

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Um modelo consistente para o processo de  
fotocontagem contínua e medidas de  
emaranhamento de sistemas quânticos de  
variáveis contínuas

Alexandre Dodonov

Dissertação submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Física da Universidade Federal  
de São Carlos como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Salomon S. Mizrahi

10 de Fevereiro de 2005

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

D646mc

Dodonov, Alexandre.

Um modelo consistente para o processo de fotocontagem contínua e medidas de emaranhamento de sistemas quânticos de variáveis contínuas / Alexandre Dodonov. -- São Carlos : UFSCar, 2005.  
109 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Radiação. 2. Salto quântico. 3. Emaranhamento. 4. Fotodeteccção. I. Título.

CDD: 539.2 (20<sup>a</sup>)

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introdução às teorias de fotodeteccção</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Teorias convencionais de fotodeteccção . . . . .	3
1.3 Teoria de medições contínuas . . . . .	5
1.4 Trajetórias quânticas . . . . .	9
1.5 Densidades de probabilidade e tempos de espera . . . . .	10
1.6 Modelo de Srinivas e Davies . . . . .	12
1.6.1 Violação da suposição V . . . . .	13
1.7 Conclusões . . . . .	14
<b>2 Saltos quânticos</b>	<b>15</b>
2.1 Introdução . . . . .	15
2.2 Modelo de Imoto <i>et al.</i> . . . . .	16
2.3 Motivação do modelo não-linear . . . . .	18
2.4 Modelo do átomo de 2-níveis . . . . .	19
2.4.1 Modelo “microscópico” . . . . .	19
2.4.2 Modelo “macroscópico” . . . . .	22
2.5 Modelo do oscilador harmônico . . . . .	28
2.5.1 Modelo “microscópico” . . . . .	28
2.5.2 Modelo “macroscópico” . . . . .	29
2.6 Influência de outros sistemas . . . . .	32
2.7 Discussão . . . . .	33
<b>3 E-model vs. modelo de SD</b>	<b>35</b>
3.1 E-model: Introdução . . . . .	35
3.1.1 Operação de uma contagem . . . . .	37
3.1.2 Operação de não-contagem . . . . .	38
3.1.3 Contagem contínua . . . . .	39
3.2 Número de fótons no campo e a sua dispersão . . . . .	40
3.2.1 Número médio . . . . .	40
3.2.2 Dispersão . . . . .	41
3.3 Probabilidades de coincidência . . . . .	42
3.3.1 Densidade de probabilidade de coincidência . . . . .	42

3.3.2	Densidade de probabilidade condicional de duas contagens . . . . .	45
3.3.3	Tempos de espera . . . . .	47
3.3.4	A função de correlação de segunda ordem . . . . .	49
3.4	“Entropia condicional” . . . . .	50
3.5	Discussão e conclusões . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Fotocontagem não-ideal</b>	<b>53</b>
4.1	Introdução . . . . .	53
4.2	E-model . . . . .	54
4.2.1	(a) Dissipação na cavidade . . . . .	55
4.2.2	(b) Dissipação no detector . . . . .	57
4.3	Modelo de SD . . . . .	59
4.4	Conclusões . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Aplicações de fotodeteccção</b>	<b>62</b>
5.1	Introdução . . . . .	62
5.2	Deteccção homódina . . . . .	63
5.3	Controle de grau de emaranhamento através de fotocontagem . . . . .	69
5.4	Deteccção de fótons correlacionados . . . . .	71
5.4.1	Exemplo – número médio de fótons . . . . .	73
5.5	Conclusões . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Dinâmica de separabilidade</b>	<b>75</b>
6.1	Introdução . . . . .	75
6.2	Crítério simplificado de separabilidade . . . . .	76
6.3	Conversão paramétrica . . . . .	80
6.4	Amplificador paramétrico . . . . .	82
6.5	Dois modos em cavidade vibrante . . . . .	82
6.6	Discussão e conclusões . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Conclusões finais</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Expansão da exponencial</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Funções de probabilidade condicional</b>	<b>94</b>
<b>C</b>	<b>Dissipação no E-model</b>	<b>95</b>
C.1	Operação de não-contagem . . . . .	95
C.1.1	Cálculo de traço de $\tilde{S}_{t-t_0}\hat{\rho}_{t_0}$ . . . . .	97
C.2	Operação de $m$ contagens . . . . .	98

# Lista de Figuras

2.1	Modelo do átomo de 2-níveis: probabilidade de ocorrência de uma fotodeteccção em função do tempo – estado coerente . . . . .	24
2.2	Modelo do átomo de 2-níveis: probabilidade de ocorrência de uma fotodeteccção em função do tempo – estado de número . . . . .	25
2.3	Modelo do átomo de 2-níveis: probabilidade de ocorrência de uma fotodeteccção em função do tempo – estado térmico . . . . .	25
2.4	Modelo de OH: probabilidade de ocorrência de uma fotodeteccção em função do tempo – estado de número . . . . .	31
2.5	Modelo de OH: probabilidade de ocorrência de uma fotodeteccção em função do tempo – estado coerente . . . . .	31
2.6	O mesmo que na figura 2.4, mas para o estado térmico. . . . .	31
2.7	Ilustração de definições alternativas de saltos quânticos . . . . .	33
3.1	Número médio de fótons na cavidade em função do tempo durante evolução não-condicionada . . . . .	41
3.2	CPD em função do tempo para E-model . . . . .	45
3.3	CPD em função do número de contagens para o modelo de SD . . . . .	46
3.4	CPD em função do número de contagens para E-model . . . . .	46
3.5	TCCP em função do tempo para E-model . . . . .	48
3.6	Tempos de espera . . . . .	50
3.7	“Entropia condicional”: estado coerente. . . . .	51
3.8	“Entropia condicional”: estado térmico. . . . .	51
3.9	“Entropia condicional” para o estado de número para ambos os modelos. . . . .	51
5.1	Representação gráfica de deteccção homódina. . . . .	64
5.2	Número de fotoelétrons em função do tempo durante deteccção homódina . . . . .	68
6.1	Energias normalizadas do primeiro e terceiro modos em uma cavidade cúbica com uma extremidade oscilante versus o “tempo lento”, para estados iniciais térmicos altamente comprimidos. Na inserção: o coeficiente de “negatividade inversa” entre o primeiro e o terceiro modos sob mesmas condições iniciais. . . . .	85
6.2	O mesmo que na figura anterior para outras condições iniciais . . . . .	87

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- ao meu orientador, Prof. Dr. Salomon S. Mizrahi, por inúmeras discussões e sugestões durante a realização deste projeto e por ter deixado eu viajar para escolas de física que nada têm a ver com a área de minha pesquisa;
- ao meu pai, Prof. Dr. Viktor Dodonov, por ter esclarecido a física para mim durante vários anos;
- minha família;
- meus amigos e amigas, que tornaram minha vida mais divertida, seja isso nos bares, nas salas de aula, no tatame ou nas escolas de física;
- alunos e professores do DF pelos conhecimentos adquiridos e convivência;
- FAPESP (projeto 03/03276-5) e ao CNPq pelo suporte financeiro.

# Resumo

Esta dissertação abrange duas linhas de trabalho em óptica quântica moderna. A primeira está ligada à teoria de fotocontagem, especificamente à *teoria de medições contínuas* desenvolvida por Srinivas e Davies (SD) nos anos 1980, cujo ingrediente fundamental é a escolha correta do super-operador de *salto quântico*. Nós deduzimos de primeiros princípios vários super-operadores possíveis de salto quântico e empregamos um deles – o super-operador de salto quântico “não-linear”, proposto independentemente *ad hoc* por Ben-Aryeh e Brif e Oliveira *et al.* – para estudar as modificações que ele traz na teoria de SD, principalmente na previsão de algumas probabilidades de coincidência. Chamamos este modelo alternativo de *E-model* e generalizamos ambos os modelos (o de SD e E-model) ao introduzir efeitos dissipativos na teoria, tanto devido à cavidade, quanto ao detector imperfeitos. Por fim, estudamos algumas aplicações específicas da teoria de fotocontagem contínua (detecção homódina e detecção de fótons correlacionados) comparando as previsões dos dois modelos.

A segunda parte da dissertação está relacionada com o estudo de emaranhamento de estados quânticos de variáveis contínuas. Nós obtivemos uma forma simplificada de critério de separabilidade de Simon para estados Gaussianos bipartites, mostrando que para sistemas cuja evolução é governada por Hamiltonianos quadráticos arbitrários, a dinâmica de separabilidade é descrita completamente em termos do determinante da matriz de covariância cruzada. Como exemplos concretos, consideramos a evolução do “coeficiente de negatividade inversa” (que dá uma estimativa quantitativa do “grau de emaranhamento”) para dois modos inicialmente desacoplados (cada um existindo em estado térmico comprimido) nos casos de conversão paramétrica, amplificação paramétrica e para uma cavidade cuja fronteira oscila em ressonância com dois modos do campo.

# Abstract

This dissertation embraces two trends of research in modern quantum optics. The first of them is connected to the photodetection theory, particularly to the continuous measurement theory developed by Srinivas and Davies (SD) in 1980's, whose principal ingredient is the correct choice of the quantum jump superoperator. We deduce from first principles different possible quantum jump superoperators, and employ one of them – the “non-linear” quantum jump superoperator, proposed independently *ad hoc* by Ben-Aryeh and Brif and Oliveira *et al.* – to study the modifications it brings to the SD theory. We call this model as *E-model* and generalize the both models (SD model and E-model) by including dissipation effects due to the imperfections of the cavity and of the detector. Finally, we study some specific applications of continuous photodetection theory (homodyne detection and detection of correlated photons) and compare the results between the two models.

The second trend of this dissertation is related to the study of entanglement of continuous variables quantum states. We give a simplified form of Simon's separability criterion for two-mode Gaussian states, showing that for systems whose unitary evolution is governed by arbitrary time-dependent quadratic Hamiltonians, the separability dynamics is completely described in terms of the determinant of the cross-covariance matrix. As concrete examples we consider the evolution of the “inverse negativity coefficient” (which gives a quantitative estimation of the “degree of entanglement”) for two initially uncoupled modes (each being in a squeezed thermal state) in the cases of parametric converter, parametric amplifier and for a cavity whose boundary oscillates in resonance with two field modes.

# Capítulo 1

## Introdução às teorias de fotodeteção

Neste capítulo faremos uma breve introdução às teorias de fotodeteção convencionais e vamos expor a metodologia a ser usada nos próximos capítulos. Daremos algumas informações gerais a respeito do processos de fotodeteção, dos modelos que descrevem tais processos e das grandezas neles observáveis. A seguir, faremos uma breve revisão histórica do desenvolvimento das teorias convencionais de fotodeteção, chegando ao ponto fundamental desse capítulo, que é o modelo proposto por *Srinivas e Davies* (SD) para o processo de fotodeteção contínua. Como uma aplicação da teoria de SD, vamos mostrar como são feitos os cálculos no caso de um campo livre monomodal. Todos os resultados descritos neste capítulo são bem conhecidos, não havendo nenhuma novidade resultante da pesquisa dessa dissertação.

### 1.1 Introdução

O principal instrumento na descrição quântica da radiação eletromagnética é a sua distribuição de probabilidades de fótons, ou mais abrangentemente, o seu *operador-densidade*. Medições de *graus de coerência quânticos* por experimentos de interferometria (ver, por exemplo, [1]) fornecem uma parte de informação a respeito dos elementos da matriz do *operador estatístico*<sup>1</sup>. Informação adicional é obtida através de experimentos de contagem de fótons, ou *fotocontagem*. Experimentos de fotocontagem fornecem uma medida bastante direta da distribuição de probabilidades de fótons para todos os tipos de luz descritos pela teoria quântica. Tais experimentos formam a base observacional de óptica quântica e têm um papel fundamental no estudo de fenômenos quânticos nos feixes de luz.

O arranjo experimental básico nos experimentos de fotocontagem é o seguinte. Um feixe de luz sob investigação é manipulado de modo a incidir sobre o detector<sup>2</sup> – um fototubo conectado por eletrônica adequada a um instrumento contador, que registra o número de fótons ao produzir emissões fotoelétricas no fototubo (para uma discussão mais aprofundada ver [2] e as referências lá indicadas). Cada leitura de rajada de pulsos de elétrons (corrente elétrica) é vista como uma manifestação de um *único* fóton. Um

---

<sup>1</sup>Nesta dissertação, os termos “*operador-densidade*” e “*operador estatístico*” têm o mesmo significado.

<sup>2</sup>Detector, fotodetector e medidor têm o mesmo significado nesta dissertação – o de um aparelho *macroscópico* que “tira” os fótons do campo e é capaz de registrá-los.

obturador na frente do fototubo controla o intervalo de tempo durante o qual a luz incide sobre o detector. Produzida a radiação, o obturador é aberto por um intervalo de tempo  $T$ ; depois disso, o obturador é fechado e conta-se o número de fotoelétrons registrados. Desde que o experimentador seja capaz de reproduzir repetidamente um campo nas mesmas condições, este experimento é repetido um grande número de vezes (da ordem de  $10^4$ ) e o resultado pode ser expresso como distribuição de probabilidades  $P_m(T)$  para  $m$  contagens durante o tempo de observação  $T$ . A distribuição medida  $P_m(T)$  contém a informação sobre propriedades estatísticas de radiação.

Embora a distribuição de probabilidade de fótons  $P_m(T)$  forneça o máximo de informação a respeito de elementos diagonais do operador-densidade, ela não é a única grandeza que pode ser determinada através de experimentos de fotocontagem. Existem muitas outras quantidades observáveis que ajudam no estudo de características da radiação e vamos descrevê-las na seção 1.5.

Agora que discutimos a técnica experimental de contagem de fótons, vamos nos direcionar às teorias que descrevem o processo de medição quântica. Por muito tempo a teoria de medição de *von Neumann* [3] foi tida como conclusiva a respeito dos distintos processos de evolução de sistemas sujeitos a medições. De acordo com esta teoria, o processo quântico de fotodeteção é dividido em duas etapas. Na primeira delas, o campo de fótons e o detector acoplam-se um ao outro via uma interação com evolução unitária, estabelecendo-se uma correlação quântica entre ambos. Este processo é *reversível* porque a interação é unitária. Na segunda etapa, o número de conversões fotoelétricas é lido instantaneamente, produzindo um novo estado quântico do campo de fótons via redução não-unitária do estado. Tal processo denomina-se *medição do primeiro tipo* ou *não-destrutiva* [3].

O processo de fotodeteção realista, entretanto, distingue-se do processo descrito acima, porque o número de fotoelétrons é medido não de uma única vez, mas seqüencialmente, um a um. A informação referente ao registro de uma fotocontagem é lida em tempo real ao longo do período de medição. A redução do estado de campo de fótons ocorre, portanto, a cada momento enquanto o detector estiver ativo e, conseqüentemente, o campo de fótons evolui não-unitariamente. Várias “corridas” do experimento devem ser realizadas, necessárias para calcular valores médios de quantidades relevantes. É claro, então, que o aparato de medida faz medições deste observável *continuamente*, e o estado de campo deve ser revisado continuamente para refletir o conhecimento mais recente sobre o sistema resultante do processo de medição. Tal tipo de processo de medição é denominado *processo de medição contínua*, *medição do segundo tipo* ou *destrutiva* [4].

Existem duas abordagens diferentes para a teoria de fotodeteção e vamos descrevê-las brevemente na seção 1.2. A primeira delas foi iniciada por *Mandel* [5] e seguida por *Kelley* e *Kleiner* [6], *Glauber* [7] e outros. Ela descreve experimentos em que um feixe propaga-se em espaço aberto, incide sobre o detector, e cada fóton não absorvido é perdido. Tal descrição foi classificada por *Mandel* [8] como modelo de *sistema aberto*.

A segunda abordagem foi iniciada por *Mollow* [9] e seguida por *Scully* e *Lamb* [10], *Shepherd* [11], *Selloni et al.* [12], *Srinivas* e *Davies* [13] e outros. Nesta abordagem, considera-se que a radiação e o fotodetector encontram-se em uma cavidade fechada, e cada fóton não absorvido pelo detector em um dado tempo está disponível para detecção em um tempo posterior<sup>3</sup>. Por motivos óbvios *Mandel* chamou este modelo de modelo de

<sup>3</sup>É claro que este modelo pode ser generalizado, introduzindo efeitos de perdas devido a paredes

*sistema fechado* [8].

A diferença entre as duas abordagens acima é bastante clara quando consideramos os resultados de fotodeteção para tempos de detecção grandes: no caso de sistema fechado, o número de fótons detectados tende a um limite, dado pelo número de fótons presentes inicialmente na cavidade. Já no caso do modelo de sistema aberto, o número de fótons detectados cresce ilimitadamente, pois a radiação atinge continuamente a superfície do detector.

Na prática, o arranjo experimental correspondente ao modelo de sistema aberto tem sido predominante nos experimentos de contagem de fótons até agora, devido a sua simplicidade, pois ele exige apenas a presença de um detector e de uma fonte de radiação. No entanto, com o desenvolvimento científico e tecnológico, o modelo de sistema fechado vem se tornando fundamental no estudo de processos em que são contados poucos fótons, como ocorre em várias áreas atuais de óptica quântica (ver, por exemplo, [14–16]). No entanto, tais experimentos esbarram em dificuldades técnicas, já que nesses experimentos são necessárias cavidades ópticas com alto *fator de qualidade* [17], que sejam capazes de armazenar os fótons por um tempo suficientemente grande a ponto de serem detectados.

Por intermédio da fotocontagem um grande número de experimentos pode ser realizado, determinando características como a energia de um campo de luz, suas propriedades estatísticas, tais como estados de campo e a determinação de quadraturas através de mecanismos de *deteção homódina* [2, 18, 19]. Recentemente a fotodeteção foi utilizada como recurso fundamental em protocolos de informação quântica [20] tais como *teletransporte* de estados de polarização da luz [21], *comunicação quântica* [22] e *computação quântica* em sistemas ópticos não-lineares [23]. No entanto, muitos destes experimentos ainda são descritos teoricamente por processos de medição de *primeiro tipo*, apesar da existência de teorias de *fotodeteção contínua*, como a teoria quântica de fotocontagem desenvolvida na década de 1980 por *Srinivas e Davies* [13], ou o *modelo consistente de fotodeteção (E-model)* desenvolvido recentemente [24]. Neste capítulo pretendemos descrever de uma forma bastante completa a teoria de *Srinivas e Davies* (SD), tanto a sua formulação axiomática (seção 1.3), quanto a abordagem através de *trajetórias quânticas* (seção 1.4). Na seção 1.6 iremos descrever a teoria de SD aplicada a fotodeteção de um campo monomodal e algumas inconsistências que surgem neste caso. Finalmente, na seção 1.7 apresentaremos as conclusões.

## 1.2 Teorias convencionais de fotodeteção

A quantidade aleatória fundamental medida pelo detector é o número de fótons (em forma de fotoelétrons) em um intervalo de tempo qualquer  $[t_0, t)$ . Portanto, o objetivo da maioria das teorias de fotodeteção é chegar a uma fórmula para a probabilidade  $P_m([t_0, t))$  de que  $m$  contagens são registradas no intervalo  $[t_0, t)$ . Para campos ópticos clássicos, tal fórmula de contagem foi obtida pela primeira vez por *Mandel* [5, 25], partindo da suposição de que as probabilidades para registrar contagens em diferentes intervalos (infinitesimais)

---

imperfeitas da cavidade, que podem absorver fótons, e detectores imperfeitos, que podem absorver fótons sem produzir corrente elétrica. Estes efeitos farão com que o número médio de fótons detectados seja menor que o número médio de fótons presentes inicialmente. Vamos tratar estes efeitos dissipativos no capítulo 4.

de tempo são estatisticamente independentes. A fórmula de *Mandel* é

$$P_m(t) = \left\langle \frac{W^m}{m!} e^{-W} \right\rangle, \quad (1.1)$$

onde

$$W = \lambda \int_0^t I(t') dt', \quad I(t) = \int \int \int_D V^*(\vec{r}, t) V(\vec{r}, t) d^3r$$

e  $V(\vec{r}, t)$  é o sinal analítico aleatório, com índices de polarização omitidos. Os colchetes  $\langle \rangle$  denotam a média sobre o “ensemble”,  $D$  é o volume do detector e  $\lambda$  está relacionado à sua eficiência.

Como já foi apontado na introdução, existem duas abordagens diferentes para a teoria quântica de fotodeteção, que levam a diferentes probabilidades. A primeira delas, válida para sistemas abertos, está relacionada, de perto, com a abordagem clássica de coincidência [1]. Ela leva à fórmula quântica de *Mandel*

$$P_m(t) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho} : \frac{\hat{\Omega}^m}{m!} e^{-\hat{\Omega}} : \right], \quad \text{onde} \quad \hat{\Omega} = \lambda \int_0^t \hat{I}(t') dt' \quad (1.2)$$

e  $::$  denotam o ordenamento normal (lembrando que  $\lambda$  está relacionado com a eficiência do detector). O operador de intensidade  $\hat{I}(t)$  é definido em termos de partes de frequência positiva e negativa  $\hat{V}^\pm(r, t)$  de operadores do campo (ver, por exemplo, [1]):

$$\hat{I}(t) = \int \int \int_D \hat{V}^-(\vec{r}, t) \hat{V}^+(\vec{r}, t) d^3r.$$

Se o estado do campo eletromagnético  $\hat{\rho}$  é escrito na representação  $P$  de Glauber-Sudarshan como

$$\hat{\rho} = \int P_N(z) |z\rangle \langle z| d^2z,$$

onde  $z$  denota a amplitude de estado coerente  $|z\rangle$ , então a fórmula (1.2) é reescrita como

$$P_m(t) = \int P_N(z) \frac{(|z|^2 \lambda t)^m}{m!} \exp(-|z|^2 \lambda t) d^2z, \quad (1.3)$$

que é similar à fórmula clássica de *Mandel*.

A fórmula (1.3) tem uma série de limitações quando aplicada ao modelo do sistema fechado. Um simples cálculo baseado na expressão (1.3) mostra que o número médio de fótons contados no intervalo  $[0, t]$  é dado por

$$\langle m(t) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m P_m(t) = \lambda t \int P_N(z) |z|^2 d^2z = \lambda t \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{N}],$$

que para  $t > \lambda^{-1}$  excede o número médio de fótons inicialmente presentes no campo, dado por  $\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{N}]$ . Na verdade, para  $t \rightarrow \infty$  o número médio de fótons contados sempre será infinito a menos que  $\hat{\rho}$  seja o estado de vácuo. Então, vemos que essa fórmula, a princípio, não se aplica a sistemas fechados.

Em segundo lugar, o fato de que a função de distribuição quântica  $P_N(z)$  assume valores negativos para uma grande classe de estados torna o lado direito da equação (1.3)

suspeita como uma probabilidade. Por exemplo, para um estado de  $n$  fótons,  $|n\rangle$ , a probabilidade de contagem (1.2) para  $m < n$  reduz-se a

$$P_m(t) = \binom{n}{m} (\lambda t)^m (1 - \lambda t)^{n-m},$$

que assume valores negativos para tempos  $t > \lambda^{-1}$ .

Na segunda abordagem (iniciada por *Mollow* [9]), que se aplica a sistemas fechados, o método adotado se resume a calcular a evolução do sistema composto *detector+campo* durante o intervalo de tempo  $[0, t]$ , e depois calcular a probabilidade no instante  $t$  de que  $m$  fótons sejam registrados pelo detector. Para o caso de um campo livre monomodal este método leva a (ver, por exemplo, [9])

$$P_m(t) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} (1 - \exp(-\lambda t))^m (\exp(-\lambda t))^{n-m} \langle n | \hat{\rho} | n \rangle. \quad (1.4)$$

O lado direito da equação (1.4) satisfaz todas as propriedades requeridas para ser uma probabilidade de contagens, tais como não-negatividade e normalização. Apesar disso, vários argumentos nas referências [9, 10, 12, 26] são incompletos do ponto de vista de teorias de medição. De fato, na dedução da expressão (1.4) é considerado que uma única medição sobre o sistema *detector+campo* é realizada no instante  $t$  para descobrir quantas contagens foram registradas, sendo uma medição de *primeiro tipo*. Logo, cada um dos valores de  $P_m(t)$ , à medida que  $t$  varia, refere-se a um experimento independente, e não é permitido combinar esses valores quando o tempo  $t$  passa, em uma tentativa de determinar se as contagens individuais ocorreram nos tempos  $t_1, t_2$ , etc. Neste contexto, *Srinivas e Davies* propuseram a *teoria de medições contínuas*.

### 1.3 Teoria de medições contínuas

Nos anos 1970 foi desenvolvida uma teoria axiomática de medições contínuas na mecânica quântica, cujo enfoque era a análise de resultados de experimentos de contagem. O estudo de tais processos quânticos de fotocontagem foi iniciado sob o nome de “*processos quânticos estocásticos*” por *Davies* [27] e detalhado em [28–31] por *Davies e Srinivas*. O princípio básico por trás de toda a teoria é que toda vez que o sistema, em um estado  $\hat{\rho}$ , é sujeito a um experimento (instantâneo ou qualquer outro), e um certo resultado é observado, então o estado pós-medição sempre terá a forma  $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \hat{\zeta} \hat{\rho} / \text{Tr}[\hat{\zeta} \hat{\rho}]$ , onde  $\hat{\zeta}$  é um operador linear positivo, tal que

$$0 \leq \text{Tr}[\hat{\zeta} \hat{\rho}] \leq 1$$

para cada operador-densidade normalizado  $\hat{\rho}$ . Tais transformações lineares positivas são chamadas de *operações*<sup>4</sup> [32, 33]. A probabilidade de que um resultado específico seja observado no experimento é  $\text{Tr}[\hat{\zeta} \hat{\rho}]$ . Se o sistema no estado  $\hat{\rho}$  é sujeito a uma seqüência de dois experimentos, com resultados correspondentes a operações  $\hat{\zeta}_1$  e  $\hat{\zeta}_2$ , respectivamente, então o estado do sistema imediatamente após o segundo experimento será  $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}'' =$

<sup>4</sup>Na verdade, as *operações* são equivalentes a *super-operadores*, pois elas atuam sobre o operador simultaneamente dos dois lados, à esquerda e à direita. Por isso, às vezes chamaremos *operações* de *super-operadores*.

$\hat{\zeta}_2 \hat{\zeta}_1 \hat{\rho} / \text{Tr}[\hat{\zeta}_2 \hat{\zeta}_1 \hat{\rho}]$  e a probabilidade conjunta de que os resultados acima sejam observados será  $\text{Tr}[\hat{\zeta}_2 \hat{\zeta}_1 \hat{\rho}]$ .

A medição realizada pelo detector de fótons pode ser caracterizada por um conjunto de operações  $\hat{N}_{[t, t+\tau)}(m)$ , para cada inteiro  $m > 0$  e cada intervalo  $[t, t + \tau)$ . Estas operações  $\hat{N}_{[t, t+\tau)}(m)$  têm a seguinte interpretação: Se  $\hat{\rho}$  é o estado do sistema no tempo  $t$  e o detector registra  $m$  contagens, fazendo medições contínuas no intervalo  $[t, t + \tau)$ , então o estado do sistema no tempo  $t + \tau$  será  $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}^{(m)} = \hat{N}_{[t, t+\tau)}(m) \hat{\rho} / \text{Tr}[\hat{N}_{[t, t+\tau)}(m) \hat{\rho}]$ . A probabilidade  $P_m([t, t + \tau))$  de que  $m$  contagens foram registradas no dado intervalo é

$$P_m([t, t + \tau)) = \text{Tr}[\hat{N}_{[t, t+\tau)}(m) \hat{\rho}]. \quad (1.5)$$

A teoria matemática de processos quânticos de contagem dependerá, portanto, do estudo das propriedades das operações  $\hat{N}_{[t, t+\tau)}(m)$ .

Daqui em diante estudaremos os “processos homogêneos<sup>5</sup> de contagem”, para os quais  $\hat{N}_{[t, t+\tau)}(m)$  não depende do tempo inicial  $t$ , ou seja,

$$\hat{N}_{[t, t+\tau)}(m) = \hat{N}_\tau(m).$$

O processo homogêneo de contagem é caracterizado através de seguintes propriedades ou axiomas [13]:

- (I) Para cada intervalo de tempo  $t$  e cada inteiro  $m \geq 0$ , existe uma operação  $\hat{N}_t(m)$ , tal que

$$0 \leq \text{Tr}[\hat{N}_t(m) \hat{\rho}] \leq 1,$$

para cada operador densidade normalizado. Essa condição assegura que a probabilidade (1.5) está entre 0 e 1.

- (II) A operação  $\hat{T}_t$ , definida por

$$\hat{T}_t = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{N}_t(m), \quad (1.6)$$

satisfaz  $\text{Tr}[\hat{T}_t \hat{\rho}] = 1$  para cada operador densidade-normalizado. Esta hipótese assegura a normalização

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m([0, t)) = 1.$$

- (III) Propriedade associativa: as operações  $\hat{N}_t$  satisfazem a propriedade

$$\hat{N}_{t_1+t_2}(m) = \sum_{m_1+m_2=m} \hat{N}_{t_2}(m_2) \hat{N}_{t_1}(m_1). \quad (1.7)$$

Esta condição relaciona a probabilidade conjunta

$$P([0, t_1), m_1; [t_1, t_2), m_2)$$

de que  $m_1$  contagens sejam registradas no intervalo  $[0, t_1)$  e  $m_2$  no intervalo  $[t_1, t_2)$  com a probabilidade  $P_m(t_2)$  de que  $m$  contagens são registradas no intervalo  $[0, t_2)$  pela seguinte relação

$$P([0, t_2), m) = \sum_{m_1+m_2=m} P([0, t_1), m_1; [t_1, t_2), m_2). \quad (1.8)$$

<sup>5</sup>Aqui, “homogêneo” tem sentido de “estacionário”.

(IV) Identidade

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{N}_t(0)\hat{\rho} = \hat{\rho}$$

para qualquer operador densidade  $\hat{\rho}$ , assegurando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_0(t) = 1.$$

Uma caracterização matemática completa do processo quântico da contagem foi obtida em [27] sob as seguintes suposições adicionais.

(V) - (Suposição de grau limitado de interação.) Existe um número  $K < \infty$  tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \text{Tr}[\hat{N}_t(m)\hat{\rho}] < Kt \quad (1.9)$$

para todos  $t > 0$  e todos os operadores normalizados  $\hat{\rho}$ .

(VI) - (Suposição de idealidade.) A operação

$$\hat{S}_t = \hat{N}_t(0) \quad (1.10)$$

transforma estados puros em estados puros.

Sob as condições (I)-(VI), os seguintes resultados podem ser estabelecidos:

(a) A propriedade de semi-grupo:

$$\hat{T}_{t_1}\hat{T}_{t_2} = \hat{T}_{t_1+t_2}, \quad \hat{S}_{t_1}\hat{S}_{t_2} = \hat{S}_{t_1+t_2}.$$

(b) - Existe um operador positivo limitado  $\hat{J}$  tal que

$$\hat{J}\hat{\rho} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{N}_t(1)\hat{\rho}}{t}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Tr}[\hat{N}_t(m)\hat{\rho}]}{t} = 0 \quad \text{para } m \geq 2 \quad (1.11)$$

e a relação abaixo é válida

$$\hat{T}_t = \hat{S}_t + \int_0^t \hat{T}_{t-\tau} \hat{J} \hat{S}_\tau d\tau. \quad (1.12)$$

A operação  $\hat{J}$  é chamada de operação de *salto quântico*, pois ela é responsável pela absorção “instantânea” de um único fóton do campo.

(c) - Se o operador positivo limitado  $\hat{R}$  é definido por<sup>6</sup>

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{R}] = \text{Tr}[\hat{J}\hat{\rho}], \quad (1.13)$$

e se o operador  $\hat{Y}$  é tal que

$$\hat{S}_t\hat{\rho} = e^{\hat{Y}t}\hat{\rho}e^{\hat{Y}^\dagger t}, \quad (1.14)$$

então  $\hat{R}$  e  $\hat{Y}$  são relacionados pela equação

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{R}] = -\text{Tr}[\hat{Y}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{Y}^\dagger] \quad (1.15)$$

para todo o  $\hat{\rho}$ , tal que o lado direito da equação (1.15) faça sentido.

---

<sup>6</sup>Notem que  $\hat{J}$  é um *super-operador*, enquanto que  $\hat{R}$  é um *operador*.

O fato de que os geradores  $\hat{J}$  e  $\hat{Y}$  caracterizam completamente o processo de fotocontagem pode ser visto da seguinte identidade

$$\hat{N}_t(m) = \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \hat{S}_{t-t_m} \hat{J} \hat{S}_{t_m-t_{m-1}} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1}, \quad (1.16)$$

que implica na seguinte fórmula de contagem

$$P_m(t) = \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \text{Tr}[\hat{S}_{t-t_m} \hat{J} \hat{S}_{t_m-t_{m-1}} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1} \hat{\rho}]. \quad (1.17)$$

A evolução do campo, em que a informação a respeito de detecções de  $m$  fótons é colhida, é chamada de *evolução condicionada* (significando “condicionada a  $m$  contagens”). Quando a informação sobre as detecções é descartada, é dito que a evolução do campo é *não-condicionada* – neste caso, o campo evolui com o operador  $\hat{T}_t$ , dado pela equação (1.6).

Também podem ser calculadas propriedades mais gerais do tipo

$$P_{[0,t]}([t_1, t_2], m) \quad \text{e} \quad P_{[0,t]}([t_1, t'_1], m_1; [t_2, t'_2], m_2),$$

que são, respectivamente, a probabilidade de que  $m$  contagens são registradas no intervalo  $[t_1, t_2]$  e a probabilidade conjunta de que  $m_1$  contagens são registradas em  $[t_1, t'_1]$  e  $m_2$  em  $[t_2, t'_2]$  (onde  $0 < t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < t$ ), dado que o detector realiza medições contínuas no intervalo  $[0, t]$  sobre o sistema cujo estado no tempo  $t = 0$  é  $\hat{\rho}$ . Essas probabilidades são dadas pelas equações

$$P_{[0,t]}([t_1, t_2], m) = \text{Tr}[\hat{T}_{t-t_2} \hat{N}_{t_2-t_1}(m) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{N}_{t_2-t_1}(m) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}], \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} P_{[0,t]}([t_1, t'_1], m_1; [t_2, t'_2], m_2) &= \text{Tr}[\hat{T}_{t-t'_2} \hat{N}_{t'_2-t_2}(m_2) \hat{T}_{t_2-t'_1} \hat{N}_{t'_1-t_1}(m_1) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}] \\ &= \text{Tr}[\hat{N}_{t'_2-t_2}(m_2) \hat{T}_{t_2-t'_1} \hat{N}_{t'_1-t_1}(m_1) \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}], \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde foi usada a propriedade **(II)** da operação  $\hat{T}_t$  (equação (1.6)).

Para a caracterização do processo de contagem,  $\hat{J}$  e  $\hat{S}_t$  dependem um do outro apenas pela relação (1.15). Se for estipulado que na ausência de qualquer medição o sistema evolui de acordo com o Hamiltoniano  $\hat{H}$ , então a escolha

$$\hat{Y} = -i\hat{H}/\hbar - \hat{R}/2 \quad (1.20)$$

automaticamente satisfaz a equação (1.15).

Na situação em que o detector não está realizando nenhuma medição, devemos ter  $\hat{J} = 0$ , o que implica  $\hat{R} = 0$ . Então, obtemos que  $\hat{Y} = -i\hat{H}$ , de forma que  $\hat{S}_t \hat{\rho}$ , dado pela equação (1.14), reduz-se a  $e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho} e^{i\hat{H}t/\hbar}$ , como deveria. Se a escolha (1.20) for adotada para o gerador  $\hat{Y}$ , o super-operador  $\hat{S}_t$  é *completamente determinado pelo super-operador  $\hat{J}$  e pelo Hamiltoniano do sistema  $\hat{H}$* . O processo quântico de medição em que  $\hat{Y}$  é dado pela equação (1.20) é conhecido como *processo quântico canônico de contagem*. Ele é *totalmente caracterizado pela transformação linear positiva limitada  $\hat{J}$* .

## 1.4 Trajetórias quânticas

Existe outro formalismo para tratar o processo quântico de fotocontagem. Ele consiste no uso da equação-mestra que descreve a evolução do campo na cavidade na presença do detector<sup>7</sup>. Vamos descrever esta técnica, pois ela vai ser útil posteriormente.

Vamos considerar que o campo acoplado ao detector obedeça à seguinte equação de operadores para qualquer tempo  $t \geq 0$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \rho] - \frac{\gamma}{2} (\hat{O}^\dagger \hat{O} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{O}^\dagger \hat{O} - 2\hat{O} \hat{\rho} \hat{O}^\dagger), \quad (1.21)$$

onde  $\hat{O}$  é algum operador de “abaixamento” que depende do sistema estudado e  $\hat{H}$  é o Hamiltoniano desse sistema. Podemos reescrever (1.21) como uma equação diferencial parcial inhomogênea

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} - \hat{L}_0 \hat{\rho} = \hat{J} \hat{\rho} \quad (1.22)$$

com  $\hat{J} \hat{\rho} \equiv \gamma \hat{O} \hat{\rho} \hat{O}^\dagger$  no papel do termo de “fonte” e

$$\hat{L}_0 \hat{\rho} \equiv \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\gamma}{2} \{ \hat{O}^\dagger \hat{O}, \hat{\rho} \}. \quad (1.23)$$

Como a forma integral da equação (1.22) é

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\hat{L}_0 t} \hat{\rho}_0 + \int_0^t dt' e^{-(t-t')\hat{L}_0} \hat{J} e^{-\hat{L}_0 t'} \hat{\rho}(t'), \quad (1.24)$$

sua solução é obtida através de sucessivas iterações, resultando em (ver, por exemplo, [34])

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 e^{\hat{L}_0(t-t_m)} \hat{J} e^{\hat{L}_0(t_m-t_{m-1})} \cdots \hat{J} e^{\hat{L}_0 t_1} \hat{\rho}_0. \quad (1.25)$$

Agora, a quantidade dentro das integrais é o *operador-densidade condicionado* não normalizado  $\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)$ , para um estado inicial  $\hat{\rho}_0$ . Podemos interpretar (1.25) como uma soma generalizada sobre todas as possibilidades possíveis de absorções de fótons que o detector podia ter seguido durante sua evolução, do tempo  $t = 0$  até o tempo  $t$ . Cada “trajetória” dessas pode envolver qualquer número de absorções de fótons, de  $m = 0$  até  $m = \infty$ , e os tempos entre as absorções podem ser qualquer seqüência ordenada de  $m$  intervalos de tempo no intervalo maior  $[0, t)$ . O que se costuma fazer ao definir o operador-densidade condicionado é tomar a quantidade dentro das integrais, normalizá-la, e dar-lhe uma interpretação física em termos de evoluções sem detecção de fótons interrompidas por colapsos instantâneos nos momentos de absorção de fótons. No tempo  $t$ , para um estado inicial  $\hat{\rho}_0$  e uma seqüência particular de tempos de absorções de fótons, o operador-densidade condicionado *normalizado* é dado por

$$\bar{\rho}_c^{(m)}(t) = \frac{\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)}{\text{Tr}[\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)]},$$

onde  $\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)$  é o operador não normalizado

$$\tilde{\rho}_c^{(m)}(t) = e^{\hat{L}_0(t-t_m)} \hat{J} e^{\hat{L}_0(t_m-t_{m-1})} \cdots \hat{J} e^{\hat{L}_0 t_1} \hat{\rho}_0. \quad (1.26)$$

<sup>7</sup>Como veremos no capítulo 4, esse tratamento permite modelar o processo de fotodeteção mais geral, como na presença de perdas devido à dissipação.

Cada ocorrência de  $\hat{J}$  corresponde à detecção “instantânea” de um fóton, por isso  $\hat{J}$  é conhecido como super-operador de *salto quântico*. Os termos exponenciais descrevem a evolução não-unitária do sistema entre as absorções. Logo, o termo  $\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)$  pode ser interpretado como o operador-densidade (não normalizado) evoluído condicionado à perda (detecção) de  $m$  fótons nos tempos  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . A norma de  $\tilde{\rho}_c(t)$  dá a probabilidade de ocorrência dessa seqüência particular de detecções. A evolução *não-condicionada*, descrita pela equação (1.25), é obtida fazendo uma média sobre todas as possíveis *histórias*, i.e., somando sobre o número  $m$  de fótons detectados, e integrando sobre seus tempos de absorção correspondentes  $t_1, \dots, t_m$ . Isso recupera o operador  $T_t$  definido em (1.6).

Esse procedimento produz uma decomposição da dinâmica quântica contida na equação-mestra em uma infinidade de caminhos quânticos, *trajetórias quânticas*, cuja definição é baseada em separar os tempos em que fótons são detectados em forma de fotoelétrons pelo detector da evolução quântica sobre intervalos de tempo durante os quais fótons, embora monitorados, não foram detectados.

## 1.5 Densidades de probabilidade e tempos de espera

Vamos agora descrever alguns dos observáveis que podem ser medidos em um experimento de fotocontagem, além da fórmula de contagem  $P_m(t)$  que já descrevemos na seção 1.2. A quantidade que pode ser medida diretamente nos experimentos de fotocontagem é o *grau de coerência temporal de segunda ordem*  $g^{(2)}(\tau)$  [19]. Ele é definido como a probabilidade conjunta de registrar fotoelétrons nos intervalos de tempo  $[t, t + \Delta t)$  e  $[t + \tau, t + \tau + \Delta t)$  (onde  $\Delta t \rightarrow 0$ ), normalizada pela probabilidade de duas contagens fotoelétricas independentes. Por exemplo, no caso de fenômeno de *anti-bunching*, a probabilidade conjunta de registrar mais de uma contagem em um pequeno intervalo de tempo cai abaixo da probabilidade de contagens estatisticamente independentes (separadas por um tempo maior que o tempo de coerência); logo,  $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ . No caso de *bunching* ocorre o contrário, ou seja,  $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$ . O que ocorre fisicamente, é que para campo com propriedade de bunching, os fótons tendem a chegar em grupos, e no caso de anti-bunching os fótons tendem a chegar mais espaçados no tempo.

O processo de fotodetecção também pode ser caracterizado através de *tempos de espera* [35], cujo significado é o seguinte. Se escolhermos um instante de tempo arbitrário e perguntarmos: quanto tempo devemos esperar até detectar um fotoelétron, estamos nos referindo ao *tempo de espera não-condicional*. O *tempo de espera condicional*, ou *intervalo de tempo*, é a duração de tempo entre duas contagens consecutivas. A diferença entre o tempo de espera não-condicional e o condicional é a seguinte: no primeiro caso, o instante inicial é escolhido arbitrariamente, enquanto que no segundo caso ele deve coincidir com o evento de uma contagem. A estatística de intervalos de tempo é especialmente importante por causa da simplicidade com que as distribuições de tempos de espera podem ser medidas sobre um intervalo muito grande de escalas de tempo, usando o conversor *time-to-amplitude* [36].

Os tempos de espera podem ser descritos através de distribuições de intervalos de tempo, deduzidos rigorosamente por Barakat e Blake [37]. A distribuição não-normalizada para o tempo de espera *não-condicional* (que chamamos de UPC, “*Unconditional Proba-*

bility Count density”) é dada por

$$W_u(t_0 + \tau|t_0) = \frac{\text{Tr}[\hat{J}\hat{S}_\tau\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]}{\text{Tr}[\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]} = \text{Tr}[\hat{J}\hat{S}_\tau\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]. \quad (1.27)$$

Esta expressão fornece a densidade de probabilidade para a detecção do primeiro fóton no tempo  $t_0 + \tau$ , caso a detecção seja iniciada em  $t_0$  e o detector esteja em funcionamento no intervalo  $[0, t)$ ,  $0 \leq t_0 \leq t_0 + \tau < t$ . O tempo de espera *não-condicional* é definido como

$$\langle \tau_{unc} \rangle = \frac{\int_0^\infty \tau W_u(t_0 + \tau|t_0) d\tau}{\int_0^\infty W_u(t_0 + \tau|t_0) d\tau}. \quad (1.28)$$

A distribuição não-normalizada para o tempo de espera *condicional* (que chamamos de CPC, “Conditional Probability Count density”) é dada por

$$W_c(t_0 + \tau|t_0) = \frac{\text{Tr}[\hat{J}\hat{S}_\tau\hat{J}\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]}{\text{Tr}[\hat{J}\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]}, \quad (1.29)$$

e é interpretada como a densidade de probabilidade de que, caso um fóton seja detectado em  $t_0$ , o *próximo* será detectado em  $t_0 + \tau$ , dado que o detector realiza medições contínuas no intervalo  $[0, t)$ . O tempo de espera *condicional* é dado por

$$\langle \tau_{con} \rangle = \frac{\int_0^\infty \tau W_c(t_0 + \tau|t_0) d\tau}{\int_0^\infty W_c(t_0 + \tau|t_0) d\tau}. \quad (1.30)$$

O tratamento de Kelley-Kleiner [6] de contagens fotoelétricas é formulado em termos de densidade de probabilidade *não-exclusiva*, ou densidade de probabilidade de *coincidência* (que chamamos de CPD, “Coincidence Probability Density”),  $h_t(t_1, t_2, \dots, t_m)$

$$h_t(t_1, t_2, \dots, t_m) = \text{Tr}[\hat{T}_{t-t_m}\hat{J}\dots\hat{J}\hat{T}_{t_1}\hat{\rho}]. \quad (1.31)$$

$h_{[0,t]}^\rho(t_1, t_2, \dots, t_m)\Delta t_1\Delta t_2\dots\Delta t_m$  é a probabilidade de que um fóton é detectado em cada um dos intervalos de tempo não-interlaçados ( $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ )

$$[t_1, t_1 + \Delta t_1), [t_2, t_2 + \Delta t_2), \dots, [t_m, t_m + \Delta t_m),$$

onde  $\Delta t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são as resoluções temporais do detector em cada instante do tempo (que, a princípio, podem ser diferentes). Nenhuma restrição é imposta sobre o número de contagens registradas fora desses intervalos. A hierarquia de funções de correlação do campo introduzida por Glauber [38] é definida em termos dessas probabilidades não-exclusivas. Em particular, o grau de coerência de segunda ordem  $g^{(2)}(t_0, t_0 + \tau)$  é dado por

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{h_t(t_0, t_0 + \tau)}{[h_t(t_0)]^2}. \quad (1.32)$$

A densidade de probabilidade para contar um fóton no tempo  $t_0$  e outro fóton (não necessariamente o próximo) no tempo  $t_0 + \tau$  (que chamamos de TCCP, “Two Count Conditional Probability density”) é dada por

$$C(t_0 + \tau|t_0) = \frac{\text{Tr}[\hat{J}\hat{T}_\tau\hat{J}\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]}{\text{Tr}[\hat{J}\hat{T}_{t_0}\hat{\rho}]} = \frac{h_t(t_0, t_0 + \tau)}{h_t(t_0)}. \quad (1.33)$$

Quantidades de interesse experimental são expressas naturalmente em termos de probabilidades não exclusivas (CPD), e também em termos de momentos fatoriais de contagens

$$\langle m^{(k)}(t) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} m^k P_m(t). \quad (1.34)$$

A densidade de probabilidade exclusiva, ou densidade de probabilidade elementar (EPD, “*Elementar Probability Density*”), é definida como

$$p(t_1, \dots, t_m) = \text{Tr} [\hat{S}_{t-t_m} \hat{J} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1} \hat{\rho}], \quad (1.35)$$

onde  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$  e o estado no tempo  $t = 0$  é  $\hat{\rho}$ . A EPD é a probabilidade de que uma contagem é observada em cada um dos tempos  $t_1, \dots, t_m$  e nenhuma contagem no resto do intervalo  $[0, t)$ .

De fato, existe uma outra densidade de probabilidade que deve ser distinguida de CPD e EPD (uma discussão a respeito deste assunto é feita em [31, 39]). Ela é dada por

$$w(t_1, \dots, t_m) = \text{Tr} [\hat{U}_{t-t_m} \hat{J} \cdots \hat{J} \hat{U}_{t_1} \hat{\rho}], \quad (1.36)$$

onde

$$\hat{U}_t \hat{\rho} = \exp(-i\hat{H}t/\hbar) \hat{\rho} \exp(i\hat{H}t/\hbar), \quad (1.37)$$

é o super-operador de evolução livre (diferente de  $\hat{S}_t$ ). Esta densidade de probabilidade leva à fórmula quântica de Mandel, equação (1.2). No entanto, a distribuição (1.36) descreve corretamente o processo de fotodeteccção somente caso o detector seja desligado entre as contagens (pois só assim o campo na cavidade evoluiria livremente entre as contagens), por isso ela não pode ser utilizada nas teorias realistas de fotodeteccção contínua, em que o detector permanece ativo e monitora o campo entre as contagens.

