

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Matrizes de Reflexão com Simetria

$$\mathcal{U}_q [\mathfrak{osp}(2|2m)^{(2)}]$$

RICARDO SOARES VIEIRA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de concentração: Física Estatística.

Orientador

ANTONIO LIMA SANTOS

São Carlos

2012

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

V658mr

Vieira, Ricardo Soares.

Matrizes de reflexão com simetria $U_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$ /
Ricardo Soares Vieira. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
62 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2012.

1. Mecânica estatística. 2. Modelos integráveis. 3. Yang-
Baxter (Equação). 4. Equações de reflexão. I. Título.

CDD: 530.13 (20^a)

*“La vie n’est bonne qu’à deux choses: à faire des mathématiques et à les professer.”
(A vida é boa somente por duas coisas: por fazer matemática e por ensiná-la.)*

SIMÉON D. POISSON

Este trabalho é dedicado ao meu pai, por ter me despertado para a ciência ainda mesmo quando criança.

Agradecimentos

Não há palavras que possam expressar com justiça todo o apoio que recebi de meu orientador, PROF. DR. ANTONIO LIMA SANTOS, nestes dois anos em que desenvolvi o meu projeto de mestrado. Por todos os seus ensinamentos, discussões, incentivos e, pela sua amizade, meus agradecimentos mais sinceros. Também sou grato aos meus amigos e familiares por todo o incentivo e compreensão, sem os quais eu provavelmente teria enlouquecido por fazer essas contas. Por fim, agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos soluções graduadas das equações de YANG-BAXTER com fronteiras associadas aos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$.

Abstract

In this thesis we present solutions of the graded boundary YANG-BAXTER equations for vertex models with $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|2m)^{(2)}]$ symmetry.

Apresentação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No primeiro capítulo apresentamos uma breve introdução histórica à teoria dos sistemas integráveis. O segundo capítulo é dedicado a uma revisão dos principais conceitos matemáticos que serão utilizados na sequência. A formulação matemática da equação de YANG-BAXTER é apresentada no capítulo 3 e a respectiva formulação das equações de YANG-BAXTER com fronteiras (equações de reflexão) é apresentada no capítulo 4. No capítulo 5, as soluções das equações de YANG-BAXTER com fronteiras associadas aos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$ são apresentadas e uma classificação dessas soluções é proposta. As simetrias presentes nestas soluções são comentadas no capítulo 6. Por fim, soluções particulares aos modelos $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2)^{(2)}]$ e $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|4)^{(2)}]$ são apresentadas, respectivamente, nos apêndices A e B.

Sumário

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Sistemas integráveis: uma breve introdução histórica | 1 |
| 1.1 | Integrabilidade em mecânica clássica | 1 |
| 1.2 | Integrabilidade em mecânica quântica | 3 |
| 1.3 | Da equação de YANG-BAXTER até os dias atuais | 5 |
| 2 | Revisão de alguns conceitos matemáticos | 9 |
| 2.1 | Vetores em um espaço linear | 9 |
| 2.2 | Operadores e a representação de WEYL | 10 |
| 2.3 | Produtos tensoriais | 12 |
| 2.4 | O operador de permutação | 14 |
| 2.5 | Superálgebras | 16 |
| 3 | A equação de YANG-BAXTER | 19 |
| 3.1 | Formulação matemática | 20 |
| 3.2 | A solução de GALLEAS-MARTINS | 22 |
| 3.3 | Propriedades das soluções da equação de YANG-BAXTER | 25 |
| 4 | As equações de reflexão | 29 |
| 4.1 | Formulação matemática | 30 |
| 4.2 | Propriedades das soluções das equações de reflexão | 32 |
| 4.3 | Metodologia de resolução das equações de reflexão | 32 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5 | Soluções | 35 |
| 5.1 | Soluções diagonais | 36 |
| 5.2 | Soluções bloco-diagonais | 36 |
| 5.2.1 | Solução bloco-diagonal do tipo I | 37 |
| 5.2.2 | Solução bloco-diagonal do tipo II | 38 |
| 5.3 | Soluções X | 39 |
| 5.4 | Soluções completas | 40 |
| 5.4.1 | Parte comum das soluções completas | 40 |
| 5.4.2 | Soluções completas do tipo I | 44 |
| 5.4.3 | Soluções completas do tipo II | 46 |
| 6 | Sobre as simetrias das soluções | 49 |
| 7 | Conclusão | 51 |
| A | Soluções particulares ao modelo $\mathcal{U}_q [\mathfrak{osp}(2 2)^{(2)}]$ | 53 |
| B | Soluções particulares ao modelo $\mathcal{U}_q [\mathfrak{osp}(2 4)^{(2)}]$ | 57 |

CAPÍTULO 1

Sistemas integráveis: uma breve introdução histórica

1.1 Integrabilidade em mecânica clássica

A teoria dos sistemas integráveis (ou, de modo equivalente, a teoria da integrabilidade) é uma ramificação da física-matemática que estuda sistemas mecânicos (clássicos ou quânticos) que podem ser resolvidos de forma exata. A sua origem remonta aos próprios trabalhos de NEWTON em mecânica, muito embora um interesse maior por esta questão só tenha ocorrido após a formulação analítica desta disciplina — que se deveu à LAGRANGE, EULER, HAMILTON, POISSON e JACOBI, principalmente. Com efeito, através das ferramentas matemáticas desenvolvidas por esses cientistas, vários problemas de mecânica puderam ser resolvidos de forma exata. Para tais sistemas, a solução das respectivas equações diferenciais de movimento se reduzem ao cálculo de integrais, motivo pelo o qual esses sistemas foram chamados *sistemas integráveis*. Outros problemas mais complicados, contudo, não puderam ser resolvidos analiticamente por meio dessas técnicas (citemos por exemplo o clássico problema dos três corpos) e foram classificados como *não-integráveis*.

Embora o conceito de integrabilidade seja intuitivamente claro, uma definição mais precisa desse conceito deve ser apresentada. Devemos salientar, contudo, que não há um consenso sobre qual definição se utilizar [1] e definições diferentes podem apare-

cer em diferentes áreas de física-matemática¹. Nos concentraremos nessa seção com as definições de integrabilidade empregadas em mecânica clássica. A integrabilidade de sistemas quânticos será discutida na seção seguinte.

Foi LIOUVILLE [2] quem deu a primeira definição matematicamente satisfatória de integrabilidade e quem forneceu também condições suficientes para a integrabilidade de um sistema mecânico². Segundo LIOUVILLE, um sistema de $2n$ graus de liberdade é integrável se existirem n grandezas conservativas em involução (*i.e.*, cujos parênteses de POISSON se anulam, dois à dois). Quando essas condições são satisfeitas, pode-se mostrar que é possível encontrar uma transformação canônica que reduz à solução das equações diferenciais de movimento do sistema ao cálculo de quadraturas, demonstrando assim que tais sistemas são integráveis. O problema de KEPLER, o oscilador harmônico e o pião assimétrico são exemplos de sistemas integráveis pela definição de LIOUVILLE.

Depois dos trabalhos de LIOUVILLE, um avanço significativo na teoria da integrabilidade só foi obtido no século XX, através dos trabalhos LAX [4]. Utilizando-se do formalismo das álgebras de LIE, LAX introduziu o conceito de *par de LAX*: duas funções F e G definidas no espaço de fase do sistema formam um par de LAX se a evolução temporal dessas funções for proporcional ao comutador $[F, G] = FG - GF$, definido em uma dada álgebra de LIE, L (dito de outra forma, F e G formam um par de LAX se satisfizerem à equação de LAX $\dot{G} = [F, G]$). Note que em geral utilizamos uma representação da álgebra de LIE, de modo que as funções F e G passam a ser representadas por matrizes e a equação de LAX se torna uma equação matricial. A importância do formalismo de LAX provém do fato de que, uma vez determinado o par de LAX associado ao sistema em questão, pode-se determinar as suas quantidades conservativas em involução, verificando-se assim a sua integrabilidade.

O formalismo de LAX também é importante no estudo das equações diferenciais parciais não-lineares, principalmente no estudo da equação KDV. Essa equação, cuja forma explícita é $\partial_t \phi + \partial_x^3 \phi + 6\phi \partial_x \phi = 0$, tem origem nos estudos de KORTEWEG e DE VRIES [5] sobre sólitons³. Na mesma época em que LAX publicou seus traba-

¹Por exemplo, a integrabilidade de um sistema de equações diferenciais parciais é em geral descrita pelas condições de FROBENIUS [1]. Já em mecânica quântica um sistema pode ser definido como integrável quando for possível calcular de forma exata o espectro de autovetores/autovalores da hamiltoniana que o descreve. Em mecânica estatística, um sistema é definido como integrável, ou *exatamente solúvel*, quando a função de partição que o descreve pode ser calculada de forma exata, etc.

²Uma formulação mais precisa desse teorema de LIOUVILLE foi apresentada por ARNOLD em [3].

³Sólitons são certos tipos de pacotes de ondas que possuem características típicas de fenômenos não-lineares: eles possuem uma forma bem localizada e mantêm essa forma ao se propagarem; quando colidem entre si eles simplesmente passam uns pelos outros como se nenhuma colisão tivesse tido lugar etc.

lhos e encontrou soluções exatas da equação KDV, GARDNER ET AL. [6] resolveram essa equação de forma completamente diferente. De forma intrincada, esses autores mostraram que se $V(x, t)$ é um potencial que evolui através da equação KDV, então a evolução do coeficiente de reflexão $r(k, t)$ associado à esse potencial, pode ser obtido pela solução da equação de SCHRÖDINGER ao se expandir $V(x, t)$ em uma integral de FOURIER. Agora, a ideia fundamental desses autores foi justamente usar o procedimento inverso, ou seja, resolver a equação de SCHRÖDINGER para o coeficiente de reflexão $r(k, t)$ de modo que a transformada inversa de FOURIER forneça um potencial $V(x, t)$ que evolui conforme a equação KDV, o que permitiria resolver de forma exata essa equação. Essa técnica ficou conhecida a partir de então por *método do espalhamento inverso*.

Seguidamente a esse trabalho, ZAKHAROV e FADDEEV [7, 8] mostraram que sistemas regidos pela equação KDV podem ser vistos como um sistema integrável de infinitos graus de liberdade. Os dados espectrais desempenham o papel das quantidades conservadas em involução, de modo que tais sistemas podem, portanto, ser considerados integráveis pela definição de LIOUVILLE. A partir de então vários outros sistemas descritos por equações diferenciais não-lineares puderam ser igualmente classificados como integráveis através do método do espalhamento inverso.

1.2 Integrabilidade em mecânica quântica

O primeiro conceito de sistemas quânticos integráveis surgiu, como era de se esperar, a partir de uma adaptação da teoria de LIOUVILLE à mecânica quântica. Essa adaptação pode ser implementada da seguinte forma: um sistema quântico com $2n$ graus de liberdade é dito ser integrável se existirem n quantidades conservativas cujos *comutadores de DIRAC* se anulam, dois à dois. Embora esta definição de integrabilidade possa, à primeira vista, parecer atraente, na verdade não se sabe até o momento como colocá-la em bases matemáticas rigorosas, principalmente porque o conceito de independência entre operadores não é um conceito bem claro [1]. Por esse motivo, outras definições de integrabilidade tiveram de ser elaboradas e, para ser justo, não se tem ainda uma definição amplamente aceita. Os principais avanços na área de integrabilidade quântica serão discutidos à seguir.

O nosso ponto de partida será o chamado *modelo de ISING*, que foi elaborado para investigar as propriedades ferromagnéticas dos sólidos e representa também o início dos estudos sobre as cadeias de spins. Em verdade esse modelo foi criado por LENZ [9], professor de ISING, como um desafio a seu aluno. Entretanto, devido à riqueza do

tema, este acabou por se tornar o tema principal da tese de doutorado de ISING, o qual conseguiu resolver o desafio proposto apenas em uma dimensão [10]. Infelizmente o modelo de ISING unidimensional não apresenta transição de fase, o que é característico dos sistemas ferromagnéticos e, portanto, não fornece uma aproximação muito boa da realidade.

No modelo de ISING um sólido é representado por uma lâttice cujos vértices representam férmions de spin $1/2$, os quais interagem apenas com os vizinhos mais próximos. Seguidamente, HEISENBERG [11], utilizando-se da nova mecânica quântica desenvolvida por ele mesmo, generalizou o trabalho de ISING permitindo que o spin dos átomos apontasse aleatoriamente para qualquer direção. Embora HEISENBERG tenha explorado amplamente esse modelo, a solução completa do caso unidimensional só foi obtida três anos mais tarde por BETHE [12], ocasião em que ele introduziu a sua famosa hipótese – o *ansatz de BETHE* –, que consiste numa sofisticada técnica de construção de funções-de-onda exatas. O caso bidimensional foi resolvido posteriormente por ONSAGER, onde se verificou a existência de uma transição de fase (que também está presente no modelo de ISING bidimensional), de acordo com o comportamento real dos materiais ferromagnéticos.

Outra questão interessante diz respeito à *entropia residual do gelo*. Quando uma substância, ao se congelar, pode permanecer no seu estado final em diferentes configurações microscópicas (digamos, em W configurações diferentes), uma determinada entropia S – a entropia residual da substância – está sempre associada, conforme estabelece a fórmula de BOLTZMANN, $S = k_B \log W$. No caso da água, quando ela se transforma em gelo, uma rede cristalina é formada na qual cada átomo de oxigênio fica rodeado por 4 átomos de hidrogênio. Além disso, em uma molécula de água, cada átomo de hidrogênio pode se situar próximo ou distante do átomo de oxigênio e, portanto (já que existem 2 átomos de hidrogênio para cada molécula de água), a entropia residual por molécula fica dada por $S_m = k_B \log 4$. Deste modo, para uma rede com N átomos de oxigênio, o cálculo para a entropia residual da rede resulta em $S = k_B \log 4^N$. Infelizmente, o valor experimental encontrado para a entropia residual do gelo difere do valor obtido acima, sendo que $S_{\text{exp}} \approx k_B \log \left(\frac{3}{2}\right)^N$.

Foi prestigiado químico PAULING quem primeiro explicou essa discordância. Em seu artigo sobre a estrutura do gelo [13], PAULING argumentou que embora numa rede cristalina como a do gelo, cada átomo de oxigênio possa ser *a priori* rodeado por 4 átomos de hidrogênio (o que levaria a 16 diferentes configurações possíveis), na verdade apenas dois hidrogênios podem ficar próximos a um dado átomo de oxigênio, uma vez que na molécula de água cada oxigênio faz ligação com apenas 2 hidrogênios. Com isso, das 16 possibilidades discutidas acima, apenas 6 delas devem ser conside-

radas. Com essa regra de seleção – que é conhecida como *a regra do gelo de PAULING* –, a entropia residual do gelo se torna $S = k_B \log \left[4^N \left(\frac{6}{16} \right)^N \right] = k_B \log \left(\frac{3}{2} \right)^N$, que está em um bom acordo com o valor experimental.

Note, entretanto, que nesse cálculo PAULING considerou que os átomos de hidrogênio não interagissem entre si, o que certamente não corresponde à realidade. Por esse motivo o valor $S = k_B \log \left(\frac{3}{2} \right)^N$ obtido por PAULING é apenas aproximado e de fato diferiria um pouco com os valores experimentais mais refinados obtidos posteriormente. É de fato um grande feito que a entropia residual do gelo tenha sido calculada de modo exato por LIEB [14], cerca de 30 anos depois. Nesse cálculo, LIEB fez uso de praticamente todas as técnicas da teoria dos sistemas quânticos integráveis desenvolvidas até então (motivo pelo qual esse tema foi incluído na presente dissertação). O valor para a entropia residual do gelo calculada por LIEB é $S = k_B \log \lambda^N$, onde $\lambda = \left(\frac{4}{3} \right)^{3/2} = \frac{8\sqrt{3}}{9} = 1,53960\dots$ é a chamada *constante de LIEB* (constante que, aliás, aparece também em diversos problemas importantes da combinatória [14]).

1.3 Da equação de YANG-BAXTER até os dias atuais

Nos últimos 50 anos, outro avanço significativo foi obtido na teoria da integrabilidade. Trata-se da *equação de YANG-BAXTER* – um dos temas centrais nesta dissertação e que vamos discutir um pouco a seguir.

A equação de YANG-BAXTER apareceu primeiramente nos trabalhos de YANG [15, 16] em 1967. Ao estudar o espalhamento quântico de um *ensemble* de partículas, YANG descobriu uma condição necessária para a fatoração da matriz de espalhamento do *ensemble*. Mais especificamente, YANG verificou que a matriz de espalhamento de um *ensemble* de partículas fatora-se no produto das matrizes de espalhamento associadas à pares de partículas, quando a equação que hoje leva o seu nome é satisfeita.

Logo depois, a mesma equação foi deduzida por BAXTER de forma completamente diferente. BAXTER então estudava os chamados modelos de vértices da mecânica estatística – que à primeira vista não tem qualquer ligação com a teoria do espalhamento estudada por YANG – e, nos seus estudos, ele percebeu que matriz de transferência associada ao sistemas sempre comutava quando determinada relação fosse satisfeita. Verificou-se contudo que essa equação era equivalente à proposta por YANG. Desde então essa relação leva o nome desses dois cientistas e é chamada equação de YANG-BAXTER⁴.

⁴Note, entretanto, que a equação de YANG-BAXTER recebe às vezes outras denominações, sendo “*relação estrela-triângulo*” a mais comum delas.

