



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

*Estudo das técnicas de obtenção de Hamiltonianos  
efetivos em Óptica Quântica*

**Camila Miranda Carvalho**

São Carlos  
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

*Estudo das técnicas de obtenção de Hamiltonianos  
efetivos em Óptica Quântica*

**Camila Miranda Carvalho**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas

São Carlos

2009

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C331et

Carvalho, Camila Miranda.

Estudo das técnicas de obtenção de Hamiltonianos efetivos em Óptica Quântica / Camila Miranda Carvalho. -- São Carlos : UFSCar, 2009.

92 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Mecânica quântica. 2. Óptica quântica. 3. Engenharia de estados quânticos. 4. Hamiltonianos efetivos. I. Título.

CDD: 530.12 (20<sup>a</sup>)

ATA DA 117ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

MESTRANDA: **Camila Miranda Carvalho**

DATA: 18/02/2009

HORÁRIO: 09:00 h

LOCAL: Sala de Seminários "Jorge André Swieca" DF

TÍTULO: "Estudo das técnicas de obtenção de Hamiltonianos efetivos em Óptica Quântica"

BANCA EXAMINADORA:

*Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas (orientador) - Presidente - DF/UFSCar*

*Prof. Dr. Eduardo Inácio Duzzioni - Membro - IF/UFU*

*Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida - Membro - DMF/UCG*

Reuniu-se a Banca Examinadora acima descrita, nas formas e termos do artigo 26 do Regimento Interno do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos, para *Exame de Defesa de Dissertação de Mestrado* sob o título "Estudo das técnicas de obtenção de Hamiltonianos efetivos em Óptica Quântica" da candidata *Camila Miranda Carvalho*. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca Examinadora – *Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas*. Após a explanação da candidata, o presidente passou a palavra aos componentes da Banca Examinadora. Terminada a arguição, a Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta para atribuição dos conceitos, os quais transcreveram:

*Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas*

conceito = A

*Prof. Dr. Eduardo Inácio Duzzioni*

conceito = A

*Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida*

conceito = A

Aos meus pais e avós

# *Agradecimentos*

Inicialmente agradeço aos meus pais pelo apoio dado, principalmente durante a graduação e mestrado, sem eles eu não teria conquistado nada ou quase nada do que consegui. Aos meus avós por terem sido segundos pais e exemplos pra todos nós. À minha irmã pelo carinho e amizade e à todas as tias, tios e primos.

Ao professor Celso, meu orientador, agradeço a compreensão e apoio sempre quando necessário.

Aos amigos que fiz em São Carlos, em especial a André, Otávio, Cesar e Hélio, a este último um agradecimento a mais por ter me auxiliado com os problemas computacionais surgidos durante este trabalho.

Ao Gilberto agradeço a compreensão, apoio, dedicação e aos ensinamentos de Física e Linux.

Aos professores do departamento de Física e à todos os funcionários, que a cada dia fazem a nossa vida mais fácil.

À agência de fomento CNPq pela ajuda financeira.

# *Resumo*

Em Óptica Quântica a construção de hamiltonianos efetivos é um assunto de suma importância, visto que a partir deles podemos manipular e gerar estados quânticos e operações lógicas. Nesta dissertação discutimos 3 métodos aproximativos para a obtenção de hamiltonianos efetivos: i) a eliminação adiabática, ii) o métodos de dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes e iii) o método de pequenas rotações não-lineares, de forma a analisar o regime de validade destas técnicas, desvantagens e vantagens. Notamos que, embora a eliminação adiabática seja a mais utilizada e divulgada, apresenta inconsistências e prevê hamiltonianos efetivos incorretos. O método de dinâmicas efetivas, embora seja uma técnica simples e muito operacional, também apresenta inconsistência e não se aplica a sistemas dissipativos. Por outro lado, o método de pequenas rotações não-lineares, que aparece como o mais preciso, é muito pouco utilizado na literatura.

**Palavras-chave:** Hamiltoniano efetivos, Engenharia de estados quânticos, Métodos aproximativos em Óptica Quântica.

# *Abstract*

In the Quantum Optics area, the construction of effective hamiltonian is a matter of great importance, since from them we can generate and manipulate quantum states and logical operations. In this work we discuss 3 approximate methods for obtaining such effective hamiltonians: i) adiabatic elimination, ii) method of effective dynamics for oscillating hamiltonians and iii) nonlinear small rotations. Here we analyze the regime of validity of these techniques, their disadvantages and advantages. We note that, although adiabatic elimination is the most used and known, it has inconsistencies and can provide incorrect effective hamiltonians. The method of effective dynamics, although a very simple technique, also has inconsistencies and is not applicable to dissipative systems. Moreover, the method of nonlinear small rotations, which appears as the most accurate, is rarely used in the literature.

**Keywords:** Effective Hamiltonians, Engineering of quantum states, Approximate methods in Quantum Optics.



# *Lista de Figuras*

3.1	Dois campos clássicos interagindo dispersivamente com os níveis de energia internos de um íon. . . . .	27
3.2	Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis. . .	30
3.3	Dois campos quânticos interagindo dispersivamente com um átomo de três níveis.	32
3.4	Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis que apresenta decaimento espontâneo. . . . .	36
4.1	Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis. . .	53
4.2	Dois campos quânticos interagindo dispersivamente com um átomo de três níveis.	55
5.1	Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis. . .	60
5.2	Um campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de três níveis.	62
5.3	Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis com decaimento espontâneo. . . . .	65
6.1	Número médio de fótons em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  g\rangle 0\rangle$ . . . . .	69
6.2	Inversão atômica em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  g\rangle 0\rangle$ . . . . .	70
6.3	$\Re(C_{g,0})$ em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  g\rangle 0\rangle$ . . . . .	70
6.4	Número médio de fótons em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  e\rangle 0\rangle$ . . . . .	71
6.5	Inversão atômica em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  e\rangle 0\rangle$ . . . . .	71
6.6	$\Re(C_{e,0})$ em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  e\rangle 0\rangle$ . . . . .	72
6.7	Número médio de fótons em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  g\rangle 1\rangle$ . . . . .	72
6.8	Inversão atômica em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  g\rangle 1\rangle$ . . . . .	73
6.9	$\Re(C_{g,1})$ em função do tempo para $ \psi(0)\rangle =  g\rangle 1\rangle$ . . . . .	73

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>O modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>11</b>
2.1	Hamiltoniano de um átomo no campo de radiação . . . . .	11
2.1.1	Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	13
2.1.2	Modelo de interação átomo-campo . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Eliminação adiabática</b>	<b>18</b>
3.1	Revisão histórica . . . . .	19
3.2	Eliminação mais rigorosa . . . . .	23
3.3	Eliminação adiabática e hamiltonianos efetivos . . . . .	26
3.4	Sistemas dissipativos . . . . .	35
3.5	Uma técnica incorreta . . . . .	39
3.6	O problema do referencial . . . . .	41
3.7	Comentários . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes</b>	<b>46</b>
4.1	Trabalho inicial . . . . .	48
4.2	Obtenção do método . . . . .	49
4.2.1	Hamiltonianos com dependência harmônica no tempo . . . . .	52
4.3	Comentários . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Método de pequenas rotações não-lineares</b>	<b>58</b>

5.1	Motivação do método . . . . .	58
5.2	Hamiltonianos não-lineares . . . . .	59
5.2.1	Caso dissipativo . . . . .	64
5.3	Comentários . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Comparação dos métodos</b>	<b>68</b>
	<b>Apêndice A – Cálculo da hamiltoniana de um elétron em um campo eletromagnético</b>	<b>75</b>
	<b>Apêndice B – Equações dos Campos de radiação</b>	<b>78</b>
	<b>Apêndice C – Integração formal da equação de Liouville-Von Neumann</b>	<b>81</b>
	<b>Apêndice D – Perturbação de Dyson para o operador evolução</b>	<b>83</b>
	<b>Apêndice E – Convolução</b>	<b>84</b>
	<b>Apêndice F – Campo forte no modelo de Dicke</b>	<b>85</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>

# 1 *Introdução*

A Óptica Quântica é uma das áreas da Física derivada da Mecânica Quântica, e é onde a teoria adquirida por este ramo tão importante da Física pode ser testada e aplicações tecnológicas da Mecânica Quântica são possíveis, como o caso dos lasers. Seu principal foco é o estudo da interação radiação-matéria onde, analisando o comportamento da luz, consegue muitas vezes inferir a resposta da matéria a interação. O modelo de interação entre luz e matéria, dependendo do fenômeno a ser estudado em Óptica Quântica, pode ser híbrido, onde a luz é um ente clássico e matéria quântico, ou ambos são quantizados. Há situações onde a aproximação semiclássica falha em explicar o que está acontecendo, como a emissão espontânea em um sistema atômico, a qual é então fenomenologicamente considerada<sup>1</sup>.

Um dos problemas importantes que surgem ao se trabalhar com Física Teórica é que, muitas vezes, a expressão analítica de uma grandeza relevante do sistema não pode ser devidamente expressa, neste contexto é imprescindível a busca de melhores formas de aproximação entre o resultado obtido e o que julgamos ser a resposta do problema. Portanto, os métodos aproximativos são de vital importância para a construção de hamiltonianos e cálculos de probabilidades, por exemplo.

O trabalho a seguir se propõe a estudar três métodos aproximativos para a obtenção de hamiltonianos efetivos: a eliminação adiabática (2), o método de dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes (4, 5)<sup>2</sup> e o método de pequenas rotações não-lineares (6). Embora o termo adiabático seja tradicionalmente conhecido na termodinâmica para denominar processos onde não haja troca de calor entre o sistema e o meio ambiente, aqui ele é utilizado no sentido em que o processo seja quasi-estático, de modo que seja possível trabalhar em regimes estacionários ou assintóticos das grandezas físicas envolvidas.

O método de dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes é um trabalho recente que propõe encontrar hamiltonianos que descrevam a dinâmica média do sistema utilizando expansão da série de Dyson e considerações sobre o cálculo de médias.

---

<sup>1</sup>Veja por exemplo (1–3).

<sup>2</sup>Os autores em (4, 5) não nomearam seu método, por isso tomei a liberdade de denominá-lo método de dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes.

A técnica de pequenas rotações não-lineares é um método simples, mas que exige que o hamiltoniano de interação possa ser descrito por operadores deformados da Álgebra  $SU(n)$ .

O objetivo do presente trabalho é estudar as técnicas de obtenção de hamiltonianos efetivos, analisando suas condições de validade, vantagens e desvantagens.

No capítulo 2 apresentaremos o modelo básico de interação entre um átomo de dois níveis e um campo de radiação<sup>3</sup>, o modelo de Jaynes-Cummings. Em seguida, no capítulo 3 apresentamos a técnica de eliminação adiabática, no capítulo 4 o método de dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes e no capítulo 5 o método de pequenas rotações não-lineares, todos apresentados com exemplos práticos. Por fim no capítulo 6 comparamos os resultados dos métodos com um exemplo analítico já bem conhecido.

---

<sup>3</sup>Ver (2) por exemplo.

## 2 O modelo de Jaynes-Cummings

### 2.1 Hamiltoniano de um átomo no campo de radiação

Um átomo hidrogenóide pode ser considerado como um sistema elétron-núcleo. A energia do átomo hidrogenóide no campo eletromagnético se deve às interações radiação-elétron, núcleo-elétron e radiação-núcleo. A última não é estimada porque a energia típica da interação eletromagnética não é compatível com as energias de transição nucleares.

Abaixo, iremos obter a hamiltoniana clássica que descreve tal interação e posteriormente sua quantização (canônica).

Um elétron com velocidade  $\vec{v}$  em um campo eletromagnético está sujeito à força de Lorentz

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}), \quad (2.1)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico,  $\vec{B}$  o campo de indução magnética e  $e = -|e|$  a carga elétrica do elétron.

A hamiltoniana obtida de (2.1) é dada por<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}_{ec} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{p}$  é o momento conjugado do elétron,  $\vec{A}$  o potencial vetor e  $\phi$  o potencial escalar. Já a energia armazenada pelo campo eletromagnético pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_c = \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dv, \quad (2.3)$$

onde  $V$  refere-se ao volume do sistema,  $\vec{D}$  é o deslocamento elétrico e  $\vec{H}$  é a intensidade magnética.

Finalmente, através da soma de (2.2) com (2.3), mais um termo referente a energia de interação entre o elétron e o núcleo,  $U(\vec{r})$ , obtemos a hamiltoniana total,  $\mathcal{H}_T$ , do sistema:

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi + U(\vec{r}) + \mathcal{H}_c. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Apêndice A

A hamiltoniana (2.2), entretanto, não é única. Isto se deve ao fato da invariância por transformações de gauge dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Em particular, um gauge muito comum para campos de radiação é o gauge de Coulomb

$$\sum_{\mu=1}^3 \partial_{\mu} A_{\mu} = 0. \quad (2.5)$$

Em tal gauge, fica evidente a transversalidade do campo de radiação. Além disso, tal propriedade mostrar-se-á muito conveniente na quantização do campo.

Há porém outras restrições que serão impostas para definir o sistema. Entre elas a definição do contorno. É necessário salientar que a precisa descrição do contorno define determinadas características do sistema como, por exemplo, os comprimentos de onda permitidos. Este é um passo de muita importância para a quantização do sistema. Para compreender melhor a afirmação anterior basta considerar o volume  $V$  como uma caixa de comprimento  $L_x = L_y = L_z = L$ . No gauge de Coulomb, a equação de onda para o campo, em termos do potencial vetor, é dada por<sup>2</sup>

$$\nabla^2 \vec{A} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética e  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo. Supondo condição periódica de contorno

$$\vec{A}(\vec{r} + L\hat{e}_l, t) = \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (2.7)$$

$l = x, y, z$ . É possível expressar  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  numa série de Fourier<sup>3</sup>:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \left( \sum_{\vec{k}} \sum_l \mathcal{A}_l(k) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) Q_k(t) \hat{e}_l \right), \quad (2.8)$$

onde  $k^2 = \omega^2/c^2$ ,  $\hat{e}_l$  é o versor na direção  $l$  e  $\Re(\mathcal{A}_l(k)Q_k(t))$  representa a parte real da função  $\mathcal{A}_l(k)Q_k(t)$ . Devido à periodicidade de  $\vec{A}(\vec{r})$ , os valores que o vetor de onda  $\vec{k}$  pode assumir são dados por,

$$k_l = \frac{2\pi}{L} n_l, \quad (2.9)$$

$n_l = 1, 2, \dots$

No gauge de Coulomb a propagação da onda é transversal, visto que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , então

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Ver apêndice B

<sup>3</sup>Note que é utilizada série ao invés de transformada devido ao volume finito da caixa.

Utilizando (2.8) os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  têm a forma<sup>4</sup>

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{k}, l} \mathcal{A}_l(\vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \dot{Q}_k(t) \hat{\epsilon}_l, \quad (2.11)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{k}, l} k \mathcal{A}_l(\vec{k}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) Q_k(t) (\hat{k} \times \hat{\epsilon}_l). \quad (2.12)$$

A energia contida no campo eletromagnético<sup>5</sup> é dada por:

$$\mathcal{H}_c = \sum_n \frac{1}{2} [m_n \dot{Q}_n(t)^2 + m_n v_n^2 Q_n(t)^2], \quad (2.13)$$

$$m_n = \frac{\mathcal{A}_n^2}{4} \epsilon_0, v_n^2 = \frac{\mathcal{A}_n^2}{4\mu_0 m_n} \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \text{ e } \mathcal{A}_n = (v_n^2 m_n).$$

Embora haja semelhança entre a hamiltoniana acima e a de osciladores harmônicos independentes não significa que a luz seja um oscilador harmônico, mas sim que a dinâmica do campo eletromagnético seja semelhante a deste sistema.

### 2.1.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Paul Adrien Maurice Dirac propõe uma regra de quantização que faz corresponder o parêntese de Poisson, de duas variáveis canonicamente conjugadas, com o comutador dos operadores correspondentes a elas

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}], \quad (2.14)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Por causa da semelhança entre as hamiltonianas do oscilador harmônico e do campo eletromagnético (2.13) as variáveis  $P_n(t) = \frac{\dot{Q}_n(t)}{m_n}$  e  $Q_n(t)$  são canonicamente conjugadas, como  $x$  e  $p_x$ .

Seguindo a regra de Dirac:

$$\begin{aligned} [\hat{P}_n, \hat{Q}_n] &= -i\hbar, \\ [\hat{Q}_n, \hat{Q}_n] &= 0, \\ [\hat{P}_n, \hat{P}_n] &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

O hamiltoniano é obtido dando “status” de operadores às variáveis conjugadas

$$\hat{H}_c = \sum_n \frac{\hat{P}_n^2(t)}{2m_n} + \frac{m_n v_n^2 \hat{Q}_n(t)^2}{2}. \quad (2.16)$$

<sup>4</sup>Ver apêndice B

<sup>5</sup>Ver apêndice B



Seguindo o mesmo procedimento da quantização do oscilador harmônico definimos novas variáveis:

$$\hat{a}_n(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2m_n\hbar v_n}} [m_n v_n \hat{Q}_n(t) + i\hat{P}_n(t)], \quad (2.17)$$

$$\hat{a}_n^\dagger(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2m_n\hbar v_n}} [m_n v_n \hat{Q}_n(t) - i\hat{P}_n(t)], \quad (2.18)$$

que satisfazem a relação de comutação  $[\hat{a}_n(t), \hat{a}_n^\dagger(t)] = 1$ .

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16),

$$\hat{H}_c = \sum_n \hbar v_n \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.19)$$

### 2.1.2 Modelo de interação átomo-campo

Há casos onde a interação átomo-campo é bem descrita pelo hamiltoniano de acoplamento de um dipolo elétrico em um campo eletromagnético, o chamado hamiltoniano de acoplamento mínimo. Esta aproximação é boa quando o comprimento de onda do campo é muito maior que a dimensão atômica. Nesta situação, o átomo se encontra num campo elétrico uniforme espacialmente e o campo magnético é nulo. Em Óptica Quântica o hamiltoniano de acoplamento mínimo é um modelo muito usado porque o comprimento de onda ótico (microondas) é da ordem de  $10^3(10^8)$  vezes maior que o raio atômico.

Como visto anteriormente, o hamiltoniano que descreve um átomo hidrogenóide na presença de um campo eletromagnético é dado por:

$$\mathcal{H}_{ac} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + U(\vec{r}), \quad (2.20)$$

onde  $\frac{\vec{p}^2}{2m}$  representa a energia de movimento do elétron,  $-\frac{e}{2m}(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p})$  a interação momento do elétron-campo de radiação,  $\frac{e\vec{A}^2}{2m}$  a interação entre diferentes osciladores do campo,  $U(\vec{r})$  é o potencial elétrico entre elétron e núcleo e  $\phi = 0$ , já que não há fonte de carga elétrica.

Por construção  $r_i$  e  $p_i$  são variáveis canonicamente conjugadas, portanto a quantização da hamiltoniana (2.20) é conhecida<sup>6</sup>

$$\hat{H}_{ac} = \frac{1}{2m} \left( \hat{p} - e\hat{A}(\hat{r}, t) \right)^2 + U(\hat{r}). \quad (2.21)$$

Suponha que o átomo esteja imerso em uma região onde o campo de radiação não varia

<sup>6</sup>Ver Sessão anterior

com a posição, a não ser a grande distância do átomo

$$\hat{E}(\hat{r}_0 + \hat{r}, t) \simeq \hat{E}(\hat{r}_0, t), \quad (2.22)$$

o que implica em

$$\hat{A}(\hat{r}_0 + \hat{r}, t) \simeq \hat{A}(\hat{r}_0, t), \quad (2.23)$$

e portanto

$$\hat{B}(\hat{r}_0 + \hat{r}, t) = 0, \quad (2.24)$$

$\vec{r}_0$  é a posição do núcleo atômico em relação a um referencial fonte da radiação (um laser por exemplo) e  $\vec{r}$  a distância do núcleo ao elétron.

Para que as equações acima sejam satisfeitas a condição que  $\hat{k} \cdot \hat{r} \ll 1 \rightarrow \lambda \gg r$ , é suficiente

$$\hat{A}(\hat{r}_0 + \hat{r}, t) \simeq \sum_{\hat{k}} \sum_l \hat{\mathcal{A}}_l(\hat{k}) \exp(i\hat{k} \cdot \hat{r}_0) \hat{Q}_k(t) \vec{e}_l = \hat{A}(\hat{r}_0, t). \quad (2.25)$$

Em Mecânica Quântica os resultados dos observáveis físicos são probabilísticos, mas há uma equação que representa a evolução temporal dos estados quânticos do sistema, a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (2.26)$$

A equação de Schrödinger, projetada na base de posição, do sistema átomo-campo é

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla - \frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \right]^2 + U(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}, t), \quad (2.27)$$

onde as relações  $\langle \vec{r} | \hat{p} = i\hbar \nabla \langle \vec{r} |$ ,  $\langle \vec{r} | \psi(t) \rangle = \psi(\vec{r}, t)$  foram usadas.

Se aplicarmos uma transformação unitária em  $\hat{H}_{ac} (\hat{H}_{ac} \rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{H}_{ac} \hat{U})$ , para que o hamiltoniano (2.21) seja simplificado, ou de maneira análoga, definindo uma nova função de onda  $\varphi(\vec{r}, t)$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r} \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (2.28)$$

substituindo (2.28) em (2.27)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t) = \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) - \vec{E}(t) \cdot \vec{\mu} \right] \varphi(\vec{r}, t), \quad (2.29)$$

o último termo representa a energia de acoplamento do dipolo,  $\vec{\mu} = e\vec{r}$  e o campo elétrico  $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$ . Retornando à forma operatorial

$$\hat{H}'_{ac} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(\hat{r}) - \hat{E}(t) \cdot \hat{\mu}. \quad (2.30)$$

A nova função de onda (2.28) difere da primeira por uma fase e por isso características importantes como a densidade de probabilidade não mudam com a nova representação. Além disso  $\varphi(\vec{r}, t)$  carrega a variação ponto a ponto do campo eletromagnético levando-o a um campo constante na região atômica.

Como queríamos demonstrar, um modelo de interação átomo-campo de radiação pode ser aproximado por um hamiltoniano de acoplamento dipolo elétrico-campo sob a condição que  $\lambda \gg r$ .

O hamiltoniano de acoplamento mínimo pode, sob algumas condições representar processos onde a destruição de um único fóton produza uma transição atômica.

A primeira contribuição de (2.30) advém da energia do elétron ligado ao núcleo. Essa energia é dependente de seu momento e da posição do elétron, porém ela não varia continuamente, há estados específicos, estacionários de ocupação. O operador de energia do elétron no  $i$ -ésimo estado de ocupação é dada por

$$E = E_i \hat{\sigma}_{ii}, \quad (2.31)$$

onde  $\hat{\sigma}_{ii} = |i\rangle\langle i|$ .

O hamiltoniano de interação átomo-campo segundo (2.30) é

$$\hat{H}_T = \sum_n \hbar \nu_n \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right) + \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_n g_n^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger), \quad (2.32)$$

onde o campo elétrico é dado por  $\hat{E} = \sum_n \hat{\epsilon}_n (\mathcal{E}_n \hat{a}_n + \mathcal{E}_n^* \hat{a}_n^\dagger)$ ,

$$\hat{\mu} = \sum_{i,j} e |i\rangle\langle i| \hat{r} |j\rangle\langle j| = \sum_{i \neq j} \wp_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (2.33)$$

$$g_n^{ij} = \frac{\wp_{ij} \mathcal{E}_n}{\hbar}. \quad (2.34)$$

Para um átomo de dois níveis  $g_n^{ge} = g_n^{eg}$ ,  $\hat{\sigma}_{eg} = \hat{\sigma}_+$ ,  $\hat{\sigma}_{ge} = \hat{\sigma}_-$  e  $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}$ ,

$$\hat{H}_T = \sum_n \hbar \nu_n \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_n g_n (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger). \quad (2.35)$$

Aplicando a seguinte transformação unitária em (2.35)

$$\begin{aligned} T &= \exp \left[ -i \left( \sum \omega_0 \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z \right) t \right], \\ \tilde{H}_T &= T^\dagger H_T T - \hbar \left( \sum \omega_0 \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_T = & \sum_n \hbar \nu_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hbar \sum_n g_n \left[ \hat{\sigma}_+ \hat{a}_n + \hat{\sigma}_+ \hat{a}_n^\dagger \exp(2i\omega_0 t) \right. \\ & \left. + \hat{\sigma}_- \hat{a}_n \exp(-2i\omega_0 t) \hat{a}_n^\dagger \hat{\sigma}_- \right] - \hbar \sum_n \omega_0 \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n, \end{aligned} \quad (2.37)$$

eliminando os termos que variam muito no tempo, aproximação de onda girante (RWA)

$$\tilde{H}_T = \sum_n \hbar \nu_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hbar \sum_n g_n (\hat{\sigma}_+ \hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger \hat{\sigma}_-) - \hbar \sum_n \omega_0 \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n. \quad (2.38)$$

Voltando para a antiga representação

$$\hat{H}_T = \sum_n \hbar \nu_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_n g_n (\hat{\sigma}_+ \hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.39)$$

se um único modo do campo interagir com um átomo de dois níveis temos

$$\hat{H}_T = \hbar \nu_n \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.40)$$

este é o chamado hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

A dinâmica representada por este hamiltoniano torna possível a transição de um nível de menor energia para um de maior energia somente se houver a absorção de um único fóton <sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>Nos próximos capítulos, por motivo de simplificação, será omitido o símbolo  $\hat{\cdot}$  para denominar operadores quânticos

### 3 *Eliminação adiabática*

Há variados métodos para obtenção de hamiltonianos efetivos e cálculo de probabilidades de transição. Cada abordagem apresenta diferentes vantagens e desvantagens. Neste capítulo iremos detalhar quais as propriedades da aproximação conhecida como eliminação adiabática.

Embora o termo adiabático seja tradicionalmente conhecido na termodinâmica para denominar processos onde não haja troca de calor entre o sistema e o meio ambiente, aqui ele é utilizado no sentido em que o processo seja quasi-estático, de modo que seja possível trabalhar em regimes estacionários ou assintóticos das grandezas físicas envolvidas.

