$$

com solução

$$\hat{\Lambda}_0 \rho_1 \hat{\Lambda}_0 = \hat{\Lambda}_0 \left[\frac{1 - q\mathcal{E} \hat{R}_t}{1 - q\mathcal{E}} \rho_0 \right] \hat{\Lambda}_0, \quad \hat{R}_t \equiv e^{-\lambda t(1-q\mathcal{E})}. \quad (4.39)$$

Portanto, a forma diagonal do superoperador de não-contagem é

$$\hat{S}_t \rho_0 = e^{-d\lambda t} \left[\hat{R}_t + \hat{\Lambda}_0 \frac{1 - \hat{R}_t}{1 - q\mathcal{E}} \hat{\Lambda}_0 \right] \rho_0, \quad (4.40)$$

onde usamos a notação $(\Lambda_0 \hat{Q} \Lambda_0) \rho \equiv \Lambda_0 (\hat{Q} \rho) \Lambda_0$.

Repetindo os passos (4.20) – (4.22), obtemos primeiro o operador densidade condicionado

$$\hat{h}^{(0)} \rho = e^{-d\lambda t} \left[\hat{R}_t + \hat{\Lambda}_0 \frac{\hat{R}_{t_m} - \hat{R}_t}{1 - q\mathcal{E}} \hat{\Lambda}_0 \right] (\lambda \eta \mathcal{E})^m \rho. \quad (4.41)$$

Após calcular os integrais temporais como em (4.21), obtemos

$$\hat{n}_t(m) = e^{-d\lambda t} \left[\left(1 - \hat{\Lambda}_0 \frac{1}{1 - q\mathcal{E}} \hat{\Lambda}_0 \right) \hat{R}_t \frac{(\lambda t \eta \mathcal{E})^m}{m!} + \hat{\Lambda}_0 \frac{(\lambda \eta \mathcal{E})^m}{1 - q\mathcal{E}} \int_0^t dx \hat{R}_x \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \hat{\Lambda}_0 \right]$$

para $m > 0$ e $\hat{n}_t(0) = \hat{S}_t$. Finalmente, analogamente à expressão (4.22), obtemos o superoperador de m -contagens

$$\begin{aligned} \hat{N}_t(m) = e^{-d\lambda t} & \left\{ \left(1 - \hat{\Lambda}_0 \frac{1}{1 - q\mathcal{E}} \hat{\Lambda}_0 \right) \hat{R}_t \frac{(\hat{J}t)^m}{m!} + \hat{\Lambda}_0 \frac{1}{1 - q\mathcal{E}} \frac{(d\lambda t)^m}{m!} \hat{\Lambda}_0 \right. \\ & \left. + \hat{\Lambda}_0 \frac{\lambda \eta \mathcal{E}}{1 - q\mathcal{E}} \int_0^t dx \hat{R}_x \frac{[d\lambda t + \eta \mathcal{E} \lambda x]^{m-1}}{(m-1)!} \hat{\Lambda}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde o último termo é zero para $m = 0$ e pode-se verificar que a relação (4.23) é satisfeita.

Depois de alguns cálculos diretos, obtemos as seguintes expressões para os momentos fatoriais mais baixos para as fotocontagens

$$\overline{m}_t = d\lambda t + \eta \bar{n} (1 - \Sigma_1), \quad (4.43)$$

$$\overline{m(m-1)}_t = (d\lambda t)^2 + 2\eta \bar{n} d\lambda t (1 - \Sigma_1) + \eta^2 \left[\overline{n(n-1)} (1 - \Omega) - 2\bar{n} \lambda t \Sigma_2 \right], \quad (4.44)$$

onde

$$\Sigma_k \equiv \frac{1}{\bar{n}} \text{Tr} \left[\frac{\mathcal{E}^k}{1 - \mathcal{E}} \hat{R}_t^0 \rho \right], \quad \hat{R}_t^0 \equiv \hat{R}_t(q = 1), \quad (4.45)$$

$$\Omega \equiv \frac{2}{\bar{n}(\bar{n} - 1)} \text{Tr} \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{1 - \mathcal{E}} \right)^2 \hat{R}_t^0 \rho \right]. \quad (4.46)$$

Finalmente, usando a equação (4.29), a densidade de distribuição de tempos de espera é escrita como

$$W_t(\tau) = e^{-d\lambda \tau} \left\{ (\lambda d)^2 [1 - \text{Tr}(\hat{R}_t^0 \rho)] + \text{Tr}[(\hat{J} \hat{R}_\tau + \lambda d \hat{\Lambda}_0 \frac{1 - \hat{R}_\tau}{1 - q\mathcal{E}} \hat{\Lambda}_0) \hat{J} \hat{R}_t^0 \rho] \right\}. \quad (4.47)$$

No apêndice A mostramos que o efeito de tempo morto pode ser incorporado no modelo E, mas sua contribuição é pequena quando comparada ao efeito de EQ não-unitária, por isso não vamos levá-lo em conta. No apêndice B obtemos as fórmulas para as equações (4.45), (4.46) e (4.47) em termos de p_n e calculamos as expressões correspondentes para os estados coerente, de número e térmico.

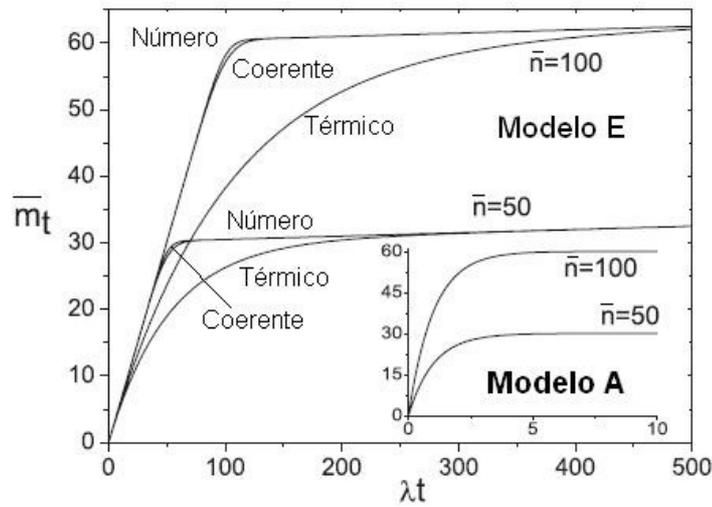


Figura 4.1: Número médio de fotocontagens \bar{m}_t no modelo E para o estado coerente, o estado de número e o estado térmico em função do tempo para dois valores do número médio inicial de fótons: $\bar{n} = 50$ e $\bar{n} = 100$. Na inserção mostramos \bar{m}_t para o modelo A (para $\bar{n} = 50$ e $\bar{n} = 100$), que é independente do estado de campo.

4.1.4 Esquema para verificação de SSQ usando cavidade e DUF

Com base nos dados experimentais [119], escolhemos os seguintes valores numéricos para os parâmetros do nosso modelo: $\eta = 0,6$ para a EQ e $d = 5 \cdot 10^{-3}$ para a taxa de contagens escuras (normalizada pela taxa de contagem ideal). Nós não atribuímos nenhum valor fixo para λ , pois a nossa análise será dada em termos do tempo adimensional λt . Muitas quantidades relacionadas com a fotodeteção foram estudadas ao longo de três décadas em [14, 36, 48, 60, 65, 67, 120–123], porém com objetivos diferentes do nosso. Aqui, analisamos as grandezas experimentais que possam verificar a validade dos modelos A e E em experimentos de fotocontagem usuais.

Primeiro, nós analisamos a estatística de contagens. Na figura 4.1 desenhamos \bar{m}_t em função de λt para ambos os modelos e dois valores do número médio inicial, $\bar{n} = 50$ e 100. Inicialmente, \bar{m}_t cresce rapidamente devido à absorção de fótons, mas depois de um tempo finito o crescimento torna-se linear com uma inclinação muito menor, que é devida às contagens escuras. Vamos chamar o intervalo de tempo durante o qual os fótons são absorvidos (representando o intervalo de tempo em que o número de

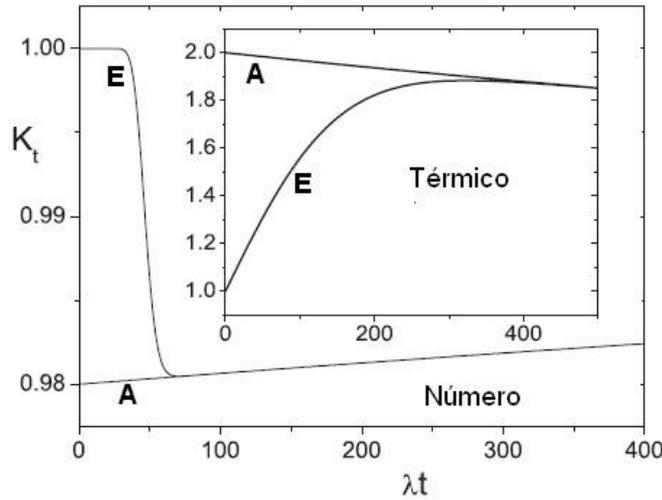


Figura 4.2: Segundo momento fatorial normalizado K_t , equação (4.48), para modelos A e E (como indicado nos gráficos) para o estado de número (e o estado térmico na inserção) para $\bar{n} = 50$. Para o estado coerente temos $K_t = 1$ para todos os tempos para ambos os modelos.

contagens cresce rapidamente) de “tempo de contagem efetivo”, t_E . No modelo E, t_E é proporcional ao número médio inicial de fótons, ao contrário de modelo A, como visto da figura 4.1 e das fórmulas (4.27) e (4.43). Então, a análise experimental da dependência t_E versus \bar{n} parece uma boa escolha para verificar qual dos modelos representa melhor a realidade, pois, de acordo com o modelo A, t_E não deveria depender de \bar{n} .

Além disso, pode-se conferir a validade de cada modelo verificando se \bar{m}_t depende ou não do estado inicial do campo: no modelo A ele é independente do estado do campo, enquanto que no modelo E ele é bastante sensível ao estado inicial. Na figura 4.1 podemos perceber uma diferença notável entre os resultados para o estado térmico e o coerente, embora a diferença entre o estado coerente e o de número não seja tão grande. Isto pode ser explicado pelo fato de haver uma grande diferença no fator Q de Mandel (que caracteriza a estatística de fótons no estado inicial, ver a equação 4.5): ele é igual a -1 e 0 para o estado de número e o coerente, respectivamente, enquanto que ele é muito grande ($Q_{th} = \bar{n}$) para o estado térmico com um grande número médio de fótons.

Agora analisemos o segundo momento fatorial normalizado

$$K_t \equiv \overline{m(m-1)}_t / \bar{m}_t^2, \quad (4.48)$$

para os mesmos estados iniciais, usando o número médio de fótons $\bar{n} = 50$. Para o estado de número e o térmico, K_t versus λt está mostrado na figura 4.2, e para o estado coerente obtemos $K_t = 1$, portanto ele não é desenhado. No limite de tempo assintótico e para uma taxa de contagens escuras não nula, o mesmo valor $K_\infty \rightarrow 1$ é obtido para ambos os modelos, mas o transiente depende do modelo. Sem considerar as contagens escuras, no modelo A, K_t é independente do tempo, $K_t = K = \overline{n(n-1)}/\bar{n}^2$ (\bar{n} e $\overline{n(n-1)}$ são os momentos fatoriais calculados para o estado inicial). Mesmo assim, K_t depende do estado inicial do campo: $K = 2$ para o estado térmico e $K = 1 - 1/\bar{n}$ para o estado de número. Ao considerar as contagens escuras, tal comportamento constante é lentamente modificado à medida que o tempo passa, como mostra a figura 4.2.

No modelo E, na ausência de contagens escuras, o valor inicial de K_t é

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_t = \frac{\text{Tr}(\mathcal{E}^2 \rho)}{[\text{Tr}(\mathcal{E} \rho)]^2} = \frac{1 - p_0 - p_1}{(1 - p_0)^2}, \quad (4.49)$$

que assume exatamente o valor 1 para o estado de número e um valor muito perto de 1 para o estado térmico, para os valores considerados de \bar{n} . Com o passar do tempo, K_t atinge os mesmos valores que os do modelo A (para os mesmos estados) quando todos os fótons na cavidade forem absorvidos. Ao levar em consideração o efeito de contagens escuras, tal comportamento é ligeiramente modificado, mas mesmo assim ele é bem diferente daquele do modelo A, como mostrado na figura 4.2. Esta é uma outra maneira de verificar os diferentes comportamentos dos modelos A ou E.

Agora vamos analisar os tempos de espera. É importante definir o intervalo do tempo sobre o qual é feita a amostragem: se temos uma taxa de contagens escuras não nula, então ao realizar a média sobre um intervalo de tempo muito grande (em relação ao tempo de espera médio entre duas contagens claras) vamos obter o valor $\bar{\tau} \sim (\lambda d)^{-1}$ para o tempo de espera médio, que é nada mais que o intervalo de tempo médio entre as contagens escuras consecutivas. Como experimentalmente a média é feita sobre intervalos de tempos finitos, vamos prosseguir do mesmo jeito. Quando o número de fótons é grande, no transiente o tempo de espera médio é aproximadamente $(\eta \lambda)^{-1}$ (porque $\eta \lambda$ é a taxa de contagem efetiva), então vamos fazer a média sobre o intervalo do tempo $\nu = 10 (\eta \lambda)^{-1}$. Isto significa que se duas contagens consecutivas não forem registradas dentro do intervalo de tempo ν , esta medição não irá contribuir para a média. No caso ideal, tal procedimento não é necessário, porque a probabilidade de serem registradas contagens consecutivas

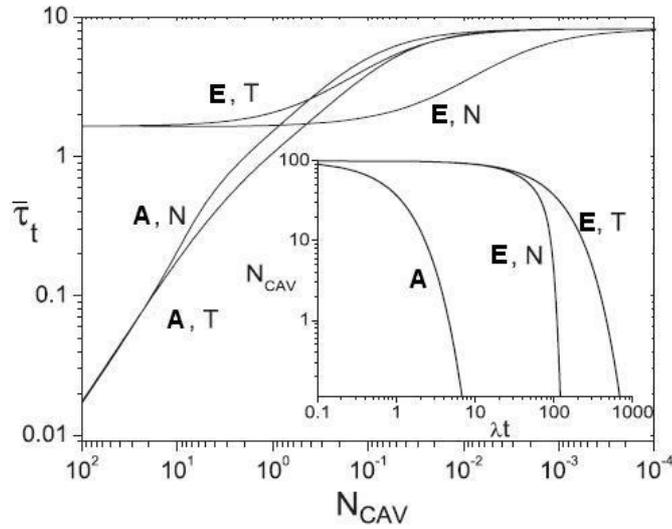


Figura 4.3: Tempo de espera médio $\bar{\tau}_t$ versus N_{CAV} [equação (4.50)] para o estado de número (N) e o térmico (T) para modelos A e E. Enquanto houver fótons na cavidade, $\bar{\tau}_t$ é constante para o modelo E, mas cresce com tempo para o modelo A. Na inserção, desenhamos N_{CAV} versus λt para estes estados (no modelo A, N_{CAV} é independente do estado do campo).

separadas por um grande intervalo de tempo tende a zero. Na figura 4.3 desenhamos o tempo de espera médio para os modelos A e E, para o estado inicial de número e o térmico com $\bar{n} = 100$ (para o estado coerente obtemos uma curva quase idêntica àquela obtida para o estado de número) em função do número médio de fótons na cavidade no instante do primeiro “click”,

$$N_{CAV} = \text{Tr} \left[n \hat{T}_t \rho_0 \right] = \bar{n} \Sigma_1. \quad (4.50)$$

Por completeza, na inserção da figura 4.3 desenhamos N_{CAV} em função de λt para ambos os modelos. Para o modelo E, vemos que quando N_{CAV} se torna menor que 1, o tempo de espera começa a aumentar devido à predominância das contagens escuras, que são eventos muito mais raros de que a absorção de fótons. Esta é uma diferença drástica quando se compara com o caso ideal, no qual nenhuma contagem ocorre depois que todos os fótons foram absorvidos, e o tempo de espera médio satura-se no valor que é o inverso da taxa de contagem, como mostrado em [65]. Ademais, da figura 4.3 verifica-se para modelo E que, enquanto há fótons na cavidade, o tempo de espera médio é aproximadamente independente do tempo do primeiro “click” (e de fato independente no caso ideal [65]),

mas para o modelo A este tempo cresce substancialmente com o passar do tempo. Esta é mais uma diferença qualitativa relevante que poderia ser verificada experimentalmente.

4.1.5 Discussão e conclusões

Aqui generalizamos o modelo de fotodeteção contínua, fazendo um tratamento quântico dos efeitos de não-idealidade que são corriqueiros em experimentos. Nós deduzimos expressões gerais para as operações fundamentais na presença de eficiência quântica não-unitária e contagens escuras, e calculamos explicitamente as distribuições de probabilidade para fotocontagens e tempos de espera para três estados iniciais de campo: coerente, de número e térmico.

Calculando os primeiro e segundo momentos fatoriais para fotocontagens e o tempo de espera médio, mostramos que em experimentos de fotodeteção usuais, pode-se verificar a validade dos modelos A ou E. Mais precisamente, indicamos três maneiras diferentes de revelar o SSQ adequado: (1) quantitativamente, o SSQ pode ser avaliado ao analisar a dependência temporal do segundo momento fatorial de fotocontagens normalizado. Qualitativamente, mostramos que os modelos também podem ser distinguidos pelas seguintes medições: (2) se o tempo de detecção efetivo depende ou não do número de fótons presentes inicialmente na cavidade e (3) se o tempo de espera médio muda com o decorrer do tempo. Para este fim consideramos três tipos de estados do campo: o estado de número, o coerente e o térmico; cada um deles por si só permitiu fazer comparações entre os dois SSQ considerados.

Acreditamos que o nosso tratamento teórico pode fornecer pistas para a verificação experimental de MFC, contribuindo assim com descobertas significativas sobre a natureza quântica de fotodeteção em cavidades, gerando a possibilidade de manipulação do estado de campo na cavidade usando a pós-seleção por meio da detecção. Como uma última observação, queremos ressaltar que se os dados experimentais forem substancialmente diferentes das predições teóricas feitas aqui, deveria-se reconsiderar os dois modelos e tentar encontrar um outro modelo, ou mesmo uma teoria alternativa, para explicar os dados experimentais.

4.2 Esquema para verificar SSQ usando uma cavidade e átomos de Rydberg

4.2.1 Introdução

Aqui propomos outro esquema experimental para verificar a forma do SSQ. Os dois passos principais são: (1) uma absorção de um único fóton por um átomo de Rydberg, que atravessa uma cavidade (com alto fator de qualidade), contendo um campo eletromagnético em estado térmico ou coerente, com um número pequeno de fótons; (2) uma medição quântica não-demolidora subsequente da estatística de fótons no estado de campo resultante da absorção de um fóton, empregando a interação dispersiva com átomos de Rydberg (em estado quântico não-ressonante). Com esta estratégia podemos tirar conclusões a respeito da forma do superoperador de salto quântico, comparando as probabilidades de encontrar 0 e 1 fótons no estado inicial e final do campo.

Além das formas comuns do SSQ, como o modelo A e o modelo E, em alguns casos especiais pode-se deduzir uma expressão exata para o SSQ, usando o Hamiltoniano que descreve a interação entre o detector e o campo. Por exemplo, se o detector é um átomo de dois níveis com frequência de transição *ressonante* com a cavidade que ele atravessa, a interação pode ser descrita pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [124], e a forma exata do SSQ é [65]

$$\hat{J}^H \rho = \sin(y\sqrt{n+1})E_- \rho E_+ \sin(y\sqrt{n+1}), \quad (4.51)$$

onde $y = gt$, t sendo o tempo de trânsito do átomo pela cavidade e g a constante de acoplamento átomo-campo. Vamos chamar o operador (4.51) *modelo H*. Os valores comuns em EDQ de cavidades no regime de microondas são (ver, por exemplo, a tabela I em [125]): $g \sim 100\text{kHz}$, $t \sim 100\mu\text{s}$, portanto $y \sim 1 - 10$. Note que o SSQ exato (4.51) é um superoperador limitado, como se espera do ponto de vista físico. O nosso objetivo é mostrar como a forma do SSQ pode ser verificada pela detecção de fótons individuais em cavidades com alto fator de qualidade, em que podemos usar a aproximação de um único modo para o campo eletromagnético quantizado. Este estudo está inspirado no recente progresso alcançado em experimentos na área de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, descritos na Ref. [127]. O esquema que estamos propondo utiliza tanto medições des-

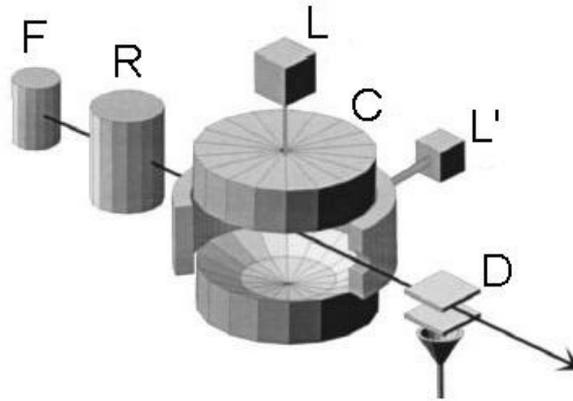


Figura 4.4: Esboço do esquema para verificar SSQ usando uma cavidade e átomos de Rydberg. Átomos de Rydberg circulares são produzidos na zona R pela excitação de um feixe atômico de Rubídio, efundido pelo forno F com velocidades selecionadas. Eles cruzam um a um a cavidade supercondutora C, e são medidos pelo detector D. A fonte de luz clássica L é usada para injetar o campo coerente ou pseudo-térmico na cavidade. A outra fonte de microondas L' é usada para implementar o interferômetro de Ramsey atômico [126].

trutivas, quanto não-destrutivas, que podem ser realizadas com a tecnologia disponível atualmente [126, 127].

4.2.2 O método para verificar SSQ

Nos experimentos de medições quânticas não-demolidoras (QND) realizados recentemente [127], baseados em uma proposta feita em [128], átomos de Rydberg, preparados inicialmente no estado fundamental $|g\rangle$ de uma configuração efetiva de 2-níveis, são disparados e eles atravessam um interferômetro constituído de uma cavidade com alto fator de qualidade (com tempo de dissipação $\sim 0,1$ s) e campos clássicos ressonantes com a frequência de transição do átomo. Na saída os átomos acionam um detector sensível aos estados atômicos. A configuração experimental está esboçada na figura 4.4, e os experimentos são realizados com a condição de que o número médio de fótons na cavidade seja menor que 1. Neste caso, devido à natureza não-demolidora das medições (porque a frequência do campo na cavidade é escolhida de modo que as transições atômicas estão fora da ressonância com o campo) as seguintes condições são impostas: se o átomo é detectado no estado excitado $|e\rangle$, conclui-se que há apenas um fóton na cavidade, e o estado do campo na

cavidade é projetado no estado de 1 fóton; em contraposição, se o átomo é detectado no estado $|g\rangle$, isto significa que não há fótons na cavidade, e o estado de campo é certamente o estado de vácuo. Se fizer incidir mais átomos para atravessar a cavidade, os resultados das medições sempre serão os mesmos e o estado dentro da cavidade não será alterado. Nos casos raros em que houver mais de 1 fóton na cavidade, após passar pela cavidade o átomo estará numa superposição de estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$, logo, em medições consecutivas o resultado não será sempre o mesmo, mas se alternará probabilisticamente entre $|g\rangle$ e $|e\rangle$. Assim, fazendo medições QND consecutivas, o experimentador pode distinguir entre 0, 1 ou mais de 1 fótons na cavidade. Recentemente, este esquema foi aperfeiçoado, permitindo a resolução de até 7 fótons [129].

A nossa proposta experimental está baseada na suposição de que se possa preparar um estado de campo ρ na cavidade com propriedades estatísticas conhecidas. De fato, temos em mente o estado térmico ou coerente com um número pequeno de fótons $\langle n \rangle_i$, de modo a garantir uma pequena influência dos estados de Fock com vários fótons. Os métodos de preparação de tais estados são bem conhecidos [129]. Note que os estados de Fock por si só não podem distinguir entre os modelos A e E² – precisamos de superposições ou uma mistura. Se a natureza do estado é conhecida, ele pode então ser caracterizado medindo-se as probabilidades (em ensemble) p_0 e p_1 de haver inicialmente 0 e 1 fóton.

O primeiro passo do experimento consiste na medição QND da estatística de fótons no estado inicial. Depois disso, deve-se mandar através da cavidade um átomo no estado fundamental de uma outra configuração efetiva de 2 níveis qualquer, por exemplo, usando átomos de Rydberg, cujos estados quânticos são diferentes daqueles usados no primeiro passo. Com isso, o segundo átomo, que chamamos de “átomo-gatilho”, pode mudar o estado do campo devido à absorção de um fóton. Se o átomo-gatilho absorve um fóton (o que é assinalado pela sua detecção no estado excitado), isto significa que o estado do campo fez um salto quântico para o estado ρ' , cujas propriedades estatísticas são determinadas pela forma de SSQ, \hat{J} . Este procedimento é repetido muitas vezes para que se possa fazer uma amostragem estatística.

Um detalhe importante a mencionar é que se pode usar sempre a mesma

²Para o estado inicial de Fock $|n\rangle$ o estado após o salto quântico é $|n-1\rangle$ para ambos os modelos

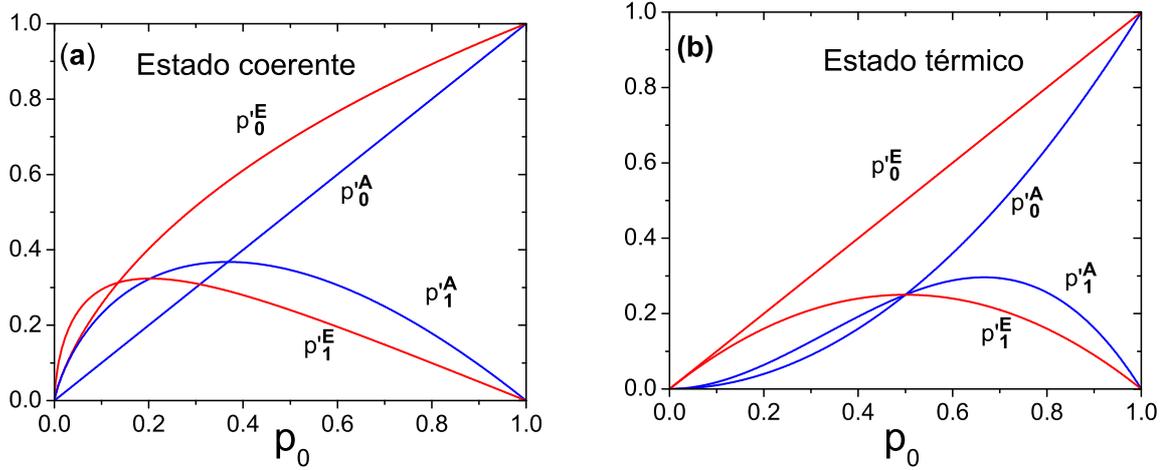


Figura 4.5: Probabilidades de encontrar 0 e 1 fótons depois de um salto quântico para estado inicial **a)** coerente e **b)** térmico, caracterizados pela probabilidade do estado inicial de ter zero fótons p_0 . Os índices A e E correspondem a previsões dos modelos A e E, respectivamente.

configuração de estados quânticos do átomo-gatilho, ou configurações diferentes escolhidas ao acaso, de modo a testar a forma de SSQ em diversos regimes. Por exemplo, se a configuração do átomo-gatilho é aleatória, tendo uma distribuição própria de frequências atômicas, então após a amostragem estatística condicionada, o experimento reproduz aproximadamente o efeito de um reservatório de átomos de dois-níveis, cuja distribuição de frequências pode ser controlada através das configurações do átomo-gatilho.

Finalmente, medindo as probabilidades $p'_n = \langle n | \rho' | n \rangle$ de encontrar n fótons no estado ρ' depois do salto quântico e comparando-a com as previsões teóricas, pode-se verificar a forma de \hat{J} . É *suficiente* medir apenas as probabilidades p'_0 e p'_1 .

As previsões para o modelo A são

$$p_0^A = \frac{\langle 0 | a \rho a^\dagger | 0 \rangle}{\text{Tr} [a^\dagger a \rho]} = \frac{p_1}{\langle n \rangle_i}, \quad p_1^A = \frac{\langle 1 | a \rho a^\dagger | 1 \rangle}{\text{Tr} [a^\dagger a \rho]} = \frac{2p_2}{\langle n \rangle_i}, \quad (4.52)$$

onde $p_n = \langle n | \rho | n \rangle$. Por outro lado, para o modelo E temos

$$p_0^E = \frac{\langle 0 | E_- \rho E_+ | 0 \rangle}{\text{Tr} [E_+ E_- \rho]} = \frac{p_1}{1 - p_0}, \quad p_1^E = \frac{\langle 1 | E_- \rho E_+ | 1 \rangle}{\text{Tr} [E_+ E_- \rho]} = \frac{p_2}{1 - p_0}. \quad (4.53)$$

Assim, vemos que as probabilidades resultantes são fundamentalmente diferentes. Vamos considerar dois exemplos.

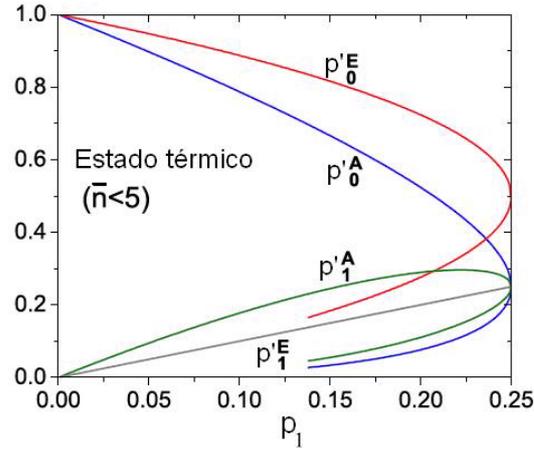


Figura 4.6: O mesmo que figura 4.5b, mas como função da probabilidade p_1 .

(a) Para o estado térmico (que é autoestado do superoperador J_E) com número médio de fótons \bar{n} temos

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} = p_0 (1 - p_0)^n, \quad (4.54)$$

então os resultados são

$$p'_0{}^A = \frac{1}{(\bar{n} + 1)^2} = p_0^2, \quad p'_1{}^A = \frac{2\bar{n}}{(\bar{n} + 1)^3} = 2p_0^2 (1 - p_0), \quad (4.55)$$

$$p'_0{}^E = \frac{1}{(\bar{n} + 1)} = p_0, \quad p'_1{}^E = \frac{\bar{n}}{(\bar{n} + 1)^2} = p_1 = p_0 (1 - p_0). \quad (4.56)$$

(b) Para o estado coerente (autoestado de J_A) com

$$p_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} = p_0 \frac{(-\ln p_0)^n}{n!} \quad (4.57)$$

temos

$$p'_0{}^A = e^{-\bar{n}} = p_0, \quad p'_1{}^A = e^{-\bar{n}} \bar{n} = p_1 = p_0 (-\ln p_0), \quad (4.58)$$

$$p'_0{}^E = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}}{1 - e^{-\bar{n}}} = \frac{p_0 (-\ln p_0)}{1 - p_0}, \quad p'_1{}^E = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^2}{2(1 - e^{-\bar{n}})} = \frac{p_0 (-\ln p_0)^2}{2(1 - p_0)}. \quad (4.59)$$

Vemos então que $p'_1{}^E$ é duas vezes menor que $p'_1{}^A$ se $1 - p_0 \ll 1$, para ambos os estados, coerente e térmico.

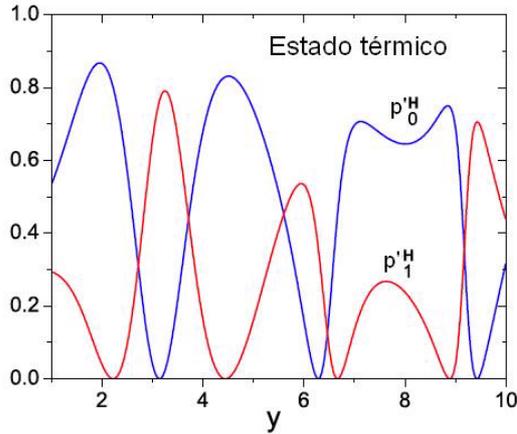


Figura 4.7: p_n^H para o modelo H em função de y para $p_0 = 0,6$.

4.2.3 Discussão e conclusões

Nas figuras 4.5a e 4.5b desenhamos p'_0 e p'_1 como função de p_0 para ambos os modelos e ambos os estados. Na figura 4.6 desenhamos as mesmas probabilidades como funções de p_1 para o estado inicial térmico (no caso de $\bar{n} < 5$). Escolhemos p_0 e p_1 como variáveis independentes, porque estas quantidades podem ser determinadas experimentalmente de modo mais direto. A presença de dois ramos na figura 4.6 é a consequência da existência de dois sinais na dependência $p_0(p_1)$: ao resolver a equação (4.54) com respeito a p_0 para $n = 1$ obtemos

$$p_0 = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - p_1}, \quad p_1 \leq 1/4.$$

O sinal + deve ser escolhido se $\bar{n} < 1$ e o sinal - corresponde a $\bar{n} > 1$.

No caso de estado inicial térmico, os valores de p_0 e p_1 podem ser variados mudando a temperatura da cavidade ou por outros meios [130]. Antes de injetar o átomo, o número médio de fótons térmicos no esquema descrito nas Refs. [126–128, 130] variava entre 0,7 e 0,1. Esta faixa de temperaturas corresponde a variação de p_0 entre 0,6 e 0,9 e de p_1 entre 0,24 e 0,09. As figuras 4.5b e 4.6 mostram que estes são exatamente os intervalos onde as funções $p_k^A(p_j)$ e $p_k^E(p_j)$ são bem distinguíveis uma da outra ($k, j = 0, 1$). Ademais, para $p_1 = 0,1$, a probabilidade de detectar mais de 1 fóton torna-se menor que 0,01, e o esquema descrito em [127] torna-se bastante realista.

