

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**PROCESSOS DE RELAXAÇÃO EM SISTEMAS QUÂNTICOS  
E ÁLGEBRAS DE OPERADORES NÃO-LINEARES**

*João Paulo Camargo de Lima*

São Carlos  
2006

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**PROCESSOS DE RELAXAÇÃO EM SISTEMAS QUÂNTICOS  
E ÁLGEBRAS DE OPERADORES NÃO-LINEARES**

*João Paulo Camargo de Lima*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Doutor.

São Carlos  
2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

L732pr

Lima, João Paulo Camargo de.

Processos de relaxação em sistemas quânticos e álgebras de operadores não-lineares / João Paulo Camargo de Lima. -- São Carlos : UFSCar, 2006.

101 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Mecânica quântica. 2. Sistemas quânticos abertos. 3. Decoerência (Decoherence). 4. Ótica quântica. 5. Grupos quânticos. I. Título.

CDD: 530.12 (20<sup>a</sup>)

*Orientador*

*Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi*

**Esta tese é dedicada a minha família, amigos e todos aqueles que acreditam em seus sonhos e trazem em seus corações a esperança em uma nova civilização, a civilização do Amor.**

# Agradecimentos

A Deus pela sua infinita misericórdia.

Ao Prof. Salomon Sylvain Mizrahi, pela oportunidade dada, orientação e compreensão nos momentos de dificuldade.

Ao Prof. Viktor Dodonov e Alexander Dodonov pela colaboração nos trabalhos desta tese.

Aos Profs. e amigos Gilberto Prativiera, Marcelo Marchioli, Marcos Cesar de Oliveira, Roberto Serra, Celso Jorge Villas Boas e Eduardo Duzzone pelas contribuições, discussões e sugestões sobre os trabalhos da tese.

A minha família pelo incentivo e amor dedicado em todos os momentos.

Aos colegas irmãos do MUR-São Carlos (Ministério Universidades Renovadas), MUR-Londrina, GPP-São Carlos (Grupo de Partilha e Perseverança de Profissionais) e GPP-Londrina pela vivência, partilhas e orações.

A todos colegas, amigos, professores e funcionários do Departamento de Física da UFSCar que colaboraram direta ou indiretamente na realização desta tese.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

*“Contemplations desiderium procedit  
ex amore obiecti: quia ubi amor, ibi  
oculus”*

*Tomás de Aquino*

*“Sempre sei, realmente. Só o que eu quis, todo o tempo, o que eu pelejei  
para achar, era uma só coisa - a inteira - cujo significado e vislumbrado  
dela eu vejo que sempre tive. A que era: que existe uma receita, a norma  
dum caminho certo, estreito, de cada uma pessoa viver...”*

*Guimarães Rosa*

*“...est igitur veritas in omnium quae sunt essentia,  
quia hoc sunt quod in summa veritate sunt.”*

*Anselmo*

# Resumo

Nesta tese nós estudamos alguns aspectos dos processos de relaxação e de decoerência utilizando as álgebras deformadas do oscilador harmônico, particularmente a álgebra deformada generalizada (GDA álgebra) e álgebra tipo Kerr. Para este estudo consideramos duas situações: (a) O sistema de interesse é descrito como um oscilador harmônico quântico não-linear interagindo com um meio dissipativo (reservatório térmico), e (b) O sistema de interesse (oscilador harmônico quântico sem deformação) interage com um reservatório térmico descrito por um conjunto de osciladores harmônicos quânticos não-lineares. Resultado interessante foi encontrado para as duas situações estudadas, onde observamos que a equação mestra e as expressões obtidas, mostram forte dependência da não-linearidade introduzida pela álgebra deformada. Para o caso (b) as equações obtidas possuem forma idêntica as equações sem deformação, mas apresentam novos coeficientes não-lineares ainda não obtidos na literatura. A influência da não-linearidade do reservatório é observada nos coeficientes encontrados. Também estudamos o fenômeno da decoerência considerando o reservatório térmico não-linear e o reservatório comprimido não-linear. Obtemos a equação mestra que rege a dinâmica do sistema e estimamos o tempo de decoerência, onde obtemos um resultado importante. Para o tempo de decoerência observamos um crescimento do tempo a medida que os parâmetros de não-linearidade da álgebra crescem, mostrando que não-linearidade contida no reservatório age de maneira significativa sobre o tempo de decoerência do sistema.

# Abstract

On this thesis some aspects of relaxation processes and decoherence processes using deformed algebras of the harmonic oscillator, particularly the generalized deformed algebra (GDA algebra) and Kerr algebra were studied. Two situations were considered for this study: a) The system of interest is described as a non-linear harmonic oscillator interacting with a dissipative environment (thermal reservoir), b) the system of interest (non deformed harmonic oscillator) interacts with a thermal reservoir described by a group of nonlinear quantum harmonic oscillators. An interesting result was found for the two situations, where we notice that the master equation and the expressions found, show the strong dependence of the nonlinearity introduced by the deformed algebra. On case (b) the obtained equations have a form identical to the nondeformed equations, but show new nonlinear coefficients not obtained in the reading. The influence of the reservoirs' nonlinearity is noticed in the coefficients found. The phenomenon of decoherence, considered the thermal nonlinear reservoir and the compressed air reservoir that were studied. The master equation that rules the dynamics of the system and an estimated a time of decoherence were obtained, along with important results. It was observed that when there is an increase on the deformed parameter there is also an increase on the decoherence time, showing the nonlinearity contained in the reservoir acts in a significant way over the time of decoherence of the system.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Álgebras Deformadas do Oscilador Harmônico</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução . . . . .	9
2.2	Álgebras Deformadas do Oscilador Harmônico: Conceitos e Definições . . .	10
2.3	Osciladores- $f$ . . . . .	13
2.4	Uma Realização Não-Linear para $q$ -Algebra GDA . . . . .	16
2.4.1	O meio Kerr . . . . .	18
2.4.2	O espectro de energia . . . . .	18
2.5	Potencial e função inércia . . . . .	21
2.5.1	Parâmetros Contínuos: conjunto infinito de níveis de energia contáveis	22
2.5.2	classe $p$ -hamiltoniana : número finito de níveis de energia . . . . .	23
2.5.3	Discussão das figuras . . . . .	24
2.6	Conclusões . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Teoria Quântica dos Processos de Relaxação</b>	<b>30</b>
3.1	Introdução . . . . .	30
3.2	O Operador Matriz Densidade . . . . .	30
3.3	A Equação Mestra na Aproximação Markoviana . . . . .	33
3.3.1	O Reservatório Térmico . . . . .	37
3.3.2	O Reservatório Comprimido . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Processos de Relaxação em Sistemas Quânticos Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução . . . . .	45
4.2	Equação Mestra para Sistemas Quânticos Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares . . . . .	49
4.3	Equações para o Elemento de Matriz do Operador Densidade . . . . .	56
4.4	Valor Esperado do Operador $\mathbf{N}$ . . . . .	58
4.5	Conclusão . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Processos de Relaxação em Sistemas Quânticos Acoplados a Reservatórios Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares</b>	<b>61</b>
5.1	Introdução . . . . .	61
5.2	Equação Mestra para Sistemas Quânticos acoplados a Reservatórios Descritos por Álgebras de Operadores Não-Lineares. . . . .	65
5.3	Equações para a Matriz Densidade Diagonal e Não-Diagonal . . . . .	71
5.4	Valor Esperado do Operador Número . . . . .	72
5.5	Conclusão . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Decoerência em Sistemas Quânticos Acoplados a Reservatórios Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares</b>	<b>75</b>
6.1	Introdução . . . . .	75
6.2	Dinâmica e Decoerência . . . . .	77
6.2.1	Reservatório Térmico Não-Linear . . . . .	77
6.2.2	Reservatório Comprimido Não-Linear . . . . .	81
6.3	Conclusão . . . . .	86
<b>A</b>	<b>Expansão do Operador <math>\exp(aQ^2 + bP^2)</math></b>	<b>88</b>
<b>B</b>	<b>O Operador de Compressão Não-Linear</b>	<b>90</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo da Função de Wigner</b>	<b>92</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Processos de relaxação são de fundamental interesse em várias áreas da física como em sistemas fora do equilíbrio e óptica (1). Nos processos de relaxação o sistema, que está inicialmente num estado de equilíbrio, dissipa sua energia até alcançar outro estado de equilíbrio ou estacionário ditado pelas condições externas. Como exemplo, podemos citar particularmente um sistema formado por um átomo de dois níveis interagindo com um modo de radiação eletromagnética em uma cavidade (2): neste caso o estado de equilíbrio inicial do átomo dissipa sua energia devido as condições externas impostas pelo modo do campo eletromagnético na cavidade. Vários modelos foram apresentados tentando explicar estes processos. O modelo mais simples para explicar processos de relaxação e as propriedades de absorção e dispersão de radiação por um material é o modelo de Drude-Lorentz (3). Neste modelo os elétrons localizados nos átomos do material são tratados como osciladores harmônicos amortecidos e que são forçados a vibrar pela ação da onda eletromagnética incidente. O deslocamento medido a partir da posição de equilíbrio do elétron,  $x(t)$ , é descrito pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \text{Re}(F_o e^{i\omega t}) \quad (1.1)$$

em que  $F_o = eE_o/m$ , ( $m$  e  $e$  representam a massa e a carga do elétron, respectivamente),  $\omega_o$  é a frequência natural de oscilação,  $\Gamma$  é a constante de amortecimento,  $\omega$  é frequência do campo externo incidente e  $E_o$  sua amplitude. Já em um tratamento quântico as energias dos átomos assumem valores discretos e por simplicidade considera-se que a radiação

incidente sobre o átomo é monocromática e que coincide com a frequência de transição entre dois níveis de energia. O resultado dessa hipótese é o modelo atômico de dois níveis (2) já citado anteriormente.

O que há de comum nesses modelos é a presença de uma constante de amortecimento ou decaimento, implicando que o sistema em questão sofre um processo de relaxação. Em muitos tratamentos e modelos de processos de relaxação, a dissipação é introduzida fenomenologicamente nas equações que descrevem o sistema em estudo (4). Um tratamento mais rigoroso supõe que a relaxação se manifesta devido ao acoplamento do sistema com o meio ambiente ao seu redor, como por exemplo um reservatório térmico (1,5,6), responsável pela dissipação de energia. Como exemplos citamos: 1) a relaxação de spin de átomos num cristal onde os fônons ou então os momentos magnéticos da rede atuam como um reservatório térmico (7); 2) numa cavidade, onde a radiação eletromagnética age como reservatório térmico para um átomo de 2-níveis ali presente (8). Esta hipótese reside no fato que em geral sistemas físicos não são sistemas isolados, ou dito fechados, mas sim abertos e interagem com o meio ambiente. Assim o meio ambiente em volta do sistema de interesse pode agir como um mecanismo de dissipação de energia e nos tratamentos teóricos ele é geralmente modelado por uma coleção de osciladores harmônicos acoplados ao sistema de interesse (6).

Nesta forma de tratamento como *sistema+reservatório*, a descrição dos processos físicos requer a dedução de uma equação de movimento (equação mestra) para o operador densidade do sistema de interesse, que conterà informação sobre os efeitos do reservatório por meio das funções de correlação de suas variáveis (5). Como o comportamento do sistema é influenciado pelo reservatório, uma grande simplificação na solução das equações que governam a dinâmica do sistema é obtida quando existem escalas de tempo distintas dos movimentos do sistema e do reservatório. Quando o tempo característico de evolução do sistema  $\Gamma^{-1}$  (tempo de relaxação ou tempo de decaimento) é muito maior que o tempo de correlação (ou tempo de memória)  $\mathcal{T}_c$  entre as variáveis do reservatório, pode-se fazer a aproximação de Markov (5), na qual o sistema perde informação sobre seu estado inicial com o decorrer do tempo. Quando a aproximação de Markov é válida, técnicas conhecidas (equação de Langevin, expansão de cumulantes, projeções no espaço de Liouville, etc.)

levam a equações relativamente simples, usadas em vários problemas associados a relaxação de spin (9), em óptica quântica (6), etc. As funções de correlação entre as variáveis do reservatório dependem do acoplamento entre sistema e reservatório e a aproximação de Markov é obtida considerando que o acoplamento é independente das frequências do reservatório (6). Esta hipótese leva a funções de correlação que são delta-correlacionadas, nas quais  $\mathcal{T}_c = 0$ .

A utilização de equações mestras do operador densidade na aproximação de Markov tem sido de fundamental importância na descrição e no modelamento de processos e fenômenos que ocorrem em sistemas quânticos abertos, como exemplos podemos citar não só processos de relaxação, mas também fenômenos como decoerência (10-12) e biestabilidade óptica (13).

A busca por novas formas de representação e generalização de modelos, é tópico de constantes estudos e pesquisas ao longo dos tempos. Neste sentido temos visto nas últimas décadas um grande interesse no estudo e na utilização de álgebras deformadas em várias áreas da física (14-33) onde, em particular as álgebras deformadas do oscilador harmônico tem sido intensamente pesquisada e utilizada em vários sistemas (17,21,23,29-38). Em geral as álgebras deformadas são usadas na generalização de modelos e na introdução de não-linearidade em sistemas. Mas o que são as álgebras deformadas ? Podemos considerar que álgebras deformadas são deformações das álgebras de Lie, definidas também como uma generalização das mesmas. Um fato interessante é que elas aparecem naturalmente como blocos básicos da estrutura das teorias de sistemas completamente integráveis. Associado com cada solução da equação de Yang-Baxter há uma álgebra matricial gerada a partir dos elementos de matrizes do operador de Lax. Um exemplo simples e não-trivial da matriz  $R^1$  conduz a uma algebra matricial de  $SU_q(2)$  (deformação do grupo de Lie  $SU(2)$ ),

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_Z, \mathbf{S}_\pm] &= \pm \mathbf{S}_\pm \\ [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-] &= \frac{q^{2\mathbf{S}_Z} - q^{-2\mathbf{S}_Z}}{q - q^{-1}} = [2\mathbf{S}_Z]_q. \end{aligned}$$

Especificamente falando de álgebras deformadas do oscilador harmônico, Jannussis e colaboradores (19,39) desenvolveram uma realização para os operadores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$  do

---

<sup>1</sup> A matriz  $R$  é também denotada como operador de Lax.

oscilador deformado escrevendo-os em termos dos usuais operadores bosônicos do oscilador  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  por meio de um operador não-linear  $f(\mathbf{N})$ , como

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{a}f(\mathbf{N}) \quad \mathbf{A}^\dagger \equiv f^*(\mathbf{N})\mathbf{a}^\dagger \quad \text{e} \quad \mathbf{N} \equiv \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a},$$

sendo  $f(\mathbf{N})$  específica para cada tipo de não-linearidade. Assim podemos denotar de uma maneira mais adequada as álgebras deformadas do oscilador harmônico que iremos trabalhar, chamando-as de álgebras de operadores não-lineares.

A utilização de álgebras deformadas em processos de relaxação e modelos quânticos dissipativos teve início com o trabalho de Iorio e Vitiello (29), no qual discutem o papel da deformação da álgebra de Heisenberg-Weyl em sistemas dissipativos e em sistemas com temperaturas finitas. Iorio e Vitiello expressaram o gerador da evolução temporal do oscilador harmônico amortecido e o gerador da transformação de Bogoliubov térmica em termos dos operadores da álgebra deformada de Heisenberg-Weyl. Posteriormente, Mancini (30) introduziu a deformação ou não-linearidade através dos operadores bosônicos do sistema que é representado por um oscilador harmônico quântico deformado (com operadores descrito pela álgebra deformada) no qual interage com um conjunto de osciladores harmônicos que representam o reservatório. A dinâmica do sistema é estudada através da obtenção de uma equação mestra para o operador densidade que descreve o sistema na aproximação de Markov. Similarmente, Isar e colaboradores (31-33) desenvolveram um estudo constituído de três trabalhos onde abordaram vários aspectos da utilização de álgebras deformadas nos processos de relaxação via equação mestra. No primeiro trabalho (31) consideraram um sistema semelhante ao utilizado por Mancini, mas agora descrevendo uma equação mestra mais geral em termos de coeficientes de difusão e dos operadores momentum  $\mathbf{p}$  e posição  $\mathbf{q}$ . Em seu segundo estudo (32), eles propuseram um estudo onde a não-linearidade é introduzida diretamente na parte irreversível da equação mestra através dos operadores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$ , obtendo assim uma ‘dissipação deformada’. Por fim, em seu último trabalho (33), também consideraram um estudo da dissipação introduzindo a não-linearidade através dos operadores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$  no termo de interação do hamiltoniano total.

A nossa proposta neste trabalho é estudar alguns aspectos dos processos de relaxação

utilizando as álgebras de operadores não-lineares do oscilador harmônico. Para isso consideramos duas situações: (a) Descrevemos o sistema de interesse, no caso o oscilador harmônico como um oscilador harmônico quântico não linear interagindo com um meio dissipativo (reservatório térmico); (b) o sistema de interesse interage com um reservatório térmico descrito por um conjunto de osciladores harmônicos quânticos não-lineares. Dentro dessas duas situações que iremos trabalhar, se faz necessário uma descrição das definições e conceitos que envolvem as álgebras deformadas do oscilador harmônico. Assim, no capítulo 2 desta tese apresentamos algumas definições e conceitos de álgebras “deformadas” do oscilador, e também uma possível generalização destas álgebras, além de obtermos alguns resultados estabelecendo conexões entre os conceitos de oscilador- $f$  e a álgebra GDA (Generalized Deformed Algebra). Outros resultados obtidos e descritos neste capítulo é a obtenção das expressões para o potencial e a função inércia (massa dependente da posição), escrevendo o hamiltoniano livre do oscilador- $f$  em termos dos usuais operadores posição e momentum, a partir de relações derivadas entre osciladores- $q$  e osciladores- $f$ . Atendendo as necessidades dentro do estudo proposto, desenvolvemos no capítulo 3 a teoria de processos quânticos de relaxação, deduzindo uma equação mestra na aproximação de Markov para o operador densidade reduzido de um sistema acoplado a um reservatório. Como exemplo, nós deduzimos equações mestras para dois reservatórios específicos: os reservatórios térmico e comprimido. Após desenvolvermos os elementos fundamentais para nosso estudo, como as definições e conceitos de algebras deformadas no capítulo 2 e a teoria quântica dos processos de relaxação no capítulo 3, no capítulo 4 iniciamos nosso estudo de forma particular, considerando a primeira situação (a) citada anteriormente. Neste capítulo estudamos alguns aspectos de processos de relaxação em sistemas quânticos representados pela álgebra de operadores não-lineares mais especificamente, consideramos um oscilador harmônico quântico não-linear interagindo com um meio dissipativo. A equação mestra na aproximação Markoviana é obtida e um resultado interessante é encontrado, quando comparamos com outros trabalhos passados já realizados (30,31). Também obtemos neste capítulo as equações para os elementos diagonais e não-diagonais do operador densidade da equação mestra, calculamos o valor médio do operador número  $\mathbf{N}$ , a equação que descreve a dinâmica para o valor médio de  $\mathbf{N}$  e sua

solução é obtida. Dando continuidade ao estudo, no capítulo 5 consideramos a situação (b) no qual estudamos processos de relaxação em sistemas quânticos acoplados a um meio dissipativo não-linear (reservatórios não-lineares). Em particularmente nós abordamos um sistema constituído de um oscilador harmônico interagindo com um reservatório de osciladores não-lineares descrito em termos de operadores deformados estudados no capítulo 2, obtendo assim uma equação mestra na aproximação de Markov. Aqui novamente obtemos um resultado interessante e diferenciado de outros trabalhos (30-33): a equação mestra obtida possui a mesma forma de uma equação mestra usual, mas agora com a diferença de ter coeficientes “deformados” ou não-lineares com características totalmente diferentes daqueles coeficientes obtidos em (30-33). Neste mesmo capítulo, obtemos as equações para os elementos diagonais e não-diagonais do operador densidade da equação mestra e a dinâmica para o valor médio do operador número  $\mathbf{N}$ , obtendo a equação que descreve a dinâmica e sua solução. Ainda considerando a situação (b), estudamos no capítulo 6 o fenômeno da decoerência de um oscilador harmônico quântico interagindo com reservatórios não-lineares, a dinâmica e a decoerência é estudada para o reservatório térmico não-linear e o reservatório comprimido não-linear. Para estado inicial do sistema consideramos o estado do gato de Schrödinger. Além disso obtemos a equação mestra que rege a dinâmica do sistema e estimamos os tempos de decoerência, e um resultado interessante foi obtido: observamos que a coerência do sistema se mantém a medida que os parâmetros de não-linearidade crescem. Por fim alguns detalhes dos cálculos executados estão nos apêndices A, B e C.

## Capítulo 2

# Álgebras Deformadas do Oscilador Harmônico

### 2.1 Introdução

A idéia de deformação é antiga, já tendo sido utilizada em conceitos na física. Por exemplo, a mecânica quântica pode ser interpretada como uma deformação da mecânica clássica desde que consideramos  $q = e^{\hbar}$  e no limite formal  $\hbar \rightarrow 0$  ( $q \rightarrow 1$ ), a mecânica quântica recupera a mecânica clássica. Além disso, grupos quânticos, álgebras quânticas ou ainda álgebras deformadas, do ponto de vista matemático, são as deformações das álgebras de Lie. A primeira álgebra deformada a ser escrita foi a álgebra do grupo  $SU_q(2)$  em (40), usando o método de espalhamento inverso (41) para estudar estruturas de sistemas integráveis em teoria quântica de campos e mecânica estatística. A partir de então as álgebras deformadas passaram a ser objetos de intenso estudo em várias áreas da matemática e da física (40-44). A realização de álgebras deformadas associadas a osciladores harmônicos deformados, representando quanta de bósons deformados (osciladores- $q$ ), foram introduzidos independentemente por Biedenharn (34) e Macfarlane (35). Uma interpretação física de osciladores deformados como um oscilador- $f$  não-linear, em que a frequência depende da intensidade, foi proposto pelos autores da por Man'ko e colaboradores (36) no qual esses osciladores- $f$  foram definidos como uma generalização dos osciladores- $q$ . Várias aplicações e generalizações dessas idéias foram consideradas por um grande número de autores na década passada (14-33). Particularmente Chung et al (37) propuseram uma álgebra deformada generalizada do oscilador harmônico, no qual ad-

mitem a álgebra de Heisenberg-Weyl  $q$ -deformada e a álgebra de Tamm-Dacoff como casos especiais dessa generalização. De maneira similar, Borzov e colaboradores (38) introduziram uma álgebra deformada  $U_q^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\mathfrak{h}_4)$  de quatro parâmetros (GDA), onde generalizam a álgebra de Heisenberg-Weyl  $q$ -deformada  $U_q(\mathfrak{h}_4)$ . Recentemente, nós consideramos a álgebra de Heisenberg-Weyl  $q$ -deformada generalizada associada a operadores abstratos com o então chamados operadores do oscilador- $f$ , estabelecendo assim conexões entre os conceitos de oscilador- $f$  e álgebra GDA.<sup>1</sup> Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos de álgebras deformadas bem como também generalizações das mesmas, sendo estas de suma importancia no estudo e desenvolvimento dos capítulos posteriores. Ainda neste capítulo, na seção 2.3, a partir de relações derivadas entre osciladores- $q$  e osciladores- $f$  obtemos o hamiltoniano e o espectro de energia em termos do operador número de quanta  $\mathbf{N}$ . Na seção 2.4, escreveremos o hamiltoniano livre do oscilador- $f$  em termos dos usuais operadores posição e momentum  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , obteremos expressões para o potencial e a função inércia (massa dependente da posição). Por fim, na última seção apresentamos uma discussão dos resultados.

## 2.2 Álgebras Deformadas do Oscilador Harmônico: Conceitos e Definições

A álgebra associada ao oscilador harmônico (OH) em mecânica quântica (MQ), usualmente chamada álgebra de Heisenberg-Weyl, é a álgebra de Lie constituída de três elementos (ou geradores)  $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger, \mathbf{I}\}$  definidos a partir das relações de comutação

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} = \mathbf{I} \quad [\mathbf{a}, \mathbf{I}] = [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{I}] = 0,$$

nos quais  $\mathbf{I}$  é o operador identidade,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  são operadores que aniquilam e criam um único quanta nas bases do estado de Fock ou seja,

$$\mathbf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \mathbf{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

---

<sup>1</sup> Os resultados deste capítulo referem-se ao artigo: ‘Energy spectrum, potential and inertia functions of a generalized  $f$ -oscillator, S. S. Mizrahi, J. P. Camargo Lima and V. V. Dodonov, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004), 3707-3724.’

e

$$|n\rangle = \frac{(\mathbf{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$|0\rangle$  sendo o estado de vácuo. O operador número  $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$  satisfaz as relações de comutação

$$[\mathbf{N}, \mathbf{a}] = -\mathbf{a} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}^\dagger$$

e seus auto-estados são os estados de Fock

$$\mathbf{N} |n\rangle = n |n\rangle.$$

Note que  $\mathbf{N}$  não é um gerador da álgebra de Heisenberg-Weyl, desde que a álgebra foi definida em termos de geradores básicos. Agora, se a relação  $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$  não é imposta, e ao em vez disso,  $\mathbf{N}$  é introduzido como um novo gerador da álgebra, temos a álgebra de Lie caracterizada pelos elementos  $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger, \mathbf{N}\}$  conhecida como álgebra de bósons ou álgebra do oscilador (OH), satisfazendo as mesmas, mas agora postuladas, relações de comutação

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{I} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{A}^\dagger,$$

com a identidade  $\mathbf{I}$  comutando com todos os três geradores da álgebra. Esta construção foi realizada a partir do trabalho de Wigner (45)<sup>2</sup>, e relacionou o grupo/álgebra de Lie, frequentemente chamado o grupo/álgebra do oscilador, e foi estudado por muitos autores (46-50). Exemplos de álgebras de osciladores com apenas um parâmetro de deformação é que descreveremos a seguir.

A álgebra do OH deformado (oscilador- $q$ ) é a álgebra de Lie de três elementos  $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger, \mathbf{N}\}$  adicionada de um parâmetro  $q$ , no qual modifica as relações de comutação. Para um único parâmetro existem diferentes modificações. Listaremos abaixo algumas dessas álgebras.

1. Historicamente, a primeira relação de comutação deformada foi introduzida independentemente por Iwata (51), Arik e Coon (52) e Kuryshkin (53), (também designada por álgebra de Iwata–Arik–Coon–Kuryshkin (IACK)) através das relações

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger - q\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{A}^\dagger.$$

2. Feinsilver (54) considerou a álgebra

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = q^{-2\mathbf{N}}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{A}^\dagger.$$

<sup>2</sup> Wigner usou os operadores  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  no lugar de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$

3. Um dos mais frequentes exemplos considerados ao lado da álgebra IACK, é a álgebra proposta por Biedenharn e Macfarlane (34,35) (álgebra BM)

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger - q\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = q^{-\mathbf{N}}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{A}^\dagger, \quad (2.1)$$

cuja proposta inicial foi generalizar a realização bosônica de Schwinger dos operadores momentum angular em termos do análogo deformado das álgebras SU(2) e SU(1,1). A partir de (2.1) e das relações de comutação

$$[\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}] = 0 \quad \text{e} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger] = 0$$

resulta a relação

$$\mathbf{A} (\mathbf{A}^\dagger)^m - (q\mathbf{A}^\dagger)^m \mathbf{A} = [m] (\mathbf{A}^\dagger)^{m-1} q^{-\mathbf{N}}$$

em que

$$[m] \equiv \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} = \frac{\sinh(m\tau)}{\sinh(\tau)} \quad q = e^\tau.$$

Portanto, esta álgebra é simétrica sob a mudança  $q \leftrightarrow q^{-1}$  or  $\tau \leftrightarrow -\tau$ ,  $\tau$  e  $q$  são chamados parâmetros de deformação.

4. O último exemplo é a então chamada álgebra Tamm–Dancoff (37,48,49,55), caracterizada pelas relações de comutação

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger - q\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = q^{\mathbf{N}} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{A}^\dagger.$$

O nome é explicado pelo fato que neste caso o espectro de energia tem um limite superior (ver também (56)), semelhante a idéia de altas energias limitadas ou cortadas no modelo Tamm–Dancoff de teoria quântica de campos. Para outros exemplos consultar as referências (23,25,27).

Uma álgebra quântica de dois parâmetros  $su_{pq}(2)$  foi introduzido em (57) com base na definição

$$[x]_{pq} = (q^x - p^{-x}) / (q - p^{-1}).$$

Uma construção similar, caracterizada a partir de deformações na forma

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger = q_1^2 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + q_2^{2N} = q_2^2 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + q_1^{2N} \quad [m] = (q_1^{2m} - q_2^{2m}) / (q_1^2 - q_2^2)$$

tem sido estudado sobre o nome de *oscilador de Fibonacci* (58).