O interesse pela teoria dos sistemas integráveis e pela equação de YANG-BAXTER tem aumentado muito desde então e avanços significativos têm sido encontrados. Podemos citar como exemplo a elaboração do *método do espalhamento inverso quântico* devido a os trabalhos de FADEEV, SKLYANIN e TAKHTAJAN [20]. Esse trabalho estendeu as técnicas comentadas na seção anterior, que antes só se aplicavam a sistemas clássicos. A conexão entre os trabalhos de BETHE e a equação de YANG-BAXTER surgiu nesse mesmo momento através do próprio SKLYANIN [22, 23] e outros colaboradores da escola de LENINGRADO (agora SÃO PETERSBURGO), o que resultou no chamado *ansatz de BETHE algébrico*. Outro avanço digno de nota foi o emprego da teoria de grupos à resolução da equação de YANG-BAXTER. De fato, através de uma deformação dos grupos ou álgebras de LIE, JIMBO e DRINFELD [24] conseguiram obter soluções da equação de YANG-BAXTER para todos os modelos representáveis por uma álgebra de LIE afim não excepcional. Tais grupos deformados são agora conhecidos pelo nome de *grupos quânticos*.

Todas as técnicas apresentadas até aqui aplicam-se a modelos de vértices com condições de contorno periódicas, ou associados a uma rede infinita. Sistemas que possuem condições de contorno não periódicas foram considerados apenas mais recentemente.

A integrabilidade de sistemas quânticos sujeitos a condições de contorno não periódicas, começou a ser estudada em 1982 por SKLYANIN [25], que se baseou nos resultados prévios dos irmãos ZAMOLODCHIKOV [26] e de CHEREDNIK [27]. Em especial, SKLYANIN [25] conseguiu com sucesso resolver o problema de uma rede aberta de férmions (de spin $1/2$) com condições de contorno diagonais através do *ansatz de BETHE algébrico*, modelo este que já havia sido resolvido por ALCARAZ ET AL. [28] via *ansatz de BETHE de coordenadas*. CHEREDNIK logo depois sugeriu que o formalismo de YANG para o espalhamento de partículas poderia ser estendido de modo a abordar sistemas sujeitos à reflexão em suas extremidades e SKLYANIN estendeu o *método do espalhamento inverso quântico* a fim de cobrir sistemas com condições de contorno não periódicas.

Tais condições de contorno não periódicas são implementadas no formalismo através da introdução das chamadas *matrizes de reflexão* e a integrabilidade é garantida pelas respectivas *equações de YANG-BAXTER com fronteiras*, ou simplesmente *equações de reflexão*. Inicialmente essa construção aplicava-se apenas a sistemas que possuíam certas simetrias (*e.g.*, simetria de paridade, reversão temporal etc.) mas logo depois MEZINCESCU e NEPOMECHIE [29, 30] as generalizaram, de modo que sistemas muito mais gerais puderam ser estudados.

Desde então a busca por soluções das equações de reflexão tem sido intensa. Soluções referentes à modelos com simetrias associadas à álgebras de LIE não excepcionais foram encontradas por LIMA-SANTOS em [31, 32, 33, 34]. Pouco tempo depois, MALARA e LIMA-SANTOS [35, 36] propuseram uma classificação completa de tais matrizes de reflexão.

Além disso, versões graduadas da equação de YANG-BAXTER – ou seja, que obedecem a uma álgebra supersimétrica – foram primeiramente propostas por KULISH e SKLYANIN [37, 38] e a generalização desse formalismo supersimétrico para as equações de reflexão foi completada por BRACKEN ET AL. [39]. Em especial, soluções graduadas da equação de YANG-BAXTER associadas aos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2n + 2|2m)^{(2)}]$ foram encontradas por MARTINS e RAMOS [40] e, depois, novas soluções foram encontradas por GALLEAS e MARTINS [41] através das chamadas *braid-monoid algebras*. Neste trabalho, GALLEAS e MARTINS encontraram generalizações não-triviais para o modelo não graduado $\mathcal{U}_q[\mathcal{D}_{n+1}^{(2)}]$, previamente estudado por Jimbo [42] e, em especial, propuseram⁵ que o grupo quântico $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2n + 2|2m)^{(2)}]$ representasse o análogo supersimétrico do grupo quântico $\mathcal{U}_q[\mathcal{D}_{n+1}^{(2)}]$.

É justamente neste cenário que se encaixa a presente dissertação. A partir da solução graduada da equação de YANG-BAXTER encontrada por GALLEAS e MARTINS [41], começamos a procura pelas respectivas soluções graduadas da equações de YANG-BAXTER com fronteiras. Conforme veremos, a empresa tem sido bem sucedida: soluções para os modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$ foram encontradas e uma classificação dessas soluções também foi proposta.

⁵Devemos ressaltar, todavia, que essa conjectura ainda não foi confirmada.

CAPÍTULO 2

Revisão de alguns conceitos matemáticos

Este capítulo é dedicado a uma revisão dos conceitos matemáticos que serão utilizados ao longo do texto. Esperamos, assim, preparar o leitor para os próximos capítulos, onde a equação de YANG-BAXTER e as equações de reflexão serão apresentadas. Conceitos como vetores, vetores duais, operadores, operadores duais etc. serão discutidos. A representação de WEYL para operadores será apresentada e relembremos também as definições de produto tensorial. Uma notação muito útil para operadores que atuam em espaços tensoriais será introduzida e algumas propriedades do operador de permutação, cuja importância será notória nos capítulos que se seguem, serão demonstradas. Por fim, as modificações implicadas pela introdução de uma álgebra graduada em todo o formalismo serão abordadas.

2.1 Vetores em um espaço linear

Começemos por lembrar alguns conceitos de álgebra linear. Para esse propósito, deixe-nos considerar um espaço vetorial V , isomorfo a \mathbb{C}^n . (O leitor pode pensar em um espaço de HILBERT, se desejar.) Vamos fazer uso da notação de DIRAC de modo que vetores serão escritos como em $|v\rangle$.

Como se sabe, em um espaço vetorial de dimensão n , qualquer vetor $|v\rangle \in V$ pode ser

decomposto em uma combinação linear de outros n vetores, desde que esses vetores sejam linearmente independente entre si. Dizemos assim que qualquer conjunto $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\} \in V$ de n vetores linearmente independentes forma uma *base* do espaço vetorial V . Aqui consideraremos apenas bases *ortonormais*, isto é, uma base cujos vetores são, todos eles, ortogonais entre si e de módulo 1. Em termos de uma base ortonormal, qualquer vetor $|v\rangle \in V$ pode ser decomposto numa soma da forma

$$|v\rangle = a_i |e_i\rangle, \quad (2.1.1)$$

onde fizemos (e faremos) uso da notação de EINSTEIN: índices repetidos implica soma de 1 a n sobre os índices.

Ao lado do espaço vetorial V , introduzimos também o espaço dual V^\dagger , cujos elementos serão denotados por $\langle v|$. Para cada vetor $|v\rangle \in V$ podemos associar um único vetor dual $\langle v| \in V^\dagger$ através da condição de que o produto $\langle v|v\rangle$ isto é, o produto do vetor original pelo seu dual, nos forneça o quadrado do módulo do vetor $|v\rangle \in V$. O produto $\langle v|w\rangle$, por sua vez, resulta no produto interno¹ entre os vetores $|v\rangle$ e $|w\rangle$, ambos pertencentes a V . Fixando-se uma base em V fica também fixada uma base dual em V^\dagger , o que nos permite escrever qualquer vetor $\langle v| \in V^\dagger$ como

$$\langle v| = \langle e_i | a_i^*, \quad (2.1.2)$$

onde a_i^* denota o complexo conjugado de a_i , já que pelas equações Eq.(2.1.1) e Eq.(2.1.2) e pela definição de vetor dual devemos ter $|v|^2 = a_i a_i^*$.

2.2 Operadores e a representação de WEYL

Um operador linear \mathcal{O} consiste em uma correspondência que associa, para cada vetor $|v\rangle \in V$, um outro vetor $|w\rangle \in V$. Dizemos, assim, que o operador \mathcal{O} transforma um vetor $|v\rangle$ no vetor $|w\rangle$ e escrevemos

$$|w\rangle = \mathcal{O}|v\rangle. \quad (2.2.1)$$

Da mesma forma que vetores podem ser decompostos em termos de outros vetores mais simples (*i.e.*, através de uma base apropriada), operadores também podem ser decompostos em termos de outros operadores mais elementares. Para isso basta tomarmos um conjunto de n^2 operadores linearmente independentes, através do qual

¹De uma forma mais precisa, o vetor $\langle v| \in V^\dagger$ é definido como o *funcional linear* que associa, para cada vetor $|w\rangle \in V$, o número complexo $\alpha = \langle v|w\rangle$.

qualquer outro operador possa ser escrito. Uma escolha conveniente consiste em decompor os operadores em termos dos objetos

$$e_{ij} \equiv |e_i\rangle\langle e_j|, \quad (2.2.2)$$

com $|e_i\rangle$ e $\langle e_j|$ ortonormais. Tais objetos são de fato operadores porque

$$e_{ij}|v\rangle = |e_i\rangle\langle e_j|v\rangle = \langle e_j|v\rangle|e_i\rangle = |v'\rangle. \quad (2.2.3)$$

O conjunto de operadores da forma e_{ij} forma uma *base de operadores*, de modo que qualquer operador pode ser escrito através de uma combinação linear dessas quantidades e podemos escrever,

$$\mathcal{O} = o_{ij}e_{ij}, \quad (2.2.4)$$

onde os coeficientes o_{ij} podem ser obtidos pelo produto interno $o_{ij} = \langle e_i|\mathcal{O}|e_j\rangle$. Em especial, o operador identidade pode ser escrito como $\mathcal{J} = e_{ii}$, onde devemos somar nos índices de 1 a n .

Uma vez fixada uma base de operadores e_{ij} , qualquer operador \mathcal{O} fica completamente determinado pelos coeficientes o_{ij} e dizemos que construímos uma representação de operadores em termos dessa base. Esta é justamente a chamada *representação de WEYL*. Veremos que essa representação é muito útil e potente, pois ela simplifica sobremaneira a forma de se realizar manipulações algébricas com operadores. Por exemplo, dados dois operadores escritos na base de WEYL, digamos, $\mathcal{A} = a_{ij}e_{ij}$ e $\mathcal{B} = b_{kl}e_{kl}$, podemos mostrar facilmente que o produto $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ é dado por $\mathcal{A}\mathcal{B} = a_{ik}b_{kl}e_{il}$. Para isso basta notar que são válidas as relações

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}, \quad e_{ij}|e_k\rangle = \delta_{jk}|e_i\rangle, \quad \langle e_k|e_{ij} = \langle e_j|\delta_{ki}, \quad (2.2.5)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de KRONECKER, definido por $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ caso $i \neq j$. De fato, temos,

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = a_{ij}b_{kl}e_{ij}e_{kl} = a_{ij}b_{kl}\delta_{jk}e_{il} = a_{ik}b_{kl}e_{il} = \mathcal{C}. \quad (2.2.6)$$

Por fim deixe-nos mencionar que podemos definir, para cada operador $\mathcal{O} \in V$, um operador dual $\mathcal{O}^\dagger \in V^\dagger$. O operador dual \mathcal{O}^\dagger é definido pela condição de que, se $\mathcal{O}|v\rangle = |w\rangle$, então $\langle v|\mathcal{O}^\dagger = \langle w|$. Em termos da base de WEYL obtemos a expressão $\mathcal{O}^\dagger = o_{ji}^*e_{ij}$.

2.3 Produtos tensoriais

Deixe U e V serem dois espaços vetoriais isomorfos, respectivamente a \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m . Através desses espaços construímos o espaço tensorial $W \equiv U \otimes V$, que consiste em um espaço isomorfo a \mathbb{C}^{n+m} . A construção de W pode ser feita da seguinte forma: dada uma base E_U de U e uma base E_V de V definimos a base E_W de W através do conjunto formado pela justaposição dos vetores de U e V , nesta ordem. Em outras palavras, a base E_W é construída de modo que os seus n primeiros elementos correspondam aos elementos da base E_U e os seus outros m elementos seguintes correspondam aos elementos da base E_V . Um elemento da base E_W é representado por $|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle \equiv e_i \otimes e_j$, onde o primeiro vetor refere-se ao espaço U e o segundo ao espaço V .

Com essa construção, o produto tensorial de dois vetores, $|u\rangle \in U$ e $|v\rangle \in V$, é definido de forma que se tenha²

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = u_i v_j (e_i \otimes e_j), \quad (2.3.1)$$

e uma expressão análoga é válida para o produto tensorial de dois vetores duais.

Definimos também um produto interno em W através da expressão

$$\langle r|s\rangle = \langle a|c\rangle \otimes \langle b|d\rangle. \quad (2.3.2)$$

onde $|r\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ e $|s\rangle = |c\rangle \otimes |d\rangle$ são dois vetores de W .

O produto tensorial de operadores também pode ser definido de forma análoga. Dados dois operadores $\mathcal{A} \in U$ e $\mathcal{B} \in V$, o produto tensorial $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ consiste em um operador que atua em $W = U \otimes V$ e que é definido, em termos da representação de WEYL, por

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = a_{ij} b_{kl} (e_{ij} \otimes e_{kl}). \quad (2.3.3)$$

Note que os coeficientes de $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ são objetos de quatro índices, $c_{ij,kl} = a_{ij} b_{kl}$. Note também que a definição dada para o produto interno em W , apresentada logo acima, assegura a independência de cada espaço vetorial, de modo que a atuação dos operadores $A \in U$ e $B \in V$, por exemplo, no produto tensorial $|u\rangle \otimes |v\rangle$ significa

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(|u\rangle \otimes |v\rangle) = \mathcal{A}|u\rangle \otimes \mathcal{B}|v\rangle. \quad (2.3.4)$$

Pode-se facilmente demonstrar que o produto tensorial entre operadores (e vetores) satisfazem as propriedades distributiva à esquerda: $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$,

²Quando os elementos de U e V são representados por matrizes, o produto tensorial é usualmente chamado de *produto de KRONECKER*.

distributiva à direita: $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} + \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, bem como a propriedade associativa: $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$ e, para qualquer número complexo α , verifica-se também $(\alpha\mathcal{A}) \otimes \mathcal{B} = \alpha(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes (\alpha\mathcal{B})$. Note entretanto que o produto tensorial é uma operação *não-comutativa*, já que a construção da base E_W depende da ordem dos espaços U e V .

A partir dessas propriedades podemos também deduzir as seguintes:

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^t = \mathcal{A}^t \otimes \mathcal{B}^t, \quad (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \otimes \mathcal{B}^{-1}, \quad (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^\dagger = \mathcal{A}^\dagger \otimes \mathcal{B}^\dagger, \quad (2.3.5)$$

onde por \mathcal{O}^t denotamos o operador transposto a \mathcal{O} e assumimos que \mathcal{A} e \mathcal{B} são invertíveis³. Fazendo-se uso da definição (2.3.2), segue também a importante relação

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) = (\mathcal{AC}) \otimes (\mathcal{BD}). \quad (2.3.6)$$

desde que os produtos matriciais (\mathcal{AC}) e (\mathcal{BD}) existam. Também podemos demonstrar (2.3.6) empregando-se as matrizes de WEYL:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) &= (a_{ij}e_{ij} \otimes b_{kl}e_{kl})(c_{mn}e_{mn} \otimes d_{op}e_{op}) \\ &= a_{ij}c_{mn}e_{ij}e_{mn} \otimes b_{kl}d_{op}e_{kl}e_{op} \\ &= a_{ij}c_{mn}\delta_{jm}e_{in} \otimes b_{kl}d_{op}\delta_{lo}e_{kp} \\ &= a_{im}c_{mn}e_{in} \otimes b_{ko}d_{op}e_{kp} \\ &= \mathcal{AC} \otimes \mathcal{BD}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Por fim é necessário comentar que embora para cada par de vetores $|u\rangle \in U$ e $|v\rangle \in V$ se possa associar um único elemento de W – justamente o elemento $|u\rangle \otimes |v\rangle$ –, nem todo elemento de W pode ser decomposto em um produto tensorial. Com efeito, qualquer combinação linear da forma $w_{ij}(e_i \otimes e_j)$ será um elemento de W , enquanto que no produto tensorial $|u\rangle \otimes |v\rangle$ apenas as combinações da forma $u_i|e_i\rangle \otimes v_j|e_j\rangle$ (ou seja, combinações nas quais os coeficientes se fatoram como $w_{ij} = u_iv_j$), estão presentes⁴. Uma consideração análoga vale, é claro, para operadores.

³Observe, além disso, que a ordem dos operadores não se inverte quando tomamos a transposta, a inversa ou o adjunto do produto *tensorial* de dois operadores, contrariamente ao que ocorre com a transposta, a inversa ou o adjunto do produto *usual* desses operadores – isso se deve, é claro, a independência dos espaços tensoriais comentada mais acima.

⁴Destacamos que essa propriedade é muito importante, por exemplo, na teoria do emaranhamento quântico.

