UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RESOLUBILIDADE GLOBAL PARA OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS REAIS DE ORDEM UM

Maurício Fronza da Silva

SÃO CARLOS - SP
JUNHO DE 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RESOLUBILIDADE GLOBAL PARA OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS REAIS DE ORDEM UM

Maurício Fronza da Silva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

SÃO CARLOS - SP
JUNHO DE 2006

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

S586rg

Silva, Maurício Fronza da.
Resolubilidade global para operadores diferenciais parciais reais de ordem um / Maurício Fronza da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
68 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Resolubilidade global. 4. Operadores diferenciais parciais. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

Agradecimentos

Agradeço

ao professor Ruidival que, com seu conhecimento incomum, conduziu este trabalho desde a escolha do tema até os resultados finais com extrema competência,

a minha mulher, a arqueóloga Neli Galarce, com quem aprendi a ter coragem e otimismo. Obrigado por ter cuidado de nossa casa e de nosso filho João Pedro durante toda a minha ausência,

ao meu pai Tito e minha mãe Maria Luiza por terem me criado e educado conforme suas convições. A Maurem e Eveline, de quem tenho a sorte de ser irmão. Sem eles não estaria aqui,

ao meu avô João Luiz Fronza que sempre ensinou a agradecer mais do que pedir. Em suas últimas palavras ainda teve forças para me incentivar a continuar estudando,

a minha cunhada Cristina e minha sogra Lúcia, que me substituíram e auxiliaram nas tarefas domésticas por longos períodos,

ao amigo Peneireiro, responsável pela minha vinda para São Carlos. Agradeço pela insistência para que eu ingressasse no doutorado na época conveniente. Hoje, certamente não estaria disposto a percorrer os mais de 150.000 km, como fiz nos últimos quatro anos. Ao amigo Fidélis, embora tenha o grande defeito de ser gremista,

a todos os colegas e amigos que fiz em São Carlos. É com enorme tristeza que me despeço de todos. A vocês desejo toda a sorte do mundo,

aos professores do DM-UFSCar, através dos quais aprendi um pouco de como se faz matemática. Em especial agradeço ao Prof. Malagutti, sem o qual dificilmente teria chegado até o fim do curso,

ao povo brasileiro, em especial aos que pagam seus impostos e financiaram toda minha formação acadêmica. Espero, de alguma forma, retribuir a eles ou a seus filhos,

ao CNPq, pelo apoio financeiro no último ano do trabalho.

O que mais dói na miséria
é a ignorância que ela tem de si mesma.
Confrontados com a ausência de tudo,
os homens abstêm-se do sonho,
desarmando-se do desejo de serem outros.

Existe no nada essa ilusão de plenitude
que faz parar a vida e anoitecer as vozes.

Mia Couto

Resumo

O presente trabalho estuda a resolubilidade global de operadores diferenciais parciais lineares reais de ordem um cujo símbolo principal tem um único ponto singular.

Além disso, exemplos e contra-exemplos são apresentados.

Abstract

The present work study the global solvability of first order real linear partial differential operators when the principal part has precisely one equilibrium point.

Moreover, examples and counterexamples are presented.

Lista de Símbolos

Principais espaços

Sumário

Introdução

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e P um operador diferencial parcial linear em $C^\infty(\Omega)$. Em 1955, B. Malgrange introduziu a noção de $P-$convexidade para Ω e demostrou que ela é equivalente a resolubilidade global de P em $C^\infty(\Omega)$, no caso em que P tem coeficientes constantes. Quando P tem coeficientes variáveis, ele demonstrou que a $P-$convexidade é necessária para a resolubilidade global.

Na década seguinte, C. Harvey e F. Treves utilizaram resultados de Análise Funcional e apresentaram, em trabalhos independentes, condições necessárias e suficientes para que um operador linear com coeficientes variáveis seja globalmente resolúvel em $C^\infty(\Omega)$.

Quando $P = L + c$, sendo L um campo real e c uma função , J. Duistermaat e L. Hörmander, em 1972, caracterizaram a resolubilidade de P em $C^\infty(M)$, no caso em que L não tem singularidades e M é uma variedade diferenciável. Eles usaram a noção de convexidade de um conjunto com respeito às trajetórias de L para dar cinco condições equivalentes a resolubilidade de P em $C^\infty(M)$.

No caso em que $P = L + c$, sendo L um campo real com uma singularidade na origem e c uma constante, V. Guillemin e D. Schaeffer deram, em 1977, condições suficientes para que a equação $Pu = f$ tenha solução em uma vizinhança de zero, qualquer que seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ flat na origem.

Neste trabalho estudamos a existência de soluções globalmente definidas para $Pu = f$, no caso em que $P = L + c$ e L é um campo real com uma singularidade na origem. Além disso, estudamos a $P-$convexidade no caso em que P é um campo real.

Este texto está dividido em quatro capítulos, sendo que no primeiro deles apresentamos resultados de Teoria Qualitativa de EDO, Resolubilidade de Operadores e de Propagação de Singularidades que serão úteis no decorrer do texto.

O Capítulo 2 está dividido em duas seções. Na primeira delas comparamos a $P-$convexidade com a convexidade com respeito às trajetórias, no caso em que P é um campo real. Na segunda seção apresentamos uma versão do Teorema de Harvey-Treves para operadores de ordem arbitrária e uma para campos reais. Os resultados do Capítulo 2 são complementados com exemplos e contra-exemplos no Capítulo 3.

No Capítulo 4 usamos os resultados de Duistermaat-Hörmander e de Guillemin-Schaeffer para apresentar condições suficientes para a resolubilidade global de P em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ no caso em que $P = L + c$, sendo L um campo real com uma singularidade e c uma função real. Finalmente, complementamos este resultado com alguns exemplos e discutimos a necessidade de tais condições.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados da Teoria Qualitativa de EDO

Esta seção contém uma coletânea de resultados de EDO que serão utilizados nos capítulos subseqüentes. A bibliografia básica utilizada nesta seção é [So]. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Em geral um **campo de vetores** de classe C^∞ é uma seção do fibrado tangente. Nesse caso, pode ser identificado com uma função $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞, sendo $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, ou a um operador diferencial de primeira ordem da forma $L = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\partial_j$. Um campo da forma $L = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j \partial_k$, sendo a_{jk} constantes reais $j, k = 1, 2, ..., n$, é chamado de **campo linear**.

Diz-se que $\lambda : I \to \Omega$, com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, é uma **curva integral de** L quando $\lambda'(t) = A(\lambda(t)), \forall t \in I$. Dado $x \in \Omega$, existe um único intervalo aberto $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ e uma única curva integral $\gamma_x : I_x \to \Omega$ de classe C^∞ com as seguintes propriedades: $\gamma_x(0) = x$ e, para toda curva integral $\lambda : I \to \Omega$ de L satisfazendo $\lambda(0) = x$ tem-se que $I \subset I_x$. O conjunto $D = \{(t, x); x \in \Omega, t \in I_x\}$ é um aberto de $\mathbb{R} \times \Omega$. A aplicação $\gamma : D \to \Omega$ definida por $\gamma(t, x) = \gamma_x(t)$ é de classe C^∞ e tem a seguinte propriedade: se $t \in I_x$ então $I_{\gamma(t,x)} = I_x - \{t\} := \{y - t; y \in I_x\}$ e $\gamma(t + s, x) = \gamma(s, \gamma(t, x)), \forall s \in I_{\gamma(t,x)}$. A aplicação γ é chamada de **fluxo de** L.

A imagem Γ_x da curva integral γ_x é chamada de **órbita** ou **trajetória de** x. Os conjuntos $\Gamma_x^+ = \{\gamma(t, x); 0 \le t < \omega_+(x)\}$ e $\Gamma_x^- = \{\gamma(t, x); \omega_-(x) < t \le 0\}$ são chamados de **semi-órbitas positiva** e **negativa de** x, respectivamente. Quando x e y pertencem a mesma órbita denotamos por $[x, y]$ o intervalo compacto de trajetória com extremidades x e y.

Se $\omega_+(x) = +\infty$ define-se o **conjunto** $\omega-$**limite de** x como

$$\omega(x) = \{y \in \Omega, \gamma(t_j, x) \to y \text{ para alguma seqüência } t_j \to +\infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(x) = -\infty$ define-se o **conjunto** $\alpha-$**limite de** x como

$$\alpha(x) = \{y \in \Omega, \gamma(t_j, x) \to y \text{ para alguma seqüência } t_j \to -\infty\}.$$

Como pontos que pertencem a mesma órbita Γ têm o mesmo conjunto $\omega-$limite, definimos o **conjunto** $\omega-$**limite de** Γ como o conjunto $\omega-$limite de qualquer um de seus pontos. Analogamente definimos o **conjunto** $\alpha-$**limite de** Γ.

Seja x_0 um **ponto singular** de L, isto é, $L(x_0) = 0$.

Definição 1.1.1
(a) *$\{x_0\}$ é um **atrator local** quando existe um aberto U que contém x_0 tal que $\lim\limits_{t\to\omega_+(x)} \gamma(t,x) = x_0$, $\forall x \in U$.*
(b) *A **bacia de atração** de $\{x_0\}$ é $\mathcal{B}(x_0) = \left\{ x \in \Omega; \lim\limits_{t\to\omega_+(x)} \gamma(t,x) = x_0 \right\}$.*
(c) *$\{x_0\}$ é um **atrator global** quando $\mathcal{B}(x_0) = \Omega$.*

No item **(a)** temos que $\omega_+(x) = +\infty, \forall x \in U$. Utilizando a continuidade de γ verifica-se que

Observação 1.1.2 *Se $\{x_0\}$ é um atrator local então $\mathcal{B}(x_0)$ é aberto.*

Definição 1.1.3 *Diz-se que Ω é **convexo com respeito às trajetórias de** L quando $\forall K \subset\subset \Omega, \exists K' \subset\subset \Omega$ tal que, qualquer intervalo compacto de trajetória de L com extremidades em K está contido em K'.*

Seja L um campo real definido em $\mathbb{R}^2$. Suponha que a origem seja um atrator local e que $\{0\}$ seja a única órbita periódica de L. Sob tais condições, Santos Filho mostrou que a origem é um atrator global se, e somente se, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é convexo com respeito às trajetórias de L (veja [Sa, p. 263]). Apresentamos a seguir uma versão deste resultado para dimensões maiores. Para tal, introduzimos a seguinte nomenclatura. Diz-se que uma seqüência de compactos $\{K_j\}_{j=0}^{\infty}$ **esgota** Ω quando $\cup K_j = \Omega, K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1}), \forall j \in \mathbb{N}$ e $\forall K \subset\subset \Omega, \exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_j$ quando $j \geq j_0$.

Lema 1.1.4 *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja conexo e que $\{x_0\}$ é um atrator local. Se*
(a) $\overline{\Gamma_x^+} \subset\subset \Omega \Rightarrow \omega(x) = \{x_0\}$
e
(b) *Ω é convexo com respeito às trajetórias de L*
então $\{x_0\}$ é um atrator global.

Demonstração. Como $\mathcal{B}(x_0) \neq \emptyset$ e Ω é conexo, é suficiente demonstrar que $\partial(\mathcal{B}(x_0)) = \emptyset$. Suponha que $\exists x \in \partial(\mathcal{B}(x_0))$.
(i) Γ_x^+ não é pré-compacta.

De fato, como $x \in \partial(\mathcal{B}(x_0))$ e $\mathcal{B}(x_0)$ é aberto segue que $\Gamma_x^+ \cap \mathcal{B}(x_0) = \emptyset$. Daí $\overline{\Gamma_x^+} \cap \mathcal{B}(x_0) = \emptyset$ e então $x_0 \notin \overline{\Gamma_x^+}$. Por outro lado, se $\overline{\Gamma_x^+} \subset\subset \Omega$ então $\overline{\Gamma_x^+}$ contém uma órbita compacta cujo $\omega-$limite é distinto de $\{x_0\}$, pois $x_0 \notin \overline{\Gamma_x^+}$, contrariando **(a)**.
(ii) A condição **(b)** não é válida.

De fato, seja $0 < R < \min\{d(x_0, \partial\Omega), d(x, \partial\Omega)\}$ e considere $K = \overline{B_R(x_0)} \cup \overline{B_R(x)}$. Seja $\{K_j\}$ seqüência de compactos que esgota Ω. Dado $j \in \mathbb{N}$, por **(i)** $\exists t_j > 0$ tal que $\gamma(t_j, x) \notin K_j$. Tome uma vizinhança U_j de $\gamma(t_j, x)$ satisfazendo $U_j \cap K_j = \emptyset$. Da continuidade de γ e do fato de $x \in \partial(\mathcal{B}(x_0))$ segue que $\exists x_j \in \mathcal{B}(x_0) \cap B_R(x)$ tal que $\gamma(t_j, x_j) \in U_j$. Logo $\gamma(t_j, x_j) \notin K_j$.

Como $x_j \in \mathcal{B}(x_0)$, $\exists t'_j > t_j$ tal que $\gamma\left(t'_j, x_j\right) \in B_R(x_0)$. Então $\left[x_j, \gamma\left(t'_j, x_j\right)\right]$ tem extremidades em K e contém o ponto $\gamma(t_j, x_j) \notin K_j$, contrariando **(b)**. ■

Introduzimos agora uma classe importante de campos que admitem pontos singulares.

Definição 1.1.5
(a) *Um ponto singular x_0 de um campo real L chama-se* ***hiperbólico*** *quando todos os autovalores de $DL(x_0)$ têm parte real não-nula.*
(b) *Seja L um campo linear. Quando a origem é um ponto singular hiperbólico de L dizemos que L é um* ***campo linear hiperbólico****.*
(c) *Quando x_0 é um ponto singular hiperbólico, o* ***índice de estabilidade de*** L ***em*** *x_0 é o número de autovalores de $DL(x_0)$ que têm parte real negativa, contando suas multiplicidades.*

É bem conhecido o seguinte resultado:

Lema 1.1.6 *Se x_0 é um ponto singular hiperbólico de L com índice de estabilidade igual a n então existem um conjunto aberto U que contém x_0, e constantes $C, \mu > 0$ tais que $\forall x \in U$ temos que $\Gamma_x^+ \subset U$ e*

$$|\gamma(t,x) - x_0| \leq Ce^{-\mu t}|x - x_0|, \ t \geq 0.$$

Em particular $\{x_0\}$ é um atrator local.

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Hartman, descreve o comportamento das órbitas de um campo na vizinhança de um ponto singular hiperbólico.

Teorema 1.1.7 *Se x_0 é um ponto singular hiperbólico do campo real L então existem vizinhanças U de x_0 e V de 0 tais que $L|_U$ é topologicamente conjugado a $DL(x_0)|_V$.*

Aqui estamos denotando o campo $x \mapsto DL(x_0)x, x \in \mathbb{R}^n$, por $DL(x_0)$. Note que no Teorema 1.1.7 podemos escolher U de modo que U seja convexo com respeito às trajetórias de L. Do Lema 1.1.6 e do Teorema 1.1.7 segue que

Observação 1.1.8 *Se x_0 é um ponto singular hiperbólico de L, então $\{x_0\}$ é um atrator local se, e somente se, o índice de estabilidade de L em x_0 é igual a n.*

Abaixo temos a recíproca do Lema 1.1.4 no caso em que o atrator local é um ponto singular hiperbólico.

Lema 1.1.9 *Suponha que $x_0 \in \Omega$ seja um ponto singular hiperbólico de L. Se $\{x_0\}$ é um atrator global então valem as condições* **(a)** *e* **(b)** *do Lema 1.1.4.*

Demonstração . A demonstração de **(a)** segue da invariância do conjunto $\omega-$limite pelo fluxo. Passamos a demonstração de **(b)**.

Suponha que $\{x_0\}$ seja um atrator global e que não vale **(b)**. Seja $\{K_j\}$ seqüência de compactos que esgota Ω e U uma vizinhança pré-compacta de x_0 como no Lema 1.1.6.

Então $\exists K \subset\subset \Omega$ com a seguinte propriedade: $\forall j \in \mathbb{N}$ existe $\left[x_j, x_j'\right]$ tal que $x_j, x_j' \in K$ e $\exists y_j \in \left[x_j, x_j'\right] \setminus (K_j \cup U)$. Seja $t_j \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t_j, x_j) = y_j$. Sem perda de generalidade podemos supor que $0 < t_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Por compacidade existe uma subseqüência $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_j\}$ e $x \in \Omega$ tal que $x_{j_k} \to x$.

Seja $s_0 > 0$ tal que $\gamma(s_0, x) \in U$. Então $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0, t > s_0 \Rightarrow \gamma(t, x_{j_k}) \in U,$$

logo $0 < t_{j_k} \leq s_0, \forall k > k_0$. Por compacidade $\exists s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $t_{j_k} \to s_1$ ao longo de uma subseqüência que, para simplificar a notação , supomos ser igual a $\{t_{j_k}\}$. Por continuidade $y_{j_k} = \gamma(t_{j_k}, x_{j_k}) \to \gamma(s_1, x)$, o que é um absurdo. ■

Em geral a conjugação topológica dada pelo Teorema 1.1.7 não é diferenciável (veja [Ne, p. 32]). O resultado abaixo foi obtido por [St, p. 629] e também pode ser encontrado em [Ne, p. 50].

Teorema 1.1.10 *Suponha que* $L(x_0) = 0$. *Sejam* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *os autovalores de* $DL(x_0)$. *Se*

$$\lambda_j \neq \sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k, \quad j = 1, 2, ..., n, m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \geq 2, \qquad \textbf{(CNR 1)}$$

então existem vizinhanças U *de* x_0 *e* V *de* 0 *tais que* $L|_U$ *é* $C^\infty-$*conjugado a* $DL(x_0)|_V$.

Observe que de **(CNR 1)** segue que 0 não é autovalor de $DL(x_0)$. Logo, se λ é autovalor de $DL(x_0)$ então $-\lambda$ não é autovalor de $DL(x_0)$. Como autovalores complexos ocorrem em pares conjugados temos a

Observação 1.1.11 *A condição* **(CNR 1)** *implica que* x_0 *é ponto singular hiperbólico de* L.

A seguir introduzimos conjuntos invariantes que serão importantes no decorrer do texto.

Definição 1.1.12 *Seja* x_0 *um ponto singular hiperbólico de* L. *A* ***variedade estável de*** L **em** x_0 *é o conjunto* $W^s(x_0)$ *dos pontos de* Ω *que têm* $\{x_0\}$ *como* $\omega-$*limite e a* ***variedade instável de*** L **em** x_0 *é o conjunto* $W^u(x_0)$ *dos pontos de* Ω *que têm* $\{x_0\}$ *como* $\alpha-$*limite.*

É claro que $x_0 \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$. No caso de campos lineares com um único ponto singular na origem, os conjuntos $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ são subespaços vetoriais. Em [MP, p. 83] temos o seguinte resultado, no qual m denota o índice de estabilidade de L em x_0.

Proposição 1.1.13 *$W^s(x_0)$ é uma variedade de dimensão m e de classe C^∞ imersa biunivocamente em Ω.*

Resultado análogo vale para $W^u(x_0)$. Em geral, $W^s(x_0)$ ou $W^u(x_0)$ não são subvariedades mergulhadas de Ω. Como conseqüência da Proposição 1.1.13 temos o seguinte resultado:

Observação 1.1.14 *Se x_0 é um ponto singular hiperbólico de L então $L|_{W^s(x_0)}$ (respectivamente $L|_{W^u(x_0)}$) é um campo de vetores em $W^s(x_0)$ (resp. em $W^s(x_0)$).*

Apresentamos a seguir resultados úteis sobre transversais de campos de vetores.

Definição 1.1.15 *Uma **seção transversal global de** L **em** Ω é uma subvariedade imersa Σ de Ω tal que Σ tem codimensão 1, para cada $x \in \Omega$ existe único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t,x) \in \Sigma$ e $T_x(\Sigma) \oplus L(x) = \mathbb{R}^n, \forall x \in \Sigma$.*

Quando L não tem órbita periódica a Definição 1.1.15 é equivalente a [Da, Definição 1.34].

Observação 1.1.16 *Seja Σ seção transversal global de L em Ω.*
(i) *Considere a aplicação $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ definida do seguinte modo: para cada $x \in \Omega, \tau(x)$ é tal que $\gamma(\tau(x), x) \in \Sigma$. Então τ é de classe C^∞.*
(ii) *Seja $M = \{(t,y); y \in \Sigma, t \in I_y\}$ subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \Sigma$. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} h: & M & \to & \Omega \\ & (t,y) & \mapsto & \gamma(t,y), \end{array}$$

é um difeomorfismo que conjuga $\frac{\partial}{\partial t}$ e L, e satisfaz $h(\{0\} \times \Sigma) = \Sigma$.

De fato, observe que para cada $x \in \Omega$ existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap \Sigma$ é uma seção transversal local de L em x e $\tau|_V$ é de classe C^∞.