A eliminação adiabática é uma aproximação que advém do tratamento de equações diferenciais. Ela se sedimenta sobre a hipótese de que há grandezas no sistema que variam muito rapidamente ou lentamente em relação a outras, em um determinado intervalo de tempo.

A técnica de eliminação adiabática em Óptica Quântica originou-se entre os anos de 1960 e 1970 com o advento das teorias dos lasers, por exemplo no tratamento das equações de Heisenberg-Langevin (2) e (1). Basicamente um laser é composto por um conjunto de átomos que interagem com um campo eletromagnético em uma cavidade. A cavidade é um conjunto de espelhos arranjados de forma a fazer com que o campo eletromagnético seja minimamente transmitido, semi-transparente. Ela é construída para que possa conter fótons com a frequência de uma das transições atômicas, para que eles sejam absorvidos e emitidos pelo átomo, iniciando um processo de emissão estimulada.

Nesse contexto, a descrição da dinâmica de um campo eletromagnético interagindo com um átomo em uma cavidade que perde energia rapidamente para o meio ambiente<sup>1</sup> foi muito simplificada com o uso da eliminação adiabática. O reservatório térmico ao retirar a energia extra do átomo tão logo ela é recebida do campo eletromagnético, gera uma situação onde o número de fótons na cavidade é constante, ou seja, não há uma interação direta entre o átomo e o campo. Considerações sobre o tempo de relaxação das variáveis atômicas e do campo são essenciais nessa análise.

---

<sup>1</sup>Também chamado de reservatório térmico.

### 3.1 Revisão histórica

Visando mostrar como a eliminação adiabática foi primeiramente aplicada, determinaremos o comportamento do campo eletromagnético, em uma cavidade, interagindo com um átomo que perde energia para o meio ambiente através de decaimento espontâneo. Neste contexto a variação temporal da polarização atômica será mais rápida que a do campo do laser, possibilitando a eliminação adiabática desta e da diferença de população, para intervalos de tempo entre o tempo de relaxação do átomo e do campo eletromagnético.

Por motivo de simplificação utilizaremos a abordagem semi-clássica para a interação átomo-campo.

Com o uso das equações de Maxwell<sup>2</sup> e as relações constitutivas:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E},\end{aligned}\tag{3.1}$$

a equação que o campo de radiação injetado na cavidade pelo laser deve obedecer é:

$$c^2 \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 P_x(z,t)}{\partial t^2},\tag{3.2}$$

onde  $E_x$  é o campo elétrico na cavidade,  $P_x$  é o campo de polarização atômico,  $\sigma$ ,  $\epsilon_0$  e  $c$  são a condutividade elétrica, a constante dielétrica e a velocidade da luz no vácuo .

A solução de (3.2) na ausência de perda de energia e termo dirigido,  $\sigma = 0$  e  $\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} = 0$ , com a condição de contorno  $E_x(0,t) = E_x(L,t) = 0^3$ , é:

$$E_x(z,t) = \sum_n (E_n e^{-i\omega_n t} + E_n^* e^{i\omega_n t}) \text{sen}(k_n z),\tag{3.3}$$

$E_n$  é a amplitude do campo,  $\omega_n$  a frequência angular e  $k_n$  o número de onda.

Devido à condição de contorno de que as ondas eletromagnéticas permitidas na cavidade têm valor nulo em suas paredes, e com o auxílio de relações já bem estabelecidas pela teoria ondulatória encontramos:

$$\begin{aligned}k_n &= \frac{n\pi}{L} \\ \omega_n &= \frac{n\pi c}{L},\end{aligned}\tag{3.4}$$

com  $L$  sendo o comprimento da cavidade no eixo  $z$ .

Baseado em (3.3) podemos supor que a solução de (3.2) para o campo do laser na cavidade

<sup>2</sup>Ver apêndice B

<sup>3</sup>Ver apêndice B.

e o de polarização sejam da forma:

$$E_x(z, t) = \sum_n A_n(t) \text{sen}(K_n z), \quad (3.5)$$

$$P_x(z, t) = \sum_n P_n(t) \text{sen}(K_n z). \quad (3.6)$$

onde  $A_n(t)$  e  $P_n(t)$  são funções a serem determinadas.

Escolhendo a seguinte variação temporal para o campo elétrico e de polarização:

$$A_n(t) = \mathcal{E}_n(t)e^{-i\omega t} + \mathcal{E}_n^*(t)e^{i\omega t}, \quad (3.7)$$

$$P_n(t) = \mathcal{P}_n(t)e^{-i\omega t} + \mathcal{P}_n^*(t)e^{i\omega t}, \quad (3.8)$$

com

$$\left| \frac{d\mathcal{E}_n(t)}{dt} \right| \ll |\omega \mathcal{E}_n(t)|, \quad \left| \frac{d\mathcal{P}_n(t)}{dt} \right| \ll |\omega \mathcal{P}_n(t)|, \quad (3.9)$$

$\mathcal{E}_n(t)$  e  $\mathcal{P}_n(t)$  variam lentamente.

A frequência  $\omega$  é dada por

$$\omega \approx \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_g}{\hbar}, \quad (3.10)$$

onde  $\varepsilon_g = \hbar\omega_g$  e  $\varepsilon_e = \hbar\omega_e$  são as energias dos níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  selecionados pelo laser para ocorrer transições.

Substituindo (3.5-3.6) e (3.9) em (3.2):

$$\frac{d\mathcal{E}_n(t)}{dt} + \left[ \frac{\gamma}{2} + i(\omega_n - \omega) \right] \mathcal{E}_n(t) \cong i \frac{\omega \mathcal{P}_n(t)}{2\varepsilon_0}, \quad (3.11)$$

onde  $\gamma \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ll \omega$ , e  $\omega \approx \omega_n$ .

No tratamento semi-clássico da interação átomo-campo o campo eletromagnético é clássico e o átomo é um ente quântico, sendo assim, as grandezas físicas relacionadas ao átomo serão associadas a operadores e seu valor observado a resultados médios feitos sobre o átomo.

Em mecânica quântica o valor médio de um observável é determinado através da relação:

$$\bar{\mathcal{O}} = \langle \psi(t) | \hat{\mathcal{O}} | \psi(t) \rangle. \quad (3.12)$$

Se o operador  $\hat{\mathcal{O}}$  possuir um conjunto contínuo de auto-estados (3.12) tem a forma integral:

$$\bar{\mathcal{O}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk' dk'' \langle \psi(t) | k' \rangle \langle k' | \hat{\mathcal{O}} | k'' \rangle \langle k'' | \psi(t) \rangle, \quad (3.13)$$

se  $|k\rangle = |x\rangle$ ,  $\langle x | \psi(t) \rangle$  é a função de onda associada à probabilidade do elétron estar em uma

determinada posição do espaço.

Segundo (3.12) a polarização induzida pelo campo elétrico no meio atômico é:

$$P(z, t) = N \langle \psi(z, t) | e \hat{x} | \psi(z, t) \rangle, \quad (3.14)$$

onde  $N$  é o número de átomos no meio.

Considerando que o campo eletromagnético não seja intenso, podemos inferir que seu efeito é o de perturbar os estados estacionários do hamiltoniano livre. Através desta interação o elétron torna-se capaz de realizar transições entre os níveis atômicos. Portanto, a função de onda do elétron perturbado pode ser escrita como:

$$|\psi(z, t)\rangle = c_g(z, t) e^{i\omega t/2} |g\rangle + c_e(z, t) e^{-i\omega t/2} |e\rangle, \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} H_0 |g\rangle &= \hbar \omega_g |g\rangle, \\ H_0 |e\rangle &= \hbar \omega_e |e\rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$H_0$  é o hamiltoniano livre do elétron,  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  são os estados estacionários do elétron quando não há campo externo<sup>4</sup> e  $\omega = \omega_e - \omega_g$ .

Para conhecermos a função de onda do elétron temos que determinar o comportamento das amplitudes de probabilidades  $c_g(z, t)$  e  $c_e(z, t)$  no tempo e no espaço, para isso utilizamos a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(z, t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(z, t)\rangle, \quad (3.17)$$

o hamiltoniano átomo-campo é:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (3.18)$$

com

$$\hat{V} = -e \hat{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = -e \sum_n \hat{x} [\mathcal{E}_n(t) e^{-i\omega t} + \mathcal{E}_n^*(t) e^{i\omega t}] \text{sen}(K_n z), \quad (3.19)$$

sendo a interação de dipolo em um campo elétrico<sup>5</sup>.

Substituindo (3.15), (3.16) e (3.19) em (3.17) e utilizando a relação de ortogonalidade dos autoestados do hamiltoniano livre, as amplitudes de probabilidade obedecerão as equações:

$$\frac{\partial c_g}{\partial t} = -i \left( \frac{\omega}{2} + \frac{\epsilon_g}{\hbar} \right) c_g - \frac{i}{\hbar} c_e e^{-i\omega t} V_{ge}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial c_e}{\partial t} = i \left( \frac{\omega}{2} - \frac{\epsilon_e}{\hbar} \right) c_e - \frac{i}{\hbar} c_g e^{i\omega t} V_{eg}, \quad (3.21)$$

<sup>4</sup>As exponenciais em (1.15) foram acrescentadas por motivo de simplificação.

<sup>5</sup>Ver capítulo 1.



com  $\omega_e = \frac{\omega}{2}$ ,  $\omega_g = -\frac{\omega}{2}$  e

$$V_{ge} = -e\langle g|\hat{x}|e\rangle[\mathcal{E}_n(t)e^{-i\omega t} + \mathcal{E}_n^*(t)e^{i\omega t}] \text{sen}(K_n z). \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.20) e (3.21) e desconsiderando os termos que oscilam muito, aplicando a aproximação de onda girante (RWA), as equações (3.20) e (3.21) são:

$$\frac{\partial c_g}{\partial t} = -\left[\frac{\Gamma_g}{2} + i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varepsilon_g}{\hbar}\right)\right]c_g + \frac{i}{\hbar}c_e \text{sen}(K_n z)\mu \mathcal{E}_n^*(t), \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial c_e}{\partial t} = -\left[\frac{\Gamma_e}{2} - i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varepsilon_e}{\hbar}\right)\right]c_e + \frac{i}{\hbar}c_g \text{sen}(K_n z)\mu^* \mathcal{E}_n(t). \quad (3.24)$$

onde  $\mu = e\langle g|\hat{x}|e\rangle = e\langle e|\hat{x}|g\rangle^*$ . O decaimento atômico foi introduzido à mão em (3.23) e (3.24), adicionando um termo proporcional à respectiva amplitude de probabilidade  $\left(\frac{\Gamma_i}{2}c_i\right)$ .

A polarização do meio é calculada substituindo (3.15) em (3.14):

$$P(z, t) = N[c_g^*(z, t)c_e(z, t)e^{-i\omega t}\mu + c_g(z, t)c_e^*(z, t)e^{i\omega t}\mu^*], \quad (3.25)$$

assim como o número de população nos estados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  são dados por  $N|c_g(z, t)|^2 = N_g$  e  $N|c_e(z, t)|^2 = N_e$ . Derivando no tempo tais grandezas encontramos:

$$\frac{\partial N_g(z, t)}{\partial t} = -\Gamma_g N_g(z, t) + \frac{i}{\hbar}[\tilde{P}(z, t)\mathcal{E}_n^*(t) - \tilde{P}^*(z, t)\mathcal{E}_n(t)], \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial N_e(z, t)}{\partial t} = -\Gamma_e N_e(z, t) + \frac{i}{\hbar}[\tilde{P}^*(z, t)\mathcal{E}_n(t) - \tilde{P}(z, t)\mathcal{E}_n^*(t)], \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}(z, t)}{\partial t} &= -\left[\Gamma_{ge} - i\left(\omega + \frac{\varepsilon_g - \varepsilon_e}{\hbar}\right)\right]\tilde{P}(z, t) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \text{sen}(K_n z)|\mu|^2[N_e(z, t) - N_g(z, t)]\mathcal{E}_n(t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

com  $P(z, t) = \tilde{P}(z, t)e^{-i\omega t} + \tilde{P}^*(z, t)e^{i\omega t}$ ,  $\tilde{P} = \mathcal{P}(t) \text{sen}(K_n z)$  e  $\Gamma_{ge} = \frac{\Gamma_g}{2} + \frac{\Gamma_e}{2}$ .

Segundo a mecânica quântica o vácuo possui energia, fato que conseguiu explicar alguns efeitos experimentais observados, como o efeito Casimir e o Lamb “shift”<sup>6</sup>. Na aproximação semi-clássica da interação átomo-campo o efeito de flutuação de energia do campo eletromagnético na cavidade, além daquele pertencente à variação do campo do laser, é considerada “ad-hoc” em (3.26-3.27). A contribuição média espacial das grandezas atômicas é dada por:

$$\frac{dN_g(t)}{dt} = R_g(t) - \Gamma_g N_g(t) + \frac{i}{\hbar}[\mathcal{P}(t)\mathcal{E}_n^*(t) - \mathcal{P}^*(t)\mathcal{E}_n(t)], \quad (3.29)$$

<sup>6</sup>Ver (3).

$$\frac{dN_e(t)}{dt} = R_e(t) - \Gamma_e N_e(t) + \frac{i}{\hbar} [\mathcal{P}^*(t) \mathcal{E}_n(t) - \mathcal{P}(t) \mathcal{E}_n^*(t)], \quad (3.30)$$

$$\frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = -[\Gamma_{ge} - i(\omega - \omega_{eg})] \mathcal{P}(t) - i \frac{|\mu|^2}{\hbar} [N_e(t) - N_g(t)] \mathcal{E}_n(t), \quad (3.31)$$

onde  $R_g(t)$  e  $R_e(t)$  são funções que dão conta de explicar os efeitos causados pela energia do vácuo, como a transição inexplicável do elétron entre níveis atômicos na abordagem semiclássica da interação entre átomo e campo eletromagnético.

De (3.31) vemos que se o campo eletromagnético acoplar-se fracamente com o átomo o termo que dirige o campo de polarização irá produzir uma polarização que decai rapidamente para zero, fazendo com que a população se aproxime de um valor constante para tempos da ordem de  $(\Gamma_{ge})^{-1}$ .

Se o decaimento atômico ( $\Gamma_{ge}$ ) for mais forte que o fator de perda de energia da cavidade ( $\gamma$ ), para tempos da ordem do intervalo:

$$\frac{1}{\gamma} \gg t_1 \gg \frac{1}{\Gamma_{ge}}, \quad (3.32)$$

a polarização e a diferença de população médias não irão variar, portanto segundo (3.29-3.31):

$$\bar{\mathcal{P}}(t_1) \cong -i \frac{|\mu|^2 \mathcal{E}_{neg}(t_1) [\bar{N}_e(t_1) - \bar{N}_g(t_1)]}{\hbar [\Gamma_{ge} - i(\omega - \omega_{eg})]}, \quad (3.33)$$

e

$$\bar{N}_e(t_1) - \bar{N}_g(t_1) = \frac{R_e/\Gamma_e - R_g/\Gamma_g}{1 + \mu |\mathcal{E}_{neg}(t)|^2 / \hbar^2 \Gamma_{ge}^2 + (\omega_{eg} - \omega)^2}. \quad (3.34)$$

Vemos que com o crescimento da intensidade do campo eletromagnético na cavidade a diferença de população irá diminuir até que chegue a uma situação limite onde esta é nula ( $R_g$  e  $R_e$  constantes), então o campo na cavidade estabelecerá um regime estacionário de intensidade.

Neste problema a eliminação adiabática consistiu em eliminar as variações atômicas através de considerações sobre o tempo de relaxação do campo e átomo.

## 3.2 Eliminação mais rigorosa

Segundo o trabalho proposto em (7), a eliminação adiabática é uma técnica que consegue eliminar variáveis rápidas, reduzindo a complexidade do problema e algumas vezes possibilitando a solução analítica deste.

Para utilizá-la temos que primeiramente olhar para as equações de movimento do sistema de interesse e observar se as razões com as quais as grandezas variam são suficientemente

diferentes umas das outras, na escala de tempo considerada.

Por exemplo, no caso visto na (seção 3.1) as equações de movimento são as seguintes:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\mathcal{E} + i\frac{\omega\mathcal{P}}{2\varepsilon_0}. \quad (3.35)$$

$$\frac{d(N_b - N_a)}{dt} = R_b - R_a - \Gamma(N_b - N_a) + \frac{2i}{\hbar}(\mathcal{P}^*\mathcal{E} - \mathcal{P}\mathcal{E}^*), \quad (3.36)$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = -\Gamma\mathcal{P} - i\frac{|\mu|^2}{\hbar}(N_b - N_a)\mathcal{E}, \quad (3.37)$$

com  $\Gamma = \Gamma_a = \Gamma_b$  e  $\Omega_m - \omega = 0$ .

Segundo (7) há um menor parâmetro natural nas equações diferenciais que permite a aplicação da eliminação adiabática, este, é a razão entre a menor e a maior constante das equações, como veremos a seguir. Utilizaremos o menor parâmetro natural para comparar a variação temporal das grandezas campo elétrico, polarização e diferença de população.

Nas equações acima a ordem de magnitude dos parâmetros é mais facilmente visível quando fazemos a seguinte mudança de escala:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{\hbar\Gamma}{2\mu}\tilde{\mathcal{E}}(t), \\ \mathcal{P} &= -i\frac{\mu(R_b - R_a)}{2\Gamma}\tilde{\mathcal{P}}, \\ N_b - N_a &= \frac{R_b - R_a}{\Gamma}\tilde{D}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

substituindo (3.38) em (3.35-3.37):

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}(\tilde{\mathcal{E}} - 2C\tilde{\mathcal{P}}), \quad (3.39)$$

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}}{dt} = -\Gamma(\tilde{\mathcal{P}} - \tilde{\mathcal{E}}\tilde{D}), \quad (3.40)$$

$$\frac{d\tilde{D}}{dt} = -\Gamma\left[\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{P}}^* + \tilde{\mathcal{E}}^*\tilde{\mathcal{P}}) + \tilde{D} - 1\right], \quad (3.41)$$

onde  $\gamma$  e  $\Gamma$  são as razões com as quais as grandezas  $\tilde{\mathcal{E}}$ ,  $\tilde{\mathcal{P}}$  e  $\tilde{D}$  variam, estas serão denominadas razões constantes, e  $C = \frac{\mu^2\omega(R_b - R_a)}{2\varepsilon_0\hbar\gamma\Gamma^2}$ .

De acordo com (7) as condições necessárias para que a eliminação adiabática seja aplicada são<sup>7</sup>:

- i. As razões constantes podem ser divididas em grupos, tal que as constantes em cada grupo tenham a mesma ordem de magnitude. A razão entre a menor e a maior razão constante

<sup>7</sup>Em (7) há outros elementos responsáveis por uma eliminação adiabática mais rigorosa, porém julguei desnecessários tais pormenores já que estes apenas refinam as condições expressas em i, ii e iii.

é o menor parâmetro natural,  $\varepsilon$ , da eliminação adiabática ( $\varepsilon \ll 1$ ), para este problema  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\Gamma}$ .

- ii. Depois de feita a mudança de escala, as variáveis, neste problema  $\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{D}$  e  $C$ , devem permanecer finitas no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- iii. No limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  as flutuações das variáveis não devem divergir.

A mudança de escala será a responsável pela magnitude das flutuações das variáveis, neste contexto  $\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{P}}$  e  $\tilde{D}$ , por isso temos que verificar se ela permite que a terceira condição seja satisfeita. Dependendo da escolha de qual das razões constantes for maior ou menor podemos eliminar a variação da polarização, inversão atômica ou campo.

Escolhendo  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\Gamma}$  e utilizando a escala de tempo  $\tau = \frac{\gamma}{2}t$  para o desenvolvimento do sistema, as equações (3.39-3.41) tornam-se:

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\tau} = -\tilde{\mathcal{E}} + 2C\tilde{\mathcal{P}}, \quad (3.42)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{\mathcal{P}}}{d\tau} = -\tilde{\mathcal{P}} + \tilde{\mathcal{E}}\tilde{D}, \quad (3.43)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{D}}{d\tau} = -\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{P}}^* + \tilde{\mathcal{E}}^*\tilde{\mathcal{P}}) - \tilde{D} + 1, \quad (3.44)$$

no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\tau} = -\tilde{\mathcal{E}} + 2C\tilde{\mathcal{P}}, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{1 + \tilde{\mathcal{E}}^2}, \quad (3.46)$$

e

$$\tilde{D} = \frac{1}{1 + \tilde{\mathcal{E}}^2}. \quad (3.47)$$

Substituindo (3.38) em (3.45-3.47):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\mathcal{E} + i\frac{\omega}{2\varepsilon_0}\mathcal{P}, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{P} = -i\frac{\mu^2}{\Gamma_{ab}\hbar}(N_b - N_a)\mathcal{E}, \quad (3.49)$$

$$N_b - N_a = \frac{(R_b/\Gamma_b - R_a/\Gamma_a)}{1 + \frac{\mu^2}{\hbar\Gamma_{ab}^2}\mathcal{E}^2}, \quad (3.50)$$

como encontrado em (3.11), (3.33) e (3.34) respectivamente.

Naturalmente eliminamos a variação da inversão atômica e polarização. Se tomarmos a de-

rivada de  $\tilde{\mathcal{P}}$  e  $\tilde{\mathcal{D}}$  como sendo nulas em (3.43-3.44) iremos obter o mesmo resultado encontrado em (3.49-3.50), este é o procedimento que comumente é feito para eliminar adiabaticamente as variações das grandezas atômicas, como irá ser mostrado na próxima seção. Assim como tivemos de considerar o intervalo de tempo em que o processo acontece, considerações sobre as constantes do sistema devem ser feitas na eliminação adiabática comum, como veremos na próxima seção.

Segundo (7) a teoria não é válida somente para acoplamento fraco entre o átomo e o campo, já que nenhuma condição foi imposta a esta variável. Vimos que para aplicarmos a eliminação adiabática às equações, foi necessário que uma das variáveis do sistema evoluísse muito mais rapidamente que outras, de modo que sua razão constante fosse muito maior. A condição de acoplamento fraco entre o campo eletromagnético e o átomo é necessária somente quando as variáveis atômicas são eliminadas, como será mostrado a seguir.

### **3.3 Eliminação adiabática e hamiltonianos efetivos**

Em vista da eliminação adiabática ser uma técnica própria para tratar equações diferenciais podemos utilizá-la na construção de hamiltonianos efetivos, através do uso da equação de Liouville-Von Neumann. No domínio da Óptica Quântica esta técnica foi introduzida recentemente para obtenção de hamiltonianos efetivos<sup>8</sup>, principalmente no contexto de íons aprisionados.

A engenharia de hamiltonianos, ou interações, é um campo de suma importância para a Óptica Quântica, interessante para teste da teoria quântica e principalmente para a informação quântica. Em (10) há um exemplo de construção de hamiltonianos efetivos utilizando a eliminação adiabática. Através da interação entre fônon e fóton diversos hamiltonianos são construídos. Dependendo do ajuste de parâmetros do sistema como intensidade de campos clássicos e dessintonias entre átomo e campos, o estado do campo na cavidade pode apresentar compressão em uma de suas quadraturas, ou do movimento vibracional do íon, e emaranhamento entre o íon e o campo eletromagnético.

Descreveremos três exemplos onde a eliminação adiabática é utilizada, segundo o processo descrito em (2) para determinar o hamiltoniano efetivo de sistemas que não dissipam energia, mas veremos que essa técnica pode ser expandida para problemas dissipativos, como utilizado em (13, 14). Aqui a eliminação adiabática será utilizada ao impor que a variação temporal de alguns dos elementos do operador densidade será mais lenta que a dos outros.

---

<sup>8</sup>Ver (8–12).

**Exemplo 3.3.1** Íon em um potencial harmônico

A seguir descreveremos como a eliminação adiabática pode ser usada para obter o hamiltoniano efetivo que descreve a interação dispersiva entre dois campos de radiação clássicos e um íon de três níveis.

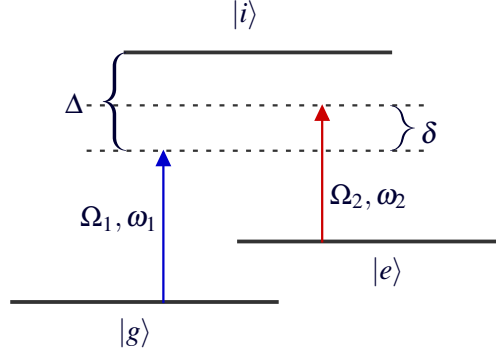


Figura 3.1: Dois campos clássicos interagindo dispersivamente com os níveis de energia internos de um íon.

O hamiltoniano do íon aprisionado em um potencial harmônico interagindo com dois campos clássicos, descrito na figura 3.1, é determinado pela energia de movimento do íon e a energia de interação dos campos com os níveis internos deste.

A energia do sistema livre é dada por:

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_g \sigma_{gg} + \hbar\omega_e \sigma_{ee} + \hbar\omega_i \sigma_{ii}, \quad (3.51)$$

onde  $\omega$  é a frequência de vibração do íon,  $\omega_g$ ,  $\omega_e$  e  $\omega_i$  são as frequências dos níveis  $|g\rangle$ ,  $|e\rangle$  e  $|i\rangle$  respectivamente,  $a$  e  $a^\dagger$  são os operadores de criação e destruição da excitação de movimento do íon, ou seja, operadores de criação e destruição de fônons.

A energia de interação do átomo com os campos clássicos é dada pela expressão:

$$V = \hbar[\Omega_1 e^{-i(k_1 \hat{x} - \omega_1 t)} \sigma_{gi} + \Omega_2 e^{-i(k_2 \hat{x} - \omega_2 t)} \sigma_{ei} + h.c.], \quad (3.52)$$

com  $\Omega_1 = e\mathcal{E}_1 \mu_{gi}$ ,  $\Omega_2 = e\mathcal{E}_2 \mu_{ei}$ ,  $\hat{x} \equiv \frac{\sqrt{2\hbar/m\omega}}{2}(a + a^\dagger)$  ( $m$  é a massa do íon e  $\omega$  sua frequência de oscilação)  $k_1, k_2$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são os números de onda e as frequências dos respectivos campos clássicos.