## 1.6 Modelo de Srinivas e Davies

Num trabalho pioneiro, Srinivas e Davies [13] aplicaram o modelo de fotodeteccção contínua a um campo livre monomodal, contido no interior de uma cavidade com um detector localizado numa das paredes, tratando-se de um sistema fechado. Além disso, uma suposição fundamental é que, *exceto pelas contagens, nenhum outro processo não-coerente (dissipativo) ocorre*. Sob estas condições a evolução do campo, quando não sujeito a nenhuma medição, é governada pelo Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (1.38)$$

onde  $\omega$  é a frequência do modo da radiação e  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são os operadores não-limitados de “aniquilação” e de “criação”.

Como um modelo simples para a medição realizada pelo fotodetector, em que um estado de  $n$  fótons é convertido em um estado de  $n - 1$  fótons toda vez que um fóton é detectado, os autores propõem o seguinte super-operador de salto quântico

$$\hat{J} \hat{\rho} = \gamma \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger, \quad (1.39)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro que caracteriza o acoplamento entre o detector e o campo. Neste modelo de deteccção, o fóton é absorvido no processo de deteccção, caracterizando uma medição do segundo tipo.

Uma vez escolhido  $\hat{J}$  de acordo com a equação (1.39), o operador  $\hat{R}$ , definido pela equação (1.15), torna-se

$$\hat{R} = \gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (1.40)$$

Então, o operador de não-contagem é dado por

$$\hat{S}_t \hat{\rho} = \exp \left[ - \left( i\omega + \frac{\gamma}{2} \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} t \right] \hat{\rho} \exp \left[ \left( i\omega - \frac{\gamma}{2} \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} t \right]. \quad (1.41)$$

A partir dos operadores  $\hat{J}$  e  $\hat{S}_t$  várias quantidades observáveis podem ser encontradas. Por exemplo, a densidade de probabilidade elementar (EPD) é

$$p(t_1, t_2, \dots, t_m) = \sum_{n=m}^{\infty} \gamma^m m! \binom{n}{m} e^{-\gamma(t_1+t_2+\dots+t_m)-\gamma(n-m)t} p_n, \quad p_n = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle. \quad (1.42)$$

e a fórmula de contagem é

$$P_m(t) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} (1 - e^{-\gamma t})^m (e^{-\gamma t})^{n-m} p_n, \quad (1.43)$$

que coincide com a fórmula (1.4) obtida por Mollow e outros. De fato, pode-se mostrar que ambas as EPD (1.42) e a probabilidade de contagem (1.43) são bem definidas e não negativas para todos os estados  $\hat{\rho}$  e tempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$ , e, além disso

$$0 \leq P_m(t) \leq 1.$$

O modelo de SD fornece um caminho sistemático para calcular probabilidades mais complicadas, conforme descrito por SD em [13], mas vamos adiar o seu estudo para o capítulo 3.

Vamos apenas apontar que os operadores  $\hat{J}$  e  $\hat{S}_t$  no modelo de SD para o campo livre podem ser deduzidos da seguinte equação-mestra

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\gamma}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger), \quad (1.44)$$

onde  $\hat{H}$  é o Hamiltoniano do campo monomodal livre,  $\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Esta é a “equação-mestra padrão” para o modelo de relaxação de amplitude, deduzida da interação de um único modo eletromagnético (ou oscilador harmônico unidimensional) de frequência  $\omega$  com o meio constituído de muitos osciladores harmônicos à temperatura  $T = 0$  (ver, por exemplo, [17, 40]).

### 1.6.1 Violação da suposição V

No trabalho original, Srinivas e Davies tinham apontado uma irregularidade na definição do super-operador de salto quântico: o super-operador  $\hat{J}$  definido na equação (1.39) não satisfaz a suposição (V) – a hipótese de limitação, pois a equação (1.9) *não é independente de estado de campo*. De fato, da equação (1.41) temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Tr} [\hat{N}_t(k) \rho_0] = 1 - P_0(t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma n t} p_n. \quad (1.45)$$

A derivada (com relação ao tempo) da expressão acima para  $t = 0$  é  $\gamma\bar{n}$ , portanto, não existe uma constante  $K < \infty$  que satisfaça a suposição (V) para todos os estados, pois o fator exponencial na Eq. (1.45) não é definido nos limites  $n \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow 0$ , violando assim uma hipótese fundamental feita por Davies [41].

Realmente, para a equação (1.39)  $\hat{J}$  é um super-operador linear não-limitado, e em geral,  $\text{Tr}[\hat{J}^k \rho] = \gamma^k \text{Tr}[\hat{\rho} : \hat{n}^k :]$  também é não-limitado, portanto, não definido para todos os estados. A desconcordância da equação (1.39) com suposição (V) previne uma definição consistente de algumas funções de probabilidade, como veremos no capítulo 3.

## 1.7 Conclusões

Neste capítulo fizemos uma breve revisão do processo de fotodeteção e descrevemos alguns dos observáveis que podem ser medidos nos experimentos de fotocontagem, introduzindo o formalismo matemático que descreve medições de tais observáveis. Nos próximos capítulos faremos uso dessas definições para calcular diversas grandezas de interesse. Além disso, descrevemos o modelo de *Srinivas e Davies* (SD) para fotodeteção contínua em cavidades ideais fechadas, modelo que pretendemos modificar no capítulo 3. O ingrediente principal da teoria de SD é a definição *ad hoc* do super-operador de salto quântico, responsável pelo sucesso da teoria. Nós mostramos explicitamente como o super-operador de salto quântico proposto por SD viola uma das suposições da teoria (a suposição de grau de interação limitado) e nos próximos capítulos iremos explicar o motivo dessa “falha” e suas conseqüências.

## Capítulo 2

# Dedução de super-operadores de salto quântico

Neste capítulo vamos fazer dois modelos microscópicos de fotodetector para explicar a origem da operação de salto quântico. Primeiro, vamos descrever o detector como análogo ao átomo de 2-níveis e depois – como sendo análogo ao oscilador harmônico. Em ambos os casos, vamos obter o super-operador de *transição* dependente do tempo (representando a absorção de um único fóton pelo fotodetector) e, a partir dele, vamos propor várias definições para a operação de *salto quântico* independente do tempo. Este capítulo contém alguns resultados novos obtidos durante a realização do mestrado.

### 2.1 Introdução

Nas teorias de fotodeteção contínua o super-operador de salto quântico é a parte essencial do formalismo [34, 42–52]. Como vimos no capítulo anterior, o super-operador de salto quântico  $\hat{J}_\bullet = \gamma \hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger$  proposto *ad hoc* por Srinivas e Davies em [13] está baseado na sua simplicidade e aparente consistência. Posteriormente, foram realizadas tentativas para justificar o uso desse super-operador, deduzindo-o de algum modelo microscópico, que descreve a interação entre o campo eletromagnético e o fotodetector. Primeiramente, vamos descrever um modelo que alcançou um certo sucesso na explicação da operação de salto quântico – o modelo do átomo de dois níveis de Imoto *et al.* [43], descrito na seção 2.2. Em seguida, vamos expor, na seção 2.3, a nossa motivação em modificar a definição do super-operador de salto quântico. Feito isso, iremos generalizar o modelo de Imoto *et al.* na seção 2.4, obtendo o super-operador de *transição* dependente do tempo; mostraremos que o modelo de SD é um caso particular deste super-operador mais geral, e iremos propor algumas definições alternativas para super-operadores de salto quântico. Depois disso, na seção 2.5 repetiremos o mesmo procedimento para o segundo modelo do fotodetector, seguindo a abordagem de Mollow [9], em que consideraremos o detector como sendo análogo a um oscilador harmônico. Tendo tratado a operação de salto quântico nos casos em que o detector interage apenas com um campo eletromagnético livre, na seção 2.6 faremos uma breve análise de como a presença de outros sistemas, interagentes com o campo livre, pode modificar a operação de salto quântico. Finalmente, na seção 2.7

faremos a análise final dos resultados. Os resultados das seções 2.4 – 2.6 são novos, resultantes da pesquisa deste mestrado.

## 2.2 Modelo de Imoto *et al.*

Um dos modelos que teve bastante sucesso em explicar a origem do super-operador de salto quântico de SD foi o modelo microscópico proposto por *Imoto, Ueda e Ogawa* [43]. Esses autores consideraram um campo eletromagnético interagindo com o átomo de 2-níveis, que mimetiza o detector. O esquema deles é o seguinte: O fotodetector é acoplado ao campo óptico – contido dentro de uma cavidade fechada – *tão fracamente, que o detector absorve não mais de que um fóton em um intervalo de tempo infinitesimal*. Pressupõe-se que a resposta do detector é uma seqüência temporal de pulsos de corrente elétrica, cada um dos quais representa a detecção de um fóton. Durante o experimento de fotocontagem átomos de 2-níveis, preparados inicialmente no estado fundamental, passam pela cavidade, um a um. Cada átomo atravessa a cavidade durante um mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ , de modo a interagir com o campo na cavidade (através da interação de dipolo elétrico) durante esse tempo. A interação causa uma evolução *unitária* do sistema átomo-campo. Após a passagem do átomo pela cavidade, o nível energético de cada átomo é medido, causando uma mudança no estado do campo *devido à medição*. A medição do átomo no nível mais alto corresponde ao processo de uma contagem, ou de *salto quântico*, em que um fóton foi tirado do campo; a medição do átomo no estado fundamental corresponde ao processo de não-contagem, em que o número de fótons na cavidade permanece o mesmo. Os efeitos dissipativos não são levados em conta nesse modelo.

A interação de dipolo elétrico pode ser descrita [26] pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_0 + \hbar g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hbar g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \quad (2.1)$$

onde os operadores de Pauli de pseudo-spin  $\hat{\sigma}_0$  e  $\hat{\sigma}_\pm$  correspondem ao átomo ( $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ ,  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$  e  $\sigma_0 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ) e considera-se que foram selecionados dois níveis do átomo (o nível “fundamental”  $|g\rangle$  com a freqüência  $\omega_g$  e o “excitado”  $|e\rangle$  com a freqüência  $\omega_e = \omega_g + \omega_0$ ) que estão em ressonância com o campo, ou seja,  $\omega = \omega_0$ . Vamos notar que, como nos experimentos de fotocontagem a ordem de grandeza da freqüência do campo eletromagnético é muito maior que a da constante de acoplamento, vamos considerar

$$\omega \gg |g|. \quad (2.2)$$

Neste caso, o Hamiltoniano na representação de interação é

$$\hat{H}_I = \hbar g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hbar g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-. \quad (2.3)$$

Para cada intervalo de tempo infinitesimal  $[t_0, t_0 + \Delta t)$  o estado inicial do sistema  $\hat{\rho}(t_0)$  é expresso como

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_f(t_0) \otimes |g\rangle\langle g|, \quad (2.4)$$

onde  $\hat{\rho}_f(t_0)$  representa o estado inicial do campo e  $|g\rangle\langle g|$  representa o estado fundamental do átomo. A evolução do operador-densidade do sistema total pode ser escrita, na representação de interação, como [40]

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{i\hbar} \right]^m \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{m-1}} dt_m \left[ \hat{H}_I(t_1), \left[ \hat{H}_I(t_2), \dots, \left[ \hat{H}_I(t_m), \hat{\rho}(t_0) \right] \dots \right] \right]. \quad (2.5)$$

A suposição fundamental de Imoto *et al.* é que o tempo  $\Delta t$  de passagem do átomo pela cavidade é  *muito curto*,  $g\Delta t \ll 1$ , portanto é admissível expandir (2.5) perturbativamente até a segunda ordem, desprezando os termos de ordem mais alta. Com isso, mantendo termos até segunda ordem em  $\Delta t$ , o operador-densidade no tempo  $t_0 + \Delta t$  é

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t_0 + \Delta t) &= \hat{\rho}(t_0) + ig\Delta t \left[ \hat{\rho}_f(t_0)\hat{a}^\dagger \otimes |g\rangle\langle e| - \hat{a}\hat{\rho}_f(t_0)|e\rangle\langle g| \right] \\ &+ \frac{(ig\Delta t)^2}{2} \left\{ [\hat{\rho}_f(t_0)\hat{n} + \hat{n}\hat{\rho}_f(t_0)] |g\rangle\langle g| - 2\hat{a}\hat{\rho}_f(t_0)\hat{a}^\dagger \otimes |e\rangle\langle e| \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ao medir o estado do átomo nos estados  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ , o estado do campo  $\hat{\rho}_f$  colapsa para

$$\hat{\rho}_f(t) = \frac{\text{Tr}_a [\hat{\rho}(t)\hat{\rho}_a]}{\text{Tr}_{a-s} [\hat{\rho}(t)\hat{\rho}_a]}, \quad (2.7)$$

onde para a operação de uma contagem o operador de projeção é  $\hat{\rho}_a = |e\rangle\langle e|$ , e o super-operador de *salto quântico* resultante, cujo traço está relacionado à taxa de transições por unidade de tempo  $\Delta t$ , é obtido substituindo-se este  $\hat{\rho}_a$  na equação (2.7), resultando em

$$\hat{J}[\hat{\rho}_f(t_0)]\Delta t \equiv [g^2\Delta t\hat{a}\hat{\rho}_f(t_0)\hat{a}^\dagger]\Delta t. \quad (2.8)$$

No caso da operação de não-contagem o átomo é detectado no estado fundamental, portanto  $\hat{\rho}_a = |g\rangle\langle g|$  e o super-operador de não-contagem resultante é

$$\hat{S}_{\Delta t}[\hat{\rho}_f(t_0)] = \exp(-i\omega\hat{n}\Delta t) \left[ \hat{\rho}_f(t_0) - \frac{(g\Delta t)^2}{2} [\hat{\rho}_f(t_0)\hat{n} + \hat{n}\hat{\rho}_f(t_0)] \right] \exp(i\omega\hat{n}\Delta t), \quad (2.9)$$

onde voltamos para a representação de Schrödinger. Como  $g\Delta t \ll 1$ , podemos escrever

$$\hat{\rho}_f(t_0) - \frac{(g\Delta t)^2}{2} [\hat{\rho}_f(t_0)\hat{n} + \hat{n}\hat{\rho}_f(t_0)] \approx \exp\left[-\frac{g^2\Delta t}{2}\hat{n}\Delta t\right] \hat{\rho}_f(t_0) \exp\left[-\frac{g^2\Delta t}{2}\hat{n}\Delta t\right]. \quad (2.10)$$

Usando isso, a equação (2.9) pode ser reescrita como

$$\hat{S}_{\Delta t}\hat{\rho}_f(t_0) = \exp\left[-\left(i\omega + \frac{g^2\Delta t}{2}\right)\hat{n}\Delta t\right] \hat{\rho}_f(t_0) \exp\left[\left(i\omega - \frac{g^2\Delta t}{2}\right)\hat{n}\Delta t\right]. \quad (2.11)$$

Se definirmos  $\tau = N\Delta t$  ( $N$  é um número inteiro), as  $N$  aplicações sucessivas da equação (2.11) levam a

$$\hat{S}_\tau[\hat{\rho}_f(t_0)] = \exp\left[-\left(i\omega + \frac{g^2\Delta t}{2}\right)\hat{n}\tau\right] \hat{\rho}_f(t_0) \exp\left[\left(i\omega - \frac{g^2\Delta t}{2}\right)\hat{n}\tau\right]. \quad (2.12)$$

Neste modelo as equações (2.8) e (2.12) descrevem os processos de uma contagem e de não-contagem, respectivamente. Ambos os processos descrevem a evolução não-unitária do campo devido à medição contínua. O fator  $g^2\Delta t$  nas equações (2.8) e (2.11) representa a taxa de contagem de fótons e, se definirmos a constante de acoplamento átomo-campo como

$$\gamma \equiv g^2\Delta t, \quad (2.13)$$

recuperamos o resultado de Srinivas e Davies, obtendo os operadores de uma contagem  $\hat{J}$  (1.39) e o operador de não-contagem  $\hat{S}_t$  (1.41).

## 2.3 Motivação do modelo não-linear

Como já foi apontado no capítulo 1, a teoria de SD mostra algumas inconsistências ao calcular as probabilidades de coincidência para certos estados de campo<sup>1</sup>. Estas inconsistências estão relacionadas com a suposição fundamental de que imediatamente após a contagem de um fóton, o operador estatístico do campo  $\hat{\rho}(t)$  “salta” para o estado

$$\hat{\rho}(t^+) = \frac{\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger}{\text{Tr}[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t)]} = \frac{\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger}{\bar{n}(t)}, \quad (2.14)$$

onde  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são os operadores de “aniquilação” e “criação”,  $\bar{n}(t)$  é o número médio de fótons na cavidade antes da contagem e  $t^+$  significa  $t$  mais um tempo infinitesimal depois que o fóton é tirado do campo (registrado pelo medidor). Embora o super-operador de salto  $\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger$  parece bastante natural, ele é *não limitado*, violando explicitamente o postulado V da teoria de SD.

De fato, como vimos na seção 2.2, o super-operador de salto quântico proposto por Srinivas e Davies é uma aproximação, pois considera-se que a expansão perturbativa até a segunda ordem é válida. Portanto, a princípio, ela é válida no caso de *poucos fótons* presentes na cavidade e tempos de interação muito curtos, implicando na necessidade de um detector muito rápido. Porém, para os casos que não se enquadram nestas condições, o super-operador de salto quântico de SD pode não ser mais válido. Assim, o modelo de Imoto *et al.* não consegue tratar o processo de detecção, no qual o campo seja acoplado a um “fotodetector comercial” preso na parede da cavidade, ou no caso em que os átomos atravessam a cavidade em um tempo finito.

Baseado nisso, nós sugerimos em [53] a possibilidade de substituir os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  por algum operador “não-linear”<sup>2</sup>  $\hat{A}$  (de fato, para isto bastaria pegar os termos restantes da expansão feita por Imoto *et al.*)

$$\hat{A} = F(\hat{n})\hat{a}, \quad \hat{A}^\dagger = \hat{a}^\dagger F(\hat{n}) \quad (2.15)$$

(onde  $F(\hat{n})$  é uma função real que depende do operador de número de fótons  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ ), preservando todos os outros ingredientes da teoria de SD. Operadores não-lineares da forma (2.15) mostraram-se muito úteis em diferentes áreas de física quântica: de para-estatística e q-deformações [54,55] a física de altas energias [56] e física de íons aprisionados [57–63] (onde tais operadores são usados para construir *estados coerentes não-lineares*). Nós acreditamos que eles também podem ser úteis na teoria de fotodetecção.

Recentemente [24], foi mostrado que é possível livrar-se das inconsistências na teoria de SD e ainda manter a estrutura intacta, através da substituição dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  na equação (1.39) por um caso especial da equação (2.15) - os chamados “operadores exponenciais de fase” (suas propriedades serão descritas no capítulo 3)

$$\hat{E}_- = (\hat{n} + 1)^{-1/2}\hat{a}, \quad \hat{E}_+ = \hat{a}^\dagger(\hat{n} + 1)^{-1/2}. \quad (2.16)$$

Tal substituição foi motivada pelo estudo do papel do operador de “aniquilação”  $\hat{a}$  na óptica quântica [64]. Foi chamada a atenção ao fato (também observado em [35,65]) de

<sup>1</sup>Abordaremos este problema no capítulo 3.

<sup>2</sup>Para evitar confusão, notamos que a palavra ‘não-linear’ é entendida neste capítulo no sentido de ‘não-linear com respeito a operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ ’. Com respeito a suas ações sobre estados no espaço de Hilbert é claro todos os operadores são lineares.

que o estado  $\hat{a}|\psi\rangle$  nem sempre é um estado cujo número médio de fótons é necessariamente menor que em  $|\psi\rangle$ ; isto ocorre, em parte, devido à presença do peso  $\sqrt{n}$  em  $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ .

A seguir, vamos mostrar que os super-operadores de salto quântico não-lineares surgem naturalmente a partir de modelos microscópicos de fotodeteção (generalizando os modelos propostos em [9, 43] por Imoto *et al.* e Mollow, respectivamente) se tomarmos um passo adiante, abandonando a aproximação de tempos curtos e de abordagem perturbativa. É marcante que a solução *exata* existe, e a partir dela podemos definir os operadores de salto quântico de várias maneiras. Primeiro vamos considerar o modelo em que o detector é simulado por um átomo de 2-níveis (motivado no trabalho de Imoto *et al.* [43]); posteriormente, seguindo a linha proposta por Mollow [9], vamos supor que o detector comporta-se como um oscilador harmônico.

## 2.4 Modelo do átomo de 2-níveis

### 2.4.1 Modelo “microscópico”

Vamos considerar novamente o modelo do detector composto do átomo de 2-níveis, porém com uma interação átomo-campo um pouco mais geral, que pode depender da intensidade através de uma função real  $f(\hat{n})$  (consideramos  $\hbar = 1$ )

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_0 + \omega\hat{n} + gf(\hat{n})\hat{a}\hat{\sigma}_+ + g^*\hat{a}^\dagger f(\hat{n})\hat{\sigma}_- \quad (2.17)$$

Esta é uma das muitas generalizações não-lineares do modelo de Jaynes-Cummings [66]. Dois tipos de aparatos de medida podem ser imaginados.

**(a)** Analogamente à proposta de Imoto *et al.*, uma seqüência de “átomos de 2-níveis”, preparados no nível de energia mais baixo (entre dois níveis selecionados) atravessam a cavidade um a um durante um intervalo de tempo  $t$  com possibilidade de absorver um fóton do campo (neste caso  $f(\hat{n}) = 1$  na equação (2.17)). Se um átomo absorver um fóton do campo, ele saltará para o nível de energia mais alto. Na saída da cavidade o átomo está sujeito a uma medição que diz qual é seu nível de energia: se ele é encontrado no nível mais alto, o experimentador sabe que a cavidade perdeu um fóton, caso contrário, a cavidade permanece no mesmo estado, desconhecido para o experimentador. De qualquer forma, a informação sobre o estado do campo está sendo atualizada continuamente.

**(b)** Outra maneira de testar o campo consiste em inserir um “fotodetector comercial” dentro da cavidade. Neste caso, a interação é possivelmente mais complicada, provavelmente não-linear e dependente do operador de número de fótons através de alguma função  $f(\hat{n})$ .

Em ambos os casos, depois de um cálculo direto (ver apêndice A e, por exemplo, [67, 68]), pode-se obter uma forma explícita do operador da evolução  $\hat{U}(t) = \exp(-it\hat{H})$ :

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \exp[-i\omega(\hat{\sigma}_0/2 + \hat{n})t] \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \cos \hat{A}(\hat{n})t - i\delta \frac{\sin \hat{A}(\hat{n})t}{\hat{A}(\hat{n})} \right) + \left( \cos \hat{B}(\hat{n})t + i\delta \frac{\sin \hat{B}(\hat{n})t}{\hat{B}(\hat{n})} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \cos \hat{A}(\hat{n})t - i\delta \frac{\sin \hat{A}(\hat{n})t}{\hat{A}(\hat{n})} \right) - \left( \cos \hat{B}(\hat{n})t + i\delta \frac{\sin \hat{B}(\hat{n})t}{\hat{B}(\hat{n})} \right) \right] \sigma_0 \right\} \end{aligned}$$

$$- igf(\hat{n})\frac{\sin \hat{A}(\hat{n})t}{\hat{A}(\hat{n})}\hat{a}\hat{\sigma}_+ - ig^*\hat{a}^\dagger f(\hat{n})\frac{\sin \hat{A}(\hat{n})t}{\hat{A}(\hat{n})}\hat{\sigma}_- \}, \quad (2.18)$$

onde

$$\hat{A}(\hat{n}) = \sqrt{\delta^2 + |g|^2 f(\hat{n})^2 (\hat{n} + 1)}, \quad \hat{B}(\hat{n}) = \hat{A}(\hat{n} - 1), \quad \delta = \frac{\omega_0 - \omega}{2}.$$

Se, inicialmente, o campo está no estado arbitrário  $\hat{\rho}_f$  e o átomo está no estado de energia mais baixo  $|g\rangle\langle g|$ , para um tempo posterior o estado do sistema átomo-campo é

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) (|g\rangle\langle g| \otimes \hat{\rho}_f) U^\dagger(t).$$

Como um modelo simplificado de detecção, vamos supor que o salto no estado do campo (associado ao click do detector ou à detecção do estado excitado do átomo) ocorre quando o detector<sup>3</sup> faz a transição do estado mais baixo  $|g\rangle$  para o estado excitado  $|e\rangle$ , e o estado associado do campo torna-se

$$\hat{\rho}_{f,0 \rightarrow 1}(t) = \langle e | \hat{\rho}(t) | e \rangle = \hat{\Gamma}(t) \hat{\rho}_f \hat{\Gamma}^\dagger(t), \quad (2.19)$$

onde o operador de *transição* é

$$\hat{\Gamma}(t) = \langle e | \hat{U}(t) | g \rangle. \quad (2.20)$$

Embora temos a solução exata e geral, vamos tratar, por simplicidade, o caso em que o campo esteja em ressonância com o átomo, ou seja,  $\omega_0 = \omega$ . Neste caso, um cálculo simples fornece

$$\hat{\Gamma}(t) = e^{-i\omega_0 \hat{n} t} \frac{\sin(|g|t f(\hat{n})\sqrt{\hat{n} + 1})}{\sqrt{\hat{n} + 1}} \hat{a}. \quad (2.21)$$

Obviamente, o termo  $\hat{\Gamma}(t) \bullet \hat{\Gamma}^\dagger(t)$  representa o super-operador que descreve a operação de salto quântico para esta interação específica, por isso vamos chamá-lo de super-operador de *transição*. A probabilidade de haver uma transição no tempo  $t$  é  $P_1(t) = \text{Tr}[\hat{\Gamma}(t) \hat{\rho} \hat{\Gamma}^\dagger(t)]$ . Vemos que  $\hat{\Gamma}(t)$  tem exatamente a estrutura da equação (2.15): ele depende do tempo de interação  $t$ , da intensidade da interação entre o átomo e o campo  $|g|^2$  e da intensidade do campo (através do operador número  $\hat{n}$ ). O super-operador de transição obtido é oscilante no tempo, o que significa que o detector pode absorver um fóton, e depois reemiti-lo para o campo, enquanto a interação entre os dois estiver ativa. Isso não é uma surpresa, pois o átomo interagindo com um campo é sujeito a oscilações de *Rabi*, e no caso considerado até agora não levamos em conta os efeitos de dissipação, relacionados à largura de linha do nível energético mais alto.

Se  $f(\hat{n}) = 1$ , o número de fótons for pequeno e a interação for muito eficiente, tal que o salto ocorre logo depois que o átomo entra na cavidade e ainda não há tempo para oscilações de Rabi (caso a), ou imediatamente após o detector ser ligado (caso b), o tempo  $\Delta t$  pode ser bastante pequeno, e a função sin pode ser substituída por seu argumento. Neste caso-limite, o operador (2.21) reduz-se à forma

$$\hat{J}_{SD} = \gamma e^{-i\omega \Delta t \hat{n}} \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger e^{i\omega \Delta t \hat{n}}, \quad (2.22)$$

que para elementos diagonais na base de Fock reduz-se à expressão obtida por Imoto *et al*, com a mesma constante  $\gamma = |g|^2 t$  (lembrando que  $t \rightarrow 0$ ), definida na equação (2.13).

<sup>3</sup>Átomo de 2-níveis ou “sensor” do detector comercial.

Notem que devido à condição  $\omega \gg |g|$  os termos  $\exp(\pm i\omega\hat{n}t)$  não podem ser substituídos por unidade. Portanto, mesmo no modelo mais simples o super-operador de salto quântico proposto por SD só é válido para elementos diagonais.

Entretanto, a aproximação de tempos curtos não pode ser válida para qualquer intensidade do campo e intervalo de tempo arbitrário, como é visto claramente em (2.21). Conseqüentemente, o super-operador de salto *deve ser não-linear*. Considerando este fato, a contradição associada ao operador não limitado, equação (1.39), é imediatamente removida: o super-operador de salto quântico correto é, de fato, limitado, porque é não-linear, e a linearidade aparece apenas na aproximação em primeira ordem (como isto acontece freqüentemente), válida para tempos de interação curtos e baixas intensidades do campo.

Vamos estudar outro caso-limite da equação (2.21) sugerido em [24] por motivos “heurísticos” – o modelo que chamamos de **E-model**. Ele pode ser obtido de dois modos diferentes. No caso (a), podemos considerar que o salto quântico ocorre no tempo  $t$  quando  $|\hat{\Gamma}(t) \bullet \hat{\Gamma}^\dagger(t)|$  é máximo, ou seja, quando cada  $\sin(\bullet) = 1$ , portanto, para os *elementos diagonais* do operador-densidade na base de Fock

$$\hat{\Gamma}(t) \rightarrow (\hat{n} + 1)^{-1/2} \hat{a} = \hat{E}_-$$

No caso (b), como cada fotodetector real consiste de um número muito grande de átomos, podemos supor que o super-operador de salto realista pode ser obtido fazendo-se uma média da fórmula (2.19) sobre alguma distribuição  $P(|g|)$ , que dá conta do efeito de muitos átomos com diferentes constantes de acoplamento com o campo (e freqüências ligeiramente diferentes, no caso geral):

$$\overline{\hat{\Gamma}(t) \hat{\rho}_f \hat{\Gamma}^\dagger(t)} = \int P(|g|) d|g| \frac{\sin(|g|t f(\hat{n})\sqrt{\hat{n}+1})}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} \hat{\rho}_f \hat{a}^\dagger \frac{\sin(|g|t f(\hat{n})\sqrt{\hat{n}+1})}{\sqrt{\hat{n}+1}}. \quad (2.23)$$

Na base de Fock, para  $\hat{\rho}_f = \sum_{m,n} c_{m,n} |m\rangle \langle n|$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma(t) \rho_f \Gamma^\dagger(t)} &= \int P(|g|) d|g| \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n} |m-1\rangle \langle n-1| \\ &\times \sin(|g|t f(m-1)\sqrt{m}) \sin(|g|t f(n-1)\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Se a distribuição  $P(|g|)$  for suficientemente larga (e o tempo  $t$  não for muito pequeno), todos os termos com  $m \neq n$  são anulados na operação da média, enquanto que as integrais contendo os termos com  $m = n$  são reduzidos a valores constantes. Assim, para os dois casos – (a) e (b) – nós chegamos ao mesmo modelo com o seguinte super-operador de salto quântico em vez de (2.14) (de agora em diante nós omitimos o sub-índice  $f$  para o operador-densidade do campo):

$$\tilde{\rho}(t^+) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,n} |n-1\rangle \langle n-1|}{\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,n}} = \frac{\text{diag}(\hat{E}_- \hat{\rho} \hat{E}_+)}{\text{Tr}[\hat{\Lambda} \hat{\rho}(t)]}, \quad (2.24)$$

com

$$\hat{E}_- = \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} \quad \text{e} \quad \hat{E}_+ = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}$$

e o operador  $\hat{\Lambda} \equiv \hat{E}_+ \hat{E}_-$  toma o lugar de operador de número de fótons  $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$  do modelo de SD. O símbolo *diag* significa que o super-operador de salto quântico atua sobre

os elementos diagonais na base de Fock do operador-densidade. Obtido o operador que tira um fóton do campo, podemos definir o super-operador de salto quântico como

$$\tilde{J}\rho = \tilde{\gamma}\text{diag}(\hat{E}_-\hat{\rho}\hat{E}_+) \quad (2.25)$$

onde  $\tilde{\gamma}$  é uma constante (a princípio diferente de  $\gamma$ ) que caracteriza o acoplamento entre o detector e o campo. Este super-operador de salto quântico (mas incluindo os elementos não-diagonais) foi proposto *ad hoc* independentemente por Ben-Aryeh e Brif [69] em 1995 e Oliveira *et al.* [24] em 2003. A seguir, por motivos práticos, chamaremos o modelo que usa este operador “não-linear” de *E-model*. É importante notar que neste caso o super-operador de salto quântico destrói a coerência entre os elementos não-diagonais, como é de se esperar no caso de haver um grande número de fótons e tempos de interação grandes.

### 2.4.2 Modelo “macroscópico”

No modelo simplificado descrito na seção anterior nós supusemos que o salto quântico ocorre quando o experimentalista verifica que o medidor está no estado excitado. No entanto, nós não nos importamos com o mecanismo através do qual o estado excitado é detectado. De fato, a detecção ocorre quando o átomo de 2-níveis (no caso do detector comercial – o seu “sensor”, que se comporta como um átomo de 2-níveis) decai *espontaneamente* do estado excitado para o fundamental, emitindo um fotoelétron para a parte *macroscópica* do detector (por exemplo, aparelho que mede o nível energético do átomo ou válvula fotomultiplicadora do detector comercial, ver [2]), que, através de eletrônica apropriada, é amplificado e detectado em forma de um pulso de corrente elétrica macroscópica. Porém, no modelo previamente considerado tanto o átomo de 2-níveis quanto o sensor do “detector comercial” absorvem e reemitem fótons para o campo sem emitir fotoelétrons, e o motivo disto foi que não levamos em consideração o acoplamento do sistema campo-sensor (ou campo-átomo) aos componentes macroscópicos do detector, que são responsáveis pelo decaimento espontâneo, ou largura de linha do nível excitado. Levando isto em conta, o estado do sistema deve ser descrito, agora, pela equação-mestra<sup>4</sup>

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\lambda}{2}(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - 2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+), \quad (2.26)$$

onde  $\hat{H}$  é dado em (2.17) e  $\lambda$  é a constante de acoplamento aos componentes macroscópicos do detector, responsáveis pelo decaimento espontâneo do átomo<sup>5</sup>.

Podemos considerar um Hamiltoniano efetivo não-Hermitiano (ver [70–73]), que contenha os efeitos da largura de linha do nível de energia mais alto (dos dois níveis do átomo) que é responsável pelo decaimento do átomo  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , após ter absorvido um fóton

$$\hat{H}_{ef} = \hat{H}_0 - i\frac{\lambda}{2}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- = \frac{1}{2}\left(\omega_0 - i\frac{\lambda}{2}\right)\hat{\sigma}_0 + \omega\hat{n} + g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + g^*\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- - i\frac{\gamma}{4}. \quad (2.27)$$

Na presença da parte macroscópica do detector, responsável pelo “monitoramento” do nível energético do detector (através do mecanismo de decaimento espontâneo), a evolução do sistema entre as absorções de fótons é agora descrita pelo super-operador de evolução

<sup>4</sup>Na verdade, nós consideramos a temperatura da parte macroscópica do detector  $T = 0K$ , já que a energia do campo é muito maior que a energia térmica neste caso.

<sup>5</sup>Neste capítulo subentende-se que o “átomo” é substituído pelo sensor no caso do “detector comercial”.

condicionada (condicionada à não detecção durante tempo  $t$ , conforme descrito na seção 1.4)

$$\hat{\mathcal{D}}_t \hat{\rho} = \hat{U}_{ef}(t) \hat{\rho} \hat{U}_{ef}^\dagger(t), \quad \hat{U}_{ef}(t) = \exp(-i\hat{H}_{ef}t). \quad (2.28)$$

Para um estado inicial  $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_F^{(0)} \otimes |g\rangle\langle g|$ , e supondo que um fóton foi detectado em  $t_0$  (ou, equivamente, que o processo de detecção começou em  $t_0$ ), a probabilidade de que o detector emita o fotoelétron seguinte em  $t + \Delta t$  é

$$\begin{aligned} P_1(t - t_0) &= \text{Tr} \left[ \hat{R} \hat{\mathcal{D}}_{t-t_0} \hat{\rho}_0 \right] \Delta t = \Delta t \text{Tr} \left[ \hat{\Xi}(t - t_0) \hat{\rho}_F^{(0)} \right], \\ \hat{\Xi} \bullet &= \lambda \hat{\Gamma}(t - t_0) \bullet \hat{\Gamma}^\dagger(t - t_0), \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde  $\hat{\Gamma}(t - t_0) = \langle e | \hat{U}(t - t_0) | g \rangle$  é o operador de transição e  $\Delta t$  é a resolução temporal do medidor. A densidade de probabilidade para a emissão do próximo fotoelétron [74] é (fazendo  $t_0 = 0$ )

$$p(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t)}{\Delta t} = \lambda \text{Tr}_F \left[ \hat{\Gamma}(t) \hat{\rho}_F^{(0)} \hat{\Gamma}^\dagger(t) \right]. \quad (2.30)$$

Portanto, o super-operador de *transição* (dependente de tempo) que tira um único fóton do campo da radiação (a partir de agora  $\hat{\rho}_F^{(0)} \equiv \hat{\rho}$ ) é dado por

$$\hat{\Xi}(t)\rho = \lambda \hat{\Gamma}(t) \hat{\rho} \hat{\Gamma}^\dagger(t) \quad (2.31)$$

e a probabilidade de detectar um fotoelétron no intervalo  $[t, t + \Delta t]$  é  $P(t) = \text{Tr} [\Xi \rho] \Delta t$ . Visto que

$$\hat{U}_{ef}(t) = e^{-\lambda t/4} \exp \left[ -i \left( \frac{1}{2} \left( \omega_0 - i \frac{\lambda}{2} \right) \hat{\sigma}_0 + \omega \hat{n} + g \hat{a} \hat{\sigma}_+ + g^* \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \right) \right] \quad (2.32)$$

obtém-se (ver apêndice A)

$$\hat{\Gamma}(t) = -i g e^{-\lambda t/4 - i \omega_0 t/2} \left[ e^{-i \omega \hat{n} t} \frac{\sin \left( \sqrt{\delta^2 + |g|^2 (\hat{n} + 1) t} \right)}{\sqrt{\delta^2 + |g|^2 (\hat{n} + 1)}} \hat{a} \right], \quad (2.33)$$

$$\hat{\Gamma}^\dagger(t) = i g^* e^{-\lambda t/4} e^{i \omega_0 t/2} \left[ \hat{a}^\dagger \frac{\sin \sqrt{(\delta^*)^2 + |g|^2 (\hat{n} + 1) t}}{\sqrt{(\delta^*)^2 + |g|^2 (\hat{n} + 1)}} e^{i \omega \hat{n} t} \right], \quad (2.34)$$

onde

$$\delta = \frac{\Delta}{2} - i \frac{\lambda}{4}, \quad \Delta = \omega_0 - \omega. \quad (2.35)$$

Substituindo as expressões (2.33) - (2.35) em (2.31) obtém-se

$$\hat{\Xi}(t) \hat{\rho} = \lambda e^{-\lambda t/2} e^{-i \omega \hat{n} t} \frac{\sin \left( \hat{B}_n |g| t \right)}{\hat{B}_n} \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \left( \frac{\sin \left( \hat{B}_n |g| t \right)}{\hat{B}_n} \right)^\dagger e^{i \omega \hat{n} t}, \quad (2.36)$$

com

$$\hat{B}_n = \sqrt{(\hat{n} + 1) + \frac{\delta^2}{|g|^2}}.$$

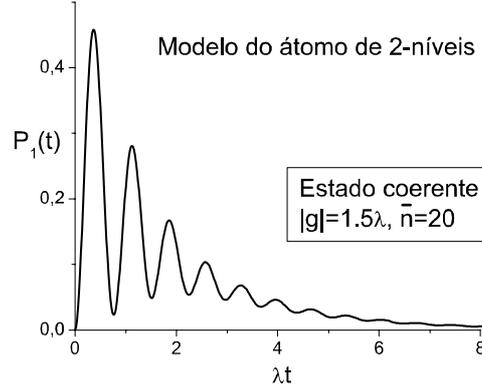


Figura 2.1: Modelo do átomo de 2-níveis: probabilidade (em unidades de  $\lambda$ ) de ocorrência de uma fotodeteccção ou, em outras palavras, traço de operador de transição  $P_1(t) \equiv \text{Tr}[\hat{\Xi}(t)\hat{\rho}]$ , em função de  $\lambda t$ , para o estado coerente, para uma dada escolha de parâmetros. Fizemos essa escolha apenas para uma visualização melhor da função  $P_1(t)$ .

A expressão (2.36) é exata e geral, mas nós vamos estar interessados apenas no caso mais simples – o caso ressonante em que  $\omega_0 = \omega$  e, portanto,  $\Delta = 0$ ,  $\delta^2 = -\lambda^2/16$  e

$$\hat{B}_n = \sqrt{(\hat{n} + 1) - \left(\frac{\lambda}{4|g|}\right)^2}.$$

O traço do operador de transição é dado por

$$|\hat{\Xi}(t)\hat{\rho}| = \lambda e^{-\lambda t/2} \text{Tr} \left[ \frac{\sin^2(|g|\hat{B}_n t)}{\hat{B}_n^2} \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \right]. \quad (2.37)$$

As figuras 2.1, 2.2 e 2.3 mostram o comportamento da probabilidade de transição (dada pela equação (2.37)) em função do tempo para três estados diferentes com mesmo número médio de fótons: estado coerente, de Fock e térmico.

Tendo obtido o operador que descreve o processo de uma contagem, o operador de não-contagem geral é obtido a partir dele: de acordo com *Cohen-Tannoudji e Dalibard* [74], dado o super-operador de transição  $\hat{\Xi}(t)$  (2.37) (no caso eles o chamam função de retardo - *delay function*), a probabilidade de não haver nenhuma fotoemissão no intervalo  $[0, t)$  é

$$P_0(t) = 1 - \int_0^t dt' Z(t') \quad \text{com} \quad Z(t) \equiv \text{Tr} [\hat{\Xi}(t)\rho] \quad (2.38)$$

Integrando  $Z(t')$  obtém-se

$$\begin{aligned} P_0(t) = & p_0 + e^{-\lambda t/2} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\hat{B}_n^2} \left[ (\hat{n} + 1) - \left(\frac{\lambda}{4|g|}\right)^2 \cos(2|g|\hat{B}_n t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\lambda}{4|g|} \hat{B}_n \sin(2|g|\hat{B}_n t) \right] \hat{E}_- \hat{\rho} \hat{E}_+ \right\}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

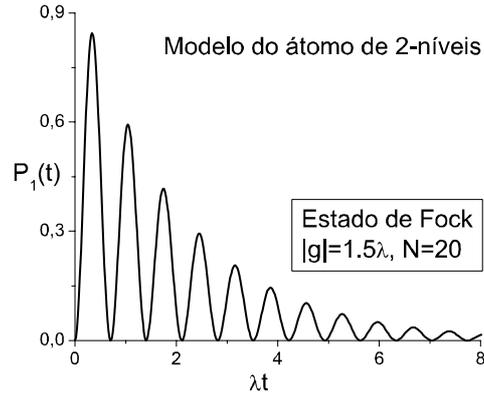


Figura 2.2: O mesmo que na figura 2.1, mas para o estado de número.

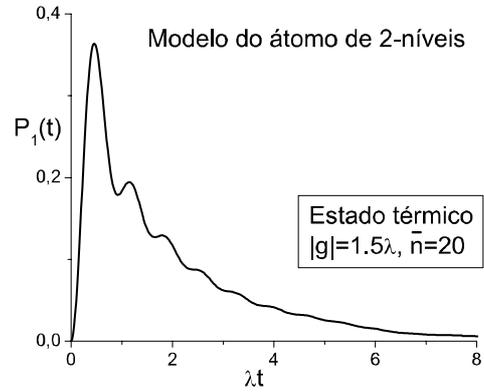


Figura 2.3: O mesmo que na figura 2.1, mas para o estado térmico.

que para  $t \rightarrow \infty$  tende para  $\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle$ . A partir da equação (2.39) pode-se deduzir o operador de não-contagem geral que satisfaça a condição  $P_0(t) = \text{Tr} [\hat{S}_t \hat{\rho}]$ , obtendo

$$\hat{S}_t \hat{\rho} = e^{-i\omega \hat{n} t} \exp \left[ - \left( \frac{\lambda t}{4} - \hat{Y} \right) \hat{\Lambda} \right] \hat{\rho} \exp \left[ - \left( \frac{\lambda t}{4} - \hat{Y} \right) \hat{\Lambda} \right] e^{i\omega \hat{n} t}, \quad (2.40)$$

onde

$$\hat{Y} = \ln \sqrt{\frac{1}{\hat{B}_{n-1}^2} \left[ \hat{n} - \left( \frac{\lambda}{4|g|} \right)^2 \cos (2\hat{B}_{n-1}|g|t) + \frac{\lambda}{4|g|} \hat{B}_{n-1} \sin (2\hat{B}_{n-1}|g|t) \right]}. \quad (2.41)$$

De fato, se calcularmos o traço de (2.40) recuperamos a expressão (2.39). Dessa forma, obtivemos os operadores de uma contagem e de não-contagem gerais para uma interação átomo de 2-níveis – campo.

**Casos particulares de saltos quânticos**

Acima nós deduzimos, de primeiros princípios, os super-operadores de transição e de não-contagem, porém devido à sua forma um tanto quanto complicada, eles seriam de pouca utilidade para fazer cálculos analíticos. A seguir, faremos algumas aproximações para obter o super-operador de salto quântico independente de tempo. Novamente, vamos considerar

$$\omega \gg |g|, \lambda. \quad (2.42)$$

Analisaremos três definições possíveis para o super-operador de salto quântico.

(a) Como se desconhece o instante do tempo em que o fóton é absorvido pelo detector, pode-se considerar que o medidor é muito eficiente e que as absorções sempre ocorrem em um tempo muito curto  $\Delta t$ , logo após iniciada a interação. Neste caso, *caso o número de fótons no campo seja pequeno*, podemos substituir o seno de argumento pelo próprio argumento, e o super-operador de salto quântico torna-se

$$\hat{J}_{SD}\hat{\rho} = \hat{\Xi}(\Delta t)\hat{\rho} \simeq \lambda(|g|\Delta t)^2 e^{-i\omega\Delta t\hat{n}}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger e^{i\omega\Delta t\hat{n}} = \gamma_{SD}e^{-i\omega\Delta t\hat{n}}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger e^{-i\omega\Delta t\hat{n}}, \quad (2.43)$$

onde

$$\gamma_{SD} \equiv \lambda(|g|\Delta t)^2 \quad (2.44)$$

é a constante de acoplamento macroscópico (átomo de 2-níveis – componentes macroscópicos do medidor). Este resultado corresponde ao modelo “macroscópico” de salto quântico de Imoto *et al.*, justificando (embora apenas para os elementos diagonais) a proposta de SD.

(b) Analogamente ao caso sem dissipação da seção 2.4.1, podemos definir que o salto quântico ocorre quando  $Z(t)$  é máximo; neste caso, obtemos

$$\hat{J}_{max}\hat{\rho} = \lambda \text{diag}(\hat{F}_-\hat{\rho}\hat{F}_+) \quad \text{com} \quad \hat{F}_- = \exp\left(-\frac{\arctan(4|g|\hat{B}_n/\lambda)}{4|g|\hat{B}_n/\lambda}\right) \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}\hat{a} \quad (2.45)$$

e  $\hat{F}_+ = \hat{F}_-^\dagger$ . Este super-operador de salto quântico também satisfaz a nossa suposição inicial, equação (2.15), sendo “não-linear”.

(c) Mas podemos fazer outra suposição igualmente válida de que a emissão de um fotoelétrion ocorre em um instante qualquer no intervalo de tempo  $[0, T)$ , onde o tempo  $T$ , suposto ser conhecido, é tal que a detecção com certeza ocorreu para algum tempo  $0 < t < T$  (matematicamente isto significa que estamos considerando  $\hat{\Xi}(T) \ll 1$ ). Neste caso definimos o super-operador de salto quântico como

$$\tilde{J}_T\rho = \frac{1}{T} \int_0^T dt \hat{\Xi}(t)\hat{\rho}, \quad (2.46)$$

Para os elementos diagonais, visto que

$$\int_0^T dt e^{-\lambda t/2} \sin^2(B_n|g|t) \simeq \frac{1}{\lambda} \frac{B_n^2}{\left(\left(\frac{\lambda}{4|g|}\right)^2 + B_n^2\right)} \quad (2.47)$$

obtém-se

$$\tilde{J}_T \rho = \tilde{\gamma}_T \hat{E}_- \hat{\rho} \hat{E}_+, \quad (2.48)$$

onde fizemos  $\tilde{\gamma}_T = T^{-1}$ ,  $\hat{E}_- = (\hat{n}+1)^{-1/2} \hat{a}$  e  $(\hat{E}_-)^{\dagger} = \hat{E}_+$ . Note que neste caso a constante de acoplamento  $\tilde{\gamma}$  é fenomenológica, porém ela depende indiretamente do acoplamento clássico  $\lambda$  que caracteriza o tempo de decaimento atômico. A princípio,  $\tilde{\gamma}_T$  é diferente de  $\gamma_{SD}$ .

