

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GERAÇÃO E PROTEÇÃO DE ESTADOS  
COMPRIMIDOS DO CAMPO E ESTADOS  
ATÔMICOS EMARANHADOS EM CAVIDADES  
ÓPTICAS

Daniel Zini Rossatto

São Carlos

Março/2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GERAÇÃO E PROTEÇÃO DE ESTADOS  
COMPRIMIDOS DO CAMPO E ESTADOS  
ATÔMICOS EMARANHADOS EM CAVIDADES  
ÓPTICAS

Daniel Zini Rossatto

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas

São Carlos

Março/2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

R823gp

Rossatto, Daniel Zini.

Geração e proteção de estados comprimidos do campo e estados atômicos emaranhados em cavidades ópticas / Daniel Zini Rossatto. -- São Carlos : UFSCar, 2010. 50 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Teoria quântica. 2. Ótica quântica. 3. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 4. Engenharia de reservatório. I. Título.

CDD: 535.15 (20ª)

**DANIEL ZINI ROSSATTO**

Dissertação de Mestrado submetida  
à Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação em Física, da  
Universidade Federal de São  
Carlos, como requisito parcial para  
a obtenção do título de Mestre em  
Física.

**Aprovado em: 03 de março de 2010**

**BANCA EXAMINADORA**



*Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas (Orientador)*  
*Universidade Federal de São Carlos – DF*



*Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa*  
*Universidade de São Paulo – IFSC*  
*Universidade Federal de São Carlos - DF*



*Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida*  
*Universidade Federal de Goiás – IF*

Ao Geraldo e à Eliana.

*"O único lugar onde o sucesso vem antes que o trabalho é no dicionário."*

*( Albert Einstein )*

# Agradecimentos

Agradeço ao Celso pela orientação, paciência e incentivo, aos meus professores, a todos os meus amigos, à minha família que sempre esteve ao meu lado e à Cacá que simplesmente apareceu e transformou minha vida para melhor. Obrigado a todos.

Agradeço também ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação, investigamos a engenharia de interações e de reservatório em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades. O sistema investigado consiste em átomos (íons), em uma dada configuração de níveis, interagindo com um modo do campo de radiação aprisionado numa cavidade. O uso de campos clássicos externos se fez necessário para obtermos as interações desejadas.

Primeiramente investigamos a interação de dois átomos idênticos de três níveis, confinados numa cavidade supercondutora de alto fator de qualidade, interagindo com o modo do campo desta e campos clássicos externos, e mostramos como gerar, assintoticamente, um estado coerente comprimido para o modo da cavidade, isto é, construímos um reservatório de modos comprimidos artificial para o campo de radiação da cavidade. Aqui, foi necessário assumir um forte decaimento atômico, ou seja, supomos que a taxa de decaimento atômica era muito maior do que o acoplamento efetivo entre átomos e campos.

Em seguida, utilizando do mesmo sistema anterior, estudamos como gerar estados emaranhados, relativos à base de Bell, entre os átomos. Porém, nesta etapa, a necessidade foi de um forte decaimento no modo da cavidade, utilizando, então, uma cavidade de baixo fator de qualidade.

Em ambos os casos, consideramos apenas dois níveis efetivos para os átomos, alcançando, assim, uma interação efetiva entre átomo e modo da cavidade correspondente à realização simultânea dos Hamiltonianos *Jaynes-Cummings* e *anti-Jaynes-Cummings*.

# Abstract

In this work we investigated the engineering of interactions and reservoirs in the context of Cavity Quantum Electrodynamics. The investigated system consists of two identical three-level atoms trapped in two distinct traps, but inside the same optical cavity, interacting with the cavity mode and driven by classical fields to manipulate the atom-field interaction. First, we assume the atomic system interacts with a high-Q cavity and show how to generate a displaced squeezed state for cavity mode asymptotically, i.e., we constructed an artificial squeezed reservoir for the cavity mode. For this purpose we assume, in addition to the engineered atom-field interaction, a strong decay of the atoms (i.e., the atomic decay rate must be much stronger than the effective atom-field coupling).

Next, considering a cavity with strong decay rate, we investigated how to protect atomic entangled states as the Bell states. Here, the cavity mode acts as an artificial squeezed reservoir for the atoms, leading the system to the desired state asymptotically.

In both cases, we considered only two effective levels for atoms, reaching an interaction which comprehends the simultaneous implementation of the Jaynes-Cummings and anti-Jaynes-Cummings Hamiltonians.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos básicos</b>	<b>4</b>
2.1	Interação radiação-matéria . . . . .	4
2.1.1	Equações de Maxwell . . . . .	4
2.1.2	Campo eletromagnético dentro de uma cavidade ideal . . . . .	5
2.1.3	Quantização do campo eletromagnético. . . . .	6
2.1.4	Quantização dos níveis atômicos . . . . .	7
2.1.5	Hamiltoniano de interação átomo-campo . . . . .	8
2.1.6	Hamiltoniano efetivo . . . . .	12
2.2	Operador densidade . . . . .	13
2.2.1	Estado puro . . . . .	13
2.2.2	Estado de mistura estatística (caso não puro) . . . . .	14
2.2.3	Operador reduzido . . . . .	14
2.3	Teoria geral de reservatórios . . . . .	15
2.3.1	Decaimento atômico . . . . .	16
2.3.2	Decaimento do campo . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Engenharia de Interações em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Engenharia de Reservatório para o modo da cavidade</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Engenharia de Reservatório para os átomos</b>	<b>29</b>
5.1	Análise da equação mestra efetiva atômica . . . . .	31
5.1.1	Solução analítica da equação mestra efetiva atômica . . . . .	32
5.1.2	Solução numérica da equação mestra efetiva atômica . . . . .	36

<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>"Regression Quantum Formula"[38]</b>	<b>49</b>
A.1	Calculando as funções de correlação . . . . .	49

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de energia do átomo de dois níveis. . . . .	7
2.2	Localização do átomo e seu elétron num determinado sistema de coordenadas. . . . .	9
3.1	Diagrama de níveis do j-ésimo átomo interagindo com o modo da cavidade e os campos clássicos externos. . . . .	20
4.1	(a) Número médio de fótons $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$ e (b) variância das quadraturas do campo $(\Delta X_m^2) = \langle X_m^2 \rangle - \langle X_m \rangle^2$ ( $m = 1, 2$ ), versus $gt$ , para uma estado comprimido ideal com fator de compressão $r = 1.0$ . A linha sólida e a tracejada representam as soluções numéricas da eq. (3.8), enquanto que a linha pontilhada é o valor analítico esperado calculado teoricamente. . . . .	27
5.1	Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico $ \Phi(\pi)\rangle$ , e (b) a geração do estado $ \Phi(0)\rangle$ , para $\phi = 0$ , considerando $ gg\rangle$ inicialmente para ambos os casos. . . . .	37
5.2	Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando a geração do estado misto dado por $X_6$ considerando $ ge\rangle$ inicialmente. . . . .	38
5.3	Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando a geração do estado atômico $ \Phi\rangle$ , para $\phi = \pi$ , considerando (a) $ \Phi^+\rangle$ e (b) $ \Phi^-\rangle$ inicialmente. . . . .	39
5.4	Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico $ \Phi\rangle$ , para $\phi = \pi$ , considerando $ \Psi^+\rangle$ inicialmente e (b) a confirmação de $ \Psi^-\rangle$ ser um <i>dark state</i> quando este é preparado inicialmente. . . . .	40
5.5	Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico misto $X_3^-$ considerando $ gg\rangle$ inicialmente e (b) a geração do estado atômico misto $X_4^+$ considerando $ ge\rangle$ inicialmente. . . . .	41

5.6	Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico misto $X_5^+$ considerando $ \Phi^+\rangle$ inicialmente e (b) a confirmação de $ \Phi^-\rangle$ ser livre de decoerência considerando ele mesmo como estado inicial. . . . .	42
5.7	Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico misto $X_5^+$ considerando $ \Psi^+\rangle$ inicialmente e (b) a confirmação de $ \Psi^-\rangle$ ser livre de decoerência considerando ele mesmo como estado inicial. . . . .	43

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo teórico e experimental da interação radiação-matéria tem proporcionado grandes avanços no entendimento de fenômenos da Teoria Quântica bem como na utilização destes em aplicações tecnológicas. Muitos aspectos peculiares da Mecânica Quântica (MQ), como a não-localidade que se manifesta através de estados emaranhados tais como os estados de Einstein-Podolsky-Rosen [1], foram verificados experimentalmente com o uso de fótons polarizados gerados via conversão paramétrica de frequências [2]. O bom entendimento desse caráter não local da MQ abriu perspectivas para muitas aplicações, principalmente na área que hoje chamamos de “Teoria da Informação Quântica” (IQ). Processos de teletransporte de estados [3], computação e criptografia quânticos [4] surgiram desde então e hoje são investigados nas mais diversas áreas da Física, beneficiados pelo extraordinário domínio experimental que hoje permite, por exemplo, a manipulação da interação radiação-matéria com um único átomo ou um único fóton do campo de radiação [5].

Em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC), esse domínio experimental tem permitido a geração de estados de Fock [6], estados emaranhados de dois modos do campo de radiação em cavidades supercondutoras de alto fator de qualidade (alto-Q) [7], ou então o controle de colisões atômicas para a geração de estados emaranhados entre dois átomos [8]. Recentemente também foi possível observar o “nascimento” e a “morte” de um fóton em EQC [9] bem como a projeção da função de onda através do processo de medida de um campo em uma cavidade de alto-Q via interação com átomos de dois níveis [10]. Por outro lado, a manipulação da interação átomo-campo quântico através de feixes lasers foi recentemente utilizada para a geração determinística de estados de um único fóton [11] ou mesmo de estados emaranhados de polarização entre dois fótons [12] em cavidades

ópticas. No contexto de íons aprisionados, a geração de estados exóticos do movimento vibracional do íon [13] e a manipulação de operações lógicas [14] também foram alcançadas experimentalmente. Tudo isso faz com que propostas para a utilização de tais sistemas para a realização de operações lógicas básicas, como portas lógicas C-NOT [15], e/ou para um melhor entendimento de fundamentos da Física [16] sejam factíveis em EQC e em íons aprisionados nos dias atuais.

No entanto, mesmo diante deste grande avanço no domínio experimental, o sonho de construir, por exemplo, um “computador quântico” ainda parece distante [17]. Devido ao inevitável acoplamento entre o sistema quântico e o meio ambiente (que funciona como um reservatório térmico), a realização de operações lógicas em larga escala ainda está distante. Em vista disso, muitos esforços têm sido direcionados para a busca de sistemas suficientemente robustos a erros, de modo que as propriedades quânticas sejam preservadas pelo maior tempo possível. Neste cenário, a engenharia de reservatórios [18, 19] surge como uma técnica promissora para contornar esse problema, podendo ser útil para gerar estados não clássicos robustos do campo de radiação ou do movimento iônico, tal que o objetivo desta técnica consiste em construir interações apropriadas entre o sistema quântico de interesse e um reservatório artificial. Por exemplo, usando o decaimento dos níveis internos de um único íon de dois níveis, na Ref. [20] os autores mostraram como construir um reservatório capaz de conduzir o movimento iônico para um estado comprimido assintoticamente. Esquemas similares foram utilizados para proteger vários estados de superposição de estados coerentes [21] ou mesmo, como na Ref. [19] para proteger qualquer superposição de estados de Fock do movimento unidimensional de um único íon. Recentemente, Parkins e colaboradores [22] estenderam a engenharia de reservatórios para o contexto de ensembles atômicos, onde propuseram um esquema para a geração incondicional de estados de vácuo de dois modos comprimidos de duas amostras atômicas distantes uma da outra, mas dentro de uma mesma cavidade. Um esquema similar também foi utilizado para a geração de um estado de vácuo de dois modos comprimidos para o movimento vibracional de dois íons que se encontram dentro de duas armadilhas distintas, mas também dentro de uma mesma cavidade óptica [23]. A engenharia de reservatórios também foi utilizada, em propostas teóricas, para gerar estados não clássicos robustos do campo de radiação em EQC, por exemplo, para a geração de estados de Fock [24] ou de estados de vácuo de dois modos comprimidos, usando a interação de um feixe atômico

que funciona como um reservatório para o campo da cavidade, com átomos de três níveis [25] ou átomos de dois níveis [26].

Nesta dissertação, o sistema investigado consiste em átomos/íons que interagem com modos do campo de radiação aprisionados em cavidades. Os átomos, cujos estados eletrônicos são preparados adequadamente, interagem com o modo estacionário do campo. Nesse caso, tanto os átomos como os campos de radiação estacionários são tratados quanticamente, sendo a interação entre os mesmos descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings [27, 28]. Para manipular a interação átomo-campo, emprega-se então um ou mais campos de radiação externos (lasers), isto é, campos de radiação intensos (clássicos) que incidem sobre os átomos, mas que não permanecem aprisionados na cavidade. Desse modo, os átomos são utilizados para manipular a dinâmica do campo de radiação quântico ou vice-versa.

Alguns conceitos básicos sobre a teoria empregada neste trabalho são introduzidos resumidamente no capítulo 2.

O capítulo 3 trata da engenharia de interações utilizada neste trabalho para obtermos um Hamiltoniano efetivo que representa uma interação do tipo *Jaynes-Cummings* e uma *anti-Jaynes-Cummings* simultaneamente, além de uma rotação dos estados eletrônicos [29]. Esse Hamiltoniano será útil para a simulação de um reservatório comprimido para os átomos ou para o campo da cavidade.

Os capítulos 4 e 5 são aplicações da técnica de engenharia de reservatórios. No capítulo 4, mostramos como gerar um estado coerente comprimido robusto para o modo da cavidade considerando uma taxa de decaimento atômica muito forte e uma cavidade de alto-Q. No capítulo 5, através da construção de um reservatório comprimido (como acontece no capítulo 4 também) mostramos que é possível gerar, assintoticamente, estados emaranhados com fidelidade acima de 90% em relação aos estados  $|\Phi^\pm\rangle$  de Bell, analogamente ao estudo feito na Ref. [30], só que aqui utilizamos átomos de três níveis ao invés de cinco como na referência citada anteriormente.

# Capítulo 2

## Conceitos básicos

Neste capítulo introduzimos resumidamente alguns conceitos básicos utilizados na formulação desta dissertação, desde a quantização do campo eletromagnético até a obtenção de equações mestras considerando dissipação.

### 2.1 Interação radiação-matéria

#### 2.1.1 Equações de Maxwell

Consideraremos aqui a interação de uma partícula carregada, de carga  $e$  e massa  $m$ , com um campo de radiação eletromagnético, caracterizado pelos campos elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$

Quando não há fontes presentes, os campos elétrico e magnético satisfazem as equações de Maxwell no vácuo:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \tag{2.1a}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \tag{2.1b}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \tag{2.1c}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.1d}$$

sendo  $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$  ( $c$  a velocidade da luz,  $\varepsilon_0$  a permissividade elétrica e  $\mu_0$  a permeabilidade magnética no vácuo) [31].

Como podemos descrever qualquer campo eletromagnético através de um potencial

escalar  $\phi(\vec{r}, t)$  e um potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , tal que:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t); \quad (2.2a)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{-\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\vec{r}, t), \quad (2.2b)$$

utilizando do gauge de Coulomb ( $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$ ) e  $\phi(\vec{r}, t) = 0$ , chegamos à equação de onda para o potencial vetor:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3)$$

Supondo  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  como uma função expansível em série de Fourier, tal que  $\vec{A}(\vec{r}, t) = (1/\sqrt{\varepsilon_0}) \sum_k q_k(t) \vec{U}_k(\vec{r})$ , obtemos, pelo método de separação de variáveis, as equações diferenciais:

$$\nabla^2 \vec{U}_k(\vec{r}) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} \vec{U}_k(\vec{r}); \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial^2 q_k(t)}{\partial t^2} = -\omega_k^2 q_k(t). \quad (2.4b)$$

### 2.1.2 Campo eletromagnético dentro de uma cavidade ideal

Supondo uma cavidade composta de espelhos de superfícies paralelas, podemos aplicar as condições de contorno: *i*) componente do campo elétrico paralela às superfícies dos espelhos deve ser nula; *ii*) componente do campo magnético perpendicular às superfícies dos espelhos deve ser nula.

Assim, considerando as condições de contorno, o gauge escolhido e a ortogonalidade da série de Fourier de  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{E}_{//} = 0 \implies \vec{U}_k' = 0; \quad (2.5a)$$

$$\vec{B}_{\perp} = 0 \implies (\nabla \times \vec{U}_k)_{\perp} = 0; \quad (2.5b)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{U}_k = 0; \quad (2.5c)$$

$$\int \vec{U}_k \cdot \vec{U}_l d^3r = \delta_{kl}, \quad (2.5d)$$

temos que a energia do campo eletromagnético (Hamiltoniana)

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \int \left( \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \mu_0^{-1} |\vec{B}|^2 \right) d^3r \quad (2.6)$$

é dada por:

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \sum_k [\dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k^2(t)], \quad (2.7)$$

significando que cada modo do campo eletromagnético se comporta como um oscilador harmônico mecânico de massa unitária.