No modelo H, que considera a ressonância exata entre a frequência de tran-

sição do átomo-gatilho e o modo na cavidade, o SSQ depende do parâmetro y , isto é, o tempo de trânsito do átomo. Portanto, as probabilidades resultantes $p_n'^H$ oscilam como função do tempo de trânsito, atingindo valores nulos para certos valores de y . Na figura 4.7 desenhamos as funções $p_0'^H(y)$ e $p_1'^H(y)$ para o estado térmico com $p_0 = 0,6$ e y variando de 1 a 10, o que corresponde a valores possíveis nos experimentos de EDQ de cavidades. Tal comportamento peculiar das probabilidades como função do tempo de trânsito também poderia ser verificado experimentalmente. Consequentemente, fazendo experimentos sobre ensembles, em intervalos de temperatura acessíveis experimentalmente, pode-se verificar facilmente qual dos SSQ é genuíno, ou se nenhum dos SSQ descritos acima é observado na prática.

Concluindo, estamos propondo um esquema experimental simples que pode resolver de um modo inambíguo a forma do superoperador de salto quântico. Este esquema necessita apenas de uma cavidade com estado inicial térmico ou coerente do campo eletromagnético, contendo um pequeno número médio de fótons ($\bar{n} < 1$). Os equipamentos experimentais disponíveis atualmente parecem suficientes para atingir este objetivo. Este método também pode ser aplicado em outros sistemas físicos quando for possível realizar tanto medições destrutivas, quanto medições QND.

4.3 Subtração e adição de fótons em ondas viajantes

Recentemente, Parigi *et al.* [118] implementaram experimentalmente os processos de subtração e adição de fótons de ou para o feixe de luz de uma maneira condicional, em que essas operações foram realizadas com sucesso apenas quando uma medição separada apresentava um desfecho positivo. Foi verificado que para um feixe de baixa intensidade (“regime quântico”), o operador bosônico de aniquilação a descreve a subtração de um fóton do campo, enquanto que o operador de criação a^\dagger descreve a adição de um fóton ao campo. No entanto, as expressões formais exatas para estas operações nem sempre reduzem-se a estas identificações simples, e aqui [131] deduzimos os superoperadores gerais para os processos de subtração e adição de múltiplos fótons e analisamos a estatística dos estados do campo resultantes para uma intensidade do campo arbitrária. Nós obtemos expressões analíticas exatas e verificamos que, para um feixe de grande intensi-

dade (“regime clássico”), os operadores que descrevem os processos de subtração e adição de fótons desviam significativamente de simples a e a^\dagger . Complementarmente, analisamos em detalhes tal transição quântica-clássica suave para ambos os processos em função da intensidade do feixe incidente.

4.3.1 Introdução

Recentemente, o modelo A do SSQ foi verificado experimentalmente no regime de baixo número de fótons e acoplamento campo-detector fraco [118]. O experimento envolveu um divisor de feixes e o detector on/off de único fóton (DUF) num esquema bastante simples, que está esquematizado na figura 4.8a. Um feixe de fraca intensidade, com um baixo número de fótons por unidade do tempo, é preparado para incidir sobre um divisor de feixes de fraca reflectividade. O feixe refletido é medido continuamente por um DUF, e toda vez que o DUF acusa um “click”, o campo realiza uma transição para um novo estado, que pode ser descrito formalmente pela ação do superoperador de subtração de fóton (SSF) \mathcal{D} como (aqui preferimos usar a denominação SSF em vez de SSQ, para diferenciar os SSQ associados a subtração e adição de fótons) [14]

$$\rho' = P^{-1}\mathcal{D}\rho, \quad (4.60)$$

onde ρ' representa o estado do feixe imediatamente após a subtração de um fóton, e $P = \text{Tr}(\mathcal{D}\rho)$ é a probabilidade para este processo. No “limite quântico” de poucos fótons, nas condições experimentais de [118], o SSF pode ser descrito, aproximadamente, pelo modelo A [118]. Portanto, é interessante analisar o comportamento do SSF no “limite clássico” (número médio de fótons alto), e investigar de que forma o padrão da estatística do estado pós-seleção muda suave e continuamente como função da intensidade do campo. A transição quântica-clássica no processo de subtração de fótons trata da passagem entre as duas situações extremas, representadas por SSF \mathcal{A} e \mathcal{E} , como será visto nas próximas subseções.

Além da subtração de fótons, pode-se também implementar a operação de adição de fótons através de conversão paramétrica estimulada descendente condicional num cristal óptico não-linear, como descrito em [118] e esboçado na figura 4.8b. Dentro do cristal os fótons de bombeio podem decair espontaneamente em dois fótons emaranhados

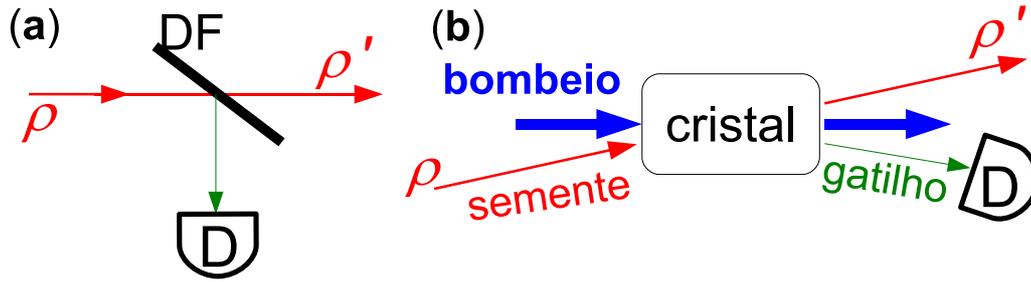


Figura 4.8: **a)** Esquema para subtração de fótons, usando um divisor de feixes (DF) e um detector (D). **b)** Esquema para adição de fótons, usando um feixe de bombeio, um cristal óptico não-linear e um detector.

cujas energias se somam para serem iguais à do fóton original. Ao detectar um destes fótons (conhecido como o fóton gatilho) ao longo de uma dada direção, as propriedades do outro fóton são determinadas sem ambiguidade. Se um estado “semente” de luz, no estado ρ , é injetado no cristal, a emissão estimulada pode ocorrer no mesmo modo espaço-temporal, e a detecção de um único fóton-gatilho (usando um DUF) indica a geração condicional do estado de fóton adicionado. Usando este esquema, foi mostrado [118] que o superoperador de adição de fóton (SAF) para uma fraca intensidade do feixe é

$$\mathbb{A}\rho = \zeta' a^\dagger \rho a,$$

que denominamos de modelo \mathbb{A}_+ . Este processo foi implementado experimentalmente para um baixo número médio de fótons [118]. Analogamente ao modelo E, nós o denominamos modelo \mathbb{E}_+ , formalmente escrevemos

$$\mathbb{E}\rho = E_+ \rho E_-,$$

que será analisado e discutido a seguir.

O objetivo desta seção é de generalizar a análise teórica apresentada em [118] para ambos os superoperadores de subtração e adição de fótons, substituindo o DUF por um detector de k fótons *com resolução* [132] ou *sem resolução* [133], e escrever formalmente o SSF e o SAF, que sejam válidos para qualquer intensidade do campo incidente e que sejam capazes de reproduzir os casos limite de SSF \mathcal{A} e \mathcal{E} , bem como SAF \mathbb{A} e \mathbb{E} . Vamos mostrar que no limite quântico (baixo número de fótons), os modelos \mathbb{A} e \mathbb{A}_+ são boas

aproximações para SSF e SAF exatos, respectivamente, enquanto que no limite clássico (grande número de fótons), os modelos E e E₊ são mais apropriados para o detector sem resolução. Entre os dois limites, não existem expressões matemáticas simples para a descrição formal de SSF e SAF.

4.3.2 Subtração de fótons

Ao passar pelo divisor de feixes, uma pequena fração do feixe incidente é refletida no modo de gatilho, inicialmente no estado de vácuo $|0_b\rangle\langle 0_b|$. O procedimento de pós-seleção – no qual $k > 0$ fótons são detectados no modo gatilho – permite expressar o estado do campo transmitido como a equação (4.60), onde a forma exata de SSF é dada por

$$\mathcal{D}_k \rho = \text{Tr}_b [M_k U (\rho \otimes |0_b\rangle\langle 0_b|) U^\dagger], \quad (4.61)$$

ρ sendo o estado do campo incidente. Aqui

$$U = \exp [\vartheta (a^\dagger b - ab^\dagger)] \quad (4.62)$$

é o operador que descreve o divisor de feixes, a (sinal) e b (gatilho) representam os dois modos resultantes do feixe incidente e ϑ é um parâmetro relacionado com os coeficientes de reflectividade ($R = \sin^2 \vartheta$) e transmissividade ($T = \cos^2 \vartheta$). O operador $M_k = \sum_{l=k}^{\infty} \Upsilon_l |l_b\rangle\langle l_b|$, que age sobre o modo gatilho, descreve a ação do detector (denotado por $\mathcal{D}k$). $\Upsilon_l = 1$ para o detector de k -fótons sem resolução ($S\mathcal{D}k$), que acusa um “click” toda vez que k ou mais fótons são absorvidos [132, 133]. $\Upsilon_l = \delta_{l,k}$ para o detector de k -fótons com resolução ($C\mathcal{D}k$), que provoca um “click” quando exatamente k fótons são absorvidos [132]. O DUF corresponde a $S\mathcal{D}1$, segundo a nossa notação.

O SSF resultante é

$$\mathcal{D}_k \rho = \sum_{l=k}^{\infty} \Upsilon_l \langle l_b | U | 0_b \rangle \rho \langle l_b | U | 0_b \rangle^\dagger. \quad (4.63)$$

O operador U tem a forma $\exp [-\vartheta (K_+ + K_-)]$ onde $K_+ \equiv b^\dagger a$, $K_- \equiv -ba^\dagger$. O terceiro operador, $K_0 \equiv (b^\dagger b - a^\dagger a)/2$, é necessário para fechar a álgebra $\text{su}(1,1)$, e juntos eles constituem os geradores do grupo $\text{SU}(1,1)$. Usando o teorema de fatoração [102–105], podemos reescrever a equação (4.63) como

$$\mathcal{D}_k \rho = \sum_{l=k}^{\infty} \Upsilon_l \frac{(\tan^2 \vartheta)^l}{l!} a^l (\cos \vartheta)^n \rho (\cos \vartheta)^n a^{\dagger l}, \quad (4.64)$$

que é o SSF exato e completo, compatível com o esquema experimental descrito em [118]. Para um pequeno número médio de fótons, n_0 , e $R \ll 1$ podemos fazer a aproximação $\text{Tr}[(\cos \vartheta)^n \rho (\cos \vartheta)^n] \sim (1 - n_0 R)$, logo para $n_0 R \ll 1$ obtemos

$$\mathcal{D}_k \rho \simeq \frac{R^k}{k!} \mathcal{A}_k \rho, \quad \mathcal{A}_k \equiv a^k \rho a^{\dagger k}$$

para ambos os tipos de detectores. Para $k = 1$ recuperamos o modelo A, enquanto que para $k > 1$ temos uma generalização imediata do modelo A que envolve a subtração de múltiplos fótons.

A probabilidade de haver n fótons para o estado pós-selecionado ao usar o detector de k fótons é

$$p'_{n, \mathcal{D}k} = P_{\mathcal{D}k}^{-1} \mathfrak{B}_n^{(\mathcal{D}k)}, \quad (4.65)$$

onde

$$\mathfrak{B}_n^{(\mathcal{D}k)} = \sum_{l=k}^{\infty} \Upsilon_l \binom{n+l}{n} T^n R^l p_{n+l}.$$

$P_{\mathcal{D}k} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n^{(\mathcal{D}k)}$ é a probabilidade para a subtração de k -fótons e p_n é a probabilidade inicial do número de fótons.

Abaixo, especializamos a análise para três diferentes tipos do campo, que são atualmente produzidos em laboratório: o estado coerente, o térmico e a “luz mista” [134]. O último é uma “mistura de radiação térmica e coerente” [135], cuja distribuição de número de fótons é

$$p_n^{(ml)} = \exp\left(-\frac{n_c}{1+n_t}\right) \frac{n_t^n}{(n_t+1)^{n+1}} L_n \left[-\frac{n_c}{n_t(1+n_t)} \right], \quad (4.66)$$

onde n_c e n_t são os números médios de fótons da parte coerente e térmica da luz mista, respectivamente, $n_0 = n_c + n_t$ é o número total de fótons e $L_n(\cdot)$ é um polinômio de Laguerre. Para estes três estados as expressões resultantes para $p'_{n, \mathcal{D}k}$, $P_{\mathcal{D}k}$ e os dois momentos fatoriais mais baixos da distribuição de número de fótons no estado pós-selecionado são dados no apêndice C.1

Para um baixo número de fótons, $n_0 R \ll 1$, as expressões para a probabilidade de subtração de fótons e os dois momentos fatoriais mais baixos do número de fótons no estado resultante (ver equações no apêndice C.1 são aproximadamente iguais às expressões correspondentes ao modelo A generalizado. Logo, no regime quântico (campo

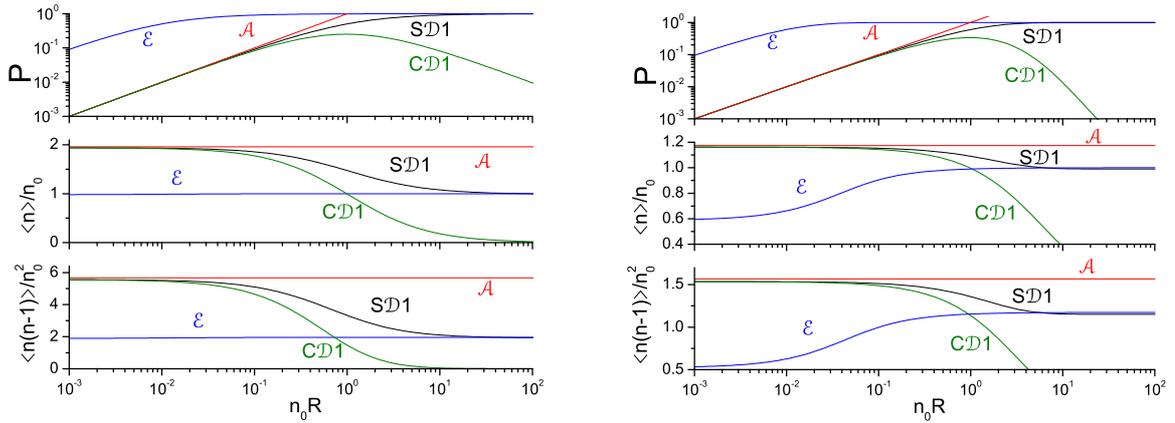


Figura 4.9: Resultados para $SD1$ e $CD1$ para o estado de “luz mista” com o número médio de fótons n_0 , comparados às previsões usando os superoperadores \mathcal{A} e \mathcal{E} . Aqui $n_c = n_t/4$ (figura à esquerda) e $n_c = 10n_t$ (figura à direita).

de baixa intensidade), o SSF é aproximadamente \mathcal{A}_k , e a detecção de um ou mais fótons no modo gatilho pode aumentar significativamente o número médio de fótons no estado pós-selecionado. Por outro lado, para um campo de alta intensidade, $n_0 R \gg 1$, os resultados são bem diferentes daqueles previstos usando \mathcal{A}_k . Este comportamento pode ser apreciado ao olhar a figura 4.9, onde estão desenhados $P_{\mathcal{D}1}$, $\langle n \rangle_{\mathcal{D}1}$ e $\langle n(n-1) \rangle_{\mathcal{D}1}$, junto com as previsões correspondentes de \mathcal{A}_1 e \mathcal{E}_1 , para a luz mista com $n_c = n_t/4$ (figura 4.9 à esquerda) e $n_c = 10n_t$ (figura 4.9 à direita), usando $R = 10^{-2}$. Podemos perceber das figuras que para $n_0 R \gg 1$ as probabilidades e os momentos fatoriais para $SD1$ estão perto daqueles previstos usando o modelo E generalizado. Portanto, no regime clássico \mathcal{E}_k representa melhor o processo de subtração de fótons (usando o detector sem resolução) e, como verificado empiricamente, o número médio de fótons não aumenta devido à fotodetecção no modo gatilho. A transição suave entre os modelos A e E ocorre na região $n_0 R \sim 1$.

O efeito importante da reação da medição sobre o feixe transmitido pode ser visto claramente ao comparar os resultados da detecção instantânea de k fótons (usando SDk ou CDk) aos da detecção sequencial de k fótons (um a um, como uma sequência de “clicks” distinguíveis), usando um conjunto de k DUF e detectando um “click” em

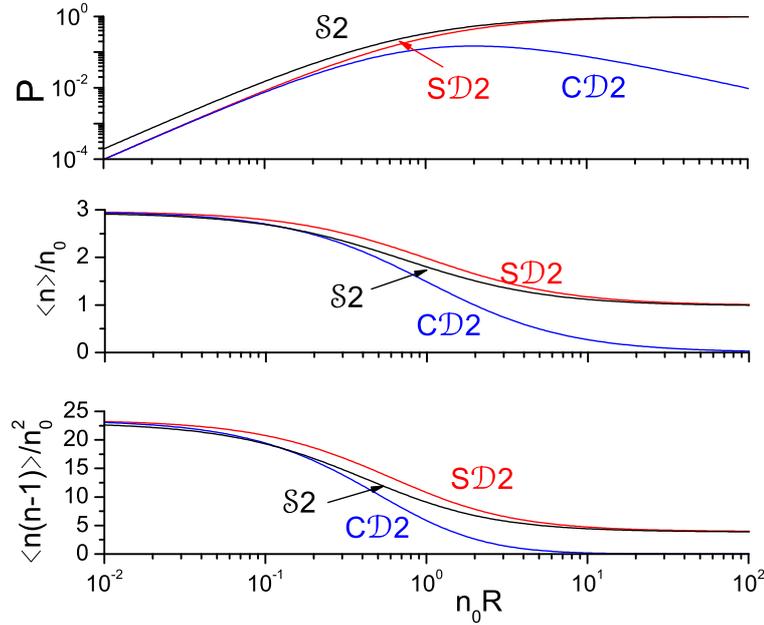


Figura 4.10: Comparação entre 2 detecções sequenciais usando DUF e a detecção de dois fótons simultaneamente, usando os detectores com ou sem resolução, para o estado térmico.

cada um deles. Para detecção sequencial de k fótons o SSF é $\mathcal{S}_k = (\mathcal{D}_{N1})^k$, onde \mathcal{D}_{N1} é dado pela equação (4.64) com $\Upsilon_l = 1$. As expressões resultantes são dados no apêndice C.2 e desenhados na figura 4.10. Olhando para ela, podemos comparar os resultados dos três tipos de detectores, $\mathcal{S}2$, $\mathcal{SD}2$ e $\mathcal{CD}2$, para o estado térmico e $R = 10^{-2}$. Para a contagem sequencial, a probabilidade de detectar k fótons é sempre maior que aquela calculada admitindo uma detecção instantânea. Além disso, para $n_0 R \ll 1$, o número médio de fótons no estado pós-selecionado é sempre maior que o mesmo para a detecção instantânea, enquanto que para $n_0 R \gtrsim 1$ valores médios diferentes são previstos, de modo que $\langle n \rangle_{\mathcal{SD}k} > \langle n \rangle_{\mathcal{S}k} > \langle n \rangle_{\mathcal{CD}k}$, ver a figura 4.10.

4.3.3 Adição de fótons

O superoperador de adição de k fótons é definido como [118]

$$\mathbb{D}_k \rho = \text{Tr}_b [M_k u \rho |0_b\rangle \langle 0_b| u^\dagger], \quad (4.67)$$

onde $M_k = \sum_{l=k}^{\infty} \Upsilon_l |l_b\rangle \langle l_b|$ (como definido previamente) e

$$u = \exp [\lambda (ab - a^\dagger b^\dagger)]$$

é o operador que descreve o processo de conversão paramétrica descendente com o fator de ganho $\lambda \ll 1$. O operador u contém dois geradores da álgebra $su(1,1)$, $\tilde{K}_+ = a^\dagger b^\dagger$, $\tilde{K}_- = ab$, e o terceiro deles é $\tilde{K}_0 = (a^\dagger a + b^\dagger b + 1) / 2$. Usando novamente o teorema de fatoração, a equação (4.67) torna-se [105]

$$\mathbb{D}_k \rho = t \sum_{l=k}^{\infty} \Upsilon_l \frac{(\tanh^2 \lambda)^l}{l!} a^{\dagger l} (\cosh^{-1} \lambda)^n \rho (\cosh^{-1} \lambda)^n a^l, \quad (4.68)$$

onde definimos

$$r \equiv \sinh^2 \lambda, \quad t \equiv \cosh^{-2} \lambda.$$

Para um pequeno número de fótons, obtemos

$$\mathbb{D}_k \rho \simeq \mathbb{A}_k \rho = \frac{r^k}{k!} a^{\dagger k} \rho a^k,$$

que é uma generalização do modelo \mathbb{A}_+ . Assim como para \mathcal{A}_k , o superoperador \mathbb{A}_k é não-limitado, com a probabilidade de adição de fótons tornando-se maior que 1 para $n_0 \gg 1$. Portanto, o modelo \mathbb{A}_+ não pode ser usado para altas intensidades. Abaixo vamos estudar o comportamento dos momentos fatoriais mais baixos durante a transição do regime quântico, $n_0 \ll 1$, para o regime clássico, $n_0 \gg 1$, e comparar os resultados com as previsões do modelo \mathbb{E}_+ generalizado, $\mathbb{E}_k \rho = E_+^k \rho E_-^k$. Ao contrário de \mathbb{A}_k , o superoperador \mathbb{E}_k é limitado, tendo a probabilidade $P_{\mathbb{E}_k} = 1$ e o número médio $\langle n \rangle_{\mathbb{E}_k} = n_0 + k$ para a operação de adição de k fótons.

A distribuição de número de fótons para o estado adicionado de k fótons é dada por

$$p'_{n, \mathbb{D}_k} = P_{\mathbb{D}_k}^{-1} \mathfrak{B}_n^{(\mathbb{D}_k)}, \quad (4.69)$$

onde

$$\mathfrak{B}_n^{(\mathbb{D}_k)} = \sum_{l=k}^{\infty} \Upsilon_l \binom{n}{l} t^{n+1} r^l p_{n-l}$$

e a probabilidade de adição de k fótons é $P_{\mathbb{D}_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n^{(\mathbb{D}_k)}$, independentemente do número de fótons presentes no campo. Para tornar a física mais transparente, vamos

considerar o caso mais simples, $k = 1$, para o qual temos $P_{A1} = r(n_0 + 1)$ e $\langle n \rangle_{E1} / n_0 = 1 + n_0^{-1}$.

Para dois estados diferentes, o coerente e o térmico, obtemos as expressões dadas no apêndice C.3. Para $n_0 r \ll 1$, para ambos os estados as expressões tornam-se muito próximas daquelas previstas pelo modelo A_+ . Assim, no regime quântico o operador de criação de fótons a^\dagger descreve bem o processo de adição de fótons. No regime $n_0 r \gg 1$, para o estado coerente as previsões dos modelos A_+ e E_+ para os momentos $\langle n \rangle$ e $\langle n(n-1) \rangle$ são muito similares, enquanto que para o estado térmico, de acordo com o modelo A_+ , o número médio de fótons é aproximadamente o dobro daquele previsto pelo modelo E_+ . Na figura 4.11 estão mostrados os comportamentos de P , $\langle n \rangle$ e $\langle n(n-1) \rangle$ para o estado térmico em função de $n_0 r$ para $\lambda = 10^{-2}$. Podemos ver que, usando um detector sem resolução, para $n_0 r \gg 1$ as expressões tendem para os resultados de modelo E_+ , portanto no regime clássico o modelo A_+ deixa de representar o SAF, e o modelo E_+ se torna mais apropriado. A transição entre os modelos A_+ e E_+ ocorre na região $n_0 r \sim 1$. Finalmente, vale ressaltar que, embora os detectores com e sem resolução são bastante similares no regime quântico, eles são completamente diferente no clássico, como visto claramente nas figuras 4.9 - 4.11.

4.3.4 Discussão e conclusões

Sumarizando, analisamos a transição quântica-clássica para os processos de subtração e adição de fótons de ou para o campo. Usamos as representações matemáticas padrão para o divisor de feixes, o cristal não-linear e detectores de k fótons com ou sem resolução, como foi descrito em [118]. Nós consideramos três estados clássicos do campo – coerente, térmico e luz mista – para ilustrar a transição do regime quântico para o clássico, e estudamos os momentos fatoriais de número de fótons no estado pós-selecionado em função da intensidade do campo preparado, que incide sobre o divisor de feixes ou sobre o cristal não-linear. Foram obtidas expressões formais para os superoperadores de subtração e adição de fótons, válidos para qualquer estado inicial; para os estados clássicos considerados, deduzimos expressões analíticas fechadas da distribuição de número de fótons para o estado pós-selecionado e os momentos fatoriais associados, bem como as probabilidades de subtração e adição de fótons.

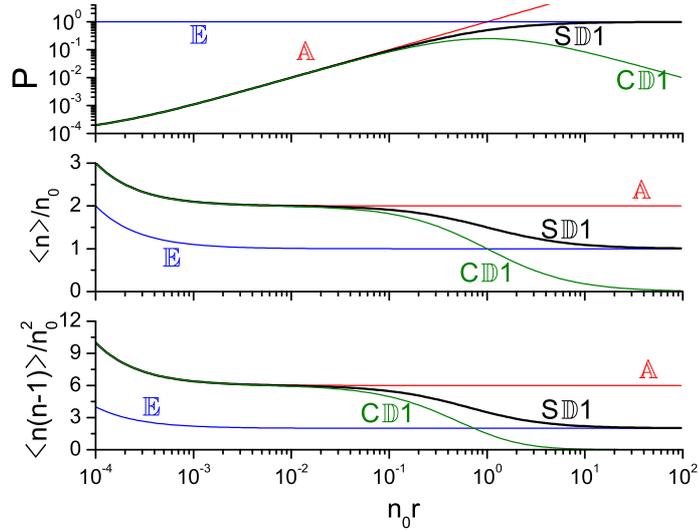


Figura 4.11: Resultados de $SD1$ e $CD1$ para o estado térmico com o número médio de fótons n_0 , comparado às previsões dos superoperadores A e E .

Encontramos que no regime quântico (pequeno número de fótons) o SSF tende para o modelo A generalizado, enquanto que o SAF tende para o modelo A_+ generalizado para qualquer estado do campo. O número médio de fótons no estado pós-selecionado pode aumentar significativamente devido à subtração de um ou mais fótons. Por outro lado, no regime clássico (número médio de fótons grande) os modelos A e A_+ generalizados perdem a validade, e para o fotodetector sem resolução, o SSF (SAF) é representado melhor pelo modelo E (modelo E_+) generalizado, e o número médio de fótons no estado pós-selecionado diminui (em relação ao número médio inicial) devido a subtração de fótons. Assim, podemos associar o operador E_- , usado em [67], ao operador de fotodetecção clássico, no mesmo sentido que o operador bosônico de aniquilação, a , é associado ao operador de fotodetecção quântico.

Concluindo, as expressões exatas de superoperadores de subtração ou adição de fótons, equações (4.64) e (4.68), não podem ser sempre escritas como $\zeta O \rho O^\dagger$ ou $\zeta O^\dagger \rho O$. Elas se reduzem a estas simples expressões apenas em alguns limites da intensidade do campo, ou para o detector de fótons com resolução. De fato, elas dependem da forma como a detecção é feita, de modo que o estado do campo pós-selecionado irá depender essencialmente de forma como o experimentador programa o seu experimento.

Capítulo 5

Equações mestras quânticas a partir de Lagrangianas clássicas com duas forças estocásticas

Neste capítulo vamos mostrar como uma grande família de equações mestras deduzidas a partir de reservatórios com infinitos graus de liberdade pode ser deduzida no contexto de uma abordagem fenomenológica, admitindo que o meio ambiente pode ser simulado por duas forças clássicas estocásticas. As equações mestras consideradas tipo Fokker-Planck descrevem um oscilador harmónico em movimento Browniano. Essa família é determinada por três funções de correlação dependentes do tempo (além da frequência e do coeficiente dissipativo), e ela contempla como casos especiais as equações mestras conhecidas da literatura, cuja parte dissipativa é bilinear com respeito aos operadores de posição e momentum.

5.1 Introdução

Os fenômenos físicos que representam irreversibilidade e dissipação em sistemas quânticos têm sido objeto de numerosos estudos desde os primórdios da Mecânica Quântica [136–139]. Eles são atribuídos à ação de um meio que suga informação do sistema quântico \mathcal{S} , aumentando assim a entropia durante a sua evolução. Este meio é geralmente chamado de reservatório e denotado por \mathcal{R} , suas variáveis são expressas como q -números

(operadores agindo no espaço de Hilbert), e supõe-se que ele tem uma infinidade de graus de liberdade. No caso mais geral, deve-se considerar o sistema quântico inteiro $\mathcal{S} + \mathcal{R}$, levando em conta todos os detalhes de cada subsistema e a interação que age entre eles. É conhecido, porém, que sob certas condições a influência do reservatório pode ser descrita aproximadamente por meio de poucos parâmetros que entram em algumas equações dinâmicas contendo apenas as variáveis relacionadas ao sistema \mathcal{S} . Na representação de Schrödinger tais equações para o operador estatístico $\hat{\rho}(t)$ ou suas diferentes representações (matriz densidade, função de Wigner, etc.), chamadas de equações mestras quânticas, foram estudadas em numerosos artigos [140–160]. Uma descrição alternativa consiste em usar a representação de Heisenberg e escrever as equações de Langevin quânticas, também chamadas equações de Langevin-Heisenberg [151, 161–174]. Estas duas abordagens foram discutidas em detalhes em muitos livros e artigos de revisão [30, 39, 40, 66, 101, 175–182].

A maneira mais rápida e simples de introduzir relaxação na Mecânica Quântica consiste em postular uma estrutura genérica da equação mestra quântica ou das equações de Langevin-Heisenberg, que garanta que os fundamentos básicos da Mecânica Quântica sejam mantidos para todos os instantes do tempo (tais como as propriedades de hermiticidade e positividade do operador estatístico, bem como sua normalização; ou preservação da relação de comutação canônica entre os operadores dependentes do tempo). Para o problema mais restrito de movimento Browniano quântico esta abordagem foi usada, por exemplo, nas referências [183–188], onde alguns conjuntos de parâmetros livres são escolhidos de modo que os valores médios de coordenadas e momenta satisfaçam equações clássicas do movimento.

Entretanto, é desejável ter alguns esquemas que permitam deduzir equações mestras de alguns princípios gerais. O caminho mais natural para fazê-lo consiste em começar com algum Hamiltoniano explícito para o sistema total $\mathcal{S} + \mathcal{R}$. Então, as equações dinâmicas para o subsistema \mathcal{S} aparecem como resultado de se efetuar a operação do traço sobre as variáveis do reservatório. Nesta abordagem o subsistema \mathcal{S} e o reservatório \mathcal{R} são representados por q -números. Um modelo simples de reservatório usado frequentemente consiste de um número infinito de osciladores harmônicos cuja distribuição de frequências é escolhida de acordo com alguma hipótese. Embora o uso do reservatório seja geralmente visto como sendo uma abordagem *microscópica* para a dedução das equações de

Langevin-Heisenberg ou da equação mestra quântica, na realidade, a menos que se saiba precisamente a natureza do meio ambiente e a sua interação com \mathcal{S} (descrita por um Hamiltoniano com parâmetros dependentes das constantes fundamentais, ver por exemplo [189] para este caso excepcional), estritamente falando, ele deveria ser considerado como *fenomenológico*. Isto porque várias suposições devem ser feitas a respeito da própria natureza dos modos do reservatório, dos parâmetros do Hamiltoniano do reservatório e do termo de interação $\mathcal{R} - \mathcal{S}$.

Admitindo este ponto de vista, parece interessante estudar que tipos de equações mestras podem ser obtidas se empregarmos uma abordagem fenomenológica *ab initio*. Este é o objetivo deste trabalho. Como um princípio geral, consideramos o formalismo de Lagrange-Hamilton, que impeliu o desenvolvimento da física em geral e, em particular, a Mecânica Quântica e as teorias do campo. Ele é complementado pela suposição de que \mathcal{S} interage com forças clássicas flutuantes dependentes do tempo (DT) $[F_i(t)]$, que simulam a ação do meio sem uma preocupação maior sobre as suas origens microscópicas. Mostraremos que combinando o Lagrangiano fenomenológico, que leva em conta os efeitos de dissipação, com um conjunto apropriadamente escolhido de forças clássicas estocásticas, e seguindo as regras usuais do procedimento de quantização canônica, podemos obter de uma maneira simples e direta uma grande classe de equações mestras, que incluem muitas equações, introduzidas previamente no contexto de diferentes abordagens. Este formalismo foi usado previamente nas referências [190–194], porém, os seus autores consideraram apenas uma *única* força clássica estocástica. Como resultado, as equações obtidas tiveram algumas restrições quanto à sua validade. Aqui, mostramos que introduzindo *duas* forças estocásticas podemos obter equações mais gerais.