2.4 O operador de permutação

Na seção anterior afirmamos que o produto tensorial não é uma operação comutativa. Assim temos em geral, $|u\rangle \otimes |v\rangle \neq |v\rangle \otimes |u\rangle$ e $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \neq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Não obstante, vamos mostrar agora que existe um operador hermitiano \mathcal{P} , chamado *operador de permutação* ou simplesmente *permutador*, através do qual se pode inverter a ordem dos fatores de um produto tensorial, de tal modo que se pode escrever

$$\mathcal{P}(|u\rangle \otimes |v\rangle) = |v\rangle \otimes |u\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{P}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\mathcal{P} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}. \quad (2.4.1)$$

De fato, em termos da base de WEYL esse operador é simplesmente dado por

$$\mathcal{P} = e_{ij} \otimes e_{ji}, \quad (2.4.2)$$

onde, lembremos, é necessário se somar nos índices que se repetem. Podemos de fato demonstrar que a Eq.(2.4.2) inverte a ordem do produto tensorial entre dois vetores. Efetivamente, com $|u\rangle = u_k|e_k\rangle$ e $|v\rangle = v_l|e_l\rangle$ segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(|u\rangle \otimes |v\rangle) &= (e_{ij} \otimes e_{ji})(u_k|e_k\rangle \otimes v_l|e_l\rangle) \\ &= u_k v_l (e_{ij} \otimes e_{ji})(|e_k\rangle \otimes |e_l\rangle) \\ &= u_k v_l (e_{ij}|e_k\rangle \otimes e_{ji}|e_l\rangle) \\ &= u_k v_l (\delta_{jk}|e_i\rangle \otimes \delta_{il}|e_j\rangle) \\ &= u_k v_l \delta_{jk} \delta_{il} (|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle) \\ &= u_k v_l (|e_l\rangle \otimes |e_k\rangle) \\ &= |v\rangle \otimes |u\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Do mesmo modo podemos mostrar que a ordem ordem do produto tensorial de dois operadores $\mathcal{A} = a_{kl}e_{kl}$ e $\mathcal{B} = b_{mn}e_{mn}$ também se inverte por uma aplicação dupla desse operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\mathcal{P} &= (e_{ij} \otimes e_{ji})(e_{kl} \otimes e_{mn})(g_{op} \otimes g_{po}) \\ &= a_{kl}b_{mn}(e_{ij}e_{kl}e_{op} \otimes e_{ji}e_{mn}e_{po}) \\ &= a_{kl}b_{mn}(\delta_{jk}\delta_{lo}e_{ip} \otimes \delta_{im}\delta_{np}e_{jo}) \\ &= a_{kl}b_{mn}\delta_{jk}\delta_{lo}\delta_{im}\delta_{np}(e_{ip} \otimes e_{jo}) \\ &= a_{ko}b_{mp}(e_{mp} \otimes e_{ko}) \\ &= \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Para uso futuro vamos definir agora os operadores \mathcal{P}_{12} , \mathcal{P}_{23} e \mathcal{P}_{13} que atuam no espaço tensorial $Z = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ (com os espaços vetoriais V_1 , V_2 e V_3 isomorfos

respectivamente a \mathbb{C}^n , \mathbb{C}^m e \mathbb{C}^l) conforme a seguinte notação: o operador \mathcal{P}_{ij} atua como o operador \mathcal{P} nos espaços vetoriais V_i e V_j e como a identidade em V_k ⁵.

Em termos da base de WEYL esses operadores podem ser escritos como

$$\mathcal{P}_{12} = (e_{ij} \otimes e_{ji} \otimes e_{kk}), \quad \mathcal{P}_{13} = (e_{ik} \otimes e_{jj} \otimes e_{ki}), \quad \mathcal{P}_{23} = (e_{ii} \otimes e_{kl} \otimes e_{lk}). \quad (2.4.5)$$

Ademais, esses operadores satisfazem a relação

$$\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{23}\mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{23}, \quad (2.4.6)$$

e, para qualquer operador $\mathcal{O}_{ij} \in Z$ (inclusive os próprios operadores de permutação \mathcal{P}_{ij}), seguem as relações

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{12} &= \mathcal{P}_{13}\mathcal{O}_{23}\mathcal{P}_{13} = \mathcal{P}_{23}\mathcal{O}_{13}\mathcal{P}_{23}, \\ \mathcal{O}_{13} &= \mathcal{P}_{12}\mathcal{O}_{23}\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{23}\mathcal{O}_{12}\mathcal{P}_{23}, \\ \mathcal{O}_{23} &= \mathcal{P}_{12}\mathcal{O}_{13}\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{13}\mathcal{O}_{12}\mathcal{P}_{13}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

de fato, por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{12}\mathcal{O}_{23}\mathcal{P}_{12} &= o_{op,qr} (e_{ij} \otimes e_{ji} \otimes e_{kk}) (e_{mm} \otimes e_{op} \otimes e_{qr}) (e_{st} \otimes e_{ts} \otimes e_{uu}) \\ &= o_{op,qr} (e_{ij}e_{mm}e_{st} \otimes e_{ji}e_{op}e_{ts} \otimes e_{kk}e_{qr}e_{uu}) \\ &= o_{op,qr} (\delta_{jm}\delta_{ms}e_{it} \otimes \delta_{io}\delta_{pt}e_{js} \otimes \delta_{kq}\delta_{ru}e_{ku}) \\ &= o_{op,qr} \delta_{jm}\delta_{ms}\delta_{io}\delta_{pt}\delta_{kq}\delta_{ru} (e_{it} \otimes e_{js} \otimes e_{ku}) \\ &= o_{ot,qu} (e_{ot} \otimes e_{ss} \otimes e_{qu}) \\ &= \mathcal{O}_{13}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

e os demais casos podem ser demonstrados de forma semelhante. Temos também que

$$\mathcal{P}_{ij}\mathcal{O}_{ij}\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{O}_{ji}. \quad (2.4.9)$$

A prova da Eq.(2.4.9) é semelhante à prova da Eq.(2.4.1) ou da Eq.(2.4.7) e é deixado para o leitor.

⁵Essa notação será generalizada a partir de agora para qualquer operador. Desse modo, dado um operador \mathcal{O} definido em um espaço tensorial $X = V_1 \otimes \dots \otimes V_N$, mas que atua não-trivialmente apenas nos espaços vetoriais V_i, V_j, \dots, V_n , então vamos representar esse operador por $\mathcal{O}_{ij\dots n}$, ou seja, os índices inferiores de um operador indicarão os espaços vetoriais no qual ele atua não trivialmente. Nos outros espaços vetoriais fica entendido que o operador atua trivialmente, ou seja, como a identidade. Por fim, quando um operador \mathcal{O} não apresentar índices estaremos com isso indicando que ele atua não-trivialmente em todos os espaços vetoriais que compõem o espaço tensorial $X = V_1 \otimes \dots \otimes V_N$.

2.5 Superálgebras

Todo o formalismo apresentado nas seções acima refere-se ao caso não graduado. No caso de uma álgebra graduada, ou simplesmente *superálgebra*, as definições do produto tensorial, do operador de permutação etc. devem ser modificadas. Isso é feito com o objetivo de se construir uma álgebra na qual bósons e férmions sejam descritos de modo único e equivalente. Com esse formalismo graduado, é esperado que exista um isomorfismo (não trivial) entre as soluções da equação de YANG-BAXTER e também das respectivas equações de reflexão quando o número de bósons e férmions são trocados entre si. Vejamos agora quais modificações devem ser implementadas quando estamos no caso de uma álgebra graduada, ou superálgebra.

Considere assim um sistema que contenha $r = 2n + 2$ graus de liberdade bosônicos e $s = 2m$ graus de liberdade fermiônicos e seja $N = 2n + 2m + 2$ o número total de graus de liberdade do sistema. Introduzimos os espaços vetoriais U e V , isomorfos a \mathbb{C}^m e \mathbb{C}^{n+1} respectivamente, e construímos o espaço $W = U \otimes V \otimes V \otimes U$, cuja dimensão é igual a N . Note que por essa construção os graus de liberdade bosônicos ficarão entre os graus de liberdade fermiônicos, como exemplificado a seguir:

$$\underbrace{F \dots F}_m \underbrace{B \dots B}_{2n+2} \underbrace{F \dots F}_m. \quad (2.5.1)$$

Além disso, para distinguir os graus de liberdade bosônicos dos fermiônicos introduzimos a chamada *paridade de GRASSMANN*, P_α , definida por

$$P_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{para } \alpha \text{ fermiônico,} \\ 0 & \text{para } \alpha \text{ bosônico.} \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Através da paridade de GRASSMANN podemos transformar um operador não graduado em um *superoperador*, ou seja, um operador apropriado a nossa superálgebra. Por consistência, as transformações lineares também devem ser redefinidas. A seguir indicamos quais as modificações e definições necessárias para que uma superálgebra seja implementada.

O produto tensorial, em sua versão graduada, passa a ser definido por

$$\mathcal{A} \widetilde{\otimes} \mathcal{B} = (-1)^{(P_i + P_j)P_k} a_{ij} b_{kl} (e_{ij} \otimes e_{kl}). \quad (2.5.3)$$

Por sua vez, o permutador graduado, ou superpermutador, se torna

$$\tilde{\mathcal{P}} = (-1)^{P_i P_j} (e_{ij} \otimes e_{ji}), \quad (2.5.4)$$

e, por fim, as operações de transposição e traço devem ser modificadas respectivamente para

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ji} = (-1)^{(P_i + P_j)P_i} \mathcal{A}_{ij}, \quad \tilde{\text{tr}}(\mathcal{A}) = (-1)^{P_i} \mathcal{A}_{ii}, \quad (2.5.5)$$

onde, como sempre, devemos somar nos índices que se repetem.

CAPÍTULO 3

A equação de YANG-BAXTER

Conforme foi comentado no capítulo 1, a equação de YANG-BAXTER aparece em diversas áreas da física sob contextos diferentes. Por exemplo, em teoria de campos ela se manifesta como uma condição suficiente para que a matriz de espalhamento de um *ensemble* de partículas se fatore aos pares [15, 16], enquanto que em física estatística ela se manifesta como uma condição de consistência para a comutatividade da matriz de transferência [17, 18, 19]. Em termos gerais, a equação de YANG-BAXTER garante a integrabilidade dos modelos de vértices da mecânica estatística quântica e cada solução dessa equação define, por sua vez, um modelo integrável (em outras palavras, para cada solução da equação de YANG-BAXTER, uma hamiltoniana integrável pode ser deduzida¹).

Este capítulo é dedicado à apresentação e formulação matemática da equação de YANG-BAXTER em sua versão graduada. Algumas propriedades requeridas para suas soluções são discutidas. Apresentaremos também a solução supersimétrica da equação de YANG-BAXTER encontrada por GALLEAS e MARTINS [40] para os modelos de vértices associados à generalizações não-triviais do grupo quântico $\mathcal{U}_q[D_{n+1}^{(2)}]$ – a solução de GALLEAS-MARTINS. Soluções da equação de YANG-BAXTER associadas ao grupo de simetria $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$, podem ser deduzidas da solução de GALLEAS-MARTINS quando se fixam alguns parâmetros, conforme será descrito mais adiante. As respectivas soluções da equação de YANG-BAXTER com fronteiras associadas ao grupo de si-

¹Para essa construção, conferir [18, 21, 23].

metria² $\mathcal{U}_q [\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$ serão deduzidas nos capítulos seguintes. A apresentação e classificação dessas soluções constituem o principal objetivo da presente dissertação.

3.1 Formulação matemática

A equação de YANG-BAXTER consiste em uma relação entre operadores (ou matrizes, já que aqui operadores serão sempre realizados por matrizes) definidos no espaço tensorial $Z = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, onde cada V_i é isomorfo a \mathbb{C}^N . Ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{R}_{12}(x/y)\mathcal{R}_{13}(x)\mathcal{R}_{23}(y) = \mathcal{R}_{23}(y)\mathcal{R}_{13}(x)\mathcal{R}_{12}(x/y). \quad (3.1.1)$$

Os operadores \mathcal{R}_{ij} que nela figuram provêm de um operador \mathcal{R} definido no espaço $W = V \otimes V$ e a notação utilizada está de acordo com a que foi introduzida anteriormente: o operador \mathcal{R}_{ij} atua como o operador \mathcal{R} nos espaços vetoriais indexados por i e j e atua como a identidade no outro espaço vetorial, indexado por k . Note que o operador \mathcal{R} tem dimensão $N^2 \times N^2$, enquanto que a dimensão dos operadores \mathcal{R}_{ij} é $N^3 \times N^3$. As variáveis complexas x e y que aparecem na Eq.(3.1.1) são chamadas *parâmetros espectrais*. Além de depender explicitamente desses parâmetros, a solução da equação de YANG-BAXTER pode depender de outros parâmetros, os quais são relacionados, por exemplo, com as deformações do grupo de simetria associado ao modelo em questão (na presente dissertação esse parâmetro será representado pela letra q).

Uma solução da equação de YANG-BAXTER significa uma matriz \mathcal{R} tal que as matrizes \mathcal{R}_{ij} dela derivadas satisfaçam a Eq.(3.1.1).

Em termos da representação de WEYL o operador \mathcal{R} pode ser escrito como³

$$\mathcal{R} = r_{ij,kl} (e_{ij} \otimes e_{kl}), \quad (3.1.2)$$

onde se deve somar nos índices, é claro. Deste modo, os operadores \mathcal{R}_{12} , \mathcal{R}_{13} e \mathcal{R}_{23}

²Denota-se por $\mathcal{U}_q [\text{osp}(r|s)^{(2)}]$ o grupo quântico ortosimplético “twisted”, que é caracterizado por r graus de liberdade bosônicos e s graus de liberdade fermiônicos. Maiores informações podem ser encontradas em [40].

³Note que no caso graduado os produtos tensoriais, as transposições e os operadores de permutação devem ser considerados em suas formas graduadas. Desde que esse será único caso discutido nessa dissertação, deixaremos esse fato implícito e não distinguiremos mais as notações para as operações graduadas e não-graduadas.

ficam definidos pelas expressões:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{12} &= r_{ij,kl} (e_{ij} \otimes e_{kl} \otimes e_{mm}), \\ \mathcal{R}_{13} &= r_{ij,mn} (e_{ij} \otimes e_{kk} \otimes e_{mn}), \\ \mathcal{R}_{23} &= r_{kl,mn} (e_{ii} \otimes e_{kl} \otimes e_{mn}),\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Esses operadores também podem ser definidos sem se fazer uso da representação de WEYL. Com efeito, em termos do operador \mathcal{R} os operadores \mathcal{R}_{12} e \mathcal{R}_{13} podem ser escritos como

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R} \otimes J, \quad \mathcal{R}_{23} = J \otimes \mathcal{R},\tag{3.1.4}$$

onde J denota o operador identidade, definido em V . Contudo, o operador \mathcal{R}_{13} não tem uma expressão simples assim. Isso se deve ao fato de que \mathcal{R}_{13} atua de modo trivial apenas no espaço V_2 de Z , o qual se encontra *entre* os espaços V_1 e V_3 . Entretanto podemos fazer uso dos operadores de permutação e de suas propriedades para mostrar que

$$\mathcal{R}_{13} = \mathcal{P}_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{23}\mathcal{R}_{12}\mathcal{P}_{23}.\tag{3.1.5}$$

De fato, temos que, por exemplo,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{P}_{12} &= r_{op,qr} (e_{ij} \otimes e_{ji} \otimes e_{kk}) (e_{mm} \otimes e_{op} \otimes e_{qr}) (e_{st} \otimes e_{ts} \otimes e_{uu}) \\ &= r_{op,qr} (e_{ij}e_{mm}e_{st} \otimes e_{ji}e_{op}e_{ts} \otimes e_{kk}e_{qr}e_{uu}) \\ &= r_{op,qr} (\delta_{jm}\delta_{ms}e_{it} \otimes \delta_{io}\delta_{pt}e_{js} \otimes \delta_{kq}\delta_{ru}e_{ku}) \\ &= r_{op,qr} \delta_{jm}\delta_{ms}\delta_{io}\delta_{pt}\delta_{kq}\delta_{ru} (e_{it} \otimes e_{js} \otimes e_{ku}) \\ &= r_{ot,qu} (e_{ot} \otimes e_{ss} \otimes e_{qu}) \\ &= \mathcal{R}_{13}.\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

A equação de YANG-BAXTER pode ainda ser escrita de uma forma que não contenha explicitamente o operador \mathcal{R}_{13} – evitando-se assim o uso dos permutadores. De fato, introduzindo-se os novos operadores $\mathcal{S}_{ij} = \mathcal{P}_{ij}\mathcal{R}_{ij}$ segue que $\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{P}_{ij}\mathcal{S}_{ij}$, já que os operadores de permutação satisfazem $\mathcal{P}_{ij}\mathcal{P}_{ij} = 1$. Assim, podemos verificar por substituição direta dos $\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{P}_{ij}\mathcal{S}_{ij}$ na Eq.(3.1.1), que a equação de YANG-BAXTER é equivalente a

$$\mathcal{S}_{12}(x/y)\mathcal{S}_{23}(x)\mathcal{S}_{12}(y) = \mathcal{S}_{23}(y)\mathcal{S}_{12}(x)\mathcal{S}_{23}(x/y).\tag{3.1.7}$$

Com efeito, suprimindo por conveniência a dependência dos operadores \mathcal{R}_{ij} nas va-

riáveis x e y , teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} &= \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \\
\mathcal{R}_{12}\mathcal{P}_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{13}\mathcal{R}_{12}\mathcal{P}_{13} &= \mathcal{R}_{2,3}\mathcal{P}_{2,3}\mathcal{R}_{1,2}\mathcal{P}_{2,3}\mathcal{P}_{1,3}\mathcal{R}_{2,3}\mathcal{P}_{1,3}, \\
\mathcal{P}_{12}\mathcal{S}_{12}\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{23}\mathcal{S}_{23}\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{12}\mathcal{S}_{12}\mathcal{P}_{13} &= \mathcal{P}_{23}\mathcal{S}_{23}\mathcal{P}_{23}\mathcal{P}_{12}\mathcal{S}_{12}\mathcal{P}_{23}\mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{23}\mathcal{S}_{23}\mathcal{P}_{13}, \\
\mathcal{S}_{12}\mathcal{P}_{23}\mathcal{S}_{23}\mathcal{P}_{23}\mathcal{S}_{12}\mathcal{P}_{13} &= \mathcal{S}_{23}\mathcal{P}_{12}\mathcal{S}_{12}\mathcal{P}_{12}\mathcal{S}_{23}\mathcal{P}_{13}, \\
\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{23}\mathcal{S}_{12}\mathcal{P}_{13} &= \mathcal{S}_{23}\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{23}\mathcal{P}_{13}, \\
\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{23}\mathcal{S}_{12} &= \mathcal{S}_{23}\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{23}.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

onde fizemos uso das propriedades Eq.(2.4.7) e Eq.(2.4.9) dos permutadores. Finalmente, a equação Eq.(3.1.7) é obtida ao se restaurar a dependência dos operadores nos parâmetros espectrais.