### 2.1.3 Quantização do campo eletromagnético.

Assumindo que as variáveis canônicas do sistema são  $q_k$  e  $\dot{q}_k$ , isto é, que tais variáveis satisfazem os parênteses de Poisson, a quantização pode ser feita através da relação de comutação dos operadores (princípio da correspondência) [28].

$$[q_k, \dot{q}_l] = i\hbar\delta_{kl}; \quad (2.8a)$$

$$[q_k, q_l] = 0; \quad (2.8b)$$

$$[\dot{q}_k, \dot{q}_l] = 0. \quad (2.8c)$$

Fazendo uma transformação canônica conveniente

$$q_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_k(t) + a_k^\dagger(t)); \quad (2.9a)$$

$$\dot{q}_k = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (a_k(t) - a_k^\dagger(t)), \quad (2.9b)$$

tal que obtemos as relações de comutação

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}; \quad (2.10a)$$

$$[a_k, a_l] = 0; \quad (2.10b)$$

$$[a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0, \quad (2.10c)$$

temos que o Hamiltoniano do campo eletromagnético é dado por:

$$H_{campo} = \sum_k \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger(t)a_k(t) + \frac{1}{2} \right), \quad (2.11)$$

sendo  $a_k(t)$  e  $a_k^\dagger(t)$  os operadores aniquilação e criação do  $k$ -ésimo modo, respectivamente.

Da equação de Heisenberg:

$$a_k(t) = a_k(0)e^{-i\omega_k t}; \quad (2.12a)$$

$$a_k^\dagger(t) = a_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t}, \quad (2.12b)$$

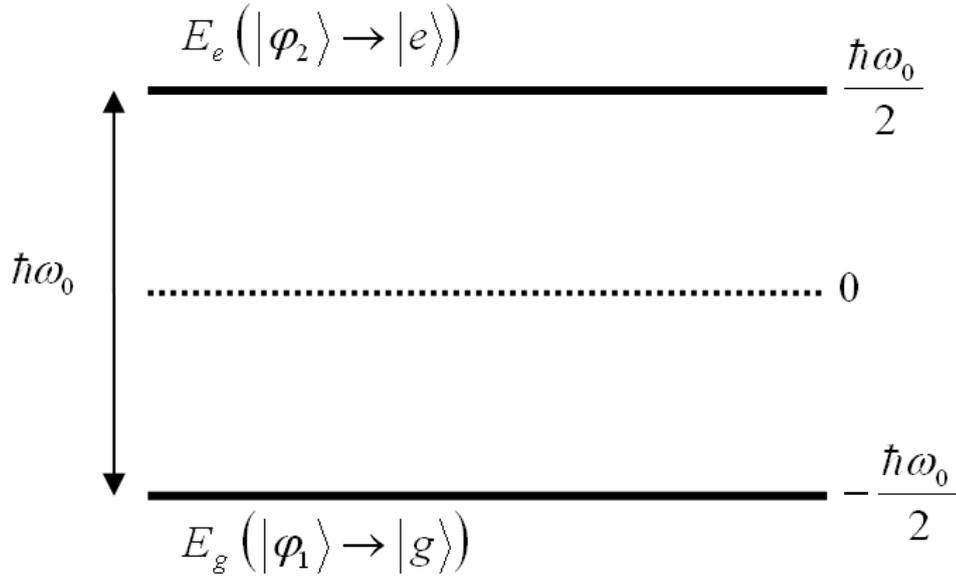


Figura 2.1: Diagrama de energia do átomo de dois níveis.

temos que os campos elétrico e magnético são escritos como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}} \left( a_k(0)e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t} \right) \vec{U}_k(\vec{r}); \quad (2.13a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}} \left( a_k(0)e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t} \right) (\nabla \times \vec{U}_k). \quad (2.13b)$$

### 2.1.4 Quantização dos níveis atômicos

Considerando um átomo com Hamiltoniano

$$H_{\text{átomo}} = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad (2.14)$$

onde

$$H_{\text{átomo}} |\varphi_i\rangle = E_i |\varphi_i\rangle = \hbar\omega_i |\varphi_i\rangle, \quad (2.15)$$

podemos reescrever  $H_{\text{átomo}}$ , utilizando da relação de completeza da base dos autovetores  $|\varphi_i\rangle$ , como

$$H_{\text{átomo}} = \sum_i \hbar\omega_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|. \quad (2.16)$$

Para um átomo de dois níveis (nível fundamental  $|g\rangle$  e excitado  $|e\rangle$ ) com frequência de transição  $\omega_0$ , considerando a origem de energia entre os dois níveis, conforme Fig. 2.1,

temos que (2.16) é escrita na forma

$$\begin{aligned}
 H_{\substack{\text{átomo} \\ \text{dois} \\ \text{níveis}}} &= \hbar\omega_1 |\varphi_1\rangle \langle\varphi_1| + \hbar\omega_2 |\varphi_2\rangle \langle\varphi_2| \\
 &= -(\hbar\omega_0/2) |g\rangle \langle g| + (\hbar\omega_0/2) |e\rangle \langle e| \\
 &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z,
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

sendo definidos os operadores

$$\sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|; \tag{2.18a}$$

$$\sigma_+ = |e\rangle \langle g|; \tag{2.18b}$$

$$\sigma_- = |g\rangle \langle e|, \tag{2.18c}$$

os quais obedecem a álgebra dos operadores de Pauli.

## 2.1.5 Hamiltoniano de interação átomo-campo

### Equações Lagrangeana e Hamiltoniana

Em um campo eletromagnético, uma partícula carregada, de carga  $e$  e massa  $m$ , está sujeita à força de Lorentz [32]

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right) = m \ddot{\vec{r}}. \tag{2.19}$$

Através da Lagrangeana deste sistema

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + e \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - e\phi(\vec{r}, t), \tag{2.20}$$

juntamente com o momento canônico conjugado

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} r_i = m \dot{\vec{r}} + e \vec{A}(\vec{r}, t), \tag{2.21}$$

obtemos que a Hamiltoniana ( $H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L$ ) para uma partícula carregada num campo eletromagnético e também sujeita a um potencial de Coulomb (potencial nuclear em nosso caso, núcleo-elétron), é dada por:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - e \vec{A} \right)^2 + e\phi + V(\vec{r}). \tag{2.22}$$

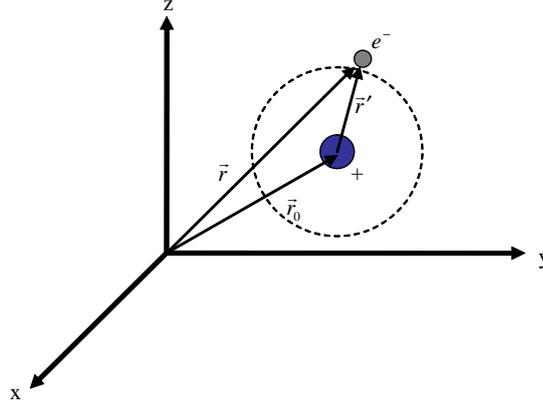


Figura 2.2: Localização do átomo e seu elétron num determinado sistema de coordenadas.

### Aproximação de dipolo

Pela eq. (2.4a) vê-se que a função  $\vec{U}_k(\vec{r})$  de  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  é do tipo onda plana

$$\vec{U}_k(\vec{r}) = \begin{array}{l} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \text{ondas propagantes} \\ \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}), \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) - \text{ondas estacionárias} \end{array}, \quad (2.23)$$

onde  $|\vec{k}| = \frac{\omega_k}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_k}$  é o  $k$ -ésimo vetor de onda e  $\lambda_k$  é o comprimento de onda associado ao modo- $k$ .

Supondo um átomo localizado em  $\vec{r}_0$  e o seu elétron em  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$  conforme Fig. 2.2, podemos reescrever  $\vec{U}_k$  como

$$\vec{U}_k(\vec{r}) = \vec{U}_k\left(\frac{2\pi}{\lambda_k}\hat{k}\cdot\vec{r}_0 + \frac{2\pi}{\lambda_k}\hat{k}\cdot\vec{r}'\right). \quad (2.24)$$

Em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, geralmente trabalhamos ou no regime de microondas ( $\lambda_k \sim 10^{-2}m$ ) ou no regime óptico ( $\lambda_k \sim 10^{-7}m$ ). Como o raio atômico é da ordem de ângstrons ( $|\vec{r}'| \sim 10^{-10}m$ ), vemos que, para estes regimes,  $\frac{|\vec{r}'|}{\lambda_k} \ll 1$ , fazendo com que  $\vec{U}_k(\vec{r}) \approx \vec{U}_k(\vec{r}_0)$ . Assim, na aproximação de dipolo

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}_0, t) \right)^2 + e\phi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}'). \quad (2.25)$$

Escrevendo a equação de Schrödinger para nosso sistema

$$H\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\dot{\Psi}(\vec{r}, t), \quad (2.26)$$

utilizando a transformação unitária  $T = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_0, t)\cdot\vec{r}'\right)$ , e lembrando que  $\vec{A}(\vec{r}_0, t) = \vec{E}(\vec{r}_0, t)$ , obtemos que o Hamiltoniano total é dado por  $H_0 + H_I$ , sendo

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}') \quad (2.27a)$$

o Hamiltoniano não perturbado (energia livre do sistema) e

$$H_I = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (2.28)$$

a interação de dipolo. O termo  $\vec{\mu} = e\vec{r}'$  é definido como momento de dipolo elétrico.

### Caso semi-clássico

No caso semi-clássico, o campo eletromagnético no Hamiltoniano de interação (2.27a) é tratado classicamente. Então,  $a_k(0)$  em (2.13a) não será mais um operador e sim uma constante [28]

$$a_k(0) \rightarrow \alpha_k; \quad (2.29a)$$

$$a_k^\dagger(0) \rightarrow \alpha_k^*. \quad (2.29b)$$

Escrevendo  $\vec{\mu}$  na base de auto-estados do átomo livre  $\{|n\rangle\}$

$$\vec{\mu} = \sum_{n,m} |n\rangle \langle n| \vec{\mu} |m\rangle \langle m| = \vec{\wp}_{nm} \sigma_{nm}, \quad (2.30)$$

sendo  $\vec{\wp}_{nm} = \langle n| e\vec{r}' |m\rangle$  o elemento de matriz de transição de dipolo elétrico e  $\sigma_{nm} = |n\rangle \langle m|$  o operador de transição (leva o estado  $m$  para o estado  $n$ ), temos que o Hamiltoniano de interação de dipolo no caso semi-clássico será dado por:

$$H_I = \hbar \sum_{n,m} \sum_k \{ \Omega_k^{n,m}(\vec{r}_0) e^{-i\omega_k t} + \Omega_k^{*n,m}(\vec{r}_0) e^{i\omega_k t} \} \sigma_{nm}, \quad (2.31)$$

depois de definir a frequência de Rabi

$$\Omega_k^{n,m}(\vec{r}_0) \equiv -i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} \vec{\wp}_{nm} \cdot \vec{U}_k(\vec{r}_0) \alpha_k, \quad (2.32)$$

que representa a constante de acoplamento entre o  $k$ -ésimo modo do campo com os níveis  $n$  e  $m$  atômicos.

Vale salientarmos que, além de  $\vec{\wp}_{nm}^* = \vec{\wp}_{mn}$ ,

$$\vec{\wp}_{nm} \begin{cases} \neq 0, & n \neq m \\ = 0, & n = m \end{cases}, \quad (2.33)$$

pois na representação  $|\vec{r}\rangle$

$$\vec{\wp}_{nm} = e \int \Psi_n^*(\vec{r}) \vec{r} \Psi_m(\vec{r}) d^3r, \quad (2.34)$$

e como  $\int \Psi_n^*(\vec{r}) \Psi_m(\vec{r}) d^3r = \delta_{nm}$ , vemos que (2.34) só poderá ser não nula quando  $\Psi_n(\vec{r})$  e  $\Psi_m(\vec{r})$  tiverem paridades diferentes, isto é, só haverá transição entre os estados que possuírem paridades diferentes ( $\int \Psi_n^*(\vec{r}) \Psi_m(\vec{r}) d^3r = 0$ ).

### Caso quântico

Aqui, além dos níveis de energia atômicos, o campo eletromagnético também será tratado quanticamente. O cálculo do Hamiltoniano de interação neste caso é análogo ao caso semi-clássico, só que aqui devemos levar em consideração os operadores  $a_k(0)$  e  $a_k^\dagger(0)$ . Deste modo, o Hamiltoniano de interação no caso puramente quântico tem a forma

$$H_I = \hbar \sum_{n,m} \sum_k \left\{ g_k^{n,m}(\vec{r}_0) a_k(t) + g_k^{*n,m}(\vec{r}_0) a_k^\dagger(t) \right\} \sigma_{nm}, \quad (2.35)$$

onde a constante de acoplamento é definida como

$$g_k^{n,m}(\vec{r}_0) \equiv -i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} \vec{\varphi}_{nm} \cdot \vec{U}_k(\vec{r}_0).$$

No caso de um átomo de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético de um modo descrito quanticamente, teremos

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar(ga + g^*a^\dagger)(\sigma_{ge} + \sigma_{eg}). \quad (2.36)$$

Passando para a representação de interação mediante a transformação unitária  $U_0 = e^{-(H_{\text{átomo}} + H_{\text{campo}})t}$ ,

$$\begin{aligned} V(t) = & \hbar(ga\sigma_{eg}e^{-i(\omega-\omega_0)t} + g^*a^\dagger\sigma_{ge}e^{i(\omega-\omega_0)t}) \\ & + \hbar(ga\sigma_{ge}e^{-i(\omega+\omega_0)t} + g^*a^\dagger\sigma_{eg}e^{i(\omega+\omega_0)t}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nos limites  $\omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$  e  $g \ll \omega$ , temos que o segundo termo de (2.37) é mais oscilante que o primeiro e, na média, contribui bem menos do que o primeiro. Então, aplicando a aproximação de onda girante (*RWA* - rotation-wave approximation), que implica em negligenciar os termos mais oscilantes, obtemos, retornando à representação de Schrödinger,

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar(ga\sigma_{eg} + g^*a^\dagger\sigma_{ge}). \quad (2.38)$$

O termo  $\hbar(ga\sigma_{eg} + g^*a^\dagger\sigma_{ge})$  é conhecido como hamiltoniano de interação do tipo *Jaynes-Cummings* [27], que é muito utilizado em Óptica Quântica por ser exatamente solúvel e já bem estudado. Já o termo  $\hbar(ga\sigma_{ge} + g^*a^\dagger\sigma_{eg})$  é conhecido como Hamiltoniano do tipo *anti-Jaynes-Cummings*.

### 2.1.6 Hamiltoniano efetivo

Vamos considerar um Hamiltoniano, na representação de interação, que contenha somente termos fortemente oscilantes, de modo que a aproximação de onda girante não possa ser aplicada, pois caso contrário teríamos que eliminar todos os termos do Hamiltoniano, o que resultaria na inexistência de uma interação átomo-campo. Para este caso, existe uma expressão obtida por D.F.V James [33] que calcula interações efetivas a partir de Hamiltonianos com termos altamente oscilantes.

Considerando a equação de Schrödinger ( $\hbar = 1$ )

$$i \left| \dot{\psi}(t) \right\rangle = V(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.39)$$

vamos substituir a sua solução formal

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle - i \int_0^t V(t') |\psi(t')\rangle dt' \quad (2.40)$$

no lado direito de (2.39). Assim, obtemos

$$i\hbar \left| \dot{\psi}(t) \right\rangle = V(t) |\psi(0)\rangle - iV(t) \int_0^t V(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (2.41)$$

Agora, vamos realizar um procedimento análogo à aproximação de onda girante, eliminando todos os termos oscilantes do lado direito da eq. (2.41) restando somente aqueles termos que não oscilam, os quais estão associados à interação efetiva do sistema. Com efeito, podemos eliminar o termo  $V(t) |\psi(0)\rangle$  já que  $V(t)$  é altamente oscilante por construção. Fazendo a aproximação de que  $|\psi(t')\rangle$  varia lentamente em comparação com  $V(t')$ , vamos retirá-lo do integrando, e, desta forma, a evolução do estado  $|\psi(t)\rangle$  é aproximadamente governada pela equação

$$i \left| \dot{\psi}(t) \right\rangle = \left( -iV(t) \int_0^t V(t') |\psi(t')\rangle dt' \right) |\psi(t)\rangle. \quad (2.42)$$

Na eq. (2.42), podemos encontrar termos oscilantes e não oscilantes, então, para finalizar, realizamos uma aproximação de onda girante a fim de eliminarmos os termos oscilantes. Assim, temos que o Hamiltoniano que descreve a dinâmica efetiva é dado por

$$-iV(t) \int_0^t V(t') |\psi(t')\rangle dt' \stackrel{RWA}{=} H_{ef}, \quad (2.43)$$

tal que a expressão foi colocada nesta ordem pelo fato de que se deve resolver primeiramente o lado esquerdo da equação, eliminar os termos oscilantes através da aproximação de onda girante (motivo da sigla *RWA* sobre o sinal de igualdade) e o Hamiltoniano final será o Hamiltoniano efetivo do sistema.