Para demonstrar **(ii)** note que, como Σ é subvariedade imersa de Ω temos que h é de classe C^∞. Como

$$\tau(\gamma(t,y)) = -t, \forall (t,y) \in M,$$

verifica-se que

$$h^{-1}(x) = (-\tau(x), \gamma(\tau(x), x)), \forall x \in \Omega.$$

De **(i)** segue que h^{-1} é de classe C^∞. Como $h(t+s,y) = \gamma(s, h(t,y))$ temos que h conjuga $\frac{\partial}{\partial t}$ e L.

Se $x_0 \in \Omega$ é ponto singular de L então não existe seção transversal global de L em Ω.

Observação 1.1.17 *Seja x_0 ponto singular hiperbólico de L e suponha que $\{x_0\}$ seja um atrator global. Então toda seção transversal global de L em $\Omega \setminus \{x_0\}$ é um subconjunto compacto de $\Omega \setminus \{x_0\}$.*

De fato, seja Σ seção transversal global de L em $\Omega \setminus \{x_0\}$. Pelo Teorema 1.1.7 existe um aberto U de Ω, com $x_0 \in U$, e $\Sigma' \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a S^{n-1} com a seguinte propriedade: toda órbita de L em $U \setminus \{x_0\}$ intercepta Σ' em algum ponto. Como $\{x_0\}$ é um atrator global, daí segue que toda órbita de L em $\Omega \setminus \{x_0\}$ intercepta Σ' em algum ponto.

Seja $\tau : \Omega \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definida como na Observação 1.1.16. Dada uma seqüência $\{x_j\} \subset \Sigma$ considere uma seqüência $\{y_j\} \subset \Sigma'$ tal que $\gamma(\tau(y_j), y_j) = x_j \forall j \in \mathbb{N}$. Por compacidade existe uma subseqüência $\{y_{j_k}\} \subset \{y_j\}$ tal que $y_{j_k} \to y$, para algum $y \in \Sigma'$. Então $x_{j_k} \to \gamma(\tau(y), y) \in \Sigma$.

O resultado abaixo mostra que a perturbação de uma seção transversal de L ao longo das curvas integrais ainda é uma seção transversal de L.

Lema 1.1.18 *Se Σ é seção transversal global de L em Ω e $\chi \in C^\infty(\Sigma)$ é uma função real tal que $\omega_-(y) < \chi(y) < \omega_+(y), \forall y \in \Sigma$, então a imagem da aplicação*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Sigma & \rightarrow & \Omega \\ & y & \mapsto & \gamma(\chi(y), y) \end{array}$$

é uma seção transversal global de L em Ω.

Demonstração. Pela Observação 1.1.16 podemos supor que $L = \frac{\partial}{\partial t}, \Omega = M$ e que $f(y) = (\chi(y), y), y \in \Sigma$. Logo cada curval integral de $\frac{\partial}{\partial t}$ intercepta $f(\Sigma)$ em exatamente um ponto e, além disso

$$Df_y = \begin{bmatrix} \nabla\chi(y) \\ I \end{bmatrix}, \tag{1.1.1}$$

sendo I matriz identidade $(n-1) \times (n-1)$. Então $f(\Sigma)$ é uma variedade mergulhada de M de dimensão $n-1$. Resta provar que

$$T_{f(y)}(f(\Sigma)) \oplus \frac{\partial}{\partial t} = \mathbb{R}^n, \forall y \in \Sigma. \tag{1.1.2}$$

Como f tem posto $n-1$, temos que $Df_y(T_y(\Sigma))$ é um subespaço $n-1$ dimensional de $T_{f(y)}(f(\Sigma))$, logo

$$Df_y(T_y(\Sigma)) = T_{f(y)}(f(\Sigma)).$$

Então, para demonstrar (1.1.2) é suficiente demonstrar que

$$Df_y(T_y(\Sigma)) \oplus \frac{\partial}{\partial t} = \mathbb{R}^n, \forall y \in \Sigma.$$

Para verificar a igualdade acima, observe que de (1.1.1) resulta que $Df_y(v) \neq (1, 0, ..., 0), \forall v \in \mathbb{R}^{n-1}$. ■

1.2 O espaço $C^{\infty}(K)$ e seu dual

Se E é um espaço vetorial topológico e p é uma seminorma em E então definimos

$$B_p = \{x \in E; p(x) \leq 1\}.$$

Seja F subconjunto do dual de E. O **polar** de F é definido por

$$F^{\circ} = \{f \in E; u(f) = 0, \forall u \in F\}.$$

Suponha que E seja um espaço localmente convexo e que S seja um conjunto de seminormas contínuas de E. Dizemos que S é uma **base de seminormas contínuas** de E quando, para cada seminorma contínua q de E, existem $p \in s$ e $c > 0$ tais que $q \leq cp$. Por [T2, Proposição 7.6], se S é base de seminormas contínuas de E então

$$\{cB_p; p \in s \text{ e } c > 0\}$$

é base local para a topologia de E.

Seja $\{K_j\}_{j=0}^{\infty}$ seqüência de compactos que esgota Ω. Uma base de seminormas contínuas de $C^{\infty}(\Omega)$ é dada por

$$\phi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_j} |\partial^{\alpha}\phi|, \phi \in C^{\infty}(\Omega), j = 0, 1, 2, ...$$

Se $K \subset\subset \Omega$, definimos $C^{\infty}(K)$ como o quociente de $C^{\infty}(\Omega)$ pelo subespaço das funções de $C^{\infty}(\Omega)$ que se anulam de ordem infinita em K. Por [T2, Poposição 7.9], uma base de seminormas contínuas de $C^{\infty}(K)$ é dada por

$$p_j\left(\dot{\phi}\right) = \inf_{\phi \in \dot{\phi}} \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_j} |\partial^{\alpha}\phi|, \dot{\phi} \in C^{\infty}(K), j = 0, 1, 2, ... \tag{1.2.3}$$

Denotamos por $\mathscr{E}'(K)$ o conjunto das distribuições definidas em Ω com suporte contido em K. O próximo lema identifica o dual de $C^{\infty}(K)$ com $\mathscr{E}'(K)$.

Lema 1.2.1 *Dado um funcional linear w contínuo em $C^{\infty}(K)$, o funcional u definido por*

$$u(\phi) = w\left(\dot{\phi}\right), \phi \in C^{\infty}(\Omega) \tag{1.2.4}$$

pertence a $\mathscr{E}'(K)$. Reciprocamente, para cada $u \in \mathscr{E}'(K)$, a aplicação w dada por

$$w\left(\dot{\phi}\right) = u(\phi), \dot{\phi} \in C^{\infty}(K) \tag{1.2.5}$$

está bem definida e é um funcional linear contínuo em $C^{\infty}(K)$.

Demonstração. Seja w um funcional linear contínuo em $C^{\infty}(K)$. Então existem $j \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$\left|w\left(\dot{\phi}\right)\right| \leq C \inf_{\phi \in \dot{\phi}} \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_j} |\partial^{\alpha}\phi|, \dot{\phi} \in C^{\infty}(K). \tag{1.2.6}$$

De (1.2.4) e (1.2.6) temos

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \phi|, \phi \in C^\infty(\Omega)$$

de onde segue que $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e $\operatorname{supp}(\phi) \cap K = \emptyset$ então é claro que $\dot{\phi} = 0$ e, daí, $w\left(\dot{\phi}\right) = 0$. De (1.2.4) segue que $u(\phi) = 0$ e portanto $u \in \mathscr{E}'(K)$.

Reciprocamente, dado $u \in \mathscr{E}'(K)$ arbitrário, existem $j \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \phi|, \phi \in C^\infty(\Omega), \tag{1.2.7}$$

Para provar que a aplicação w dada por (1.2.5) está bem definida, tomamos $\psi \in \dot{\phi}$ arbitrário. Então, pela definição de $C^\infty(K)$, temos

$$\partial^\alpha(\phi - \psi)(x) = 0, |\alpha| \leq j, x \in K.$$

De [H1, Teorema 2.3.3] segue que $u(\phi - \psi) = 0$, provando assim que w está bem definida. De (1.2.7) segue uma estimativa como em (1.2.6), provando a continuidade de w em $C^\infty(K)$. ■

1.3 Resultados sobre resolubilidade de operadores diferenciais

Nesta seção transcrevemos os resultados e definições relacionados a resolubilidade de operadores diferenciais que serão usados no decorrer do texto. O resultado abaixo é devido a [GS, p. 175].

Teorema 1.3.1 *Seja L um campo linear hiperbólico e $c \in \mathbb{C}$ uma constante. Então para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ flat na origem, $\exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ flat na origem tal que $(L + c)u = f$ em uma vizinhança de zero.*

Em [DH, p. 212] temos os seguintes resultados, que tratam da resolubilidade de um campo real L em uma variedade diferenciável M.

Teorema 1.3.2 *Seja $K \subset\subset M$. As seguintes condições são equivalentes:*
(a) $L(C^\infty(K)) = C^\infty(K)$.
(b) $(L + a)(C^\infty(K)) = C^\infty(K)$, *para todo* $a \in C^\infty(K)$.
(c) $\exists \phi \in C^\infty(\Omega)$ *tal que* $L^2\phi > 0$ *em* K.
(d) *Nenhuma órbita completa de L está contida em K.*

Teorema 1.3.3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) $L(C^\infty(M)) = C^\infty(M)$.
(b) $(L + a)(C^\infty(M)) = C^\infty(M), \forall a \in C^\infty(M)$.
(c) $\exists \phi \in C^\infty(M)$ *tal que* $L^2\phi > 0$ *em* M *e* $\{y \in M; \phi(y) \leq c\}$ *é compacto, qualquer que seja* c.

(d)

(d.1) *Nenhuma órbita completa de L é pré-compacta*

e

(d.2) *Ω é convexo com respeito às trajetórias de L.*

(e) *Não existe curva integral periódica e a relação $R = \{(y_1, y_2) \in M \times M; y_1$ e y_2 estão sobre a mesma curva integral de $L\}$ é fechada. Mais ainda, R é uma subvariedade C^∞ de M.*

(f) *Existe uma variedade M_0, uma vizinhança aberta M_1 de $M_0 \times \{0\}$ em $M_0 \times \mathbb{R}$ a qual é convexa na direção $\mathbb{R}$ e um difeomorfismo $h : M \to M_1$ que conjuga L e $\frac{\partial}{\partial t}$ (sendo um ponto de $M_0 \times \mathbb{R}$ denotado por (y, t).)*

Observação 1.3.4 *A variedade $h^{-1}(M_0 \times \{0\})$ é uma seção transversal global de L em M.*

Como os conjuntos $\alpha-$limite e $\omega-$limite de uma órbita são invariantes pelo fluxo temos a

Observação 1.3.5 *Se L é um campo real então **(d.1)** é equivalente a seguinte condição: nenhuma semi-órbita de L é pré-compacta.*

O resultado que segue é devido a [Kö].

Teorema 1.3.6 *Sejam E, F espaços de Fréchet, com F separável. Uma aplicação linear contínua $A : E \to F$ tem imagem fechada se, e somente se, vale a seguinte propriedade: dada $\{z_n\} \subset {}^tA(F')$ com $z_n \rightharpoonup 0$ existe $\{y_n\} \subset E'$ tal que $y_n \rightharpoonup 0$ e ${}^tAy_n = z_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Um **operador diferencial** P de ordem $m \in \mathbb{N}$ em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear

$$u \mapsto Pu = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha u$$

sendo $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$ e $a_\alpha \in C^\infty(\Omega), |\alpha| \le m$. Salvo menção contrária, consideramos um operador diferencial P como uma aplicação linear

$$P : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$$

Dado um operador diferencial P de ordem m, defina os seguintes polinômios em ξ :

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$$

e

$$p_{m-1}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m-1} a_\alpha(x) \xi^\alpha, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Como em [H3, p. 83], defina o **símbolo principal** de P por

$$\sigma_{princ}(P)(x, \xi) = p_m(x, \xi),$$

a qual se transforma numa função invariantemente definida no fibrado cotangente. O **símbolo sub-principal** de P é definido por

$$\sigma_{sub}(P)\,(x,\xi) = p_{m-1}\,(x,\xi) + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{\xi_j} p_1\,(x,\xi)\,, x\in\Omega, \xi\in\mathbb{R}^n,$$

a qual é uma função definida no fibrado cotangente e invariante por mudanças de coordenadas nos pontos em que p_m se anula de ordem dois.

Quando $P = L + c$ é um operador de ordem um, sendo $L = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\,(x)\,\partial_j$ um campo de vetores e $c \in C^\infty\,(\Omega)\,,$ temos que

$$\sigma_{princ}(P)\,(x,\xi) = i\sum_{j=1}^{n} a_j\,(x)\,\xi_j \tag{1.3.8}$$

e

$$\sigma_{sub}(P)\,(x,\xi) = c(x) - \frac{1}{2}\text{ traço } DA\,(x)\,, \tag{1.3.9}$$

no qual $A = (a_1, a_2, ..., a_n)\,.$ Nesse caso, se x_0 é um ponto singular do campo $L,$ então todo ponto da forma (x_0,ξ) é um zero de ordem dois de $\sigma_{princ}(P)$ logo $\sigma_{sub}(P)$ é invariante em todo ponto da forma $(x_0,\xi)\,.$

Se P é um operador diferencial então denotamos por ${}^tP$ o transposto formal de $P.$

Definição 1.3.7 *Dizemos que Ω é $P-$**convexo para suportes** quando, $\forall K \subset\subset \Omega, \exists K' \subset\subset \Omega$ tal que*

$$u \in \mathscr{E}'\,(\Omega) \;\; e \;\; \text{supp}\left({}^tPu\right) \subset K \Rightarrow \text{supp}\,(u) \subset K'.$$

Definição 1.3.8 *Dizemos que Ω é $P-$**convexo para suportes singulares** quando $\forall K \subset\subset \Omega, \exists K' \subset\subset \Omega$ tal que*

$$u \in \mathscr{E}'\,(\Omega) \;\; e \;\; \text{singsupp}\left({}^tPu\right) \subset K \Rightarrow \text{singsupp}\,(u) \subset K'.$$

A noção de $P-$convexidade foi introduzida em [Ma, p. 295]. Utilizando uma função de corte verifica-se o seguinte resultado:

Observação 1.3.9 *Seja $K \subset\subset \Omega$. Se $\Omega \setminus K$ é $P-$convexo para suportes (resp. suportes singulares) então Ω é $P-$convexo para suportes (resp. suportes singulares).*

O resultado abaixo será chamado de Teorema de Harvey-Treves, pois foi estabelecido por [T1, Teorema 19.1] e também pode ser encontrado em [Ha, Teorema 5.2]

Teorema 1.3.10 *Um operador diferencial $P : C^\infty\,(\Omega) \to C^\infty\,(\Omega)$ é sobrejetivo se, e somente se, valem as seguintes condições:*
(H.1) *Ω é $P-$convexo para suportes*
e
(H.2) *para cada $s \in \mathbb{R}$ e $K \subset\subset \Omega$, existem $r \in \mathbb{R}$ e $B > 0$ tais que*

$$u \in \mathscr{E}'\,(\Omega)\,,\; {}^tPu \in H^s \;\; e \;\; \text{supp}\left({}^tPu\right) \subset K \Rightarrow u \in H^r \;\; e \;\; \|u\|_r \leq B\left\|{}^tPu\right\|_s.$$

Definição 1.3.11 *Se P tem símbolo principal real e $\sigma_{princ}(P)\,(x^{\circ},\xi^{\circ}) = 0$ então as equações de Hamilton*

$$\frac{dx}{dt} = \nabla_{\xi}\sigma_{princ}(P), \frac{d\xi}{dt} = -\nabla_{x}\sigma_{princ}(P).$$

*juntamente com a condição inicial $(x\,(0)\,,\xi\,(0)) = (x^{\circ},\xi^{\circ})\,,$ definem uma curva em $\Omega \times (\mathbb{R}^{n}\diagdown\{0\})$ sobre a qual $\sigma_{princ}(P)$ permanece igual a zero. Ela é chamada de **bicaracterística de** P e sua projeção em Ω é chamada de **curva bicaracterística**.*

Como em [T1, Definição 20.2] temos a

Definição 1.3.12 *Dizemos que o operador diferencial P é:*
***(a)** $C^{\infty}-$**localmente resolúvel em** $x_0 \in \Omega$ quando existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\forall f \in C^{\infty}(\Omega)\,, \exists u \in C^{\infty}(U)$ satisfazendo $Pu = f$ em U.*
***(b)** $C^{\infty}-$**semiglobalmente resolúvel em** Ω quando, para todo conjunto aberto e relativamente compacto $\Omega' \subset \Omega$, e para toda $f \in C^{\infty}(\Omega)\,,$ existe $u \in C^{\infty}(\Omega)$ tal que $Pu = f$ em Ω'.*
***(c)** $C^{\infty}-$**globalmente resolúvel em** Ω ou ainda **resolúvel em** $C^{\infty}(\Omega)\,,$ quando $P\,(C^{\infty}(\Omega)) = C^{\infty}(\Omega)\,.$*

O resultado que segue complementa a Seção 1.2. Ele apresenta condições suficientes para que exista uma seção transversal global de L em $\Omega\setminus\{x_0\}\,.$

Lema 1.3.13 *Se $x_0 \in \Omega$ é ponto singular hiperbólico do campo L e $\{x_0\}$ é um atrator global, então $\forall R > 0$ existe uma seção transversal global de L em $\Omega\setminus\{x_0\}$ compacta e contida em $B_R\,(x_0)\setminus\{x_0\}\,.$*

Demonstração. A demonstração será dividida em etapas.
Etapa 1. Se $x \neq x_0$ então $x_0 \notin \alpha\,(x)\,.$

De fato, isso segue do Teorema 1.1.7 e do fato de que $\{x_0\}$ é um atrator local.

Etapa 2. $\{x_0\}$ é a única órbita pré-compacta de L.

De fato, como $\{x_0\}$ é um atrator global temos que Γ_x^+ é pré-compacta, $\forall x \in \Omega$. Por isso demonstraremos que se $x \neq x_0$ então Γ_x^- não é pré-compacta.

Suponha que $\overline{\Gamma_x^-} \subset\subset \Omega$ para algum $x \neq x_0$. Como $\overline{\Gamma_x^-} = \Gamma_x^- \cup \alpha\,(x)\,,$ da **Etapa 1** e da invariância de $\alpha\,(x)$ segue que existe uma órbita cujo $\omega-$ limite é diferente de $\{x_0\}$, contrariando a hipótese de que $\{x_0\}$ é um atrator global.

Etapa 3. Existe um subconjunto aberto U de Ω, com $x_0 \in U$ e $U \subset B_R\,(x_0)\,,$ tal que $U\setminus\{x_0\}$ é convexo com respeito às trajetórias de L.

De fato, pelo Teorema 1.1.7 existe $r > 0$, um aberto U de Ω, com $x_0 \in U$ e $U \subset B_R\,(x_0)\,,$ e um homeomorfismo $h : U \to B_r\,(0)$ que conjuga L e $DL\,(x_0)$. Como $\{0\}$ é um atrator local de $DL\,(x_0)\,,$ verifica-se que $B_r\,(0)\setminus\{0\}$ é convexo com respeito às trajetórias de $DL\,(x_0)$. Daí segue a **Etapa 3.**

Etapa 4. Existe uma seção transversal global Σ de L em $U\setminus\{x_0\}$.

De fato, basta usar as etapas 2 e 3 e o Teorema 1.3.3.

Etapa 5. Σ é uma seção transversal global de L em $\Omega\setminus\{x_0\}$ e $\Sigma \subset\subset \Omega\setminus\{x_0\}\,.$

De fato, como $\{x_0\}$ é um atrator global, da **Etapa 4** segue que Σ é uma seção transversal global de L em $\Omega\setminus\{x_0\}$. Da Observação 1.1.17 segue $\Sigma \subset\subset \Omega\setminus\{x_0\}\,.$ $\blacksquare$

1.4 Propagação de singularidades e resultados afins

O principal objetivo desta seção é introduzir os resultados sobre propagação de singularidades que serão usados no decorrer do texto. Seja P um operador diferencial de ordem m. Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ então definimos o **conjunto frente de onda** de u, o qual denotamos por $WF(u)$, como em [H1, Definição 8.1.2]. Denotamos por $T^*(\Omega)$ o fibrado cotangente de Ω e definimos

$$\mathrm{Char}(P) = \{(x,\xi) \in T^*(\Omega) \setminus 0; \sigma_{princ}(P)(x,\xi) = 0\}.$$

Em [H4, Teorema 26.1.1] temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.1 *Se $\sigma_{princ}(P)$ é real e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ então $WF(u) \setminus WF(Pu) \subset Char(P)$ e é invariante pelas bicaracterísticas de P.*

Como em [H3, Definição 18.1.30] temos a

Definição 1.4.2 *Dada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ diz-se que $u \in H^s_{loc}$ em $x_0 \in \Omega$ se $u = u_1 + u_0$, com $u_1 \in H^s_{loc}(\Omega)$ e $u_0 \in C^\infty$ em uma vizinhança de x_0. Se $(x_0,\xi_0) \in T^*(\Omega) \setminus 0$ dizemos que $u \in H^s_{loc}$ em (x_0,ξ_0) quando $u = u_1 + u_0$, com $u_1 \in H^s_{loc}(\Omega)$ e $(x_0,\xi_0) \notin WF(u_0)$.*

Não é difícil ver que $u \in H^s_{loc}(\Omega)$ se, e somente se, $u \in H^s_{loc}$ em todo ponto $x \in \Omega$. Em [H3, Teorema 18.1.31] temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.3 *Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ então*

$$u \in H^s_{loc} \text{ em } (x_0,\xi_0) \Rightarrow Pu \in H^{s-m}_{loc} \text{ em } (x_0,\xi_0).$$

Além disso podemos escolher P tal que $Pu \in H^{s-m}_{loc}$ em (x_0,ξ_0) e $(x_0,\xi_0) \notin Char(P)$. Por outro lado

$$Pu \in H^{s-m}_{loc} \text{ em } (x_0,\xi_0) \text{ e } (x_0,\xi_0) \notin Char(P) \Rightarrow$$

$$u \in H^s_{loc} \text{ em } (x_0,\xi_0).$$

Se $u \in H^s_{loc}$ em $(x_0,\xi_0), \forall \xi_0 \in T^*_{x_0} \setminus 0$ então $u \in H^s_{loc}$ em x_0.