5.2 Equações mestras usuais

O Hamiltoniano H_0 considerado neste trabalho corresponde a uma partícula de massa m e frequência angular ω_0 sujeita a uma força harmónica unidimensional,

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) = \hat{p}^2/(2m) + m\omega_0^2 \hat{x}^2/2, \quad (5.1)$$

onde o operador de abaixamento \hat{a} pode ser escrito em termos de operadores hermitianos, a posição da partícula \hat{x} e o seu momentum \hat{p} , como

$$\hat{a} = (2\hbar\omega_0 m)^{-1/2} (m\omega_0 \hat{x} + i\hat{p}). \quad (5.2)$$

A forma geral da equação mestra é

$$d\hat{\rho}/dt + (i/\hbar) [H, \hat{\rho}] = \mathcal{L}\hat{\rho}, \quad (5.3)$$

onde o superoperador dissipativo não-unitário \mathcal{L} leva em conta a influência do ambiente e o operador H pode ser diferente de H_0 . Uma das equações mais usadas para o oscilador harmónico dissipativo tem suas origens nos problemas de óptica quântica. Ele corresponde a $H = H_0$ e

$$\mathcal{L}\hat{\rho} = \lambda(\bar{n} + 1) (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \lambda\bar{n} (2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger), \quad (5.4)$$

onde $\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_0, T) = (e^\beta - 1)^{-1}$ é o número médio de quanta do reservatório à temperatura T ($\beta = \hbar\omega_0/k_B T$), k_B é a constante de Boltzmann e λ é a taxa de decaimento ou constante dissipativa, que depende da intensidade de interação entre \mathcal{R} e \mathcal{S} .

A generalização imediata do operador (5.4) é

$$\mathcal{L}\hat{\rho} = \sum_j \left(2\hat{\Phi}_j \hat{\rho} \hat{\Phi}_j^\dagger - \hat{\Phi}_j^\dagger \hat{\Phi}_j \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\Phi}_j^\dagger \hat{\Phi}_j \right), \quad (5.5)$$

onde $\hat{\Phi}_j$ são operadores lineares arbitrários (seu número também pode ser arbitrário). Geralmente, o lado direito da equação (5.5) é chamado *forma de Lindblad* [195], apesar de que esta estrutura geral, que preserva a hermiticidade, a normalização e a positividade de $\hat{\rho}$, tenha sido previamente descoberta por *vários* outros autores [196–198].

O operador de relaxação em termos de operadores \hat{x} e \hat{p} é usualmente associado ao problema de *movimento Browniano quântico*. A equação mestra mais geral, preservando a hermiticidade e a normalização do operador estatístico $\hat{\rho}$, que contém apenas formas bilineares de operadores \hat{x} e \hat{p} , corresponde à escolha

$$H = H_0 + \frac{\mu}{2} \{\hat{x}, \hat{p}\}, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{\rho} = & \frac{i\lambda}{2\hbar} [\hat{p}, \{\hat{x}, \hat{\rho}\}] - \frac{i\lambda}{2\hbar} [\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}\}] - \frac{D_p}{\hbar^2} [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}]] \\ & - \frac{D_x}{\hbar^2} [\hat{p}, [\hat{p}, \hat{\rho}]] + \frac{D_z}{\hbar^2} [\hat{x}, [\hat{p}, \hat{\rho}]] + \frac{D_z}{\hbar^2} [\hat{p}, [\hat{x}, \hat{\rho}]], \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde μ , λ , D_x , D_p e D_z podem ser, a princípio, funções arbitrárias do tempo. Algumas diferenças nas expressões explícitas podem ser removidas com o uso de identidades $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ e

$$[\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}\}] + [\hat{p}, \{\hat{x}, \hat{p}\}] + [\hat{p}, \{\hat{\rho}, \hat{x}\}] = 0. \quad (5.8)$$

O significado dos parâmetros λ e μ torna-se claro quando se olha para as equações assim como para os valores médios da coordenada e do momentum linear,

$$d\langle\hat{x}\rangle/dt = \langle\hat{p}\rangle/m + (\mu - \lambda)\langle\hat{x}\rangle, \quad (5.9)$$

$$d\langle\hat{p}\rangle/dt = -m\omega_0^2\langle\hat{x}\rangle - (\mu + \lambda)\langle\hat{p}\rangle. \quad (5.10)$$

A escolha $\lambda = \mu$ elimina o termo de fricção da equação para $d\langle\hat{x}\rangle/dt$. Este caso especial foi discutido por Dekker em [192]. O superoperador (5.4) é um caso particular de (5.7) para

$$D_p = \frac{\lambda}{2}m\hbar\omega_0 \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right) = (m\omega_0)^2 D_x \quad (5.11)$$

$$D_z = \mu = 0. \quad (5.12)$$

A equação mestra operacional (5.7), escrita em termos da função de Wigner,

$$W(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{-2ipy/\hbar} \langle x - y | \hat{\rho}(t) | x + y \rangle, \quad (5.13)$$

adquire uma forma simples de equação de Fokker–Planck,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p} ([m\omega_0^2 x + (\mu + \lambda)p] W) - \frac{\partial}{\partial x} ([p/m + (\mu - \lambda)x] W) \\ &+ D_p \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} + D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2D_z \frac{\partial^2 W}{\partial p \partial x}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Portanto, vemos que os termos proporcionais a D_x , D_p , e D_z na equação (5.7) descrevem a difusão no espaço de fase.

Introduzindo a variável vetorial no espaço de fase $\mathbf{q} = (x, p)$, a equação (5.14) pode ser escrita de uma maneira mais compacta como

$$\frac{\partial W(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q_i} [(\mathbf{A}\mathbf{q})_i W] + D_{ij} \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}, \quad (5.15)$$

onde a soma sobre índices repetidos é subentendida e

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} \mu - \lambda & m^{-1} \\ -m\omega_0^2 & -(\mu + \lambda) \end{array} \right\| \quad (5.16)$$

é a matriz de *deslocamento*, que governa a evolução de momentos estatísticos de primeira ordem (valores médios),

$$d\langle \mathbf{q} \rangle / dt = \mathbf{A} \langle \mathbf{q} \rangle. \quad (5.17)$$

Introduzindo as covariâncias $\sigma_{jk} = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_j \hat{q}_k + \hat{q}_k \hat{q}_j \rangle - \langle \hat{q}_j \rangle \langle \hat{q}_k \rangle$, pode-se verificar que ambas as equações, (5.14) e (5.15), resultam na seguinte equação para a matriz simétrica de *covariância* $\mathbf{M} \equiv \|\sigma_{jk}\|$:

$$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{M}\tilde{\mathbf{A}} + 2\mathbf{D}, \quad (5.18)$$

onde $\tilde{\mathbf{A}}$ é a matriz transposta de \mathbf{A} e $\mathbf{D} \equiv \|D_{ij}\|$ é a matriz simétrica de difusão ($D_{12} = D_{21} = D_z$).

Escrevendo os operadores $\hat{\Phi}_j$ na equação (5.5) como combinações lineares de operadores \hat{x} e \hat{p} ,

$$\hat{\Phi}_j = \alpha_j \hat{x} + \beta_j \hat{p}, \quad (5.19)$$

verifica-se que o operador (5.7) pode ser escrito na forma (5.5), desde que as seguintes condições sejam satisfeitas [199]:

$$\sum_j |\beta_j|^2 = D_x / \hbar^2 \quad (5.20)$$

$$\sum_j |\alpha_j|^2 = D_p / \hbar^2, \quad (5.21)$$

$$\sum_j \alpha_j^* \beta_j = i\lambda / (2\hbar) - D_z / \hbar^2. \quad (5.22)$$

Tendo em vista a desigualdade de Schwartz,

$$\sum_j |\beta_j|^2 \sum_j |\alpha_j|^2 \geq \left| \sum_j \alpha_j^* \beta_j \right|^2, \quad (5.23)$$

a condição de compatibilidade de equações (5.21) e (5.22) é a desigualdade

$$D_p D_x - D_z^2 \geq (\hbar\lambda/2)^2 \equiv [\hbar \text{Tr}(\mathbf{A})/4]^2. \quad (5.24)$$

A condição (5.24), que foi deduzida e discutida sob diferentes pontos de vista nas referências [101, 183–187, 199–201], garante que a positividade do operador estatístico seja preservada para todos os tempos e para qualquer estado inicial fisicamente admissível. Esta é uma condição necessária e suficiente (junto com condições $D_x \geq 0$ e $D_p \geq 0$) de reducibilidade do operador (5.7) à forma de Lindblad (5.5) [183, 184]. Note que o

parâmetro μ não entra na condição (5.24), porque ele está relacionado com uma adição ao Hamiltoniano e não à parte não-unitária do superoperador de Liouville total. Portanto, a sua presença nas forças de fricção nas equações (5.9) e (5.10) não é relevante para a existência ou não da representação de Lindblad da equação mestra.

Algumas equações mestras com coeficientes independentes do tempo, consideradas frequentemente, tais como, por exemplo, a equação de Agarwal [202] (com $\lambda = \mu$, $D_p = 2m\lambda\omega_0\bar{n}$ e $D_x = D_z = 0$) ou seu caso particular, conhecido como equação de Caldeira–Leggett [203] (com $\lambda = \mu$, $D_p = 2m\lambda k_B T$ e $D_x = D_z = 0$), não satisfazem a condição (5.24). Conseqüentemente, estas equações podem resultar em violações da positividade do operador estatístico (que é equivalente à violação das relações de incerteza [180, 184, 194, 199]) nos estágios intermediários da evolução, se elas forem aplicadas fora do seu domínio de validade (que corresponde ao limite de altas temperaturas, $k_B T \gg \hbar\omega_0$).

Por outro lado, foi mostrado em [204–208] que a função de Wigner de um sistema \mathcal{S} interagindo com um reservatório \mathcal{R} satisfaz à equação (5.15) *para todos os tempos*, se, (I) o Hamiltoniano total do sistema $\mathcal{S} + \mathcal{R}$ é uma forma quadrática arbitrária com respeito às coordenadas e momenta (em particular, o Hamiltoniano de interação pode ser uma forma bilinear arbitrária com respeito às coordenadas de \mathcal{S} e \mathcal{R}); (II) o operador inicial estatístico do sistema total é fatorizado, $\hat{\rho}_{tot} = \hat{\rho}_S \hat{\rho}_R$, onde $\hat{\rho}_R$ é um estado *Gaussiano* arbitrário (isto é, não necessariamente térmico, ele pode ser comprimido, por exemplo). No entanto, neste caso, (a) as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{D} são *explicitamente dependentes do tempo* (o que é interpretado às vezes como uma manifestação de evolução *não-Markoviana* [172, 209, 210]), e (b) a condição (5.24) (ou suas generalizações multidimensionais [183, 184]) podem ser violadas. Isto não significa que o estado $\hat{\rho}_S(t)$ pode tornar-se não-físico. Neste caso, simplesmente, o sistema \mathcal{S} não passa por todos os possíveis estados mistos no processo de evolução, mas se move apenas ao longo de algumas trajetórias específicas no espaço de Hilbert [171, 204, 211].

Matrizes de difusão e de deslocamento independentes do tempo ocorrem apenas assintoticamente, para $t \rightarrow \infty$ (fisicamente, após algum tempo característico determinado pelas propriedades de \mathcal{R}). Além do mais, os conjuntos de coeficientes de difusão satisfazendo a inequação (5.24) podem ser obtidos apenas para formas específicas

do Hamiltoniano de interação entre \mathcal{R} e \mathcal{S} . Por exemplo, no caso de um reservatório térmico, o superoperador de relaxação (5.3) pode ser deduzido apenas se no termo de interação for feita a *Aproximação de Onda Girante*, que resulta na matriz de deslocamento (5.16) com $\mu = 0$ [207]. O superoperador (5.7), provido com coeficientes de difusão arbitrários independentes do tempo, pode ser deduzido com o uso de reservatórios comprimidos [168, 212]. O nosso objetivo principal neste trabalho consiste em encontrar os conjuntos de coeficientes de deslocamento e de difusão (possivelmente dependentes do tempo) que podem ser obtidos usando a abordagem de quantização de equações clássicas equipadas com duas forças estocásticas.

5.3 De forças clássicas estocásticas a equações mestras quânticas

5.3.1 Tratamento clássico

Uma equação de movimento típica para uma partícula de massa m sujeita a uma força de fricção linear em uma dimensão é

$$\ddot{x} + \dot{\Gamma}_t \dot{x} + \frac{1}{m} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.25)$$

onde $V(x, t)$ é um potencial com dependência temporal e Γ_t é uma função dissipativa dependente do tempo (DT). Embora a equação (5.25) descreve um sistema não-conservativo, há muito tempo (ver por exemplo [213, 214]) é sabido que ela pode ser deduzida de uma função Lagrangiana. A mais simples é conhecida como Lagrangiana de *Bateman–Caldirola–Kanai* [215, 216], que é escrita como

$$\mathbb{L}(x, \dot{x}, t) = \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t) \right) e^{\Gamma t}. \quad (5.26)$$

Aqui vamos considerar uma simples generalização da forma (5.26),

$$\mathbb{L}(x, \dot{x}, t) = \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t) + x F_t + \dot{x} G_t \right) e^{\Gamma t}, \quad (5.27)$$

introduzindo duas forças generalizadas arbitrárias DT, F_t e G_t , associadas à posição x e à velocidade \dot{x} . O momentum canônico é

$$P \equiv \partial \mathbb{L} / \partial \dot{x} = e^{\Gamma t} (m \dot{x} + G_t) \quad (5.28)$$

e definimos o momentum físico como

$$p \equiv m\dot{x} + G_t = Pe^{-\Gamma t}. \quad (5.29)$$

A Hamiltoniana associada à função Lagrangiana (5.27) é

$$\begin{aligned} H(t) &= P\dot{x} - \mathbb{L} \\ &= \frac{P^2}{2m}e^{-\Gamma t} + [V(x,t) - xF_t]e^{\Gamma t} - PG_t/m + G_t^2 \exp(\Gamma t)/2m. \end{aligned} \quad (5.30)$$

As equações de Hamilton para coordenada e momentum canônico são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \partial H(t)/\partial P = (Pe^{-\Gamma t} - G_t)/m, \\ \dot{P} &= -\partial H(t)/\partial x = (-\partial V(x,t)/\partial x + F_t)e^{\Gamma t}, \end{aligned}$$

enquanto que para o momentum físico obtém-se

$$\dot{x} = p/m - G_t/m \quad (5.31)$$

$$\dot{p} = -\partial V(x,t)/\partial x + F_t - p\dot{\Gamma}_t, \quad (5.32)$$

ou, em termos de uma única equação de segunda ordem (equação de Newton),

$$\ddot{x} + \dot{\Gamma}_t \dot{x} + \frac{1}{m} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{m} (F_t - \dot{\Gamma}_t G_t - \dot{G}_t), \quad (5.33)$$

onde o lado direito contém apenas termos DT.

Vemos que na mecânica clássica, onde a coordenada x é a única variável independente (já que p ou P são funções de \dot{x}), a presença de dois termos, $-xF_t e^{\Gamma t}$ e $-PG_t/m$, na Hamiltoniana (5.30) é redundante, porque a dinâmica depende apenas da combinação $\mathcal{F}(t) = F_t - \dot{\Gamma}_t G_t - \dot{G}_t$. Uma escolha usual é $G_t \equiv 0$ e $F_t = \mathcal{F}(t)$. Mas pode-se obter a mesma dinâmica escolhendo $F_t \equiv 0$ e encontrando a função G_t da equação $-(\dot{\Gamma}_t G_t + \dot{G}_t) = \mathcal{F}(t)$, cuja solução é

$$G_t \equiv Ke^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma t} \int^t e^{\Gamma \tau} \mathcal{F}(\tau) d\tau, \quad (5.34)$$

onde K é uma constante arbitrária.

No entanto, ambas as forças, F_t e G_t , são importantes no caso quântico, por causa da propriedade de não-comutatividade de posição e momentum. Estas forças geram contribuições diferentes à evolução dinâmica do estado do sistema, como mostraremos a seguir.

5.3.2 Tratamento quântico

Tendo a função Hamiltoniana (5.30), podemos tentar quantizar o sistema clássico dissipativo, transformando-a em um operador através de regras usuais e escrevendo a equação de Schrödinger dependente do tempo com o operador Hamiltoniano quântico. Esta idéia foi formulada pela primeira vez por Caldirola e Kanai na década de 1940 [216], e desde aquela época foi desenvolvida ou criticada por muitos autores (ver, por exemplo, Refs. [179,217]). É conhecido agora que tal abordagem simplificada sofre de muitas falhas. Por exemplo, o Hamiltoniano de Caldirola e Kanai é explicitamente dependente do tempo, portanto ele se assemelha mais a um sistema com massa dependente do tempo, de que de um sistema genuinamente dissipativo. Além disso, o problema de encontrar o Hamiltoniano para dadas equações de movimento não tem uma solução única, e praticamente todos os Hamiltonianos daquele tipo têm alguma patologia [213,214]. Mas o defeito físico principal do esquema de Caldirola e Kanai é que ele implica que o estado quântico do sistema permanece puro durante a sua evolução, porque campos clássicos regulares interagindo com um sistema quântico \mathcal{S} não mudam o seu conteúdo informativo à medida que o tempo passa, mesmo quando a energia não é conservada. Por outro lado, é conhecido que a dissipação está conectada à perda de pureza quântica, logo, temos que descrever o sistema em termos da matriz densidade ou representações equivalentes, por exemplo a função de Wigner. Mas como encontrar equações de movimento para a matriz densidade?

Uma resposta foi dada em [190–194]: deve-se partir não de equação de Schrödinger para a função de onda, mas da equação de von Neumann–Liouville para o operador estatístico, considerando F_t e G_t como *forças estocásticas* e postular médias. Estas médias resultam em uma redução de informação no sistema quântico \mathcal{S} . Assim, a irreversibilidade é verificada e a entropia do sistema muda devido ao caráter aleatório dos campos clássicos. Entretanto, se for usada uma *única* força estocástica obtém-se equações que nem sempre preservam a propriedade de positividade do operador estatístico. O nosso objetivo aqui é mostrar que equações consistentes, satisfazendo todos os princípios da Mecânica Quântica, podem ser deduzidas se forem introduzidas duas forças clássicas estocásticas, em vez de apenas uma, além de uma função dissipativa regular.

A equação para a evolução temporal da matriz densidade que segue da

Hamiltoniana (5.30) quantizada é

$$\frac{d\hat{\rho}_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_{ef}(t) + \hat{W}(\hat{x}, \hat{P}, t), \hat{\rho}_t \right], \quad (5.35)$$

onde

$$\hat{H}_{ef}(t) = e^{-\Gamma t} \hat{P}^2 / (2m) + V(\hat{x}, t) e^{\Gamma t} \quad (5.36)$$

e

$$\hat{W}(\hat{x}, \hat{P}, t) = -e^{\Gamma t} \hat{x} F_t - \hat{P} G_t / m. \quad (5.37)$$

$\hat{W}(\hat{x}, \hat{P}, t)$ é um operador estocástico, já que F_t e G_t são forças estocásticas por construção. O termo DT $G_t^2 \exp(\Gamma t) / 2m$ foi descartado em $\hat{H}_{ef}(t)$, pois ele não contribui para as equações de movimento.

Usando o operador de evolução unitária \hat{U}_t correspondente ao Hamiltoniano efetivo livre (5.36),

$$i\hbar d\hat{U}_t/dt = \hat{H}_{ef}(t) \hat{U}_t, \quad (5.38)$$

fazemos a transformação no operador estatístico

$$\hat{\rho}_t = \hat{U}_t \tilde{\rho}_t \hat{U}_t^\dagger, \quad (5.39)$$

que remove o termo $\hat{H}_{ef}(t)$ da equação (5.35):

$$i\hbar d\tilde{\rho}_t/dt = \left[\tilde{W}(\tilde{x}_t, \tilde{P}_t, t), \tilde{\rho}_t \right] \equiv \left[\tilde{W}(t), \tilde{\rho}_t \right], \quad (5.40)$$

e onde

$$\tilde{x}_t = U_t^\dagger \hat{x} U_t \quad (5.41)$$

$$\tilde{P}_t = U_t^\dagger \hat{P} U_t. \quad (5.42)$$

Uma solução formal para equação (5.40) é

$$\tilde{\rho}_t = \hat{\rho}_0 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \left[\tilde{W}(t'), \tilde{\rho}_{t'} \right]. \quad (5.43)$$

Iterando a equação (5.43) e derivando com respeito ao tempo, obtemos a equação

$$\frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\tilde{W}(t), \hat{\rho}_0 \right] + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt' \left[\tilde{W}(t), \left[\tilde{W}(t'), \tilde{\rho}_{t'} \right] \right] \quad (5.44)$$

que por enquanto é exata. Seu conteúdo físico é o mesmo que o da equação (5.40). Usando o lado direito de (5.43) para $\tilde{\rho}_t$ e inserindo-o em (5.44) recursivamente, obtemos uma série infinita

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\tilde{W}(t), \hat{\rho}_0 \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{k+1}} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \left[\tilde{W}(t), \left[\tilde{W}(t_1), \cdots \left[\tilde{W}(t_k), \hat{\rho}_0 \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

O próximo passo é realizar média sobre as forças estocásticas na equação (5.45). Nós escolhemos as funções clássicas estocásticas F_t e G_t como *Gaussianas* com valores médios nulos, $\overline{F_t} = \overline{G_t} = 0$, e que elas sejam *delta*-correlacionadas, com funções DT (ou seja, não é um processo estacionário)

$$\overline{F_{t_1} F_{t_2}} = 2A_{t_1} \delta(t_1 - t_2) \quad (5.46)$$

$$\overline{G_{t_1} G_{t_2}} = 2m^2 B_{t_1} \delta(t_1 - t_2) \quad (5.47)$$

$$\overline{F_{t_1} G_{t_2}} = 2m C_{t_1} \delta(t_1 - t_2), \quad (5.48)$$

com A_t , B_t e C_t funções regulares DT. Além disso, levamos em conta as propriedades importantes de processos estocásticos Gaussianos, precisamente, $\overline{J_{t_1} J_{t_2} \cdots J_{t_{2n+1}}} = 0$ para um número ímpar de termos (J_t representa F_t ou G_t), enquanto que para um número par

$$\overline{J_{t_1} J_{t_2} \cdots J_{t_{2n}}} = \sum_{\text{todos os pares}} \overline{J_{t_i} J_{t_j}} \times \overline{J_{t_k} J_{t_l}}, \quad (5.49)$$

onde a média é feita sobre ensembles. Como operadores estocásticos $\tilde{W}(t_k)$ são combinações lineares de \tilde{x}_{t_k} e \tilde{P}_{t_k} , apenas os termos com números pares de operadores $\tilde{W}(t_k)$ sobrevivem após efetuar as médias na equação (5.45), portanto chegamos a uma série contendo apenas potências pares de \hbar :

$$\frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2k}} \hat{\chi}_{2k}(t). \quad (5.50)$$

O primeiro termo desta expansão consiste de uma soma de quatro integrais contendo duplos comutadores,

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_2(t) &= \int_0^t dt' e^{\Gamma t + \Gamma t'} \overline{F_t F_{t'}} [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_{t'}, \hat{\rho}_0]] + m^{-1} e^{\Gamma t} \int_0^t dt' \overline{F_t G_{t'}} [\tilde{x}_t, [\tilde{P}_{t'}, \hat{\rho}_0]] \\ &+ m^{-1} \int_0^t dt' e^{\Gamma t'} \overline{G_t F_{t'}} [\tilde{P}_t, [\tilde{x}_{t'}, \hat{\rho}_0]] + m^{-2} \int_0^t dt' \overline{G_t G_{t'}} [\tilde{P}_t, [\tilde{P}_{t'}, \hat{\rho}_0]], \end{aligned}$$

que podem ser calculados [218], resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_2(t) = & A_t e^{2\Gamma t} [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_t, \hat{\rho}_0]] + B_t \left[\tilde{P}_t, \left[\tilde{P}_t, \hat{\rho}_0 \right] \right] \\ & + C_t e^{\Gamma t} \left(\left[\tilde{x}_t, \left[\tilde{P}_t, \hat{\rho}_0 \right] \right] + \left[\tilde{P}_t, [\tilde{x}_t, \hat{\rho}_0] \right] \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Continuando estes passos na equação (5.50), vemos que a estrutura do termo $\hat{\chi}_2(t)$ é repetida para cada termo, resultando finalmente na substituição do operador inicial $\hat{\rho}_0$ pelo operador dependente do tempo $\tilde{\rho}_t$. Desta forma, obtemos a seguinte equação exata governando a evolução temporal do operador estatístico, amostrado sobre forças estocásticas [218]:

$$\frac{d\hat{\rho}_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_{ef}(t), \hat{\rho}_t \right] - \frac{1}{\hbar^2} \left(A_t e^{2\Gamma t} [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}_t]] + B_t [\hat{P}, [\hat{P}, \hat{\rho}_t]] + 2C_t e^{\Gamma t} [\hat{x}, [\hat{P}, \hat{\rho}_t]] \right). \quad (5.52)$$

Gostaríamos de enfatizar que nenhum truncamento de termos de ordem mais alta foi feito na dedução da equação (5.52), ela é válida para quaisquer intensidades de forças DT (coeficientes A_t, B_t, C_t). Um possível termo adicional, proporcional a $[\hat{P}, [\hat{x}, \hat{\rho}_t]]$ no lado direito da equação (5.52), é redundante devido à identidade $[\hat{x}, [\hat{P}, \hat{\rho}_t]] = [\hat{P}, [\hat{x}, \hat{\rho}_t]]$. Se tivéssemos suposto apenas uma força F_t , os coeficientes B_t e C_t seriam nulos. Equação (5.52) é estruturalmente análoga àquela obtida por *Hu, Paz e Zhang* [206], embora os coeficientes DT da última foram deduzidos supondo um reservatório feito de osciladores harmônicos, enquanto que o nosso é puramente fenomenológico. Abaixo vamos mostrar que as funções de Wigner associadas são idênticas às da referência [206], portanto a equação (5.52) contém os efeitos não-Markovianos (no sentido de Refs. [204, 206, 209, 210], isto é, coeficientes de difusão e deslocamento DT). Na nossa dedução, limites como temperatura alta ou baixa e acoplamento forte ou fraco não fazem sentido, porque todos os efeitos do meio sobre o sistema dependem dos valores adotados dos quatro parâmetros DT. Em particular, para os coeficientes A_t, B_t e C_t , independentes do tempo, recupera-se a equação mestra no limite Markoviano.

A equação (5.52) não pode ser identificada imediatamente com equação (5.7), devido aos significados diferentes das variáveis \hat{p} (momentum físico) em (5.7) e \hat{P} (momentum canônico) em (5.52), além de presença de fatores $\exp(\Gamma t)$ e $\exp(2\Gamma t)$. No entanto, é fácil mostrar que estas equações são fisicamente equivalentes, pois elas fornecem a mesma função de Wigner para coordenadas físicas mapeadas.

As equações de movimento para primeiros e segundos momentos de variáveis canônicas [os valores médios são definidos por $\langle \hat{A} \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}_t)$] são

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = e^{-\Gamma t} \langle \hat{P} \rangle / m \quad (5.53)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{P} \rangle = \langle -\partial V / \partial x \rangle e^{\Gamma t} \quad (5.54)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x}^2 \rangle = e^{-\Gamma t} \langle \{\hat{x}, \hat{P}\} \rangle / m + 2B_t \quad (5.55)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{P}^2 \rangle = -\langle \{\hat{P}, \partial \hat{V} / \partial x\} \rangle e^{\Gamma t} + 2A_t e^{2\Gamma t} \quad (5.56)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \{\hat{x}, \hat{P}\} \rangle = \frac{2}{m} \langle \hat{P}^2 \rangle e^{-\Gamma t} - 2 \langle \hat{x} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \rangle e^{\Gamma t} + 4C_t e^{\Gamma t}, \quad (5.57)$$

e pode-se notar que estas equações contêm os fatores exponenciais DT $\exp(\pm\Gamma t)$. Entretanto, passando para o momentum físico (5.29), ficamos livres destes fatores:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle / m \quad (5.58)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -\langle \partial \hat{V} / \partial \hat{x} \rangle - \dot{\Gamma}_t \langle \hat{p} \rangle \quad (5.59)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x}^2 \rangle = m^{-1} \langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle + 2B_t \quad (5.60)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p}^2 \rangle = -\langle \{\hat{p}, \partial \hat{V} / \partial \hat{x}\} \rangle - 2\dot{\Gamma}_t \langle \hat{p}^2 \rangle + 2A_t \quad (5.61)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle = \frac{2}{m} \langle \hat{p}^2 \rangle - 2 \langle x \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}} \rangle - \dot{\Gamma}_t \langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle + 4C_t. \quad (5.62)$$

Comparando as equações (5.16) e (5.17) com (5.58) e (5.59), vemos que elas coincidem se $\hat{V}(x) = m\omega_0^2 \hat{x}^2 / 2$, $\Gamma_t = 2\lambda t$, e $\mu = \lambda$. Complementarmente, comparando as equações para as covariâncias do momentum físico e da coordenada, pode-se verificar que elas satisfazem à equação matricial (5.18), se os coeficientes de difusão são identificados como

$$A_t = D_x(t), \quad B_t = D_p(t), \quad C_t = D_z(t). \quad (5.63)$$

A seguir, vamos mostrar a equivalência entre a função de Wigner $W^P(\mathbf{Q}, t)$ no espaço de fase canônico, $\mathbf{Q} = (x, P)$, com a função de Wigner no espaço de fase de variáveis físicas, $W(\mathbf{q}, t)$. $W^P(\mathbf{Q}, t)$ é governada pela equação de Fokker–Planck (5.15) com matrizes de deslocamento e difusão DT,

$$\mathbf{A}^P = \left\| \begin{array}{cc} 0 & e^{-\lambda t} / m \\ -m\omega_0^2 e^{\lambda t} & 0 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{D}^P = \left\| \begin{array}{cc} B_t & C_t e^{\lambda t} \\ C_t e^{\lambda t} & A_t e^{2\lambda t} \end{array} \right\|. \quad (5.64)$$

A solução da equação (5.15) para a função $W(\mathbf{Q}, t)$ pode ser escrita como

$$W^P(\mathbf{Q}, t) = \int G^P(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', t) W^P(\mathbf{Q}', 0) d\mathbf{Q}', \quad (5.65)$$

onde o propagador é dado pela expressão [101, 175]

$$G^P(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', t) = \left(2\pi\sqrt{\det \mathbf{N}(t)}\right)^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{R}^P(t)\mathbf{Q}')\mathbf{N}^{-1}(t)(\mathbf{Q} - \mathbf{R}^P(t)\mathbf{Q}') \right]. \quad (5.66)$$

A matriz $\mathbf{N}(t)$ satisfaz à equação (5.18) (com matrizes \mathbf{A}^P e \mathbf{D}^P) com a condição inicial $\mathbf{N}(0) = 0$, enquanto que a matriz $\mathbf{R}^P(t)$ satisfaz à equação

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}^P = \mathbf{A}^P(t)\mathbf{R}^P$$

com a condição inicial $\mathbf{R}^P(0) = \mathbf{1}$ (matriz unitária).

As equações diferenciais para os três elementos diferentes da matriz simétrica $\mathbf{N}(t)$ tomam a forma

$$\begin{aligned} dN_{11}/dt &= 2e^{-\lambda t}N_{12}/m + 2B_t, \\ dN_{12}/dt &= e^{-\lambda t}N_{22}/m - m\omega_0^2e^{\lambda t}N_{11} + 2C_te^{\lambda t}, \\ dN_{22}/dt &= -2m\omega_0^2e^{\lambda t}N_{12} + 2A_te^{2\lambda t}. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de (5.63) e as mudanças

$$N_{22} = e^{2\lambda t}M_{22}, \quad N_{12} = e^{\lambda t}M_{12}, \quad N_{11} = M_{11}$$

obtemos as equações para elementos da matriz $\mathbf{M}(t)$ com matrizes de deslocamento e difusão independentes do tempo dadas pelas equações (5.16) e (5.18) com $\lambda = \mu$. Então, pode-se verificar que os propagadores nos espaços de fase canônico e físico estão relacionados de forma simples

$$G^P(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', t) = e^{-\lambda t}G(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t). \quad (5.67)$$

Portanto, como a função de Wigner inicial é a mesma para os dois sistemas de coordenadas, $W^P(\mathbf{Q}, 0) = W(\mathbf{q}, 0)$, a função de Wigner para qualquer instante do tempo torna-se

$$\begin{aligned} W^P(\mathbf{Q}, t) &= \int G^P(\mathbf{Q}; \mathbf{Q}', t) W^P(\mathbf{Q}', 0) d\mathbf{Q}' \\ &= \int e^{-\lambda t} G(x, p; x', p', t) W(x', p'; 0) e^{\lambda t} dx' dp' \\ &= \int G(x, p; x', p', t) W(x', p'; 0) dx' dp' \\ &= W(\mathbf{q}, t). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Assim, a equação mestra (5.52) é completamente equivalente à forma translacionalmente invariante ($\lambda = \mu$) da equação mestra do movimento Browniano quântico (5.3) com operadores (5.6) e (5.7).

5.4 Sumário e conclusões

Analizamos aqui a abordagem fenomenológica para construir uma equação mestra para descrever a evolução dinâmica irreversível e dissipativa do estado de um sistema quântico \mathcal{S} , sob a influência de um ambiente não especificado. Em contraste com a abordagem *microscópica*, que modela o meio como um reservatório \mathcal{R} , constituído de um número infinito de graus de liberdade (por exemplo osciladores harmônicos), a abordagem *fenomenológica* usa funções dissipativas e forças estocásticas. Mostramos que a equação de movimento de Newton para \mathcal{S} não muda ao se introduzir duas forças em vez de uma. Porém, quando fazemos a quantização do sistema, ambas as forças tornam-se importantes, contribuindo igualmente para a dinâmica. A partir de uma Lagrangiana contendo uma função dissipativa e duas forças estocásticas, deduzimos de primeiros princípios a equação mestra descrevendo o movimento Browniano quântico (de um oscilador harmônico) com dissipação translacionalmente invariante e o superoperador de relaxação bilinear mais geral (com respeito aos operadores de coordenada e momentum), que pode ser reduzida a uma equação diferencial equivalente, do tipo de Fokker–Planck. Porém, os parâmetros DT que aparecem nas forças não podem ser determinados no contexto da abordagem fenomenológica. Eles devem ser estabelecidos usando dados experimentais que reproduzem as propriedades físicas relevantes de \mathcal{S} ou de algumas outras considerações, tais como o requerimento de satisfazer a condição de positividade (5.24) ou de reproduzir as propriedades no equilíbrio térmico. Nesta direção, verificamos que a equação mestra deduzida em [204–206], contendo efeitos não-Markovianos (presentes nos seus coeficientes DT), está automaticamente incluída na nossa dedução, onde o meio ambiente é simulado por duas forças efetivas e uma função dissipativa, em vez de supor uma interação com um conjunto infinito de osciladores harmônicos.