No caso de elementos não-diagonais na base de Fock, para o operador densidade

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \rho_{mn} |m\rangle \langle n|$$

obtemos

$$\tilde{\Xi}_T \hat{\rho} = \lambda e^{-\lambda t/2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{mn} \sqrt{mn} e^{-i\omega t(m-n)} \frac{\sin(|g|B_{m-1}t) \sin(|g|B_{n-1}t)}{B_{m-1}B_{n-1}} |m-1\rangle \langle n-1|. \quad (2.49)$$

Realizando a integração e usando a condição  $\hat{\Xi}(T) \approx 0$  obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{J}_T \hat{\rho} &= \frac{\lambda}{2T} \sum_{m,n=1} \rho_{mn} |m-1\rangle \langle n-1| \frac{\sqrt{mn}}{B_{m-1}B_{n-1}} \cdot \frac{1}{\lambda/2 + i\omega(m-n)} \\ &\times \left[ \left( 1 + \left( |g| \frac{B_{m-1} - B_{n-1}}{\lambda/2 + i\omega(m-n)} \right)^2 \right)^{-1} - \left( 1 + \left( |g| \frac{B_{m-1} + B_{n-1}}{\lambda/2 + i\omega(m-n)} \right)^2 \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Para  $\omega \gg \lambda, |g|$  temos  $\tilde{J}_T \hat{\rho} \simeq 0$  para elementos não-diagonais de  $\hat{\rho}$ . Assim, obtemos

$$\tilde{J}_T \hat{\rho} = \text{diag}(\hat{E}_- \hat{\rho} \hat{E}_+). \quad (2.51)$$

### Operação de não-contagem

De acordo com a teoria de SD, em um tempo infinitesimal há apenas dois eventos possíveis, o de contagem de um fóton e o de não-contagem; deve então haver conservação de probabilidade para estes dois eventos, logo, podemos definir o super-operador de não-contagem a partir da equação (no caso de super-operadores de SD)

$$\Delta t \text{Tr}(\hat{J}_{SD} \hat{\rho}) + \text{Tr}(\hat{S}_{\Delta t}^{SD} \hat{\rho}) = 1 \Rightarrow \text{Tr}(\hat{S}_{\Delta t}^{SD} \hat{\rho}) = 1 - \Delta t \text{Tr}(\hat{J}_{SD} \hat{\rho}). \quad (2.52)$$

Dividindo o intervalo de tempo total em unidades infinitesimais de  $\Delta t$  e levando em conta apenas os termos da primeira ordem em  $\Delta t$ , recuperamos os seus resultados conhecidos: no modelo de SD (com  $\gamma_{SD} \equiv \gamma$ )

$$\hat{S}_t^{SD} \hat{\rho} = e^{-(i\omega + \gamma/2)\hat{n}t} \hat{\rho} e^{(i\omega - \gamma/2)\hat{n}t}, \quad P_0^{SD}(t) = \sum p_n e^{-\gamma t n}; \quad (2.53)$$

enquanto que no E-model (com  $\tilde{\gamma}_T \equiv \tilde{\gamma}$ ) temos

$$\tilde{S}_t \hat{\rho} = e^{-(i\omega \hat{n} + \tilde{\gamma}\Lambda/2)t} \hat{\rho} e^{(i\omega \hat{n} - \tilde{\gamma}\Lambda/2)t}, \quad \tilde{P}_0(t) = p_0 + (1 - p_0) e^{-\tilde{\gamma}t}, \quad (2.54)$$

onde  $p_0 = \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle$ . É imediato verificar que os traços das expressões (2.53) e (2.54), quando expandidas até a primeira ordem em  $\Delta t$ , satisfazem a equação (2.52). Vemos, então, que ambos os modelos, o de SD e E-model, aparecem naturalmente do modelo microscópico de fotodetector análogo ao átomo de 2-níveis.

## 2.5 Modelo do oscilador harmônico

### 2.5.1 Modelo “microscópico”

Na seção 2.4 nós estudamos o super-operador de salto quântico que surge da interação do campo de radiação com um átomo de 2-níveis. Nesta seção vamos considerar outro sistema físico bastante conhecido: um oscilador harmônico (OH) e um modo de campo eletromagnético. Vamos usar a aproximação de onda girante (cuja validade foi estudada em [75]) que conserva o número total de quanta. A explicação física da suposição de que o detector se comporta como um oscilador harmônico é a seguinte: podemos considerar que o detector consiste de átomos, e quando um fóton é absorvido por eles os átomos são excitados e o “raio” deles aumenta, analogamente ao aumento do deslocamento médio  $\Delta x$  de um OH quantizado, quando excitado para um nível de energia mais alto. É interessante notar que um modelo semelhante foi utilizado por Mollow [9] para descrever o processo de fotodeteção nos primórdios das teorias de fotocontagem. Ele considerou a interação entre um campo eletromagnético e um conjunto de osciladores harmônicos, correspondentes ao detector, obtendo a fórmula de contagem ao usar a expansão até a segunda ordem perturbativa. Nós vamos simplificar esse modelo ao considerar apenas um oscilador harmônico interagindo com um único modo de radiação. Neste caso, o Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_b\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar g\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hbar g^*\hat{a}^\dagger\hat{b}, \quad (2.55)$$

onde o modo  $\hat{a}$  irá assumir o papel de aparato de medida e o modo  $\hat{b}$  corresponderá ao campo eletromagnético de interesse ( $\omega_a$  e  $\omega_b$  são as frequências e  $g$  é a constante de acoplamento detector-campo). O operador de evolução para o sistema medidor-objeto escreve-se [47, 76–79]

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\Omega t\hat{N}} e^{A(t)\hat{K}_+} e^{B(t)\hat{K}_0} e^{C(t)\hat{K}_-}, \quad (2.56)$$

onde

$$\hat{N} \equiv (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})/2, \quad \Omega \equiv \omega_a + \omega_b$$

e  $\hat{K}_+ \equiv \hat{a}^\dagger\hat{b}$ ,  $\hat{K}_- \equiv -\hat{a}\hat{b}^\dagger$ ,  $\hat{K}_0 \equiv (\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b})/2$  são os geradores do grupo SU(1,1), que satisfazem às relações algébricas  $[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm\hat{K}_\pm$  e  $[\hat{K}_-, \hat{K}_+] = 2\hat{K}_0$  ( $\hat{K}_0$  é um operador hermitiano, enquanto que  $\hat{K}_-$  e  $\hat{K}_+$  são antihermitianos). Os coeficientes dependentes do tempo são [78]

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{-ig^* \sin(t\Delta)}{\Delta (\cos(t\Delta) + i(\omega_{ab}/2\Delta) \sin(t\Delta))}, \\ B(t) &= -2 \ln (\cos(t\Delta) + i(\omega_{ab}/2\Delta) \sin(t\Delta)), \\ C(t) &= \frac{ig \sin(t\Delta)}{\Delta (\cos(t\Delta) + i(\omega_{ab}/2\Delta) \sin(t\Delta))}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

com

$$\omega_{ab} \equiv \omega_a - \omega_b \quad \text{e} \quad \Delta \equiv (|g|^2 + \omega_{ab}^2/4)^{1/2}. \quad (2.58)$$

Primeiramente, por simplicidade, vamos supor que: (i) o detector está em ressonância com o campo de radiação,  $\omega_{ab} = 0$ , assim obtemos

$$A(t) = -i \frac{g^*}{|g|} \tan(|g|t), \quad C(t) = A^*(t) \quad \text{e} \quad B(t) = -2 \ln \cos(|g|t), \quad (2.59)$$

e que (ii) o aparato e o objeto estão inicialmente preparados de tal forma, que o modo  $\hat{a}$  (detector) esteja no estado de vácuo (o “ponteiro” em posição nêutra). A probabilidade de que, num tempo posterior  $t$ , o detector esteja no primeiro estado excitado  $|1_a\rangle$  é

$$\langle 1_a | \hat{U}(t) | 0_a \rangle = \hat{\Gamma}_1(t) = -ie^{-i\phi} \tan(|g|t) \hat{b} \cos^{\hat{n}_b}(|g|t). \quad (2.60)$$

Assim, para qualquer estado do sistema, o operador de transição ou de evolução condicionada à detecção de um fóton é (a partir de agora, vamos denotar  $\hat{n}_b$  simplesmente por  $\hat{n}$ )

$$\hat{\Gamma}_1(t) = -ie^{-i\phi} \sin(|g|t) \cos^{\hat{n}}(|g|t) \hat{b}, \quad (2.61)$$

onde  $\phi$  é uma fase associada ao fator de acoplamento ( $g = |g|e^{i\phi}$ ). Notem que, similarmente, pode-se construir o operador de evolução (transição) condicionada à detecção de  $l$ -fótons

$$\hat{\Gamma}_l(t) = \frac{1}{\sqrt{l!}} \left( -ie^{-i\phi} \sin(|g|t) \right)^l \cos^{\hat{n}}(|g|t) \hat{b}^l \quad (2.62)$$

Como estamos interessados no processo de detecção em que os fótons são detectados um a um, vamos considerar apenas o operador  $\hat{\Gamma}_1(t)$ .

Consideramos duas opções para definir o super-operador de salto quântico:

a) Pode ser suposto que a interação é muito eficaz e o salto se dá logo depois de iniciada a interação, num tempo “muito curto”, desde que o número de fótons seja pequeno. Neste caso  $|g|t \ll 1$  e a expressão de SD modificada (fórmula (2.22)) é recuperada.

b) Também podemos definir o super-operador de salto quântico como  $\max \{ \hat{\Gamma}_1(t) \hat{\rho}_b \hat{\Gamma}_1^\dagger(t) \}$ , que ocorre no tempo  $t_m$  quando a probabilidade de absorção é máxima. Assim, obtemos

$$\hat{J} \hat{\rho}_b = \gamma \text{diag}(\hat{\Gamma}_1(t_m) \hat{\rho}_b \hat{\Gamma}_1^\dagger(t_m)) = \gamma \text{diag}(\hat{G}_- \hat{\rho}_b \hat{G}_+) \quad (2.63)$$

com

$$\hat{G}_- = \left[ \frac{\hat{n}^{\hat{n}}}{(\hat{n}+1)^{\hat{n}+1}} \right]^{1/2} \hat{b} \quad \text{e} \quad \hat{G}_+ = \hat{b}^\dagger \left[ \frac{\hat{n}^{\hat{n}}}{(\hat{n}+1)^{\hat{n}+1}} \right]^{1/2}, \quad (2.64)$$

e  $\gamma$  sendo uma constante fenomenológica, relacionada à frequência de saltos quânticos. Assim, o super-operador de salto não é mais simplesmente  $\hat{b} \hat{\rho}_b \hat{b}^\dagger$ , mas os operadores de abaixamento e de levantamento vêm multiplicados por uma função do operador de número de fótons  $\hat{n}$ , conforme proposto em (2.15).

### 2.5.2 Modelo “macroscópico”

Do mesmo modo que fizemos no caso do átomo de 2-níveis, vamos levar em consideração a dissipação. Repetindo os mesmos passos, a evolução do operador densidade é dada por

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\lambda}{2} \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \right). \quad (2.65)$$

com  $\hat{H}$  dado em (2.55). O Hamiltoniano efetivo é

$$\hat{H}_{ef} = \hat{H}_0 - i \frac{\lambda}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} = \left( \omega_a - i \frac{\lambda}{2} \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + g \hat{a} \hat{b}^\dagger + g^* \hat{a}^\dagger \hat{b}. \quad (2.66)$$

O super-operador de evolução condicionada, descrito na seção 2.4, é

$$\hat{\mathcal{D}}_t \hat{\rho} = \hat{U}_{ef}(t) \hat{\rho} \hat{U}_{ef}^\dagger(t), \quad \hat{U}_{ef}(t) = \exp(-i\hat{H}_{ef}t). \quad (2.67)$$

Para o estado inicial  $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_F^{(0)} \otimes |0_a\rangle\langle 0_a|$  em  $t = 0$ , a probabilidade de que o próximo fotoelétron seja registrado em  $t + \Delta t$  é

$$P_1(t) = \text{Tr} \left[ \hat{R} \hat{\mathcal{D}}_t \hat{\rho}_0 \right] \Delta t = \lambda \Delta t \text{Tr}_F \left[ \hat{\Gamma}(t) \hat{\rho}_F^{(0)} \hat{\Gamma}^\dagger(t) \right], \quad (2.68)$$

onde  $\hat{\Gamma}(t) = \langle 1_a | \hat{U}_{ef}(t) | 0_a \rangle$  e  $\Delta t$  é a resolução do medidor. Portanto, o operador de transição que age sobre o estado do campo da radiação (a partir de agora  $\hat{\rho}_F^{(0)} \equiv \hat{\rho}$ ) é

$$\hat{\Xi}(t) \hat{\rho} = \lambda \hat{\Gamma}(t) \hat{\rho} \hat{\Gamma}^\dagger(t) \quad (2.69)$$

e a probabilidade de detectar um fotoelétron no intervalo  $[t, t + \Delta t]$  é  $P_1(t) = \text{Tr} \left[ \hat{\Xi}(t) \hat{\rho} \right] \Delta t$ . Fazendo a substituição  $\omega_a \rightarrow \omega'_a = \omega_a - i\lambda/2$  nas equações (2.57) e (2.58) obtém-se

$$\hat{\Gamma}(t) = A(t) \exp \left[ - (i\Omega t + B(t)) (\hat{b}^\dagger \hat{b} + 1)/2 \right] \hat{b}, \quad (2.70)$$

$$\hat{\Gamma}^\dagger(t) = A^*(t) \exp \left[ - (i\Omega^* t + B^*(t)) (\hat{b}^\dagger \hat{b} + 1)/2 \right] \hat{b}^\dagger. \quad (2.71)$$

Com isso, o super-operador de transição é

$$\hat{\Xi}(t) \hat{\rho} = |A(t)|^2 \exp \left[ - (i\Omega t + B(t)) (\hat{b}^\dagger \hat{b} + 1)/2 \right] \hat{b} \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \exp \left[ - (i\Omega^* t + B^*(t)) (\hat{b}^\dagger \hat{b} + 1)/2 \right], \quad (2.72)$$

que é uma expressão exata e geral. Mas para o caso ressonante,  $\omega_a = \omega_b$ , o super-operador de transição para elementos diagonais do operador-densidade na base de Fock é

$$\hat{\Xi}(t) \hat{\rho} = \lambda F_D(\hat{n}) \hat{b} \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \quad (2.73)$$

com

$$F_D(\hat{n}) = \frac{|g|^2}{\Delta^2} e^{-\lambda t(\hat{n}+1)/2} \sin^2(t\Delta) W^{2\hat{n}}(t), \quad (2.74)$$

$$W(t) = \cos(t\Delta) + \frac{\lambda}{4\Delta} \sin(t\Delta), \quad \Delta = \sqrt{|g|^2 - \lambda^2/16}$$

As figuras 2.4, 2.5 e 2.6 mostram a evolução da taxa de transição,  $|\hat{\Xi}(t) \hat{\rho}|$ , em função do tempo para três estados diferentes: estado de Fock, coerente e térmico, todos com o mesmo número médio de fótons.

Como a integral do traço da expressão (2.73) não pode ser calculada exatamente, neste caso não vamos definir a operação de não-contagem geral dependente do tempo, embora sua definição permanece a mesma da seção 2.4

### Casos particulares de saltos quânticos

Para  $\Delta t$  curto e poucos fótons presentes no campo, podemos expandir as funções  $A(t)$  e  $B(t)$  da expressão (2.72) até a primeira ordem no tempo, o que recupera a expressão de SD modificada, fórmula (2.43) com a mesma constante  $\gamma_{SD}$ .

A definição do salto quântico como sendo o valor máximo de  $\hat{\Xi}(t_m)$  perde sua utilidade aqui, pois a expressão resultante é tão complicada quanto a de  $\hat{\Xi}(t)$ . Agora, fazendo a

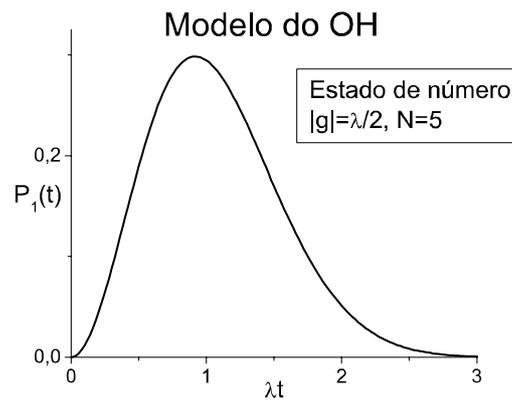


Figura 2.4: Modelo de OH: dependência de traço de transição (em função de  $\lambda$ )  $P_1(t) \equiv \text{Tr}[\tilde{\Xi}(t)\hat{\rho}]$  em função de  $\lambda t$ , para o estado de número. Escolhemos os valores numéricos dos parâmetros para uma melhor visualização da função  $P_1(t)$ .

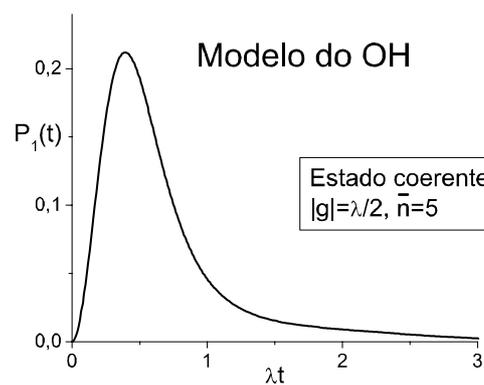


Figura 2.5: O mesmo que na figura 2.4, mas para o estado coerente.

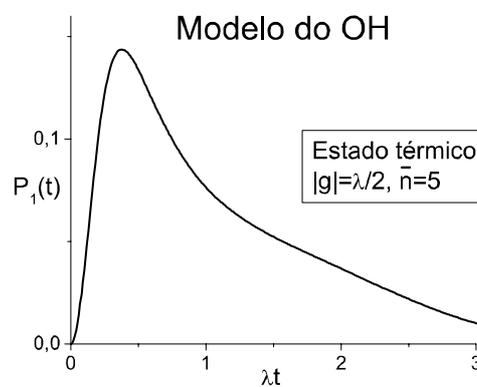


Figura 2.6: O mesmo que na figura 2.4, mas para o estado térmico.

média temporal no intervalo  $[0, T]$ , o super-operador resultante será aproximadamente nulo para elementos não-diagonais, enquanto para elementos diagonais ele será dado por

$$\hat{J}_T \hat{\rho} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \hat{\Xi}(t) \hat{\rho} = \gamma \frac{|g|^2}{\Delta^2} \int_0^T dt e^{-\gamma t(\hat{n}_b+1)/2} \sin^2(t\Delta) W^{2\hat{n}_b}(t) \hat{b} \hat{\rho} \hat{b}^\dagger. \quad (2.75)$$

Essa integral não pode ser calculada exatamente, por isso não vamos calculá-la aqui. Porém, podemos notar que neste caso o super-operador de salto quântico resultante irá depender da razão  $\lambda/(4|g|)$  (que aparece na fórmula (2.74)) e não será igual àquele obtido no caso de átomo de 2-níveis (fórmula (2.51)).

## 2.6 Influência de outros sistemas

Até agora consideramos apenas um campo eletromagnético livre (por conveniência, chamá-lo-emos de modo  $C$ ) que interage com o detector. No entanto, muitas das aplicações de fotodeteção tratam de sistemas em que o modo  $C$ , além do detector, interage com outros sistemas (que chamaremos de  $\mathcal{S}$ ; ver, por exemplo, [14–16]). Portanto, é importante saber se a presença desses sistemas modifica de alguma maneira a forma do super-operador de salto quântico, já que nos trabalhos anteriores (ver, por exemplo, [14–16, 80, 81]) considerava-se que o super-operador de salto quântico é insensível à presença de outros sistemas. Vamos considerar aqui apenas o caso em que o detector é mimetizado por átomo de 2-níveis, pois no caso de detector do tipo de oscilador harmônico as conclusões serão análogas.

Como o sistema  $\mathcal{S}$  pode ser bastante geral, vamos considerar um exemplo particular dado em [14]. Neste caso particular, o Hamiltoniano efetivo total é composto por três modos quânticos de campos eletromagnéticos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), de campos clássicos e do detector (fazemos  $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ef} = & \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_c \hat{c}^\dagger \hat{c} + \xi(\hat{a}^\dagger \hat{b} e^{i\nu t} + \hat{a} \hat{b}^\dagger e^{-i\nu t}) + \chi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b})(\hat{c} e^{-i\nu' t} + \hat{c}^\dagger e^{i\nu' t}) \\ & + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_0 - i \frac{\lambda}{2} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + g \hat{c} \hat{\sigma}_+ + g^* \hat{c}^\dagger \hat{\sigma}_-, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde o modo  $C$  é descrito pelos operadores  $\hat{c}$  e  $\hat{c}^\dagger$ . Para obter o super-operador de transição, precisamos encontrar a expressão para

$$\hat{U}_{ef}(t) = e^{-i\hat{H}_{ef}t}$$

e seguir os passos da seção 2.4. Indo para a representação de interação através de “eliminação” dos termos “livres” e impondo as condições de ressonância  $\nu = \omega_a - \omega_b$  e  $\nu' = \omega_c$  para eliminar as dependências temporais, conforme no trabalho original, obtemos

$$\hat{U}_{ef}(t) = e^{-\lambda t/4} e^{-i\omega \hat{\sigma}_0 t/2} e^{-i(\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_c \hat{c}^\dagger \hat{c})t} e^{-i\xi(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger)t} e^{-i\hat{H}_I t},$$

com o seguinte Hamiltoniano de interação efetivo

$$\hat{H}_I = \chi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b})(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) + \frac{\omega_0 - \omega - i\lambda/2}{2} \hat{\sigma}_0 + g \hat{c} \hat{\sigma}_+ + g^* \hat{c}^\dagger \hat{\sigma}_-. \quad (2.77)$$

Obtida a expressão para  $\hat{U}_{ef}(t)$ , posteriormente faremos traço sobre o detector e os modos  $A$  e  $B$  para determinar o super-operador de transição que age sobre o modo  $C$ .

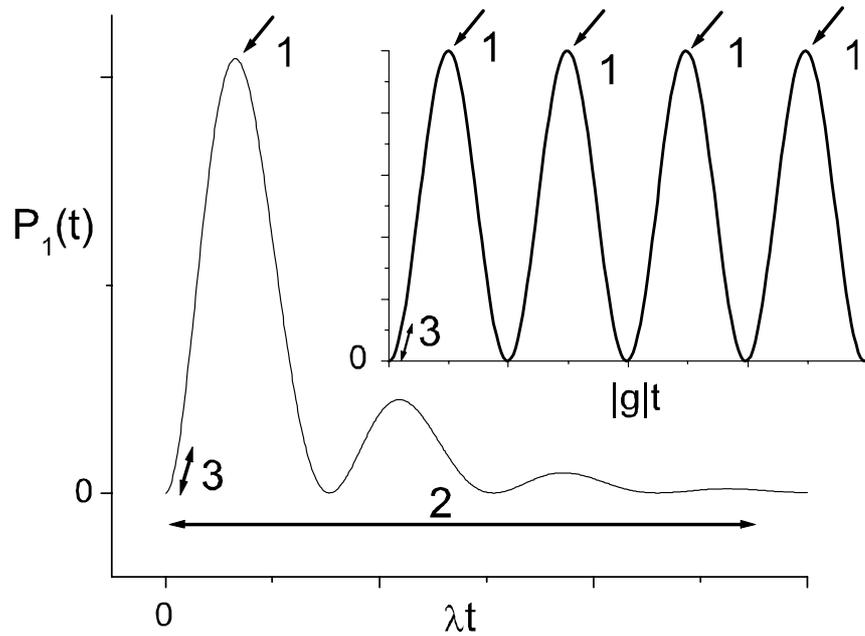


Figura 2.7: Curvas para a probabilidade de transição: observamos diferentes definições de salto quântico para o modelo de átomo de 2-níveis. Os pontos “1” correspondem à definição do valor máximo (na inserção está o caso simplificado, sem dissipação). A região “2” ilustra a definição da média temporal no caso do modelo “macroscópico”, e as regiões “3” ilustram a aproximação de SD para tempos curtos, em ambos os casos, o “microscópico” e o “macroscópico”.

Vemos que  $\hat{H}_I$  é composto dos termos que aparecem nos caso do campo livre  $C$  na presença apenas do detector, mais um termo que depende dos modos  $A$  e  $B$ . Assim, dependendo dos valores das constantes de acoplamento, das frequências  $\omega$  e  $\omega_0$  e de número de fótons nos modos  $A$  e  $B$ , o primeiro termo do lado direito da expressão (2.77) pode ser muito menor que os outros três termos e, portanto, pode ser desprezado – isto significa que a operação de salto quântico torna-se insensível à presença dos modos  $A$  e  $B$ . Caso o primeiro termo seja da mesma ordem de grandeza que os outros termos, ele não poderá ser desprezado, significando que a operação de salto quântico passará a depender dos operadores dos modos  $A$  e  $B$ .

Com este exemplo particular mostramos que, em geral, o super-operador de transição e, conseqüentemente, o super-operador de salto quântico sofrem influência de outros sistemas interagentes com o campo que está sendo detectado.

## 2.7 Discussão

Neste capítulo, consideramos dois modelos microscópicos para uma descrição realista do fotodetector. Primeiramente, modelamos o detector como constituído de átomos de 2-níveis; como segundo modelo, supusemos que o detector se comporta como um oscilador

harmônico. Nós mostramos como surge o super-operador de *transição* (dependente do tempo) em ambos os modelos, e mostramos que o super-operador de salto quântico de SD, quando devidamente modificado para os elementos não-diagonais do operador-densidade, é um caso particular (e mais simples) de uma grande família de operadores não-lineares.

Nós definimos outros possíveis operadores de salto quântico que poderiam ser usados nas teorias de fotodeteção, ou em outros ramos de física. Um dos pontos principais do nosso modelo microscópico foi mostrar que os “operadores exponenciais de fase”, propostos no E-model como uma alternativa para a definição de salto quântico, são também um caso particular do super-operador de transição. Mais que isso, mostramos que no caso de E-model o super-operador de salto quântico age apenas sobre os elementos diagonais do operador densidade, tornando os elementos não-diagonais nulos, ou seja, destruindo a coerência entre eles. Nos próximos capítulos nós vamos omitir o símbolo *diag* no caso de E-model, pois estaremos interessados apenas no cálculo de probabilidades, que são insensíveis aos elementos não-diagonais do operador-densidade.

A figura 2.7 mostra  $\langle n | \hat{\Xi}(t) | n \rangle$  (para  $n \neq 0$ ) e ajuda a visualizar diferentes definições de saltos quânticos a partir do super-operador de transição (para o caso particular de átomo de 2-níveis, mas, salvo a forma concreta, o mesmo gráfico também ocorre, qualitativamente, no caso do oscilador harmônico). Na inserção da figura mostramos o modelo simplificado em que não consideramos a dissipação: neste caso o operador de transição é oscilante no tempo, e podemos definir o super-operador de salto quântico do E-model como o valor máximo de  $\langle n | \hat{\Xi}(t) | n \rangle$ , correspondente aos pontos 1 na figura. Para o modelo mais realista, em que incluímos a dissipação, podemos definir o salto quântico de E-model como uma média temporal, mostrada pela região 2 na figura, ou como ocorrendo quando  $\langle n | \hat{\Xi}(t) | n \rangle$  é máximo, como indicado pelo número “1”. Em ambos os casos, o super-operador de salto de SD ocorre para tempos pequenos, mostrados pela região 3 na figura 2.7.

Assim, ambos os operadores, de SD e do E-model, são igualmente válidos, mas em regimes de fotodeteção diferentes: o operador de SD vale para tempos de interação curtos e baixo número de fótons, enquanto o operador no E-model vale para tempos maiores e qualquer intensidade de campo.

# Capítulo 3

## E-model vs. modelo de SD

Neste capítulo vamos apresentar o *modelo consistente para fotodeteção contínua*, que chamaremos de *E-model*, em que substituímos o super-operador de salto quântico “linear” por um “não-linear” (com respeito a operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ ). Vamos comparar as expressões analíticas para diversas quantidades observáveis, obtidas de acordo com cada modelo. Veremos que os resultados correspondentes a diferentes modelos são distintos e podem, a princípio, ser observados experimentalmente. Alguns dos resultados descritos a seguir são novos.

### 3.1 E-model: Introdução

O ingrediente principal da teoria de SD consiste no uso de dois tipos de operadores agindo continuamente sobre o estado de campo. Estes operadores são: o evento de uma contagem instantânea (um único fóton), representado pelo super-operador de salto quântico  $\hat{J}$ , e o evento de não-contagem (sem contagens de fótons, apenas monitoramento do campo) durando um intervalo de tempo arbitrário  $\tau$ , representado pelo super-operador  $\hat{S}_\tau$ . Assim, em um intervalo de tempo  $[0, t)$  (quando a interação entre o detector e o campo está ligada), todos os eventos de uma contagem têm, formalmente, duração de tempo total igual a zero, enquanto que todos os eventos de não-contagem duram o tempo  $t$ . Como já descrevemos o modelo de SD na seção 1.6, não vamos repeti-lo aqui, apenas lembramos que no modelo de SD o super-operador de uma contagem tem a forma (1.39)

$$\hat{J}\bullet = \gamma\hat{a}\bullet\hat{a}^\dagger. \quad (3.1)$$

Uma generalização direta do operador de uma contagem de SD é

$$\hat{J}_A\bullet = \gamma_A\hat{A}\bullet\hat{A}^\dagger, \quad (3.2)$$

onde operador  $\hat{A}$  é algum operador não-linear<sup>1</sup> dado pela equação (2.15)

$$\hat{A} = F(\hat{n})\hat{a},$$

---

<sup>1</sup>Novamente, com isso queremos dizer que  $\hat{A}$  é um operador não linear com respeito aos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , como no capítulo 2.

e o coeficiente  $\gamma_A$  (que tem dimensão de inverso de tempo) está relacionado com a eficiência do detector. No capítulo anterior deduzimos vários pretendentes para o papel de superoperador de salto quântico realista, mas vamos nos concentrar em um deles que já foi empregado em diversos ramos de física quântica, entre eles na teoria de fotodeteção – aquele dado por operadores exponenciais de fase  $\hat{E}_-$  e  $\hat{E}_+$ , equação (2.16):

$$\tilde{J}\hat{\rho} = \tilde{\gamma}\hat{E}_-\hat{\rho}\hat{E}_+. \quad (3.3)$$

Na verdade, esse modelo corresponde ao *modelo consistente para fotodeteção contínua*, proposto *ad hoc* por Oliveira *et al.* no artigo [24]. Nele, os autores calcularam várias quantidades observáveis usando esse modelo, comparando-as com aquelas obtidas usando o modelo de SD. Por questão prática, vamos denominar o modelo que faz uso de operadores exponenciais de fase de *E-model*, tendo em mente que ele e o *modelo consistente para fotodeteção contínua* representam a mesma coisa.

Neste capítulo vamos calcular algumas grandezas observáveis que não foram calculadas em [24], e compará-las com aquelas obtidas usando o modelo de SD. Primeiramente, na seção 3.1, vamos redefinir as operações de uma contagem e de não-contagem. Feito isso, estudaremos diversas grandezas observáveis usando ambos os modelos. Primeiramente, calcularemos o número médio de fótons e sua dispersão durante a evolução não-condicionada (seção 3.2). Em seguida, iremos estudar grandezas relacionadas a probabilidades de coincidência, descritas na seção 3.3 (assunto deixado de fora em [24]), e compará-las com aquelas obtidas a partir de modelo de SD. Na seção 3.5 discutiremos os resultados obtidos. Os resultados das seções 3.2 – 3.3 são frutos dessa dissertação, e os resultados da seção 3.3 foram publicados em [53].

Daqui em diante, ao longo deste capítulo, vamos usar o símbolo  $\gamma$  para a constante de acoplamento campo-detector no caso de modelo de SD e  $\tilde{\gamma}$  para E-model, tendo em mente que  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  podem ser diferentes. Além disso, os operadores sem til corresponderão ao modelo de SD, enquanto um til sobre alguma quantidade significará que essa quantidade é calculada de acordo com E-model.

Os operadores exponenciais de fase que iremos usar foram introduzidos por London [82] nos primórdios de mecânica quântica, embora seu uso sistemático começou apenas depois do artigo de Susskind e Glogower [83]. O comutador de  $\hat{E}_-$  e  $\hat{E}_+$  é o projetor para o estado de vácuo,

$$[\hat{E}_-, \hat{E}_+] = |0\rangle\langle 0| \equiv \hat{\Lambda}_0 \quad (3.4)$$

e o produto normalmente ordenado é o projetor complementar

$$\hat{E}_+\hat{E}_- = 1 - \hat{\Lambda}_0 = \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^\dagger, \quad \hat{\Lambda}^2 = \hat{\Lambda}. \quad (3.5)$$

Aplicando  $\hat{E}_-$  e  $\hat{E}_+$  sobre estados de número obtém-se

$$\hat{E}_-|n\rangle = (1 - \delta_{n,0})|n-1\rangle, \quad \hat{E}_+|n\rangle = |n+1\rangle, \quad (3.6)$$

o estado de número é reduzido ou incrementado por uma unidade, porém sem o fator de peso como no caso de operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ .  $\hat{E}_+$  e  $\hat{E}_-$  constituem outro conjunto de operadores de levantamento e abaixamento. Uma propriedade útil e que será rotineiramente usada é

$$e^{\alpha\hat{\Lambda}} = \hat{\Lambda}_0 + e^\alpha\hat{\Lambda}, \quad e^{\alpha\hat{\Lambda}_0} = \hat{\Lambda} + e^\alpha\hat{\Lambda}_0 \quad (3.7)$$

e, obviamente,  $[\hat{\Lambda}, \hat{n}] = 0$ .

O significado físico do super-operador de uma contagem genérico  $\hat{J}_A$  está contido na equação para a taxa de contagem de fótons [29, 65]. Isto é, a probabilidade  $P(\hat{J}_A)dt$  de que o evento de uma contagem ocorre no intervalo de tempo  $[t, t + dt)$  é

$$P(\hat{J}_A)dt = \text{Tr}[\hat{J}_A \hat{\rho}]dt = \gamma_A \text{Tr}[\hat{A}^\dagger \hat{A} \hat{\rho}]dt. \quad (3.8)$$

Assim, usando a notação definida acima,

$$P(\hat{J}) = \gamma \bar{n}, \quad P(\tilde{J}) = \tilde{\gamma}(1 - p_0) = \tilde{\gamma} \bar{\Lambda}, \quad (3.9)$$

onde  $p_0 = |c_{0,0}|^2$  é a probabilidade de presença da componente de vácuo no campo.

Aqui a diferença entre dois modelos é claramente vista. O modelo de SD é baseado na suposição de que a taxa de fotocontagem é proporcional ao número médio de fótons  $\bar{n}$  (o detector “enxerga” todos os fótons, independentemente da geometria da cavidade), que parece bastante natural para *baixas* intensidades de campo (mas pode não ser verdade para altas intensidades). Ao contrário, no E-model, a taxa de fotocontagem é proporcional à probabilidade  $\bar{\Lambda}$  de que há fótons na cavidade, e não tem relação direta com o número médio  $\bar{n}$ . Tal situação parece natural para *altas intensidades de campo*, quando a taxa de contagem atinge alguma saturação. Assim, ambos os modelos podem ser considerados como dois casos-limites extremos de uma situação genérica.

### 3.1.1 Operação de uma contagem

É suposto que o super-operador de uma contagem  $\hat{J}_A$  (3.2) tira um fóton do estado inicial do campo. Entretanto, ao calcular o número médio de fótons no estado novo, para o modelo de SD obtém-se [64]

$$\bar{n}_+ = \bar{n} + \left[ \frac{\overline{\Delta n^2} - \bar{n}}{\bar{n}(t)} \right] = \bar{n} + q, \quad (3.10)$$

onde  $\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2$  e  $q$  é o parâmetro  $q$  de Mandel [84]. Portanto, se a estatística do campo é *super-Poissoniana*, o número médio de fótons aumenta após uma contagem. Ele pode permanecer o mesmo se a estatística é *Poissoniana*, e ele decresce caso a estatística é *sub-Poissoniana*. Apenas para o estado inicial de Fock  $\hat{\rho}_0 = |m\rangle\langle m|$  obtém-se  $\bar{n}_+ = m-1$ , exatamente um fóton a menos no campo, caracterizando um salto quântico. Para qualquer outro estado de campo isto nem sempre é verdade. Por exemplo, para o *estado térmico*, descrito pelo operador estatístico

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} |n\rangle\langle n|, \quad (3.11)$$

obtém-se  $\bar{n}_+ = 2\bar{n}$ , o número médio de fótons dobra após a aplicação de  $\hat{J}$ . Observações similares foram feitas em [35, 65, 85, 86], porém, sem nenhuma tentativa de modificar o modelo.

O super-operador de salto quântico (3.3), correspondente a E-model, é limitado,  $\|\tilde{J}\| < \infty$ , pois para qualquer estado  $\hat{\rho}_0$ , com  $\text{Tr}\hat{\rho}_0 = 1$ , tem-se  $\text{Tr}[\tilde{J}\hat{\rho}_0] \leq \gamma$ . Depois de uma contagem o estado do campo salta imediatamente para

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{\tilde{J}\hat{\rho}_0}{\text{Tr}(\tilde{J}\hat{\rho}_0)} = \frac{\tilde{J}\hat{\rho}_0}{1 - p_0}, \quad (3.12)$$

onde  $p_0 \equiv \langle 0|\hat{\rho}_0|0\rangle$  é a probabilidade do estado de vácuo. O número médio de fótons após uma contagem é

$$\tilde{n} = \frac{\bar{n}}{(1-p_0)} - 1, \quad (3.13)$$

portanto, caso o estado  $\hat{\rho}_0$  tem nenhuma ou muito pequena contribuição de estado de vácuo, a operação de contagem extrai um fóton do campo, independentemente de sua estatística. Abaixo seguem alguns exemplos:

(a) Para o *estado de número*  $\hat{\rho}_0 = |m\rangle\langle m|$  ( $m \neq 0$ ),  $\tilde{n} = m - 1$ .

(b) Para o *estado coerente*  $\hat{\rho}_0 = |\alpha\rangle\langle\alpha|$  ( $\alpha \neq 0$ ),  $\tilde{n} = \bar{n}/(1 - e^{-\bar{n}}) - 1$ .

(c) Para o *estado térmico* (3.11), que descreve um reservatório térmico, o número médio de fótons permanece inalterado, devido à propriedade especial  $p_0 = 1/(\bar{n} + 1)$ . O efeito de salto quântico não é perceptível.

### 3.1.2 Operação de não-contagem

Enquanto o detector está monitorando o campo e nenhuma contagem é registrada no intervalo de tempo  $[0, t)$ , o conhecimento sobre o campo é alterado devido ao monitoramento contínuo (atualização contínua de informação), e o operador estatístico do campo  $\hat{\rho}_0$  é continuamente alterado para [13, 65]

$$\bar{\rho}(t) = \frac{\hat{S}_t \hat{\rho}_0}{\text{Tr}(\hat{S}_t \hat{\rho}_0)}. \quad (3.14)$$

A probabilidade de não registrar nenhuma contagem durante o tempo  $t$  é  $P_0(t) = \text{Tr}(\hat{S}_t \hat{\rho}_0)$ . O super-operador de SD  $\hat{S}_t$  pode ser naturalmente generalizado como

$$\hat{S}_\tau \hat{\rho} = e^{\hat{Y}_A \tau} \hat{\rho} e^{\hat{Y}_A^\dagger \tau}, \quad \hat{Y}_A = -i\hat{H}_0 - \frac{1}{2}\gamma_A \hat{A}^\dagger \hat{A}, \quad (3.15)$$

onde  $\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$  é o Hamiltoniano do campo livre.

O modelo de SD e E-model predizem as seguintes probabilidades de não contagem ( $p_n \equiv \langle n|\hat{\rho}_0|n\rangle$ ),

$$P_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\gamma t} p_n, \quad \tilde{P}_0(t) = p_0 + (1-p_0) e^{-\tilde{\gamma} t}.$$

Embora as duas expressões vão ao mesmo limite assim que  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = p_0,$$

para tempos intermediários elas são diferentes.

O número médio de fótons na ausência de contagens,  $\bar{n}_t \equiv \text{Tr}(\bar{\rho}_t \hat{n})$ , também se comporta diferentemente nos dois modelos. O modelo de SD fornece

$$\bar{n}_t = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\gamma t} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\gamma t} p_n}. \quad (3.16)$$

Em particular, para  $\gamma t \ll 1$ ,  $\bar{n}_t \approx \bar{n} - \gamma t (\Delta n)^2$ , portanto, mesmo se o estado de vácuo não está presente inicialmente ( $p_0 = 0$ ) e nenhum fóton é detectado, o número médio de

fótons predito pode ser substancialmente menor que  $\bar{n}$  se  $\overline{(\Delta n)^2} \gg \bar{n}$ . Ao contrário, o número médio de fótons na ausência de contagens, predito pelo E-model, é

$$\tilde{n}_t = \frac{\bar{n}}{1 + p_0(\tilde{\gamma}t - 1)}, \quad (3.17)$$

Portanto, caso  $p_0 = 0$ , o número médio de fótons permanece inalterado,  $\tilde{n}_t = \bar{n}$ .

### 3.1.3 Contagem contínua

A contagem contínua de  $k$  fótons do campo em um intervalo de tempo  $t$  é representada por um operador linear  $\hat{N}_t(k)$  agindo sobre o estado do sistema durante o intervalo  $[0, t]$ ; o estado normalizado do campo no tempo  $t$  após  $k$  contagens é

$$\hat{\rho}_t^{(k)} \equiv \frac{\hat{N}_t(k)\hat{\rho}_0}{\text{Tr}[\hat{N}_t(k)\hat{\rho}_0]}, \quad (3.18)$$

onde  $\hat{\rho}_0$  é o estado do campo anterior ao processo de contagem e  $P_k(t) = \text{Tr}[\hat{N}_t(k)\hat{\rho}_0]$  é a probabilidade de contar  $k$  fótons no intervalo  $t$ . O operador linear  $\hat{N}_t(k)$  pode ser obtido a partir de operadores  $\hat{J}$  e  $\hat{S}_t$ , conforme descrito na seção 1.3. Não vamos deduzir as expressões analíticas destas quantidades aqui, pois elas podem ser encontradas nos artigos originais [24, 31]. Apenas colocaremos as expressões finais. Para o modelo de SD, tem-se

$$\hat{N}_t(m)\hat{\rho} = \hat{S}_t \frac{(1 - e^{-\gamma t})^m}{m!} \hat{J}^m \hat{\rho} \quad (3.19)$$

$$P_k(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (1 - e^{-\gamma t})^k (e^{-\gamma t})^{n-k} p_n. \quad (3.20)$$

enquanto que para E-model obtemos

$$\tilde{N}_t(k)\hat{\rho}_0 = \hat{U}_t \int_0^t dt' e^{-\tilde{\gamma}t'} \frac{(t')^{k-1}}{(k-1)!} \exp\left[-\frac{\tilde{\gamma}}{2}(t-t')\hat{\Lambda}\right] (\tilde{J}^k \hat{\rho}_0) \exp\left[-\frac{\tilde{\gamma}}{2}(t-t')\hat{\Lambda}\right], \quad (3.21)$$

onde

$$\hat{U}_t = e^{-i\hat{H}_0 t} \bullet e^{i\hat{H}_0 t} \quad (3.22)$$

é o super-operador de evolução livre. A probabilidade de  $k$  contagens no E-model é

$$\tilde{P}_k(t) = p_k \left[1 - e^{-\tilde{\gamma}t} \Omega(k, \tilde{\gamma}t)\right] + \frac{e^{-\tilde{\gamma}t} (\tilde{\gamma}t)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} p_n. \quad (3.23)$$

Aqui nós definimos

$$\Omega(k, x) = \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} = \frac{e^x}{k!} \Gamma(k+1, x), \quad (3.24)$$

onde

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (3.25)$$

é a função Gamma complementar incompleta.

O valor-limite,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}_k(t) = \langle k | \rho_0 | k \rangle = p_k$ , em ambas as equações, (3.23) e (3.20), significa que, assintoticamente, a estatística de contagens coincide com a estatística de fótons. Isso acontece porque a cavidade e o detector são, supostamente, ideais, portanto, nenhum fóton é perdido; cada vez que um fóton é tirado do campo, ele é registrado e contado.

O super-operador que iremos usar até o final do capítulo é o super-operador de evolução não-condicionada  $\hat{T}_t$ , equação (1.6)

$$\hat{T}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{N}_t(k) = \hat{S}_t + \int_0^t \hat{T}_{t-t'} \hat{J}_A \hat{S}_{t'} dt', \quad (3.26)$$

que pode ser facilmente obtido nos dois modelos, usando as expressões para  $\hat{N}_t(m)$ .

De grande importância para o cálculo de várias grandezas são as relações entre os três super-operadores existentes ( $\hat{J}$ ,  $\hat{S}_t$  e  $\hat{T}_t$ ). As expressões que iremos usar nas próximas seções são:

$$\hat{J}\hat{S}_t = e^{-\gamma t} \hat{S}_t \hat{J}, \quad \hat{J}\hat{T}_t = e^{-\gamma t} \hat{T}_t \hat{J}, \quad \hat{T}_t = \hat{S}_t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\gamma t})^n}{\gamma^n n!} \hat{J}^n \rho_0, \quad (3.27)$$

para o modelo de SD, e para E-model:

$$\tilde{J}\tilde{S}_t = e^{-\tilde{\gamma} t} \tilde{U}_t \tilde{J}, \quad \tilde{J}\tilde{T}_t = e^{-\tilde{\gamma} t} \tilde{U}_t e^{t\tilde{J}} \tilde{J}, \quad \tilde{T}_t = \tilde{S}_t + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{N}_t(k). \quad (3.28)$$

## 3.2 Número de fótons no campo e a sua dispersão

Primeiramente, vamos ver como o número médio de fótons e sua dispersão se comportam quando o detector está ligado, mas toda a informação sobre as detecções é descartada, ou seja, durante a evolução não-condicionada do campo.

### 3.2.1 Número médio

O número médio de fótons na cavidade durante a evolução não-condicionada é dado por

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = \text{Tr} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{T}_t \hat{\rho} \right]. \quad (3.29)$$

É fácil de notar a partir da equação-mestra (1.44) que para o modelo de SD a evolução de número médio de fótons é a mesma para todos os estados, e resume-se a um decaimento exponencial

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = \bar{n} e^{-\gamma t}. \quad (3.30)$$

Já no caso de E-model, o comportamento do número médio de fótons na cavidade pode ser obtido a partir da fórmula (3.29), resultando em

$$\langle \tilde{n}(t) \rangle = e^{-\tilde{\gamma} t} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} k \frac{(\tilde{\gamma} t)^m}{m!} p_{k+m}, \quad (3.31)$$

que prediz que a evolução do número médio de fótons na cavidade é diferente para cada estado. Vamos considerar três exemplos diferentes para exemplificar tal comportamento.

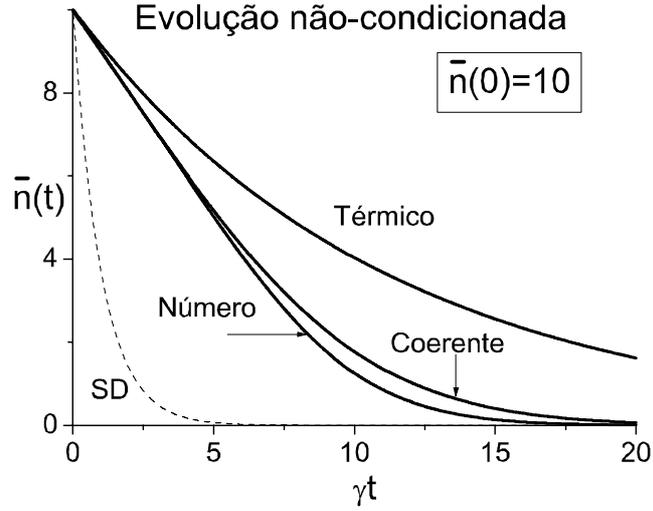


Figura 3.1: Número médio de fótons na cavidade durante a evolução não-condicionada em função de  $\gamma t$  (considerando  $\gamma = \tilde{\gamma}$ ) para E-model e o modelo de SD. No modelo de SD, a evolução é um decaimento exponencial, que não depende do estado do campo. No E-model a evolução é diferente para cada estado de campo.

- Estado coerente

$$\langle \tilde{n}(t) \rangle = e^{-(\bar{n} + \tilde{\gamma}t)} \sum_{k=1}^{\infty} k \sqrt{\frac{\bar{n}}{\tilde{\gamma}t}} I_k \left( 2\sqrt{\bar{n}\tilde{\gamma}t} \right) \quad (3.32)$$

- Estado de número

$$\langle \tilde{n}(t) \rangle = \frac{\Gamma(N+1, \tilde{\gamma}t) - \tilde{\gamma}t \Gamma(N, \tilde{\gamma}t)}{(N-1)!} \quad (3.33)$$

- Estado térmico

$$\langle \tilde{n}(t) \rangle = \bar{n} e^{-\tilde{\gamma}t/(\bar{n}+1)} \quad (3.34)$$

onde  $I_n(x)$  é a função de Bessel modificada e  $\Gamma(\alpha, x)$  é a função Gamma complementar incompleta. A figura 3.1 mostra esse comportamento para diferentes estados de campo.