Os autores de (38) propuseram a álgebra deformada generalizada de quatro parâmetros (GDA) caracterizada pelas relações matemáticas

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger - q^\gamma \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = q^{\alpha\mathbf{N}+\beta} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{A}^\dagger, \quad (2.2)$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros reais. Fazendo  $\gamma = 1$  nós recuperamos a álgebra com 3 parâmetros introduzida em (37). De fato, ambas as álgebras tornam-se equivalentes se redefinirmos  $\tau\gamma = \tau'$ ,  $\alpha/\gamma = \alpha'$  e  $\beta/\gamma = \beta'$ . As consequências de (2.2) são as relações

$$\begin{aligned} \mathbf{A} (\mathbf{A}^\dagger)^m - q^{m\gamma} (\mathbf{A}^\dagger)^m \mathbf{A} &= (\mathbf{A}^\dagger)^{m-1} q^{\alpha\mathbf{N}+\beta} \frac{q^{m\alpha} - q^{m\gamma}}{q^\alpha - q^\gamma}, \\ \mathbf{A} |n\rangle &= \sqrt{F_{\alpha,\beta}^\gamma(n; q)} |n-1\rangle \quad \mathbf{A}^\dagger |n\rangle = \sqrt{F_{\alpha,\beta}^\gamma(n+1; q)} |n+1\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

com o estado de Fock dado por

$$|n\rangle = [F_{\alpha,\beta}^\gamma(n; q)!]^{-1/2} (\mathbf{A}^\dagger)^n |0\rangle \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

no qual

$$F_{\alpha,\beta}^\gamma(n; q) = \begin{cases} q^\beta \frac{q^{n\alpha} - q^{n\gamma}}{q^\alpha - q^\gamma} & \text{para } \alpha \neq \gamma \\ nq^{\beta+\gamma(n-1)} & \text{para } \alpha = \gamma \end{cases} \quad (2.5)$$

e

$$F_{\alpha,\beta}^\gamma(n; q)! \equiv F_{\alpha,\beta}^\gamma(n; q) F_{\alpha,\beta}^\gamma(n-1; q) \cdots F_{\alpha,\beta}^\gamma(2; q) F_{\alpha,\beta}^\gamma(1; q). \quad (2.6)$$

## 2.3 Osciladores- $f$

Os autores de (36) introduziram uma realização para o operador  $\mathbf{A}$  e seu adjunto  $\mathbf{A}^\dagger$  em termos dos chamados osciladores- $f$ , definidos como uma expansão não-linear dos usuais operadores do oscilador harmônico  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{a}^\dagger$ , isto é,

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{N}) \quad \mathbf{A}^\dagger \equiv \mathbf{f}^*(\mathbf{N})\mathbf{a}^\dagger \quad \text{e} \quad \mathbf{N} \equiv \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \quad (2.7)$$

com,  $\mathbf{N}_d = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \neq \mathbf{N}$ . Semelhante realização foi desenvolvida anteriormente em (19,39), mas os autores de (36) deram uma explícita interpretação física de  $\mathbf{A}$  como um operador que descreve um oscilador anarmônico com frequência dependente da intensidade. A função  $\mathbf{f}(\mathbf{N})$  é específica para cada álgebra  $q$ -deformada e assim, levando em conta

isto, podemos ir para um tratamento com a álgebra GDA, pois esta função irá também depender de quatro parâmetros,  $q$  (ou  $\tau$ ),  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Uma relação de comutação pode ser estabelecida por intermédio de (2.7),

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = \phi(\mathbf{N}), \quad (2.8)$$

no qual  $\phi(\mathbf{N})$  é uma função de  $\mathbf{N}$  conforme demonstra a relação

$$\phi(\mathbf{N}) = |\mathbf{f}(\mathbf{N} + 1)|^2 (\mathbf{N} + 1) - |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 \mathbf{N}. \quad (2.9)$$

Portanto, cada função específica  $\mathbf{f}(\mathbf{N})$  implica numa particular relação de comutação. Se  $\mathbf{f}(\mathbf{N}) = 1$ , então  $\phi(\mathbf{N}) = 1$  e a álgebra do OH é recuperada. Devido a esta condição, a equação de movimento de Heisenberg para  $\mathbf{A}$  (ou  $\mathbf{A}^\dagger$ ),  $\dot{\mathbf{A}} + i[\mathbf{A}, \mathbf{H}(\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger, \mathbf{N})] = 0$ , irá depender necessariamente do hamiltoniano particular  $\mathbf{H}(\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger, \mathbf{N})$  e a relação de comutação (2.8). Para  $\mathbf{H}(\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger, \mathbf{N}) = \mathbf{H}(\mathbf{N})$ , a equação de movimento para  $A$  é

$$\dot{\mathbf{A}} + i\omega_+(\mathbf{N})\mathbf{A} = 0 \quad (2.10)$$

sendo o operador frequência não-linear  $\omega_+(\mathbf{N})$  definida por

$$[\mathbf{A}, \mathbf{H}(\mathbf{N})] = \omega_+(\mathbf{N})\mathbf{A}, \quad (2.11)$$

de acordo com a relação de comutação (2.2); além disso,  $\mathbf{H}(\mathbf{N})$  e  $\omega_+(\mathbf{N})$  encontram-se conectados pela relação

$$\mathbf{H}(\mathbf{N} + 1) - \mathbf{H}(\mathbf{N}) = \omega_+(\mathbf{N}). \quad (2.12)$$

Como exemplo, consideramos o hamiltoniano para o oscilador- $f$  livre

$$\mathbf{H}(\mathbf{N}) = \frac{\omega_0}{2} (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger) = \frac{\omega_0}{2} [|\mathbf{f}(\mathbf{N} + 1)|^2 (\mathbf{N} + 1) + |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 \mathbf{N}], \quad (2.13)$$

no qual  $\mathbf{N}$  é uma constante de movimento, e a frequência também pode ser expressa como

$$\omega_+(\mathbf{N}) = \frac{\omega_0}{2} [\phi(\mathbf{N} + 1) + \phi(\mathbf{N})] \quad (2.14)$$

$$= \frac{\omega_0}{2} [|\mathbf{f}(\mathbf{N} + 2)|^2 (\mathbf{N} + 2) - |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 \mathbf{N}]. \quad (2.15)$$

A solução para (2.10) pode ser escrita como

$$\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega_+(\mathbf{N})(t-t_0)} \mathbf{A}(t_0), \quad (2.16)$$

ou em termos do operador evolução  $\mathbf{U}(t) = e^{-i\mathbf{H}(\mathbf{N})t}$ ,

$$\mathbf{A}(t) = e^{i\mathbf{H}(\mathbf{N})(t-t_0)} \mathbf{A}(t_0) e^{-i\mathbf{H}(\mathbf{N})(t-t_0)} = e^{-i(\mathbf{H}(\mathbf{N}+1) - \mathbf{H}(\mathbf{N}))(t-t_0)} \mathbf{A}(t_0). \quad (2.17)$$

Nós podemos também escrever como

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t_0) e^{-i\omega_-(\mathbf{N})(t-t_0)} \quad (2.18)$$

em que

$$\begin{aligned} \omega_-(\mathbf{N}) &= \frac{\omega_0}{2} [\phi(\mathbf{N}) + \phi(\mathbf{N}-1)] = [\mathbf{H}(\mathbf{N}) - \mathbf{H}(\mathbf{N}-1)] \\ &= \frac{\omega_0}{2} [|\mathbf{f}(\mathbf{N}+1)|^2(\mathbf{N}+1) - |\mathbf{f}(\mathbf{N}-1)|^2(\mathbf{N}-1)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A definição para a frequência é ambígua, porque, desde que ela seja função de  $\mathbf{N}$ , ela irá depender de como a equação de movimento é escrita: se é escrita na forma  $\dot{\mathbf{A}} + i\omega_+(\mathbf{N})\mathbf{A} = 0$  ou como  $\dot{\mathbf{A}} + i\mathbf{A}\omega_-(\mathbf{N}) = 0$ . Esta condição de ambiguidade é validada quando o operador  $\mathbf{a}$  divide a mesma frequência associada a  $\mathbf{A}$ , desde que a equação de movimento seja a mesma,  $\dot{\mathbf{a}} + i\omega_+(\mathbf{N})\mathbf{a} = 0$  (ou  $\dot{\mathbf{a}} + i\mathbf{a}\omega_-(\mathbf{N}) = 0$ ).

Sobre esta discussão podemos relatar, conforme foi demonstrado em (36), que para um sistema quântico o vetor campo associado com as equações de movimento pode admitir descrições hamiltonianas alternativas, em ambas as representações de Schrödinger e Heisenberg. Uma equação de movimento não define unicamente as relação de comutação quântica, no qual é conhecido como problema de Wigner. Assim, ao considerarmos a equação de movimento para o oscilador linear com o operador amplitude  $\mathbf{a}$ ,

$$\dot{\mathbf{a}} + i\omega_0\mathbf{a} = 0, \quad (2.20)$$

podemos verificar que a relação de comutação  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$  e o hamiltoniano  $\mathbf{H}_0 = \omega_0(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + 1/2)$  são compatíveis. Agora, desde que o operador número  $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$  é uma constante de movimento, o operador amplitude não-linear  $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{N})$ , com  $f(\mathbf{N})$  sendo uma função que nos leva a mesma equação de movimento para  $\mathbf{A}$ ,

$$\dot{\mathbf{A}} + i\omega_0\mathbf{A} = 0. \quad (2.21)$$

Além disso, a relação de comutação muda para (2.8) e (2.9), e o hamiltoniano ainda satisfaz  $[\mathbf{A}, \mathbf{H}_0(\mathbf{N})] = \omega_0\mathbf{A}$ . Na próxima seção derivaremos as relações (2.3)-(2.5) usando a decomposição (2.7).

## 2.4 Uma Realização Não-Linear para $q$ -Algebra GDA

Considerando a definição (2.7) é trivial verificar que

$$\mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{N}) = \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1)\mathbf{a} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}^*(\mathbf{N})\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{f}^*(\mathbf{N} + 1). \quad (2.22)$$

Introduzindo a equação (2.22) nas relações (2.2), obtem-se a equação

$$(\mathbf{N} + 1) |\mathbf{f}(\mathbf{N} + 1)|^2 - q^\gamma \mathbf{N} |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 = q^{\alpha\mathbf{N} + \beta}. \quad (2.23)$$

Em seguida, fazendo a substituição  $\mathbf{f}(\mathbf{N}) = q^{\alpha\mathbf{N}/2} \mathbf{h}(\mathbf{N}) / \sqrt{\mathbf{N}}$ , ficamos com

$$q^{\alpha-\beta} |\mathbf{h}(\mathbf{N} + 1)|^2 - q^{\gamma-\beta} |\mathbf{h}(\mathbf{N})|^2 = 1 \quad (2.24)$$

o qual sugere olharmos para uma solução na forma

$$|\mathbf{h}(\mathbf{N})|^2 = A_1(q) + A_2(q) e^{u(q)\mathbf{N}}. \quad (2.25)$$

Para uma dada função  $A_2(q) \neq 0$ , as funções  $A_1(q)$  e  $u(q)$  podem ser encontradas a partir da substituição de (2.25) em (2.24) e igualando os termos com mesma potência de  $e^0$  e  $e^{u(q)\mathbf{N}}$ . Então adotando tal procedimento obtem-se  $A_1(q) = q^\beta / (q^\alpha - q^\gamma)$  e  $u(q) = \ln q^{\gamma-\alpha}$ .

Logo, a função

$$|\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 = \frac{1}{\mathbf{N}} \left( \frac{q^{\beta+\alpha\mathbf{N}}}{q^\alpha - q^\gamma} + A_2(q) q^{\gamma\mathbf{N}} \right)$$

é prontamente determinada e expressa em termos da função  $c$ -number  $A_2(q)$ . A fim de evitar uma singularidade inconveniente em  $\mathbf{f}(\mathbf{N})$  para  $\alpha = \gamma$ , nós fixamos  $A_2(q) = -q^\beta / (q^\alpha - q^\gamma)$ , levando-nos a escrever

$$|\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 = \begin{cases} \frac{q^\beta}{\mathbf{N}} \frac{q^{\alpha\mathbf{N}} - q^{\gamma\mathbf{N}}}{q^\alpha - q^\gamma} & \text{para } \alpha \neq \gamma \\ q^{\beta+\gamma(\mathbf{N}-1)} & \text{para } \alpha = \gamma \end{cases} \quad (2.26)$$

O lado direito de (2.26) é positivo, se todos os parâmetros  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são reais (e, além disso,  $q$  é positivo). Neste caso podemos escolher (suprimindo uma fase não essencial)  $\mathbf{f}(\mathbf{N}) = \sqrt{|\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2}$ . O estado de Fock  $q$ -deformado obedece as relações (2.3) e (2.4) com  $F(n; q) = n |f(n; q)|^2$  <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Nós usamos a letra maiúscula  $\mathbf{N}$  em negrito para o operador número e a letra minúscula  $n$  para seus auto-valores

É conveniente introduzirmos novos parâmetros de deformação de acordo com a relação

$$q = e^\tau, \quad \alpha = \rho + \mu, \quad \gamma = \rho - \mu$$

Com isso, a equação (2.26) é reescrita como

$$|\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 = \frac{\sinh(\tau\mu\mathbf{N})}{\mathbf{N} \sinh(\tau\mu)} \exp \{ \tau [\beta + \rho (\mathbf{N} - 1)] \}, \quad (2.27)$$

enquanto que (2.9) torna-se

$$\phi(\mathbf{N}) = \frac{e^{\tau\beta + \tau\rho(\mathbf{N}-1)} [e^{\tau\rho} \sinh(\tau\mu(\mathbf{N} + 1)) - \sinh(\tau\mu\mathbf{N})]}{\sinh(\tau\mu)}. \quad (2.28)$$

Além disso o hamiltoniano do oscilador- $f$  livre (2.13) pode ser escrito explicitamente como

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} e^{\tau(\beta + \rho\mathbf{N})} \left\{ \frac{\sinh(\tau\mu[\mathbf{N} + 1])}{\sinh(\tau\mu)} + e^{-\tau\rho} \frac{\sinh(\tau\mu\mathbf{N})}{\sinh(\tau\mu)} \right\}. \quad (2.29)$$

Neste caso, os autovalores  $E_n$  são obtidos substituindo o operador  $N$  em (2.29) pelos respectivos autovalores  $n \in \mathfrak{N}$ . Note que  $\{E_n\}_{n \in \mathfrak{N}}$  permanece inalterado pela troca de sinal de  $\mu$ , embora não tenham uma simetria definida sobre a mudança de sinal de  $\rho$ . Obviamente,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . O número de níveis (discreto) de energia é infinito, e o comportamento assintótico do espectro para  $n \rightarrow \infty$  e  $\tau \neq 0$  é governado pelo fator exponencial  $\exp[\tau n(\rho + |\mu|)]$ . Se  $\tau(\rho + |\mu|) > 0$ , a energia cresce sem limite com o aumento de  $n$ . Por outro lado, se  $\rho + |\mu| = 0$ , isto é,  $\alpha = 0$  ou  $\gamma = 0$ , então  $E_n$  tende monotonamente para o “upperbound”

$$E_{max} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \frac{\exp[\tau(\beta - \rho)]}{\sinh(\tau|\mu|)}. \quad (2.30)$$

Quando  $\tau(\rho + |\mu|) < 0$ , o espectro de energia exhibe um aumento inicial, mas com crescimento de  $n$  ele atinge um valor máximo em seguida vai a zero para  $n \rightarrow \infty$ . No caso especial  $\mu = 0$  ( $\alpha = \gamma$ ) e  $\beta = 0$  obtém-se

$$E_n = \frac{\hbar\omega_0}{2} e^{\tau\rho n} [1 + n(1 + e^{-\tau\rho})],$$

com a frequência não-linear expressa por

$$\omega_+(n) = \omega_0 e^{\tau\rho n} [e^{\tau\rho} + n \sinh(\tau\rho)]. \quad (2.31)$$

Nós podemos ganhar uma melhor compreensão dos efeitos da deformação em  $E_n$  assumindo  $\tau = 1$ ,  $\rho n \ll 1$  e mantendo os termos até  $n^2$ . Para esta aproximação,

$$E_n \approx \frac{\hbar\omega_0}{2} [1 + n(1 + \rho + e^{-\rho}) + n^2\rho(1 + e^{-\rho})] \quad (2.32)$$

que é característica de um espectro tipo Kerr, com

$$\omega_+(n) \approx \omega_0 [e^\rho + n\rho(1 + e^\rho) + n^2\rho^3]. \quad (2.33)$$

Então, para pequenas não-linearidades, energia e frequência não são proporcionais.

### 2.4.1 O meio Kerr

Como um exemplo físico prático a partir da óptica, nós consideramos um meio Kerr, no qual o hamiltoniano do campo monocromático contém um termo não-linear proporcional a  $\mathbf{N}(\mathbf{N} - 1)$  [?, ?],

$$\mathbf{H}_{kerr}(\mathbf{N}) = \frac{\hbar\omega_0}{2} (2\mathbf{N} + 1) + \frac{\kappa}{2}\mathbf{N}(\mathbf{N} - 1). \quad (2.34)$$

Assumindo pequenos valores de  $\rho$  e  $\mu^2$  em (2.13) o hamiltoniano  $\mathbf{H}_N$  pode ser expandido como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_N &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \left[ (2\mathbf{N} + 1) + \frac{1}{6}\mu^2 \mathbf{N} + \left( \frac{1}{2}\mu^2 + 2\rho \right) \mathbf{N}^2 + O(\rho^2, \rho\mu^2, \mu^4) \right] \\ &\approx \frac{\hbar\omega_0}{2} \left[ (2\mathbf{N} + 1) + \left( \frac{2}{3}\mu^2 + 2\rho \right) \mathbf{N} + \left( \frac{1}{2}\mu^2 + 2\rho \right) \mathbf{N}(\mathbf{N} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Note que o termo não-linear no hamiltoniano (2.34) contém somente um parâmetro. Dessa forma o hamiltoniano (2.35) reproduz (2.34) pela substituição  $\mu^2 = -3\rho$  e  $\rho = 2\kappa/\omega_0$ .

Alternativamente, nós podemos considerar o conjunto, *ab initio*, em (2.13)

$$\mathbf{f}(\mathbf{N}) = \left[ 1 + \frac{\kappa(\mathbf{N} - 1)^2}{2\omega_0\mathbf{N}} \right]^{1/2} \quad (2.36)$$

para obter (2.34). Então, os parâmetros da álgebra GDA estão relacionados com  $\kappa$ , o qual é proporcional ao parâmetro de susceptibilidade do meio não-linear.

### 2.4.2 O espectro de energia

Na figura 2.1 nós apresentamos o espectro para quatro conjunto de valores dos parâmetros de deformação: quando  $(\alpha, \gamma)$ :  $(0, 0)$  temos o espectro usual do oscilador harmônico

com os níveis de energia igualmente espaçados. Os outros conjuntos de valores resultam no espectro não-linear: para  $(0.2, 0)$  o espectro sofre uma dilatação, os “gaps” entre os níveis sucessivos de energia aumentam com  $n$ ; enquanto que para  $(0, -0.2)$ , o espectro de energia é compacto, os “gaps” entre os níveis sucessivos de energia diminuem e no limite  $n \rightarrow \infty$  eventualmente vai a zero, com “upperbound” de energia (2.30). Para  $(-0.05, -0.35)$ , além de compacto, o espectro de energia também se inclina, com a energia atingindo o valor máximo para  $n = 6$  e depois diminuindo com o aumento de  $n$ . Quando  $\{\alpha, \gamma\} < 0$ , o nível mais alto de energia ocorre para  $n$  inteiro, que é próximo a

$$\bar{n} = \frac{1}{\alpha - \gamma} \ln \left( \frac{1 + e^\gamma \gamma}{1 + e^\alpha \alpha} \right) \quad (2.37)$$

obtido a partir de  $dE_n/dn = 0$ , com

$$\left. \frac{d^2 E_n}{dn^2} \right|_{n=\bar{n}} = -\alpha \gamma E_{\bar{n}}.$$

Nós notamos que o lado direito de (2.26) e (2.27) permanece real e par se o parâmetro  $\mu$  for um número imaginário puro (de modo que  $\alpha = \gamma^*$ ). Todavia, em cada caso,  $\mu$  não pode assumir valores arbitrários. Afim de assegurar a positividade de  $|f(\mathbf{N})|^2$ , nós consideramos  $\tau\mu = i\pi/p$  com  $p$  um inteiro positivo. Desta maneira, chegamos a função

$$|\mathbf{f}_p(\mathbf{N}; \beta, \rho, \tau)|^2 = \frac{\sin(\pi\mathbf{N}/p)}{\mathbf{N} \sin(\pi/p)} \exp\{\tau[\beta + \rho(\mathbf{N} - 1)]\} \quad (2.38)$$

no qual resulta num *truncamento* nos estados de Fock deformados, havendo somente  $p$  estados  $\{|n\rangle\}_{n=0,1,\dots,p-1}$ , desde que  $f_p(p; \beta, \rho, \tau) = 0$ . O hamiltoniano (2.29) assume então a forma

$$\mathbf{H}_p = \frac{\hbar\omega}{2} e^{\tau(\beta+\rho\mathbf{N})} \left\{ \frac{\sin[\pi(\mathbf{N}+1)/p]}{\sin(\pi/p)} + e^{-\tau\rho} \frac{\sin(\pi\mathbf{N}/p)}{\sin(\pi/p)} \right\} \quad (2.39)$$

e uma vez que há um hamiltoniano para cada valor inteiro de  $p$ , nós designamos  $H_p$  uma classe hamiltonianos  $p$  ou  $p$ -hamiltonianos. Outrora, como em todos os casos o parâmetro  $\beta$  é um mero fator de escala, nós consideramos  $\beta = 0$  em uma análise posterior. (Uma física interessante surge a partir da interação entre os parâmetros  $\alpha$  and  $\gamma$ . Uma análise interessante considerando  $\beta \neq 0$  é realizado em (60))

Tanto na figura 2.1 como em 2.2 nós apresentamos o espectro de energia para  $p = 16$  e  $\rho = 0.05, 0.1, 0.3$ , respectivamente. No lado esquerdo nós temos o espectro do OH para

servir de comparação, e para  $\rho = 0.3$  repare que o espéctro de energia está em uma escala diferente. Deixamos de ter espaçamento regulares entre os níveis de energia  $E_{p,n}$  e todo o espectro é compacto, isto é eles se enclinam depois de atingir um valor máximo, (a sequência de energias pode ser melhor vista na inserção) tendo em vista que

$$\left. \frac{d^2 E_{p,n}}{dn^2} \right|_{n=\bar{n}} = - \left[ \left( \frac{\pi}{p} \right)^2 + \rho^2 \right] E_{p,\bar{n}}.$$

O ponto máximo  $\bar{n}$  é determinado por  $dE_{p,n}/dn = 0$ , sendo

$$\bar{n} = \frac{p}{\pi} \left\{ \pi + \arctan \left[ \frac{(\pi/p\rho) (\cos(\pi/p) + e^{-\rho}) + \sin(\pi/p)}{(\pi/p\rho) \sin(\pi/p) - (\cos(\pi/p) + e^{-\rho})} \right] \right\} \quad (2.40)$$

o valor de  $n$  para o maior nível de energia  $E_{p,n}$ , sendo que para determinados espectros este valor será próximo a um inteiro positivo.

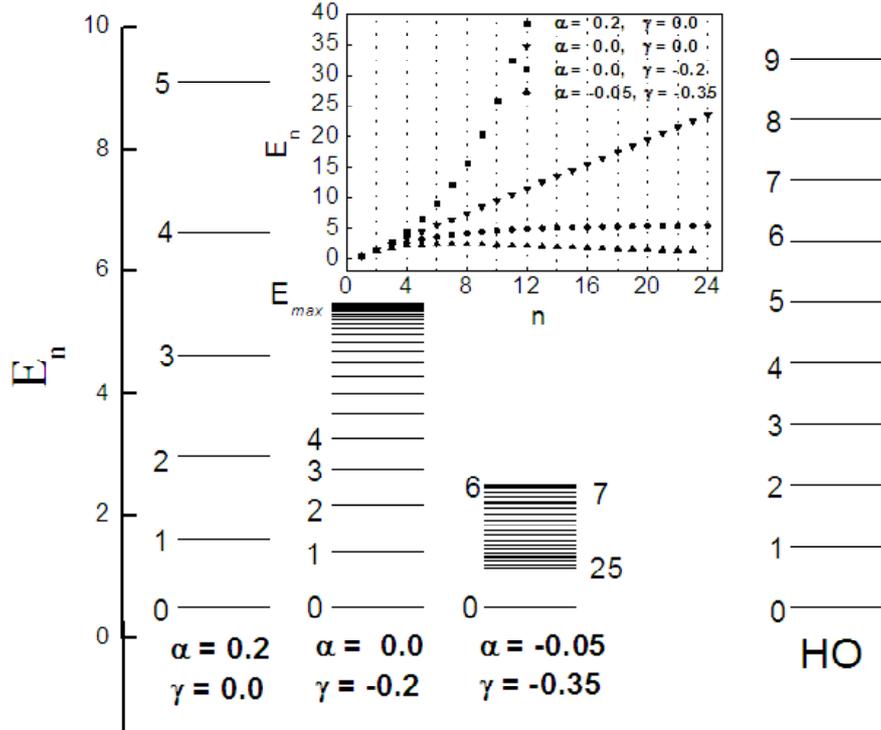


Figura 2.1. Níveis de energia do hamiltoniano (2.32) para vários valores de  $\alpha$  e  $\gamma$ .

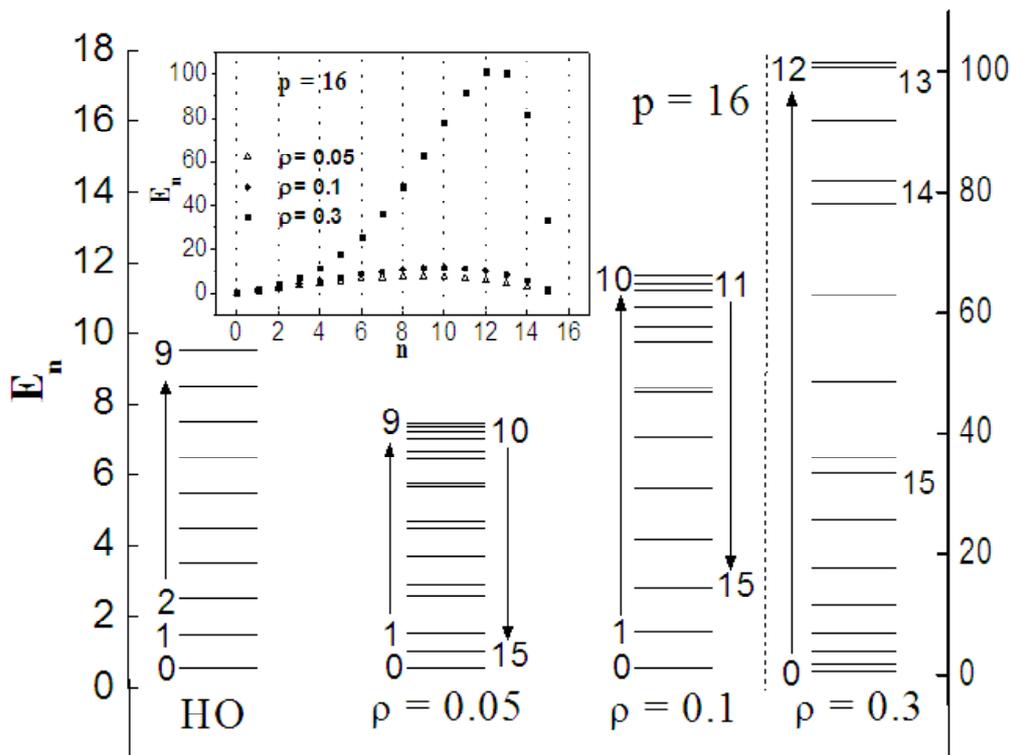


Figura 2.2. Níveis de energia do hamiltoniano (2.42) com  $p = 16$  para vários valores de  $\rho$ .

## 2.5 Potencial e função inércia

Uma vez que nós obtemos os hamiltonianos e seus respectivos níveis de energia, iremos tentar agora entender o significado do comportamento do espectro de energia através do limite clássico dos hamiltonianos ( os hamiltonianos são expressados em termos dos operadores posição e momentum,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ ). Mais precisamente, nós iremos determinar a energia potencial e a função inércia (ou massa efetiva) em termos de  $\mathbf{Q}$ . Assumindo pequenos valores para os parâmetros e mantendo os termos de ordem mais baixa com relação ao momentum  $\mathbf{P}$  em (2.29) e (2.39), nós podemos escreve-los na forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = V(\mathbf{Q}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}M^{-1}(\mathbf{Q})\mathbf{P} + \mathbf{P}^2W(\mathbf{Q})\mathbf{P}^2 + \dots \quad (2.41)$$

A forma quadrática simétrica  $\mathbf{Q}^2 + \mathbf{P}^2$ , apresentada nos hamiltonianos exatos é desfeita quando a expansão (2.41) é, até alguma determinada ordem, truncada. Lembrando a definição (2.7), nós expressamos os operadores usuais não-hermitianos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  em termos

de  $\tilde{\mathbf{Q}}$  e  $\tilde{\mathbf{P}}$

$$\mathbf{a} = \left( \sqrt{m\omega} \tilde{\mathbf{Q}} + i \tilde{\mathbf{P}} / \sqrt{m\omega} \right) / \sqrt{2\hbar}, \quad \mathbf{a}^\dagger = \left( \sqrt{m\omega} \tilde{\mathbf{Q}} - i \tilde{\mathbf{P}} / \sqrt{m\omega} \right) / \sqrt{2\hbar}.$$

Assim

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \frac{1}{\hbar\omega} \left( \frac{m\omega^2}{2} \tilde{\mathbf{Q}}^2 + \frac{1}{2m} \tilde{\mathbf{P}}^2 \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{P}^2 - 1) \quad (2.42)$$

em que  $\mathbf{Q} = (m\omega/\hbar)^{1/2} \tilde{\mathbf{Q}}$  e  $\mathbf{P} = (m\omega\hbar)^{-1/2} \tilde{\mathbf{P}}$ . Agora desde que os hamiltonianos (2.29) e (2.39) contêm termos como  $\exp(x\mathbf{N})$ , sendo  $x$  um número real ou imaginário, nós escrevemos  $\exp(x\mathbf{N}) = \exp(-x/2) \exp(a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2)$  com  $a = b = x/2$ . Portanto, para os termos lineares em  $b\mathbf{P}^2$ , nós temos (consultar apêndice A)

$$L_b \{ e^{x\mathbf{N}} \} = e^{-x/2} L_b \{ \exp [ x (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{P}^2) / 2 ] \} = e^{-x/2} [ P u_1(\mathbf{Q}) \mathbf{P} + u_2(\mathbf{Q}) ] \quad (2.43)$$

onde

$$u_1(\mathbf{Q}; x) = \frac{x}{2} e^{x\mathbf{Q}^2/2} \quad u_2(\mathbf{Q}; x) = \left[ 1 - \frac{x^2}{4} \left( 1 + \frac{2x}{3} \mathbf{Q}^2 \right) \right] e^{x\mathbf{Q}^2/2} \quad (2.44)$$

e o símbolo  $L_b \{ f(b) \}$  significa considerar somente os termos de ordem  $b^0$  e  $b^1$  na expansão da função  $f(b)$

### 2.5.1 Parâmetros Contínuos: conjunto infinito de níveis de energia contáveis

No cálculo dos dois primeiros termos em (2.41), o uso da parametrização  $\alpha - \gamma$  nos leva a uma forma mais simples que com o uso dos parâmetros  $\rho$  e  $\mu$ . Além disso, desde que o parâmetro  $\tau$  em (2.29) sempre aparece multiplicando  $\alpha$  e  $\gamma$  (ou  $\rho$  e  $\mu$ ), nós podemos absorvê-lo daqui por diante fazendo a substituição  $\tau\alpha \rightarrow \alpha$  e  $\tau\gamma \rightarrow \gamma$ . Para escrever o hamiltoniano (2.29) sob o termo quadratico em  $P$ , nós temos que expressar as funções hiperbólicas na forma exponencial e calcular os termos lineares em  $b$  da combinação  $(1 + e^\alpha) L_b \{ e^{\alpha\mathbf{N}} \} - (1 + e^\gamma) L_b \{ e^{\gamma\mathbf{N}} \}$ . Usando as equações (2.43) e (2.44), depois de alguns cálculos algébricos, nós obtemos as seguintes funções potencial e massa efetiva inversa:

$$M^{-1}(\mathbf{Q}; \alpha, \gamma) = (e^\alpha - e^\gamma)^{-1} \left[ \alpha e^{\alpha\mathbf{Q}^2/2} \cosh \frac{\alpha}{2} - \gamma e^{\gamma\mathbf{Q}^2/2} \cosh \frac{\gamma}{2} \right] \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{Q}; \alpha, \gamma) &= (e^\alpha - e^\gamma)^{-1} \left\{ \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{4} \left( 1 + \frac{2\alpha}{3} \mathbf{Q}^2 \right) \right] e^{\alpha \mathbf{Q}^2/2 \cosh \frac{\alpha}{2}} \right. \\
&\quad \left. - \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{4} \left( 1 + \frac{2\gamma}{3} \mathbf{Q}^2 \right) \right] e^{\gamma \mathbf{Q}^2/2 \cosh \frac{\gamma}{2}} \right\} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

No caso  $\alpha = \gamma$  (ou  $\mu = 0$ ) ficamos com

$$M^{-1}(\mathbf{Q}; \gamma, \gamma) = e^{-\gamma} \left[ \frac{\gamma}{2} \sinh \frac{\gamma}{2} + \cosh \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma \mathbf{Q}^2}{2} \cosh \frac{\gamma}{2} \right] e^{\gamma \mathbf{Q}^2/2}, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{Q}; \gamma, \gamma) &= \frac{e^{-\gamma}}{2} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \sinh \frac{\gamma}{2} - \gamma \cosh \frac{\gamma}{2} \right] + \left[ \left( 1 - \frac{5}{4} \gamma^2 \right) \cosh \frac{\gamma}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\gamma^3}{6} \sinh \frac{\gamma}{2} \right] \mathbf{Q}^2 - \frac{\gamma^3}{6} \mathbf{Q}^4 \cosh \frac{\gamma}{2} \right\} e^{\gamma \mathbf{Q}^2/2}, \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Para  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $M(\mathbf{Q}; 0, 0) = 1$  e  $V(\mathbf{Q}; 0, 0) = \mathbf{Q}^2/2$ , como é imediato verificar. Um termo quártico em  $\mathbf{Q}$  está adicionalmente presente em (2.48), embora ausente em (2.46).