Gostaríamos de enfatizar que, ao fazer a média sobre as forças estocásticas, não descartamos nenhum termo. Neste sentido, a dedução fenomenológica da equação

mestra é tão exata, quanto as outras abordagens [206]. É claro que isto aconteceu devido à escolha de funções de correlação na forma de funções *delta* (*ruído branco*), mesmo que multiplicadas por fatores de intensidade dependentes do tempo. Quando as funções de correlação, tais como $A(t_1, t_2)$, são funções arbitrárias da diferença dos tempos $t_1 - t_2$ (*ruído colorido*), a dissipação se torna não-Markoviana; a questão pertinente de que poderia acontecer neste caso mais geral requer um estudo separado. Certamente, a abordagem fenomenológica usada neste trabalho tem suas limitações, porque ela foi baseada em uma Lagrangiana efetiva. Portanto, apesar de ela funcionar razoavelmente bem para sistemas unidimensionais (ou multidimensionais isotrópicos), ela irá falhar para sistemas multidimensionais genéricos com vários coeficientes de dissipação independentes, porque nenhuma Lagrangiana efetiva pode ser encontrada para tais sistemas [213, 214]. Isto explica, também, porque apenas uma família de equações mestras (5.7), restritas pela condição $\lambda = \mu$ (dissipação translacionalmente invariante), pode ser obtida dentro do formalismo usado neste trabalho: não existem Lagrangianas efetivas para $\lambda \neq \mu$ [isto é, para duas forças de fricção nas equações clássicas de movimento (5.9) e (5.10)].

Capítulo 6

Processos não-estacionários em Eletrodinâmica Quântica de circuitos

6.1 Introdução

A interação entre a luz e a matéria é um dos processos fundamentais que ocorre na natureza, e na sua forma mais elementar ele acontece quando um único átomo interage com um único fóton. Alcançar este limite foi o maior objetivo da pesquisa em física atômica e óptica quântica durante várias décadas, e resultou no surgimento da área de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EDQC) [126, 219, 220]. Recentemente, foram feitos diversos experimentos que realizaram o acoplamento de um sistema supercondutor de dois níveis (que faz o papel de um átomo artificial) a uma cavidade formada por um ressonador de linha de transmissão sobre um *chip* supercondutor, como será explicado na seção 6.3.1. Foi mostrado que o limite de acoplamento forte pode ser alcançado em um sistema de estado sólido, e a interação coerente entre um átomo artificial de dois níveis e um único fóton na frequência de microondas foi observada experimentalmente. Esta realização de EDQC em sistemas supercondutores foi batizada de Eletrodinâmica Quântica de circuitos (EDQc): uma nova área de pesquisa que cria muitas possibilidades singulares para estudar a interação forte entre a luz e a matéria. Ademais, em EDQc é possível engendrar e manipular as propriedades do átomo artificial, o ressonador e a intensidade de interação entre os dois (a frequência de Rabi de vácuo) durante a fabricação, ou *in situ* [221–223]. Esta arquitetura é atualmente explorada para o processamento de

informação quântica e para o estudo de novas abordagens para geração de fótons únicos, bem como outros estados não-clássicos da luz, e a sua detecção.

Neste capítulo vamos estudar o sistema de EDQc *não-estacionário*, em que a frequência de transição do átomo artificial, ou o acoplamento átomo-campo, tem uma pequena modulação temporal *periódica*, imposta por uma ação externa. O sistema formado pelo átomo artificial acoplado a um modo na cavidade é descrito pelo Hamiltoniano de *Rabi*. Em base nisto vamos mostrar que no regime dispersivo, quando a periodicidade da modulação é ajustada às “ressonâncias”, a dinâmica do sistema apresenta os comportamentos de efeito Casimir dinâmico [224], o de modelo de Jaynes-Cummings e o de Anti-Jaynes-Cummings, e pode ser descrito pelos correspondentes Hamiltonianos efetivos. No regime átomo-campo ressonante, sob a respectiva “ressonância”, a dinâmica é similar àquela verificada para um átomo de dois níveis estacionário em uma cavidade vibrante, e estados emaranhados átomo-campo com dois fótons podem ser criados a partir de vácuo. Assim, demonstramos que um análogo do efeito Casimir dinâmico pode ser simulado em EDQc e vários fótons, bem como estados emaranhados, podem ser gerados a partir de vácuo devido ao termo “contragirante” no Hamiltoniano de Rabi.

Além disso, vamos considerar brevemente a arquitetura de EDQc, na qual o parâmetro de acoplamento entre o átomo e o campo, a frequência atômica, ou ambos, têm uma pequena modulação temporal *não-periódica*, prescrita externamente. Em particular, vamos presumir que a modulação é dada por uma soma de duas funções harmônicas com frequências e amplitudes diferentes. Vamos deduzir um Hamiltoniano efetivo, que descreve aproximadamente a dinâmica do sistema no regime dispersivo, e mostrar que a geração de fótons a partir do vácuo é possível para frequências de modulação ajustadas precisamente.

6.2 Eletrodinâmica Quântica de cavidades

A *Eletrodinâmica quântica de cavidades* (EDQC) [219,220,225] é uma área fundamental de pesquisa em óptica quântica, pois permite a investigação de problemas atuais em medição quântica, interação átomo-campo e a decoerência, além de possibilitar, como aplicação, a geração de uma fonte de luz comprimida e a construção de portas lógicas quânticas,

entre outras. O esquema é o seguinte: um único átomo é posto entre dois espelhos que formam uma cavidade, que confina o campo eletromagnético e aumenta a intensidade de interação entre o átomo e o campo [220] relativamente ao espaço livre. EDQC pode ser caracterizada pela *intensidade de interação*, g , e a *dessintonia* entre o átomo (com frequência Ω) e o campo (com frequência ω),

$$\Delta \equiv \Omega - \omega, \quad (6.1)$$

resultando em dois regimes qualitativamente diferentes.

O *regime ressonante* ocorre quando a dessintonia é menor que a intensidade de interação, $|\Delta| < |g|$. Neste regime, as excitações reais podem ser trocadas entre o átomo e o campo, resultando em fenômenos como emissão espontânea aumentada (o *efeito Purcell* [226]). O regime ressonante *forte* em EDQC é alcançado quando a intensidade de acoplamento g é maior que o valor inverso do tempo de trânsito do átomo pela cavidade, $1/T$, e as taxas de decaimento do átomo, γ , e da cavidade, κ . Neste regime, o fóton e o átomo acoplam-se coerentemente, e um único fóton é absorvido e é reemitido periodicamente com a taxa $2g$ (*oscilações de Rabi de vácuo* [220]). O acoplamento forte foi estudado tradicionalmente em sistemas atômicos usando átomos alcalinos [227], átomos de Rydberg [126], ou íons [228, 229]. Recentemente, o acoplamento forte em sistemas de estado sólido foi alcançado usando *pontos quânticos* semicondutores [230–235] e *circuitos supercondutores* [221, 236, 237] acoplados a ressonadores com alto fator de qualidade. O regime ressonante forte em EDQC é interessante porque o sistema conjunto torna-se anarmônico [238–240], permitindo experimentos em óptica quântica não-linear e informação quântica a nível de um único fóton.

No regime *dispersivo* (não-ressonante), a dessintonia entre o átomo e o campo é maior que o acoplamento, $|\Delta| \gg |g|$, e apenas a troca de *fótons virtuais* é permitida no caso estacionário, mantendo o átomo e o fóton aproximadamente separáveis (não-emaranhados) [19, 220, 225]. O átomo (fóton) adquire agora apenas uma pequena componente fotônica (atômica) de magnitude $(g/\Delta)^2$, e um deslocamento (*shift*) de frequência associado, $2\chi = 2g^2/\Delta$. Neste caso, as aproximações dispersiva e a de onda girante podem ser feitas [241], e o sistema pode ser descrito (até ordem quadrática no parâmetro

pequeno $|g/\Delta|$) pela versão quântica do Hamiltoniano do *efeito Stark a.c.* [125, 220]

$$H = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2) + \hbar\Omega\sigma_z/2 + \hbar\chi (a^\dagger a + 1/2) \sigma_z. \quad (6.2)$$

O primeiro termo descreve o modo do campo eletromagnético como um oscilador harmônico de frequência ω , o segundo descreve um átomo com frequência de transição Ω (ou *qubit*) como um sistema de dois níveis. O terceiro termo representa a interação dispersiva, que pode ser vista tanto como um deslocamento da frequência da cavidade dependente do estado atômico, quanto um deslocamento da frequência atômica dependente do número de fótons (deslocamentos *Stark* e *Lamb*). Esta interação significa que quando o estado atômico é modificado, a energia $2\hbar\chi$ é adicionada ou removida de cada fóton na cavidade. Tal forma de interação é particularmente interessante porque ela comuta com os termos individuais do átomo e do campo, o que significa que é possível fazer medições *quânticas não-demolidoras* (QND) [10, 19] do estado atômico ao medir a mudança da fase do feixe de microondas incidente sobre a cavidade ou a mudança da transmissividade da cavidade em função de frequência do feixe incidente. Da mesma forma, pode-se medir o número de fótons na cavidade, fazendo o uso do deslocamento Stark atômico [125].

Analogamente ao regime ressonante forte, o limite *dispersivo forte* é alcançado quando o deslocamento Stark por fóton é muito maior que as taxas de decoerência ($2\chi > \gamma, \kappa, 1/T$), enquanto a demolição permanece pequena $(g/\Delta)^2 \ll 1$. O pequeno deslocamento da frequência dependente do número de fótons presente no regime *dispersivo fraco* torna-se tão grande, que cada número de fótons produz um pico significativo no espectro de transição atômica. Baseado nisso, já foram feitos experimentos **a)** no regime ressonante (baseados em oscilações de Rabi absorptivas), em que medições QND podem distinguir entre zero e um fóton [130]; **b)** com átomos de Rydberg no regime dispersivo forte, em que a função de Wigner foi medida com demolição $(g/\Delta)^2 = 0,06$, possibilitando, a princípio, 15 medições consecutivas [243]; **c)** em EDQc com acoplamento dispersivo forte com resolução de até 10 fótons, tendo demolição de $(g/\Delta)^2 < 0,01$, permitindo a princípio até ~ 100 medições QND consecutivas [242]. Assim, EDQc tornou-se um dos paradigmas na área de EDQC com átomos artificiais.

Um protocolo de medição QND consiste em excitar o átomo na frequência de Stark $\Omega_n = \Omega + 2n\chi$, seguida de uma medição independente do estado atômico. Se o átomo está excitado, o campo deve conter exatamente n fótons [221, 242]. Como o

número de fótons não é modificado neste processo, o protocolo QND pode ser repetido indefinidamente. Na prática, todas as medições reais têm algum efeito de demolição, que limita o número de repetições antes que o processo de medição mude a variável sendo medida (o número de fótons). Qualquer experimento em EDQC que use o acoplamento g fixo terá demolição devido a superposição das funções de onda atômica e fotônica, que gera a probabilidade $\sim (g/\Delta)^2$ de que a medição do número de fótons absorverá um fóton, ou uma medição do estado atômico induzirá uma transição atômica, demolindo o estado que está sendo medido [242]. Tal fonte de demolição poderia ser minimizada mudando adiabaticamente a intensidade do acoplamento, como acontece no caso de átomos de Rydberg ou átomos alcalinos passando lentamente pela cavidade [126].

6.3 Eletrodinâmica Quântica de circuitos

Em EDQc, a interação átomo-campo é implementada usando o átomo artificial supercondutor, conhecido em inglês como "*Cooper Pair Box*" (CPB) [125, 244, 305], escolhido devido ao seu momento de dipolo grande, acoplado capacitivamente a um ressonador unidimensional de linha de transmissão [221, 245]. O volume reduzido do ressonador unidimensional, se comparado com aquele de uma cavidade tridimensional de comprimento de onda similar λ ($w^2\lambda \approx 10^{-6} \text{ cm}^3$ versus $\lambda^3 \approx 1 \text{ cm}^3$, onde w é a dimensão transversal do ressonador unidimensional), resulta na densidade de energia 10^6 vezes maior que em cavidades tridimensionais. Esta alta densidade de energia, junto com a capacitância geométrica grande (momento de dipolo) do CPB [125], resulta na intensidade de acoplamento $g/\omega \simeq 0,02$ (ou seja, 2% da energia total do fóton) [242]. Este acoplamento adimensional, 10^4 vezes maior que o atingido atualmente em sistemas atômicos, permite que os parâmetros de acoplamento em EDQc superem as altas taxas de decoerência presentes no ambiente de estado sólido [242], mantendo $g/\gamma_{ef} = 40$ oscilações de Rabi de vácuo possíveis no regime ressonante forte, onde $\gamma_{ef} = (\gamma + \kappa)/2$ é a taxa de decaimento conjunto do sistema átomo-campo. Uma comparação similar da interação dispersiva em relação à decoerência analisa o deslocamento Stark por fóton em relação ao decaimento de qubit, $2\chi/\gamma = 6$, e determina a resolução de picos de número de fótons. Comparando 2χ com o tempo de vida da cavidade podemos estimar o número máximo de picos

que poderiam, em princípio, ser resolvidos, $2\chi/\kappa = 70$, o que determina o contraste da medição de qubit através da cavidade. Estes valores colocam a EDQc bem no regime de acoplamento dispersivo forte e possibilitam medições QND com boa resolução.

A EDQc é descrita em detalhes na tese de doutorado de *D. I. Schuster* [246], então nas próximas 4 subseções vamos-nos limitar a descrever brevemente as propriedades fundamentais do ressonador, átomo, a interação átomo-campo e as técnicas de medição.

6.3.1 A cavidade

Nos últimos anos, efeitos quânticos coerentes foram observados em diversos circuitos supercondutores [236, 247, 248]. Um modo do campo eletromagnético na *cavidade supercondutora de linha de transmissão sobre um chip* [245] comporta-se como um oscilador harmónico e é descrito pelo Hamiltoniano

$$H_r = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2), \quad (6.3)$$

onde $\langle a^\dagger a \rangle$ é o número médio de fótons na cavidade e ω é a sua frequência. A uma temperatura de operação de $T < 100$ mK, muito menor que $\hbar\omega/k_B \approx 300$ mK, a cavidade está aproximadamente no seu estado fundamental, com uma ocupação térmica de $\bar{n} < 0,06$. As flutuações de vácuo na cavidade dão origem a uma voltagem r.m.s¹ $V_{rms} \approx 1 \mu\text{V}$, e o campo elétrico de vácuo $E_{rms} \approx 0,2$ V/m, algumas centenas de vezes maior que em cavidades tridimensionais usadas em EDQC com átomos reais [125]. Assim, o átomo artificial acopla-se ao campo na cavidade através de V_{rms} na cavidade, como mostrado a seguir.

Uma linha de transmissão de comprimento L , cuja seção transversal é muito menor que o comprimento de onda do sinal transmitido, pode ser aproximada por um modelo unidimensional [125]. Para frequências relativamente baixas ela pode ser descrita por um conjunto infinito de indutores, com cada nó acoplado capacitivamente a “terra”, como esquematizado na figura 6.1. Denotando a indutância por unidade de comprimento por l e a capacitância por unidade de comprimento por c , a Lagrangiana do circuito é

$$\mathbb{L} = \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(\frac{l}{2} \dot{j}^2 - \frac{1}{2c} q^2 \right), \quad (6.4)$$

¹Raiz quadrada do desvio quadrático médio (*root mean square*).

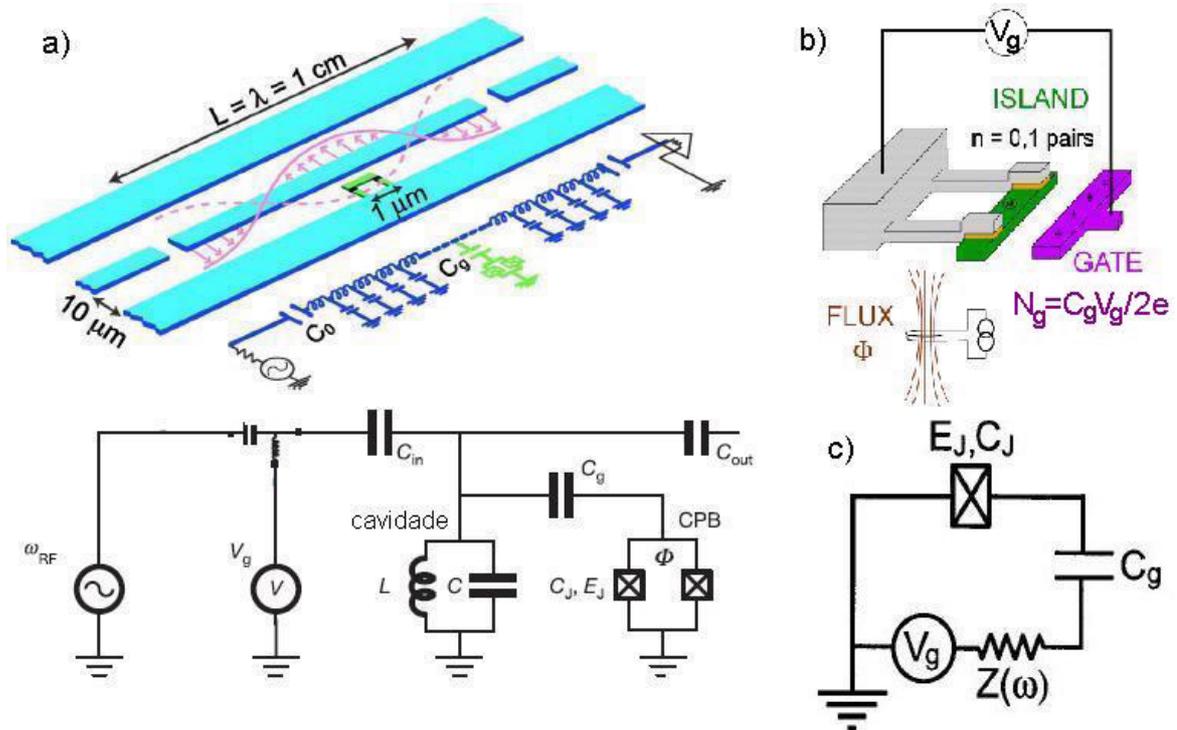


Figura 6.1: a) Esboço esquemático e representação em termos de elementos de circuito para EDQc. O ressonador 1D de linha de transmissão consiste de uma seção de onda inteira do guia de onda coplanar. CPB é posto entre as linhas supercondutoras e é acoplado capacitivamente ao traço central no ponto de máximo de voltagem, onde há uma interação forte de dipolo entre o qubit e um único fóton na cavidade. Sinais de entrada e saída são acoplados à cavidade via gaps capacitivos no traço central através de linhas de transmissão de 50Ω , que permitem a medição da amplitude e fase da transmitância da cavidade, e a introdução de pulsos *d.c.* e *r.f.* para manipular os parâmetros do sistema. b) CPB consiste de duas pequenas junções Josephson ($100 \text{ nm} \times 100 \text{ nm}$), configuradas em forma de laço para permitir o ajuste da energia Josephson efetiva através do fluxo magnético externo. c) Diagrama de circuito de CPB. A voltagem de entrada é conectada à ilha através da impedância do meio $Z(\omega)$. Imagem de *Schoelkopf Lab, Yale University*.

onde $j(x, t)$ e $q(x, t)$ são densidades locais de corrente e carga, respectivamente. Definindo a variável

$$\mathcal{Q}(x, t) = \int_{-L/2}^x dx' q(x', t) \quad (6.5)$$

e usando as condições de fronteira

$$\mathcal{Q}(-L/2, t) = \mathcal{Q}(L/2, t) = 0 \quad (6.6)$$

obtemos

$$\mathcal{Q}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k_o=1}^{k_{o,cutoff}} \phi_{k_o}(t) \cos \frac{k_o \pi x}{L} + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k_e=2}^{k_{e,cutoff}} \phi_{k_e}(t) \sin \frac{k_e \pi x}{L} \quad (6.7)$$

para modos ímpares (k_o) e pares (k_e), correspondendo ao primeiro e segundo termos. Portanto, para um comprimento finito L , a linha de transmissão age como um ressonador com frequências ressonantes

$$\omega_k = k \frac{\pi v}{L}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.8)$$

As frequências de corte ($k_{o,cutoff}$ e $k_{e,cutoff}$) são determinadas pelo fato de que a cavidade não é exatamente unidimensional, e podem ser calculadas usando técnicas da engenharia elétrica [246, 249].

Com a definição de ϕ_k dada pela equação (6.7), a Lagrangiana (6.4) torna-se

$$\mathbb{L} = \sum_k \left[\frac{l}{2} \dot{\phi}_k^2 - \frac{1}{2c} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \phi_k^2 \right]. \quad (6.9)$$

Promovendo a variável ϕ_k e o seu momentum canonicamente conjugado $\pi_k = l \dot{\phi}_k$ a operadores conjugados e introduzindo operadores bosônicos de criação e aniquilação a^\dagger e a satisfazendo a relação de comutação $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$, obtemos para o operador de voltagem na cavidade a expressão

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{Q}(x, t)}{\partial x} = - \sum_{k_o=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{k_o}}{LC}} \sin \left(\frac{k_o \pi x}{L} \right) [a_{k_o}(t) + a_{k_o}^\dagger(t)] \\ &+ \sum_{k_e=2}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{k_e}}{LC}} \cos \left(\frac{k_e \pi x}{L} \right) [a_{k_e}(t) + a_{k_e}^\dagger(t)]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Se o átomo artificial é fabricado no centro da cavidade, para baixas temperaturas ele é acoplado ao modo $k = 2$ do ressonador, que tem um antinó de voltagem no centro. A

voltagem r.m.s. na cavidade neste ponto é $V_{rms}^0 = \sqrt{\hbar\omega_2/cL}$, portanto a voltagem sentida pelo átomo é

$$v = V(0, t) = V_{rms}^0 (a + a^\dagger), \quad (6.11)$$

lembrando que a corresponde a a_2 e $\omega = \omega_2$ neste caso.

6.3.2 O átomo artificial

Entre os vários qubits supercondutores [250–252], o arranjo conhecido como “*Cooper Pair Box*” (CPB) é especialmente bem adaptado para EDQc, devido ao seu alto momento de dipolo elétrico efetivo d , que pode ser até 10^4 vezes maior que aquele em átomos alcalinos e até dez vezes maior de que em átomos de Rydberg típicos [125]. O CPB [253] consiste de uma ilha supercondutora conectada a um grande reservatório através de uma *junção Josephson* com energia E_J e capacitância C_J [244], como esquematizado na figura 6.1c. As propriedades do CPB são controladas pela voltagem na entrada do circuito, que tem a capacitância C_g em relação à ilha. Se o *gap* supercondutor é maior que a temperatura e a *energia de carga* $E_C = e^2/2C_\Sigma$ (onde $C_\Sigma = C_J + C_g$ é a capacitância total de CPB), o único grau de liberdade relevante é o número de *pares de Cooper* \mathcal{N} na ilha. O Hamiltoniano descrevendo a ilha supercondutora escrito na base de número de pares de Cooper é [254]

$$H_{CPB} = 4E_C \sum_{\mathcal{N}} (\mathcal{N} - N_g)^2 |\mathcal{N}\rangle\langle\mathcal{N}| - \frac{E_J}{2} \sum_{\mathcal{N}} (|\mathcal{N} + 1\rangle\langle\mathcal{N}| + |\mathcal{N}\rangle\langle\mathcal{N} + 1|), \quad (6.12)$$

onde $N_g = C_g V_g / 2e$ é a carga induzida adimensional, que representa a carga de polarização total injetada na ilha pela fonte de voltagem.

No “*regime de carga*” $4E_C \gg E_J$, restringindo a voltagem de entrada ao intervalo $N_g \in [0, 1]$, apenas um par de estados adjacentes de carga na ilha é relevante e o Hamiltoniano se reduz a uma matriz 2×2 [125]

$$H_{CPB} = -\frac{E_{el}}{2} \sigma_z - \frac{E_J}{2} \sigma_x, \quad (6.13)$$

onde $E_{el} = 4E_C (1 - 2N_g)$ e σ_z e σ_x são os operadores de Pauli de pseudo-spin. Neste caso, o CPB pode ser mapeado em um pseudo-spin $1/2$, com campos efetivos nas direções x e z . Ao substituir uma junção Josephson por um par de junções em paralelo, cada uma com energia $E_J/2$, o campo efetivo na direção x torna-se $E_J \cos(\pi\Phi/\Phi_0)/2$, onde Φ é o fluxo do campo magnético aplicado (ver a figura 6.1b) e Φ_0 é um *quantum de fluxo*,

$h/2e$ (h é a constante de Planck e e é a carga elétrica elementar) [125, 254]. Assim, ao aplicar o fluxo magnético Φ no circuito fechado formado pelo par das junções e mudando a voltagem de entrada V_g é possível controlar *in situ* os campos efetivos que agem sobre o átomo artificial.

Quando a ilha supercondutora está fabricada dentro do ressonador, junto com a parte d.c. da voltagem, V_g^{dc} , há a parte quântica devido a flutuações de vácuo na cavidade. Se o átomo está colocado no centro da cavidade, esta contribuição quântica é dada pela equação (6.11). Com isso, o Hamiltoniano do CPB acoplado ao campo quântico é

$$H_{CPB} = -2E_C(1 - 2N_g)\sigma_z - \frac{E_J}{2}\sigma_x - e\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{Lc}}(a + a^\dagger)(1 - 2N_g - \sigma_z). \quad (6.14)$$

Trabalhando na base de autovetores dos dois primeiros termos da expressão (6.14) e adicionando o Hamiltoniano do modo da cavidade acoplado ao átomo, o Hamiltoniano total do átomo interagente com o campo torna-se

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_z - \hbar g(a + a^\dagger)(1 - 2N_g - \cos(\varphi)\sigma_z + \sin(\varphi)\sigma_x). \quad (6.15)$$

Aqui σ_z e σ_x são os novos operadores de pseudo-spin de Pauli na base de autovetores $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ dos dois primeiros termos da equação (6.14),

$$\varphi = \arctan \frac{E_J}{4E_C(1 - 2N_g)} \quad (6.16)$$

e a frequência de transição do átomo é

$$\Omega = \sqrt{E_J^2 + [4E_C(1 - 2N_g)^2]}/\hbar. \quad (6.17)$$

Quando $N_g = C_g V_g^{dc}/2e = 1/2$ (neste caso $\varphi = \pi/2$), conhecido como o *ponto de degenerescência de carga* (*charge degeneracy point*, ou simplesmente “sweet spot”) [125], os termos “contragirantes” podem ser desprezados na Aproximação de Onda Girante (mais conhecida como RWA, *Rotating Wave Approximation* em inglês) e o Hamiltoniano é reduzido ao Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JC) [124], equação (6.19), com a frequência de transição atômica

$$\Omega = E_J/\hbar$$

e intensidade de acoplamento

$$g = \frac{e C_g}{\hbar C_\Sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{Lc}}. \quad (6.18)$$

6.3.3 Sistema átomo-campo

Assim, na aproximação de onda girante e quando $N_g = 1/2$ o Hamiltoniano do sistema se reduz ao Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$H_{JC} = H_r + H_a + \hbar g (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (6.19)$$

$$H_r = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2), \quad H_a = \hbar\Omega\sigma_z/2. \quad (6.20)$$

Quando a dessintonia Δ é igual a zero, para uma única excitação, os autoestados do sistema acoplado são superposições simétricas e antisimétricas de um único fóton e uma excitação no CPB $|\pm\rangle = (|e, 0\rangle \pm |g, 1\rangle) / \sqrt{2}$ com energias $E_\pm = \hbar(\omega \pm g)$.

A diagonalização exata do Hamiltoniano de JC fornece os estados excitados (estados vestidos)

$$|+, n\rangle = \cos v_n |e, n\rangle + \sin v_n |g, n+1\rangle \quad (6.21)$$

$$|-, n\rangle = -\sin v_n |e, n\rangle + \cos v_n |g, n+1\rangle \quad (6.22)$$

e o estado fundamental $|g, 0\rangle$ com respectivas energias

$$E_{\pm, n} = (n+1)\hbar\omega \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{4g^2(n+1) + \Delta^2} \quad (6.23)$$

$$E_{g, 0} = -\frac{\hbar\Delta}{2}, \quad (6.24)$$

onde

$$v_n = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2g\sqrt{n+1}}{\Delta} \right). \quad (6.25)$$

Para uma dessintonia grande, $g/|\Delta| \ll 1$, podemos fazer a transformação unitária

$$U = \exp \left[\frac{g}{\Delta} (a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-) \right] \quad (6.26)$$

e obter em até segunda ordem no parâmetro g/Δ o Hamiltoniano efetivo

$$UHU^\dagger \approx \hbar \left[\omega + \frac{g^2}{\Delta}\sigma_z \right] a^\dagger a + \frac{\hbar}{2} \left[\Omega + \frac{g^2}{\Delta} \right] \sigma_z. \quad (6.27)$$

A frequência de transmissão da cavidade $\omega \pm g^2/\Delta$ está condicionada ao estado do átomo $\sigma_z = \pm 1$. Portanto, ao medir a frequência de transição da cavidade, o estado do átomo pode ser determinado. Analogamente, a separação entre os níveis do átomo $\hbar(\Omega + 2a^\dagger a g^2/\Delta + g^2/\Delta)$ depende do número de fótons na cavidade. O termo $2a^\dagger a g^2/\Delta$, linear em $a^\dagger a$, é o deslocamento Stark *a.c.* e g^2/Δ é o deslocamento Lamb.

6.3.4 Medição em EDQc

As propriedades do sistema acoplado são determinadas através de espectroscopia. A amplitude T e a fase ϕ do feixe microondas de prova, com potência P_{RF} , transmitido através da cavidade são medidas em função da frequência do feixe de prova ω_{RF} . Aqui o CPB age como uma *capacitância efetiva*, dependente do autoestado de σ_z , a intensidade de acoplamento g e a dessintonia Δ . A capacitância variável muda a frequência da cavidade e o seu espectro de transmissão [125, 251].

Um bombeamento de frequência ω_{RF} pode ser modelado por [19, 125]

$$H_{RF} = \hbar \varepsilon(t) (a^\dagger e^{-i\omega_{RF}t} + a e^{i\omega_{RF}t}), \quad (6.28)$$

onde $\varepsilon(t)$ é uma medida de amplitude de bombeamento. No limite dispersivo, são esperados picos no espectro de transmissão da cavidade nas posições $\omega - g^2/\Delta$ e $\Omega + 2g^2/\Delta$ se o átomo está inicialmente no estado fundamental. Num referencial girando com a frequência de bombeamento, os elementos de matriz para essas transições são, respectivamente,

$$\langle g, 0 | H_{RF} | -, n \rangle \sim \varepsilon, \quad \langle g, 0 | H_{RF} | +, n \rangle \sim \varepsilon \frac{g}{\Delta}. \quad (6.29)$$

No caso de grande dessintonia, o pico em $\Omega + 2g^2/\Delta$, que corresponde aproximadamente à inversão do átomo, é nitidamente inibido. O elemento de matriz correspondente à inversão do átomo inicialmente no estado excitado também é inibido. Portanto, dependendo do átomo estar inicialmente no estado fundamental ou no excitado, o espectro de transmissão vai apresentar um pico de largura de linha κ em $\omega - g^2/\Delta$ ou $\omega + g^2/\Delta$, respectivamente. Esta é uma das técnicas de medir o estado atômico.

Aplicando o bombeamento na frequência da cavidade ω , o estado do átomo fica codificado na fase de sinais refletidos e transmitidos. O estado inicial do qubit $|\xi\rangle = \alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$ evolui sob a ação da radiação para um estado emaranhado $|\psi\rangle = \alpha|g, \mathcal{G}\rangle + \beta|e, -\mathcal{G}\rangle$, onde $\tan \mathcal{G} = 2g^2/\kappa\Delta$ e $|\pm \mathcal{G}\rangle$ são estados coerentes (na representação de interação) com um número de fótons apropriado e fases opostas. Logo, medindo a fase do feixe transmitido via detecção homodina, é possível determinar o estado atômico [125]. Esta é a segunda técnica de medição.

Assim, ao bombear a cavidade nas frequências deslocadas, a informação sobre o estado do átomo fica armazenada, predominantemente, no número de fótons

transmitidos. Quando a frequência do bombeio é aproximadamente igual a ω , há pouca informação a respeito do estado do átomo no número de fótons, com a maior parte de informação armazenada na fase do sinal refletido e o transmitido. Portanto, ambas as técnicas são usadas para a leitura do estado do átomo usando medições QND de alta eficiência.

Além disso, uma combinação de dois feixes de microondas permite determinar o estado do campo [242]. O deslocamento da frequência do átomo dependente do número de fótons é detectado realizando a espectroscopia do sistema átomo-campo. A cavidade é excitada coerentemente aplicando-se um sinal de microondas (sinal de cavidade) na frequência ω_{rf} perto da ressonância da cavidade. O espectro é obtido ao varrer a frequência ω_s de um segundo sinal de microondas (sinal de espectroscopia), que verifica a absorção do átomo sem popular significativamente a cavidade, pois a cavidade fica fora da ressonância por muitas larguras de linha ($|\Omega - \omega| \gg \kappa$). A detecção é completada explorando a natureza dual do acoplamento átomo-campo, reutilizando os fótons da cavidade como uma medida de transmissão da cavidade dependente do estado do átomo [125, 246].