Aqui $T^*_{x_0}$ é a fibra de $T^*(\Omega)$ no ponto x_0. A seguir transcrevemos [H4, Teorema 26.1.4], que é um refinamento do Teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.4 *Sob as hipóteses do Teorema 1.4.1, seja I um intervalo de curva bicaracterística e suponha que Pu esteja em H^s_{loc} em I. Se $u \in H^{s+m-1}_{loc}$ em algum ponto de I então o mesmo é verdade para todo ponto de I.*

Do Teorema do Fluxo Tubular Longo (veja [MP, p. 102]) segue o resultado abaixo.

Teorema 1.4.5 *Seja L um campo real não-singular definido em Ω e $c \in C^\infty(\Omega)$. Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $(L+c)u = 0$ então $\mathrm{supp}(u)$ é invariante pelas curvas integrais de L.*

Capítulo 2

$P-$convexidade e o Teorema de Harvey-Treves

Na primeira seção deste capítulo utilizamos resultados de propagação de suportes e de singularidades para dar uma caracterização da $P-$convexidade para suportes e para suportes singulares, no caso em que P é um campo real. Como corolário, temos que a $P-$ convexidade para suportes e para suportes singulares são equivalentes para tais operadores.

Na segunda seção apresentamos uma versão do Teorema de Harvey-Treves para operadores de ordem arbitrária e uma para campos reais. Para demonstrar tais resultados, utilizamos uma versão para $\mathbb{R}^n$ de um resultado sobre regularidade de solução da equação transposta ${}^tPu = f$ devido a Bergamasco-Cordaro-Petronilho (veja [BCP, Proposição 3.1]) para uma variedade compacta.

2.1 $P-$convexidade para suportes singulares no caso de campos reais

O principal objetivo desta seção é demonstrar a seguinte caracterização de $P-$convexidade para suportes singulares, no caso em que P é um campo real:

Proposição 2.1.1 *Seja L um campo real definido em Ω. As seguintes condições são equivalentes:*
(a) *Ω é $L-$convexo para suportes singulares.*
(b)

> ***(b.1)*** *$\exists \widetilde{K} \subset\subset \Omega$ tal que $L\,|_{\Omega \setminus \widetilde{K}}$ não tem órbita pré-compacta.*
> *e*
> ***(b.2)*** *Ω é convexo com respeito às trajetórias de L.*

A demonstração da Proposição 2.1.1 requer alguns resultados preliminares, aqui denominados Lema 2.1.2 a Lema 2.1.4. Seja $\{K_j\}$ seqüência de compactos que esgota $\Omega, K \subset\subset \Omega$ e $\{p_j\}$ a base de seminormas contínuas de $C^\infty(K)$ definida em (1.2.3). Se L é um campo de vetores então, pela regra de Leibniz, $\forall j \in \mathbb{N}, \exists C > 0$

tal que

$$L\left(\frac{1}{C}B_{p_{j+1}}\right) \subset B_{p_j}. \tag{2.1.1}$$

O próximo lema acrescenta uma nova condição ao Teorema 1.3.2, equivalente as demais.

Lema 2.1.2 *Se* $\overline{L\left(C^{\infty}(K)\right)} = C^{\infty}(K)$ *então* $\exists \phi \in C^{\infty}(\Omega)$ *tal que* $L^2\phi > 0$ *em* K.

Demonstração. Tome $j \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_j$ e seja $\phi_1 \in C^{\infty}(\Omega)$ satisfazendo $\phi_1 = 1$ em K. Por hipótese $\exists \dot{\phi}_2 \in C^{\infty}(K)$ tal que

$$L\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 \in \frac{1}{4}B_{p_j}, \tag{2.1.2}$$

e $\dot{\phi} \in C^{\infty}(K)$ tal que

$$L\dot{\phi} - \dot{\phi}_2 \in \frac{1}{4C}B_{p_{j+1}}$$

(aqui $C > 0$ é constante de (2.1.1)). De (2.1.1) resulta

$$L\left(L\dot{\phi} - \dot{\phi}_2\right) \in \frac{1}{4}B_{p_j}. \tag{2.1.3}$$

Como $L^2\dot{\phi} - \dot{\phi}_1 = L\left(L\dot{\phi} - \dot{\phi}_2\right) + L\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1$, de (2.1.2) e (2.1.3) obtemos

$$L^2\dot{\phi} - \dot{\phi}_1 \in \frac{1}{2}B_{p_j}. \tag{2.1.4}$$

De (1.2.3) e (2.1.4) segue que

$$\inf_{\psi \in L^2\dot{\phi} - \dot{\phi}_1} \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_j} |\partial^{\alpha}\psi| \leq \frac{1}{2}.$$

Então $\exists \psi \in L^2\dot{\phi} - \dot{\phi}_1$ para a qual temos

$$\sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_j} |\partial^{\alpha}\psi| \leq \frac{3}{4},$$

em particular

$$\sup_{K_j} |\psi| \leq \frac{3}{4}.$$

Mas $\psi \in L^2\dot{\phi} - \dot{\phi}_1$ implica que $L^2\phi - \phi_1 = \psi$ em K, logo, como $K \subset K_j$ temos

$$\sup_{K} \left|L^2\phi - \phi_1\right| \leq \frac{3}{4}.$$

Como $\phi_1 = 1$ em K segue que $L^2\phi \geq \frac{1}{4}$ em K. ■

Lema 2.1.3 *Se Γ é uma órbita pré-compacta do campo real L então*
(i) $\exists u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ *tal que* ${}^{t}Lu = 0$ *e* $\operatorname{supp}(u) = \overline{\Gamma}$. *Além disso* $\operatorname{singsupp}(u) = \Gamma$, *caso* Γ *seja órbita periódica.*
(ii) *Para cada órbita* Λ *satisfazendo* $\Lambda \cap \partial\overline{\Gamma} \neq \emptyset, \exists u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ *tal que* ${}^{t}Lu = 0$ *e* $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{singsupp}(u) = \overline{\Lambda} \subset \overline{\Gamma}$.

Demonstração. A demonstração do resultado será dividida em etapas. Nas etapas 1 e 2 demonstramos **(i)** e nas etapas 3 e 4 demonstramos **(ii)**.
Etapa 1. Se Γ é uma órbita periódica então $\exists u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que ${}^{t}Lu = 0$ e $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{singsupp}(u) = \Gamma$.

De fato, se Γ é um ponto então basta tomar u como a distribuição delta de Dirac suportada neste ponto. Se Γ é uma órbita periódica que não se reduz a um ponto então defina

$$u(\phi) = \int_{a}^{b} \phi \circ \gamma(s)\, ds, \phi \in C^{\infty}(\Omega), \tag{2.1.5}$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq b, \gamma(a) = \gamma(b)$ e γ a curva integral cuja imagem é Γ. É claro que $\operatorname{supp}(u) = \Gamma$. De [H1, Exemplo 8.2.5] resulta que

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in T^{*}(\Omega); x \in \Gamma, \xi \neq 0 \text{ e } L(x, \xi) = 0\}.$$

Em particular $\operatorname{singsupp}(u) = \Gamma$.
Etapa 2. Se Γ não é órbita periódica então $\exists u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que ${}^{t}Lu = 0$ e $\operatorname{supp}(u) = \overline{\Gamma}$.

De fato, do Lema 2.1.2 e do Teorema 1.3.2 resulta que $\overline{L\left(C^{\infty}\left(\overline{\Gamma}\right)\right)} \neq C^{\infty}\left(\overline{\Gamma}\right)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear w definido em $C^{\infty}\left(\overline{\Gamma}\right)$, contínuo e não-nulo, tal que $w = 0$ em $L\left(C^{\infty}\left(\overline{\Gamma}\right)\right)$. Pelo Lema 1.2.1 existe $0 \neq u \in \mathscr{E}'\left(\overline{\Gamma}\right)$ tal que $u = 0$ em $L\left(C^{\infty}(\Omega)\right)$, logo, ${}^{t}Lu = 0$. Como L é não-singular em uma vizinhança de Γ, do Teorema 1.4.5 resulta que $\operatorname{supp}(u) = \overline{\Gamma}$.
Etapa 3. Se Λ não é periódica então vale **(ii)**.

De fato, como $\overline{\Gamma}$ é a união de Γ com seus conjuntos $\alpha-$limite e $\omega-$limite, que são invariantes pelo fluxo, de $\Lambda \cap \partial\overline{\Gamma} \neq \emptyset$ segue que $\overline{\Lambda} \subset \overline{\Gamma}$. De **(i)** segue que $\exists u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que ${}^{t}Lu = 0$ e $\operatorname{supp}(u) = \overline{\Lambda}$. Resta demonstrar que $\operatorname{singsupp}(u) = \overline{\Lambda}$ e para isso, pelo Teorema 1.4.1, é suficiente demonstrar que

$$\Lambda \cap \operatorname{singsupp}(u) \neq \emptyset. \tag{2.1.6}$$

Seja $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbf{\Omega}$ curva integral cuja imagem é igual a Λ e $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ tal que $-{}^{t}L = L + \psi$. Dado um intervalo aberto e limitado $I \subset \mathbb{R}$, como Λ não é periódica, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo $\exists \phi \in C^{\infty}(\Omega)$ tal que $L\phi = \psi$ em uma vizinhança de $\lambda(I)$.

Se $\Lambda \cap \operatorname{singsupp}(u) = \emptyset$ então u é contínua em Λ. Como $\operatorname{supp}(u) = \overline{\Lambda}$ e $\overline{\Lambda} \subset \overline{\Gamma}$ segue que

$$u = 0 \text{ em } \partial\overline{\Gamma}. \tag{2.1.7}$$

Além disso, como u é de classe C^∞ em uma vizinhança de $\lambda(I)$ segue que

$$\left(\left(e^{\phi}u\right)\circ\lambda\right)'(s) = L\left(e^{\phi}u\right)\circ\lambda(s) = \left(e^{\phi}(L\phi)\,u + e^{\phi}Lu\right)\circ\lambda(s)\,, \forall s\in I.$$

Mas $L\phi=\psi$ em uma vizinhança de $\lambda(I)$ e ${}^tLu=0$, logo

$$\left(\left(e^{\phi}u\right)\circ\lambda\right)'(s) = 0, \forall s\in I.$$

Isso demonstra que para cada intervalo aberto e limitado $I\subset\mathbb{R}, \exists\phi\in C^\infty(\Omega)$ tal que $e^{\phi}u$ é constante sobre $\lambda(I)$. Daí e de $\operatorname{supp}(u)=\overline{\Lambda}$ resulta

$$u\neq 0 \text{ em } \Lambda.$$

Mas isso contradiz (2.1.7) pois $\Lambda\cap\partial\overline{\Gamma}\neq\emptyset$.

Etapa 4. Se Λ é uma órbita periódica então vale **(ii)**.

De fato, se Λ é uma singularidade então o resultado segue da **Etapa 1.** Caso contrário, considere $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $a\neq b$ e $\lambda(a)=\lambda(b)$. Neste caso tome $I=(a-\epsilon,b+\epsilon)$, com $\epsilon>0$, e a demonstração é análoga a da **Etapa 3.** ■

Seja L um campo real não-singular em Ω. Considere o operador $P=L+c$, com $c\in C^\infty(\Omega)$. Seja $\gamma: I\to\Omega$ curva integral de L e suponha que $[a,b]\subset I$ é tal que $\Gamma=\gamma([a,b])$ é homeomorfo a $[0,1]$. Sob estas condições

Lema 2.1.4 *Existe $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ tal que*

$$\operatorname{supp}(u) = \operatorname{singsupp}(u) = \Gamma$$

e

$$\operatorname{supp}\left({}^tPu\right) = \operatorname{singsupp}\left({}^tPu\right) = \{\gamma(c)\,,\gamma(d)\}\,.$$

Demonstração. Como em (2.1.5) defina

$$v(\phi) = \int_a^b \phi\circ\gamma(s)\,ds, \phi\in C^\infty(\Omega)\,,$$

Claramente $\operatorname{supp}(v)=\operatorname{singsupp}(v)=\Gamma$. Além disso não é difícil ver que

$${}^tLv = \delta_{\gamma(b)} - \delta_{\gamma(a)},$$

sendo $\delta_{\gamma(a)},\delta_{\gamma(b)}$ as distribuições delta de Dirac suportadas em $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, respectivamente. Como $\gamma(a)\neq\gamma(b)$ temos que

$$\operatorname{supp}\left({}^tLv\right) = \{\gamma(a)\,,\gamma(b)\}\,. \tag{2.1.8}$$

Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo $\exists\phi\in C^\infty(\Omega)$ tal que $L\phi=c$ em uma vizinhança de Γ. Seja $\psi\in C^\infty(\Omega)$ tal que $-\,{}^tL=L+\psi$. Defina $u=e^{\phi}v$. Então

$${}^tPu = -e^{\phi}(L\phi)\,v - e^{\phi}Lv + e^{\phi}(c-\psi)\,v,$$

logo,

$$^{t}Pu = e^{\phi} \cdot \ ^{t}Lv + e^{\phi}(c - L\phi)\, v. \tag{2.1.9}$$

Como $c = L\phi$ em uma vizinhança de Γ e $\operatorname{supp}(v) = \Gamma$ temos que $^{t}Pu = e^{\phi} \cdot \ ^{t}Lv$. Daí e de (2.1.8) segue o resultado. ∎

Demonstração da Proposição 2.1.1. Para cada $K \subset\subset \Omega$ defina

$$C_K = \{\Gamma = \gamma([a,b])\, ; a, b \in \mathbb{R}, \gamma \text{ é curva integral e } \gamma(a), \gamma(b) \in K\}. \tag{2.1.10}$$

Seja $\{K_j\}$ seqüência de compactos que esgota Ω.

(a) $\Rightarrow$ (b.1) Tomando $K = \emptyset$ na definição de $P-$convexidade para suportes singulares, segue que $\exists K' \subset\subset \Omega$ tal que

$$u \in \mathscr{E}'(\Omega),\ ^{t}Lu = 0 \Rightarrow \operatorname{singsupp}(u) \subset K'. \tag{2.1.11}$$

Negando **(b.1)** temos que existe uma órbita pré-compacta Γ tal que $\overline{\Gamma} \subset \Omega \setminus K'$. Pelo Lema 2.1.3 $\exists u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que $\emptyset \neq \operatorname{singsupp}(u) \subset \overline{\Gamma}$ e $^{t}Lu = 0$, contradizendo (2.1.11).

(a) $\Rightarrow$ (b.2) A negação de **(b.2)** implica que $\exists K \subset\subset \Omega$ e uma seqüência de curvas integrais $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \Omega$ tais que $\Gamma_j := \gamma_j([a_j, b_j]) \in C_K$ mas $\Gamma_j \not\subset K_j, \forall j \in \mathbb{N}$.

Tome $0 < \delta < \frac{1}{2} d(K, \partial\Omega)$ e defina $K_\delta = K + \overline{B_\delta(0)}$. Seja $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_0 \Rightarrow K_\delta \subset K_{j_0}$. Então Γ_j é uma órbita que não se reduz a um ponto, quando $j \geq j_0$.

Suponha $j \geq j_0$ e que Γ_j seja uma órbita periódica. Como $K + B_\delta(0)$ é aberto, pela continuidade de γ segue que existe $c_j \in \mathbb{R}$ de modo que $\gamma_j([a_j, c_j])$ é um intervalo não-fechado de curva integral, $\gamma_j([a_j, c_j]) \not\subset K'_j$ e $\gamma_j(a_j), \gamma_j(c_j) \in K_\delta$.

Para cada $j \geq j_0$ defina $\Gamma'_j = \Gamma_j$ se Γ_j é um intervalo não-fechado de curva integral e $\Gamma'_j = \gamma_j([a_j, c_j])$, em caso contrário. Pelo Lema 2.1.4, para cada $j \geq j_0$ existe $u_j \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que $\operatorname{singsupp}(^{t}Lu_j) \subset K_\delta$ e $\operatorname{singsupp}(u_j) = \Gamma'_j \not\subset K_j$. Portanto Ω não é $L-$convexo para suportes singulares.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se Ω não é $L-$convexo para suportes singulares então $\exists K \subset\subset \Omega$ com a seguinte propriedade:

$$\forall K' \subset\subset \Omega, \exists v \in \mathscr{E}'(\Omega) \text{ tal que } \operatorname{singsupp}\left(^{t}Lv\right) \subset K \text{ mas } \operatorname{singsupp}(v) \not\subset K'. \tag{2.1.12}$$

Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{2} d\left(\widetilde{K}, \partial\Omega\right)$ e $K_0 = K \cup \left(\widetilde{K} + \overline{B_\epsilon(0)}\right)$. De **(b.2)** segue que $\exists K'_0 \subset\subset \Omega$ tal que

$$\Gamma \in C_{K_0} \Rightarrow \Gamma \subset K'_0 \tag{2.1.13}$$

De (2.1.12) resulta que existe $v_0 \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{singsupp}\left(^{t}Lv_0\right) \subset K \tag{2.1.14}$$

e $\operatorname{singsupp}(v_0) \not\subset K'_0$.

Tome $x \in \operatorname{singsupp}(v_0) \setminus K_0'$. Então uma das semi-órbitas Γ_x^- ou Γ_x^+ não intercepta K_0. De fato, se ambas interceptassem K_0 então de (2.1.13) resultaria que $x \in K_0'$, o que é um absurdo. Suponha que

$$K_0 \cap \Gamma_x^+ = \emptyset. \tag{2.1.15}$$

Como $K \subset K_0$ segue que $K \cap \Gamma_x^+ = \emptyset$. De (2.1.14) resulta que ${}^tLv_0 = 0$ sobre Γ^+. Do Teorema 1.4.1 resulta que $\Gamma^+ \subset \operatorname{singsupp}(v_0)$ e portanto $\overline{\Gamma_x^+} \subset\subset \Omega$.

Mas **(b.1)** implica que Γ_x^+ não é pré-compacta. De fato, para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $A_j \subset\subset \Omega \setminus \widetilde{K}$ por

$$A_j = \left\{ y \in \Omega; d(y, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j} \right\} \cap \overline{B_j(0)} \cap \left(\Omega \setminus \left(\widetilde{K} + B_\epsilon(0) \right) \right).$$

Mas $L|_{\Omega \setminus \widetilde{K}}$ não tem órbita pré-compacta logo, da Observação 1.3.5 segue que existe uma seqüência $\{y_j\} \subset \Omega$ tal que $y_j \in \Gamma_x^+ \setminus A_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Como $\widetilde{K} + B_\epsilon(0) \subset K_0$, de (2.1.15) segue que para cada j só pode ocorrer $d(y_j, \partial\Omega) < \frac{1}{j}$ ou $|y_j| > j$. Isso implica que Γ_x^+ não é pré-compacta. ∎

Com pequenas alterações na demonstração da Proposição 2.1.1 podemos demonstrar que, quando L é um campo real, a $L-$convexidade para suportes é equivalente a condição **(b)** da Proposição 2.1.1. Daí segue a

Observação 2.1.5 *Se L é um campo real então Ω é $L-$convexo para suportes se, e somente se, Ω é $L-$convexo para suportes singulares.*

As demonstrações das implicações da observação abaixo são análogas ao caso $c = 0$.