## 2.5.2 classe $p$ -hamiltoniana : número finito de níveis de energia

No caso dos hamiltonianos de classe  $p$ , ver Eq.(2.39), os cálculos realizados são similares aos desenvolvidos na subseção anterior, fornecendo as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
M_p^{-1}(\mathbf{Q}; \rho) &= \frac{\exp[\rho(\mathbf{Q}^2 - 1)/2]}{2 \sin(\pi/p)} \left\{ \rho \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2p} (1 + \mathbf{Q}^2) \right) - e^{-\rho} \sin \left( \frac{\pi}{2p} (1 - \mathbf{Q}^2) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{p} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2p} (1 + \mathbf{Q}^2) \right) + e^{-\rho} \cos \left( \frac{\pi}{2p} (1 - \mathbf{Q}^2) \right) \right] \right\}, \quad (2.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_p(\mathbf{Q}; \rho) &= \frac{\exp[\rho(\mathbf{Q}^2 - 1)/2]}{2 \sin(\pi/p)} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\rho^2}{4} + \frac{\pi^2}{4p^2} \right) - \rho \left( \frac{\rho^2}{6} - \frac{\pi^2}{p^2} \right) \mathbf{Q}^2 \right] \right. \\
&\quad \times \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2p} (1 + \mathbf{Q}^2) \right) - e^{-\rho} \sin \left( \frac{\pi}{2p} (1 - \mathbf{Q}^2) \right) \right] - \frac{\pi}{2p} \left[ \rho + \left( \rho^2 - \frac{2\pi^2}{p^2} \right) \mathbf{Q}^2 \right] \\
&\quad \left. \times \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2p} (1 + \mathbf{Q}^2) \right) + e^{-\rho} \cos \left( \frac{\pi}{2p} (1 - \mathbf{Q}^2) \right) \right] \right\}. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Para  $\rho = 0$  e  $1 \leq p < \infty$ , as equações (2.49) e (2.50) resultam em

$$M_p^{-1}(\mathbf{Q}; 0) = \frac{\pi/(2p)}{\sin[\pi/(2p)]} \cos \left( \frac{\pi}{2p} \mathbf{Q}^2 \right), \quad (2.51)$$

$$V_p(\mathbf{Q}; 0) = \frac{1}{2 \sin[\pi/(2p)]} \left\{ \left( 1 + \frac{\pi^2}{4p^2} \right) \sin \left( \frac{\pi \mathbf{Q}^2}{2p} \right) + \left( \frac{\pi}{p} \right)^3 \mathbf{Q}^2 \cos \left( \frac{\pi \mathbf{Q}^2}{2p} \right) \right\}. \quad (2.52)$$

Devido a Eq. (2.51), a massa efetiva torna-se infinita nos pontos  $Q = \pm\sqrt{p}$  e a partícula não pode ir por meio desses pontos (na aproximação semiclássica). Então, o módulo dos valores da coordenada clássica  $Q$  é mais restrito dentro do intervalo aberto  $(-\sqrt{p}, \sqrt{p})$ . Finitude do parâmetro  $p$  implica numa massa infinita em algumas localizações do espaço, e a inércia assume valores infinitos porque a partícula tem seu movimento confinado a uma região espacial, onde a função massa não é negativa. Sob estas restrições, a função potencial é também espacialmente limitada, oscilações não aparecem apesar da presença das funções sin e cos de  $\mathbf{Q}^2$ .

Para  $\rho \neq 0$  e  $p \rightarrow \infty$ , obtemos

$$M_{\infty}^{-1}(\mathbf{Q}; \rho) = \frac{1}{2} \exp [\rho (\mathbf{Q}^2 - 1) / 2] \left[ \frac{\rho}{2} (1 - e^{-\rho}) + (1 + e^{-\rho}) \left( 1 + \frac{\rho}{2} \mathbf{Q}^2 \right) \right], \quad (2.53)$$

$$V_{\infty}(\mathbf{Q}; \rho) = \frac{1}{4} \exp [\rho (\mathbf{Q}^2 - 1) / 2] \left\{ \left( 1 - \frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^3}{6} \mathbf{Q}^2 \right) (1 - e^{-\rho}) \right. \\ \left. - \left[ \rho - \left( 1 - \frac{5}{4} \rho^2 \right) \mathbf{Q}^2 + \frac{\rho^3}{6} \mathbf{Q}^4 \right] (1 + e^{-\rho}) \right\} \quad (2.54)$$

e o alcance permitido para  $\mathbf{Q}$  torna-se irrestrito. Assim para  $\rho = 0$ ,  $M_{\infty}(\mathbf{Q}; 0) = 1$  e  $V_{\infty}(\mathbf{Q}; 0) = \mathbf{Q}^2/2$ , como esperado.

### 2.5.3 Discussão das figuras

Nas figuras 2.3a, 2.3b e 2.3c nós construímos o gráfico do potencial deformado  $V(\mathbf{Q})$  (linha sólida) para três valores dos parâmetros  $(\alpha, \gamma)$ : (a) (0.2, 0), (b) (0, -0.2) e (c) (-0.05, -0.35). A linha tracejada representa o potencial do OH (oscilador harmônico). No lado esquerdo de cada figura colocamos alguns níveis de energia do espectro exato, enquanto que do lado direito, por motivo de comparação, colocamos alguns níveis do espectro de energia do OH. Nas figuras 2.4a, 2.4b, e 2.4c a massa efetiva é ‘plotada’; lembrando que para o OH,  $M(\mathbf{Q}) = 1$ . Três diferentes conjuntos de pequenos parâmetros demonstra situações físicas completamente diferentes. Na figura 2.3a temos o potencial em  $\mathbf{Q} = 0$ , que demonstra uma menor curvatura que o potencial para o OH e é ilimitado (os valores crescem indefinidamente com o aumento dos valores de  $|\mathbf{Q}|$ ) tanto quanto o OH. Para a função massa na figura 2.4a, embora seja ligeiramente maior que 1 em  $\mathbf{Q} = 0$ , ela tem forma de sino, indo para 0 assintoticamente. Estas características são compartilhadas

com o espectro dilatado (comparado com o OH), onde os ‘gaps’ entre os níveis de energia sucessivos aumentam com o crescimento de  $n$ .

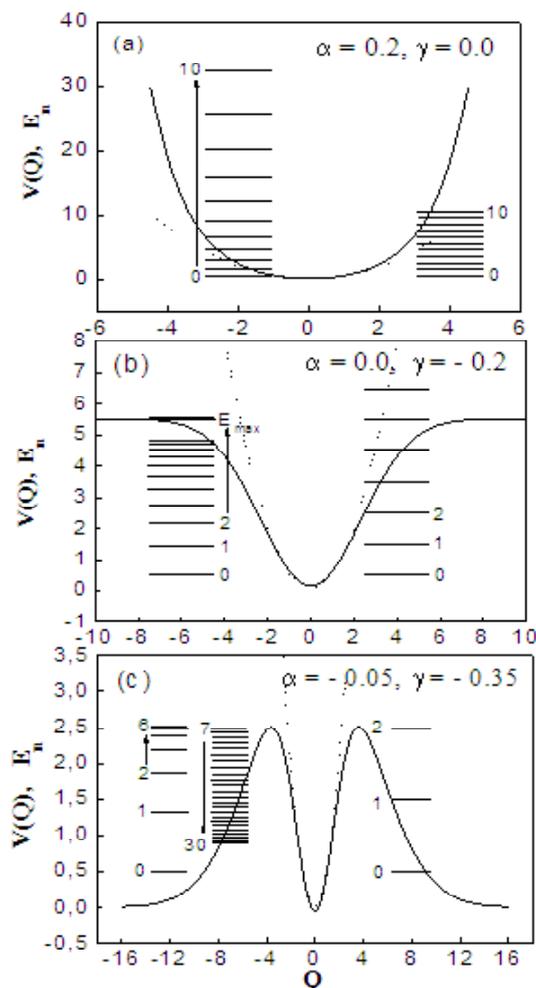


Figura 2.3. A energia potencial do hamiltoniano (2.32) em função da variável  $Q$  é plotada (linha sólida) para vários valores de  $\alpha$  e  $\gamma$ .

Na figura 2.3b, o potencial aparece com uma inclinação superficial (raza) cuja curvatura em  $Q = 0$  é maior que no OH; indo para alguns valores assintóticos quando  $|Q| \rightarrow \infty$ . A função massa na figura 2.4b é muito próxima de 1 em  $Q = 0$ , e ela aumenta facilmente com o crescimento de  $|Q|$  (note que a escala da massa é muito maior que a demonstrada na figura 2.3a); portanto ela demonstra um aumento súbito próximo aos pontos onde  $M(Q_\infty) \rightarrow \infty$  (a inércia da partícula aumenta drasticamente). Embora haja um número infinito de níveis de energia, o espectro é limitado, e o “upperbound” de energia é dado em Eq. (2.30). A direita podemos ver alguns níveis de energia do OH.

Na figura 2.3c o potencial demonstra um formato de dupla corcova com grande cur-

vatura em  $Q = 0$ , quando comparado ao formato do potencial do OH; a medida que  $|Q| \rightarrow \infty$ , o potencial vai a zero. Em analogia com a figura 2.4b, na figura 2.4c a massa vai a infinito nos pontos onde o potencial atinge seu valor máximo. Este comportamento é refletido no espectro de energia: para valores pequenos de  $n$  o espectro é comprimido em seu espaçamento, os níveis de energia atingem seu valor máximo, quase abaixo do máximo do potencial e portanto decrescem monotonamente com o aumento de  $n$ . Este fato ocorre devido a inércia da partícula: com o aumento de  $n$ , a massa tende a aumentar e a partícula volta quase a parar (sua energia diminui consideravelmente). O movimento é confinado dentro de poço, embora a partícula possa tunelar através da barreira.

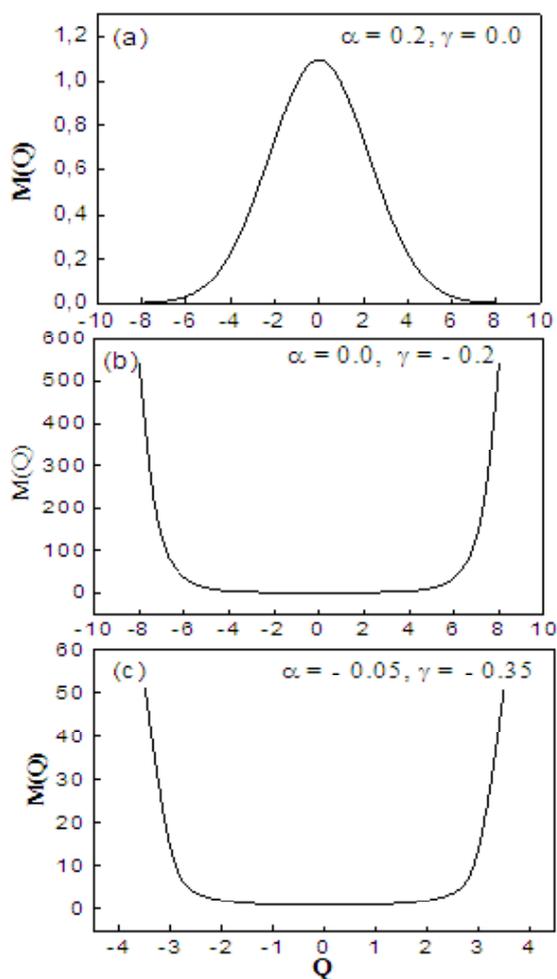


Figura 2.4. Gráfico da função massa efetiva para o hamiltoniano (2.32) em função de  $Q$  é plotada para vários valores de  $\alpha$  e  $\gamma$ .

Nas figuras 2.5a, 2.5b e 2.5c, nós ‘plotamos’ a função energia potencial e os níveis de

energia para o hamiltoniano de classe  $p$ , com  $p = 16$  e verificamos que para (a)  $\rho = 0.05$ , (b)  $\rho = 0.1$  e (c)  $\rho = 0.3$ , todos os potenciais (linha sólida) apresentam formato com dupla concavidade e assume valores negativos acima (fora) dos pontos onde  $V(Q) = 0$ . A linha tracejada representa o potencial quadrático do OH. Em todos os três casos espectro de energia sófre uma inclinação, atingindo um valor máximo em um  $n$  inteiro que é próximo a (2.40), no qual é devido ao crescimento da inércia, como demonstra as figuras 2.6a, 2.6b e 2.6c, no qual ‘plotamos’ as massas efetivas. O valor das massas é nulo acima (fora) dos pontos  $\pm Q_\infty$ , sendo

$$Q_\infty^2 = \frac{2p}{\pi} \left\{ \pi - \arctan \left[ \frac{\rho(1 - e^{-\rho}) \sin(\pi/(2p)) + (\pi/p)(1 + e^{-\rho}) \cos(\pi/(2p))}{\rho(1 + e^{-\rho}) \cos(\pi/(2p)) - (\pi/p)(1 - e^{-\rho}) \sin(\pi/(2p))} \right] \right\}$$

nesses pontos nós temos  $M(\pm Q_\infty) = \infty$  uma vez que  $M(Q)$  assume valores negativos.

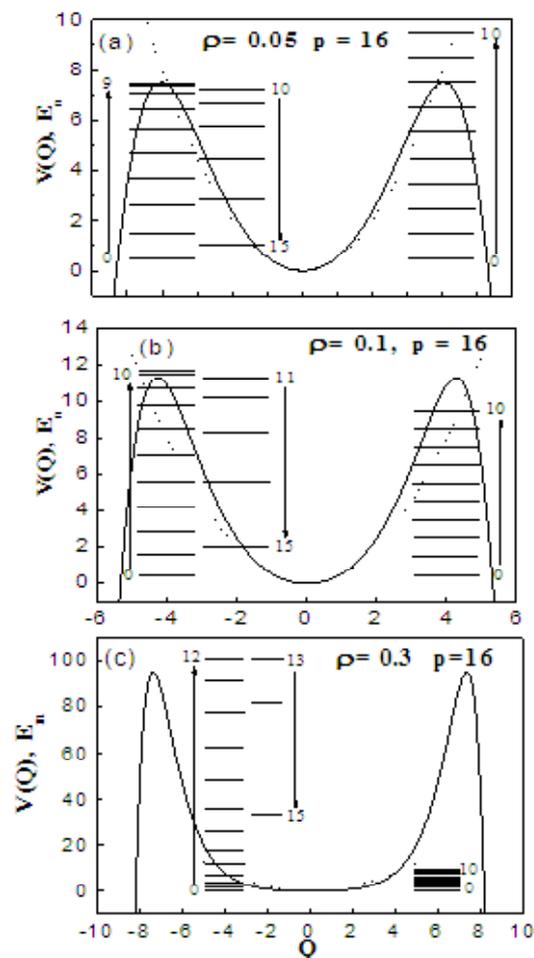


Figura 2.5. A energia potencial do hamiltoniano (2.42) em função da variável  $Q$  é plotada (linha sólida) com  $p = 16$  para vários valores de  $\rho$ .

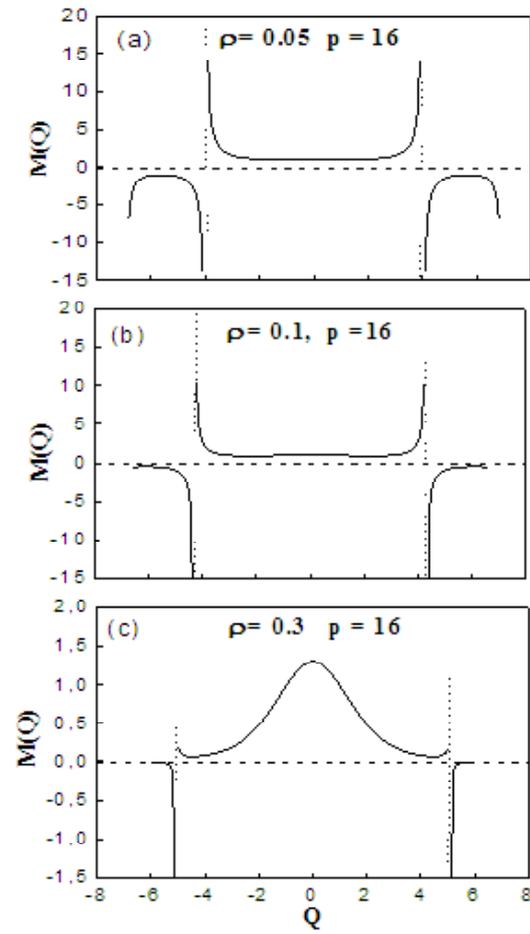


Figura 2.6. Gráfico da função massa efetiva para o hamiltoniano (2.42), com  $p = 16$ , em função de  $Q$  é plotada (linha sólida) para vários valores de  $\rho$ .

## 2.6 Conclusões

Nós consideramos a álgebra GDA proposta em (38) e associamos estas aos operadores abstratos do então oscilador- $f$ , relacionado com os usuais operadores do grupo de Heisenberg-Weyl. Nós escrevemos o hamiltoniano de uma suposta partícula representada pela álgebra GDA com duas possíveis parametrizações: (a) todos parâmetros reais ou (b) parâmetros com valores complexos, obtendo assim, duas classes de hamiltonianos cujo espectro de energia é não-linear no número quântico  $n$ .

Para o caso (a) nós verificamos que para pequenas alterações dos valores dos parâmetros, o espectro de energia sofre mudanças bruscas, obtendo espectros dilatados e não limitados (em comparação com os níveis equidistantes do OH), espectros compactos ou limitados, lineares ou inclinados. Uma idéia desses comportamentos foi obtido olhando para o correspondente clássico do hamiltoniano. Para o limite de pequenos valores dos parâmetros nós obtemos as funções energia potencial e massa efetiva demonstrando diferentes comportamentos para ínfimas mudanças dos parâmetros. O potenciais podem ser côncavo como o do OH, embora com diferentes curvaturas, ou demonstrar formato com dupla corcova. A massa efetiva, dependente da coordenada posição, pode ser limitada ou ilimitada, mas sempre positiva. Para o caso (b) todos os  $p$ -hamiltonianos demonstram espectro compacto e inclinado, ocorrendo inclinação quando a massa vai para o infinito em alguns pontos do espaço. Todos os potenciais apresentam comportamento com dupla corcova, embora nós acreditamos que o tunelamento é proibido devido a singularidade das massas. Desde que massas negativas não estão fora de regra, partículas de sinais opostos deve repelir cada outra.

# Capítulo 3

## Teoria Quântica dos Processos de Relaxação

### 3.1 Introdução

Neste capítulo iremos desenvolver uma teoria que descreve aproximadamente um processo quântico de relaxação, deduzindo para tanto uma equação mestra na aproximação de Markov para o operador densidade reduzido de um sistema acoplado a um reservatório (o reservatório representa o meio ambiente). Posteriormente, deduziremos as equações mestras especificando um reservatório térmico e comprimido<sup>1</sup>

### 3.2 O Operador Matriz Densidade

Na Mecânica Quântica existem sistemas que podem ser caracterizados por um único vetor de estado (ou função de onda) e neste caso dizemos que tais sistemas se encontram em um estado puro, cuja evolução obedece à equação de Schrödinger. Esses sistemas são preparados de forma específica, ou seja, seu vetor de estado é obtido conhecendo-se os autovalores de um conjunto completo de operadores (observáveis) que comutam entre si (5).

Entretanto, em muitos casos, medidas feitas sobre um sistema não fornecem toda a informação para caracterizar completamente o seu estado. Por exemplo, um feixe de partículas pode ser preparado de forma que certos números quânticos são conhecidos

---

<sup>1</sup> Este capítulo foi escrito com base na tese de doutorado de Gilberto Prativiera intitulada: ‘Efeitos Não-Markovianos Na Interação entre Radiação e Matéria’.

apenas pela sua distribuição de probabilidades. Tais sistemas, que não podem ser descritos por um único vetor de estado encontram-se em um estado chamado misto (5). A descrição destes sistemas é feita com o uso do formalismo do operador densidade, cuja evolução obedece à equação de von Neumann-Liouville. Este método tem a vantagem de tratar igualmente tanto estados puros quanto estados mistos.

Vamos considerar um “ensemble” constituído de uma grande quantidade de réplicas do sistema físico de interesse e supor que cada réplica se encontra em um estado puro  $\{|\psi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,2,\dots,N}$ . Este estado pode ser expandido numa base ortonormal de autovetores  $|n\rangle$  de algum conjunto completo de operadores, isto é,

$$|\psi_\alpha\rangle = \sum_n c_n^{(\alpha)} |n\rangle \quad , \quad (3.1)$$

com a condição de normalização

$$\sum_n |c_n^{(\alpha)}|^2 = 1 \quad . \quad (3.2)$$

O valor esperado de uma grandeza física representada pelo operador  $O$  no estado  $|\psi_\alpha\rangle$  é dado por

$$\langle \mathbf{O} \rangle_\alpha = \langle \psi_\alpha | \mathbf{O} | \psi_\alpha \rangle = \sum_n \sum_{n'} c_{n'}^{(\alpha)*} c_n^{(\alpha)} \langle n' | \mathbf{O} | n \rangle \quad . \quad (3.3)$$

Mas se apenas sabemos que o sistema se encontra no estado  $|\psi_\alpha\rangle$  com probabilidade  $P_\alpha$ , então seu valor médio no ensemble é

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^N P_\alpha \langle \mathbf{O} \rangle_\alpha \quad , \quad (3.4)$$

no qual  $P_\alpha$  é o peso estatístico associado ao estado representando um elemento do ensemble  $|\psi_\alpha\rangle$ , com

$$0 \leq P_\alpha \leq 1, \quad \sum_{\alpha=1}^N P_\alpha = 1 \quad . \quad (3.5)$$

Introduzindo (3.3) em (3.4) temos

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^N \sum_n \sum_{n'} P_\alpha c_{n'}^{(\alpha)*} c_n^{(\alpha)} \langle n' | \mathbf{O} | n \rangle \quad . \quad (3.6)$$

Definindo o operador densidade como a média para cada projetor do ensemble <sup>2</sup>

$$\boldsymbol{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^N |\psi_{\alpha}\rangle P_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}| \quad (3.7)$$

e com elementos de matriz dados por

$$\rho_{nn'} = \langle n' | \mathbf{O} | n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^N P_{\alpha} c_{n'}^{(\alpha)*} c_n^{(\alpha)}, \quad (3.8)$$

podemos reescrever a expressão (3.6) como

$$\langle \mathbf{O} \rangle = Tr(\boldsymbol{\rho} \mathbf{O}) \quad (3.9)$$

em que  $Tr$  denota a operação traço, isto é, a soma dos elementos diagonais. Então, conhecendo-se o operador densidade de um sistema, podemos calcular o valor médio ou momentos de qualquer grandeza física deste. Nesse sentido dizemos que toda a informação sobre o sistema está contida no operador densidade. O elemento diagonal

$$\rho_{nn} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^N P_{\alpha} |c_n^{(\alpha)}|^2 \quad (3.10)$$

corresponde à probabilidade de encontrar o sistema no estado  $|n\rangle$ , também chamado de população do estado  $|n\rangle$ .

O operador densidade tem as seguintes propriedades (61):

$$(i) \langle i | \boldsymbol{\rho} | i \rangle \geq 0, \forall |i\rangle \text{ (positividade)} \quad (3.11)$$

$$(ii) Tr(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n \rho_{n,n} = 1 \text{ (normalização)} \quad (3.12)$$

$$(iii) \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^{\dagger} \text{ (hermitiano)} \quad (3.13)$$

$$(iv) Tr(\boldsymbol{\rho}^2) \leq 1. \quad (3.14)$$

A igualdade em (3.14) ocorre quando o sistema se encontra em um estado puro. Assim a relação (3.14) é útil para distinguir entre estados puros e mistos.

O estado puro de um sistema tem evolução temporal governada pela equação de Schrödinger, dessa constatação segue que o operador densidade satisfaz a equação de Liouville-von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(t)}{\partial t} = [\mathbf{H}, \boldsymbol{\rho}(t)], \quad (3.15)$$

---

<sup>2</sup> Definimos a letra grega  $\boldsymbol{\rho}$  em negrito para indicar o operador densidade, diferenciando de  $\rho$  normal definido como um parâmetro de deformação no capítulo 2.

onde  $\mathbf{H}$  é o hamiltoniano do sistema.

### 3.3 A Equação Mestra na Aproximação Markoviana

Vimos na seção anterior, que o valor médio de um operador  $\mathbf{O}$ , representando uma grandeza física e que caracteriza o estado de um sistema isolado com hamiltoniano  $\mathbf{H}$  é dado pela expressão

$$\langle \mathbf{O}(t) \rangle = Tr [\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{O}] \quad (3.16)$$

onde  $\boldsymbol{\rho}(t)$  é o operador densidade que é solução da equação de Liouville-von Neumann

$$i\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(t)}{\partial t} = \mathbf{L}\boldsymbol{\rho}(t), \quad (3.17)$$

no qual definimos o operador de Liouville  $\mathbf{L}\boldsymbol{\rho} \equiv [\mathbf{H}, \boldsymbol{\rho}]$  e fizemos  $\hbar = 1$ . Em geral, sistemas físicos não são isolados, mas interagem com outros sistemas, podendo trocar partículas, energia, etc. Tais sistemas são chamados sistemas abertos e apresentam em geral um comportamento evolutivo irreversível. Se inicialmente um sistema aberto encontra-se em um estado de fora de equilíbrio ou não-estacionário, este irá para um estado de equilíbrio ou estacionário determinado por condições externas tais como temperatura, pressão, campos externos, etc. Essa evolução para um estado de equilíbrio ou estacionário é chamado de processo de relaxação. Consideremos um sistema que pode ser decomposto em dois subsistemas,  $S$  e  $R$ , que interagem entre si. O operador densidade  $\boldsymbol{\rho}(t)$  do sistema  $S + R$  satisfaz a Eq. (3.17), mas se estivermos interessados apenas na dinâmica de  $S$  devemos obter o operador densidade reduzido  $\boldsymbol{\rho}_S(t)$ , obtido tomando-se o traço sobre os graus de liberdade do sistema  $R$  (5), isto é,

$$\boldsymbol{\rho}_S(t) = Tr_R \boldsymbol{\rho}(t) . \quad (3.18)$$

Supondo que antes de se iniciar a interação ( $t = 0$ )  $S$  e  $R$  não estavam correlacionados temos

$$\boldsymbol{\rho}(0) = \boldsymbol{\rho}_R(0)\boldsymbol{\rho}_S(0) \quad (3.19)$$

no qual  $\boldsymbol{\rho}_R$  é o operador densidade do sistema  $R$ .

O acoplamento entre os dois sub-sistemas pode ocasionar uma troca reversível de energia, partículas, etc., sendo então necessário fazer algumas hipóteses sobre  $R$  para

garantir que  $S$  nunca retorne ao seu estado inicial. Para isso vamos impor a hipótese do caos molecular (62) introduzida por Boltzmann na sua famosa equação cinética para gases não ideais: “Se o sistema  $R$  possui infinitos graus de liberdade, e sua interação com  $S$  não é muito forte, podemos desprezar a reação de  $R$  sobre  $S$ . Assim, o estado de  $R$  fica descrito por uma distribuição de equilíbrio termodinâmico.” Em outras palavras,  $R$  atua como um reservatório e  $R$  e  $S$  permanecem não-correlacionados, o que permite escrever

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{\rho}_R(0)\boldsymbol{\rho}_S(t). \quad (3.20)$$

Com essas considerações vamos encontrar a equação que descreve a evolução dinâmica de  $S$  e, por questão de generalidade, supor que este sub-sistema pode estar submetido à ação de uma força externa dependente do tempo, por exemplo, um campo de radiação eletromagnética.