Somando a energia livre com a energia devido à interação dos campos clássicos com o íon, obtemos o seguinte hamiltoniano total do sistema:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_g \sigma_{gg} + \hbar\omega_e \sigma_{ee} + \hbar\omega_i \sigma_{ii} \\ &+ \hbar[\Omega_1 e^{-i(k_1 \hat{x} - \omega_1 t)} \sigma_{gi} + \Omega_2 e^{-i(k_2 \hat{x} - \omega_2 t)} \sigma_{ei} + h.c.]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Na representação de interação (3.53) é:

$$H_i = \hbar[\Omega_1 e^{-ik_1 \tilde{x}} e^{-i\Delta t} \sigma_{gi} + \Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} e^{i\Delta t} \sigma_{ig}] + \hbar[\Omega_2 e^{-ik_2 \tilde{x}} e^{-i(\Delta-\delta)t} \sigma_{ei} + \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} e^{i(\Delta-\delta)t} \sigma_{ie}], \quad (3.54)$$

com  $\Delta = \omega_i - \omega_g - \omega_1$ ,  $\Delta - \delta = \omega_i - \omega_e - \omega_2$  e  $\tilde{x} = \frac{\sqrt{2\hbar/m\omega}}{2}(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t})$ .

Aplicando a seguinte transformação temporal em (3.54), eliminamos a temporalidade explícita no hamiltoniano:

$$U_1 = e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar\Delta\sigma_{ii} + \hbar\delta\sigma_{ee})t}, \quad (3.55)$$

$$\tilde{H} = \hbar[\Omega_1 e^{-ik_1 \tilde{x}} \sigma_{gi} + \Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \sigma_{ig} + \Omega_2 e^{-ik_2 \tilde{x}} \sigma_{ei} + \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \sigma_{ie} + (\Delta\sigma_{ii} + \delta\sigma_{ee})]. \quad (3.56)$$

A equação de movimento para a matriz densidade na ausência de perdas é:

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}, \tilde{\rho}], \quad (3.57)$$

portanto, as equações que seus elementos obedecem são:

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ii} = -i[\Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{gi} + \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ei} - \Omega_1 e^{-ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ig} - \Omega_2 e^{-ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ie}], \quad (3.58)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ee} = -i[\Omega_2 e^{-ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ie} - \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ei}], \quad (3.59)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{gg} = -i[\Omega_1 e^{-ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ig} - \Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{gi}], \quad (3.60)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ie} = -i[\Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ge} + \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ee} + (\Delta - \delta)\tilde{\rho}_{ie} - \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ii}], \quad (3.61)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ig} = -i[\Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{gg} + \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{eg} + \Delta\tilde{\rho}_{ig} - \Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ii}], \quad (3.62)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ge} = -i[\Omega_1 e^{-ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ie} - \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{gi} - \delta\tilde{\rho}_{ge}], \quad (3.63)$$

onde  $\tilde{\rho}_{jk} = \langle j|\tilde{\rho}|k\rangle$  e  $\tilde{\rho}_{kj} = (\tilde{\rho}_{jk})^*$ .

Se impusermos a condição de que  $|\Delta| \gg |\Omega_1|, |\Omega_2|, |\delta|$ , garantimos o regime de forte dessintonia de modo que os campos clássicos dificilmente induzirão transições entre os níveis  $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  e  $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ , dessa forma os elementos  $\rho_{ie}$  e  $\rho_{ig}$  são constantes<sup>9</sup>. Portanto, podemos escrever  $\tilde{\rho}_{ie}$  e  $\tilde{\rho}_{ig}$  como:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{ie}(t) &= \tilde{\rho}_{ie}(0) \cong -\frac{1}{\Delta}(\Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ge} + \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ee} - \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ii}) \\ \tilde{\rho}_{ig}(t) &= \tilde{\rho}_{ig}(0) \cong -\frac{1}{\Delta}[\Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{gg} + \Omega_2 e^{ik_2 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{eg} - \Omega_1 e^{ik_1 \tilde{x}} \tilde{\rho}_{ii}]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Substituindo (3.64) em (3.58)

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ii} = 0. \quad (3.65)$$

<sup>9</sup>Ver apêndice C.

Então se  $\tilde{\rho}_{ii}(0) = 0 \rightarrow \tilde{\rho}_{ii}(t) = 0$ :

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ee} = -i \left[ \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{-i(k_2 - k_1)\tilde{x}} \tilde{\rho}_{ge} - \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{i(k_2 - k_1)\tilde{x}} \tilde{\rho}_{eg} \right], \quad (3.66)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{gg} = -i \left[ \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{i(k_2 - k_1)\tilde{x}} \tilde{\rho}_{eg} - \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{-i(k_2 - k_1)\tilde{x}} \tilde{\rho}_{ge} \right], \quad (3.67)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ge} = i \left[ \left( \frac{\Omega_1^2}{\Delta} - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} - \delta \right) \tilde{\rho}_{ge} + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{i(k_2 - k_1)\tilde{x}} \tilde{\rho}_{ee} - \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{i(k_2 - k_1)\tilde{x}} \tilde{\rho}_{gg} \right]. \quad (3.68)$$

O próximo passo consiste em comparar as equações (3.66-3.68) com as novas equações de movimento geradas a partir de uma equação geral,

$$\dot{\rho}' = -\frac{i}{\hbar} [H', \rho'], \quad (3.69)$$

com  $H'$  sendo o hamiltoniano mais geral possível para o sistema, já desconsiderando o nível  $|i\rangle$ , uma vez que assumimos  $\tilde{\rho}_{ii}(0) = 0$ ,

$$H' = \hbar\alpha(\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \hbar\beta\sigma_{ge} + \hbar\beta^*\sigma_{eg}. \quad (3.70)$$

Gerando equações de movimento para os elementos  $\rho'_{gg}, \rho'_{ee}$  e  $\rho'_{ge}$  utilizando (3.69), temos:

$$\dot{\rho}'_{ee} = -i(\beta^*\rho'_{ge} - \beta\rho'_{eg}), \quad (3.71)$$

$$\dot{\rho}'_{gg} = -i(\beta\rho'_{eg} - \beta^*\rho'_{ge}), \quad (3.72)$$

$$\dot{\rho}'_{ge} = -i(-2\alpha\rho'_{ge} + \beta\rho'_{ee} - \beta\rho'_{gg}), \quad (3.73)$$

identificando (3.71-3.73) com (3.66-3.68)

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_1^2}{\Delta} - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} - \delta \right), \\ \beta &= \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{i(k_2 - k_1)\tilde{x}}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

e portanto

$$H' = -\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\Omega_1^2}{\Delta} - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} - \delta \right) (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \hbar \left[ \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{i(k_2 - k_1)\tilde{x}} \sigma_{ge} + h.c. \right]. \quad (3.75)$$



Levando  $H'$  para a representação de Schrödinger o hamiltoniano final é

$$\begin{aligned}
H_{\text{ef}} = & \hbar\omega a^\dagger a + \hbar \left[ \omega_g + \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_1^2}{\Delta} - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} - \delta \right) \right] \sigma_{gg} \\
& + \hbar \left[ \omega_e - \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_1^2}{\Delta} - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} + \frac{\delta}{2} \right) \right] \sigma_{ee} + \hbar(\omega_i - \Delta) \sigma_{ii} \\
& + \hbar \left[ \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{i[k_{21}x + (\omega_1 - \omega_2)t]} \sigma_{ge} + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} e^{-i[k_{21}x + (\omega_1 - \omega_2)t]} \sigma_{eg} \right], \quad (3.76)
\end{aligned}$$

onde  $k_{21} = k_2 - k_1$ .

### Exemplo 3.3.2 Interação dispersiva

O hamiltoniano de um campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis, como na figura a baixo, é descrito pelo modelo de Jaynes-Cumming:

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar(ga\sigma_{eg} + g^* a^\dagger \sigma_{ge}). \quad (3.77)$$

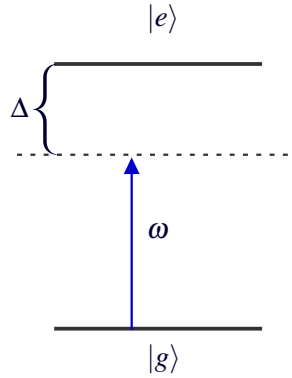


Figura 3.2: Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis.

Na representação de interação o hamiltoniano (3.77) é:

$$H_i = \hbar[ga\sigma_{eg} \exp(i\Delta t) + g^* a^\dagger \sigma_{ge} \exp(-i\Delta t)], \quad (3.78)$$

onde  $\Delta = \omega_0 - \omega_a$ .

Para que o hamiltoniano não contenha dependência temporal explícita aplicaremos a seguinte transformação

$$U_1 = e^{i\frac{\Delta}{2}t\sigma_z}, \quad (3.79)$$

obtendo o seguinte hamiltoniano transformado:

$$\tilde{H} = \hbar \left( ga\sigma_{eg} + g^* a^\dagger \sigma_{ge} \right) + \hbar \frac{\Delta}{2} \sigma_z. \quad (3.80)$$

As equações de movimento para os elementos da matriz densidade na ausência de perdas são:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\rho}}_{gg} &= -i(g^* a^\dagger \tilde{\rho}_{eg} - g \tilde{\rho}_{ge} a), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= -i(g a \tilde{\rho}_{ge} - g^* \tilde{\rho}_{eg} a^\dagger), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ge} &= -ig^*(a^\dagger \tilde{\rho}_{ee} - \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger) + i\Delta \tilde{\rho}_{ge},\end{aligned}\quad (3.81)$$

para  $|\Delta| \gg |g|\sqrt{\bar{n}+1}$ , onde  $\bar{n}$  é o número médio de fótons na cavidade,

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ge} \simeq 0 \Rightarrow \tilde{\rho}_{ge} = \frac{g^*}{\Delta}(a^\dagger \tilde{\rho}_{ee} - \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger), \quad (3.82)$$

substituindo (3.82) em (3.81)

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\rho}}_{gg} &= i\frac{|g|^2}{\Delta}[a^\dagger a, \tilde{\rho}_{gg}], \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= -i\frac{|g|^2}{\Delta}[a^\dagger a, \tilde{\rho}_{ee}].\end{aligned}\quad (3.83)$$

Podemos determinar um hamiltoniano mais geral possível, que consiga descrever as interações descritas em (3.83),

$$H' = \alpha(a, a^\dagger)\sigma_{gg} + \beta(a, a^\dagger)\sigma_{ee} + \gamma_1(a, a^\dagger)\sigma_{ge} + \gamma_2(a, a^\dagger)\sigma_{eg}. \quad (3.84)$$

Utilizando a relação (3.57) encontramos as equações de movimento do operador densidade para o hamiltoniano geral:

$$\dot{\rho}'_{gg} = -\frac{i}{\hbar}([\alpha, \rho'_{gg}] + \gamma_1 \rho'_{eg} - \gamma_2 \rho'_{ge}), \quad (3.85)$$

$$\dot{\rho}'_{ee} = -\frac{i}{\hbar}([\beta, \rho'_{ee}] + \gamma_2 \rho'_{ge} - \gamma_1 \rho'_{eg}), \quad (3.86)$$

$$\dot{\rho}'_{ge} = -\frac{i}{\hbar}(\alpha \rho'_{ge} - \rho'_{ge} \beta + \gamma_1 \rho'_{ee} - \rho'_{gg} \gamma_1), \quad (3.87)$$

Identificando (3.85-3.87) com as equações em (3.83):

$$\begin{aligned}\alpha &= -\hbar\frac{|g|^2}{\Delta}a^\dagger a, \\ \beta &= \hbar\frac{|g|^2}{\Delta}a^\dagger a, \\ \gamma_1 &= 0, \\ \gamma_2 &= 0.\end{aligned}\quad (3.88)$$

Retornando à representação de Schrödinger o hamiltoniano encontrado é:

$$H_{ef} = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\left(\frac{\omega_0}{2} + \frac{|g|^2}{\Delta}a^\dagger a - \frac{\Delta}{2}\right)\sigma_z. \quad (3.89)$$

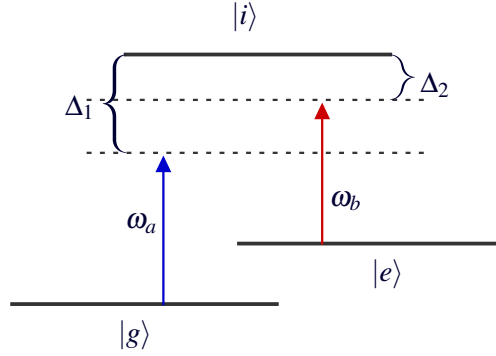
**Exemplo 3.3.3** Átomo de três níveis interagindo com dois campos quânticos

Figura 3.3: Dois campos quânticos interagindo dispersivamente com um átomo de três níveis.

Utilizando o modelo de Jaynes-Cummings o hamiltoniano do sistema, como representado na figura acima, é:

$$H = H_0 + V, \quad (3.90)$$

$$H_0 = \hbar\omega_g\sigma_{gg} + \hbar\omega_i\sigma_{ii} + \hbar\omega_e\sigma_{ee} + \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b, \quad (3.91)$$

$$V = \hbar(g_a\sigma_{ig}a + g_a^*a^\dagger\sigma_{gi}) + \hbar(g_b\sigma_{ie}b + g_b^*b^\dagger\sigma_{ei}). \quad (3.92)$$

onde  $\omega_g$ ,  $\omega_i$  e  $\omega_e$  são as frequências dos níveis  $|g\rangle$ ,  $|i\rangle$  e  $|e\rangle$  respectivamente e  $\omega_a$  e  $\omega_b$  são as frequências dos campos  $a$  e  $b$ .

Levando o hamiltoniano para a representação de interação:

$$H_i = \hbar(g_a\sigma_{ig}ae^{i\Delta_1 t} + g_a^*a^\dagger\sigma_{gi}e^{-i\Delta_1 t}) + \hbar(g_b\sigma_{ie}be^{i\Delta_2 t} + g_b^*b^\dagger\sigma_{ei}e^{-i\Delta_2 t}), \quad (3.93)$$

com  $\Delta_1 = \omega_i - \omega_g - \omega_a$  e  $\Delta_2 = \omega_i - \omega_e - \omega_b$ .

Aplicando a seguinte transformação unitária em (3.93):

$$\tilde{U}_1 = \exp[-i(\Delta_1\sigma_{gg} + \Delta_2\sigma_{ee})t], \quad (3.94)$$

para que o hamiltoniano não tenha dependência explícita no tempo,

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \tilde{U}_1^\dagger H_i \tilde{U}_1 - \hbar(\Delta_1\sigma_{gg} + \Delta_2\sigma_{ee}) \\ &= \hbar(g_a\sigma_{ig}a + g_a^*a^\dagger\sigma_{gi}) + \hbar(g_b\sigma_{ie}b + g_b^*b^\dagger\sigma_{ei}) - \hbar(\Delta_1\sigma_{gg} + \Delta_2\sigma_{ee}). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Segundo (3.57) as equações de movimento para os elementos da matriz densidade na ausência de perdas são:

$$\dot{\tilde{\rho}}_{gg} = -i(g_a^*a^\dagger\tilde{\rho}_{ig} - g_a\tilde{\rho}_{gi}a), \quad (3.96)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ee} = -i(g_b^*b^\dagger\tilde{\rho}_{ie} - g_b\tilde{\rho}_{ei}b), \quad (3.97)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ii} = -i(g_a a \tilde{\rho}_{gi} - g_a^* \tilde{\rho}_{ig} a^\dagger) - i(g_b b \tilde{\rho}_{ei} - g_b^* \tilde{\rho}_{ie} b^\dagger), \quad (3.98)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{gi} = -i g_a^* (a^\dagger \tilde{\rho}_{ii} - \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger) + i g_b^* \tilde{\rho}_{ge} b^\dagger + i \Delta_1 \tilde{\rho}_{gi}, \quad (3.99)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ei} = -i g_b^* (b^\dagger \tilde{\rho}_{ii} - \tilde{\rho}_{ee} b^\dagger) + i g_a^* \tilde{\rho}_{eg} a^\dagger + i \Delta_2 \tilde{\rho}_{ei}, \quad (3.100)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ge} = -i g_a^* a^\dagger \tilde{\rho}_{ie} + i g_b \tilde{\rho}_{gi} b + i(\Delta_1 - \Delta_2) \tilde{\rho}_{ge}. \quad (3.101)$$

Para  $|\Delta_1|, |\Delta_2| \gg |g_a| \sqrt{\bar{n}_a + 1}, |g_b| \sqrt{\bar{n}_b + 1}$  e  $|\Delta_1| - |\Delta_2| \ll |g_a| \sqrt{\bar{n}_a + 1}, |g_b| \sqrt{\bar{n}_b + 1}$ , onde  $\bar{n}_i$  é o número médio de fótons do modo  $i = \{a, b\}$ ,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\rho}}_{gi} \simeq 0 \Rightarrow \tilde{\rho}_{gi} = \frac{g_a^*}{\Delta_1} (a^\dagger \tilde{\rho}_{ii} - \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger) - \frac{g_b^*}{\Delta_1} \tilde{\rho}_{ge} b^\dagger, \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ei} \simeq 0 \Rightarrow \tilde{\rho}_{ei} = \frac{g_b^*}{\Delta_2} (b^\dagger \tilde{\rho}_{ii} - \tilde{\rho}_{ee} b^\dagger) - \frac{g_a^*}{\Delta_2} \tilde{\rho}_{eg} a^\dagger. \end{cases} \quad (3.102)$$

Quando impomos  $|\Delta_1|, |\Delta_2| \gg |g_a| \sqrt{\bar{n}_a + 1}, |g_b| \sqrt{\bar{n}_b + 1}$ , estamos assumindo um regime de forte dessintonia de modo que as transições  $|i\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  e  $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  dificilmente ocorram.

Substituindo (3.102) nas equações (3.96-3.101):

$$\dot{\tilde{\rho}}_{gg} = -i \frac{|g_a|^2}{\Delta_1} [\tilde{\rho}_{gg}, a^\dagger a] - i \left( \frac{g_a g_b^*}{\Delta_1} \tilde{\rho}_{ge} b^\dagger a - \frac{g_a^* g_b}{\Delta_1} a^\dagger b \tilde{\rho}_{eg} \right), \quad (3.103)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ee} = -i \frac{|g_b|^2}{\Delta_2} [\tilde{\rho}_{ee}, b^\dagger b] - i \left( \frac{g_a^* g_b}{\Delta_2} \tilde{\rho}_{eg} a^\dagger b - \frac{g_a g_b^*}{\Delta_2} b^\dagger a \tilde{\rho}_{ge} \right), \quad (3.104)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ii} \simeq -i \frac{|g_a|^2}{\Delta_1} [a^\dagger a, \tilde{\rho}_{ii}] - i \frac{|g_b|^2}{\Delta_2} [b^\dagger b, \tilde{\rho}_{ii}], \quad (3.105)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ge} \simeq -i \left( \frac{g_a^* g_b}{\Delta_1} \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger b - \frac{g_a^* g_b}{\Delta_2} a^\dagger b \tilde{\rho}_{ee} \right) - i \left( \frac{|g_b|^2}{\Delta_1} \tilde{\rho}_{ge} b^\dagger b - \frac{|g_a|^2}{\Delta_2} a^\dagger a \tilde{\rho}_{ge} \right). \quad (3.106)$$

Vemos que a população nos autoestados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  não dependem do nível  $|i\rangle$  estar ocupado ou não, ou seja, efetivamente a dinâmica atômica é composta por transições entre os dois primeiros estados.

Podemos determinar um hamiltoniano mais geral possível, que consiga descrever as interações descritas pelas equações (3.103-3.106),

$$\begin{aligned} H' &= \alpha(a, a^\dagger, b, b^\dagger) \sigma_{gg} + \beta(a, a^\dagger, b, b^\dagger) \sigma_{ee} + \gamma(a, a^\dagger, b, b^\dagger) \sigma_{ii} \\ &+ \Phi_1(a, a^\dagger, b, b^\dagger) \sigma_{ge} + \Phi_2(a, a^\dagger, b, b^\dagger) \sigma_{eg}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Utilizando a relação (3.57) encontramos as equações de movimento do operador densidade para o hamiltoniano geral:

$$\dot{\rho}'_{gg} = -\frac{i}{\hbar} ([\alpha, \rho'_{gg}] + \Phi_1 \rho'_{eg} - \rho'_{ge} \Phi_2), \quad (3.108)$$

$$\dot{\rho}'_{ee} = -\frac{i}{\hbar}([\beta, \rho'_{ee}] + \Phi_2 \rho'_{ge} - \rho'_{eg} \Phi_1), \quad (3.109)$$

$$\dot{\rho}'_{ii} = -\frac{i}{\hbar}[\gamma, \rho'_{ii}], \quad (3.110)$$

$$\dot{\rho}'_{ge} = -\frac{i}{\hbar}(\alpha \rho'_{ge} - \rho'_{ge} \beta + \Phi_1 \rho'_{ee} - \rho'_{gg} \Phi_1). \quad (3.111)$$

Considerando  $|\Delta_2| \approx |\Delta_1|$ , podemos identificar (3.108-3.111) com as equações (3.103-3.106):

$$\begin{aligned} \alpha &= -\hbar \frac{|g_a|^2}{\Delta_1} a^\dagger a, \\ \Phi_1 &= -\hbar \frac{g_a^* g_b}{\Delta_1} a^\dagger b, \\ \Phi_2 &= -\hbar \frac{g_a g_b^*}{\Delta_1} b^\dagger a, \\ \beta &= -\hbar \frac{|g_b|^2}{\Delta_1} b^\dagger b, \\ \gamma &= \hbar \left( \frac{|g_a|^2}{\Delta_1} a^\dagger a + \frac{|g_b|^2}{\Delta_1} b^\dagger b \right), \end{aligned} \quad (3.112)$$

de modo que o hamiltoniano na representação de Schrödinger é:

$$\begin{aligned} H &= \hbar \omega_a a^\dagger a + \hbar \omega_b b^\dagger b + \hbar \left( \omega_g + \Delta_1 - \frac{|g_a|^2}{\Delta_1} a^\dagger a \right) \sigma_{gg} + \hbar \left( \omega_e + \Delta_2 - \frac{|g_b|^2}{\Delta_1} b^\dagger b \right) \sigma_{ee} \\ &+ \hbar \left( \omega_i + \frac{|g_a|^2}{\Delta_1} a^\dagger a + \frac{|g_b|^2}{\Delta_1} b^\dagger b \right) \sigma_{ii} - \hbar \left( \frac{g_a^* g_b}{\Delta_1} a^\dagger b \sigma_{ge} + \frac{g_a g_b^*}{\Delta_1} b^\dagger a \sigma_{eg} \right). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Com o uso da aproximação  $|\Delta_1|, |\Delta_2| \gg |g_a| \sqrt{\bar{n}_a + 1}, |g_b| \sqrt{\bar{n}_b + 1}$ , conseguimos determinar um regime quase estático de transição entre os níveis atômicos  $|i\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  e  $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , desacoplando as equações de movimento para tais transições.

Um fato interessante provindo deste método é que ele gera ambiguidades na determinação do hamiltoniano efetivo do sistema. Isso acontece porque utilizamos operações com comutadores para determinar o hamiltoniano que melhor descreve a interação. No exemplo 3.3.2, por exemplo, poderíamos ter obtido:

$$H_{ef} = \hbar \omega_a a^\dagger a + \hbar \left( \frac{\omega_0}{2} + \frac{|g|^2}{\Delta} a^\dagger a - \frac{\Delta}{2} \right) \sigma_z + \frac{|g|^2}{\Delta} \sigma_{ee}. \quad (3.114)$$

O tipo de hamiltoniano acima prevê um deslocamento, "shift", de energia no nível  $|e\rangle$ , fato o qual em (15) o autor utiliza para gerar estados maximamente emaranhados entre dois átomos idênticos e com isso realizar portas lógicas CNOT e teleportação quântica em uma cavidade dispersiva.

Como visto nos exemplos (3.3.1-3.3.3), aplicamos a eliminação adiabática na equação de

movimento do operador densidade para que pudéssemos construir o hamiltoniano efetivo de um sistema com fraca interação entre campos clássicos/quânticos e átomo, vimos que desta forma o estado mais excitado do átomo pôde ser adiabaticamente eliminado. Em resumo, o método descrito neste capítulo é descrito pelos seguintes passos:

- i. Determinar o hamiltoniano do sistema interagente;
- ii. Encontrar a equação de movimento para os elementos da matriz densidade através da equação de Liouville-Von Neumann;
- iii. Aplicar a eliminação adiabática, desprezando-se algumas das variações dos elementos da matriz densidade;
- iv. Construir um hamiltoniano mais geral possível e achar a equação de movimento para os novos elementos da matriz densidade;
- v. Comparar os elementos gerados em (iii) com os gerados em (iv);
- vi. Determinar o hamiltoniano efetivo utilizando v.

### 3.4 Sistemas dissipativos

A técnica utilizada para a construção do hamiltoniano efetivo na seção 3.3 pode contemplar sistemas dissipativos, pois é baseada em aproximações feitas na equação de movimento do operador densidade, onde geralmente os efeitos de perda são adicionados.

Exemplos interessantes do emprego da eliminação adiabática feita na equação de Liouville-Von Neumann estão em (14, 16). Nestes trabalhos utiliza-se esta aproximação para a criação de um reservatório artificial, de modo que alguns estados do sistema sejam protegidos da decoerência<sup>10</sup>. Em (18) esta mesma técnica é utilizada para construir um hamiltoniano efetivo tipo Jaynes-Cummings mais anti-Jaynes-Cummings, por meio do qual os autores constroem um reservatório artificial onde um estado comprimido deslocado do campo da cavidade é protegido da decoerência.

Decoerência é um fenômeno onde a superposição de estados é perdida pela interação com o meio ambiente, por isso a importância de proteger os estados de sua ação. A decoerência é um dos assuntos mais relevantes em Óptica Quântica.

---

<sup>10</sup>Ver por exemplo (17)

No intuito de demonstrar a simplicidade do método para sistemas abertos, ou dissipativos, encontraremos o hamiltoniano efetivo de um átomo de dois níveis, que apresenta decaimento espontâneo, interagindo com um campo eletromagnético.