Observação 2.1.6 *Considere um campo real L definido em $\Omega, c \in C^\infty(\Omega)$ e $P = L + c$. Seja* **(b)** *como na Proposição 2.1.1 e*
(a') *Ω é $P-$convexo para suportes singulares.*
*Então **(b)** $\Rightarrow$ **(a')** e **(a')** $\Rightarrow$ **(b.2)**. Além disso, se $c \in C_0^\infty(\Omega)$ então **(a')** $\Rightarrow$ **(b.1)**.*

Se L é um campo real não-nulo com coeficientes constantes então suas órbitas são retas, logo, vale **(b.1)** com $\tilde{K} = \emptyset$. Segue da Proposição 2.1.1 e da Observação 2.1.5 que

Observação 2.1.7 *Se L é um campo real não-nulo com coeficientes constantes então **(a)** $\Leftrightarrow$ **(b.2)**.*

Observe que se L é o campo nulo então, para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, temos que Ω é convexo com respeito às trajetórias de L mas Ω não é $L-$convexo para suportes singulares.

Observação 2.1.8 *Se L é um campo real não-singular e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo então **(a)** $\Leftrightarrow$ **(b.2)**.*

Basta observar que pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, vale **(b.1)** com $\tilde{K} = \emptyset$.

2.2 Uma versão do Teorema de Harvey-Treves

Um dos objetivos desta seção é demonstrar a seguinte versão do Teorema 1.3.10:

Teorema 2.2.1 *Para que um operador diferencial $P : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ seja sobrejetivo é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:*
(H.1) *Ω é $P-$convexo para suportes.*
(H.2.1) *Para cada $s \in \mathbb{R}$ e $K \subset\subset \Omega$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in \mathscr{E}'(\Omega), \ {}^tPu \in H^s \ e \ \operatorname{supp}\left({}^tPu\right) \subset K \Rightarrow u \in H^r.$$

(H.2.2) *$u \in \mathscr{E}'(\Omega), {}^tPu = 0 \Rightarrow u = 0.$*

Além disso demonstramos que no caso de campos reais o Teorema 2.2.1 se reduz ao seguinte resultado:

Teorema 2.2.2 *Um campo real L é resolúvel em $C^\infty(\Omega)$ se, e somente se, valem as condições **(H.1)** e **(H.2.2)**.*

A demonstração dos dois resultados acima requer alguns preliminares, aqui chamados de Lema 2.2.3 e Lema 2.2.4. A argumentação que segue é uma adaptação daquela encontrada em [BCP, Proposição 3.1].

Lema 2.2.3 *Suponha que $P : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ seja um operador diferencial que satisfaz **(H.1)**. Então P satisfaz **(H.2.1)** se, e somente se, $N({}^tP)$ tem dimensão finita e P tem imagem fechada.*

Demonstração. Suponha que P satisfaz **(H.2.1)**. Utilizaremos o Teorema 1.3.6 para provar que $P(C^\infty(\Omega))$ é um subconjunto fechado de $C^\infty(\Omega)$.

Dada $\{u_j\} \subset \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que ${}^tPu_j \to 0$ em $\mathscr{E}'(\Omega)$, temos que $\exists K \subset\subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp}({}^tPu_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$. Como $C^\infty(\Omega)$ é um Espaço de Montel $\exists s \in \mathbb{R}$ tal que ${}^tPu_j \to 0$ em H^s. Daí segue que $\{u_j\} \subset E$, sendo

$$E = \left\{u \in \mathscr{E}'(\Omega); \operatorname{supp}\left({}^tPu\right) \subset K \text{ e } {}^tPu \in H^s\right\}.$$

Seja $r \in \mathbb{R}$ dado por **(H.2.1)** para tais K e s. Provaremos agora que E é um Espaço de Hilbert com a norma

$$u \mapsto \left(\|u\|_{r-1}^2 + \left\|{}^tPu\right\|_s^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De fato, como $E \subset H^r$, por **(H.1)** temos que $\exists K' \subset\subset \Omega$ para o qual vale $E \subset \mathscr{E}'(K')$. Além disso, dada uma seqüência de Cauchy $\{v_j\} \subset E$, existem $v \in H^{r-1}$ e $w \in H^s$ tais que $v_j \to v$ em H^{r-1} e ${}^tPv_j \to w$ em H^s. Logo

$$v_j \to v \text{ em } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ e } {}^tPv_j \to w \text{ em } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Então

$${}^tPv = w \in H^s$$

pois ${}^tP$ é uma aplicação contínua em $\mathscr{D}'(\Omega)$ e

$$\operatorname{supp}(v) \subset K', \operatorname{supp}\left({}^tPv\right) \subset K$$

sendo as inclusões decorrentes de $\operatorname{supp}(v_j) \subset K'$ e $\operatorname{supp}({}^tPv_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$, respectivamente. Portanto $v \in E$. É claro que $v_j \to v$ em E.

A inclusão $E \subset H^r$ é contínua pois dadas $\{v_j\} \subset E$ e $\{w_j\} \subset H^r$ tais que $v_j \to v$ em E e $w_j \to w$ em H^r, temos que $v_j \to v$ em H^{r-1} de onde segue $v = w$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado a inclusão $E \subset H^r$ é contínua e portanto $\exists C' > 0$ tal que

$$\|u\|_r \leq C' \left(\|u\|_{r-1} + \left\|{}^tPu\right\|_s\right), u \in E. \tag{2.2.16}$$

Seja M o núcleo de ${}^tP$ em E, que é um subespaço fechado. A desigualdade acima implica em

$$\|u\|_r \leq C \left\|{}^tPu\right\|_s, u \in M^{\perp}, \tag{2.2.17}$$

para algum $C > 0$. Da fato, se (2.2.17) não vale então existe uma seqüência $\{v_j\} \subset M^{\perp}$ tal que

$$\|v_j\|_r = 1, \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.2.18}$$

e ${}^tPv_j \to 0$ em H^s. Pelo Lema de Rellich existem uma subseqüência $\{v_{j_k}\}$ de $\{v_j\}$ e $v \in H^{r-1}$, tais que $v_{j_k} \to v$ em H^{r-1}. Então $v_{j_k} \to v$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ e pela continuidade de ${}^tP$ segue que ${}^tPv = 0$.

Como $E \subset \mathscr{E}'(K')$ e $v_{j_k} \to v$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ segue que $\operatorname{supp}(v) \subset K'$ e então $v \in E$. Logo $v_{j_k} \to v$ em E e como $\{v_{j_k}\} \subset M^{\perp}$ temos ainda que $v \in M^{\perp}$. Mas $v \in M$ pois ${}^tPv = 0$, logo, $v = 0$.

Porém $\|v_j\|_{r-1} \to 0$ logo, de (2.2.16) segue que $\|v_j\|_r \to 0$ contradizendo (2.2.18). Isso prova (2.2.17).

Estamos agora em condições de concluir a prova de que P tem imagem fechada. Escrevendo $u_j = w_j + v_j$ com $w_j \in M$ e $v_j \in M^{\perp}$ temos que

$$ {}^tPv_j = {}^tPu_j \text{ e } \operatorname{supp}(v_j) \subset K', \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.2.19}$$

De fato, a igualdade é imediata de (2.2.19) e a inclusão segue da $P-$convexidade. De (2.2.17) e (2.2.19) resulta $v_j \to 0$ em $\mathscr{E}'(\Omega)$. Pelo teorema 1.3.6 a imagem de P é fechada.

Escolhendo $K = \emptyset$ e $s \in \mathbb{R}$ qualquer em **(H.2.1),** temos que $N({}^tP) \subset H^r$ para algum $r \in \mathbb{R}$. Seja E_r o espaço vetorial $N({}^tP)$ com a topologia induzida por H^r. De modo análogo definimos o espaço E_{r-1}.

Utilizando **(H.1)** é possível mostrar que E_r e E_{r-1} são subespaços fechados de H^r e H^{r-1}, respectivamente (basta argumentar analogamente a prova de que E é um Espaço de Hilbert).

É claro que a aplicação identidade $i : E_r \to E_{r-1}$ é contínua e compacta. De modo análogo a prova de que a inclusão $E \subset H^r$ é contínua obtemos a continuidade de i^{-1}. Então a bola unitária de E_r é compacta e portanto $N({}^tP)$ tem dimensão finita.

Reciprocamente, suponha que $N({}^tP)$ tem dimensão finita e que P tem imagem fechada. Dados $s \in \mathbb{R}$ e $K \subset\subset \Omega$ arbitrários, seja $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que

$\operatorname{supp}({}^tPu) \subset K$ e ${}^tPu \in H^s$. Provaremos que $u \in H^r$, para algum r que só depende de s e K.

Seja $l = \dim(N({}^tP))$ e $\{u_1, u_2, ..., u_l\}$ uma base do espaço $N({}^tP)$. Como

$$\overline{P(C^\infty(\Omega))} = \left(N\left({}^tP\right)\right)^\circ,$$

segue da hipótese de P ter imagem fechada a seguinte igualdade:

$$P(C^\infty(\Omega)) = \bigcap_{j=1}^{l} N(u_j).$$

Como $\{u_1, u_2, ..., u_l\}$ é linearmente independente, de [Ru, Lema 3.9] resulta que existem $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_l \in C^\infty(\Omega)$ tais que

$$u_j(\theta_i) = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } u_j(\theta_j) = 1, i, j = 1, 2.., l. \tag{2.2.20}$$

Considere o operador $F : C^\infty(\Omega) \times \mathbb{C}^l \to C^\infty(\Omega)$ definido por

$$F(\phi, \alpha) = P\phi + \sum \alpha_j \theta_j,$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l)$. Mostraremos que F é uma aplicação sobrejetora.

De fato. Observe que

$${}^tFu = \left({}^tPu, u(\theta_1), u(\theta_2), ..., u(\theta_l)\right), \forall u \in \mathscr{E}'(\Omega),$$

logo, ${}^tF$ é uma aplicação injetiva e portanto F tem imagem densa.

Para mostrar que F tem imagem fechada, tome uma seqüência

$$\left\{\left(\phi^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, ..., \alpha_l^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset C^\infty(\Omega) \times \mathbb{C}^l$$

tal que

$$\lim_{k\to\infty}\left(P\phi^k + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j^k \theta_j\right) = \psi, \text{ em } C^\infty(\Omega).$$

Aplicando $u_1, u_2, ..., u_l$ sucessivamente ao limite acima, de (2.2.20) resulta $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_j^k \to u_j(\psi)$ e então

$$\lim_{k\to\infty} P\phi^k = \psi - \sum_{j=1}^{l} u_j(\psi)\,\theta_j, \text{ em } C^\infty(\Omega). \tag{2.2.21}$$

Como P tem imagem fechada, $\exists \phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} P\phi^k = P\phi, \text{ em } C^\infty(\Omega). \tag{2.2.22}$$

De (2.2.21) e (2.2.22) segue que $\psi = P\phi + \sum\limits_{j=1}^{l} u_j(\psi)\,\theta_j$ e portanto F tem imagem fechada.

Seja $\{K_N\}$ seqüência de compactos que esgota Ω e $\{g_N\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ uma seqüência tal que cada $g_N = 1$ em uma vizinhança de K_N. Dada $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que ${}^tPu \in H^s$.

Provaremos a seguir que, dado $N \in \mathbb{N}$, existem $N' \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ com a seguinte propriedade: $\forall f \in C^\infty(\Omega), \exists (\phi, \alpha) \in C^\infty(\Omega) \times \mathbb{C}^l$ tal que

$$P\phi + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \theta_j = f \text{ e } \|g_N \phi\|_N + \sum_{j=1}^{l} |\alpha_j| \leq C \|g_{N'} f\|_{N'}. \tag{2.2.23}$$

Aqui $\|\cdot\|_N$ denota a norma em H^N. De fato, dada $f \in C^\infty(\Omega)$ arbitrária, seja $(\phi, \alpha) \in C^\infty(\Omega) \times \mathbb{C}^l$ tal que $F((\phi, \alpha)) = f$.

Como F é sobrejetora e uma base de seminormas contínuas de $C^\infty(\Omega) \times \mathbb{C}^l$ é dada por $\{q_N\}_{N=1}^{\infty}$, sendo

$$q_N(\psi, \beta) = p_N(\psi) + \sum_{j=1}^{l} |\beta_j|, (\psi, \beta) \in C^\infty(\Omega) \times \mathbb{C}^l$$

e $p_N(\psi) = \|g_N \psi\|_N$, pelo teorema da aplicação aberta temos que $F((\phi, \alpha) + B_{q_N})$ é um subconjunto aberto de $C^\infty(\Omega)$, logo existem $N' \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$f + CB_{p_{N'}} \subset F((\phi, \alpha) + B_{q_N}).$$

Como $F(\phi, \alpha) = f$, a inclusão acima equivale a $q_N \leq C p_{N'} \circ F$. Daí segue (2.2.23).

Seja $K' \subset\subset \Omega$ dado por **(H.1)**. Tome $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $-N_0 \leq s$ e $g_{N_0} = 1$ em uma vizinhança de K'. Tome N' e $C > 0$ dado por (2.2.23) associado a N_0. Então $\forall f \in C^\infty(\Omega), \exists (\phi, \alpha)$ tal que

$$\begin{aligned} |u(f)| &= \left| u(P\phi) + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \theta_j \right| \\ &\leq |{}^tPu(\phi)| + \sum_{j=1}^{l} |\alpha_j| \, |u(\theta_j)| \\ &\leq C_1 \left(|{}^tPu(\phi)| + \sum_{j=1}^{l} |\alpha_j| \right) \end{aligned}$$

no qual $C_1 = \max\{1, |u(\theta_1)|, |u(\theta_2)|, ..., |u(\theta_l)|\}$. Como $\operatorname{supp}({}^tPu) \subset \operatorname{supp}(u) \subset K'$ temos que ${}^tPu(\phi) = {}^tPu(g_N \phi)$ e então

$$|u(f)| \leq C_1 \left(\left| {}^tPu(g_N \phi) \right| + \sum_{j=1}^{l} |\alpha_j| \right).$$

Mas ${}^tPu \in H^{-N_0} = \left(H^{N_0}\right)'$ então $\exists C_2 > 0$ tal que $|{}^tPu(\psi)| \leq C_2 \|\psi\|_{N_0}, \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Daí e de (2.2.23)

$$|u(f)| \leq C' \|g_{N'} f\|_{N'}, \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

Tomando $f \in C_0^\infty(\Omega)$ resulta que u define um funcional linear em $C_0^\infty(\Omega)$ que é contínuo na topologia de $H^{N'}$. Portanto $u \in H^{-N'}$. ■

Lema 2.2.4 *Seja L um campo real definido em Ω.*
(i) *L satisfaz **(H.2.2)** se, e somente se, L não tem órbita pré-compacta.*
(ii) (H.2.2) $\Rightarrow$ ***(H.2.1).***

Demonstração.
(i) Suponha que Γ seja órbita pré-compacta de L. Pelo Lema 2.1.3 existe $0 \neq u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que ${}^{t}Lu = 0$, contradizendo **(H.2.2)**. A recíproca segue do Teorema 1.4.5.
(ii) De **(i)** resulta que L não tem órbita pré-compacta logo, do Teorema 1.4.4 segue **(H.2.1)**. ■
Demonstração do Teorema 2.2.1. A condição necessária é imediata do Teorema 1.3.10. Suponha **(H.1)**, **(H.2.1)** e **(H.2.2)**. Do Lema 2.2.3 resulta que P tem imagem fechada; como **(H.2.2)** equivale a $\overline{P(C^{\infty}(\Omega))} = C^{\infty}(\Omega)$, segue a condição suficiente. ■
Demonstração do Teorema 2.2.2. Resulta do Teorema 2.2.1 e Lema 2.2.4-(ii). ■

Capítulo 3

Exemplos e contra-exemplos

Este capítulo contém exemplos que ilustram os resultados do capítulo anterior. Na primeira seção mostramos que a $P-$convexidade não implica em resolubilidade semiglobal no caso em que P é um campo real não-singular.

Na segunda seção apresentamos um exemplo que mostra que a Proposição 2.1.1 não se estende para operadores do tipo $P = L + c$ quando c não tem suporte compacto.

O exemplo apresentado na terceira seção mostra que em dimensão ≥ 3, a convexidade com respeito às trajetórias não implica na $P-$convexidade para suportes singulares, mesmo no caso em que P é um campo real não-singular definido em um aberto simplesmente conexo.

Na quarta seção mostramos a independência entre as condições do Teorema 2.2.1.

3.1 $P-$convexidade para suportes singulares e resolubilidade semiglobal

O operador de Lewy é um campo complexo que mostra que a $P-$convexidade para suportes singulares não implica em resolubilidade local (veja [T1, Proposição 21.4]). Nesse sentido, exibimos uma família de campos reais não-singulares que não são $C^\infty-$semiglobalmente resolúveis, mas para os quais vale a $P-$convexidade para suportes singulares.

Lema 3.1.1 *Seja*

$$L = (-x_3 + x_1 f_1)\,\partial_1 + f_2 \partial_2 + (x_1 + x_3 f_3)\,\partial_3$$

um campo real definido em $\mathbb{R}^3$ *que possui as seguintes propriedades:*

$$f_2^{-1}(\{0\}) = S = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_3^2 = 1 \text{ e } x_2^2 = 0\},$$

$$f_1 = f_3 = 0 \text{ em } S \text{ e } \exists K_1 \subset\subset \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f_1, f_3 \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus K_1.$$

Então $\mathbb{R}^3$ *é* $L-$*convexo para suportes singulares.*

Demonstração. A demonstração segue das etapas 1 e 2 abaixo e do Teorema 2.1.1.
Etapa 1. S é a única órbita pré-compacta de L.

De fato, como $\mathbb{R}^3\backslash S$ é conexo podemos supor que $f_2 > 0$ em $\mathbb{R}^3\backslash S$. Seja $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ órbita pré-compacta de L distinta de S. Utilizando o fato de que $\gamma_2' = f_2 \circ \gamma$ não é difícil ver que γ_2'' é uma função real limitada e então γ_2' é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Daí segue que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|\gamma_2'(t) - \gamma_2'(s)| < \frac{\epsilon}{2}$, se $|t-s| < \delta$. Fixado $0 < h < \delta$, do Teorema do Valor Médio segue que $\forall t \in \mathbb{R}, \exists \theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |\gamma_2'(t)| &\leq |\gamma_2'(t) - \gamma_2'(t+\theta h)| + \left|\tfrac{\gamma_2(t+h)-\gamma_2(t)}{h}\right| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \left|\tfrac{\gamma_2(t+h)-\gamma_2(t)}{h}\right|. \end{aligned}$$

Seja $c = \sup \gamma_2$. Como γ_2 é uma função crescente $\exists M > 0$ tal que $c - \frac{h\epsilon}{2} < \gamma_2(t) \leq c$, se $t \geq M$. Então $|\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)| < \frac{h\epsilon}{2}$ e portanto

$$|\gamma_2'(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ se } t \geq M,$$

ou seja, $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma_2'(t) = 0$. Analogamente provamos que $\lim\limits_{t\to-\infty} \gamma_2'(t) = 0$ de onde segue

$$\lim_{t\to\pm\infty} \gamma_2'(t) = 0. \tag{3.1.1}$$

Dados $x \in \alpha(\Gamma)$ e $y \in \omega(\Gamma)$ arbitrários, existem seqüências $t_j \to -\infty$ e $s_j \to +\infty$ tais que $\gamma(t_j) \to x$ e $\gamma(s_j) \to y$. Daí e de (3.1.1) resulta que $f_2(x) = f_2(y) = 0$ e portanto $x, y \in S$. Isso contradiz o fato de que γ_2 é uma função crescente e a demonstração da **Etapa 1** está concluída.
Etapa 2. $\mathbb{R}^3$ é convexo com respeito às trajetórias de L.

De fato, demonstraremos que dado $K \subset\subset \mathbb{R}^3$, todo intervalo de trajetória com extremidades em K está contido em

$$K' = \left\{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_3^2 \leq R^2\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^3; |x_2| \leq R\right\},$$

se $R > 0$ é tal que $K \cup K_1 \subset K'$.

Seja γ curva integral de L tal que $\gamma(a), \gamma(b) \in K$. Como $f_2 \neq 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus S$ não é difícil ver que

$$|\gamma_2(a)|, |\gamma_2(b)| \leq R \Rightarrow |\gamma_2(t)| \leq R, \forall t \in [a,b]. \tag{3.1.2}$$

Seja $r(t) = |(\gamma_1(t), \gamma_3(t))|^2$. De

$$r'(t) = 2\left(\gamma_1^2(t) f_1(\gamma(t)) + \gamma_3^2(t) f_3(\gamma(t))\right)$$

segue que $r'(t) \geq 0, \forall t \in [a,b]$ logo r é não-decrescente em $[a,b]$ e daí

$$r(a), r(b) \leq R^2 \Rightarrow r(t) \leq R^2, \forall t \in [a,b]. \tag{3.1.3}$$

De (3.1.2) e (3.1.3) segue que $\gamma(t) \in K', \forall t \in [a,b]$. ■

3.2 $P-$convexidade para suportes singulares no caso de operadores de ordem um com símbolo principal real

Seja L um campo real e $c \in C^{\infty}(\Omega)$. Da Observação 2.1.6 segue que a Proposição 2.1.1 se estende para operadores da forma $P = L + c$, quando c tem suporte compacto. O próximo exemplo mostra que tal extensão não é válida quando c não tem suporte compacto.