O hamiltoniano do sistema total é dado por

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_S + \mathbf{W}(t) + \mathbf{H}_R + \mathbf{V}, \quad (3.21)$$

em que  $\mathbf{H}_S$  e  $\mathbf{H}_R$  são os hamiltonianos dos sub-sistemas  $S$  e  $R$ , respectivamente,  $\mathbf{V}$  representa a interação entre  $S$  e  $R$ , e  $\mathbf{W}(t)$  é uma perturbação dependente do tempo que atua somente sobre  $S$ . Substituindo (3.21) em (3.17) ficamos com

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\boldsymbol{\rho}(t)}{\partial t} &= [\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] + [\mathbf{H}_R, \boldsymbol{\rho}(t)] + [\mathbf{W}(t), \boldsymbol{\rho}(t)] + [\mathbf{V}, \boldsymbol{\rho}(t)] \\ &= \mathbf{L}_S\boldsymbol{\rho}(t) + \mathbf{L}_R\boldsymbol{\rho}(t) + \mathbf{L}_W\boldsymbol{\rho}(t) + \mathbf{L}_V\boldsymbol{\rho}(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

que pode ser reescrita na representação de interação fazendo a seguinte transformação unitária

$$\boldsymbol{\rho}_I(t) = e^{i\mathbf{H}_0 t}\boldsymbol{\rho}(t)e^{-i\mathbf{H}_0 t} \equiv e^{i\mathbf{L}_0 t}\boldsymbol{\rho}(t) \quad (3.23)$$

sendo  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R$ . Com isto, obtemos

$$i\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_I(t)}{\partial t} = [\mathbf{L}_{W_I}(t) + \mathbf{L}_{V_I}(t)]\boldsymbol{\rho}_I(t) \quad (3.24)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_I(t) &= e^{i\mathbf{L}_0 t}\mathbf{V} \\ \mathbf{W}_I(t) &= e^{i\mathbf{L}_S t}\mathbf{W}(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Integrando formalmente a equação (3.24), obtemos

$$i\rho_I(t) = i\rho_I(0) + \int_0^t dt' \mathbf{L}_{W_I}(t') \rho_I(t') + \int_0^t dt' \mathbf{L}_{V_I}(t') \rho_I(t') \quad (3.26)$$

e, analogamente, chamando  $t$  ( $t'$ ) de  $t'$  ( $t''$ ) temos

$$i\rho_I(t') = i\rho_I(0) + \int_0^{t'} dt'' \mathbf{L}_{W_I}(t'') \rho_I(t'') + \int_0^{t'} dt'' \mathbf{L}_{V_I}(t'') \rho_I(t'') . \quad (3.27)$$

Substituindo  $\rho_I(t')$  de (3.27) na segunda integral de (3.26), tomando em seguida o traço sobre as variáveis do reservatório e derivando em relação ao tempo vamos obter

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} &= Tr_R [\mathbf{L}_{V_I}(t) \rho_I(0)] + \mathbf{L}_{W_I}(t) \rho_{SI}(t) - i Tr_R \left[ \int_0^t dt' \mathbf{L}_{V_I}(t) \mathbf{L}_{V_I}(t') \rho_I(t') \right] \\ &+ Tr_R \left[ \int_0^t dt' \mathbf{L}_{V_I}(t) \mathbf{L}_{W_I}(t') \rho_I(t') \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

que é uma equação exata pois não foi feita nenhuma aproximação para obtê-la.

Introduzindo a hipótese (3.20) ficamos com

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \rho_{SI}(t)}{\partial t} &= Tr_R \{ \mathbf{L}_{V_I}(t) \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(0) \} + \mathbf{L}_{W_I}(t) \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(t) \\ &- i \int_0^t dt' Tr_R \{ \mathbf{L}_{V_I}(t) \mathbf{L}_{V_I}(t') \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(t') \} \\ &- i \int_0^t dt' Tr_R \{ \mathbf{L}_{V_I}(t) , \mathbf{L}_{W_I}(t') \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(t') \}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora, considerando que  $\mathbf{V}$  só possua elementos não-diagonais na representação em que  $\rho_R$  é diagonal, o primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (3.29) anula-se,

$$Tr_R \{ \mathbf{L}_{V_I}(t) \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(0) \} = 0 . \quad (3.30)$$

Além disso, verifica-se também que o terceiro termo se anula após usar a propriedade cíclica do traço

$$Tr_R \{ \mathbf{L}_{V_I}(t) \mathbf{L}_{W_I}(t') \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(t') \} = 0. \quad (3.31)$$

Assim, a equação para o operador densidade reduzido para o sub-sistema  $S$  resulta em

$$i \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = \mathbf{L}_{W_I}(t) \rho_S(t) - i \int_0^t dt' Tr_R \{ \mathbf{L}_{V_I}(t) \mathbf{L}_{V_I}(t') \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(t') \} . \quad (3.32)$$

Podemos retornar para a representação de Schrödinger utilizando a transformação unitária inversa, equação (3.23), resultando em

$$i \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = (\mathbf{L}_S + \mathbf{L}_W) \rho_S(t) - i e^{-i\mathbf{L}_S t} \int_0^t dt' Tr_R \{ \mathbf{L}_{V_I}(t) \mathbf{L}_{V_I}(t') \rho_{RI}(0) \rho_{SI}(t') \}. \quad (3.33)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.33) pode ser escrito como

$$[\mathbf{L}_S + \mathbf{L}_W(t)] \rho_S(t) = \mathbf{L}_{S+W} \rho_S(t) \quad (3.34)$$

em que  $\mathbf{L}_{S+W} \rho_S(t) \equiv [\mathbf{H}_S + \mathbf{W}(t), \rho_S(t)]$ . Como  $\rho_R$  representa um estado de equilíbrio temos que

$$\rho_R(0) = e^{i\mathbf{L}_R t'} \rho_R(0) \quad (3.35)$$

e o integrando da equação (3.33) pode ser escrito como

$$Tr_R e^{i\mathbf{L}_R t} \{ \mathbf{L}_V e^{-i\mathbf{L}_0(t-t')} \mathbf{L}_V \rho_R(0) \rho_S(t') \} = Tr_R \{ \mathbf{L}_V e^{-i\mathbf{L}_0(t-t')} \mathbf{L}_V \rho_R(0) \rho_S(t') \} \quad (3.36)$$

no qual usamos a propriedade o cíclica do traço e  $\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{L}_S + \mathbf{L}_R$ .

Assim, obtemos a equação para o operador densidade reduzido do sub-sistema  $S$ ,

$$i \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = \mathbf{L}_{S+W} \rho_S(t) - i \int_0^t dt' \mathbf{K}(t-t') \rho_S(t') \quad (3.37)$$

sendo  $\mathbf{K}(t-t') = Tr_R \{ \mathbf{L}_V e^{-i\mathbf{L}_0(t-t')} \mathbf{L}_V \rho_R(0) \}$  um super operador <sup>3</sup> chamado kernel de memória. A equação acima é conhecida na literatura como “Equação Mestre Generalizada”, pois trata-se de uma equação integro-diferencial, com o primeiro termo do lado direito representando a evolução reversível de  $S$  e o termo da integral respondendo pelo comportamento irreversível, que depende do kernel de memória. Usando a definição do operador de Liouville  $\mathbf{L}_{S+W} \rho_S(t) \equiv [\mathbf{H}_S + \mathbf{W}(t), \rho_S(t)]$  e o super operador  $\mathbf{K}(t-t') = Tr_R \{ \mathbf{L}_V e^{-i\mathbf{L}_0(t-t')} \mathbf{L}_V \rho_R(0) \}$ , a equação (3.37), pode também ser escrita como

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -i [\mathbf{H}_{OS}, \rho_S(t)] - \int_0^t dt' Tr_R [\mathbf{V}_I(t) [\mathbf{V}_I(t'), \rho_R(0) \otimes \rho_S(t')]], \quad (3.38)$$

sendo  $\mathbf{H}_{OS} = \mathbf{H}_S + \mathbf{W}(t)$ .

Fazendo a mudança de variável  $t-t' = \mathcal{T}$  podemos escrever a Eq. (3.37) como

$$i \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = \mathbf{L}_{S+W} \rho_S(t) - i \int_0^t d\mathcal{T} \mathbf{K}(\mathcal{T}) \rho_S(t - \mathcal{T}). \quad (3.39)$$

Esta equação é não-Markoviana pois o operador densidade de  $S$  no instante  $t$  depende de seu valor no instante anterior  $t - \mathcal{T}$ . O tratamento convencional (1,5,6) assume  $\mathbf{K}(\mathcal{T})$  diferente de zero em um intervalo  $\mathcal{T}_c$ , chamado de tempo de correlação, e que o tempo

---

<sup>3</sup> Pois atua no espaço de operadores.

característico  $\Gamma^{-1}$  (tempo de relaxação) para que  $\boldsymbol{\rho}_S(t - \mathcal{T})$  sofra uma mudança apreciável é muito maior que o tempo de correlação, isto é,  $\mathcal{T}_c \Gamma \ll 1$ . Nestas condições

$$\boldsymbol{\rho}_S(t - \mathcal{T}) \approx \boldsymbol{\rho}_S(t) . \quad (3.40)$$

A aproximação (3.40) é conhecida como aproximação de Markov (AM) de ruído colorido e dizemos que o sistema sofre uma relaxação markoviana, isto é, seu estado futuro só depende de seu estado presente e não de seu passado. Na AM a Eq. (3.39) reduz-se a uma equação diferencial,

$$i \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_S(t)}{\partial t} = \mathbf{L}_{S+W} \boldsymbol{\rho}_S(t) - i \left[ \int_0^t d\mathcal{T} \mathbf{K}(\mathcal{T}) \right] \boldsymbol{\rho}_S(t) \quad (3.41)$$

e se  $\mathbf{K}(\mathcal{T}) = \Gamma \delta(\mathcal{T})$  ( $\mathcal{T}_c = 0$ ) temos a Aproximação de Markov de ruído branco.

A argumentação acima é qualitativa, pois  $\mathbf{K}(t - t')$  é um operador, mas ficará clara quando resolvermos a Eq. (3.39) para um modelo específico. Como exemplo, veremos a seguir a equação mestra para reservatórios específicos, no caso reservatório térmico e reservatório comprimido.

### 3.3.1 O Reservatório Térmico

Iremos consirar um sistema quântico interagindo com um conjunto de osciladores harmônicos que representam o reservatório. Dessa forma, o hamiltoniano total do sistema é dado por

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R + \mathbf{V} \quad (3.42)$$

em que  $\mathbf{H}_S$  e  $\mathbf{H}_R$  são os respectivos hamiltonianos dos sistemas  $S$  e  $R$  ( $S$  representa o sistema quântico e  $R$  o reservatório) e  $V$  representa a interação entre  $S$  e  $R$ . Os termos  $\mathbf{H}_S$ ,  $\mathbf{H}_R$  e  $\mathbf{V}$  são espessos respectivamente como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_S &= \hbar \omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \\ \mathbf{H}_R &= \sum_j \hbar \omega_j \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_j, \\ \mathbf{V} &= \sum_j \left( g_j \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}_j + g_j^* \mathbf{a} \mathbf{b}_j^\dagger \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

sendo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  os operadores bosônicos de destruição e criação referente ao oscilador do sistema quântico, e  $\mathbf{b}_j$  e  $\mathbf{b}_j^\dagger$  os operadores de destruição e criação do conjunto de osciladores

que representam o reservatório.

Por questão de generalidade anteriormente consideramos que o sistema  $S$  pode estar submetido a ação de uma força externa dependente do tempo, por isso a presença o termo de perturbação dependente do tempo  $\mathbf{W}(t)$ . Para o caso em questão desconsideramos o termo de perturbação e a partir de (3.38) temos a seguinte equação

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -i[\mathbf{H}_S, \rho_S(t)] - \int_0^t dt' Tr_R [\mathbf{V}_I(t) [\mathbf{V}_I(t'), \rho_R(0) \otimes \rho_S(t')]], \quad (3.44)$$

nos quais  $\rho_S(t)$  é o operador densidade para o sistema quântico na representação de Schrödinger,  $\mathbf{H}_S$  o hamiltoniano do subsistema quântico  $S$ ,  $\mathbf{V}_I(t)$  é o termo de interação  $\rho_R(0)$  é o operador densidade do reservatório o qual iremos especificar. O termo de interação  $\mathbf{V}_I(t)$ , em particular pode ser escrito da seguinte forma,

$$\mathbf{V}_I(t) = \sum_j \left( g_j \mathbf{a}^\dagger \exp(i\omega_0 t) \mathbf{b}_j \exp(-i\omega_j t) + g_j^* \mathbf{a} \exp(-i\omega_0 t) \mathbf{b}_j^\dagger \exp(i\omega_j t) \right). \quad (3.45)$$

Considerando então os termos da interação (3.45) e aqueles advindos dos comutadores, a equação mestra (3.44) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & -i[\mathbf{H}_S, \rho_S(t)] - \int_0^t dt' \{ G_{11}(t, t') [\mathbf{a}^\dagger [\mathbf{a}^\dagger, \rho_S(t')]] \\ & + G_{12}(t, t') [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rho_S(t')] + G_{21}(t, t') [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \rho_S(t')] + H.c. \}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{11}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j g_{j'} e^{i\omega_j t + i\omega_{j'} t'} e^{i\omega_0(t+t')} \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rangle \\ G_{12}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j^* g_{j'} e^{i\omega_j t - i\omega_{j'} t'} e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_{j'} \rangle \\ G_{21}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j g_{j'}^* e^{-i\omega_j t + i\omega_{j'} t'} e^{i\omega_0(t-t')} \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'}^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (3.47)$$

com  $\langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rangle = Tr_R [\mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rho_R(0)]$  e o mesmo para os outros valores médios. Ao considerarmos o reservatório como sendo um reservatório térmico, o operador densidade  $\rho_R(0)$  é escrito na forma

$$\rho_R(0) = \frac{\exp\left(-\frac{\mathbf{H}_R}{K_B T}\right)}{Tr_R \left[ \exp\left(-\frac{\mathbf{H}_R}{K_B T}\right) \right]} \quad (3.48)$$

podendo também ser representado como

$$\rho_R(0) = \prod_j \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\omega_j}{K_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\omega_j \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_j}{K_B T}\right), \quad (3.49)$$

em que  $K_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta do reservatório. Para o reservatório térmico em particular os valores médios são

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_j^\dagger \rangle &= \langle \mathbf{b}_j \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_{j'}^\dagger \rangle &= \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_{j'} \rangle &= \tilde{n}(\omega_j) \delta_{jj'} \\ \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'}^\dagger \rangle &= (\tilde{n}(\omega_j) + 1) \delta_{jj'}, \end{aligned}$$

sendo  $\tilde{n}(\omega_j) = \left[ \exp\left(\frac{\omega_j}{K_B T}\right) - 1 \right]^{-1}$  o número médio de fótons térmicos. Assim, a equação (3.46) é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_S(t)}{\partial t} &= -i [\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}_S(t)] - \int_0^t dt' \{ G_{12}(t, t') [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}_S(t')] \\ &\quad + G_{21}(t, t') [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}_S(t')] + H.c. \} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para efeitos de simplicidade denotaremos a partir de agora  $\boldsymbol{\rho}_S(t) = \boldsymbol{\rho}(t)$ . Nosso próximo passo é considerarmos a aproximação Markoviana na Eq. (3.50) e para isso, a título de exemplificação lidaremos somente o primeiro termo dentro da integral da equação (3.50),

$$I_1(t) = \int_0^t dt' G_{12}(t, t') [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t') - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t') \mathbf{a}]$$

ou ainda

$$I_1(t) = \int_0^t dt' \sum_j |g_j|^2 e^{i(\omega_j - \omega_0)(t-t')} \tilde{n}(\omega_j) [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t') - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t') \mathbf{a}].$$

Fazendo mudança de variável  $t - t' = \mathcal{T}$  e levando em conta a aproximação Markoviana, que consiste em  $t \rightarrow \infty$  no limite superior das integrais e  $\boldsymbol{\rho}(t - \mathcal{T}) \cong \boldsymbol{\rho}(t)$ , obtemos

$$I_1 = \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i(\omega_j - \omega_0)\mathcal{T}} [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}].$$

Tal procedimento nos leva a reescrever  $I_1(t)$  na forma

$$I_1(t) = \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) I_j [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}],$$

em que

$$I_j = \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i(\omega_j - \omega_0)\mathcal{T}}. \quad (3.51)$$

Agora utilizando a propriedade da função delta de Dirac em (3.51) obtem-se

$$\int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i(\omega_j - \omega_0)\mathcal{T}} = \pi \delta(\omega_j - \omega_0) - i \frac{P.V.}{(\omega_j - \omega_0)}, \quad (3.52)$$

onde *P.V.* é o valor principal de Cauchy. Considerando a Eq. (3.52), podemos escrever  $I_1$  como

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \delta(\omega_j - \omega_0) [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}] \\ &\quad - i \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \frac{P.V.}{(\omega_j - \omega_0)} [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Considerando os modos discretos no limite do contínuo,

$$\sum_j \{\} \rightarrow \int_0^\infty d\omega |g(\omega)|^2 D(\omega),$$

no qual  $D(\omega)$  é densidade de frequências por intervalo de frequência, a equação (3.53) terá a forma

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \pi \int_0^\infty d\omega |g(\omega)|^2 D(\omega) \tilde{n}(\omega) \delta(\omega - \omega_0) [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}] \\ &\quad - i \Delta\omega [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

O termo  $\Delta\omega$  é chamado shift dinâmico (59) e é descrito como

$$\Delta\omega = i \int_0^\infty d\omega \frac{|g(\omega)|^2 D(\omega) \tilde{n}(\omega) P.V.}{(\omega - \omega_0)}.$$

Levando em conta outra propriedade da função Delta

$$\int_0^\infty d\omega |g(\omega)|^2 D(\omega) \tilde{n}(\omega) \delta(\omega - \omega_0) = |g(\omega_0)|^2 D(\omega_0) \tilde{n}(\omega_0),$$

a solução para  $I_1(t)$  a menos do shift dinâmico é

$$I_1 = \tilde{n} \frac{\Gamma}{2} [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}], \quad (3.55)$$

onde

$$\Gamma = 2\pi |g(\omega_0)|^2 D(\omega_0)$$

é o coeficiente de relaxação e

$$\tilde{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega_0}{K_B T}\right) - 1}$$

o número médio de fótons. Adotando o mesmo procedimento para com os outros termos da equação (3.50), obtemos finalmente

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i [\mathbf{H}_S, \rho(t)] - \tilde{n} \frac{\Gamma}{2} [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rho(t)] + (\tilde{n} + 1) \frac{\Gamma}{2} [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \rho(t)] + H.c. \quad (3.56)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = & -i [\mathbf{H}_S, \rho(t)] + (\tilde{n} + 1) \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}\rho(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\rho(t) - \rho(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}] \\ & + \tilde{n} \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}^\dagger\rho(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\rho(t) - \rho(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Portanto a equação (3.57) representa a equação mestra na representação de Schrödinger para um sistema quântico interagindo com um reservatório térmico à temperatura  $T$  na aproximação de Markov. Para obter a mesma equação na representação de interação, basta aplicar a transformação unitária inversa da equação (3.23) e teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = & (\tilde{n} + 1) \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}\rho_I(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\rho_I(t) - \rho_I(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}] \\ & + \tilde{n} \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}^\dagger\rho_I(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\rho_I(t) - \rho_I(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Por completeza ao considerarmos  $T = 0$ , ( $\tilde{n} = 0$ ), esta se reduz a

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = \frac{\Gamma}{2} (2\mathbf{a}\rho_I(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\rho_I(t) - \rho_I(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}), \quad (3.59)$$

a equação (3.58) é a equação mestra na representação de interação para um sistema quântico interagindo com um reservatório térmico à temperatura zero na aproximação de Markov.

### 3.3.2 O Reservatório Comprimido

Agora iremos considerar um sistema quântico  $S$  interagindo com um reservatório térmico comprimido. O operador densidade que descreve o reservatório é representado nesta ocasião por

$$\rho_R = |\xi\rangle \langle \xi| = \prod_k \mathbf{S}_k(\xi) \rho_{th} \mathbf{S}_k^\dagger(\xi), \quad (3.60)$$

no qual  $\mathbf{S}_k(\xi)$  é chamado operador de compressão e descrito como

$$\mathbf{S}_k(\xi) = \exp \left[ \left( \xi^* \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'} - \xi \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'}^\dagger \right) \right]. \quad (3.61)$$

O parâmetro  $\xi = r \exp(i\theta)$  é um parâmetro de compressão complexo, sendo  $r$  é fator de compressão e  $\theta$  o ângulo associado a direção de compressão. Os operadores  $\mathbf{b}_k$  e  $\mathbf{b}_k^\dagger$  são respectivamente operadores de destruição e criação do reservatório. Além disso o operador  $\rho_{th}$  refere-se ao operador densidade para o banho térmico descrito em (3.48).

A evolução temporal do sistema  $S$  pode ser descrita pela Eq. (3.46), onde para o reservatório térmico comprimido os valores médios são dados por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_j^\dagger \rangle &= \langle \mathbf{b}_j \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle &= (2\tilde{n}_k + 1) e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{kk'} \\ \langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'} \rangle &= (2\tilde{n}_k + 1) e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{kk'} \\ \langle \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_{k'} \rangle &= ((\tilde{n}_k + 1) \sinh^2(r) + \tilde{n}_k \cosh^2(r)) \delta_{kk'} \\ \langle \mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'}^\dagger \rangle &= ((\tilde{n}_k + 1) \cosh^2(r) + \tilde{n}_k \sinh^2(r)) \delta_{kk'}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que  $\tilde{n}_k$  refere-se ao número médio de fótons. Agora levaremos em conta a aproximação Markoviana de forma análoga a realizada na seção anterior. Para tanto consideraremos como exemplo somente o segundo termo da integral em (3.46),

$$I_1(t) = - \int_0^t dt' G_{12}(t, t') [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \rho(t') - \mathbf{a}^\dagger \rho(t') \mathbf{a}] \quad (3.63)$$

Substituindo a expressão para  $G_{12}(t, t')$  dada em (3.47) e usando o valor médio descrito em (3.62),  $I_1(t)$  terá como expressão

$$I_1(t) = - \int_0^t dt' \sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_k - \omega_0)(t-t')} [(\tilde{n}_k + 1) \sinh^2(r) + \tilde{n}_k \cosh^2(r)] [\mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \rho(t') - \mathbf{a}^\dagger \rho(t') \mathbf{a}].$$

Fazendo mudança de variável  $t - t' = \mathcal{T}$ , e novamente considerando a aproximação de Markov, obtemos

$$I_1(t) = \sum_j |g_j|^2 [(\tilde{n}_k + 1) \sinh^2(r) + \tilde{n}_k \cosh^2(r)] \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i(\omega_j - \omega_0)\mathcal{T}} [\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}].$$

Escrevendo  $I_1(t)$  na forma

$$I_1 = \sum_j |g_j|^2 [(\tilde{n}_k + 1) \sinh^2(r) + \tilde{n}_k \cosh^2(r)] I_k [\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}], \quad (3.64)$$

com

$$I_k = \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i(\omega_k - \omega_0)\mathcal{T}}.$$

e adotando o mesmo procedimento matemático já delineado anteriormente, ficamos com

$$I_1(t) = \frac{\Gamma}{2} [(\tilde{n} + 1) \sinh^2(r) + \tilde{n} \cosh^2(r)] [\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}], \quad (3.65)$$

De maneira análoga, usando os mesmo procedimentos para todos os termos da expressão (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & -i [H_S, \rho(t)] \\ & + \frac{\Gamma}{2} [(\tilde{n} + 1) \cosh^2(r) + \tilde{n} \sinh^2(r)] [2\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}] \\ & + \frac{\Gamma}{2} [(\tilde{n} + 1) \sinh^2(r) + \tilde{n} \cosh^2(r)] [2\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger] \\ & + \frac{\Gamma}{2} (2\tilde{n} + 1) e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) [2\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger] \\ & + \frac{\Gamma}{2} (2\tilde{n} + 1) e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) [2\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}\mathbf{a}], \end{aligned} \quad (3.66)$$

a equação mestra descreve um sistema quântico interagindo com um reservatório térmico comprimido. Se fizermos a temperatura  $T = 0$  ( $\tilde{n} = 0$ ) obtemos a equação mestra para o reservatório de vácuo comprimido,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & -i [\mathbf{H}_S, \rho(t)] \\ & + \frac{\Gamma}{2} \cosh^2(r) (2\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}) \\ & + \frac{\Gamma}{2} \sinh^2(r) (2\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger) \\ & + \frac{\Gamma}{2} e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) (2\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger) \\ & + \frac{\Gamma}{2} e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) (2\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

As equações mestras obtidas neste capítulo para os reservatórios específicos, no caso reservatório térmico e reservatório comprimido, já são conhecidas e são amplamente utilizadas na literatura (19,59). Nos capítulos que seguem obteremos equações mestras para reservatórios similares, mas descritos por operadores que obedecem regras de comutação diferenciadas dos operadores de destruição e criação utilizados aqui, dessa forma poderemos comparar com as equações já obtidas.

# Capítulo 4

## Processos de Relaxação em Sistemas Quânticos Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares

### 4.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos alguns aspectos de processos de relaxação em sistemas quânticos descritos por álgebras associadas a operadores não-lineares, ou seja, operadores que satisfazem as regras de comutação de álgebras deformadas (ou álgebras não-triviais) em particular, consideraremos como sistema físico um oscilador harmônico quântico não-linear, interagindo com um meio dissipativo (reservatório térmico), no qual derivaremos uma equação mestra na aproximação de Markoviana. Para tanto, iremos considerar um sistema constituído de um oscilador harmônico não-linear interagindo com um conjunto de osciladores harmônicos que representa o reservatório. O operador hamiltoniano do sistema total é descrito como

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R + \mathbf{V}, \quad (4.1)$$

em que

$$\mathbf{H}_S = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger) \quad (4.2)$$

corresponde o oscilador harmônico deformado, sendo  $\mathbf{A}^\dagger$  e  $\mathbf{A}$  os operadores de levantamento e abaixamento não-lineares definidos no capítulo 2. O hamiltoniano

$$\mathbf{H}_R = \sum_j \hbar\omega_j \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_j \quad (4.3)$$

representa um conjunto de osciladores que simulam o reservatório térmico, e o termo de interação sistema-reservatório é dado por

$$\mathbf{V} = \sum_j \left( g_j \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}_j + g_j^* \mathbf{A} \mathbf{b}_j^\dagger \right), \quad (4.4)$$

com  $\mathbf{b}_j^\dagger$  e  $\mathbf{b}_j$  os operadores bosônicos usuais do reservatório.

De forma semelhante ao sistema abordado anteriormente, alguns autores também estudaram a dinâmica para o amortecimento do oscilador harmônico quântico deformado (30,31). Nesses trabalhos a deformação ou não-linearidade é introduzida somente nos operadores do oscilador do sistema  $\mathbf{H}_S$ , enquanto que os operadores referentes ao reservatório, bem como o termo de interação sistema-reservatório  $\mathbf{V}$ , não possuem deformação como podemos observar nas equações abaixo descritas por Mancini (30):

$$\mathcal{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R + \mathbf{V}$$

em que

$$\mathbf{H}_S = \frac{\omega_0}{2} (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{H}_R = \sum_j \omega_j \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_j \quad (4.6)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} \mathbf{\Upsilon}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{\Upsilon}, \quad (4.7)$$

com  $\mathbf{\Upsilon} = \sum_j g_j \mathbf{b}_j$ , e  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$ . É importante notar que o hamiltoniano utilizado em (30,31) [?, ?], difere nos termos de interação, na expressão (4.4) usamos os operadores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$  que obedecem às relações de comutação não-triviais dadas em (2.8); enquanto que Mancini (30) obteve uma equação mestra com mesmo formato e operadores de uma equação mestra usual na aproximação de Markov, mas agora com coeficientes deformados, como podemos ver na equação que segue:

$$\dot{\rho}(t) = -i [\mathbf{H}_S, \rho(t)] + \frac{i}{2\pi} P.V. \int d\Omega'(\mathbf{n}) \chi(\Omega'(\mathbf{n}))$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ (1 + \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n}))) \left[ (\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n}))^{-1} \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{a}^\dagger \right] \right. \\
& + \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n})) \left[ \mathbf{a}^\dagger, \boldsymbol{\rho}(t) (\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n}))^{-1} \mathbf{a} \right] \\
& + \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n})) \left[ \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{a}^\dagger (\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n}))^{-1} \right] \\
& + \mathbf{M}^\dagger(\boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n})) \left[ \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t), (\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n}))^{-1} \mathbf{a} \right] - H.c. \left. \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ [(1 + \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}))) \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{a}^\dagger] \right. \\
& + [\mathbf{a}^\dagger, \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \mathbf{a}] + [\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{a}^\dagger \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}))] \\
& \left. + [\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \mathbf{a}] + H.c. \right\}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Aqui,  $P.V.$  denota o valor principal de Cauchy,  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})$  e  $\boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{n})$  são funções do operador número  $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ , bem como também os parâmetros  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}))$ ,  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}))$  e  $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}))$ <sup>1</sup>, sendo a frequência  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})$  descrita como  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{n} + 2) |\mathbf{f}(\mathbf{n} + 2)|^2 - \mathbf{n} |\mathbf{f}(\mathbf{n})|^2]$ . Para o reservatório térmico o autor assume  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) = 0$  e  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) = \left[ \exp\left(\frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})}{K_B T}\right) - 1 \right]^{-1}$ , em que  $K_B$  é constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura absoluta e  $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}))$  é a “função relaxação” ou “função decaimento”. Note que a frequência e os parâmetros são operadores devido a dependência com o operador número  $\mathbf{n}$ . Uma simplificação pode ser feita se desconsiderarmos os termos envolvendo o valor principal de Cauchy e  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) = 0$ , isto é

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\rho}}(t) &= -i [\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] + \frac{1}{2} \left\{ [(1 + \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n}))) \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{a}^\dagger] \right. \\
& \left. + [\mathbf{a}^\dagger, \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{n})) \mathbf{a}] + H.c. \right\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Já Isar e Scheid (31) realizaram o mesmo procedimento de Mancini, mas agora escrevendo uma equação mais geral em termos de parâmetros de difusão e os usuais operadores momentum  $\mathbf{p}$  e posição  $\mathbf{q}$ , como vemos a seguir na equação abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}] + \frac{1}{2\hbar^2} \left\{ \left[ \left( \{ \mathbf{D}_{pp}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})), \mathbf{q} \} + \frac{i}{m\omega} [\mathbf{D}_{pp}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})), \mathbf{p}] \right) \boldsymbol{\rho}, \mathbf{q} \right] \right. \\
& + [(\{ \mathbf{D}_{qq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})), \mathbf{p} \} - im\omega [\mathbf{D}_{qq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})), \mathbf{q}]) \boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}] \\
& + \left[ \left( m\omega \left[ i\mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\lambda}, q \right] - \left\{ \mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) - \frac{i\hbar}{2} \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} \right\} \right) \boldsymbol{\rho}, \mathbf{q} \right] \\
& \left. - \left[ \left( \frac{1}{m\omega} \left[ i\mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) - \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} \right] - \left\{ \mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) + \frac{i\hbar}{2} \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q} \right\} \right) \boldsymbol{\rho}, \mathbf{p} \right] H.c. \right\},
\end{aligned}$$

<sup>1</sup> Mantemos a notação utilizada em (30), onde o autor utiliza  $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$  para o operador número e não  $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$  como definimos no capítulo 2.

nos quais  $\mathbf{D}_{pp}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))$ ,  $\mathbf{D}_{qq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))$  e  $\mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))$  são coeficientes de difusão deformados definidos como

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{pp}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) &= \int_0^\infty dt' C_{11}(t') \mathbf{E}_+ = \int_0^\infty dt' C_{11}^*(t') \mathbf{E}_+; \\ \mathbf{D}_{qq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) &= \int_0^\infty dt' C_{22}(t') \mathbf{E}_+ = \int_0^\infty dt' C_{22}^*(t') \mathbf{E}_+; \\ \mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) &= \int_0^\infty dt' C_{12}(t') \mathbf{E}_+ = \int_0^\infty dt' C_{21}^*(t') \mathbf{E}_+, \end{aligned}$$

com os coeficientes  $C_{11}$ ,  $C_{11}^*$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{22}^*$ ,  $C_{12}$ , e  $C_{21}^*$  designando funções de correlação dos operadores do reservatório,  $\mathbf{E}_+$  sendo definido como

$$\mathbf{E}_+ = \exp [i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})t].$$

A função de relaxação  $\boldsymbol{\lambda}$  é também uma função do operador número  $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$  e a frequência  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})$  é a mesma obtida por Mancini,  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{N} + 2) |\mathbf{f}(\mathbf{N} + 2)|^2 - \mathbf{N} |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2]$ . Expressando os operadores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  em termos dos operadores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$ , ou seja,

$$\mathbf{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a})$$

e

$$\mathbf{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}),$$

e definindo novos coeficientes de difusão com  $\boldsymbol{\lambda}$  constante, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_S, \rho] + \left\{ [\mathbf{D}_+(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))\mathbf{a}, \rho], \mathbf{a}^\dagger \right. \\ &\quad \left. - \left[ \left[ \mathbf{a}^\dagger \left( \mathbf{D}_-(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) \right), \rho \right], \mathbf{a}^\dagger \right] - \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2} [\mathbf{a}^\dagger \{ \mathbf{a}, \rho \}] + H.c. \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo

$$\mathbf{D}_+(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) \equiv \frac{1}{2\hbar} \left[ m\omega \mathbf{D}_{qq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) + \frac{\mathbf{D}_{pp}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))}{m\omega} \right] \quad (4.11)$$

e

$$\mathbf{D}_-(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) \equiv \frac{1}{2\hbar} \left[ m\omega \mathbf{D}_{qq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) - \frac{\mathbf{D}_{pp}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))}{m\omega} \right]. \quad (4.12)$$

Chamando

$$\mathbf{D}_+(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) = \boldsymbol{\gamma} \left( \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) + \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathbf{D}_-(\Omega(\mathbf{N})) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{D}_{pq}(\Omega(\mathbf{N})) = \mathbf{M}(\Omega(\mathbf{N}))$$

e

$$\lambda = \gamma = \text{constante}$$

obtemos a equação (4.8) de Mancini a menos dos termos envolvendo o *P.V.*. Já para o caso particular de equilíbrio térmico do reservatório em que  $\mathbf{D}_-(\Omega(\mathbf{N})) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{D}_{pq}(\Omega(\mathbf{N})) = 0$ , a equação (4.10) assume a forma simplificada

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_S, \rho] + \left\{ [[\mathbf{D}_+(\Omega(\mathbf{N}))\mathbf{a}, \rho], \mathbf{a}^\dagger] \right. \\ & \left. - \frac{\lambda}{2} [\mathbf{a}^\dagger \{\mathbf{a}, \rho\}] + H.c. \right\}. \end{aligned}$$

O fato de Mancini, Isar e Scheid (30,31) considerarem a deformação somente no termo  $\mathbf{H}_S$  referente ao sistema de interesse é decisivo no resultado final da equação mestra obtida, acarretando assim consideráveis diferenças em relação a equação que iremos obter, conforme veremos nas próximas seções. Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.2 derivamos a equação mestra na aproximação de Markov para um sistema quântico descrito por operadores não-lineares interagindo com um ambiente dissipativo (reservatório térmico sem deformação). Na seção 4.3 obtemos as equações para os elementos diagonais e não diagonais da matriz densidade da equação mestra, enquanto que na seção 4.4 obtemos uma equação que descreve a dinâmica para o valor médio de  $\mathbf{N}$  e sua solução. Finalmente na última seção apresentamos as conclusões e discussões dos cálculos realizados.