## 2.2 Operador densidade

Para um dado sistema, existe um vetor estado  $|\psi\rangle$  bem conhecido que contém toda a informação possível do sistema [34]. Para determinar o estado do sistema num dado instante, é suficiente realizarmos um conjunto de medidas referentes a um conjunto completo de observáveis que comutam deste sistema. Se quisermos extrair certa informação, devemos calcular o valor esperado do operador  $O$  correspondente,

$$\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle. \quad (2.44)$$

Entretanto, na maioria das situações, o estado do sistema não é perfeitamente conhecido, e há casos em que, por exemplo, o sistema de interesse interage com outro, possivelmente um sistema de muitos graus de liberdade, como um reservatório, fazendo com que esses sistemas se emaranhem.

Assim, podemos classificar o estado do sistema em dois tipos: estado puro e estado de mistura.

### 2.2.1 Estado puro

Se o estado do sistema é perfeitamente conhecido, isto é, o sistema pode ser determinado completamente por um vetor estado  $|\psi(t)\rangle$ , dizemos que o sistema está num estado puro.

Considerando um sistema cujo vetor estado num instante  $t$  é:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle, \quad (2.45)$$

tal que  $\{|u_n\rangle\}$  forma uma base completa ortonormal  $(\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = \hat{1})$ , temos que os coeficientes  $c_n(t)$  satisfazem a condição

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = 1, \quad (2.46)$$

que expressa a normalização de  $|\psi(t)\rangle$ .

Nesta descrição do problema por um vetor estado, temos que o valor médio de um observável  $O$  num instante  $t$  é  $\langle O \rangle = \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle$  e a evolução temporal de  $|\psi(t)\rangle$  é dada pela equação de Schrödinger  $i\hbar \dot{|\psi(t)\rangle} = H(t) |\psi(t)\rangle$ , com  $H(t)$  sendo o Hamiltoniano do sistema.

Introduzindo um operador densidade definido como

$$\rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|, \quad (2.47)$$

com elementos de matriz  $\rho_{np} = c_p(t) c_n^*(t)$ , vemos que a especificação deste operador é suficiente para caracterizar o estado quântico do sistema.

Nesse contexto, o valor médio do observável toma a forma:

$$\langle O \rangle = Tr(\rho O), \quad (2.48)$$

já a evolução temporal do operador densidade pode ser deduzida da equação de Schrödinger:

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]. \quad (2.49)$$

No caso puro, um sistema pode ser tanto descrito pelo operador densidade quanto pelo vetor estado.

### 2.2.2 Estado de mistura estatística (caso não puro)

O estado de mistura é uma generalização do caso puro, cujo estado do sistema não é precisamente especificado. Neste caso só sabemos que a probabilidade de encontrar o sistema num dado instante  $t$  no estado  $|\psi_1\rangle$  é  $p_1$ , em  $|\psi_2\rangle$  é  $p_2$  e assim por diante, salvo que

$$0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k \leq 1; \quad (2.50a)$$

$$\sum_k p_k = 1. \quad (2.50b)$$

Aqui, temos que o operador densidade será dado por:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \\ &= \sum_k p_k \rho_k. \end{aligned} \quad (2.51)$$

A imposição de conservação da probabilidade está no fato de  $Tr(\rho) = 1$  e, para diferenciarmos estados puros de uma mistura estatística, basta calcularmos  $Tr(\rho^2)$  que é menor ou igual a 1 (a igualdade significa que o estado é puro, se é menor do que a unidade é um estado misto).

### 2.2.3 Operador reduzido

Consideremos um sistema composto de dois subsistemas A e B, cujo espaço é o produto direto:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B. \quad (2.52)$$

Assumindo que os subsistemas estão isolados antes do instante  $t = 0$ , então, para  $t > 0$ , o Hamiltoniano total torna-se:

$$H_{AB} = H_A + H_B + V_{AB}, \quad (2.53)$$

sendo  $H_A$  e  $H_B$  as energias livres do sistema  $A$  e  $B$  respectivamente, e  $V_{AB}$  a energia de interação.

O operador densidade do sistema global é um operador que opera em  $\varepsilon$  e satisfaz a equação de movimento

$$\dot{\rho}_{AB}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_{AB}, \rho_{AB}(t)]. \quad (2.54)$$

Se estivermos interessados no comportamento de só um dos subsistemas, por exemplo, o subsistema  $A$ , e também nos valores esperados (médios) dos operadores ( $X_A$ ) que só agem nos estados ( $|A\rangle$ ) do subsistema  $A$  sozinho, então, o valor esperado de  $X_A$  é

$$\begin{aligned} \langle X_A \rangle &= Tr_{AB}(\rho_{AB} X_A) \\ &= \sum_A \langle A | \left\{ \sum_B (\langle B | \rho_{AB} | B \rangle) \right\} X_A | A \rangle \\ &= Tr_A(\rho_A X_A), \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde  $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$  é chamado de operador densidade reduzido do sistema  $A$ .

## 2.3 Teoria geral de reservatórios

Em muitos problemas de Óptica Quântica, dissipação possui um papel importante. Em geral, a dissipação de um sistema é descrita através de sua interação com um reservatório de muitos graus de liberdade. Entretanto, estamos interessados na evolução de variáveis (observáveis) associadas a somente um sistema. Por isso, precisamos obter equações de movimento só do sistema de interesse [28].

Considerando um sistema  $S$  interagindo com um reservatório  $R$ , tendo  $\rho_{SR}$  como operador densidade total, sabemos que o operador densidade reduzido para o sistema é obtido traçando o operador densidade total sobre as variáveis do reservatório:

$$\rho_S = Tr_R(\rho_{SR}). \quad (2.56)$$

Supondo que  $V(t)$  é o Hamiltoniano total do sistema na representação de interação, temos a equação de movimento para o sistema  $S + R$ :

$$\dot{\rho}_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} [V(t), \rho_{SR}(t)]. \quad (2.57)$$

A solução formal de (2.57) é dada por

$$\rho_{SR}(t) = \rho_{SR}(t_i) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t [V(t'), \rho_{SR}(t')] dt', \quad (2.58)$$

$t_i$  sendo o tempo em que se inicia a interação.

Considerando  $V(t)$  pequeno, tal que o reservatório sempre esteja num estado de equilíbrio,  $\rho_{SR}(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_R(t_i)$ , substituindo (2.58) em (2.57) e considerando um processo *Markoviano* (suposição de que o decaimento destrói a memória passada - então  $\rho_S(t')$  pode ser substituído por  $\rho_S(t)$ ), temos que o operador densidade reduzido para o sistema de interesse torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) &= -\frac{i}{\hbar} Tr_R [V(t), \rho_S(t) \otimes \rho_R(t_i)] \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} Tr_R \int_{t_i}^t [V(t), [V(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_R(t_i)]] dt'. \end{aligned} \quad (2.59)$$

### 2.3.1 Decaimento atômico

Consideremos um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório de osciladores harmônicos simples descritos pelo operador aniquilação (criação)  $b_k$  ( $b_k^\dagger$ ) e frequência  $\nu_k$ . O Hamiltoniano na representação de interação é do tipo *Jaynes-Cummings*:

$$V(t) = \hbar \sum_k g_k [b_k^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega_0 - \nu_k)t} + b_k \sigma_+ e^{i(\omega_0 - \nu_k)t}], \quad (2.60)$$

onde  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$  e  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$  são dados em termos do estado excitado ( $|e\rangle$ ) e do fundamental ( $|g\rangle$ ).

### Reservatório térmico

Para o caso em que as variáveis do reservatório são distribuídas num estado de mistura em equilíbrio térmico, tal que

$$\rho_R = \prod_k \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\nu_k}{k_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\hbar\nu_k b_k^\dagger b_k}{k_B T}\right), \quad (2.61)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura [28], temos que (2.59) resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{átomo}} &= \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) (2\sigma_- \rho_{\text{átomo}} \sigma_+ - \rho_{\text{átomo}} \sigma_+ \sigma_- - \sigma_+ \sigma_- \rho_{\text{átomo}}) \\ &\quad + \frac{\gamma \bar{n}}{2} (2\sigma_+ \rho_{\text{átomo}} \sigma_- - \rho_{\text{átomo}} \sigma_- \sigma_+ - \sigma_- \sigma_+ \rho_{\text{átomo}}), \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde  $\gamma$  é a taxa de decaimento e  $\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right) - 1}$  é o número médio de fótons térmicos (que é zero para  $T = 0K$ ) [35].

### Reservatório de vácuo comprimido

Neste caso em que o átomo interage com um reservatório de vácuo comprimido,

$$\rho_R = \prod_k S_k(\xi) |0_k\rangle \langle 0_k| S_k^\dagger(\xi), \quad (2.63)$$

sendo  $S_k(\xi)$  o operador compressão, com  $\xi = re^{i\theta}$ ,  $r$  é o fator de compressão e  $\theta$  define a direção de compressão, temos que (2.59) é escrita como [28]

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{átomo}} = & \frac{\gamma}{2} \cosh^2(r) (2\sigma_- \rho_{\text{átomo}} \sigma_+ - \rho_{\text{átomo}} \sigma_+ \sigma_- - \sigma_+ \sigma_- \rho_{\text{átomo}}) \\ & \frac{\gamma}{2} \sinh^2(r) (2\sigma_+ \rho_{\text{átomo}} \sigma_- - \rho_{\text{átomo}} \sigma_- \sigma_+ - \sigma_- \sigma_+ \rho_{\text{átomo}}) \\ & - \gamma e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r) \sigma_- \rho_{\text{átomo}} \sigma_- \\ & - \gamma e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) \sigma_+ \rho_{\text{átomo}} \sigma_+. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Observa-se a partir de (2.63) que todos os modos possuem o mesmo fator de compressão ( $r_k = r$ ) e o mesmo ângulo de compressão ( $\theta_k = \theta$ ).

### 2.3.2 Decaimento do campo

Analogamente ao decaimento do átomo, temos

$$V(t) = \hbar \sum_k g_k \left[ b_k^\dagger a e^{-i(\omega - \nu_k)t} + b_k a^\dagger e^{i(\omega - \nu_k)t} \right], \quad (2.65)$$

sendo  $a$  ( $a^\dagger$ ) o operador aniquilação (criação) do modo de interesse [28].

### Reservatório térmico

Para o caso de mistura térmica, com  $\rho_R$  dado por (2.61) :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{campo}} = & \frac{\kappa}{2} (\bar{n} + 1) (2a \rho_{\text{campo}} a^\dagger - \rho_{\text{campo}} a^\dagger a - a^\dagger a \rho_{\text{campo}}) \\ & + \frac{\kappa \bar{n}}{2} (2a^\dagger \rho_{\text{campo}} a - \rho_{\text{campo}} a a^\dagger - a a^\dagger \rho_{\text{campo}}), \end{aligned} \quad (2.66)$$

sendo  $\kappa$  a taxa de decaimento [28].

### Reservatório de vácuo comprimido

Neste caso,

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{campo} = & \frac{\kappa}{2} (N + 1) (2a\rho_{campo}a^\dagger - \rho_{campo}a^\dagger a - a^\dagger a\rho_{campo}) \\
& \frac{\kappa}{2} N (2a^\dagger\rho_{campo}a - \rho_{campo}aa^\dagger - aa^\dagger\rho_{campo}) \\
& - \frac{\kappa}{2} M (a\rho_{campo}a - \rho_{campo}aa - aa\rho_{campo}) \\
& - \frac{\kappa}{2} M^* (a^\dagger\rho_{campo}a^\dagger - \rho_{campo}a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a^\dagger\rho_{campo}), \tag{2.67}
\end{aligned}$$

sendo  $N = \sinh^2(r)$  e  $M = e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r)$  [28].

# Capítulo 3

## Engenharia de Interações em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

Apresentamos neste capítulo a construção do Hamiltoniano efetivo, que representa uma interação do tipo *Jaynes-Cummings* e anti-*Jaynes-Cummings* simultaneamente, necessário para a geração de um reservatório de modos comprimidos tanto para um modo da cavidade quanto para átomos.

Para gerar a interação efetiva desejada utilizamos da interação entre dois átomos idênticos de três níveis na configuração  $\Lambda$  com um modo da cavidade e campos clássicos externos, necessários para a manipulação da interação radiação-matéria. Supomos que os átomos estão confinados numa mesma cavidade mas em armadilhas distintas e distantes uma da outra, de modo que a interação átomo-átomo seja desprezível. A configuração  $\Lambda$  para um átomo de três níveis consiste em dois níveis mais fundamentais (longo tempo de vida) e um excitado. Esses níveis mais fundamentais podem ser obtidos de um estado degenerado, onde tal degenerescência pode ser quebrada aplicando-se um campo magnético.

Conforme a Fig. 3.1, os estados mais fundamentais  $|g_j\rangle$  e  $|e_j\rangle$ ,  $j = 1, 2$ , estão acoplados ao estado auxiliar  $|A_j\rangle$  através dos campos clássicos, com acoplamento  $\Omega_i = |\Omega_i| e^{i\phi_i}$ , frequência  $\omega_i$  e fase relativa  $\phi_i$  ( $i = 1 - 4$ ), e do modo da cavidade, com acoplamento  $g$  e frequência  $\omega$ . As transições  $|g_j\rangle \longleftrightarrow |A_j\rangle$  e  $|e_j\rangle \longleftrightarrow |A_j\rangle$  são permitidas por dipolo e, por regras de seleção, a transição  $|g_j\rangle \longleftrightarrow |e_j\rangle$  não é, ou seja,  $|g_j\rangle$  e  $|e_j\rangle$  possuem a mesma

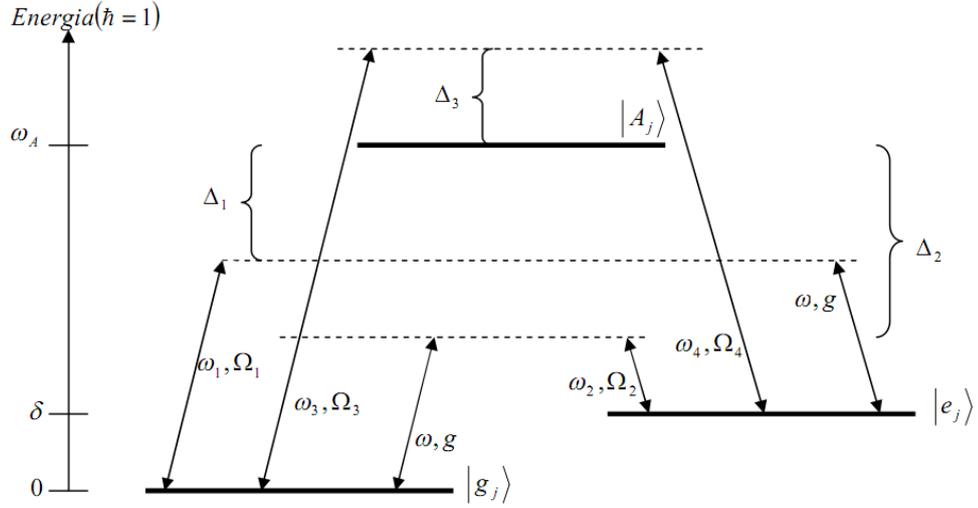


Figura 3.1: Diagrama de níveis do  $j$ -ésimo átomo interagindo com o modo da cavidade e os campos clássicos externos.

paridade.

O Hamiltoniano total, considerando  $\hbar = 1$ , para este sistema é  $H = H_{cav} + H_{at} + H_I(t)$ , com:

$$H_{cav} = \omega a^\dagger a; \quad (3.1a)$$

$$H_{at} = \omega_A \sum_{j=1}^2 \sigma_{AA}^j + \delta \sum_{j=1}^2 \sigma_{ee}^j; \quad (3.1b)$$

$$H_I(t) = \left\{ (ga + \Omega_1 e^{-i\omega_1 t} + \Omega_3 e^{-i\omega_3 t}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{Ag}^j + (ga + \Omega_2 e^{-i\omega_2 t} + \Omega_4 e^{-i\omega_4 t}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{Ae}^j + h.c. \right\}, \quad (3.1c)$$

onde  $H_{cav}$  é o Hamiltoniano do campo livre,  $H_{at}$  o Hamiltoniano livre atômico,  $H_I(t)$  o Hamiltoniano de interação, do tipo Jaynes-Cummings,  $\sigma_{lm}^j = |l_j\rangle \langle m_j|$  ( $l, m = g, e, A$ ) são os operadores atômicos do  $j$ -ésimo átomo,  $a$  ( $a^\dagger$ ) é o operador aniquilação (criação) do campo da cavidade e  $h.c.$  significa *hermitiano conjugado*.