A Eq.(3.1.7) é em diversas situações mais conveniente que a Eq.(3.1.1). Em primeiro lugar, $\mathcal{S}(x)$ não é sensível à graduação, de modo que nas equações que envolvem $\mathcal{S}(x)$, os produtos tensoriais, as transposições etc. podem ser consideradas nas suas versões não graduadas. Do ponto de vista algébrico a Eq.(3.1.7) também pode ser mais facilmente manipulada, já que os espaços vetoriais $W_{12} = V_1 \otimes V_2$ e $W_{23} = V_2 \otimes V_3$ estão sempre bem definidos em $Z = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Além disso, $\mathcal{S}(x)$ é justamente a matriz de espalhamento quântico de um *ensemble* de partículas que é definido em teoria quântica de campos, o que expressa assim a já mencionada ligação entre a equação de YANG-BAXTER e a teoria do espalhamento quântico de partículas.

3.2 A solução de GALLEAS-MARTINS

Através da “baxterização” das representações da álgebra de BIRMAN-WENZL-MURAKAMI, e também das suas extensões diluídas, GALLEAS e MARTINS [40] encontraram novas soluções graduadas da equação de YANG-BAXTER. Em especial, os autores encontraram soluções que se reduzem às soluções não graduadas para o grupo de simetria $\mathcal{U}_q[D_{n+1}^{(2)}]$, deduzidas anteriormente por JIMBO [42], quando os graus de liberdade fermiônicos não estão presentes (ou seja, quando se faz $m = 0$ na solução de GALLEAS-MARTINS). Com isso os autores conjecturaram que tais soluções consistem em uma generalização das soluções de Jimbo para o caso supersimétrico [40]. A seguir apresentaremos a solução (graduada) de GALLEAS-MARTINS⁴ da equação de YANG-BAXTER para o grupo quântico $\mathcal{U}_q[D_{n+1}^{(2)}]$. A solução será escrita em termos da

⁴Referência [40], Eq.(57).

matriz $\mathcal{S}(x) = \mathcal{PR}(x)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) = & \sum_{\substack{i \neq \mu', \mu'' \\ j \neq \mu', \mu''}} [g_{ij}(x) (e_{i''j} \otimes e_{ij''})] + \sum_{i \neq \mu', \mu''} \alpha_i(x) (e_{ii} \otimes e_{ii}) \\
& + \sum_{\substack{i \neq j, j'' \\ j \neq \mu', \mu''}} \left[a_1(x) (e_{ji} \otimes e_{ij} + e_{ij} \otimes e_{ji}) + \right. \\
& \left. + a_2(x) (e_{ji} \otimes e_{ij''} + e_{ij} \otimes e_{j''i}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i \neq j, j'', \mu', \mu'' \\ j \neq \mu', \mu''}} [a_3(x) (-1)^{p_i p_j} (e_{ji} \otimes e_{ij})] \\
& + \sum_{\substack{i < j \\ i \neq j'', \mu', \mu'' \\ j \neq \mu', \mu''}} [a_4(x) (e_{jj} \otimes e_{ii})] + \sum_{\substack{i > j \\ i \neq j'', \mu', \mu'' \\ j \neq \mu', \mu''}} [a_5(x) (e_{jj} \otimes e_{ii})] \\
& + \sum_{\substack{i \neq \mu', \mu'' \\ j = \mu', \mu''}} \left[a_6(x) (e_{jj} \otimes e_{ii} + e_{i''i''} \otimes e_{j''j''}) + \right. \\
& \left. + a_7(x) (e_{j''j} \otimes e_{ii} + e_{i''i''} \otimes e_{j''j''}) \right] \tag{3.2.1} \\
& + \sum_{\substack{i \neq \mu', \mu'' \\ j = \mu', \mu''}} \left[b_i^+(x) (e_{i''j} \otimes e_{ij''} + e_{ji''} \otimes e_{j''i}) + \right. \\
& \left. + b_i^-(x) (e_{i''j} \otimes e_{ij} + e_{ji''} \otimes e_{ji}) \right] \\
& + \sum_{i = \mu', \mu''} \left[c_v^+(x) (e_{i''i} \otimes e_{ii''}) + c_v^-(x) (e_{ii} \otimes e_{ii}) + \right. \\
& \left. + d_v^+(x) (e_{i''i''} \otimes e_{ii}) + d_v^-(x) (e_{ii''} \otimes e_{ii''}) \right],
\end{aligned}$$

onde a soma se estende de 1 a $N = 2m + 2n + 2$ e utilizamos as notações:

$$\begin{aligned}
i' &= N + 1 - i, & j' &= N + 1 - j, & i'' &= N + 2 - i, & j'' &= N + 2 - j, \\
\mu &= m + n, & \mu' &= m + n + 1, & \mu'' &= m + n + 2.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

As amplitudes – pesos de BOLTZMANN – presentes na Eq.(3.2.1) são dadas por

$$\alpha_i(x) = (x^2 - \zeta^2) (x^{2-2p_i} - q^2 x^{2p_i}), \tag{3.2.3}$$

$$a_1(x) = \frac{1}{2} q (x^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (1 + \kappa_1), \tag{3.2.4}$$

$$a_2(x) = \frac{1}{2} q (x^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (1 - \kappa_1), \tag{3.2.5}$$

$$a_3(x) = q (x^2 - 1) (x^2 - \zeta^2), \tag{3.2.6}$$

$$a_4(x) = -(q^2 - 1) (x^2 - \zeta^2), \tag{3.2.7}$$

$$a_5(x) = -x^2 (q^2 - 1) (x^2 - \zeta^2), \quad (3.2.8)$$

$$a_6(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} (q^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (x + 1) & i < \mu', \\ -\frac{1}{2} x (q^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (x + 1) & i > \mu'', \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$a_7(x) = \begin{cases} +\frac{1}{2} (q^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (x - 1) & i < \mu', \\ -\frac{1}{2} x (q^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (x - 1) & i > \mu'', \end{cases} \quad (3.2.10)$$

$$b_i^\pm(x) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} (\theta_i q^{\tau_i}) (x^2 - 1) (q^2 - 1) (x \kappa_2 \pm \zeta), & i < \mu', \\ \frac{1}{2} x (\theta_i q^{\tau_i}) (x^2 - 1) (q^2 - 1) (x \kappa_2 \pm \zeta), & i > \mu'', \end{cases} \quad (3.2.11)$$

$$c_v^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} x (q^2 - 1) (x \mp 1) (\zeta + \kappa_2) (x \kappa_2 \pm \zeta) + \frac{1}{2} q (x^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (1 + v \kappa_1), \quad (3.2.12)$$

$$d_v^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} x (q^2 - 1) (x \pm 1) (\zeta - \kappa_2) (x \kappa_2 \pm \zeta) + \frac{1}{2} q (x^2 - 1) (x^2 - \zeta^2) (1 - v \kappa_1), \quad (3.2.13)$$

$$g_{i,j}(x) = \begin{cases} (q^2 - 1) [\zeta^2 (x^2 - 1) (\theta_i q^{t_i} / \theta_j q^{t_j}) - \delta_{ij} (x^2 - \zeta^2)] & i < j, \\ (x^2 - 1) [(x^2 - \zeta^2) (-1)^{p_i} q^{2p_i} + x^2 (q^2 - 1)] & i = j, \\ x^2 (q^2 - 1) [(x^2 - 1) (\theta_i q^{t_i} / \theta_j q^{t_j}) - \delta_{ij} (x^2 - \zeta^2)] & i > j, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

com $\zeta = q^{n-m}$. Os demais parâmetros são dados por

$$t_i = \begin{cases} i + \left(1 - p_i + 2 \sum_{j=i}^{\mu} p_j \right), & i < \mu', \\ \mu + 3/2, & i = \{\mu', \mu''\}, \\ i - \left(1 - p_i + 2 \sum_{j=\mu+3}^i p_j \right), & i > \mu'', \end{cases} \quad (3.2.15)$$

$$\tau_i = \begin{cases} i - \left(\frac{1}{2} - p_i + 2 \sum_{j=1}^i p_j \right), & i < \mu', \\ 0, & i = \{\mu', \mu''\} \\ i - \left(\frac{5}{2} + \mu - p_i + 2 \sum_{j=\mu+3}^i p_j \right), & i > \mu'', \end{cases} \quad (3.2.16)$$

$$\theta_i = \begin{cases} (-1)^{-p_i/2}, & i < \mu', \\ 1, & i = \{\mu', \mu''\}, \\ (-1)^{+p_i/2}, & i > \mu'', \end{cases} \quad (3.2.17)$$

$$p_i = \begin{cases} P_i & i \leq \mu, \\ 0, & i = \{\mu', \mu''\}, \\ P_{i-1}, & i > \mu'', \end{cases} \quad (3.2.18)$$

onde P_i é a graduação de GRASSMANN.

Note que a solução de GALLEAS-MARTINS é *multiparamétrica*, no sentido de que ela depende de três parâmetros, a saber, κ_1 , κ_2 e ν . Esses parâmetros podem assumir independentemente os valores $+1$ e -1 e diferentes escolhas geram soluções associadas à diferentes grupos de simetria – vide [40]. No caso de interesse aqui onde consideramos o grupo quântico $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|2m)^{(2)}]$, devemos colocar todos esses parâmetros iguais a 1 e ainda fazer $n = 0$.

3.3 Propriedades das soluções da equação de YANG-BAXTER

Deixe-nos discutir agora algumas propriedades gerais das soluções da equação de YANG-BAXTER.

Dizemos que uma solução $\mathcal{R}(x)$ da equação de YANG-BAXTER é *regular* quando $\mathcal{R}(1)$ for proporcional ao operador de permutação, isto é, quando se tiver

$$\mathcal{R}(1) = \sigma \mathcal{P} \quad (3.3.1)$$

para alguma constante complexa σ (no caso da matriz $\mathcal{S}(x)$ a regularidade da solução é expressa por $\mathcal{S}(1) = \sigma \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} denota o operador identidade). Esta é uma pro-

priedade importante por causa do seguinte fato: quando uma solução $\mathcal{R}(x)$ da equação de YANG-BAXTER é regular, segue-se que podemos multiplicá-la por uma função $f(x)$ qualquer, desde que satisfaça $f(1) = 1$, que ainda assim a expressão resultante será uma solução regular da equação de YANG-BAXTER. Essa propriedade também garante a simetria de translação da solução, em relação ao parâmetro espectral, ou seja, dada uma solução $\mathcal{R}(x)$ da equação de YANG-BAXTER, a quantidade $\mathcal{R}(x') = \mathcal{R}(x + x_0)$, onde x_0 é um número complexo arbitrário, também a satisfaz.

Depois dos trabalhos de MEZINCESCU e NEPOMECHIE [29, 30], requeremos também que as soluções da equação de YANG-BAXTER satisfaçam outras propriedades mais intrincadas. Por exemplo, requeremos que $\mathcal{R}(x)$ tenha a propriedade de *unitariedade*, definida pela relação

$$\mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{21}(-x) = g(x). \quad (3.3.2)$$

com $g(x)$ uma função complexa qualquer (note, porém, que a regularidade da solução implica que $g(1) = \sigma^2$).

Além disso, $\mathcal{R}(x)$ deve apresentar simetria de paridade e de reversão temporal, as quais podem ser expressas de uma só vez através da *relação de ortogonalidade*,

$$\mathcal{R}_{21}(x) = \mathcal{P}_{12} \mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{P}_{12} = \mathcal{R}_{12}^{st_1 st_2}(x), \quad (3.3.3)$$

onde st_i denota a supertransposição no espaço i .

Algumas soluções também apresentam a chamada *simetria de crossing*, definida por

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{U}_1 \mathcal{R}^{st_2}(\omega^{-1} x^{-1}) \mathcal{U}_1^{-1}, \quad (3.3.4)$$

onde ω é o chamado *parâmetro de crossing*, específico para cada modelo, e \mathcal{U} é uma matriz unitária definida em V , tal que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \otimes \mathcal{I}$. O produto

$$\mathcal{M} = \mathcal{U}^{st} \mathcal{U} \quad (3.3.5)$$

é comumente chamado de *matriz de crossing*.

Destacamos desde já que a solução GALLEAS-MARTINS [41] satisfaz todas essas propriedades, inclusive a simetria de *crossing*. De fato, o parâmetro de *crossing* é simplesmente

$$\omega = q^{-(n+m)}, \quad (3.3.6)$$

e a respectiva matriz de *crossing* vem a ser uma matriz antidiagonal, cujos únicos

elementos não nulos são dados por

$$\mathcal{M}_{i,i''} = \begin{cases} (-1)^{(p_i-1)/2}, & i = 1, \\ (-1)^{(p_i-1)/2} q^{(i-1-p_1-p_i-2\sum_{j=2}^{i-1} p_j)}, & 1 < i < \mu', \\ (-1)^{(p_i-1)/2} q^{(\mu-\frac{1}{2}-p_1-p_i-2\sum_{j=2}^{\mu} p_j)}, & i = \{\mu', \mu''\}, \\ (-1)^{(p_i-1)/2} q^{(i-3-p_1-p_i-2\sum_{j=2}^{i-1} p_j)}, & i > \mu''. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Concluimos essa seção mencionando uma classificação geralmente empregada para as soluções da equação de YANG-BAXTER. As soluções da Eq.(3.1.1) podem ser classificadas como *racionais*, *trigonométricas* ou *elípticas*. Uma solução racional significa que $\mathcal{R}(x)$ contém apenas potências racionais de x ou composições elementares dessas potências. Já nas soluções trigonométricas aparecem também as funções circulares, hiperbólicas, exponenciais e logarítmicas. Por fim, uma solução do tipo elíptica é caracterizada pela presença de funções elípticas⁵.

⁵As funções elípticas são funções transcendentais de grande importância em física-matemática. Os principais desenvolvimentos nesta área foram obtidos por grandes matemáticos como GAUSS, LEGENDRE, ABEL, JACOBI, WEIERSTRASS, RAMANUJAN entre outros.

CAPÍTULO 4

As equações de reflexão

A equação de YANG-BAXTER que estudamos no capítulo anterior garante a integrabilidade dos sistemas quânticos que possuem condições de contorno periódicas (ou sistemas quânticos de extensão infinita que possuem simetria de transação). Podemos, por exemplo, pensar em uma rede cíclica de spins (ou em uma rede de spins infinita homogênea). Quando, entretanto, o sistema é limitado no espaço e, por conseguinte, possui fronteiras, as condições de contorno não são em geral periódicas. Nesses casos, a equação de YANG-BAXTER, Eq.(3.1.1), não é suficiente para garantir a integrabilidade do sistema, o que é implementado pelas chamadas *equações de YANG-BAXTER com fronteiras*, ou simplesmente *equações de reflexão*. Dedicaremos este capítulo ao estudo dessas equações.

Sistemas espacialmente limitados devem satisfazer condições de contorno em suas fronteiras. Essas condições de contorno são implementadas através da introdução das *matrizes de reflexão* \mathcal{K}^\pm , onde \mathcal{K}^+ designa a matriz de reflexão associada à fronteira da direita e \mathcal{K}^- a respectiva matriz de reflexão associada à fronteira da esquerda. Para cada fronteira introduzimos uma equação de reflexão específica que, uma vez que sejam satisfeitas, garantem a integrabilidade do sistema nas fronteiras, enquanto que a equação de YANG-BAXTER garante a integrabilidade no *bulk*, isto é, no interior da rede.

Conforme foi comentado no capítulo 1, a integrabilidade de sistemas quânticos sujeitos a condições de contorno não periódicas, começou a ser estudada em 1982 por

SKLYANIN [25], cujo método aplicava-se inicialmente à soluções simétricas da equação de YANG-BAXTER (*i.e.*, matrizes \mathcal{R} que satisfazem a propriedade $\mathcal{R} = \mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{P}$). Logo depois, MEZINCESCU e NEPOMECHIE [29, 30] estenderam os resultados de SKLYANIN para matrizes não-simétricas, estendendo deste modo o método original a uma classe muito mais ampla de matrizes \mathcal{R} . Por fim, a extensão supersimétrica (*i.e.*, graduada) desse formalismo foi depois apresentada por BRACKEN ET AL. [39] em 1998.