**Exemplo 3.4.1** *Átomo de dois níveis com decaimento espontâneo*

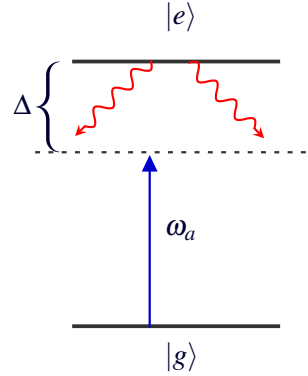


Figura 3.4: Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis que apresenta decaimento espontâneo.

O hamiltoniano do sistema descrito pela figura acima é:

$$H = H_0 + V, \quad (3.115)$$

a energia livre do átomo + campo é:

$$H_0 = \hbar \frac{\omega_0}{2} (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \hbar \omega_a a^\dagger a, \quad (3.116)$$

e a energia de interação:

$$V = \hbar g (\sigma_{eg} a + \sigma_{ge} a^\dagger). \quad (3.117)$$

Na representação de interação (3.115) é dada por:

$$H_i = \hbar g (e^{i(\omega_0 - \omega_a)t} \sigma_{eg} a + e^{-i(\omega_0 - \omega_a)t} \sigma_{ge} a^\dagger). \quad (3.118)$$

Podemos realizar uma mudança de base em (3.118) para que o hamiltoniano não dependa explicitamente do tempo, o operador responsável por esta transformação será:

$$U_1 = e^{i \frac{\Delta}{2} (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) t}, \quad (3.119)$$

com  $\Delta = \omega_0 - \omega_a$  e o hamiltoniano transformado dado por:

$$\tilde{H} = \hbar g (\sigma_{eg} a + \sigma_{ge} a^\dagger) + \hbar \frac{\Delta}{2} (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}). \quad (3.120)$$

Em muitas abordagens em Óptica Quântica o tratamento da dissipação de energia se dá na equação de movimento do operador densidade, esse fato advém de considerações existentes na mecânica clássica sobre a distribuição de microestados acessíveis ao sistema, o teorema de Liouville.

O teorema de Liouville descreve a conservação da distribuição dos pontos, configurações, a que o sistema pode ocupar no espaço de fase:

$$\frac{d\rho}{dt} = \{\rho, H\} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad (3.121)$$

sendo a distribuição dos pontos incompressível.

A operação  $\{\rho, H\}$ <sup>11</sup>, o parêntese de Poisson das duas variáveis, pode ser representada por um operador clássico agindo na distribuição, da seguinte forma:

$$L\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (3.122)$$

que é conhecido como Liouvilliano.

A representação de (3.121) para um sistema quântico dissipativo, denominada equação de Liouville-Von Neumann, é:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}(\rho), \quad (3.123)$$

onde  $\rho, H$  e  $\mathcal{L}$  são os operadores densidade, hamiltoniano e Liouvilliano respectivamente,  $[H, \rho] = H\rho - \rho H$  e  $\mathcal{L}(\rho) \equiv -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ .

A forma do Liouvilliano  $\mathcal{L}(\rho)$  é encontrada quando conseguimos simular a perda de energia do sistema de interesse para o meio ambiente, por isso a dificuldade em determinar um Liouvilliano geral. Mas a forma do Liouvilliano é conhecida:

$$\mathcal{L}(\rho) = -\sum_i \gamma_i ([J_i, \rho J_i^\dagger] + [J_i \rho, J_i^\dagger]), \quad (3.124)$$

o índice  $i$  representa o  $i$ -ésimo mecanismo de dissipação,  $\gamma_i$  é a razão da perda de energia para o meio ambiente e  $J_i$  é o operador responsável pelo tipo de perda.

Um átomo de dois níveis que apresenta decaimento espontâneo tem o seguinte Liouvilliano:

$$\mathcal{L}(\rho) = -\frac{\gamma}{2}(\sigma_+ \sigma_- \rho + \rho \sigma_+ \sigma_- - 2\sigma_- \rho \sigma_+). \quad (3.125)$$

onde  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$  e  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ .

---

<sup>11</sup>  $\{A, B\} = \sum \left( \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right)$ , onde  $A = A(q, p, t)$ ,  $B = B(q, p, t)$  e  $q, p$  são variáveis canônicas.



Para o sistema descrito neste exemplo a equação de Liouville-Von Neumann é:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}, \tilde{\rho}] - \frac{\gamma}{2}(\sigma_+ \sigma_- \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \sigma_+ \sigma_- - 2\sigma_- \tilde{\rho} \sigma_+). \quad (3.126)$$

com  $\tilde{\rho} = U_1^\dagger U_0^\dagger \rho U_0 U_1$ ,  $U_0 = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$  e  $U_1 = e^{i\frac{\Delta}{2}(\sigma_{ee} - \sigma_{gg})t}$ .

As equações de movimento geradas por (3.126) são:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= -ig(a\tilde{\rho}_{ge} - \tilde{\rho}_{eg}a^\dagger) - \gamma\tilde{\rho}_{ee}, \\ \dot{\tilde{\rho}}_{gg} &= -ig(a^\dagger\tilde{\rho}_{eg} - \tilde{\rho}_{ge}a) + \gamma\tilde{\rho}_{ee}, \\ \dot{\tilde{\rho}}_{eg} &= -ig(a\tilde{\rho}_{gg} - \tilde{\rho}_{ee}a) - i\Delta\tilde{\rho}_{eg} - \frac{\gamma}{2}\tilde{\rho}_{eg}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

para  $|\Delta| \gg \gamma, g\sqrt{\bar{n}}$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{eg} \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\rho}_{eg} = -\frac{g}{(\Delta - i\frac{\gamma}{2})}(a\tilde{\rho}_{gg} - \tilde{\rho}_{ee}a). \quad (3.128)$$

Substituindo (3.128) em (3.127):

$$\dot{\tilde{\rho}}_{ee} = -i\frac{g^2}{(\Delta - i\frac{\gamma}{2})}[aa^\dagger, \tilde{\rho}_{ee}] - \gamma\tilde{\rho}_{ee}, \quad (3.129)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{gg} = i\frac{g^2}{(\Delta - i\frac{\gamma}{2})}[a^\dagger a, \tilde{\rho}_{gg}] + \gamma\tilde{\rho}_{ee}. \quad (3.130)$$

Seguindo o mesmo procedimento da seção (3.3), será proposto um operador densidade geral:

$$\dot{\rho}' = -\frac{i}{\hbar}[H', \rho'] + \mathcal{L}(\rho'), \quad (3.131)$$

que mantém a mesma dinâmica do Liouvilliano (3.125)

$$\mathcal{L}(\rho') = -\frac{\Gamma}{2}(\sigma_+ \sigma_- \rho' + \rho' \sigma_+ \sigma_- - 2\sigma_- \rho' \sigma_+). \quad (3.132)$$

Supondo que o hamiltoniano seja o mais geral possível:

$$H' = \alpha(a, a^\dagger)\sigma_{gg} + \beta(a, a^\dagger)\sigma_{ee}, \quad (3.133)$$

substituindo (3.133) e (3.132) em (3.131) e calculando os respectivos elementos da equação,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}'_{ee} &= -\frac{i}{\hbar}(\beta\rho'_{ee} - \rho'_{ee}\beta) - \Gamma\rho'_{ee}, \\ \dot{\rho}'_{gg} &= -\frac{i}{\hbar}(\alpha\rho'_{gg} - \rho'_{gg}\alpha) + \Gamma\rho'_{ee}, \end{aligned} \quad (3.134)$$

temos

$$\begin{aligned}\alpha &= -\hbar \frac{g^2}{(\Delta - i\frac{\gamma}{2})} a^\dagger a, \\ \beta &= \hbar \frac{g^2}{(\Delta - i\frac{\gamma}{2})} a a^\dagger, \\ \Gamma &= \gamma.\end{aligned}\tag{3.135}$$

Substituindo (3.135) em (3.133) e levando para a representação de Schrödinger

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a - \hbar \left( \frac{\omega_0}{2} + \frac{g^2}{(\Delta - i\frac{\gamma}{2})} a^\dagger a \right) \sigma_{gg} + \hbar \left( \frac{\omega_0}{2} + \frac{g^2}{(\Delta - i\frac{\gamma}{2})} (a^\dagger a - 1) \right) \sigma_{ee}.\tag{3.136}$$

### 3.5 Uma técnica incorreta

Diferentemente do método descrito na seção 3.3, há outras técnicas que utilizam a eliminação adiabática para encontrar hamiltonianos efetivos. Nesta seção iremos comentar o método utilizado em (19) e adotado por exemplo em (20–22). O hamiltoniano efetivo é encontrado através do procedimento de aplicar a eliminação adiabática à equação de movimento dos operadores de transição atômica do hamiltoniano, e então substituí-los no hamiltoniano de partida, como no exemplo a seguir.

#### Exemplo 3.5.1 Átomo de três níveis interagindo com dois campos quânticos

Utilizando um dos sistemas da seção 3.3, um átomo de três níveis interagindo com dois campos quânticos, aplicaremos o método proposto em (19).

O hamiltoniano da interação é:

$$H = H_0 + V,\tag{3.137}$$

$$H_0 = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar\omega_g \sigma_{gg} + \hbar\omega_e \sigma_{ee} + \hbar\omega_i \sigma_{ii},\tag{3.138}$$

$$V = \hbar(g_a^* a^\dagger \sigma_{gi} + g_a \sigma_{ig} a) + \hbar(g_b^* b^\dagger \sigma_{ei} + g_b \sigma_{ie} b).\tag{3.139}$$

Levando (3.137) para a representação de interação:

$$H_i = \hbar(g_a^* a^\dagger \sigma_{gi} e^{-i\Delta_1 t} + g_a \sigma_{ig} a e^{i\Delta_1 t}) + \hbar(g_b^* b^\dagger \sigma_{ei} e^{-i\Delta_2 t} + g_b \sigma_{ie} b e^{i\Delta_2 t}),\tag{3.140}$$

onde  $\Delta_1 = \omega_i - \omega_g - \omega_a$  e  $\Delta_2 = \omega_i - \omega_e - \omega_b$ .

Utilizando a transformação de base:

$$U_1(t) = \exp[-it(\Delta_2 \sigma_{ee} + \Delta_1 \sigma_{gg})],\tag{3.141}$$

o hamiltoniano no novo referencial é:

$$\tilde{H} = \hbar(g_a^* a^\dagger \sigma_{gi} + g_a \sigma_{ig} a) + \hbar(g_b^* b^\dagger \sigma_{ei} + g_b \sigma_{ie} b) - \hbar(\Delta_2 \sigma_{ee} + \Delta_1 \sigma_{gg}). \quad (3.142)$$

Os operadores do átomo na representação de interação possuem as equações de movimento:

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{jk} = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{\sigma}_{jk}, \tilde{H}], \quad (3.143)$$

onde  $\tilde{\sigma}_{jk}$  são os operadores na nova representação, determinados pela transformação:

$$\tilde{\sigma}_{jk} = U_1^\dagger(t) U_0^\dagger(t) \sigma_{jk} U_0(t) U_1(t), \quad (3.144)$$

portanto

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ig} &= \sigma_{ig} e^{i\omega_a t}, \tilde{\sigma}_{ie} = \sigma_{ie} e^{i\omega_b t}, \tilde{\sigma}_{eg} = \sigma_{eg} e^{i(\omega_a - \omega_b)t}, \\ \tilde{a} &= e^{-i\omega_a t} a, \tilde{a}^\dagger = e^{i\omega_a t} a^\dagger, \\ \tilde{b} &= e^{-i\omega_b t} b, \tilde{b}^\dagger = e^{i\omega_b t} b^\dagger. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Substituindo (3.145) e (3.144) em (3.143):

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ig} = -i[g_a^* \tilde{a}^\dagger (\tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\sigma}_{gg}) - g_b^* \tilde{b}^\dagger \tilde{\sigma}_{eg} - \Delta_1 \tilde{\sigma}_{ig}], \quad (3.146)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ie} = -i[g_b^* \tilde{b}^\dagger (\tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\sigma}_{ee}) - g_a^* \tilde{a}^\dagger \tilde{\sigma}_{ge} - \Delta_2 \tilde{\sigma}_{ie}], \quad (3.147)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ii} = -i[(-g_a^* \tilde{a}^\dagger \tilde{\sigma}_{gi} + g_a \tilde{\sigma}_{ig} \tilde{a}) + (-g_b^* \tilde{b}^\dagger \tilde{\sigma}_{ei} + g_b \tilde{\sigma}_{ie} \tilde{b})], \quad (3.148)$$

para  $|\Delta_1| \gg |g_a| \sqrt{\bar{n}_a + 1}$  e  $|\Delta_2| \gg |g_b| \sqrt{\bar{n}_b + 1}$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{ig} \rightarrow 0 &\Rightarrow \tilde{\sigma}_{ig} = \frac{g_a^*}{\Delta_1} \tilde{a}^\dagger (\tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\sigma}_{gg}) - \frac{g_b^*}{\Delta_1} \tilde{b}^\dagger \tilde{\sigma}_{eg}, \\ \tilde{\sigma}_{gi} &= \frac{g_a}{\Delta_1} \tilde{a} (\tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\sigma}_{gg}) - \frac{g_b}{\Delta_1} \tilde{b} \tilde{\sigma}_{ge}, \\ \dot{\tilde{\sigma}}_{ie} \rightarrow 0 &\Rightarrow \tilde{\sigma}_{ie} = \frac{g_b^*}{\Delta_2} \tilde{b}^\dagger (\tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\sigma}_{ee}) - \frac{g_a^*}{\Delta_2} \tilde{a}^\dagger \tilde{\sigma}_{ge}, \\ \tilde{\sigma}_{ei} &= \frac{g_b}{\Delta_2} \tilde{b} (\tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\sigma}_{ee}) - \frac{g_a}{\Delta_2} \tilde{a} \tilde{\sigma}_{eg}, \end{aligned} \quad (3.149)$$

que substituindo em (3.148) gera:

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ii} = 0 \Rightarrow \tilde{\sigma}_{ii} = \sigma_{ii}. \quad (3.150)$$

Levando (3.149) para a representação de Schrödinger temos :

$$\begin{aligned} \sigma_{ig} &= \frac{g_a^*}{\Delta_1} a^\dagger (\sigma_{ii} - \sigma_{gg}) - \frac{g_b^*}{\Delta_1} b^\dagger \sigma_{eg}, \\ \sigma_{gi} &= \frac{g_a}{\Delta_1} a (\sigma_{ii} - \sigma_{gg}) - \frac{g_b}{\Delta_1} b \sigma_{ge}, \\ \sigma_{ie} &= \frac{g_b^*}{\Delta_2} b^\dagger (\sigma_{ii} - \sigma_{ee}) - \frac{g_a^*}{\Delta_2} a^\dagger \sigma_{ge}, \\ \sigma_{ei} &= \frac{g_b}{\Delta_2} b (\sigma_{ii} - \sigma_{ee}) - \frac{g_a}{\Delta_2} a \sigma_{eg}, \end{aligned} \quad (3.151)$$

substituindo (3.151) em (3.142) o hamiltoniano na representação de Schrödinger encontrado é:

$$\begin{aligned}
H_{ef} = & \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega b^\dagger b + \hbar \left( \omega_g + \Delta_1 - 2\frac{|g_a|^2}{\Delta_1} a^\dagger a \right) \sigma_{gg} + \hbar \left( \omega_e + \Delta_2 - 2\frac{|g_b|^2}{\Delta_2} b^\dagger b \right) \sigma_{ee} \\
& + \hbar \left( \omega_i + 2\frac{|g_a|^2}{\Delta_1} a^\dagger a + 2\frac{|g_b|^2}{\Delta_2} b^\dagger b \right) \sigma_{ii} - 2\hbar \left( \frac{g_a^* g_b}{\Delta_1} a^\dagger b \sigma_{ge} + \frac{g_a g_b^*}{\Delta_1} b^\dagger a \sigma_{eg} \right). \quad (3.152)
\end{aligned}$$

onde  $\frac{1}{\Delta_1} \approx \frac{1}{\Delta_2}$

Comparando (3.152) e (3.113) vemos que o valor encontrado do hamiltoniano efetivo nas diferentes aproximações não são iguais, há um fator "2" a mais em (3.152). Cálculos já conhecidos mostram que o hamiltoniano efetivo descrito pelo método proposto em (3.3) está correto. Vemos também que a técnica proposta nesta seção gerou operadores de transição que não comutam com operadores do campo,

$$\begin{aligned}
[\sigma_{ig}, a] &\neq 0, [\sigma_{ig}, a^\dagger] = 0, \\
[\sigma_{gi}, a] &= 0, [\sigma_{gi}, a^\dagger] \neq 0, \\
[\sigma_{ie}, a] &\neq 0, [\sigma_{ie}, a^\dagger] = 0, \\
[\sigma_{ei}, a] &= 0, [\sigma_{ei}, a^\dagger] \neq 0.
\end{aligned} \quad (3.153)$$

Esses resultados vêm a comprovar que a eliminação adiabática não é uma aproximação onde seja suficiente considerar a variação temporal de um operador nulo,  $\dot{\sigma}_{jk} \simeq 0$ , olhando somente para sua equação de movimento (3.146-3.148). O procedimento não permite observar a evolução completa do sistema, provavelmente por isso o problema dos comutadores em (3.153).

Como vimos nas seções anteriores, foi necessário que a evolução de algumas grandezas físicas, como a polarização, ou a variação de população de um determinado nível, fossem muito distintas de outras para que a eliminação adiabática fosse feita. Observamos, então que o método de eliminação adiabática faz considerações sobre as equações de movimentos de grandezas que são observadas, ou seja, é uma aproximação de perfil clássico.

## 3.6 O problema do referencial

Em (23), (10) os autores nos chamam atenção quanto a eliminação adiabática depender do referencial em que ela é feita, fato que pode trazer ambigüidade à aproximação. Nesta seção iremos discutir tal questão e verificar se conseguimos escolher transformações onde a eliminação nos ofereça hamiltonianos efetivos semelhantes. Inicialmente descreveremos o sistema ao qual (23) se refere.

O hamiltoniano do sistema representa a interação de um átomo de três níveis, na configura-

ção tipo  $\Lambda$ , com dois campos clássicos:

$$H = \hbar\omega_g\sigma_{gg} + \hbar\omega_e\sigma_{ee} + \hbar\omega_i\sigma_{ii} + \hbar[\Omega_1 e^{i\omega_1 t}\sigma_{gi} + \Omega_2 e^{i\omega_2 t}\sigma_{ei} + h.c.]. \quad (3.154)$$

Em um referencial girante, onde a transformação temporal é dada por:

$$U_1(t) = \exp\left\{-\frac{it}{\hbar}\left[\frac{\delta\hbar}{2}\sigma_{gg} + \left(\omega_1 - \omega_2 - \frac{\delta}{2}\right)\hbar\sigma_{ee} + \left(\omega_1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)\hbar\sigma_{ii}\right]\right\}, \quad (3.155)$$

o hamiltoniano transformado é:

$$\begin{aligned} H' &= \hbar\omega_g\sigma_{gg} + \hbar\omega_e\sigma_{ee} + \hbar\omega_i\sigma_{ii} \\ &+ \hbar[\Omega_1 e^{i\delta_1 t}\sigma_{gi} + \Omega_2 e^{i\delta_2 t}\sigma_{ei} + h.c.] \\ &- \hbar\left[\frac{\delta}{2}\sigma_{gg} + \left(\omega_1 - \omega_2 - \frac{\delta}{2}\right)\sigma_{ee} + \left(\omega_1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)\sigma_{ii}\right], \end{aligned} \quad (3.156)$$

$$\delta_1 = \omega_i - \omega_g - \omega_1, \delta_2 = \omega_i - \omega_e - \omega_2 \text{ e } \delta = \delta_1 - \delta_2.$$

Aplicando uma transformação temporal em (3.156) de modo que o hamiltoniano seja independente do tempo

$$\tilde{H} = \hbar\left(-\frac{\delta}{2}\sigma_{gg} + \frac{\delta}{2}\sigma_{ee} + \Delta\sigma_{ii}\right) + \hbar[\Omega_1\sigma_{gi} + \Omega_2\sigma_{ei} + h.c.], \quad (3.157)$$

$$\text{onde } \Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}.$$

Uma maneira usual de eliminar o estado excitado é aplicar a eliminação adiabática às equações de movimento geradas pela equação de Schrödinger. Escrevendo o estado do átomo como:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|g\rangle + \beta(t)|e\rangle + \gamma(t)|i\rangle, \quad (3.158)$$

encontramos as relações:

$$\begin{aligned} i\dot{\alpha} &= -\frac{\delta}{2}\alpha + \frac{\Omega_1}{2}\gamma \\ i\dot{\beta} &= \frac{\delta}{2}\beta + \frac{\Omega_2}{2}\gamma \\ i\dot{\gamma} &= \frac{\Omega_1}{2}\alpha + \frac{\Omega_2}{2}\beta + \Delta\gamma. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Impondo o regime de forte dessintonia de modo que  $\dot{\gamma} = 0$ , encontramos:

$$\gamma = -\frac{\Omega_1}{2\Delta}\alpha - \frac{\Omega_2}{2\Delta}\beta. \quad (3.160)$$

Agora, podemos considerar uma interação efetiva onde somente haja transições entre os

níveis  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , pois estão desacopladas de  $|i\rangle$ :

$$i\hbar \frac{d}{dt}(\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle) = H_{\text{ef}}(\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle), \quad (3.161)$$

obtendo então

$$H_{\text{ef}} = -\hbar \left[ \left( \frac{\delta}{2} + \frac{\Omega_1^2}{4\Delta} \right) \sigma_{gg} - \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\Omega_2^2}{4\Delta} \right) \sigma_{ee} + \frac{\Omega_1\Omega_2}{4\Delta} (\sigma_{ge} + \sigma_{eg}) \right]. \quad (3.162)$$

Se o mesmo problema for calculado em uma representação diferente, por exemplo em uma representação que acrescenta uma fase a  $|\psi(t)\rangle$ ,  $|\tilde{\psi}\rangle = e^{-i\eta\Delta t}|\psi\rangle$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{\alpha}(t)|g\rangle + \tilde{\beta}(t)|e\rangle + \tilde{\gamma}(t)|i\rangle, \quad (3.163)$$

encontramos as relações:

$$\begin{aligned} i\dot{\tilde{\alpha}} &= \left( \eta\Delta - \frac{\delta}{2} \right) \tilde{\alpha} + \frac{\Omega_1}{2} \tilde{\gamma} \\ i\dot{\tilde{\beta}} &= \left( \eta\Delta + \frac{\delta}{2} \right) \tilde{\beta} + \frac{\Omega_2}{2} \tilde{\gamma} \\ i\dot{\tilde{\gamma}} &= \frac{\Omega_1}{2} \tilde{\alpha} + \frac{\Omega_2}{2} \tilde{\beta} + (1 + \eta)\Delta \tilde{\gamma}, \end{aligned} \quad (3.164)$$

impondo  $\dot{\tilde{\gamma}} = 0$ , encontramos:

$$\tilde{\gamma} = -\frac{\Omega_1}{2\Delta(1+\eta)} \tilde{\alpha} - \frac{\Omega_2}{2\Delta(1+\eta)} \tilde{\beta}, \quad (3.165)$$

com  $\eta \neq -1$ .

Da forma com que encontramos (3.162) procedemos para construir o hamiltoniano efetivo na nova representação

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{ef}} &= -\hbar \left\{ \left[ \frac{\delta}{2} - \eta\Delta + \frac{\Omega_1^2}{4\Delta(1+\eta)} \right] \sigma_{gg} - \left[ \frac{\delta}{2} + \eta\Delta - \frac{\Omega_2^2}{4\Delta(1+\eta)} \right] \sigma_{ee} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Omega_1\Omega_2}{4\Delta(1+\eta)} (\sigma_{ge} + \sigma_{eg}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.166)$$

voltando para a antiga base

$$\begin{aligned} H_{\text{ef}} &= -\hbar \left\{ \left[ \frac{\delta}{2} + \frac{\Omega_1^2}{4\Delta(1+\eta)} \right] \sigma_{gg} - \left[ \frac{\delta}{2} - \frac{\Omega_2^2}{4\Delta(1+\eta)} \right] \sigma_{ee} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Omega_1\Omega_2}{4\Delta(1+\eta)} (\sigma_{ge} + \sigma_{eg}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.167)$$

vemos que (3.167) não possui o mesmo valor de (3.162).

Analisando mais criteriosamente os “Ansatz”,  $\dot{\tilde{\gamma}} = 0$  e  $\dot{\gamma} = 0$ , vemos que eles não podem ser simultaneamente corretos, já que para  $\dot{\gamma} = 0$

$$\dot{\tilde{\gamma}} = -i\eta\Delta e^{-i\eta\Delta t} \gamma + e^{-i\eta\Delta t} \dot{\gamma} = -i\eta\Delta e^{-i\eta\Delta t} \gamma \neq 0, \quad (3.168)$$

$\forall t, \Delta, \eta$ .

Portanto a eliminação adiabática depende do referencial onde ela é feita.

Já que a eliminação adiabática é vinculada ao referencial onde é feita, iremos verificar quais transformações temporais permitem simultaneamente a aproximação. Suponha que a equação de onda de um sistema com três estados,  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$ , seja da forma:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|a\rangle + \beta(t)|b\rangle + \zeta(t)|c\rangle, \quad (3.169)$$

o operador densidade de tal sistema é:

$$\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (3.170)$$

Considerando que a eliminação adiabática possa ser aplicada a alguns elementos de (3.170), por exemplo  $\rho_{ab}$ , a seguinte relação deve ser obedecida:

$$\dot{\alpha}\beta^* + \alpha\dot{\beta}^* = 0. \quad (3.171)$$

Agora, ao invés do sistema evoluir nas bases  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$ , vamos aplicar uma transformação em  $|\psi(t)\rangle$ , de modo que

$$\begin{aligned} |\psi'(t)\rangle &= U_1(t)|\psi(t)\rangle \\ &= \alpha(t)e^{i\chi_1 t}|a\rangle + \beta(t)e^{i\chi_2 t}|b\rangle + \zeta(t)e^{i\chi_3 t}|c\rangle, \end{aligned} \quad (3.172)$$

o elemento  $\rho'_{ab}$  evolui segundo a relação:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}'_{ab} &= \frac{d[\alpha'(t)\beta'^*(t)]}{dt} \\ &= i(\chi_1 - \chi_2)\alpha'\beta'^* + e^{i(\chi_1 - \chi_2)t}(\dot{\alpha}\beta^* + \alpha\dot{\beta}^*) \\ &= i(\chi_1 - \chi_2)\alpha'\beta'^*, \end{aligned} \quad (3.173)$$

ou seja, a menos que  $\chi_2 = \chi_1$ , não podemos aplicar automaticamente a eliminação adiabática ao elemento  $\rho'_{ab}$ .