No entanto, vários efeitos experimentais impossibilitam uma extração quantitativa de probabilidade de número de fótons na cavidade. Primeiro, há o alargamento não-homogêneo da largura de linha da cavidade para um grande número de fótons, devido ao ruído externo. Segundo, embora tenha sido mostrado analiticamente que o espectro de absorção do átomo representa adequadamente a estatística de fótons na cavidade, atualmente não há uma maneira independente de medir o átomo, e existem imperfeições no mapeamento do espectro do átomo através da transmissão da cavidade. Por último, simulações numéricas indicam que o bombeamento do átomo através do sinal espectroscópico resulta em uma dinâmica complexa que comprime o estado do campo, sugerindo assim um caminho para criar estados exóticos da luz, mas ao mesmo tempo ofuscando parcialmente a estatística inicial dos fótons [242].

6.3.5 Resultados recentes em EDQc

A observação recente [242] de picos de número de fótons resolvidos no espectro do qubit demonstra um regime novo em sistemas de EDQc – o regime dispersivo forte. A medição do espectro revelou diretamente a natureza corpuscular discreta do campo de microondas

dentro de uma cavidade sobre um chip, e foi usada para distinguir estados do campo com diferentes estatísticas de fótons, como a luz coerente e a térmica.

Além disso, usando sistemas átomo artificial–campo na arquitetura de EDQc, nos últimos quatro anos foram feitos numerosos experimentos, entre os quais se destacam:

- verificação experimental do regime de acoplamento ressonante forte [221, 242];
- produção controlada de estados de um único fóton em circuitos [255];
- acoplamento de dois átomos artificiais (qubits) via cavidade e transferência de excitações entre eles [223, 256];
- produção de maser usando um único átomo artificial [257];
- geração de estados de Fock com múltiplos fótons [258];
- verificação da fase de Berry, e efeitos de decoerência sobre ela [259];
- observação de flutuações de vácuo e a determinação do deslocamento Lamb [260];
- engenharia de átomo artificial baseado em CPB para diminuir a decoerência [261];
- óptica quântica não-linear com poucos fótons [239, 240].

Além disso, existem diversas propostas teóricas, tais como

- ★ geração de estados de superposição de átomo, e diversas propostas para processamento de informação quântica [125, 253, 262];
- ★ geração de computadores quânticos híbridos, em que qubits supercondutores são acoplados a qubits de moléculas polares via cavidade sobre um chip [263, 264];
- ★ geração de estados emaranhados átomo-campo para fins de processamento de informação quântica [265, 266];
- ★ implementação de detectores de único fóton no regime de microondas [267];
- ★ implementação de “resfriamento” e “aquecimento” de chips [268, 269];
- ★ geração de estados de luz comprimida [270].

Portanto, a área de EDQc é um campo extremamente ativo e promissor, tanto de ponto de vista fundamental, em que são estudados fenômenos quânticos a nível de um único fóton interagindo com um ou poucos átomos, quanto de ponto de vista prático, com perspectivas de aplicações nas áreas de informação quântica e geração de estados não-clássicos da luz. O tópico que estudamos aqui abrange ambas estas linhas — estudamos a criação de estados não-clássicos de luz e estados emaranhados átomo-campo usando um análogo de efeito Casimir Dinâmico, explorando a possibilidade experimental

em manipular as propriedades dos átomos artificiais *in situ* via campos externos.

6.4 Processos não-estacionários em EDQc

O fenômeno de geração de fótons a partir do estado inicial de vácuo, ou de um outro estado inicial do campo, devido às mudanças da geometria ou propriedades materiais da cavidade tem recebido bastante atenção nas últimas três décadas (ver [224, 271] para uma lista extensa de referências). Este fenômeno é conhecido pelo nome de efeito Casimir não-estacionário [272, 273] ou dinâmico [274, 275] (ECD). Diversos estudos predizeram um crescimento exponencial da energia do campo no caso de modulação periódica dos parâmetros da cavidade sob as condições de ressonância, quando a frequência da cavidade oscila com uma frequência que é um múltiplo da autofrequência do campo não-perturbado [224]. Este efeito foi amplamente explorado teoricamente, e muitos artigos estudaram a estatística e o mecanismo de detecção do estado de campo criado, bem como a influência da temperatura, geometria, condições de fronteira, irregularidades da periodicidade e dissipação (ver [224, 271, 276] e referências citadas). Ademais, várias propostas experimentais para observar a radiação induzida pelo movimento foram feitas [277–280], e algumas delas estão sendo implementadas atualmente [281–283].

Explorando a possibilidade de controlar em tempo real os parâmetros do sistema, a realização da transição Landau-Zener foi proposta em EDQc, quando a frequência de transição atômica cresce linearmente com o tempo. A possibilidade de implementar ECD com o *qubit de fluxo* em nanocircuito quântico supercondutor, juntamente com a detecção de fótons gerados, foi estudada em [284]. Além disso, o acoplamento/desacoplamento do átomo artificial a/de modo de cavidade é atualmente implementado ajustando *in situ* a frequência de transição atômica [223, 256, 258, 285]. A geração da radiação quântica de vácuo através de modulação da frequência de Rabi de vácuo da transição *inter-subbands* em um sistema de poço quântico dopado, inserido em uma microcavidade planar, foi considerada em [277, 286, 287], e a emissão de pares de fótons foi prevista para certas frequências ressonantes da modulação.

Nesta seção, vamos estudar os processos não-estacionários em EDQc, quando um único átomo artificial é acoplado a um único modo da cavidade, e a frequência atômica,

ou o acoplamento átomo-campo, tem uma pequena modulação temporal, prescrita externamente [288,289]. Tal grau de controle sobre os parâmetros do sistema, com uma frequência de modulação compatível, pode ser atingido em EDQc com a tecnologia atual ou no futuro próximo [223,258,285]. Demonstramos a possibilidade de simular ECD em EDQc usando um único átomo não-estacionário, em vez de um meio dielétrico macroscópico, como nas Refs. [290–293]. Como aplicações, pode-se tornar possível criar excitações atômicas e fótons a partir do estado de vácuo inicial $|g, 0\rangle$, gerar estados não clássicos da luz e realizar transições entre os estados $\{|g, n\rangle, |e, n \pm 1\rangle\}$ no regime dispersivo, onde $|g\rangle$ e $|e\rangle$ denotam o estado atômico fundamental e o excitado, respectivamente, e $|n\rangle$ é o estado de Fock do campo na cavidade. Um problema relacionado foi estudado recentemente em [268], onde foi sugerido que o comportamento de laser e criação de população altamente não-térmica na cavidade, além do resfriamento, poderia ser implementados usando um esquema parecido.

6.4.1 Formulação do problema

Consideremos que a frequência de transição atômica $\Omega(t)$ é dada por

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \varepsilon f_t. \quad (6.30)$$

Aqui Ω_0 denota a frequência atômica não-perturbada, ε é uma pequena amplitude de modulação, $\varepsilon \ll \Omega_0$, e f_t é uma função de tempo periódica arbitrária, prescrita externamente

$$f_t = \sum_{k=0}^{\infty} [s_k \sin k\eta t + c_k \cos k\eta t], \quad (6.31)$$

onde η é a frequência de modulação e $\{s_k, c_k\}$ formam um conjunto de coeficientes que descrevem a modulação temporal. A frequência da cavidade ω e o parâmetro de acoplamento átomo-campo g_0 são constantes, de modo que no ponto de degenerescência de carga [125] o sistema é descrito pelo Hamiltoniano de Rabi

$$H = H_0(t) + g_0(a + a^\dagger)(\sigma_+ + \sigma_-), \quad (6.32)$$

com a (a^\dagger) sendo o operador de aniquilação (criação) da cavidade, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ e $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$. O Hamiltoniano livre é

$$H_0(t) = \omega \hat{n} + \frac{\Omega(t)}{2} \sigma_z, \quad (6.33)$$

onde $\hat{n} = a^\dagger a$ é o operador de número de fótons, $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ e consideramos $\hbar = 1$. No caso estacionário, $\varepsilon = 0$, podemos fazer a aproximação de onda girante (RWA) e obter o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JC) usual [241], que foi verificado em diversos experimentos nos últimos anos [221, 238–240, 242]. Entretanto, no caso não-estacionário, bem como na presença de uma defasagem forte [294, 295], o termo contragirante ($a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+$) não pode ser sempre eliminado. Além do mais, ele é responsável por produzir um efeito análogo de ECD e por criar excitações atômicas e fotônicas a partir do vácuo sob as condições de ressonância, como mostrado a seguir.

Visto que $[H_0(t), H_0(t')] = 0$, na representação de interação com respeito a $H_0(t)$, o Hamiltoniano de interação é

$$H_I = g_0 \left(e^{i\Theta_-} a\sigma_+ + e^{i\Theta_+} a^\dagger\sigma_+ + h.c. \right), \quad (6.34)$$

onde $h.c.$ denota o Hermitiano conjugado e

$$\Theta_\pm \equiv \int_0^t d\tau [\Omega(\tau) \pm \omega]. \quad (6.35)$$

Toda a informação sobre a influência da modulação externa sobre a dinâmica do sistema é contida nos expoentes dependentes do tempo $\exp(i\Theta_\pm)$, que podem ser significativamente simplificados ajustando a frequência de modulação η às ressonâncias. Temos explicitamente

$$g_0 e^{i\Theta_\pm} = g e^{i\Delta_\pm t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left[\frac{\varepsilon}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} (\$ _k e^{-ik\eta t} - \$ _k^* e^{ik\eta t}) \right]^l, \quad (6.36)$$

onde definimos a constante de acoplamento complexa

$$g \equiv g_0 \exp \left[i \frac{\varepsilon}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} s_k \right] \quad (6.37)$$

e os parâmetros

$$\$_k \equiv -\frac{c_k + i s_k}{2k} \quad (6.38)$$

$$\Delta_\pm \equiv (\Omega_0 + \varepsilon c_0) \pm \omega. \quad (6.39)$$

6.4.2 Ressonância de Anti-Jaynes-Cummings

A ressonância de “Anti-Jaynes-Cummings” (AJC) ocorre para

$$\eta = \eta_{AJC} \equiv \Delta_+ - \xi, \quad (6.40)$$

onde $|\xi| \ll \Delta_+$ é um pequeno “deslocamento de ressonância” a ser determinado posteriormente. Considerando uma condição experimental razoável $\varepsilon/\eta \ll 1$, expandimos $g_0 \exp(i\Theta_\pm)$ em (6.34) até a primeira ordem em ε/η e fazemos a RWA, obtendo

$$H_I \simeq g (\theta e^{i\xi t} a^\dagger \sigma_+ + e^{i\Delta_- t} a \sigma_+) + h.c., \quad (6.41)$$

onde o acoplamento adimensional induzido pela modulação é

$$\theta \equiv \mathcal{S}_1 \frac{\varepsilon}{\eta}. \quad (6.42)$$

Regime dispersivo

No regime dispersivo, $g_0 \sqrt{\langle \hat{n} \rangle} / |\Delta_-| \ll 1$, onde $\langle \hat{n} \rangle$ é o número médio de fótons, o Hamiltoniano (6.41) pode ser aproximado por [241]

$$H_I^{(1)} \simeq (g\theta e^{i\xi t} a^\dagger \sigma_+ + h.c.) + \delta (\hat{n} + 1/2) \sigma_z, \quad (6.43)$$

onde

$$\delta = \delta_0 + \mathcal{O}(g_0^2/\Delta_+) \quad (6.44)$$

e o deslocamento dispersivo usual é [241]

$$\delta_0 = \frac{g_0^2}{\Delta_-}. \quad (6.45)$$

Após a transformação unitária $U = \exp[i\xi t \sigma_z/2]$ obtemos o Hamiltoniano de AJC efetivo

$$H_{AJC} \simeq \frac{\xi + \delta(1 + 2\hat{n})}{2} \sigma_z + (g\theta a^\dagger \sigma_+ + h.c.). \quad (6.46)$$

Para o estado inicial de Fock $|n\rangle$, ajustando o deslocamento de ressonância ξ de modo a fazer $|\xi + \delta(1 + 2n)|$ pequeno comparado a $|g\theta|$, obtemos o Hamiltoniano de AJC ressonante. Do ponto de vista físico, a modulação externa suplementa a energia $\omega + \Omega_0$ necessária para criar um fóton e uma excitação atômica simultaneamente. Assim, pode-se criar uma superposição de estados $|e, 1\rangle$ e $|g, 0\rangle$ partindo do estado inicial de vácuo $|g, 0\rangle$ e ajustando precisamente o deslocamento de ressonância.

Na figura 6.2 mostramos a dinâmica exata para a ressonância de AJC, obtida pela integração numérica do Hamiltoniano inicial (6.32), fixando os parâmetros experimentais atuais de EDQc $\Omega_0/\omega = 1,4$, $g_0/\omega = 2 \cdot 10^{-2}$ e supusemos $\varepsilon/\omega = 0,2$. Em

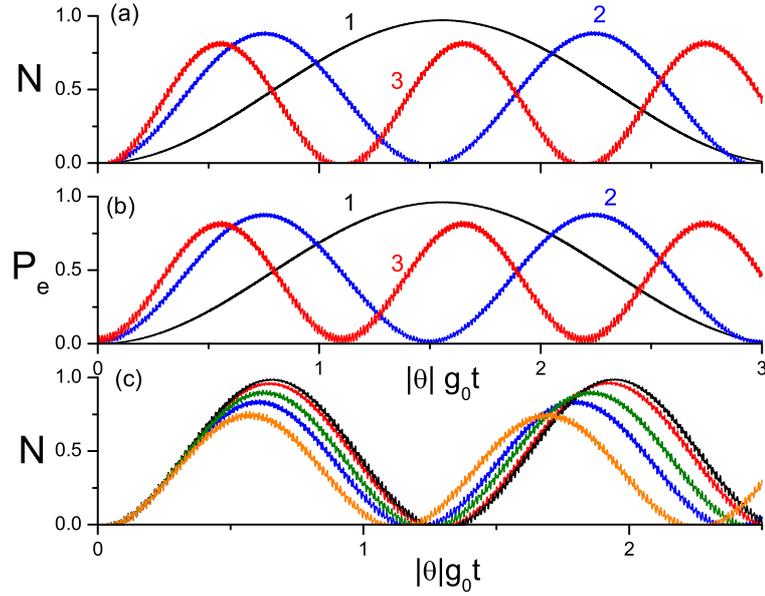


Figura 6.2: Integração numérica de Hamiltoniano de Rabi para a frequência de modulação $\eta = \Delta_+ + 2\delta_0(1 + n_0)$. **a)** Número de fótons criados N e **b)** P_e para os estados iniciais de Fock $|g, n_0\rangle$, com $n_0 = 0$ (linha 1), $n_0 = 3$ (linha 2) e $n_0 = 6$ (linha 3). **c)** Dependência de N com uma pequena mudança x no deslocamento de ressonância $\xi = -2\delta_0(1 + n_0 + x)$ para o estado inicial $|g, n_0 = 5\rangle$. Para $|\theta|g_0t$ de 2 a 2,3 as curvas correspondem a $x = 4, 0, 3, 1, 2$, de baixo para cima. Ajustando x podemos otimizar o processo de geração de fótons.

todas as simulações nesta seção nós nos restringimos à modulação harmônica, $f_t = \sin \eta t$. Na figura 6.2a mostramos o número de fótons criados

$$N \equiv \langle \hat{n} \rangle - n_0,$$

para o estado inicial de Fock $|g, n_0\rangle$ em função do tempo adimensional $|\theta|g_0t$, para o deslocamento de ressonância $\xi = -2\delta_0(1 + n_0)$. Na figura 6.2b mostramos a probabilidade de excitação do átomo P_e . Das figuras 6.2a e 6.2b pode-se observar a geração simultânea de um fóton e uma excitação atômica, de acordo com o Hamiltoniano efetivo de AJC (6.46). Porém, o número máximo de fótons criados é ligeiramente menor que 1 e depende do número inicial de fótons, o que significa que o deslocamento de ressonância não foi ajustado precisamente. Na figura 6.2c mostramos N para o estado de número inicial $|g, n_0 = 5\rangle$ para diferentes deslocamentos de ressonância $\xi = -2\delta_0(1 + n_0 + x)$,

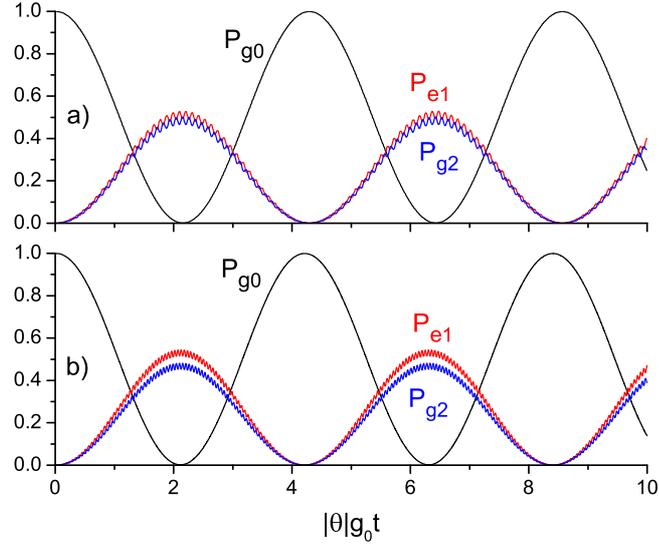


Figura 6.3: P_{g0} , P_{e1} e P_{g2} obtidos pela integração numérica de Hamiltoniano de Rabi no regime ressonante átomo-campo para a ressonância de AJC com o deslocamento de ressonância ajustado apropriadamente. **a)** $\Delta_- = 0$, $\xi = \xi_-$ e $\varepsilon/\omega = 2 \cdot 10^{-1}$. **b)** $\Delta_- = 10^{-1}g_0$, $\xi = \xi_-$ e $\varepsilon/\omega = 10^{-1}$. Não mais que 2 fótons podem ser gerados de vácuo, e a probabilidade da excitação atômica é limitada pelo valor $\sim 1/2$, de acordo com Eq. (6.47).

$x = 0, 1, 2, 3, 4$, demonstrando que é possível encontrar um valor ótimo de ξ que reproduz o Hamiltoniano de AJC ressonante e permite a geração de um fóton e uma excitação atômica simultaneamente.

Regime ressonante

No regime ressonante, $|\Delta_-|/g_0 \ll 1$, nós aplicamos o método de *múltiplas escalas* [296] para o Hamiltoniano (6.41), repetindo o procedimento [297] usado originalmente para estudar a geração de fótons a partir do vácuo devido a ECD em uma cavidade vibrante contendo um átomo (estacionário) ressonante [298–300]. Em poucas palavras, nós usamos a diagonalização exata do Hamiltoniano de JC, equações (6.23) e (6.24), para escrever a função de onda como amplitudes dependentes lentamente do tempo multiplicando os autoestados (6.21) e (6.22). Resolvendo as equações diferenciais resultantes, encontramos que para o estado inicial $|g, 0\rangle$ a geração de fótons ocorre para dois valores possíveis do

deslocamento de ressonância

$$\xi_{\pm} = \Delta_-/2 \pm \sqrt{2}g_0$$

e obtivemos as seguintes probabilidades não-nulas P_{an} , com $a = (e, g)$ denotando o estado atômico e n o número de fótons

$$\begin{aligned} P_{g0} &\approx \cos^2(\chi t) \\ P_{e1} &\approx \sin^2(y + q) \sin^2(\chi t) \\ P_{g2} &\approx \cos^2(y - q) \sin^2(\chi t). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Aqui $q = 0$ ($\pi/2$) para ξ_- (ξ_+) e

$$\chi \approx |g\theta| \sin(y + q), \quad \tan y \approx \left(\frac{2\sqrt{2}g_0 + \Delta_-}{2\sqrt{2}g_0 - \Delta_-} \right)^{1/2}.$$

Ilustramos este tipo de comportamento na figura 6.3, onde desenhamos P_{g0} , P_{e1} e P_{g2} no regime ressonante de interação átomo-campo sob a ressonância de AJC. Na figura 6.3a consideramos $\Delta_- = 0$ e $\xi = \xi_-$, usando os parâmetros $g_0/\omega = 4 \cdot 10^{-2}$ e $\varepsilon/\omega = 2 \cdot 10^{-1}$. Na figura 6.3b fixamos $\Delta_- = 10^{-1}g_0$, $\xi = \xi_-$, $g_0/\omega = 4 \cdot 10^{-2}$ e $\varepsilon/\omega = 10^{-1}$. Os resultados estão em excelente acordo com as previsões teóricas, equação (6.47), demonstrando que uma superposição de estados $|g, 0\rangle$, $|e, 1\rangle$ e $|g, 2\rangle$ é criada a partir do estado inicial de vácuo $|g, 0\rangle$. Tal dinâmica é similar àquela estudada no contexto de ECD, onde um átomo de dois níveis ressonante com o campo está dentro de uma cavidade, cuja parede oscila com a frequência perto de 2ω [297]. Em ambos os casos, não mais que dois fótons podem ser criados do estado inicial do vácuo $|g, 0\rangle$ e a probabilidade de excitar o átomo é limitada pelo valor $\sim 1/2$. Tal similaridade não é surpreendente, pois para a ressonância de AJC a frequência de modulação é $\eta \approx \Delta_+ \approx 2\omega$, e o átomo artificial faz o papel de um átomo estacionário e o mecanismo de modulação da cavidade ao mesmo tempo.

6.4.3 Ressonância de Jaynes-Cummings

No regime dispersivo, a ressonância de “Jaynes-Cummings” (JC) ocorre para

$$\eta = \eta_{JC} \equiv |\Delta_-| - \xi. \quad (6.48)$$

Para $\Delta_- > 0$, repetindo os passos que nos levaram a (6.46), obtemos

$$H_{JC} \simeq \frac{\xi + \delta(1 + 2\hat{n})}{2} \sigma_z + (g\theta a\sigma_+ + h.c.), \quad (6.49)$$

que é o Hamiltoniano de JC efetivo. Se $\Delta_- < 0$, obtemos (6.49) após a substituição $\theta \rightarrow -\theta^*$ e $\xi \rightarrow -\xi$. Assim, utilizando a ressonância de JC e ajustando o deslocamento de frequência ξ , pode-se acoplar os sub-espacos $\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\}$ quando o átomo e o campo estão bem longe da ressonância, já que a modulação externa suplementa a diferença de energia $|\Omega_0 - \omega|$ necessária para acoplar o átomo ao campo.

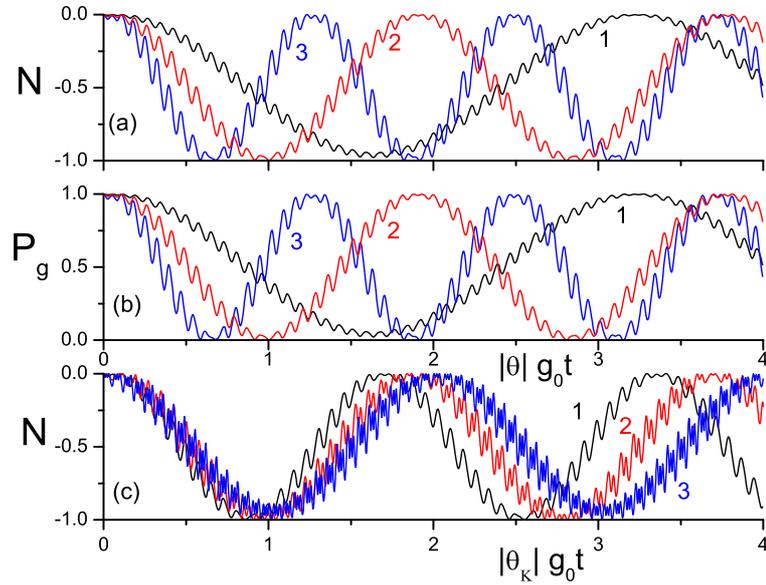


Figura 6.4: Integração numérica de Hamiltoniano de Rabi para a ressonância de JC, $\eta = \Delta_- + 2\delta_0(1 + n_0)$, considerando estados iniciais de número $|g, n_0\rangle$ com $n_0 = 1$ (linha 1), $n_0 = 3$ (linha 2) e $n_0 = 7$ (linha 3). **a)** N e **b)** P_g demonstram uma transferência entre os estados $|g, n_0\rangle$ e $|e, n_0 - 1\rangle$ no regime dispersivo. **c)** N para o estado de número $|g, 4\rangle$ e três ressonâncias de JC de ordens mais baixas ($\eta = \eta_-^{(K)}$, $K = 1, 2, 3$ como mostrado, ver seção 6.4.5) para o deslocamento de ressonância $\xi = -10\delta_0$.

O comportamento de JC está ilustrado na figura 6.4 para os estados iniciais de Fock $|g, n_0\rangle$. Nas figuras 6.4a e 6.4b desenhamos N e $P_g = 1 - P_e$, respectivamente, usando os parâmetros da figura 6.2 e fazendo $\eta = \Delta_- + 2\delta_0(1 + n_0)$. Como esperado do Hamiltoniano de JC efetivo (6.49), há transições entre os estados $\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\}$

para uma dessintonia grande, $|\Delta_-| \gg |g|$. Assim, no regime dispersivo pode ser possível engendrar estados emaranhados com vários fótons a partir do estado inicial de vácuo $|g, 0\rangle$ alternando entre as ressonâncias de AJC e JC e controlando o intervalo do tempo de cada uma das ressonâncias. Além disso, o arrefecimento do átomo ou da cavidade pode ser realizado.

6.4.4 Ressonância do efeito Casimir dinâmico

No regime dispersivo, a ressonância de efeito Casimir dinâmico (ECD) ocorre para

$$\eta = \eta_{ECD} \equiv \Delta_+ - \Delta_- - 2\xi = 2\omega - 2\xi. \quad (6.50)$$

Fazendo a RWA no Hamiltoniano de interação (6.34), obtemos em primeira ordem no parâmetro ε/η

$$H_I \simeq g e^{i\Delta_- t} a \sigma_+ + g \theta e^{i(\Delta_- + 2\xi)t} a^\dagger \sigma_+ + h.c. \quad (6.51)$$

Após a transformação unitária $U_1 = \exp\{i[\xi \hat{n} + (\Delta_- + \xi) \sigma_z/2]t\}$, obtemos o Hamiltoniano independente do tempo, que consiste de Hamiltoniano de JC mais o termo contragirante multiplicado pelo acoplamento ajustável $g\theta$

$$H_I^{(1)} \simeq \xi \hat{n} + \frac{\Delta_- + \xi}{2} \sigma_z + (g a \sigma_+ + g \theta a^\dagger \sigma_+ + h.c.) . \quad (6.52)$$

Como $|g/\Delta_-| \ll 1$, podemos obter um Hamiltoniano efetivo aplicando uma sequência de pequenas transformações unitárias sobre $H_I^{(1)}$ [301] e fazendo a expansão de *Hausdorff* em algum parâmetro pequeno a cada passo. Aqui, o nosso parâmetro de expansão será $\epsilon = |g/\Delta_-|$ e, supondo que $|\theta| \sim \mathcal{O}(\epsilon)$, vamos considerar os termos até a segunda ordem em ϵ . Aplicando primeiro a transformação unitária “girante” independente do tempo

$$U_r = \exp[(g a \sigma_+ - h.c.)/\Delta_-] , \quad (6.53)$$

seguida pela “contragirante” independente do tempo

$$U_a = \exp[(g \theta a^\dagger \sigma_+ - h.c.)/(\Delta_- + 2\xi)] , \quad (6.54)$$

obtemos o Hamiltoniano efetivo ($H_{ef} = U_a U_r H_I^{(1)} U_r^\dagger U_a^\dagger$)

$$H_{ef} \simeq (\xi + \delta \sigma_z) \hat{n} + \delta \sigma_z (\theta^* a^2 + h.c.) + \frac{\Delta_- + \delta + \xi}{2} \sigma_z - \frac{2\delta}{\Delta_-} (g a \hat{n} \sigma_+ + h.c.) + \mathcal{O}(\epsilon^3) . \quad (6.55)$$

Finalmente, indo para um outro referencial através da transformação unitária

$$U_2 = \exp[-i(\Delta_- + \delta + \xi)\sigma_z t/2], \quad (6.56)$$

obtemos

$$H_{ECD} \simeq (\xi + \delta\sigma_z)\hat{n} + \delta\sigma_z(\theta a^{\dagger 2} + \theta^* a^2) - \frac{2\delta}{\Delta_-} (ge^{i\Delta_- t} a \hat{n} \sigma_+ + h.c.) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.57)$$

onde descartamos o termo $(\delta + \xi)$ comparado a Δ_- na exponencial do terceiro termo.

Este é o resultado principal desta subseção. Os primeiros dois termos do Hamiltoniano efetivo (6.57) formam a parte de ECD e os termos seguintes representam as correções, cujo termo predominante oscila com a frequência alta $\sim \Delta_-$. Para pequenos valores de $\langle \hat{n} \rangle$, $\langle \hat{n} \rangle \ll n_C \ll (\Delta_-/g)^2$ (onde o número crítico de fótons n_C será determinado posteriormente), a contribuição desses termos aos primeiros dois é relativamente pequena, e σ_z torna-se aproximadamente uma constante, σ_{z0} . Considerando que o átomo estava inicialmente no estado fundamental, para $\langle \hat{n} \rangle \ll n_C$ temos $\sigma_z \approx -1$, e a equação (6.57) transforma-se no Hamiltoniano de ECD [224, 302, 303]

$$H_{ECD} \simeq (\xi - \delta)\hat{n} - \delta(\theta a^{\dagger 2} + \theta^* a^2). \quad (6.58)$$

Se o átomo estava inicialmente no estado excitado, um Hamiltoniano efetivo similar é obtido através da substituição $\delta \rightarrow -\delta$. Logo, ajustando o deslocamento de frequência para $\xi = \pm\delta$, dependendo do estado atômico inicial², temos a criação de pares de fótons a partir de vácuo e a amplificação do campo, devido a um análogo de ECD.

Neste caso, ECD é simulado pela modulação da frequência de transição atômica através do acoplamento átomo-campo. No entanto, o processo de geração de fótons não é regular, porque após vários fótons terem sido criados, o terceiro termo e os termos de ordem mais alta em ϵ tornam-se importantes, e a geração de fótons é interrompida. De fato, o terceiro termo descreve a excitação atômica não-ressonante pela absorção de fótons virtuais na cavidade, como descrito na seção 6.2. Mesmo assim, o Hamiltoniano (6.57) mostra que é possível simular o ECD e gerar vários fótons do vácuo usando um único átomo artificial.

²Se inicialmente o átomo estava numa superposição de estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$, podemos escolher qualquer um dos sinais para obter geração de fótons. No entanto, o processo de criação de fótons é otimizado se inicialmente o átomo estava exatamente em $|g\rangle$ ou $|e\rangle$.

Explicação física e resultados numéricos

Este fenômeno pode ser entendido qualitativamente de seguinte maneira. No regime dispersivo, o átomo no estado $|g\rangle$ ou $|e\rangle$ age como uma *capacitância não-linear* efetiva [125], mudando a frequência da cavidade para aproximadamente (ver seção 6.3.4)

$$\omega(t) \approx \omega + \frac{\sigma_{z0} g_0^2}{\Delta_- + \varepsilon f_t} \approx (\omega + \sigma_{z0} \delta_0) - \sigma_{z0} \delta_0 \frac{\varepsilon}{\Delta_-} f_t, \quad (6.59)$$

onde $\sigma_{z0} = \pm 1$ é o valor inicial da inversão atômica para o átomo no estado $|g\rangle$ ou $|e\rangle$. Conseqüentemente, é de se esperar que a modulação periódica de f_t com a frequência de modulação perto de $\eta \approx 2(\omega \pm \delta_0)$ vai levar ao ECD [224, 297], para o qual os fótons são gerados enquanto a modulação está presente. A energia 2ω necessária para criar pares de fótons é fornecida através da modulação da frequência atômica e o deslocamento de ressonância ξ deve ser ajustado³ para obter a interferência construtiva no campo da cavidade [224, 271].

Porém, no nosso caso o átomo se emaranha com o campo devido ao terceiro termo na equação (6.57), pelo qual o átomo adquire uma probabilidade finita de ser excitado pela absorção de fótons virtuais. Com isso, σ_{z0} na equação (6.59) torna-se uma função do número de fótons criados, e o processo de geração de fótons não pode continuar uniformemente devido à perda da interferência construtiva: para o deslocamento de ressonância ξ fixo, quando o número de fótons se aproxima do número crítico n_C , a “frequência efetiva” $|\xi + \delta\sigma_z|$ no primeiro termo na equação (6.57) torna-se igual ao dobro do coeficiente efetivo de criação de fótons [o fator $|\delta\sigma_z\theta|$ no segundo termo da equação (6.57)]. Quando isto acontece, a geração de fótons é interrompida, como também acontece no caso de oscilador paramétrico clássico. Assim, podemos visualizar o processo de criação de fótons em EDQc via modulação do átomo como um caso particular do efeito Casimir dinâmico, em que a frequência da cavidade é uma função do número de fótons.

O número crítico de fótons pode ser estimado da seguinte maneira: no regime dispersivo, a probabilidade de excitação do átomo é aproximadamente $(g/\Delta_-)^2 \langle n \rangle$, e com isso podemos reescrever a inversão atômica como

$$\sigma_z \simeq \sigma_{z0} \left[1 - 2 \left(\frac{g}{\Delta_-} \right)^2 \langle n \rangle \right]. \quad (6.60)$$

³Para reforçar a ressonância, poderia-se mudar ξ adiabaticamente no tempo, ver seção 6.4.6.