## 4.2 Equação Mestra para Sistemas Quânticos Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares

A dinâmica do sistema total descrito por (4.1) obedece à equação de Liouville-von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathbf{H}, \rho(t)].$$

Desta equação obtemos a equação mestra para o sistema na representação de Schrödinger<sup>2</sup>

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[\mathbf{H}_S, \rho(t)] - \int_0^t dt' Tr_R [\mathbf{V}(t) [\mathbf{V}(t'), \rho_R \otimes \rho(t')]], \quad (4.13)$$

em que o termo de interação é dado por

$$\mathbf{V}(t) = \sum_j \left[ g_j \mathbf{A}^\dagger(t) \mathbf{b}_j(t) + g_j^* \mathbf{A}(t) \mathbf{b}_j^\dagger(t) \right] \quad (4.14)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\dagger(t) &= \mathbf{A}^\dagger \exp(i\Omega(\mathbf{N})t); \\ \mathbf{A}(t) &= \exp(-i\Omega(\mathbf{N})t) \mathbf{A}; \\ \mathbf{b}_j^\dagger(t) &= \mathbf{b}_j^\dagger \exp(i\omega_j t); \\ \mathbf{b}_j(t) &= \mathbf{b}_j \exp(-i\omega_j t); \end{aligned} \quad (4.15)$$

com  $\Omega(\mathbf{N}) = \frac{\omega_0}{2} [(\mathbf{N} + 2) |\mathbf{f}(\mathbf{N} + 2)|^2 - \mathbf{N} |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2]$  sendo o operador frequência,  $\mathbf{N}$  é o operador número definido na capítulo 2.

Introduzindo o termo de interação (4.14) na equação (4.13), e denotando os novos operadores  $\mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) = \exp(i\Omega(\mathbf{N})t)$  e  $\mathbf{E}(\mathbf{N}, t) = \exp(-i\Omega(\mathbf{N})t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= -i[\mathbf{H}_S, \rho(t)] - \int_0^t dt' \{ G_{11}(t, t') [\mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) [\mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t'), \rho(t')]] \\ &+ G_{12}(t, t') [\mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t') \rho(t')] \\ &+ G_{21}(t, t') [\mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t), \mathbf{E}(\mathbf{N}, t') \mathbf{A} \rho(\mathbf{N}, t')] + \} Hc \end{aligned} \quad (4.16)$$

com

$$\begin{aligned} G_{11}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j g_{j'} e^{i\omega_j t + i\omega_{j'} t'} \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rangle \\ G_{12}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j^* g_{j'} e^{i\omega_j t - i\omega_{j'} t'} \langle \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_{j'} \rangle \\ G_{21}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j g_{j'}^* e^{-i\omega_j t + i\omega_{j'} t'} \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'}^\dagger \rangle \end{aligned}$$

sendo  $\langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rangle = Tr_R (\mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rho_R)$  e o mesmo para os outros valores médios. Como estamos considerando o reservatório como um reservatório térmico, o operador densidade  $\rho_R$  pode

<sup>2</sup> Para maiores detalhes da dedução de equação (4.13), ver capítulo 3.

ser representado por

$$\rho_R = \prod_j \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\omega_j}{K_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\omega_j \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_j}{K_B T}\right), \quad (4.17)$$

enquanto que os valores médios associados aos operadores do reservatório são definidos como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_j^\dagger \rangle &= \langle \mathbf{b}_j \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_{j'}^\dagger \rangle &= \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_{j'} \rangle &= \tilde{n}(\omega_j) \delta_{jj'} \\ \langle \mathbf{b}_j \mathbf{b}_{j'}^\dagger \rangle &= [\tilde{n}(\omega_j) + 1] \delta_{jj'}, \end{aligned}$$

sendo  $\tilde{n}(\omega_j) = \left[ \exp\left(\frac{\omega_j}{K_B T}\right) - 1 \right]^{-1}$  o número médio de quanta. Desta forma a equação (4.16) é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = -i [\mathbf{H}_S, \rho(t)] &- \int_0^t dt' \{ G_{12}(t, t') [\mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t') \rho(t')] \\ &+ G_{21}(t, t') [\mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t), \mathbf{E}(\mathbf{N}, t') \mathbf{A} \rho(t')] + H.c. \} \end{aligned} \quad (4.18)$$

A equação (4.18) pode ser reescrita considerando a aproximação Markoviana. Para exemplificar, consideraremos somente o primeiro termo dentro do símbolo de integração da equação (4.18), isto é,

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t dt' \sum_j |g_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \tilde{n}(\omega_j) \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t') \rho(t') \\ &- \int_0^t dt' \sum_j |g_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \tilde{n}(\omega_j) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t') \rho(t') \mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{N}, t), \end{aligned}$$

para fazermos em seguida a mudança de variável  $t - t' = \mathcal{T}$ , além de também levarmos em conta a aproximação Markoviana que consiste em considerar  $t \rightarrow \infty$  no limite superior das integrais e  $\rho(t - \mathcal{T}) \cong \rho(t)$ . Tal procedimento faz com que  $I_1(t)$  possa ser escrito como

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i\omega_j \mathcal{T}} \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t - \mathcal{T}) \rho(t) \\ &- \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \mathbf{A}^\dagger \left\{ \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i\omega_j \mathcal{T}} \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t - \mathcal{T}) \rho(t) \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \right\} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando as expressões  $\mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) = \exp(i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})t)$  e  $\mathbf{E}(\mathbf{N}, t) = \exp(-i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})t)$ , as integrais adquirem a forma

$$I_1(t) = \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i\omega_j \mathcal{T}} \exp(-i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})t) \exp(i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})(t - \mathcal{T})) \boldsymbol{\rho}(t) \\ - \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \mathbf{A}^\dagger \left\{ \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{i\omega_j \mathcal{T}} \exp(i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})(t - \mathcal{T})) \boldsymbol{\rho}(t) \exp(-i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})t) \right\} \mathbf{A}.$$

Com isso, unindo os termos  $e^{i\omega_j \mathcal{T}}$  e  $e^{-i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})\mathcal{T}}$  nos integrandos de  $I_1(t)$ , teremos

$$I_1(t) = \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) I_j \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \mathbf{A}^\dagger I_j \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A} \quad (4.19)$$

no qual

$$I_j = \int_0^\infty d\mathcal{T} e^{-i(\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))\mathcal{T}}. \quad (4.20)$$

Usando a propriedade

$$\int_0^\infty d\mathcal{T} e^{-i(\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))\mathcal{T}} = \pi \delta(\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) - i \frac{P.V.}{(\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))},$$

podemos reescrever a expressão (4.19) como

$$I_1(t) = \pi \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \left\{ \delta[\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})] - i \frac{P.V.}{(\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))} \right\} \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \quad (4.21) \\ - \mathbf{A}^\dagger \pi \sum_j |g_j|^2 \tilde{n}(\omega_j) \left\{ \delta[\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})] - i \frac{P.V.}{(\omega_j - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))} \right\} \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A}$$

No limite do contínuo tal expressão escreve-se como

$$I_1 = \left\{ \pi \int_0^\infty d\omega |g(\omega)|^2 D(\omega) \tilde{n}(\omega) \delta[\omega - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})] - \Delta\omega \right\} \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \\ - \mathbf{A}^\dagger \left\{ \pi \int_0^\infty d\omega |g(\omega)|^2 D(\omega) \tilde{n}(\omega) \delta[\omega - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})] - \Delta\omega \right\} \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A}.$$

O termo  $\Delta\omega$  denominamos shift dinâmico (59) e é dado por

$$\Delta\omega = i \int_0^\infty d\omega |g(\omega)|^2 D(\omega) \tilde{n}(\omega) \frac{P.V.}{(\omega - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))}.$$

Em seguida, designando

$$\mathcal{F}(\omega) = 2 [|g(\omega)|^2 D(\omega) \tilde{n}(\omega)] \quad (4.22)$$

e levando em conta a propriedade da função delta de Dirac

$$\int_0^\infty \mathcal{F}(\omega) \delta(\omega - \Omega(\mathbf{N})) d\omega = \frac{1}{2} \mathcal{F}(\Omega(\mathbf{N})), \quad (4.23)$$

a solução para  $I_1(t)$  a menos do shift dinâmico pode ser prontamente obtida

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{\Gamma(\mathbf{N})}{2} \tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N})) \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \\ & - \frac{\Gamma(\mathbf{N}-1)}{2} \tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N}-1)) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}-1, t) \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{N}-1, t) \end{aligned}$$

onde

$$\Gamma(\mathbf{N}) = 2\pi |g(\Omega(\mathbf{N}))|^2 \mathbf{D}(\Omega(\mathbf{N}))$$

e

$$\tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N})) = \left[ \exp\left(\frac{\Omega(\mathbf{N})}{K_B T}\right) - 1 \right]^{-1}.$$

Observe que  $\Omega(\mathbf{N})$  é um operador pois apresenta dependência do operador número de quanta  $\mathbf{N}$ , além disso  $\Omega(\mathbf{N})$  pode ser considerada uma frequência não-linear com uma certa não-linearidade específica na qual depende da função  $\mathbf{f}(\mathbf{N})$ , que é particular para cada tipo de deformação ou não-linearidade. Assim, os coeficientes que denotamos por operador “taxa de relaxação”  $\Gamma(\mathbf{N})$  e operador “número médio de quanta”  $\tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N}))$ , possuem as mesmas características de não-linearidade, e são coeficientes deformados. Outro aspecto interessante observado é que o operador taxa de relaxação mostra dependência não só na deformação, mas também no número de quanta.

De maneira análoga, realizando o mesmo procedimento para os demais termos da equação (4.16) podemos obter a equação mestra

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = & -i [\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] - [\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N})) \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) + \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N})) \\ & - \mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}-1)) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}-1, t) \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{N}-1, t) \\ & - \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}-1, t) \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{N}-1, t) \mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}-1)) \\ & + \mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}-1)) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \boldsymbol{\rho}(t) + \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}-1)) \\ & - \mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N})) \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A} \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) \\ & - \mathbf{E}(\mathbf{N}, t) \mathbf{A} \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t) \mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}))] \end{aligned} \quad (4.24)$$

no qual denotamos

$$\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N})) = \frac{\Gamma(\mathbf{N})}{2} \tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N}))$$

e

$$\mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N})) = \frac{\Gamma(\mathbf{N})}{2} [\tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N})) + 1].$$

A equação mestra (4.24) descreve o oscilador harmônico deformado interagindo com um reservatório térmico na aproximação de Markov. É uma equação análoga a equação usual, mas com operadores e coeficientes que dependem do operador número  $\mathbf{N}$  de forma não trivial. Como citamos anteriormente,  $\Gamma(\mathbf{N})$  e  $\tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N}))$  dependem da função  $\mathbf{f}(\mathbf{N})$  que é específica para cada não-linearidade adotada. A não-linearidade está presente no comutador  $[\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)]$ , como também na parte dissipativa descrita pelos anti-comutadores restantes. Uma forte não-linearidade é observada na equação mestra devido a introdução da deformação. A equação (4.24) contém também novos operadores:  $\mathbf{E}(\mathbf{N}, t)$  e  $\mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t)$  com dependência temporal e do operador número  $\mathbf{N}$ , e os operadores  $\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}))$  e  $\mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}))$ , estes últimos definidos a partir dos operadores  $\Gamma(\mathbf{N})$  e  $\tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N}))$ . Observe que se fizermos,  $\mathbf{f}(\mathbf{N}) = 1$ ,  $\Omega(\mathbf{N}) = 1$ , restauramos a equação mestra usual (1,6,12).

A equação obtida em (4.24) demonstra algumas diferenças e semelhanças com os resultados obtidos por Mancini (30), Isar e Scheid (31). A semelhança está nos parâmetros  $\Gamma(\mathbf{N})$  e  $\tilde{\mathbf{n}}(\Omega(\mathbf{N}))$ , que são idênticos aos parâmetros  $\chi(\Omega)$  e  $\mathbf{N}(\Omega)$  obtidos em (30). Já a diferença está na parte da equação mestra que caracteriza a dissipação, onde em nossa equação (4.24) os operadores  $\mathbf{A}^\dagger$  e  $\mathbf{A}$  são operadores deformados, enquanto que nos trabalhos de Mancini (30), Isar e Scheid (31) são os operadores de criação e destruição usuais  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$ , não deformação. Uma característica que observamos na equação (4.24) é a presença da deformação tanto nos operadores como nos coeficientes, em concordância com os resultados de (33), onde a deformação é introduzida no termo de interação do hamiltoniano.

Apesar de Mancini (30), Isar e Schied (31), e nós estarmos tratando situações semelhantes, observamos resultados bem diferentes. Uma explicação para essa diferença pode estar ligada a dois fatores. O primeiro é que sabemos que as funções de correlação definidas a partir do traço da equação (4.13) dependem do acoplamento, ou seja da interação entre

sistema e reservatório. No caso de Mancini, Isar e Scheid não há presença da “deformação”, ou melhor dos operadores não-lineares  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$  no termo de interação. Por isso não surgem os operadores deformados na parte irreversível (dissipativa) das equações mestras obtidas. Mas também observamos no caso de Mancini, Isar e Scheid, a presença da deformação nos coeficientes da equação mestra, seja na constante de relaxação  $\chi(\Omega(\mathbf{N}))$ , como no número médio de partículas  $\mathbf{N}(\Omega(\mathbf{N}))$ . Este fato ocorre porque na aproximação de Markov o acoplamento não depende das frequências do reservatório, levando as funções de correlação à funções delta correlacionadas como podemos observar nas equações (4.20) e (4.21).

Apesar do acoplamento não apresentar operadores ou coeficientes deformados, a deformação (não-linearidade) aparece nos coeficientes da equação mestra como influência das frequências do sistema formado pelo oscilador deformado. Note que os coeficientes da equação dependem da frequência deformada  $\Omega(\mathbf{N})$  do sistema, sendo uma consequência da própria aproximação Markoviana e observado nas relações (4.20), (4.22) e (4.23). Portanto, independentemente de Mancini, Isar e Scheid, não utilizarem operadores deformados no termo de interação, há a presença da deformação nos coeficientes da parte da equação mestra referente irreversibilidade ou dissipação, devido a dependência da frequência não-linear  $\Omega(\mathbf{N})$ .

Os dois fatores citados anteriormente para explicar os resultados de Mancini, Isar e Scheid, corroboram também os nossos resultados. A dependência da interação nas funções de correlação são explicitamente observados nos resultados obtidos na equação mestra (4.24): uma equação mestra deformada, com operadores deformados (não-lineares), que é uma consequência da forma como foi escrita a interação, com operadores não-lineares  $\mathbf{A}^\dagger$  e  $\mathbf{A}$  representando o sistema e operadores usuais sem deformação do conjunto de osciladores que representam o reservatório.

Novamente assim como nas equações obtidas por Mancini, Isar e Scheid, em nossos resultados os coeficientes da equação mestra dependem da frequência não-linear  $\Omega(\mathbf{N})$  do sistema, demonstrando assim uma característica da aproximação Markoviana para o caso em questão, onde o acoplamento não depende das frequências do reservatório.

Nas seções seguintes iremos obter as equações para o elemento de matriz do operador

densidade da equação (4.24) e obter a dinâmica dos valores médios para o operador número.

### 4.3 Equações para o Elemento de Matriz do Operador Densidade

Escrevendo a equação mestra (4.24) na representação de estados de Fock e utilizando a abreviação  $\langle m | \boldsymbol{\rho}(t) | n \rangle = \rho_{mn}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{mn}}{dt} = & -i\frac{\omega_0}{2} \{ [m] + [m+1] - ([n] + [n+1]) \} \rho_{mn} \\
& + \left\{ (J(m) + J(n)) E(m, t) E^*(n, t) \sqrt{[m+1][n+1]} \right\} \rho_{m+1, n+1} \\
& - (C(m)[m+1] + C(n)[n+1]) \rho_{mn} \\
& + \left\{ (C(m-1) + C(n-1)) E^*(m-1, t) E(n-1, t) \sqrt{[m][n]} \right\} \rho_{m-1, n-1} \\
& - (J(m-1)[m] + J(n-1)[n]) \rho_{mn},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

sendo  $[n] = n |f(n)|^2$ ,  $n$  o autovalor do operador  $\mathbf{N}$ , e as grandezas  $E(n, t)$ ,  $E^*(n, t)$ ,  $C(n)$  e  $J(n)$  definidas como

$$\begin{aligned}
E(n, t) &= \exp[-i\Omega(n)t], \\
E^*(n, t) &= \exp[i\Omega(n)t], \\
C(n) &= \frac{\Gamma(n)}{2} \tilde{n}(\Omega(n)), \\
J(n) &= \frac{\Gamma(n)}{2} [\tilde{n}(\Omega(n)) + 1].
\end{aligned}$$

Vamos nos ater em princípio aos termos diagonais da equação (4.25),

$$\frac{dP_n}{dt} = -2[C(n)[n+1] + J(n-1)[n]] P_n + 2J(n)[n+1] P_{n+1} + 2C(n-1)[n] P_{n-1}, \tag{4.26}$$

com  $P_n = \langle n | \boldsymbol{\rho} | n \rangle$ . Tal equação pode ser escrita como

$$\frac{dP_n}{dt} = [\mathfrak{S}_+(n) + \mathfrak{S}_-(n)] P_n - \mathfrak{S}_-(n+1) P_{n+1} - \mathfrak{S}_+(n-1) P_{n-1}, \tag{4.27}$$

nos quais definimos as probabilidades de transição

$$\mathfrak{S}_+(n) = -2C(n)[n+1] \text{ e } \mathfrak{S}_-(n) = -2J(n-1)[n]. \tag{4.28}$$

A equação (4.26) é chamada equação de balanço detalhado, sua solução estacionária já é conhecida na literatura (59,63) e ocorre para condição de balanço detalhado

$$\mathfrak{S}_-(n)P_n = -\mathfrak{S}_+(n-1)P_{n-1}. \quad (4.29)$$

A partir de (4.26) e (4.29) a solução estacionária é obtida pela iteração da equação abaixo

$$J(n-1)[n]P_n = C(n-1)[n]P_{n-1}, \quad (4.30)$$

levando-nos ao resultado,

$$P_n = \frac{\tilde{n}(\Omega(n-1))}{(\tilde{n}(\Omega(n-1)) + 1)} P_{n-1}. \quad (4.31)$$

Por exemplo considerando  $n = 1$ , teremos a partir de (4.31),

$$P_1 = \frac{\tilde{n}(\Omega(0))}{(\tilde{n}(\Omega(0)) + 1)} P_0.$$

Repetindo o mesmo procedimento, agora considerando  $n = 2$ , ficamos com

$$P_2 = \frac{\tilde{n}(\Omega(1))}{[\tilde{n}(\Omega(1)) + 1]} \frac{\tilde{n}(\Omega(0))}{[\tilde{n}(\Omega(0)) + 1]} P_0.$$

Fazendo isso sucessivamente obtemos finalmente o resultado desejado:

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{\tilde{n}(\Omega(k-1))}{[\tilde{n}(\Omega(k-1)) + 1]} P_0. \quad (4.32)$$

Para o caso particular do estado térmico, teremos

$$P_n = \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\Omega(k-1)}{K_B T}\right) P_0 \quad (4.33)$$

com  $P_0$  determinado através da condição de normalização  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ , ou seja,

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\Omega(k-1)}{K_B T}\right) \right]^{-1}. \quad (4.34)$$

Neste ponto é importante lembrarmos que  $\Omega(n) = \frac{\omega_0}{2} ((n+2)|f(n+2)|^2 - n|f(n)|^2)$ ,  $f(n)$  é específica para cada deformação e a solução estacionária para  $P_n$  dependerá da não-linearidade contida em  $f(n)$ . A solução  $P_n$  dada em (4.32) pode ser facilmente verificada como solução de (4.26). Em particular se considerarmos a deformação nula,  $f(n) = 1$ , readquirimos a solução usual sem deformação (1,6,12,59,63).

## 4.4 Valor Esperado do Operador $\mathbf{N}$

No capítulo 3 vimos que o valor médio de um observável  $\mathbf{O}$  é definido como

$$\langle \mathbf{O} \rangle = Tr(\mathbf{O}\rho), \quad (4.35)$$

no qual  $\rho$  é o operador matriz densidade que descreve o estado do sistema. A dinâmica para o valor médio do observável  $\mathbf{O}$  satisfaz a equação

$$\frac{d\langle \mathbf{O} \rangle}{dt} = Tr\left(\mathbf{O} \frac{d\rho}{dt}\right), \quad (4.36)$$

desde que  $\mathbf{O}$  não dependa da variável temporal. Portanto, considerando  $\mathbf{O} \equiv \mathbf{N}$  e substituindo (4.24) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} = & -iTr(\mathbf{N}[\mathbf{H}_S, \rho(t)]) \\ & -Tr(\mathbf{N}\{\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}))\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger, \rho(t)\}) \\ & +Tr(\mathbf{N}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t)\{\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N})), \rho(t)\}\mathbf{E}(\mathbf{N}, t)\mathbf{A}) \\ & -Tr(\mathbf{N}\{\mathbf{A}^\dagger\mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}))\mathbf{A}, \rho(t)\}) \\ & +Tr(\mathbf{N}\{\mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N})), \mathbf{E}(\mathbf{N}, t)\mathbf{A}\rho(t)\mathbf{A}^\dagger\mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t)\}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Agora, levando em consideração que o operador  $\mathbf{N}$  comuta com os termos  $\mathbf{H}_S$ ,  $\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}))$ ,  $\mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}))$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{N}, t)$  e  $\mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t)$ , além da propriedade cíclica do traço, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} = & -2Tr(\mathbf{N}\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}))\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\rho(t)) \\ & +2Tr((\mathbf{N}+1)\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}))\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\rho(t)) \\ & -2Tr(\mathbf{N}\mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}-1))\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\rho(t)) \\ & +2Tr((\mathbf{N}-1)\mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}-1))\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\rho(t)). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ao definirmos a função  $\mathbf{Y}(\mathbf{N}) = 2\{\mathbf{C}(\Omega(\mathbf{N}))(\mathbf{N}+1)|\mathbf{f}(\mathbf{N}+1)|^2 - \mathbf{J}(\Omega(\mathbf{N}-1))\mathbf{N}|\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2\}$ , está equação assume a forma simplificada

$$\frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} = \langle \mathbf{Y}(\mathbf{N}) \rangle \quad (4.39)$$

É importante notar que para a deformação nula, restauramos prontamente a equação usual encontrada na literatura (1,59), ou seja,  $\frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} = \Gamma\tilde{n}(\langle \mathbf{N} \rangle + 1) - \Gamma(\tilde{n} + 1)\langle \mathbf{N} \rangle$ .

Para temperatura  $T = 0$ , a equação (4.39) reduz-se a

$$\frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} = -\langle \Gamma(\mathbf{N})\mathbf{N} |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 \rangle \quad (4.40)$$

e para  $\Gamma(\mathbf{N}) = \Gamma = cte$  obtemos

$$\frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} = -\Gamma \langle \mathbf{N} |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 \rangle, \quad (4.41)$$

resultado semelhante ao obtido em (33). É importante mencionarmos nesse ponto que o valor médio para o operador  $\mathbf{N}$  depende da deformação ou não-linearidade, diferente do resultado de Isar e Scheid para um sistema quântico dito deformado interagindo com meio dissipativo (reservatório térmico) (31).

## 4.5 Conclusão

Nós estudamos a dinâmica de um sistema formado por um oscilador harmônico quântico deformado (descrito por álgebras de operadores não-lineares) interagindo com um meio dissipativo no caso um reservatório térmico. Para tanto, obtivemos a equação mestra na aproximação de Markov para o operador densidade reduzido do oscilador amortecido deformado, e como consequência observamos que os coeficientes da equação mestra que decorrem da influência do meio dissipativo, isto é, coeficiente de relaxação e número médio de quanta, assumem forte não-linearidade devido à dependência da frequência não-linear  $\Omega(\mathbf{N})$  do sistema. A equação obtida apresenta uma nova estrutura com novos operadores descritos em termos da função deformada  $\mathbf{f}(\mathbf{N})$  e com dependência temporal como podemos observar na Eq. (4.24). Os coeficientes da equação agora são operadores com dependência do operador frequência não-linear  $\Omega(\mathbf{N})$ . Quando consideramos o limite da deformação indo a zero,  $\mathbf{f}(\mathbf{N}) = 1$ , a equação mestra readquire a forma usual do oscilador harmônico quântico interagindo com um reservatório térmico. Os resultados apresentam uma analogia com aqueles obtidos anteriormente por outros autores (30,31) para o mesmo problema abordado (existe uma diferença na estrutura da interação sistema-reservatório). Podemos observar que nos trabalhos anteriores (30,31), onde a proposta também é descrever a dinâmica de um oscilador quântico deformado interagindo com um meio dissipativo, o resultado apresenta uma diferença na estrutura da equação mestra. Em (30) e (31) a

estrutura da equação mestra é idêntica a de um oscilador harmônico sem deformação interagindo com um meio dissipativo, mas com coeficientes que dependem da frequência não-linear  $\Omega(\mathbf{N})$ . Neste aspecto no qual observamos a dependência dos coeficientes da equação com relação a frequência não-linear  $\Omega(\mathbf{N})$ , nossos resultados são iguais. Os nossos resultados assemelham-se aos resultados obtidos em (32) e (33), onde a proposta é de se obter uma dissipação deformada e uma interação deformada respectivamente. Também obtivemos uma equação para o elemento de matriz diagonal do operador densidade e encontramos a solução estacionária, que apresenta uma dependência não-linear com dependência de  $\Omega(\mathbf{N})$ . A equação de movimento para o operador  $\mathbf{N}$ , observamos uma não-linearidade devido as funções presentes na equação. Como perspectiva futura temos a possibilidade tentar descrever a dinâmica do sistema via formalismo de espaço de fase deduzindo a equação de Fokker-Planck para funções quase probabilidades como a função de Wigner, como também calcularmos as variancias para um estudo da estatística do sistema em questão, utilizando formas específicas para a função  $\mathbf{f}(\mathbf{N})$ .