Concluimos portanto, que a eliminação adiabática depende do referencial onde ela é feita, vimos também que a transformação que acrescenta fase aos autoestados do hamiltoniano pode levar a um mesmo hamiltoniano efetivo que o sistema não transformado.

## 3.7 Comentários

Apesar da eliminação adiabática ser uma aproximação relativamente simples, onde conseguimos sair de um sistema de equações diferenciais acopladas para um sistema de equações algébricas, ela requer que as equações de movimento do sistema evoluam em tempos razoavelmente distintos, e por isso condições de acoplamento fraco entre átomo e campo ou forte decaimento atômico, para a eliminação das variáveis atômicas, devem ser impostas.

Vimos também que a eliminação adiabática depende do referencial em que é feita, porém existem algumas transformações onde a aproximação é simultaneamente válida, como no caso de transformações que dão um mesmo “shift” aos níveis de energia. Isso se dá porque ao levarmos nosso sistema a uma nova representação as equações de movimento da maioria das grandezas não evoluem como anteriormente, isso porque adotamos um novo referencial para olharmos o que está acontecendo. Concluimos também que o procedimento de anular as variações temporais das grandezas, como a amplitude de probabilidade (23) e operador de transição (19) não correspondem à correta eliminação adiabática das variáveis atômicas, dado que sempre podemos aplicar tal procedimento em qualquer referencial, além disso este procedimento não permite observar a evolução completa de nosso sistema.

A análise feita em (7) permite a eliminação adiabática da variação do campo, campo e polarização ou polarização e inversão, apenas escolhendo a ordem de magnitude das razões constantes.



## 4 *Dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes*

Neste capítulo, abordamos as vantagens e desvantagens do método de obtenção de dinâmicas efetivas proposto em (5). O desenvolvimento de tal método dá-se via expansão da série de Dyson e um processo de cálculo de médias temporais.

Antes de introduzir a teoria proposta em (5) torna-se mister explicar as técnicas usuais de perturbação dependentes do tempo, em particular, a série de Dyson. Para tanto, partimos da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (4.1)$$

onde

$$H = H_0 + V, \quad (4.2)$$

$V$  representa o termo devido à interação e  $H_0$  à parte livre do hamiltoniano, cujos autovetores são conhecidos. Nesse caso, a representação de interação da função de onda, que atribui aos operadores as flutuações temporais em relação ao sistema não-interagente, é dada por

$$|\psi(t)\rangle_{in} = U^\dagger(t) |\psi(t)\rangle, \quad (4.3)$$

onde o operador  $U(t)$  é:

$$U(t) = \exp(-iH_0 t/\hbar). \quad (4.4)$$

Substituindo (4.3) na equação (4.1), temos uma equação que é equivalente à (4.1)

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_{int} = H_{int}(t) |\psi(t)\rangle_{int}, \quad (4.5)$$

onde

$$H_{int}(t) = U^\dagger H U - H_0 = U^\dagger V U. \quad (4.6)$$

Utilizando o operador de evolução temporal,  $\tilde{U}(t, t_0)$ , expressa-se a função de onda no tempo  $t$ ,  $|\psi(t)\rangle_{int}$ , em termos da função de onda no tempo  $t_0$ ,  $|\psi(t_0)\rangle_{int}$ ,

$$|\psi(t)\rangle_{int} = \tilde{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_{int}, \quad (4.7)$$

sujeito à condição inicial

$$\tilde{U}(t, t_0)|_{t=t_0} = I. \quad (4.8)$$

Através do uso de (4.7) em (4.5), obtém-se uma equação diferencial para o operador de evolução temporal, dada por

$$i\hbar \frac{d\tilde{U}(t, t_0)}{dt} = H_{\text{int}}(t)\tilde{U}(t, t_0). \quad (4.9)$$

É interessante salientar que a equação diferencial acima descreve precisamente a evolução da interação entre os sistemas em relação à parte livre. Além disso, com a condição inicial (4.8), a equação (4.9) fornece a seguinte equação integral:

$$\tilde{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{\text{int}}(t_1)\tilde{U}(t_1, t_0)dt_1, \quad (4.10)$$

que pode ser resolvida por iteração, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{\text{int}}(t_1) \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} H_{\text{int}}(t_2)\tilde{U}(t_2, t_0)dt_2 \right) dt_1 \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{\text{int}}(t_1)dt_1 + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_1)H_{\text{int}}(t_2) \\ &+ \dots + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int}}(t_1)H_{\text{int}}(t_2)\dots H_{\text{int}}(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

conhecida como Série de Dyson (24).

Caso a escala típica de energia, envolvendo o termo perturbativo, seja pequena frente às energias de transição típicas de  $H_0$ , espera-se que a série convirja após alguns termos. Outro ponto é que o ordenamento temporal entre os operadores  $H_{\text{int}}(t_i)$  e  $H_{\text{int}}(t_j)$ ,  $i \neq j$ , é importante<sup>1</sup>. Utilizando esse ingrediente, é possível reescrever a série acima numa forma muito mais simples:

$$\tilde{U}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{\text{int}}(t_1)dt_1 \right), \quad (4.12)$$

onde  $\mathcal{T}$  é o operador de ordenamento temporal.

Expandindo o operador evolução (4.12) perturbativamente, em termos de série de potências de integrais da energia de interação, podemos truncar a série (4.11) em primeira ordem quando a energia de interação for muito menor que a energia livre do sistema. Neste contexto, em posse do operador evolução conseguimos determinar facilmente a evolução da função de onda no tempo e obter os valores médios dos observáveis.

Em engenharia de interação, hamiltonianos efetivos são operadores importantíssimos para

<sup>1</sup>Ver Apêndice D.

que estados quânticos sejam manipulados, de forma a gerar estados específicos da matéria e campo eletromagnético, como os estados de campo comprimido, os estados de matéria emaranhados<sup>2</sup> com o campo eletromagnético, dentre outros.

hamiltonianos efetivos também são utilizados nos casos onde um operador evolução do sistema não pode ser determinado, por exemplo, quando há dissipação de energia para o meio ambiente.

Agora já possuímos todas as ferramentas necessárias para discutir o trabalho proposto em (5), mas antes, iremos analisar um primeiro trabalho, proposto por um dos autores<sup>3</sup>, que deu origem a (5). O resultado obtido em (4), serviu de base para muitos outros artigos, como em (25), onde uma interação efetiva entre dois íons e um campo clássico é construída de modo a gerar uma porta lógica quântica de dois qubits<sup>4</sup>, robusta à decoerência provinda da transferência de energia térmica do meio ambiente para o movimento vibracional do íon. Em (26) a técnica é utilizada para a construção de uma porta lógica quântica de fase de dois qubits, para os modos do campo de duas cavidades, onde uma amostra atômica é empregada para gerar estados emaranhados entre fótons.

## 4.1 Trabalho inicial

Na presente seção discutiremos o trabalho proposto em (4), onde um hamiltoniano efetivo é determinado segundo uma aproximação feita na evolução da função de onda.

Na representação de interação a equação de Schrödinger é:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_{\text{int}} = H_{\text{int}}(t) |\psi(t)\rangle_{\text{int}}, \quad (4.13)$$

a solução formal de  $|\psi(t)\rangle_{\text{int}}$  é:

$$|\psi(t)\rangle_{\text{int}} = |\psi(0)\rangle_{\text{int}} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H_{\text{int}}(t_1) |\psi(t_1)\rangle_{\text{int}} dt_1. \quad (4.14)$$

Da mesma forma como procedemos em (4.11), substituímos (4.14) em (4.13) e obtemos:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_{\text{int}} = H_{\text{int}}(t) |\psi(0)\rangle_{\text{int}} + \frac{1}{i\hbar} H_{\text{int}}(t) \int_0^t H_{\text{int}}(t_1) |\psi(t_1)\rangle_{\text{int}} dt_1, \quad (4.15)$$

supondo que  $H_{\text{int}}(t)$  oscile muito no tempo, em média, podemos negligenciar o primeiro termo

<sup>2</sup>Emaranhamento é uma propriedade estritamente quântica, onde dois ou mais objetos apresentam medidas correlacionadas, ou seja, seus estados não podem ser separados.

<sup>3</sup>Ver (4).

<sup>4</sup>"Quantum Bits", linguagem própria da computação quântica.

de (4.15).

Para hamiltonianos fortemente oscilantes, podemos utilizar o argumento de que a função de onda varia muito mais lentamente que o hamiltoniano no intervalo considerado em (4.15), de modo que a função de onda  $|\psi(t)\rangle_{\text{int}}$  pode ser retirada da integral. Com isso, (4.15) pode ser reescrita como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_{\text{int}} \approx \left[ \frac{1}{i\hbar} H_{\text{int}}(t) \int_0^t H_{\text{int}}(t_1) dt_1 \right] |\psi(t)\rangle_{\text{int}}, \quad (4.16)$$

que resulta em

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_{\text{int}} \approx H_{\text{ef}}(t) |\psi(t)\rangle_{\text{int}}, \quad (4.17)$$

com

$$H_{\text{ef}}(t) = \frac{1}{i\hbar} H_{\text{int}}(t) \int_0^t H_{\text{int}}(t_1) dt_1. \quad (4.18)$$

Utilizando (4.13) vemos que:

$$\left| \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_{\text{int}} \right| \propto g\sqrt{\bar{n}+1} |\psi(t)\rangle_{\text{int}}, \quad (4.19)$$

derivando o hamiltoniano no tempo:

$$\left\langle \frac{d}{dt} H_{\text{int}}(t) \right\rangle \propto \Delta g\sqrt{\bar{n}+1} e^{\pm i\Delta t}, \quad (4.20)$$

onde  $\Delta$  é a frequência de oscilação do hamiltoniano na representação de interação,  $\bar{n}$  é o número médio de fótons no campo,  $\frac{g}{\Delta} \ll 1$  e

$$H_{\text{int}} \propto g(a\sigma_+ e^{i\Delta t} + h.c.). \quad (4.21)$$

Certamente a frequência de oscilação da função de onda será no máximo da ordem de  $g\sqrt{\bar{n}+1}$ , por isso podemos dizer, olhando para (4.19) e (4.20) que a função de onda não varia temporalmente tanto quanto o hamiltoniano na interação.

Na próxima seção, utilizando (5), demonstraremos melhor como chegar em (4.17) e (4.18).

## 4.2 Obtenção do método

Em (5) os autores expõem sua metodologia para obter hamiltonianos efetivos, utilizando a seguinte forma para (4.9):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{U}(t, t_0) = \lambda H_{\text{int}}(t) \tilde{U}(t, t_0), \quad (4.22)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro de ordenamento, que mais tarde será substituído pela unidade.

Nesta etapa, um procedimento de média temporal será aplicada a (4.22) para encontrar o hamiltoniano efetivo do sistema. Efetivo no sentido em que os operadores que caracterizam o sistema são operadores resposta, ou “outputs”, gerados por convolução integral:

$$\overline{O}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')O(t')dt'. \quad (4.23)$$

A função  $f(t)$  é responsável pelo impulso ao qual o sistema é submetido, devido à presença de um laser, por exemplo, enquanto  $O(t)$  representa o operador “input”, caracterizando algum aspecto do sistema.

Se a equação (4.22) for convoluída com a função  $f(t)$ , utilizando a relação<sup>5</sup>  $\overline{\frac{\partial O(t)}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{O(t)}$ , tem-se

$$i\hbar \frac{d}{dt} \overline{\tilde{U}(t, t_0)} = \lambda \overline{H_{\text{int}}(t) \tilde{U}(t, t_0)}. \quad (4.24)$$

O “ansatz” feito em (5) consiste em supor que a média da multiplicação dos dois operadores em (4.24) é igual ao produto da média deles, ou seja:

$$\overline{H_{\text{int}}(t) \tilde{U}(t, t_0)} = H_{\text{ef}}(t) \overline{\tilde{U}(t, t_0)}, \quad (4.25)$$

e portanto

$$i\hbar \frac{d}{dt} \overline{\tilde{U}(t, t_0)} = \lambda H_{\text{ef}}(t) \overline{\tilde{U}(t, t_0)}, \quad (4.26)$$

onde  $H_{\text{ef}}(t)$  é o hamiltoniano efetivo.

É razoável expandir o operador  $H_{\text{ef}}(t)$  em termos de uma base de operadores  $W_n(t)$ , mas devido à generalidade de tais operadores é necessário encontrar expressões que restrinjam as possibilidades. Como veremos abaixo, a determinação é razoavelmente simples.

Expandindo o hamiltoniano efetivo na base dos operadores  $W_n(t)$ , e considerando-se que é possível organizá-los de acordo com o parâmetro  $\lambda$ , temos

$$H_{\text{ef}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n W_n(t). \quad (4.27)$$

Uma expressão análoga pode ser obtida para o operador de evolução,

$$\tilde{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V_n(t). \quad (4.28)$$

---

<sup>5</sup>Ver Apêndice E

É possível identificar os operadores  $V_n$  com os termos da série de Dyson, ou seja,

$$\lambda^n V_n(t) = \frac{1}{n!} \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \lambda H_{\text{int}}(t_1) \lambda H_{\text{int}}(t_2) \dots \lambda H_{\text{int}}(t_n), \quad (4.29)$$

sujeitos à condição

$$V_0(t) = 1.$$

Segundo o “ansatz”, substituindo (4.27) e (4.28) em (4.26) temos a igualdade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \overline{H_{\text{int}}(t) V_n(t)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda^{p+q} \overline{W_p(t) V_q(t)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda^{p+q} W_p(t) \overline{V_q(t)}, \quad (4.30)$$

comparando as potências em  $\lambda$ :

$$\overline{H_{\text{int}}(t) V_n(t)} = \sum_{p=0}^{\infty} W_p(t) \overline{V_{n-p}(t)}. \quad (4.31)$$

Para ver algum tipo de recorrência em (4.31) substituímos  $n$  por seus valores possíveis, com  $n \geq p$ :

$$n = 0$$

$$\overline{H_{\text{int}}(t)} = W_0(t), \quad (4.32)$$

$$n = 1$$

$$\overline{H_{\text{int}}(t) V_1(t)} = W_0(t) \overline{V_1(t)} + W_1(t) \overline{V_0(t)}, \quad (4.33)$$

$$n = 2$$

$$\overline{H_{\text{int}}(t) V_2(t)} = W_0(t) \overline{V_2(t)} + W_1(t) \overline{V_1(t)} + W_2(t), \quad (4.34)$$

para  $n \geq p$  e  $n \neq 0$  temos a relação de recorrência:

$$W_n(t) = \overline{H_{\text{int}}(t) V_n(t)} - \overline{H_{\text{int}}(t)} \cdot \overline{V_n(t)} - \sum_{p=1}^{n-1} W_p(t) \overline{V_{n-p}(t)}, \quad (4.35)$$

que substituindo em (4.27) gera o hamiltoniano:

$$H_{\text{ef}}(t) = W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left\{ \overline{H_{\text{int}}(t) V_n(t)} - \overline{H_{\text{int}}(t)} \cdot \overline{V_n(t)} - \sum_{p=1}^{n-1} W_p(t) \overline{V_{n-p}(t)} \right\}. \quad (4.36)$$

Se considerarmos a série (4.36) até segunda ordem, ou seja, perturbativamente, o hamiltoniano efetivo é:

$$H_{\text{ef}}(t) = \overline{H_{\text{int}}(t)} + \overline{H_{\text{int}}(t) V_1(t)} - \overline{H_{\text{int}}(t)} \cdot \overline{V_1(t)}, \quad (4.37)$$

com  $\lambda_n = 1$ .

Uma questão importante sobre o hamiltoniano acima é se ele é Hermiteano<sup>6</sup>, por razão de uma possível não Hermiticidade de (4.37) realizamos a soma:

$$H_{ef} = \frac{1}{2} \left( H_{ef} + H_{ef}^\dagger \right), \quad (4.38)$$

que gera,

$$H_{ef} = \overline{H_{int}(t)} + \frac{1}{2} \left( \overline{H_{int}(t)V_1(t)} + \overline{V_1^\dagger(t)H_{int}(t)} - \overline{H_{int}(t) \cdot V_1(t)} - \overline{V_1(t)^\dagger \cdot H_{int}(t)^\dagger} \right), \quad (4.39)$$

com

$$V_1 = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{int}(t_1) dt_1. \quad (4.40)$$

### 4.2.1 Hamiltonianos com dependência harmônica no tempo

Veremos que o método de aproximação proposto em (5) encontra uma forma analítica muito simples para hamiltonianos efetivos se o sistema na interação possuir dependência harmônica no tempo

$$H_{int}(t) = \sum_{n=1}^N h_n \exp(i\omega_n t) + h_n^\dagger \exp(-i\omega_n t), \quad (4.41)$$

onde  $h_n$  representa um operador qualquer: operadores do átomo  $\sigma_{ij}$ , do campo  $a$  ( $a^\dagger$ ), ou a multiplicação deles, respeitando a condição  $\frac{\langle h_n \rangle}{\omega_n} \ll 1$ .

Substituindo (4.41) em (4.40)

$$\begin{aligned} V_1(t) &= -\sum_{n=1}^N \frac{1}{\hbar} \left\{ \frac{h_n}{\omega_n} [\exp(i\omega_n t) - 1] - \frac{h_n^\dagger}{\omega_n} [\exp(-i\omega_n t) - 1] \right\} \\ &= \tilde{V}_1(t) + \tilde{V}_1(t_0). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Segundo (4.39)

$$\begin{aligned} H_{ef} &= \overline{H_{int}(t)} + \frac{1}{2} \left( \overline{H_{int}(t)[\tilde{V}_1(t) + \tilde{V}_1(t_0)]} - \overline{[\tilde{V}_1(t) + \tilde{V}_1(t_0)]H_{int}(t)} \right. \\ &\quad \left. - \overline{H_{int}(t) \cdot [\tilde{V}_1(t) + \tilde{V}_1(t_0)]} + \overline{[\tilde{V}_1(t) + \tilde{V}_1(t_0)] \cdot H_{int}^\dagger(t)} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

<sup>6</sup>Em (5) há considerações sobre a não unitariedade do operador de evolução em razão do processo de média realizado, o que gerará um hamiltoniano não Hermiteano, por isso a soma.

No processo de média, devido ao sistema possuir altas frequências, teremos:

$$\begin{aligned}\overline{H_{int}(t)} &= 0 \\ \overline{\tilde{V}_1(t)} &= 0 \\ \overline{\tilde{V}_1(t_0)} &\neq 0 \\ \overline{H_{int}(t)\tilde{V}_1(t)} &\neq 0 \\ \overline{H_{int}(t) \cdot \tilde{V}_1(t_0)} &= 0,\end{aligned}\tag{4.44}$$

pois

$$\begin{cases} \overline{\exp(\pm i\omega_n t)} = 0 \\ \overline{\exp[\pm i(\omega_n + \omega_m)t]} = 0 \\ \overline{\exp[\pm i(\omega_n - \omega_m)t]} = \delta_{nm}, \end{cases}\tag{4.45}$$

então

$$H_{ef} = \frac{1}{2}[\overline{H_{int}(t), \tilde{V}_1(t)}] = -\frac{i}{2\hbar} \left[ \overline{H_{int}(t), \int_{t_0}^t H_{int}(t_1) dt_1} \right].\tag{4.46}$$

Vemos que (4.46) é muito semelhante à relação encontrada em (4.18). Escrevendo (4.46) em termo de operadores:

$$H_{ef} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\hbar\omega_n} [h_n, h_n^\dagger].\tag{4.47}$$

#### Exemplo 4.2.1 Interação dispersiva

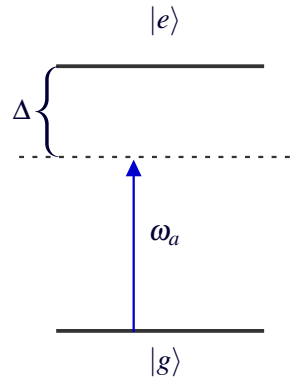


Figura 4.1: Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis.

O hamiltoniano do sistema é

$$H = H_0 + V,\tag{4.48}$$

a energia livre do átomo+campo:

$$H_0 = \hbar \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega_a a^\dagger a,\tag{4.49}$$

e a energia de interação:

$$V = \hbar(ga\sigma_{eg} + g^* a^\dagger \sigma_{ge}).\tag{4.50}$$



Na representação de interação

$$H_{\text{int}} = \hbar(e^{i\Delta t} g a \sigma_{eg} + e^{-i\Delta t} g^* a^\dagger \sigma_{ge}), \quad (4.51)$$

com  $\Delta = \omega_0 - \omega_a$ .

Identificando (4.51) com (4.41)

$$h_1 = \hbar g a \sigma_{eg}, \quad (4.52)$$

e

$$[h_1, h_1^\dagger] = (\hbar |g|)^2 [a^\dagger a \sigma_z + \sigma_{ee}], \quad (4.53)$$

com  $N = 1$ ,  $\omega_1 = \Delta$ , de modo que a relação (4.47) possa ser aplicada

$$H_{\text{ef}} = \frac{\hbar |g|^2}{\Delta} (a^\dagger a \sigma_z + \sigma_{ee}). \quad (4.54)$$

Na representação de Schrödinger (4.55) é

$$H_{\text{ef}} = \hbar \omega a^\dagger a + \hbar \left( \frac{|g|^2}{\Delta} a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \right) \sigma_z + \frac{\hbar |g|^2}{\Delta} \sigma_{ee}. \quad (4.55)$$

Como é conhecido na literatura, uma interação dispersiva entre dois níveis gera um deslocamento das energias destes proporcional ao número de fóton na cavidade.

Se ao invés de um campo quântico tivéssemos um campo clássico, o hamiltoniano efetivo encontrado na representação de Schrödinger seria:

$$H_{\text{ef}} = \hbar \left( \frac{|\Omega|^2}{\Delta} + \frac{\omega_0}{2} \right) \sigma_z \quad (4.56)$$

onde  $|\Omega|$  é o fator de acoplamento entre átomo e campo eletromagnético. Para encontrar (4.56) substituímos  $g a \rightarrow \Omega$  e  $g^* a^\dagger \rightarrow \Omega^*$  em (4.55).

### Exemplo 4.2.2 Átomo de três níveis interagindo com dois campos quânticos

O hamiltoniano do sistema é

$$H = H_0 + V, \quad (4.57)$$

a energia livre do átomo:

$$H_0 = \hbar \omega_a a^\dagger a + \hbar \omega_b b^\dagger b + \hbar \omega_g \sigma_{gg} + \hbar \omega_i \sigma_{ii} + \hbar \omega_e \sigma_{ee}, \quad (4.58)$$

e a energia de interação:

$$V = \hbar [g_1 a \sigma_{ig} + g_2 b \sigma_{ie} + h.c.]. \quad (4.59)$$

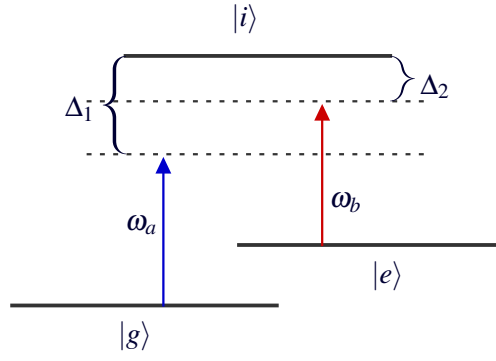


Figura 4.2: Dois campos quânticos interagindo dispersivamente com um átomo de três níveis.

Na representação de interação o hamiltoniano é dado por:

$$H_{\text{int}} = \hbar[(g_1 a e^{i\frac{\delta}{2}t} \sigma_{ig} + g_2 b e^{-i\frac{\delta}{2}t} \sigma_{ie}) e^{i\Delta t} + h.c.], \quad (4.60)$$

onde fizemos a seguinte mudança de variável:  $\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \Delta$  e  $\Delta_1 - \Delta_2 = \delta$ .

Identificando os termos (4.60) com (4.41)

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 1, \\ \omega_1 = \Delta, \\ h_1 = \hbar(g_1 a e^{i\frac{\delta}{2}t} \sigma_{ig} + g_2 b e^{-i\frac{\delta}{2}t} \sigma_{ie}), \\ h_1^\dagger = \hbar(g_1^* a^\dagger e^{-i\frac{\delta}{2}t} \sigma_{gi} + g_2^* b^\dagger e^{i\frac{\delta}{2}t} \sigma_{ei}), \\ [h_1, h_1^\dagger] = \hbar^2 |g_1|^2 [a^\dagger a (\sigma_{ii} - \sigma_{gg}) + \sigma_{ii}] + \hbar^2 |g_2|^2 [b^\dagger b (\sigma_{ii} - \sigma_{ee}) + \sigma_{ii}] \\ \quad - \hbar^2 (g_1 g_2^* b^\dagger a \sigma_{eg} e^{i\delta t} + g_1^* g_2 a^\dagger b \sigma_{ge} e^{-i\delta t}). \end{array} \right. \quad (4.61)$$

Podemos utilizar o método proposto nesta seção para encontrarmos o hamiltoniano efetivo deste sistema substituindo (4.61) em (4.47), obtendo:

$$\begin{aligned} H_{\text{ef}} &= \hbar \omega_a a^\dagger a + \hbar \omega_b b^\dagger b + \hbar \left[ \omega_i + \left( \frac{|g_1|^2}{\Delta} a a^\dagger + \frac{|g_2|^2}{\Delta} b b^\dagger \right) \right] \sigma_{ii} \\ &+ \hbar \left[ \omega_g - \frac{|g_1|^2}{\Delta} a^\dagger a \right] \sigma_{gg} + \hbar \left[ \omega_e - \frac{|g_2|^2}{\Delta} b^\dagger b \right] \sigma_{ee} \\ &- \hbar \left( \frac{g_1 g_2^*}{\Delta} b^\dagger a \sigma_{eg} + \frac{g_1^* g_2}{\Delta} a^\dagger b \sigma_{ge} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Se a mudança de variável acima não fosse feita, iríamos obter um hamiltoniano efetivo diagonal, que não descreve uma interação entre os níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , e que não obedece a relação (4.45).