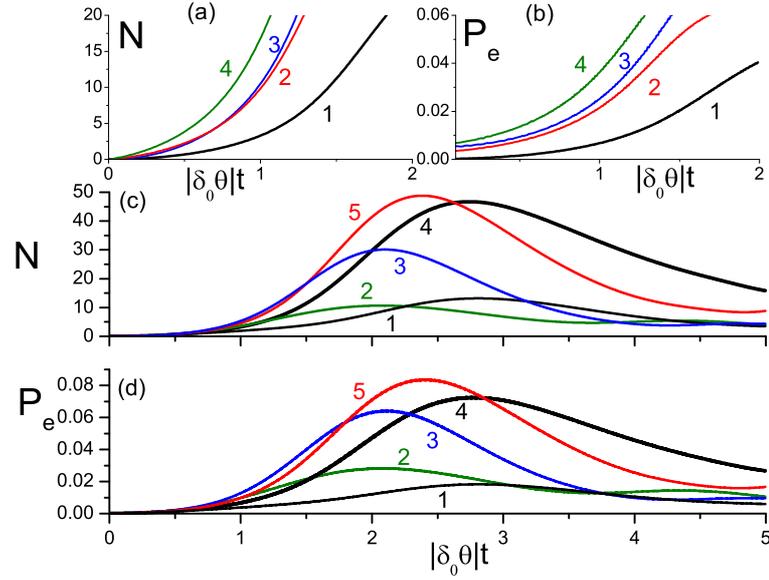


Figura 6.5: **a)** N e **b)** P_e para tempos iniciais obtidos pela integração numérica de Hamiltoniano de Rabi para $\eta = 2(\omega - \delta_0)$, para os estados iniciais de Fock $|g, n_0\rangle$ com $n_0 = 0$ (linha 1), $n_0 = 1$ (linha 2) e estados coerentes $|g, \alpha\rangle$ com $|\alpha|^2 = 1/2$ (linha 3) e $|\alpha|^2 = 1$ (linha 4). Há criação de fótons devido a um análogo do efeito Casimir dinâmico, como descrito pelos dois primeiros termos no Hamiltoniano efetivo (6.57). **c)** N e **d)** P_e para tempos maiores e o estado inicial $|g, 0\rangle$. Aqui $\eta = 2(\omega - x\delta_0)$ com $x = 0,95$ (linha 1), $x = 1,25$ (linha 2), $x = 1,15$ (linha 3), $x = 1$ (linha 4) e $x = 1,05$ (linha 5). O processo de criação de fótons é muito sensível ao deslocamento de ressonância e ele é interrompido devido ao emaranhamento entre o átomo e o campo, como esperado do terceiro termo na equação (6.57).

O número crítico de fótons é dado pela condição

$$|\xi + \delta_0 \sigma_z| = 2|\delta_0 \sigma_z \theta| \approx 2|\delta_0 \sigma_{z0} \theta|, \quad (6.61)$$

que segue da equação (6.57). Assim, para o deslocamento de ressonância ajustado para $\xi = -\delta_0 \sigma_{z0}$, obtemos o número crítico de fótons que podem ser criados no regime dispersivo

$$n_C \approx |\theta| \left(\frac{\Delta_-}{g} \right)^2. \quad (6.62)$$

Por isso, a geração de fótons em EDQc é diferente da situação usual no contexto de ECD, na qual as propriedades de um meio dielétrico macroscópico linear, não-dissipativo

e não-dispersivo dentro da cavidade (como a permissividade, por exemplo) são moduladas [290–293], e o estado do campo não se emaranha com estados de átomos individuais, não havendo, portanto, um limite superior para o número de fótons gerados.

Na figura 6.5 mostramos os resultados da integração numérica de Hamiltoniano de Rabi para a ressonância de ECD com deslocamento de frequência ajustado apropriadamente, $\eta = 2(\omega - \delta_0)$, usando os parâmetros $\Omega_0/\omega = 1,4$, $g_0/\omega = 2 \cdot 10^{-2}$ e $\varepsilon/\omega = 4 \cdot 10^{-1}$. Estão desenhados o número de fótons criados N (Fig. 6.5a) e P_e (Fig. 6.5b, onde foi feita uma média sobre as oscilações rápidas) *versus* o tempo adimensional $|\delta_0\theta|t$ para o estado inicial fundamental do átomo $|g\rangle$ e os estados de Fock $|n_0\rangle$ ($n_0 = 0, 1$) e estados coerentes $|\alpha\rangle$ ($|\alpha|^2 = 1/2, 1$) do campo. Para os tempos iniciais, enquanto $\langle \hat{n} \rangle \ll n_c \approx 40$, há geração de fótons e amplificação, como esperado. Porém, o átomo se emaranha com o campo e P_e cresce à medida que o tempo passa, sofrendo rápidas oscilações (não mostradas, porque embaralhariam o entendimento), como esperado da equação (6.57).

Nas figuras 6.5c e 6.5d mostramos N e P_e , respectivamente, para tempos maiores do que nas figuras 6.5a e 6.5b e diferentes deslocamentos de ressonância $\xi = x\delta_0$, $x = \{0,95; 1; 1,05; 1,15; 1,25\}$, considerando o estado inicial $|g, 0\rangle$. Em primeiro lugar, vemos que a geração de fótons é muito sensível ao deslocamento de ressonância na vizinhança de $\xi = \delta_0$, e perto da ressonância, $x \approx 1$, um número significativo de fótons é criado para o estado inicial de vácuo. Entretanto, o processo de criação de fótons é interrompido depois que vários fótons foram criados, e o número médio de fótons decresce, embora o processo de geração de fótons recomeça posteriormente.

Isto está ilustrado na figura 6.6, onde mostramos $\langle n \rangle$ e P_e *versus* tempo obtidos numericamente para a ressonância de ECD e o estado inicial $|g, 0\rangle$, usando os parâmetros da figura 6.5 e $\xi = \delta_0$. Na figura 6.6 também está mostrada a curva $\langle n \rangle_{ECD} = \sinh^2(2|\delta_0\theta|t)$, que representa o número médio de fótons para o Hamiltoniano (6.58); isto demonstra que para tempos iniciais a dinâmica pode ser descrita pelo Hamiltoniano de ECD. Verificamos que o número máximo de fótons criados está em concordância com a expressão (6.62), que resulta em $n_C \approx 40$. P_e lembra o comportamento de N , mas permanece pequeno para todos os tempos. Nós também verificamos numericamente que resultados similares são obtidos para estados atômicos iniciais diferentes, de acordo com

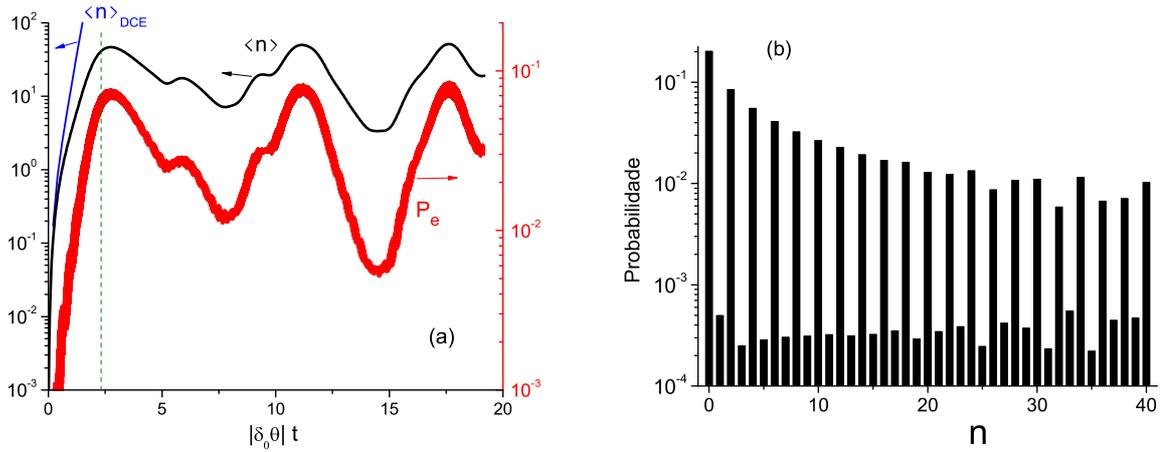


Figura 6.6: **a)** A dinâmica exata de $\langle n \rangle$ e P_e versus tempo para a ressonância de ECD. $\langle n \rangle_{ECD}$ é o número médio de fótons para o Hamiltoniano de ECD (6.58) O número máximo de fótons criados está em acordo com o número crítico estimado pela equação (6.62): $n_C \approx 40$. **b)** A distribuição de número de fótons criados no tempo $|\delta_0 \theta| t = 2,25$ [marcado com a linha tracejada na figura (a)]: predominantemente, um número par de fótons é criado.

a equação (6.57). A figura 6.6b mostra a estatística de fótons criados para o tempo $|\delta_0 \theta| t = 2,25$; como esperado, pares de fótons são criados. A probabilidade finita de haver números ímpares de fótons deve-se à pequena probabilidade de absorção de fótons pelo átomo no regime dispersivo. Portanto, para $\eta = 2(\omega \pm \delta)$ podemos obter a geração de pares de fótons para o estado inicial de vácuo, bem como a amplificação do número médio de fótons, similarmente ao efeito Casimir dinâmico [224]; a diferença em relação ao caso usual [224] é que agora a frequência da cavidade torna-se uma função não-linear do número de fótons.

6.4.5 Discussão de resultados para modulação periódica

Nas subseções anteriores consideramos apenas as ressonância de primeira ordem. Em geral, as ressonância de K -ésima ordem ocorrem para um número inteiro K quando

$$\eta = \eta_i^{(K)} \equiv K^{-1} \eta_i,$$

onde η_i denota as ressonâncias de AJC, JC e ECD. Neste caso, podemos recuperar os nossos resultados anteriores ao fazermos as substituições

$$\delta \rightarrow \delta_K \quad \text{e} \quad \theta \rightarrow \theta_K, \quad (6.63)$$

como pode ser deduzido das equações (6.34) e (6.36). Por exemplo, para obter θ_K , devemos expandir ambas as somas do lado direito da equação (6.36) e fazer a RWA, mantendo os termos que oscilam com a frequência mais baixa ξ . Assim, θ_K contém contribuições devido à forma anarmônica da modulação (e.g. $\mathcal{S}_K \varepsilon/\eta$), e às potências de (ε/η) [e.g. $(\mathcal{S}_1 \varepsilon/\eta)^K / K!$]. O deslocamento de ressonância efetivo δ_K pode ser obtido analogamente, ao realizar primeiro a RWA na equação (6.36) e manter os termos que oscilam com frequências mais altas que ξ , e depois calculando o Hamiltoniano efetivo, como nas equações (6.43) e (6.44). Assim, δ_K contém contribuições de muitos termos, além de δ_0 , entre eles o deslocamento de Bloch-Siegert g^2/Δ_+ [301,304] e potências de (ε/η) . Como um exemplo, na figura 6.4c mostramos N versus $|\theta_K| g_0 t$ para o estado inicial de número $|g, 4\rangle$ e as três primeiras ressonâncias de JC, considerando o deslocamento de ressonância $\xi = -10\delta_0$. Este exemplo ilustra que as ressonâncias de ordem mais alta são facilmente acessíveis. No entanto, para as ressonâncias de ordem mais alta, o deslocamento dispersivo efetivo δ_K deve ser determinado cuidadosamente, numericamente ou experimentalmente. Caso contrário, há um grande risco de “perder” a ressonância exata, já que para $\varepsilon/\eta \ll 1$, $|\theta_K|$ para $K > 1$ torna-se menor que $|\theta_1|$ e há menos liberdade em cometer pequenos erros no deslocamento de ressonância ξ em relação a δ .

Os nossos resultados podem ser transpostos diretamente para a situação onde $\Omega(t) = \Omega$ é constante e $g_0 = g_0(t)$ tem uma modulação temporal periódica,

$$g_0(t) = g_0 + \varepsilon f_t.$$

Neste caso, na representação de interação o Hamiltoniano de interação é

$$H_I = \left[(g_0 + \varepsilon c_0) - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} k (\mathcal{S}_k^* e^{ik\eta t} + \mathcal{S}_k e^{-ik\eta t}) \right] (e^{i(\Omega-\omega)t} a \sigma_+ + e^{i(\Omega+\omega)t} a^\dagger \sigma_+ + h.c.). \quad (6.64)$$

Se expandirmos $\exp(i\Theta_\pm)$ na equação (6.36) até a primeira ordem em ε/η , o Hamiltoniano (6.34) torna-se equivalente ao Hamiltoniano (6.64), logo, feitas as substituições apropriadas, os resultados obtidos previamente para $\Omega(t)$ também são válidos para $g_0(t)$. A

diferença principal entre os dois casos é que no caso de $\Omega(t)$ as ressonâncias mais altas de K -ésima ordem ocorrem devido tanto a potências de ε/η quanto aos coeficientes não-nulos $\$K$, enquanto que no caso $g_0(t)$ as ressonâncias de ordem mais alta devem-se apenas aos coeficientes não-nulos $\$K$. Portanto, para uma modulação harmónica, $f_t = \sin \eta t$, no caso $\Omega(t)$ nós temos as ressonâncias de ordens mais altas, mas no caso de $g_0(t)$ há apenas as ressonâncias de primeira ordem. Finalmente, se a frequência da cavidade ω é modulada periodicamente, com Ω e g_0 constantes, é esperado que as ressonâncias de AJC e JC também ocorram, além da bem estabelecida ressonância de ECD [297–300].

A verificação experimental deste esquema parece possível em arquitetura de EDQc com qubits supercondutores e ressonadores de guia de onda coplanares [125], onde os parâmetros do sistema podem ser ajustados *in situ* via campos elétricos e magnéticos, como demonstrado em diversos experimentos [221, 223, 256]. Além disso, vários esquemas para medir o estado da cavidade e o estado atómico estão disponíveis atualmente [125, 242, 305] e sob investigação [285]. O maior desafio seria encontrar um modo de modular periodicamente a frequência atómica com uma frequência de modulação estável $\eta \sim 10$ GHz, o que também está dentro de alcance experimental [223]. Também poderia-se usar este esquema para acoplar M qubits idênticos (e.g. átomos de dois níveis supercondutores [223, 256] ou uma nuvem de moléculas polares [263, 264]) ao mesmo modo da cavidade e modular a frequência de M qubits simultaneamente, já que neste caso o acoplamento efetivo é incrementado para $\sqrt{M}g_0$.

Um ponto importante que não analisamos é a dissipação e a decoerência, tanto do átomo artificial quanto da cavidade, devido ao meio ruidoso de estado sólido [285, 306]. Um dos motivos para isto é que atualmente não existe uma abordagem quântica definitiva para o tratamento de perdas em sistemas não-estacionários sujeitos a modulações externas não-adiabáticas [271]. Experimentos recentes em EDQc alcançaram valores experimentais $\{\kappa/\omega < 10^{-4}, \gamma/\omega < 10^{-3}, \gamma_{ph}/\omega < 10^{-3}\}$ [242], onde κ é a taxa de decaimento da cavidade, γ é a taxa de decaimento do átomo e γ_{ph} é a taxa de defasagem atómica pura. Para lidar com a dissipação de uma maneira qualitativa, comparamos as taxas de criação de fótons a partir de vácuo para cada ressonância a taxas de dissipação conhecidas empiricamente. Nós consideramos os parâmetros atuais da constante de acoplamento $g_0/\omega \approx 2 \cdot 10^{-2}$ [242] e supusemos $\varepsilon/\omega \sim \Delta_-/\omega \sim 10^{-1}$ para fazer uma

estimativa. A taxa de criação de fótons para a ressonância de ECD de primeira ordem é aproximadamente $|\delta_0\theta|/\omega \sim 10^{-4}$ [equação (6.57)], e para a ressonância de AJC de primeira ordem $g_0|\theta|/\omega \sim 10^{-3}$ [equação (6.46)]. Ambos estes valores são maiores ou da ordem de magnitude das taxas de relaxação e defasagem. Portanto, a criação de fótons através de modulação de $\Omega(t)$ ou $g_0(t)$ parece possível no futuro. Nesta linha, um tópico de importância fundamental seria desenvolver um modelo quântico para o tratamento de perdas em sistemas quânticos não-estacionários, talvez seguindo as linhas gerais propostas em [307].

6.4.6 Modulação não-periódica em EDQc

Vamos considerar agora a situação em que Ω é constante e g tem uma pequena modulação temporal não-periódica. No ponto de degenerescência de carga [125] o sistema é descrito pelo Hamiltoniano de Rabi (6.32) e na representação de interação obtemos o Hamiltoniano de interação

$$H_I = g(t) (a^\dagger \sigma_+ e^{i\Delta_+ t} + a \sigma_+ e^{i\Delta_- t} + h.c.), \quad (6.65)$$

onde Δ_\pm é dado pela expressão (6.39) com $c_0 = 0$

$$\Delta_\pm = \Omega \pm \omega.$$

Nós consideramos a modulação externa bicromática da forma (supondo $\Delta_- > 0$)

$$g(t) = g_0 + 2\varepsilon \sin[(\Delta_+ - 2\xi)t] + 2\varepsilon_- \sin[(\Delta_- - 2\xi_-)t],$$

onde g_0 é o parâmetro de acoplamento não-perturbado e $|\varepsilon|, |\varepsilon_-| \ll g_0$ são pequenas amplitudes de modulação. Os dois pequenos deslocamentos de ressonância $|\xi/\Delta_+|, |\xi_-/\Delta_-| \ll 1$ são parâmetros livres, a serem determinados posteriormente. Tal modulação bicromática de g poderia tornar-se factível no futuro na área de EDQc.

A dinâmica do sistema é visualizada melhor deduzindo um Hamiltoniano efetivo, que descreve aproximadamente a dinâmica exata. No regime dispersivo, nós fazemos a aproximação de onda girante em (6.65) e obtemos o Hamiltoniano efetivo

$$H_{ef} \simeq \delta(n + 1/2) \sigma_z + (i\varepsilon e^{2i\xi t} a^\dagger \sigma_+ + i\varepsilon_- e^{2i\xi_- t} a \sigma_+ + h.c.).$$

Fazendo a transformação unitária dependente do tempo

$$U_3 = \exp \{ i [(\xi + \xi_-) \sigma_z / 2 + (\xi - \xi_-) \hat{n}] t \}, \quad (6.66)$$

obtemos o Hamiltoniano independente do tempo combinando o termo girante e o contra-girante com acoplamentos ajustáveis

$$\begin{aligned} H &\simeq U_3^{-1} H_{ef} U_3 - i U_3^{-1} \frac{\partial U_3}{\partial t} \\ &= \frac{\xi + \xi_- + \delta(1 + 2n)}{2} \sigma_z + (\xi - \xi_-) n + (i \varepsilon a^\dagger \sigma_+ + i \varepsilon_- a \sigma_+ + h.c.). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Nós supomos que os deslocamentos de ressonância são iguais, $\xi = \xi_-$, de modo a cancelar o segundo termo em (6.67). Se $\varepsilon_- = 0$ ($\varepsilon = 0$) obtemos o Hamiltoniano efetivo de Anti-Jaynes-Cummings (Jaynes-Cummings), estudado em detalhes na seção 6.4.2 (seção 6.4.3). Um regime mais interessante ocorre quando ambos, ε e ε_- , são diferentes de zero. Para $\varepsilon = \varepsilon_-$ obtemos

$$H_+ \simeq \frac{2\xi + \delta(1 + 2n)}{2} \sigma_z + i\varepsilon (a + a^\dagger) (\sigma_+ - \sigma_-), \quad (6.68)$$

enquanto que para $\varepsilon = -\varepsilon_-$ temos (6.68) com o último termo substituído por $i\varepsilon (a - a^\dagger) (\sigma_+ + \sigma_-)$. O Hamiltoniano (6.68) não pode ser integrado exatamente, portanto a seguir vamos resolvê-lo numericamente e comparar os resultados àqueles usando o Hamiltoniano inicial (6.32).

Para obter a geração de fótons a partir do estado de vácuo inicial $|g, 0\rangle$, ajustando o deslocamento de ressonância ξ , temos que fazer com que o fator que multiplica σ_z na equação (6.68) se torne tão pequeno quanto possível. Na Fig. 6.7a mostramos o número médio de fótons $\langle n \rangle$ e a inversão de população $\langle s_z \rangle$ em função do tempo adimensional εt para $\varepsilon = \varepsilon_-$ e $\xi = -\delta_0$, calculado numericamente para o Hamiltoniano inicial (6.32) e o Hamiltoniano efetivo (6.68) usando os parâmetros $\Omega/\omega = 1, 3$, $g_0/\omega = 5 \cdot 10^{-2}$ e $\varepsilon/\omega = 5 \cdot 10^{-3}$. Pode-se ver que o Hamiltoniano efetivo H_+ descreve bem a dinâmica exata, e há uma geração quase-periódica de poucos fótons, junto com a excitação atômica. Intuitivamente, isto ocorre porque para os tempos iniciais o Hamiltoniano (6.68) torna-se

$$H_+ \simeq -\sqrt{2} \varepsilon x \sigma_y,$$

onde x é o operador de quadratura do campo e σ_y é o operador de Pauli de pseudo-spin

$$x \equiv \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_y \equiv \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{i}, \quad (6.69)$$

e os fótons são gerados a partir do vácuo como função quadrática do tempo. No entanto, depois que ~ 1 fóton foi criado, o fator multiplicando σ_z em (6.68) torna-se “grande”, de modo que o processo de criação de fótons ocorre fora da ressonância e é interrompido.

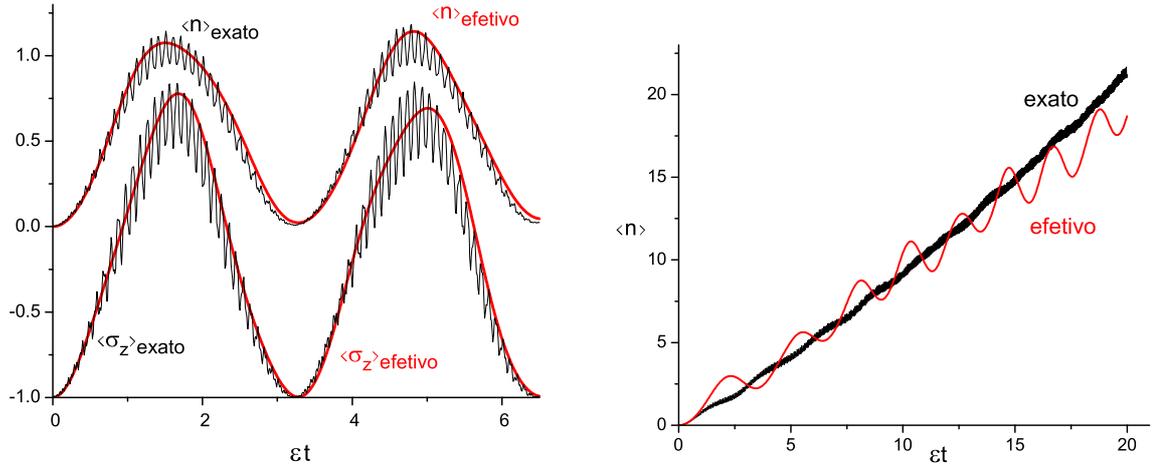


Figura 6.7: Número médio de fótons $\langle n \rangle$ e a inversão de população atômica $\langle s_z \rangle$ obtidos numericamente usando o Hamiltoniano exato [equação (6.32)] e o efetivo [equação (6.68)]. **a)** O deslocamento de ressonância é $\xi = -\delta_0$. Os resultados exatos para $\langle n \rangle$ e $\langle \sigma_z \rangle$ apresentam oscilações rápidas, enquanto que $\langle n \rangle$ e $\langle \sigma_z \rangle$ efetivos são suaves. **b)** O deslocamento de ressonância é $\xi = \tilde{\xi}(t)$ [equação (6.70)]. O resultado para $\langle n \rangle$ efetivo apresenta oscilações lentas, enquanto o resultado para $\langle n \rangle$ exato – não.

Para criar um grande número de fótons a partir do vácuo, podemos adotar a abordagem *ativa*, na qual o deslocamento de ressonância ξ é ajustado *adiabaticamente* em função do tempo (de modo que o Hamiltoniano efetivo (6.67) continue valendo). Deste modo, podemos ajustar continuamente o deslocamento de ressonância ao número de fótons na cavidade, e o termo $[2\xi + \delta(1 + 2n)]$ em (6.68) permanece “pequeno” para todos os tempos, desde que a forma funcional de ξ tenha sido escolhida apropriadamente. Na Fig. 6.7b está mostrado $\langle n \rangle$ para o Hamiltoniano inicial (6.32) e o efetivo (6.68) usando os parâmetros $\Omega/\omega = 1,4$, $g_0/\omega = 5 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon/\omega = 5 \cdot 10^{-3}$ e estabelecendo

$$\xi = \tilde{\xi}(t) = -(\delta_0 - 3g_0^2/\Delta_+)(1/2 + \varepsilon t). \quad (6.70)$$

Da Fig. 6.7b pode-se ver que um número significativo de fótons pode ser criado de vácuo, se a o deslocamento de ressonância é ajustado adiabaticamente, e o Hamiltoniano efetivo H_+ descreve bem a dinâmica exata.

Estes resultados também valem se, ao invés do parâmetro de acoplamento g , a frequência de transição atômica Ω é modulada com amplitudes de modulação ε , ε_-

e frequências Δ_+ , Δ_- , já que neste caso, para ε/Δ_+ , $|\varepsilon_-/\Delta_-| \ll 1$, a descrição formal é bastante similar àquela descrita acima, como foi explicado na seção 6.4.5. Finalmente, para obter a criação de fótons também seria possível modular de alguma forma ambos os parâmetros g e Ω simultaneamente, um com a frequência $\sim \Delta_+$, e o outro com $\sim \Delta_-$.

6.5 Conclusões

Em conclusão, estudamos o sistema de EDQc não-estacionário em que a frequência atômica, ou o acoplamento átomo-campo, têm uma pequena modulação temporal periódica, conduzida externamente. Nós mostramos que, no regime dispersivo, para modulações “ressonantes”, o Hamiltoniano de Rabi (que descreve a dinâmica do sistema) pode ser significativamente simplificado, resultando em três regimes diferentes que podem ser descritos pelos Hamiltonianos efetivos de Anti-Jaynes-Cummings, Jaynes-Cummings ou efeito Casimir dinâmico. Além disso, no regime ressonante átomo-campo, estados emaranhados com dois fótons podem ser criados do estado de vácuo $|g, 0\rangle$ sob a ressonância correspondente, analogamente ao efeito Casimir dinâmico numa cavidade vibrante contendo um átomo de 2-níveis ressonante. Estes resultados foram usados recentemente para explicar qualitativamente o fenômeno de geração de fótons devido a decoerência [294, 295] em Eletrodinâmica Quântica de cavidades e circuitos.

Nós também mostramos que a geração de fótons a partir do vácuo ocorre para uma pequena modulação temporal não-periódica do parâmetro de acoplamento entre o átomo e o campo, da frequência de transição atômica, ou ambos em EDQc não-estacionário. Nós deduzimos um Hamiltoniano efetivo para a modulação bicromática no regime dispersivo, e demonstramos que ele descreve bem a dinâmica exata. Simulações numéricas confirmaram que vários fótons podem ser criados a partir do vácuo, desde que as frequências de modulação sejam ajustadas adiabaticamente.

Este estudo ilustra a importância do termo contragirante no Hamiltoniano de Rabi, ignorado no modelo de Jaynes-Cummings – aqui este termo é responsável pela geração de fótons a partir de vácuo e a amplificação do campo. Como aplicações, este esquema poderia ser usado para verificar criação de fótons de vácuo em EDQc não-estacionário devido a um processo análogo ao efeito Casimir dinâmico usando um único

átomo artificial, bem como transferência de populações fora da ressonância entre os estados $\{|g, n\rangle, |e, n \pm 1\rangle\}$ e geração de estados emaranhados com vários fótons.

Assim, demonstramos que é possível engendrar interações efetivas em EDQc não-estacionário através de modulação dos parâmetros do sistema, e fótons podem ser criados a partir do vácuo devido ao termo contragirante no Hamiltoniano de Rabi. Muitas questões permanecem em aberto e merecem uma investigação mais detalhada. Entre elas, podemos destacar tópicos como modelo de dissipação em sistemas quânticos não-estacionários, métodos matemáticos exatos para a solução de Hamiltonianos efetivos obtidos neste capítulo, estimativa de efeitos fora do ponto de degenerescência e propostas experimentais concretas para a implementação de modulação periódica ou não-periódica dos parâmetros do sistema. Finalmente, este esquema parece interessante para estudar mais profundamente o papel do termo “contragirante” na interação radiação-matéria, bem como suas possíveis aplicações em Óptica e Informação Quântica.

Capítulo 7

Conclusões

Esta tese abordou três grandes áreas de pesquisa atuais em Óptica Quântica: teoria quântica de fotodeteção, sistemas quânticos abertos e Eletrodinâmica Quântica de cavidades e circuitos. Primeiro, revisitamos os modelos quânticos de fotodeteção, em particular o Modelo de Fotodeteção Contínua, que descreve a evolução do estado quântico do campo confinado dentro de uma cavidade junto com o detector e outros possíveis subsistemas. Esta teoria permite determinar o estado do campo após uma sequência arbitrária de eventos de contagem, junto com as suas respectivas probabilidades de ocorrência, desde que a reação (*back-action*) do detector sobre o campo seja conhecida na forma do Superoperador de Salto Quântico (SSQ).

Aqui, apresentamos um modelo microscópico realista para o fotodetector, modelando-o como um sensor quântico (idealizado como um átomo de 2-níveis ou então por um oscilador harmônico) acoplado a um mecanismo de amplificação macroscópico. A diferença entre a nossa abordagem e as anteriores é que supomos que o sensor sofre uma dinâmica não-unitária, devido ao acoplamento ao mecanismo de amplificação, e por isso o nosso modelo se aproxima mais de situações realistas em que a decoerência está ativa. Ele permitiu determinar a taxa de fotodeteção, bem como a taxa de contagens escuras, e pode ser generalizado para levar em conta outros efeitos dissipativos. Assim, acreditamos que o estudo de modelos microscópicos para fotodetectores é um tópico importante, tanto para compreender melhor o processo de medição quântica, quanto para pesquisar as possíveis limitações impostas pela mecânica quântica sobre a operação dos detectores.

Usando a abordagem de trajetórias quânticas, deduzimos o SSQ, que des-

creve o efeito do detector sobre o campo devido a uma contagem. Atualmente existem duas propostas distintas para o SSQ, que chamamos de modelo A e modelo E, que levam a previsões diferentes quanto aos resultados de experimentos de fotocontagem. O nosso modelo permitiu: (1) justificar as escolhas fenomenológicas dos SSQ, propostas originalmente *ad hoc* na literatura, e (2) identificar as suas regiões de aplicabilidade. A nossa análise sugere que o SSQ depende dos parâmetros de operação do detector, resultando em SSQ distintos para diferentes regimes de operação. Por isso, acreditamos que o nosso modelo é um passo importante para uma melhor compreensão de como o detector modifica o estado do campo devido ao monitoramento contínuo, e que suas versões mais sofisticadas possam contribuir com descobertas significativas sobre a natureza quântica da fotodeteccção, possibilitando a manipulação do estado de campo usando a opção de pós-seleção via detecção.

Também generalizamos o modelo de fotodeteccção contínua ao desenvolver um tratamento quântico para os efeitos de não-idealidade, que são corriqueiros experimentalmente, e mostramos que nos experimentos de fotodeteccção usuais pode-se fazer comparações entre os dois SSQ considerados. Em princípio, ambos os modelos podem descrever o processo de fotocontagem, então cabe a experimentadores determinar qual deles se aplica em situações concretas, ou mesmo se nenhum deles consegue descrever satisfatoriamente os resultados experimentais.

Adicionalmente, propomos outros dois esquemas experimentais para estudar em detalhes o SSQ. O primeiro usa o *setup* de Eletrodinâmica Quântica de cavidades com átomos de Rydberg, e necessita de uma cavidade com estado inicial térmico ou coerente, contendo um pequeno número médio de fótons ($\bar{n} < 1$). Neste caso, é possível determinar experimentalmente a estatística do campo na cavidade usando medições não-demolidoras via passagem de átomos de Rydberg não-ressonantes através da cavidade. O nosso esquema se resume a comparar a estatística do campo antes e depois de um evento de fotodeteccção, implementado como absorção de um fóton por um átomo de Rydberg em uma configuração qualquer. Escolhendo esta configuração apropriadamente, pode-se simular o efeito de salto quântico devido a um reservatório com uma dada distribuição de frequências e parâmetros de acoplamento. Ademais, analisamos a transição quântica-clássica para os processos de subtração/adição de fótons de/para o campo em ondas

viajantes. Nós encontramos que os SSQ que descrevem estes processos são funcionais da intensidade do feixe, e apontamos que podemos associar o operador $\hat{E}_- \equiv (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)^{-1/2} \hat{a}$ do modelo E ao operador de fotodeteção clássico, no mesmo sentido que o operador de aniquilação \hat{a} do modelo A é associado ao operador de fotodeteção quântico. Este estudo também demonstrou claramente que apenas um SSQ simples, como o de modelos A ou E, não pode ser aplicado para todos os parâmetros de operação do detector, pois inconsistências físicas ou matemáticas podem surgir. Como perspectivas gerais nesta linha de pesquisa, gostaríamos de destacar os seguintes problemas: a relação entre o processo de fotodeteção e a decoerência, transição contínua entre diferentes Superoperadores de Salto Quântico com a modificação dos parâmetros experimentais e um estudo experimental detalhado dos processos descritos nesta tese.

Como segundo tópico da tese, abordamos a questão de dedução *ab initio* de equação mestra quântica. Nós usamos uma abordagem fenomenológica para construir uma equação mestra que descreve a evolução dinâmica irreversível e dissipativa do estado de um sistema quântico, sob a influência de um ambiente não especificado. Em contraste com a abordagem *microscópica*, que modela o meio ambiente como um reservatório, constituído de um número infinito de graus de liberdade, a abordagem *fenomenológica* usa Lagrangianas com funções dissipativas e forças clássicas estocásticas. Mostramos que a equação de movimento de Newton para o sistema (um oscilador harmónico) não muda ao se introduzir duas forças em vez de uma. Porém, quando fazemos a quantização do sistema, ambas as forças tornam-se importantes, contribuindo igualmente para a dinâmica.