# Capítulo 5

## Processos de Relaxação em Sistemas Quânticos Acoplados a Reservatórios Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares

### 5.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos processos de relaxação em sistemas quânticos que ocorrem devido ao acoplamento com um reservatório descrito por operadores não-lineares que obedecem a uma álgebra não-trivial ou dita deformada. Particularmente iremos considerar um sistema constituído de um oscilador harmônico interagindo com um conjunto de osciladores não-lineares os quais representam um reservatório, cuja dinâmica é descrita por uma equação mestra na aproximação de Markov. O operador hamiltoniano do sistema total é dado por

$$H = \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_R + \mathcal{V}, \quad (5.1)$$

no qual

$$\mathcal{H}_S = \hbar\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \quad (5.2)$$

descreve o operador hamiltoniano do sistema  $S$ , sendo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  são os operadores que satisfazem a relação de comutação  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$ ,

$$\mathcal{H}_R = \sum_j \hbar \frac{\omega_j}{2} \left( \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{B}_j^\dagger \right) \quad (5.3)$$

é o hamiltoniano do conjunto de osciladores não-lineares que simulam o reservatório, com  $\mathbf{B}_j = \mathbf{b}_j \mathbf{f}(\mathbf{N}_j)$  e  $\mathbf{B}_j^\dagger = \mathbf{f}(\mathbf{N}_j) \mathbf{b}_j^\dagger$ , sendo  $\mathbf{f}(\mathbf{N}_j)$  uma função do operador número  $\mathbf{N}_j$ ,  $\mathbf{b}_j$  e  $\mathbf{b}_j^\dagger$  são os operadores que obedecem as relações de comutação,  $[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}$  e  $[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j] = [\mathbf{b}_i^\dagger, \mathbf{b}_j^\dagger] = 0$ . O termo de interação sistema-reservatório é dado por

$$\mathcal{V} = \sum_j \left( g_j \mathbf{a}^\dagger \mathbf{B}_j + g_j^* \mathbf{a} \mathbf{B}_j^\dagger \right). \quad (5.4)$$

Outras propostas para obter uma “dissipação deformada” surgiram recentemente em (32,33).

A primeira propõe um modelo onde se introduz a não-linearidade somente no termo da equação mestra que caracteriza a irreversibilidade ou dissipação. A deformação ou não-linearidade é obtida pela substituição direta na equação mestra, dos operadores bosônicos usuais  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  por operadores não-lineares  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$  definidos em (2.7). Desta forma a equação mestra obtida em (32) é

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i\omega [\mathbf{N}, \rho] \\ & + \frac{1}{2} D_1 \{ \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \mathbf{f}(\mathbf{N}) \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \rho + \rho \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \mathbf{f}(\mathbf{N} + 2) - 2\mathbf{f}(\mathbf{N}) \mathbf{a}^\dagger \rho \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \} \\ & + \frac{1}{2} D_1^* \{ \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \mathbf{f}(\mathbf{N}) \mathbf{a} \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a} \mathbf{a} \mathbf{f}(\mathbf{N} - 1) \mathbf{f}(\mathbf{N}) - 2\mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \mathbf{a} \rho \mathbf{a} \mathbf{f}(\mathbf{N}) \} \\ & - \frac{1}{2} (D_2 + \lambda) \{ \mathbf{N} \mathbf{f}^2(\mathbf{N}) \rho + \rho \mathbf{N} \mathbf{f}^2(\mathbf{N}) - 2\mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \mathbf{a} \rho \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \} \\ & - \frac{1}{2} (D_2 - \lambda) \{ (\mathbf{N} + 1) \mathbf{f}^2(\mathbf{N} + 1) \rho + \rho (\mathbf{N} + 1) \mathbf{f}^2(\mathbf{N} + 1) - 2\mathbf{f}(\mathbf{N}) \mathbf{a} \rho \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N}) \}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo  $D_1$  e  $D_2$  os coeficientes de difusão,  $\lambda$  a constante de decaimento, e  $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ . É importante notar que se compararmos a Eq. (5.5) com a Eq. (4.24) obtida por nós no capítulo anterior, podemos observar algumas diferenças, por exemplo: a Eq. (5.5) apresenta a deformação somente na parte que caracteriza a dissipação, enquanto que em (4.24) a deformação surge também no termo do oscilador livre. A estrutura das duas equações são semelhante, exceto pelos operadores  $\mathbf{E}^\dagger(\mathbf{N}, t)$  e  $\mathbf{E}(\mathbf{N}, t)$  que aparecem em (4.24). Outra diferença significativa é com relação aos coeficientes das equações, na Eq. (4.24) os coeficientes da equação mestra obtida dependem da deformação (os coeficientes são operadores), ao contrário de (5.5) onde essa dependência não aparece. Para o caso

particular de equilíbrio térmico do reservatório em (5.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -i\omega [\mathbf{N}, \rho] \\ &\quad - \frac{1}{2} (D_2 + \lambda) \{ \mathbf{N} \mathbf{f}^2(\mathbf{N}) \rho + \rho \mathbf{N} \mathbf{f}^2(\mathbf{N}) - 2\mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \mathbf{a} \rho \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} (D_2 - \lambda) \{ (\mathbf{N} + 1) \mathbf{f}^2(\mathbf{N} + 1) \rho + \rho (\mathbf{N} + 1) \mathbf{f}^2(\mathbf{N} + 1) - 2\mathbf{f}(\mathbf{N}) \mathbf{a} \rho \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N}) \}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

com  $D_2 = \lambda \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2K_B T}\right)$  e quando  $T = 0$ , esta se reduz a

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\omega [\mathbf{N}, \rho] - \lambda [\mathbf{N} \mathbf{f}^2(\mathbf{N}) \rho + \rho \mathbf{N} \mathbf{f}^2(\mathbf{N}) - 2\mathbf{f}(\mathbf{N} + 1) \mathbf{a} \rho \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N} + 1)]. \quad (5.7)$$

Na segunda proposta (33), obtem-se a “dissipação deformada” considerando somente os termos  $\mathbf{H}_S$  e  $\mathcal{V}$  descritos por operadores não-lineares, como veremos nas equações que seguem:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_S &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger) \\ \mathbf{H}_R &= \sum_j \omega_j \mathbf{b}_j^\dagger \mathbf{b}_j \\ \mathbf{V} &= \mathbf{A} \Upsilon^\dagger + \mathbf{A}^\dagger \Upsilon. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Nesta descrição,  $\Upsilon = \sum_j k_j \mathbf{B}_j$ ,  $k_j$  é a constante de acoplamento,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^\dagger$  são operadores não-lineares do sistema  $S$  que obedecem as relações de comutação  $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = \phi(\mathbf{N})$ ,  $[\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A}$  e  $[\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{A}^\dagger$ , sendo  $\phi(\mathbf{N})$  descrito em (2.9). Assim, Isar e Scheid obtiveram em (33) a equação

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_S, \rho] \\ &\quad + ([[\mathbf{D}_+(\Omega(\mathbf{N})) \mathbf{a} \mathbf{f}(\mathbf{N}), \rho], \mathbf{f}(\mathbf{N}) \mathbf{a}^\dagger] \\ &\quad - \left[ \left[ \mathbf{a}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{N}) \left( \mathbf{D}_-(\Omega(\mathbf{N})) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{D}_{pq}(\Omega(\mathbf{N})) \right) \right], \mathbf{f}(\mathbf{N}) \mathbf{a}^\dagger \right] \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{n}) \mathbf{a}^\dagger, \{\mathbf{a} \mathbf{f}(\mathbf{N}), \rho\} + H.c.] \Big), \end{aligned} \quad (5.9)$$

nos quais  $\mathbf{D}_\pm(\Omega(\mathbf{N}))$  e  $\mathbf{D}_{pq}(\Omega(\mathbf{N}))$  são coeficientes de difusão deformados definidos como

$$\mathbf{D}_+(\Omega(\mathbf{N})) \equiv \frac{1}{2\hbar} \left( m\omega \mathbf{D}_{qq}(\Omega(\mathbf{N})) + \frac{\mathbf{D}_{pp}(\Omega(\mathbf{N}))}{m\omega} \right)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{pp}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) &= \int_0^\infty dt' C_{11}(t') \mathbf{E}_\pm = \int_0^\infty dt' C_{11}^*(t') \mathbf{E}_\pm, \\ \mathbf{D}_{qq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) &= \int_0^\infty dt' C_{22}(t') \mathbf{E}_\pm = \int_0^\infty dt' C_{22}^*(t') \mathbf{E}_\pm, \\ \mathbf{D}_{pq}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) + \frac{i\hbar}{2} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})) &= \int_0^\infty dt' C_{12}(t') \mathbf{E}_\pm = \int_0^\infty dt' C_{21}^*(t') \mathbf{E}_\pm. \end{aligned}$$

Os coeficientes  $C_{11}$ ,  $C_{11}^*$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{22}^*$ ,  $C_{12}$ , e  $C_{21}^*$  são funções de correlação dos operadores do reservatório, sendo  $\mathbf{E}_\pm = \exp[\pm i\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})t]$ . Em (33), a função de relaxação  $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}))$  e a frequência  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N})$  é a mesma obtida por Mancini, ou seja,

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{N}) = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{N} + 2) |\mathbf{f}(\mathbf{N} + 2)|^2 - \mathbf{N} |\mathbf{f}(\mathbf{N})|^2 \right).$$

Nas duas propostas descritas anteriormente, podemos observar que a equação mestra obtida apresenta operadores não-lineares na parte da equação mestra que caracteriza a dissipação. Já na segunda proposta, observa-se a não-linearidade também na parte da equação referente ao oscilador livre. Nesta última proposta os resultados são praticamente idênticos aos obtidos por nós no capítulo anterior apresentados em (4.24). Iremos apresentar nas seções seguintes uma proposta diferente se comparada com aquelas apresentadas em (32,33). A partir da consideração feita no início do capítulo, onde assumimos um sistema  $S$  descrito por um oscilador harmônico não deformado acoplado a um conjunto de osciladores harmônicos quânticos não-lineares, iremos deduzir uma equação mestra na aproximação de Markov, com estrutura idêntica a equação mestra usual para o oscilador harmônico encontrada na literatura (1,6,12,59), mas agora com coeficientes e parâmetros não-lineares. Nós organizamos este capítulo da seguinte forma: na seção 5.2 nós deduzimos a equação mestra na aproximação de Markov para o oscilador harmônico interagindo com um conjunto de osciladores que obedecem a álgebra de operadores não-lineares descrita no capítulo 2. Na seção 5.3 obtemos as equações para os elementos diagonais e não-diagonais do operador densidade reduzido e sua respectiva solução estacionária para equação dos elementos diagonais. Na seção 5.4 a equação que descreve a dinâmica para o valor médio de  $\mathbf{N}$  é obtida bem como sua solução. Por fim, na seção 5.5 apresentamos algumas conclusões e discussões.

## 5.2 Equação Mestra para Sistemas Quânticos acoplados a Reservatórios Descritos por Álgebras de Operadores Não-Lineares.

A dinâmica do sistema total obedece a equação de Liouville-von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(t)}{\partial t} = [\mathbf{H}, \boldsymbol{\rho}(t)].$$

A partir desta equação obtemos a equação mestra para o sistema  $S$  na representação de Schrödinger

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = -i[\mathcal{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] - \int_0^t dt' \text{Tr}_R [\mathcal{V}(t) [\mathcal{V}(t'), \boldsymbol{\rho}_R \otimes \boldsymbol{\rho}(t)]], \quad (5.10)$$

sendo  $\mathcal{H}_S$ , definido pela equação (5.2) e o termo de interação  $\mathcal{V}(t)$  escrito como

$$\mathcal{V}(t) = \sum_j \left[ g_j \mathbf{a}^\dagger(t) \mathbf{B}_j(t) + g_j^* \mathbf{a}(t) \mathbf{B}_j^\dagger(t) \right], \quad (5.11)$$

nos quais

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\dagger(t) &= \mathbf{a}^\dagger \exp(i\omega_0 t), \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a} \exp(-i\omega_0 t), \\ \mathbf{B}_j^\dagger(t) &= \mathbf{B}_j^\dagger \exp(i\Omega_j(\mathbf{N}_j)t), \\ \mathbf{B}_j(t) &= \exp(-i\Omega_j(\mathbf{N}_j)t) \mathbf{B}_j, \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$\Omega_j(\mathbf{N}_j) = \frac{\omega_j}{2} ((\mathbf{N}_j + 2) |f(\mathbf{N}_j + 2)|^2 - \mathbf{N}_j |f(\mathbf{N}_j)|^2). \quad (5.13)$$

Ao introduzirmos o termo de interação (5.11) em (5.10) e ainda considerarmos as expressões para os operadores dadas em (5.12), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} &= -i[\mathcal{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] - \int_0^t dt' \{ G_{11}(t, t') [\mathbf{a}^\dagger [\mathbf{a}^\dagger, \boldsymbol{\rho}(t')]] \\ &\quad + G_{12}(t, t') [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t')] + G_{21}(t, t') [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t')] + H.c. \}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

com

$$G_{11}(t, t') = \sum_{jj'} g_j g_{j'} e^{i\omega_0(t+t')} \langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j'} \rangle,$$

$$\begin{aligned}
G_{12}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j^* g_{j'} e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_{j'} \rangle, \\
G_{21}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j g_{j'}^* e^{i\omega_0(t-t')} \langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j'}^\dagger \rangle, \\
G_{22}(t, t') &= \sum_{jj'} g_j g_{j'} e^{-i\omega_0(t+t')} \langle \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_{j'}^\dagger \rangle.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Os valores médios descritos em (5.15) podem ser obtidos através da operação traço sobre as variáveis do reservatório conforme podemos observar nas expressões seguintes:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j'} \rangle &= \text{Tr}_R \left[ e^{-i\Omega_j(\mathbf{N}_j)t} \mathbf{B}_j e^{-i\Omega_{j'}(\mathbf{N}_{j'})t'} \mathbf{B}_{j'} \boldsymbol{\rho}_R \right], \\
\langle \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_{j'} \rangle &= \text{Tr}_R \left[ \mathbf{B}_j^\dagger e^{i\Omega_j(\mathbf{N}_j)t} e^{-i\Omega_{j'}(\mathbf{N}_{j'})t'} \mathbf{B}_{j'} \boldsymbol{\rho}_R \right], \\
\langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j'}^\dagger \rangle &= \text{Tr}_R \left[ e^{-i\Omega_j(\mathbf{N}_j)t} \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j'}^\dagger e^{i\Omega_{j'}(\mathbf{N}_{j'})t'} \boldsymbol{\rho}_R \right], \\
\langle \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_{j'}^\dagger \rangle &= \text{Tr}_R \left[ \mathbf{B}_j^\dagger e^{i\Omega_j(\mathbf{N}_j)t} \mathbf{B}_{j'}^\dagger e^{-i\Omega_{j'}(\mathbf{N}_{j'})t'} \boldsymbol{\rho}_R \right].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Para um reservatório térmico descrito por

$$\boldsymbol{\rho}_R = \frac{e^{-\frac{1}{K_B T} \mathcal{H}_R}}{\text{Tr}_R \left( e^{-\frac{1}{K_B T} \mathcal{H}_R} \right)}, \tag{5.17}$$

no qual  $\mathcal{H}_R$  é dado em (5.3),  $K_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta, os valores médios têm como expressões

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{B}_j^\dagger \rangle &= \langle \mathbf{B}_j \rangle = 0 \\
\langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j'} \rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_{j'} \rangle &= \frac{1}{Z_j} \sum_{n_j=1}^{\infty} e^{i\Omega_j(n_j-1)t} e^{-i\Omega_{j'}(n_{j'}-1)t'} \mathcal{S}(n_j) \delta_{jj'} \\
\langle \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j'}^\dagger \rangle &= \frac{1}{Z_j} \sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-i\Omega_j(n_j)t} e^{i\Omega_{j'}(n_{j'})t'} \mathcal{R}(n_j) \delta_{jj'} \\
\langle \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_{j'}^\dagger \rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

sendo

$$\mathcal{S}(n_j) = (n_j) |f(n_j)|^2 \exp \left\{ -\frac{\omega_j}{2K_B T} [(n_j + 1) |f(n_j + 1)|^2 + (n_j) |f(n_j)|^2] \right\}, \tag{5.19}$$

$$\mathcal{R}(n_j) = (n_j + 1) |f(n_j + 1)|^2 \exp \left\{ -\frac{\omega_j}{2K_B T} [(n_j + 1) |f(n_j + 1)|^2 + (n_j) |f(n_j)|^2] \right\}, \tag{5.20}$$

e

$$Z_j = \sum_{n_j=0}^{\infty} \exp \left( -\frac{\omega_j}{2K_B T} \left( (n_j + 1) |f(n_j + 1)|^2 + n_j |f(n_j)|^2 \right) \right). \quad (5.21)$$

a função partição deformada. Consequentemente a equação (5.14) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = & -i[\mathcal{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] - \int_0^t dt' \left\{ G_{12}(t, t') [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t')] \right. \\ & \left. + G_{21}(t, t') [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t')] + H.c. \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

De maneira análoga aos capítulos anteriores, iremos em seguida fazer a aproximação de Markov na equação (5.22). Para tanto, consideraremos somente o segundo termo dentro da integral de (5.22), ou seja, levaremos em conta

$$I_1(t) = \int_0^t dt' \left\{ \sum_j \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{1}{Z_j} |g_j|^2 e^{-i\Omega_j(n_j)(t-t')} e^{i\omega_0(t-t')} \mathcal{R}(n_j) [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t')] \right\}. \quad (5.23)$$

Fazendo a mudança de variável  $t - t' = \mathcal{T}$ , e considerando a aproximação de Markov, a expressão (5.23) adquire o seguinte aspecto:

$$I_1(t) = \int_0^\infty d\mathcal{T} \left\{ \sum_j \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{1}{Z_j} |g_j|^2 e^{-i(\Omega_j(n_j) - \omega_0)\mathcal{T}} \mathcal{R}(n_j) [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t)] \right\}$$

Para simplificar, reescrevemos  $I_1(t)$  como

$$I_1(t) = \sum_j \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{1}{Z_j} |g_j|^2 \mathcal{R}(n_j) I_j [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t)], \quad (5.24)$$

no qual

$$I_j = \int_0^\infty e^{-i(\Omega_j(n_j) - \omega_0)\mathcal{T}} d\mathcal{T}. \quad (5.25)$$

Usando a propriedade da função delta de Dirac,

$$\int_0^\infty e^{-i(\Omega_j(n_j) - \omega_0)\mathcal{T}} d\mathcal{T} = \pi \delta[\Omega_j(n_j) - \omega_0] - i \frac{P.V.}{(\Omega_j(n_j) - \omega_0)},$$

a integral (5.24) simplifica-se em

$$I_1 = \sum_{n_j=0}^{\infty} \sum_j |g_j|^2 \frac{1}{Z_j} \mathcal{R}(n_j) \left\{ \pi \delta[\Omega_j(n_j) - \omega_0] - i \frac{P.V.}{(\Omega_j(n_j) - \omega_0)} \right\} [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t)]. \quad (5.26)$$

Note que somas em  $n_j$  podem ser reescritas como somas em  $n$  sem nenhuma perda nas expressões e nos cálculos que estão sendo realizados

Agora, considerando o limite do contínuo,

$$\sum_j \{\} \rightarrow \int_0^\infty |g(\omega)|^2 D(\omega) d\omega$$

no qual  $D(\omega)$  é densidade de frequências por intervalo de frequência, a expressão (5.26) é escrita como

$$I_1 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty d\Omega |g(\Omega(n))|^2 D(\Omega(n)) \frac{1}{Z} \mathcal{R}(n) \{\delta(\Omega(n) - \omega_0) - \Delta\Omega\} [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\rho(t)]. \quad (5.27)$$

O termo  $\Delta\Omega$  denominamos shift dinâmico (59) e é descrito por

$$\int_0^\infty \frac{d\Omega |g(\Omega(n))|^2 D(\Omega(n)) \frac{1}{Z} \mathcal{R}(n) P.V.}{\Omega(n) - \omega_0}.$$

Dando continuidade ao procedimento, devemos recorrer agora a seguinte propriedade da função delta de Dirac:

$$\int_0^\infty \mathcal{F}(\Omega(n)) \delta(\Omega(n) - \omega_0) d\omega = \mathcal{F}(\omega_0), \quad (5.28)$$

sendo  $\mathcal{F}(\Omega(n))$  uma função arbitrária qualquer dependente de  $\Omega(n)$ . Interessante notar que as funções descritas em (5.27) dependem da frequência não-linear  $\Omega(n)$ , ou seja, dependem de frequência que é função do número de partículas  $n$ . Por exemplo, ao considerarmos que  $\Omega(n)$  possa ser escrita como um produto de uma frequência  $\omega$  por uma função de  $n$ , isto é,  $\Omega(n) = \omega u(n)$ , com  $u(n) = \frac{1}{2} [(n+2)|f(n+2)|^2 - n|f(n)|^2]$ , abriremos a possibilidade de duas considerações para os cálculos: a primeira é considerarmos a integral sobre uma densidade de modos da frequência efetiva  $\Omega(n) = \omega u(n)$ , enquanto que a segunda refere-se a integral sobre uma densidade de modos da frequência do reservatório  $\omega$ . Diante dessas duas possibilidades iremos agora calcular separadamente cada caso.

### (a) Frequência efetiva

Considerando a equação (5.27) a menos do shift dinâmico

$$I_1 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{1}{Z} \mathcal{R}(n) |g(\Omega)|^2 D(\Omega) \delta(\Omega - \omega_0) d\Omega [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\rho(t)]$$

e usando a propriedade da função delta dada em (5.28), obtemos

$$I_1 = \pi \tilde{\mathcal{R}} |g(\omega_0)|^2 D(\omega_0) [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)] \quad (5.29)$$

com

$$\tilde{\mathcal{R}} = \frac{1}{Z_1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |f(n+1)|^2 \exp\left(-\frac{1}{2K_B T} \frac{\omega_0}{u(n)} ((n+1) |f(n+1)|^2 + (n) |f(n)|^2)\right), \quad (5.30)$$

sendo  $Z_1$  a função partição não-linear descrita em (5.21). Em seguida, denotando  $\Gamma$  por

$$\Gamma = 2\pi |g(\omega_0)|^2 D(\omega_0), \quad (5.31)$$

temos a solução

$$I_1 = \frac{\Gamma}{2} \tilde{\mathcal{R}} [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)]. \quad (5.32)$$

Usando procedimento análogo para os termos restantes de (5.22), obtemos a seguinte equação mestra

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = -i [\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] + \tilde{\mathcal{R}} \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}] + \tilde{\mathcal{S}} \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger] \quad (5.33)$$

com

$$\tilde{\mathcal{S}} = \frac{1}{Z_2} \sum_{n=1}^{\infty} n |f(n)|^2 \exp\left(-\frac{1}{2K_B T} \frac{\omega_0}{v(n)} ((n+1) |f(n+1)|^2 + (n) |f(n)|^2)\right), \quad (5.34)$$

sendo

$$v(n) = \frac{1}{2} ((n+1) |f(n+1)|^2 - (n-1) |f(n-1)|^2)$$

e  $Z_2$  uma função partição não-linear cuja expressão é dada por

$$Z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{K_B T} \frac{\omega_0}{2v(n)} ((n+1) |f(n+1)|^2 + (n) |f(n)|^2)\right).$$

A expressão (5.33) é a equação mestra na representação de Schrödinger para um oscilador harmônico interagindo com um reservatório térmico deformado (descrito por operadores não lineares) a temperatura  $T$ .

### (b) Frequência do reservatório

A partir da integral

$$I_1(t) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{Z} \mathcal{R}(n) |g(\omega)|^2 D(\omega) \delta(\omega u(n) - \omega_0) d\omega [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)] \quad (5.35)$$

podemos utilizar neste caso a propriedade da função delta de Dirac

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Aplicando esta propriedade na função delta contida em (5.35), obtemos como expressão

$$I_1(t) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{Z} \mathcal{R}(n) \frac{|g(\omega)|^2 D(\omega)}{|u(n)|} \delta\left(\omega - \frac{\omega_0}{u(n)}\right) d\omega [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)] \quad (5.36)$$

A integral pode ser prontamente realizada com o auxílio da propriedade (5.28), levando-nos assim a escrever (5.36) na forma condensada

$$I_1(t) = \pi \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}(n) \frac{\left|g\left(\frac{\omega_0}{u(n)}\right)\right|^2 D\left(\frac{\omega_0}{u(n)}\right)}{|u(n)|} [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)], \quad (5.37)$$

com

$$\mathcal{R}(n) = (n+1) |f(n+1)|^2 \exp\left\{-\frac{1}{2K_B T} \frac{\omega_0}{u(n)} [(n+1) |f(n+1)|^2 + (n) |f(n)|^2]\right\}. \quad (5.38)$$

Agora, denotando

$$\Gamma(n) = 2\pi \left|g\left(\frac{\omega_0}{u(n)}\right)\right|^2 D\left(\frac{\omega_0}{u(n)}\right) \quad (5.39)$$

e definindo um novo coeficiente dado por

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{Z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}(n) \frac{\Gamma(n)}{u(n)}, \quad (5.40)$$

a solução para  $I_1(t)$  é escrita como segue:

$$I_1(t) = \frac{\tilde{\Gamma}}{2} [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)] \quad (5.41)$$

Repetindo o procedimento para os demais termos da equação (5.22), obtemos finalmente

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = -i [\mathbf{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)] + \frac{\tilde{\Gamma}}{2} [2\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}] + \frac{\hat{\Gamma}}{2} [2\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger], \quad (5.42)$$

no qual

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{Z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}(n) \frac{\Gamma(n)}{v(n)}$$

e

$$\mathcal{S}(n) = n |f(n)|^2 \exp \left( -\frac{1}{2K_B T} \frac{\omega_0}{v(n)} \left( (n+1) |f(n+1)|^2 + (n) |f(n)|^2 \right) \right) \quad (5.43)$$

A expressão (5.42) é a equação mestra na representação de Schrödinger para um oscilador harmônico interagindo com um reservatório térmico deformado a temperatura  $T$  semelhante a equação (5.33), mas agora com coeficientes diferentes.

Em ambos os casos obtemos uma equação mestra análoga a equação usual, mas com coeficientes deformados, demonstrando assim a influência do meio dissipativo, no caso um reservatório térmico não-linear (deformado) descrito a partir de um conjunto de osciladores harmônicos que obedecem a álgebra descrita por operadores não-lineares. Os coeficientes dependem da função não-linear  $f(n)$  que é específica para cada não-linearidade adotada. Interessante observar que a relaxação do sistema agora depende de uma não-linearidade, ditada pela função  $f(n)$ . Temos assim uma dissipação não-linear em função de um reservatório não-linear, portanto o comportamento do sistema devido a ação do meio não-linear dependerá da especificidade da álgebra utilizada em  $f(n)$ .

### 5.3 Equações para a Matriz Densidade Diagonal e Não-Diagonal

Para calcular os elementos não-diagonais da matriz densidade (5.33), por exemplo, devemos escrevê-la em princípio na representação de estados de Fock, com o auxílio da abreviação  $\langle m | \rho(t) | n \rangle = \rho_{mn}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{mn}}{dt} &= -i \frac{\omega_0}{2} (m-n) \rho_{mn} + \tilde{\mathcal{R}} \frac{\Gamma}{2} \left( 2\sqrt{(m+1)(n+1)} \rho_{m+1,n+1} - (n+m) \rho_{mn} \right) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{S}} \frac{\Gamma}{2} \left( 2\sqrt{mn} \rho_{m-1,n-1} - [(m+1) + (n+1)] \rho_{mn} \right), \end{aligned} \quad (5.44)$$

Resultado semelhante também pode ser obtido para (5.42) com diferença somente nos coeficientes, onde  $\tilde{\mathcal{R}} \frac{\Gamma}{2}$  e  $\tilde{\mathcal{S}} \frac{\Gamma}{2}$  devem ser substituídos por  $\frac{\hat{\Gamma}(n)}{2}$  e  $\frac{\hat{\Gamma}(n)}{2}$  respectivamente.

Para os termos diagonais da equação (5.44), teremos

$$\frac{dP_n}{dt} = -\Gamma \left( \tilde{\mathcal{S}}(n+1) P_n + \tilde{\mathcal{R}} n P_n \right) + \Gamma \left( \tilde{\mathcal{R}}(n+1) P_{n+1} + \tilde{\mathcal{S}} n P_{n-1} \right), \quad (5.45)$$

com  $P_n = \rho_{nn} = \langle n | \boldsymbol{\rho}(t) | n \rangle$ . Também podemos reescrever a equação (5.45) como

$$\frac{dP_n}{dt} = (\mathfrak{S}_+(n) + \mathfrak{S}_-(n)) P_n + \mathfrak{S}_-(n+1) P_{n+1} + \mathfrak{S}_+(n-1) P_{n-1}, \quad (5.46)$$

em que definimos as probabilidades de transição

$$\mathfrak{S}_+(n) = \tilde{\mathcal{S}}(n+1) \text{ e } \mathfrak{S}_-(n) = \tilde{\mathcal{R}}n.$$

A equação (5.46) é a equação de balanço detalhado, cuja solução estacionária ocorre para condição (59,63)

$$\mathfrak{S}_-(n) P_n = \mathfrak{S}_+(n-1) P_{n-1}. \quad (5.47)$$

A solução estacionária de (5.46) é obtida por iteração a partir de (5.45) e (5.47), levando-nos ao resultado formal

$$P_n = \left( \frac{\tilde{\mathcal{S}}}{\tilde{\mathcal{R}}} \right)^n P_0. \quad (5.48)$$

em que  $P_0$  pode ser determinado utilizando a condição de normalização  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ , ou seja,

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\mathcal{S}}}{\tilde{\mathcal{R}}} \right)^n \right]^{-1}$$

A solução mostra uma certa dependência da deformação através dos coeficientes deformados  $\tilde{\mathcal{S}}$  e  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ou dos coeficientes  $\tilde{\Gamma}$  e  $\hat{\Gamma}$  quando partimos da equação (5.42). Fazendo o limite da deformação indo a zero, isto é  $f(n) = 1$ , obtemos a solução usual sem deformação (1,6,12,59).

## 5.4 Valor Esperado do Operador Número

A dinâmica associada ao valor esperado  $\langle \mathbf{N} \rangle$  é obtida neste caso com o auxílio das equações (5.33) e (4.36), conforme demonstra a equação

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} &= -i \text{Tr}(\mathbf{N} [\mathcal{H}_S, \boldsymbol{\rho}(t)]) + \tilde{\mathcal{R}} \frac{\Gamma}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{N} (2\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) \} \\ &\quad + \tilde{\mathcal{S}} \frac{\Gamma}{2} \text{Tr} \left\{ \mathbf{N} \frac{\Gamma}{2} (2\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger) \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Utilizando a propriedade cíclica do traço e a relação de comutação  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$  obtemos após alguns cálculos, a equação diferencial

$$\frac{d\langle \mathbf{N} \rangle}{dt} + (\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{S}}) \Gamma \langle \mathbf{N} \rangle = \tilde{\mathcal{S}} \Gamma. \quad (5.50)$$

A solução de (5.50) é dada por

$$\langle \mathbf{N} \rangle (t) = \frac{\tilde{\mathcal{S}}}{(\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{S}})} + \exp\left(-\Gamma (\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{S}}) t\right), \quad (5.51)$$

sendo  $\tilde{\mathcal{R}}$  e  $\tilde{\mathcal{S}}$  coeficientes que dependem especificamente da forma de  $f(n)$ . Ao considerarmos os cálculos a partir da equação (5.42) obtém-se uma solução idêntica apenas trocando os coeficientes  $\tilde{\mathcal{R}}$  por  $\tilde{\Gamma}$  e  $\tilde{\mathcal{S}}$  por  $\tilde{\Gamma}$ .