Lema 3.2.1 *Seja*

$$L = -x_2\partial_1 + x_1\partial_2, x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.2.4}$$

c uma constante complexa e $P = L + c$. Então $\mathbb{R}^2$ é $P-$convexo para suportes singulares se, e somente se, $c \notin i\mathbb{Z}$.

Demonstração. Suponha que $c \notin i\mathbb{Z}$. Pela Observação 1.3.9 é suficiente demonstrar que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é $P-$convexo para suportes singulares.

Para isso, considere $I = (0, +\infty)$. A aplicação que associa cada $(t, x) \in S^1 \times I$ ao ponto $tx \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, conjuga os campos $\frac{\partial}{\partial t}|_{S^1 \times I}$ e $L|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$. Logo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é $P-$convexo para suportes singulares se, e somente se, $S^1 \times I$ é $\frac{\partial}{\partial t}-$convexo para suportes singulares.

É possível verificar que ${}^tP = -\frac{\partial}{\partial t} + c$, logo

$$\widehat{{}^tPu}_k = (c - ik)\,\widehat{u}_k, k \in \mathbb{Z}, u \in \mathscr{E}'\left(S^1 \times I\right). \tag{3.2.5}$$

Aqui $\widehat{v}_k$ denota o $k-$ésimo coeficiente de Fourier na variável t de $v \in \mathscr{E}'(S^1 \times I)$. Além disso verifica-se que

$$\begin{gathered} \operatorname{singsupp}(u) \subset S^1 \times [a,b] \Leftrightarrow \operatorname{singsupp}(\widehat{u}_k) \subset [a,b], \\ k \in \mathbb{Z}, u \in \mathscr{E}'(S^1 \times I), [a,b] \subset I. \end{gathered} \tag{3.2.6}$$

Como $c \notin i\mathbb{Z}$ de (3.2.5) segue que

$$\operatorname{singsupp}\left(\widehat{{}^tPu}_k\right) = \operatorname{singsupp}(\widehat{u}_k), k \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.7}$$

Dado $K \subset\subset S^1 \times I$, seja $[a,b] \subset I$ um intervalo limitado tal que $K \subset S^1 \times [a,b]$ e defina $K' = S^1 \times [a,b]$. Dada $u \in \mathscr{E}'(S^1 \times I)$ tal que $\operatorname{singsupp}({}^tPu) \subset K$, de (3.2.5), (3.2.6) e (3.2.7) segue que $\operatorname{singsupp}(u) \subset K'$.

Reciprocamente, suponha que $c \in i\mathbb{Z}$. Demonstraremos que

$$\forall x \in I, \exists u \in \mathscr{E}'\left(S^1 \times I\right) \text{ tal que } {}^tPu = 0 \text{ e } \operatorname{singsupp}(u) = S^1 \times \{x\}. \tag{3.2.8}$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ defina

$$\widehat{u}_k = \begin{cases} \delta_x, \text{ se } k = c/i, \\ 0, \text{ em caso contrário.} \end{cases}$$

Então

$$\operatorname{singsupp}(\widehat{u}_k) = \begin{cases} \{x\}, \text{ se } k = c/i, \\ \emptyset, \text{ em caso contrário.} \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Como $c \in i\mathbb{Z}$, de (3.2.5), (3.2.6) e (3.2.9) segue (3.2.8). ∎

3.3 $P-$convexidade para suportes singulares e convexidade com respeito as trajetórias

Suponha que L seja um campo real não-singular. Da Observação 2.1.8 segue que se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo então a $L-$convexidade para suportes singulares é equivalente a convexidade com respeito as trajetórias. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ não é simplesmente conexo então a convexidade com respeito às trajetórias não implica em $L-$convexidade para suportes singulares. Tome por exemplo o campo definido em (3.2.4) e $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Demostramos a seguir que em dimensão ≥ 3, mesmo em domínios simplesmente conexos, convexidade com respeito às trajetórias não implica em $L-$convexidade para suportes singulares.

Proposição 3.3.1 *Existe um campo real não-singular L tal que $\mathbb{R}^3$ é convexo com respeito às trajetórias L, no entanto, $\mathbb{R}^3$ não é $L-$convexo para suportes singulares.*

A demonstração da Proposição 3.3.1 segue das etapas **(S.1), (S.2)** e **(S.3)** descritas abaixo:

(S.1) Construção de uma 'folheação singular' $\{T_R\}_{0\leq R\leq 1}$ de $\mathbb{R}^3$, na qual as folhas T_R são toros bidimensionais se $0 < R < 1$, o eixo y se $R = 0$ e a circunferência $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+z^2 = 1, y = 0\}$ se $R = 1$.
(S.2) Construção de um campo L em $\mathbb{R}^3$ tal que:
   (S.2.1) L é não-singular e cada T_R é invariante pelas órbitas de L,
   (S.2.2) em cada T_R, o minimal invariante S_R é uma circunferência,
   (S.2.3) $\mathbb{R}^3$ é convexo com respeito às trajetórias de L
e
   (S.2.4) o raio S_R tende a $+\infty$ quando $R \to 0$.
(S.3) construção de uma família $\{u_R\}_{0<R<1}$ de soluções da equação homogênea ${}^tLu_R = 0$, tal que $\operatorname{singsupp}(u_R) = S_R, \forall R \in (0,1)$.

Em [Se], H. Seifert propôs a seguinte questão, a qual é conhecida como Conjectura de Seifert: todo campo de vetores suave na esfera S^3 tem uma órbita periódica. Esta conjectura foi demonstrada ser falsa para campos de classe C^1 por P. Schweitzer, veja [Sc], e mais tarde, para campos de classe C^∞ por K. Kuperberg, veja [Ku]. Um exemplo no qual esta conjectura é verdadeira foi nosso ponto de partida para encontrar o campo de vetores da Proposição 3.3.1.

Na Subseção 3.3.1 é realizada a etapa **(S.1)** e um campo auxiliar $\tilde{L}$ é definido em um subconjunto próprio de $\mathbb{R}^3$. Tal campo é usado na etapa **(S.2)**. Na Subseção 3.3.2 estendemos $\tilde{L}$ para $\mathbb{R}^3$ e **(S.3)** é então realizada para esta extensão.

Agradecemos ao Prof. Dr. Carlos Gutierrez do ICMC-USP pela sugestão na escolha da folheação singular usada aqui.

3.3.1 A folheação singular e o campo auxiliar

Usamos o termo folheação singular pois nesse caso as folhas não têm todas a mesma dimensão. Para $0 < R < 1$, a família de toros da folheação singular é invariante por rotações em torno do eixo y. Portanto, começamos nossa construção escolhendo uma família de circunferências no plano $z = 0$ com raio tendendo ao infinito e centros contidos no eixo x. Além disso, a circunferência se degenera no ponto $(1, 0, 0)$ quando $R = 0$ e no eixo y quando $R = 1$. Mais precisamente, para cada $0 < R < 1$ escolhemos a circunferência de centro $\left(\frac{1}{R}, 0, 0\right)$ e raio $\frac{\sqrt{1-R^2}}{R}$ no plano $z = 0$. Fazendo a rotação de tais circunferências em torno do eixo y temos a folheação da etapa **(S.1).**

Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, x^2 + z^2 \geq 1\}$ e $\mathcal{R} = \mathbb{R}^3 \setminus S$. Parametrizamos $\mathcal{R}$ pelo cilindro sólido

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 < 1, |y| < \pi\right\}$$

sob a transformação

$$F(x, y, z) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2 - z^2}\cos y}\left(x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}\sin y, z\right), (x, y, z) \in C.$$

Claramente F é um $C^\infty-$difeomorfismo tal que $F(C) = \mathcal{R}$ e sua inversa é dada por

$$F^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, h(x, y, z), \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\right),$$

sendo

$$h(x, y, z) = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2-1}\right), \text{ se } x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ \\ \operatorname{arccot}\left(-\frac{x^2+y^2+z^2-1}{2y}\right), \text{ se } y > 0, \\ \\ \operatorname{arccot}\left(-\frac{x^2+y^2+z^2-1}{2y}\right) - \pi, \text{ se } y < 0. \end{cases}$$

Em C consideramos a folheação singular cujas folhas bidimensionais são dadas por $C_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 = R, |y| < \pi\}$ se $0 < R < 1$ e a folha unidimensional é $C_0 = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3; |y| < \pi\}$. Em $\mathcal{R}$ também definimos uma folheação singular: para cada $0 < R < 1$ considere as folhas dadas por $T'_R = T_R \setminus S_R$, sendo

$$S_R = \left\{\frac{1 + \sqrt{1 - R^2}}{R}(\cos t, 0, \sin t); t \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Para $R = 0$ tomamos T'_0 como o eixo y. Portanto o difeomorfismo F transforma cada folha C_R na folha T'_R, para todo R.

Em C consideramos o campo

$$L_C = -z\partial_1 + f(x, y, z)\partial_2 + x\partial_3,$$

aqui $f(x, y, z) = g(\pi^2 - y^2)\, g(x^2 + z^2 - 1)$, sendo $g(t) = \exp(-t^{-1})$, se $t > 0$ e $g(t) = 0$, se $t \leq 0$. Este campo de vetores tem as seguintes propriedades:

(S.2.1') L_C é não-singular e cada folha C_R, com $0 \leq R < 1$, é invariante pelas órbitas de L_C,
(S.2.2') L_C não tem órbitas periódicas
e
(S.2.3') C é convexo com respeito às trajetórias de L_C.

O campo em $\mathcal{R}$ conjugado a L_C por F é

$$\tilde{L} = \left(-z + xyg_1g_2\right)\partial_1 + \frac{1}{2}\left(y^2 - \left(x^2 + z^2 - 1\right)\right)g_1g_2\partial_2 + \left(x + yzg_1g_2\right)\partial_3,$$

sendo $g_1, g_2 : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_1\left(x,y,z\right) = g\left(\pi^2 - h^2\left(x,y,z\right)\right), g_2\left(x,y,z\right) = g\left(1 - \frac{4\left(x^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}\right).$$

Como cada C_R é invariante pelas órbitas de L_C e F preserva as folhas, as propriedades **(S.2.1')-(S.2.3')** são transportadas para $\tilde{L}$ como:

(S.2.1") $\tilde{L}$ é não-singular e cada folha T'_R é invariante pelas órbitas de $\tilde{L}$,
(S.2.2") $\tilde{L}$ não tem órbitas periódicas
e
(S.2.3") $\mathcal{R}$ é convexo com respeito às trajetórias de $\tilde{L}$.

Isso conclui a construção do campo auxiliar $\tilde{L}$.

3.3.2 As etapas (S.2) e (S.3)

Primeiro demonstramos que o campo $\tilde{L}$ tem uma única extensão suave, que chamamos de L, para $\mathbb{R}^3$. Daí segue que L tem as propriedades de **(S.2)**. A fim de estender $\tilde{L}$ para $\mathbb{R}^3$ suavemente, pela sua expressão vemos que é suficiente estendermos o produto g_1g_2 para $\mathbb{R}^3$ suavemente. Observe que g_1 é limitada e que $g_1\left(x,y,z\right) \to 0$ quando $\left(x,y,z\right)$ tende a qualquer ponto de $S \setminus T_1$. Entretanto qualquer extensão de g_1 para $\mathbb{R}^3$ não pode ser contínua nos pontos de T_1. Escolhemos a extensão G_1 de g_1 para $\mathbb{R}^3$ definindo $G_1 = 0$ em S.

A identidade

$$1 - \frac{4\left(x^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = \frac{\left(x^2+z^2-1\right)^2 + y^2\left(2\left(x^2+z^2\right)+y^2+2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}$$

implica

$$1 - \frac{4\left(x^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x,y,z\right) \in T_1.$$

Logo

$$G_2\left(x,y,z\right) = g\left(1 - \frac{4\left(x^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}\right).$$

é a extensão contínua de g_2 para $\mathbb{R}^3$. Mesmo sabendo que G_1 não é contínua em T_1, das propriedades de g segue que $G_1 \cdot G_2$ é suave, como mostra o

Lema 3.3.2 $G_1 \cdot G_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Como mencionado acima, $G_1 \in C^0(\mathbb{R}^3 \setminus T_1)$. Observe que $\partial_2 g_1$ é da forma

$$p_1\left(\frac{1}{\pi^2 - h^2}\right) q_1 h g\left(\pi^2 - h^2\right), \tag{3.3.10}$$

sendo p_1 um polinômio e $q_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, logo para cada $(x', 0, z') \in S \setminus T_1$ temos

$$\partial_2 g_1(x, y, z) \to 0 \text{ se } (x, y, z) \to (x', 0, z'). \tag{3.3.11}$$

De [H1, Corolário 1.1.2] segue que $\partial_2 G_1(x', 0, z')$ existe e

$$\partial_2 G_1 = 0 \text{ em } S \setminus T_1. \tag{3.3.12}$$

A fim de demonstrar que $G_1 \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus T_1)$, é suficiente observar que para cada $(x', 0, z') \in S \setminus T_1$, de (3.3.11) e (3.3.12) segue que $\partial_2 G_1(x, y, z)$ é pequeno se $(x, y, z) \in \mathcal{R} \cup S$ está suficientemente próximo de $(x', 0, z')$.

De argumentos como os apresentados acima segue:
(i) a existência e continuidade de $\partial_1 G_1$ e $\partial_3 G_1$ em $S \setminus T_1$. Também que $G_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus T_1)$, uma vez que as derivadas de ordem superior de G_1 são somas cujas parcelas são do tipo (3.3.10);
(ii) $G_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, pois suas derivadas são somas cujas parcelas são do tipo

$$p_2\left(\frac{1}{t}\right) q_2 g(t)$$

em $\mathbb{R}^3 \setminus T_1$, sendo $t = 1 - 4(x^2 + z^2)/(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2$, p_2 um polinômio e $q_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$;
(iii) $G_1 \cdot G_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, de **(i)** e **(ii)**. ■

O Lema 3.3.2 implica que, para termos uma extensão L de $\widetilde{L}$ em $\mathbb{R}^3$, basta definirmos $L = -z\partial_1 + x\partial_3$ em S. Desta expressão e de **(S.2.1")-(S.2.3")** segue **(S.2)**. Note que **(S.3)** segue do Lema 2.1.3-(i).

3.4 A independência entre as condições do Teorema 2.2.1

Da Proposição 2.1.1 resulta que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ não é ∂_1-convexo para suportes. Além disso, do Teorema 1.4.5 segue que

$$u \in \mathscr{E}'\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right), \partial_1 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Além disso, tomando um campo real em $\mathbb{R}^2$ com uma única órbita periódica, temos um exemplo de operador que satisfaz **(H.1)** mas não satisfaz **(H.2.2).**

3.4.1 Independência entre (H.1) e (H.2.1)

Nesta subseção demonstramos que, mesmo no caso de campos reais não singulares, as condições **(H.1)** e **(H.2.1)** são independentes.

Lema 3.4.1 *A condição **(H.2.1)** é satisfeita se $L = \partial_1$ e $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, no entanto, Ω não é $L-$convexo para suportes.*

Demonstração. Da Proposição 2.1.1 e da Observação 2.1.5 segue que Ω não é $L-$convexo para suportes. Utilizando [Hö, Teorema 8.7.1] é possível demonstrar a validade de **(H.2.1)** para este caso. ∎

Proposição 3.4.2 *Suponha que no Lema 3.1.1 as funções f_1, f_2 e f_3 sejam flat em S. Então $\mathbb{R}^3$ é $L-$convexo para suportes e além disso, existem $s \in \mathbb{R}$ e uma seqüência $\{u_j\} \subset \mathscr{E}'(\mathbb{R}^3)$ tais que*

$$^tLu_j = 0 \text{ e } u_j \notin H^{s-j}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

*Em particular L não tem a propriedade **(H.2.1)**.*

Um exemplo de funções f_1, f_2, f_3 como no Teorema 3.4.2 é

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = g\left(\left(x_1^2 + x_3^2 - 1\right)^2 + x_2^2\right), x \in \mathbb{R}^3$$

sendo $g(t) = \exp(-t^{-1})$ se $t > 0$ e $g(t) = 0$ se $t \leq 0$.

A demonstração da Proposição 3.4.2 requer alguns resultados preliminares, aqui denominados Lema 3.4.3 e Lema 3.4.4. No lema abaixo $[X, Y] = XY - YX$ é o comutador dos campos X e Y.

Lema 3.4.3 *Seja W o campo definido em $\mathbb{R}^3$ por*

$$W = x_1\partial_1 + b\partial_2 + x_3\partial_3,$$

no qual $b \in \mathbb{R}$ é uma constante. Sob as hipóteses da Proposição 3.4.2 temos que $[L, W^j] = 0$ em $S, \forall j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Escreva $L = L_0 + L_1$ sendo $L_0 = -x_3\partial_1 + x_1\partial_3$ e

$$L_1 = x_1f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + x_3f_3\partial_3. \tag{3.4.13}$$

Inicialmente mostraremos por indução que

$$\left[L_0, W^j\right] = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.4.14}$$

É fácil ver que $[L_0, W] = 0$ em $\mathbb{R}^3$ e, supondo $[L_0, W^j] = 0$ em $\mathbb{R}^3$ temos

$$W^{j+1}L_0 = W^j(WL_0) = W^j(L_0W) = \left(W^jL_0\right)W = \left(L_0W^j\right)W \text{ em } \mathbb{R}^3$$

e isso prova (3.4.14).

Como $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ em S, de (3.4.13) é imediato que

$$L_1 W^j = 0 \text{ em } S, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.4.15}$$

Por outro lado, da regra de Leibniz segue que

$$\begin{aligned} W^j L_1 = \sum_{k=0}^{j} \tfrac{j!}{k!(j-k)!} \quad & \left[W^k f_1 \cdot W^{j-k} (x_1 \partial_1) + \right. \\ & \left. W^k f_2 \cdot W^{j-k} \partial_2 + W^k f_3 \cdot W^{j-k} (x_3 \partial_3) \right], \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e como f_j é flat em $S, j = 1, 2, 3$, isso implica que

$$W^j L_1 = 0 \text{ em } S, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.4.16}$$

De (3.4.14), (3.4.15) e (3.4.16) segue o resultado. ■

Lema 3.4.4 *Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^3)$ definida por*

$$u(\phi) = \int_S \phi, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

e W o campo dado pelo Lema 3.4.3. Considere a seqüência $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}'(\mathbb{R}^3)$ definida por $u_j = {}^t W^j u, j \in \mathbb{N}$. Então ${}^t L u_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como na **Etapa 1** da demonstração do Lema 2.1.3 temos ${}^t L u = 0$ e $\operatorname{supp}(u) = S$ e

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in T^*(\Omega); x \in S, \xi \neq 0 \text{ e } L(x, \xi) = 0\}. \tag{3.4.17}$$

Logo $\operatorname{singsupp}(u) = S$.

Dados $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $j \in \mathbb{N}$, do Lema 3.4.3 e de $\operatorname{supp}(u) = S$ resulta

$$\left\langle {}^t L u_j, \phi \right\rangle = \left\langle u, W^j L \phi \right\rangle = \left\langle u, L W^j \phi \right\rangle.$$

De ${}^t L u = 0$ segue que ${}^t L u_j = 0$. ■

Demonstração da Proposição 3.4.2. Seja W o campo definido no Lema 3.4.3. Mostramos a seguir que, com uma escolha conveniente da constante b, a seqüência $\{u_j\}$ considerada no Lema 3.4.4 satisfaz a conclusão da Proposição 3.4.2.

Dado $j \in \mathbb{N}$, de $\operatorname{singsupp}(u) \neq \emptyset$ resulta que $\exists s \in \mathbb{R}$ tal que $u \notin H^s$. Do Teorema 1.4.3 segue que $u \notin H^s_{loc}$ em algum ponto $(x, \xi) \in T^*(\Omega) \setminus 0$. Observe que $(x, \xi) \in WF(u)$ pois caso contrário, escrevendo $u = 0 + u$ teríamos uma contradição com a Definição 1.4.2. Escolha b na definição de W satisfazendo

$$(x, \xi) \in WF(u) \setminus \operatorname{Char}(W) = WF(u) \setminus \operatorname{Char}\left(W^j\right).$$

Pelo Teorema 1.4.3 segue que $u_j \notin H^{s-j}_{loc}$ em (x, ξ) e portanto $u_j \notin H^{s-j}$.