Nós deduzimos a equação mestra quântica que descreve o movimento Browniano, onde o meio ambiente é simulado por duas forças efetivas clássicas e uma função dissipativa, e verificamos que as equações mestras deduzidas previamente na literatura, que fazem uso de diferentes abordagens, estão contidas na nossa equação. Ao longo das longas manipulações matemáticas, não descartamos nenhum termo; portanto a dedução fenomenológica da equação mestra é tão exata quanto as outras abordagens. Isto aconteceu devido à escolha de funções de correlação na forma de funções delta. Porém, os parâmetros que aparecem na equação mestra resultante não podem ser determinados no contexto da abordagem fenomenológica. Eles devem ser estabelecidos usando dados experimentais, que reproduzem as propriedades físicas relevantes do sistema, ou de algumas

outras considerações, tais como o requerimento de satisfazer a condição de positividade do operador estatístico ou de reproduzir as propriedades no equilíbrio térmico.

Certamente, a abordagem fenomenológica usada neste trabalho tem suas limitações, porque ela foi baseada em uma Lagrangiana efetiva. Portanto, apesar de ela funcionar razoavelmente bem para sistemas unidimensionais (ou multidimensionais isotrópicos), ela irá falhar para sistemas multidimensionais genéricos com vários coeficientes de dissipação independentes, porque nenhuma Lagrangiana efetiva pode ser encontrada para tais sistemas. Mesmo assim, em certos casos ela fornece uma equivalência dos pontos de vista clássico e quântico sobre a influência de diferentes meios sobre o sistema. No futuro, seria interessante estudar que tipos de equações mestras podem ser obtidas via abordagem fenomenológica ao considerar um *ruído colorido*, que gera dissipação não-Markoviana, e como os coeficientes da equação mestra resultante poderiam ser determinados através de medidas experimentais. Tal abordagem poderá ser útil na descrição de sistemas, nos quais o reservatório não pode ser modelado como simplesmente um conjunto infinito de osciladores harmônicos ou átomos de dois-níveis, enquanto que a abordagem que emprega forças clássicas estocásticas poderia fornecer um jeito alternativo simples de descrever a dissipação fenomenologicamente neste caso.

Como o último tópico, estudamos processos não-estacionários em Eletrodinâmica Quântica de circuitos: uma área de pesquisa recente, que estuda a interação de átomos artificiais supercondutores com o campo eletromagnético a nível de poucos fótons. Nós analisamos o sistema de Eletrodinâmica Quântica de circuitos não-estacionário, quando a frequência atômica, ou o acoplamento átomo-campo, tem uma pequena modulação temporal periódica ou até mesmo não-periódica, imposta por forças externas. Atualmente, o controle da frequência atômica pode ser implementado *in situ* via campos elétrico e magnético aplicados sobre o átomo artificial, então, em princípio, a nossa proposta poderá ser testada no futuro. Como resultado principal, demonstramos que é possível engendrar interações efetivas e gerar estados não-clássicos da luz através da modulação ressonante dos parâmetros do átomo ou do acoplamento átomo-campo.

Constatamos que há pelo menos três frequências de modulação ressonantes, para as quais a dinâmica do sistema átomo-campo apresenta comportamentos qualitativamente diferentes. Estas ressonâncias têm larguras de linha muito estreitas, se comparadas

com o parâmetro de acoplamento átomo-campo, então as frequências de modulação devem ser ajustadas precisamente para que estes fenômenos possam ser verificados experimentalmente. Para (i) a ressonância de Anti-Jaynes-Cummings, a dinâmica efetiva pode ser descrita pelo Hamiltoniano correspondente, e há geração periódica de um fóton e uma excitação atômica. (ii) Para a ressonância de Jaynes-Cummings, o átomo e o campo podem trocar excitações no regime dispersivo. (iii) Para a ressonância de efeito Casimir dinâmico, pares de fótons são criados para o estado inicial de vácuo, e o campo é amplificado para outros estados também, analogamente ao efeito Casimir dinâmico. Nos três casos, a frequência efetiva de transição do átomo é uma função do número de fótons na cavidade, então alguns efeitos não-lineares aparecem, como o acoplamento seletivo de subespaços de número de fótons na interação átomo-campo e a saturação de número de fótons criados no processo análogo ao efeito Casimir dinâmico. Como aplicações, este esquema poderia ser usado para verificar a criação de fótons de vácuo em EDQc não-estacionário devido a um efeito análogo ao Casimir dinâmico, usando um único átomo artificial, bem como transferência de estados entre o átomo e o campo fora da ressonância e geração de estados não-clássicos da luz e estados emaranhados átomo-campo com vários fótons.

Este estudo demonstrou claramente que o termo “contragirante”, presente no Hamiltoniano de interação radiação-matéria, não pode ser desprezado em processos não-estacionários, e pode levar a uma física nova. Assim, devido ao termo contragirante, fótons podem ser criados para o estado inicial de vácuo. Os nossos resultados também ajudam a entender qualitativamente o processo de geração de fótons devido a decoerência em Eletrodinâmica Quântica de cavidades. Não obstante, várias questões permanecem em aberto e merecem uma investigação mais detalhada, e acreditamos que este trabalho venha a motivar estudos mais aprofundados. Os problemas mais imediatos seriam: um tratamento adequado para a dissipação em sistemas não-estacionários, esquemas para a medição da estatística dos fótons criados, física nova com átomos artificiais não-estacionários com mais de dois-níveis e análise de propostas experimentais concretas para a modulação rápida dos parâmetros do sistema. Finalmente, enfatizamos que a possibilidade de alcançar o regime de acoplamento forte destaca a área de Eletrodinâmica Quântica de circuitos no empenho para compreender melhor o papel do termo contragirante no Hamiltoniano e suas possíveis implicações em Óptica e Informação Quântica.

Apêndice A

Dissipação na cavidade e o tempo morto do detector no MFC

Primeiro vamos incluir o efeito de dissipação na cavidade no nosso tratamento. Nos experimentos de óptica quântica, o número de fótons térmicos é desprezível, de modo que podemos modelar a cavidade dissipativa através de um reservatório com temperatura nula, descrita pela equação mestra padrão [39]. Então a equação para a evolução não-condicionada no modelo A é

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = & -i\omega(n\rho - \rho n) - \frac{\lambda}{2}(n\rho + \rho n - 2\mathcal{A}\rho) \\ & - \frac{\lambda c}{2}(n\rho + \rho n - 2\mathcal{A}\rho),\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde λc é a taxa de relaxação da cavidade. Seguindo os passos da seção 4.2, podemos obter o superoperador de não-contagem

$$\hat{S}_t \rho_0 = e^{-d\lambda t} \hat{U}_t \left(e^{\tilde{q}\tilde{\phi}_t \mathcal{A}} \rho_0 \right), \quad \tilde{\phi}_t = \frac{1}{p} (1 - e^{-\lambda p t}),\tag{A.2}$$

$$p \equiv 1 + c, \quad \tilde{q} \equiv 1 - \eta + c = p - \eta.\tag{A.3}$$

O valor de c deveria ser pelo menos de ordem de 10^{-1} para tornar MFC viável. Neste caso, vemos que se tomarmos em conta o efeito da eficiência quântica menor que 1, a dissipação na cavidade não altera substancialmente as expressões resultantes. Portanto, não vamos levá-la em consideração nesta tese.

O efeito do tempo morto significa que imediatamente após o click o detector é incapaz de registrar outra contagem dentro de um intervalo pequeno de tempo

x , $\lambda x \ll 1$. No nosso formalismo, podemos descrever este efeito como a ocorrência de uma evolução não-condicionada durante o intervalo do tempo x imediatamente após a contagem, portanto o operador densidade condicionado \hat{h} (4.19) torna-se

$$\begin{aligned}\hat{h}\rho &\equiv \hat{S}_{t-t_m-x}\hat{T}_x\hat{J}\hat{S}_{t_m-t_{m-1}-x}\hat{T}_x\hat{J}\cdots\hat{J}\hat{S}_{t_1}\rho \\ &= \hat{S}_{t-t_m}\hat{\mathcal{M}}\hat{J}\hat{S}_{t_m-t_{m-1}}\hat{\mathcal{M}}\hat{J}\cdots\hat{\mathcal{M}}\hat{J}\hat{S}_{t_1}\rho,\end{aligned}\tag{A.4}$$

onde o superoperador de tempo morto, sob a condição $\lambda x \ll 1$, é

$$\hat{\mathcal{M}} \equiv \hat{S}_{-x}\hat{T}_x = \exp(x\hat{J})\tag{A.5}$$

para ambos os modelos A e E.

No modelo A o superoperador de tempo morto resultante é não-limitado, da mesma forma que \hat{J} , portanto ele pode trazer algumas inconsistências matemáticas. Por exemplo, o superoperador de m -contagens, levando em conta o efeito do tempo morto, é dado por

$$\hat{N}_t(m) = \hat{S}_t \frac{[d\lambda t + e^{d\lambda x} \hat{z} / (p\phi_z)]^m}{m!},\tag{A.6}$$

onde

$$\hat{z} \equiv e^{\eta\phi_x\mathcal{A}} - e^{\eta\phi_x\mathcal{A}\exp(-p\lambda t)}.\tag{A.7}$$

Se calcularmos, por exemplo, $\text{Tr} \left[\sum_m m^k \hat{N}_t(m)\rho \right]$ vamos encontrar um resultado divergente, porque \hat{z} cresce muito mais rapidamente que os termos decrescentes.

No modelo, E \hat{J} é um superoperador limitado, e as correções de tempo morto serão de ordem de $\eta\lambda x \ll 1$, muito menos relevante que o efeito de EQ não-unitária.

Apêndice B

Cálculo de expressões para modelos A e E

Neste apêndice vamos deduzir as expressões gerais para os modelos A e E e as calculamos para um operador densidade geral $\rho = \sum p_n |n\rangle\langle n|$ (os elementos não-diagonais não contribuem para o traço nas expressões abaixo). Vamos analisar três estados do campo em particular: o estado coerente,

$$p_n = e^{-\bar{n}} \bar{n}^n / n!, \quad \overline{n(n-1)} = \bar{n}^2,$$

o estado de número,

$$p_n = \delta_{n,\bar{n}} \quad \text{para } \bar{n} \text{ inteiro},$$

e o estado térmico,

$$p_n = (1 - \alpha) \alpha^n, \quad \alpha = \bar{n} / (\bar{n} + 1), \quad \overline{n(n-1)} = 2\bar{n}^2.$$

No modelo A, a formula (4.31) resulta em:

- estado coerente

$$\Phi_k^W = \bar{n}^k \exp[-\eta \bar{n} \phi_\tau e^{-\lambda t}] \quad (\text{B.1})$$

- estado de número

$$\Phi_k^W = \frac{\bar{n}!}{(\bar{n} - k)!} (1 - \eta \phi_\tau e^{-\lambda t})^{\bar{n} - k} \quad (\text{B.2})$$

- estado térmico

$$\Phi_k^W = \frac{k!(1-\alpha)\alpha^k}{[1-\alpha(1-\eta\phi_\tau e^{-\lambda t})]^{k+1}}. \quad (\text{B.3})$$

A fórmula (4.50) fornece $N_{CAV} = \bar{n}e^{-\lambda t}$ para todos os estados.

No modelo E precisamos expandir os superoperadores como séries de \mathcal{E} e calcular as somas. Para equações (4.45) e (4.46) obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= \frac{e^{-\lambda t}}{\bar{n}} \sum_{n,l,m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} p_{n+l+m+k} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{\bar{n}} \sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1) \frac{(\lambda t)^m}{m!} p_{n+m+k} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{2e^{-\lambda t}}{n(n-1)} \sum_{n,l,m=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^m}{m!} p_{n+l+m+1} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{n(n-1)} \sum_{n,m=0}^{\infty} n(n-1) \frac{(\lambda t)^m}{m!} p_{n+m}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Para o cálculo do tempo de espera médio (4.47), precisamos calcular as seguintes expressões

$$\text{Tr} \left[\Lambda_0 \left(\frac{\mathcal{E}^k}{1-q\mathcal{E}} e^{\lambda\mathcal{E}\beta} \rho \right) \Lambda_0 \right] = \Psi_k(q, \beta). \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Tr}[\mathcal{E}^k e^{\lambda\mathcal{E}\beta} \rho] = \Psi_k(q=1, \beta), \quad (\text{B.7})$$

onde

$$\Psi_k(q, \beta) \equiv \sum_{n,l=0}^{\infty} q^n \frac{(\lambda\beta)^l}{l!} p_{n+l+k}. \quad (\text{B.8})$$

- Para o estado térmico podemos calcular diretamente as expressões obtidas na seção 4.1.3 usando a relação de “auto-operador” $\mathcal{E}\rho = \alpha\rho$ e $\text{Tr}[\Lambda_0\rho\Lambda_0] = p_0$.
- Para o estado coerente, usamos a fórmula $\sum_{k=0}^{\infty} x^k / [k!(k+n)!] = I_n(2\sqrt{x})/x^{n/2}$, onde $I_k(x)$ é a função de Bessel modificada [308], para obter

$$\Sigma_k = \frac{e^{-\lambda t - \bar{n}}}{\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sqrt{\frac{\bar{n}}{\lambda t}}^{\bar{n}+k} I_{n+k}(2\sqrt{\bar{n}\lambda t}), \quad (\text{B.9})$$

$$\Omega = \frac{e^{-\lambda t - \bar{n}}}{n(n-1)} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \sqrt{\frac{\bar{n}}{\lambda t}}^{\bar{n}} I_n(2\sqrt{\bar{n}\lambda t}), \quad (\text{B.10})$$

$$\Psi_k(q, \beta) = e^{-\bar{n}} \sqrt{\frac{\bar{n}}{\lambda t}}^k \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\bar{n} q^2}{\lambda t}}^n I_{n+k}(2\sqrt{\bar{n}\lambda t}), \quad (\text{B.11})$$

As séries acima podem ser transformadas em integrais finitas usando a expressão

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k I_{k+\nu}(z) = \frac{e^{tz/2}}{z^\nu} \int_0^z \tau^\nu e^{-t\tau^2/(2z)} I_{\nu-1}(\tau) d\tau,$$

que é válida para $\text{Re}(\nu) > 0$.

- Para o estado de número, usando $\sum_{k=0}^n x^k/k! = e^x \Gamma(n+1, x)/n!$, onde $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ é a função Gamma complementar incompleta [308], nós obtemos

$$\Sigma_k = \frac{\Gamma(\bar{n} - k + 2, \lambda t) - \lambda t \Gamma(\bar{n} - k + 1, \lambda t)}{\bar{n}(\bar{n} - k)!}, \quad (\text{B.12})$$

$$\Omega = \frac{\Gamma(\bar{n} + 1, \lambda t) - 2\lambda t \Gamma(\bar{n}, \lambda t) + (\lambda t)^2 \Gamma(\bar{n} - 1, \lambda t)}{n(n-1)(\bar{n}-2)!}, \quad (\text{B.13})$$

$$\Psi_k(q, \beta) = q^{\bar{n}-k} e^{\lambda\beta/q} \frac{\Gamma(\bar{n} - k + 1, \lambda\beta/q)}{(\bar{n} - k)!}.$$

Apêndice C

Expressões para subtração e adição de fótons em ondas viajantes

C.1 Expressões para subtração de fótons

(a) O estado coerente $|\alpha\rangle$ é insensível ao resultado do detector, já que ele é um auto-estado do operador de abaixamento a que aparece na equação (4.62). Portanto o estado pós-selecionado resultante ainda é um estado coerente $|\alpha \cos \vartheta\rangle$, embora tendo a intensidade do campo atenuada. Obtemos a seguinte expressão para a distribuição de número de fótons do estado pós-selecionado

$$p'_{n,SDk} = p'_{n,CDk} = e^{-n_0 T} (n_0 T)^n / n!. \quad (\text{C.1})$$

Os momentos fatoriais normalizados no estado pós-selecionado são os mesmos para ambos os detectores,

$$\langle n \rangle_{\mathcal{D}k} / n_0 = T, \quad \langle n(n-1) \rangle_{\mathcal{D}k} / n_0^2 = T^2, \quad (\text{C.2})$$

apesar de as probabilidades de subtração, associadas aos dois detectores, serem diferentes

$$P_{CDk} = e^{-n_0 R} \frac{(n_0 R)^k}{k!}, \quad P_{SDk} = 1 - e^{-n_0 R} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(n_0 R)^l}{l!}. \quad (\text{C.3})$$

(b) Para o estado térmico, as distribuições de número de fótons do estado pós-selecionado para detectores de k fótons com ou sem resolução são

$$p'_{n,CDk} = \binom{n+k}{n} \left(\frac{1+n_0 R}{1+n_0} \right)^{k+1} \left(\frac{n_0 T}{1+n_0} \right)^n \quad (\text{C.4})$$

$$p'_{n,SDk} = \left(\frac{1+n_0R}{n_0R} \right)^k \left[\frac{(n_0T)^n}{(1+n_0T)^{n+1}} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+l}{n} \left(\frac{n_0R}{1+n_0} \right)^l \frac{(n_0T)^n}{(1+n_0)^{n+1}} \right]. \quad (\text{C.5})$$

A probabilidade de subtração de k fótons é

$$P_{\mathcal{D}k} = \frac{(n_0R)^k}{(1+n_0R)^{k+1-v}}, \quad (\text{C.6})$$

e os momentos fatoriais normalizados mais baixos são

$$\frac{\langle n \rangle_{\mathcal{D}k}}{n_0} = T \frac{1+k+vn_0R}{1+n_0R} \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\langle n(n-1) \rangle_{\mathcal{D}k}}{n_0^2} = T^2 \frac{(1+k)(2+k) + 2vn_0R(2+k+n_0R)}{(1+n_0R)^2}, \quad (\text{C.8})$$

onde $v = 1$ para SDk e $v = 0$ para CDk .

(c) Para a “luz mista” e o detector sem resolução SDk , as expressões resultantes são bastante extensas, então mostramos explicitamente apenas os resultados para $k = 1$,

$$P_{SD1} = 1 - \frac{e^{-x}}{1+Rn_t} \quad (\text{C.9})$$

$$\langle n \rangle_{SD1} = P_{SD1}^{-1} T \left[n_0 - e^{-x} \frac{n_0 + Rn_t^2}{(1+Rn_t)^3} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$\langle n(n-1) \rangle_{SD1} = P_{SD1}^{-1} T^2 \left\{ n_0^2 + n_t(n_0 + n_c) - e^{-x} \frac{n_0^2 + 2n_c n_t + n_t^2(1+4Rn_0 + 2R^2n_t^2)}{(1+Rn_t)^5} \right\}, \quad (\text{C.11})$$

onde $x \equiv Rn_c/(1+Rn_t)$. Para CDk as expressões correspondentes são bastante simples para qualquer valor de k

$$P_{CDk} = e^{-x} \frac{(Rn_t)^k}{(1+Rn_t)^{k+1}} L_k \quad (\text{C.12})$$

$$\langle n \rangle_{CDk} = \frac{n_t T}{1+Rn_t} \left[z - k \frac{L_{k-1}}{L_k} \right] \quad (\text{C.13})$$

$$\langle n(n-1) \rangle_{CDk} = \left(\frac{n_t T}{1+Rn_t} \right)^2 \left\{ z(1+z) - y - \frac{2kzL_{k-1}}{L_k} + \frac{k(k-1)L_{k-2}}{L_k} \right\} \quad (\text{C.14})$$

onde $L_k \equiv L_k(y)$, $y \equiv -n_c/[n_t(1+Rn_t)]$ e $z \equiv 1+2k-y$.

C.2 Expressões para subtração de fótons sequencial

Para a contagem sequencial, no caso mais simples, $k = 2$, obtemos:

(a) Para um estado coerente $p'_{n,S_2} = e^{-n_0 T^2} (n_0 T^2)^n / n!$ e

$$P_{S_2} = e^{-n_0 R(1+T)} (e^{n_0 RT} - 1) (e^{n_0 R} - 1)$$

$$\frac{\langle n \rangle_{S_2}}{n_0} = T^2, \quad \frac{\langle n(n-1) \rangle_{S_2}}{n_0^2} = T^4. \quad (C.15)$$

(b) Para um estado térmico

$$p'_{n,S_2} = g_1^{-1} \left[\frac{(n_0 T^2)^n}{(1 + n_0 T^2)^{n+1}} - \frac{(n_0 T^2)^n}{(1 + n_0 T)^{n+1}} \right. \\ \left. - \frac{(n_0 T^2)^n}{[1 + n_0(1 - RT)]^{n+1}} + \frac{(n_0 T^2)^n}{(1 + n_0)^{n+1}} \right] \quad (C.16)$$

e

$$P_{S_2} = g_1, \quad \frac{\langle n \rangle_{S_2}}{n_0} = T^2 \frac{g_2}{g_1}, \quad \frac{\langle n(n-1) \rangle_{S_2}}{n_0^2} = 2T^4 \frac{g_3}{g_1}, \quad (C.17)$$

onde

$$g_n \equiv 1 - [1 + n_0 R]^{-n} - [1 + n_0 RT]^{-n} + [1 + n_0 R(1 + T)]^{-n}. \quad (C.18)$$

Estas expressões são bem diferentes daquelas que foram obtidas no apêndice

C.1.

C.3 Expressões para adição de fótons

(a) Para um estado coerente e o detector de um fóton sem resolução obtemos

$$p'_{n,S_{\mathbb{D}1}} = P_{S_{\mathbb{D}1}}^{-1} t e^{-n_0} \left[(rt)^n L_n \left(-\frac{n_0}{r} \right) - \frac{(n_0 t)^n}{n!} \right] \quad (C.19)$$

$$P_{S_{\mathbb{D}1}} = 1 - t e^{-r t n_0} \quad (C.20)$$

$$\frac{\langle n \rangle_{S_{\mathbb{D}1}}}{n_0} = \frac{1 + r + r/n_0 - t^2 e^{-r t n_0}}{P_{S_{\mathbb{D}1}}} \quad (C.21)$$

$$\frac{\langle n(n-1) \rangle_{S_{\mathbb{D}1}}}{n_0^2} = \frac{t^{-2} + 4r/(n_0 t) + 2r^2/n_0^2 - t^3 e^{-r t n_0}}{P_{S_{\mathbb{D}1}}}, \quad (C.22)$$

onde $L_n(\cdot)$ denota um polinómio de Laguerre. As expressões resultantes para os modelos

A_+ e E_+ são

$$\langle n \rangle_{A_1} / n_0 = 1 + n_0^{-1} + (n_0 + 1)^{-1} \quad (C.23)$$

$$\langle n(n-1) \rangle_{\mathbb{A}1} / n_0^2 = 1 + 4n_0^{-1} \quad (\text{C.24})$$

$$\langle n(n-1) \rangle_{\mathbb{E}1} / n_0^2 = 1 + 2n_0^{-1}. \quad (\text{C.25})$$

(b) Para um estado térmico e o detector de um fóton sem resolução temos

$$p'_{n,S\mathbb{D}1} = P_{S\mathbb{D}1}^{-1} t \left[\frac{(rt + n_0)^n}{(1 + n_0)^{n+1}} - \frac{(n_0 t)^n}{(1 + n_0)^{n+1}} \right] \quad (\text{C.26})$$

$$P_{S\mathbb{D}1} = \frac{rt(1 + n_0)}{1 + n_0 rt} \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\langle n \rangle_{S\mathbb{D}1}}{n_0} = \frac{(t^{-1} + r/n_0) - [t/(n_0 rt + 1)]^2}{P_{S\mathbb{D}1}} \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\langle n(n-1) \rangle_{S\mathbb{D}1}}{n_0^2} = 2 \frac{(t^{-1} + r/n_0)^2 - [t/(n_0 rt + 1)]^3}{P_{S\mathbb{D}1}}. \quad (\text{C.29})$$

Para o detector de um fóton com resolução obtemos

$$p'_{n,C\mathbb{D}1} = \frac{(1 + n_0 rt)^2}{t n_0} n \frac{(n_0 t)^n}{(1 + n_0)^{n+1}} \quad (\text{C.30})$$

$$P_{C\mathbb{D}1} = \frac{rt^2(1 + n_0)}{(1 + n_0 rt)^2} \quad (\text{C.31})$$

$$\frac{\langle n \rangle_{C\mathbb{D}1}}{n_0} = \frac{1 + t + n_0^{-1}}{1 + n_0 rt} \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\langle n(n-1) \rangle_{C\mathbb{D}1}}{n_0^2} = 2t \frac{2 + t + 2n_0^{-1}}{(1 + n_0 rt)^2}. \quad (\text{C.33})$$

As expressões para os modelos \mathbb{A}_+ e \mathbb{E}_+ são

$$\langle n \rangle_{\mathbb{A}1} / n_0 = 2 + n_0^{-1} \quad (\text{C.34})$$

$$\langle n(n-1) \rangle_{\mathbb{A}1} / n_0^2 = 6 + 4n_0^{-1} \quad (\text{C.35})$$

$$\langle n(n-1) \rangle_{\mathbb{E}1} / n_0^2 = 2 + 2n_0^{-1}. \quad (\text{C.36})$$

Apêndice D

Dedução da equação mestra fenomenológica

Iterando a equação (5.43) mais uma vez obtemos a solução formal

$$\tilde{\rho}_t = \hat{\rho}_0 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 \left[\tilde{W}(t_1), \hat{\rho}_0 \right] + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[\tilde{W}(t_1), \left[\tilde{W}(t_2), \hat{\rho}_0 \right] \right], \quad (\text{D.1})$$

e derivando-a em relação a tempo obtemos a equação (5.44). Usando o lado direito da equação (D.1) para $\tilde{\rho}_{t'}$, inserindo-o no lado direito da equação (5.44) e mantendo os termos de ordem par em \tilde{W} (porque apenas os termos de ordem par sobrevivem após a média sobre o ensemble), a equação (5.44) pode ser escrita como uma série infinita

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt' \left[\tilde{W}(t), \left[\tilde{W}(t'), \hat{\rho}_0 + \frac{1}{(i\hbar)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_0^{t'} dt_1 \int_0^{t_1} dt'_1 \left[\tilde{W}(t_1), \left[\tilde{W}(t'_1), \hat{\rho}_0 \right] \right] + \dots \right] \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt' \left[\tilde{W}(t), \left[\tilde{W}(t'), \hat{\rho}_0 \right] \right] \\ &\quad + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt' \left[\tilde{W}(t), \left[\tilde{W}(t'), \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^{2k}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_0^{t'} dt_1 \int_0^{t_1} dt'_1 \dots \int_0^{t'_{k-1}} dt_k \int_0^{t_k} dt'_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[\tilde{W}(t_1), \left[\tilde{W}(t'_1), \dots \left[\tilde{W}(t_k), \left[\tilde{W}(t'_k), \hat{\rho}_0 \right] \right] \right] \right] \right] \right], \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

com $t'_0 \equiv t'$. Fazendo uma média sobre o termo quadrático em $\tilde{W}(\cdot)$ da equação (D.2), obtemos os quatro termos da equação (5.51). Tomando uma média sobre o termo quártico em $\tilde{W}(\cdot)$,

$$\frac{1}{(i\hbar)^4} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt_1 \int_0^{t_1} dt'_1 \overline{\left[\tilde{W}(t), \left[\tilde{W}(t'), \left[\tilde{W}(t_1), \left[\tilde{W}(t'_1), \hat{\rho}_0 \right] \right] \right] \right] \right]},$$

obtemos dezesseis termos, que juntos com os quatro termos da equação (5.51) levam a expressão

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(i\hbar)^2} \left\{ A_t e^{2\Gamma t} [\tilde{x}(t), [\tilde{x}(t), \tilde{\rho}_t]] \right. \\ & + C_t t e^{\Gamma t} \left([\tilde{x}(t), [\tilde{P}(t), \tilde{\rho}_t]] + [\tilde{P}(t), [\tilde{x}(t), \tilde{\rho}_t]] \right) \\ & \left. + B_t [\tilde{P}(t), [\tilde{P}(t), \tilde{\rho}_t]] \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{t'} &= \hat{\rho}_0 + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^{t'} dt'' \left\{ A_{t''} e^{2\Gamma t''} [\tilde{x}_{t''}, [\tilde{x}_{t''}, \hat{\rho}_0]] \right. \\ & + C_{t''} e^{\Gamma t''} \left([\tilde{x}_{t''}, [\tilde{P}_{t''}, \hat{\rho}_0]] + [\tilde{P}_{t''}, [\tilde{x}_{t''}, \hat{\rho}_0]] \right) \\ & \left. + B_{t''} [\tilde{P}_{t''}, [\tilde{P}_{t''}, \hat{\rho}_0]] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Finalmente, depois de fazer a média e coletar todos os termos na equação (D.2) obtém-se a equação mestra na representação de interação

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \left\{ A_t e^{2\Gamma t} [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_t, \tilde{\rho}_t]] + B_t [\tilde{P}_t, [\tilde{P}_t, \tilde{\rho}_t]] \right. \\ & \left. + C_t e^{\Gamma t} \left([\tilde{x}_t, [\tilde{P}_t, \tilde{\rho}_t]] + [\tilde{P}_t, [\tilde{x}_t, \tilde{\rho}_t]] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

que é exata. Notem que no lado direito de equação (D.3) o operador densidade é independente do tempo, enquanto que ele é dependente do tempo na equação (D.4).

Para ilustrar os cálculos, vamos considerar um exemplo de termos quárticos de forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(i\hbar)^4} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_0^{t''} dt''' \exp(\Gamma t + \Gamma t' + \Gamma t'' + \Gamma t''') \\ & \times \overline{F_t F_{t'} F_{t''} F_{t'''} [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_{t'}, [\tilde{x}_{t''}, [\tilde{x}_{t'''}, \hat{\rho}_0]]]]}. \end{aligned}$$

Eles fornecem os seguintes termos na equação mestra:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} &= \frac{2}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt_2 e^{\Gamma_t + \Gamma_{t_2}} A_t \delta(t - t_2) [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_{t_2}, \hat{\rho}_0]] \\
 &+ \frac{2^2}{(i\hbar)^4} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 e^{\Gamma_t + \Gamma_{t_2} + \Gamma_{t_3} + \Gamma_{t_4}} \\
 &\times [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_{t_2}, [\tilde{x}_{t_3}, [\tilde{x}_{t_4}, \hat{\rho}_0]]]] \\
 &\times \{A_t \delta(t - t_2) A_{t_3} \delta(t_3 - t_4) \\
 &+ A_t \delta(t - t_3) A_{t_2} \delta(t_2 - t_4) \\
 &+ A_{t_2} \delta(t_2 - t_3) A_t \delta(t - t_4)\} + \dots .
 \end{aligned}$$

Devido ao ordenamento temporal $t \geq t_2 \geq t_3 \geq t_4$, apenas os produtos de funções delta $\delta(t - t_2) \delta(t_3 - t_4)$ contribuem para a integral, e em geral

$$\overline{F_{t_1} F_{t_2} \dots F_{t_{2n}}} \equiv 2^n \prod_{i=1}^n A_{t_{2i-1}} \delta(t_{2i-1} - t_{2i}). \quad (\text{D.5})$$

Portanto, os termos proporcionais ao coeficiente A_t podem ser combinados da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\rho}_t}{dt} &= \frac{A_t}{(i\hbar)^2} e^{2\Gamma_t} [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_t, \hat{\rho}_0]] + \frac{2^2 A_t}{(i\hbar)^4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{2\Gamma_t} \\
 &\times \int_0^t dt_3 A_{t_3} e^{2\Gamma_{t_3}} [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_{t_3}, [\tilde{x}_{t_3}, \hat{\rho}_0]]]] + \dots \\
 &= \frac{A_t}{(i\hbar)^2} e^{2\Gamma_t} [\tilde{x}_t, [\tilde{x}_t, \tilde{\rho}_t]], \quad (\text{D.6})
 \end{aligned}$$

se notarmos que

$$\tilde{\rho}_t = \hat{\rho}_0 + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt_3 A_{t_3} e^{2\Gamma_{t_3}} [\tilde{x}_{t_3}, [\tilde{x}_{t_3}, \hat{\rho}_0]] + \dots .$$

O fator $1/2$ na primeira linha de (D.6) ocorre devido à integração da função *delta* de Dirac sobre um intervalo semi-infinito. Nós enfatizamos que a equação (D.6) é exata sob a suposição (5.46), porque nenhum termo foi desprezado.

Retornando ao operador original $\hat{\rho}_t$ com a ajuda da transformação (5.39), chegamos na equação (5.52).

Referências Bibliográficas

- [1] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, 3rd edition (Oxford University Press, New York, 2000).
- [2] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer-Verlag, Berlin, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1954).
- [3] L. Mandel, Proc. Phys. Soc. **72**, 1037 (1958).
- [4] R. J. Glauber, *Quantum Optics and Electronics*, edited by C. De Witt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon & Breach, New York, 1965), p.63.
- [5] L. Mandel, Opt. Acta **28**, 1447 (1981).
- [6] P. L. Kelley and W. H. Kleiner, Phys. Rev. **136**, A316 (1964).
- [7] B. R. Mollow, Phys. Rev. **162**, 1256 (1967); **168**, 1896 (1968).
- [8] M. O. Scully and W. E. Jr. Lamb, Phys. Rev. **179**, 368 (1969).
- [9] V. Peřinová and A. Lukš, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (Elsevier, Amsterdam, 2000), Vol. 40, p. 115.
- [10] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [11] W. Pauli, *Die Allgemeine Prinzipien der Wellenmechanik*, Enciclopedia of Physics (Springer-Verlag, Berlin, 1958), Vol. 5.
- [12] T. J. Shepherd, Opt. Acta **28**, 567 (1981); **31**, 1399 (1984).