### 3.2.2 Dispersão

Já que o número médio de fótons na cavidade durante a evolução não-condicionada é insensível a estados de campo no modelo de SD, mas sensível no caso de E-model, seria interessante ver o comportamento da dispersão do número de fótons segundo esses dois modelos. Para o modelo de SD tem-se

$$\langle \hat{n}^2(t) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m^2 \binom{m+n}{m} (e^{-\gamma t})^m x^n p_{m+n}, \quad x = 1 - e^{-\gamma t} \quad (3.35)$$

e para o E-model

$$\langle \tilde{n}^2(t) \rangle = e^{-\tilde{\gamma}t} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} k^2 \frac{(\tilde{\gamma}t)^m}{m!} p_{k+m}. \quad (3.36)$$

A dispersão depende do estado de campo nos dois modelos, por exemplo

- Estado coerente

$$\langle \Delta \hat{n}^2(t) \rangle = \bar{n} e^{-\gamma t} \quad (3.37)$$

$$\langle \Delta \tilde{n}^2(t) \rangle = e^{-(\tilde{\gamma}t + \bar{n})} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sqrt{\frac{\bar{n}}{\tilde{\gamma}t}} I_k \left( 2\sqrt{\bar{n}\tilde{\gamma}t} \right) - \left( e^{-(\bar{n} + \tilde{\gamma}t)} \sum_{k=1}^{\infty} k \sqrt{\frac{\bar{n}}{\tilde{\gamma}t}} I_k \left( 2\sqrt{\bar{n}\tilde{\gamma}t} \right) \right)^2 \quad (3.38)$$

- Estado de número

$$\langle \Delta \hat{n}^2(t) \rangle = N e^{-\gamma t} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{n}^2(t) \rangle &= \frac{N^2}{N!} \Gamma(N+1, \tilde{\gamma}t) - \frac{\tilde{\gamma}t}{(N-1)!} (2N-1) \Gamma(N, \tilde{\gamma}t) + \frac{(\tilde{\gamma}t)^2}{(N-2)!} \Gamma(N-1, \tilde{\gamma}t) \\ &- \left( \frac{\Gamma(N+1, \tilde{\gamma}t) - \tilde{\gamma}t \Gamma(N, \tilde{\gamma}t)}{(N-1)!} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

- Estado térmico

$$\langle \Delta \hat{n}^2(t) \rangle = \bar{n} e^{-\gamma t} (1 + 2\bar{n} e^{-\gamma t} + \bar{n}^2 e^{-2\gamma t}) \quad (3.41)$$

$$\langle \Delta \tilde{n}^2(t) \rangle = e^{-\tilde{\gamma}t/(\bar{n}+1)} \bar{n}(\bar{n}+1)(2\bar{n}+1) - (\bar{n} e^{-\tilde{\gamma}t/(\bar{n}+1)})^2 \quad (3.42)$$

### 3.3 Probabilidades de coincidência, tempos de espera e função de correlação

Nesta seção vamos nos dedicar a estudo de diversas probabilidades de contagem. A probabilidade de contagens cujas expressões analíticas já foram obtidas e discutidas usando ambos os modelos é a probabilidade  $P_k(t)$  de detectar  $k$  fótons no intervalo de tempo  $[0, t)$ , relacionada com a evolução condicionada do campo; as respectivas expressões foram dadas na seção 3.1.3. A seguir, estudaremos as probabilidades de contagem relacionadas com a evolução não-condicionada do campo na cavidade, cujo significado foi descrito na seção 1.5.

#### 3.3.1 Densidade de probabilidade de coincidência

A *densidade de probabilidade de coincidência* (CPD)  $h_t(t_1, \dots, t_m)$  é uma expressão que representa a densidade de probabilidade para uma sequência de  $m$  fotocontagens durante um intervalo de tempo  $t$ . A quantidade  $h_t(t_1, \dots, t_m) \Delta t_1 \Delta t_2 \dots \Delta t_m$  é a probabilidade de que uma contagem fotoelétrica seja registrada em cada um dos intervalos

$$[t_1, t_1 + \Delta t_1), [t_2, t_2 + \Delta t_2), \dots, [t_m, t_m + \Delta t_m), \quad (t_1 < t_2 < \dots < t_m < t),$$

escolhidos pelo experimentalista, independentemente de quantos fótons foram contados fora desses intervalos. (Para a consistência do modelo, a condição  $\gamma \Delta t_k < 1$ , ( $k = 1, \dots, m$ ) deve ser satisfeita.) Uma generalização da expressão de CPD (dada em [13]) é

$$h_t(t_1, \dots, t_m) = \text{Tr}[\hat{T}_{t-t_m} \hat{J}_A \dots \hat{J}_A \hat{T}_{t_2-t_1} \hat{J}_A \hat{T}_{t_1} \hat{\rho}_0], \quad (3.43)$$

relembrando que  $\hat{T}_t$  é o operador que evolui o campo e os  $m$  super-operadores  $\hat{J}_A$  representam os fótons contados nos tempos  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .

No modelo de SD, CPD depende da soma  $t_{1 \leftarrow m} \equiv \sum_{k=1}^m t_k$  (e não do intervalo de tempo  $t$ ) [13]:

$$h_t(t_1, \dots, t_m) = m! \gamma^m e^{-\gamma t_{1 \leftarrow m}} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{m+l}{m} p_{m+l} \quad (3.44)$$

Notem que a série em (3.44) converge apenas para o conjunto de números  $\{p_n\}$  que decrescem mais rapidamente de que  $(n-m)!/n! \sim n^{-m}$  para  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, para muitos estados quânticos a CPD simplesmente não existe no modelo de SD, especialmente para  $m \gg 1$ . Mesmo quando elas existem, seu comportamento como função de número de contagens  $m$  mostra-se muito sensível a pequenas mudanças de  $m$ , como mostrado em exemplos concretos abaixo (ver, por exemplo, figura 3.3). Essa “falha” da teoria de SD é uma consequência direta da escolha do operador de uma contagem na forma (3.1): cada vez que o operador  $\hat{J}$  age sobre o operador-densidade do campo na equação (3.43), ele não apenas desloca a distribuição de número de fótons  $\{p_n\}$  de um quantum, mas também, aumenta significativamente (por fator  $\sqrt{n}$ ) o peso do “cauda” da distribuição (termos com  $n \gg 1$ ). Essa mudança da distribuição de número de fótons pode não ser muito significativa para um ou dois clicks ( $m = 1, 2$ ), mas para  $m \gg 1$  a distribuição inicial torna-se totalmente deformada.

Este comportamento não-físico (i.e., uma sensibilidade extrema à forma do “cauda” da distribuição) é eliminada no modelo não-linear de uma maneira bastante natural, desde que a função  $F(\hat{n})$  na equação (3.2) seja escolhida de tal forma que ela leva a alguma “saturação” do coeficiente  $F(n-1)\sqrt{n}$  (que agora substitui o fator usual  $\sqrt{n}$ ) para  $n \gg 1$ . O caso mais comum é encontrado no E-model, em que  $F(n-1)\sqrt{n} = 1$ . Neste caso, as aplicações sequenciais e alternadas de  $\tilde{T}$  e  $\tilde{J}$  sobre  $\hat{\rho}_0$  levam a

$$\tilde{J}\tilde{T}_{t_m-t_{m-1}}\tilde{J}\cdots\tilde{J}\tilde{T}_{t_2-t_1}\left(\tilde{J}\tilde{T}_1\hat{\rho}_0\right) = e^{-\tilde{\gamma}t_m}\hat{\mathcal{U}}_{t_m}e^{t_m\tilde{J}}\tilde{J}^m\hat{\rho}_0. \quad (3.45)$$

O lado direito da Eq. (3.45) pode também ser escrito como  $\tilde{J}^m\tilde{T}_{t_m}\hat{\rho}_0$ , portanto, a evolução depende apenas do tempo da última contagem. Aplicando  $\tilde{T}_{t-t_m}$  sobre Eq. (3.45) temos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{t-t_m}\tilde{J}\tilde{T}_{t_m-t_{m-1}}\cdots\tilde{J}\tilde{T}_1\hat{\rho}_0 &= \\ e^{-\tilde{\gamma}t_m}\tilde{T}_{t-t_m}\hat{\mathcal{U}}_{t_m}e^{t_m\tilde{J}}\tilde{J}^m\hat{\rho}_0 &= e^{-\tilde{\gamma}t_m}\hat{\mathcal{U}}_t\left\{e^{\tilde{\gamma}(t-t_m)\Lambda/2}e^{t_m\tilde{J}}\tilde{J}^m\hat{\rho}_0e^{\tilde{\gamma}(t-t_m)\Lambda/2}\right. \\ &+ \left.\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t-t_m}e^{-\tilde{\gamma}t'}e^{-\tilde{\gamma}(t-t_m-t')\Lambda/2}e^{t_m\tilde{J}}\tilde{J}^{k+m}\hat{\rho}_0e^{-\tilde{\gamma}(t-t_m-t')\Lambda/2}\frac{t'^{k-1}}{(k-1)!}dt'\right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

O cálculo do traço de Eq. (3.46) nos dá a CPD

$$\begin{aligned} \tilde{h}_t^{(m)} &= \tilde{\gamma}^m \left\{ e^{-\tilde{\gamma}t_m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}t_m)^l}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} p_{m+k+l} + \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \Omega(k, \tilde{\gamma}t_m) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}(t-t_m))^l}{l!} p_{m+k+l+1} \right. \right. \\ &- \left. \left. \sum_{k=0}^{\infty} \Omega(k, \tilde{\gamma}(t-t_m)) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}t_m)^l}{l!} p_{m+k+l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} \Omega(l, \tilde{\gamma}t_m) p_{m+l+1} \right] e^{-\tilde{\gamma}t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde todas as séries convergem para alguma distribuição normalizada  $\{p_n\}$ . A fórmula (3.47) pode ser simplificada se escolhermos  $t_m = t$ , significando que a  $m$ -ésima contagem,

ou o último click, também desliga o detector. A interação entre o campo e o detector é interrompida, e o campo evolui livremente com  $\hat{U}_t$ , portanto a equação (3.47) torna-se

$$\tilde{h}_t(t_1, \dots, t_{m-1}, t) = \tilde{\gamma}^m e^{-\tilde{\gamma}t} \sum_{l=0}^{\infty} \Omega(l, \tilde{\gamma}t) p_{m+l}. \quad (3.48)$$

Essa CPD depende apenas do tempo da última contagem. Além disso, devido a propriedade  $\Omega(k, x) < \exp(x)$  para  $x > 0$  e qualquer  $k$ , que segue imediatamente da definição (3.24), todas as CPD's no E-model são uniformemente limitadas

$$\tilde{h}_t^{(m)}(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) < \tilde{\gamma}^m, \quad (3.49)$$

para estados de campo normalizados arbitrários.

A seguir nós damos as CPD's para alguns estados de campo:

(a) Para o *estado coerente*, a probabilidade de encontrar  $n$  fótons no campo é  $p_n = \exp[-\bar{n}] \bar{n}^n / n!$ , logo

$$h_t(t_1, \dots, t_m) = \gamma^m \bar{n}^m \exp(-\gamma t_{1 \leftrightarrow m}), \quad (3.50)$$

para o modelo de SD, enquanto que no E-model

$$\tilde{h}_t(t_1, \dots, t_{m-1}, t) = \tilde{\gamma}^m \left[ 1 - e^{-\tilde{\gamma}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}t)^k \Gamma(l+m, \bar{n})}{k!(l+m-1)!} \right]. \quad (3.51)$$

(b) Para o *estado de número* ou *estado de Fock*,  $p_n = \delta_{n,N}$ , o modelo de SD fornece

$$h_t(t_1, \dots, t_m) = \gamma^m \frac{N!}{(N-m)!} \exp(-\gamma t_{1 \leftrightarrow m}). \quad (3.52)$$

No E-model obtém-se

$$\tilde{h}_t^{(m)} = \tilde{\gamma}^m \Omega(N-m, \tilde{\gamma}t) e^{-\tilde{\gamma}t}. \quad (3.53)$$

(c) Para o *estado térmico*,  $p_n = \bar{n}^n / (\bar{n} + 1)^{n+1}$ , o modelo de SD dá

$$h_t(t_1, \dots, t_m) = \gamma^m m! \bar{n}^m \exp(-\gamma t_{1 \leftrightarrow m}), \quad (3.54)$$

enquanto que no E-model, as fórmulas (3.47) e (3.48) levam ao mesmo resultado

$$\tilde{h}_t(t_1, \dots, t_{m-1}, t) = \tilde{h}_t(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) = \tilde{\gamma}^m \left( \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^m e^{-\tilde{\gamma}t/(\bar{n}+1)}. \quad (3.55)$$

As probabilidades de coincidência, calculadas a partir das equações (3.50), (3.52) e (3.54) (correspondentes ao modelo de SD) podem assumir valores bastante grandes mesmo para pequenos valores de  $\gamma \Delta t$ , enquanto que aquelas obtidas através das equações (3.51), (3.53) (3.55) (as do E-model) sempre são limitados por 1 se  $\tilde{\gamma} \Delta t < 1$ , independentemente do valor de  $\bar{n}$ .

Na figura 3.2 nós desenhamos a CPD dividida por  $\tilde{\gamma}^m$  em função de  $\tilde{\gamma}t$ , para o E-model. Nós não desenhamos curvas análogas para o modelo de SD, porque neste caso todas elas apresentam decaimento exponencial como uma função de soma de todos os tempos de detecção.

Na figura 3.3 nós desenhamos CPD dividida por  $\gamma^m$ , agora como função do número de contagens  $m$ , para o modelo de SD, supondo que  $t_k = kt_1$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  e que a duração

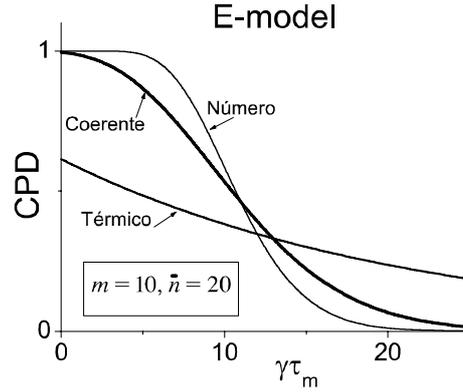


Figura 3.2: CPD normalizada (dividida por  $\tilde{\gamma}^m \tilde{h}_t(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ) para o E-model: ver Eq. (3.48), como função de  $\tilde{\gamma}t$  (com  $t = t_m$ ), para três estados de campo: estado de número, estado coerente e estado térmico. O parâmetro  $m = 10$  e o número médio de fótons  $\bar{n} = 20$  são os mesmos para os três estados. A CPD é sempre menor que 1 e decresce monotonicamente.

de tempo  $t_m = mt_1$  é fixa (obviamente,  $m$  pode assumir apenas valores inteiros, mas nós juntamos os pontos por conveniência). Nós vemos que a CPD pode atingir valores enormes na teoria SD, especialmente para o estado térmico, devido à presença do termo  $m!\bar{n}^m$  na Eq. (3.54), mesmo para valores baixos de  $m$  (por exemplo, para  $m=10$  e  $\bar{n} = 30$  o fator  $m!\bar{n}^m$  é da ordem de  $10^{21}$ ). Mais que isso, o comportamento da CPD no modelo de SD é muito sensível a uma competição entre os termos fatorial e exponencial. De fato, para iguais espaçamentos de tempo, a Eq. (3.54) para o estado térmico toma a forma

$$h_t(t_1, 2t_1, \dots, mt_1)_{therm} = e^{-\gamma t_m/2} (\gamma \bar{n} e^{-\gamma t_m/2})^m m!, \quad (3.56)$$

enquanto que para o estado coerente o fator  $m!$  não comparece,

$$h_t(t_1, 2t_1, \dots, mt_1)_{coh} = e^{-\gamma t_m/2} (\gamma \bar{n} e^{-\gamma t_m/2})^m. \quad (3.57)$$

Portanto, mesmo pequenas variações de parâmetros (por exemplo  $\gamma t_m$  nos exemplos acima) podem acarretar mudanças drásticas do comportamento qualitativo da CPD. Por exemplo, no caso de estado coerente, o incremento exponencial de CPD para  $\gamma \bar{n} e^{-\gamma t_m/2} > 1$  muda para decaimento exponencial se  $\gamma \bar{n} e^{-\gamma t_m/2} < 1$ , enquanto que a CPD do estado térmico continua a crescer devido à presença do termo fatorial. Tal comportamento de CPD torna-a praticamente inútil na teoria SD. Esse problema é removido no E-model, como é visto claramente na figura 3.4, onde todas as curvas são limitadas por 1.

### 3.3.2 Densidade de probabilidade condicional de duas contagens

A densidade de probabilidade condicional de duas contagens (TCCP)

$$C(t_1 + \tau | t_1) := \frac{\text{Tr}(\hat{J}\hat{T}_\tau \hat{J}\hat{T}_{t_1} \hat{\rho}_0)}{\text{Tr}(\hat{J}\hat{T}_{t_1} \hat{\rho}_0)} \quad (3.58)$$

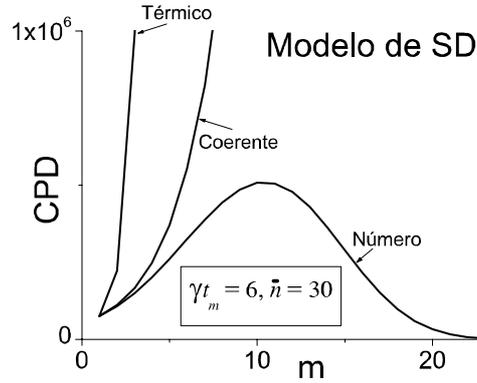


Figura 3.3: CPD normalizada (dividida por  $\gamma^m$ )  $h_t(t_1, t_2, \dots, t_m)$  para o modelo de SD: ver Eq. (3.44), como função de  $m$ , para três estados de campo: estado de número, estado coerente e estado térmico. Nós consideramos espaçamentos iguais  $t_k = k\tau$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . O parâmetro  $\gamma t_m = 6$  e o número médio de fótons  $\bar{n} = 30$  são os mesmos para os três estados. Note que a CPD pode assumir valores muito grandes, e nem sempre é menor que 1 como na Fig. 3.2.

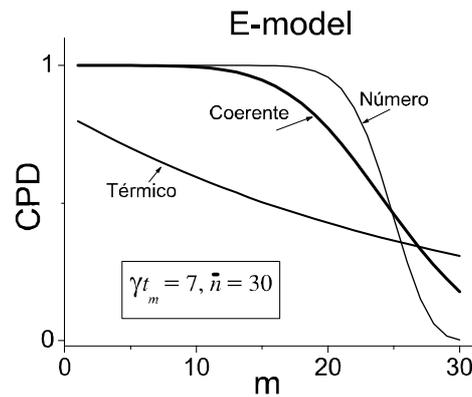


Figura 3.4: CPD normalizada (dividida por  $\tilde{\gamma}^m$ )  $\tilde{h}_t(t_1, t_2, \dots, t_m)$  para o E-model: ver Eq. (3.48), como função de  $m$ , para três estados de campo: estado de número, estado coerente e estado térmico. O parâmetro  $\gamma t_m = 7$  e o número médio de fótons  $\bar{n} = 30$  são os mesmos para os três estados. Note que a CPD é sempre menor que 1 e descrece monotonicamente.

significa que, se com certeza, um fóton foi detectado no tempo  $t_1$ ,  $C(t_1 + \tau|t_1)\Delta\tau$  é a probabilidade de que outro fóton seja contado no intervalo entre  $t_1 + \tau$  e  $t_1 + \tau + \Delta\tau$ , independentemente de número de fótons contados em outros tempos. No modelo de SD, a TCCP é dada por

$$C(t_1 + \tau|t_1) = \frac{\gamma e^{-\gamma(t_1+\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)p_{n+2}}{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p_{n+1}}, \quad (3.59)$$

enquanto que no E-model a TCCP depende de todos os três parâmetros,  $t_1$ ,  $\tau$  e  $t_1+\tau$ :

$$\tilde{C}(t_1 + \tau|t_1) = \frac{\tilde{\gamma} e^{-\tilde{\gamma}\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n, \tilde{\gamma}(t_1 + \tau)) p_{n+2}}{\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n, \tilde{\gamma}t_1) p_{n+1}}. \quad (3.60)$$

Para três diferentes estados de campo temos:

(a) *Estado coerente*:

$$C(t_1 + \tau|t_1) = \gamma \bar{n} e^{-\gamma(t_1+\tau)}, \quad (3.61)$$

$$\tilde{C}(t_1 + \tau|t_1) = \tilde{\gamma} \frac{1 - e^{-\tilde{\gamma}(t_1+\tau)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[\tilde{\gamma}(t_1+\tau)]^l}{l!(l+1)!} \Gamma(l+2, \bar{n})}{1 - e^{-\tilde{\gamma}t_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}t_1)^l}{l!} \Gamma(l+1, \bar{n})}. \quad (3.62)$$

(b) *Estado de número*:

$$C(t_1 + \tau|t_1) = \gamma(N-1)e^{-\gamma(t_1+\tau)}, \quad (3.63)$$

$$\tilde{C}(t_1 + \tau|t_1) = \tilde{\gamma}(N-1) \frac{\Gamma(N-1, \tilde{\gamma}(t_1 + \tau))}{\Gamma(N, \tilde{\gamma}t_1)}. \quad (3.64)$$

(c) *Estado térmico*:

$$C(t_1 + \tau|t_1) = 2\gamma\bar{n}e^{-\gamma(t_1+\tau)}, \quad (3.65)$$

$$\tilde{C}(t_1 + \tau|t_1) = \tilde{\gamma} \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} e^{-\tilde{\gamma}\tau/(\bar{n}+1)} \quad (3.66)$$

Na figura 3.5 são desenhadas as TCCP's divididas por  $\tilde{\gamma}$  como função de  $\tilde{\gamma}\tau$  para E-model, que demonstram comportamentos diferentes para cada estado de campo. Nós não desenhamos as curvas para o modelo de SD, porque elas mostram qualitativamente um mesmo decaimento exponencial. Note, entretanto, que no E-model TCCP  $\times \Delta\tau < 1$  sempre, enquanto que no modelo de SD esse produto pode exceder 1 para valores pequenos ou moderados de  $\gamma\tau$  (lembrando que  $\gamma\Delta\tau$  deve ser menor que 1).

### 3.3.3 Tempos de espera

Também podemos comparar dois tempos característicos [35, 87] para ambos os modelos, o tempo de espera *incondicional*  $\tau_{unc}$  e o *intervalo de tempo*, ou tempo de espera *condicional*  $\tau_{con}$ , descritos na seção 1.5. No modelo de SD, obtemos

$$W_u(t_1 + \tau|t_1) = \gamma e^{-\gamma(t_1+\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(1 - e^{-\gamma t_1} + e^{-\gamma(t_1+\tau)}\right)^n p_{n+1}, \quad (3.67)$$

$$W_c(t_1 + \tau|t_1) = \frac{\gamma}{\bar{n}} e^{-\gamma(t_1+\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(1 - e^{-\gamma t_1} + e^{-\gamma(t_1+\tau)}\right)^n p_{n+2}, \quad (3.68)$$

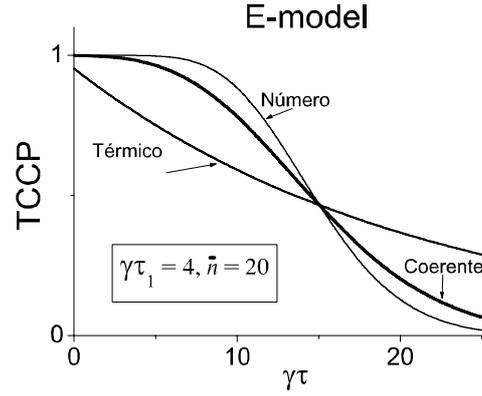


Figura 3.5: TCCP normalizada (dividida por  $\tilde{\gamma}$ ) para o E-model como função de  $\tilde{\gamma}\tau$ , para três estados de campo: estado de número, estado coerente e estado térmico. Nós consideramos  $\tilde{\gamma}t_1 = 4$  e  $\bar{n} = N = 20$  nas Eqs. (3.62), (3.64) e (3.66).

enquanto que no E-model, tem-se

$$\tilde{W}_u(t_1 + \tau|t_1) = \tilde{\gamma}e^{-\tilde{\gamma}\tau} \left[ e^{-\tilde{\gamma}t_1} \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n, \tilde{\gamma}t_1) p_{n+1} \right], \quad (3.69)$$

$$\tilde{W}_c(t_1 + \tau|t_1) = \tilde{\gamma}e^{-\tilde{\gamma}\tau} \left[ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n, \tilde{\gamma}t_1) p_{n+2}}{\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n, \tilde{\gamma}t_1) p_{n+1}} \right]. \quad (3.70)$$

Notem que as duas densidades de probabilidade condicionais,  $\tilde{C}(t_1 + \tau|t_1)$  e  $\tilde{W}_c(t_1 + \tau|t_1)$  só diferem entre si na dependência temporal da função  $\Omega$ , equação (3.24), presente no seu numerador. Enquanto que na eq. (3.60) ela depende de  $t_1 + \tau$ , na eq. (3.70) a dependência é de  $t_1$ . Além disso, a dependência de  $\tau$  nas probabilidades (3.69) e (3.70) (correspondentes ao E-model) aparece somente como um expoente em um fator multiplicando a função que depende somente de  $t_1$ . Algumas expressões explícitas para estas densidades de probabilidade condicional e não-condicional são dadas no Apêndice A.

No E-model, os tempos de espera são calculados fazendo as substituições  $W_{u,c} \rightarrow \tilde{W}_{u,c}$ . É imediato verificar que tempos condicional e não-condicional são os mesmos para qualquer estado de campo:

$$\tilde{\tau}_{unc} = \tilde{\tau}_{con} = \gamma^{-1}, \quad (3.71)$$

uma propriedade que caracteriza um processo aleatório e estacionário [88].

Para o modelo de SD, os tempos de espera dependem do estado de campo, ver [35]:

(a) *Estado coerente:*

$$\tau_{unc} = \tau_{con} = \frac{\Gamma(0, \bar{n}e^{-\gamma t_1}) - \ln(\bar{n}e^{-\gamma t_1}) - \gamma'}{\gamma [\exp(\bar{n}e^{-\gamma t_1}) - 1]}, \quad (3.72)$$

onde  $\gamma' = 0.57721\dots$  é a constante de Euler. Os tempos de espera são os mesmos, porque as respectivas probabilidades são as mesmas.

(b) *Estado de número:*

$$\tau_{unc} = \frac{\sum_{n=1}^N n^{-1} \binom{N}{n} (1 - e^{-\gamma t_1})^{N-n} (e^{-\gamma t_1})^n}{\gamma [1 - (1 - e^{-\gamma t_1})^N]}, \quad (3.73)$$

$$\tau_{con} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} n^{-1} \binom{N-1}{n} (1 - e^{-\gamma t_1})^{N-n-1} (e^{-\gamma t_1})^n}{\gamma [1 - (1 - e^{-\gamma t_1})^{N-1}]}. \quad (3.74)$$

Para  $t_1 = 0$ ,  $\tau_{unc} = 1/(\gamma N)$  e  $\tau_{con} = 1/(\gamma(N-1))$ .

(c) *Estado térmico:*

$$\tau_{unc} = \frac{\ln(1 + \bar{n}e^{-\gamma t_1})}{\gamma \bar{n}e^{-\gamma t_1}}, \quad \tau_{con} = \frac{\bar{n}e^{-\gamma t_1} + \ln(1 + \bar{n}e^{-\gamma t_1})}{\gamma \bar{n}e^{-\gamma t_1} (\bar{n}e^{-\gamma t_1} + 2)} \quad (3.75)$$

Para  $t_1 = 0$ ,  $\tau_{unc} = \ln(1 + \bar{n})/(\gamma \bar{n})$  e  $\tau_{con} = (\bar{n} + \ln(1 + \bar{n})) / (\gamma \bar{n}(\bar{n} + 2))$ .

Portanto, uma diferença importante entre os dois modelos ocorre na estimativa dos tempos de espera: enquanto que no modelo de SD eles dependem significativamente de estado de campo, no E-model eles são insensíveis a ele. Para efeito de comparação, na figura 3.6 nós desenhamos os tempos de espera em função de  $\gamma t_1$ . A linha horizontal corresponde a um tempo de espera constante e independente do estado quântico no E-model (considerando  $\gamma = \tilde{\gamma}$ ). No modelo de SD, todos os tempos de espera tendem ao mesmo limite, desde que o produto  $\bar{n}e^{-\gamma t_1}$  seja pequeno o bastante (tende a zero). Se  $t_1 = 0$ , então as predições do modelo de SD e de E-model a respeito de tempos de espera coincidem aproximadamente para estados quânticos com  $\bar{n} \ll 1$  (pois neste caso os efeitos de não-linearidade são pequenos, logo os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{E}_-$  coincidem aproximadamente para tais estados). Também, ambos os modelos fornecem resultados próximos no limite oposto de estados altamente excitados com  $\bar{n} \gg 1$  (e  $t_1 = 0$ ), se “normalizarmos” o coeficiente  $\tilde{g}$ , fazendo  $\tilde{\gamma} \approx \gamma \bar{n}$  (o que também concorda com as ações dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{E}_-$  sobre tais estados).

### 3.3.4 A função de correlação de segunda ordem

A função normalizada de coerência temporal de segunda ordem

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{h(t_1, t_1 + \tau)}{[h(t_1)]^2} = \frac{\text{Tr} [\hat{J}\hat{T}_\tau \hat{J}\hat{T}_{t_1} \hat{\rho}_0]}{\text{Tr} [\hat{J}\hat{T}_{t_1} \hat{\rho}_0]^2} \quad (3.76)$$

informa sobre o fenômeno de “bunching” ( $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ ) ou “antibunching” ( $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ ) de fótons. No modelo de SD

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0)e^{-\gamma\tau}, \quad g^{(2)}(0) = \frac{\bar{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2}, \quad (3.77)$$

para qualquer estado de campo, logo apenas o fenômeno de “bunching” de fótons é possível. No E-model

$$\tilde{g}^{(2)}(\tau) = e^{\gamma(t_1 - \tau)} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n, \gamma(t_1 + \tau)) p_{n+2}}{[\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n, \gamma t_1) p_{n+1}]^2} \quad (3.78)$$

que depende do estado de campo, como pode ser visto nos três exemplos abaixo:

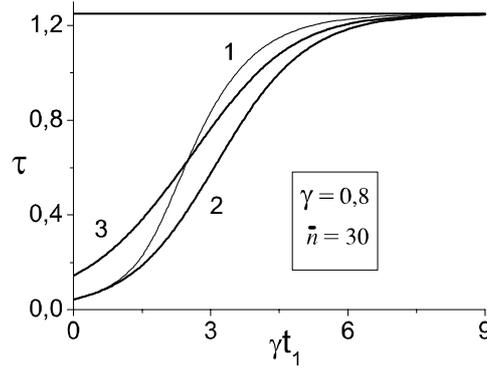


Figura 3.6: Tempos de espera como função de  $\gamma t_1$  para o modelo de SD e o E-model (aqui consideramos  $\gamma = \tilde{\gamma}$ ). A linha horizontal corresponde ao E-model, enquanto as curvas 1-3 são relacionadas ao modelo de SD. A curva 1 mostra o tempo condicional e incondicional coincidentes para o estado coerente. Curva 2 – tempo condicional para o estado térmico. Curva 3 – tempo incondicional para o estado térmico.

(a) *Estado coerente:*

$$\tilde{g}^{(2)}(\tau) = e^{\tilde{\gamma}(t_1 - \tau)} e^{\bar{n}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (\bar{n}^n / (n+2)!) \Omega(n, \tilde{\gamma}(t_1 + \tau))}{[\sum_{n=0}^{\infty} (\bar{n}^n / (n+1)!) \Omega(n, \tilde{\gamma}t_1)]^2}. \quad (3.79)$$

(b) *Estado de número:*

$$\tilde{g}^{(2)}(\tau) = e^{\tilde{\gamma}(t_1 - \tau)} \frac{\Omega(N-2, \tilde{\gamma}(t_1 + \tau))}{[\Omega(N-1, \tilde{\gamma}t_1)]^2}. \quad (3.80)$$

(c) *Estado térmico:*

$$\tilde{g}^{(2)}(\tau) = \tilde{g}^{(2)}(0) e^{-\tilde{\gamma}\tau/(\bar{n}+1)}, \quad \tilde{g}^{(2)}(0) = e^{\tilde{\gamma}t_1/(\bar{n}+1)}. \quad (3.81)$$

Para os três estados de campo  $\tilde{g}^{(2)}(\tau) < \tilde{g}^{(2)}(0)$ , o fenômeno de “bunching” também prevalece no E-model.

É interessante notar que ao comparar o comportamento dos tempos de espera e da função de coerência de segunda ordem normalizada, notamos que enquanto que para o modelo de SD os tempos de espera dependem do estado de campo e no E-model ocorre o contrário para a função de coerência de segunda ordem normalizada: no modelo de SD ela não depende de estado de campo e no E-model – sim.

### 3.4 “Entropia condicional”

Nesta seção vamos calcular a “entropia condicional”, uma grandeza que caracteriza o “conhecimento” que o experimentalista adquire sobre o campo ao detectar os fotoelétrons. Assim, no instante inicial, quando nenhum fóton ainda não foi registrado, o conhecimento sobre o campo é mínimo. À medida que o tempo passa e os fotoelétrons são detectados e

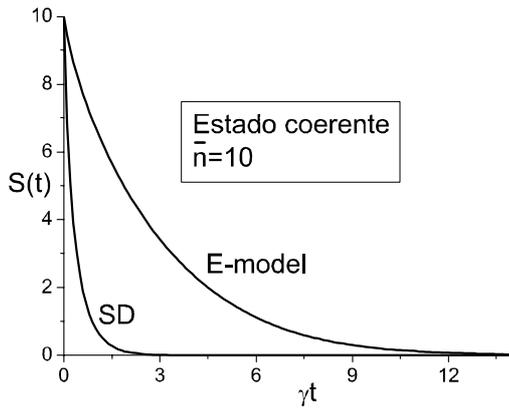


Figura 3.7: “Entropia condicional”: estado coerente.

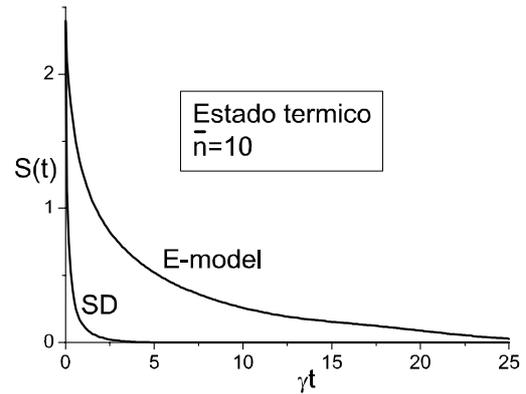


Figura 3.8: “Entropia condicional”: estado térmico.

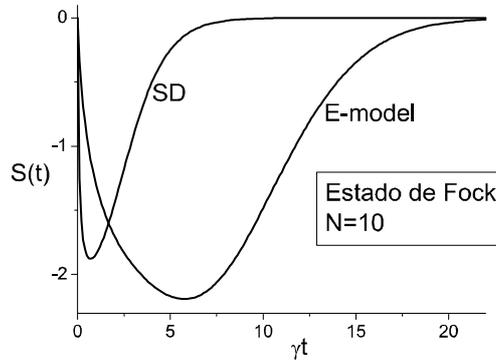


Figura 3.9: “Entropia condicional” para o estado de número para ambos os modelos.

registrados, a informação sobre o sistema aumenta, até que para  $t \rightarrow \infty$  a estatística de fotoelétrons recupera a estatística do campo inicial (no caso ideal, em que nenhum fóton é perdido para o meio). Uma definição conveniente da “entropia condicional” para campos com estatística “contínua” (por exemplo, estado coerente, estado térmico, etc) é

$$\mathcal{S}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \ln \left( \frac{P_k(t)}{p_k} \right). \quad (3.82)$$

Para  $t = 0$ , a “entropia condicional” é dada por  $\mathcal{S} = -\ln p_0$ : vemos que ela é maior que zero e depende da estatística do campo; para  $t \rightarrow \infty$ ,  $P_k(t) \rightarrow p_k$  e, portanto,  $\mathcal{S} \rightarrow 0$ , significando que a máxima informação sobre o campo foi obtida. As figuras 3.7 e 3.8 mostram o comportamento da “entropia condicional” para estado coerente e estado térmico, ambos com o mesmo número médio inicial de fótons. Vemos que em ambos os casos a “entropia condicional” tende a zero mais rapidamente no modelo de SD.

No entanto, a “entropia condicional” definida de acordo com a fórmula (3.82) não pode ser aplicada para um campo com estatística discreta, como, por exemplo, superposição

de estados de Fock: de fato, neste caso teríamos termos do tipo  $\ln 0 = -\infty$ . Neste caso, podemos redefinir a “entropia condicional” da seguinte maneira: se  $\hat{\rho}_0 = p_{i_1}|i_1\rangle\langle i_1| + p_{i_2}|i_2\rangle\langle i_2| + \dots + p_{i_m}|i_m\rangle\langle i_m|$  ( $p_{i_k} \neq 0$ ), a entropia condicional é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= P_{i_1}(t) \ln \left( \frac{P_{i_1}(t)}{p_{i_1}} \right) + P_{i_2}(t) \ln \left( \frac{P_{i_2}(t)}{p_{i_2}} \right) + \dots + P_{i_m}(t) \ln \left( \frac{P_{i_m}(t)}{p_{i_m}} \right) \\ &= \sum_{k=i_1}^{i_m} P_k(t) \ln \left( \frac{P_k(t)}{p_k} \right), \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Com essa definição, a entropia começa de um certo valor que depende da presença da componente de vácuo; com o passar de tempo a entropia diminui, devido ao fator  $\ln(P_k(t)) < 0$ , demonstrando que a informação sobre o campo diminuiu, devido à dispersão das probabilidades; finalmente, para  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{S}(\infty) = 0$  significando que a informação completa sobre o campo foi obtida. Portanto, vemos que o comportamento da “entropia condicional” fornece informação sobre quão rápido o “conhecimento” sobre o sistema é recuperado a partir das fotocontagens. A figura 3.9 mostra o comportamento da “entropia condicional” para estado de Fock  $\rho_0 = |N\rangle\langle N|$ .

### 3.5 Discussão e conclusões

Srinivas e Davies identificaram uma inconsistência, mencionada no seu artigo, que também ocorre em outros modelos de fotodeteção contínua, quando o super-operador de salto-quântico, definido na equação (3.1), é usado na teoria. Aqui, nós propusemos uma modificação do modelo de SD, que consiste em substituir os operadores de “levantamento” e “abaixamento” usuais  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  por operadores “não-lineares”, equação (2.15). Mostramos explicitamente que nenhuma inconsistência surge neste caso; em particular, todas as densidades de probabilidades multi-temporais existem e são bem comportadas para estados quânticos arbitrários, ao contrário do modelo de SD.

De ponto de vista de física, o E-model pode ser considerado, em certo sentido, como um caso particular de uma grande família de modificações não-lineares possíveis e admissíveis do esquema de SD. Ele corresponde, presumidamente, a situações com altas intensidades do campo e uma saturação da taxa de contagem. Por essa razão, algumas previsões específicas do E-model (tais como, por exemplo, um decaimento não-exponencial de número de fótons na cavidade durante a evolução não-condicionada [24], ou independência de tempos de espera de estados de campo) são bem diferentes das previsões do modelo de SD, que funciona bem (como foi mostrado em numerosas aplicações desse modelo) para intensidades relativamente baixas. Obviamente, o modelo de SD é um limite de não-linearidade fraca de modelos não-lineares.

Muitos estudos anteriores de fenômenos diferentes, tais como medições quânticas não-destrutivas [80], determinação de estados de campo sob processo de fotodeteção contínua [44, 65], teoria quântica de medições de quadraturas de campo [89], geração de estados especiais de campo via medições contínuas [49] ou controle de grau de emaranhamento entre dois campos [14], fizeram uso do modelo de fotodeteção de SD. Nós acreditamos que aplicações dentro de suas modificações não-lineares (incluindo o presente E-model) podem trazer novas descobertas tanto para teoria de medição quântica, quanto para experimentos.

# Capítulo 4

## Fotocontagem não-ideal

Neste capítulo estudaremos o processo de fotodeteção não-ideal, em que uma parte de fótons contidos inicialmente na cavidade pode falhar a ser detectada. Para lidar com esse problema, consideraremos dois processos distintos responsáveis pelas perdas: o primeiro deles consiste de absorção de fótons pelas paredes imperfeitas da cavidade, enquanto que o segundo surge devido a um detector imperfeito, incapaz de registrar todos os fótons por ele absorvidos. Vamos estudar esses dois processos usando dois modelos diferentes, o de SD e o E-model. Alguns dos resultados expostos neste capítulo são novos.

### 4.1 Introdução

Nos capítulos anteriores consideramos experimentos de fotocontagem em que todos os fótons presentes inicialmente na cavidade são detectados à medida que o tempo passa. Isso permitia a determinação exata do operador-densidade inicial a partir de experimentos de contagem de fótons. Mas o que aconteceria se a detecção não fosse perfeita, ou seja, se uma parte de fótons fosse irreversivelmente perdida? Certamente, o operador-densidade reconstituído a partir de experimentos de contagem seria diferente do operador-densidade inicial, pois a perda de fótons proporcionaria a perda de informação sobre o campo.

De fato, todos os experimentos sofrem de efeitos dissipativos em maior ou menor grau, e por isso é importante obter as fórmulas de contagem para os casos não-ideais, para uma análise mais realista dos resultados. Na prática, as perdas ocorrem devido a dois fatores, principalmente. O primeiro deles é a imperfeição técnica de detectores, que são instrumentos muito sensíveis (para serem capazes de detectar fótons individuais) e, por isso, são sujeitos a eventuais falhas. O segundo efeito vem da própria natureza: como o campo se encontra em uma cavidade, ele interage com as paredes, e não importa o quão refletoras elas sejam, elas sempre absorvem alguns fótons. Uma grandeza que caracteriza a “perfeição” de uma cavidade é o seu fator de qualidade  $Q$  [17]. Pela definição, um feixe de luz contido dentro de uma cavidade é atenuado (decai a  $1/e$  do seu valor inicial) no tempo  $Q/\nu$ , onde  $\nu$  é a frequência do feixe. Assim, os efeitos da dissipação podem ser reduzidos ao produzir cavidades com fator de qualidade  $Q$  mais alto, mas eles não podem ser eliminados totalmente.

A seguir vamos modelar matematicamente os efeitos dissipativos descritos acima.

Primeiro, iremos generalizar o E-model, incluindo nele os efeitos dissipativos na seção 4.2. Veremos que a introdução de dissipação no modelo é bem simples formalmente, e eventuais dificuldades aparecem na hora de cálculos analíticos. Depois, na seção 4.3 vamos incluir a dissipação no modelo de SD. Por fim, na seção 4.4, apresentaremos as conclusões. Os resultados das seções 4.2 e 4.3 são novos e foram obtidos durante o trabalho de mestrado, embora alguns dos resultados da seção 4.3 já foram obtidos por outros autores usando um outro método.

## 4.2 E-model

Consideremos um campo eletromagnético contido dentro de uma cavidade fechada. Podemos modelar as paredes da cavidade como sendo compostas por um número muito grande de átomos à temperatura  $T$ . Nos experimentos de fotodeteção é, geralmente, usada luz com espectro localizado na faixa que vai desde microondas até a luz visível. Nestes casos, a energia de um fóton do campo, igual a  $h\nu$  ( $h$  é a constante de Planck e  $\nu$  é a frequência), é muito maior de que a energia de um fóton térmico, dada por  $\frac{1}{2}k_B T$  ( $k_B$  é a constante de Boltzmann). Portanto, no nosso estudo podemos considerar  $T \approx 0$ , o que não afeta significativamente a física, mas permite obter expressões exatas.

O sistema composto por um campo eletromagnético livre, descrito pelo Hamiltoniano  $\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{n}$ , interagindo com um reservatório de átomos à temperatura  $T = 0$ , obedece à equação-mestra bem familiar na óptica quântica [17, 40]

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\rho}] - \frac{\tilde{\gamma}_D}{2} (\hat{n}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{n} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger), \quad (4.1)$$

onde  $\tilde{\gamma}_D$  é o parâmetro de acoplamento entre o campo e o conjunto de átomos. Ao inserirmos um detector dentro da cavidade, a equação-mestra que descreve o sistema *campo-detector-cavidade* ganha outro termo, devido à interação do campo com o detector, proporcional ao acoplamento  $\tilde{\gamma}$  entre o campo e o detector. Com isso, a equação-mestra torna-se

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -i [\hat{H}_0, \hat{\rho}] - \frac{\tilde{\gamma}_D}{2} (\hat{n}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{n} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger) - \frac{\tilde{\gamma}}{2} (\hat{\Lambda}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\Lambda} - 2\hat{E}_-\hat{\rho}\hat{E}_+). \quad (4.2)$$

Para tornar a notação mais curta, vamos definir dois super-operadores que irão nos acompanhar até o fim do capítulo:

$$\hat{\Theta}\hat{\rho} \equiv \hat{E}_-\hat{\rho}\hat{E}_+, \quad \hat{A}\hat{\rho} \equiv \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger. \quad (4.3)$$

Para obter as fórmulas de contagem vamos utilizar o método da equação-mestra descrito na seção 1.4. Primeiro, precisamos definir o operador de uma contagem: no caso geral, em que o detector pode ser perfeito ou não, é natural escolhê-lo como

$$\tilde{J}\hat{\rho} = \eta\tilde{\gamma}\hat{\Theta}\hat{\rho}, \quad (4.4)$$

onde  $\eta$  é uma constante fenomenológica que caracteriza a eficiência do detector: ela é igual a probabilidade de um fóton ser registrado toda vez que ele é absorvido pelo detector. No caso de detecção ideal  $\eta = 1$ .

Com essa escolha da operação de uma contagem, a parte homogênea da equação (4.2) é

$$\tilde{L}_0 \hat{\rho} = -i\omega [\hat{H}_0, \hat{\rho}] - \frac{\tilde{\gamma}_D}{2} (\hat{n}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{n}) - \frac{\tilde{\gamma}}{2} (\hat{\Lambda}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\Lambda}) + \zeta\tilde{\gamma}\hat{A}\hat{\rho} + \tilde{\gamma}(1-\eta)\hat{\Theta}\hat{\rho}, \quad (4.5)$$

onde definimos

$$\zeta = \tilde{\gamma}_D/\tilde{\gamma}. \quad (4.6)$$

O super-operador de não-contagem é dado formalmente por  $\tilde{S}_t \hat{\rho}_0 = e^{\tilde{L}_0 t} \hat{\rho}_0$ . Porém, neste caso a expressão para o termo  $e^{\tilde{L}_0 t} \hat{\rho}_0$  não pode ser obtida imediatamente como no caso da seção 1.4, pois agora aparecem dois termos inhomogêneos  $A\rho$  e  $\Theta\rho$  (que, para piorar os cálculos, não comutam entre si no E-model). Devido a estes termos, a operação de não-contagem não preserva estados puros, como veremos posteriormente. Para encontrar a expressão para o super-operador de não-contagem, olhemos a seguinte equação

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_h = \tilde{L}_0 \hat{\rho}_0. \quad (4.7)$$

Vemos que a solução formal  $\hat{\rho}_h = e^{\tilde{L}_0 t} \hat{\rho}_0$  (o sub-índice  $h$  vem da palavra “homogêneo”) é nada mais do que a solução da equação homogênea (4.7) sujeita à condição inicial  $\hat{\rho}_h(t=0) = \hat{\rho}_0$ . Portanto, a operação de não-contagem  $\tilde{S}_t \hat{\rho}_0$  é dada pela solução da equação (4.7), sujeita a condição inicial  $\hat{\rho}(t=0) = \hat{\rho}_0$ .

Como o conjunto de operadores  $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}$  e  $\{\hat{E}_-, \hat{E}_+\}$  não comutam entre si, a solução da equação de operadores (4.7) é bastante complicada, por isso vamos tratar separadamente dois casos distintos: primeiro vamos considerar (a)  $\eta = 1$ ,  $\gamma_D \neq 0$ , ou seja, cavidade dissipativa e o detector ideal. Em seguida inverteremos os papéis, considerando (b)  $\eta \neq 1$ ,  $\gamma_D = 0$ , tornando o detector não ideal e a cavidade – ideal.