Mediante a transformação unitária realizada pelo operador  $U_0 = e^{-i(H_{cav} + H_{at})t}$ , podemos

reescrever (3.1) na representação de interação:

$$V(t) = \left\{ (gae^{i\Delta_2 t} + \Omega_1 e^{i\Delta_1 t} + \Omega_3 e^{i\Delta_3 t}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{Ag}^j + (gae^{i\Delta_1 t} + \Omega_2 e^{i\Delta_2 t} + \Omega_4 e^{i\Delta_3 t}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{Ae}^j + h.c. \right\}, \quad (3.2)$$

onde definimos

$$\Delta_1 = \omega_A - \omega_1 = \omega_A - \omega - \delta; \quad (3.3a)$$

$$\Delta_2 = \omega_A - \omega = \omega_A - \omega_2 - \delta; \quad (3.3b)$$

$$\Delta_3 = \omega_3 - \omega_A = \omega_4 + \delta - \omega_A. \quad (3.3c)$$

Considerando o regime não ressonante  $|\Delta_k| \sim |\Delta_k| - |\Delta_l| \gg |\Omega_i|, |g| \sqrt{\bar{n}}$  ( $k \neq l = 1 - 3, i = 1 - 4$ ),  $\bar{n}$  sendo o número médio de fótons no modo da cavidade, podemos eliminar adiabaticamente as transições entre  $|g_j\rangle$  ( $|e_j\rangle$ ) com o estado auxiliar  $|A_j\rangle$  através da aproximação contemplada na ref. [33], que consiste em:

$$-iV(t) \int_0^t V(t) dt \stackrel{RWA}{=} Hef, \quad (3.4)$$

tal que o Hamiltoniano efetivo será obtido após desprezarmos os termos oscilantes do lado esquerdo de (3.4), isto é, utilizamos da aproximação de onda girante (RWA). Os termos oscilantes podem ser desprezados pois eles contribuem, na média, muito menos do que os termos não oscilantes.

Portanto, a dinâmica efetiva, considerando somente o subespaço atômico  $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$ , tal que  $|eg\rangle = |e\rangle_1 \otimes |g\rangle_2$ , é governada pelo Hamiltoniano efetivo:

$$Hef = (\beta_1 a^\dagger + \beta_2^* a + \beta_{rot}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{eg}^j + (\beta_1^* a + \beta_2 a^\dagger + \beta_{rot}^*) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ge}^j + (\eta_1 \sigma_{ee}^j + \eta_2 \sigma_{gg}^j) a^\dagger a + (\alpha_1 - \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_4) \sigma_{gg}^j, \quad (3.5)$$

onde

$$\beta_i = g^* \Omega_i / \Delta_i; \quad (3.6a)$$

$$\eta_i = |g|^2 / \Delta_i; \quad (3.6b)$$

$$\alpha_i = |\Omega_i|^2 / \Delta_i; \quad (3.6c)$$

$$\beta_{rot} = -\Omega_3 \Omega_4^* / \Delta_3, \quad (3.6d)$$

com ( $i = 1 - 4$ ). Aqui nos restringimos ao subespaço atômico  $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$ , pois nenhum átomo será preparado inicialmente no estado auxiliar  $|A_j\rangle$ , fazendo com que a dinâmica do sistema seja regida somente por aquele subespaço.

Sob a condição  $|\Omega_i| \gg |g| \sqrt{n}$ , percebe-se que a interação dispersiva átomo-modo da cavidade torna-se desprezível diante dos outros termos do Hamiltoniano, ou seja,  $|\eta_i| \ll |\beta_i|, |\beta_{rot}|$ . E, assumindo  $\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0$ , podemos redefinir o zero de energia (eliminado o termo constante  $\alpha_1 - \alpha_3$ ), fazendo com que o Hamiltoniano efetivo seja dado, sob estas condições, por:

$$Hef = (\beta_1 a^\dagger + \beta_2^* a + \beta_{rot}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{eg}^j + (\beta_1^* a + \beta_2 a^\dagger + \beta_{rot}^*) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ge}^j. \quad (3.7)$$

Este Hamiltoniano efetivo representa uma interação *Jaynes-Cummings*  $(\beta_2 a^\dagger \sum_{j=1}^2 \sigma_{ge}^j + h.c.)$  e uma anti-*Jaynes-Cummings*  $(\beta_1^* a \sum_{j=1}^2 \sigma_{eg}^j + h.c.)$ , agindo simultaneamente entre um modo da cavidade e dois átomos de dois níveis; e o termo  $(\beta_{rot}^* \sum_{j=1}^2 \sigma_{ge}^j + h.c.)$  representa uma rotação nos estados eletrônicos. Vemos que os acoplamentos efetivos de (3.7) são determinados pelos parâmetros dos campos clássicos externos, assim, estes são essenciais para a manipulação da interação radiação-matéria.

A realização simultânea de uma interação *Jaynes-Cummings* e uma anti-*Jaynes-Cummings* foi útil para a construção de reservatórios de modos comprimidos para: *i*) o campo da cavidade, sendo possível a geração de um estado coerente comprimido robusto para o modo da cavidade; *ii*) os átomos, podendo-se gerar estados emaranhados entre estes como veremos nos próximos capítulos.

A equação mestra total, a  $T = 0K$ , é dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[Hef, \rho] + \mathcal{L}_{at}\rho + \mathcal{L}_{cav}\rho, \quad (3.8)$$

tal que  $\mathcal{L}_{at}\rho = \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^2 (2\sigma_{ge}^j \rho \sigma_{eg}^j - \rho \sigma_{eg}^j \sigma_{ge}^j - \sigma_{eg}^j \sigma_{ge}^j \rho)$  é o Liouvilliano associado aos átomos, sendo  $\gamma$  a taxa de decaimento atômica, e  $\mathcal{L}_{cav}\rho = \frac{\kappa}{2} (2a\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a \rho)$  é o Liouvilliano associado ao modo da cavidade, sendo  $\kappa$  a respectiva taxa de decaimento.

# Capítulo 4

## Engenharia de Reservatório para o modo da cavidade

Neste capítulo mostraremos como obter um estado coerente comprimido robusto para o modo da cavidade construindo um reservatório de modos comprimidos artificial, a  $T = 0K$ , a partir de (3.7). Para isto, utilizaremos de uma cavidade de alto fator de qualidade e assumiremos uma forte taxa de decaimento atômica.

Para a geração do estado coerente comprimido  $|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha) S(\xi) |0\rangle$ , tal que  $|0\rangle$  é o estado de vácuo do modo da cavidade,  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$  o operador deslocamento, com  $\alpha$  sendo a amplitude do deslocamento, e  $S(\xi) = \exp\left(\xi^* a^2/2 - \xi a^{\dagger 2}/2\right)$  o operador de compressão ( $\xi = r e^{i\theta}$ ), com  $r$  e  $\theta$  definidos como o fator e ângulo de compressão respectivamente [28], primeiramente aplicamos a transformação unitária independente do tempo  $\tilde{U} = D(\alpha) S(\xi)$  ao Hamiltoniano efetivo dado por (3.7), de modo que:

$$\tilde{H}ef = S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha) Hef D(\alpha) S(\xi). \quad (4.1)$$

Sabendo-se que [28]:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha; \quad (4.2a)$$

$$D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*; \quad (4.2b)$$

$$S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a \cosh(r) - a^\dagger e^{i\theta} \sinh(r); \quad (4.2c)$$

$$S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi) = a^\dagger \cosh(r) - a e^{-i\theta} \sinh(r), \quad (4.2d)$$

a eq. (4.1) torna-se:

$$\begin{aligned} \tilde{H}ef = & \left\{ [\beta_2 \cosh(r) - \beta_1^* e^{i\theta} \sinh(r)] a^\dagger + [\beta_1^* \cosh(r) - \beta_2 e^{-i\theta} \sinh(r)] a \right. \\ & \left. + (\alpha^* \beta_2 + \alpha \beta_1^* + \beta_{rot}^*) \right\} \sum_{j=1}^2 \sigma_{ge}^j + h.c. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Fazendo os ajustes:

$$\alpha \beta_2^* + \alpha^* \beta_1 = -\beta_{rot}; \quad (4.4a)$$

$$\tanh(r) = |\beta_1/\beta_2| e^{i(\theta - \phi_1 - \phi_2)}, \quad (4.4b)$$

temos que o Hamiltoniano efetivo nesta representação é dado por [29]:

$$\tilde{H}ef = \lambda a^\dagger \sum_{j=1}^2 \sigma_-^j + h.c, \quad (4.5)$$

com

$$\lambda \equiv \beta_2 \cosh(r) - \beta_1^* e^{i\theta} \sinh(r) = \beta_2 / \cosh(r). \quad (4.6)$$

O motivo da escolha destes ajustes se deve ao fato de desejarmos que o Hamiltoniano efetivo (4.3) apresente uma interação do tipo *Jaynes-Cummings* entre um modo da cavidade e dois átomos de dois níveis como (4.5), pois este tipo de interação possui solução exata e já foi bem estudado.

A partir de (4.4), percebe-se que o fator de compressão  $r$  é determinado pela razão  $|\beta_1/\beta_2|$ , o ângulo de compressão pelas fases relativas dos campos clássicos  $\theta = \phi_1 + \phi_2$  (considerando  $g$  real) e a amplitude de deslocamento  $\alpha$  por  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_{rot}$ . Vale observar que fizemos  $\theta = \phi_1 + \phi_2$  pois  $\tanh(r)$  é uma função real, além de ser positiva neste caso já que  $r \geq 0$  por definição. Portanto, vemos a grande utilidade dos campos clássicos externos para a manipulação de  $r$ ,  $\theta$  e  $\alpha$ .

A equação mestra total, a  $T = 0K$ , nesta nova representação, é dada por:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -i [\tilde{H}ef, \tilde{\rho}] + \mathcal{L}_{at}\tilde{\rho} + \tilde{\mathcal{L}}_{cav}\tilde{\rho}. \quad (4.7)$$

Considerando apenas um átomo, por simplicidade ilustrativa, as equações de movimento para os elementos  $\langle j | \tilde{\rho} | j' \rangle$  ( $j, j' = g, e$ ) de (4.7) são:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{gg}}{dt} = -i (\lambda a^\dagger \tilde{\rho}_{eg} - \lambda^* \tilde{\rho}_{ge} a) + \gamma \tilde{\rho}_{ee} + \tilde{\mathcal{L}}_{cav} \tilde{\rho}_{gg}; \quad (4.8a)$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ge}}{dt} = -i (\lambda a^\dagger \tilde{\rho}_{ee} - \lambda \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger) - \frac{\gamma}{2} \tilde{\rho}_{ge} + \tilde{\mathcal{L}}_{cav} \tilde{\rho}_{ge}; \quad (4.8b)$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ee}}{dt} = -i (\lambda^* a \tilde{\rho}_{ge} - \lambda \tilde{\rho}_{eg} a^\dagger) - \gamma \tilde{\rho}_{ee} + \tilde{\mathcal{L}}_{cav} \tilde{\rho}_{ee}, \quad (4.8c)$$

com  $\left(\frac{d\tilde{\rho}_{eg}}{dt}\right)^\dagger = \frac{d\tilde{\rho}_{ge}}{dt}$ . Assumindo um alto fator de qualidade para a cavidade e um forte decaimento atômico, isto é,  $\gamma \gg |\lambda| \gg \kappa$ , podemos eliminar adiabaticamente os elementos  $\tilde{\rho}_{ge}$ ,  $\tilde{\rho}_{eg}$  e  $\tilde{\rho}_{ee}$  [19], como veremos a seguir.

Já que  $\gamma \gg |\lambda| \gg \kappa$ , temos:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ge}}{dt} \approx -\frac{\gamma}{2}\tilde{\rho}_{ge}; \quad (4.9a)$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ee}}{dt} \approx -\gamma\tilde{\rho}_{ee}. \quad (4.9b)$$

Assim, para  $t \gg 1/\gamma$ ,  $\frac{d\tilde{\rho}_{ge}}{dt} \approx \frac{d\tilde{\rho}_{ee}}{dt} \approx 0$ , fazendo com que, de acordo com (4.8):

$$\tilde{\rho}_{ge} \approx -\frac{2i}{\gamma} (\lambda a^\dagger \tilde{\rho}_{ee} - \lambda \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger) \left[ 1 + O\left(\frac{\kappa}{\gamma}\right) \right]; \quad (4.10a)$$

$$\tilde{\rho}_{ee} \approx -\frac{i}{\gamma} (\lambda^* a \tilde{\rho}_{ge} - \lambda \tilde{\rho}_{eg} a^\dagger) \left[ 1 + O\left(\frac{\kappa}{\gamma}\right) \right]. \quad (4.10b)$$

Como  $\tilde{\rho}_{cav} = Tr_{at}(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}_{gg} + \tilde{\rho}_{ee}$ , temos, a partir de (4.8a) e (4.8c), que:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{cav}}{dt} = \frac{d\tilde{\rho}_{gg}}{dt} + \frac{d\tilde{\rho}_{ee}}{dt} = -i(\lambda a^\dagger \tilde{\rho}_{eg} - \lambda^* \tilde{\rho}_{ge} a) - i(\lambda^* a \tilde{\rho}_{ge} - \lambda \tilde{\rho}_{eg} a^\dagger) + \tilde{\mathcal{L}}_{cav} \tilde{\rho}_{cav}. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.10b) em (4.10a), conservando somente os termos proporcionais a  $\frac{\lambda}{\gamma}$  e desprezando as ordens superiores:

$$\tilde{\rho}_{ge} \approx -\frac{2\lambda i}{\gamma} \tilde{\rho}_{gg} a^\dagger; \quad (4.12a)$$

$$\tilde{\rho}_{eg} \approx \frac{2\lambda^* i}{\gamma} a \tilde{\rho}_{gg}. \quad (4.12b)$$

Como  $\tilde{\rho}_{ee} \approx 0$  para  $t \gg 1/\gamma$  conforme (4.9b), então  $\tilde{\rho}_{cav} \approx \tilde{\rho}_{gg}$ . Então, substituindo (4.12) em (4.11), a equação mestra reduzida do modo da cavidade no regime em que  $t \gg 1/\gamma$  toma a forma:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{cav}}{dt} = \frac{\gamma_{eng}}{2} (2a\tilde{\rho}_{cav}a^\dagger - \tilde{\rho}_{cav}a^\dagger a - a^\dagger a \tilde{\rho}_{cav}) + \tilde{\mathcal{L}}_{cav} \tilde{\rho}_{cav}, \quad (4.13)$$

com  $\gamma_{eng} = \frac{4|\lambda|^2}{\gamma}$ .

Sabe-se que o estado estacionário de (4.13), para  $\kappa \ll \gamma_{eng}$ , é o estado de vácuo para o modo da cavidade  $\tilde{\rho}_{cav}(t \gg 1/\gamma_{eng}) = |0\rangle\langle 0|$ . Porém, é necessário retornar à representação anterior aplicando a transformação unitária reversa  $\tilde{U}^\dagger$ . Assim, encontramos que o estado assintótico na representação de interação é:

$$\begin{aligned} \rho_{cav}(t \rightarrow \infty) &= D(\alpha) S(\xi) \tilde{\rho}_{cav}(t \rightarrow \infty) S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha); \\ &= D(\alpha) S(\xi) |0\rangle\langle 0| S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha); \\ &= |\alpha, \xi\rangle\langle \alpha, \xi|, \end{aligned} \quad (4.14)$$

que é exatamente o estado coerente comprimido.

Para o caso de dois átomos dentro da cavidade, a técnica de eliminação adiabática é análoga para o caso de um átomo, porém é mais laboriosa. Entretanto, o resultado obtido neste caso é praticamente idêntico ao caso de um átomo, só que aqui  $\gamma_{eng} = \frac{8|\lambda|^2}{\gamma}$ , isto é, o dobro do caso anterior, fazendo com que o modo da cavidade atinja o estado assintótico mais rapidamente.

Escrevendo (4.13) na representação de interação utilizando da transformação unitária reversa  $\tilde{U}^\dagger$  obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{cav} = & \frac{4\beta^2}{\gamma} \left\{ (N+1) (2a\rho_{cav}a^\dagger - \rho_{cav}a^\dagger a - a^\dagger a\rho_{cav}) + N (2a^\dagger\rho_{cav}a - \rho_{cav}aa^\dagger - aa^\dagger\rho_{cav}) \right. \\ & \left. - M (2a\rho_{cav}a - \rho_{cav}aa - aa\rho_{cav}) - M^* (2a^\dagger\rho_{cav}a^\dagger - \rho_{cav}a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a^\dagger\rho_{cav}) \right\} \\ & + \frac{4}{\gamma} \left\{ \beta_{rot}\beta_2 (\rho_{cav}a^\dagger - a^\dagger\rho_{cav}) + \beta_{rot}\beta_1^* (\rho_{cav}a - a\rho_{cav}) + h.c. \right\} + \mathcal{L}_{cav}\rho_{cav}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

tal que  $\beta^2 = |\beta_2|^2 - |\beta_1|^2$ ,  $N = \frac{|\beta_1|^2}{\beta^2}$  e  $M = -\frac{\beta_1^*\beta_2^*}{\beta^2}$ . Então vemos que em nossa proposta os átomos simulam um reservatório de modos comprimidos para o modo da cavidade levando-o ao estado coerente comprimido assintoticamente. O último termo de (4.15) é devido à parte coerente do estado, e se  $\beta_{rot} = 0$ , para  $\beta_1, \beta_2 \neq 0$ , temos um modo da cavidade interagindo com um reservatório comprimido ideal.