## 5.5 Conclusão

Na nossa proposta estudamos a dinâmica do oscilador harmônico quântico interagindo com um meio dissipativo não-linear representado por um reservatório térmico não-linear, e descrito por um conjunto de osciladores quânticos que obedecem a uma álgebra de operadores não-lineares. Nós obtemos a equação mestra na aproximação Markoviana para o operador densidade reduzido do oscilador harmônico quântico. Resultado interessante foi encontrado para equação mestra, onde a equação obtida é uma equação idêntica a usual (sem deformação), mas com o diferencial de que agora os coeficientes da equação mestra são funções não-lineares e dependem da função  $f(n)$  que é específica para cada tipo de não-linearidade adotada. A influência do reservatório não-linear é explicitamente observado na forma dos coeficientes da equação mestra. A equação para o elemento de matriz diagonal do operador densidade foi deduzida, assim como também sua solução estacionária, na qual novamente observa-se uma dependência da não-linearidade nas funções que descrevem a solução. A equação de movimento para o operador  $N$  e sua solução foram determinadas, assim como nos resultados anteriores há a presença da não-linearidade nas funções encontradas na solução, aqui também há a dependência da função  $f(n)$  e novamente a não-linearidade dependerá especificamente da deformação. Quando comparamos nossos resultados com outras propostas anteriores para obtenção de um modelo para dissipação com deformação (32,33), vemos que um ponto importante, é o fato de que em nossos resultados a equação mestra permanece inalterada na sua estrutura e a presença da deformação está somente nos coeficientes da equação. De forma contrária os resultados obtidos em (32,33), a não-linearidade aparece também nos operadores da equação mestra,

mudando assim sua estrutura. Este resultado obtido por Isar e colaboradores (32,33), é semelhante ao que obtemos no capítulo 4, onde propomos introduzir a deformação através dos operadores não-lineares do oscilador que descreve o sistema. Outro ponto a ser observado é o fato de que a forma dos coeficientes das equações obtidas por nós são diferentes dos coeficientes obtidos em trabalhos anteriores de outros autores (30-33). A princípio a função  $f(n)$  presente nos coeficientes das equações pode assumir várias formas, levando-nos a possibilidade de utilizarmos a deformação contida em  $f(n)$  para descrevermos e estudarmos vários graus de não-linearidade e outros possíveis efeitos a partir das formas específicas que  $f(n)$  poderá assumir.

Os resultados encontrados são originais e interessantes, abrem a possibilidade de uma forma de introdução de não-linearidade no sistema estudado, como a “deformação” é específica para cada forma de  $f(n)$ , então podemos numa perspectiva futura utilizarmos a deformação para descrever novas formas de interação sistema-reservatório. Apesar da mecânica quântica ser em sua essência uma teoria linear, acreditamos que a deformação possa em alguns casos específicos ser utilizada com o fim de descrever melhor interações não-lineares e outras formas possíveis de interação dos sistemas encontrados, como já se tem observado em trabalhos recentes (64,65).

## Capítulo 6

# Decoerência em Sistemas Quânticos Acoplados a Reservatórios Representados por Álgebras de Operadores Não-Lineares

### 6.1 Introdução

O princípio da superposição de estados é uma das propriedades fundamentais da mecânica quântica, fenômeno inexistente no mundo clássico (66). O estudo da estabilidade de superposições quânticas sob a influência do meio ambiente, tem sido recentemente alvo de intensa pesquisa (10-12,67). Os elementos de matriz não-diagonais do operador densidade dependente do tempo perdem coerência, de modo que o operador densidade é reduzido a uma mistura estatística (10). Isto é conhecido como processo de decoerência. A decoerência é uma perda de informação do operador densidade devido a interação do sistema com o meio ambiente. Em geral o meio ambiente é simulado por um reservatório térmico constituído de osciladores harmônicos.

A decoerência de estados quânticos acoplados a uma diversidade de tipos de reservatórios tem sido abordados na teoria (10-12) e em experimentos (68,69) (também foram feitas propostas para a construção de reservatórios em íons armadilhados (70,71)).

O estudo da decoerência tem se mostrado relevante no contexto da transição clássico-quântica, que é uma questão fundamental na teoria de medição quântica (72,73).

Do ponto de vista prático, o estudo da decoerência é importante na busca de mecanis-

mos para preservar as superposições quânticas por tempos apreciáveis, o que é fundamental para aplicações em criptografia e computação quântica (74). Este estudo associado a técnicas experimentais para manipulação de íons armadilhados, átomos de Rydberg em eletrodinâmica quântica de cavidades, e campos propagantes, tem resultado em uma variedade de fenômenos quânticos fundamentais, cujo objetivo é o desenvolvimento de tecnologias em comunicação (75) e computação (76).

Como já foi citado no capítulo 2, álgebras deformadas são utilizadas no estudo de equações mestras para representar um oscilador harmônico deformado interagindo com meio dissipativo (reservatório térmico) (30-33)<sup>1</sup>, e também no estudo da decoerência de superposições de estados quânticos com deformação (77)<sup>2</sup>.

A proposta neste capítulo é estudar a decoerência usando o oscilador harmônico deformado ou não-linear. Como vimos em capítulos anteriores, os osciladores deformados obedecem a uma álgebra não trivial, descrita por operadores não-lineares definidos em (2.7), os quais seguem as relações (2.8) e (2.9). Iremos considerar um oscilador harmônico quântico central sem deformação que representa o sistema, acoplado a um reservatório de osciladores não-lineares. O sistema pode representar um campo em uma cavidade ou um íon oscilando em uma armadilha. A decoerência de estados quânticos é estudada quando o oscilador é acoplado com os reservatórios térmico não-linear e comprimido não-linear. Iremos considerar como estado inicial do sistema um estado representado pela superposição de dois estados coerentes (tipo “gato de Schrödinger”). Um resultado interessante que encontramos, em que observa-se um ganho no tempo de decoerência do estado do sistema com o aumento da não-linearidade. Na seção 6.2 estudamos a dinâmica do sistema e a decoerência para o reservatório térmico não-linear e reservatório comprimido não-linear, por fim na seção 6.3, apresentamos as conclusões dos resultados obtidos.

---

<sup>1</sup> Ver capítulos 4 e 5.

<sup>2</sup> Observou-se neste estudo que estados tipo gato de Schrödinger deformados, descritos a partir de osciladores “deformados” são mais robustos à perda de coerência do sistema.

## 6.2 Dinâmica e Decoerência

### 6.2.1 Reservatório Térmico Não-Linear

Nós vamos deduzir a equação mestra que rege a dinâmica do sistema, na aproximação de Markov, para analisar o processo de decoerência. O sistema é descrito pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H}_S = \hbar\omega_0 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \quad (6.1)$$

sendo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  os operadores bosônicos os quais satisfazem a relação de comutação  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$ . O sistema é acoplado a um reservatório térmico não-linear, representado por um conjunto de osciladores harmônicos não-lineares descrito pelo hamiltoniano  $\mathcal{H}_R$ ,

$$\mathcal{H}_R = \hbar \sum_j \frac{\omega_j}{2} \left( \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{B}_j^\dagger \right), \quad (6.2)$$

com  $\mathbf{B}_j = \mathbf{b}_j \mathbf{f}(\mathbf{N}_j)$ ,  $\mathbf{B}_j^\dagger = \mathbf{f}(\mathbf{N}_j) \mathbf{b}_j^\dagger$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{N}_j)$  uma função do operador número  $\mathbf{N}_j$ . Os operadores  $\mathbf{b}_j$  e  $\mathbf{b}_j^\dagger$  são os operadores bosônicos que obedecem as relações,  $[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}$  e  $[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j] = [\mathbf{b}_i^\dagger, \mathbf{b}_j^\dagger] = 0$ . O hamiltoniano de interação é dado por

$$\mathcal{V} = \sum_j \left( g_j \mathbf{a}^\dagger \mathbf{B}_j + g_j^* \mathbf{a} \mathbf{B}_j^\dagger \right) \quad (6.3)$$

onde  $g_j$  e  $g_j^*$  são constantes de acoplamento e o hamiltoniano total é escrito como

$$\mathbf{H} = \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_R + \mathcal{V}.$$

Partindo da equação de Liouville-von Neumann (3.15), e repetindo o mesmo procedimento seguido na seção 5.2, obtemos a equação mestra que descreve a evolução temporal do sistema, na representação de interação

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= \tilde{\mathcal{R}} \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}\rho(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}\rho(t) - \rho(t)\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}] \\ &+ \tilde{\mathcal{S}} \frac{\Gamma}{2} [2\mathbf{a}^\dagger \rho(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \rho(t) - \rho(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger], \end{aligned} \quad (6.4)$$

nos quais  $\Gamma$  é a constante de decaimento (relaxação) do sistema,  $\tilde{\mathcal{R}}$  e  $\tilde{\mathcal{S}}$  são coeficientes dados pelas expressões (5.30) e (5.34).

A equação mestra (6.4) é praticamente idêntica a equação mestra usual (sem “deformação”) na representação de interação para o oscilador harmônico interagindo com um

reservatório térmico. De fato, ao considerarmos a equação (6.4) para  $f(n) = 1$ , obtemos a equação usual (3.58) para o oscilador harmônico acoplado a um reservatório térmico

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & (\tilde{n} + 1) \frac{\Gamma}{2} \left( 2\mathbf{a}\rho(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\rho(t) - \rho(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} \right) \\ & + \tilde{n} \frac{\Gamma}{2} \left( 2\mathbf{a}^\dagger\rho(t)\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\rho(t) - \rho(t)\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \right), \end{aligned}$$

com  $\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{n} + 1$ ,  $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{n}$ , sendo  $\tilde{n}$  o número médio de quanta do reservatório. Então, o estudo dos processos de relaxação e decoerência se resume neste caso na análise dos coeficientes da equação (6.4), pois a diferença entre as equações (3.58) e (6.4) está somente nos coeficientes, assim pode-se utilizar os resultados já conhecidos na literatura, ou seja, basta substituir os termos  $\tilde{n} + 1$  por  $\tilde{\mathcal{R}}$  e  $\tilde{n}$  por  $\tilde{\mathcal{S}}$  e usar as expressões já conhecidas. Esta é uma característica observada quando consideramos um conjunto de osciladores que simulam o reservatório descritos por operadores não-lineares.

Considerando o estado do gato de Schrödinger par ( $|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\mathcal{C}}(|z\rangle + |-z\rangle)$ ) como estado inicial do sistema, podemos qualitativamente determinar o decaimento da coerência quântica. Kim e Buzek (67) estudaram estados tipo gato de Schrödinger sob a ação de reservatórios. Usando o fato de que a taxa de coerência quântica da superposição de estados quânticos sob a ação de reservatórios a temperatura zero é igual a  $\Gamma|z|^2$ , e combinando com o fato de que o coeficiente (ou taxa) de relaxação a temperatura diferente de zero é dado por  $\Gamma(\tilde{n} + 1)$ , Kim e Buzek (67) estimaram a taxa de coerência quântica como sendo  $\Gamma(\tilde{n} + 1)|z|^2$ . Para obterem este resultado usaram o formalismo de espaço de fase, fazendo uso das funções de Husimi e Wigner. Levando em conta esses resultados podemos estimar a taxa de coerência quântica para o caso da equação (6.4), onde temos uma equação análoga a equação para o reservatório a temperatura  $T$ , mas com coeficientes deformados. Neste caso,

$$\Gamma\tilde{\mathcal{R}}|z|^2 \tag{6.5}$$

é a taxa de coerência do sistema sob a influência do reservatório térmico deformado e o tempo de decoerência é definido como

$$t_D \sim \left( 2|z|^2 \Gamma\tilde{\mathcal{R}} \right)^{-1}. \tag{6.6}$$

Note que  $\widetilde{\mathcal{R}}$ , é uma função de  $f(n)$ , que é por sua vez específica para diferentes tipos de não-linearidade. O comportamento do tempo de decoerência em função dos parâmetros de deformação é apresentado nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3. Utilizamos três formas para  $f(n)$ : (1) álgebra GDA descrita em (2.26), (2) o meio Kerr (2.36) e (3) deformação- $L$  (77,78). Em todos os cálculos consideramos os valores  $\beta = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{K_B T} = 1$  e  $|z|^2 = 1$ . Para deformação- $L$  a função  $f(n)$  é descrita na forma

$$f(n) = \frac{L_n^1(\chi^2)}{(n+1)L_n^0(\chi^2)}, \quad (6.7)$$

em que  $L_{(n)}^{(m)}(\chi^2)$  indica o polinômio de Laguerre associado. É importante citar que a deformação- $L$  surge naturalmente em sistemas de íons aprisionados (78), onde neste caso o parâmetro não-linear  $\chi$  é associado ao parâmetro de Lamb-Dicke.

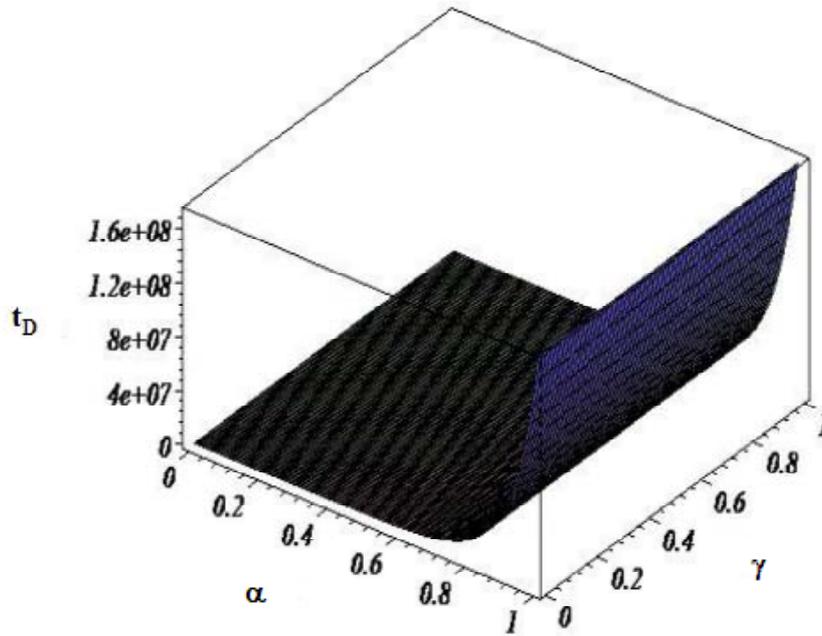


Figura 6.1. Tempo de decoerência em função dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$ , para  $f(n)$  da álgebra GDA.

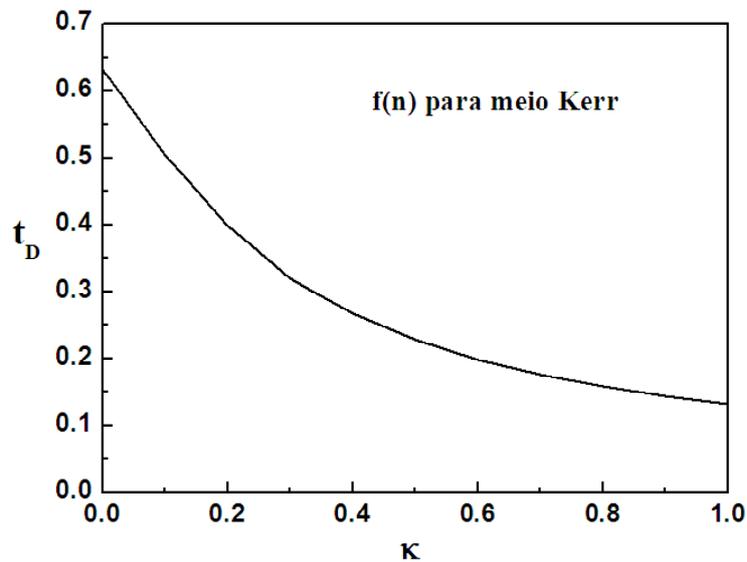


Figura 6.2. Tempo de decoerência em função do parâmetro  $\kappa$ , para a função  $f(n)$  da álgebra Kerr.

Apesar de ser uma análise quantitativa, a influência da não-linearidade do reservatório afeta de forma significativa a coerência do sistema, levando a um aumento no tempo de decoerência com o crescimento dos parâmetros de não-linearidade presentes nas equações (6.5) e (6.6). Isto é observado quando usamos a função  $f(n)$  para álgebra GDA e deformação- $L$ . No caso da função para álgebra GDA, o tempo de decoerência cresce com o aumento de  $\alpha$  e se mantém constante em relação ao parâmetro  $\gamma$  (Fig. 6.1). Para deformação- $L$  surge um comportamento curioso, o tempo de decoerência tem um crescimento com o aumento de  $\chi$ , mas também oscila tanto para valores maiores quanto para valores menores de  $\chi$  (tal comportamento pode ser observado na Fig. 6.3). Para a função  $f(n)$  referente ao meio Kerr observa-se um comportamento contrário, onde há uma queda no tempo de decoerência em função do aumento do parâmetro de não-linearidade.

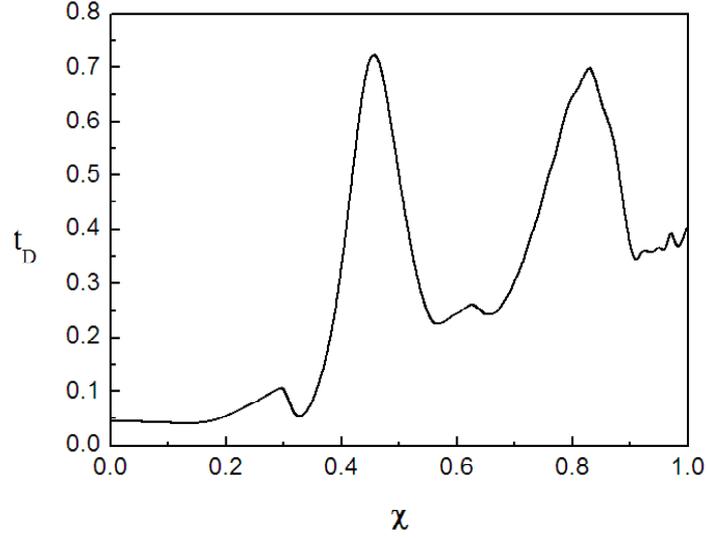


Figura 6.3. Tempo de decoerência em função do parâmetro  $\chi$ , para  $f(n)$  da álgebra deformação- $L$ .

### 6.2.2 Reservatório Comprimido Não-Linear

Nós consideramos a situação onde o Sistema é acoplado a um reservatório comprimido não-linear. O hamiltoniano total sistema-reservatório é descrito como  $\mathbf{H} = \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_R + \mathcal{V}$ , os termos são definidos pelas equações (6.1), (6.2) e (6.3) respectivamente. O operador densidade reduzido do reservatório é dado por

$$\rho_R = \prod_k \mathbf{S}_k(\xi, r) \rho_{th} \mathbf{S}_k^\dagger(\xi, r) \quad (6.8)$$

onde operador de compressão não-linear<sup>3</sup> (deformado) é

$$\mathbf{S}_k(\xi, r) = \exp \left[ \frac{r}{2} \left( \xi^* \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k - \xi \mathbf{B}_k^\dagger \mathbf{B}_k^\dagger \right) \right], \quad (6.9)$$

com  $\xi = \exp(i\theta)$ ,  $\theta$  é a fase referente ao campo comprimido,  $r$  é o parâmetro de compressão e  $\mathbf{B}_k^\dagger$ ,  $\mathbf{B}_k$ , são operadores não lineares. O operador  $\rho_{th}$  é operador densidade para o reservatório térmico não-linear descrito em (5.17) Seguindo o procedimento análogo ao da seção anterior, obtemos a equação mestra para o operador densidade reduzido na representação de interação

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{2} (2\mathbf{a}\rho(t)\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\rho(t) - \rho(t)\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a})$$

<sup>3</sup> A definição e descrição do operador de compressão não-linear estão detalhadas no apêndice B.

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathcal{N}}{2} (2\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger) \\
& + \frac{\widetilde{\mathcal{M}}}{2} (2\mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger) \\
& \frac{\mathcal{M}}{2} (2\mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{a} \boldsymbol{\rho}(t) - \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{a} \mathbf{a}),
\end{aligned} \tag{6.10}$$

onde

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{N}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left[ \widetilde{\mathcal{R}} \cosh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \cosh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \right. \\
& \quad \left. + \widetilde{\mathcal{S}} \sinh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \sinh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \right]; \\
\mathcal{N} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left[ \widetilde{\mathcal{S}} \cosh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \cosh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \right. \\
& \quad \left. + \widetilde{\mathcal{R}} \sinh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \sinh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \right];
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left[ (\widetilde{\mathcal{R}} + \widetilde{\mathcal{S}}) e^{i\theta} \cosh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \sinh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \right]; \\
\mathcal{M} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left[ (\widetilde{\mathcal{R}} + \widetilde{\mathcal{S}}) e^{-i\theta} \cosh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \sinh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \right],
\end{aligned}$$

onde

$$\zeta(n) = \frac{\xi}{2} (\phi(n) + \phi(n-1))$$

e é descrita pela equação (2.9). A equação (6.10) tem forma idêntica a uma equação mestra usual sem deformação, mas com coeficientes diferentes, compatível com o modelo. Para  $f(n) = 1$  temos que

$$\widetilde{\mathcal{N}} \rightarrow \widetilde{N}, \quad \mathcal{N} \rightarrow N$$

e

$$\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{M}, \quad \mathcal{M} \rightarrow M,$$

onde

$$\widetilde{N} = \frac{\Gamma}{2} ((\widetilde{n} + 1) \cosh^2(r) + \widetilde{n} \sinh^2(r))$$

e

$$\widetilde{M} = \frac{\Gamma}{2} (2\widetilde{n} + 1) e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r).$$

$\tilde{N}$  e  $\tilde{M}$  são os coeficientes da equação mestra sem deformação descrita na Eq.(3.66). Se fizermos  $r = 0$  obtemos a equação para o reservatório térmico não-linear dada em (6.4). Partindo das Eqs. (6.1), (6.2), (6.3) e (6.8), com  $T = 0$ , verifica-se que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{N}} &\rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{vac} = \frac{\Gamma}{2} \cosh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \cosh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \\ \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N}_{vac} = \frac{\Gamma}{2} \sinh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \sinh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \\ \tilde{\mathcal{M}} &\rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{vac} = \frac{\Gamma}{2} e^{i\theta} \cosh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r) \sinh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \\ \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M}_{vac} = \frac{\Gamma}{2} e^{-i\theta} \cosh(\zeta^*(n+2)\zeta(n+1)r) \sinh(\zeta^*(n+1)\zeta(n)r).\end{aligned}\tag{6.12}$$

Iremos agora determinar o tempo de decoerência para o caso do reservatório de comprimido não-linear em questão. Para determinar o tempo de decoerência iremos usar o procedimento adotado em (79), onde a partir da equação de Fokker-Planck geral obtemos a função de Wigner e estimamos o tempo de decoerência. A função de Wigner obtida tem a seguinte forma

$$W(\eta, \eta^*, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m W_{lk}(\eta, \eta^*, t)\tag{6.13}$$

onde

$$\begin{aligned}W_{lk}(\eta, \eta^*, t) &= \frac{C_N \langle z_l | |z_k \rangle}{\sqrt{F(t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{F(t)} [2B(t) (z_k - \eta) (z_l^* - \eta^*) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mathcal{A}}(t) (z_k - \eta)^2 + \mathcal{A}(t) (z_l - \eta^*)^2] \right\},\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}B(t) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathcal{N}}_{vac} + \mathcal{N}_{vac} \right) \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-1}, \\ \mathcal{A}(t) &= \mathcal{M}_{vac} \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-1}, \\ \tilde{\mathcal{A}}(t) &= \tilde{\mathcal{M}}_{vac} \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-1},\end{aligned}$$

e

$$F(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{\mathcal{N}}_{vac} + \mathcal{N}_{vac} \right) - 4\mathcal{M}_{vac}\tilde{\mathcal{M}}_{vac} \right] \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-2}.$$

Considerando  $f(n) = 1$ , os coeficientes  $B(t)$ ,  $\mathcal{A}(t)$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}(t)$  e  $F(t)$  da Eq. (6.13) retomam a forma dos coeficientes sem deformação dados em (79). A Eq. (6.13) é a função de Wigner

para um estado inicial sendo uma superposição de  $m$  estados coerentes, para o nosso caso onde consideramos um estado do gato de Schrödinger par, os índices da soma em (6.13) serão de  $k = 1$  à  $2$  e  $l = 1$  à  $2$ . O tempo de decoerência pode ser estimado tomando a derivada logarítmica de cada componente de  $W_{lk}(\eta, \eta^*, t)$  em relação ao tempo no instante  $t = 0$  (79). Para  $k = l$  e  $\eta = z_k$ , a expressão obtida a partir da derivada logarítmica de cada componente de  $W_{lk}(\eta, \eta^*, t)$  depende apenas de  $\tilde{\mathcal{N}}_{vac}$  e  $\mathcal{N}_{vac}$ . De forma diferente, para  $k \neq l$  temos forte relação de dependência com  $\eta$ ,  $z_k$  e  $z_l$ . Portanto podemos definir o tempo de decoerência entre dois quaisquer estados coerentes como o inverso da parte real da derivada logarítmica temporal da função de Wigner componente no ponto médio entre as posições iniciais dos estados coerentes no plano de fase:

$$t_{kl} = (\Upsilon_{kl} + \Upsilon_{kl}^*)^{-1} \Big|_{\eta=z_{kl}},$$

onde

$$\Upsilon_{kl} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln W_{lk}(\eta, \eta^*, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}.$$

Denotando a distância inicial entre dois estados coerentes por  $|z| \equiv |z_l - z_k|$  a expressão para o tempo de decoerência será

$$t_D = \frac{\left[ \left( \tilde{\mathcal{N}}_{vac} + \mathcal{N}_{vac} \right)^2 - 4\tilde{\mathcal{M}}_{vac}\mathcal{M}_{vac} \right]}{\left( \tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac} \right) \left\{ 2\mathcal{N}_{vac} + \left( \tilde{\mathcal{N}}_{vac} + \mathcal{N}_{vac} \right)^2 |z|^2 - \left( \tilde{\mathcal{M}}_{vac} + \mathcal{M}_{vac} \right) |z|^2 \right\}}. \quad (6.14)$$

Nas figuras 6.4 e 6.5 podemos observar o comportamento dos tempos de decoerência em função dos parâmetros de deformação. Em todos os cálculos realizados consideramos  $\beta = 0$  e ângulo da fase  $\theta = 0$ , também consideramos nos cálculos  $\Gamma = 1$ ,  $|z|^2 = 1$  e  $\frac{\omega_0}{K_B T} = 1$ . O tempo de decoerência foi calculado para duas situações da forma de  $f(n)$ : para álgebra deformada generalizada descrita em (2.26) e para o meio Kerr dada na Eq. (2.36). Na figura 6.4 temos o tempo de decoerência em função de  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$ , para o caso da álgebra deformada generalizada. Neste caso observamos um aumento no tempo de decoerência com o crescimento dos parâmetros de deformação  $\alpha$  e  $\gamma$  atingindo o valor máximo para  $\alpha = \gamma = 0.276$  e decaindo posteriormente. O comportamento observado nos tempos iniciais do tempo de decoerência, isto é, até para valores  $\alpha = \gamma = 0.276$ , é análogo ao que foi observado para o caso do reservatório térmico não-linear descrito na seção

anterior. Quando consideramos  $f(n)$  para o caso da álgebra tipo kerr, encontramos um comportamento contrário ao caso da álgebra deformada generalizada da Fig. 6.4, isto pode ser observado na Fig. 6.5 onde tempos o tempo de decoerência em função do parâmetro  $\kappa$ . Aqui vemos uma diminuição do tempo de decoerência a medida que  $\kappa$ , o mesmo é observado na seção anterior para o caso do reservatório térmico não-linear como vemos na figura 6.2.

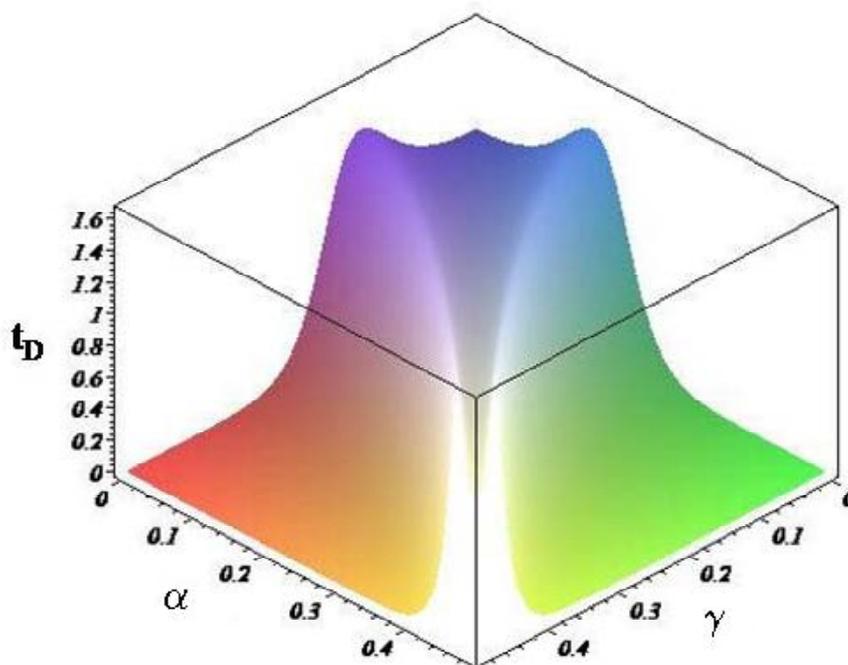


Figura 6.4. Tempo de decoerência em função dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$ , para  $f(n)$  da álgebra GDA.

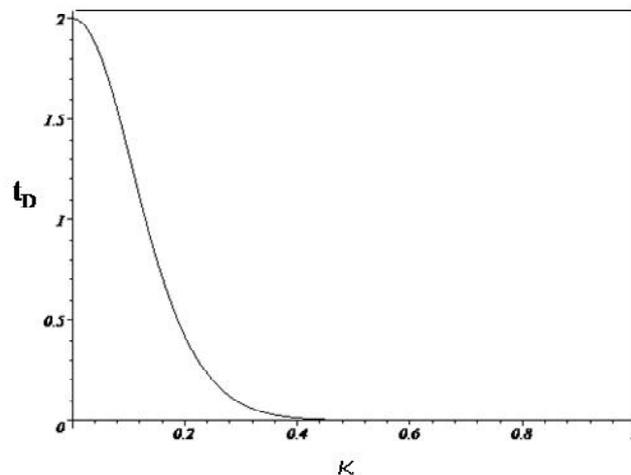


Figura 6.2. Tempo de decoerência em função do parâmetro  $\kappa$ , para  $f(n)$  da álgebra Kerr.