### 4.2.1 (a) Dissipação na cavidade

No caso de  $\eta = 1$ , o operador de uma contagem é  $\tilde{J} = \tilde{\gamma}\hat{\Theta}$ , e o de não-contagem é deduzido no Apêndice B, resultando em

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{t-t_0} \hat{\rho}_{t_0} &= \hat{\Lambda} \hat{L}_{t-t_0} \left( e^{g(t-t_0)\hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0}^1 \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda}_0 \\ &+ \hat{\Lambda}_0 e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)/2} \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0}^{1/2} \hat{\rho}_{t_0} \right) e^{(i\omega - \zeta\tilde{\gamma}/2)\hat{n}(t-t_0)} \hat{\Lambda} \\ &+ \hat{\Lambda} e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)/2} e^{-(i\omega + \zeta\tilde{\gamma}/2)\hat{n}(t-t_0)} \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0}^{1/2} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda}_0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde

$$\hat{L}_{t-t_0} \cdot = e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)} e^{-(i\omega + \zeta\tilde{\gamma}/2)\hat{n}(t-t_0)} \cdot e^{(i\omega - \zeta\tilde{\gamma}/2)\hat{n}(t-t_0)}, \quad g(t-t_0) = 1 - e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)}, \quad (4.9)$$

$$\hat{I}_{t-t_0}^k \hat{\rho}_{t_0} \equiv \zeta\tilde{\gamma} \int_{t_0}^t dt' e^{-(k+\zeta)\tilde{\gamma}(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right) \quad (4.10)$$

Obtido o super-operador de não contagem, podemos calcular a probabilidade de não haver nenhuma contagem durante o intervalo de tempo  $t$ :  $\tilde{P}_0(t) = \text{Tr} [\tilde{S}_t \hat{\rho}_0]$ . Ela é deduzida no Apêndice B e é igual a

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(t) &= e^{-\tilde{\gamma}t} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\tilde{\gamma}_D t l} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+k}{k} g^k(t) p_{k+l} + p_0 \\ &+ \zeta\tilde{\gamma} \int_{t_0}^t dt' e^{-(1+\zeta)\tilde{\gamma}(t'-t_0)} \sum_{l=0}^{\infty} g^l(t'-t_0) (l+1) p_{l+1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para alguns casos particulares de estados de campo obtém-se as seguintes expressões:

- Estado coerente

$$\tilde{P}_0(t) = e^{-\bar{n}} + e^{-\tilde{\gamma}t} \left(1 - e^{-\bar{n} \exp(-\tilde{\gamma}Dt)}\right) - \frac{1}{\bar{n}^{1/\zeta}} \int_{\bar{n}}^{\bar{n} \exp(-\tilde{\zeta}\tilde{\gamma}t)} y^{1/\zeta} e^{-y} dy, \quad (4.12)$$

- Estado térmico

$$\tilde{P}_0(t) = \frac{1}{\bar{n} + 1} + e^{-\tilde{\gamma}t} \frac{\bar{n} e^{-\tilde{\gamma}Dt}}{1 + \bar{n} e^{-\tilde{\gamma}Dt}} - \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \frac{1}{\bar{n}^{1+1/\zeta}} \int_{\bar{n}}^{\bar{n} \exp(-\tilde{\zeta}\tilde{\gamma}t)} \frac{y^{1/\zeta}}{(1+y)^2} dy \quad (4.13)$$

- Estado de Fock

$$\tilde{P}_0(t) = \delta_{N,0} + e^{-\tilde{\gamma}t} \left[1 - \left(1 - e^{-\tilde{\gamma}Dt}\right)^N\right] - N \int_1^{\exp(-\tilde{\zeta}\tilde{\gamma}t)} y^{1/\zeta} (1-y)^{N-1} dy \quad (4.14)$$

A partir dos operadores  $\tilde{J}$  e  $\tilde{S}_t$  podemos obter o operador  $\tilde{N}_t(m)$  de  $m$  contagens no intervalo de tempo  $[0, t)$ . Devido a dificuldades técnicas descritas no Apêndice B, é mais fácil obter os elementos diagonais do operador  $\tilde{N}_t(m)$ , o que é suficiente para o cálculo de todas as grandezas observáveis, obtidas ao calcular o traço de super-operadores. Por outro lado, essa simplificação fará com que não poderemos obter os elementos não diagonais (na base de Fock) do estado condicionado. Por isso, nesta seção estaremos interessados em cálculo de probabilidades. Para elementos diagonais, o operador de  $m$  contagens é

$$\tilde{N}_{[0,t)}(m) = \hat{\Lambda} \left[ \frac{1}{\zeta^m m!} \hat{L}_t e^{-x\hat{A}} \ln^m \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x\hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}} \right] \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left( \hat{F}_3 + \hat{I}_t \hat{F}_3 \right) \hat{\Lambda}_0, \quad (4.15)$$

onde  $x = e^{-\tilde{\zeta}\tilde{\gamma}t}$ ,

$$\hat{F}_3 = \frac{\tilde{\gamma}}{\zeta^{m-1} (m-1)!} \int_0^t dt_m \hat{L}_{t_m} e^{-x_m \hat{A}} \frac{x_m \hat{\Theta}}{1 + x_m \hat{\Theta}} \ln^{m-1} \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x_m \hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}}, \quad (4.16)$$

e

$$\hat{I}_t \hat{\rho} = \zeta \tilde{\gamma} \int_0^t dt' e^{-(1+\zeta)\tilde{\gamma}t'} \left( e^{g t' \hat{A}} \hat{A} \hat{\rho} \right).$$

A probabilidade de haver  $k$  contagens durante o intervalo de tempo  $[0, t)$  é dada por  $\tilde{P}_k(t) = \text{Tr} \left[ \tilde{N}_t(m) \right]$ . As relações entre super-operadores, deduzidas no Apêndice B, são

$$\tilde{J}\tilde{T}_t = \tilde{J}\tilde{L}_t e^{-x\hat{A}} \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x\hat{\Theta}} \right)^{1/\zeta} e^{\hat{A}}, \quad (4.17)$$

$$\tilde{J}\tilde{S}_t = e^{-\tilde{\zeta}\tilde{\gamma}t} \hat{L}_t \tilde{J} e^{g(t_1-t_0)\hat{A}}, \quad \tilde{J}\hat{L}_t = e^{-\tilde{\zeta}\tilde{\gamma}t} \hat{L}_t \tilde{J}. \quad (4.18)$$

Com elas, podem ser obtidas, formalmente, todas as densidades de probabilidades e tempos de espera descritos na seção 1.5.

Olhando para as expressões obtidas, vemos imediatamente que elas são bastante complicadas ao serem aplicadas na forma atual, e para serem úteis elas, talvez, deveriam ser aproximadas. Mas uma coisa que podemos afirmar com certeza é que agora os tempos de espera (seção 1.5) não são constantes, como no caso sem dissipação, mas vão depender dos três parâmetros:  $\tau$ ,  $t_1$  e  $\bar{n}$ .

### 4.2.2 (b) Dissipação no detector

Vamos agora considerar o caso (b):  $\eta \neq 1$  e  $\gamma_D = 0$ , a situação em que o campo e o detector se encontram em uma cavidade ideal, mas o detector é imperfeito. Vamos ver como tal “defeito” do detector afeta as estatísticas de contagem.

Vamos repetir o procedimento formal da seção anterior. Definindo o operador de uma contagem como  $\tilde{J}\hat{\rho} = \eta\tilde{\gamma}\hat{\Theta}\hat{\rho}$ , o super-operador de não-contagem  $\tilde{S}_t\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_h(t)$  obedece à equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\rho}_h}{\partial t} &= -i\omega [\hat{n}, \hat{\rho}_h] - \frac{\tilde{\gamma}}{2} \left( \hat{\Lambda}\hat{\rho}_h + \hat{\rho}_h\hat{\Lambda} - 2(1-\eta)\hat{\Theta}\hat{\rho}_h \right) \\ &= -i\omega [\hat{n}, \hat{\rho}_h] - \frac{\tilde{\gamma}}{2} \left( \hat{\Lambda}\hat{\rho}_h + \hat{\rho}_h\hat{\Lambda} \right) + \tilde{\gamma}(1-\eta)\hat{\Theta}\hat{\rho}_h.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Estabelecendo

$$\hat{\rho} = e^{-\tilde{\gamma}\hat{\Lambda}(t-t_0)/2} e^{-i\omega\hat{n}(t-t_0)} \hat{\rho}_1 e^{i\omega\hat{n}(t-t_0)} e^{-\tilde{\gamma}\hat{\Lambda}(t-t_0)/2} \quad (4.20)$$

tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} &= \tilde{\gamma}(1-\eta) e^{-\tilde{\gamma}\hat{\Lambda}_0(t-t_0)/2} \left( \hat{\Theta}\hat{\rho}_1 \right) e^{-\tilde{\gamma}\hat{\Lambda}_0(t-t_0)/2} \\ &= \tilde{\gamma}(1-\eta) \left( \hat{\Lambda} + e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)/2}\hat{\Lambda}_0 \right) \left( \hat{\Theta}\hat{\rho}_1 \right) \left( \hat{\Lambda} + e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)/2}\hat{\Lambda}_0 \right).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Projetando a equação acima em 2 sub-espacos (dados pelos projetores  $\{\hat{\Lambda}, \hat{\Lambda}_0\}$ ) e repetindo o procedimento do Apêndice B, para os elementos diagonais obtém-se (a solução para os elementos não-diagonais também é facilmente encontrada, mas não vamos usá-la)

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{t-t_0}\hat{\rho}_{t_0} &= \hat{\Lambda} e^{-(i\omega\hat{n}+\tilde{\gamma}\hat{\Lambda}/2)(t-t_0)} \left[ e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)(t-t_0)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} \right] e^{(i\omega\hat{n}-\tilde{\gamma}\hat{\Lambda}/2)(t-t_0)} \hat{\Lambda} \\ &+ \hat{\Lambda}_0 \hat{\rho}_{t_0} \hat{\Lambda}_0 + \hat{\Lambda}_0 \left[ \tilde{\gamma}(1-\eta) \int_{t_0}^t dt' e^{-\tilde{\gamma}(t'-t_0)} \left( \hat{\Theta} e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)(t'-t_0)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \right] \hat{\Lambda}_0.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Podemos integrar formalmente o último termo, obtendo

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{t_0} + \tilde{\gamma}(1-\eta) \int_{t_0}^t dt' e^{-\tilde{\gamma}(t'-t_0)} \left( \hat{\Theta} e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)(t'-t_0)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \\ = \frac{(1-\eta)\hat{\Theta}}{1-(1-\eta)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} - e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)} \frac{(1-\eta)\hat{\Theta}}{1-(1-\eta)\hat{\Theta}} e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)(t-t_0)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Portanto, o operador de não-contagem é dado pela expressão (4.22) ou, equiualmente, por

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{t-t_0}\hat{\rho}_{t_0} &= e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)} \hat{\Lambda} \hat{U}_{t-t_0} \left[ e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)(t-t_0)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} \right] \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left[ \frac{1}{1-(1-\eta)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} \right] \hat{\Lambda}_0 \\ &+ e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)} \hat{\Lambda}_0 \left[ \frac{(1-\eta)\hat{\Theta}}{1-(1-\eta)\hat{\Theta}} e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)(t-t_0)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} \right] \hat{\Lambda}_0\end{aligned}\quad (4.24)$$

onde  $\hat{U}_t\hat{\rho} = e^{-i\omega\hat{n}t}\hat{\rho}e^{i\omega\hat{n}t}$ . Para  $t \rightarrow \infty$ , a probabilidade de não haver nenhuma contagem é

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0(t \rightarrow \infty) &= \langle 0 | \frac{1}{1-(1-\eta)\hat{\Theta}} \hat{\rho}_{t_0} | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\eta)^n p_n \\ &= (1-\eta)^N, \quad \text{para estado de Fock} \\ &= (1+\eta\bar{n})^{-1}, \quad \text{para estado termico} \\ &= e^{-\eta\bar{n}}, \quad \text{para estado coerente.}\end{aligned}\quad (4.25)$$

As relações entre os operadores  $\tilde{J}$  e  $\tilde{S}_t$  são

$$\tilde{J}\tilde{S}_{t-t_0} = e^{-\tilde{\gamma}(t-t_0)}\hat{U}_{t-t_0}e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)\hat{\Theta}(t-t_0)}\tilde{J} \quad (4.26)$$

Usando essas relações, o operador-densidade  $\tilde{\rho}_c^{(m)}(t)$  (1.26) condicionado a detecções de fótons nos tempos  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_c^{(m)}(t) &= e^{-\tilde{\gamma}t}\Lambda \left[ U_t e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)t\Theta} J^m \rho \right] \Lambda \\ &+ \Lambda_0 \left\{ \frac{1}{1 - (1-\eta)\Theta} \exp[-\tilde{\gamma}t_m(1 - (1-\eta)\Theta)] J^m \rho \right\} \Lambda_0 \\ &+ \Lambda_0 e^{-\tilde{\gamma}t} \left[ \frac{(1-\eta)\Theta}{1 - (1-\eta)\Theta} e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)t\Theta} J^m \rho \right] \Lambda_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Integrando sobre todos os tempos, obtém-se a seguinte expressão para o operador  $\tilde{N}_t(m)$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_t(m) &= e^{-\tilde{\gamma}t} \frac{t^m}{m!} \hat{\Lambda} \left[ \hat{U}_t e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)t\hat{\Theta}} \tilde{J}^m \hat{\rho} \right] \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 e^{-\tilde{\gamma}t} \frac{t^m}{m!} \left[ \frac{(1-\eta)\hat{\Theta}}{1 - (1-\eta)\hat{\Theta}} e^{\tilde{\gamma}(1-\eta)t\hat{\Theta}} \tilde{J}^m \hat{\rho} \right] \hat{\Lambda}_0 \\ &+ \hat{\Lambda}_0 \left\{ \frac{1}{1 - (1-\eta)\hat{\Theta}} \int_0^t dq \frac{q^{m-1}}{(m-1)!} \exp[-\tilde{\gamma}q(1 - (1-\eta)\hat{\Theta})] \tilde{J}^m \hat{\rho} \right\} \hat{\Lambda}_0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pela definição, o operador  $\tilde{T}_t$  é o mesmo que no caso ideal, já que ele satisfaz a mesma equação-mestra. Então, a terceira relação entre operadores é

$$\tilde{J}\tilde{T}_t = e^{-\tilde{\gamma}t}\hat{U}_t e^{\tilde{\gamma}\hat{\Theta}t}\tilde{J}\hat{\rho}, \quad (4.29)$$

a mesma que no caso sem dissipação (capítulo 3).

Usando os resultados acima podemos calcular as diferentes distribuições de duas contagens (seção 1.5), obtendo

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t_1 + \tau|t_1) &= e^{-\tilde{\gamma}\tau} \frac{\text{Tr} \left[ e^{\tilde{\gamma}\hat{\Theta}(t_1+\tau)} \tilde{J}^2 \hat{\rho} \right]}{\text{Tr} \left[ e^{\tilde{\gamma}\hat{\Theta}t_1} \tilde{J} \hat{\rho} \right]} \\ &= \eta\tilde{\gamma}e^{-\tilde{\gamma}\tau} \frac{\sum_{k,l=0}^{\infty} \left[ (\tilde{\gamma}(t_1 + \tau))^l / l! \right] p_{k+l+2}}{\sum_{k,l=0}^{\infty} \left[ (\tilde{\gamma}t_1)^l / l! \right] p_{k+l+1}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_c(t_1 + \tau|t_1) &= e^{-\tilde{\gamma}\tau} \frac{\text{Tr} \left[ e^{\tilde{\gamma}\hat{\Theta}(t_1+(1-\eta)\tau)} \tilde{J}^2 \hat{\rho} \right]}{\text{Tr} \left[ e^{\tilde{\gamma}\hat{\Theta}t_1} \tilde{J} \hat{\rho} \right]} \\ &= \eta\tilde{\gamma}e^{-\tilde{\gamma}\tau} \frac{\sum_{k,l=0}^{\infty} \left[ (\tilde{\gamma}(t_1 + (1-\eta)\tau))^l / l! \right] p_{k+l+2}}{\sum_{k,l=0}^{\infty} \left[ (\tilde{\gamma}t_1)^l / l! \right] p_{k+l+1}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_u(t_1 + \tau|t_1) &= e^{-\tilde{\gamma}(t_1+\tau)} \text{Tr} \left[ e^{\tilde{\gamma}\hat{\Theta}(t_1+(1-\eta)\tau)} \tilde{J} \hat{\rho} \right] \\ &= \eta\tilde{\gamma}e^{-\tilde{\gamma}(\tau+t_1)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \left[ (\tilde{\gamma}(t_1 + (1-\eta)\tau))^l / l! \right] p_{k+l+1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim, no caso de detector não-ideal, os tempos de espera condicional e não-condicional agora, no caso geral, dependem de  $t_1$  e do estado do campo, porém a dependência desaparece quando  $\eta = 1$ , como deveria. Vamos mostrar as expressões explícitas das densidades de probabilidades de duas contagens para 3 casos particulares. No caso de  $\tilde{C}(t_1 + \tau|t_1)$ , ele é o mesmo que no caso sem dissipação do capítulo 3, multiplicado por  $\eta$ . Isso acontece devido ao fato de que o operador  $\tilde{T}_t$  é o mesmo nos dois casos, e o superoperador de uma contagem vem multiplicado por  $\eta$  no caso de dissipação no detector. As outras duas densidades de probabilidades são:

- Estado coerente

$$\begin{aligned} \tilde{W}_u(t_1 + \tau|t_1) &= \eta e^{-\tilde{\gamma}(t_1 + \tau)} e^{-\bar{n}} \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}\bar{n}}{t_1 + (1-\eta)\tau}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{\tilde{\gamma}[t_1 + (1-\eta)\tau]} \right)^{k/2} \\ &\quad \times I_{k+1} \left( 2\sqrt{\tilde{\gamma}\bar{n}(t_1 + (1-\eta)\tau)} \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\tilde{W}_c(t_1 + \tau|t_1) = e^{-\tilde{\gamma}\tau} \frac{\eta\tilde{\gamma}\bar{n}}{t_1 + (1-\eta)\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{\tilde{\gamma}[t_1 + (1-\eta)\tau]} \right)^{k/2} I_{k+2} \left( 2\sqrt{\tilde{\gamma}\bar{n}(t_1 + (1-\eta)\tau)} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}\bar{n}}{t_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{\tilde{\gamma}t_1} \right)^{k/2} I_{k+1} \left( 2\sqrt{\tilde{\gamma}\bar{n}(t_1 + (1-\eta)\tau)} \right)}}. \quad (4.34)$$

- Estado de número

$$\tilde{W}_u(t_1 + \tau|t_1) = e^{-\tilde{\gamma}\eta\tau} \frac{\eta\tilde{\gamma}}{(N-1)!} \tilde{\gamma}(N, \tilde{\gamma}[t_1 + (1-\eta)\tau]), \quad (4.35)$$

$$\tilde{W}_c(t_1 + \tau|t_1) = \eta\tilde{\gamma}(N-1) e^{-\tilde{\gamma}\eta\tau} \frac{\tilde{\gamma}(N-1, \tilde{\gamma}[t_1 + (1-\eta)\tau])}{\tilde{\gamma}(N, \tilde{\gamma}t_1)}. \quad (4.36)$$

- Estado térmico

$$\tilde{W}_u(t_1 + \tau|t_1) = \tilde{W}_c(t_1 + \tau|t_1) = \eta\tilde{\gamma}\beta e^{-\tilde{\gamma}\tau(1-(1-\eta)\beta)}, \quad \beta = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}, \quad (4.37)$$

No último caso, os tempos de espera condicional e não-condicional são facilmente obtidos, resultando em

$$\tau_{con} = \tau_{unc} = [\tilde{\gamma}(1 - (1-\eta)\beta)]^{-1}. \quad (4.38)$$

Os tempos de espera condicional e não-condicional podem ser obtidos a partir das densidades de probabilidade (ver seção 1.5).

### 4.3 Modelo de SD

Complementarmente, vamos ver como os processos dissipativos modificam as fórmulas de contagem no modelo de SD. A equação-mestra que rege a dinâmica do campo eletromagnético acoplado ao detector e às paredes imperfeitas da cavidade no modelo de SD é

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -i\omega[\hat{n}, \hat{\rho}] - \frac{\gamma_D}{2}(\hat{n}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{n} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger) - \frac{\gamma}{2}(\hat{n}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{n} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger). \quad (4.39)$$

Considerando o caso de detector imperfeito, o operador de uma contagem é definido como  $\hat{J}\hat{\rho} = \eta\gamma\hat{A}\hat{\rho}$ , e o operador de não-contagem é dado pela solução da equação

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_h = -i\omega[\hat{n}, \hat{\rho}_h] - \frac{\gamma_D}{2}(\hat{n}\hat{\rho}_h + \hat{\rho}_h\hat{n}) - \frac{\gamma}{2}(\hat{n}\hat{\rho}_h + \hat{\rho}_h\hat{n}) + \gamma\beta\hat{A}\hat{\rho}_h, \quad (4.40)$$

onde definimos

$$\beta = (1 - \eta + \zeta), \quad \zeta = \gamma_D/\gamma. \quad (4.41)$$

Neste caso, o termo inhomogêneo da equação acima depende apenas do operador  $\hat{A}$ , portanto essa equação pode ser resolvida exatamente. Repetindo o procedimento do Apêndice B, obtemos

$$\hat{S}_{t-t_0}\hat{\rho}_{t_0} = \hat{L}_{t-t_0}e^{g(t-t_0)\hat{A}}\hat{\rho}_{t_0}, \quad (4.42)$$

onde

$$\hat{L}_{t-t_0} = e^{-(i\omega+\gamma_T/2)\hat{n}(t-t_0)} \cdot e^{(i\omega-\gamma_T/2)\hat{n}(t-t_0)}, \quad (4.43)$$

$$g(t-t_0) = \kappa(1 - e^{-\gamma_T t}), \quad (4.44)$$

$$\kappa = \frac{1 - \eta + \zeta}{1 + \zeta}, \quad \gamma_T = \gamma(1 + \zeta). \quad (4.45)$$

A probabilidade de nenhuma contagem durante o intervalo de tempo  $[0, t)$  é

$$P(0, t) = \text{Tr}[\hat{S}_t\hat{\rho}_0] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\gamma_T t k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l (k+l)!}{l! k!} P_{k+l}. \quad (4.46)$$

Para 3 estados específicos de campo obtém-se

1. Estado coerente:

$$P(0, t) = \exp\left[-\frac{\eta\bar{n}}{1+\zeta}(1 - e^{-\gamma_T t})\right], \quad P(0, t \rightarrow \infty) = \exp\left[-\frac{\eta}{1+\zeta}\bar{n}\right]. \quad (4.47)$$

2. Estado de número

$$P(0, t) = \left(\frac{1 - \eta + \zeta + \eta e^{-\gamma_T t}}{1 + \zeta}\right)^N, \quad P(0, t \rightarrow \infty) = \left(\frac{1 - \eta + \zeta}{1 + \zeta}\right)^N. \quad (4.48)$$

3. Estado térmico

$$P(0, t) = \frac{1 + \zeta}{1 + \zeta + \eta\bar{n}(1 - e^{-\gamma_T t})}, \quad P(0, t \rightarrow \infty) = \frac{1 + \zeta}{1 + \zeta + \eta\bar{n}}. \quad (4.49)$$

Usando as relações entre operadores

$$\hat{J}\hat{L}_{t-t_0} = e^{-\gamma_T(t-t_0)}\hat{L}_{t_0}\hat{J}, \quad (4.50)$$

$$e^{g(t_2-t_1)\hat{A}}\hat{L}_{t_1-t_0} = \hat{L}_{t_1-t_0}e^{g(t_2-t_1)\exp(-\gamma_T(t_1-t_0))\hat{A}}, \quad (4.51)$$

após algumas manipulações algébricas bastante diretas podemos obter as seguintes expressões

$$\hat{N}_{[0,t]}(m) = \frac{1}{m!} \left( \frac{1 - e^{-\gamma_T t}}{\gamma_T} \right)^m \hat{L}_t e^{g(t-t_0)\hat{A}} \hat{J}^m, \quad (4.52)$$

$$P_m(t) = \frac{1}{m!} \left( \frac{\gamma}{\gamma_T} \right)^m (1 - e^{-\gamma_T t})^m \sum_{k=m}^{\infty} (e^{-\gamma_T t})^{k-m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l (t-t_0)}{l!} \frac{(l+k)!}{(k-m)!} p_{l+k} \quad (4.53)$$

O operador de evolução não-condicionada  $\hat{T}_t$  obedece a mesma equação que no caso sem dissipação, com a única diferença que  $\gamma$  deve ser trocado por  $\gamma_T$ , portanto

$$\hat{T}_t = \hat{L}_t \exp \left[ (1 - e^{-\gamma_T t}) \hat{A} \right] \quad (4.54)$$

Usando as relações entre super-operadores podemos calcular as densidades de probabilidade de duas contagens. No caso de  $C(t_1 + \tau|t_1)$ , ela é igual ao caso sem dissipação, exceto que ela vem multiplicada por  $\eta$  e deve ser feita a substituição  $\gamma \rightarrow \gamma_T$ . Para as outras duas densidades, após um cálculo direto obtém-se

$$W_c(t_1 + \tau|t_1) = \frac{\eta\gamma}{\bar{n}} e^{-\gamma_T(t_1+\tau)} \sum_{n=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{\eta}{1+\varsigma} e^{-\gamma_T t_1} + \frac{\eta}{1+\varsigma} e^{-\gamma_T(t_1+\tau)} \right)^{n-2} n(n-1) p_n \quad (4.55)$$

$$W_u(t_1 + \tau|t_1) = \eta\gamma e^{-\gamma_T(t_1+\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\eta}{1+\varsigma} e^{-\gamma_T t_1} + \frac{\eta}{1+\varsigma} e^{-\gamma_T(t_1+\tau)} \right)^{n-1} n p_n \quad (4.56)$$

Essas expressões são quase análogas àquelas obtidas por Lee [35] usando um outro método, exceto pela troca  $\gamma \rightarrow \gamma_T$ , pois no nosso caso levamos em consideração a dissipação pela cavidade, o que não foi incluído no modelo de Lee. As expressões para os tempos de espera estão contidas no mesmo trabalho de Lee (lembrando que no nosso modelo  $\gamma \rightarrow \gamma_T$ ) e, por isso, não vamos colocá-las aqui.

## 4.4 Conclusões

Neste capítulo nós generalizamos os modelos de fotodetecção de SD e o E-model, incluindo os efeitos dissipativos, devidos tanto à dissipação no detector, quanto pela cavidade. No caso de E-model não foi possível tratar os dois efeitos dissipativos ao mesmo tempo devido a dificuldades técnicas – o fato de que os operadores  $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}$  e  $\{\hat{E}_-, \hat{E}_+\}$  não comutam entre si. Mesmo assim, conseguimos obter as soluções para os dois casos separadamente, embora no caso em que incluímos a dissipação na cavidade, os resultados só valem para os elementos diagonais do operador-densidade. No caso de modelo de SD, obtivemos as expressões exatas, incluindo simultaneamente os dois fenômenos de dissipação. Verificamos que reproduzimos os resultados obtidos anteriormente por Lee, embora o modelo feito aqui é um pouco mais geral que o de Lee, pois o último não incluiu os efeitos de dissipação pela cavidade.

# Capítulo 5

## Aplicações de fotodeteccção

Neste capítulo vamos aplicar ambas as teorias de fotodeteccção, a de SD e o E-model, a alguns experimentos concretos que fazem uso das técnicas de fotodeteccção. Primeiro, vamos analisar a técnica experimental conhecida como *deteccção homódina*, utilizada para estudar as propriedades de quadraturas de campos eletromagnéticos. Veremos que ambos os modelos descrevem com sucesso esta técnica, fornecendo os mesmos resultados para tempos de deteccção grandes, apesar de que para tempos intermediários os resultados previstos pelos diferentes modelos diferem entre si. A seguir, descreveremos um exemplo em que a aplicação do modelo de SD fornece resultados exatos, enquanto que ao aplicar E-model, os cálculos analíticos tornam-se muito complexos, impedindo o problema de ser resolvido. Este exemplo consiste em aplicar a fotodeteccção para o controle de grau de emaranhamento de dois campos eletromagnéticos. Por fim, continuando na linha de deteccção de estados correlacionados, veremos como a medição sobre um dos modos correlacionados afeta as propriedades do outro. Alguns dos resultados descritos a seguir são novos.

### 5.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar algumas aplicações da fotodeteccção, cuja formulação teórica nós estudamos nos capítulos anteriores. Aplicaremos ambos os modelos de fotodeteccção, o de SD e o E-model, aos exemplos considerados e veremos as semelhanças e as diferenças nas previsões; também discutiremos as dificuldades matemáticas e experimentais que surgem quando o E-model é aplicado.

Primeiro, na seção 5.2, estudaremos a técnica de *deteccção homódina* (também estudada em [2]), que consiste em misturar dois feixes em um divisor de feixes e realizar fotocontagens sobre os feixes emergentes do divisor. Mostraremos que as propriedades das quadraturas do feixe incidente podem ser determinadas experimentalmente a partir de fotocontagem sobre feixes emergentes. No entanto, como os fótons não são detectados instantaneamente, mas um a um, é importante encontrar a relação entre o número de fótons detectados num dado intervalo de tempo e o valor médio das quadraturas. Veremos que em ambos os modelos os resultados coincidem se o tempo de deteccção for grande ( $\gamma t \gg 1$  e  $\tilde{\gamma} t \gg 1$ ), mas para tempos intermediários isto não é verdade. Mesmo assim, a

solução geral desse problema pode ser obtida usando qualquer um desses modelos.

No entanto, existem situações em que, ao usar o E-model, o formalismo torna-se muito mais complexo de que no caso do modelo de SD, e, às vezes, a solução pode não existir na forma fechada. Mostraremos isso na seção 5.3, ao considerar uma situação em que a fotocontagem é utilizada para controlar o grau de emaranhamento entre dois campos eletromagnéticos. Vamos descrever, brevemente, o sistema físico em que isso pode ser implementado e mostraremos a solução obtida usando-se o modelo de SD. Em seguida, mostraremos o motivo pelo qual a solução é muito mais complexa ao aplicar o E-model – isto deve-se ao fato de que os operadores de “abaixamento” e “levantamento” não-lineares não comutam com os operadores bosônicos de “aniquilação” e “criação” usuais.

Finalmente, seguindo na linha de detecção de estados emaranhados, consideraremos um campo eletromagnético, cujo estado consiste de dois modos emaranhados (seção 5.4). Novamente, vamos aplicar ambos os modelos para ver como operações de fotodeteção sobre um dos modos afeta as propriedades estatísticas do outro modo. Daremos as conclusões finais na seção 5.5. Os resultados das seções 5.3 e 5.4 são novos e foram obtidos durante o mestrado.

## 5.2 Detecção homódina

O método de fotodeteção é uma técnica experimental que permite determinar as propriedades estatísticas do campo eletromagnético, tais como distribuições de probabilidades de fótons e os momentos do número de fótons. No entanto, muitas vezes estamos interessados em determinar as propriedades de uma das *quadraturas* do campo, o que é essencial no estudo do fenômeno de *compressão* (“*squeezing*”), por exemplo. Um grande número de esquemas para realizar medições de quadraturas do campo eletromagnético foi discutido por Yuen e Shapiro [90] (ver outras discussões em [2, 91]). Todas elas consistem em misturar o sinal do campo, cuja quadratura queremos determinar (que chamaremos de modo  $\mathcal{A}$ ), com um sinal de referência que possui a mesma frequência (modo  $\mathcal{B}$ , também conhecido como *oscilador local*) antes da fotodeteção. Os feixes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são misturados em um *divisor de feixes* [92–94], e os dois feixes de saída incidem sobre fotodetectores, como mostrado na figura 5.2. As grandezas que agora, a princípio, podem ser medidas pelo experimentalista<sup>1</sup> - além das propriedades estatísticas do modo  $\mathcal{A}$  - são as propriedades estatísticas dos feixes de saída: vamos chamá-los de modos  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ .

Para determinar a relação entre os feixes de entrada ( $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ ) e os de saída ( $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ ) vamos expandir os campos dos feixes incidentes em componentes de frequência positiva e negativa usuais (ver, por exemplo, [1])

$$\hat{E}_A = i \left( \frac{\hbar\omega}{2V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_1 \left( \hat{a}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right), \quad (5.1)$$

$$\hat{E}_B = i \left( \frac{\hbar\omega}{2V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_2 \left( \hat{b}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{b}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right), \quad (5.2)$$

onde  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são operadores bosônicos que descrevem os dois modos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente (lembrando que ambos os modos têm a mesma frequência  $\omega$ ). Vamos supor também que

<sup>1</sup>Consideramos que as propriedades estatísticas do modo  $\mathcal{B}$  são conhecidas e podem ser controladas.

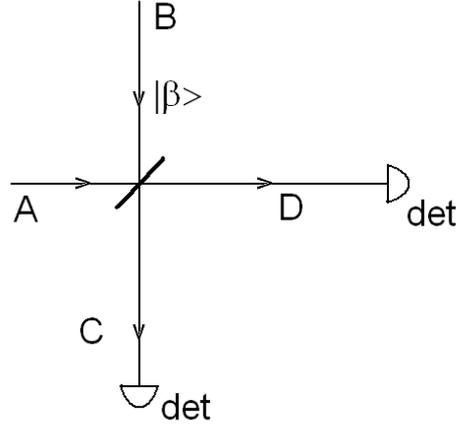


Figura 5.1: Representação gráfica de detecção homódina.

os dois modos possuem a mesma polarização e têm a fase estabilizada. Assim, a única diferença entre os dois modos está na sua direção de propagação  $\hat{e}_k$ , onde  $k = 1, 2$ .

Consideremos agora que o oscilador local é uma *radiação coerente*, cujo fluxo é proporcional a  $|\beta|^2$ , onde  $\beta = |\beta| e^{i\theta}$  e  $\theta$  é a fase do campo de referência. Os campos que descrevem os feixes  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , que emergem do divisor de feixes, são

$$\hat{E}_C = i \left( \frac{\hbar\omega}{2V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{e}_1 \left( \hat{c} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{c}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right), \quad (5.3)$$

$$\hat{E}_D = i \left( \frac{\hbar\omega}{2V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{e}_2 \left( \hat{d} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{d}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right), \quad (5.4)$$

onde [2, 91]

$$\hat{c} = \sqrt{\eta}\hat{a} + i\sqrt{1-\eta}\beta, \quad \hat{d} = i\sqrt{1-\eta}\hat{a} + \sqrt{\eta}\beta. \quad (5.5)$$

$\sqrt{\eta}$  é o coeficiente de transmitância e  $\sqrt{1-\eta}$  é o de reflectância (supomos que  $\eta$  é real). O fator  $i$  na equação (5.5) aparece devido à mudança da fase entre a onda refletida e a transmitida, que ocorre no caso de divisor de feixes de uma única camada dielétrica [95], em que o parâmetro  $\eta$  depende da constante dielétrica e da espessura da camada, além do ângulo de incidência e da polarização dos feixes.

Os fotodetectores  $C$  e  $D$  detectam fótons, cujos números médios devem coincidir com os valores esperados dos operadores  $\hat{n}_C$  e  $\hat{n}_D$ , dados por

$$\hat{n}_C \equiv \hat{c}^\dagger \hat{c} = \eta \hat{a}^\dagger \hat{a} + (1-\eta) |\beta|^2 + \sqrt{\eta(1-\eta)} |\beta| \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)}, \quad (5.6)$$

$$\hat{n}_D \equiv \hat{d}^\dagger \hat{d} = (1-\eta) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \eta |\beta|^2 - \sqrt{\eta(1-\eta)} |\beta| \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)}, \quad (5.7)$$

onde a quadratura do campo  $\mathcal{A}$  ( $\hat{X}_\theta^{(A)}$ ) é definida como

$$\hat{X}_\theta^{(A)} \equiv \hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}. \quad (5.8)$$

Quadraturas “ortogonais” entre si são definidas como  $\langle \hat{X}_\theta^{(A)} \rangle$  e  $\langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle$ : por exemplo, as quadraturas usuais de *posição* e de *momentum* de campo de radiação correspondem a  $\hat{X}_0^{(A)}$ ,  $\hat{X}_{\pi/2}^{(A)}$ , respectivamente.

Se for usado um divisor de feixes 50/50 ( $\eta = 1/2$ ), podemos determinar o valor médio das quadraturas do campo  $\mathcal{A}$  através de medições de números médios de fótons nos modos  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , de acordo com a relação (obtida se subtrairmos (5.6) de (5.7))

$$\langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle = \frac{\langle \hat{n}_C \rangle - \langle \hat{n}_D \rangle}{|\beta|}. \quad (5.9)$$

Se deslocarmos a fase  $\theta$  por  $\pi/2$ , podemos determinar as amplitudes médias das duas quadraturas ortogonais. Para determinar a variância das quadraturas do modo  $\mathcal{A}$ , precisamos medir a variância de número de fótons detectados nos modos  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{A}$  para qualquer intensidade do campo local, cuja amplitude  $|\beta|$  é conhecida. Para um divisor de feixes 50/50, as variâncias de número de fótons nos modos  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são obtidas a partir das equações (5.6) e (5.7), resultando em

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n}_C)^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left[ \langle \Delta \hat{n}_A^2 \rangle + |\beta|^2 \langle \Delta \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)2} \rangle + |\beta| \langle (\hat{n}_A \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} + \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \hat{n}_A) \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2|\beta| \langle \hat{n}_A \rangle \langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle \right], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n}_D)^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left[ \langle \Delta \hat{n}_A^2 \rangle + |\beta|^2 \langle \Delta \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)2} \rangle - |\beta| \langle (\hat{n}_A \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} + \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \hat{n}_A) \rangle \right. \\ &\quad \left. + 2|\beta| \langle \hat{n}_A \rangle \langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Portanto, das equações (5.10) e (5.11), a variância das quadraturas do modo  $\mathcal{A}$  é dada por

$$\langle (\Delta \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)})^2 \rangle = \frac{2 \left( \langle (\Delta \hat{n}_C)^2 \rangle + \langle (\Delta \hat{n}_D)^2 \rangle \right) - \langle (\Delta \hat{n}_A)^2 \rangle}{|\beta|^2} = \frac{\langle (\Delta \hat{n}_{CD})^2 \rangle}{|\beta|^2}, \quad (5.12)$$

onde  $\hat{n}_{CD} \equiv \hat{n}_C - \hat{n}_D$ . Esta técnica, em que detectores fazem medidas sobre ambos os modos de saída ( $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ ), é conhecida como *detecção homódina balanceada*. Ela fornece resultados *exatos*, tanto do valor médio, quanto da variância das quadraturas dos campos do modo  $\mathcal{A}$ .

Entretanto, podemos determinar as propriedades<sup>2</sup> das quadraturas do feixe  $\mathcal{A}$  mesmo sem conhecer suas propriedades estatísticas, bastando para isso usar apenas um fotodetector no modo  $\mathcal{C}$  ou no  $\mathcal{D}$  (daqui em diante, vamos considerar apenas o modo  $\mathcal{C}$ ). De fato, se a intensidade do oscilador local é grande, satisfazendo a condição  $|\beta| \gg \eta \langle \hat{n}_A \rangle / \sqrt{1-\eta}$ , obtemos da fórmula (5.6) as seguintes expressões aproximadas

$$\langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle \approx \frac{(1-\eta)|\beta|^2 - \langle \hat{n}_C \rangle}{\sqrt{\eta(1-\eta)}|\beta|}, \quad (5.13)$$

$$\left[ \Delta \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \right]^2 \approx \frac{1}{\eta|\beta|^2} \left[ \frac{\langle (\Delta \hat{n}_C)^2 \rangle}{(1-\eta)} - (1-\eta)|\beta|^2 \right]. \quad (5.14)$$

<sup>2</sup>Neste caso, com o termo “propriedades” queremos dizer valor médio e variância.

Assim, vemos que se a contribuição do oscilador local é subtraída, o número médio de fótons no modo  $\mathcal{C}$  é aproximadamente proporcional à quadratura do modo  $\mathcal{A}$ . Esta técnica aproximada, baseada no uso de oscilador local intenso, é chamada de *deteção homódina simples*.

Portanto, medindo o número médio e a variância dos fótons nos feixes de saída  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  podemos determinar as propriedades da quadratura do modo  $\mathcal{A}$ , exatamente ou aproximadamente. No entanto, a grandeza que é medida experimentalmente é o número de *fotoelétrons* ativados pelo feixe incidente sobre o detector e, como visto no capítulo 1, os fótons não são detectados instantaneamente, mas sequencialmente, e os tempos de detecção de cada fóton não podem ser determinados nem controlados. Uma das maneiras de medirmos o número de fótons no feixe  $\mathcal{C}$  (mesmas considerações valem para  $\mathcal{D}$ ) é a seguinte: (i) direcionamos o feixe  $\mathcal{C}$  para uma cavidade semi-aberta acoplada a um detector e (ii) em um certo tempo  $t_0 = 0$  fechamos a extremidade aberta da cavidade (por exemplo, usando um espelho refletor total), de modo que os fótons fiquem confinados dentro dela. Com isso, podemos determinar diversas quantidades que caracterizam o modo  $\mathcal{C}$ , tais como momentos de número de fótons durante um intervalo de tempo  $[0, t)$ .

Para descrever teoricamente o processo de fotocontagem e comparar os dados experimentais com as previsões teóricas, devemos usar um dos modelos para fotodeteção em cavidades fechadas. Daqui em diante, vamos ater-nos ao caso de detecção homódina *simples* e não vamos levar em consideração os efeitos dissipativos, descritos no capítulo 4. Para o modelo de SD, o número médio de fotoelétrons medido no modo  $\mathcal{C}$ , durante o intervalo do tempo de detecção  $[0, t)$ , é dado por

$$\overline{k_C^{(SD)}}(t) = (1 - e^{-\gamma t}) \langle \hat{n}_C \rangle, \quad (5.15)$$

onde  $\langle \hat{n}_C \rangle$  é o valor médio de fótons presentes na cavidade. O valor menor de fótons contados é uma manifestação de que a medição não é instantânea, mas ocorre ao longo do tempo. A variância de número de fótons no modelo de SD é

$$\overline{\Delta k_C^2}^{(SD)}(t) = (1 - e^{-\gamma t})^2 \langle (\Delta \hat{n}_C)^2 \rangle + e^{-\gamma t} (1 - e^{-\gamma t}) \langle \hat{n}_C \rangle. \quad (5.16)$$

No caso de E-model, as fórmulas correspondentes são diferentes [24]:

$$\overline{k_C^{(E)}}(t) = \langle \hat{n}_C \rangle - e^{-\tilde{\gamma} t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma} t)^k}{k!} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j p_j^{(C)} - k \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right] \quad (5.17)$$

para o número médio de fotoelétrons, e para a variância tem-se

$$\begin{aligned} \overline{\Delta k_C^2}^{(E)}(t) &= \langle \Delta (\hat{n}_C)^2 \rangle - e^{-\tilde{\gamma} t} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j^2 p_j^{(C)} - k^2 \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right] \\ &\quad + 2 \langle \hat{n}_C \rangle e^{-\tilde{\gamma} t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma} t)^k}{k!} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j p_j^{(C)} - k \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right] \\ &\quad - e^{-2\tilde{\gamma} t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma} t)^k}{k!} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j p_j^{(C)} - k \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde  $p_j^{(C)}$  é a probabilidade de haver  $j$  fótons na cavidade  $\mathcal{C}$ . Substituindo as expressões (5.15) - (5.18) nas equações (5.13) e (5.14), obtemos a relação procurada entre o número

de fotoelétrons medidos no modo  $\mathcal{C}$  e o valor aproximado das quadraturas no modo  $\mathcal{A}$ . Para o modelo de SD temos

$$\overline{k_C^{(SD)}}(t) = (1 - e^{-\gamma t}) \left[ (1 - \eta) |\beta|^2 - \sqrt{\eta(1 - \eta)} |\beta| \langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle \right], \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta k_C^2}^{(SD)}(t) &= (1 - e^{-\gamma t})^2 \left[ (1 - \eta) |\beta|^2 \left\{ (1 - \eta) + \eta [\Delta \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)}]^2 \right\} \right] \\ &\quad + e^{-\gamma t} (1 - e^{-\gamma t}) \left[ (1 - \eta) |\beta|^2 - \sqrt{\eta(1 - \eta)} |\beta| \langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

enquanto que para o E-model obtém-se

$$\overline{k_C^{(E)}}(t) = (1 - \eta) |\beta|^2 - \sqrt{\eta(1 - \eta)} |\beta| \langle \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)} \rangle - e^{-\tilde{\gamma}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}t)^k}{k!} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j p_j^{(C)} - k \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right], \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta k_C^2}^{(E)}(t) &= (1 - \eta) |\beta|^2 \left\{ (1 - \eta) + \eta [\Delta \hat{X}_{\theta+\pi/2}^{(A)}]^2 \right\} - e^{-\tilde{\gamma}t} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j^2 p_j^{(C)} - k^2 \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right] \\ &\quad + 2 \langle n_C \rangle e^{-\tilde{\gamma}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}t)^k}{k!} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j p_j^{(C)} - k \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right] \\ &\quad - e^{-2\tilde{\gamma}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma}t)^k}{k!} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} j p_j^{(C)} - k \sum_{j=0}^k p_j^{(C)} \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Das equações (5.19)-(5.22) podemos ver que no modelo de SD o número de fotocontagens depende apenas das propriedades do campo  $\mathcal{A}$  (lembrando que as propriedades do oscilador local são conhecidas), enquanto que no caso do E-model, o número de fotocontagens depende tanto da estatística do campo  $\mathcal{A}$ , quanto da estatística do campo  $\mathcal{C}$  (na saída do divisor de feixes), que é a superposição dos feixes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ . Vemos que para  $\gamma t, \tilde{\gamma}t \gg 1$

$$\overline{k_{C(D)}} \rightarrow \langle \hat{n}_{C(D)} \rangle, \quad \overline{\Delta k_{C(D)}^2} \rightarrow \langle \Delta \hat{n}_{C(D)}^2 \rangle \quad (5.23)$$

para ambos os modelos. Portanto, se esperarmos um tempo suficientemente grande, podemos determinar precisamente as quadraturas do campo, cujo valor será o mesmo para ambos os modelos. Entretanto, a exata descrição das quadraturas, contida nas equações (5.19)-(5.22), obtidas via teorias quânticas de fotodeteção contínua, permite estimar o valor das quadraturas antes de atingir o limite estacionário dado pela Eq. (5.23). Isto é, após detectar  $k$  fótons no modo  $\mathcal{C}$  durante o tempo  $t$ , são aplicadas as fórmulas (5.19) – (5.22), determinando assim o valor médio de quadraturas e de suas variâncias. Porém, enquanto que para o modelo de SD esta extrapolação independe da estatística do campo  $\mathcal{C}$ , para o E-model isto não é mais verdade, e, portanto, o experimentalista precisa ou medir a estatística dos fótons no modo  $\mathcal{C}$ , ou determiná-la a partir de conhecimento de uma parte da estatística dos fótons do campo  $\mathcal{A}$ . Isto pode ser considerada uma “inconveniência” se comparado ao modelo de SD, em que apenas os momentos de números de fótons detectados determinam precisamente as propriedades das quadraturas. Porém, caso parte do operador-densidade do campo  $\mathcal{A}$  seja conhecido, pode-se determinar univocamente a

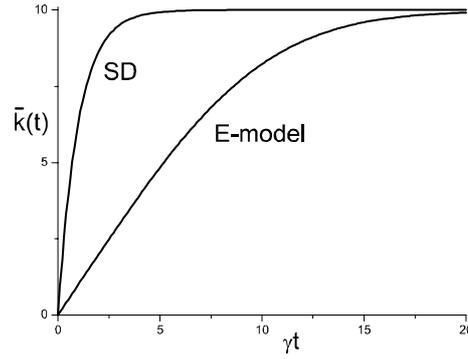


Figura 5.2: Comportamento qualitativo de número médio de fotoelétrons no detector  $\mathcal{C}$  em função de  $\gamma t$  (considerando  $\gamma = \tilde{\gamma}$ ). A curva de cima corresponde a qualquer estado no modo  $\mathcal{A}$ , segundo o modelo de SD. A curva de baixo corresponde a estado coerente no modo  $\mathcal{A}$ , segundo o E-model. Em ambos os casos consideramos o mesmo número médio de fótons na cavidade  $\mathcal{C}$  e supomos  $\gamma = \tilde{\gamma}$ .

estatística dos fótons no modo  $\mathcal{C}$  usando vários métodos [91–93]. Vamos exemplificar essa afirmação.

Vamos supor que o operador-densidade que descreve os feixes de entrada seja dado por

$$\hat{\rho}_{AB} = f_{in}(\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger) |0_A, 0_B\rangle. \quad (5.24)$$

Como consideramos um divisor de feixes ideal, a transformação dos feixes de entrada nos feixes de saída,  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \rightarrow \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ , é dada pela equação (5.5) (com a substituição  $\beta \rightarrow \hat{b}$ ), portanto o operador-densidade que descreve os feixes de saída é (fazendo  $\hat{a} \rightarrow \hat{c}$ ,  $\hat{b} \rightarrow \hat{d}$ )

$$\hat{\rho}_{CD} = f_{in}(\sqrt{\eta}\hat{c}^\dagger - i\sqrt{1-\eta}\hat{d}^\dagger, \sqrt{\eta}\hat{d}^\dagger - i\sqrt{1-\eta}\hat{c}^\dagger) |0_C, 0_D\rangle. \quad (5.25)$$

Visto que consideramos que o oscilador local está em estado coerente,

$$f_{in}(\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger) = f_A(\hat{a}^\dagger) \hat{D}(\beta),$$

onde  $\hat{D}(\beta)$  é o operador de deslocamento (que gera estado coerente a partir do vácuo). Assim, podemos determinar parte do operador-densidade dos feixes de saída ( $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ ) para qualquer campo de entrada  $\mathcal{A}$  com parte do operador estatístico conhecida, o que às vezes, pode ser bastante trabalhoso. Não vamos realizar estes cálculos para estados de entrada genéricos, limitando-nos, como exemplo, ao caso mais simples, em que o feixe incidente  $\mathcal{A}$  é também um estado coerente,  $|\alpha\rangle$ . Neste caso, após um cálculo imediato, verifica-se que o feixe  $\mathcal{C}$  também será um estado coerente,  $|\delta\rangle$ ,  $\delta = \sqrt{\eta}\alpha - \sqrt{1-\eta}\beta$ . A figura 5.2 mostra o comportamento de número médio de fótons detectados segundo ambos os modelos (considerando  $\gamma = \tilde{\gamma}$ ). Vemos que no caso do modelo de SD, o limite estacionário é atingido mais rapidamente do que no caso do E-model, por isso, é preciso esperar menos tempo para determinar (sem extrapolação) os valores de quadraturas.