Para atestar a validade deste nosso esquema, resolvemos numericamente a equação mestra do sistema (3.8), descrita pelo Hamiltoniano (3.5). Para tal fim, consideramos o modo da cavidade inicialmente no estado de vácuo e que os átomos sejam preparados no estado  $|g\rangle$ . A fim de gerarmos um estado comprimido com fator de compressão  $r = 1$  e ângulo de compressão  $\theta = 0$ , respeitando todas as condições previstas até agora, escolhemos as amplitudes  $\Omega_3 = \Omega_4 = 0$ , implicando em  $\beta_{rot} = 0$ , isto é, um deslocamento nulo ( $\alpha = 0$ );  $\Omega_1 = 200g$ ,  $\Omega_2 = 152.3g$ ; as fases relativas dos campos clássicos  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ; as desintonias  $\Delta_1 = 1000g$  e  $\Delta_2 = 580g$ , implicando em  $\beta_1 = 0.2g$  e  $\beta_2 = 0.26g$  e, conseqüentemente,  $\lambda = 0.17g$ ; e definimos as taxas de decaimento  $\gamma = g$  e  $\kappa = 0$ .

Com esta escolha de parâmetros, calculamos a evolução numérica do número médio de fótons  $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  e das variâncias  $(\Delta X_m^2) = \langle X_m^2 \rangle - \langle X_m \rangle^2$  ( $m = 1, 2$ ) das quadraturas do campo da cavidade  $X_1 = 1/2 (a + a^\dagger)$  e  $X_2 = 1/2i (a - a^\dagger)$ , tanto para um quanto para dois átomos dentro da cavidade.

O valor esperado [28] para o número médio de fótons de um estado comprimido ideal,  $\langle n \rangle = \sinh^2(r) = \sinh^2(1) \approx 1.38$ , é alcançado assintoticamente tanto para um quanto para

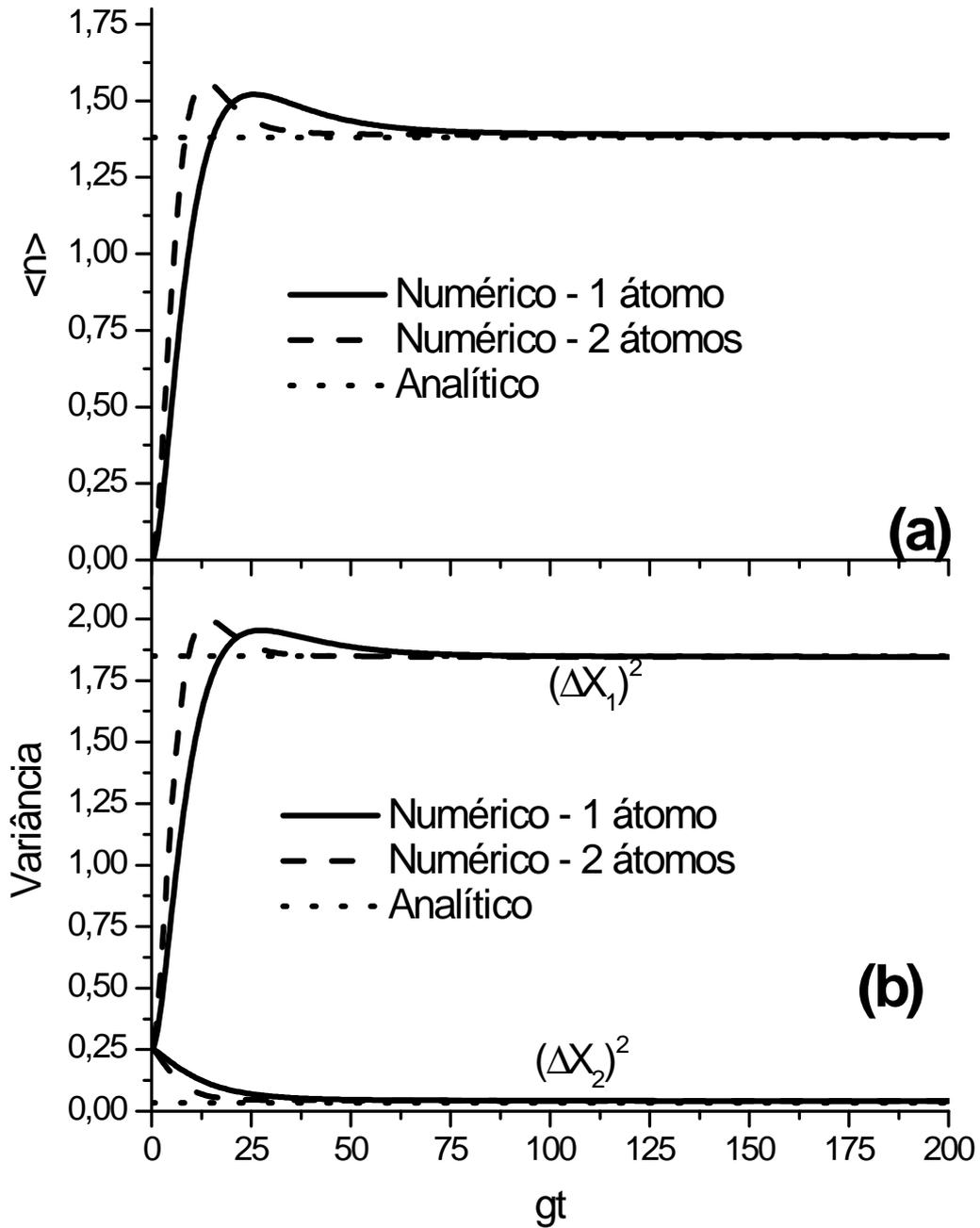


Figura 4.1: (a) Número médio de fótons  $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  e (b) variância das quadraturas do campo  $(\Delta X_m^2) = \langle X_m^2 \rangle - \langle X_m \rangle^2$  ( $m = 1, 2$ ), versus  $gt$ , para uma estado comprimido ideal com fator de compressão  $r = 1.0$ . A linha sólida e a tracejada representam as soluções numéricas da eq. (3.8), enquanto que a linha pontilhada é o valor analítico esperado calculado teoricamente.

dois átomos conforme mostrado na figura 4.1(a). Na figura 4.1(b), os valores esperados para as variâncias das quadraturas do modo da cavidade  $(\Delta X_1^2) = \exp(2r)/4 \approx 1.85$  e  $(\Delta X_2^2) = \exp(-2r)/4 \approx 0.034$  também são alcançados assintoticamente.

Como previsto anteriormente, o caso em que há dois átomos na cavidade necessita de um tempo menor para atingirmos os valores assintóticos. Este fato induz intuitivamente que quanto mais átomos tivermos menor será o tempo para se atingir o estado estacionário, porém é necessário confirmar tal fato.

# Capítulo 5

## Engenharia de Reservatório para os átomos

Para construir um reservatório comprimido artificial para os átomos, inicialmente vamos desligar os campos clássicos 3 e 4, ou seja,  $\Omega_3 = \Omega_4 = 0$ . Em seguida, vamos reescrever (3.5) na forma:

$$Hef = Qa^\dagger a + Ra^\dagger + R^\dagger a, \quad (5.1)$$

tal que:

$$R = \beta_1 S^\dagger + \beta_2 S; \quad (5.2a)$$

$$R^\dagger = \beta_1^* S + \beta_2^* S^\dagger; \quad (5.2b)$$

$$Q = \sum_{j=1}^2 (\eta_2 \sigma_{gg}^j + \eta_1 \sigma_{ee}^j), \quad (5.2c)$$

com  $S = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ge}^j$  e  $S^\dagger = \sum_{j=1}^2 \sigma_{eg}^j$  [31].

Levando em conta tanto os efeitos dissipativos da cavidade como dos átomos, a dinâmica do sistema é governada pela equação mestra total:

$$\dot{\rho}_T = \mathcal{L}_0 \rho_T + \mathcal{L}_{cav} \rho_T + \mathcal{L}_{at} \rho_T \quad (5.3)$$

sendo, para  $T = 0K$  ( $\bar{n} = 0$ ), os superoperadores definidos como anteriormente:

$$\mathcal{L}_0 \rho_T = -i [Hef, \rho_T]; \quad (5.4a)$$

$$\mathcal{L}_{cav} \rho_T = \frac{\kappa}{2} (2a \rho_T a^\dagger - a^\dagger a \rho_T - \rho_T a^\dagger a); \quad (5.4b)$$

$$\mathcal{L}_{at} \rho_T = \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^2 (2\sigma_{ge}^j \rho_T \sigma_{eg}^j - \rho_T \sigma_{ee}^j - \sigma_{ee}^j \rho_T). \quad (5.4c)$$

Trabalhando no regime em que a luz escapa da cavidade mais rapidamente que o seu tempo de interação com os átomos (cavidade de "baixo fator de qualidade"), isto é,  $\kappa \gg |\beta_i|, |\eta_i|$ , e que o decaimento dos níveis fundamentais atômicos podem ser negligenciados uma vez que o tempo de vida desses níveis pode ser muito maior que o tempo de interação entre o átomo e o modo da cavidade, ou seja,  $\gamma \ll |\beta_i|, |\eta_i|$ , podemos assumir que o estado da cavidade é sempre um estado estacionário e o estado total pode ser escrito de forma separável:

$$\rho_T = \rho_{cav}^{ss} \otimes \rho. \quad (5.5)$$

Desse modo, o operador densidade atômico pode ser obtido via equação:

$$\dot{\rho} = Tr_{cav} \left\{ \mathcal{L}_0 \int_0^\infty d\tau e^{\mathcal{L}_{cav}\tau} \mathcal{L}_0 \rho_{cav}^{ss} \right\} \rho + \mathcal{L}_{at}\rho, \quad (5.6)$$

que nada mais é que uma eliminação adiabática no modo do campo mais rigorosa do que a feita no capítulo anterior para os níveis atômicos [36, 37].

Substituindo (5.1) em (5.6) e aplicando o superoperador  $\mathcal{L}_0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & - \int_0^\infty d\tau \left\{ \langle a(t+\tau)a(t) \rangle_{ss} (R^\dagger R^\dagger \rho - R^\dagger \rho R^\dagger) + \langle a(t+\tau)a^\dagger(t) \rangle_{ss} (R^\dagger R \rho - R \rho R^\dagger) \right. \\ & + \langle a(t+\tau)a^\dagger a(t) \rangle_{ss} (R^\dagger Q \rho - Q \rho R^\dagger) + \langle a^\dagger(t+\tau)a(t) \rangle_{ss} (R R^\dagger \rho - R^\dagger \rho R) \\ & + \langle a^\dagger(t+\tau)a^\dagger(t) \rangle_{ss} (R R \rho - R \rho R) + \langle a^\dagger(t+\tau)a^\dagger a(t) \rangle_{ss} (R Q \rho - Q \rho R) \\ & + \langle a^\dagger a(t+\tau)a(t) \rangle_{ss} (Q R^\dagger \rho - R^\dagger \rho Q) + \langle a^\dagger a(t+\tau)a^\dagger(t) \rangle_{ss} (Q R \rho - R \rho Q) \\ & + \langle a^\dagger a(t+\tau)a^\dagger a(t) \rangle_{ss} (Q Q \rho - Q \rho Q) + \langle a(t)a(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho R^\dagger R^\dagger - R^\dagger \rho R^\dagger) \\ & + \langle a(t)a^\dagger(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho R^\dagger R - R \rho R^\dagger) + \langle a(t)a^\dagger a(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho R^\dagger Q - Q \rho R^\dagger) \\ & + \langle a^\dagger(t)a(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho R R^\dagger - R^\dagger \rho R) + \langle a^\dagger(t)a^\dagger(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho R R - R \rho R) \\ & + \langle a^\dagger(t)a^\dagger a(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho R Q - Q \rho R) + \langle a^\dagger a(t)a(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho Q R^\dagger - R^\dagger \rho Q) \\ & \left. + \langle a^\dagger a(t)a^\dagger(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho Q R - R \rho Q) + \langle a^\dagger a(t)a^\dagger a(t+\tau) \rangle_{ss} (\rho Q Q - Q \rho Q) \right\} \\ & + \mathcal{L}_{at}\rho, \end{aligned} \quad (5.7)$$

com

$$\langle X(t)Y(t+\tau) \rangle_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle X(t)Y(t+\tau) \rangle = Tr_{cav} [Y e^{\mathcal{L}_{cav}\tau} (\rho_{cav}^{ss} X)]; \quad (5.8a)$$

$$\langle X(t+\tau)Y(t) \rangle_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle X(t+\tau)Y(t) \rangle = Tr_{cav} [X e^{\mathcal{L}_{cav}\tau} (Y \rho_{cav}^{ss})]. \quad (5.8b)$$

Os termos da equação (5.7) são calculados via "Quantum Regression Formula" [38], cujas funções de correlação de segunda ordem não nulas obtidas assintoticamente para o

nosso caso são (Apêndice A):

$$\langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle_{ss} = \langle a(t)a^\dagger(t + \tau) \rangle_{ss} = e^{-\frac{\kappa}{2}\tau}. \quad (5.9)$$

Assim, utilizando destes resultados, obtemos a seguinte equação para o operador densidade reduzido atômico:

$$\dot{\rho} = \frac{2}{\kappa} (2R\rho R^\dagger - \rho R^\dagger R - R^\dagger R\rho) + \mathcal{L}_{at}\rho, \quad (5.10)$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{\kappa_{eng}}{2} \{ (N + 1) (2S\rho S^\dagger - \rho S^\dagger S - S^\dagger S\rho) + N (2S^\dagger \rho S - \rho S S^\dagger - S S^\dagger \rho) \\ & - M (2S\rho S - \rho S S - S S\rho) + -M^* (2S^\dagger \rho S^\dagger - \rho S^\dagger S^\dagger - S^\dagger S^\dagger \rho) \} + \mathcal{L}_{at}\rho, \end{aligned} \quad (5.11)$$

com

$$\beta^2 = |\beta_2|^2 - |\beta_1|^2; \quad (5.12a)$$

$$N = \frac{|\beta_1|^2}{\beta^2}; \quad (5.12b)$$

$$M = -\frac{\beta_1^* \beta_2^*}{\beta^2}; \quad (5.12c)$$

$$\kappa_{eng} = \frac{8\beta^2}{\kappa}. \quad (5.12d)$$

Vemos que (5.11) representa o sistema atômico de dois níveis efetivo sujeito a um reservatório comprimido artificial, isto é, o modo da cavidade comporta-se como um reservatório comprimido com taxa de decaimento efetivo  $\kappa_{eng}$ . É importante salientar que a ação dissipativa provocada pelo ambiente, considerada pelo termo  $\mathcal{L}_{at}\rho$ , leva o sistema a um reservatório de vácuo comprimido não ideal para os átomos. Porém, em nosso esquema assumimos que  $\gamma \ll |\beta_i|, |\eta_i|$ , isto é, este termo dissipativo é pouco relevante como discutido anteriormente. A equação mestra (5.11) é idêntica à obtida na Ref. [30], porém, aqui, consideramos átomos de três níveis ao invés de cinco níveis como na referência acima citada.

## 5.1 Análise da equação mestra efetiva atômica

Nesta seção faremos, primeiramente, uma análise da solução analítica de (5.10), mostrando qual deve ser a escolha dos parâmetros livres de nosso esquema para que o estado assintótico obtido seja um estado emaranhado, relativo à base de Bell, entre os dois átomos.

Logo após, mostraremos a evolução numérica de (5.3) a fim de validarmos o presente esquema.

### 5.1.1 Solução analítica da equação mestra efetiva atômica

Para encontrar o estado estacionário de (5.10) considerando  $\gamma = 0$ , resolvemos as equações diferenciais acopladas dos elementos de  $\rho$  na base  $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$ , tal que convençionamos os elementos de  $\rho$  como:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13}^* & \rho_{23}^* & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{14}^* & \rho_{24}^* & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle ee|\rho|ee\rangle & \langle ee|\rho|eg\rangle & \langle ee|\rho|ge\rangle & \langle ee|\rho|gg\rangle \\ \langle eg|\rho|ee\rangle & \langle eg|\rho|eg\rangle & \langle eg|\rho|ge\rangle & \langle eg|\rho|gg\rangle \\ \langle ge|\rho|ee\rangle & \langle ge|\rho|eg\rangle & \langle ge|\rho|ge\rangle & \langle ge|\rho|gg\rangle \\ \langle gg|\rho|ee\rangle & \langle gg|\rho|eg\rangle & \langle gg|\rho|ge\rangle & \langle gg|\rho|gg\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Antes disso, vale ressaltar que os estados livres de decoerência ("*dark states*") do sistema, isto é, os autovetores de  $R$  com autovalor nulo, são:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ge\rangle - |eg\rangle); \quad (5.14)$$

$$|\Phi(|\beta_1|, |\beta_2|, \phi)\rangle = \sqrt{\frac{|\beta_2|^2}{|\beta_2|^2 + |\beta_1|^2}} |gg\rangle - e^{i\phi} \sqrt{\frac{|\beta_1|^2}{|\beta_2|^2 + |\beta_1|^2}} |ee\rangle, \quad (5.15)$$

onde  $\phi = \phi_2 - \phi_1$  (diferença de fase entre os lasers 1 e 2). Vemos que no caso de  $|\beta_2| = |\beta_1|$ ,  $|\Phi(|\beta_1|, |\beta_2|, \phi)\rangle = |\Phi(\phi)\rangle = |\Phi^\pm\rangle$  para  $\phi = \pi$  e  $\phi = 0$  respectivamente. Portanto, só o estado de Bell

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ge\rangle + |eg\rangle) \quad (5.16)$$

não é um estado livre de decorência em nosso esquema.