O presente capítulo é dedicado ao estudo das equações de YANG-BAXTER com fronteiras em sua versão graduada. Apresentaremos a sua formulação matemática, algumas propriedades de suas soluções serão discutidas e descreveremos como em geral tais equações são resolvidas.

4.1 Formulação matemática

Considere um sistema quântico limitado no espaço por duas fronteiras, uma à direita e outra à esquerda. Para descrever as condições de contorno que o sistema deve satisfazer nessas fronteiras, associamos as matrizes de reflexão \mathcal{K}^+ e \mathcal{K}^- , onde \mathcal{K}^+ refere-se à fronteira da direita e \mathcal{K}^- à fronteira da esquerda, respectivamente. A integrabilidade pode ser assim garantida com a condição de que as equações de reflexão, apresentadas mais abaixo, sejam satisfeitas.

Para a fronteira da esquerda, a respectiva equação de reflexão pode ser escrita na forma

$$\mathcal{R}_{12} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathcal{K}_1^-(x) \mathcal{R}_{21}(xy) \mathcal{K}_2^-(y) = \mathcal{K}_2^-(y) \mathcal{R}_{12}(xy) \mathcal{K}_1^-(x) \mathcal{R}_{21} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Para a fronteira da direita, a equação de reflexão torna-se mais complicada e depende em geral da simetria que o sistema possui. Porém, conforme foi mostrado em [39], quando a matriz $\mathcal{R}(x)$ possui as simetrias de unitariedade e de *crossing*, a equação de reflexão associada à fronteira da direita pode ser colocada na forma

$$\mathcal{R}_{12} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \mathcal{K}_1^+(x) \mathfrak{R}_{21} \left(\frac{1}{\omega^2 xy} \right) \mathcal{K}_2^+(y) = \mathcal{K}_2^+(y) \mathfrak{R}_{12} \left(\frac{1}{\omega^2 xy} \right) \mathcal{K}_1^+(x) \mathcal{R}_{21} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

onde ω é o *parâmetro de crossing* respectivo e colocamos, por conveniência,

$$\mathfrak{R}_{12} = \mathcal{M}_1 \mathcal{R}_{12} \mathcal{M}_1^{-1}, \quad \mathfrak{R}_{21} = \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{R}_{21} \mathcal{M}_1, \quad (4.1.3)$$

e \mathcal{M} é a *matriz de crossing* associada ao modelo em questão.

Felizmente, a equação de reflexão associada à fronteira da direita não precisa ser resolvida, já que existe um isomorfismo entre as soluções da Eq.(4.1.1) e da Eq.(4.1.2). De fato, as soluções \mathcal{K}^+ da Eq.(4.1.2) relacionam-se com as soluções \mathcal{K}^- da Eq.(4.1.1) através das expressões

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^+(x) &= \mathcal{K}^-(\omega^{-1}x^{-1})\mathcal{M}, \\ \mathcal{K}^+(y) &= \mathcal{K}^-(\omega^{-1}y^{-1})\mathcal{M}.\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

cuja prova pode ser obtida pela substituição da Eq.(4.1.4) na Eq.(4.1.2) e através das propriedades de simetria da soluções, comentadas mais acima¹.

Deixe-nos agora discutir o significado dos objetos matemáticos que aparecem na Eq.(4.1.1). Em primeiro lugar, notemos que a equação de reflexão, assim como a equação de YANG-BAXTER, consiste em uma relação entre operadores (*i.e.*, matrizes). No entanto, esta equação é definida no espaço tensorial $W = V_1 \otimes V_2$, onde cada V_i é isomorfo a \mathbb{C}^N , diferentemente da equação de YANG-BAXTER que é definida no espaço tensorial $Z = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Deste modo, as matrizes de reflexão \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_2 são operadores que atuam em W (e, portanto, de dimensão $N^2 \times N^2$) e são definidos conforme a notação já mencionada:

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \otimes \mathcal{J}, \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{J} \otimes \mathcal{K},\tag{4.1.5}$$

Por conseguinte, a matriz \mathcal{K} representa um operador que atua em V , cuja dimensão é $N \times N$.

Finalmente, \mathcal{R} é uma solução da equação de YANG-BAXTER, Eq.(3.1.1), que supomos conhecida desde o início. Além disso, do fato de que o espaço V_3 não aparece na definição de W – onde a Eq.(4.1.1) está definida – segue-se que o operador \mathcal{R}_{12} que aparece nessa equação terá dimensão $N^2 \times N^2$ e será idêntico ao operador \mathcal{R} que satisfaz a equação de YANG-BAXTER. O operador \mathcal{R}_{21} , por sua vez, é dado por $\mathcal{R}_{21} = \mathcal{P}_{12}\mathcal{R}_{12}\mathcal{P}_{12}$ e será denotado também por $\overline{\mathcal{R}}$. Com essa nova notação, a equação de reflexão Eq.(4.1.1) passa a ser escrita de modo mais simples, como

$$\mathcal{R}\left(\frac{x}{y}\right)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{R}}(xy)\mathcal{K}_2(y) = \mathcal{K}_2(y)\mathcal{R}(xy)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{y}\right).\tag{4.1.6}$$

¹Uma vez que só precisamos resolver a Eq.(4.1.1) para a matriz \mathcal{K}^- , no que se segue vamos nos ater somente a essa equação de reflexão e a suas soluções. Para simplificar a notação vamos também denotar \mathcal{K}^- simplesmente por \mathcal{K} .

4.2 Propriedades das soluções das equações de reflexão

Assim como as soluções da equação de YANG-BAXTER (3.1.1) possuem certas propriedades e simetrias, o mesmo ocorre com as soluções da equação de reflexão (4.1.6). Uma solução $\mathcal{K}(x)$ da equação de reflexão, Eq.(4.1.6), é considerada *regular* quando se tem

$$\mathcal{K}(1) = \mathcal{J}. \quad (4.2.1)$$

(No caso da matriz de reflexão associada à fronteira da direita, a sua regularidade é expressa pela relação $\mathcal{K}^+(1) = \mathcal{M}$.)

Pode-se mostrar que quando $\mathcal{K}(x)$ é regular, a solução pode ser multiplicada por uma função $f(x)$ arbitrária (com a única condição de que $f(1) = 1$), de modo que a matriz $\mathcal{K}'(x) = f(x)\mathcal{K}(x)$, também satisfaz a equação de reflexão, Eq.(4.1.6), e é regular.

Além disso, nesse caso $\mathcal{K}(x)$ também será invariante por translações da variável espectral, de tal modo que a matriz $\mathcal{K}(x') = \mathcal{K}(x+x_0)$, com x_0 uma constante complexa qualquer, também será uma solução regular da Eq.(4.1.6).

Por fim, mencionamos novamente que a matriz $\mathcal{R}(x)$, solução da equação de YANG-BAXTER (3.1.1) e que aparece na Eq.(4.1.6) deve satisfazer as propriedades de simetria comentadas no capítulo anterior para que o formalismo de SKLYANIN, MEZINCESCU e NEPOMECHIE possa ser aplicado.

4.3 Metodologia de resolução das equações de reflexão

Fixando-se uma base apropriada, os operadores que figuram na equação de reflexão Eq.(4.1.6) podem ser representados por matrizes de dimensão $N^2 \times N^2$. Isso significa que a Eq.(4.1.6) representa um conjunto de N^4 equações acopladas. Essas equações são lineares nas incógnitas $k_{i,j}$ – os elementos da matriz \mathcal{K} –, mas em geral os seus coeficientes são funções complexas das variáveis x e y . Expressamos esse fato dizendo que a Eq.(4.1.6) representa um conjunto de *equações funcionais*.

Observe que para essas N^4 equações simultâneas temos apenas N^2 incógnitas, pois \mathcal{K} é uma matriz $N \times N$. O nosso sistema é, pois, *superdeterminado* – possui mais equações que variáveis –, o que significa que muitas equações devem ser linearmente dependentes entre si, a fim de que o sistema admita soluções não-triviais.

A técnica que utilizamos para resolver esse conjunto de equações funcionais lineares pode ser descrito da seguinte forma. Primeiro, observemos que a matriz \mathcal{K} depende apenas de uma variável – pois na Eq.(4.1.6) ela aparece sempre como $\mathcal{K}(x)$ ou $\mathcal{K}(y)$

—, enquanto que a equação de reflexão Eq.(4.1.6) depende de duas. Como o nosso objetivo é o de encontrar a matriz \mathcal{K} que satisfaz a Eq.(4.1.6), podemos proceder de modo a eliminar uma das variáveis da equação de reflexão. Usualmente, derivamos a Eq.(4.1.6) em relação à y e então calculamos a expressão resultante em $y = 1$. Com isso a variável y é eliminada² mas, por outro lado, aparecem as quantidades $\beta_{i,j}$ definidas por

$$\beta_{i,j} = \left. \frac{dk_{i,j}(y)}{dy} \right|_{y=1}, \quad (4.3.1)$$

que são certos parâmetros (independentes das variáveis x e y) que devem ser determinados a fim de que as equações funcionais sejam satisfeitas.

Efetuando na Eq.(4.1.6) as operações mencionadas acima e lembrando que $\mathcal{K}(y)$ se reduz à identidade quando $y = 1$, vamos obter a seguinte equação que deve ser resolvida:

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}(x)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{R}}(x) + x\mathcal{R}(x)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{D}}(x) + \mathcal{R}(x)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{R}}(x)\mathcal{B}_2 &= \\ = -\mathcal{R}(x)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{D}}(x) + x\mathcal{D}(x)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{R}}(x) + \mathcal{B}_2\mathcal{R}(x)\mathcal{K}_1(x)\overline{\mathcal{R}}(x), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

onde \mathcal{B} é a matriz cujos elementos são os $\beta_{i,j}$, definidos pela Eq.(4.3.1) e $\mathcal{B}_2 = \mathcal{J} \otimes \mathcal{B}$. Além disso, introduzimos a notação,

$$\mathcal{D}(x) = \left. \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=1}, \quad \overline{\mathcal{D}}(x) = \left. \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=1}. \quad (4.3.3)$$

Note que agora a única variável presente na Eq.(4.3.2) é x , o que nos possibilita resolver a equação de reflexão diretamente. Note além disso que, por construção, qualquer solução da Eq.(4.3.2) também será solução da Eq.(4.1.6), e assim o nosso problema fica reduzido à resolução da Eq.(4.3.2).

Para resolver a Eq.(4.3.2) temos de encontrar as expressões corretas de todos os elementos $k_{i,j}(x)$ da matriz de reflexão, além de fixar os parâmetros $\beta_{i,j}$ necessários. Para encontrar as funções $k_{i,j}(x)$ partimos para a resolução direta das equações funcionais, eliminando cada $k_{i,j}(x)$ em termos dos outros, até que as equações fiquem expressas em termos de um único elemento da matriz $\mathcal{K}(x)$, o qual é de fato arbitrário por causa da regularidade da solução, devendo apenas satisfazer a propriedade $k_{i,j}(1) = \delta_{ij}$.

²A escolha $y = 1$ é interessante porque nos permite fazer uso das propriedades de regularidade da matriz \mathcal{K} .

Note que é necessário se resolver $N^2 - 1$ equações para se eliminar todos os $k_{i,j}(x)$, com exceção do último. O restante das equações nos permite fixar os N^2 parâmetros $\beta_{i,j}$ a fim de que todas as equações sejam satisfeitas, com o quê se obtém a solução do problema. Pode, todavia, acontecer de a Eq.(4.3.2) ser totalmente satisfeita mesmo antes de todos os parâmetros $\beta_{i,j}$ serem fixados. Dizemos nesse caso que a solução possui *parâmetros livres*, os quais podem assumir qualquer valor finito e, do ponto de vista físico, podem representar certos graus de liberdade que o sistema possui.

Embora a metodologia de resolução apresentada acima possa à primeira vista parecer simples, isso é apenas ilusório. Em verdade o problema está longe de ser trivial e a resolução de tais equações funcionais representa geralmente um verdadeiro *tour de force*. De fato, deve ser notado que, em primeiro lugar, procuramos por soluções válidas para quaisquer valores de m , de modo que o número de equações a se resolver cresce de forma espantosa com m . Em segundo lugar verificamos que em geral existem mais de uma família de soluções para um dado modelo, de modo que uma classificação das soluções se faz necessária. Por último, a resolução do sistema de equações funcionais é em si um problema complicado: dependendo da ordem na qual as equações são resolvidas, as equações restantes podem ficar tão complicadas que nos impossibilite de continuar o processo e, além disso, ao se realizar explicitamente os cálculos algumas expressões se tornam quadráticas, o que faz com que a solução se ramifique – após a resolução dessas equações outras quantidades quadráticas aparecem em geral e a solução se ramifica novamente... Todas essas ramificações têm de ser levadas em conta para que soluções não sejam perdidas.

Felizmente, critérios para a escolha da ordem de resolução dessas equações funcionais foram desenvolvidos, sobretudo por LIMA-SANTOS [31, 32, 33, 34, 35, 36], nos permitindo, assim, resolver completamente o problema proposto nesse projeto. Tais critérios podem ser descritos, *grosso modo*, da seguinte forma: uma vez que temos em mãos as equações funcionais geradas pela equação matricial, Eq.(4.3.2), procuramos primeiro por aquelas equações que não contenham os elementos da diagonal principal e secundária da matriz $\mathcal{K}(x)$, e eliminamos todos esses elementos. Após isso surgem, em geral, equações onde figuram apenas expressões entre os $\beta_{i,j}$ que não se encontram nas diagonais principal e secundária, o que permite fixá-los de tal modo que essas equações sejam também satisfeitas. Depois, partimos para as equações que envolvem os elementos da diagonal secundária e, por fim, resolvemos as equações que contenham os elementos da diagonal principal. À medida que as soluções são resolvidas, podemos fixar os parâmetros $\beta_{i,j}$ restantes e assim proceder até que todas as equações sejam satisfeitas. No fim a solução dependerá dos parâmetros $\beta_{i,j}$ não fixados: são os parâmetros livres da solução.

CAPÍTULO 5

Soluções

Apresentaremos agora as soluções graduadas da equação de YANG-BAXTER com fronteiras para os modelos de vértices que possuem simetria $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|2m)^{(2)}]$. Algumas soluções para o modelo mais geral, $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2n+2|2m)^{(2)}]$, também foram encontradas, mas foge do escopo deste trabalho o estudo mais completo desse grupo.

Classificamos as soluções associadas ao modelo $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|2m)^{(2)}]$ em quatro tipos (ou classes) diferentes, a saber, em *soluções diagonais*, *bloco-diagonais*, *soluções X* e *soluções completas*¹. As soluções diagonais, como o próprio nome já diz, consistem em matrizes de reflexão diagonais; as soluções bloco-diagonais, por sua vez, diferem das soluções diagonais por apresentarem um bloco central, de dimensão 2×2 , não nulo; já nas soluções X os únicos elementos não nulos são aqueles que se situam nas diagonais principal e secundária e, por fim, as soluções completas caracterizam-se por matrizes de reflexão $\mathcal{K}(x)$ cujas entradas são todas não nulas. Encontramos também duas *soluções especiais*, sendo que a primeira delas é válida somente para o modelo $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|2)^{(2)}]$ e tem a forma de uma solução completa, enquanto que a outra só se aplica ao modelo $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|4)^{(2)}]$, que pode ser vista como um caso mais geral das soluções X. Estas soluções especiais serão apresentadas nos apêndices A e B, respectivamente.

Gostaríamos de salientar ainda que nas soluções bloco-diagonais todos os elementos

¹Optamos por escrever as soluções em termos dos elementos $k_{i,j}(x)$ da matriz de reflexão $\mathcal{K}(x)$. Os parâmetros $\beta_{i,j}$ correspondentes podem ser calculados diretamente por (4.3.1) e não serão escritos, a não ser quando for estritamente necessário.

culos correspondem a graus de liberdade fermiônicos (conforme a graduação introduzida no capítulo 2), enquanto que nas soluções X e na solução especial válida para o modelo $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|4)^{(2)}]$ são os elementos da matriz $\mathcal{K}(x)$ correspondentes a graus de liberdade bosônicos que se anulam. Isso poderia nos levar a classificar as soluções bloco-diagonais como “soluções bosônicas” e àquelas outras como “soluções fermiônicas”. Todavia, não vamos proceder dessa forma para evitar mal-entendidos, uma vez que no modelo aqui estudado, $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$, o número de bósons é sempre fixo e igual a 2.

5.1 Soluções diagonais

Encontramos apenas uma família de soluções diagonais, a qual se caracteriza por não apresentar parâmetros livres². Para esta família de soluções diagonais, a matriz de reflexão $\mathcal{K}(x)$ tem a forma:

$$\mathcal{K}(x) = \text{diag} [1, \dots, 1, k_{m+1,m+1}(x), k_{m+2,m+2}(x), x^2, \dots, x^2] \quad (5.1.1)$$

onde os elementos centrais são dados por

$$k_{m+1,m+1}(x) = x \left[\frac{x + q^m \pm i(x-1)q^{m/2}}{1 + xq^m \mp i(x-1)q^{m/2}} \right], \quad (5.1.2)$$

e

$$k_{m+2,m+2}(x) = x \left[\frac{x - q^m \pm i(x+1)q^{m/2}}{1 - xq^m \pm i(x+1)q^{m/2}} \right]. \quad (5.1.3)$$

(O duplo sinal representa a existência de duas soluções conjugadas e o símbolo i denota a raiz quadrada de -1 , isto é, $i = \sqrt{-1}$.)