### 5.3 Controle de grau de emaranhamento através de fotocontagem

Uma outra aplicação de fotodeteção na óptica quântica foi sugerida no artigo [14]. Nele, os autores propõem um esquema consistente para a geração e o controle de estados emaranhados de dois sub-sistemas  $A$  e  $B$  (chamados, em conjunto, de  $\mathcal{S}$ ) sob as seguintes condições: (i) Se os sub-sistemas interagem entre si, seus estados iniciais devem ser preparados adequadamente de tal forma que a interação, dada por  $\hat{V}_S$ , não emaranhe os estados durante a evolução no tempo. (ii) Um terceiro sub-sistema quântico, o monitor  $\mathcal{M}$ , é acoplado (por meio de  $\hat{V}_{SM}$ ) a  $\mathcal{S}$ ;  $\mathcal{M}$  deve ser o único subsistema responsável pelo emaranhamento de estados do  $\mathcal{S}$ , portanto uma condição necessária é  $[\hat{V}_S, \hat{V}_{SM}] = 0$ . Sob essas suposições, segue o protocolo: (iii) Primeiro escolhe-se um observável  $\mathcal{K}$  do  $\mathcal{M}$  e, depois de passar um tempo  $t$  desde o começo da interação (entre  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{M}$ ), esse observável é medido e a interação é desligada; o auto-valor medido determina o estado em que  $\mathcal{S}$  é deixado.

Se, durante o experimento, for possível controlar os resultados de  $\mathcal{M}$ , então torna-se possível controlar o grau de emaranhamento no  $\mathcal{S}$  e o protocolo torna-se viável. Nos experimentos de fotocontagem realista é, de fato, possível controlar o resultado do monitor da seguinte maneira: (i) liga-se a interação entre  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{M}$  e (ii) quando  $k$  fótons forem contados, sabe-se em que estado o sistema  $\mathcal{S}$  foi deixado. Entretanto, o intervalo de tempo necessário para contar  $k$  fótons é probabilístico e dado pela expressão (1.43): se o experimento é repetido, o mesmo número de fótons pode ser registrado em outro intervalo de tempo. Portanto, para reproduzir o mesmo estado, o experimento deve ser repetido de tal maneira, que o número de fótons contados seja o mesmo no mesmo intervalo de tempo.

Para a realização do esquema proposto foi considerado o seguinte sistema físico: o sub-sistema  $\mathcal{S}$  consiste de dois campos eletromagnéticos interagentes, modos  $A$  e  $B$ , acoplados ao monitor  $\mathcal{M}$ , um terceiro campo eletromagnético (modo  $C$ ). O emaranhamento entre os sub-sistemas de  $\mathcal{S}$  é criado por intermédio de contagem contínua destrutiva sobre  $C$ , e o controle é realizado desligando-se a interação assim que um número pre-determinado  $k$  de fótons é registrado. Com isso, o sistema  $\mathcal{S}$  é deixado em um estado emaranhado caracterizado, essencialmente, por  $k$ .

A dinâmica dos campos considerada pelos autores consiste de dois processos: (i) processos não-lineares de segunda ordem [96], acoplando os modos  $A$  e  $B$  (que formam o sistema  $\mathcal{S}$ ), acompanhados de (ii) uma amplificação clássica [18, 19] e um misturador de quatro ondas [19] com modos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (tratados como campos quânticos) acoplados a um quarto campo clássico intenso. A dinâmica do sistema é descrita pelo Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_b\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\omega_c\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hbar\lambda(\hat{a}^\dagger\hat{b}e^{i\nu t} + \hat{a}\hat{b}^\dagger e^{-i\nu t}) + \hbar\chi(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})(\hat{c}e^{-i\nu't} + \hat{c}^\dagger e^{i\nu't}), \quad (5.26)$$

onde  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  e  $\hat{c}$  são operadores bosônicos usuais, correspondendo aos modos  $A$ ,  $B$  e  $C$  com frequências  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_c$ , respectivamente. As constantes  $\chi$  e  $\lambda$  caracterizam a intensidade de acoplamento entre os campos. Na representação de interação, o Hamiltoniano é escrito como

$$\hat{H}_I = \hbar\lambda(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger) + \hbar\chi(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})(\hat{c} + \hat{c}^\dagger), \quad (5.27)$$

onde para chegar à expressão (5.27) partindo da expressão (5.26) as condições de ressonância  $\nu = \omega_a - \omega_b$  e  $\nu' = \omega_c$  devem ser satisfeitas para eliminar as dependências explícitas no

tempo, existentes na equação (5.26). Daqui em diante, vamos fazer todos os cálculos na representação de interação, pois o retorno para a representação de Schrödinger é imediata.

O próximo passo consiste em calcular o estado do sistema  $\mathcal{S}$  condicionado à detecção de  $k$  fótons no modo  $\mathcal{C}$ . Nesta etapa, podemos seguir de perto a teoria de medições contínuas de Srinivas e Davies, descrita na seção 1.3: escolhemos o operador de uma-contagem  $\hat{J}$  e a partir dele determinamos o operador de não-contagem  $\hat{S}_t$  e o operador  $\hat{N}_t(k)$  para contagem de  $k$  fótons durante um dado intervalo de tempo  $[0, t)$ . Feito isso, basta aplicar a operação  $\hat{N}_t(k)$  sobre o estado inicial do sistema  $\hat{\rho}_0$  e calcular o operador-densidade resultante

$$\hat{\rho}_t^{(k)} = \frac{\hat{N}_t(m)\hat{\rho}_0}{\text{Tr}[\hat{N}_t(m)\hat{\rho}_0]}.$$

Considerando o modelo de SD, o super-operador de uma contagem  $\hat{J}$  e, conseqüentemente, o operador de taxa  $\hat{R}$  (ver seção 1.3), são escolhidos como

$$\hat{J}\hat{\rho} = \gamma\hat{c}\hat{\rho}\hat{c}^\dagger, \quad \hat{R} = \gamma\hat{c}^\dagger\hat{c}, \quad (5.28)$$

portanto, o super-operador de não-contagem é completamente determinado por  $\hat{J}$  e o Hamiltoniano na representação de interação  $\hat{H}_I$ , resultando em

$$\hat{S}_t\hat{\rho} = e^{\hat{Y}t}\hat{\rho}e^{\hat{Y}^\dagger t}, \quad \hat{Y} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}_I - \hat{R}/2. \quad (5.29)$$

Na representação de interação,  $\hat{Y}$  torna-se

$$\hat{Y} = i\lambda(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger) - i\chi(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) - \frac{\gamma}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}, \quad (5.30)$$

o primeiro termo contribui apenas à evolução livre dos campo  $A$  e  $B$  como uma evolução unitária do estado inicial. O campo do monitor responde pelo processo de contagem, estando presente no outro termo, portanto, o super-operador  $\hat{N}_t(m)$ , agindo sobre o estado inicial  $\sum_{m,n} |m, n\rangle \otimes |0\rangle$ , pode ser expresso como

$$\hat{N}_t(k) = \hat{\mathcal{U}}_t \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \hat{S}_{t-t_k}^{(I)} \hat{J} \hat{S}_{t_k-t_{k-1}}^{(I)} \cdots \hat{J} \hat{S}_{t_1}^{(I)}, \quad (5.31)$$

onde

$$\hat{S}_t^{(I)}\hat{\rho} = e^{\hat{Y}_1^{(I)}t}\hat{\rho}e^{\hat{Y}_2^{(I)\dagger}t} \quad (5.32)$$

com

$$\hat{Y}_1^{(I)} = -i\chi(m+n)(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) - \frac{\gamma}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}, \quad \hat{Y}_2^{(I)} = -i\chi(m'+n')(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) - \frac{\gamma}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}. \quad (5.33)$$

O super-operador de evolução coerente dos modos  $A$  e  $B$  é definido como

$$\hat{\mathcal{U}}_t\hat{\rho} = e^{-i\lambda t(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)}\hat{\rho}e^{i\lambda t(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)}. \quad (5.34)$$

Assim, vemos que todo o problema consiste em manipular os termos da equação (5.31). Ao aplicarmos o modelo de SD, das equações (5.28) e (5.33) vemos que as operações  $\hat{J}$  e  $\hat{S}_t^{(I)}$  dependem apenas dos operadores  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}^\dagger$  e  $\hat{c}^\dagger\hat{c}$ , que formam a álgebra do oscilador harmônico. Por isso, é possível simplificar o super-operador (5.31), usando as relações

de comutação entre operadores  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ , chegando a uma forma fechada do operador  $\hat{N}_t(k)$ . Exatamente isto foi feito em [14].

Ao aplicar E-model ao mesmo problema, as únicas diferenças consistem na modificação do super-operador de uma contagem para

$$\tilde{J}\hat{\rho} = \tilde{\gamma}\hat{E}_-\hat{\rho}\hat{E}_+, \quad \tilde{R} = \tilde{g}\hat{\Lambda}, \quad (5.35)$$

onde

$$\hat{E}_- = \frac{1}{\sqrt{\hat{c}^\dagger\hat{c} + 1}}\hat{c}, \quad \hat{E}_+ = \hat{E}_-^\dagger, \quad \hat{\Lambda} = \hat{E}_+\hat{E}_-,$$

e, conseqüentemente, na modificação dos operadores  $Y_1^{(I)}$  e  $Y_2^{(I)}$  para

$$\tilde{Y}_1^{(I)} = -i\chi(m+n)(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) - \frac{\tilde{\gamma}}{2}\hat{\Lambda}, \quad \tilde{Y}_2^{(I)} = -i\chi(m'+n')(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) - \frac{\tilde{\gamma}}{2}\hat{\Lambda}, \quad (5.36)$$

lembrando que, agora,

$$\tilde{S}_t^{(I)} = e^{\tilde{Y}_1^{(I)}t}\hat{\rho}e^{\tilde{Y}_2^{(I)\dagger}t}$$

e  $\hat{\Lambda} = \hat{E}_+\hat{E}_- = \hat{1} - \hat{\Lambda}_0$ . E é aqui que surge o problema. Vemos que, agora, os super-operadores  $\tilde{J}$  e  $\tilde{S}_t^{(I)}$  dependem dos seguintes operadores:  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}^\dagger$ ,  $\hat{E}_-$ ,  $\hat{E}_+$  e  $\hat{\Lambda}$ , que não comutam entre si e não formam uma algebra fechada. Por isso, *não é possível* simplificar o super-operador  $\tilde{N}_t(k)$  (5.31) usando E-model, chegando a uma forma fechada. Assim, a dificuldade que aparece no caso de aplicação de E-model é puramente matemática.

Embora consideramos apenas um exemplo concreto nesta seção, podemos ver que a mesma dificuldade matemática (associada à aplicação de E-model) irá surgir em outras situações. Por isso, seria importante estudar mais profundamente os casos em que os operadores não formam uma algebra de Lie finita, como no caso descrito acima. Infelizmente, não conseguimos resolver esta dificuldade aqui.

## 5.4 Detecção de fótons correlacionados

Nesta seção vamos seguir na linha de detecção de estados correlacionados, porém, diferentemente da seção 5.3, em que o objetivo primário era produzir um estado emaranhado, vamos supor que já temos um “ensemble” de certos estados bipartites correlacionados. Consideremos que os modos individuais do estado total são distinguíveis, e vamos ver como a fotodetecção sobre um dos modos afeta a estatística do outro modo evoluindo livremente<sup>3</sup>, que não sofreu, *diretamente*, nenhuma operação.

Vamos considerar um operador-densidade simples descrevendo dois modos correlacionados *distinguíveis* 1 e 2 (com polarizações diferentes, por exemplo)

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= A^{-1} \left( |\alpha\rangle_1\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_2\langle\beta| + |\eta|^2 |\beta\rangle_1\langle\beta| \otimes |\alpha\rangle_2\langle\alpha| \right. \\ &\quad \left. + \xi\eta|\alpha\rangle_1\langle\beta| \otimes |\beta\rangle_2\langle\alpha| + \xi^*\eta^*|\beta\rangle_1\langle\alpha| \otimes |\alpha\rangle_2\langle\beta| \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde

$$A = \left[ 1 + |\eta|^2 + |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 (\eta\xi + \eta^*\xi^*) \right] \quad (5.38)$$

<sup>3</sup>Sob o termo “livremente” queremos dizer “sem nenhuma medição”, apenas a evolução livre (com possíveis efeitos dissipativos).

é a constante de normalização e  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  são estados puros arbitrários (por exemplo, estado coerente, estado coerente de fase ou estado de Fock). É claro que podemos generalizar o operador-densidade (5.37), mas não é o nosso objetivo aqui.

Inicialmente, várias *medições*,  $\widehat{M}$  e  $\widehat{m}$ , podem ser feitas sobre o operador-densidade  $\widehat{\rho}$  (vamos estabelecer que operadores com letras maiúsculas agem sobre o modo 1 e os com letras minúsculas agem sobre o modo 2). Estas medições podem ser, por exemplo, número médio de fótons, probabilidade de contar  $k$  fótons durante um dado tempo, etc. Assim, os valores médios das *medições* sobre o estado inicial são

$$\langle \widehat{M} \rangle = \text{Tr} [\widehat{M} \widehat{\rho}] = A^{-1} \left( \langle \alpha | \widehat{M} | \alpha \rangle + |\eta|^2 \langle \beta | \widehat{M} | \beta \rangle + \xi \eta \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{M} | \alpha \rangle + \xi^* \eta^* \langle \beta | \alpha \rangle \langle \alpha | \widehat{M} | \beta \rangle \right), \quad (5.39)$$

$$\langle \widehat{m} \rangle = \text{Tr} [\widehat{m} \widehat{\rho}] = A^{-1} \left( \langle \beta | \widehat{m} | \beta \rangle + |\eta|^2 \langle \alpha | \widehat{m} | \alpha \rangle + \xi \eta \langle \beta | \alpha \rangle \langle \alpha | \widehat{m} | \beta \rangle + \xi^* \eta^* \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{m} | \alpha \rangle \right). \quad (5.40)$$

onde, genericamente,  $\langle \alpha | \widehat{M} | \alpha \rangle = \text{Tr} [\widehat{M} | \alpha \rangle \langle \alpha |]$ .

Agora, vamos supor que algumas *operações* (super-operadores) arbitrárias  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{q}$  são efetuadas sobre o estado total (i.e.,  $\widehat{Q}$  sobre o modo 1 e  $\widehat{q}$  sobre o modo 2) durante um tempo qualquer  $t$ . O operador-densidade resultante é

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & B^{-1} \left( \widehat{Q} | \alpha \rangle_1 \langle \alpha | \otimes \widehat{q} | \beta \rangle_2 \langle \beta | + |\eta|^2 \widehat{Q} | \beta \rangle_1 \langle \beta | \otimes \widehat{q} | \alpha \rangle_2 \langle \alpha | \right. \\ & \left. + \xi \eta \widehat{Q} | \alpha \rangle_1 \langle \beta | \otimes \widehat{q} | \beta \rangle_2 \langle \alpha | + \xi^* \eta^* \widehat{Q} | \beta \rangle_1 \langle \alpha | \otimes \widehat{q} | \alpha \rangle_2 \langle \beta | \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde

$$B = \left[ \langle \alpha | \widehat{Q} | \alpha \rangle \langle \beta | \widehat{q} | \beta \rangle + |\eta|^2 \langle \beta | \widehat{Q} | \beta \rangle \langle \alpha | \widehat{q} | \alpha \rangle + \xi \eta \langle \beta | \widehat{Q} | \alpha \rangle \langle \alpha | \widehat{q} | \beta \rangle + \xi^* \eta^* \langle \alpha | \widehat{Q} | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{q} | \alpha \rangle \right] \quad (5.42)$$

e  $\langle \alpha | \widehat{Q} | \alpha \rangle = \text{Tr} [\widehat{Q} | \alpha \rangle \langle \alpha |]$ . Imediatamente após o tempo  $t$ , podemos medir novamente os valores médios  $\langle \widehat{M} \rangle$  e  $\langle \widehat{m} \rangle$  do novo campo  $\tilde{\rho}$ . Com isso, podemos ver como um modo influencia o outro sob a ação de diferentes *operações*  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{q}$ .

O método descrito acima é bastante geral, e agora vamos considerar um caso particular, simples de ser observado. Vamos supor que as *operações* são efetuadas apenas sobre o modo 1, e as medições são feitas sobre o modo 2. O procedimento experimental para isso é o seguinte:

1) Primeiramente, medimos o valor médio (ou probabilidade, dependendo de situação)  $\langle \widehat{m} \rangle$  de alguma quantidade  $\widehat{m}$  no modo 2.

2) Realizamos uma operação  $\widehat{Q}$  sobre o modo 1 durante um tempo  $t$ . Durante esse tempo, o modo 2 evolui livremente, seja isso com dissipação ou sem, e sua evolução é dada pelo operador  $\widehat{q}$ . No caso sem dissipação,  $\widehat{q}$  é unitário,  $\widehat{q} \widehat{\rho} = \widehat{U} \widehat{\rho} \widehat{U}^\dagger$ ,  $\widehat{U} = \exp(-i \widehat{H} t) = \exp(-i \omega \widehat{n}_2)$ ,  $\text{Tr} [\widehat{q} \widehat{\rho}] = \langle \alpha | \widehat{q} | \alpha \rangle = 1$ ; caso contrário – não.

3) Medimos novamente o valor médio  $\langle \widehat{m} \rangle$  no modo 2, e comparamos-no com o valor  $\langle \widehat{m} \rangle$  obtido anteriormente.

Considerando a evolução unitária livre, temos

$$\langle \widehat{m} \rangle = A^{-1} \left( \langle \beta | \widehat{m} | \beta \rangle + |\eta|^2 \langle \alpha | \widehat{m} | \alpha \rangle + \xi \eta \langle \alpha | \widehat{m} | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle + \xi^* \eta^* \langle \beta | \widehat{m} | \alpha \rangle \langle \alpha | \beta \rangle \right), \quad (5.43)$$

$$A = \left[ 1 + |\eta|^2 + |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 (\eta \xi + \eta^* \xi^*) \right];$$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{m} \rangle &= B^{-1} \left[ \langle \alpha | \widehat{Q} | \alpha \rangle \langle \beta | \widehat{U}^\dagger \widehat{m} \widehat{U} | \beta \rangle + |\eta|^2 \langle \beta | \widehat{Q} | \beta \rangle \langle \alpha | \widehat{U}^\dagger \widehat{m} \widehat{U} | \alpha \rangle \right. \\ &\quad \left. + \xi \eta \langle \beta | \widehat{Q} | \alpha \rangle \langle \alpha | \widehat{U}^\dagger \widehat{m} \widehat{U} | \beta \rangle + \xi^* \eta^* \langle \alpha | \widehat{Q} | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{U}^\dagger \widehat{m} \widehat{U} | \alpha \rangle \right] \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$B = \left[ \langle \alpha | \widehat{Q} | \alpha \rangle + |\eta|^2 \langle \beta | \widehat{Q} | \beta \rangle + \xi \eta \langle \beta | \widehat{Q} | \alpha \rangle + \xi^* \eta^* \langle \alpha | \widehat{Q} | \beta \rangle \right] \quad (5.45)$$

Dessa maneira, podemos analisar o efeito de operação arbitrária  $\widehat{Q}$  (modo 1) sobre qualquer medição  $\widehat{m}$  (modo 2). No entanto, isto não poderia ser utilizado para fazer comunicação superluminal, pois para saber a variação do valor médio da medição  $\widehat{m}$  no modo 2 é preciso saber o resultado da operação realizada sobre o modo 1 (dado pelos termos do tipo  $\langle \beta, \alpha | \widehat{Q} | \beta, \alpha \rangle$ ).

### 5.4.1 Exemplo – número médio de fótons

O modelo descrito acima é geral, mas agora vamos considerar um exemplo particular envolvendo uma medição de número médio de fótons  $\widehat{n}_2$  no modo 2. Neste caso, as expressões são simplificadas, pois  $[\widehat{U}, \widehat{n}_2] = 0$ . Obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} AB (\langle \widehat{n} \rangle - \langle \widetilde{n} \rangle) &= |\eta|^2 (\langle \beta | \widehat{n} | \beta \rangle - \langle \alpha | \widehat{n} | \alpha \rangle) (\langle \beta | \widehat{Q} | \beta \rangle - \langle \alpha | \widehat{Q} | \alpha \rangle) \\ &\quad - 2\text{Re}(\xi \eta) (\langle \beta | \widehat{n} | \beta \rangle \langle \alpha | \widehat{Q} | \alpha \rangle + |\eta|^2 \langle \alpha | \widehat{n} | \alpha \rangle \langle \beta | \widehat{Q} | \beta \rangle) \\ &\quad + 2\text{Re}(\xi \eta \langle \alpha | \widehat{n} | \beta \rangle) (\langle \alpha | \widehat{Q} | \alpha \rangle + |\eta|^2 \langle \beta | \widehat{Q} | \beta \rangle) - 2(1 + |\eta|^2) \text{Re}(\xi \eta \langle \alpha | \widehat{n} | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{Q} | \alpha \rangle) \\ &\quad + 2(1 - |\langle \alpha | \beta \rangle|^2) \text{Re}(\xi^2 \eta^2 \langle \alpha | \widehat{n} | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{Q} | \alpha \rangle) + 2|\eta|^2 |\xi|^2 \text{Re}(\langle \alpha | \widehat{n} | \beta \rangle \langle \alpha | \widehat{Q} | \beta \rangle) \\ &\quad - 2|\eta|^2 |\xi|^2 |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \text{Re}(\langle \alpha | \widehat{n} | \beta \rangle \langle \beta | \widehat{Q} | \alpha \rangle) \\ &\quad + 2|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \text{Re}(\xi \eta \langle \beta | \widehat{Q} | \alpha \rangle) (\langle \beta | \widehat{n} | \beta \rangle + |\eta|^2 \langle \alpha | \widehat{n} | \alpha \rangle) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Assim, vemos que o número médio de fótons é inalterado caso os fótons sejam descorrelacionados,  $\eta = 0$  ou  $\alpha = \beta$ . Em outros casos, ele pode, a princípio, aumentar ou diminuir, dependendo da operação  $\widehat{Q}$  e dos valores  $\alpha, \beta, \xi, \eta$ .

Vamos considerar um caso simples de correlação clássica em que  $\xi = 0$ , e vamos supor que no tempo  $t = 0^+$  seja detectado um fóton no modo 1 e logo em seguida o detector (no modo 1) é desligado. Neste caso  $\widehat{Q} = \widehat{J}$  (operação de uma contagem), e a ação sobre o modo 2 é:

**Modelo de SD:** para qualquer estado correlacionado, o número médio de fótons no modo 2 diminui, pois

$$\langle n \rangle - \langle \widetilde{n} \rangle = \frac{\eta}{(1 + \eta)(Q_\alpha + \eta Q_\beta)} (n_\alpha - n_\beta)^2 \geq 0 \quad (5.47)$$

**E-Model:** no caso descorrelacionado e no caso de  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  serem estados de Fock, o número médio de fótons no modo 2 é inalterado, e para outros estados o número médio diminui, pois

$$\begin{aligned} \langle n \rangle - \langle \widetilde{n} \rangle &= \frac{\eta}{(1 + \eta)(Q_\alpha + \eta Q_\beta)} (n_\alpha - n_\beta) (\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta) \\ &= \frac{\eta}{(1 + \eta)(Q_\alpha + \eta Q_\beta)} (n_\alpha - n_\beta) (\Lambda_0^\beta - \Lambda_0^\alpha) \geq 0, \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\Lambda_0^\alpha = \text{Tr}[\Lambda_0 |\alpha\rangle \langle \alpha|] = \langle \alpha | 0 \rangle \langle 0 | \alpha \rangle. \quad (5.49)$$

Isto deve-se ao fato de que  $\Lambda_0^\sigma$  é inversamente proporcional a  $n_\sigma$ . No caso em que foram contados  $m$  fótons no modo 1 durante um tempo  $t$ , obtém-se

$$\langle n \rangle - \langle \tilde{n} \rangle = \frac{\eta}{(1 + \eta)(Q_\alpha + \eta Q_\beta)} (n_\alpha - n_\beta) \left( P_m^\alpha(t) - P_m^\beta(t) \right), \quad P_m^\alpha(t) = \text{Tr} [N_t(m) |\alpha\rangle \langle \alpha|]. \quad (5.50)$$

Assim, vemos que uma operação (relacionada à fotodeteção) sobre um dos modos correlacionados do campo eletromagnético se reflete nas propriedades estatísticas do outro modo.

## 5.5 Conclusões

Neste capítulo nós descrevemos três aplicações simples de fotodeteção usando ambos os modelos de fotocontagem, o de SD e o E-model. Mostramos como é possível determinar o valor médio de uma das quadraturas do campo eletromagnético através de fotocontagem. Para isto basta misturar o sinal de interesse com um campo de referência em um divisor de feixes e medir os dois primeiros momentos do número de fótons nos feixes emergentes. Constatamos que o E-model é um pouco mais difícil de ser aplicado, pois ele exige o conhecimento de parte do operador-densidade (elementos diagonais, na base de Fock) dos feixes emergentes, enquanto que no modelo de SD isto não é necessário. Mas, apesar dessa “inconveniência”, ambos modelos podem ser implementados na prática.

Como segundo exemplo, descrevemos as dificuldades que aparecem quando tentamos aplicar o E-model aos casos, em que o campo sob investigação interage com algum outro sistema, evoluindo, portanto, não-livremente. Exemplificamos esta situação considerando um esquema proposto para o controle de grau de emaranhamento entre dois campos eletromagnéticos através de fotocontagens sobre um terceiro campo. Embora no modelo de SD este problema pode ser resolvido exatamente, no caso de E-model isto torna-se um problema complicado, devido ao fato de que, neste caso, existem duas famílias de operadores de “levantamento” e de “abaixamento” que não comutam entre si e não formam uma álgebra fechada, tornando as manipulações matemáticas muito mais complicadas.

Por último, na área de detecção de estados emaranhados, estudamos como uma operação sobre um dos modos de um estado correlacionado afeta as propriedades do outro modo. Vimos que isto depende, essencialmente, do modelo sendo utilizado. Assim, por exemplo, no caso de uma única contagem sobre o primeiro modo, o modelo de SD prevê a diminuição de número médio de fótons no segundo modo para todos os estados, enquanto que E-model prevê que isto não iria acontecer para estados de número emaranhados.

# Capítulo 6

## Dinâmica de separabilidade de estados Gaussianos bipartites sob conversão e amplificação paramétricas

Neste capítulo vamos seguir de perto o trabalho publicado em [97]. Vamos obter uma forma simplificada de critério de separabilidade de Simon para estados Gaussianos bipartites, mostrando que para sistemas cuja evolução é governada por Hamiltonianos quadráticos arbitrários, a dinâmica de separabilidade é descrita completamente em termos do determinante da matriz de covariâncias cruzadas. Como exemplos concretos, vamos considerar a evolução do “coeficiente de negatividade inversa” (que dá uma estimativa quantitativa de “grau de emaranhamento”) para dois modos inicialmente desacoplados (cada um estando em estado térmico comprimido) nos casos de conversão paramétrica, amplificação paramétrica, e para uma cavidade cujas fronteiras oscilam em ressonância com dois modos do campo. Alguns dos resultados descritos a seguir são novos e foram obtidos durante o trabalho realizado no mestrado.

### 6.1 Introdução

Vários problemas relacionados a estados quânticos emaranhados foram objeto de numerosos estudos realizados na última década [98–101]. Um deles é a condição de *separabilidade* de estados quânticos mistos de dois subsistemas, i.e., uma possibilidade de representar o operador-densidade  $\hat{\rho}$  dos subsistemas como uma soma de produtos diretos de operadores estatísticos agindo sobre cada componente separadamente:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_{i1} \otimes \hat{\rho}_{i2}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (6.1)$$

Recentemente, esse problema foi resolvido para estados *Gaussianos* bipartites de variáveis contínuas [101–108]. Na forma mais explícita, o critério de separabilidade foi proposto por *Simon* [103].

O objetivo desse trabalho é mostrar que o critério de Simon pode ser significativamente simplificado, se o sistema aberto sob consideração não interage com nenhum ambiente dissipativo, e sua dinâmica é governada por um Hamiltoniano *quadrático* arbitrário, mesmo que os coeficientes dependam do tempo. Acontece que esse critério é relacionado de perto ao conceito de *invariantes quânticos universais* introduzidos em [109, 110]. Por essa razão, em vez de calcular determinantes e traços de várias matrizes e seus produtos de acordo com a formulação inicial [103], é suficiente calcular o determinante de uma única matriz composta por covariâncias cruzadas entre componentes de quadraturas dos dois modos. Vamos demonstrar isso na seção 6.2, onde vamos introduzir, além de “parâmetro de separabilidade”, o “coeficiente de negatividade inversa”, que pode ser usado, bem como as outras “negatividades” [111–113], para estimar quantitativamente o “grau de emaranhamento”.

Nas seções 6.3 – 6.5 nós consideraremos, como exemplos, a evolução de coeficientes de separabilidade para diferentes mecanismos de emaranhamento: conversão paramétrica (seção 6.3) e amplificação paramétrica. No segundo caso, nós comparamos dois tipos de excitação paramétrica: uma amplificação externa dependente do tempo em uma cavidade com geometria fixa (seção 6.4) e a ressonância entre uma fronteira oscilante e modos do campo em uma cavidade com espectro específico de auto-freqüências de campo não-perturbadas (seção 6.5). A seção 6.6 contém uma discussão de resultados obtidos.

## 6.2 Critério simplificado de separabilidade e medidas da (in)separabilidade

Nós consideramos um sistema de variáveis contínuas bipartite, que pode ser descrito em termos de operadores bosônicos de “aniquiação/criação”  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ , ou operadores equivalentes de componentes de quadraturas (nós assumimos  $\hbar = 1$ ):

$$\hat{a}_k = (\omega_k \hat{x}_k + i\hat{p}_k) / \sqrt{2\omega_k}, \quad k = 1, 2; \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}. \quad (6.2)$$

É bem conhecido que *estados Gaussianos* são caracterizados completamente pelos valores médios e (co)variâncias dos operadores (6.2) [101, 114–117]. Nós assumimos por simplicidade que todos os valores médios são iguais a zero (caso contrário, basta substituir os operadores  $\hat{a}_k$  por  $\hat{a}_k - \langle \hat{a}_k \rangle$ ). Então, covariâncias simétricas reais são definidas como  $\hat{q}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \langle \hat{q}_\alpha \hat{q}_\beta + \hat{q}_\beta \hat{q}_\alpha \rangle$ , onde  $q_\alpha$  são componentes do vetor 4-dimensional  $\mathbf{q} = (x_1, p_1, x_2, p_2)$ . É conveniente juntar as covariâncias na matriz simétrica  $4 \times 4$  de covariâncias  $\mathcal{Q}$ , escrevendo essa matriz em blocos  $2 \times 2$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{Q} = \|q_{\alpha\beta}\| = \left\| \begin{array}{cc} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{array} \right\|. \quad (6.3)$$

Os blocos possuem as propriedades  $\mathcal{Q}_{11} = \tilde{\mathcal{Q}}_{11}$ ,  $\mathcal{Q}_{22} = \tilde{\mathcal{Q}}_{22}$ ,  $\mathcal{Q}_{12} = \tilde{\mathcal{Q}}_{21}$ , onde o til sobre matriz significa transposição da matriz.

Se na equação (6.1) a substituição da soma por uma integral é permitida, i.e., se decomposições contínuas sobre número infinito de produtos de operadores são admissíveis, então certas famílias de estados Gaussianos tornam-se separáveis. Foi mostrado [102, 103, 105, 107] que a *separabilidade contínua de estados Gaussianos é equivalente à sua classicalidade*, no sentido de possuir uma distribuição  $P$  de Sudarshan–Glauber bem

definida. Para nossas metas o critério de separabilidade mais conveniente é aquele encontrado em [103], porque ele é expresso diretamente em termos de invariantes de blocos da matriz de covariâncias (6.3). Especificamente, o estado Gaussiano que possui a matriz de covariâncias  $\mathcal{Q}$  é *separável* se

$$I_1 I_2 + (|I_3| - 1/4)^2 - I_4 \geq (I_1 + I_2)/4, \quad (6.4)$$

significando uma condição *necessária e suficiente*, onde

$$I_1 = \det \mathcal{Q}_{11}, \quad I_2 = \det \mathcal{Q}_{22}, \quad I_3 = \det \mathcal{Q}_{12},$$

$$I_4 = \text{Tr}(\mathcal{Q}_{11} \Sigma \mathcal{Q}_{12} \Sigma \mathcal{Q}_{22} \Sigma \mathcal{Q}_{21} \Sigma), \quad \Sigma = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Para estados não-Gaussianos a desigualdade (6.4) é apenas uma condição *necessária* de separabilidade [103].

Levando em conta que o termo  $I_4$ , dado pelo traço de produto de 8 matrizes, é de fato incorporado no determinante da matriz de covariância total, devido à identidade [103]

$$\det \mathcal{Q} = I_1 I_2 + I_3^2 - I_4,$$

o critério de separabilidade pode ser escrito em uma forma mais simples (veja também [105])

$$\mathcal{S}(t) = \det \mathcal{Q} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}(\det \mathcal{Q}_{11} + \det \mathcal{Q}_{22}) - \frac{1}{2}|\det \mathcal{Q}_{12}| \geq 0. \quad (6.5)$$

Agora, vamos supor que a dinâmica do sistema é governada por algum Hamiltoniano que tem uma *forma quadrática* de operadores (6.2) com coeficientes arbitrários (em geral dependentes de tempo). Foi descoberto em [109] (ver também [110, 116] para generalizações) que tais sistemas possuem *invariantes universais quânticos*, i.e., certas combinações de variâncias são conservadas no tempo *independentemente da forma concreta dos coeficientes do Hamiltoniano*. A razão para a existência de tais invariantes é devido à estrutura simplética da transformação relacionando  $V_{ij}(q, 0)$  e  $V_{ij}(q, t)$ , onde  $V(q, 0) = \langle q_i q_j \rangle_0 - \langle q_i \rangle_0 \langle q_j \rangle_0$ . No caso de dois modos existem dois invariantes universais independentes, conectados diretamente aos termos da equação (6.5) [109, 110]:

$$\mathcal{D}_0 = \det \mathcal{Q}, \quad \mathcal{D}_2 = \det \mathcal{Q}_{11} + \det \mathcal{Q}_{22} + 2 \det \mathcal{Q}_{12}. \quad (6.6)$$

Conseqüentemente,

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(0) + \frac{1}{2}(\det \mathcal{Q}_{12}(t) - |\det \mathcal{Q}_{12}(t)|), \quad (6.7)$$

onde

$$\mathcal{S}(0) = \mathcal{D}_0 - \frac{1}{4}\mathcal{D}_2 + \frac{1}{16} \quad (6.8)$$

é não-negativo devido a relações de incerteza generalizadas [109, 116]. Portanto, nós vemos que a separabilidade de estados Gaussianos de sistema quântico bipartite, que não interage com algum “ambiente” quântico (embora o Hamiltoniano possa ser dependente de tempo devido à amplificação externa clássica), é determinado completamente pelo determinante da matriz de covariâncias cruzadas  $\det \mathcal{Q}_{12}(t)$  (para dadas condições iniciais).

Em particular, torna-se bastante óbvio da fórmula (6.7) que uma condição necessária (embora não suficiente) de inseparabilidade (emaranhamento) é [103]  $\det \mathcal{Q}_{12} < 0$ .

O “parâmetro de separabilidade”  $\mathcal{S}(t)$  pode assumir, em princípio, qualquer valor dentro de intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$ . No entanto, nós poderíamos querer ter algum parâmetro compacto caracterizando o grau de inseparabilidade de tal maneira, que seus valores sejam confinados dentro do intervalo  $(-1, 1)$ , de modo que valores negativos corresponderiam a estados inseparáveis (em alguma analogia com parâmetro de não-classicalidade de Mandel), enquanto que os valores positivos corresponderiam a estados separáveis (classicamente correlacionados). É claro que a escolha de tal parâmetro não é única: qualquer função monótona de  $\mathcal{S}$  que satisfaz a condição  $-1 < \mathcal{S} < 1$  poderia servir para tal propósito. Nós consideraremos duas medidas, escolhidas devido a sua simplicidade:

$$\mathcal{A} = \tanh \mathcal{S}, \quad (6.9)$$

$$\mathcal{B} = \text{sign}(\mathcal{S}) \left( 1 + |\mathcal{S}| - \sqrt{1 + \mathcal{S}^2} \right), \quad (6.10)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são coeficientes positivos constantes e a função  $\text{sign}(\mathcal{S})$  retorna o sinal de  $\mathcal{S}$ .

Entretanto, com o intuito de seguir correntes atuais no estudo de emaranhamento, nós preferimos usar uma função que está relacionada de perto com a chamada “negatividade” [111–113]. No caso de estados Gaussianos a “negatividade logarítmica” é dada pela fórmula

$$\mathcal{E}_N = \sum_{k=1}^2 F(|c_k|), \quad F(x) = \begin{cases} 0, & 2x \geq 1 \\ -\log_2(2x), & 2x < 1 \end{cases} \quad (6.11)$$

onde os argumentos  $c_k$  são os chamados “auto-valores simpléticos” da matriz de variância “parcialmente transposta”  $\mathcal{Q}^{(PT)}$ , que é obtida da matriz (6.3) através da mudança do sinal das covariâncias de coordenada-momento em matrizes  $\mathcal{Q}_{12}$  e  $\mathcal{Q}_{21}$  (esse procedimento corresponde à reflexão de momentum de um subsistema do sistema bipartite, por exemplo, uma transformação do vetor  $\mathbf{q}$  da forma  $\mathbf{q} \rightarrow (x_1, -p_1, x_2, p_2)$ ). Os autovalores simpléticos da matriz simétrica  $\mathcal{Q}$  são definidos como autovalores da matriz  $\mathcal{X} = \mathcal{Q}\mathcal{Z}^{-1}$ , onde  $\mathcal{Z}$  é uma matriz anti-simétrica construída usando os comutadores de elementos de vetor  $\mathbf{q}$  (no nosso caso  $\mathcal{Z} = i\text{diag}(\Sigma, \Sigma)$ ). A soma em (6.11) contém apenas dois termos porque o conjunto de autovalores simpléticos consiste de pares  $\pm c_k$ ,  $k = 1, 2$ . Uma das razões para a definição (6.11) é que para estados separáveis a mudança  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}^{(PT)}$  resulta em uma nova matriz de variâncias que corresponde a outro estado físico, e a desigualdade  $2|c_k| \geq 1$  é uma de muitas formas aparentemente diferentes de relações de incerteza, enquanto que para estados inseparáveis a transposição parcial resulta em matrizes de covariâncias que não podem ser relacionadas a nenhum estado físico (portanto violando relações de incerteza). Uma forma explícita de autovalores simpléticos de matriz  $4 \times 4$  de covariâncias verdadeira foi obtida em [118] (ver também [119, 120])

$$|\kappa_{1,2}| = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\mathcal{D}_2 + 2\sqrt{\mathcal{D}_0}} \pm \sqrt{\mathcal{D}_2 - 2\sqrt{\mathcal{D}_0}} \right], \quad (6.12)$$

onde invariantes  $\mathcal{D}_0$  e  $\mathcal{D}_2$  são definidos em (6.6). A equação característica para a matriz  $\mathcal{Q}^{(PT)}\mathcal{Z}^{-1}$  tem a mesma forma que para matriz  $\mathcal{Q}\mathcal{Z}^{-1}$  com a única diferença – o sinal de  $\det \mathcal{Q}_{12}$  deve ser mudado. Isto significa que os valores  $|c_{1,2}|$  podem ser obtidos de  $|\kappa_{1,2}|$  (6.12) por meios da substituição [111–113]

$$\mathcal{D}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_2 = \det \mathcal{Q}_{11} + \det \mathcal{Q}_{22} - 2 \det \mathcal{Q}_{12}.$$

Obviamente,

$$\tilde{\mathcal{D}}_2 = \mathcal{D}_2 - 4 \det \mathcal{Q}_{12} \quad (6.13)$$

e tão logo que  $\mathcal{D}_0$  e  $\mathcal{D}_2$  não dependem de tempo no caso envolvido, a dinâmica da negatividade logarítmica é também determinada completamente pela dependência temporal da única quantidade  $\det \mathcal{Q}_{12}$ . Para lidar com medidas compactas, nós estudaremos em vez de  $\mathcal{E}_N$  a “negatividade inversa”

$$\mathcal{I} = 2^{-\mathcal{E}_N} - 1 = -2\mathcal{N}/(2\mathcal{N} + 1),$$

onde  $\mathcal{N} = \frac{1}{2}(2^{\mathcal{E}_N} - 1)$  é a negatividade introduzida em [111]. O novo parâmetro é próximo de  $-1$  para estados fortemente emaranhados, e igual a zero para estados separáveis. Agora vamos notar que o invariante  $\mathcal{D}_0$  é conectado com autovalores simpléticos por  $\mathcal{D}_0 = |\kappa_1 \kappa_2|^2 = |c_1 c_2|^2$  (porque transposição parcial não muda  $\det \mathcal{Q}$ ). Então uma consequência imediata da relação de incerteza generalizada  $\det \mathcal{Q} \geq 1/16$  [109, 114, 116, 121] é que pelo menos um dos autovalores simpléticos deve exceder o valor  $1/2$ . Isto significa que a soma em (6.11) contém de fato apenas um termo com  $|c_{min}|$ . Portanto a negatividade inversa pode ser escrita como

$$\mathcal{I} = \min(0, 2|c_{min}| - 1) \quad (6.14)$$

com

$$2|c_{min}| = \sqrt{\tilde{\mathcal{D}}_2 + 2\sqrt{\mathcal{D}_0}} - \sqrt{\tilde{\mathcal{D}}_2 - 2\sqrt{\mathcal{D}_0}}. \quad (6.15)$$

As seguintes expressões valem para determinantes de matrizes de blocos covariantes e de covariâncias cruzadas (lembrando que estamos supondo que todos os valores médios de componentes de quadraturas são nulos):

$$\det \mathcal{Q}_{kk} = \langle \hat{x}_k^2 \rangle \langle \hat{p}_k^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle \hat{x}_k \hat{p}_k + \hat{p}_k \hat{x}_k \rangle^2 \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{4} \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \rangle^2 - |\langle \hat{a}_k^2 \rangle|^2, \quad (6.17)$$

$$\det \mathcal{Q}_{12} = \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle - \langle \hat{x}_1 \hat{p}_2 \rangle \langle \hat{p}_1 \hat{x}_2 \rangle \quad (6.18)$$

$$= |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle|^2 - |\langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle|^2. \quad (6.19)$$

É bom notar também que os determinantes da matriz  $\mathcal{Q}$  e de seus blocos diagonais  $\mathcal{Q}_{kk}$  são relacionados com as paridades do sistema total e de seus subsistemas de acordo com as relações [116]

$$\mu \equiv \text{Tr} \hat{\rho}^2 = (16 \det \mathcal{Q})^{-1/2}, \quad \mu_k \equiv \text{Tr} \hat{\rho}_k^2 = (4 \det \mathcal{Q}_{kk})^{-1/2}.$$

Qualquer estado Gaussiano monomodal com valores médios de componentes de quadratura  $\hat{a}_k$  nulos pode ser considerado como sendo obtidos a partir de algum estado térmico, definido com respeito a operadores bosônicos “despidos”  $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ , possuindo os valores médios de segunda ordem  $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle = \nu \geq 0$  e  $\langle \hat{b}^2 \rangle = 0$ , por meio de “vestir” transformações lineares canônicas da forma [116, 122]

$$\hat{a} = \hat{b} \cosh(r) + \hat{b}^\dagger \sinh(r) e^{ix} \quad (6.20)$$

onde o coeficiente positivo  $r$  caracteriza o grau de compressão (“squeezing”) do estado térmico “inicial” e a fase  $\chi$  é responsável pelas correlações estatísticas entre os componentes de quadraturas no estado vestido (nós omitimos uma possível mas insignificante fase total). Por simplicidade, doravante vamos supor que a matriz densidade conjunta de dois modos é totalmente desemaranhada (fatorizada) no instante inicial  $t = 0$ , i.e.,  $\mathcal{Q}_{12}(0) = 0$ . Portanto, usaremos a seguinte parametrização de momentos da segunda ordem nos estados (desacoplados) Gaussianos monomodais iniciais (supondo que  $\langle \hat{a}_k \rangle = 0$ ):

$$\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle = \vartheta_k \cosh(2r_k) - \frac{1}{2}, \quad (6.21)$$

$$\langle \hat{a}_k^2 \rangle = \vartheta_k \sinh(2r_k) e^{i\chi_k}, \quad \vartheta_k \equiv \nu_k + \frac{1}{2}. \quad (6.22)$$

Em tal caso, de acordo com as Eqs. (6.8) e (6.17), o valor inicial de  $\mathcal{S}(0)$  não depende dos parâmetros de compressão:

$$\mathcal{S}(0) = \left( \vartheta_1^2 - 1/4 \right) \left( \vartheta_2^2 - 1/4 \right). \quad (6.23)$$

Todavia, os parâmetros  $r_k$  e  $\chi_k$  influenciam a evolução dos coeficientes de separabilidade e da negatividade inversa  $\mathcal{I}$  através a dependência temporal de  $\det \mathcal{Q}_{12}$ . Em particular, usando a equação (6.13) podemos escrever

$$2|c_{min}| = \sqrt{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 - 4 \det \mathcal{Q}_{12}} - \sqrt{(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 - 4 \det \mathcal{Q}_{12}}. \quad (6.24)$$

Nas seções seguintes nós estudaremos a dinâmica do parâmetro de separabilidade  $\mathcal{S}(t)$ , considerando exemplos de conversores e amplificadores paramétricos, no caso especial de ressonância exata, quando as soluções tem a forma explícita mais simples. A evolução de diferentes medidas de emaranhamento e correlações intermodais para dois osciladores harmônicos com frequências constantes mas com o acoplamento bilinear mais geral dependente de tempo foi considerado em [120, 123], e o emaranhamento em redes de osciladores com parâmetros dependentes de tempo foi investigado em [124].

### 6.3 Conversão paramétrica

O Hamiltoniano de conversão paramétrica é [19]

$$\hat{H}_c = \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \kappa \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{i\eta t} + \kappa^* \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 e^{-i\eta t}, \quad (6.25)$$

onde  $\eta$  é a frequência de um campo clássico  $\eta = \omega_2 - \omega_1$  (confinamos-nos ao caso mais simples de ressonância exata). As soluções exatas bem conhecidas de equações de movimento de Heisenberg são [125, 126]

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(t) &= e^{-i\omega_1 t} \left[ \hat{a}_1(0) \cos \tau - \frac{i\kappa}{|\kappa|} \hat{a}_2(0) \sin \tau \right], \\ \hat{a}_2(t) &= e^{-i\omega_2 t} \left[ \hat{a}_2(0) \cos \tau - \frac{i|\kappa|}{\kappa} \hat{a}_1(0) \sin \tau \right], \end{aligned}$$

onde  $\tau \equiv |\kappa|t$ . Então

$$\det \mathcal{Q}_{12}(\tau) = \frac{1}{4} \sin^2(2\tau) R_c, \quad (6.26)$$

onde

$$R_c = \left\{ \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle^2 - \left| \frac{|\kappa|}{\kappa} \langle \hat{a}_1^2 \rangle + \frac{\kappa}{|\kappa|} \langle \hat{a}_2^2 \rangle \right|^2 \right\}_{t=0} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 - 4\vartheta_1\vartheta_2 Y \quad (6.27)$$

e

$$Y = \sinh^2(r_1 + r_2) - \sinh(2r_1) \sinh(2r_2) \sin^2 \phi, \quad (6.28)$$

$$\phi = \arg(\kappa) + \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_1).$$

Vemos que  $R_c$  e, conseqüentemente,  $\det \mathcal{Q}_{12}(\tau)$  podem ser negativos apenas se  $\langle \hat{a}_k^2 \rangle(0) \neq 0$  (ou  $r_k > 0$ ) pelo menos para um dos valores  $k = 1, 2$ . Isto significa que pelo menos um modo deve estar inicialmente em um estado não-clássico para que a inseparabilidade ocorra. Para estados iniciais térmicos em ambos os modos, esses modos não podem se tornar realmente emaranhados no processo de evolução. Os parâmetros  $r_k$  devem exceder algum valor crítico para que a inseparabilidade possa ser atingida. Por exemplo, se o primeiro modo está inicialmente num estado puro ( $\nu_1 = 0$ ) e o segundo modo está em um estado térmico ( $r_2 = 0$ ), então a inseparabilidade pode ser atingida para qualquer valor não-nulo do tempo escalado  $\tau$ , se

$$\nu_2^2 - 2\vartheta_2 \sinh^2(r_1) < 0,$$

ou ela não poderá ser alcançada de maneira nenhuma, se essa expressão for positiva.