Considerando campo clássico, o hamiltoniano obtido pelo método é:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{ef}} = & \hbar \left( \omega_i + \frac{|\Omega_1|^2}{\Delta} + \frac{|\Omega_2|^2}{\Delta} \right) \sigma_{ii} + \hbar \left( \omega_g - \frac{|\Omega_1|^2}{\Delta} \right) \sigma_{gg} \\
 & + \hbar \left( \omega_e - \frac{|\Omega_2|^2}{\Delta} \right) \sigma_{ee} - \hbar \left( \frac{\Omega_1 \Omega_2^*}{\Delta} \sigma_{eg} + \frac{\Omega_1^* \Omega_2}{\Delta} \sigma_{ge} \right), \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

que é o hamiltoniano efetivo largamente utilizado em íons aprisionados, onde a transição  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  dá-se via o nível auxiliar  $|i\rangle$ .

### 4.3 Comentários

Vimos que em (5) obtem-se uma melhor construção do hamiltoniano efetivo, em vista de (4), partindo do “ansatz” (4.17). Vimos também que a técnica apresentada é desenvolvida para sistemas sem dissipação, dado que sua construção tomou como base a expansão do operador de evolução e a condição de evolução unitária. Desse modo, não é possível utilizá-la em situações em que o efeito do reservatório sobre o sistema seja relevante.

Em (27), por exemplo, hamiltonianos bilineares e quadráticos são construídos, segundo (4), de modo a gerar compressão em uma das quadraturas do campo eletromagnético em uma cavidade. O esquema foi baseado na interação entre um átomo de dois níveis, um modo do campo da cavidade e um campo clássico. Postumamente a dissipação provinda do decaimento atômico e vazamento de fótons pela cavidade, é considerada.

Em (28) utilizando (4) gera-se o mesmo tipo de hamiltoniano que em (27), porém com a interação de um átomo de três níveis, dois modos do campo da cavidade e um campo clássico. Neste trabalho mostra-se teoricamente que é possível gerar superposição de estados comprimidos de um único modo do campo, emaranhamento de dois modos e estado de vácuo comprimido de dois modos (tal como o estado original EPR<sup>7</sup>), com alto fator de compressão.

Os autores em (29) utilizam a técnica proposta em (5) para a proteger estados de decoerência utilizando um “squid”<sup>8</sup> acoplado a uma cavidade de microondas, onde as operações que os estados são submetidos são operações geométricas não convencionais.

Concluimos que o método proposto descreve bem alguns sistemas, mas ele não é perfeitamente confiável, já que podemos encontrar hamiltonianos efetivos não hermiteanos na ausência de dissipação. Também vemos que, segundo o exemplo 4.2.2, é necessário que montemos um

<sup>7</sup>Estado quântico previsto por Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen que é um exemplo de estado emaranhado.

<sup>8</sup>“Superconducting quantum interference device”, é um mecanismo utilizado para medir campos muitíssimo fracos através de uma junção Josephson.

hamiltoniano tal que as condições (4.45) sejam obedecidas.

Por fim concluímos que a expressão (4.47) é muito simples e nos permite obter rapidamente hamiltonianos efetivos quando os hamiltonianos de partida são oscilantes, por esta razão a técnica proposta em (5) é interessante e deve ser empregada, porém, cálculos numéricos devem ser feitos, principalmente em razão da possível não Hermiticidade do hamiltoniano construído, sendo este um fator problemático na teoria.

## 5 *Método de pequenas rotações não-lineares*

Através de uma transformação de pequena rotação não-linear encontramos, com alguma aproximação, o hamiltoniano efetivo para a interação. A transformação proposta em (6, 30) tem o efeito de diagonalizar o hamiltoniano em termos de um menor parâmetro natural do sistema, para isso a álgebra de operadores deformados de  $SU(n)$  é utilizada. O menor parâmetro natural, por exemplo, do sistema composto por um campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis, é a razão entre o acoplamento átomo-campo e a dessintonia do campo em relação aos níveis atômicos,  $\varepsilon = \frac{g}{\Delta}$ .

Mostraremos também que o método é aplicável a sistemas acoplados com o meio ambiente,<sup>1</sup> e que a forma de procedimento de obtenção de hamiltonianos efetivos é idêntica à utilizada em sistemas fechados.

### 5.1 *Motivação do método*

Baseado na transformação utilizada para diagonalizar o hamiltoniano linear abaixo

$$H = \omega S_3 + g(S_+ + S_-), \quad (5.1)$$

onde o hamiltoniano representa uma partícula de spin  $j$  em um campo magnético, construiremos o hamiltoniano efetivo de sistemas onde a algebra é não-linear. Os operadores de (5.1) pertencem ao grupo de rotação  $SU(2)$ , e obedecem as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [S_3, S_{\pm}] &= \pm S_{\pm}, \\ [S_+, S_-] &= 2S_3, \end{aligned} \quad (5.2)$$

os autovalores destes operadores na base de momento angular  $|j, m\rangle$  são:

$$\begin{aligned} S_3|j, m\rangle &= m|j, m\rangle, \\ S_{\pm}|j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m\rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup>Ver (31).

Uma maneira conveniente de diagonalizar (5.1) é aplicar a rotação

$$U = \exp[\alpha(S_+ - S_-)], \quad (5.4)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro complexo a ser ajustado em função dos parâmetros do sistema, mas que faz  $U$  unitário.

Utilizando a relação de Baker-Hausdorff<sup>2</sup> o hamiltoniano transformado é

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= UHU^\dagger \\ &= [\omega \cos(2\alpha) + 2g \sin(2\alpha)]S_3 + \frac{1}{2}[2g \cos(2\alpha) - \omega \sin(2\alpha)](S_+ + S_-). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Escolhendo o parâmetro  $\alpha$  podemos cancelar os termos não diagonais do hamiltoniano (5.5), que se anulam para

$$\tan(2\alpha) = \frac{2g}{\omega}, \quad (5.6)$$

e o hamiltoniano efetivo encontrado é

$$H_{\text{ef}} = \omega \sqrt{1 + \frac{4g^2}{\omega^2}} S_3. \quad (5.7)$$

Se em (5.1) considerarmos  $\omega \gg g$ , o hamiltoniano é quase diagonal em  $S_3$ . Aplicando uma transformação de pequena rotação com  $\alpha = \frac{g}{\omega}$ , o hamiltoniano efetivo é facilmente encontrado:

$$H_{\text{ef}} \simeq \left( \omega + 2\frac{g^2}{\omega} \right) S_3, \quad (5.8)$$

que coincide com a solução exata (5.7), quando expandida em potências de  $\frac{g}{\omega} \ll 1$ .

Utilizando a semelhança das algebras  $SU(n)$  e as algebras deformadas associadas a este grupo faremos uso da transformação de pequena rotação não-linear para construirmos hamiltonianos efetivos provindos de hamiltonianos não lineares.

## 5.2 Hamiltonianos não-lineares

Admita um sistema que possui constantes de movimento<sup>3</sup> e que o hamiltoniano de interação possa ser escrito na forma:

$$V = \Delta X_3 + g(X_+ + X_-), \quad (5.9)$$

<sup>2</sup> $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots$

<sup>3</sup>Se  $[H, I] = 0$ ,  $I$  é uma constante de movimento.

onde  $g$  é uma constante de acoplamento e  $\Delta$  é um parâmetro utilizado usualmente para medir a diferença entre as frequências do campo e do átomo. As relações de comutação entre os operadores são as seguintes:

$$\begin{aligned} [X_3, X_{\pm}] &= \pm X_{\pm}, \\ [X_+, X_-] &= P(X_3), \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde  $P(X_3)$  é uma função polinomial arbitrária de  $X_3$  com coeficientes que podem depender das constantes de movimento. Essas relações de comutação correspondem à chamada deformação polinomial da álgebra  $SU(2)$ .

Baseando-se na semelhança dos hamiltonianos (5.1) e (5.9) e nas relações de comutação que seus operadores obedecem, utilizamos uma transformação de pequena rotação não-linear, semelhante a (5.4) com  $\alpha = \frac{g}{\Delta}$ , para determinar o hamiltoniano efetivo de (5.9):

$$\begin{aligned} H_{\text{ef}} &= UH_0U^\dagger + UVU^\dagger \\ &\cong H_0 + V + \alpha[X_+ - X_-, V] + \frac{\alpha^2}{2}[X_+ - X_-, [X_+ - X_-, V]] + \dots, \end{aligned} \quad (5.11)$$

para  $\alpha \ll 1$

$$H_{\text{ef}} \cong H_0 + \Delta X_3 + \frac{g^2}{\Delta} P(X_3). \quad (5.12)$$

### Exemplo 5.2.1 Interação dispersiva

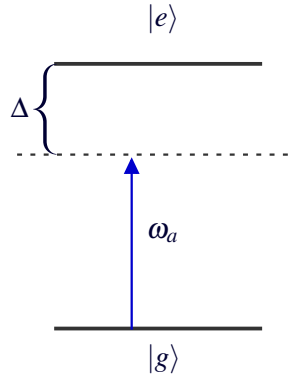


Figura 5.1: Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis.

O modelo que descreve um campo quântico, de um único modo, interagindo com um átomo de dois níveis é:

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\frac{\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar(ga\sigma_{eg} + g^*a^\dagger\sigma_{ge}). \quad (5.13)$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} S_3 &\equiv \frac{\sigma_z}{2} \\ S_+ &\equiv \sigma_{eg} \\ S_- &\equiv \sigma_{ge}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

em (5.13), onde os operadores  $S_3, S_{\pm}$  são elementos do grupo  $SU(2)$  e possuem as relações de comutação (5.2), o hamiltoniano obtido é:

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_0 S_3 + \hbar(gaS_+ + g^* a^\dagger S_-). \quad (5.15)$$

Podemos dividir o hamiltoniano (5.15) em uma soma de operadores que representem as constantes de movimento do sistema e operadores que contenham a parte relativa à interação, da seguinte forma:

$$H = H_0 + V, \quad (5.16)$$

$$H_0 = \hbar\omega \mathcal{N}, \quad (5.17)$$

onde  $\mathcal{N} = a^\dagger a + S_3$ , é o número de excitação do sistema átomo+campo e

$$V = \hbar\Delta S_3 + \hbar(gaS_+ + g^* a^\dagger S_-), \quad (5.18)$$

com  $\Delta = \omega_0 - \omega$ .

Baseado na solução do hamiltoniano (5.9) introduzimos os operadores da álgebra deformada de  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} X_+ &= a\sigma_{eg}, \\ X_- &= a^\dagger\sigma_{ge}, \\ X_3 &= S_3, \end{aligned} \quad (5.19)$$

que respeitam as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [X_3, X_{\pm}] &= \pm X_{\pm}, \\ [X_+, X_-] &= P(X_3), \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde  $P(X_3) = 2a^\dagger a X_3 + \sigma_{ee}$ .

Susbtituindo (5.19) em (5.18)

$$V = \hbar\Delta X_3 + \hbar(gX_+ + g^* X_-). \quad (5.21)$$

No limite dispersivo, onde  $|\Delta| \gg |g|\sqrt{\bar{n}+1}$ , o hamiltoniano de interação é quase diagonal na base de  $X_3$ . Utilizando a técnica descrita na seção (5.2), para a construção de hamiltonianos efetivos, aplicamos a seguinte transformação de pequena rotação não-linear

$$U = \exp\left(\frac{g}{\Delta}X_+ - \frac{g^*}{\Delta}X_-\right), \quad (5.22)$$



em (5.21) e obtemos

$$H_{\text{ef}} = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar \left[ \frac{\omega_0}{2} + \frac{|g|^2}{\Delta} a^\dagger a \right] \sigma_z + \hbar \frac{|g|^2}{\Delta} \sigma_{ee}. \quad (5.23)$$

Como é conhecido na literatura, uma interação dispersiva entre um átomo de dois níveis e um campo eletromagnético gera um deslocamento das energias do primeiro, proporcional ao número de fótons na cavidade.

### Exemplo 5.2.2 Limite dispersivo para a configuração $\Lambda$

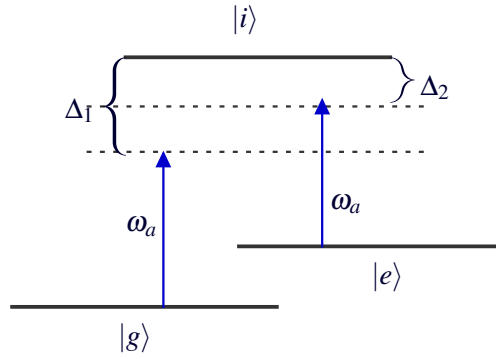


Figura 5.2: Um campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de três níveis.

Um campo quântico interagindo com um átomo em configuração  $\Lambda$  tem o seguinte hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H = & \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_g \sigma_{gg} + \hbar\omega_e \sigma_{ee} + \hbar\omega_i \sigma_{ii} \\ & + \hbar(g_1 a \sigma_{ig} + g_1^* a^\dagger \sigma_{gi}) + \hbar(g_2 a \sigma_{ie} + g_2^* a^\dagger \sigma_{ei}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

A constante de movimento do sistema é  $\mathcal{N} = a^\dagger a + \sigma_{ii} = a^\dagger a + I - \sigma_{gg} - \sigma_{ee}$  e portanto

$$H_0 = \hbar\omega_a \mathcal{N}, \quad (5.25)$$

$$V = -\hbar\Delta_1 \sigma_{gg} - \hbar\Delta_2 \sigma_{ee} + \hbar(g_1 a \sigma_{ig} + g_1^* a^\dagger \sigma_{gi}) + (g_2 b \sigma_{ie} + g_2^* b^\dagger \sigma_{ei}), \quad (5.26)$$

com  $\Delta_1 = (\omega_i - \omega_g) - \omega_a$  e  $\Delta_2 = (\omega_i - \omega_e) - \omega_a$ .

Definindo os operadores da álgebra deformada  $SU(3)$ :

$$\begin{aligned} X^{gg} &= \sigma_{gg}, X^{ee} = \sigma_{ee}, X^{ii} = \sigma_{ii}, \\ X_+^{gi} &= a \sigma_{ig}, X_-^{gi} = a^\dagger \sigma_{gi}, \\ X_+^{ei} &= a \sigma_{ie}, X_-^{ei} = a^\dagger \sigma_{ei}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

obtemos as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[X_+^{gi}, X_+^{ei}] &= [X_-^{gi}, X_-^{ei}] = 0 \\
[X_+^{gi}, X_-^{gi}] &= X^{ii} + a^\dagger a (X^{ii} - X^{gg}), [X_+^{ei}, X_-^{ei}] = X^{ii} + a^\dagger a (X^{ii} - X^{ee}), \\
[X_+^{gi}, X_-^{ei}] &= -a^\dagger a \sigma_{eg} = -Y_+^{ge}, \\
[X_-^{gi}, X_+^{ei}] &= a^\dagger a \sigma_{ge} = Y_-^{ge}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Substituindo (5.27) em (5.26) obtemos:

$$V = -\hbar\Delta_1 X^{gg} - \hbar\Delta_2 X^{ee} + \hbar(g_1 X_+^{gi} + g_1^* X_-^{gi}) + \hbar(g_2 X_+^{ei} + g_2^* X_-^{ei}). \tag{5.29}$$

Na situação dispersiva, onde

$$|\Delta_1| \gg |g_1| \sqrt{\bar{n} + 1}, \tag{5.30}$$

podemos utilizar o seguinte operador de pequena rotação não-linear para anularmos a interação entre os níveis  $|i\rangle$  e  $|g\rangle$ :

$$U_1 = \exp(\varepsilon_1 X_+^{gi} - \varepsilon_1^* X_-^{gi}), \tag{5.31}$$

com  $|\varepsilon_1| = \frac{|g_1|}{|\Delta_1|} \ll 1$ .

O hamiltoniano transformado por (5.31) é:

$$\begin{aligned}
H' &\cong H_0 - \hbar\Delta_1 X^{gg} - \hbar\Delta_2 X^{ee} + \hbar \frac{|g_1|^2}{\Delta_1} [a^\dagger a (X^{ii} - X^{gg}) + X^{ii}] \\
&+ \hbar(g_2 X_+^{ei} + g_2^* X_-^{ei}) - \hbar \left( \frac{g_1 g_2^*}{\Delta_1} Y_+^{ge} + \frac{g_1^* g_2}{\Delta_1} Y_-^{ge} \right).
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Aplicando o mesmo procedimento para desacoplar os níveis  $|e\rangle$  e  $|i\rangle$  de (5.32), considerando interação dispersiva entre o átomo e o campo

$$|\Delta_2| \gg |g_2| \sqrt{\bar{n} + 1}, \tag{5.33}$$

o operador de pequena rotação não-linear responsável pela transformação é:

$$U_2 = \exp(\varepsilon_2 X_+^{ei} - \varepsilon_2^* X_-^{ei}), \tag{5.34}$$

com  $|\varepsilon_2| = \frac{|g_2|}{|\Delta_2|} \ll 1$ .

O hamiltoniano (5.32) transformado é:

$$\begin{aligned}
H'' &= H_0 - \hbar\Delta_1 X^{gs} - \hbar\Delta_2 X^{ee} + \frac{|g_1|^2}{\Delta_1} [X^{ii} + a^\dagger a (X^{ii} - X^{ee})] \\
&+ \hbar \frac{|g_2|^2}{\Delta_2} [a^\dagger a (X^{ii} - X^{ee}) - X^{ii}] - \left( \frac{g_1 g_2^*}{\Delta_1} Y_+^{ge} + \frac{g_1^* g_2}{\Delta_1} Y_-^{ge} \right), \quad (5.35)
\end{aligned}$$

onde não consideramos termos proporcionais a  $\frac{g_1 |g_2|^2}{\Delta_1 \Delta_2}$ ,  $\frac{|g_1|^2 g_2}{\Delta_1 \Delta_2}$  e  $\frac{|g_1|^2 g_2}{\Delta_1^2}$ , e como visto anteriormente  $Y_+^{ge} = a^\dagger a \sigma_{eg}$  e  $Y_-^{ge} = a^\dagger a \sigma_{ge}$ .

Após as transformações de pequena rotação não-linear (5.31) e (5.34), o hamiltoniano efetivo obtido é:

$$\begin{aligned}
H_{\text{ef}} &\simeq \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar \left( \omega_g - \frac{|g_1|^2}{\Delta_1} a^\dagger a \right) \sigma_{gg} + \hbar \left( \omega_e - \frac{|g_2|^2}{\Delta_2} \right) \sigma_{ee} \\
&+ \left[ \omega_i + \left( \frac{|g_1|^2}{\Delta_1} + \frac{|g_2|^2}{\Delta_2} \right) a a^\dagger \right] \sigma_{ii} - \left( \frac{g_1 g_2^*}{\Delta_1} a^\dagger a \sigma_{eg} + \frac{g_1^* g_2}{\Delta_1} a^\dagger a \sigma_{ge} \right), \quad (5.36)
\end{aligned}$$

onde agora os níveis  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  estão acoplados.

### 5.2.1 Caso dissipativo

Adotando um modelo mais realístico, onde considerações sobre a perda de energia para o meio ambiente são levadas em conta, iremos aplicar o método de pequenas rotações não-lineares à equação de Liouville-Von Neumann, como em (31). A escolha do operador que fará esta transformação será semelhante à que utilizamos anteriormente. O operador responsável pela rotação é aquele que na pequena rotação não-linear desacopla os níveis que inicialmente interagem no hamiltoniano, em termos de um menor parâmetro natural do sistema.

Como já visto no capítulo 1, a equação de Liouville é dada por:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_m \gamma_m \mathcal{L}[C_m] \rho, \quad (5.37)$$

onde  $\gamma_m$  são parâmetros determinados pelo reservatório e os  $\mathcal{L}[C_m]$  são os superoperadores de Lindblad, que operados em  $\rho$  fornecem a relação:

$$\mathcal{L}[C_m] \rho = 2C_m \rho C_m^\dagger - C_m^\dagger C_m \rho - \rho C_m^\dagger C_m, \quad (5.38)$$

com

$$[H_0, C_m] = \omega_m C_m, \quad (5.39)$$

$H_0$  é a parte do hamiltoniano livre e  $C_m$  são seus auto operadores.

A seguir iremos considerar um exemplo onde os efeitos de perda para o meio ambiente são contabilizados e o método de pequenas rotações não-lineares é aplicado, de forma a obter um hamiltoniano e um Liouvilliano efetivos.

**Exemplo 5.2.3** *Interação dispersiva com dissipação*

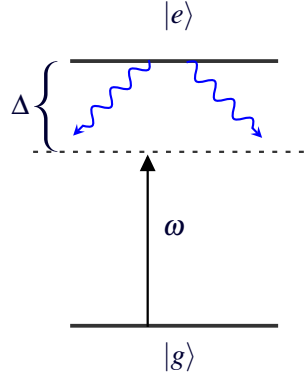


Figura 5.3: Campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis com decaimento espontâneo.

Segundo (5.17) e (5.21), o hamiltoniano livre e de interação de um átomo de dois níveis interagindo com um campo quântico são:

$$\begin{aligned} H_0 &= \hbar\omega_a(a^\dagger a + S_3) \\ V &= \hbar g(X_+ + X_-), \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde os auto operadores do hamiltoniano livre são:

$$\begin{aligned} [H_0, a] &= -\hbar\omega_a a \\ [H_0, \sigma_{ee}] &= 0 \\ [H_0, \sigma_{gg}] &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Considerando que a perda de energia é causada pela má qualidade da cavidade a equação (5.37) é dada por:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{\gamma}{2}\mathcal{L}[a]\rho, \quad (5.42)$$

onde  $\gamma$  descreve o quão rápido a dissipação acontece.

Aplicando a seguinte transformação de pequena rotação não-linear no hamiltoniano (5.40) e no operador densidade (5.42):

$$U = \exp\left[\frac{g}{\Delta}(X_+ - X_-)\right], \quad (5.43)$$

encontramos:

$$H_{\text{ef}} = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\left[\frac{\omega_0}{2} + \frac{g^2}{\Delta}a^\dagger a\right]\sigma_z + \frac{g^2}{\Delta}\hbar\sigma_{ee}, \quad (5.44)$$

e

$$\dot{\rho}_{\text{ef}} = -\frac{i}{\hbar}[H_{\text{ef}}, \rho_{\text{ef}}] + \frac{\gamma}{2}U\mathcal{L}[a]\rho U^\dagger, \quad (5.45)$$

onde utilizamos a relação:

$$UU^\dagger = \left[1 + \frac{g}{\Delta}(X_+ - X_-) + \dots\right] \left[1 - \frac{g}{\Delta}(X_+ - X_-) + \dots\right] = 1. \quad (5.46)$$

Calculando o termo referente à dissipação em (5.45) temos:

$$\begin{aligned} U\mathcal{L}[a]\rho U^\dagger &= 2a\rho_{\text{ef}}a^\dagger - a^\dagger a\rho_{\text{ef}} - \rho_{\text{ef}}a^\dagger a + \frac{g}{\Delta}[(2a\rho_{\text{ef}}S_+ + 2S_- \rho_{\text{ef}}a^\dagger) \\ &\quad - (a^\dagger S_- \rho_{\text{ef}} + S_+ a\rho_{\text{ef}}) - (\rho_{\text{ef}}a^\dagger S_- + \rho_{\text{ef}}S_+ a)] \\ &\quad + \left(\frac{g}{\Delta}\right)^2 (2S_- \rho_{\text{ef}}S_+ - S_+ S_- \rho_{\text{ef}} - \rho_{\text{ef}}S_+ S_-), \end{aligned} \quad (5.47)$$

que podemos escrever como:

$$U\mathcal{L}[a]\rho U^\dagger = \mathcal{L}[a]\rho_{\text{ef}} + \frac{g}{\Delta}\mathcal{L}_1[a, S_\pm]\rho_{\text{ef}} + \left(\frac{g}{\Delta}\right)^2 \mathcal{L}_2[S_-]\rho_{\text{ef}}. \quad (5.48)$$

Substituindo (5.48) em (5.45)

$$\dot{\rho}_{\text{ef}} = -\frac{i}{\hbar}[H_{\text{ef}}, \rho_{\text{ef}}] + \frac{\gamma}{2} \left[ \mathcal{L}[a]\rho_{\text{ef}} + \frac{g}{\Delta}\mathcal{L}_1[a, S_\pm]\rho_{\text{ef}} + \left(\frac{g}{\Delta}\right)^2 \mathcal{L}_2[S_-]\rho_{\text{ef}} \right]. \quad (5.49)$$

Em uma representação de onda girante o termo  $\mathcal{L}_1$  oscila muito mais rapidamente que os demais, por causa de  $a$  e  $a^\dagger$  estarem acompanhados de operadores do átomo, em razão disso  $\mathcal{L}_1$  pode ser eliminado em (5.49)

$$\dot{\tilde{\rho}}_{\text{ef}} = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_{\text{ef}}, \tilde{\rho}_{\text{ef}}] + \frac{\gamma}{2} \left[ \mathcal{L}[a]\tilde{\rho}_{\text{ef}} + \left(\frac{g}{\Delta}\right)^2 \mathcal{L}_2[S_-]\tilde{\rho}_{\text{ef}} \right]. \quad (5.50)$$

Olhando para (5.50) vemos que se inicialmente o campo estiver no vácuo e o estado do átomo for uma superposição dos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  não há energia perdida entre a cavidade e meio ambiente, fato que acontece porque não há troca de fótons entre o átomo e o campo. Nesse limite, a dissipação efetiva se dá através do átomo. Nesse contexto o operador densidade é dado por:

$$\dot{\tilde{\rho}}_{\text{ef}} = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_{\text{ef}}, \tilde{\rho}_{\text{ef}}] + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{g}{\Delta}\right)^2 (2S_- \tilde{\rho}_{\text{ef}}S_+ - S_+ S_- \tilde{\rho}_{\text{ef}} - \tilde{\rho}_{\text{ef}}S_+ S_-). \quad (5.51)$$

## 5.3 Comentários

Apesar de prevermos a utilização do método a todo sistema onde o hamiltoniano possui operadores que formam uma álgebra deformada de  $SU(n)$ , muitas vezes não é simples e nem possível reduzirmos os operadores do hamiltoniano a operadores que possuam a mesma estrutura do grupo  $SU(n)$ . Segundo os artigos (6, 30–32),<sup>4</sup> o método desenvolvido contempla os casos de interações dispersivas, sistemas dissipativos e modelo de Dick no limite de campo forte sem dissipação.