Para justificar a escolha da constante b observamos que (3.4.17) implica em

$$\left\{\eta \in \mathbb{R}^3; (x,\eta) \in WF(u)\right\} = \pi \setminus \{0\},$$

sendo π o plano que passa pela origem e tem vetor normal $(-x_3, 0, x_1)$. Por outro lado

$$\left\{\eta \in \mathbb{R}^3; (x,\eta) \in \mathrm{Char}(W)\right\} = \alpha \setminus \{0\},$$

sendo α o plano que passa pela origem e tem vetor normal (x_1, b, x_3). Fazendo uma rotação em torno no eixo η_2, podemos supor que π é o plano $\eta_3 = 0$ e α o plano normal a $(1, b, 0)$ que passa pela origem. De $(x,\xi) \in WF(u)$ resulta que $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \pi \setminus \{0\}$ e daí $\xi_3 = 0$. Escolhendo então $b = 0$ caso $\xi_1 \neq 0$ e $b \neq 0$ caso $\xi_1 = 0$ temos que $\xi \notin \alpha$ e portanto $(x,\xi) \notin \mathrm{Char}(W)$. Isso conclui a demonstração da Proposição 3.4.2 ■

3.4.2 Independência entre (H.2.1) e (H.2.2)

Nesta subseção demonstramos a independência das condições **(H.2.1)** e **(H.2.2)** com os seguintes resultados:

Proposição 3.4.5 *Seja $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Existe um campo real não-singular em Ω tal que vale **(H.1)** e **(H.2.1)** mas não vale **(H.2.2)**.*

Proposição 3.4.6 *Seja $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Existe um campo real não-singular em Ω e uma constante real $c \neq 0$ tal que $P = L + c$ satisfaz **(H.1)** e **(H.2.2)** mas não satisfaz **(H.2.1)**.*

Observe que, para que as conclusões das proposições 3.4.5 e 3.4.6 sejam válidas, não se pode considerar um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que seja simplesmente conexo. De fato, se L é um campo real não-singular definido em um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ então, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, L não tem órbitas pré-compactas e portanto valem as condições **(H.2.1)** e **(H.2.2)**. Observe ainda que, pelo Lema 2.2.4, para que a conclusão da Proposição 3.4.6 seja válida é necessário que $c \neq 0$.

Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função real satisfazendo $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ e L o campo definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por

$$L = \left(x_2 + x_1 f\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right)\partial_1 + \left(-x_1 + x_2 f\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right)\partial_2. \tag{3.4.18}$$

Para cada constante real c defina $P = L + c$.

Observe que S^1 é a única órbita pré-compacta de L. Como no Lema 3.1.1 demonstra-se **(H.1)** para L e P. Pelo Lema 2.2.3, a Proposição 3.4.5 é conseqüência do seguinte resultado:

Se *a origem é um zero de ordem finita de f* então *L tem imagem fechada e $N({}^tL)$ tem dimensão finita.*

Observe que L é um operador em $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)$, logo $N\left({}^tL\right) \subset \mathscr{E}'\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)$. Seja $I = (0, +\infty)$. É possível demostrar que L é $C^{\infty}-$conjugado ao campo

$$\widetilde{L} = \frac{\partial}{\partial t} + a\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x}, (t, x) \in S^1 \times I, \tag{3.4.19}$$

no qual $a \in C^{\infty}\left(I\right)$ é definida por $a\left(x\right) = xf\left(1 - x^2\right)$. Então $a^{-1}\left(\{0\}\right) = \{1\}$ e $x = 1$ é um zero de ordem m de a se, e somente se, a origem é um zero de ordem m de f. Portanto a Proposição 3.4.5 é conseqüência do seguinte resultado:

Proposição 3.4.7 *Se $x = 1$ é um zero de ordem finita $m \geq 1$ de a então $\widetilde{L}$ tem imagem fechada e $N\left({}^t\widetilde{L}\right)$ tem dimensão finita.*

Observe que $\widetilde{L}$ é um operador em $C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)$, logo $N\left({}^t\widetilde{L}\right) \subset \mathscr{E}'\left(S^1 \times I\right)$. A demonstração da Proposição 3.4.7 requer alguns resultados preliminares. Defina E como o subespaço de $\mathscr{E}'\left(S^1 \times I\right)$ gerado por

$$\left\{1_t \otimes \delta_1^{(j)}\right\}_{0 \leq j \leq m-1}.$$

Lema 3.4.8 *Sob as hipóteses da Proposição 3.4.7 temos que*

$$\{0\} \neq E \subset N\left({}^t\widetilde{L}\right).$$

Demonstração. Para cada $\phi \in C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)$ e $j = 0, 1, ..., m-1$ verifica-se que

$$\begin{aligned} {}^t\widetilde{L}\left(1_t \otimes \delta_1^{(j)}\right)(\phi) \quad &= \quad (-1)^j \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \phi\left(e^{is}, x\right)|_{x=1}\, ds + \\ & \quad\quad (-1)^j \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(a\left(x\right) \phi\left(e^{is}, x\right)\right)|_{x=1}\, ds. \end{aligned}$$

A primeira integral do lado direito é zero pois o integrando é uma função $2\pi-$periódica. Como a tem um zero de ordem $m \geq 1$ em $x = 1$ segue que

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(a\left(x\right) \phi\left(t, x\right)\right)|_{x=1} = 0$$

e, portanto, a segunda integral também é zero. ∎

Lema 3.4.9 *Sob as hipóteses da Proposição 3.4.7, $\forall g \in E^{\circ}, \exists \psi \in C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)$ tal que $\widetilde{L}\psi - g$ é flat em $S^1 \times \{1\}$.*

A demonstração do lema acima é análoga a prova de [BP, Lema 2.1] e por isso será omitida. A demonstração do lema abaixo é baseada na demonstração de [BP, Lema 2.2].

Lema 3.4.10 *Sob as hipóteses do Teorema 3.4.7, para cada $g \in C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)$, com g flat em $S^1 \times \{1\}$, existe $\psi \in C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)$ tal que $\widetilde{L}\psi = g$.*

Demonstração. Utilizando série parcial de Fourier na variável t verifica-se que

$$\widetilde{L}\psi\left(t,x\right)=g\left(t,x\right),\left(t,x\right)\in S^{1}\times I$$

equivale a

$$a\left(x\right)\frac{d}{dx}\widehat{\psi}_{k}\left(x\right)+ik\widehat{\psi}_{k}\left(x\right)=\widehat{g}_{k}\left(x\right),x\in I,k\in\mathbb{Z}. \tag{3.4.20}$$

Dividimos o restante da demonstração em duas etapas.

Etapa 1. Se $k=0$ então (3.4.20) tem solução .

De fato, se $k=0$ então (3.4.20) se escreve como

$$a\left(x\right)\frac{d}{dx}\widehat{\psi}_{0}\left(x\right)=\widehat{g}_{0}\left(x\right),x\in I. \tag{3.4.21}$$

Como g é flat em $S^{1}\times\{1\}$, temos que $\widehat{g}_{k}$ é flat em $x=1,\forall k\in\mathbb{Z}$. Daí e da hipótese de a se anular de ordem finita em $x=1$ segue que $\frac{\widehat{g}_{0}}{a}\in C^{\infty}\left(I\right)$. Então a função $\widehat{\psi}_{0}\left(x\right)=\int\limits_{1}^{x}\frac{\widehat{g}_{0}}{a}$ é de classe C^{∞} em I e é claramente solução de (3.4.21).

Etapa 2. Se $k\neq0$ então (3.4.20) tem solução .

De fato, escolha $y_{1}\in I_{1}=(0,1)$ e $y_{2}\in I_{2}=(1,+\infty)$ arbitrários e defina

$$A_{j}\left(x\right)=\int\limits_{y_{j}}^{x}\frac{1}{a},x\in I_{j},j=1,2.$$

Para cada $j=1,2$ e $k\in\mathbb{Z}$ as funções $e^{ikA_{j}}$ são suaves e limitadas em I_{j}. Daí segue que a função

$$h_{k}\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\widehat{g}_{k}(x)}{a(x)}e^{ikA_{j}(x)},x\in I_{j},j=1,2,\\ 0,x=1\end{cases}$$

é suave em I e flat em $x=1$.

Então, para cada $k\in\mathbb{Z}$, a função

$$\widehat{\psi}_{k}\left(x\right)=\begin{cases}e^{-ikA_{j}(x)}\int\limits_{1}^{x}h_{k},x\in I_{j},j=1,2,\\ 0,x=1.\end{cases}$$

é suave em I, é flat em $x=1$ e satisfaz (3.4.20). ■

Demonstração da Proposição 3.4.7. Do Lema 3.4.8 segue que $\widetilde{L}$ não satisfaz **(H.2.2)** e que

$$N\left({}^{t}P\right)^{\circ}\subset E^{\circ}. \tag{3.4.22}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Hahn-Banach

$$\overline{\widetilde{L}\left(C^{\infty}\left(S^{1}\times I\right)\right)}=N\left({}^{t}P\right)^{\circ}. \tag{3.4.23}$$

De (3.4.22) e (3.4.23) resulta

$$\overline{\widetilde{L}\left(C^{\infty}\left(S^{1}\times I\right)\right)}\subset E^{\circ}. \tag{3.4.24}$$

Por outro lado, dos lemas 3.4.9 e 3.4.10 segue que

$$E^{\circ}\subset\widetilde{L}\left(C^{\infty}\left(S^{1}\times I\right)\right). \tag{3.4.25}$$

De (3.4.24) e (3.4.25) resulta que $\widetilde{L}$ tem imagem fechada.

Para concluir a demonstração é suficiente demostrar que

$$E=N\left({}^{t}P\right). \tag{3.4.26}$$

Suponha que $\exists v\in N\left({}^{t}P\right)\setminus E$. Por [Ru, Lema 3.9], $\exists g\in E^{\circ}$ tal que $v\left(g\right)\neq 0$. De (3.4.25) segue que $\exists\phi\in C^{\infty}\left(S^{1}\times I\right)$ tal que $\widetilde{L}\phi=g$. Então

$$v\left(\widetilde{L}\phi-g\right)=0.$$

Mas de $v\in N\left({}^{t}\widetilde{L}\right)$ resulta que $v\left(\widetilde{L}\phi\right)=0$ e portanto $v\left(g\right)=0$, o que é um absurdo. ■

A demonstração de (3.4.26) foi feita utilizando argumentos como os apresentados em [BCP, Proposição 4.1]. Passamos agora a demonstração da Proposição 3.4.6. Seja $\widetilde{P}=\widetilde{L}+c$ com $\widetilde{L}$ dado por (3.4.19). A Proposição 3.4.6 é conseqüência do seguinte resultado:

Proposição 3.4.11 *Suponha que a seja flat em $x=1, a>0$ em $(0,1)$ e que $c<0$. Então $N\left({}^{t}\widetilde{P}\right)=\{0\}$ e $\widetilde{P}$ não tem imagem fechada.*

Demonstração. A demonstração será dividida em duas etapas.
Etapa 1. $N\left({}^{t}\widetilde{P}\right)=\{0\}$.

De fato, considere $u\in\mathscr{E}'\left(S^{1}\times I\right)$ tal que ${}^{t}\widetilde{P}u=0$. Como

$${}^{t}\widetilde{P}v=-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(av\right)+cv, v\in\mathscr{E}'\left(S^{1}\times I\right)$$

utilizando série parcial de Fourier na variável t temos que ${}^{t}\widetilde{P}u=0$ é equivalente a

$$\left(a\widehat{u}_{k}\right)'+\left(ik-c\right)\widehat{u}_{k}=0, k\in\mathbb{Z}. \tag{3.4.27}$$

Logo, para demonstrar a **Etapa 1** é suficiente demonstrar que $\widehat{u}_{k}=0,\forall k\in\mathbb{Z}$. Como $S^{1}\times\{1\}$ é a única órbita pré-compacta de $\widetilde{L}$, do Teorema 1.4.5 segue que $\operatorname{supp}\left(u\right)\subset S^{1}\times\{1\}$ e daí $\operatorname{supp}\left(u_{k}\right)\subset\{1\},\forall k\in\mathbb{Z}$. Logo, dado $k\in\mathbb{Z}$ existem constantes $b_{j}\in\mathbb{C}$ e $m\in\mathbb{N}$ tais que

$$\widehat{u}_{k}=\sum_{j=0}^{m}b_{j}\delta_{1}^{(j)}, \tag{3.4.28}$$

sendo δ_1 a distribuição delta de Dirac suportada em $x = 1$. Substituindo (3.4.28) em (3.4.27) resulta que

$$\sum_{j=0}^{m} b_j \left(a\delta_1^{(j)}\right)' + (ik - c) \sum_{j=0}^{m} b_j \delta_1^{(j)} = 0.$$

O primeiro somatório é igual a zero pois a é flat em $x = 1$. Como $\left\{\delta_1^{(j)}\right\}_{0 \leq j \leq m}$ é linearmente independente resulta que

$$(ik - c)\, b_j = 0, j = 0, 1, ..., m.$$

Mas $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo $b_j = 0, j = 0, 1, ..., m$ e portanto $\widehat{u}_k = 0$.

Etapa 2. $\widetilde{P}$ não tem imagem fechada.

De fato, da **Etapa 1** segue que

$$\overline{\widetilde{P}\left(C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)\right)} = C^{\infty}\left(S^1 \times I\right).$$

Seja $\psi(t, x) = 1$. Então para demonstrar a **Etapa 2** é suficiente demonstrar que $\psi \notin \widetilde{P}\left(C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)\right)$. Suponha que $\exists \phi \in C^{\infty}\left(S^1 \times I\right)$ tal que $\widetilde{P}\phi = \psi$. Como

$$\widehat{\psi}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, k = 0, \\ 0, k \neq 0, \end{cases}$$

$\widetilde{P}\phi = \psi$ é equivalente a

$$a(x) \frac{d}{dx} \widehat{\phi}_k(x) + c\widehat{\phi}_k(x) = \frac{1}{2\pi}, k = 0, x \in I \tag{3.4.29}$$

e

$$a(x) \frac{d}{dx} \widehat{\phi}_k(x) + (ik + c)\, \widehat{\phi}_k(x) = 0, k \neq 0, x \in I$$

A equação (3.4.29) não tem solução suave em I. De fato, dado $y_0 \in (0, 1)$, defina

$$A(x) = \int_{y_0}^{x} \frac{1}{a(s)} ds, x \in (0, 1).$$

Como a é flat em $x = 1$ e $a > 0$ em $(0, 1)$, segue que $\frac{1}{a}$ não é integrável em $(0, 1]$, logo,

$$\lim_{x \to 1^-} A(x) = +\infty. \tag{3.4.30}$$

Utilizando fator integrante em (3.4.29) resulta que

$$\widehat{\phi}_0(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-cA(x)} \int_{y}^{x} \frac{1}{a(s)} e^{cA(s)} ds, x \in (0, 1).$$

Considere $x_0 \in (0, 1)$ tal que $C' = \int_{y}^{x_0} \frac{1}{a(s)} e^{cA(s)} ds > 0$. Então

$$\widehat{\phi}_0(x) \geq \frac{1}{2\pi} C' e^{-cA(x)}, x \geq x_0.$$

Como $c < 0$, de (3.4.30) resulta que $\widehat{\phi}_0$ não é contínua em $x = 1$. ■

Capítulo 4

Resolubilidade global para operadores reais de ordem um

Neste capítulo apresentamos um resultado de resolubilidade global para operadores da forma $P = L + c$, no qual L é um campo real definido em $\mathbb{R}^n$ com uma singularidade na origem e c é uma função real. Neste caso, condições sobre o valor de c na origem são necessárias para a resolubilidade. Fazemos ainda uma hipótese sobre os autovalores de $DL(0)$ que permitam a linearização de L em uma vizinhança da origem. Estas condições sobre $c(0)$ e $DL(0)$ são chamadas de 'condições de não-ressonância'.

Inicialmente, utilizamos o Teorema 1.3.1 e as condições de não-ressonância para resolver a equação $Pu = f$ em uma vizinhança da origem. Este é o resultado do Lema 4.1.2.

Depois, no Teorema 4.1.3, usamos os teoremas 1.1.7 e 1.3.3 para construir seções transversais globais de L em alguns subconjuntos próprios de $\mathbb{R}^n$. Utilizando então o Método das Características resolvemos a equação $Pu = f$ em $\mathbb{R}^n$, no caso em que $f = 0$ em uma vizinhança de zero.

4.1 Apresentação do resultado principal

Neste capítulo $P = L + c$, sendo L um campo real em $\mathbb{R}^n$ tal que $L(0) = 0$ e $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, salvo menção contrária. Aqui

$$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \phi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}\}.$$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n'}, \lambda_{n'+1}, ..., \lambda_n$ os n autovalores de $DL(0)$, no qual $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n'}$ são os autovalores reais e $\lambda_{n'+1}, ..., \lambda_n$ são os autovalores complexos (isto é, $\lambda_j \notin \mathbb{R}, j = n'+1, ..., n$) de $DL(0)$. Considere a condição de não-ressonância

$$c(0) \neq -\sum_{k=1}^{n} m_k \operatorname{Re}\lambda_k, \quad m_1, ..., m_{n'} \in \mathbb{N}, m_{n'+1}, ..., m_n \in 2\mathbb{N}. \qquad \textbf{(CNR 2)}$$

O principal objetivo deste capítulo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1 *Seja $P = L + c$ um operador tal que L é um campo real em $\mathbb{R}^n$ com um ponto singular na origem e $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Suponha*
(a) **(CNR 1)** *e* **(CNR 2)**,
(b) *a origem é a única órbita pré-compacta de L*
e
(c) *$\mathbb{R}^n$ é convexo com respeito às trajetórias de L,*
então

$$P(C^\infty(\mathbb{R}^n)) = C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Aqui **(CNR 1)** é como no Teorema 1.1.10. Note que podemos reformular **(CNR 2)** em termos do símbolo sub-principal $\sigma_{sub}(P)$ de P (veja (1.3.8) e (1.3.9)) do seguinte modo:

$$\sigma_{sub}(P)(0,\xi) \neq -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} + m_k\right)\operatorname{Re}\lambda_k, \quad m_1, ..., m_{n'} \in \mathbb{N}, m_{n'+1}, ..., m_n \in 2\mathbb{N}. \tag{\textbf{CNR 2}$'$}$$

Note que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ são os autovalores da linearização de $\nabla_\xi \sigma_{princ}(P)$ na origem. Observe que, nesse caso, $\sigma_{sub}(P)$ é invariante por mudança de coordenadas nos pontos do fibrado contangente que são da forma $(0, \xi)$, uma vez que tais pontos são zeros de ordem dois de $\sigma_{princ}(P)$.

O Teorema 4.1.1 segue facilmente da Observação 1.1.11 e dos seguintes resultados:

Lema 4.1.2 *Seja P um operador com o no Teorema 4.1.1. Suponha* **(CNR 1)** *e* **(CNR 2)**. *Então $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Pu = f$ em um vizinhança da origem.*

Teorema 4.1.3 *Seja $P = L + c$ um operador tal que L é um campo real em $\mathbb{R}^n$ e $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se além das hipóteses* **(b)** *e* **(c)** *do Teorema 4.1.1 temos que*
(a') *a origem é um ponto singular hiperbólico de L*
então $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = 0$ em uma vizinhança da origem $\exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $u = 0$ em uma vizinhança de zero, tal que $Pu = f$.

Observe que no Teorema 4.1.3, c pode assumir valores complexos.

4.2 Demonstração do Lema 4.1.2

Nesta seção, usamos a condição **(CNR 2)** para a resolver a equação $Pu = f$ flat na origem. Depois usamos **(CNR 1)** para linearizar L em uma vizinhança de zero. Utilizamos então o Teorema 1.3.1 para resolver $Pu = f$ em uma vizinhança da origem.

Lema 4.2.1 *A condição **(CNR 2)** é equivalente a : $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Pu - f$ é flat na origem.*

Demonstração. De fato, considere a expansão formal de Taylor na origem:

$$\begin{aligned}&u \sim \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha,\\&a_j \sim \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha a_j(0)}{\alpha!} x^\alpha, j = 1, 2, ..., n,\\&c \sim \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha c(0)}{\alpha!} x^\alpha.\end{aligned}$$

Verifica-se que $Pu \sim f$ equivale a

$$\sum_{j,k} \alpha_k \partial_k a_j (0) \, \partial^{\alpha + e_j - e_k} u(0) + c(0) \, \partial^\alpha u(0) + R_\alpha = \partial^\alpha f(0), \; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \tag{4.2.1}$$

sendo que R_α depende somente de derivadas de u de ordem $\leq |\alpha| - 1$. Aqui $e_j \in \mathbb{N}^n$ é tal que $|e_j| = 1$ e sua $j-$ésima coordenada é igual a 1. Além disso verifica-se que R_α tem a seguinte propriedade: se $\partial^\beta u(0) = 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo $|\beta| \leq |\alpha| - 1$ então $R_\alpha = 0$.

Então $Pu \sim f$ é equivalente a resolver a seqüência de sistemas lineares

$$(B^m + c(0) I) \, u^m = f^m + v^{m-1}, m \in \mathbb{N} \tag{4.2.2}$$

descritos abaixo.