Em geral, o coeficiente  $R_c$  depende essencialmente da diferença de fase  $\phi$ . No caso  $\phi = 0$ , que é mais favorável para emaranhamento, a condição necessária de inseparabilidade (que pode ser atingida pelo menos no instante  $\tau = \pi/4$ ) é

$$\sinh(r_1 + r_2) > \frac{\vartheta_1\vartheta_2 - 1/4}{\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}}. \quad (6.29)$$

Agora é bom lembrar que o valor mínimo das variâncias de componentes de quadratura da família de operadores  $\hat{a}e^{i\gamma}$  para  $0 \leq \gamma < 2\pi$  é dado por uma simples fórmula

$$\sigma_{min} = \frac{1}{2} + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - |\langle \hat{a}^2 \rangle| \quad (6.30)$$

(é conhecido sob os nomes de compressão principal [127] ou compressão invariante [128, 129]). No caso de parametrização dada pelas equações (6.21) e (6.22), a fórmula (6.30) assume a forma

$$\sigma_{min} = \vartheta \exp(-2r) \quad (6.31)$$

e pode-se verificar que a desigualdade (6.29) é equivalente à desigualdade  $\sigma_{min}^{(1)} \sigma_{min}^{(2)} < \frac{1}{4}$ . Conseqüentemente, a inseparabilidade por meio de conversão paramétrica pode ser atingida se pelo menos um modo estava inicialmente em estado realmente comprimido, com valor mínimo de uma das componentes de quadratura menor que variância do estado coerente  $\frac{1}{2}$ .

Entretanto, a transição do estado separável para o inseparável não está relacionada com o comportamento de observáveis físicos, tais como a diferença do número médio de quanta nos dois modos  $\Delta \mathcal{N} = \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle$ , ou características geométricas do estado no espaço de Hilbert, tais como a diferença de quadrados de inversas de puridades dos

modos  $\Delta\mathcal{M} = \mu_1^{-2} - \mu_2^{-2}$ . No caso especial mais simples de  $\chi_1 = \chi_2 = \phi = 0$ , ambas as funções têm a mesma dependência temporal:  $\Delta\mathcal{N}(\tau) = \Delta\mathcal{N}(0) \cos(2\tau)$  e  $\Delta\mathcal{M}(\tau) = \Delta\mathcal{M}(0) \cos(2\tau)$ , enquanto que  $\mathcal{S}(\tau) = \mathcal{S}(0) + R_c \sin^2(2\tau)/4$ . Nos momentos de transição  $\tau_*$ , determinado pela equação  $\sin^2(2\tau_*) = -4\mathcal{S}(0)/R_c$ , as funções  $\Delta\mathcal{N}(\tau)$  e  $\Delta\mathcal{M}(\tau)$  não apresentam nenhuma mudança nos seus comportamentos. Em particular, eles podem ser positivos, quando o estado separável torna-se inseparável, mas eles também podem ser negativos no momento da próxima transformação, do estado inseparável para separável.

## 6.4 Amplificador paramétrico

O Hamiltoniano do amplificador paramétrico é (novamente no caso de ressonância exata)

$$\hat{H}_a = \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \kappa \hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{i\eta t} + \kappa^* \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger e^{-i\eta t} \quad (6.32)$$

com  $\eta = \omega_2 + \omega_1$ . As soluções de equações de Heisenberg são [125, 130]

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(t) &= e^{-i\omega_1 t} \left[ \hat{a}_1(0) \cosh \tau - \frac{i|\kappa|}{\kappa} \hat{a}_2^\dagger(0) \sinh \tau \right], \\ \hat{a}_2(t) &= e^{-i\omega_2 t} \left[ \hat{a}_2(0) \cosh \tau - \frac{i|\kappa|}{\kappa} \hat{a}_1^\dagger(0) \sinh \tau \right] \end{aligned}$$

com, formalmente, o mesmo tempo escalonado  $\tau \equiv |\kappa|t$ . Agora

$$\det \mathcal{Q}_{12}(\tau) = \frac{1}{4} \sinh^2(2\tau) R_a, \quad (6.33)$$

$$R_a = \left\{ \left| \frac{|\kappa|}{\kappa} \langle \hat{a}_1^2 \rangle - \frac{\kappa}{|\kappa|} \langle \hat{a}_2^2 \rangle \right|^2 - \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle^2 \right\}_{t=0} = -(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 - 4\vartheta_1 \vartheta_2 Y \quad (6.34)$$

com  $Y$  dado em (6.28). Nós vemos que  $R_a$  é sempre negativo, mesmo para estados iniciais térmicos com  $r_1 = r_2 = 0$ . Consequentemente, quaisquer estados inicialmente desacoplados tornam-se inseparáveis no processo de amplificação paramétrica depois de um tempo suficientemente longo, e todos os três coeficientes de separabilidade tendem monotonicamente a  $-1$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

Vamos considerar um exemplo simples de estados térmicos inicialmente não-comprimidos com temperaturas iguais:  $\vartheta_1 = \vartheta_2 \equiv \vartheta$ ,  $r_1 = r_2 = 0$ . Então  $\mathcal{S}(\tau) = (\vartheta^2 - 1/4)^2 - \vartheta^2 \sinh^2(2\tau)$ , logo o estado misto de dois modos inicialmente decorrelacionados torna-se inseparável no instante  $\tau_*$ , quando  $\sinh(2\tau_*) = (\vartheta^2 - 1/4)/\vartheta$ . Por outro lado, a energia média de cada modo cresce com tempo como  $\mathcal{E}_k(\tau) = \omega_k \vartheta \cosh(2\tau)$ , e nada de especial acontece com essa função no instante  $\tau = \tau_*$ , quando  $\mathcal{E}_k(\tau_*) = \omega_k (\vartheta^2 + 1/4)$ . Notem que o estado de cada modo permanece não-comprimido para qualquer instante de tempo, desde que  $\langle \hat{a}_1^2 \rangle(t) = \langle \hat{a}_2^2 \rangle(t) = 0$  para as condições iniciais escolhidas.

## 6.5 Dois modos acoplados ressonantemente em uma cavidade vibrante

Não obstante, a amplificação paramétrica nem sempre é acompanhada de transformação de estados inicialmente fatorizados em estados emaranhados inseparáveis, mesmo nos

casos quando as energias de cada modo crescem ilimitadamente. Um contra-exemplo interessante é o caso especial de campo na cavidade com extremidade móvel, onde o emaranhamento entre modos discretos ocorre devido ao efeito Doppler. Vários aspectos desse problema (modificações de força de Casimir, criação de fótons de vácuo, etc) foram estudados em numerosas publicações revisadas em [131]. Em particular, o problema de emaranhamento foi considerado em [132–135].

Estritamente falando, todos os modos são acoplados neste caso. Porém, existe um caso especial importante de acoplamento ressonante, onde apenas dois modos do campo são acoplados, enquanto que a interação com outros modos pode ser desprezada (ou levada em conta como uma pequena perturbação) [136].

Estamos interessados no caso quando uma das paredes da cavidade efetua pequenas oscilações com frequência  $\Omega$  próxima ao dobro de frequência de algum modo não-perturbado  $\omega_1^{(0)} \equiv 1$  (i.e., nós dividimos todas as frequências por  $\omega_1^{(0)}$ ). Aqui, por simplicidade, vamos confinar-nos ao caso de ressonância exata, quando a frequência instantânea do modo fundamental da cavidade dependente do tempo é

$$\omega_1(t) = 1 + 2\epsilon \cos(2t), \quad |\epsilon| \ll 1. \quad (6.35)$$

Fora isso, estamos supondo que o espectro de frequências do campo não-perturbado inclui a frequência  $\omega_3^{(0)} = 3$  (de novo supondo ressonância exata), mas não contém frequências próximas de  $5\omega_1^{(0)}$ . A possibilidade de tal situação foi apontada em [136]. Um exemplo é uma cavidade cúbica com pares de modos  $\{111\}$  e  $\{511\}$ . Outro exemplo é o par de modos  $\{110\}$  e  $\{510\}$  na cavidade retangular com  $L_x = \sqrt{2} L_y$  (neste caso, a direção comum de polarização é ao longo do eixo  $z$ ). Então, temos dois modos interagindo ressonantemente, cuja dinâmica é governada por um Hamiltoniano efetivo [137] (daqui em diante usaremos os símbolos  $x_k, p_j$  em vez de  $q_k, p_j$  para as componentes de quadratura do campo, enquanto que a letra  $x$  sem índices significará a coordenada usual de espaço dentro da cavidade):

$$\mathcal{H}_{13} = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_3^2) + 3\mu\epsilon \sin(2t) (p_1 x_3 - p_3 x_1) + \frac{1}{2} [1 + 4\epsilon \cos(2t)] x_1^2 + \frac{9}{2} x_3^2, \quad (6.36)$$

onde  $\mu$  é um fator constante, dependente da geometria da cavidade (para uma cavidade cúbica  $\mu = 5/12$ ). Uma expressão equivalente em termos de operadores de “aniquilação/criação” é a seguinte (aqui nós desprezamos os termos não-ressonantes):

$$\mathcal{H}_{13} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + 3\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \epsilon \cos(2t) (\hat{a}_1^{\dagger 2} + \hat{a}_1^2) + i\sqrt{12}\mu\epsilon \sin(2t) (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_3^\dagger). \quad (6.37)$$

As equações de movimento de Heisenberg para os operadores  $\hat{x}_k$  e  $\hat{p}_k$ , que seguem do Hamiltoniano (6.36), foram resolvidos no contexto do método de amplitudes lentamente variáveis em [137]. Em termos dos operadores  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  essas soluções tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(t) = & \left\{ \hat{a}_1(0) \left[ \cos(\zeta\tau) \cosh \tau + \frac{\sin(\zeta\tau)}{\zeta} \sinh \tau \right] - i\hat{a}_1^\dagger(0) \left[ \cos(\zeta\tau) \sinh \tau + \frac{\sin(\zeta\tau)}{\zeta} \cosh \tau \right] \right. \\ & \left. + \sqrt{2\gamma} \frac{\sin(\zeta\tau)}{\zeta} \left[ \hat{a}_3^\dagger(0) \sinh \tau - i\hat{a}_3(0) \cosh \tau \right] \right\} e^{-it}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_3(t) = & \left\{ \hat{a}_3(0) \left[ \cos(\zeta\tau) \cosh \tau - \frac{\sin(\zeta\tau)}{\zeta} \sinh \tau \right] + i\hat{a}_3^\dagger(0) \left[ \cos(\zeta\tau) \sinh \tau - \frac{\sin(\zeta\tau)}{\zeta} \cosh \tau \right] \right. \\ & \left. - \sqrt{2\gamma} \frac{\sin(\zeta\tau)}{\zeta} \left[ \hat{a}_1^\dagger(0) \sinh \tau + i\hat{a}_1(0) \cosh \tau \right] \right\} e^{-3it}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

onde

$$\tau \equiv \frac{1}{2}\epsilon t, \quad \zeta = \sqrt{2\gamma - 1}, \quad \gamma \equiv 96\mu^2. \quad (6.40)$$

Para os modos  $\{111\}$  e  $\{511\}$  da cavidade cúbica ou  $\{110\}$  e  $\{510\}$  da cavidade retangular com  $L_x = \sqrt{2}L_y$  temos  $\gamma = 50/3$ . Devido a esse exemplo explícito, nós consideramos que o parâmetro  $\gamma$  é grande:  $\gamma \gg 1$ .

Usando as equações (6.19), (6.21), (6.22), (6.38) e (6.39) (com a mudança de índices  $2 \rightarrow 3$ ) podemos expressar o determinante da matriz de covariâncias cruzadaz como

$$\begin{aligned} \det \mathcal{Q}_{13}(\tau) = & 2\gamma \frac{\sin^2(\zeta\tau)}{\zeta^2} \left\{ -2\vartheta_1\vartheta_3 Z \frac{\sin(2\zeta\tau)}{\zeta} - \frac{\sin^2(\zeta\tau)}{\zeta^2} [(\vartheta_3 + \vartheta_1)^2 + 4\vartheta_1\vartheta_3 Y_+] \right. \\ & \left. + \cos^2(\zeta\tau) [(\vartheta_3 - \vartheta_1)^2 - 4\vartheta_1\vartheta_3 Y_-] \right\}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

onde os coeficientes

$$Y_{\pm} = \sinh^2(r_1 \mp r_3) \pm \sinh(2r_1) \sinh(2r_3) \sin^2\left(\frac{\chi_1 \pm \chi_3}{2}\right)$$

e

$$Z = \sin \chi_1 \sinh(2r_1) \cosh(2r_3) + \sin \chi_3 \sinh(2r_3) \cosh(2r_1)$$

tornam-se nulos no caso especial de estados iniciais térmicos de ambos os modos ( $r_1 = r_3 = 0$ ).

Vemos que o grau de separabilidade é estritamente uma função periódica do tempo lento  $\tau$  (notem que a parte de interação do Hamiltoniano (6.37) tem a mesma forma que a do conversor paramétrico). Mesmo assim, as energias médias de cada modo,  $\mathcal{E}_k \equiv \omega_k (\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle + \frac{1}{2})$ , crescem no tempo quase exponencialmente (com algumas oscilações superpostas):

$$\mathcal{E}_1(\tau) = \vartheta_1 C_1(\tau) \cos^2(\zeta\tau) + \vartheta_1 S_1(\tau) \frac{\sin(2\zeta\tau)}{\zeta} + [\vartheta_1 C_1(\tau) + 2\gamma\vartheta_3 C_3(\tau)] \frac{\sin^2(\zeta\tau)}{\zeta^2}, \quad (6.42)$$

$$\mathcal{E}_3(\tau)/3 = \vartheta_3 C_3(\tau) \cos^2(\zeta\tau) - \vartheta_3 S_3(\tau) \frac{\sin(2\zeta\tau)}{\zeta} + [\vartheta_3 C_3(\tau) + 2\gamma\vartheta_1 C_1(\tau)] \frac{\sin^2(\zeta\tau)}{\zeta^2}, \quad (6.43)$$

onde

$$C_1 = \cosh(2\tau) \cosh(2r_1) - \sinh(2\tau) \sinh(2r_1) \sin \chi_1,$$

$$C_3 = \cosh(2\tau) \cosh(2r_3) + \sinh(2\tau) \sinh(2r_3) \sin \chi_3,$$

$$S_1 = \sinh(2\tau) \cosh(2r_1) - \cosh(2\tau) \sinh(2r_1) \sin \chi_1,$$

$$S_3 = \sinh(2\tau) \cosh(2r_3) + \cosh(2\tau) \sinh(2r_3) \sin \chi_3.$$

Para  $\zeta \gg 1$  temos as expressões simplificadas aproximadas

$$\mathcal{E}_1(\tau) \approx \vartheta_1 C_1(\tau) \cos^2(\zeta\tau) + \vartheta_3 C_3(\tau) \sin^2(\zeta\tau),$$

$$\mathcal{E}_3(\tau)/3 \approx \vartheta_3 C_3(\tau) \cos^2(\zeta\tau) + \vartheta_1 C_1(\tau) \sin^2(\zeta\tau),$$

Para um estado térmico não-comprimido inicial, os valores mínimos de  $\det \mathcal{Q}_{13}$  são atingi-

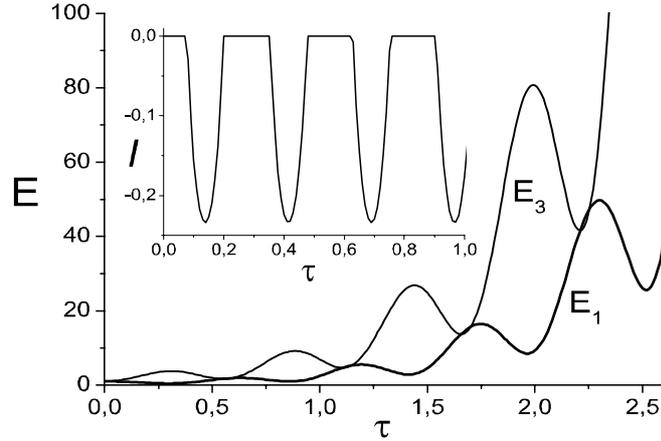


Figura 6.1: Energias normalizadas  $E_k(\tau) \equiv \mathcal{E}_k(\tau)/\mathcal{E}_k(0)$  do primeiro e terceiro modos em uma cavidade cúbica com extremidade oscilante ressonantemente ( $\gamma = 50/3$ ) versus o “tempo lento”  $\tau$ , para estados iniciais térmicos altamente comprimidos com  $\vartheta_1 = 3\vartheta_3 = 100$ ,  $r_1 = r_3 = 2.5$ , e  $\chi_1 = \chi_3 = 0$ . Na inserção: o coeficiente de “negatividade inversa”  $\mathcal{I}$  (6.14) entre o primeiro e o terceiro modos sob mesmas condições iniciais.

dos quando  $\zeta\tau = \pi/2 + k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots$ :

$$\det \mathcal{Q}_{13}^{\min} = -(\vartheta_3 + \vartheta_1)^2 (\zeta^2 + 1) / \zeta^4.$$

No caso de “altas temperaturas”, quando  $\vartheta_1 \approx 3\vartheta_3 \gg 1$  (devido à lei de equipartição de energia), a fórmula (6.23) fornece  $S(0) \approx \vartheta_1^4/9$ , enquanto  $\det \mathcal{Q}_{13}^{\min} \approx -2\vartheta_1^2/\zeta^2$  (para  $\zeta \gg 1$ ). Conseqüentemente, neste caso os modos permanecem separáveis para todos os tempos, embora suas energias cresçam indefinidamente. Entretanto, essa situação pode ser bem diferente para estado inicial comprimido. Por exemplo, se  $\chi_1 = \chi_3 = 0$  e  $\zeta \gg 1$ , então o mínimo da função  $\det \mathcal{Q}_{13}(\tau)$  acontece para  $\zeta\tau \approx \pi/4 + m\pi$ , quando

$$\det \mathcal{Q}_{13}^{\min} \approx \frac{\vartheta_1^2}{9} [1 - 3 \sinh^2(r_1 + r_3)].$$

Conseqüentemente, a inseparabilidade pode ser atingida, desde que o grau de compressão inicial seja grande o bastante para pelo menos um dos estados. Tomando por simplicidade  $r_1 = r_3 = r \gg 1$  obtemos as seguintes expressões aproximadas para energias médias dos dois modos:

$$\mathcal{E}_1(\tau) \approx \vartheta_1 \cosh(2\tau) \cosh(2r) \left[ \cos^2(\zeta\tau) + \frac{1}{3} \sin^2(\zeta\tau) \right], \quad (6.44)$$

$$\mathcal{E}_3(\tau) \approx \vartheta_1 \cosh(2\tau) \cosh(2r) \left[ \cos^2(\zeta\tau) + 3 \sin^2(\zeta\tau) \right]. \quad (6.45)$$

De ponto de vista de energia, coisas interessantes acontecem nos instantes  $\tau_n = \pi n/\zeta$ , quando  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3$ , e nos instantes próximos de  $\tau'_n = (n + 1/2)\pi/\zeta$ , quando  $\mathcal{E}_1$  atinge seu mínimo local e  $\mathcal{E}_3$  atinge seu máximo local com  $\mathcal{E}_3^{\max} \approx 9\mathcal{E}_1^{\min}$  (lembre que  $\zeta \gg 1$ ): veja

a figura 6.1. No entanto, nesses instantes o estado quântico é sempre separável, porque o coeficiente da negatividade inversa  $\mathcal{I}$  (6.14) é exatamente igual a zero para  $\tau = \tau_n$  e  $\tau = \tau'_n$ , como podemos ver na inserção da figura 6.1 e da expressão analítica aproximada

$$\mathcal{I}(\tau) \approx \min \left\{ 0, \frac{2}{3} \vartheta_1 \left[ \sqrt{4 + 3 \sinh^2(2r) \sin^2(2\zeta\tau)} - \sqrt{1 + 3 \sinh^2(2r) \sin^2(2\zeta\tau)} \right] - 1 \right\}. \quad (6.46)$$

O estado conjunto de dois modos é inseparável quando  $|\sin(2\zeta\tau)| > 2/[\sqrt{3} \sinh(2r)]$  e o grau máximo de inseparabilidade (emaranhamento) é atingido nos instantes  $\tilde{\tau}_k = \pi(k + 1/4)/\zeta$ . Entretanto, nada de especial acontece com as energias médias nesses instantes.

As dependências temporais de energias médias mostram-se ser mais sensíveis às fases de parâmetros iniciais de compressão. Por exemplo, escolhendo  $\chi_1 = \chi_3 = \pi/2$  e os mesmos valores  $r_1 = r_3 = r$ ,  $\zeta$ ,  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_3$  como antes, obtemos as seguintes expressões aproximadas em vez de (6.44) e (6.45):

$$\mathcal{E}_1(\tau) \approx \vartheta_1 \left[ \cosh(2\tau - 2r) \cos^2(\zeta\tau) + \frac{1}{3} \cosh(2\tau + 2r) \sin^2(\zeta\tau) \right], \quad (6.47)$$

$$\mathcal{E}_3(\tau) \approx \vartheta_1 \left[ \cosh(2\tau + 2r) \cos^2(\zeta\tau) + 3 \cosh(2\tau - 2r) \sin^2(\zeta\tau) \right]. \quad (6.48)$$

Agora, nos instantes próximos de  $\tau_n = \pi n/\zeta$  observa-se um mínimo de  $\mathcal{E}_1$  (que pode ser muito menor que a energia inicial, se  $r \gg 1$ ) e um máximo de  $\mathcal{E}_3$ , enquanto que a situação é invertida nos instantes próximos de  $\tau'_n = (n + 1/2)\pi/\zeta$ : veja a figura 6.2. A negatividade inversa é menos sensível às fases  $\chi_1$  e  $\chi_2$ . Em particular, os intervalos de tempo, quando  $\mathcal{I}(\tau) < 0$ , praticamente não dependem de valores de  $\chi_1$  e  $\chi_2$ . Apenas o “grau de inseparabilidade é sensível às fases (se  $\zeta$  não é extremamente grande), devido à contribuição do termo  $Z \sin(2\zeta\tau)/\zeta$  na equação (6.41), cujo sinal nos instantes  $\tilde{\tau}_k = \pi(k + 1/4)/\zeta$  depende da paridade do inteiro  $k$ . Isto é claramente visto, se compararmos as inserções das figuras 6.1 e 6.2. Novamente notamos que as transições de estados separáveis para inseparáveis não têm relação alguma com o comportamento de energias dos modos.

## 6.6 Discussão e conclusões

Vamos listar os resultados principais desse trabalho. Primeiro, nós obtemos uma forma simples do critério de separabilidade de Simon para sistemas quânticos abertos bipartites, cuja evolução é governada por Hamiltonianos quadráticos arbitrários (mesmo dependentes do tempo), mostrando que a dinâmica de inseparabilidade de tais sistemas é completamente determinada pela dependência temporal do determinante da matriz de covariâncias cruzadas. Em segundo lugar, nós analisamos a evolução temporal do novo coeficiente de separabilidade (“negatividade inversa”) para vários exemplos de Hamiltonianos dependentes de tempo, descrevendo a conversão e a amplificação paramétricas e o processo misto de amplificação-conversão, que corresponde ao caso de uma cavidade específica (por exemplo cúbica) com uma extremidade oscilando ressonantemente. Por outro lado, é bem conhecido que os problemas dependentes do tempo são isomórficos aos problemas de transformações de estados quânticos por algum mecanismo de multiportas óptico, tais como divisor de feixes, interferômetro ou misturador multi-ondas [93]. Recentemente, tais equipamentos foram estudados de ponto de vista de geração de estados emaranhados [138]. Portanto a análise do problema dependente de tempo pode ser facilmente reformulada em

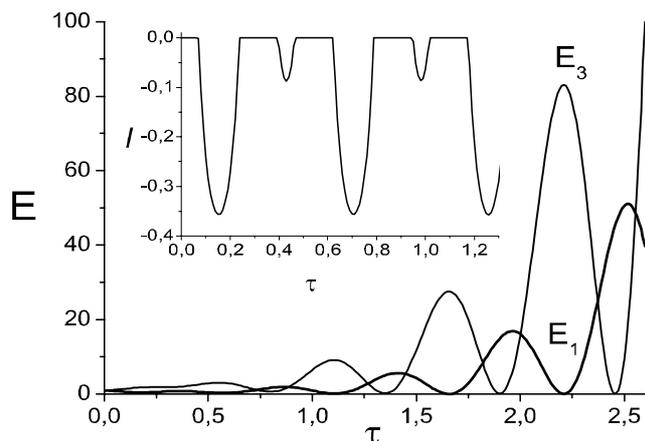


Figura 6.2: O mesmo que na figura 6.1, mas para  $\chi_1 = \chi_3 = \pi/2$ .

termos de mecanismos ópticos multiportas após pequenas modificações na terminologia e redefinição do significado de alguns parâmetros. Em particular, nós confirmamos o resultado bem conhecido que dois modos podem ser emaranhados com a adição de um divisor de feixes (que é equivalente a algum conversor paramétrico), se pelo menos um deles estiver em um estado não clássico (comprimido), com coeficiente de compressão bastante grande.

Um resultado marcante do nosso estudo é que as transições de estados separáveis para inseparáveis não são acompanhados (pelo menos para os exemplos considerados) por alguma mudança qualitativa visível no comportamento de quantidades físicas observáveis, tais como, por exemplo, energias médias dos modos (cf. [139], onde conclusões análogas foram feitas a respeito do grau de não-classicalidade de sistemas quânticos). Poderia se pensar que as energias médias de cada modo dificilmente têm uma relação direta com as covariâncias entre os modos. Mas um comportamento similar é observado para as correlações entre número de fótons para modos acoplados

$$\mathcal{K} = \left\langle \left( \hat{N}_1 - \langle \hat{N}_1 \rangle \right) \left( \hat{N}_2 - \langle \hat{N}_2 \rangle \right) \right\rangle \equiv \langle \hat{N}_1 \hat{N}_2 \rangle - \langle \hat{N}_1 \rangle \langle \hat{N}_2 \rangle, \quad \hat{N}_k \equiv \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k.$$

De fato,  $\mathcal{K}$  depende dos momentos da primeira, segunda, terceira e quarta ordens de operadores de criação e de aniquilação. Entretanto, para estados Gaussianos todos os momentos mais altos podem ser expressos em termos dos da primeira e segunda ordem. Por exemplo, o momento centralizado de quarta ordem de quaisquer duas quadraturas que comutam  $z_i$  e  $z_j$  (onde cada  $z_k$  pode ser ou  $x_k$  ou  $p_k$ ) podem ser escritos como [116]

$$\langle (\delta \hat{z}_i)^2 (\delta \hat{z}_j)^2 \rangle = \langle (\delta \hat{z}_i)^2 \rangle \langle (\delta \hat{z}_j)^2 \rangle + 2 \langle \delta \hat{z}_i \delta \hat{z}_j \rangle^2, \quad \delta \hat{z}_k \equiv \hat{z}_k - \langle \hat{z}_k \rangle$$

Portanto, para estados Gaussianos nós temos

$$\mathcal{K} = |\langle \delta \hat{a}_1 \delta \hat{a}_2 \rangle|^2 + \left| \langle \delta \hat{a}_1 \delta \hat{a}_2^\dagger \rangle \right|^2 + 2 \text{Re} \left[ \langle \delta \hat{a}_1 \delta \hat{a}_2 \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle^* \langle \hat{a}_2 \rangle^* + \langle \delta \hat{a}_1 \delta \hat{a}_2^\dagger \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle^* \langle \hat{a}_2 \rangle \right]. \quad (6.49)$$

A correlação de número de fótons depende das variâncias e de valores médios de operadores de criação e de aniquilação, enquanto que as propriedades de separabilidade dependem apenas das variâncias. Se  $\langle \hat{a}_k \rangle = 0$ , então  $\mathcal{K}$  torna-se idêntico (a menos de um fator de normalização) ao *trace-covariance correlation coefficient* introduzido em [120, 140]. A evolução temporal dessas quantidades para diferentes estados iniciais e diferentes sistemas quânticos foi considerada em [120, 123, 134]. Analisando os presentes resultados, podemos concluir que nada acontece com o coeficiente  $\mathcal{K}$  quando estados separáveis de dois modos são transformados em estados inseparáveis. Além disso,  $\mathcal{K}$  é sempre não-negativo para  $\langle \hat{a}_k \rangle = 0$ , independentemente do sinal de coeficientes de separabilidade. Embora  $\mathcal{K}$  pode se tornar negativo se  $\langle \hat{a}_k \rangle \neq 0$ , sua negatividade parece não ter relação com a inseparabilidade (entendida como “não-classicalidade” do estado). Por exemplo, no caso de conversor paramétrico (section 6.3), para o estado inicial térmico deslocado do primeiro modo ( $r_1 = 0$ ) e estado térmico não-deslocado do segundo modo ( $r_2 = \langle \hat{a}_2(0) \rangle = 0$ ) nós obtemos

$$\mathcal{K} = \frac{1}{4} \sin^2(2\tau) (\nu_1 - \nu_2) \left( \nu_1 - \nu_2 + 2|\langle \hat{a}_1(0) \rangle|^2 \right).$$

Se o valor de  $|\langle \hat{a}_1(0) \rangle|^2$  é grande o bastante e  $\nu_2 > \nu_1$  (i.e., a temperatura do modo não-deslocado é mais alta que a temperatura do modo deslocado), então  $\mathcal{K} < 0$  para  $\tau > 0$ , embora o estado conjunto de dois modos é separável, de acordo com os resultados da seção 6.3.

Em conexão com o parágrafo anterior, seria interessante encontrar observáveis físicos cujo comportamento é diferente para estados separáveis e inseparáveis de sistemas de variáveis contínuas. Caso contrário, devemos admitir que o conceito de separabilidade, útil para sistemas quânticos nos espaços de Hilbert com dimensões finitas (em vista de aplicações à computação quântica e à teoria de informação quântica), talvez, perde sua utilidade para sistemas quânticos de variáveis contínuas, onde tais quantidades como energia e outros observáveis diretamente medíveis desempenham papéis mais importantes.

# Capítulo 7

## Conclusões finais

Esta dissertação de mestrado abrangeu duas linhas de trabalho em óptica quântica moderna. A primeira está ligada à teoria de fotocontagem. Nós consideramos uma das teorias mais recentes de fotocontagem contínua, que descreve o processo de fotodetecção em cavidades fechadas – a *teoria de medições contínuas* proposta por *Srinivas e Davies* (SD) na década de 1980. O ingrediente principal da teoria de SD é a escolha apropriada do super-operador de *salto quântico*, que descreve a operação de uma contagem realizada pelo fotodetector. No entanto, o super-operador de salto quântico, escolhido por Srinivas e Davies, leva a algumas previsões inconsistentes, tanto do ponto de vista matemático, quanto físico. Algumas delas foram notadas pelos próprios autores e, recentemente, foram encontradas outras por Oliveira *et al.*, que propuseram *ad hoc* uma forma alternativa “não-linear” para o super-operador de salto quântico – que chamamos aqui de *E-model* – que elimina as inconsistências e leva a novos resultados. Um dos objetivos da dissertação consistiu em estudar mais detalhadamente o E-model e compará-lo com o modelo de SD.

Outro resultado da dissertação consistiu em mostrar que *ambos* os super-operadores de salto quântico aparecem naturalmente, quando consideramos um modelo microscópico para o detector. Nós fizemos duas hipóteses diferentes para simular o detector, ambas considerados previamente por outros autores: o modelo do átomo de 2-níveis, proposto por Imoto *et al.*, e o modelo do oscilador harmônico, estudado por *Mollow*. Em ambos os casos, os autores usaram abordagem perturbativa para calcular a evolução de um campo eletromagnético sujeito à ação do fotodetector, levando em consideração apenas a aproximação de tempos curtos. Nós demos um passo adiante, resolvendo *exatamente* esses modelos, e mostramos que ambos os super-operadores de salto quântico, tanto o de Srinivas e Davies, quanto o de Oliveira *et al.*, são aproximações convenientes de um super-operador mais geral, que chamamos de super-operador de *transição*. Mais que isso, mostramos que outros super-operadores de salto quântico “não-lineares” podem ser definidos de maneira análoga.

Nós comparamos ambos os modelos, o de SD e o E-model, na previsão de resultados experimentais relacionados a medições de diversas *probabilidades de coincidência*. Mostramos que em algumas situações o modelo de SD leva a resultados inconsistentes – por exemplo, densidades de probabilidades são ilimitadas e podem atingir valores extremamente grandes. No entanto, a aplicação do E-model não leva a nenhum resultado “estranho” e fornece previsões diferentes daquelas do modelo de SD, tanto do ponto de vista quantitativo, quanto qualitativo.

Generalizamos ambos os modelos para os casos em que levamos em consideração os

efeitos dissipativos inerentes a experimentos de fotocontagem, tais como dissipação pelas paredes da cavidade e a “perda” de fótons pelo próprio detector imperfeito. Vimos que o modelo de SD pode ser generalizado sem dificuldades, fornecendo resultados exatos. Entretanto, a generalização do E-model é mais complicada, devido a dificuldades em manipular operadores não-lineares, que nos obrigaram a fazer certas restrições quanto à aplicação dos resultados obtidos.

Como aplicações de teorias de fotodeteção, estudamos três exemplos concretos que utilizam a fotocontagem (usando ambos os modelos): a detecção homódina, o controle de emaranhamento entre dois feixes de luz através de fotocontagem e a fotodeteção de estados correlacionados. Mostramos que a aplicação do E-model em certos casos é mais difícil do ponto de vista matemático, devido, justamente, ao uso do super-operador de salto quântico “não-linear”, que não comuta com os operadores convencionais, que constituem a álgebra do oscilador harmônico.

A segunda linha da pesquisa dessa dissertação está relacionada com o estudo de *(in)separabilidade* de estados quânticos de variáveis contínuas – outro tópico de pesquisa atual na área de óptica quântica, que surgiu no final da década de 1990. Descrevemos o critério de separabilidade obtido por *Simon*, que dá uma estimativa quantitativa de “grau de emaranhamento” entre os modos, para estados *Gaussianos* bipartites. Mostraremos que esse critério pode ser simplificado para sistemas cuja evolução é governada por *Hamiltonianos quadráticos* arbitrários, fazendo com que a *dinâmica de separabilidade* seja descrita completamente em termos do determinante da matriz de covariâncias cruzadas – uma descrição muito mais simples do que a original. Como exemplos concretos, consideramos a evolução do “coeficiente de negatividade inversa” para dois modos inicialmente desacoplados (cada um estando em estado térmico comprimido) nos casos de *conversão paramétrica*, *amplificação paramétrica*, e para uma cavidade cuja fronteira oscila em ressonância com dois modos do campo.

# Apêndice A

## Expansão da exponencial

Neste capítulo vamos expandir a exponencial contendo o seguinte Hamiltoniano (vamos omitir o “chapeu”  $\hat{\bullet}$  em cima de operadores para facilitar a notação)

$$H = \frac{\omega_0}{2}\sigma_0 + \omega n + gf(n)a\sigma_+ + g^*a^\dagger f(n)\sigma_- \quad (\text{A.1})$$

A equação de Schrödinger para esse Hamiltoniano é

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle = \left(\frac{\omega_0}{2}\sigma_0 + \omega n + gf(n)a\sigma_+ + g^*a^\dagger f(n)\sigma_-\right)|\Psi(t)\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Mudando para uma outra representação através da transformação  $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega n t}e^{-i\omega_0\sigma_0 t/2}|\Psi_I(t)\rangle$ , e usando as relações

$$e^{i\omega n t}ae^{-i\omega n t} = e^{-i\omega t}a, \quad e^{i\omega\sigma_0 t/2}\sigma_+e^{-i\omega\sigma_0 t/2} = e^{i\omega t}\sigma_+ \quad (\text{A.3})$$

obtemos a seguinte equação para  $|\Psi\rangle_I(t)$

$$i\frac{d}{dt}|\Psi_I(t)\rangle = H_I|\Psi_I(t)\rangle \text{ com } H_I = \delta\sigma_0 + gf(n)a\sigma_+ + g^*a^\dagger f(n)\sigma_-, \quad \delta = \frac{\omega_0 - \omega}{2}. \quad (\text{A.4})$$

Portanto, a solução é  $|\Psi\rangle_I(t) = e^{-iH_I t}|\Psi_0\rangle$ . Expandindo o termo  $e^{-iH_I t}$  e separando os termos pares dos termos ímpares obtemos

$$\begin{aligned} e^{-iH_I t} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-it)^l}{l!} H_I^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2l}}{(2l)!} H_I^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2l+1}}{(2l+1)!} H_I^{2l+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} H_I^{2l} - iH_I \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} H_I^{2l}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Calculando explicitamente o termo  $H_I^2$  e usando as propriedades dos operadores de Pauli obtemos

$$\begin{aligned} H_I^2 &= \delta^2 + [\delta gf(n)a\sigma_+] - [\delta g^*a^\dagger f(n)\sigma_-] - [\delta gf(n)a\sigma_+] + |g|^2 f(n)aa^\dagger f(n) \frac{1+\sigma_0}{2} \\ &\quad + [\delta g^*a^\dagger f(n)\sigma_-] + |g|^2 a^\dagger |f(n)|^2 a \frac{1-\sigma_0}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde os termos selecionados cancelam um ao outro. Definindo duas funções auxiliares

$$\tilde{\Gamma}_\pm(n) = \frac{1}{2} [ |f(n)|^2(n+1) \pm |f(n-1)|^2 n ] \quad (\text{A.7})$$

temos

$$\tilde{\Gamma}_+(n) + \tilde{\Gamma}_-(n) = |f(n)|^2(n+1), \quad \tilde{\Gamma}_+(n) - \tilde{\Gamma}_-(n) = |f(n-1)|^2n, \quad (\text{A.8})$$

logo

$$H_I^2 = [\delta^2 + |g|^2\Gamma_+(n)] + |g|^2\Gamma_-(n)\sigma_0. \quad (\text{A.9})$$

Definindo outras funções mais apropriadas

$$\Gamma_+(n) = \delta^2 + |g|^2\Gamma_+(n), \quad \Gamma_-(n) = |g|^2\Gamma_-(n) \quad (\text{A.10})$$

finalmente obtemos

$$H_I^2 = \Gamma_+(n) + \Gamma_-(n)\sigma_0. \quad (\text{A.11})$$

Voltando na equação (A.5) temos

$$e^{-iH_I t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} (\Gamma_+(n) + \Gamma_-(n)\sigma_0)^l - iH_I \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} (\Gamma_+(n) + \Gamma_-(n)\sigma_0)^l. \quad (\text{A.12})$$

Calculando os termos

$$(\Gamma_+ + \Gamma_-\sigma_0)^2 = [\Gamma_+^2 + \Gamma_-^2] + 2\Gamma_+\Gamma_-\sigma_0, \quad (\text{A.13})$$

$$(\Gamma_+ + \Gamma_-\sigma_0)^3 = [\Gamma_+^3 + 3\Gamma_+\Gamma_-^2] + [\Gamma_-^3 + 3\Gamma_+^2\Gamma_-] \sigma_0, \quad (\text{A.14})$$

$$(\Gamma_+ + \Gamma_-\sigma_0)^4 = [\Gamma_+^4 + 6\Gamma_+^2\Gamma_-^2 + 4\Gamma_-^4] + [4\Gamma_+^3\Gamma_- + 4\Gamma_+\Gamma_-^3] \sigma_0, \quad (\text{A.15})$$

... etc, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} (\Gamma_+(n) + \Gamma_-(n)\sigma_0)^l \\ &= \left[ 1 - \frac{t^2}{2!}\Gamma_+ + \frac{t^4}{4!}(\Gamma_+^2 + \Gamma_-^2) - \frac{t^6}{6!}(\Gamma_+^3 + 3\Gamma_+\Gamma_-^2) + \frac{t^8}{8!}(\Gamma_+^4 + 6\Gamma_+^2\Gamma_-^2 + \Gamma_-^4) + \dots \right] \\ & \quad + \left[ \frac{-t^2}{2!}\Gamma_- + \frac{t^4}{4!}2\Gamma_+\Gamma_- - \frac{t^6}{6!}(3\Gamma_+^2\Gamma_- + \Gamma_-^3) + \frac{t^8}{8!}(4\Gamma_+^3\Gamma_- + 4\Gamma_+\Gamma_-^3) + \dots \right] \sigma_0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Usando a indução, podemos obter

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} (\Gamma_+(n) + \Gamma_-(n)\sigma_0)^l = \quad (\text{A.17}) \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \left\{ \frac{1}{2} [(\Gamma_+ + \Gamma_-)^l + (\Gamma_+ - \Gamma_-)^l] + \frac{1}{2} [(\Gamma_+ + \Gamma_-)^l - (\Gamma_+ - \Gamma_-)^l] \sigma_0 \right\} = \\ & \frac{1}{2} \left\{ \left[ \cos(t\sqrt{\Gamma_+ + \Gamma_-}) + \cos(t\sqrt{\Gamma_+ - \Gamma_-}) \right] + \left[ \cos(t\sqrt{\Gamma_+ + \Gamma_-}) - \cos(t\sqrt{\Gamma_+ - \Gamma_-}) \right] \sigma_0 \right\}. \end{aligned}$$

Para os termos ímpares temos

$$\begin{aligned} & -iH_I \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \left\{ \frac{1}{2} [(\Gamma_+ + \Gamma_-)^l + (\Gamma_+ - \Gamma_-)^l] + \frac{1}{2} [(\Gamma_+ + \Gamma_-)^l - (\Gamma_+ - \Gamma_-)^l] \sigma_0 \right\} \\ &= -\frac{i}{2} H_I \left\{ \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+ + \Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+ + \Gamma_-}} + \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+ - \Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+ - \Gamma_-}} \right] + \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+ + \Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+ + \Gamma_-}} - \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+ - \Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+ - \Gamma_-}} \right] \sigma_0 \right\}. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão para  $H_I$  e usando as propriedades dos operadores de Pauli obtemos para os termos ímpares

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i}{2} \left\{ \delta \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-}} - \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-}} \right] + \delta \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-}} + \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-}} \right] \sigma_0 \right\} \\
 & -igf(n)a \left\{ \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-}} + \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-}} \right] - \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-}} - \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-}} \right] \right\} \sigma_+ \\
 & -ig^*a^\dagger f(n) \left\{ \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-}} + \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-}} \right] + \left[ \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_++\Gamma_-}} - \frac{\sin(t\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-})}{\sqrt{\Gamma_+-\Gamma_-}} \right] \right\} \sigma_-.
 \end{aligned}$$

Definindo

$$A_n = \sqrt{\Gamma_+ + \Gamma_-} = \sqrt{\delta^2 + |g|^2 |f(n)|^2 (n+1)}, \quad (\text{A.18})$$

$$A_{n-1} = \sqrt{\Gamma_+ - \Gamma_-} = \sqrt{\delta^2 + |g|^2 |f(n-1)|^2 n} \quad (\text{A.19})$$

obtemos a expressão procurada

$$\begin{aligned}
 e^{-iH_I t} &= \frac{1}{2} \left\{ [\cos(A_n t) + \cos(A_{n-1} t)] + [\cos(A_n t) - \cos(A_{n-1} t)] \sigma_0 \right\} \\
 & -i\frac{\delta}{2} \left\{ \left[ \frac{\sin(A_n t)}{A_n} - \frac{\sin(A_{n-1} t)}{A_{n-1}} \right] + \left[ \frac{\sin(A_n t)}{A_n} + \frac{\sin(A_{n-1} t)}{A_{n-1}} \right] \sigma_0 \right\} \\
 & -igf(n)a \frac{\sin(A_{n-1} t)}{A_{n-1}} \sigma_+ - ig^*a^\dagger f(n) \frac{\sin(A_n t)}{A_n} \sigma_- \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \cos(A_n t) - i\delta \frac{\sin(A_n t)}{A_n} \right] + \left[ \cos(A_{n-1} t) + i\delta \frac{\sin(A_{n-1} t)}{A_{n-1}} \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \cos(A_n t) - i\delta \frac{\sin(A_n t)}{A_n} \right] - \left[ \cos(A_{n-1} t) + i\delta \frac{\sin(A_{n-1} t)}{A_{n-1}} \right] \right\} \sigma_0 \\
 & -igf(n)a \frac{\sin(A_{n-1} t)}{A_{n-1}} \sigma_+ - ig^*a^\dagger f(n) \frac{\sin(A_n t)}{A_n} \sigma_-. \quad (\text{A.20})
 \end{aligned}$$

# Apêndice B

## Funções de probabilidade condicional

Aqui nós apresentamos expressões explícitas de densidades de probabilidade condicional e não condicional (3.67)-(3.70) para três estados de campo.

(a) *Estado coerente:*

$$\begin{aligned}
 W_u = W_c &= \gamma \bar{n} e^{-\gamma(t_1+\tau)} \exp \left[ -\bar{n} e^{-\gamma t_1} (1 - e^{-\gamma \tau}) \right], \\
 \tilde{W}_u &= \tilde{\gamma} e^{-\tilde{\gamma} \tau} \left[ 1 - e^{-\tilde{\gamma} t_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma} t_1)^l}{l!^2} \Gamma(l+1, \bar{n}) \right], \\
 \tilde{W}_c &= \tilde{\gamma} e^{-\tilde{\gamma} \tau} \frac{1 - e^{-\tilde{\gamma} t_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma} t_1)^l}{l!(l+1)!} \Gamma(l+2, \bar{n})}{1 - e^{-\tilde{\gamma} t_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\gamma} t_1)^l}{l!^2} \Gamma(l+1, \bar{n})}.
 \end{aligned}$$

(b) *Estado de número:*

$$\begin{aligned}
 W_u &= \gamma N e^{-\gamma t_1 + \tau} \left[ 1 - e^{-\gamma t_1} (1 - e^{-\gamma \tau}) \right]^{N-1}, \\
 W_c &= \gamma e^{-\gamma t_1 + \tau} (N-1) \left[ 1 - e^{-\gamma t_1} (1 - e^{-\gamma \tau}) \right]^{N-2}, \\
 \tilde{W}_u &= \tilde{\gamma} \Omega(N-1, \tilde{\gamma} t_1) e^{-\tilde{\gamma} t_1 + \tau}, \\
 \tilde{W}_c &= \tilde{\gamma} \frac{\Omega(N-2, \tilde{\gamma} t_1)}{\Omega(N-1, \tilde{\gamma} t_1)} e^{-\tilde{\gamma} \tau}.
 \end{aligned}$$

(c) *Estado térmico:*

$$\begin{aligned}
 W_u &= \frac{\gamma \bar{n} e^{-\gamma t_1 + \tau}}{[1 + \bar{n} e^{-\gamma t_1} (1 - e^{-\gamma \tau})]^2}, \\
 W_c &= \frac{2\gamma \bar{n} e^{-\gamma t_1 + \tau}}{[1 + \bar{n} e^{-\gamma t_1} (1 - e^{-\gamma \tau})]^3}, \\
 \tilde{W}_u &= \tilde{\gamma} \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} e^{-\tilde{\gamma} t_1 / (\bar{n} + 1)} e^{-\tilde{\gamma} \tau}, \\
 \tilde{W}_c &= \tilde{\gamma} \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} e^{-\tilde{\gamma} \tau}.
 \end{aligned}$$

# Apêndice C

## Dissipação no E-model

Neste apêndice vamos mostrar explicitamente os cálculos da seção 4.2.1.

### C.1 Operação de não-contagem

Para resolver a equação (4.7), vamos usar a técnica de transformações do operador densidade. Primeiro, vamos eliminar os termos contendo operadores  $\hat{n}$  e  $\hat{\Lambda}$  através da transformação do operador-densidade

$$\hat{\rho}_h(t) = e^{-(i\omega + \gamma_D/2)\hat{n}(t-t_0)} e^{-\gamma\hat{\Lambda}(t-t_0)/2} \hat{\rho}_h'(t) e^{-\gamma\hat{\Lambda}(t-t_0)/2} e^{(i\omega - \gamma_D/2)\hat{n}(t-t_0)}, \quad (\text{C.1})$$

ficando apenas com a seguinte equação para  $\hat{\rho}_h'(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_h'(t) &= \gamma_D e^{-\gamma_D(t-t_0)} e^{-\gamma(t-t_0)\hat{\Lambda}_0/2} \hat{a} \hat{\rho}_h'(t) \hat{a}^\dagger e^{-\gamma(t-t_0)\hat{\Lambda}_0/2} \\ &= \gamma_D e^{-\gamma_D(t-t_0)} \left( \hat{\Lambda} + e^{-\gamma(t-t_0)/2} \hat{\Lambda}_0 \right) \hat{a} \left( \hat{\Lambda} \hat{\rho}_h'(t) \hat{\Lambda} \right) \hat{a}^\dagger \left( \hat{\Lambda} + e^{-\gamma(t-t_0)/2} \hat{\Lambda}_0 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde, na última passagem, expandimos o termo exponencial usando a equação (3.7) e inseri a identidade  $\hat{1} = \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0$  no termo  $\hat{a} \hat{\rho}_h'(t) \hat{a}^\dagger$ , usando o fato de que  $\hat{a} \hat{\Lambda}_0 = \hat{\Lambda}_0 \hat{a}^\dagger = 0$ .