As equações diferenciais acopladas dos elementos de  $\rho$  são:

$$\dot{\rho}_{11} = (4/\kappa) [|\beta_1|^2 (\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{23}^* + \rho_{33}) - 2|\beta_2|^2 \rho_{11} - \beta_1^* \beta_2 \rho_{14} + \beta_1 \beta_2^* \rho_{14}^*] \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12} &= (2/\kappa) [|\beta_1|^2 (2\rho_{24} + 2\rho_{34} - \rho_{12} - \rho_{13}) - |\beta_2|^2 (3\rho_{12} + \rho_{13}) + 2\beta_1 \beta_2^* (\rho_{12}^* \\ &\quad + \rho_{13}^* - \rho_{24}^*)] \end{aligned} \quad (5.17b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{13} &= (2/\kappa) [|\beta_1|^2 (2\rho_{24} + 2\rho_{34} - \rho_{12} - \rho_{13}) - |\beta_2|^2 (3\rho_{13} + \rho_{12}) + 2\beta_1 \beta_2^* (\rho_{12}^* \\ &\quad + \rho_{13}^* - \rho_{34}^*)] \end{aligned} \quad (5.17c)$$

$$\dot{\rho}_{14} = (4/\kappa) [\beta_1 \beta_2^* (\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{23}^* + \rho_{33} - \rho_{11} - \rho_{44}) - (|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2) \rho_{14}] \quad (5.17d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} = & (2/\kappa) [2|\beta_1|^2 \rho_{44} + 2|\beta_2|^2 \rho_{11} - (|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2) (2\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{23}^*) \\ & + 2\beta_1^* \beta_2 \rho_{14} + 2\beta_1 \beta_2^* \rho_{14}^*] \end{aligned} \quad (5.18a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{23} = & (2/\kappa) [2|\beta_1|^2 \rho_{44} + 2|\beta_2|^2 \rho_{11} - (|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2) (\rho_{22} + 2\rho_{23} + \rho_{33}) \\ & + 2\beta_1^* \beta_2 \rho_{14} + 2\beta_1 \beta_2^* \rho_{14}^*] \end{aligned} \quad (5.18b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{24} = & (2/\kappa) [-|\beta_1|^2 (3\rho_{24} + \rho_{34}) + |\beta_2|^2 (2\rho_{12} + 2\rho_{13} - \rho_{24} - \rho_{34}) + 2\beta_1 \beta_2^* (\rho_{24}^* \\ & + \rho_{34}^* - \rho_{21})] \end{aligned} \quad (5.18c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{33} = & (2/\kappa) [2|\beta_1|^2 \rho_{44} + 2|\beta_2|^2 \rho_{11} - (|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2) (\rho_{23} + \rho_{23}^* + 2\rho_{33}) \\ & + 2\beta_1^* \beta_2 \rho_{14} + 2\beta_1 \beta_2^* \rho_{14}^*] \end{aligned} \quad (5.18d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{34} = & (2/\kappa) [-|\beta_1|^2 (\rho_{24} + 3\rho_{34}) + |\beta_2|^2 (2\rho_{12} + 2\rho_{13} - \rho_{24} - \rho_{34}) + 2\beta_1 \beta_2^* (\rho_{24}^* \\ & + \rho_{34}^* - \rho_{13}^*)] \end{aligned} \quad (5.18e)$$

$$\dot{\rho}_{44} = (4/\kappa) [|\beta_2|^2 (\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{23}^* + \rho_{33}) - 2|\beta_1|^2 \rho_{44} - \beta_1^* \beta_2 \rho_{14} + \beta_1 \beta_2^* \rho_{14}^*] \quad (5.18f)$$

A seguir, vamos mostrar a solução estacionária dos elementos de  $\rho$  para os casos  $|\beta_2| = |\beta_1|$  e  $|\beta_2| \neq |\beta_1|$  separadamente, pois apresentam resultados distintos.

**a) Caso em que  $\beta_2 = \pm\beta_1$  ( $\phi = 0(+)$  e  $\phi = \pi(-)$ )**

Neste caso temos que a solução estacionária ( $t \rightarrow \infty$ ) é dada por:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \rightarrow & \frac{1}{8} \{3\rho_{11}(0) \mp \rho_{14}(0) \mp \rho_{14}^*(0) + 3\rho_{44}(0) + \rho_{22}(0) + \rho_{23}(0) \\ & + \rho_{23}^*(0) + \rho_{33}(0)\} \end{aligned} \quad (5.19a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{14} \rightarrow & \frac{1}{8} \{3\rho_{14}(0) \mp \rho_{11}(0) \mp \rho_{44}(0) + 3\rho_{14}^*(0) \pm \rho_{22}(0) \pm \rho_{23}(0) \\ & \pm \rho_{23}^*(0) \pm \rho_{33}(0)\} \end{aligned} \quad (5.19b)$$

$$\begin{aligned} \rho_{22} \rightarrow & \frac{1}{8} \{\rho_{11}(0) \pm \rho_{14}(0) \pm \rho_{14}^*(0) + \rho_{44}(0) + 3\rho_{22}(0) - \rho_{23}(0) \\ & - \rho_{23}^*(0) + 3\rho_{33}(0)\} \end{aligned} \quad (5.19c)$$

$$\rho_{23} \rightarrow \frac{1}{8} \{ \rho_{11}(0) \pm \rho_{14}(0) \pm \rho_{14}^*(0) + \rho_{44}(0) - \rho_{22}(0) + 3\rho_{23}(0) + 3\rho_{23}^*(0) - \rho_{33}(0) \} \quad (5.19d)$$

$$\rho_{44} = \rho_{11}; \quad \rho_{33} = \rho_{22}; \quad \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0 \quad (5.19e)$$

Olhando para (5.19), vemos que o estado assintótico depende do estado atômico inicial, como podemos observar no quadro abaixo:

Estado inicial	$ ee\rangle ( gg\rangle)$	$ eg\rangle ( ge\rangle)$	$ \Phi(\pi)\rangle =  \Phi^+\rangle$	$ \Phi(0)\rangle =  \Phi^-\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ \psi^-\rangle$
Estado final para:						
$\beta_2 = \beta_1$	$X_3^-$	$X_4^+$	$X_5^+$	$ \Phi^-\rangle$	$X_5^+$	$ \psi^-\rangle$
$\beta_2 = -\beta_1$	$X_3^+$	$X_4^-$	$ \Phi^+\rangle$	$X_5^-$	$X_5^-$	$ \psi^-\rangle$

tal que  $X_3^\pm, X_4^\pm$  e  $X_5^\pm$  são matrizes densidade de estados mistos dadas por:

$$X_3^\pm = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{4} [(1 + \delta_{\beta_2, \beta_1}) |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| + (1 + \delta_{\beta_2, -\beta_1}) |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| + |\psi^+\rangle \langle \psi^+|]$$

$$X_4^\pm = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{4} [|\Phi^\pm\rangle \langle \Phi^\pm| + 2|\psi^-\rangle \langle \psi^-| + |\psi^+\rangle \langle \psi^+|]$$

$$X_5^\pm = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{2} [|\Phi^\pm\rangle \langle \Phi^\pm| + |\psi^+\rangle \langle \psi^+|]$$

A partir do quadro acima, confirmamos que os estados  $|\psi^-\rangle$ ,  $|\Phi^+\rangle$  quando  $\phi = \pi$  e  $|\Phi^-\rangle$  quando  $\phi = 0$  são estados livres de decoerência; e vemos que não é possível gerar estados emaranhados no caso de  $|\beta_2| = |\beta_1|$ . Isso se deve ao fato de que, quando  $|\beta_2| = |\beta_1|$ ,  $R$  torna-se um operador hermiteano ( $R = R^\dagger$  a menos de uma fase global), e sendo assim, não podemos gerar um estado emaranhado assintoticamente através de (5.10) conforme constatado na Ref. [39].

**b) Caso em que  $|\beta_2| \neq |\beta_1|$**

Aqui, a solução estacionária é

$$\rho_{11} \rightarrow \frac{|\beta_1|^2}{2(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} \{2\rho_{11}(0) + \rho_{22}(0) + \rho_{23}(0) + \rho_{23}^*(0) + \rho_{33}(0) + 2\rho_{44}(0)\}; \quad (5.23a)$$

$$\rho_{14} \rightarrow \frac{-\beta_1^*\beta_2}{2(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} \{2\rho_{11}(0) + \rho_{22}(0) + \rho_{23}(0) + \rho_{23}^*(0) + \rho_{33}(0) + 2\rho_{44}(0)\}; \quad (5.23b)$$

$$\rho_{22} \rightarrow \frac{1}{4} \{\rho_{22}(0) - \rho_{23}(0) - \rho_{23}^*(0) + \rho_{33}(0)\}; \quad (5.23c)$$

$$\rho_{44} \rightarrow \frac{|\beta_2|^2}{2(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} \{2\rho_{11}(0) + \rho_{22}(0) + \rho_{23}(0) + \rho_{23}^*(0) + \rho_{33}(0) + 2\rho_{44}(0)\}; \quad (5.23d)$$

$$\rho_{23} = -\rho_{22}; \quad \rho_{33} = \rho_{22}; \quad \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0. \quad (5.23e)$$

Os estados assintóticos obtidos a partir de estados atômicos iniciais variados são mostrados no quadro abaixo.

Estado inicial	$ ee\rangle ( gg\rangle)$	$ eg\rangle ( ge\rangle)$	$ \Phi^+\rangle$	$ \Phi^-\rangle$	$ \Phi\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ \psi^-\rangle$
Estado assintótico	$ \Phi\rangle$	$X_6$	$ \Phi\rangle$	$ \Phi\rangle$	$ \Phi\rangle$	$ \Phi\rangle$	$ \psi^-\rangle$

tal que

$$X_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{|\beta_1|^2}{(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} & 0 & 0 & \frac{-\beta_1^*\beta_2}{(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \frac{-\beta_2^*\beta_1}{(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} & 0 & 0 & \frac{|\beta_2|^2}{(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{2} [|\Phi\rangle \langle\Phi| + |\psi^-\rangle \langle\psi^-|]$$

com  $|\Phi\rangle$  dado por (5.15).

Além da confirmação dos estados  $|\psi^-\rangle$  e  $|\Phi\rangle$  serem livres de decoerência, vemos que é possível gerar o estado emaranhado  $|\Phi\rangle$  quando preparamos inicialmente os átomos nos estados  $|ee\rangle$  ( $|gg\rangle$ ),  $|\Phi^+\rangle$ ,  $|\Phi^-\rangle$  e  $|\psi^+\rangle$ . Foi visto anteriormente que  $|\Phi\rangle$  se aproxima dos estados de Bell  $|\Phi^\pm\rangle$  quando  $\beta_2 \rightarrow \mp\beta_1$ . Portanto nosso esquema é capaz de gerar um estado emaranhado  $|\Phi\rangle$  com fidelidade [40] de

$$\mathcal{F}(|\Phi\rangle, |\Phi^\pm\rangle) = |\langle\Phi|\Phi^\pm\rangle|^2 = \frac{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 \mp 2|\beta_1||\beta_2|\cos(\phi)}{2(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} \quad (5.25)$$

em relação aos estados de Bell  $|\Phi^\pm\rangle$ . Vemos que a fidelidade nunca poderá ser igual à unidade já que este resultado não é válido para  $|\beta_2| = |\beta_1|$ .

É interessante observar também que  $|\Phi(0, |\beta_2|, \phi)\rangle = |gg\rangle$  e  $|\Phi(|\beta_1|, 0, \phi)\rangle = |ee\rangle$ , isto é, é possível em nosso esquema gerar os estados  $|gg\rangle$  e  $|ee\rangle$  dependendo do estado atômico preparado inicialmente; e que, se  $|eg\rangle$  ( $|ge\rangle$ ) for preparado inicialmente, obtemos um estado misto dado pela matriz densidade  $X_6$ .

### 5.1.2 Solução numérica da equação mestra efetiva atômica

Nesta seção resolvemos numericamente a equação mestra total (5.3) para a verificação da validade dos resultados obtidos analiticamente. Para isto, assumimos o modo da cavidade no estado de vácuo inicialmente e mostramos a evolução dos elementos da matriz densidade para alguns dos estados atômicos iniciais estudados anteriormente.

#### Caso em que $|\beta_2| \neq |\beta_1|$

Para o caso em que  $|\beta_2| \neq |\beta_1|$ , utilizando  $|\Omega_2| = 10g$ ,  $\Delta_2 = 100g$ ,  $|\Omega_1| = 9.05g$ ,  $\Delta_1 = 81.82g$ ,  $\kappa = g$  e  $\gamma = 0$ , que nos dão  $|\beta_2| = 0.1g$ ,  $|\beta_1| = 0.111g$ ,  $\eta_2 = 0.01g$  e  $\eta_1 = 0.012g$ , obtivemos a evolução dos elementos de  $\rho$  e mostramos: *i*) a geração dos estados  $|\Phi(\phi)\rangle = \sqrt{0.45}|gg\rangle - e^{i\phi}\sqrt{0.55}|ee\rangle$ , com fidelidade de 99,7% em relação aos estados de Bell  $|\Phi^\pm\rangle$ , para  $\phi = \pi$  (Fig. 5.1(a)) e  $\phi = 0$  (Fig. 5.1(b)) considerando  $|gg\rangle$  como estado inicial; *ii*) a geração do estado  $X_6$  para  $\phi = 0$  considerando  $|ge\rangle$  com estado inicial conforme a Fig. 5.2; *iii*) a geração do estado  $|\Phi\rangle = \sqrt{0.45}|gg\rangle + \sqrt{0.55}|ee\rangle$  para  $\phi = \pi$  considerando  $|\Phi^+\rangle$  (Fig. 5.3(a)) e  $|\Phi^-\rangle$  (Fig. 5.3(b)) como estados iniciais; *iv*) a geração do estado  $|\Phi\rangle = \sqrt{0.45}|gg\rangle + \sqrt{0.55}|ee\rangle$  para  $\phi = \pi$  considerando  $|\psi^+\rangle$  como estado inicial (Fig. 5.4(a)) e a confirmação de que  $|\psi^-\rangle$  é um estado livre de decoerência considerando ele mesmo como estado inicial (Fig. 5.4(b)).

Observando da Fig. 5.1 à Fig. 5.4 vemos uma excelente concordância entre os resultados previstos analiticamente e os obtidos numericamente.

Os elementos  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{24}$  e  $\rho_{34}$  não foram inseridos nas figuras pois eles sempre são nulos para as condições iniciais escolhidas aqui.

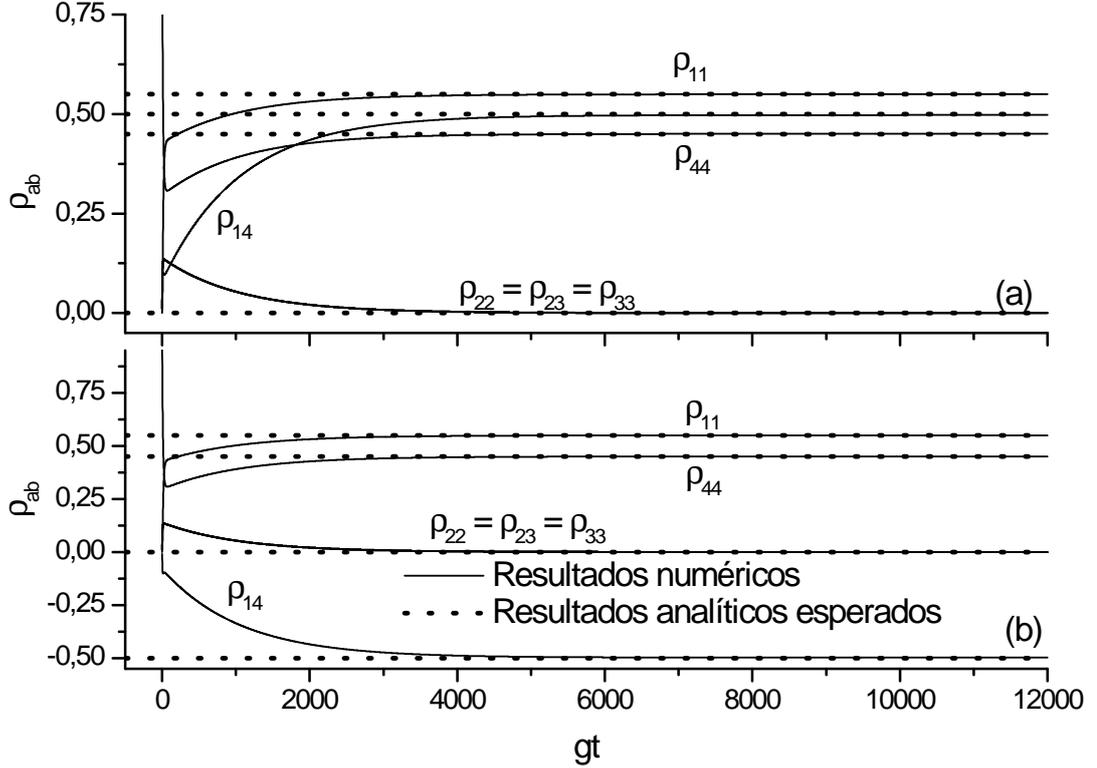


Figura 5.1: Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico  $|\Phi(\pi)\rangle$ , e (b) a geração do estado  $|\Phi(0)\rangle$ , para  $\phi = 0$ , considerando  $|gg\rangle$  inicialmente para ambos os casos.