Em (33) o método é utilizado para gerar estados de qubits do movimento vibracional de um íon, em um regime onde a aproximação de onda girante não é feita no hamiltoniano e onde o parâmetro de Lamb-Dicke não é necessariamente pequeno. Em (34) estudou-se a estabilidade da coerência de um sistema quântico, sem a aproximação de Markov ou de Born, para um curto espaço de tempo, utilizando o método de transformação de rotação infinitesimal para a obtenção de um hamiltoniano efetivo para o sistema. Nesse trabalho obteve-se uma expressão geral que permite estimar a escala de ordem do tempo de decoerência para o qual o sistema quântico é instável.

Em (35) os autores utilizam o método de pequenas rotações não-lineares para resolver a equação mestra de um campo quantizado pela cavidade em temperatura não nula que interage dispersivamente com um átomo, interação tipo Jaynes-Cummings, determinando os efeitos de fótons térmicos na dinâmica do emaranhamento.

Um cuidado que devemos ter ao utilizar este método é o de expandirmos a transformação infinitesimal em ordem suficientemente grande de forma que o hamiltoniano contenha todos os termos proporcionais a constante de interesse, que no exemplo 5.2.1 foi  $\frac{g^2}{\Delta}$  e em 5.2.2  $\frac{|g_1|^2}{\Delta_1}$  e  $\frac{|g_2|^2}{\Delta_2}$ .

---

<sup>4</sup>Ver apêndice F.

## 6 Comparação dos métodos

Em vista da escolha de um melhor método para obtenção de hamiltonianos efetivos, iremos comparar algumas grandezas geradas através das técnicas estudadas com as obtidas por cálculo exato.

Por simplificação utilizaremos um dos sistemas mais básicos em Óptica Quântica que possui solução analítica conhecida, um campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis, para verificar o quão bons são os hamiltonianos efetivos obtidos via as aproximações mencionadas nos capítulos anteriores.

As grandezas calculadas são o número médio de fótons, a inversão atômica entre os níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  e a parte real dos coeficientes de amplitude de probabilidade  $C_{g,n}$  e  $C_{e,n}$ . O número médio de fótons é uma medida importante no problema porque é uma grandeza mensurável experimentalmente, assim como a inversão atômica. Através da inversão atômica podemos compreender melhor a dinâmica de excitação e desexcitação atômica. Porém é com o conhecimento das amplitudes de probabilidades que irá ser possível comparar os métodos estudados com o valor previsto exatamente.

Os hamiltonianos efetivos na representação de interação, do sistema composto de um campo quântico interagindo dispersivamente com um átomo de dois níveis, obtidos pelos métodos de eliminação adiabática (EA), dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes (DE), método de pequenas rotações não-lineares (PR) e eliminação adiabática "a la" Knight (EAK) são respectivamente:

$$H_i^{\text{EA}} = \hbar \left( \frac{|g|^2}{\Delta} a^\dagger a - \frac{\Delta}{2} \right) \sigma_z, \quad (6.1)$$

$$H_i^{\text{DE}} = \hbar \frac{|g|^2}{\Delta} (a^\dagger a \sigma_z + \sigma_{ee}), \quad (6.2)$$

$$H_i^{\text{PR}} = \hbar \frac{|g|^2}{\Delta} (a^\dagger a \sigma_z + \sigma_{ee}), \quad (6.3)$$

$$H_i^{\text{EAK}} = \hbar \left( 2 \frac{|g|^2}{\Delta} a^\dagger a - \frac{\Delta}{2} \right) \sigma_z. \quad (6.4)$$

Os hamiltonianos (6.1-6.4) dão origem a coeficientes de amplitude de probabilidade,  $C_{g,n}$  e  $C_{e,n}$ , desacoplados e por isso facilmente manipuláveis. Neste caso basta que façamos uma

boa escolha do estado inicial do sistema para que os valores das amplitudes de probabilidades encontradas pelas aproximações se comportem diferentemente uma das outras, e assim a comparação de qual curva melhor se aproxima do valor exato é imediata <sup>1</sup>.

Escolhendo o estado inicial  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|0\rangle$ , com  $\Delta = 10$  e  $g = 1$ , obtemos os gráficos para o número médio de fótons, figura 6.1, a inversão de população, figura 6.2 e  $\Re(C_{g,0})$ , figura 6.3:

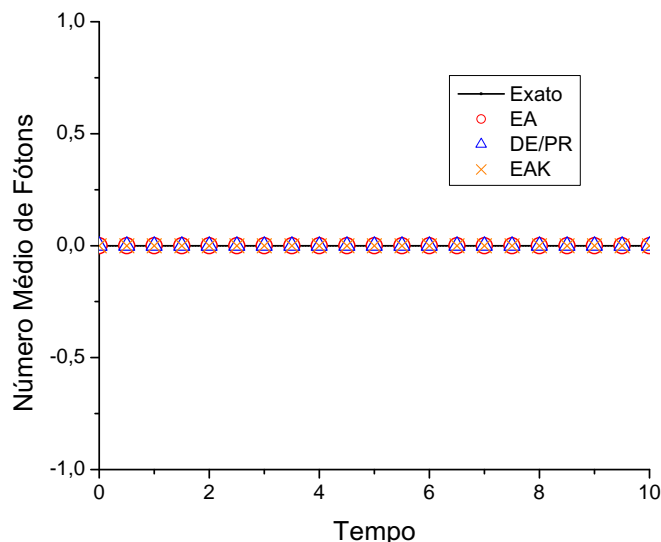


Figura 6.1: Número médio de fótons em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|0\rangle$

O valor encontrado do número médio de fótons e inversão atômica utilizando os métodos já citados, estão de acordo com os valores analíticos esperados.

Na figura 6.3 vemos o comportamento de  $\Re(C_{g,0})$ , podemos notar que as curvas que melhor se aproximam da curva exata são as calculadas pela aproximação de dinâmicas efetivas para hamiltonianos oscilantes e pelo método de pequenas rotações não-lineares. Este fato é interessante pois comprova por comparação dos resultados que o "shift" de energia  $\Delta$  nos hamiltonianos efetivos (6.1) e (6.4) não é previsto.

Utilizando o estado inicial  $|\psi(0)\rangle = |e\rangle|0\rangle$ , com  $\Delta = 10$  e  $g = 1$ , encontramos os gráficos para o número médio de fótons, figura 6.4, e a inversão de população, figura 6.5:

Apesar de nenhum método concordar perfeitamente com as curvas exatas o valor máximo da diferença entre as curvas para o número médio de fótons é de 4% e para a inversão atômica é de quase 8%. Ao escolhermos o estado inicial  $|e, 0\rangle$  há a probabilidade de que o átomo decaia

<sup>1</sup>Vemos aqui que o hamiltoniano efetivo obtido pelos métodos de dinâmica efetiva e pequenas rotações não-lineares são idênticos.



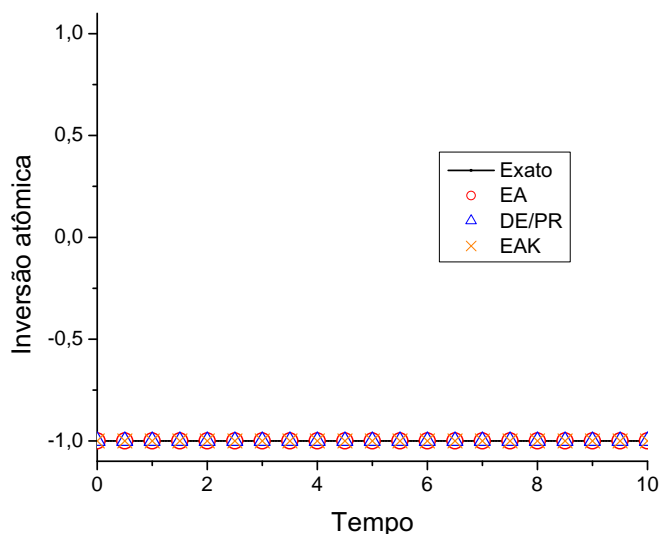


Figura 6.2: Inversão atômica em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|0\rangle$ .

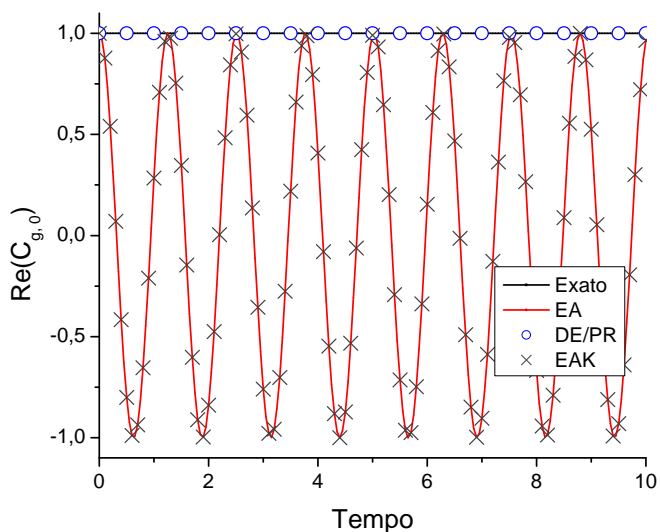


Figura 6.3:  $\Re(C_{g,0})$  em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|0\rangle$ .

para o nível  $|g\rangle$ , por isso há oscilação entre o número médio de fótons 1 e 0 e a inversão atômica 1 e -1.

No comportamento de  $\Re(C_{e,0})$ , na figura 6.6, vemos que o “shift” no nível atômico  $|e\rangle$  é importante para a dinâmica do sistema, fato não previsto pelos métodos da eliminação adiabática e eliminação adiabática “a la” Knight. A curva que mais se aproxima da exata é aquela prevista pelo método de dinâmicas efetivas e pequenas rotações não-lineares.

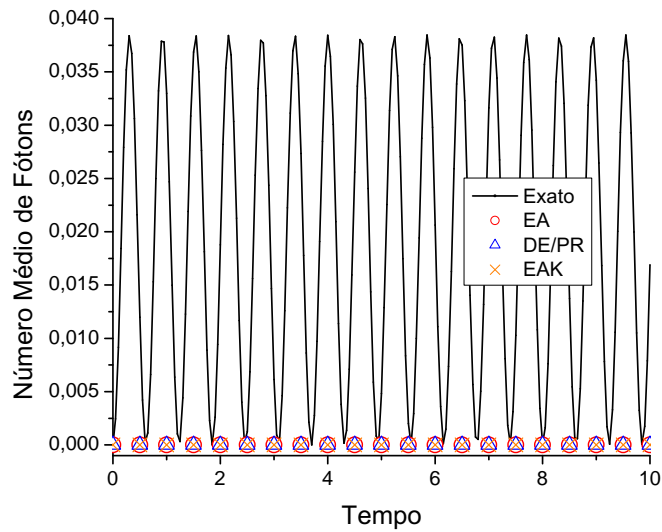


Figura 6.4: Número médio de fótons em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |e\rangle|0\rangle$

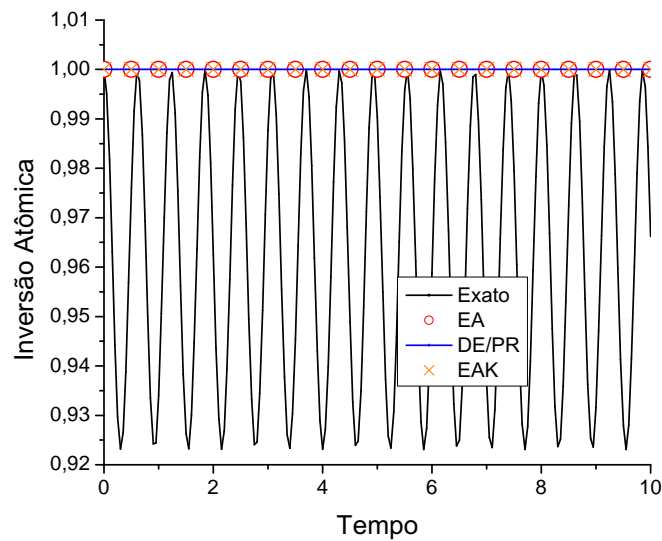


Figura 6.5: Inversão atômica em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |e\rangle|0\rangle$ .

Fazendo uso do estado inicial  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|1\rangle$ , com  $\Delta = 10$  e  $g = 1$  encontramos os gráficos para o número médio de fótons, figura 6.7, inversão de população, figura 6.8 e de  $\Re(C_{e,0})$ , figura 6.9.

A diferença máxima entre os valores calculados exatamente e aqueles obtidos por aproximação para o número médio de fótons e a inversão atômica são respectivamente 4% e 8%. Por causa da forte dessintonia entre a frequência do campo do laser e aquela necessária para a transição atômica o nível  $|e\rangle$  não é efetivamente populado.

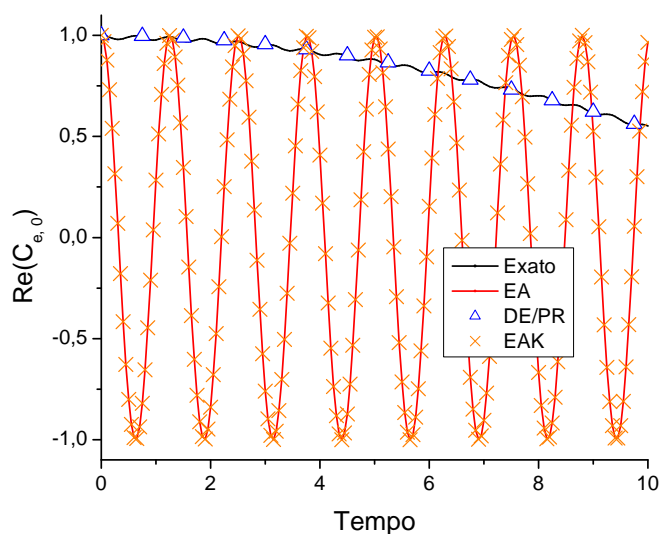


Figura 6.6:  $\Re(C_{e,0})$  em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |e\rangle|0\rangle$ .

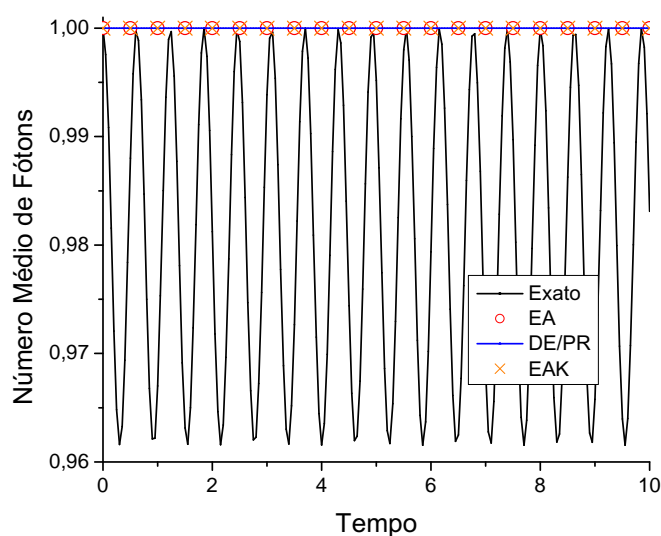


Figura 6.7: Número médio de fótons em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|1\rangle$

Na figura 6.10 mais uma vez verificamos que os métodos de dinâmicas efetivas e de pequenas rotações não-lineares são os que mais se ajustam à curva exata. Podemos notar também que as curvas de  $\Re(C_{g,1})$  calculadas por eliminação adiabática e "a la" Knight se distanciam com o passar do tempo uma da outra.

Em posse destes dados, concluímos que apesar de termos feito uso de um sistema largamente estudado e que possui solução analítica conhecida<sup>2</sup>, conseguimos verificar alguns regimes de

<sup>2</sup>Ver "Quantum Optics", Cambridge University Press (1952), cap. 6 pag. 198.

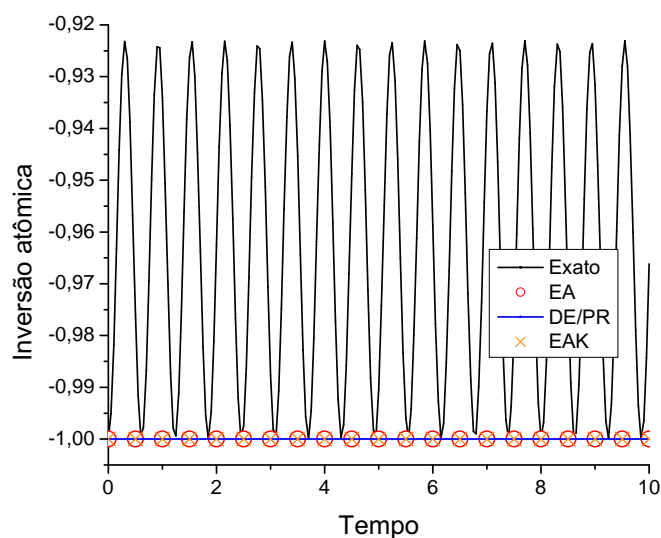


Figura 6.8: Inversão atômica em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|1\rangle$ .

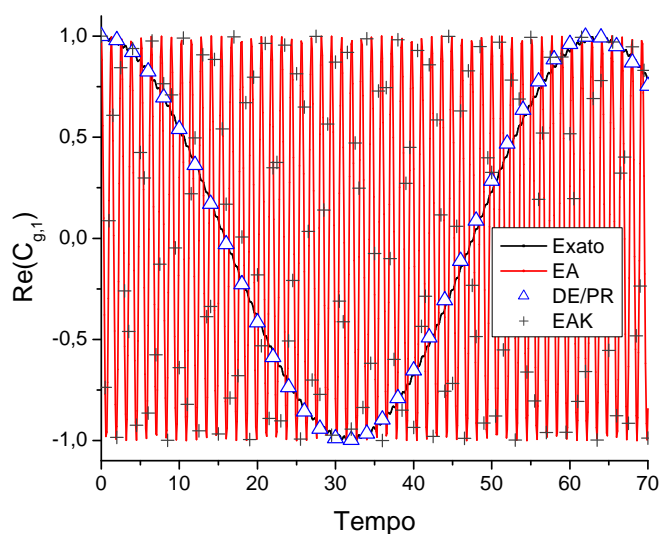


Figura 6.9:  $\Re(C_{g,1})$  em função do tempo para  $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|1\rangle$ .

validade das aproximações e verificar quais os métodos para a obtenção de hamiltonianos efetivos são mais confiáveis nestes casos.

A dependência do referencial para o método de eliminação adiabática pode ter sido o fator gerador da discrepância entre o valor aproximado das grandezas e o exato. Também vimos que com a eliminação adiabática não pudemos prever o "shift" de energia no nível  $|e\rangle$ , isso por causa da ambiguidade desta técnica gerada devido à utilização de comutadores em sua construção. Já o método de eliminação adiabática proposto por Knight além de não prever o "shift" de energia

---

no nível  $|e\rangle$ , não fornece um resultado correto quanto aos acoplamentos efetivos, dando origem a um fator "2" que não está presente na solução exata.

## ***APÊNDICE A – Cálculo da hamiltoniana de um elétron em um campo eletromagnético***

A força que um elétron sente na presença de um campo eletromagnético é dada pela força de Lorentz:

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (\text{A.1})$$

onde  $e$  é a carga do elétron,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são os vetores campo elétrico e campo de indução magnética respectivamente,  $\vec{v}$  é o vetor velocidade do elétron e  $c$  é a velocidade da luz.

Fazendo uso do formalismo Lagrangiano determinaremos a equação de movimento do elétron no campo eletromagnético e para isso primeiramente temos que encontrar a Lagrangiana do sistema.

A Lagrangiana é um funcional que depende de coordenadas generalizadas,  $\vec{q}$  e  $\dot{\vec{q}}$ , e da variação temporal destas. Em mecânica conseguimos determinar a posição de um corpo univocamente em cada instante de tempo através de coordenadas generalizadas,  $q_i$ .

A Lagrangiana de um sistema é definida como:

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}), \quad (\text{A.2})$$

onde  $T$  é a energia cinética e  $U$  o potencial generalizado.

Partindo das equações de Lagrange deduzimos as equações de Newton:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{A.3})$$

portanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (\text{A.4})$$

Com base na igualdade:

$$F_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (\text{A.5})$$

vemos que o potencial generalizado dá origem a forças generalizadas

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (\text{A.6})$$

Com o auxílio de duas das equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

podemos reescrever os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em termos de potenciais  $\vec{A}$  e  $\phi$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.9) e (A.8) em (A.1)

$$F_i = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} (\dot{q}_j B_k - \dot{q}_k B_j) \right], \quad (\text{A.10})$$

com  $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$  e  $[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$

$$F_i = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} \dot{q}_j \left( \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right) - \frac{1}{c} \dot{q}_k \left( \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \right) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Comparando (A.11) com (A.6)

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial q_i} + \frac{1}{c} \left( \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} + \dot{q}_k \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \right) \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{e}{c} \left( -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \dot{q}_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \dot{q}_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \right), \quad (\text{A.13})$$

o que nos dá

$$U = e\phi - \frac{e}{c} \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.14) em (A.15)

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\vec{q}}^2}{2} - e\phi + e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}, \quad (\text{A.15})$$

utilizando a relação  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + eA_i, \quad (\text{A.16})$$

onde  $p_i$  é um dos momentos generalizados.

Encontrando  $\dot{q}_i$  de (A.16) e substituindo em (A.15) temos:

$$\mathcal{L} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(e\vec{A})^2}{2m} - e\phi. \quad (\text{A.17})$$

Conhecida a Lagrangiana e o momento conjugado, podemos encontrar a hamiltoniana do elétron imerso no campo eletromagnético através da operação:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi, \quad (\text{A.19})$$

com  $i$  sendo um dos eixos  $x, y, z$ .



## APÊNDICE B – Equações dos Campos de radiação

Com o auxílio das equações de Maxwell,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

a última equação nos diz que  $\vec{B}$  pode ser escrito como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (B.2) na segunda equação de (B.1)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}), \quad (\text{B.3})$$

que resulta em

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (\text{B.4})$$

Utilizando as seguintes relações constitutivas no vácuo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

e as equações (B.2) e (B.4) temos que, na ausência de fontes de corrente, a primeira equação de (B.1) é escrita como:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right), \quad (\text{B.6})$$

que é igual a

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi \right). \quad (\text{B.7})$$

Adotando o gauge de Coulomb  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  e na ausência de fontes de carga,  $\rho = 0$

$$\nabla^2 \vec{A} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}. \quad (\text{B.8})$$

Se há condição de contorno periódica  $\vec{A}$  pode ser escrita como uma série de Fourier:

$$\vec{A} = \Re \left( \sum_{\vec{k}} \sum_l \mathcal{A}_l(k) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) Q_k(t) \hat{e}_l \right), \quad (\text{B.9})$$

onde  $k = \omega/c$ ,  $\hat{e}_l$  é o versor na direção  $l$  e  $\Re(f)$  é um operador que retém somente a parte real de  $f$ . Devido à periodicidade de  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , os valores que o vetor de onda  $\vec{k}$  pode assumir são dados por,

$$k_l = \frac{2\pi}{L} n_l, \quad (\text{B.10})$$

com  $n_l = 1, \dots$  e  $l = x, y, z$ .

Substituindo (B.9) e  $\rho = 0$  em (B.4) os campos clássicos obedecem as equações:

$$\vec{E} = -\Re \left( \sum_{\vec{k}, l} \mathcal{A}_l(k) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \dot{Q}_k(t) \hat{e}_l \right), \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{B} = \Re \left( \sum_{\vec{k}, l} ik \mathcal{A}_l(k) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) Q_k(t) \hat{k} \times \hat{e}_l \right). \quad (\text{B.12})$$

Para calcularmos a energia contida no campo eletromagnético iremos necessitar das propriedades das funções ortogonais. Funções ortogonais são funções complexas de variável real que satisfazem as seguintes relações:

$$(\phi_n \cdot \bar{\phi}_m) = \begin{cases} \int_a^b \phi_n(x) \bar{\phi}_m(x) dx = 0, m \neq n \\ \int_a^b \phi_n(x) \bar{\phi}_m(x) dx > 0, m = n, \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

onde  $(\phi_n \cdot \bar{\phi}_m)$  representa o produto entre duas funções.

Se considerarmos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  funções complexas, a energia contida no campo eletromagnético é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dv \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}', l} \frac{\mathcal{A}_l(k) \mathcal{A}_l(k')}{2} \int_V \left[ \epsilon_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}) |\dot{Q}_k(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(-k')}{\mu_0} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}) |Q_k(t)|^2 dv \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Sabendo que  $e^{inx}$  e  $e^{imx}$  são funções ortogonais, utilizaremos as propriedades destas para calcularmos a integral acima

$$(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}) = \int_V \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \exp(-i\vec{k}'\cdot\vec{r}) dv = (2L)^3 \delta_{\vec{k}'=\vec{k}}. \quad (\text{B.15})$$

Então utilizando as relações  $k = \frac{2\pi n}{L}$  e  $\sum \mathcal{A}_l^2(k) = \mathcal{A}_n^2$ , (B.14) é:

$$\mathcal{H}_c = \sum_n \frac{1}{2} [m_n |\dot{Q}_n(t)|^2 + m_n v_n^2 |Q_n(t)|^2], \quad (\text{B.16})$$

onde  $m_n = 8\mathcal{A}_n^2 L^3 \epsilon_0$  e  $v_n^2 = \left(\frac{2\pi n}{L} c\right)^2$ .