5.2 Soluções bloco-diagonais

Gostaríamos em primeiro lugar mencionar que as soluções bloco-diagonais que serão apresentadas a seguir já foram encontradas anteriormente por LIMA-SANTOS em [31], mas no que diz respeito ao grupo quântico não-graduado $\mathcal{U}_q[\mathcal{D}_{n+1}^{(2)}]$. Nos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\mathcal{D}_{n+1}^{(2)}]$, temos $2n + 2$ graus de liberdades bosônicos e nenhum grau de liberdade fermiônico, enquanto que no caso discutido aqui, isto é,

²Essa solução também se aplica ao grupo quântico $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2n+2|2m)^{(2)}]$ se fizermos a substituição de q^m por q^{m-n} . Além disso, uma outra família de soluções diagonais (que não apresentaremos aqui) pode ser encontrada para esse grupo mais geral. Esta outra solução, entretanto, somente se verifica para quando $n = m$.

dos modelos de vértices com simetria $U_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$, temos 2 graus de liberdade bosônicos e $2m$ graus de liberdade fermiônicos.

O fato de as mesmas soluções serem válidas para esses dois diferentes grupos de simetria pode ser explicada através da graduação empregada neste trabalho (vide cap. 2). De fato, a graduação foi construída com o propósito de que as soluções graduadas se reduzam às soluções não-graduadas quando os graus de liberdade fermiônicos se anulam, o que é exatamente o que ocorre com as soluções bloco-diagonais.

Deixe-nos agora descrever qual é a forma geral dessas soluções bloco-diagonais. A matriz de reflexão $\mathcal{K}(x)$ associada a essas soluções tem uma forma semelhante às soluções diagonais apresentada na seção anterior, exceto por apresentar um bloco central de dimensão 2×2 não diagonal. Isso significa que a matriz de reflexão $\mathcal{K}(x)$, assume a forma

$$\mathcal{K}(x) = \text{diag} [\Phi(x), \dots, \Phi(x), K_{2 \times 2}(x), \Psi(x), \dots, \Psi(x)], \quad (5.2.1)$$

onde $K_{2 \times 2}(x)$ consiste em um bloco central de dimensão 2×2 dado por

$$K_{2 \times 2}(x) = \begin{bmatrix} k_{m+1,m+1}(x) & k_{m+1,m+2}(x) \\ k_{m+2,m+1}(x) & k_{m+2,m+2}(x) \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

Encontramos duas famílias de soluções bloco-diagonais. Em cada uma delas, tanto $K_{2 \times 2}(x)$ quanto as funções $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ assumem formas diferentes. Além disso, ambas são caracterizadas por um único parâmetro livre, que escolhemos ser $\beta_{m+1,m+2}$. Tais famílias de soluções serão descritas a seguir.

5.2.1 Solução bloco-diagonal do tipo I

A primeira família de soluções bloco-diagonais caracteriza-se por ter um bloco central na forma:

$$K_{2 \times 2}(x) = \begin{bmatrix} k_{m+1,m+1}(x) & \frac{(x^2 - 1)\beta_{m+1,m+2}}{2} \\ \frac{(x^2 - 1)\beta_{m+1,m+2}}{2} & k_{m+2,m+2}(x) \end{bmatrix}, \quad (5.2.3)$$

no qual os elementos $k_{m+1,m+2}(x)$ e $k_{m+2,m+1}(x)$ são iguais. Os outros dois elementos do bloco central são dados por

$$k_{m+1,m+1}(x) = \frac{(x^2 + 1)}{2} \left[1 + \frac{(x^2 - 1)}{x(q^{2m} - 1)} \left(\frac{A^2 - AB}{A - B} \right) \right], \quad (5.2.4)$$

e

$$k_{m+2,m+2}(x) = \frac{(x^2 + 1)}{2} \left[1 - \frac{(x^2 - 1)}{x(q^{2m} - 1)} \left(\frac{A^2 + AB}{A + B} \right) \right], \quad (5.2.5)$$

onde A e B são dados por

$$\begin{aligned} A &= \pm \sqrt{q^m [(q^m + 1)^2 \beta_{m+1,m+2}^2 - (q^m - 1)^2]}, \\ B &= (q^m + 1) \beta_{m+1,m+2} - (q^m - 1). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Além disso, para esta família de soluções bloco-diagonais, temos que

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \frac{(q^m x^2 + 1) [(x^2 + 1)(q^m - 1) + (x^2 - 1)(q^m + 1) \beta_{m+1,m+2}]}{x^2 (q^{2m} - 1)}, \quad (5.2.7)$$

e

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \frac{(q^m x^2 + 1) [(x^2 + 1)(q^m - 1) - (x^2 - 1)(q^m + 1) \beta_{m+1,m+2}]}{(q^{2m} - 1)}. \quad (5.2.8)$$

Notemos e particular que as soluções diagonais apresentadas na seção anterior são casos especiais desta família de soluções bloco-diagonais, uma vez que elas podem ser obtidas a partir destas ao se impor a condição $\beta_{m+1,m+2} = 0$.

5.2.2 Solução bloco-diagonal do tipo II

Para a segunda família de soluções bloco-diagonais, o bloco central tem a forma:

$$K_{2 \times 2}(x) = \begin{bmatrix} \frac{x^2(x^2 + 1)}{2} & k_{m+1,m+2}(x) \\ k_{m+2,m+1}(x) & \frac{x^2(x^2 + 1)}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.2.9)$$

ou seja, possui os elementos diagonais $k_{m+1,m+1}(x)$ e $k_{m+2,m+2}(x)$ iguais. Os outros dois elementos do bloco central são dados por

$$k_{m+1,m+2}(x) = -\frac{x(x^2 - 1)}{2} \left[\frac{F^-(x) + (x - 1)^2 (q^m + 1) A}{(q^m - 1)^2} \right], \quad (5.2.10)$$

$$k_{m+2,m+1}(x) = +\frac{x(x^2 - 1)}{2} \left[\frac{F^+(x) + (x + 1)^2 (q^m + 1) A}{(q^m - 1)^2} \right], \quad (5.2.11)$$

onde,

$$F^\pm(x) = [2(x^2 + 1)q^m \pm x(q^m + 1)^2] \beta_{m+1, m+2}, \quad (5.2.12)$$

e A e B são agora dados por

$$A = \pm \sqrt{q^m (\beta_{m+1, m+2}^2 - 1)}, \quad B = (q^m + 1) \beta_{m+1, m+2}. \quad (5.2.13)$$

Por fim, as funções $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ são dadas por

$$\Phi(x) = + \frac{(q^m x^2 - 1) [2(x^2 - 1)A + (x^2 + 1)(q^m - 1) + (x^2 - 1)B]}{2(q^m - 1)^2}, \quad (5.2.14)$$

$$\Psi(x) = - \frac{x^2(q^m x^2 - 1) [2(x^2 - 1)A - (x^2 + 1)(q^m - 1) + (x^2 - 1)B]}{2(q^m - 1)^2}. \quad (5.2.15)$$

Notemos em especial que não há maneira de deduzir soluções diagonais a partir dessa segunda família de soluções bloco-diagonais.

5.3 Soluções X

Nesta seção vamos considerar as soluções X . A matriz de reflexão associada a essa família de soluções tem uma forma que lembra a letra X (por isso a denominação), ou seja, os únicos elementos $k_{i,j}(x)$ não nulos estão situados nas diagonais principal e secundária.

Os elementos da diagonal principal possuem as seguintes expressões:

$$k_{i,i}(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq m \\ \left(\frac{qx^2 + 1}{q + 1} \right) & i = \{m + 1, m + 2\} \\ x^2 & m + 3 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Já os elementos da diagonal secundária são dados por

$$k_{i,N+1-i}(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 1)\beta_{i,N+1-i}}{2}, & 1 \leq i \leq m \\ 0 & i = \{m + 1, m + 2\} \\ \frac{(x^2 - 1)\beta_{i,N+1-i}}{2} & m + 3 \leq i \leq N, \end{cases} \quad (5.3.2)$$

sendo que os parâmetros $\beta_{i,j}$ da diagonal secundária estão relacionados por

$$\beta_{i,N+1-i}\beta_{N+1-i,i} = \frac{4q}{(q-1)^2}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.3.3)$$

Com isso, para um dado $N = 2m + 2$, a solução fica caracterizada por apresentar m parâmetros livres (podemos escolher, por exemplo, os parâmetros $\beta_{1,N}$, $\beta_{2,N-1}$, ..., $\beta_{m,m+3}$).

5.4 Soluções completas

No caso das soluções completas, a matriz de reflexão não possui nenhuma entrada nula (*i.e.*, nenhum de seus elementos é igual a zero). Encontramos duas famílias de soluções completas que, para um dado valor de $N = 2m + 2$, são caracterizadas por m parâmetros livres – por conveniência escolhemos os parâmetros $\beta_{1,m+2}$, $\beta_{1,m+3}$, $\beta_{1,m+4}$, ..., $\beta_{1,N-1}$.

Estas duas famílias de soluções completas diferem entre si apenas nos elementos diagonais e aqueles pertencentes a um bloco central de dimensão 2×2 da matriz de reflexão $\mathcal{K}(x)$. Além disso, a primeira família de soluções completas é válida apenas quando m é par, enquanto que a segunda família só é solução para quando m é ímpar. Essas duas famílias por conseguinte podem ser vistas como uma única solução, mas dependente da paridade de m . Por fim, salientamos que o caso $m = 1$ é particular e será apresentado no apêndice A.

Desde que as duas famílias de soluções completas possuem uma parte comum (formada por todos os elementos fora da diagonal principal e do bloco central), começaremos por apresentar as expressões referentes a esses elementos.

5.4.1 Parte comum das soluções completas

Nessa subseção apresentaremos as expressões para os elementos $k_{i,j}(x)$ da matriz completa $\mathcal{K}(x)$ comuns às duas famílias de soluções completas. Esses elementos

consistem em todos os elementos não diagonais e aqueles que não pertencem ao bloco central, $K_{2 \times 2}$.

Começemos por definir as quantidades

$$\beta_+ = \frac{1}{2} (\beta_{1,m+1} + \beta_{1,m+2}), \quad \beta_- = \frac{1}{2} (\beta_{1,m+1} - \beta_{1,m+2}), \quad (5.4.1)$$

e

$$G(m, x) = \left(\frac{q^{1-m} + 1}{q^{1-m} + x^2} \right), \quad \Gamma(m) = \left(\frac{q^{1-m} + 1}{q + 1} \right). \quad (5.4.2)$$

Com o auxílio dessas quantidades, podemos escrever as expressões para os elementos da matriz de reflexão da seguinte forma:

Para os elementos da diagonal secundária que não pertencem ao bloco central de $\mathcal{K}(x)$, temos

$$k_{1,N}(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \beta_{1,N}, \quad (5.4.3)$$

$$k_{N,1}(x) = \left(\frac{\theta_{N-1} q^{t_{N-1}}}{\theta_2 q^{t_2}} \right) \left(\frac{\beta_{2,1}}{\beta_{1,N-1}} \right)^2 k_{1,N}(x), \quad (5.4.4)$$

$$k_{i,i'}(x) = -q \left(\frac{\theta_1 q^{t_1}}{\theta_{i'} q^{t_{i'}}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right)^2 \Gamma(m)^2 k_{1,N}(x),$$

$$i \neq \{1, m+1, m+2, N\}. \quad (5.4.5)$$

Para a primeira linha da matriz $\mathcal{K}(x)$, temos que

$$k_{1,j}(x) = \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x) k_{1,N}(x),$$

$$j \neq \{1, m+1, m+2, N\}, \quad (5.4.6)$$

$$k_{1,m+1}(x) = G(m, x) \left(\frac{\beta_+ + x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) k_{1,N}(x). \quad (5.4.7)$$

$$k_{1,m+2}(x) = G(m, x) \left(\frac{\beta_+ - x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) k_{1,N}(x). \quad (5.4.8)$$

Da mesma forma, os elementos da primeira coluna de $\mathcal{K}(x)$ são dados por

$$k_{i,1}(x) = \left(\frac{\theta_i q^{t_i}}{\theta_2 q^{t_2}} \right) \left(\frac{\beta_{2,1}}{\beta_{1,N-1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x) k_{1,N}(x),$$

$$i \neq \{1, m+1, m+2, N\}, \quad (5.4.9)$$

$$k_{m+1,1}(x) = \left(\frac{\theta_{m+1}q^{t_{m+1}}}{\theta_2q^{t_2}} \right) \left(\frac{\beta_{2,1}}{\beta_{1,N-1}} \right) \left(\frac{\beta_+ - x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x), \quad (5.4.10)$$

$$k_{m+2,1}(x) = \left(\frac{\theta_{m+2}q^{t_{m+2}}}{\theta_2q^{t_2}} \right) \left(\frac{\beta_{2,1}}{\beta_{1,N-1}} \right) \left(\frac{\beta_+ + x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x). \quad (5.4.11)$$

onde θ_i e t_i são dados respectivamente pelas equações Eq.(3.2.17) e Eq.(3.2.15) e $i' = N + 1 - i$.

Para a última linha, temos também,

$$k_{N,j}(x) = x^2q^m \left(\frac{\theta_Nq^{t_N}}{\theta_2q^{t_2}} \right) \left(\frac{\beta_{2,1}}{\beta_{1,N-1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x),$$

$$j \neq \{1, m+1, m+2, N\}, \quad (5.4.12)$$

$$k_{N,m+1}(x) = xq^m \left(\frac{\theta_Nq^{t_N}}{\theta_2q^{t_2}} \right) \left(\frac{\beta_{2,1}}{\beta_{1,N-1}} \right) \left(\frac{x\beta_+ + q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x), \quad (5.4.13)$$

$$k_{N,m+2}(x) = xq^m \left(\frac{\theta_Nq^{t_N}}{\theta_2q^{t_2}} \right) \left(\frac{\beta_{2,1}}{\beta_{1,N-1}} \right) \left(\frac{x\beta_+ - q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x), \quad (5.4.14)$$

e, para a última coluna,

$$k_{i,N}(x) = x^2q^m \left(\frac{\theta_iq^{t_i}}{\theta_1q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x),$$

$$i \neq \{1, m+1, m+2, N\}, \quad (5.4.15)$$

$$k_{m+1,N}(x) = xq^m \left(\frac{\theta_{m+1}q^{t_{m+1}}}{\theta_1q^{t_1}} \right) \left(\frac{x\beta_+ - q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x), \quad (5.4.16)$$

$$k_{m+2,N}(x) = xq^m \left(\frac{\theta_{m+2}q^{t_{m+2}}}{\theta_1q^{t_1}} \right) \left(\frac{x\beta_+ + q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x)k_{1,N}(x), \quad (5.4.17)$$

Para os elementos situados à esquerda da diagonal secundária (*i.e.*, para os elementos $k_{i,j}(x)$ tais que $i' > j$), segue que

$$k_{i,j}(x) = q^m \left(\frac{\theta_iq^{t_i}}{\theta_1q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m)G(m, x)k_{1,N}(x),$$

$$i \neq \{m+1, m+2\}, \quad j \neq \{m+1, m+2\}, \quad (5.4.18)$$

$$k_{m+1,j}(x) = q^m \left(\frac{\theta_{m+1} q^{t_{m+1}}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{\beta_+ - x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x), \quad (5.4.19)$$

$$k_{m+2,j}(x) = q^m \left(\frac{\theta_{m+2} q^{t_{m+2}}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{\beta_+ + x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x), \quad (5.4.20)$$

$$k_{i,m+1}(x) = q^m \left(\frac{\theta_i q^{t_i}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{\beta_+ + x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x), \quad (5.4.21)$$

$$k_{i,m+2}(x) = q^m \left(\frac{\theta_i q^{t_i}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{\beta_+ - x\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x), \quad (5.4.22)$$

e, por fim, para os elementos situados à direita da diagonal secundária (*i.e.*, para os elementos $k_{i,j}(x)$ tais que $j > i'$),

$$k_{i,j}(x) = x^2 q^{2m} \left(\frac{\theta_i q^{t_i}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x),$$

$$i \neq \{m+1, m+2\}, \quad j \neq \{m+1, m+2\}, \quad (5.4.23)$$

$$k_{m+1,j}(x) = x q^{2m} \left(\frac{\theta_{m+1} q^{t_{m+1}}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{x\beta_+ - q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x) \quad (5.4.24)$$

$$k_{m+2,j}(x) = x q^{2m} \left(\frac{\theta_{m+2} q^{t_{m+2}}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,j}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{x\beta_+ + q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x), \quad (5.4.25)$$

$$k_{i,m+1}(x) = x q^{2m} \left(\frac{\theta_i q^{t_i}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{x\beta_+ + q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x), \quad (5.4.26)$$

$$k_{i,m+2}(x) = x q^{2m} \left(\frac{\theta_i q^{t_i}}{\theta_1 q^{t_1}} \right) \left(\frac{\beta_{1,i'}}{\beta_{1,N}} \right) \left(\frac{x\beta_+ - q^{-m}\beta_-}{\beta_{1,N}} \right) \Gamma(m) G(m, x) k_{1,N}(x). \quad (5.4.27)$$

Essas expressões fixam todos os elementos da matriz $\mathcal{K}(x)$, exceto aqueles pertencentes ao bloco central e os elementos diagonais, os quais diferem para cada família de soluções e serão apresentados a seguir. Entretanto, ainda nos resta fixar os parâmetros $\beta_{1,2}, \beta_{1,3}, \dots, \beta_{1,m+1}, \beta_{2,1}$ e $\beta_{1,2m+2}$. Esses parâmetros também dependem da paridade de m e, por esse motivo, serão apresentado nas subseções seguintes.