Para resolver a equação (C.2), vamos projetar  $\hat{\rho}_3$  nos 4 sub-espacos possíveis. Para simplificar a notação, vamos definir

$$\hat{A}\hat{\rho} = \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger, \quad \hat{\Theta}\hat{\rho} = \hat{E}_-\hat{\rho}\hat{E}_+, \quad \eta = \gamma_D/\gamma. \quad (\text{C.3})$$

Multiplicando (C.2) por  $\hat{\Lambda}$  de ambos os lados, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \hat{\Lambda} \hat{\rho}_h' \hat{\Lambda} = \eta \gamma e^{-\eta\gamma(t-t_0)} \hat{\Lambda} \hat{a} \left( \hat{\Lambda} \hat{\rho}_h' \hat{\Lambda} \right) \hat{a}^\dagger \hat{\Lambda}, \quad (\text{C.4})$$

cuja solução é

$$\hat{\Lambda} \hat{\rho}_h' \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \left( e^{g(t-t_0)\hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda}, \quad g(t-t_0) = 1 - e^{-\eta\gamma(t-t_0)}. \quad (\text{C.5})$$

O segundo termo é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\Lambda}_0 \hat{\rho}_h' \hat{\Lambda}_0 &= \gamma_D e^{-(\gamma + \gamma_D)(t-t_0)} \hat{\Lambda}_0 \hat{a} \left( \hat{\Lambda} \hat{\rho}_h' \hat{\Lambda} \right) \hat{a}^\dagger \hat{\Lambda}_0 \\ &= \gamma_D e^{-(\gamma + \gamma_D)(t-t_0)} \hat{\Lambda}_0 \hat{a} \left( \hat{\Lambda} \left( e^{g(t-t_0)\hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda} \right) \hat{a}^\dagger \hat{\Lambda}_0, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

cujã solução é

$$\hat{\Lambda}_0 \hat{\rho}'_h \hat{\Lambda}_0 = \hat{\Lambda}_0 \left[ \hat{\rho}_{t_0} + \gamma_D \int_{t_0}^t dt' e^{-(1+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right) \right] \hat{\Lambda}_0. \quad (\text{C.7})$$

Analogamente, obtém-se o terceiro e o quarto termos

$$\hat{\Lambda}_0 \hat{\rho}'_h \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_0 \left[ \hat{\rho}_{t_0} + \gamma_D \int_{t_0}^t dt' e^{-(1/2+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right) \right] \hat{\Lambda}, \quad (\text{C.8})$$

$$\hat{\Lambda} \hat{\rho}'_h \hat{\Lambda}_0 = \hat{\Lambda} \left[ \hat{\rho}_{t_0} + \gamma_D \int_{t_0}^t dt' e^{-(1/2+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right) \right] \hat{\Lambda}_0. \quad (\text{C.9})$$

Portanto, a solução para  $\hat{\rho}'_h$  é

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_h &= \hat{\Lambda} \left( e^{g(t-t_0)\hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left[ \hat{\rho}_{t_0} + \gamma_D \int_{t_0}^t dt' e^{-(1+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right) \right] \hat{\Lambda}_0 \\ &+ \hat{\Lambda}_0 \left[ \hat{\rho}_{t_0} + \gamma\eta \int_{t_0}^t dt' e^{-(1/2+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right) \right] \hat{\Lambda} \\ &+ \hat{\Lambda} \left[ \hat{\rho}_{t_0} + \gamma\eta \int_{t_0}^t dt' e^{-(1/2+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right) \right] \hat{\Lambda}_0, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

onde

$$g(t-t_0) = 1 - e^{-\eta\gamma(t-t_0)}. \quad (\text{C.11})$$

Definindo o operador

$$\hat{I}_{t-t_0}^k \hat{\rho}_{t_0} \equiv \eta\gamma \int_{t_0}^t dt' e^{-(k+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right), \quad (\text{C.12})$$

o super-operador de não-contagem torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{t-t_0} \hat{\rho}_{t_0} &= e^{-(i\omega+\gamma_D/2)\hat{n}(t-t_0)} e^{-\gamma\hat{\Lambda}(t-t_0)/2} \hat{\rho}'_h e^{-\gamma\hat{\Lambda}(t-t_0)/2} e^{(i\omega-\gamma_D/2)\hat{n}(t-t_0)} \\ &= e^{-(i\omega+\gamma_D/2)\hat{n}(t-t_0)} \left( \hat{\Lambda}_0 + e^{-\gamma(t-t_0)/2} \hat{\Lambda} \right) \hat{\rho}'_h \left( \hat{\Lambda}_0 + e^{-\gamma(t-t_0)/2} \hat{\Lambda} \right) e^{(i\omega-\gamma_D/2)\hat{n}(t-t_0)} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Portanto, inserindo (C.10) em (C.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{t-t_0} \hat{\rho}_{t_0} &= \hat{\Lambda} \hat{L}_{t-t_0} \left( e^{g(t-t_0)\hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0}^1 \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda}_0 \\ &+ \hat{\Lambda}_0 e^{-\gamma(t-t_0)/2} \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0}^{1/2} \hat{\rho}_{t_0} \right) e^{(i\omega-\eta\gamma/2)\hat{n}(t-t_0)} \hat{\Lambda} \\ &+ \hat{\Lambda} e^{-\gamma(t-t_0)/2} e^{-(i\omega+\eta\gamma/2)\hat{n}(t-t_0)} \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0}^{1/2} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda}_0, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

onde

$$\hat{L}_{t-t_0} = e^{-\gamma(t-t_0)} e^{-(i\omega+\eta\gamma/2)\hat{n}(t-t_0)} \cdot e^{(i\omega-\eta\gamma/2)\hat{n}(t-t_0)}, \quad \hat{L}_{t_2-t_1} \hat{L}_{t_1-t_0} = \hat{L}_{t_2-t_0}, \quad (\text{C.15})$$

e

$$g(t-t_0) = 1 - e^{-\eta\gamma(t-t_0)}. \quad (\text{C.16})$$

Daqui em diante vamos estar interessados apenas nos termos diagonais de  $\tilde{S}_t$ , portanto, para os futuros cálculos, vamos usar

$$\tilde{S}_{t-t_0} \hat{\rho}_{t_0} = \hat{\Lambda} \hat{L}_{t-t_0} \left( e^{g(t-t_0)\hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda}_0,$$

com

$$\hat{I}_{t-t_0} \hat{\rho}_{t_0} = \eta\gamma \int_{t_0}^t dt' e^{-(1+\eta)\gamma(t'-t_0)} \left( e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{A} \hat{\rho}_{t_0} \right).$$

**C.1.1 Cálculo de traço de  $\tilde{S}_{t-t_0}\hat{\rho}_{t_0}$** 

Nesta seção vamos calcular o traço de  $\tilde{S}_{t-t_0}\hat{\rho}_{t_0}$ , que fornece a probabilidade de nenhuma contagem durante o tempo  $t - t_0$ . Vamos fazer  $t_0 = 0$ , obtendo

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\tilde{S}_t \hat{\rho}_0] &= e^{-\gamma t} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\gamma_D t l} \left\langle l \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k(t)}{k!} a^k \hat{\rho}_0 a^{\dagger k} \right| l \right\rangle + \langle 0 | \hat{\rho}_0 | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{I}_t \hat{\rho}_0 | 0 \rangle \\ &= e^{-\gamma t} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\gamma_D t l} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+k}{k} g^k(t) p_{k+l} + p_0 \\ &\quad + \eta \gamma \int_{t_0}^t dt' e^{-(1+\eta)\gamma(t'-t_0)} \langle 1 | e^{g(t'-t_0)\hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} | 1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\gamma t} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\gamma_D t l} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+k}{k} g^k(t) p_{k+l} + p_0 \\ &\quad + \eta \gamma \int_{t_0}^t dt' e^{-(1+\eta)\gamma(t'-t_0)} \sum_{l=0}^{\infty} g^l(t' - t_0) (l+1) p_{l+1} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Fazendo  $\gamma_D = 0$ , ou,  $\eta = 0$ , recupera-se o resultado do caso sem dissipação. Para estados concretos de campo obtém-se

**Estado coerente:**  $p_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{l!} g^l(t) p_{k+l} = e^{-\bar{n}} \bar{n}^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\bar{n}^k g)^l}{l!} = e^{-\bar{n}} \bar{n}^k e^{\bar{n}g(t)} = \bar{n}^k e^{-\bar{n} \exp(-\eta \gamma t)}, \quad (\text{C.19})$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\gamma_D t l} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+k}{k} g^k(t) p_{k+l} = e^{-\bar{n} \exp(-\eta \gamma t)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\bar{n} e^{-\eta \gamma t})^l}{l!} = 1 - e^{-\bar{n} \exp(-\eta \gamma t)}, \quad (\text{C.20})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} g^l(t') (l+1) p_{l+1} = \bar{n} e^{-\bar{n} \exp(-\eta \gamma t')} \quad (\text{C.21})$$

Portanto a probabilidade de nenhuma contagem é

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\tilde{S}_t \hat{\rho}_0] &= e^{-\bar{n}} + e^{-\gamma t} \left( 1 - e^{-\bar{n} \exp(-\eta \gamma t)} \right) + \eta \gamma \bar{n} \int_0^t dt' e^{-(1+\eta)\gamma t'} e^{-\bar{n} \exp(-\eta \gamma t')} \\ &= e^{-\bar{n}} + e^{-\gamma t} \left( 1 - e^{-\bar{n} \exp(-\eta \gamma t)} \right) - \frac{1}{\bar{n}^{1/\eta}} \int_N^{\bar{n} \exp(-\eta \gamma t)} dy y^{1/\eta} e^{-y}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

**Estado de Número:**  $p_n = \delta_{n,N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\eta \gamma t k}}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{l!} g^l(t) p_{k+l} &= N! g^N(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-\eta \gamma t} / g(t))^k}{k! (N-k)!} \\ &= N! g^N(t) \left[ \frac{1}{N!} \left( 1 + \frac{e^{-\eta \gamma t}}{g(t)} \right)^N - \frac{1}{N!} \right] \\ &= 1 - g^N(t) = 1 - \left( 1 - e^{-\eta \gamma t} \right)^N, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} g^l(t') (l+1) p_{l+1} = N \left( 1 - e^{-\eta \gamma t'} \right)^{N-1} \quad (\text{C.24})$$

Portanto

$$\text{Tr} [\tilde{S}_t \hat{\rho}_0] = \delta_{N,0} + e^{-\gamma t} \left[ 1 - \left( 1 - e^{-\eta \gamma t} \right)^N \right] - N \int_1^{\exp(-\eta \gamma t)} dy y^{1/\eta} (1-y)^{N-1} \quad (\text{C.25})$$

**Estado termico:**  $p_n = (1-\alpha)\alpha^n$ ,  $\alpha = \bar{n}/(\bar{n}+1)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} g^l(t) \frac{(L+k)!}{l!} p_{k+l} = (1-\alpha) \alpha^k \sum_{l=0}^{\infty} (\alpha g)^l (l+1) \cdots (l+k) = (1-\alpha) \alpha^k \frac{k!}{(1-\alpha g)^{k+1}}, \quad (\text{C.26})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\eta \gamma t k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} g^l p_{k+l} &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha g} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha e^{-\eta \gamma t}}{1-\alpha g} \right)^k = \frac{1-\alpha}{1-\alpha g} \frac{\alpha e^{-\eta \gamma t}}{1-\alpha g} \frac{1-\alpha g}{1-\alpha g - \alpha e^{-\eta \gamma t}} \\ &= \frac{\alpha e^{-\eta \gamma t}}{1-\alpha g} = \frac{\bar{n} e^{-\eta \gamma t}}{1+\bar{n} e^{-\eta \gamma t}}, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} g^l(t') (l+1) p_{l+1} = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \frac{1}{[1+\bar{n} e^{-\eta \gamma t'}]^2}. \quad (\text{C.28})$$

Portanto

$$\text{Tr} [\tilde{S}_t \hat{\rho}_0] = \frac{1}{\bar{n}+1} + e^{-\gamma t} \frac{\bar{n} e^{-\eta \gamma t}}{1+\bar{n} e^{-\eta \gamma t}} - \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \frac{1}{\bar{n}^{1+1/\eta}} \int_{e\bar{n}}^{\bar{n} \exp(-\eta \gamma t)} dy \frac{y^{1/\eta}}{(1+y)^2} \quad (\text{C.29})$$

## C.2 Operação de $m$ contagens

Agora vou calcular o operador  $\hat{N}_{[t_0, t]}(m)$  de  $m$  contagens no intervalo  $[t_0, t]$ .

$$N_{[t_0, t]}(m) = \int_{t_0}^t dt_m \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \tilde{S}_{t-t_m} \tilde{J} \tilde{S}_{t_m-t_{m-1}} \tilde{J} \cdots \tilde{J} \cdots \tilde{S}_{t_1-t_0}, \quad (\text{C.30})$$

onde

$$\tilde{S}_{t-t_0} \hat{\rho}_0 = \hat{\Lambda} \hat{L}_{t-t_0} \left( e^{g(t-t_0) \hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left( \hat{\rho}_{t_0} + \hat{I}_{t-t_0} \hat{\rho}_{t_0} \right) \hat{\Lambda}_0$$

Vamos, primeiro, calcular os termos do tipo  $\tilde{J} \tilde{S}_{t-t_0} = \tilde{J} \hat{L}_{t-t_0} \left( e^{g(t-t_0) \hat{A}} \hat{\rho}_{t_0} \right)$ , onde  $\tilde{J} = \gamma \hat{\Theta}$ . Para isso, tenho que calcular os seguintes termos

- (1a)

$$\begin{aligned} \tilde{J} \hat{L}_{t-t_0} \hat{\rho} &= \gamma e^{-\gamma(t-t_0)} E_- e^{-(i\omega + \eta \gamma / 2) \hat{n}(t-t_0)} \hat{\rho} e^{(i\omega - \eta \gamma / 2) \hat{n}(t-t_0)} E_+ \\ &= \gamma e^{-\gamma(t-t_0)} e^{-(i\omega + \eta \gamma / 2)(n+1)(t-t_0)} E_- \hat{\rho} E_+ e^{(i\omega - \eta \gamma / 2)(n+1)(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Portanto,

$$\tilde{J} \hat{L}_{t-t_0} = e^{-\eta \gamma (t-t_0)} \hat{L}_{t-t_0} \tilde{J}. \quad (\text{C.32})$$

- (1b)

$$\begin{aligned} e^{g(t_2-t_1) \hat{A}} \hat{L}_{t_1-t_0} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l(t_2-t_1)}{l!} a^l e^{-\gamma(t_1-t_0)} e^{-(i\omega + \eta \gamma / 2) \hat{n}(t_1-t_0)} \cdot e^{(i\omega - \eta \gamma / 2) \hat{n}(t_1-t_0)} a^{\dagger l} \\ &= e^{-\gamma(t_1-t_0)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left( g(t_2-t_1) e^{-\eta \gamma (t_1-t_0)} \right)^l}{l!} a^l \cdot a^{\dagger l}. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Vou definir uma nova função

$$\phi(t_2, t_1, t_0) \equiv g(t_2 - t_1) e^{-\eta\gamma(t_1 - t_0)} = \left(1 - e^{-\eta\gamma(t_2 - t_1)}\right) e^{-\eta\gamma(t_1 - t_0)} = e^{-\eta\gamma(t_1 - t_0)} - e^{-\eta\gamma(t_2 - t_0)}. \quad (\text{C.34})$$

Portanto

$$e^{g(t_2 - t_1)\hat{A}} \hat{L}_{t_1 - t_0} = \hat{L}_{t_1 - t_0} e^{\phi(t_2, t_1, t_0)\hat{A}}, \quad \phi(t_2, t_1, t_0) = e^{\eta\gamma t_0} \left(e^{-\eta\gamma t_1} - e^{-\eta\gamma t_2}\right). \quad (\text{C.35})$$

Usando os resultados (1a), (1b) posso facilmente calcular os termos de interesse:

$$\tilde{J}\tilde{S}_{t_1 - t_0} = \tilde{J}\hat{L}_{t_1 - t_0} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}} = e^{-\eta\gamma(t_1 - t_0)} \hat{L}_{t_1 - t_0} \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}}, \quad (\text{C.36})$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}\tilde{S}_{t_2 - t_1} \tilde{J}\tilde{S}_{t_1} &= \tilde{J}\hat{L}_{t_2 - t_1} e^{g(t_2 - t_1)\hat{A}} e^{-\eta\gamma(t_1 - t_0)} \hat{L}_{t_1 - t_0} \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}} \\ &= e^{-\eta\gamma(t_1 - t_0)} \tilde{J}\hat{L}_{t_2 - t_1} \hat{L}_{t_1 - t_0} e^{\phi(t_2, t_1, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}} \\ &= e^{-\eta\gamma(t_1 + t_2 - 2t_0)} \hat{L}_{t_2 - t_0} \tilde{J} e^{\phi(t_2, t_1, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}}. \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Continuando o cálculo, usando a nova notação, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{J}\tilde{S}_{t_3 - t_2} \tilde{J}\tilde{S}_{t_2 - t_1} \tilde{J}\tilde{S}_{t_1} &= \tilde{J}\hat{L}_{t_3 - t_2} e^{g(t_3 - t_2)\hat{A}} e^{-\eta\gamma(t_1 + t_2 - 2t_0)} \hat{L}_{t_2 - t_0} \tilde{J} e^{\phi(t_2, t_1, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}} \\ &= e^{-\eta\gamma(t_1 + t_2 - 2t_0)} \tilde{J}\hat{L}_{t_3 - t_2} \hat{L}_{t_2 - t_0} e^{\phi(t_3, t_2, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{\phi(t_2, t_1, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}} \\ &= e^{-\eta\gamma(t_1 + t_2 + t_3 - 3t_0)} \hat{L}_{t_3 - t_0} \tilde{J} e^{\phi(t_3, t_2, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{\phi(t_2, t_1, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}}. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Para simplificar a notação, vou definir

$$x_l \equiv e^{-\eta\gamma t_l}.$$

Usando o metodo da indução, podemos deduzir o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 &\equiv \tilde{J}\tilde{S}_{t_m - t_{m-1}} \tilde{J} \cdots \cdots \tilde{J}\tilde{S}_{t_1 - t_0} \\ &= e^{-\eta\gamma(t_1 + \cdots + t_m - mt_0)} \hat{L}_{t_m - t_0} \tilde{J} e^{\phi(t_m, t_{m-1}, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{\phi(t_{m-1}, t_{m-2}, t_0)\hat{A}} \cdots \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}} \\ &= x_0^m x_1 \cdots x_m \hat{L}_{t_m - t_0} \tilde{J} e^{x_0(-x_m + x_{m-1})\hat{A}} \tilde{J} e^{x_0(-x_{m-1} + x_{m-2})\hat{A}} \cdots \tilde{J} e^{x_0(-x_1 + x_0)\hat{A}} \\ &= x_0^m x_1 \cdots x_m \hat{L}_{t_m - t_0} e^{-x_0 x_m \hat{A}} \left( e^{x_0 x_m \hat{A}} \tilde{J} e^{-x_0 x_m \hat{A}} \right) \cdots \left( e^{x_0 x_1 \hat{A}} \tilde{J} e^{-x_0 x_1 \hat{A}} \right) e^{\hat{A}} \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

e, acrescentando  $\tilde{S}_{t - t_m}$  do lado esquerdo, obtém-se a expressão procurada

$$\tilde{S}_{t - t_m} \tilde{J}\tilde{S}_{t_m - t_{m-1}} \tilde{J} \cdots \tilde{J}\tilde{S}_{t_1 - t_0} = \hat{\Lambda} \hat{F}_2 \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left( \hat{F}_1 + \hat{I}_{t - t_m} \hat{F}_1 \right) \hat{\Lambda}_0, \quad (\text{C.40})$$

onde

$$\hat{F}_1 = x_0^m x_1 \cdots x_m \hat{L}_{t_m - t_0} e^{-x_0 x_m \hat{A}} \left( e^{x_0 x_m \hat{A}} \tilde{J} e^{-x_0 x_m \hat{A}} \right) \cdots \left( e^{x_0 x_1 \hat{A}} \tilde{J} e^{-x_0 x_1 \hat{A}} \right) e^{\hat{A}}, \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_2 &\equiv \hat{L}_{t - t_m} \left( e^{g(t - t_m)\hat{A}} \right) \hat{F}_1 \\ &= e^{-\eta\gamma(t_1 + \cdots + t_m - mt_0)} \hat{L}_{t - t_0} e^{\phi(t, t_m, t_0)\hat{A}} \tilde{J} e^{\phi(t_m, t_{m-1}, t_0)\hat{A}} \tilde{J} \cdots \tilde{J} e^{g(t_1 - t_0)\hat{A}} \\ &= x_0^m x_1 \cdots x_m \hat{L}_{t - t_0} e^{x_0(-x + x_m)\hat{A}} \tilde{J} e^{x_0(-x_m + x_{m-1})\hat{A}} \tilde{J} e^{x_0(-x_{m-1} + x_{m-2})\hat{A}} \cdots \tilde{J} e^{x_0(-x_1 + x_0)\hat{A}} \\ &= x_0^m x_1 \cdots x_m \hat{L}_{t - t_0} e^{-x_0 x \hat{A}} \left( e^{x_0 x_m \hat{A}} \tilde{J} e^{-x_0 x_m \hat{A}} \right) \cdots \left( e^{x_0 x_1 \hat{A}} \tilde{J} e^{-x_0 x_1 \hat{A}} \right) e^{\hat{A}} \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Se colocarmos  $\eta = 0$ , temos  $x_l = 1$  e obtemos a expressão do E-model ideal (para elementos diagonais)

$$\tilde{S}_{t-t_m} \tilde{J} \tilde{S}_{t_m-t_{m-1}} \tilde{J} \cdots \tilde{J} \tilde{S}_{t_1-t_0} \hat{\rho} = \hat{\Lambda} e^{-\gamma t} \hat{U}_t (\tilde{J}^m \hat{\rho}) \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 (e^{-\gamma t_m} \tilde{J}^m \hat{\rho}) \hat{\Lambda}_0.$$

A expressão (C.40) é exata para os termos diagonais (para os termos não-diagonais, a generalização é imediata).

Vamos estudar mais detalhadamente o termo

$$(e^{q\hat{A}} \tilde{J} e^{q\hat{A}}) = \gamma e^{q\sqrt{n+1}E_- \cdot E_+ \sqrt{n+1}} E_- \cdot E_+ e^{-q\sqrt{n+1}E_- \cdot E_+ \sqrt{n+1}}, \quad (\text{C.43})$$

onde  $q$  é um parâmetro arbitrário, no nosso caso  $q = x_0 x_l$ . Para simplificar os cálculos, vou calcular apenas os elementos diagonais da expressão (C.43) acima, já que no final vou acabar fazendo isso de qualquer forma para calcular o traço. Para os elementos diagonais obtém-se

$$\begin{aligned} e^{q\hat{A}} \tilde{J} e^{q\hat{A}} &= \gamma e^{q(n+1)\Theta} \Theta e^{-q(n+1)\Theta} \\ &= \gamma \left\{ \Theta + q[(n+1)\Theta, \Theta] + \frac{q^2}{2!} [(n+1)\Theta, [(n+1)\Theta, \Theta]] \cdots + \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Os termos de comutador são

$$\begin{aligned} [(n+1)\Theta, \Theta] &= (n+1)E_- E_- \cdot E_+ E_+ - E_- (n+1)E_- \cdot E_+ E_+ \\ &= (n+1)E_- E_- \cdot E_+ E_+ - (n+2)E_- E_- \cdot E_+ E_+ = -(E_- \cdot E_+)^2 = -\Theta^2, \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

$$\begin{aligned} [(n+1)\Theta, -\Theta^2] &= -(n+1)E_-^3 \cdot E_+^3 + E_-^2 (n+1)E_- \cdot E_+^3 \\ &= -(n+1)E_-^3 \cdot E_+^3 + (n+3)E_-^3 \cdot E_+^3 = 2!E_-^3 \cdot E_+^3 = 2!\Theta^3, \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

$$\begin{aligned} [(n+1)\Theta, 2\Theta^3] &= 2(n+1)E_-^4 \cdot E_+^4 - 2E_-^3 (n+1)E_- \cdot E_+^4 \\ &= 2(n+1)E_-^4 \cdot E_+^4 - 2(n+4)E_-^4 \cdot E_+^4 = -3!E_-^4 \cdot E_+^4 = -3!\Theta^4. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Continuando a expansão acima para elementos diagonais, obtém-se

$$e^{q\hat{A}} \tilde{J} e^{q\hat{A}} = \gamma \hat{\Theta} \left( 1 - q\hat{\Theta} + \frac{q^2}{2!} 2!\hat{\Theta}^2 - \frac{q^3}{3!} 3!\hat{\Theta}^3 + \cdots \right) = \gamma \hat{\Theta} \left( 1 - q\hat{\Theta} + (q\hat{\Theta})^2 - (q\hat{\Theta})^3 + \cdots \right). \quad (\text{C.48})$$

Portanto

$$e^{q\hat{A}} \tilde{J} e^{q\hat{A}} = \frac{\gamma \Theta}{1 + q\Theta}, \quad (\text{C.49})$$

onde a expressão (C.49) deve ser expandida na série (C.48) para ser aplicada. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 &= \gamma^m \hat{L}_{t_m-t_0} x_0 x_m \hat{\Theta} e^{-x_0 x_m \hat{A}} \frac{x_0 x_{m-1} \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_{m-1} \hat{\Theta}} \cdots \frac{x_0 x_1 \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_1 \hat{\Theta}} e^{\hat{A}} \\ &= \gamma^m \hat{L}_{t_m-t_0} e^{-x_0 x_m \hat{A}} \frac{x_0 x_m \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_m \hat{\Theta}} \cdots \frac{x_0 x_1 \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_1 \hat{\Theta}} e^{\hat{A}}, \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

onde as duas formas da equação acima são equivalentes. Analogamente, obtém-se

$$\hat{F}_2 = \gamma^m \hat{L}_{t-t_0} e^{-x_0 x \hat{A}} \frac{x_0 x_m \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_m \hat{\Theta}} \cdots \frac{x_0 x_1 \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_1 \hat{\Theta}} e^{\hat{A}} \quad (\text{C.51})$$

Agora podemos calcular o operador de  $m$  contagens. Para simplificar as expressões, consideremos

$$t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1.$$

Precisamos integrar a seguinte expressão

$$N_{[0,t)}(m) = \int_0^t dt_m \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \tilde{S}_{t-t_m} \tilde{J} \tilde{S}_{t_m-t_{m-1}} \tilde{J} \cdots \tilde{J} \tilde{S}_{t_1}. \quad (\text{C.52})$$

Primeiro, vamos integrar  $\hat{F}_2$ , considerando que  $\eta \neq 0$ .

$$\hat{F}_2 = \gamma^m \hat{L}_{t-t_0} e^{-x_0 x \hat{A}} \frac{x_0 x_m \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_m \hat{\Theta}} \cdots \frac{x_0 x_1 \hat{\Theta}}{1 + x_0 x_1 \hat{\Theta}} e^{\hat{A}}. \quad (\text{C.53})$$

Lembrando que  $x_l = e^{-\eta \gamma t_l}$ , vou definir a variável  $y_l = 1 + x_l \hat{\Theta}$ , portanto,  $dy_l = -\eta \gamma x_l \hat{\Theta} dt_l$ . Com isso, as integrais são:

$$\int_0^{t_2} dt_1 \frac{x_1 \hat{\Theta}}{1 + x_1 \hat{\Theta}} = -\frac{1}{\eta \gamma} \int_{y_0}^{y_2} \frac{dy_1}{y_1} = \frac{1}{\eta \gamma} \ln \left( \frac{y_0}{y_2} \right), \quad (\text{C.54})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_3} dt_2 \frac{x_2 \hat{\Theta}}{1 + x_2 \hat{\Theta}} \int_0^{t_2} dt_1 \frac{x_1 \hat{\Theta}}{1 + x_1 \hat{\Theta}} &= -\left( \frac{1}{\eta \gamma} \right)^2 \int_{y_0}^{y_3} \frac{dy_2}{y_2} \ln \left( \frac{y_0}{y_2} \right) \\ &= -\left( \frac{1}{\eta \gamma} \right)^2 \int_1^{y_3/y_0} \frac{dy_2}{y_2} \ln y_2 = \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{\eta \gamma} \right)^2 \ln^2 \left( \frac{y_0}{y_3} \right), \\ -\frac{1}{2!} \left( \frac{1}{\eta \gamma} \right)^2 \int_{y_0}^{y_4} \frac{dy_3}{y_3} \ln^2 \left( \frac{y_0}{y_3} \right) &= \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{\eta \gamma} \right)^3 \ln^3 \left( \frac{y_0}{y_4} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

Continuando assim, obtém-se

$$\int_0^t dt_m \cdots \int_0^{t_2} \hat{F}_2 = \frac{1}{\eta^m m!} \hat{L}_t e^{-x \hat{A}} \ln^m \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x \hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}}. \quad (\text{C.56})$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{F}_3 &\equiv \int_0^t dt_m \cdots \int_0^{t_2} \hat{F}_1 = \frac{\gamma}{\eta^{m-1} (m-1)!} \int_0^t dt_m \hat{L}_{t_m} x_m \hat{\Theta} e^{-x_m \hat{A}} \ln^{m-1} \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x_m \hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}} \\ &= \frac{\gamma}{\eta^{m-1} (m-1)!} \int_0^t dt_m \hat{L}_{t_m} e^{-x_m \hat{A}} \frac{x_m \hat{\Theta}}{1 + x_m \hat{\Theta}} \ln^{m-1} \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x_m \hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}}, \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

de modo que o operador de  $m$  contagens (para os elementos diagonais) é

$$N_{[0,t)}(m) = \hat{\Lambda} \left[ \frac{1}{\eta^m m!} \hat{L}_t e^{-x \hat{A}} \ln^m \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x \hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}} \right] \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}_0 \left( \hat{F}_3 + \hat{I}_t \hat{F}_3 \right) \hat{\Lambda}_0, \quad (\text{C.58})$$

onde

$$x = e^{-\eta t}, \quad \hat{A}\bullet = a \bullet a^\dagger, \quad \hat{\Theta} = E_- \bullet E_+, \quad \eta = \eta_D/\gamma, \quad (\text{C.59})$$

$$\hat{F}_3 = \frac{\gamma}{\eta^{m-1}(m-1)!} \int_0^t dt_m \hat{L}_{t_m} e^{-x_m \hat{A}} \frac{x_m \hat{\Theta}}{1 + x_m \hat{\Theta}} \ln^{m-1} \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x_m \hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}} \quad (\text{C.60})$$

e

$$\hat{I}_t \hat{\rho} = \eta \gamma \int_0^t dt' e^{-(1+\eta)\gamma t'} \left( e^{g t' \hat{A}} \hat{A} \hat{\rho} \right).$$

A partir deste termo, podemos calcular outro termo de interesse

$$\begin{aligned} \tilde{J}\tilde{T}_t &= \tilde{J} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{[0,t)}(m) = \tilde{J} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\eta^m m!} \hat{L}_t e^{-x \hat{A}} \ln^m \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x \hat{\Theta}} \right) e^{\hat{A}} \\ &= \tilde{J} \hat{L}_t e^{-x \hat{A}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[ \frac{1}{\eta} \ln \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x \hat{\Theta}} \right) \right]^m e^{\hat{A}} \\ &= \tilde{J} \hat{L}_t e^{-x \hat{A}} \left\{ \exp \left[ \ln \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x \hat{\Theta}} \right) \right] \right\}^{1/\eta} e^{\hat{A}} = \tilde{J} \hat{L}_t e^{-x \hat{A}} \left( \frac{1 + \hat{\Theta}}{1 + x \hat{\Theta}} \right)^{1/\eta} e^{\hat{A}}. \quad (\text{C.61}) \end{aligned}$$

# Bibliografia

- [1] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, 2nd edition, (Oxford Science Publications, 1983).
- [2] M.C. de Oliveira, tutorial “*Teoria de processos contínuos de fotocontagem e de detecção homódina de quadratura de campos quânticos*”, 2003.
- [3] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin: Springer, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, 1954).
- [4] W. Pauli, *Die Allgemeine Prinzipien der Wellenmechanik*, Enciclopedia of Physics Vol. 5 (Berlin: Springer-Verlag, 1958).
- [5] L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.* **72**, 1037 (1958).
- [6] P.L. Kelley and W.H. Kleiner, *Phys. Rev. A* **136**, 316 (1964).
- [7] R.J. Glauber, *Quantum Optics and Electronics*, edited by C. De Witt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (New York: Gordon & Breach), p.63.
- [8] L. Mandel, *Opt. Acta* **28**, 1447 (1981).
- [9] B.R. Mollow, *Phys. Rev.* **168**, 1896 (1968).
- [10] M.O. Scully and W.E.Jr. Lamb, *Phys. Rev.* **179**, 368 (1969).
- [11] T.J. Shepherd, *Opt. Acta* **28**, 567 (1981); **31**, 1399 (1984).
- [12] A. Selloni, P. Schweindimann, A. Quattropiani and H.P. Baltes, *J. Phys. A* **11**, 1427 (1978).
- [13] M.D. Srinivas and E.B. Davies, *Opt. Acta* **28**, 981 (1981); **29**, 235 (1982).
- [14] M.C. de Oliveira, L.F. da Silva and S.S. Mizrahi, *Phys. Rev. A* **65**, 062314 (2002).
- [15] G.A. Prataviaera and M.C. de Oliveira, *Phys. Rev. A* **70**, 011602(R) (2004).
- [16] H. Saito and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **68**, 043820 (2003).
- [17] Ke-Hsueh Li, *Phys. Rep.* **134**, 1 (1986).
- [18] D.F. Walls and G.J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1995).

- [19] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [20] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, UK, 2000).
- [21] D. Bouwmeester J.-W Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger, *Nature (London)* **390**, 575 (1997).
- [22] T. Pellizzari, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5242 (1997).
- [23] E. Knill, L. Laflamme and G.J. Milburn, *Nature* **409**, 46 (2001).
- [24] M.C. de Oliveira, S.S Mizrahi and V.V. Dodonov, *J. Opt. B* **5**, S271 (2003).
- [25] L. Mandel, *Progress in Optics*, Vol. 2, edited by E. Wolf (Amsterdam: North-Holland), p. 181.
- [26] Sargent III, M.O. Scully and W.E.Jr. Lamb, *Laser Physics*, (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974).
- [27] E.B. Davies, *Commun. Math. Phys.* **15**, 277 (1969).
- [28] E.B. Davies, *Helv. phys. Acta* **48**, 365 (1975).
- [29] E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, (New York: Academic Press, 1976).
- [30] E.B. Davies, *I. E. E. Trans. Inform. Theory* **23**, 530 (1977).
- [31] M.D. Srinivas, *J. Math. Phys* **18**, 2138 (1977).
- [32] M.D. Srinivas, *J. Math. Phys* **16**, 1672 (1975).
- [33] E.B. Davies and J.T. Lewis, *Commun. Math. Phys.* **17**, 239 (1979).
- [34] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, (Springer-Verlag, 1993).
- [35] T.S. Lee, *Phys. Rev. A* **48**, 2285 (1993).
- [36] F. Davidson and L. Mandel, *J. Appl. Phys* **39**, 62 (1967).
- [37] R. Barakat and J. Blake, *Phys. Rep.* **60**, 225 (1980).
- [38] J.R. Glauber, *Phys. Rev. Lett* **10**, 84 (1963); *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963); **131**, 2766 (1963).
- [39] Srinivas, *Coherence and Quantum Optics IV*, edited by L. Mandel and E. Wolf (New York: Plenum), p.885 (1978).
- [40] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, edited by John Wiley & Sons, Inc. (1973).

- [41] E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, London, New York, 1976), p.71-75.
- [42] M.B. Plenio and P.L. Knight, *Rev. Mod. Phys* **70**, 101 (1998).
- [43] N. Imoto, M. Ueda and T. Ogawa, *Phys. Rev. A* **41**, R4127 (1990).
- [44] M. Ueda, M. Kitagawa, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3424 (1992).
- [45] C.W. Gardiner, A.S. Parkins, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **46**, 4363 (1992).
- [46] H.M. Wiseman and G.J. Milburn, *Phys. Rev. A* **47**, 1652 (1993).
- [47] M. Ban, *Phys. Rev. A* **47**, 5093 (1993).
- [48] B.M. Garraway and P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **49**, 1266 (1994).
- [49] G.S. Agarwal, M. Graf, M. Orszag, M.O. Scully and H. Walther *Phys. Rev. A* **49**, 4077 (1994).
- [50] M. Ueda, N. Imoto and H. Nagaoka, *Phys. Rev. A* **53**, 3808 (1996).
- [51] T.A. Brun, *Phys. Rev. A* **61**, 042107 (2000).
- [52] J.S. Marsh, *Phys. Rev. A* **64**, 042109 (2001).
- [53] A.V. Dodonov, S.S. Mizrahi and V.V. Dodonov, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **7**, 99 (2005).
- [54] A. Jannussis, G. Brodimas, D. Surlas and V. Zisis *Lett. Nuovo Cim.* **30**, 123 (1981);  
G. Brodimas, A. Jannussis, D. Surlas, V. Zisis and P. Pouloupoulos *Lett. Nuovo Cim.* **31**, 177 (1981).
- [55] P. Shanta, S. Chaturvedi, V. Srinivasan and R. Jagannathan *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 6433 (1994).
- [56] V.I. Man'ko, G. Marmo, S. Solimeno and F. Zaccaria *Int. J. Mod. Phys. A* **8** 3577 (1993).
- [57] R.L. Matos Filho and W. Vogel *Phys. Rev. A*, **54** 4560 (1996).
- [58] V.I. Man'ko, G. Marmo, E.C.G. Sudarshan and F. Zaccaria *Phys. Scripta* **55**, 528 (1997).
- [59] O.V. Man'ko *Phys. Lett. A* **228**, 29 (1997).
- [60] S. Mancini *Phys. Lett. A* **233** , 291 (1997).
- [61] V. Man'ko, G. Marmo, A. Porzio, S. Solimeno and F. Zaccaria *Phys. Rev. A* **62**, 053407 (2000).
- [62] S. Sivakumar *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **2**, R61 (2000).

- [63] Z. Kis, W. Vogel and L. Davidovich *Phys. Rev. A* **64**, 033401 (2001).
- [64] S.S. Mizrahi and V.V. Dodonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 8847 (2002).
- [65] M. Ueda, N. Imoto and T. Ogawa, *Phys. Rev. A* **41**, 3891 (1990).
- [66] C.V. Sukumar and B. Buck *Phys. Lett. A* **81**, 132 (1981);  
E.A. Kochetov *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 2433 (1987);  
V. Bužek *J. Mod. Opt.* **37**, 1033 (1990).
- [67] S. Stenholm, *Phys. Rep.* **6**, 1 (1973); H.-I. Yoo and J. H. Eberly, *ibid.* **118**, 239 (1985).
- [68] J. D. Cresser and S. M. Pickles, *Quantum Semiclassical Opt.* **8**, 73 (1996).
- [69] Y. Ben-Aryeh and C. Brif, e-print: quant-ph/9504009 v1 (1995).
- [70] B. R. Mollow, *Phys. Rev. A* **12**, 1919 (1975).
- [71] N. Gisin and I. C. Percival, *J. Phys. A* **25**, 5677 (1992).
- [72] R. Dum, A.S. Parkins, P. Zoller, and C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **46**, 4382 (1992).
- [73] K. Molmer, Y. Castin, and J. Dalibard, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 524 (1993).
- [74] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **1**, 441 (1986).
- [75] L. E. Estes, T. H. Keil, and L. M. Narducci, *Phys. Rev.* **175**, 286 (1968)
- [76] J. Wei and E. Norman, *J. Math. Phys.* **4**, 575 (1963); R. M. Wilcox, *ibid.* **8**, 962 (1967).
- [77] S. M. Chumakov, V. V. Dodonov, and V. I. Man'ko, *J. Phys. A* **19**, 3229 (1986); S. V. Prants, *ibid.* **19**, 3457 (1986); G. Dattoli, S. Solimeno, and A. Torre, *Phys. Rev. A* **34**, 2646 (1986).
- [78] R. R. Puri, *Mathematical Methods of Quantum Optics*, Berlin - Springer , (2001).
- [79] V. V. Dodonov and A. B. Klimov, *Phys. Rev. A* **53**, 2664 (1996); A. S. M. de Castro, V. V. Dodonov, and S. S. Mizrahi, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **4**, S191 (2002); A. S. M. de Castro, J. F. Peruzzo, and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **71**, no.3 (2005).
- [80] G.J. Milburn and D.F. Walls, *Phys. Rev.*, A **30**, 56 (1984).
- [81] D.F. Walls, M.J. Collet and G.J. Milburn, *Phys. Rev. D* **32**, 3208 (1985).
- [82] F. London, *Z. Phys.* **37**, 915 (1926); **40**, 193 (1927).
- [83] L. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1**, 49 (1964).
- [84] L. Mandel, *Optics Letters*, **4**, 205 (1979).

- [85] H.P. Baltés, A. Quattropiani and P. Schwendimann, *J. Phys. A : Math. Gen.* **12**, L35 (1979).
- [86] L. Hong, *Phys. Lett. A* **264**, 265 (1999).
- [87] H.J. Carmichael, S. Singh, R. Vyas and P.R. Rice *Phys. Rev. A* **39**, 1200 (1989).
- [88] B. Saleh, *Photoelectron Statistics* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978).
- [89] H.M. Wiseman and G.J. Milburn, *Phys. Rev. A* **47**, 642 (1993).
- [90] H.P. Yuen and J.H. Shapiro, *IEEE Trans. Inf. Theory* **24**, 657 (1978).
- [91] S. Prasad, M. O. Scully and W. Martienssen, *Optics Communications* **62**, 139 (1987);  
B. Huttner and Y. Ben-Aryeh, *Phys. Rev. A* **38**, 204 (1988);  
Z. Y. Ou, C. K. Hong and L. Mandel, *Optics Communications* **63**, 118 (1987);  
H. Fearn and R. Loudon, *Optics Communications* **64**, 485 (1987).
- [92] R.A. Campos, B.E.A. Saleh, and M.C. Teich, *Phys. Rev. A* **40**, 1371 (1989).
- [93] B. Yurke, S.L. McCall and J.R. Klauder *Phys. Rev. A* **33**, 4033 (1986).  
R.A. Campos, B.E.A. Saleh and M.C. Teich *Phys. Rev. A* **40**, 1371 (1989).
- [94] W. Vogel and J. Grabow, *Phys. Rev. A* **47**, 4227 (1993).
- [95] Ver por exemplo, M. Klein and T. Turtak, *Optics* (2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 1986), p. 301.
- [96] A. Yariv, *Quantum Electronics*, (Wiley, New York, 1989).
- [97] A.V. Dodonov, V.V. Dodonov and S.S. Mizrahi *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 683 (2005).
- [98] H.E. Brandt *Prog. Quant. Electron.* **22**, 257 (1998).
- [99] V. Vedral *Rev. Mod. Phys.* **74**, 197 (2002).
- [100] P. van Loock *Fortschr. Phys.* **50**, 1177 (2002).
- [101] M. Keyl *Phys. Rep.* **369**, 431 (2002).
- [102] L-M Duan, G. Giedke, J.I. Cirac and P. Zoller *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).
- [103] R. Simon *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).
- [104] R.F. Werner and M.M. Wolf *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3658 (2001).
- [105] P. Marian, T.A. Marian and H. Scutaru *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 6969 (2001).
- [106] G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein and J.I. Cirac *Phys. Rev. Lett.* **87**, 167904 (2001).

- [107] B-G Englert and K. Wódkiewicz *Phys. Rev. A* **65**, 054303 (2002).
- [108] V. Giovannetti, S. Mancini, D. Vitali and P. Tombesi *Phys. Rev. A* **67**, 022320 (2003).
- [109] V.V. Dodonov V.I. and Man'ko *Group Theoretical Methods in Physics (Proceedings of the Second International Seminar, Zvenigorod, 1982)* eds M A Markov, V I Man'ko and A E Shabad (Chur-London-Paris-New York: Harwood Academic Publ.) vol 1, p 591 (1985).
- [110] V.V. Dodonov *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 7721 (2000);  
V.V. Dodonov and O.V. Man'ko *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 2403 (2000).
- [111] G. Vidal and R.F. Werner *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [112] J. Herec, J. Fiurášek and L. Mišta *J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt.* **5**, 419 (2003).
- [113] A. Serafini, F. Illuminati, M.G.A. Paris and S. De Siena *Phys. Rev. A* **69**, 022318 (2004).
- [114] A.S. Holevo *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1982).
- [115] G.S. Agarwal *J. Mod. Opt.* **34**, 909 (1987).
- [116] V.V. Dodonov and V.I. Man'ko *Invariants and Evolution of Nonstationary Quantum Systems, Proceedings of Lebedev Physics Institute* vol 183, ed M.A. Markov (Commack: Nova Science) (1989).
- [117] B-G Englert and K. Wódkiewicz *Int. J. Quant. Inform.* **1**, 153 (2003).
- [118] A. Lukš and V. Peřinová *Czechosl. J. Phys.* **39**, 392 (1989).
- [119] V.V. Dodonov *Theory of Nonclassical States of Light*, eds V.V. Dodonov and V.I. Man'ko (London: Taylor & Francis), p 153 (2003).
- [120] A.S.M. de Castro and V.V. Dodonov *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, S593 (2003).
- [121] H.P. Robertson *Phys. Rev.* **46**, 794 (1934).
- [122] V.V. Dodonov, V.I. Man'ko and V.V. Semjonov *Nuovo Cim. B* **83**, 145 (1984).
- [123] A.S.M. de Castro and V.V. Dodonov *J. Russ. Laser Res.* **23**, 93 (2002).
- [124] K. Audenaert, J. Eisert, M.B. Plenio and R.F. Werner *Phys. Rev. A* **66**, 042327 (2002).
- [125] W.H. Louisell, A. Yariv and A.E. Siegman *Phys. Rev.* **124**, 1646 (1961).
- [126] J. Tucker J and D.F. Walls *Ann. Phys. (NY)* **52**, 1 (1969).
- [127] A. Lukš , V. Peřinová and Z. Hradil *Acta Phys. Polon. A* **74**, 713 (1988).

- [128] V.V. Dodonov, V.I. Man'ko and P.G. Polynkin *Phys. Lett. A* **188**, 232 (1994).
- [129] V.V. Dodonov *J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt.* **4**, R1 (2002).
- [130] B.R. Mollow and R.J. Glauber *Phys. Rev.* **160**, 1076 (1967).
- [131] V.V. Dodonov *Modern Nonlinear Optics (Advances in Chem. Phys. Series vol 119, part 1)* ed M W Evans (New York: Wiley), p 309 (2001).
- [132] P.A. Maia Neto and D.A.R. Dalvit *Phys. Rev. A* **62**, 042103 (2000).
- [133] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali and P. Tombesi *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120401 (2002).
- [134] M.A. Andreatta, A.V. Dodonov and V.V. Dodonov *J. Russ. Laser Res.* **23**, 531 (2002).
- [135] N.B. Narozhny, A.M. Fedotov and Y.E. Lozovik *Laser Phys.* **13**, 298 (2003).
- [136] M. Croce, D.A.R. Dalvit and F.D. Mazzitelli *Phys. Rev. A* **64**, 013808 (2001);  
M. Croce, D.A.R. Dalvit and F.D. Mazzitelli *Phys. Rev. A* **66**, 033811 (2002).
- [137] A.V. Dodonov and V.V. Dodonov *Phys. Lett. A* **289**, 291 (2001).
- [138] S.L. Braunstein and H.J. Kimble *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998);  
R. Bruckmeier and S. Schiller *Phys. Rev. A* **59**, 750 (1999);  
M.G.A. Paris *J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt.* **1**, 299 (1999);  
S. Scheel, L. Knöll, T. Opatrný and D-G Welsch *Phys. Rev. A* **62**, 043803 (2000).  
P. Kok and S.L. Braunstein *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 6185 (2001).  
M.S. Kim, W. Son, V. Bužek and P.L. Knight *Phys. Rev. A* **65**, 032323 (2002).  
M.M. Wolf, J. Eisert and M.B. Plenio *Phys. Rev. Lett.* **90**, 047904 (2003);  
J.K. Asboth, P. Adam, M. Koniorczyk and J. Janszky *Eur. Phys. J. D* **30**, 403 (2004).
- [139] A. Wünsche *J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt.* **6**, 159 (2004).
- [140] V.V. Dodonov, A.S.M. de Castro and S.S. Mizrahi *Phys. Lett. A* **296**, 73 (2002).