- [13] A. Selloni, P. Schweindimann, A. Quattropani, and H. P. Baltes, *J. Phys. A* **11**, 1427 (1978).
- [14] M. D. Srinivas and E. B. Davies, *Opt. Acta* **28**, 981 (1981); **29**, 235 (1982).
- [15] M. C. de Oliveira, L. F. da Silva, and S. S. Mizrahi, *Phys. Rev. A* **65**, 062314 (2002).
- [16] G. A. Pratavera and M. C. de Oliveira, *Phys. Rev. A* **70**, 011602(R) (2004).
- [17] H. Saito and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **68**, 043820 (2003).
- [18] K.-H. Li, *Phys. Rep.* **134**, 1 (1986).
- [19] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [20] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [21] D. Bouwmeester J.-W Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997).
- [22] T. Pellizzari, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5242 (1997).
- [23] N. Gisin, G. G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 145 (2002).
- [24] H. J. Briegel, W. Dur, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5932 (1998).
- [25] E. Knill, L. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature* **409**, 46 (2001).
- [26] L. Mandel, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1963), Vol. 2, p. 181.
- [27] M. Sargent III, M. O. Scully, and W. E. Jr. Lamb, *Laser Physics*, (Addison-Wesley, Reading, 1974).
- [28] E. B. Davies, *Commun. Math. Phys.* **15**, 277 (1969).
- [29] E. B. Davies, *Helv. phys. Acta* **48**, 365 (1975).
- [30] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, (New York: Academic Press, 1976).
- [31] E. B. Davies, *I. E. E. E. Trans. Inform. Theory* **23**, 530 (1977).

- [32] M. D. Srinivas, J. Math. Phys **18**, 2138 (1977).
- [33] M. D. Srinivas, J. Math. Phys **16**, 1672 (1975).
- [34] E. B. Davies and J. T. Lewis, Commun. Math. Phys. **17**, 239 (1979).
- [35] M. Ueda, N. Imoto, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **41**, 6331 (1990).
- [36] M. Ueda, N. Imoto, and H. Nagaoka, Phys. Rev. A **53**, 3808 (1996).
- [37] M. Ueda, M. Kitagawa, Phys. Rev. Lett. **68**, 3424 (1992).
- [38] M. Ban, Phys. Rev. A **49**, 4142 (1994).
- [39] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [40] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
- [41] M. B. Plenio and P. L. Knight, Rev. Mod. Phys **70**, 101 (1998).
- [42] P. Zoller, M. Marte, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **35**, 198 (1987).
- [43] P. Warszawski and H. M. Wiseman, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, 1, 15 (2003).
- [44] T. A. Brun, Phys. Rev. A **61**, 042107 (2000).
- [45] A. Lukš, V. Peřinová, and J. Křepelka, Phys. Rev. A **62**, 033806 (2000).
- [46] G. N. Jones and C. T. Lee, J. Mod. Opt. **45**, 283 (1998).
- [47] M. Ban, Phys. Rev. A **51**, 1604 (1995).
- [48] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **47**, 642 (1993).
- [49] G. J. Milburn and D. F. Walls, Phys. Rev., A **30**, 56 (1984).
- [50] D. F. Walls, M. J. Collet, and G. J. Milburn, Phys. Rev. D **32**, 3208 (1985).
- [51] M. Takeoka, M. Sasaki, P. van Loock, and N. Lütkenhaus, Phys. Rev. A **71**, 022318 (2005).
- [52] J. Calsamiglia, S. M. Barnett, N. Lütkenhaus, and K.-A. Suominen, Phys. Rev. A **64**, 043814 (2001).

- [53] G. C. Hegerfeldt, Phys. Rev. A **47**, 449 (1993).
- [54] V. Peřinová, A. Lukš, and J. Křepelka, Phys. Rev. A **54**, 821 (1996).
- [55] G. S. Agarwal, M. Graf, M. Orszag, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A **49**, 4077 (1994).
- [56] T. Ogawa, M. Ueda, and N. Imoto, Phys. Rev. Lett. **66**, 1046 (1991).
- [57] T. Ogawa, M. Ueda, and N. Imoto, Phys. Rev. A **43**, 6458 (1991).
- [58] C. A. Holmes, G. J. Milburn, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **39**, 2493 (1989).
- [59] T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro, and S. Glancy, Phys. Rev. A **68**, 042319 (2003).
- [60] C. T. Lee, Phys. Rev. A **48**, 2285 (1993); **49**, R633 (1994).
- [61] F. Davidson and L. Mandel, J. Appl. Phys **39**, 62 (1967).
- [62] R. Barakat and J. Blake, Phys. Rep. **60**, 225 (1980).
- [63] J. R. Glauber, Phys. Rev. Lett **10**, 84 (1963); Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); **131**, 2766 (1963).
- [64] M. D. Srinivas, *Coherence and Quantum Optics IV*, edited by L. Mandel and E. Wolf (Plenum, New York, 1978), p.885.
- [65] A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **7**, 99 (2005).
- [66] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley & Sons Inc., New York, 1973).
- [67] M. C. de Oliveira, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, J. Opt. B **5**, S271 (2003).
- [68] Y. Ben-Aryeh and C. Brif, e-print: quant-ph/9504009 (1995).
- [69] L. Susskind and J. Glogower, Physics (Long Island City, N. Y.) **1**, 49 (1964).
- [70] P. Carruthers and M. M. Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968).
- [71] A. Vourdas, Phys. Rev. A **45**, 1943 (1992).

- [72] V. Peřinová, A. Lukš, and J. Peřina, *Phase in Optics* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [73] A. Wünsche, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **3**, 206 (2001).
- [74] N. Imoto, M. Ueda, and T. Ogawa, *Phys. Rev. A* **41**, R4127 (1990).
- [75] A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **72**, 023816 (2005).
- [76] A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **74**, 033823 (2006).
- [77] A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **84**, 012005 (2007).
- [78] S. S. Mizrahi, A. V. Dodonov, and V. V. Dodonov, *AIP Conf. Proc.* **992**, 1306 (2008).
- [79] A. Migdall and J. Dowling (eds.), Special issue of *J. Mod. Opt.* **51**, issue 9 & 10 (2004).
- [80] Wikipedia, *Photomultiplier*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Photomultiplier>.
- [81] Burle Industries Inc., *Photomultiplier handbook* (1980),
<http://www.burle.com/cgi-bin/byteserver.pl/pdf/Photo.pdf>.
- [82] S. Komiyama, O. Astafiev, V. Antonov, T. Kutsuwa, and H. Hirai, *Nature* **403**, 405 (2000).
- [83] A. Rochas, M. Gani, B. Furrer, P. A. Besse, R. S. Popovic, G. Ribordy, and N. Gisin, *Rev. Sci. Instr.* **74**, 3263 (2003).
- [84] P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, R. Y. Chiao, P. H. Eberhard, and M. D. Petroff, *Phys. Rev. A* **48**, R867 (1993).
- [85] A. Korneev *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 5338 (2004).
- [86] A. Karlsson, M. Bourennane, G. Ribordy, H. Zbinden, J. Brendel, J. Rarity, and P. Tapster, *IEEE Circuits and Devices Mag.* **15**, 34 (1999).
- [87] A. J. Miller, S. W. Nam, J. M. Martinis, and A. V. Sergienko, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 791 (2003).
- [88] S. Takeuchi, J. Kim, Y. Yamamoto, and H. H. Hogue, *Appl. Phys. Lett.* **74**, 1063 (1999).
- [89] G. Karve *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 063505 (2005).
- [90] J. Kitaygorsky *et al.*, *IEEE Trans. Appl. Superconductivity* **15**, 545 (2005).

- [91] A. Verevkin *et al.*, Appl. Phys. Lett. **80**, 4687 (2002).
- [92] A. Korneev *et al.*, Microelectronic Engineering **69**, 274 (2003).
- [93] M. Ueda, N. Imoto, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **41**, 3891 (1990).
- [94] M. Ueda, N. Imoto, H. Nagaoka, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **46**, 2859 (1992).
- [95] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [96] J. D. Cresser and S. M. Pickles, Quantum Semiclassical Opt. **8**, 73 (1996).
- [97] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, Europhys. Lett. **1**, 441 (1986).
- [98] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1994).
- [99] V. V. Dodonov and A. B. Klimov, Phys. Rev. A **53**, 2664 (1996); A. S. M. de Castro, V. V. Dodonov, and S. S. Mizrahi, J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **4**, S191 (2002); A. S. M. de Castro, J. F. Peruzzo, and V. V. Dodonov, Phys. Rev. A **71**, 032319 (2005).
- [100] L. E. Estes, T. H. Keil, and L. M. Narducci, Phys. Rev. **175**, 286 (1968).
- [101] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *Invariants and Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, Proceedings of the Lebedev Physics Institute, Vol. 183, edited by M. A. Markov (Nova Science, Commack, NY, 1989); V. V. Dodonov, in *Theory of Nonclassical States of Light*, edited by V. V. Dodonov and V. I. Man'ko (Taylor & Francis, London, 2003), p. 153.
- [102] M. Ban, Phys. Rev. A **47**, 5093 (1993).
- [103] J. Wei and E. Norman, J. Math. Phys. **4**, 575 (1963); R. M. Wilcox, *ibid.* **8**, 962 (1967).
- [104] S. M. Chumakov, V. V. Dodonov, and V. I. Man'ko, J. Phys. A **19**, 3229 (1986); S. V. Prants, *ibid.* **19**, 3457 (1986); G. Dattoli, S. Solimeno, and A. Torre, Phys. Rev. A **34**, 2646 (1986).
- [105] R. R. Puri, *Mathematical Methods of Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [106] *Bateman Manuscript Project: Higher Transcendental Functions*, edited by A. Erdélyi (McGraw-Hill, New York, 1953).

- [107] L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Nature* **414**, 413 (2001).
- [108] M. G. A. Paris, *Phys. Lett. A* **289**, 167 (2001).
- [109] A. Miranowicz, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 142 (2005).
- [110] J.-C. Boileau, J. Batuwantudawe, and R. Laflamme, *Phys. Rev. A* **72**, 032321 (2005).
- [111] C. Invernizzi, S. Olivares, M. G. A. Paris, and K. Banaszek, *Phys. Rev. A* **72**, 042105 (2005).
- [112] S. Panda, B. K. Panda, and S. G. Mishra, *Phys. Rev. B* **69**, 195304 (2004).
- [113] P. Warszawski and H. M. Wiseman, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, 1, 15 (2002).
- [114] Y. Kang, H. X. Lu, Y.-H. Lo, D. S. Bethune, and W. P. Risk, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 2955 (2003).
- [115] A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **75**, 013806 (2007).
- [116] S. S. Mizrahi and V. V. Dodonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 8847 (2002).
- [117] L. Mandel, *Optics Letters*, **4**, 205 (1979).
- [118] V. Parigi, A. Zavatta, M. Kim, and M. Bellini, *Science* **317**, 1890 (2007).
- [119] R. H. Hadfield *et al.*, *Opt. Expr.* **13**, 10846 (2005).
- [120] M. D. Srinivas, *PRAMANA - J. Phys.* **47**, 1 (1996).
- [121] M. Ban, *Opt. Commun.* **117**, 447 (1995).
- [122] R. Vyas and S. Singh, *Phys. Rev. A* **38**, 2423 (1988).
- [123] H. J. Carmichael, S. Singh, R. Vyas, and P. R. Rice, *Phys. Rev. A* **39**, 1200 (1989).
- [124] S. Stenholm, *Phys. Rep.* **6**, 1 (1973); H.-I. Yoo and J. H. Eberly, *ibid.* **118**, 239 (1985).
- [125] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [126] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [127] S. Gleyzes *et al.*, *Nature* **446**, 297 (2007); C. Guerlin *et al.*, *Nature* **448**, 889 (2007).

- [128] M. Brune, S. Haroche, V. Lefèvre, J. M. Raimond, and N. Zagury, Phys. Rev. Lett. **65**, 976 (1990); M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, and N. Zagury, Phys. Rev. A **45**, 5193 (1992).
- [129] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, Nature **455**, 510 (2008); M. Brune, J. Bernu, C. Guerlin, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, I. Dotsenko, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **101**, 240402 (2008).
- [130] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, Nature **400**, 239 (1999).
- [131] A. V. Dodonov and S. S. Mizrahi, Phys. Rev. A (to appear, 2009); arXiv:0901.4477 (2009).
- [132] E. J. Gansen *et al.*, Nature Photon. **1**, 585 (2007); B. E. Kardynal, Z. L. Yuan, and A. J. Shields, *ibid.* **2**, 425 (2008).
- [133] M. J. Fitch, B. C. Jacobs, T. B. Pittman, and J. D. Franson, Phys. Rev. A **68**, 043814 (2003); L. A. Jiang, E. A. Dauler, and J. T. Chang, *ibid.* **75**, 062325 (2007).
- [134] M. Martinelli and P. Martelli, Opt. Photonics News **19** (2), 30 (2008).
- [135] G. Lachs, Phys. Rev. **138**, B1012 (1965).
- [136] L. Landau, Z. Phys. **45**, 430 (1927) [English translation in *Collected papers of L. D. Landau*, edited by D. Ter Haar (Gordon & Breach, New York, 1965), p. 8].
- [137] F. Bloch, Phys. Zeit. **29**, 58 (1928).
- [138] W. Pauli, in *Probleme der Modernen Physik, Arnold Sommerfeld zum 60. Geburtstag*, edited by P. Debye (Hirzel, Leipzig, 1928), p. 30 [English translation in *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*, edited by R. Kronig and V. F. Weisskopf (Interscience Publ., New York, 1964), p. 549].
- [139] V. Weisskopf and E. Wigner, Z. Phys. **63**, 54 (1930).
- [140] L. van Hove, Physica **23**, 441 (1957).
- [141] E. W. Montroll and K. E. Shuler, J. Chem. Phys. **26**, 454 (1957).
- [142] R. W. Zwanzig, J. Chem. Phys. **28**, 365 (1958).

- [143] M. Toda, J. Phys. Soc. Japan **13**, 1266 (1958).
- [144] C. George, Physica **26**, 453 (1960).
- [145] V. M. Faïn, Zhurn. Eksp. Teor. Fiz. **42**, 1075 (1962) [Sov. Phys. – JETP **15**, 743 (1962)].
- [146] R. W. Zwanzig, Physica **30**, 1109 (1964).
- [147] W. H. Louisell and L. P. Walker, Phys. Rev. **137**, B204 (1965).
- [148] I. Oppenheim and K. E. Shuler, Phys. Rev. **138**, B1007 (1965).
- [149] P. Ullersma, Physica **32**, 56 (1966).
- [150] W. Weidlich and F. Haake, Z. Phys. **185**, 30 (1965); R. Bonifacio and F. Haake, Z. Phys. **200**, 526 (1967).
- [151] M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966).
- [152] W. H. Louisell and J. H. Marburger, IEEE J. Quant. Electron. **3**, 348 (1967).
- [153] R. J. Glauber, in *Quantum Optics. Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course XLII, Varenna, 1967*, edited by R. J. Glauber (Academic Press, New York, 1969), p. 15.
- [154] M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. **159**, 208 (1967).
- [155] A. Fuliński and W. J. Kramarczyk, Physica **39**, 575 (1968).
- [156] W. Peier, Physica **57**, 565 (1972); **58**, 229 (1972).
- [157] J. R. Brinati, B. M. Pimentel, S. S. Mizrahi, and S. A. Carias de Oliveira, Can. J. Phys. **66**, 1044 (1988); J. R. Brinati, S. S. Mizrahi, and B. M. Pimentel, Phys. Rev. A **44**, 7923 (1991).
- [158] M. R. Gallis, Phys. Rev. A **53**, 655 (1996).
- [159] H. P. Breuer, B. Kappler, and F. Petruccione, Ann. Phys. (N.Y.) **291**, 36 (2001).
- [160] Z. Haba and H. Kleinert, Eur. Phys. J. B **21**, 553 (2001).
- [161] I. R. Senitzky, Phys. Rev. **119**, 670 (1960); **124**, 642 (1961).

- [162] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2**, 407 (1961).
- [163] H. A. Haus and J. A. Mullen, *Phys. Rev.* **128**, 2407 (1962).
- [164] G. W. Ford, M. Kac, and P. Mazur, *J. Math. Phys.* **6**, 504 (1965).
- [165] R. Bausch and A. Stahl, *Z. Phys.* **204**, 32 (1967).
- [166] E. S. Hernandez and S. S. Mizrahi, *Physica A* **119**, 159 (1983).
- [167] K. Lindenberg and B. J. West, *Phys. Rev. A* **30**, 568 (1984).
- [168] C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
- [169] A. Pimpale and M. Razavy, *Phys. Rev. A* **36**, 2739 (1987).
- [170] G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell, *Phys. Rev. A* **37**, 4419 (1988).
- [171] R. L. Stratonovich, *Physica A* **236**, 335 (1997).
- [172] Z. Kanokov, Y. V. Palchikov, G. G. Adamian, N. V. Antonenko, and W. Scheid, *Phys. Rev. E*, **71**, 016121 (2005).
- [173] V. V. Dodonov, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **7**, S445 (2005); V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, *J. Russ. Laser Res.* **27**, 379 (2006).
- [174] S. A. Kalandarov, Z. Kanokov, G. G. Adamian, and N. V. Antonenko, *Phys. Rev. E* **74**, 011118 (2006).
- [175] G. S. Agarwal, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (North Holland, Amsterdam, 1973), vol. XI, p. 1.
- [176] F. Haake, *Quantum Statistics in Optics and Solid-State Physics*, Vol. 66 of Springer Tracts in Modern Physics, edited by G. Höhler (Springer-Verlag, Berlin, 1973), p. 98.
- [177] O. Penrose, *Rep. Prog. Phys.* **42**, 1937 (1979).
- [178] H. Spohn, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 569 (1980).
- [179] H. Dekker, *Phys. Rep.* **80**, 1 (1981).
- [180] P. Talkner, *Ann. Phys. (N.Y.)* **167**, 390 (1986).

- [181] H. Grabert, P. Schramm, and G.-L. Ingold, *Phys. Rep.* **168**, 115 (1988).
- [182] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [183] V. V. Dodonov and O. V. Man'ko, *Physica A* **130**, 353 (1985).
- [184] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, in *Group Theory, Gravitation and Elementary Particle Physics. Proc. Lebedev Phys. Inst., Vol. 167*, edited by A. A. Komar (Nova Science, Commack, 1987), p. 7.
- [185] A. Sandulescu and H. Scutaru, *Ann. Phys. (N.Y.)* **173**, 277 (1987); A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, E. Stefanescu, and W. Scheid, *Int. J. Mod. Phys. E* **3**, 635 (1994); A. Isar, A. Sandulescu, and W. Scheid, *Phys. Rev. E* **60**, 6371 (1999); A. Isar, *Fortschr. Phys.* **47**, 855 (1999).
- [186] G. G. Adamian, N. V. Antonenko, and W. Scheid, *Nucl. Phys. A* **645**, 376 (1999).
- [187] B. Vacchini, *J. Math. Phys.* **43**, 5446 (2002).
- [188] O. Brodier and A. M. Ozorio de Almeida, *Phys. Rev. E* **69**, 016204 (2004).
- [189] G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2273 (1985).
- [190] G. J. Papadopoulos, *J. Phys. A* **6**, 1479 (1973).
- [191] I. R. Svin'in, *Teor. Mat. Fiz.* **27**, 270 (1976) [*Theor. Math. Phys.* **27**, 478 (1977)].
- [192] H. Dekker, *Phys. Rev. A* **16**, 2126 (1977); *Physica A* **95**, 311 (1979); *Phys. Lett A* **74**, 15 (1979).
- [193] J. R. Brinati and S. S. Mizrahi, *J. Math. Phys.* **21**, 2154 (1980).
- [194] R. Alicki and J. Messer, *J. Phys. A* **15**, 3543 (1982).
- [195] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [196] R. Bausch, *Z. Phys.* **193**, 246 (1966).
- [197] A. A. Belavin, B. Y. Zel'dovich, A. M. Perelomov, and V. S. Popov, *Zhurn. Eksp. Teor. Fiz.* **56**, 264 (1969) [*Sov. Phys. – JETP* **29**, 145 (1969)].

- [198] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
- [199] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, in *Group Theoretical Methods in Physics. Proc. Second Int. Seminar, Zvenigorod, 1982*, edited by M. A. Markov, V. I. Man'ko and A. E. Shabad (Harwood Academic, London, 1985), Vol. 1, p. 705.
- [200] A. Barchielli, *Nuovo Cimento B* **74**, 113 (1983).
- [201] H. Dekker and M. C. Valsakumar, *Phys. Lett. A* **104**, 67 (1984).
- [202] G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **4**, 739 (1971).
- [203] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Physica A* **121**, 587 (1983).
- [204] F. Haake and R. Reibold, *Phys. Rev. A* **32**, 2462 (1985).
- [205] W. G. Unruh and W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **40**, 1071 (1989).
- [206] B. L. Hu, J. P. Paz, and Y. Zhang, *Phys. Rev. D* **45**, 2843 (1992); J. J. Halliwell and T. Yu, *Phys. Rev. D* **53**, 2012 (1996); R. Karrlein and H. Grabert, *Phys. Rev. E* **55**, 153 (1997); G. W. Ford and R. F. O'Connell, *Phys. Rev. D* **64**, 105020 (2001).
- [207] V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, and V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.* **16**, 1 (1995); e-print quant-ph/0210030.
- [208] C. Zerbe and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **52**, 1533 (1995); A. Pereverzev, *Phys. Rev. E* **68**, 026111 (2003); S. Maniscalco, J. Piilo, F. Intravaia, F. Petruccione, and A. Messina, *Phys. Rev. A* **70**, 032113 (2004).
- [209] F. Intravaia, S. Maniscalco, and A. Messina, *Eur. Phys. J. B* **32**, 97 (2003); S. Maniscalco, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **7**, S398 (2005).
- [210] M. Ban, *J. Phys. A* **39**, 1927 (2006); *Phys. Lett. A* **359**, 402 (2006).
- [211] L. Diósi, *Physica A* **199**, 517 (1993); P. Pechukas, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1060 (1994); W. J. Munro and C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **53**, 2633 (1996); S. Kohler, T. Dittrich, and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **55**, 300 (1997); S. M. Barnett and S. Stenholm, *Phys. Rev. A* **64**, 033808 (2001); R. F. O'Connell, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **5**, S349 (2003); A. A. Budini, *Phys. Rev. A* **69**, 042107 (2004); Y. V. Palchikov, Z. Kanokov, G. G. Adamian, N. V. Antonenko, and W. Scheid, *Phys. Rev. E* **71**, 016122 (2005); S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **72**, 024103 (2005).

- [212] M. A. Dupertuis and S. Stenholm, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1094 (1987); M. A. Dupertuis, S. M. Barnett, and S. Stenholm, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1102 (1987); R. W. F. van der Plank and L. G. Suttorp, *Eur. Phys. J. D* **3**, 183 (1998).
- [213] P. Havas, *Nuovo Cimento Suppl.* **5**, 363 (1957); G. Morandi, C. Ferrario, G. Lo Vecchio, G. Marmo, and C. Rubano, *Phys. Rep.* **188**, 147 (1990).
- [214] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, and V. D. Skarzhinsky, *Hadronic Journal* **4**, 1734 (1981); S. Okubo, *Phys. Rev. A* **23**, 2776 (1981); J. Cislo and J. Lopuszański, *J. Math. Phys.* **42**, 5163 (2001).
- [215] H. Bateman, *Phys. Rev.* **38**, 815 (1931).
- [216] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941); E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3**, 440 (1948).
- [217] E. H. Kerner, *Can. J. Phys.* **36**, 371 (1958); R. W. Hasse, *J. Math. Phys.* **16**, 2005 (1975); J. Messer, *Acta Phys. Austriaca* **50**, 75 (1979); V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *Phys. Rev. A* **20**, 550 (1979); C.-I. Um, K.-H. Yeon, and T. F. George, *Phys. Rep.* **362**, 63 (2002).
- [218] A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. E* **75**, 011132 (2007).
- [219] H. Mabuchi and A. Doherty, *Science* **298**, 1372 (2002).
- [220] S. Haroche, *Fundamental Systems in Quantum Optics*, edited by J. Dalibard, J. Raimond, and J. Zinn-Justin (Elsevier, New York, 1992), p. 767.
- [221] A. Wallraff *et al.*, *Nature* **431**, 162 (2004).
- [222] M. Sandberg, C. M. Wilson, F. Persson, G. Johansson, V. Shumeiko, T. Duty, and P. Delsing, arXiv:0801.2479.
- [223] M. A. Sillanpää, J. I Park, and R. W. Simmonds, *Nature* **449**, 438 (2007).
- [224] V. V. Dodonov, "Nonstationary Casimir effect and analytical solutions for quantum fields in cavities with moving boundaries," in: *Modern Nonlinear Optics, Advances in Chemical Physics Series*, edited by M. W. Evans (John Wiley & Sons Inc., New York, 2001), Vol. **119**, Part 1, pp. 309–394.
- [225] H. Kimble, *Cavity Quantum Electrodynamics* (Academic Press, San Diego, 1994).

- [226] E. M. Purcell, Phys. Rev. **69**, 681 (1946).
- [227] R. J. Thompson, G. Rempe, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **68**, 1132 (1992).
- [228] D. Leibfried *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).
- [229] D. Leibfried *et al.*, J. Mod. Opt. **44**, 2485 (1997).
- [230] J. P. Reithmaier *et al.*, Nature **432**, 197 (2004).
- [231] T. Yoshie *et al.*, Nature **432**, 200 (2004).
- [232] D. Englund, A. Faraon, I. Fushman, N. Stoltz, P. Petroff, and J. Vuckovic, Nature **450**, 857 (2007).
- [233] I. Fushman, D. Englund, A. Faraon, N. Stoltz, P. Petroff, and J. Vuckovic, Science **320**, 769 (2008).
- [234] A. Badolato, K. Hennessy, M. Atature, J. Dreiser, E. Hu, P. M. Petroff, and A. Imamoglu, Science **308**, 1158 (2005).
- [235] K. Hennessy, A. Badolato, M. Winger, D. Gerace, M. Atature, S. Gulde, S. Falt, E. L. Hu, and A. Imamoglu, Nature **445**, 896 (2007).
- [236] I. Chiorescu *et al.*, Nature **431**, 159 (2004).
- [237] J. Johansson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 127006 (2006).
- [238] I. Schuster, A. Kubanek, A. Fuhrmanek, T. Puppe, P. W. H. Pinkse, K. Murr, and G. Rempe, Nature Physics **4**, 382 (2008).
- [239] L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch, A. A. Houck, M. H. Devoret, E. Thuneberg, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, arXiv:0807.2882.
- [240] J. M. Fink, M. Göppl, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais, and A. Wallraff, Nature **454**, 315 (2008).
- [241] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley-VCH Verlag, Berlin, 2001).
- [242] D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. Johnson, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature **445**, 515 (2007).

- [243] P. Bertet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 200402 (2002).
- [244] V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve, and M. H. Devoret, Phys. Scripta **T76**, 165 (1998).
- [245] P. K. Day, H. G. LeDuc, B. A. Mazin, A. Vayonakis, and J. Zmuidzinas, Nature **425**, 817 (2003).
- [246] D. I. Schuster, *Circuit Quantum Electrodynamics*, tese de doutorado (2007): <http://www.eng.yale.edu/rslab/papers/SchusterThesis.pdf>
- [247] T. Yamamoto, Y. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Nature **425**, 941 (2003).
- [248] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, and J. S. Tsai, Nature **398**, 786 (1999).
- [249] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3rd edition, (John Wiley & Sons Inc., New York, 1990), capítulos 2 e 3.
- [250] A. Zagoskin and A. Blais, Phys. Can. **63**, 215 (2007). Preprint at arXiv:0805.0164 (2008).
- [251] J. Clarke and F. K. Wilhelm, Nature **453**, 1031 (2008); R. J. Schoelkopf and S. M. Girvin, Nature **451**, 664 (2008); T. Niemczyk *et al.*, Supercond. Sci. Technol **22**, 034009 (2009).
- [252] J. Q. You and F. Nori, Phys. Today **58**, 42 (2005).
- [253] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).
- [254] M. H. Devoret, A. Wallraff, and J. M. Martinis, arXiv:cont-mat/0411174.
- [255] A. A. Houck, D. I. Schuster, J. M. Gambetta, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature **449**, 328 (2007).
- [256] J. Majer, *et al.*, Nature **449**, 443 (2007).
- [257] O. Astafiev, K. Inomata, A. O. Niskanen, T. Yamamoto, Yu. A. Pashkin, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Nature **449**, 588 (2007).
- [258] M. Hofheinz, E. M. Weig, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, H. Wang, J. M. Martinis, and A. N. Cleland, Nature **454**, 310 (2008).

- [259] P. J. Leek, J. M. Fink, A. Blais, R. Bianchetti, M. Göppl, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, and A. Wallraff, *Science* **318**, 1889 (2007).
- [260] A. Fragner, M. Göppl, J. M. Fink, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais, and A. Wallraff, *Science* **322**, 1357 (2008).
- [261] J. Koch *et al.*, *Phys. Rev. A* **76**, 042319 (2007).
- [262] J. Gambetta, W. A. Braff, A. Wallraff, S. M. Girvin, R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **76**, 012325 (2007).
- [263] A. André, D. DeMille, J. M. Doyle, M. D. Lukin, S. E. Maxwell, P. Rabl, R. J. Schoelkopf, and P. Zoller, *Nature Physics* **2**, 636 (2006).
- [264] P. Rabl, D. DeMille, J. M. Doyle, M. D. Lukin, R. J. Schoelkopf, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 033003 (2006).
- [265] K. Saito, M. Wubs, S. Kohler, P. Hänggi, and Y. Kayanuma, *Europhys. Lett.* **76**, 22 (2006).
- [266] M. Wubs, S. Kohler, and P. Hanggi, *Physica E - Low-Dim. Syst. Nanostr.* **40**, 187 (2007).
- [267] G. Romero, J. J. Garcia-Ripoll, and E. Solano, arXiv:0811.3909.
- [268] J. Hauss, A. Fedorov, S. André, V. Brosco, C. Hutter, R. Kothari, S. Yeshwanth, A. Shnirman, and G. Schön, *New J. Phys.* **10**, 095018 (2008).
- [269] M. Grajcar, S. H. W. van der Ploeg, A. Izmalkov, E. Il'ichev, H.-G. Meyer, A. Fedorov, A. Shnirman, and G. Schön, *Nature Physics* **4**, 612 (2008).
- [270] K. Moon and S. Girvin, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 140504 (2005); A. M. Zagoskin, E. Il'ichev, M. W. McCutcheon, J. F. Young, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 253602 (2008).
- [271] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, *Journal of Russian Laser Research* **26**, 445 (2005).
- [272] S. Sarkar, *Photons and Quantum Fluctuations*, edited by E. R. Pike and H. Walther (Adam Hilger, Bristol, 1988), p. 151.
- [273] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A* **142**, 511 (1989).
- [274] J. Schwinger, *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **89**, 4091 (1992).

- [275] A. Widom, E. Sassaroli, Y. N. Srivastava, *Can. J. Phys.* **71**, 168 (1993).
- [276] G. Barton, V. V. Dodonov, and V. I. Man'ko, *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **7**, S1 (2005).
- [277] S. De Liberato, C. Ciuti, and I. Carusotto, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 103602 (2007).
- [278] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **7**, S47 (2005).
- [279] E. Segev, B. Abdo, O. Shtempluck, E. Buks, and B. Yurke, *Phys. Lett. A* **370**, 202 (2007).
- [280] W.-J. Kim, J. H. Brownell, and R. Onofrio, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 200402 (2006).
- [281] C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, A. Lombardi, A. Palmieri, G. Ruoso, and D. Zanello, *Rev. Sci. Instr.* **75**, 4967 (2004).
- [282] C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, C. Del Noce, G. Galeazzi, A. Lombardi, A. Palmieri, G. Ruoso, and D. Zanello, *Europhys. Lett.* **70**, 754 (2005).
- [283] A. Agnesi, C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, G. Galeazzi, F. Pirzio, G. Reali, G. Ruoso, and D. Zanello, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 164024 (2008).
- [284] K. Takashima, N. Hatakenaka, S. Kurihara, and A. Zeilinger, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 164036 (2008).
- [285] A. Blais, J. Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **75**, 032329 (2007).
- [286] C. Ciuti, G. Bastard, and I. Carusotto, *Phys. Rev. B* **72**, 115303 (2005).
- [287] I. Carusotto, M. Antezza, F. Bariani, S. De Liberato, and C. Ciuti, *Phys. Rev. A* **77**, 063621 (2008).
- [288] A. V. Dodonov, L. C. Céleri, F. Pascoal, M. D. Lukin, and S. F. Yelin, arXiv:0806.4035.
- [289] A. V. Dodonov, *J. Phys.: Conf. Ser.* (to appear, 2009); arXiv:0812.0475 (2008).
- [290] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1742 (1989).
- [291] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **90**, 958 (1993).
- [292] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, and D. E. Nikonov, *Phys. Rev. A* **47**, 4422 (1993).

- [293] H. Johnston and S. Sarkar, *Phys. Rev. A* **51**, 4109 (1995).
- [294] T. Werlang, A. V. Dodonov, E. I. Duzzioni, and C. J. Villas-Bôas, *Phys. Rev. A* **78**, 053805 (2008).
- [295] T. Werlang, A. V. Dodonov, E. I. Duzzioni, and C. J. Villas-Bôas, arXiv:0812.1111.
- [296] M. Janowicz, *Phys. Rep.* **375**, 327 (2003).
- [297] V. V. Dodonov, *Phys. Lett. A* **207**, 126 (1995).
- [298] A. M. Fedotov, N. B. Narozhny, and Y. E. Lozovik, *Phys. Lett. A* **274**, 213 (2000).
- [299] N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, and Y. E. Lozovik, *Phys. Rev. A* **64**, 053807 (2001).
- [300] N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, and Y. E. Lozovik, *Las. Phys.* **13**, 298 (2003).
- [301] A. B. Klimov and S. M. Chumakov, *A Group Theoretical Approach to Quantum Optics* (Wiley-VCH, Berlin, 2009).
- [302] C. K. Law, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1931 (1994).
- [303] C. K. Law, *Phys. Rev. A* **51**, 2537 (1995).
- [304] F. Bloch and A. Siegert, *Phys. Rev.* **57**, 522 (1940).
- [305] A. Wallraff *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 060501 (2005).
- [306] A. A. Houck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 080502 (2008).
- [307] A. Pérez, arXiv:0810.1456.
- [308] A. P. Prudnikov, Iu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integrals and Series* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986), vols. I and II.