### Caso em que $|\beta_2| = |\beta_1|$

Para o caso em que  $|\beta_2| = |\beta_1|$ , utilizando  $|\Omega_1| = |\Omega_2| = 10g$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 100g$ ,  $\phi = 0$ ,  $\kappa = g$  e  $\gamma = 0$ , que nos dão  $|\beta_1| = |\beta_2| = 0.1g$  e  $\eta_1 = \eta_2 = 0.01g$ , obtivemos a evolução dos elementos de  $\rho$  e mostramos: *i*) a geração do estado  $X_3^-$  considerando  $|gg\rangle$  como estado inicial (Fig. 5.5(a)) e a geração do estado  $X_4^+$  considerando  $|ge\rangle$  com estado inicial (Fig. 5.5(b)); *ii*) a geração do estado  $X_5^+$  (Fig. 5.6(a)) considerando  $|\Phi^+\rangle$  inicialmente e a confirmação de  $|\Phi^-\rangle$  ser um *dark state* considerando ele mesmo como estado inicial

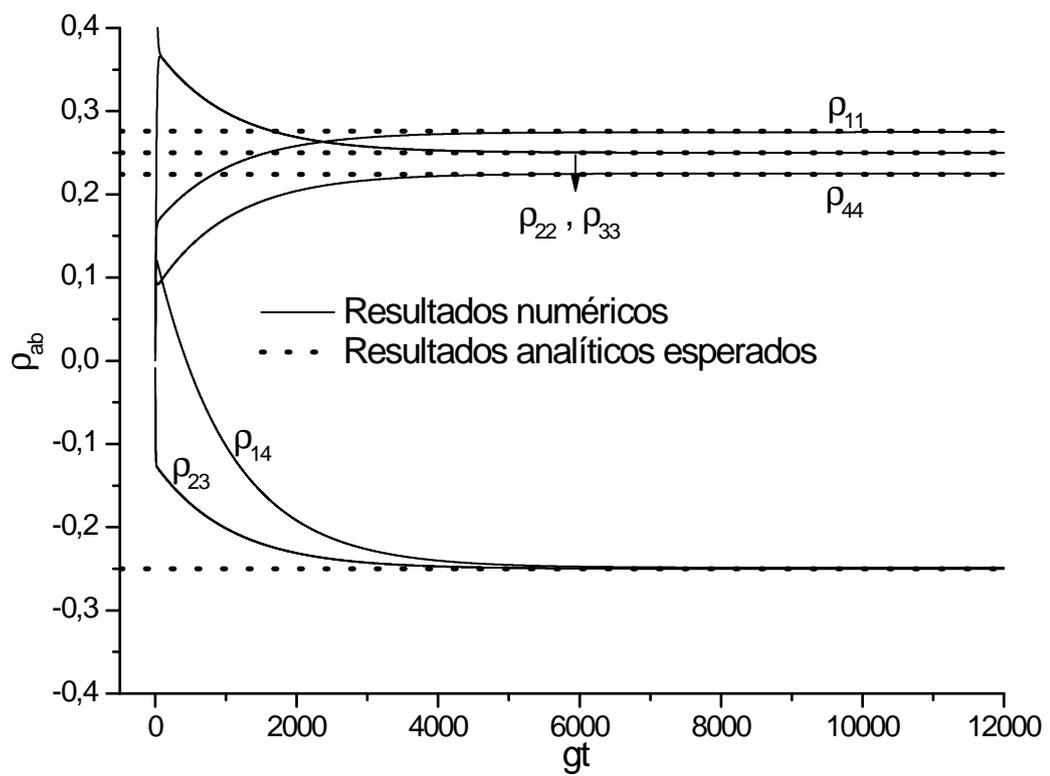


Figura 5.2: Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando a geração do estado misto dado por  $X_6$  considerando  $|ge\rangle$  inicialmente.

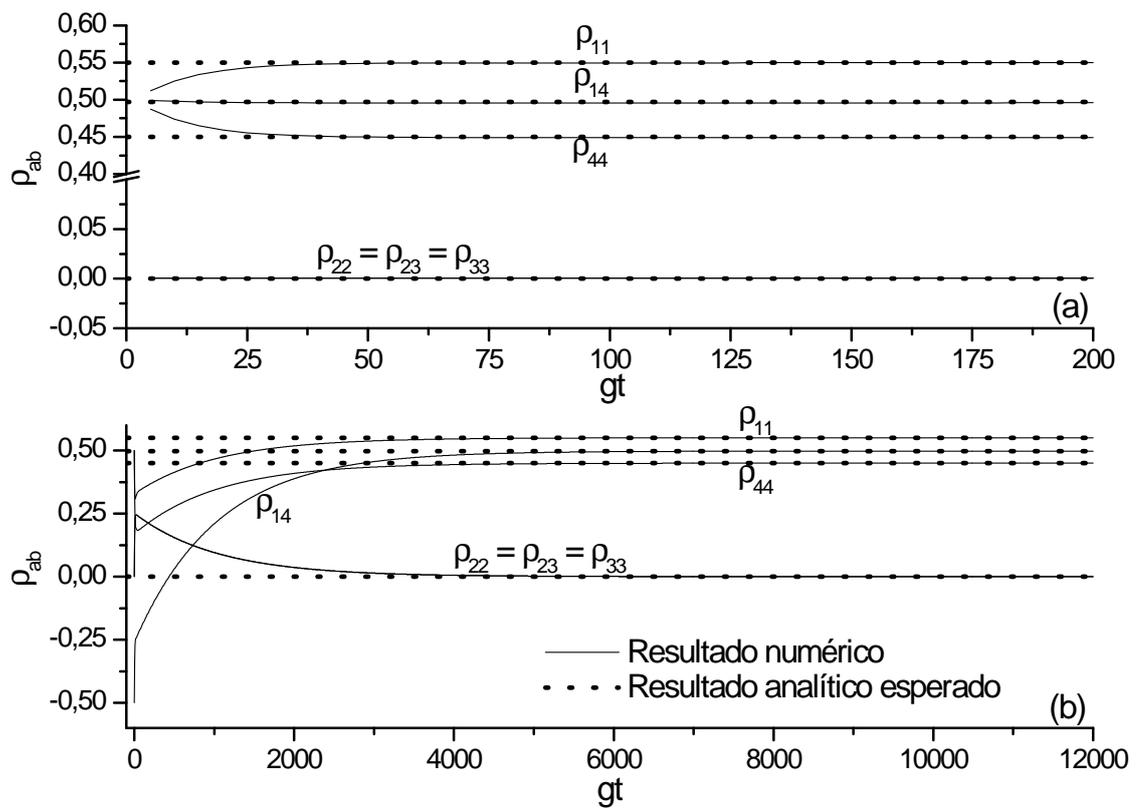


Figura 5.3: Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando a geração do estado atômico  $|\Phi\rangle$ , para  $\phi = \pi$ , considerando (a)  $|\Phi^+\rangle$  e (b)  $|\Phi^-\rangle$  inicialmente.

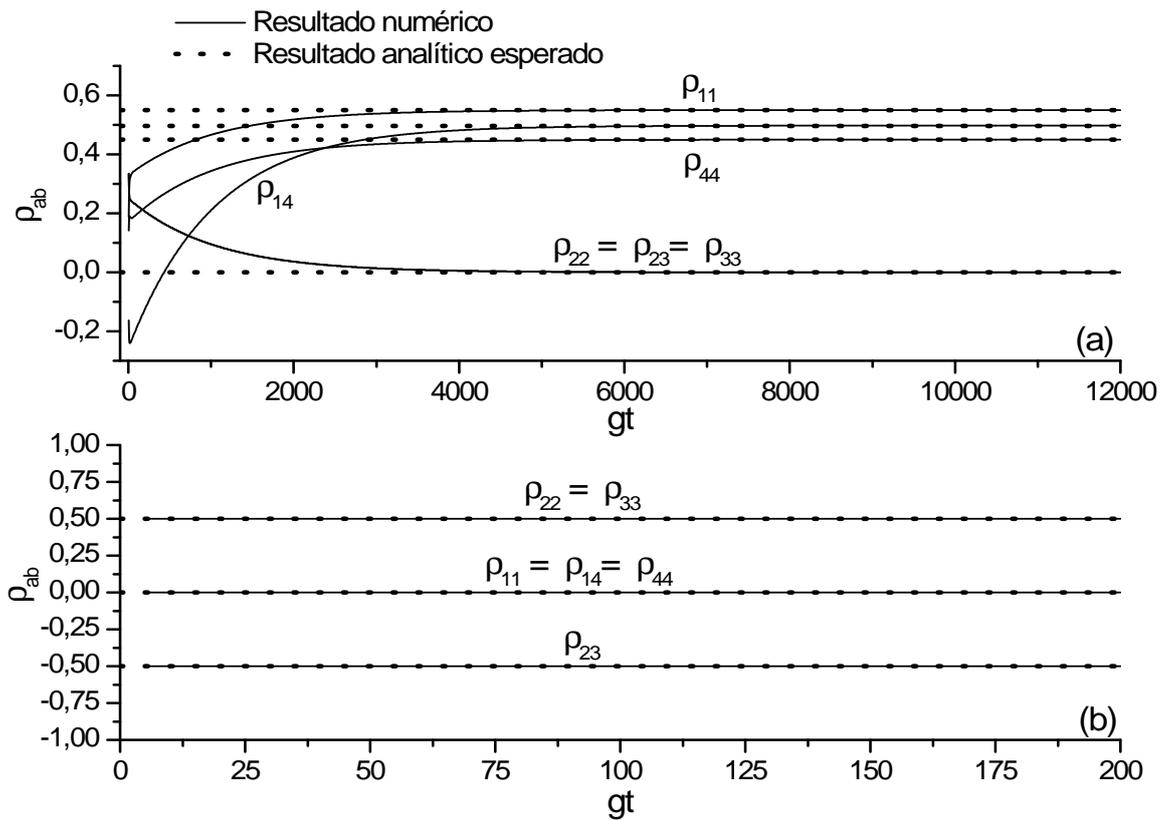


Figura 5.4: Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico  $|\Phi\rangle$ , para  $\phi = \pi$ , considerando  $|\Psi^+\rangle$  inicialmente e (b) a confirmação de  $|\Psi^-\rangle$  ser um *dark state* quando este é preparado inicialmente.

(Fig. 5.6(b)); *iii*) a geração do estado  $X_5^+$  (Fig. 5.7(a)) considerando  $|\Psi^+\rangle$  inicialmente e a confirmação de  $|\Psi^-\rangle$  ser livre de decoerência considerando ele mesmo como estado inicial (Fig. 5.7(b)).

Observando da Fig. 5.5 à Fig. 5.7 vemos, como no caso anterior, uma excelente concordância entre os resultados previstos analiticamente e os obtidos numericamente.

Com todos esses resultados, confirmamos que o nosso esquema é capaz de gerar estados satisfatoriamente próximos aos estados  $|\Phi^\pm\rangle$  de Bell, além de proteger os estados  $|\Phi^+\rangle$ ,  $|\Phi^-\rangle$  e  $|\Psi^-\rangle$ , mas não é capaz de gerar nem de proteger o estado  $|\Psi^+\rangle$ .

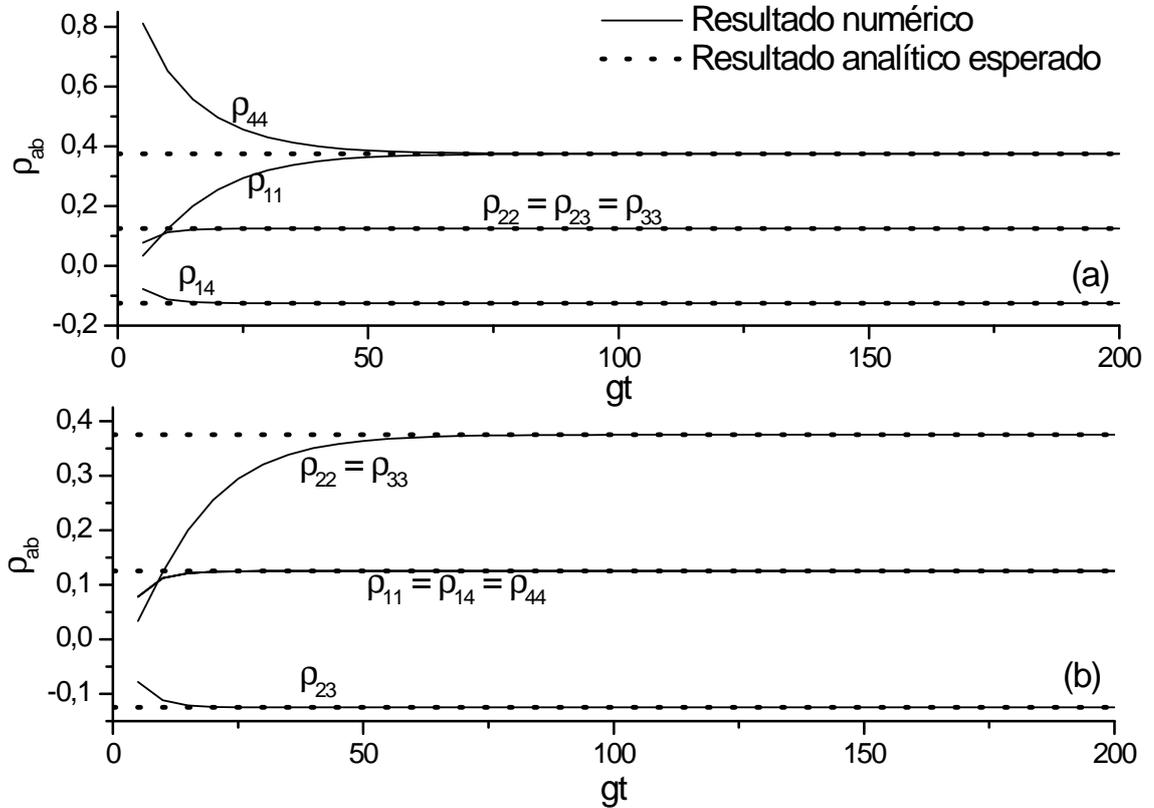


Figura 5.5: Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico misto  $X_3^-$  considerando  $|gg\rangle$  inicialmente e (b) a geração do estado atômico misto  $X_4^+$  considerando  $|ge\rangle$  inicialmente.