5.4.2 Soluções completas do tipo I

Conforme comentado mais acima, a família de soluções do tipo I só é válida apenas para m par. Nesta seção apresentaremos os elementos diagonais e do bloco central que compõem esta família de soluções. Os elementos fora da diagonal e do bloco central foram dados na seção anterior.

Nesta família de soluções completas, o bloco central

$$K_{2 \times 2}(x) = \begin{bmatrix} k_{m+1,m+1}(x) & k_{m+1,m+2}(x) \\ k_{m+2,m+1}(x) & k_{m+2,m+2}(x) \end{bmatrix}, \quad (5.4.28)$$

é tal que se tem

$$k_{m+2,m+2}(x) = k_{m+1,m+1}(x), \quad k_{m+2,m+1}(x) = k_{m+1,m+2}(x) \quad (5.4.29)$$

sendo que $k_{m+1,m+1}(x)$ e $k_{m+1,m+2}(x)$ são dados, respectivamente, por

$$k_{m+1,m+1}(x) = x^2 G(m, x), \quad (5.4.30)$$

e

$$k_{m+1,m+2}(x) = \epsilon G(m, x) \times \left\{ x^2 G(m, x) - \frac{2(q^{m-1} - 1)(q + x^2)(x^2 q - 1)}{(q^m - 1)(q^2 - 1)(x^2 + 1)} \right\}. \quad (5.4.31)$$

onde $\epsilon = \pm 1$ representa duas classes de soluções conjugadas.

Os elementos diagonais possuem ser encontrados recursivamente através da expressão

$$k_{i,i}(x) = \begin{cases} k_{i-1,i-1}(x) + \left(\frac{\beta_{i,i} - \beta_{i-1,i-1}}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x) k_{1,N}(x), & 1 < i < m + 1 \\ k_{i-1,i-1}(x) + \left(\frac{\beta_{i,i} - \beta_{i-1,i-1}}{\beta_{1,N}} \right) x^2 G(m, x) k_{1,N}(x), & m + 4 < i \leq N, \end{cases} \quad (5.4.32)$$

Analogamente, os parâmetros diagonais $\beta_{i,i}$ também podem ser expressos recursi-

vamente,

$$\beta_{i,i} = \begin{cases} \beta_{i-1,i-1} + (-1)^i q^{m-1-i} H(m), & 1 < i < m + 1, \\ \beta_{i-1,i-1} + (-1)^i q^{2m+3-i} H(m), & m + 4 < i \leq 2m + 2, \end{cases} \quad (5.4.33)$$

com

$$H(m) = -\frac{4(q+1)}{(q^m-1)(q-1)}. \quad (5.4.34)$$

As equações Eq.(5.4.32) e Eq.(5.4.33) fixam todos os elementos diagonais restantes, com exceção de $k_{1,1}(x)$, $k_{m+3,m+3}(x)$, os quais são dados pelas expressões

$$\begin{aligned} k_{1,1}(x) &= \frac{G(m,x)}{(x^2+1)(q^m-1)(q-1)} \times \\ &\times \{(x^2+1)[(q+1)(q^m x^2-1) - 2(q^m-1)] \\ &\quad - \epsilon(q-1)(x^2-1)(x^2 q^m-1)\} \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

e

$$\begin{aligned} k_{m+3,m+3}(x) &= \frac{x^2 G(m,x)}{(x^2+1)(q-1)(q^m-1)} \times \\ &\times \{(x^2+1)[(q+1)(x^2 q^m-1) - 2(q^m-1)] \\ &\quad + \epsilon(q-1)(x^2-1)(x^2 q^m-1)\} \end{aligned} \quad (5.4.36)$$

Falta ainda fixar os parâmetros $\beta_{1,2}, \beta_{1,3}, \dots, \beta_{1,m}, \beta_{1,m+1}, \beta_{2,1}$ e $\beta_{1,N}$. Para a primeira família de soluções completas, temos,

$$\beta_{1,j} = (-1)^j \left\{ \frac{i[\epsilon(q^m+1) + (q^m-1)] \beta_{1,m+2}^2}{q^{m-1/2}(q-1) \beta_{1,j'}} \right\}, \quad 1 < j < m + 1, \quad (5.4.37)$$

$$\beta_{1,m+1} = \epsilon \beta_{1,m+2}, \quad (5.4.38)$$

$$\beta_{2,1} = \frac{4iq^{2m-3/2} [\epsilon(q^m+1) - (q^m-1)] \beta_{1,N-1}}{(q-1)(q^m-1)^2 \beta_{1,m+2}^2}, \quad (5.4.39)$$

$$\beta_{1,N} = -\frac{1}{4} \frac{i(q^m-1)[(q^m-1)+1][(q^m-1)+\epsilon(q^m+1)] \beta_{1,m+2}^2}{(q+1)q^{2m-3/2}}. \quad (5.4.40)$$

Assim, a solução fica com m parâmetros livres, a saber, $\beta_{1,m+2}, \beta_{1,m+3}, \dots, \beta_{1,N-1}$.

5.4.3 Soluções completas do tipo II

A segunda família de soluções completas é válida apenas para m ímpar. Nesse caso também, no bloco central

$$K_{2 \times 2}(x) = \begin{bmatrix} k_{m+1,m+1}(x) & k_{m+1,m+2}(x) \\ k_{m+2,m+1}(x) & k_{m+2,m+2}(x) \end{bmatrix}, \quad (5.4.41)$$

temos que $k_{m+2,m+2}(x) = k_{m+1,m+1}(x)$ e $k_{m+2,m+1}(x) = k_{m+1,m+2}(x)$. Mas agora esses elementos são dados respectivamente por

$$k_{m+1,m+2}(x) = -\epsilon x^2 G(m, x) \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \left(\frac{q^m + 1}{q^m - 1} \right), \quad (5.4.42)$$

e

$$k_{m+1,m+1}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) + \frac{2x^2 G(m, x)}{(q^2 - 1)(q^m - 1)(x^2 + 1)} \times \\ \times \{ [(q^2 - 1) + q(1 - x^4)] q^m - (x^2 q + 1)(q - x^2) \} \quad (5.4.43)$$

Como no caso anterior, os elementos diagonais restantes podem ser obtidos recursivamente,

$$k_{i,i}(x) = \begin{cases} k_{i-1,i-1}(x) + \left(\frac{\beta_{i,i} - \beta_{i-1,i-1}}{\beta_{1,N}} \right) G(m, x) k_{1,N}(x), & 1 < i < m + 1 \\ k_{i-1,i-1}(x) + \left(\frac{\beta_{i,i} - \beta_{i-1,i-1}}{\beta_{1,N}} \right) x^2 G(m, x) k_{1,N}(x), & m + 4 < i \leq N, \end{cases} \quad (5.4.44)$$

De modo análogo, temos para os parâmetros diagonais $\beta_{i,i}$,

$$\beta_{i,i} = \begin{cases} \beta_{i-1,i-1} + (-1)^i q^{m-1-i} H(m), & 1 < i < m + 1, \\ \beta_{i-1,i-1} + (-1)^i q^{2m+3-i} H(m), & m + 4 < i \leq 2m + 2, \end{cases} \quad (5.4.45)$$

mas agora

$$H(m) = \frac{4\epsilon(q+1)}{(q^m - 1)(q - 1)}. \quad (5.4.46)$$

As equações Eq.(5.4.44) e Eq.(5.4.45) fixam todos os elementos diagonais restantes, com exceção de $k_{1,1}(x)$, $k_{m+3,m+3}(x)$, que são dados pelas expressões

$$k_{1,1}(x) = \frac{G(m, x)}{(q-1)(q^m-1)(x^2+1)} \times \\ \times \{(x^2+1)(q^m x^2-1)(q-1) \\ -\epsilon(x^2-1)[(q+1)(x^2 q^m-1)+2(q^m+1)]\} \quad (5.4.47)$$

e

$$k_{m+3,m+3}(x) = \frac{x^2 G(m, x)}{(q-1)(q^m-1)(x^2+1)} \times \\ \times \{(x^2+1)(q^m x^2-1)(q-1) \\ +\epsilon(x^2-1)[(q+1)(x^2 q^m-1)+2(q^m+1)]\} \quad (5.4.48)$$

É necessário ainda fixar os parâmetros $\beta_{1,2}, \beta_{1,3}, \dots, \beta_{1,m}, \beta_{1,m+1}, \beta_{2,1}$ e $\beta_{1,N}$. Para a segunda família de soluções completas, temos,

$$\beta_{1,j} = (-1)^{j+1} \left\{ \frac{I[(q^m+1)+\epsilon(q^m-1)]\beta_{1,m+2}^2}{q^{m-1/2}(q-1)\beta_{1,j'}} \right\}, \quad 1 < j < m+1, \quad (5.4.49)$$

$$\beta_{1,m+1} = \epsilon\beta_{1,m+2}, \quad (5.4.50)$$

$$\beta_{2,1} = \frac{4Iq^{2m-3/2}[\epsilon(q^m-1)-(q^m+1)]\beta_{1,N-1}}{(q-1)(q^m-1)^2\beta_{1,m+2}^2}, \quad (5.4.51)$$

$$\beta_{1,N} = -\frac{1}{4} \frac{I(q^m-1)[(q^m-1)+1][(q^m-1)+\epsilon(q^m+1)]\beta_{1,m+2}^2}{(q+1)q^{2m-3/2}}. \quad (5.4.52)$$

A segunda família de soluções completas também contém m parâmetros livres, quais sejam, $\beta_{1,m+2}, \beta_{1,m+3}, \dots, \beta_{1,N-1}$.

CAPÍTULO 6

Sobre as simetrias das soluções

As soluções recém obtidas das equações de YANG-BAXTER com fronteiras, referentes aos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2m)^{(2)}]$, possuem certas simetrias (além daquelas mencionadas no capítulo 4) que serão agora discutidas. O conhecimento prévio dessas simetrias poderia facilitar a resolução das equações de reflexão logo no início, já que elas permitiriam eliminar vários elementos de matriz em termos de outros. Contudo, o conhecimento de tais simetrias não estava disponível antes da resolução das equações de reflexão, motivo pelo qual tivemos de resolver diretamente as equações de reflexão. Deste modo, acreditamos que seria muito interessante saber se outros modelos de vértices possuem simetrias semelhantes e, principalmente, se é possível deduzi-las a partir do grupo quântico que lhe é associado caso essas simetrias estejam presentes.

No que se segue vamos nos concentrar nas soluções completas apresentadas no capítulo anterior. Pode-se assim mostrar a partir das expressões para os elementos da matriz de reflexão $\mathcal{K}(x)$ que esses elementos apresentam uma *simetria de transposição* dada por

$$\frac{k_{i,j}(x)}{k_{j,i}(x)} = \frac{\beta_{i,j}}{\beta_{j,i}}. \quad (6.0.1)$$

Os elementos de matriz apresentam também uma *simetria de conjugação*, ou seja,

uma simetria de reflexão em relação à diagonal secundária, que é expressa por

$$\frac{k_{i,j}(x)}{k_{j',i'}(x)} = x^2 \left(\frac{\beta_{i,j}}{\beta_{j',i'}} \right), \quad i > j', \quad i \neq j, \quad (6.0.2)$$

onde, lembrando a notação utilizada, $i' = N + 1 - i$ e $j' = N + 1 - j$.

Por fim, existe uma simetria mais geral onde cada grupo de quatro elementos da forma $k_{i,j}(x)$, $k_{j,i}(x)$, $k_{i',j'}(x)$ e $k_{j',i'}(x)$ se relacionam através da seguinte equação:

$$\frac{k_{i,j}(x)}{k_{j,i}(x)} = \frac{k_{j',i'}(x)}{k_{i',j'}(x)}. \quad (6.0.3)$$

Por derivação, obtemos também,

$$\frac{\beta_{i,j}}{\beta_{j',i'}} = \frac{\beta_{j,i}}{\beta_{i',j'}}. \quad (6.0.4)$$

(Note que as Eq.(6.0.1) e Eq.(6.0.3) são identicamente satisfeitas para $i = j$.)

A partir desses resultados podemos ver que vários elementos de matriz podem ser eliminados logo de partida. Por exemplo, podemos usar a Eq.(6.0.1) para eliminar todos os elementos situados abaixo da diagonal principal (inclusive os elementos da diagonal secundária). Então, através da Eq.(6.0.2), podemos fixar os elementos situados no quadrante direito da matriz $\mathcal{K}(x)$, isto é, os elementos $k_{i,j}(x)$ com $j' < i < j$. Resulta disso que todos os elementos de matriz ficam escritos em termos dos elementos do quadrante superior (*i.e.*, dos elementos $k_{i,j}(x)$ com $i \leq j \leq i'$) e dos elementos diagonais. Os parâmetros $\beta_{i,j}$ podem igualmente ser eliminados através da Eq.(6.0.3) e pelas derivadas dos $k_{i,j}(x)$. Isso mostra que dos N^2 elementos de matriz, apenas $N(N + 4)/4$ deles são de fato independentes.

CAPÍTULO 7

Conclusão

Na presente dissertação apresentamos soluções graduadas para as equações de YANG-BAXTER com fronteiras (equações de reflexão), associadas aos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|2m)^{(2)}]$. Discutimos também um pouco sobre a teoria da integrabilidade e sobre a formulação das equações de YANG-BAXTER com fronteiras abertas e fechadas.

As soluções das equações de reflexão associadas aos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\mathfrak{osp}(2|2m)^{(2)}]$ foram classificadas em quatro tipos, ou classes:

A primeira classe de soluções consiste nas soluções diagonais. Encontramos apenas uma família de soluções que caracteriza-se por não apresentar qualquer parâmetro livre.

Na segunda classe de soluções a matriz de reflexão $\mathcal{K}(x)$ tem uma estrutura bloco-diagonal. Estas soluções diferem das soluções diagonais por apresentarem em seu centro um bloco de dimensão 2×2 não nulo. Encontramos duas famílias de soluções bloco-diagonais que apresentam m parâmetros livres.

Também encontramos soluções cuja matriz de reflexão têm a forma da letra X , ou seja, cujos elementos não nulos da matriz de reflexão encontram-se somente nas diagonais principal e secundária. Esta classe de solução também apresenta m parâmetros livres.

Por fim, encontramos duas famílias de soluções completas, que constituem a quarta classe de soluções. A primeira família de soluções completas verifica-se apenas para

quando m é par, enquanto que a segunda é válida apenas para m ímpar. Ambas as soluções possuem m parâmetros livres.

Além disso, discutimos sobre algumas das simetrias que essas soluções possuem e, nos apêndices, apresentamos soluções particulares aos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|2)^{(2)}]$ e $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|4)^{(2)}]$.

APÊNDICE A

Soluções particulares ao modelo $\mathcal{U}_q [\text{osp}(2|2)^{(2)}]$

Quando apresentamos as soluções completas no capítulo anterior, comentamos que tais soluções dependem de m parâmetros livres, a saber, de $\beta_{1,m+2}, \beta_{1,m+3}, \dots, \beta_{1,N-2}$ e $\beta_{1,N-1}$. É interessante notar, entretanto, que apenas os parâmetros $\beta_{1,m+2}, \beta_{1,m+3}$ e $\beta_{1,N-1}$ aparecem explicitamente na solução. Esse fato, no caso em que $m = 1$, isto é, no caso dos modelos de vértices descritos pelo grupo quântico $\mathcal{U}_q [\text{osp}(2|2)^{(2)}]$, faz com que a solução se torne ambígua, uma vez que, porque, por exemplo, $\beta_{1,m+2}$ se confunde com $\beta_{1,N-1}$. Fica claro, portanto, que as soluções completas apresentadas no capítulo 5 podem não descrever o caso mais geral válido para os modelos com simetria $\mathcal{U}_q [\text{osp}(2|2)^{(2)}]$. Para não perder soluções é necessário, por conseguinte, resolver esse modelo separadamente, o que será feito nesse apêndice.

A matriz de reflexão mais geral que o modelo $\mathcal{U}_q [\text{osp}(2|2)^{(2)}]$ pode apresentar tem a seguinte forma:

$$\mathcal{K}(x) = \begin{bmatrix} k_{1,1}(x) & k_{1,2}(x) & k_{1,3}(x) & k_{1,4}(x) \\ k_{2,1}(x) & k_{2,2}(x) & k_{2,3}(x) & k_{2,4}(x) \\ k_{3,1}(x) & k_{3,2}(x) & k_{3,3}(x) & k_{3,4}(x) \\ k_{4,1}(x) & k_{4,2}(x) & k_{4,3}(x) & k_{4,4}(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Ao resolvermos as equações funcionais, Eq.(4.3.2), para esse modelo em questão, en-

contramos apenas uma família de soluções que caracteriza-se por apresentar $m+2 = 3$ parâmetros livres. Os elementos mais simples são aqueles situados fora das diagonais principal e secundária e fora também do centro da matriz de reflexão.