### 6.3 Conclusão

Para estudar a decoerência obtemos as equações mestras que descrevem a dinâmica para o reservatório térmico não-linear e o reservatório comprimido não-linear. Resultados interessantes foram encontrados. Observa-se que quando consideramos o hamiltoniano que representa o reservatório descrito por operadores não-lineares que obedecem as chamadas álgebras deformadas, as equações obtidas para descrever a evolução temporal permanecem inalteradas na sua estrutura, sofrendo somente alterações nos coeficientes presentes nestas equações. Esta característica permite então, fazer a análise através dos coeficientes, pois a estrutura das equações permanece inalterada. A partir das equações mestras estimamos o tempo de decoerência para um estado inicial do tipo estado do gato de Schrödinger par. Para o reservatório térmico não-linear observamos um aumento no tempo de decoerência em função do crescimento dos parâmetros não-lineares. Isto foi observado para o caso das funções  $f(n)$  descritas pela álgebra GDA e “deformação  $L$ ”. Tem se intensificado ultimamente a busca por mecanismos para preservação de superposições quânticas por tempos apreciáveis, o resultado obtido é um resultado significativo, interessante e vai de

encontro com os estudos nessa busca por formas de preservar tais superposições quânticas. Do ponto vista teórico, mecanismos e técnicas utilizadas para possíveis construções de reservatórios (70,71), abrem a possibilidade de que no futuro, reservatórios com certas características de não-linearidade aqui utilizados, possam ser implementados tanto do ponto de vista teórico como em experimentos. O caso onde a forma da função  $f(n)$  é descrita pela deformação  $L$ , seria uma possível realização futura, pelo fato da função  $f(n)$  para deformação  $L$  surgir naturalmente em sistemas de íons aprisionados (78). Um resultado semelhante foi obtido em (77), onde observou-se que estados do gato de Schrödinger deformados são mais robustos a perda de coerência. Outro ponto positivo observamos que a função  $f(n)$  é específica para cada tipo de não-linearidade, dessa maneira podemos utilizar a deformação como uma forma de construir e reproduzir interações fenomenologicamente, pois  $f(n)$  pode assumir os mais variados tipos. Para o reservatório comprimido não-linear, nós observamos que quando consideramos os valores iniciais do tempo de decoerência, o comportamento observado é análogo ao que obtemos no reservatório térmico não-linear, ou seja, um aumento no tempo de decoerência em função do crescimento dos parâmetros não-lineares, no qual atinge seu máximo para determinados valores de  $\alpha$  e  $\gamma$ , no caso  $\alpha = \gamma = 0.276$ , e decaindo posteriormente. Para o caso da função meio Kerr encontramos comportamento contrário, isto é, há uma diminuição do tempo de decoerência em função do aumento do parâmetro não-linear  $\kappa$ . Como perspectiva podemos dizer que em geral os resultados abrem caminho para um estudo mais aprofundado da utilização de álgebras de operadores não-lineares na descrição de outros sistemas e fenômenos como: modelo de Dicke, estudo do espectro de moléculas e interações bosons-fermions. Ainda dentro do estudo da decoerência de superposição de estados quânticos, temos a possibilidade da utilização das álgebras deformadas em situações mais dentro da realidade dos experimentos atuais, onde a função  $f(n)$  atuaria fenomenologicamente reproduzindo interações átomo-campo eletromagnético, ou íon-campo eletromagnético de forma a atenuar o efeito da perda de coerência nos sistemas.

# Apêndice A

## Expansão do Operador

$$\exp(a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2)$$

A expansão em série de Taylor do operador exponencial

$$\exp(a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2)^n, \quad (\text{A.1})$$

nos leva a escrever o fator binomial como uma série de potencias em  $b\mathbf{P}^2$  através do seguinte procedimento matemático:

$$\begin{aligned} (a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2)^n &= (a\mathbf{Q}^2)^n + \sum_{l,m=0}^{n-1} (a\mathbf{Q}^2)^m (b\mathbf{P}^2)^l (a\mathbf{Q}^2)^l \delta_{m+l,n-1} \\ &+ \sum_{k,l,m=0}^{n-2} (a\mathbf{Q}^2)^m (b\mathbf{P}^2)^l (a\mathbf{Q}^2)^l (b\mathbf{P}^2)^k (a\mathbf{Q}^2)^k \delta_{m+l+k,n-2} + \dots \end{aligned}$$

Consequentemente, a expansão (A.1) pode ser reescrita como

$$\exp(a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2) = e^{a\mathbf{Q}^2} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n!} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{Q}^{2m} \mathbf{P}^2 \mathbf{Q}^{2(n-m-1)} + O(b^2 \mathbf{P}^4). \quad (\text{A.2})$$

Agora, mantendo somente os termos lineares em  $b\mathbf{P}^2$ , nós reescrevemos (A.2) mediante a notação

$$\begin{aligned} L_b \left\{ e^{a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2} \right\} &= e^{a\mathbf{Q}^2} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n!} \sum_{m=0}^{n-1} (\mathbf{Q}^{2m} \mathbf{P}) \left( \mathbf{P} \mathbf{Q}^{2(n-m-1)} \right) \\ &= e^{a\mathbf{Q}^2} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n!} \sum_{m=0}^{n-1} (\mathbf{P} \mathbf{Q}^{2m} + 2im\mathbf{Q}^{2m-1}) \\ &\quad \times \left[ \mathbf{Q}^{2(n-m-1)} \mathbf{P} - 2i(n-m-1) \mathbf{Q}^{2(n-m-3/2)} \right]. \end{aligned}$$

Note que a segunda igualdade, a relação de comutação da álgebra de Weyl-Heisenberg,  $[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] = i$  ( $\hbar = 1$ ), foi utilizada. Depois de algumas manipulações algébricas, nós podemos escrever

$$L_b \left\{ e^{a\mathbf{Q}^2 + b\mathbf{P}^2} \right\} = \mathbf{P} u_1(\mathbf{Q}) \mathbf{P} + u_2(\mathbf{Q}), \quad (\text{A.3})$$

com

$$u_1(\mathbf{Q}) = b e^{a\mathbf{Q}^2} \quad u_2(\mathbf{Q}) = \left[ 1 - ab \left( 1 + \frac{4}{3} a \mathbf{Q}^2 \right) \right] e^{a\mathbf{Q}^2} \quad (\text{A.4})$$

# Apêndice B

## O Operador de Compressão Não-Linear

O operador de compressão deformado é descrito como

$$\mathbf{S}_k(\xi, r) = \exp \left[ \frac{r}{2} \left( \xi^* \mathbf{B}_k \mathbf{B}_{k'} - \xi \mathbf{B}_k^\dagger \mathbf{B}_{k'}^\dagger \right) \right], \quad (\text{B.1})$$

sendo  $\xi = \exp(i\theta)$ ,  $\theta$  é a fase referente ao campo comprimido,  $r$  o parâmetro de compressão e  $\mathbf{B}_k^\dagger, \mathbf{B}_k$ , são operadores bosônicos “deformados” de criação e aniquilação respectivamente, e são definidos pelas relações

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{b}_k \mathbf{f}(\mathbf{N}_k) \text{ e } \mathbf{B}_k^\dagger = \mathbf{f}(\mathbf{N}_k) \mathbf{b}_k^\dagger,$$

onde  $\mathbf{f}(\mathbf{N}_k)$  uma função do operador número  $\mathbf{N}_k$ ,  $\mathbf{b}_k$  e  $\mathbf{b}_k^\dagger$  são os operadores de destruição e criação sem deformação. Considerando as transformações

$$\mathbf{S}_k^\dagger(\xi, r) \mathbf{B}_k \mathbf{S}_k(\xi, r), \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{S}_k^\dagger(\xi, r) \mathbf{B}_k^\dagger \mathbf{S}_k(\xi, r)$$

e diferenciando (B.2), é possível verificar que  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{B}_k^\dagger$  obedecem as equações acopladas,

$$\frac{d\mathbf{B}_k^\dagger(r)}{dr} = -\widehat{\zeta}(n) \mathbf{B}_k(r)$$

$$\frac{d\mathbf{B}_k(r)}{dr} = \zeta(n) \mathbf{B}_k^\dagger(r).$$

O sistema é de fácil solução (80), assim obtemos

$$\mathbf{B}_k(r) = \mathbf{S}_k^\dagger(\xi, r)\mathbf{B}_k\mathbf{S}_k(\xi, r) = \cosh\left(\widehat{\zeta}(n)\zeta(n)r\right)\mathbf{B}_k - e^{i\theta}\sinh\left(\widehat{\zeta}(n)\zeta(n)r\right)\mathbf{B}_k^\dagger$$

$$\mathbf{B}_k^\dagger(r) = \mathbf{S}_k^\dagger(\xi, r)\mathbf{B}_k^\dagger\mathbf{S}_k(\xi, r) = \cosh\left(\widehat{\zeta}(n)\zeta(n)r\right)\mathbf{B}_k^\dagger - e^{-i\theta}\sinh\left(\widehat{\zeta}(n)\zeta(n)r\right)\mathbf{B}_k$$

com

$$\zeta(n) = \frac{\xi}{2}(\phi(n) + \phi(n-1))$$

$$\widehat{\zeta}(n) = \frac{\xi^*}{2}(\phi(n) + \phi(n+1))$$

e  $\phi(n)$  é descrita pela equação (2.9) como  $\phi(n) = |f(n+1)|^2(n+1) - |f(n)|^2n$ .

# Apêndice C

## Cálculo da Função de Wigner

Para transformar a equação mestra (6.10) em uma equação de Fokker-Planck para uma função de distribuição  $\Phi(z, s)$  “geral”, usamos as expressões

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\rho} \leftrightarrow \left( z - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \Phi(z, s), \quad \mathbf{a}^\dagger \boldsymbol{\rho} \leftrightarrow \left( z^* - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi(\alpha, z) \quad (\text{C.1})$$

$$\boldsymbol{\rho}\mathbf{a} \leftrightarrow \left( z - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \Phi(\alpha, z), \quad \boldsymbol{\rho}\mathbf{a}^\dagger \leftrightarrow \left( z^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi(z, s), \quad (\text{C.2})$$

onde

$$\Phi(z, s) \text{ é } P(s=1), Q(s=-1) \text{ e } W(s=0),$$

sendo  $P(s=1)$  a distribuição na representação de Glauber,  $Q(s=-1)$  Husimi e  $W(s=0)$  Wigner. Para função distribuição de Wigner a nossa equação de Fokker-Planck obtida a partir de (6.10) e usando (C.2) será

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z, z^*, t)}{\partial t} &= \left( \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{2} - \frac{\mathcal{N}}{2} \right) \left\{ \frac{z}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{z^*}{2} \frac{\partial}{\partial z^*} \right\} W(z, z^*, t) \\ &+ \left( \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{2} + \frac{\mathcal{N}}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \right\} W(z, z^*, t) \\ &+ \left\{ \frac{\tilde{\mathcal{M}}}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\mathcal{M}}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial (z^*)^2} \right) \right\} W(z, z^*, t), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

observe se  $f(n) = 1$  (deformação nula),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}} &= (\tilde{N} + 1) \Gamma, & \mathcal{N} &= \tilde{N} \Gamma \\ \tilde{\mathcal{M}} &= \tilde{M} \Gamma, & \mathcal{M} &= \tilde{M}^* \Gamma, \end{aligned}$$

com,  $\tilde{N} = \frac{\Gamma}{2} \cosh^2(r)$  e  $\tilde{M} = \frac{\Gamma}{2} (2\tilde{n} + 1) e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r)$ , a Eq. (C.3) passa a ser a equação de Fokker-Planck na representação de Wigner para o reservatório comprimido sem deformação.

Introduzindo as novas coordenadas

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} (\omega_0 q + ip), \\ z^* &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} (\omega_0 q + ip), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

e considerando  $\omega_0 = 1$ , a Eq. (C.3) em termos de  $q$  e  $p$  será,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial t} &= \left( \frac{\tilde{N}}{2} - \frac{\mathcal{N}}{2} \right) \left\{ \left[ q \frac{\partial}{\partial q} + p \frac{\partial}{\partial p} + 2 \right] \right\} W(q, p, t) \\ &+ \left[ \left( \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{\mathcal{N}}{2} \right) - \left( \frac{\tilde{M}}{2} + \frac{\mathcal{M}}{2} \right) \right] \left\{ \left[ \omega_0 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] \right\} W(q, p, t) \\ &- \left( \frac{\tilde{M}}{2} - \frac{\mathcal{M}}{2} \right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial q \partial p} \right] W(q, p, t). \end{aligned}$$

A equação de Fokker-Planck para  $W$  pode ser escrita de uma forma geral como

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial^2}{\partial Q_i} [(AQ)_i W] + D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial Q_i \partial Q_j}, \quad (\text{C.5})$$

onde  $Q = (q, p)$ , sendo  $A$  e  $D$  matrizes, a solução é

$$W(Q, t) = \int G(Q, Q', t) W(Q', 0) dQ' \quad (\text{C.6})$$

com

$$G(Q, Q', t) = \left( 2\pi \sqrt{\det M} \right)^{-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} (Q - RQ') M^{-1} (Q - RQ') \right]. \quad (\text{C.7})$$

A matriz  $M$  pode ser determinada utilizando a equação

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2D + AM + A^T, \quad (\text{C.8})$$

sendo  $A^T$  a transposta de  $A$  e  $R$  a solução a solução de  $\langle Q(t) \rangle = RQ(0)$  em termos do momento canônico.

Para o nosso caso  $D$  é

$$D = \begin{pmatrix} \left( \left( \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{\mathcal{N}}{2} \right) - \left( \frac{\tilde{M}}{2} + \frac{\mathcal{M}}{2} \right) \right) & i \left( \frac{\tilde{M}}{2} - \frac{\mathcal{M}}{2} \right) \\ i \left( \frac{\tilde{M}}{2} - \frac{\mathcal{M}}{2} \right) & \left( \left( \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{\mathcal{N}}{2} \right) - \left( \frac{\tilde{M}}{2} + \frac{\mathcal{M}}{2} \right) \right) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

$$A = \begin{pmatrix} \left( \left( \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{N}{2} \right) - \left( \frac{\tilde{M}}{2} + \frac{M}{2} \right) \right) & 0 \\ 0 & \left( \left( \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{N}{2} \right) + \left( \frac{\tilde{M}}{2} + \frac{M}{2} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2\left(\left(\frac{\tilde{N}}{2} + \frac{N}{2}\right) + \left(\frac{\tilde{M}}{2} + \frac{M}{2}\right)\right) + \left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)}{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)} + e^{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)t} & i \left( \frac{\tilde{M}}{2} - \frac{M}{2} \right) \\ i \left( \frac{\tilde{M}}{2} - \frac{M}{2} \right) & \frac{2\left(\left(\frac{\tilde{N}}{2} + \frac{N}{2}\right) + \left(\frac{\tilde{M}}{2} + \frac{M}{2}\right)\right) + \left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)}{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)} + e^{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)t} \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

O termo dentro da exponencial do propagador dado na Eq. (C.7) é descrito como

$$\begin{aligned} (Q - RQ') M^{-1} (Q - RQ') &= (\tilde{N} - \mathcal{N}) \left( \exp \left[ (\tilde{N} - \mathcal{N}) - 1 \right] \right)^{-1} \times \\ &\quad \left\{ \frac{1}{4} \left[ (\tilde{N} + \mathcal{N}) - 4\tilde{\mathcal{M}}\mathcal{M} \right] \right\}^{-1} \times \\ &\quad \left\{ \frac{1}{2} \left[ \tilde{N} + \mathcal{N} + \tilde{\mathcal{M}} + \mathcal{M} \right] \left( q' - e^{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)t} q \right) \right. \\ &\quad \left. - 2i \left( \frac{\tilde{\mathcal{M}}}{2} - \frac{\mathcal{M}}{2} \right) \left( q' - e^{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)t} q \right) \left( p' - e^{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)t} p \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \tilde{N} + \mathcal{N} + \tilde{\mathcal{M}} + \mathcal{M} \right] \left( p' - e^{\left(\frac{\tilde{N}}{2} - \frac{N}{2}\right)t} p \right) \right\} \end{aligned}$$

A partir da solução dada na Eq.(C.6) e utilizando as Eqs. (C.9), (C.10) e (C.11), e novamente usando as coordenadas descritas em (C.4), é possível escrever a função de Wigner na forma

$$W(\eta, \eta^*, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m W_{lk}(\eta, \eta^*, t)$$

onde

$$\begin{aligned} W_{lk}(\eta, \eta^*, t) &= \frac{C_N \langle z_l | | z_k \rangle}{\sqrt{F(t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{F(t)} [2B(t) (z_k - \eta) (z_l^* - \eta^*) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mathcal{A}}(t) (z_k - \eta)^2 + \mathcal{A}(t) (z_l - \eta^*)^2] \right\}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathcal{N}}_{vac} + \mathcal{N}_{vac} \right) \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-1}, \\ \mathcal{A}(t) &= \mathcal{M}_{vac} \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-1}, \\ \tilde{\mathcal{A}}(t) &= \tilde{\mathcal{M}}_{vac} \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-1}, \end{aligned}$$

e

$$F(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{\mathcal{N}}_{vac} + \mathcal{N}_{vac} \right) - 4\mathcal{M}_{vac}\tilde{\mathcal{M}}_{vac} \right] \left( e^{(\tilde{\mathcal{N}}_{vac} - \mathcal{N}_{vac})} - 1 \right)^{-2}.$$

## REFERENCES

- 1- HAKEN, H. **Light**, v. 1, Amsterdam: North-Holland, 1981.
- 2- ALLEN, L. e EBERLY, J. H. **Optical Resonance and Two-Level Atoms**, New York: Dover ,1987.
- 2- REITS, J. R.; MILFORD, F. J. ; CHRISTY, R. W. **Foudation of Eletromagnetic Theory**, 4 ed., New York: Addison-Wesley, 1992.
- 4- SIEGMAN, A. E. **Lasers**, Hill Valley, California: Uniersity Sciences Books, 1978.
- 5- BLUM, K. **Density Matrix Theory and Aplications**, New York: Plenum Press,1981.
- 6- LOUISELL, W. H. **Quantum Statistical Properties of Radiation**, New York: John Wiley and Sons, 1973.
- 7- BLOCH, F. Nuclear Induction, **Physical Review**. v. 70, n. 7, p. 460-474, 1946.
- 8- MOLLOW, B. R. e MILLER, M. M. The damped driven two-level atom, **Annals of Physics** v.52, n.3, p. 464-478, 1969.
- 9- AGYRES, P. N. e KELLEY, P. L. Theory of Spin Resonance and Relaxation, **Physical Review** v. 134, n.1A, p. A98-A111, 1964
- 10- ZUREK, W. H. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?. **Physical Review D**, vol. 24, n.6 , p. 1516-1525, 1981.
- 11- A. O. CALDEIRA, A. O. ; LEGGETT, A. J. Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model, **Physical Review A**, v. 31, n. 2, p. 1059-1066, 1985. WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. Effect of dissipation on quantum coherence, **Physical Review A**, v. 31, n. 4, p. 2403-2408, 1985.COLLET, M. Exact density-matrix calculations for simple open systems, **Physical Review A** v. 38, n. 5, p. 2233-2247, 1988.
- 12- GARDINER, C. W. **Quantum Noise**. Berlin: Springer-Verlag, 1991. BUZEK, V.; KNIGHT, P. L.**Progress in Optics XXXIV**, p. 1-158 Amsterdam: Elsevier, 1995.
- 13- BONIFACIO, R **Dissipative Systems in Quantum Optics**, Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- 14- KULISH, P. P. et al, On the q oscillator and the quantum algebra  $\text{su}_q(1,1)$ , **Journal of Physics A: Math. Gen.**, v. 23, p. L415-L419, 1990.
- 15- SOLOMON, A. I.; KATRIEL, J. On q-squeezed states, **Journal of Physics A: Math. Gen.** v. 23, p. L1209-L1212, 1990.

- 16- FIVEL, D. I. Quasi-coherent states and the spectral resolution of the  $q$ -Bose field operator. **Journal of Physics A: Math. Gen.** v. 24, p. 3575-3586, 1991.
- 17- CELEGHINI, E.; RASETTI, M.; VITIELLO, G. Squeezing and quantum groups. **Physical. Review. Letters**, v.66, n. 16, p. 2056-2059, 1991.
- 18- CHATURVEDI, S.; SRINIVASAN, V. Aspects of  $q$ -oscillator quantum mechanics. **Physical. Review A**, v. 44, n. 12, p.8020-8023, 1991.
- 19- JANNUSSIS, A. et al, Quantum groups and Lie-admissible time evolution. **Journal of Physics A: Math. Gen.**, v. 24, p. L775-L778, 1991.
- 20- CHIU ,S-H et al, The  $q$ -analogue quantized radiation field and its uncertainty relations. **Physics Letters A**, v. 164, n. 3, p. 237-242, 1992.
- 21- ELLINAS, D. Quantum phase and a  $q$ -deformed quantum oscillator. **Physical Review A**, v.45, n. 5, p.3358-3361, 1992.
- 22-MAN'KO, V. I.; MENDES R. V.  $q$ -Deformed Brownian motion. **Physics. Letters. A**, v.180, n. 39, 1993.
- 23- BONATSOS, D.; DASKALOYANNIS, C. Quantum groups and their applications in nuclear physics. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 43, p. 537-618, 1999.
- 24- CAMPOS, R. A. Interpolation between the wave and particle properties of bosons and fermions. **Physics Letters A**, v.184, n. 2, p. 173-178, 1994.
- 25- SHANTA, P. et al. Unified approach to the analogues of single-photon and multiphoton coherent states for generalized bosonic oscillators, **Journal of Physics A: Math. Gen.**, v. 27, p. 6433-6442, 1994.
- 26- CHUNG, W-S; KLIMYK, A. U. On position and momentum operators in the  $q$ -oscillator algebra. **Journal of Mathematical Physics**, v. 37, n. 2, p. 917-932 , 1996.
- 27- KATRIEL, J.; QUESNE, C. Recursively minimally-deformed oscillators. **Journal of Mathematical Physics**, v. 37,n. 4, p. 1650-1661, 1996.
- 28- PARK, S. U. Equivalence of  $q$ -bosons using the exponential phase operator, **Journal of Physics A: Math. Gen.**, v. 29, p. 3683-3696, 1996.
- 29- IORIO, A.; VITIELLO, G. Quantum Dissipation and Quantum Groups. **Annals of Physics**, v. 241, p. 496-506, 1995.
- 30- MANCINI, S. Quantum Dynamics of a Damped Deformed Oscillator. **Physica Scripta** v. 59, p. 195-197, 1999.
- 31- ISAR, A. ; SCHEID, W. Deformed quantum harmonic oscillator with diffusion and dissipation. **Physica A** 310, 364-376 , 2002.

- 32- ISAR, A; SANDULESCU, A.; SCHEID, W. Lindblad master equation for the damped harmonic oscillator with deformed dissipation. **Physica A**, v. 322, p. 233-246, 2003.
- 33- ISAR, A. ; SCHEID, W. Deformation of quantum oscillator and of its interaction with environment. **Physica A**, v. 355, p. 79-93, 2004.
- 34- BIEDENHARN, L. C. The quantum group  $SU_q(2)$  and a q-analogue of the boson operators, **Journal of Physics A: Math. Gen.**, v. 22, p. L873-L878, 1989.
- 35-A. J. MACFARLANE, On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $SU(2)_q$ . **Journal of Physics A: Math. Gen.**, v 22, p.4581-4588, 1989.
- 36- MAN'KO, V. I. et al. Physical nonlinear aspects of classical and quantum q-oscillator. **International Journal Modern Physics. A**, v. 8, p. 3577-3597, 1993. LÓPEZ-PENÁ, R. ; MAN'KO, V. I.; MARMO G. Wigner's problem for a precessing magnetic dipole, **Physical Review A**, v. 56, n. 1, p. 1126-1130, 1997.
- 37- CHUNG, W-S.; CHUNG, K-S.; NAM, S-T. ; UM, C-I. Generalized deformed algebra. **Physics Letters A**, v. 183, n. 5, p.363-370, 1993.
- 38- BORZOV, V. V.; DASMASKINSKY, E. V. ; YEGOROV S. B. Some remarks on the representations of the generalized deformed oscillator algebra. **Preprint q-alg/9509022**, 1995.
- 39- A. Jannussis, G. Brodimas, D. Sourlas and V. Zisis. Remarks on the qquantization. **Lett. Nuovo Cim.**, v. 30, p. 123-127, 1981
- 40- KULISH, P. P. e SKLYANIN, E. K **Integrable Quantum Field Theories**, Lecture Notes in Physics, v. 151, p. 61, Berlin: Springer, 1981.
- 41- L. D. Faddeev, L. D. **Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics**, Proceedings of the Les Houches Summer School, Session XXXIX, p. 561, Amsterdam: North Holland, 1984.
- 42- JIMBO, M. **Letters. Mathematical. Physics.** v.10, p.63, 1985.
- 43- DRINFEL'D, V. G., **Procedings. International. Congress Mathematical**, v 1, p. 798, Providence: Am. Math. Soc.,1987.
- 44- MANIN, Y. I. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups. **Annales de Institut Fourier**, v. 37, n. 4, p.191-205, 1987.
- 45- WIGNER, E. P. Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations?. **Physical Review**, v.77, n. 5, p.711-712, 1950.
- 46- STREATER, R. F. The representations of the oscillator group. **Communications in Mathematical Physics**, v..4, p. 217-236, 1967.

- 47- BRANT, R. A. ; GREENBERG, O. W. Generalized Bose Operators in the Fock Space of a Single Bose Operator. **Journal of Mathematical Physics**, v.10, p. 1168-1176, 1969.
- 48- ODAKA, K. et al. On quantization of simple harmonic oscillators. **Journal of Physics A: Math. Gen.**, v. 24, p. L591-L596, 1991.
- 49- QUESNE, C.; VANSTEENKISTE, N. Representation theory of deformed oscillator algebras. **Helv. Phys. Acta** v. 69, p. 141, 1996.
- 50- ARIK, M. et al. Quantum algebraic structures compatible with the harmonic oscillator Newton equation. **Journal of Physics A: Math. Gen.** v. 32, p. L371-L376, 1999.
- 51- IWATA, G. Transformation Functions in the Complex Domain. *Progress of Theoretical Physics*. v. 6, p. 524-528, 1951.
- 52- ARIK, M.; COON , D. D.; LAM, Y. M. Operator algebra of dual resonance models. **Journal of Mathematical Physics**, v. 16, p. 1776-1779, 1975.
- 53- KURYSHKIN, V. V. Operateurs quantiques generalizes de creation et d'annihilation. **Annales. Fond. Louis de Broglie**, v.5, p. 111-125, 1980.
- 54- FEINSILVER, P. Commutators, anti-commutators, and Eulerian calculus, **Rocky Mount. J. Math.** v.12, p.171, 1982.
- 55- S. Chaturvedi , V. Srinivasan and R. Jagannathan. Tamm-Dancoff deformation of bosonic oscillator algebra. **Modern Physics Letters A**, v.8, p. 3727-3734, 1993.
- 56- A. Jannussis, **Journal of Physics A: Math. Gen** 26, L233 (1993).
- 57- R. Chakrabarti and R. Jagannathan, **Journal of Physics A: Math. Gen.** 24, L711 (1991).
- 58- ARIK, M. et al.. **Z. Phys. C**, v.55, p. 89, 1992.
- 59- WALLS, D. F.; MILBRUN, G. J. **Quantum Optics**, Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- 60- MARCHIOLLI, M. On the q-deformed coherent states of a generalized f-oscillator, **Physica. Scripta**, v.73, p. 62-72, 2006.
- 61- FANO, U. Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques, **Review. Modern. Physics**, v. 29, n. 1, p.74-93, 1957.
- 62- DAVYDOV, A. S. **Quantum Mechanics**, v 1, 2 ed., New York: Pergamon Press, 1965.
- 63- AGARWAL, G. S. **Progress in Optics XI**, p. 31 Amsterdam: Elsevier, 1973.

- 64- CELEGHINI, E. ; DEL OLMO, M. A. Approximate symmetries and quantum algebras. **Europhysics Letters**, v. 61, p. 438, 2003.
- 65- BALLESTEROS, A. et al. Fermion-boson interactions and quantum algebras, **Physical Review C** v. 66, n. 6, p. 064317, 2002.
- 66- DIRAC, P. A. M. **The Principles of Quantum Mechanics**, Clarendon: Oxford, 1984.
- 67- KIM, M. S.; BUZEK, V. Schrödinger-cat states at finite temperature: Influence of a finite-temperature heat bath on quantum interferences. **Physical. Review A**, v. 46, p. 4239, 1992.
- 68- MYATT, C. J. et al. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs. **Nature**, v. 403, p. 269, 2000.
- 69- BRUNE, M. et al. Observing the Progressive Decoherence of the "Meter" in a Quantum Measurement, **Physical. Review. Letters**, v. 77, n. 24, p. 4887-4890, 1996.
- 70- POYATOS, J. F.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum Reservoir Engineering with Laser Cooled Trapped Ions, **Physical. Review. Letters**, v. 77, n. 23, p. 4728-4731, 1996.
- 71- CARVALHO, A. R. R. et al. Decoherence, Pointer Engineering, and Quantum State Protection, **Physical. Review. Letters**, v. 86, n. 22, p. 4988-4991, 2001.
- 72- VON NEUMANN, J. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**, Berlin: Springer-Verlag, 1932.
- 73- WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H. **Quantum Theory and Measurement**, Princeton: Princeton Univ. Press, 1983.
- 74-D. P. DiVincenzo, Science 270, 255 (1995); I. L. Chuang et al. , Science 270,1633 (1995).
- 75- CIRAC, J. I. et al. Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network, **Physical. Review. Letters**, v. 78, n. 16, p. 3221-3224, 1997.
- 76- CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions. **Physical. Review. Letters**, v. 74, n. 20, p. 4091-4094, 1995.
- 77- MANCINI, S. ; MAN'KO, V. The survival of quantum coherence in deformed-states superposition. **Europhysics Letters**, v. 54, p. 586, 2001.
- 78- DE MATOS FILHO, R. L.; VOGEL, W. Nonlinear coherent states, **Physical. Review A**, v. 54, n.5 , p. 4560-4563, 1996.

79- SOUZA SILVA, A. N.; MIZRAHI, S. S.; DODONOV, V. V. Effect of phase-sensitive reservoir on the decoherence of pair-cat coherent states, **Journal of Russian Laser research**, v. 22, n. 6, p.534-544, 2001.

80- PURI, R. R. **Mathematical Methods of Quantum Optics**, Berlin: Springer-Verlag 2001.