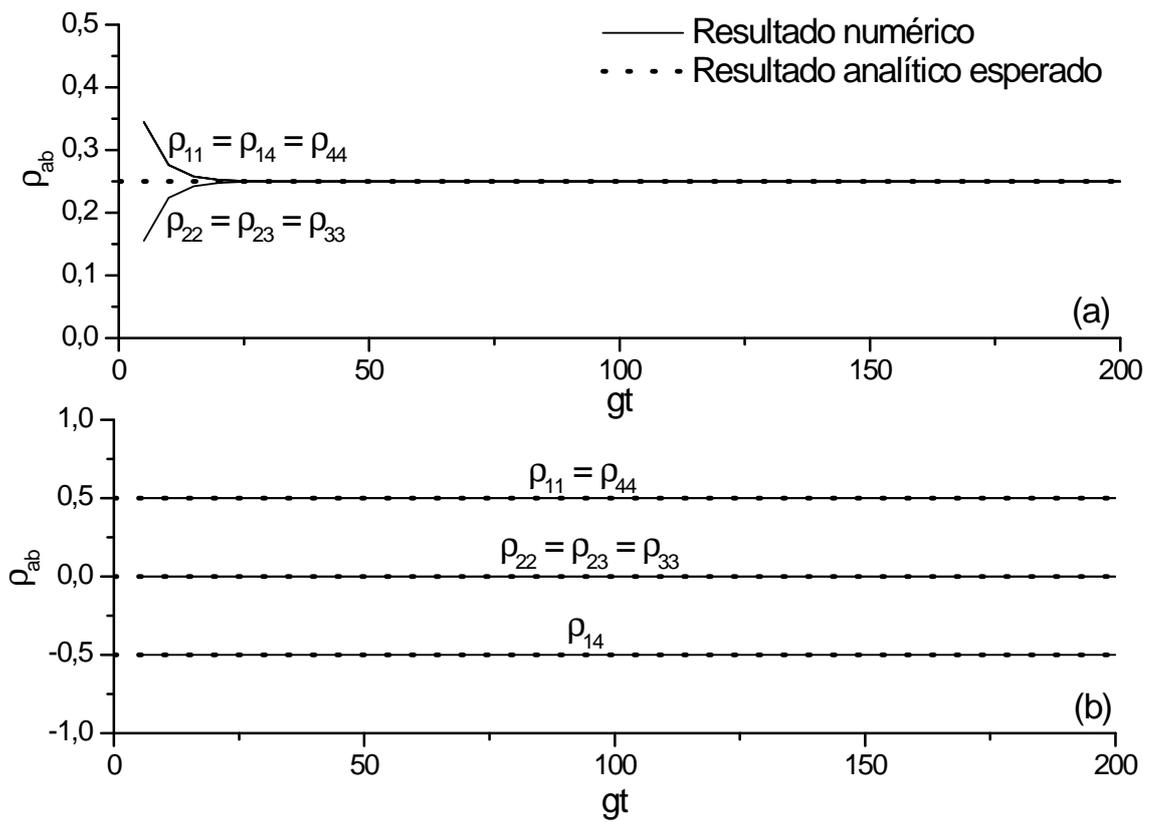


Figura 5.6: Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico misto  $X_5^+$  considerando  $|\Phi^+\rangle$  inicialmente e (b) a confirmação de  $|\Phi^-\rangle$  ser livre de decoerência considerando ele mesmo como estado inicial.

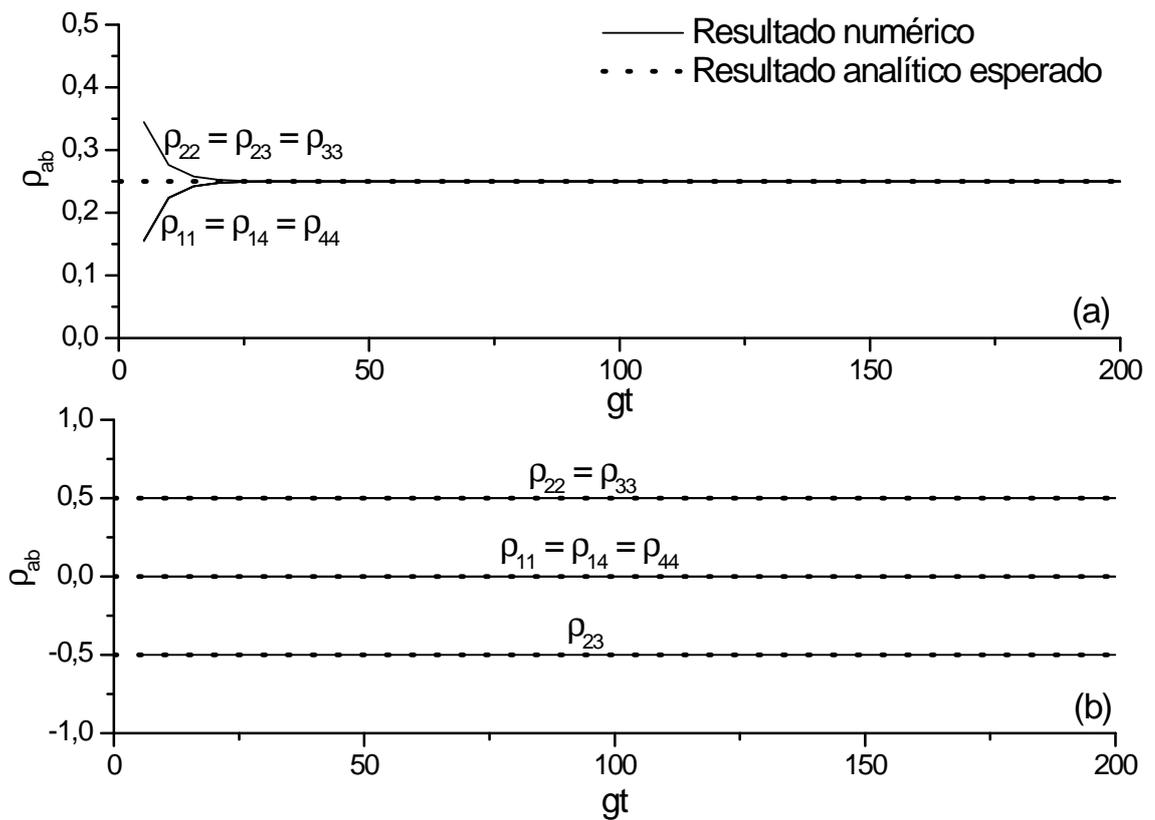


Figura 5.7: Evolução numérica dos elementos da matriz densidade atômica mostrando (a) a geração do estado atômico misto  $X_5^+$  considerando  $|\Psi^+\rangle$  inicialmente e (b) a confirmação de  $|\Psi^-\rangle$  ser livre de decoerência considerando ele mesmo como estado inicial.

# Capítulo 6

## Conclusão

Apresentamos aqui um estudo teórico de engenharia de interações e de reservatórios, na manipulação da interação átomo-campo, para a geração de estados coerentes comprimidos para o modo do campo de radiação da cavidade e para a geração de estados emaranhados, da base de Bell, entre os átomos.

O sistema investigado neste projeto consiste em átomos/íons que interagem com modos do campo de radiação aprisionados em cavidades. Os átomos, cujos estados eletrônicos são preparados adequadamente, interagem com o modo estacionário do campo. Nesse caso, tanto os átomos como os campos de radiação estacionários foram tratados quanticamente, sendo a interação entre os mesmos descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings [27, 28]. Para manipular a interação átomo-campo, empregaram-se então campos clássicos externos. Desse modo, os átomos foram utilizados para manipular a dinâmica do campo de radiação quântico e vice-versa.

Inicialmente, construímos uma interação, obtida pela técnica descrita na ref. [33], baseada num Hamiltoniano efetivo que representa uma interação do tipo *Jaynes-Cummings* e uma *anti-Jaynes-Cummings* simultaneamente [29], tornando-nos capazes de construir um reservatório de modos comprimidos artificial tanto para o modo da cavidade quanto para os átomos.

No capítulo 4, mostramos como gerar um estado coerente comprimido robusto para o modo da cavidade, considerando uma taxa de decaimento atômica muito forte e uma cavidade de alta qualidade. Essa realização foi possível graças à simulação de um reservatório comprimido para o modo da cavidade feita pelos átomos.

No capítulo 5, através da construção de um reservatório comprimido artificial simulado

---

pelo modo da cavidade (devido a este ter uma forte taxa de decaimento), mostramos que é possível gerar estados emaranhados com fidelidade acima de 90% em relação a dois estados emaranhados relativos à base de Bell, a saber  $|\Phi^\pm\rangle$ , como na Ref. [30], só que utilizamos átomos de três níveis ao invés de cinco como na referência citada anteriormente. Verificamos também que os estados de Bell  $|\Phi^\pm\rangle$  ( $\beta_2 = \mp\beta_1$ ) e  $|\Psi^-\rangle$  são estados livres de decoerência em nosso esquema. A falha do esquema na geração dos estados  $|\Psi^\pm\rangle$  serve como uma motivação para a procura de um protocolo diferente no qual consigamos tal feito num trabalho futuro.

E como obtemos um estado emaranhado relativamente robusto para os átomos, uma outra proposta futura é dar continuidade ao trabalho [41] utilizando de sua receita geral para construir evoluções coerentes não adiabáticas de dois qubits guiadas por reservatórios artificiais para proteger estados de superposição não estacionários.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Phys. Rev.* 47, 777 (1935).
- [2] Para uma revisão veja A. Aspect, *Nature* 398, 189 (1999).
- [3] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1993).
- [4] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information” (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [5] Para uma revisão sobre experimentos em EQC veja: J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* 73, 565 (2001).
- [6] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger e H. Walther, *Nature* 403, 743 (2000); S. Brattke, B. T. H. Varcoe e H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* 86, 3534 (2001).
- [7] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. A* 64, 050301(R) (2001).
- [8] S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves, P. Maiolo, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* 87, 037902 (2001).
- [9] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, U. B. Hoff, M. Brune, J. M. Raimond, S; Haroche, *Nature* 446, 297 (2007).
- [10] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J. M. Raimond, S; Haroche, *Nature* 448, 889 (2007).
- [11] T. Wilk, H. P. Specht, S. C. Webster, G. Rempe, A. Kuhn, *Journal of Modern Optics* 54, 1569 (2007); M. Hijkelma, B. Weber, H. P. Specht, S. C. Webster, A; Kuhn, G. Rempe, *Nature Physics* 3, 253 (2007).

- [12] T. Wilk, S. C. Webster, A. Kuhn, G. Rempe, *Science* 317, 488 (2007).
- [13] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. N. Itano, D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* 76, 1796 (1996); Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Phys. Rev. Lett.* 83, 4713 (1999).
- [14] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. N. Itano e D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* 75, 4714 (1995); B. DeMarco, A. Ben-Kish, D. Leibfried, V. Meyer, M. Rowe, B. M. Jelenkovic, W. N. Itano, J. Britton, C. Langer, T. Rosenband e D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* 89, 267901 (2002); F. Schmidt-Kaler, H. Haffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner e R. Blatt, *Nature* 422, 408 (2003).
- [15] T. Sleator e H. Weinfurter, *Phys Rev. Lett.* 74, 4087 (1995); Shi-Biao Zheng e Guangcan Guo, *Phys. Rev. Lett.* 85, 2392 (2000).
- [16] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Nature* 411, 166 (2001).
- [17] D. DiVincenzo e B. Terhal, *Phys. World* 11, 56 (1998).
- [18] J. F. Poyatos, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 77, 4728 (1996).
- [19] A. R. R. Carvalho, P. Milman, R. L. de Matos Filho e L. Davidovich, *Phys Rev. Lett.* 86, 4988 (2001).
- [20] J. I. Cirac, A. S. Parkins, R. Blatt e P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 70, 556 (1993).
- [21] R. L. de Matos Filho e W. Vogel, *Phys. Rev. Lett.* 76, 608 (1996); R. L. Matos Filho e W. Vogel, *Phys Rev. A* 54, 4560 (1996); S.-C. Gou, J. Steinbach e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* 55, 3719 (1997); S.-C. Gou, J. Steinbach e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* 54, R1014 (1996); S.-C. Gou, J. Steinbach e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* 54, 4315 (1996).
- [22] A. S. Parkins, E. Solano, and J. J. Cirac, *Phys Rev. Lett.* 96, 053602 (2006).
- [23] G. X. Li, H. T. Tan, S. P. Wu, and G. M. Huang, *Phys Rev. A* 74, 025801 (2006).
- [24] A. Z. Khoury e T. B. L. Kist, *Phys Rev. A* 55, 2304 (1997).

- 
- [25] R. R. Puri, C. K. Law e J. H. Eberly, *Phys Rev. A* 50, 4212 (1994).
- [26] S. Pielawa, G. Morigi, D. Vitali, and L. Davidovich, *Phys Rev Lett.* 98, 240401 (2007).
- [27] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* 51 ,89 (1963).
- [28] M. O. Scully e M. S. Zubairy, “Quantum Optics”, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [29] T. Werlang, R. Guzmán, F. O. Prado, and C. J. Villas-Bôas, *Phys. Rev. A* 78, 033820 (2008).
- [30] S.G. Clark and A. S. Parkins, *Phys. Rev. Lett.* 90, 047905 (2003).
- [31] J. D. Jackson, “Classical Eletrodynamics (3rd edition)”, John Wiley & Sons, New York (1999).
- [32] K. R. Symon, “Mecânica”, Editora Campos, Rio de Janeiro (1982).
- [33] D. F. V. James, *Fortschr. Phys.* 48, 823 (2002).
- [34] C. Cohen-Tannoudji, “Quantum mechanics – Vol. I e Vol. II”, Hermann and Wiley & Sons, Paris (1997).
- [35] D.F. Walls and G.J. Milburn, "Quantum Optics", Springer-Verlag Berlin Heldenberg, (2008)
- [36] A.S. Parkins, H.J. Kimble, Quantum State Transfer between motion and light, *Journal of Optics B*, 1, 496 (1999).
- [37] C. W. Gardiner and P. Zoller, "Quantum Noise", Springer (2004).
- [38] H. J. Carmichael, "Statistical Methods in Quantum Optics 1", Springer (2002).
- [39] B. Kraus, H. P. Bçher, S. Diehl, A. Kantian, A. Micheli and P. Zoller, *Phys. Rev. A*, 78, 042307 (2008).
- [40] A. Uhlmann, *Rep. Math. Phys.* 9, 273 1976.
- [41] F. O. Prado, E. I. Duzzioni, M.; H. Y. Moussa, N. G. de Almeida, and C. J. Villas-Bôas, *Phys. Rev. Lett.* 102, 073008 (2009).

# Apêndice A

## "Regression Quantum Formula" [38]

Para calcular as funções de correlação dadas por (5.8), utilizamos desta técnica para facilitar nossos cálculos. Apresentaremos aqui como utilizá-la.

Dado um conjunto completo de operadores  $A_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) tal que seu valor médio possui a propriedade

$$\frac{d}{dt} \langle A_\mu \rangle = Tr (\dot{\rho} A_\mu) = \sum_{\lambda} M_{\mu,\lambda} \langle A_\lambda \rangle \quad (\text{A.1})$$

para algum conjunto de constantes  $M_{\mu,\lambda}$ , então podemos escrever um conjunto de equações diferenciais para as funções de correlação  $\langle O(t)A_\mu(t + \tau) \rangle$  e  $\langle A_\mu(t + \tau)O(t) \rangle$ , tal que

$$\frac{d}{d\tau} \langle O(t)A_\mu(t + \tau) \rangle = \sum_{\lambda} M_{\mu,\lambda} \langle O(t)A_\lambda(t + \tau) \rangle; \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle A_\mu(t + \tau)O(t) \rangle = \sum_{\lambda} M_{\mu,\lambda} \langle A_\lambda(t + \tau)O(t) \rangle, \quad (\text{A.3})$$

onde  $O(t)$  pode ser qualquer operador do sistema.

### A.1 Calculando as funções de correlação

Vamos dar um exemplo de como fazer este cálculo.

Primeiramente, a partir de (A.1) e considerando  $\dot{\rho}$  sendo dado por (5.3), temos

$$\frac{d}{dt} \langle a(t) \rangle = -\frac{\kappa}{2} \langle a(t) \rangle; \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d}{dt} \langle a^\dagger(t) \rangle = -\frac{\kappa}{2} \langle a^\dagger(t) \rangle; \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{dt} \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle = -\kappa \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle; \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d}{dt} \langle a(t) a^\dagger(t) \rangle = -\kappa (\langle a(t) a^\dagger(t) \rangle - 1). \quad (\text{A.7})$$

Como exemplo, vamos calcular

$$\langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle = Tr_{cav} [ae^{\mathcal{L}_{cav}\tau} (a^\dagger \rho_{cav}^{ss})]. \quad (\text{A.8})$$

Vemos que aqui  $A_\mu = a$  e  $O = a^\dagger$ .

Antes precisamos calcular

$$\frac{d}{d\tau} \langle A_\mu(t + \tau)O(t) \rangle = \sum_\lambda M_{\mu,\lambda} \langle A_\lambda(t + \tau)O(t) \rangle = \frac{d}{d\tau} \langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Para isto precisamos olhar para (A.4), já que  $A_\mu = a$ , para descobrirmos os coeficientes  $M_{\mu,\lambda}$ . Daí vemos que só há um coeficiente  $M = -\frac{\kappa}{2}$ , para  $A_\lambda = A_\mu = a$ .

Então,

$$\frac{d}{d\tau} \langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle = M \langle A_\lambda(t + \tau)O(t) \rangle = -\frac{\kappa}{2} \langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle. \quad (\text{A.10})$$

Integrando (A.10), obtemos que

$$\langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle = a(t)a^\dagger(t)e^{-\frac{\kappa}{2}\tau}. \quad (\text{A.11})$$

Integrando (A.7) vemos que

$$\langle a(t) a^\dagger(t) \rangle = e^{-\frac{\kappa}{2}t} (\langle a(0) a^\dagger(0) \rangle - 1) + 1. \quad (\text{A.12})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (a(t)a^\dagger(t)) e^{-\frac{\kappa}{2}\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Calculando através de (A.12) que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (a(t)a^\dagger(t)) = 1$ , finalmente chegamos que

$$\langle a(t + \tau)a^\dagger(t) \rangle_{ss} = Tr_{cav} [ae^{\mathcal{L}_{cav}\tau} (a^\dagger \rho_{cav}^{ss})] = e^{-\frac{\kappa}{2}\tau}. \quad (\text{A.14})$$