Seja $\Lambda_n^m = \{\alpha \in \mathbb{N}^n ; |\alpha| = m\}$ e $M = \sharp \Lambda_n^m$. Dado $m \in \mathbb{N}, B^m$ é uma matriz real $M \times M$ cujas entradas dependem das entradas de $DL(0)$ e da escolha de uma ordenação em Λ_n^m. Utilizando forma de Jordan real e uma ordenação conveniente para Λ_n^m demonstramos no Apêndice que

$$\operatorname{Spec} B^m \cap \mathbb{R} =$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n m_j \; \operatorname{Re} \lambda_j ; m_1, m_2, ..., m_{n'} \in \mathbb{N} \text{ e } m_{n'+1}, m_{n'+2} ..., m_n \in 2\mathbb{N} \right\}. \tag{4.2.3}$$

Aqui $\operatorname{Spec} A$ denota o conjunto dos autovalores da matriz quadrada A.

As componentes de $u^m \in \mathbb{C}^M$ (respectivamente $f^m \in \mathbb{C}^M$) são as derivadas de ordem m de u (resp. f) calculadas na origem. Se $m \geq 1$ então o vetor $v^{m-1} \in \mathbb{C}^M$ corresponde ao termo R_α de (4.2.1). Definimos $v^{-1} = 0 \in \mathbb{R}$. Não explicitaremos v^{m-1}, no entanto verifica-se que v^{m-1} depende somente das derivadas de u de ordem $\leq m - 1$, e além disso v^{m-1} tem a seguinte propriedade:

$$\partial^\alpha u(0) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ satisfazendo } |\alpha| \leq m - 1 \Rightarrow v^{m-1} = 0. \tag{4.2.4}$$

Se vale **(CNR 2)** então de (4.2.3) segue que os sistemas de (4.2.2) podem ser resolvidos recursivamente, $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Reciprocamente, suponha que **(CNR 2)** não se verifica. Então de (4.2.3) segue que

$$c(0) \in \operatorname{Spec} B^{m_0} \tag{4.2.5}$$

para algum $m_0 \in \mathbb{N}$. É claro que podemos supor que m_0 é o menor número natural com esta propriedade. Demonstraremos que $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que o sistema (4.2.2) correspondente a $m = m_0$ não tem solução .

Se $m_0 = 0$ então tomando f tal que $f(0) \neq 0$ segue o resultado. Se $m_0 > 0$ então de (4.2.5) segue existe $w \in \mathbb{C}^{M_0}$ tal que

$$(B^{m_0} + c(0) I) u^{m_0} \neq w, \forall u^{m_0} \in \mathbb{C}^{M_0}.$$

Tome $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f^m = 0$ se $m < m_0$ e $f^{m_0} = w$. De (4.2.4) segue que

$$(B^{m_0} + c(0) I) u^{m_0} \neq f^{m_0} + v^{m_0 - 1}, \forall u^{m_0} \in \mathbb{C}^{M_0}.$$

■

Demonstração do Lema 4.1.2. Pelo Lema 4.2.1 é suficiente demonstrar que: $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que f é flat na origem $\exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Pu = f$ em uma vizinhança de zero.

De **(CNR 2)** resulta que $c(0) \neq 0$, logo o operador $P_1 = \frac{1}{c}P$ está bem definido em uma vizinhança da origem. Então $P_1 = L_1 + 1$, sendo $L_1 = \frac{1}{c}L$. De $L(0) = 0$ resulta que

$$DL_1(0) = \frac{1}{c(0)} DL(0).$$

Então **(CNR 1)** vale para L_1. Do Teorema 1.1.10 segue que existe uma mudança de coordenadas de classe C^∞ em uma vizinhança da origem que transforma P_1 em

$$P_2 = \frac{1}{c(0)} DL(0) + 1.$$

Do Teorema 1.3.1 segue o resultado. ■

4.3 Demonstração do Teorema 4.1.3

Seja s o índice de estabilidade de L na origem. Na demonstração do Teorema 4.1.3 existem dois casos a considerar; o primeiro deles, **Caso A**, corresponde a $s \in \{0, n\}$ (atrator ou fonte) e segue imediatamente do Lema 1.3.13. No segundo, **Caso B**, que corresponde ao caso $s \notin \{0, n\}$ (sela), construímos seções transversais de L em subconjuntos apropriados de $\mathbb{R}^n$.

4.3.1 Demonstração do Caso A

Suponha $s = n$ (o caso $s = 0$ é análogo). Seja U vizinhança da origem tal que $f = 0$ em U. Pelo Lema 1.1.6 podemos supor que U tem a seguinte propriedade:

$$x \in U \Rightarrow \Gamma_x^+ \subset U. \tag{4.3.6}$$

Considere uma vizinhança V da origem tal que $\overline{V} \subset\subset U$. Tome $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta = 0 \text{ em } V \text{ e } \theta = 1 \text{ em } \complement U. \tag{4.3.7}$$

Pelo Lema 1.3.13, existe uma seção transversal global Σ de L em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que Σ é um subconjunto compacto de $V \setminus \{0\}$. Do Método das Características resulta que $\exists \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que $L\psi = c\theta$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\psi = 0$ em uma vizinhança da origem. Definindo $\psi(0) = 0$ podemos supor que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $L\psi = c\theta$ em $\mathbb{R}^n$.

Analogamente, usando (4.3.6) mostra-se que $\exists \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $L\phi = e^\psi f$ em $\mathbb{R}^n$ e

$$\phi = 0 \text{ em } U. \tag{4.3.8}$$

Então

$$P\left(\phi e^{-\psi}\right) = f + ce^{-\psi}\phi(1-\theta).$$

De (4.3.7) e (4.3.8) resulta que $\phi(1-\theta) = 0$. Portanto definindo $u = \phi e^{-\psi}$ temos que $Pu = f$.

4.3.2 Resultados preliminares ao Caso B

No **Caso B**, segue do Teorema 1.1.7 que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ não é convexo com respeito às trajetórias de L. Pelo Teorema 1.3.3-(d) não existe seção transversal global de L em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Logo, a argumentação do **Caso A** não se aplica ao **Caso B**.

Introduzimos agora mais alguma notação. Defina $\Omega^s = \mathbb{R}^n \setminus W^s(0)$ (respectivamente $\Omega^u = \mathbb{R}^n \setminus W^u(0)$), lembrando que $W^s(0)$ é a variedade estável de L na origem (resp. $W^u(0)$ é a variedade instável de L na origem).

Se Σ^s (resp. Σ^u) é seção transversal global de L em Ω^s (resp. Ω^u) definimos

$$\Omega^s_+(\Sigma^s) = \{\gamma(t,y); y \in \Sigma^s, t > 0\}$$

(resp. $\Omega^u_+(\Sigma^u) = \{\gamma(t,y); y \in \Sigma^u, t > 0\}$), que é um subconjunto aberto de Ω^s (aberto de Ω^u). Analogamente definimos $\Omega^s_-(\Sigma^s)$ (resp. $\Omega^u_-(\Sigma^u)$). O principal resultado a ser usado na demonstração do **Caso B** é a

Proposição 4.3.1 *Dada uma vizinhança U_1 da origem existe uma vizinhança U de 0, com $U \subset U_1$, seções transversais globais Σ^s_1 e Σ^s_2 de L em Ω^s, e seções transversais globais Σ^u_1 e Σ^u_2 de L em Ω^u tais que:*
(i) $\Sigma^u_2 \subset \Omega^u_+(\Sigma^u_1)$ *e* $\Sigma^s_1 \subset \Omega^s_+(\Sigma^s_2)$,
(ii) $\Omega^u_+(\Sigma^u_1) \cup W^u(0) \subset \Omega^s_+(\Sigma^s_1) \cup U$
e
(iii) $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $f = 0$ *em* $\Omega^s_-(\Sigma^s_2) \cup W^s(0) \cup U$ *(resp.* $\Omega^u_+(\Sigma^u_1) \cup W^u(0)$*),* $\exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $Lu = f$ *e* $u = 0$ *em* U *(resp.* $u = 0$ *em* $\Omega^u_+(\Sigma^u_1) \cup W^u(0)$*).*

Na Proposição 4.3.1, não é necessário que Σ^s_1 tenha a propriedade de transversalidade $T_x(\Sigma^s_1) \oplus L(x), \forall x \in \Sigma^s_1$. É suficiente que Σ^s_1 tenha apenas as demais propriedades de seção transversal global. Análogo para Σ^u_1.

A demonstração da Proposicação 4.3.1 requer alguns resultados preliminares, aqui denominados Lema 4.3.2 a Lema 4.3.9. As hipóteses globais feitas sobre L implicam no seguinte resultado:

Lema 4.3.2
(i) *$W^s(0) \cap W^u(0) = \{0\}$*
e
(ii) *$W^s(0)$ (resp. $W^u(0)$) é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração.
(i) Observe que se $x \in W^s(0) \cap W^u(0)$ então $\alpha(x) = \omega(x) = \{0\}$, de onde segue que $\overline{\Gamma_x} \subset\subset \Omega$. De **(b)** segue que $x = 0$.
(ii) Se $W^s(0)$ não for fechado então existe uma seqüência $\{x_j\} \subset W^s(0)$ e $x \notin W^s(0)$ tal que $x_j \to x$. Daí segue que $0 \notin \omega(x)$. Da invariância de $\omega(x)$ pelo fluxo e de **(b)** segue que $\overline{\Gamma_x^+}$ não é pré-compacta. Usando argumentos como os apresentados no caso (ii) da demonstração do Lema 1.1.4 temos a negação de **(c)**.$\blacksquare$

Do Lema 4.3.2-(ii) segue que:

Observação 4.3.3 *Ω^s (resp. Ω^u) é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Logo, $\Omega_+^s(\Sigma^s)$ e $\Omega_-^s(\Sigma^s)$ (resp. $\Omega_+^u(\Sigma^u)$ e $\Omega_-^u(\Sigma^u)$) também são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.*

Além disso:

Lema 4.3.4 *Ω^s (resp. Ω^u) é convexo com respeito às trajetórias de L.*

Demonstração. Suponha que Ω^s não seja convexo com respeito às trajetórias de L. Então $\exists K \subset\subset \Omega^s$, uma seqüência $\{\Gamma_j\}$ de intervalos compactos de trajetórias com extremidades em K e uma seqüência $\{x_j\}$ tal que

$$x_j \in \Gamma_j \setminus K_j, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.3.9}$$

Aqui $\{K_j\}$ é uma seqüência de compactos que esgota Ω^s.

De **(c)** segue que $\exists K' \subset\subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{x_j\} \subset K'$. Logo existem $x \in \mathbb{R}^n$ e uma subseqüência $\{x_{j_k}\} \subset \{x_j\}$ tal que $x_{j_k} \to x$. Sem perda de generalidade podemos supor que $x_j \to x$. Note que

$$x \in W^s(0), \tag{4.3.10}$$

pois, caso contrário, existiria $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_j, \forall j > j_0$ e isso contraria (4.3.9). Consideramos os casos **(i)** e **(ii)** abaixo.
(i) $x \neq 0$.

De **(b)** segue que para cada $k \in \mathbb{N}, \exists y_k \in \Gamma_x \setminus B_k(0)$. De (4.3.10) segue que $[x, y_k] \cap K = \emptyset$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo existe uma vizinhança V_k de $[x, y_k]$ tal que $L|_{V_k}$ é conjugado a ∂_1 e $V_k \cap K = \emptyset$. Daí e de $x_j \to x$ resulta que $\exists j_k \in \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade: $\forall j > j_k, \exists z_j \in \Gamma_j \setminus B_k(0)$. Isso nega **(c)**.
(ii) $x = 0$.

Pela demonstração de **(i)**, é suficiente demonstrar que existem $w \in W^s(0)$, com $w \neq 0$, e uma seqüência $w_j \to w$ tal que $w_j \in \Gamma_j, \forall j \in \mathbb{N}$.

Como $K \cap W^s(0) = \emptyset$ e $0 \in W^s(0)$ existe uma vizinhança V da origem satisfazendo $K \cap V = \emptyset$. Usando o Teorema 1.1.7 mostra-se que existe um aberto U que contém a origem tal que $U \subset V$ e $U \setminus W^s(0)$ é convexo com respeito às trajetórias de L. Seja $\epsilon > 0$ tal que $S_\epsilon := \{z \in \mathbb{R}^n; |z| = \epsilon\} \subset U$ e escolha $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow |x_j| < \epsilon$. Como as extremidades de Γ_j estão contidas em K, da continuidade de Γ_j resulta que existem $w_j, w'_j \in \Gamma_j \cap S_\epsilon$ tais que $x_j \in \left[w_j, w'_j\right]$. Por compacidade existem subseqüências $\{w_{j_k}\} \subset \{w_j\}$ e $\left\{w'_{j_k}\right\} \subset \left\{w'_j\right\}$ tais que $w_{j_k} \to w$ e $w'_{j_k} \to w'$. Para concluir a demonstração, é suficiente demonstrar que

$$w \in W^s(0) \text{ ou } w' \in W^s(0). \tag{4.3.11}$$

Para demonstrar (4.3.11) suponha que $w \notin W^s(0)$ e $w' \notin W^s(0)$. Então ambas as seqüências $\{w_{j_k}\}$ e $\left\{w'_{j_k}\right\}$ estariam contidas em algum compacto de $S_\epsilon \setminus W^s(0)$. Logo $U \setminus W^s(0)$ não seria convexo com respeito às trajetórias de L. ∎

Utilizando o Lema 4.3.4 verifica-se que:

Observação 4.3.5 *$\Omega^s_+(\Sigma^s)$ e $\Omega^s_-(\Sigma^s)$ (resp. $\Omega^u_+(\Sigma^u)$ e $\Omega^u_-(\Sigma^u)$) são convexos com respeito às trajetórias de L.*

Utilizando resultados sobre transversalidade de variedades (veja [El, p. 221]) e argumentos como os apresentados na verificação da Observação 1.1.17 temos o seguinte resultado:

Observação 4.3.6 *Se Σ^s é seção transversal global de L em Ω^s (resp. Σ^u é seção transversal global de L em Ω^u) então $K := \Sigma^s \cap W^u(x_0)$ (resp. $\Sigma^u \cap W^s(x_0)$) é seção transversal global de $L|_{W^u(x_0)}$ em $W^u(x_0) \setminus \{x_0\}$ (resp. de $L|_{W^s(x_0)}$ em $W^s(x_0) \setminus \{x_0\}$). Além disso $K \subset\subset \mathbb{R}^n$.*

Lema 4.3.7 *Se Σ^s (resp. Σ^u) é seção transversal global de L em Ω^s (resp. Ω^u) então $\Omega^s_-(\Sigma^s) \cup W^s(0)$ (resp. $\Omega^u_+(\Sigma^u) \cup W^u(0)$) é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Pela Observação 4.3.3 é suficiente demonstrar que $\forall x \in W^s(0)$, existe vizinhança V_x de x tal que $V_x \subset \Omega^s_-(\Sigma^s) \cup W^s(0)$. Para isso, pela continuidade de γ, é suficiente demonstrar que existe vizinhança V_0 de 0 tal que

$$V_0 \subset \Omega^s_-(\Sigma^s) \cup W^s(0). \tag{4.3.12}$$

Considere a aplicação $\tau : \Omega^s \to \mathbb{R}$ definida como na Observação 1.1.16 e seja $K = \Sigma^s \cap W^u(0)$. O restante da demonstração será dividido em etapas.

Etapa 1. Existe um subconjunto aberto U_0 de $\mathbb{R}^n$ tal que $U_0 \cap W^u(0) \setminus \{0\} \subset \Omega^s_-(\Sigma^s)$.

De fato, da Observação 4.3.6 segue que $K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Então existe um aberto U_0 de $\mathbb{R}^n$ tal que $U_0 \cap K = \emptyset$, U_0 satisfaz a conclusão do Teorema 1.1.7 e U_0 é convexo com respeito às trajetórias de L.

Dado $y \in U_0 \cap W^u(0) \setminus \{0\}$ devemos demonstrar que $\tau(y) > 0$. De $U_0 \cap K = \emptyset$ resulta que $\tau(y) \neq 0$. Suponha $\tau(y) < 0$. Do Lema 1.1.6 segue que existe um subconjunto aberto A de $W^u(0)$, com $0 \in A \subset U_0 \cap W^u(0)$, tal que

$$t \leq 0, z \in A \Rightarrow \gamma(t, z) \in A. \tag{4.3.13}$$

Tome $t_0 < 0$ tal que $\gamma(t_0, y) \in A$. Se $\tau(y) \leq t_0$ então de (4.3.13) resulta que $\gamma(\tau(y), y) \in U_0$, o que contradiz $U_0 \cap K = \emptyset$. Logo $t_0 < \tau(y) < 0$. Como U_0 é convexo com respeito às trajetórias de L, daí resulta que $\gamma(\tau(y), y) \in U_0$ e novamente temos uma contradição com $K \cap U_0 = \emptyset$. Daí segue que $\tau(y) > 0$.

Etapa 2. Existe uma vizinhança V_0 da origem que tem a propriedade (4.3.12).

De fato, pelo Teorema 1.1.7 existe um conjunto Σ' de $\mathbb{R}^n$ tal que $\Sigma' \subset U_0 \backslash \{0\}$ e Σ' é homeomorfo a S^{n-1}. Defina $\Delta = \Sigma' \cap W^u(0)$. Pelo Lema 4.3.2 temos que $\Delta \subset\subset \mathbb{R}^n$. Da **Etapa 1** segue que existe uma vizinhança V_Δ de Δ tal que

$$V_\Delta \subset \Omega^s_-(\Sigma^s) \cap U_0. \tag{4.3.14}$$

Utilizando (4.3.14), o Teorema 1.1.7 e a compacidade de Δ mostra-se que existe uma vizinhança V_0 da origem tal que $V_0 \setminus W^s(0) \subset \Omega^s_-(\Sigma^s)$. ■

No resultado a seguir produzimos seções transversais de L em Ω^s com propriedades especiais.

Lema 4.3.8 *Se U_1 é uma vizinhança da origem então existe um aberto U, com $0 \in U \subset U_1, U$ satisfazendo a conclusão do Teorema 1.1.7 e U convexo com respeito às trajetórias de L, e existem seções transversais Σ^s_1 e Σ^s_2 de L em Ω^s com as seguintes propriedades:*
(i) $\Sigma^s_1 \cap W^u(0) \subset U$,
(ii) $\Sigma^s_1 \subset \Omega^s_+(\Sigma^s_2)$
e
(iii) $x \in \Sigma^s_2, y \in \Gamma^+_x \cap U \Rightarrow [x, y] \subset U$.

Demonstração. De **(b)**, do Lema 4.3.4 e do Teorema 1.3.3-(f) segue que existe uma seção transversal global Σ^s_0 de L em Ω^s. Pelo Lema 4.3.7 existe um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in U \subset U_1$ que tem as seguintes propriedades: $U \subset \Omega^s_-(\Sigma^s_0) \cup W^s(0), U$ satisfaz a conclusão do Teorema 1.1.7 e U é convexo com respeito às trajetórias de L. Note que U tem a seguinte propriedade:

$$y \in \Sigma^s_0, \gamma(t, y) \in U \Rightarrow t < 0. \tag{4.3.15}$$

Dividimos o restante da demonstração em etapas.

Etapa 1. Existe $T \in \mathbb{R}$ e um subconjunto aberto W_0 de Σ^s_0, com $K \subset W_0$, tal que

$$y \in W_0 \Rightarrow \omega_-(y) < T < 0 \tag{4.3.16}$$

e

$$y \in W_0 \Rightarrow \gamma(T, y), \gamma(T/2, y) \in U. \tag{4.3.17}$$

De fato, seja V um aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que $W^u(0) \subset V$ e $\omega_-(y) = -\infty, \forall y \in V$. Seja $K := \Sigma^s_0 \cap W^u(0) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dado $y \in K$ seja $t_y < 0$ tal que $\gamma(t, y) \in U, \forall t \leq t_y$. Da Observação 4.3.6 segue que $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, logo $\exists T < 0$ tal que $t \leq T \Rightarrow \gamma(t, y) \in U, \forall y \in K$. Da continuidade de γ segue que existe um subconjunto aberto V_0 de $\mathbb{R}^n$ tal que $K \subset V_0 \subset V$ e $\gamma(T, y), \gamma(T/2, y) \in U, \forall y \in V_0$. Basta tomar $W_0 = V_0 \cap \Sigma^s_0$.