## *APÊNDICE C – Integração formal da equação de Liouville-Von Neumann*

Com base no Hamiltoniano abaixo, as equações dos elementos do operador densidade, utilizando a equação de Liouville-Von Neumann, são dadas por:

$$H = \hbar \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar \Omega (\sigma_+ e^{i(k\hat{x} - \omega t)} + h.c), \quad (C.1)$$

$$\dot{\rho}_{ee} = -i(\Omega \rho_{ge} - \Omega^* \rho_{eg}), \quad (C.2)$$

$$\dot{\rho}_{eg} = -i[\delta \rho_{eg} + \Omega(\rho_{gg} - \rho_{ee})], \quad (C.3)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = i(\Omega \rho_{ge} - \Omega^* \rho_{eg}). \quad (C.4)$$

Utilizando a seguinte mudança de variável

$$\rho_{eg}(t) \equiv \beta(t), \quad (C.5)$$

$$\rho_{ee} - \rho_{gg} \equiv \Theta(t),$$

podemos escrever (C.3) como:

$$\dot{\beta} = -i\delta\beta + i\Omega\Theta. \quad (C.6)$$

Definindo  $\beta \equiv e^{-i\delta t} \Phi(t)$

$$\dot{\Phi} = i\Omega\Theta e^{i\delta t}. \quad (C.7)$$

Integrando (C.7) formalmente

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= i\Omega \int_0^t e^{i\delta t'} \Theta(t') dt', \\ &= \Phi(0) + \frac{\Omega}{\delta} [\Theta(t) e^{i\delta t} - \Theta(0)] - \frac{\Omega}{\delta} \int_0^t e^{i\delta t'} \dot{\Theta} dt', \end{aligned} \quad (C.8)$$

integrando o terceiro termo de  $\Phi(t)$  temos:

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{\Omega}{\delta} [\Theta(t) e^{i\delta t} - \Theta(0)] + i \frac{\Omega}{\delta^2} [\dot{\Theta}(t) e^{i\delta t} - \dot{\Theta}(0)] + i \frac{\Omega}{\delta^2} \int_0^t e^{i\delta t'} \ddot{\Theta} dt'. \quad (C.9)$$

Das equações (C.2) e (C.4)

$$\dot{\Theta} = \dot{\rho}_{ee} - \dot{\rho}_{gg} = -2i\Omega(\rho_{ge} - \rho_{eg}) \equiv -2i\Omega\Gamma, \quad (\text{C.10})$$

que substituindo em C.9 dá:

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{\Omega}{\delta}[\Theta(t)e^{i\delta t} - \Theta(0)] + 2\frac{\Omega^2}{\delta^2}[\Gamma(t)e^{i\delta t} - \Gamma(0)] + 2\frac{\Omega^2}{\delta^2} \int_0^t e^{i\delta t'} \Gamma dt'. \quad (\text{C.11})$$

Para  $|\delta| \gg |\Omega|$

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{\Omega}{\delta}[\Theta(t)e^{i\delta t} - \Theta(0)]. \quad (\text{C.12})$$

Fazendo a substituição contrária de (C.5),  $\rho_{eg}(t) \equiv \Phi(t)e^{-i\delta t}$ , substituindo em (C.12)

$$\rho_{eg}(t) = \Phi(0)e^{-i\delta t} - \frac{\Omega}{\delta}\Theta(0)e^{-i\delta t} + \frac{\Omega}{\delta}\Theta(t). \quad (\text{C.13})$$

Fazendo uso da média temporal de  $\rho_{eg}$ ,  $\overline{\rho_{eg}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_{eg}(t') dt'$

$$\rho_{eg} \simeq \frac{\Omega}{\delta}(\rho_{ee} - \rho_{gg}). \quad (\text{C.14})$$

Vemos que os níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  estão desacoplados, como o esperado!

## ***APÊNDICE D – Perturbação de Dyson para o operador evolução***

A equação que o operador de evolução tem de obedecer

$$i\hbar \frac{d\tilde{U}(t, t_0)}{dt} = H_I(t)\tilde{U}(t, t_0), \quad (\text{D.1})$$

$$\tilde{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t')\tilde{U}(t', t_0)dt', \quad (\text{D.2})$$

agindo iterativamente

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t') \left[ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} H_I(t'')\tilde{U}(t'', t_0)dt'' \right] dt' \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t')dt' + \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t')H_I(t'') + \dots \\ &+ \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} H_I(t')H_I(t'') \dots H_I(t^{(n)}), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\tilde{U}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t')dt'}, \quad (\text{D.4})$$

$$\mathcal{T}[H_I(t_1)H_I(t_2)] = \begin{cases} H_I(t_1)H_I(t_2) \text{ se } t_1 > t_2, \\ H_I(t_2)H_I(t_1) \text{ se } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

## APÊNDICE E – Convolução

A convolução de um operador  $O(t)$  é dada por:

$$\overline{O}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')O(t')dt', \quad (\text{E.1})$$

com  $f \in \mathbb{R}$ .

Podemos encontrar a convolução da derivada temporal do operador  $O(t)$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial O(t)}{\partial t}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} O(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t'} [f(t-t')O(t')] dt' - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t'} f(t-t') O(t') dt' \\ &= f(t-t')O(t')|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t'} f(t-t') O(t') dt', \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

fazendo a seguinte mudança de variável  $t - t' = x$  vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{E.3})$$

Substituindo a relação (E.3) em (E.2)

$$\overline{\frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}} = f(t-t')\hat{O}(t')|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')\hat{O}(t')dt', \quad (\text{E.4})$$

se  $f(t-t')|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

$$\overline{\frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\hat{O}(t)}. \quad (\text{E.5})$$

## APÊNDICE F – Campo forte no modelo de Dicke

Utilizando o método de Transformação de Rotação Infinitesimal encontraremos o Hamiltoniano efetivo de um campo quântico ressonante à transição de  $N$  átomos idênticos, de dois níveis, no limite de campo forte<sup>1</sup>.

O Hamiltoniano da interação átomo-campo é descrito pelo modelo Jaynes-Cummings:

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_0 S_z + g(a S_+ + a^\dagger S_-), \quad (\text{F.1})$$

onde os operadores do átomo são:

$$\begin{aligned} S_z &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_z^i}{2}, \\ S_+ &= \sum_{i=1}^N \sigma_{eg}^i, \\ S_- &= \sum_{i=1}^N \sigma_{ge}^i. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Reescrevendo o Hamiltoniano (F.1) em termos de suas constantes de movimento temos:

$$H = H_0 + V, \quad (\text{F.3})$$

$$H_0 = \omega \mathcal{N}, \quad (\text{F.4})$$

$$V = \Delta S_z + g(a S_+ + a^\dagger S_-), \quad (\text{F.5})$$

onde  $\mathcal{N} = a^\dagger a + S_3$ ,  $\Delta = \omega_0 - \omega$  e  $[\mathcal{N}, H] = 0$ .

As relações de comutação obedecidas pelos operadores atômicos (F.2) são as mesmas do grupo de rotação SU(2).

Definindo operadores de fase para o campo eletromagnético de modo que os operadores de criação e destruição possam ser escritos em termos desses operadores:

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \exp(-i\hat{\phi}) \sqrt{\hat{n} + 1}, \\ a &= \sqrt{\hat{n} + 1} \exp(i\hat{\phi}), \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

---

<sup>1</sup>Como feito em (32)



e substituindo (F.6) em (F.1), com o campo quântico em ressonância com a transição,  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , obtemos o Hamiltoniano:

$$H = \omega \mathcal{N} + g[\sqrt{\hat{n} + 1} \exp(i\hat{\phi})S_+ + \exp(-i\hat{\phi})\sqrt{\hat{n} + 1}S_-]. \quad (\text{F.7})$$

O operador de fase,  $e^{i\hat{\phi}}$ , foi primeiramente definido em (36), onde buscou-se encontrar um operador unitário que possuísse autoestados de fase bem definida e que suas propriedades coincidissem com as que normalmente associamos a fase <sup>2</sup>. Os autoestados associados a este operador são aqueles definidos em (36)

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp[in\theta] |n\rangle. \quad (\text{F.8})$$

O estado (F.8) tem um desenvolvimento no tempo muito natural e simples para um oscilador harmônico ou um modo do campo eletromagnético:

$$|\theta\rangle \rightarrow |\theta - \omega t\rangle. \quad (\text{F.9})$$

Selecionando um estado de fase de referência em (F.8),  $|\theta_0\rangle$ , onde  $s$  possa ser arbitrariamente grande, de modo a ser permitido tender a infinito quando valores médios são calculados, podemos construir estados de fase ortogonais, da seguinte maneira:

$$|\theta_0\rangle = (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp[in\theta_0] |n\rangle, \quad (\text{F.10})$$

trocando apenas  $\theta_0$  por  $\theta_m$ :

$$|\theta_m\rangle = (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp[in\theta_m] |n\rangle, \quad (\text{F.11})$$

com  $\langle \theta_m | \theta_m \rangle = 1$ .

Impondo condição de ortogonalidade entre  $\theta_0$  e  $\theta_m$ , os estados  $|\theta_m\rangle$  formarão uma base completa ortogonal, onde a seguinte relação entre  $\theta_0$  e  $\theta_m$  deve ser satisfeita:

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2m\pi}{s+1} (m = 0, 1, \dots, s). \quad (\text{F.12})$$

Como os estados  $|\theta_m\rangle$  pertencem a uma base completa ortogonal, nós podemos expandir o estado de Fock,  $|n\rangle$ , em termos dessa base:

$$|n\rangle = \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m | n \rangle = (s+1)^{-1/2} \sum_{m=0}^s \exp[-in\theta_m] |\theta_m\rangle. \quad (\text{F.13})$$

---

<sup>2</sup>Ver (37)

Pode-se notar em (F.13) que o estado com número de fótons  $|n\rangle$  tem a mesma probabilidade de ser encontrado em qualquer estado de fase  $|\theta_m\rangle$ .

Em posse das relações entre o operador de fase e o número de fótons construídas a partir de (F.13) e a condição de que os estados  $|\theta_m\rangle$  são autoestados deste operador<sup>3</sup>, percebemos que o operador de fase é não unitário:

$$\begin{aligned} \langle n | \exp(i\hat{\phi}) \exp(-i\hat{\phi}) | n' \rangle &= \delta_{n,n'}, \\ \langle n | \exp(-i\hat{\phi}) \exp(i\hat{\phi}) | n' \rangle &= \delta_{n,n'} \text{ com } n' > 0, \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

o que leva a

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\phi}) \exp(-i\hat{\phi}) &= I, \\ \exp(-i\hat{\phi}) \exp(i\hat{\phi}) &= I - |0\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Embora o operador de fase não seja unitário segundo (F.15), vimos que ele tem uma decomposição espectral em (F.13). Visando corrigir o problema da não unitariedade vamos considerar que o número de fótons total é muito maior que o número de átomos, e então não haverá número de fótons nulo na cavidade, e nesta condição, o operador de fase é unitário.

Utilizando a transformação a seguir vamos conseguir expandir o Hamiltoniano (F.7) em termos de um menor parâmetro do sistema

$$Q = \exp[i\hat{\phi}(S_z + C)], \quad (\text{F.16})$$

onde

$$Q(|k, \gamma\rangle_{\text{at}} \otimes |n\rangle_c) = \exp(i\hat{\phi}k) |k, \gamma\rangle_{\text{at}} \otimes |n\rangle_c = |k, \gamma\rangle_{\text{at}} \otimes |n-k\rangle_c. \quad (\text{F.17})$$

O conjunto  $\{|k, \gamma\rangle_{\text{at}}\}$  é a base de representação da álgebra atômica:

$$S_z |k, \gamma\rangle_{\text{at}} = (k - C) |k, \gamma\rangle_{\text{at}}, \quad (\text{F.18})$$

onde  $k$  é o número de excitação do sistema atômico,  $0 \leq k \leq N$ ,  $N$  é o número de átomos,  $C$  é uma constante que corresponde ao mais baixo nível de energia do sistema quando  $k = 0$  e  $\gamma$  representa todos os outros índices atômicos necessários para que o estado seja bem descrito.

A transformação (F.16) aplicada aos operadores do átomo e campo oferecem os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} QS_+Q^{-1} &= \exp(i\hat{\phi})S_+, \\ QS_-Q^{-1} &= \exp(-i\hat{\phi})S_-, \\ Q(\hat{n} - C)Q^{-1} &= \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

---

<sup>3</sup> $\exp(-i\hat{\phi})|n\rangle_c = |n+1\rangle_c$  e  $\exp(i\hat{\phi})|n\rangle_c = |n-1\rangle_c$  (com  $n > 0$ ).

Substituindo (F.19) em (F.7) obtemos o Hamiltoniano transformado:

$$\begin{aligned}
 H &= \omega Q(\hat{n} - C)Q^{-1} + g[\sqrt{\hat{n} + 1}QS_+Q^{-1} + QS_-Q^{-1}\sqrt{\hat{n} + 1}] \\
 &= Q\left\{\omega(\hat{n} - C) + g[(Q^{-1}\sqrt{\hat{n} + 1}Q)S_+ + S_-(Q^{-1}\sqrt{\hat{n} + 1}Q)]\right\}Q^{-1} \\
 &= Q\{\omega\hat{v} + g[\sqrt{\hat{v} - S_z + 1}S_+ + S_-\sqrt{\hat{v} - S_z + 1}]\}Q^{-1} = Q\tilde{H}Q^{-1}, \quad (\text{F.20})
 \end{aligned}$$

$$\hat{v} = \hat{n} - C.$$

Expandindo a raiz  $\sqrt{\hat{n} - S_z + 1}$  para  $\langle \hat{v} \rangle \gg \langle S_z \rangle$ , ou seja  $n \gg N, k$

$$\sqrt{\hat{v} - S_z + 1} = \sqrt{\hat{v} + 1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{-S_z + 1/2}{\hat{v} + 1/2} \right) - \frac{1}{2^3} \left( \frac{-S_z + 1/2}{\hat{v} + 1/2} \right)^2 + \dots \right], \quad (\text{F.21})$$

onde  $\left( \frac{-S_z + 1/2}{\hat{v} + 1/2} \right) \ll 1$ . Definindo a variável  $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\hat{v} + 1/2}}$ , e substituindo-a em (F.21):

$$\sqrt{\hat{v} - S_z + 1} = \frac{1}{2\varepsilon} + \varepsilon(-S_z + 1/2) - \varepsilon^3(-S_z + 1/2)^2 + \dots \quad (\text{F.22})$$

Utilizando a relação acima em  $\tilde{H}$ :

$$\begin{aligned}
 \tilde{H} &\cong \omega\hat{v} + g \left\{ \left[ \frac{1}{2\varepsilon} + \varepsilon(-S_z + 1/2) - \varepsilon^3(-S_z + 1/2)^2 + \dots \right] S_+ \right. \\
 &\quad \left. + S_- \left[ \frac{1}{2\varepsilon} + \varepsilon(-S_z + 1/2) - \varepsilon^3(-S_z + 1/2)^2 + \dots \right] \right\}. \quad (\text{F.23})
 \end{aligned}$$

Considerando as seguintes operações e substituições:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\varepsilon}(S_+ + S_-) &= \frac{1}{\varepsilon}S_x, \\
 \varepsilon[(-S_z + 1/2)S_+ + S_-(-S_z + 1/2)] &= -\varepsilon\{S_z, S_x\}, \\
 \varepsilon^3[(-S_z + 1/2)^2S_+ + S_-(-S_z + 1/2)^2] &= -\varepsilon^3\{S_z, \{S_z, S_x\}\},
 \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

$$\tilde{H} = \omega\hat{v} + g \left( \frac{1}{\varepsilon}S_x - \varepsilon\{S_z, S_x\} - \varepsilon^3\{S_z, \{S_z, S_x\}\} + \mathcal{O}(\varepsilon^5) \right), \quad (\text{F.25})$$

onde  $\{, \}$  representa a relação de anticomutação entre os operadores e  $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ .

Para a utilização do método de rotações infinitesimais para Hamiltonianos efetivos<sup>4</sup> temos que dividir o Hamiltoniano acima em parte livre e perturbada. Também é necessário que o Hamiltoniano livre esteja escrito em uma base diagonal, para isso aplicamos a seguinte rotação:

$$U_y = \exp\left(i\frac{\pi}{2}S_y\right), \quad (\text{F.26})$$

<sup>4</sup>Ver capítulo 5.

$$H' = U_y \tilde{H} U_y^\dagger = \omega \hat{v} + g \left[ \frac{1}{\varepsilon} X_3 + \varepsilon (X_+ + X_-) - \frac{\varepsilon^3}{2} \{S_x, X_+ + X_-\} \right], \quad (\text{F.27})$$

onde os operadores

$$\begin{aligned} X_+ &= \frac{1}{2} \{S_z, S_+\}, \\ X_- &= \frac{1}{2} \{S_z, S_-\}, \\ X_3 &= S_z, \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

e o polinômio associado é

$$[X_+, X_-] = P(X_3, S^2) = 4X_3^3 - \frac{1}{2}X_3(4S^2 - 1), \quad (\text{F.29})$$

com  $S^2 = \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right)$ .

Definindo a seguinte transformação de rotação infinitesimal, como descrita pelo método já citado

$$U = \exp[\varepsilon^2 (X_+ - X_-)], \quad (\text{F.30})$$

e utilizando a expansão de Baker-Hausdorff

$$\begin{aligned} UX_3U^\dagger &\simeq X_3 - \varepsilon^2 (X_+ + X_-) - \varepsilon^4 P(X_3, S^2), \\ U(X_+ + X_-)U^\dagger &\simeq (X_+ + X_-) + 2\varepsilon^2 P(X_3, S^2), \\ U\{S_x, X_+ + X_-\}U^\dagger &\simeq \{S_x, \{S_z, S_x\}\} = \frac{S_x}{2}, \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

encontramos o Hamiltoniano transformado:

$$\begin{aligned} H' &\simeq \omega \hat{v} + g \left[ \frac{1}{\varepsilon} X_3 + 2\varepsilon^3 P(X_3, S^2) - \frac{\varepsilon^3}{2} \{S_x, \{S_z, S_x\}\} \right], \\ &= \omega \hat{v} + g \left\{ \frac{1}{\varepsilon} X_3 + \varepsilon^3 [8X_3^3 - X_3(4S^2 - 3/2)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

Aplicando a transformação inversa a (F.26) o Hamiltoniano efetivo encontrado é:

$$\tilde{H}_{\text{ef}} = \omega \hat{v} + g \left[ \frac{1}{\varepsilon} S_x + \varepsilon^3 [8S_x^3 - S_x(4S^2 - 3/2)] \right]. \quad (\text{F.33})$$

## *Referências Bibliográficas*

- 1 LOUISELL, W. H. **Quantum statistical properties of radiation**. New York: Wiley, 1990. Includes bibliographical references. ISBN 0471547859.
- 2 ORSZAG, M. **Quantum optics: including noise reduction, trapped ions, quantum trajectories, and decoherence**. Berlin: Springer-Verlang, 2000. (Advanced texts in physics). Includes bibliographical references (p. [341]-354) and index. ISBN 3540650083 (alk. paper).
- 3 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. **Quantum optics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. Includes bibliographical references and index. ISBN 0521434580.
- 4 JAMES, D. F. V. Quantum computation with hot and cold ions: An assessment of proposed schemes. **Fortschritte der Physik-Progress of Physics**, v. 48, p. 823–837, 2000.
- 5 JAMES, D. F. V.; JERKE, J. Effective hamiltonian theory and its applications in quantum information. **Canadian Journal of Physics**, v. 85, n. 6, p. 625–632, JUN 2007.
- 6 KLIMOV, A. B.; SANCHEZ-SOTO, L. L. Method of small rotations and effective hamiltonians in nonlinear quantum optics. **Physical Review Letters**, v. 61, n. 11, p. 1, DEC 2000.
- 7 LUGIATO, L. A.; MANDEL, P.; NARDUCCI, L. M. Adiabatic elimination in nonlinear dynamical-systems. **Physical Review A**, v. 29, n. 3, p. 1438–1452, 1984.
- 8 CIRAC, J. I. et al. Laser cooling of trapped ions in a standing wave. **Physical Review A**, v. 46, n. 5, p. 2668–2681, Sep. 1992.
- 9 DUBETSKY, B.; BERMAN, P. R. Atom-field interactions: Density-matrix equations including quantization of the center-of-mass motion. **Physical Review A**, v. 53, n. 1, p. 390–399, JAN 1996.
- 10 RODRIGUES, R. L.; MOUSSA, M. H. Y.; VILLAS-BOAS, C. J. Engineering phonon-photon interactions with a driven trapped ion in a cavity. **Physical Review A**, v. 74, n. 6, p. 063811, DEC 2006.
- 11 IVANOV, P. A.; VITANOV, N. V.; BERGMANN, K. Spontaneous emission in stimulated raman adiabatic passage. **Physical Review A**, v. 72, n. 5, p. 053412, NOV 2005.
- 12 DAVIDOVICH, L.; ORSZAG, M.; ZAGURY, N. Quantum nondemolition measurements of vibrational populations in ionic traps. **Physical Review A**, v. 54, n. 6, p. 5118–5125, DEC 1996.
- 13 HAKEN, H. **Synergetics: an introduction : nonequilibrium phase transitions and self-organization in physics, chemistry, and biology ; with 724 figures**. Berlin: Springer-Verlag, 1977. Includes bibliographical references and index. ISBN 0387078851.

- 14 POYATOS, J. F.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 23, p. 4728–4731, DEC 2 1996.
- 15 ZHENG, S.; GUO, G. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity qed. **Physical Review Letters**, v. 85, n. 11, p. 2392–2395, SEP 11 2000.
- 16 CARVALHO, A. R. R. et al. Decoherence, pointer engineering, and quantum state protection. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 22, p. 4988–4991, MAY 2001.
- 17 LIDAR, D. A.; WHALEY, K. B. **Decoherence-Free Subspaces and Subsystems**. 2003. 83 p.
- 18 WERLANG, T. et al. **Generation of decoherence-free displaced squeezed states of radiation fields and a squeezed reservoir for atoms in cavity QED**. 2008.
- 19 STEINBACH, J.; TWAMLEY, J.; KNIGHT, P. L. Engineering two-mode interactions in ion traps. **Physical Review A**, v. 56, n. 6, p. 4815–4825, DEC 1997.
- 20 KUANG, L. M.; ZHOU, L. Generation of atom-photon entangled states in atomic bose-einstein condensate via electromagnetically induced transparency. **Physical Review A**, v. 68, n. 4, p. 043606, Oct. 2003.
- 21 VILLAS-BOAS, C. J. et al. Squeezing arbitrary cavity-field states through their interaction with a single driven atom. **Physical Review A**, v. 68, n. 6, p. 061801, Dec. 2003.
- 22 GHERI, K. M.; ALGE, W.; GRANGIER, P. Quantum analysis of the photonic blockade mechanism. **Physical Review A**, v. 60, n. 4, p. R2673–R2676, Oct. 1999.
- 23 BRION, E.; PEDERSEN, L. H.; MOLMER, K. Adiabatic elimination in a lambda system. **Journal of Physics A - Mathematical and Theoretical**, v. 40, n. 5, p. 1033–1043, FEB 2 2007.
- 24 JOACHAIN, C. J. **Quantum collision theory**. Amsterdam: North-Holland Pub. Co. American Elsevier Pub. Co., 1975. Includes bibliographical references and indexes. ISBN 0444106626.
- 25 JONATHAN, D.; PLENIO, M. B. Light-shift-induced quantum gates for ions in thermal motion. **Physical Review Letters**, v. 87, n. 12, p. 127901, Sep. 2001.
- 26 XIAO, Y. F. et al. Quantum phase gate in an optical cavity with atomic cloud. **Physical Review A**, v. 74, n. 4, p. 044303, Oct. 2006.
- 27 PRADO, F. O. et al. Bilinear and quadratic hamiltonians in two-mode cavity quantum electrodynamics. **Physical Review A**, v. 73, n. 4, p. 043803, Mar. 2006.
- 28 VILLAS-BOAS, C. J.; MOUSSA, M. H. Y. One-step generation of high-quality squeezed and epr states in cavity qed. **European Physical Journal D**, v. 32, n. 1, p. 147–151, JAN 2005.
- 29 XUE, Z. Y.; WANG, Z. D.; ZHU, S. L. Physical implementation of topologically decoherence-protected superconducting qubits. **Physical Review A**, v. 77, n. 2, p. 024301, Feb. 2008.

- 30 KLIMOV, A. B. et al. Effective hamiltonians in quantum optics: a systematic approach. **Journal of Modern Optics**, v. 49, n. 13, p. 2211–2226, NOV 2002.
- 31 KLIMOV, A. B. et al. Master equations for effective hamiltonians. **Journal of Optics B-Quantum and Semiclassical Optics**, v. 5, n. 1, p. 34–39, FEB 2003.
- 32 KLIMOV, A. B.; CHUMAKOV, S. M. Semiclassical quantization of the evolution operator for a class of optical-models. **Physics Letters A**, v. 202, p. 145–154, JUN 1995.
- 33 AGUILAR, L. M. A.; MOYA-CESSA, H. Generalized qubits of the vibrational motion of a trapped ion. **Physical Review A**, v. 65, n. 5, p. 053413, Part B MAY 2002.
- 34 ROA, L.; KRUEGEL, A.; SAAVEDRA, C. Quantum state stability against decoherence. **Physics Letters A**, v. 366, n. 6, p. 563–568, JUL 9 2007.
- 35 OBADA, A. S. F.; HESSIAN, H. A.; MOHAMED, A. B. A. The effects of thermal photons on entanglement dynamics for a dispersive jaynes-cummings model. **Physics Letters A**, v. 372, n. 20, p. 3699–3706, MAY 2008.
- 36 PEGG, D. T.; BARNETT, S. M. Unitary phase operator in quantum-mechanics. **Europhysics Letters**, v. 6, n. 6, p. 483–487, JUL 1988.
- 37 LOUDON, R. **The Quantum Theory of Light**. [S.l.]: Oxford University Press, 1973.