Para os elementos da primeira linha e da última coluna, temos,

$$k_{1,2}(x) = \left(\frac{\beta_+ + x\beta_-}{\beta_{1,4}} \right) G(1, x) k_{1,4}(x), \quad (\text{A..2})$$

$$k_{1,3}(x) = \left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{\beta_{1,4}} \right) G(1, x) k_{1,4}(x), \quad (\text{A..3})$$

e

$$k_{2,4}(x) = \sqrt{-q} \left(\frac{x\beta_+ - q^{-1}\beta_-}{\beta_{1,4}} \right) xG(1, x) k_{1,4}(x), \quad (\text{A..4})$$

$$k_{3,4}(x) = \sqrt{-q} \left(\frac{x\beta_+ + q^{-1}\beta_-}{\beta_{1,4}} \right) xG(1, x) k_{1,4}(x). \quad (\text{A..5})$$

Os elementos da última linha e da primeira coluna, por sua vez, são dados por

$$k_{2,1}(x) = \frac{i}{4} \left(\frac{\Delta(q)}{q^2 - 1} \right) \left(\frac{\beta_+ + x\beta_-}{\beta_{1,4}} \right) \frac{G(1, x) k_{1,4}(x) \Delta(q)}{\beta_{1,4}^2}, \quad (\text{A..6})$$

$$k_{3,1}(x) = \frac{i}{4} \left(\frac{i\Delta(q)}{q^2 - 1} \right) \left(\frac{\beta_+ - x\beta_-}{\beta_{1,4}} \right) \frac{G(1, x) k_{1,4}(x) \Delta(q)}{\beta_{1,4}^2}, \quad (\text{A..7})$$

e

$$k_{4,2}(x) = -\frac{\sqrt{q}}{4} \left(\frac{\Delta(q)}{q^2 - 1} \right) \left(\frac{x\beta_+ - q^{-1}\beta_-}{\beta_{1,4}} \right) \frac{xG(1, x) k_{1,4}(x)}{\beta_{1,4}^2}, \quad (\text{A..8})$$

$$k_{4,3}(x) = -\frac{\sqrt{q}}{4} \left(\frac{\Delta(q)}{q^2 - 1} \right) \left(\frac{x\beta_+ + q^{-1}\beta_-}{\beta_{1,4}} \right) \frac{xG(1, x) k_{1,4}(x)}{\beta_{1,4}^2}, \quad (\text{A..9})$$

onde

$$\Delta(q) = 4\sqrt{q}(q-1)\beta_{1,4} + 2i(q+1)[(q-1)(\beta_+^2 + \beta_-^2) + (q+1)(\beta_+^2 - \beta_-^2)]. \quad (\text{A..10})$$

e

$$G(1, x) = \frac{2}{x^2 + 1}. \quad (\text{A..11})$$

Já os elementos da diagonal principal que não se encontram no centro da matriz $\mathcal{K}(x)$

têm a forma

$$\begin{aligned}
k_{1,1}(x) &= 1 + \frac{1}{4} \frac{G(1, x) k_{1,4}(x)}{\sqrt{q} (q^2 - 1) (x^2 + 1) \beta_{1,4}^3} \times \\
&\times \{2i(x^2 - 1)(q - 1) [(q + 1) (\beta_+^2 + \beta_-^2) + (q - 1) (\beta_+^2 - \beta_-^2)] \\
&\quad + 8iq(x^2 + 1) (\beta_+^2 + \beta_-^2)\}, \tag{A..12}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
k_{4,4}(x) &= x^2 - \frac{ix^2 \sqrt{q} G(1, x) k_{1,4}(x)}{(q^2 - 1) (x^2 + 1) \beta_{1,4}^2} \times \\
&\times \{2(x^2 q + 1) (\beta_+^2 + q^{-1} \beta_-^2) + (x^2 + 1) (q - 1) (\beta_+^2 - q^{-1} \beta_-^2)\}, \tag{A..13}
\end{aligned}$$

enquanto que no bloco central, temos a estrutura:

$$\begin{aligned}
k_{2,2}(x) &= \left(\frac{x^2 q + 1}{q + 1} \right) - \frac{i}{4} \frac{G(1, x) k_{1,4}(x)}{\sqrt{q} (q - 1) \beta_{1,4}^2} \times \\
&\times \{2(x^2 q - 1) [(q - 1) (\beta_+^2 + \beta_-^2) + (q + 1) (\beta_+^2 - \beta_-^2)] \\
&\quad - 16qx\beta_+\beta_-\}, \tag{A..14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,3}(x) &= \left(\frac{x^2 q + 1}{q + 1} \right) - \frac{i}{4} \frac{G(1, x) k_{1,4}(x)}{\sqrt{q} (q - 1) \beta_{1,4}^2} \times \\
&\times \{2(x^2 q - 1) [(q - 1) (\beta_+^2 + \beta_-^2) + (q + 1) (\beta_+^2 - \beta_-^2)] \\
&\quad + 16qx\beta_+\beta_-\}, \tag{A..15}
\end{aligned}$$

e

$$k_{3,2}(x) = k_{2,3}(x) = \frac{i\sqrt{q}}{4} \left(\frac{\beta_+^2 + q^{-1} \beta_-^2}{\beta_{1,4}} \right) \frac{x^2 G(1, x)^2 k_{1,4}(x)}{\beta_{1,4}}. \tag{A..16}$$

Por fim, os elementos da diagonal secundária restantes $k_{1,4}(x)$ e $k_{4,1}(x)$ assumem a forma

$$k_{1,4}(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \beta_{1,4}, \tag{A..17}$$

$$k_{4,1}(x) = 4 \left[\frac{i\sqrt{q}}{q + 1} - \frac{1}{4} \left(\frac{q}{q - 1} \right) \left(\frac{\beta_+^2 + q^{-1} \beta_-^2}{\beta_{1,4}} \right) \right]^2 \frac{k_{1,4}(x)}{\beta_{1,4}^2}. \tag{A..18}$$

APÊNDICE B

Soluções particulares ao modelo $\mathcal{U}_q [\mathfrak{osp}(2|4)^{(2)}]$

No caso dos modelos de vértices com simetria $\mathcal{U}_q [\mathfrak{osp}(2|4)^{(2)}]$, encontramos uma solução particular cuja matriz de reflexão é formada por quatro blocos 2×2 periféricos, e possui um centro diagonal. Em outras palavras, $\mathcal{K}(x)$ é uma matriz da forma

$$\mathcal{K}(x) = \begin{bmatrix} k_{1,1}(x) & k_{1,2}(x) & 0 & 0 & k_{1,5}(x) & k_{1,6}(x) \\ k_{2,1}(x) & k_{2,2}(x) & 0 & 0 & k_{2,5}(x) & k_{2,6}(x) \\ 0 & 0 & k_{3,3}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,4}(x) & 0 & 0 \\ k_{5,1}(x) & k_{5,2}(x) & 0 & 0 & k_{5,5}(x) & k_{5,6}(x) \\ k_{6,1}(x) & k_{6,2}(x) & 0 & 0 & k_{6,5}(x) & k_{6,6}(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

A solução encontrada é caracterizada por três parâmetros livres, β_{12} , β_{15} e β_{16} . Além disso, verificamos que os elementos diagonais do bloco central são iguais, de modo que eles são dados por

$$k_{4,4}(x) = k_{3,3}(x) = \frac{x^2 q + 1}{q + 1} - \frac{(x^2 - 1)(x^2 q^2 - 1)\beta_{1,2}\beta_{1,5}}{2(x^2 q + 1)\beta_{1,6}}. \quad (\text{B.2})$$

Para os elementos que não se encontram nas diagonais principal e secundária, temos,

$$k_{1,2}(x) = \frac{\beta_{1,2}G(2,x)k_{1,6}(x)}{\beta_{1,6}}, \quad k_{1,5}(x) = \frac{\beta_{1,5}G(2,x)k_{1,6}(x)}{\beta_{1,6}}, \quad (\text{B..3})$$

$$k_{2,1}(x) = \frac{\beta_{2,1}G(2,x)k_{1,6}(x)}{\beta_{1,6}}, \quad k_{2,6}(x) = \frac{qx^2\beta_{1,5}G(2,x)k_{1,6}(x)}{\beta_{1,6}}, \quad (\text{B..4})$$

$$k_{5,1}(x) = -\frac{\beta_{1,2}\beta_{2,1}G(2,x)k_{1,6}(x)}{q\beta_{1,5}\beta_{1,6}}, \quad k_{5,6}(x) = -\frac{\beta_{1,2}x^2G(2,x)k_{1,6}(x)}{\beta_{1,6}}, \quad (\text{B..5})$$

$$k_{6,2}(x) = -\frac{\beta_{1,2}\beta_{2,1}x^2G(2,x)k_{1,6}(x)}{\beta_{1,5}\beta_{1,6}}, \quad k_{6,5}(x) = -\frac{\beta_{2,1}x^2G(2,x)k_{1,6}(x)}{\beta_{1,6}}, \quad (\text{B..6})$$

onde,

$$\beta_{2,1} = q \left(\frac{\beta_{1,5}}{\beta_{1,6}} \right) \left(\frac{2}{q+1} - \frac{\beta_{1,2}\beta_{1,5}}{\beta_{1,6}} \right). \quad (\text{B..7})$$

e relembramos que a função $G(m, x)$ assume aqui o valor

$$G(2, x) = \frac{q+1}{qx^2+1}. \quad (\text{B..8})$$

Os elementos da diagonal secundária, por sua vez, são dados por

$$k_{1,6}(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)\beta_{1,6}, \quad k_{6,1}(x) = -\frac{\beta_{2,1}^2k_{1,6}(x)}{q\beta_{1,5}^2}, \quad (\text{B..9})$$

$$k_{2,5}(x) = -\frac{\beta_{2,1}k_{1,6}(x)}{\beta_{1,2}}, \quad k_{5,2}(x) = \frac{\beta_{1,2}\beta_{2,1}k_{1,6}(x)}{q\beta_{1,5}^2}. \quad (\text{B..10})$$

e, finalmente, para os elementos da diagonal principal, temos,

$$k_{1,1}(x) = 1 - q \left(\frac{\beta_{1,2}\beta_{1,5}}{\beta_{1,6}^2} \right) G(2,x)k_{1,6}(x) = x^2k_{5,5}(x), \quad (\text{B..11})$$

e

$$k_{2,2}(x) = 1 + \left(\frac{\beta_{1,2}\beta_{1,5}}{\beta_{1,6}^2} \right) G(2,x)k_{1,6}(x) = x^2k_{6,6}(x). \quad (\text{B..12})$$

Para concluir gostaríamos de mencionar que essa solução particular para o modelo $\mathcal{U}_q[\text{osp}(2|4)^{(2)}]$ foi sugerida pela existência de uma solução “quase unitária” dada por

$$\mathcal{K}(x) = \text{diag}[x^{-2}, 1, 1, 1, 1, x^2], \quad (\text{B..13})$$

encontrada anteriormente em [31] e que também só é válida para quando $m = 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] INTEGRABLE system. In: Wikipedia, the free encyclopedia. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Integrable_system> Acesso em: 16 mar 2012.
- [2] LIOUVILLE, J. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels, **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, série 1, tome 14, p. 257-299, 1849.
- [3] ARNOLD, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] LAX, P. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, **Comm. Pure Appl. Math**, v. 21, p. 467-490, 1968.
- [5] KORTEWEG, D.; DE VRIES, G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, **Phil. Mag.**, v. 39, p. 422-443, 1895.
- [6] GARDNER, C. S. ET AL. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, **Phys. Rev. Lett.**, v. 19, p. 1095-1097, 1967.
- [7] ZAKHAROV, V. E.; FADEEV, L. D. Korteweg-de Vries equation, a completely integrable hamiltonian system, **Functional Analysis and its Applications**, v. 5, 18, 1971.
- [8] FADEEV, L. D. Instructive history of the quantum inverse scattering method, **Acta Applicandæ Mathematicæ**, v. 39, p. 69-84, 1995.
- [9] LENZ, W. Beiträge zum Verständnis der magnetischen Eigenschaften in festen Körpern, **Zeit. Phys.**, v. 21, p. 613-615, 1920.

- [10] ISING, E. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus, **Zeit. Phys.**, v. 31, p. 253-258, 1925.
- [11] HEISENBERG, W. Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik, **Zeit. Phys.**, v. 38, p. 411-426, 1926.
- [12] BETHE, H. Zur Theorie der Metalle I, **Zeit. Phys.**, v. 71, p. 205-226, 1931.
- [13] PAULING, L. The structure and entropy of ice and of other crystals with some randomness of atomic arrangement, **J. Am. Chem. Soc.**, v. 57, p. 2680-2684, 1935.
- [14] LIEB, E. H. Residual Entropy of Square Ice, **Phys. Rev.**, v. 162, p. 162-172, 1967.
- [15] YANG, C. N. Some exact results for the many body problem in one dimension with repulsive delta function interaction, **Phys. Rev. Lett.**, v. 19, p. 1312-1315, 1967.
- [16] YANG, C. N. *S*-matrix for the one-dimensional *N*-body problem with repulsive or attractive δ -function. **Phys. Rev.**, v. 168, 1920-1923, 1968.
- [17] BAXTER, R. J. Partition function of the eight-vertex lattice model. **Ann. Phys.**, 70, 193-228 - 1972.
- [18] BAXTER, R. J. Solvable eight-vertex model on a arbitrary planar lattice. **Ann. Phys. Phil. Trans. Royal Soc. London**, v. 289, p. 315-346, 1978.
- [19] BAXTER, R. J. **Exactly solved models in statistical mechanics**, Ann. Academic Press, London, 1982.
- [20] FADDEEV, L.; SKLYANIN, E. K.; TAKHTAJAN, L. The quantum inverse problem method I, **Theor. Math. Phys.**, v. 40, p. 688-706, 1980;
- [21] FADDEEV, L. **Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory**, Les Houches: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, 1982.
- [22] SKLYANIN, E. K. Quantum version of the method of inverse scattering problem. **J. Soviet Math.**, v. 19, p. 1546-1596, 1982.
- [23] KOREPIN, V. E.; IZERGIN, A. G.; BOGOLIUBOV, N. M. **Quantum inverse scattering method and correlation functions**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

- [24] DRINFELD, V. G. Quantum groups, **Proc. Int. Cong. Math.**, v. 1, p. 798-820, 1987.
- [25] SKLYANIN, E. K. Boundary conditions for integrable quantum systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, London, v. 21, p. 2375-2389, 1988.
- [26] ZAMOŁODCHIKOV, A. B.; ZAMOŁODCHIKOV, A. B. Factorized S -matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. **Ann. Phys.**, v. 120(2), p. 253-291, 1979.
- [27] CHEREDNIK, I. V. Factorizing particles on a half-line and root systems. **Theor. Math. Phys.**, New York, v. 61, p. 977-983, 1984.
- [28] ALCARAZ, F. C. ET AL. Surface exponents of the quantum XXZ , Ashkin-Teller and Potts models **J. Math. Phys. A**, v. 20, p. 6397-6409, 1987.
- [29] MEZINCESCU, L.; NEPOMECHIE, R. I. Integrable open spin chains with non-symmetric R -matrices. **J. Phys. A: Math. Gen.**, London, v. 24, p. L17-L23, 1991.
- [30] MEZINCESCU, L.; NEPOMECHIE, R. I. Integrability of open spin chains with quantum algebra symmetry. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 6, p. 5231- 5248, 1991. MEZINCESCU, L.; NEPOMECHIE, R. I. Addendum to "Integrability of open spin chains with quantum algebra symmetry" **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 7, p. 5657-5659, 1991.
- [31] LIMA-SANTOS, A. $D_{n+1}^{(2)}$ reflection K -matrices. **Nucl. Phys. B**, v. 612, p. 446-460, 2001.
- [32] LIMA-SANTOS, A. $A_{n-1}^{(1)}$ reflection K -matrices. **Nucl. Phys. B**, v. 644, p. 568-584, 2002.
- [33] LIMA-SANTOS, A. $B_n^{(1)}$ and $A_{2n-1}^{(2)}$ reflection K -matrices. **Nucl. Phys. B**, v. 654, p. 466-480, 2003.
- [34] LIMA-SANTOS, A.; MALARA, R., $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ and $A_{2n}^{(2)}$ reflection K -matrices. **Nucl. Phys. B**, v. 675, p. 661-684, 2003.
- [35] MALARA, R.; LIMA-SANTOS, A. On $A_{n-1}^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $A_{2n}^{(2)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$ and $D_{n+1}^{(2)}$ Reflection K -matrices. **J. Stat. Mech.**, v. P09013, p. 1-61, 2006.
- [36] MALARA, R. **Matrizes de reflexão para modelos de vértices associados às álgebras de Lie $A_{n-1}^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $A_{2n}^{(2)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$ e $D_{n+1}^{(2)}$** . Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de São Carlos, 2006.

- [37] KULISH, P. P.; SKLYANIN, E. K. Solutions of the Yang-Baxter equation. **J. Soviet Math.**, v. 19, p. 1596-1620, 1982.
- [38] KULISH, P. P.; SKLYANIN, E. K. Quantum spectral transformation method. Recent developments. **Lecture Notes in Physics**, v. 151, p. 61-119, 1982.
- [39] BRACKEN, J. A. ET AL. Integrable open-boundary conditions for the q -deformed supersymmetric U model of strongly correlated electrons. **Nucl. Phys. B**, v. 516, p. 588-602, 1998.
- [40] MARTINS, M. J.; RAMOS, P. B. The algebraic Bethe ansatz for rational braid-monoid lattice models **Nucl. Phys. B**, v. 500, p. 579-620, 1997.
- [41] GALLEAS, W.; MARTINS, M. J. New R -matrices from representations of braid-monoid algebras based on superalgebras, **Nucl. Phys. B**, v. 732, p. 444-462, 2006.
- [42] JIMBO, M. Quantum R -matrix for the generalized Toda system **Commun. Math. Phys.**, v. 102, p. 537-547, 1986.