Etapa 2. Existe uma seqüência $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ e uma cobertura localmente finita $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ de Σ_0^s tais que

$$y \in W_j \Rightarrow 0 < t_j < \omega_+ (y). \tag{4.3.18}$$

De fato, para cada $y \in \Sigma_0^s$ considere $t_y \in \mathbb{R}$ e uma vizinhança V_y de y tais que $0 < t_y < \omega_+ (y), \forall y \in V_y$. Seja $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ refinamento enumerável localmente finito de $\{V_y \cap \Sigma_0^s\}_{y \in \Sigma_0^s}$. Para cada $j \geq 1$ escolha V_y tal que $W_j \subset V_y \cap \Sigma_0^s$ e defina $t_j = t_y$. Isso conclui a **Etapa 2.**

Considere $\mu_0 \in C^{\infty}(\Sigma_0^s, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq \mu_0 \leq 1, \mu_0 = 1$ em uma vizinhança de K e $\operatorname{supp}(\mu_0) \subset W_0$. Seja $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ partição da unidade subordinada a cobertura $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$. Sejam $\chi_1, \chi_2 \in C^{\infty}(\Sigma_0^s, \mathbb{R})$ as aplicações definidas por

$$\chi_1 = \frac{T}{2}\mu_0 + (1 - \mu_0) \sum_{j=1}^{\infty} t_j \mu_j \text{ e } \chi_2 = T\mu_0.$$

Temos então o seguinte resultado:
Etapa 3. Para cada $j = 1, 2$ a imagem Σ_j^s da aplicação

$$\begin{array}{rccc} \sigma_j : & \Sigma_0^s & \rightarrow & \Omega^s \\ & y & \mapsto & \gamma(\chi_j(y), y) \end{array}$$

é uma seção transversal global de L em Ω^s.

De fato, de (4.3.16) resulta $\omega_- (y) < \chi_2 (y) < \omega_+ (y), y \in \Sigma_0^s$. Analogamente, de (4.3.16) e (4.3.18) resulta $\omega_- (y) < \chi_1 (y) < \omega_+ (y), y \in \Sigma_0^s$. Do Lema 1.1.18 segue que $\Sigma_j^s, j = 1, 2$ é uma seção transversal global de L em Ω^s.
Etapa 4. Valem **(i), (ii)** e **(iii)** para as escolhas de $\Sigma_j^s, j = 1, 2$, feitas na **Etapa 3.**

De fato, provaremos agora que vale **(i)**. Dado $x \in \Sigma_1^s \cap W^u(0)$, como Σ_0^s é seção transversal global de L em Ω^s e $W^u(0)$ é invariante pelo fluxo de $L, \exists y \in K$ tal que $x = \gamma(\chi_1(y), y)$. De $\mu_0(y) = 1$ e de (4.3.17) segue que $x \in U$. Isso conclui a demonstração de **(i)**. Observe que **(ii)** segue de $\chi_2 < \chi_1$.

Provaremos agora que vale **(iii)**. Dados $x \in \Sigma_2^s$ e $y \in \Gamma_x^+ \cap U$, seja $t \geq 0$ tal que $\gamma(t, x) = y$. Como U é convexo com respeito às trajetórias de L, para demonstrar **(iii)** é suficiente demonstrar que $x \in U$.

Para isso, tome $z \in \Sigma_0^s$ tal que $\gamma(\chi_2(z), z) = x$. Mostraremos agora que $z \in W_0$. Se $z \notin W_0$ então $\chi_2(z) = 0$. Como $y = \gamma(t + \chi_2(z), z)$ temos que $y = \gamma(t, z)$. De (4.3.15) resulta $t < 0$, o que é um absurdo. Logo $z \in W_0$.

Como $T \leq \chi_2(z) \leq t + \chi_2(z)$ e U é convexo com respeito às trajetórias de L, de (4.3.17) e de $y \in U$ resulta $x \in U$. ■

Abaixo construímos seções transversais de L em Ω^u que tenham propriedades especiais, obtendo um resultado análogo ao Lema 4.3.8.

Lema 4.3.9 *Sejam U e Σ_2^s como no Lema 4.3.8. Então existem seções transversais Σ_1^u e Σ_2^u de L em Ω^u tais que:*
(i) $\Sigma_1^u \cap W^s(0) \subset U$,
(ii) $\Sigma_2^u \subset \Omega_+^u(\Sigma_1^u)$,
e
(iii) $\Sigma_1^u = \Sigma_1^s$ *em* $\complement U$.

Demonstração. Usando argumentos análogos aos apresentados na demonstração do Lema 4.3.8 mostra-se que existe uma seção transversal global Σ_0^u de L em Ω^u tal que $K := \Sigma_0^u \cap W^s(0) \subset U$. Considere a aplicação $\tau : \Omega^s \to \mathbb{R}$ definida de modo que $\gamma(\tau(y), y) \in \Sigma_1^s$. Dividimos o restante da demonstração em etapas.
Etapa 1. Existe um subconjunto aberto W_0 de Σ_0^u tal que $K \subset W_0 \subset U$ e

$$y \in W_0 \Rightarrow \gamma(\tau(y), y) \in U. \tag{4.3.19}$$

De fato, considere um subconjunto Σ' de $U \setminus \{0\}$ que seja homeomorfo a S^{n-1}, sendo o homeomorfismo dado pelo Teorema 1.1.7. Defina $\Delta = \Sigma' \cap W^u(0)$. Utilizando o Lema 4.3.8-(i) mostra-se que existe uma vizinhança V_Δ de Δ tal que

$$y \in V \Rightarrow \gamma(\tau(y), y) \in U. \tag{4.3.20}$$

Além disso, utilizando a compacidade de Δ e o Teorema 1.1.7 mostra-se que existe uma vizinhança V_0 da origem tal que

$$y \in V_0 \setminus W^s(0) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \gamma(t, y) \in V. \tag{4.3.21}$$

De (4.3.20), (4.3.21) e da continuidade de γ segue a **Etapa 1.**

Seja $\mu \in C^\infty(\Sigma_0^u, \mathbb{R})$ tal que $0 \le \mu \le 1, \mu = 1$ em uma vizinhança de K e $\operatorname{supp}(\mu) \subset W_0$. Como Σ_0^u é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^n$ temos que $\tau|_{\Sigma_0^u \setminus K} \in C^\infty(\Sigma_0^u \setminus K)$. Considere ainda a aplicação $\chi_1 : \Sigma_0^u \to \Omega^u$ definida por $\chi_1 = (1 - \mu)\tau|_{\Sigma_0^u \setminus K}$. Então podemos supor que $\chi_1 \in C^\infty(\Sigma_0^u, \mathbb{R})$.
Etapa 2. A imagem Σ_1^u da aplicação

$$\begin{array}{rccl} \sigma_1 : & \Sigma_0^u & \to & \Omega^u \\ & y & \mapsto & \gamma(\chi_1(y), y) \end{array}$$

é uma seção transversal global de L em Ω^u que satisfaz **(i)**.

De fato, pelo Lema 1.1.18, Σ_1^u é uma seção transversal global de L em Ω^u. De $\mu = 1$ em K resulta que $\Sigma_1^u \cap W^s(0) = K$, de onde segue que $\Sigma_1^u \cap W^s(0) \subset U$. Isso conclui a **Etapa 2.**

A existência de Σ_2^u satisfazendo **(ii)** pode ser demonstrada usando argumentos como os apresentados na demonstração do Lema 4.3.8-(iii).
Etapa 3. Vale **(iii)**.

De fato, observe que devemos demonstrar que

$$\Sigma_1^u \cap \complement U \subset \Sigma_1^s \tag{4.3.22}$$

e

$$\Sigma_1^s \cap \complement U \subset \Sigma_1^u. \tag{4.3.23}$$

Para demonstrar (4.3.22), tome $x \in \Sigma_1^u \cap \complement U$ arbitrário. Seja $y \in \Sigma_0^u$ tal que $\gamma(\chi_1(y), y) = x$. Se $y \in W_0$ então de (4.3.19) e $|\chi_1(y)| \le |\tau(y)|$ resulta que $x \in U$, o que é um absurdo. Então $y \notin W_0$. Daí segue que $\chi_1(y) = \tau(y)$, logo $x \in \Sigma_1^s$. A demonstração de (4.3.23) é análoga. ∎

Demonstração da Proposição 4.3.1.

(i) As inclusões são imediatas do Lema 4.3.8-(ii) e Lema 4.3.9-(ii), respectivamente.
(ii) Note que $W^u(0) \subset \Omega_+^s(\Sigma_1^s) \cup U$ pelo Lema 4.3.8-(i). Além disso, pelo Lema 4.3.9-(iii) temos que $\Omega_+^u(\Sigma_1^u) \subset \Omega_+^s(\Sigma_1^s) \cup U$.
(iii) Segue do Método das Características, do Lema 4.3.8-(iii) (resp. Lema 4.3.9-(ii)) e do Lema 4.3.7. ■

4.3.3 Demonstração do Caso B

Dividiremos a demonstração do **Caso B** em duas etapas, aqui chamadas de **Etapa 1** e **Etapa 2.** Na **Etapa 1** tomamos seções transversais convenientes de L em Ω^s. Integrando f ao longo das curvas integrais obtemos u_1 tal que $Pu_1 = f$ em uma vizinhança da origem e no complementar de uma vizinhança de $W^s(0)$. Analogamente, na **Etapa 2** tomamos seções transversais de L em Ω^u e obtemos u_2 tal que $Pu_2 = f$ no complementar de uma vizinhança de $W^u(0)$. Das propriedades especiais das transversais consideradas nas etapas 1 e 2 segue que $P(u_1 + u_2) = f$ em $\mathbb{R}^n$.

Seja U_1 uma vizinhança da origem tal que $f = 0$ em U_1. Considere o aberto U e as seções transversais globais Σ_1^s e Σ_2^s de L em Ω^s dadas pela Proposição 4.3.1. A demonstração do Teorema 4.1.3 segue facilmente das etapas 1 e 2 a seguir.

Etapa 1. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = 0$ em $U, \exists u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Pu_1 = f$ em $\Omega_+^s(\Sigma_1^s) \cup U$.

De fato, pela Proposição 4.3.1-(i) e Lema 4.3.7, $\exists \theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta_1 = 0 \text{ em } \Omega_-^s(\Sigma_2^s) \cup W^s(0) \text{ e } \theta_1 = 1 \text{ em } \Omega_+^s(\Sigma_1^s). \tag{4.3.24}$$

Utilizando o Método das Características e o Lema 4.3.7 verifica-se que $\exists \psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $L\psi_1 = \theta_1 c$. Pela Proposição 4.3.1-(iii), $\exists \phi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $L\phi_1 = \theta_1 f e^{\psi_1}$ e

$$\phi_1 = 0 \text{ em } U. \tag{4.3.25}$$

Então

$$P\left(\phi_1 e^{-\psi_1}\right) = \theta_1 f + c e^{-\psi_1} \phi_1 (1 - \theta_1).$$

Como $f = 0$ em U, de (4.3.24) e de (4.3.25) resulta que em $\Omega_+^s(\Sigma_1^s) \cup U$ temos as seguintes igualdades:

$$\phi_1 (1 - \theta_1) = 0 \text{ e } \theta_1 f = f.$$

Logo, tomando $u_1 = \phi_1 e^{-\psi_1}$ segue a **Etapa 1.**

Sejam Σ_1^u e Σ_2^u as seções transversais globais de L em Ω^u dadas pela Proposição 4.3.1.

Etapa 2. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = 0$ em $\Omega_+^s(\Sigma_1^s) \cup U, \exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Pu = f$ em $\mathbb{R}^n$.

De fato, pela Proposição 4.3.1-(i) e pelo Lema 4.3.7, $\exists \theta_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta_2 = 0 \text{ em } \Omega_+^u(\Sigma_2^u) \cup W^u(0) \text{ e } \theta_2 = 1 \text{ em } \Omega_-^u(\Sigma_1^u).$$

Então $\exists \psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $L\psi_2 = \theta_2 c$. Como $f = 0$ em $\Omega_+^s(\Sigma_1^s) \cup U$, da Proposição 4.3.1-(ii)-(iii) resulta que $\exists \phi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $L\phi_2 = fe^{\psi_2}$ e $\phi_2 = 0$ em $\Omega_+^u(\Sigma_1^u) \cup W^u(0)$.

Então
$$P\left(\phi_2 e^{-\psi_2}\right) = f + ce^{-\psi_2}\phi_2(1-\theta_2)$$
e, em $\Omega_+^u(\Sigma_1^u) \cup W^u(0) \cup \Omega_-^u(\Sigma_1^u)$ temos que
$$\phi_2(1-\theta_2) = 0.$$

Logo, tomando $u_2 = \phi_2 e^{-\psi_2}$ segue a **Etapa 2.** Isso encerra a demonstração do Teorema 4.1.3.

Observação 4.3.10 *Note que no* **Caso A,** *o Teorema 1.1.7 é usado na construção de uma seção transversal global de L em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ somente para verificar as hipóteses do Teorema 1.3.3. Vale observação análoga para o* **Caso B** *e as seções transversais de L em Ω^s e Ω^u.*

4.4 Exemplos e contra-exemplos

Nesta seção apresentamos exemplos que ilustram as condições do Teorema 4.1.1 e discutimos a necessidade de tais condições. A seguir apresentamos um exemplo de operador que satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1.1.

Exemplo 4.4.1 *Considere $L = (\lambda_1 x_1 + x_2^2)\partial_1 + \lambda_2 x_2 \partial_2$ com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ seja um conjunto linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$. Daí segue que L satisfaz* ***(CNR 1)****. Tome $c \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que* ***(CNR 2)*** *seja válida. Então $P = L + c$ é resolúvel em $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

Do Lema 4.1.2 segue que **(CNR 2)** é uma condição necessária para a resolubilidade de P em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 1.3.10 e pelas observações 2.1.5 e 2.1.6 temos que a condição **(c)** também é necessária para $P(C^\infty(\mathbb{R}^n)) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observe que quando L é um campo linear hiperbólico a conclusão do Lema 4.1.2 é válida mesmo que **(CNR 1)** não seja satisfeita pois, na demonstração do referido lema, **(CNR 1)** é usada somente para linearizar L em uma vizinhança da origem. Além disso tais campos satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1.3. Daí resulta que:

Lema 4.4.2 *Suponha que L seja um campo linear hiperbólico e que $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Seja $P = L + c$. Então $P(C^\infty(\mathbb{R}^n)) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$* **(CNR 2)***.*

Portanto **(CNR 1)** não é necessária para a resolubilidade de P em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. O próximo exemplo, devido a Nelson (veja [Ne, p. 32]), ilustra que **(CNR 1)** não é uma condição necessária para a resolubilidade de $P = L + c$ em $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, mesmo no caso em que a parte principal do operador não é $C^\infty-$conjugado ao seu linearizado.

Exemplo 4.4.3 *Seja* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* L *o campo do Exemplo 4.4.1 com* $\lambda_1 = 2\lambda$ *e* $\lambda_2 = \lambda$. *Logo* **(CNR 1)** *não é válida. Considere* $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *tal que* **(CNR 2)** *seja válida. Então* $P = L + c$ *é resolúvel em* $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

De fato, o fluxo de L é dado por

$$\gamma(t,x) = \left(x_1 e^{2\lambda t} + x_2^2 t e^{2\lambda t}, x_2 e^{\lambda t}\right), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2. \tag{4.4.26}$$

Suponha $\lambda < 0$, ou seja , a origem é um atrator. O caso $\lambda > 0$ é análogo. Observe que argumentando como na demonstração do Lema 4.1.2 segue que, para resolver a equação $Pu = f$, com $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, é suficiente considerar o caso em que c é constante e f é flat na origem. Observe ainda que de (4.4.26) segue existe $\mu > 0$ e uma vizinhança V da origem tais que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^2$ vale uma estimativa do tipo:

$$|\partial_x^\alpha \gamma(t,x)| \leq p_\alpha(t) e^{-\mu t} |x|, t \geq 0, x \in V \tag{4.4.27}$$

com p_α um polinômio.

Utilizando (4.4.27) verifica-se que todos os argumentos usados na demonstração do caso atrator no Teorema 1.3.1 são válidos. Daí e do Teorema 4.1.3 segue que $P(C^\infty(\mathbb{R}^2)) = C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

A seguir apresentamos uma família de operadores para os quais a condição **(b)** é necessária para resolubilidade em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Seja $p_n(x) := \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j, x \in \mathbb{R}, a_j \in \mathbb{R}, j = 0,1,2,...,n$ um polinômio. Seja L o campo em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$L = x_1(1-x_1)\partial_1 + x_2 g \partial_2$$

no qual $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Observe que $(0,0)$ e $(1,0)$ são pontos singulares e $[0,1] \times \{0\}$ é uma órbita pré-compacta de L.

Considere o operador $P = L + c$, com $c \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ satisfazendo

$$c(x_1, 0) = p_n(x_1), x_1 \in \mathbb{R}.$$

Lema 4.4.4 *Se*

$$a_0 \notin \mathbb{Z} \text{ e } a_j \notin \{1,2,...\}, j = 1,2,...,n, \tag{4.4.28}$$

então $\exists u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$ *tal que* ${}^tPu = 0$ *e* $\operatorname{supp}(u) = [0,1] \times \{0\}$. *Portanto* P *não é resolúvel em* $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Considere o operador

$$Q_n = x(1-x)\frac{d}{dx} + p_n(x), x \in \mathbb{R}.$$

Então

$${}^tQ_n = -x(1-x)\frac{d}{dx} + p_n(x) + 2x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Para demonstrar o Lema 4.4.4, é suficiente demonstrar que

$$\exists v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}), \text{ com } \operatorname{supp}(v) = [0,1] \text{ tal que } {}^tQ_n v = 0. \tag{4.4.29}$$

De fato, basta tomar $u = v \otimes \delta$. Para demonstrar (4.4.29) introduzimos a seguinte notação:

$$\begin{array}{l} A_n = 1 + a_0 + a_1 + ... + a_n, n = 0, 1, 2, ..., \\ q_0 = 0, \\ q_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j}, x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ... \end{array}$$

e demonstraremos que

$$v_n := e^{-q_n} x_+^{a_0-1} (1-x)_+^{-A_n}, n = 0, 1, 2, ...$$

satisfaz

$${}^tQ_n v_n = 0. \tag{4.4.30}$$

A demonstração de (4.4.30) será feita por indução sobre n. Suponha que $n = 0$. De (4.4.28) segue que $a_0 - 1, -A_0 \notin -\mathbb{N}$. Logo

$$\frac{d}{dx} x_+^{a_0-1} (1-x)_+^{-A_0} = (a_0 - 1) x_+^{a_0-2} (1-x)_+^{-A_0} + A_0 x_+^{a_0-1} (1-x)_+^{-A_0-1}$$

e daí segue que ${}^tQ_0 v_0 = 0$. Suponha (4.4.30) para n e provemos para $n+1$.

Da hipótese de indução segue que existe $v_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, com $\operatorname{supp}(v_n) = [0,1]$, tal que

$${}^tQ_n v_n = 0. \tag{4.4.31}$$

Seja $w_n = e^{-q_n} (1-x)_+^{-a_{n+1}}$. Como $v_{n+1} = v_n w_n$ temos que

$${}^tQ_{n+1} v_{n+1} = w_n \, {}^tQ_n v_n + x v_n \left(-x(1-x) \frac{d}{dx} w_n + a_{n+1} x^n w_n \right).$$

De (4.4.31) segue que o primeiro termo do lado direito é igual a zero. Não é difícil verificar que o segundo termo do lado direito também é nulo. ■

Apêndice

O objetivo deste apêndice é demonstrar (4.2.3). Para isso precisamos de alguns resultados preliminares.

Resultados de Álgebra Linear

Denotamos por $\mathbb{R}^{n\times n}$ (respectivamente $\mathbb{C}^{n\times n}$) o conjunto das matrizes reais (resp. complexas) $n\times n$ e por $\operatorname{Spec} A$ o conjunto dos autovalores da matriz quadrada A.

Lema 1 *Seja $Q^m = [q_{j,k}] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ matriz tridiagonal tal que*

$$\begin{cases} q_{j,j} = 0, j = 1, 2, ..., m, \\ q_{j,j+1} \neq 0, j = 1, 2, ..., m-1, \\ q_{j,j-1} \neq 0, j = 2, 3, ..., m. \end{cases} \tag{0.4.32}$$

(i) *Se m é par então*

$$\det(\lambda I - Q^m) = \sum_{j=0}^{m/2} t_j \lambda^{2j}$$

e se m é ímpar então

$$\det(\lambda I - Q^m) = \sum_{j=0}^{(m-1)/2} t_j \lambda^{2j+1},$$

sendo $t_j \in \mathbb{R}$ constantes que dependem de Q^m.
(ii) *Se $\lambda \in \operatorname{Spec} Q^m$ então $-\lambda \in \operatorname{Spec} Q^m$.*
(iii) *Todo auto-espaço de Q^m é unidimensional.*
(iv) *Se Q^m é real então $\operatorname{Spec} Q^m \subset i\mathbb{R}$.*
(v) *Se m é par então $\det Q^m \neq 0$ e se m é ímpar então $\det Q^m = 0$.*

Demonstração.
(i) A demonstração será feita por indução sobre m. Se $m = 1$ ou $m = 2$ o resultado é imediato. Suponha que **(i)** seja válido para toda matriz de ordem $\leq m$. Não é difícil verificar que

$$\det\left(\lambda I - Q^{m+1}\right) = \lambda \det(\lambda I - Q^m) - q_{1,2}q_{2,1} \det\left(\lambda I - Q^{m-1}\right),$$

sendo $Q^m \in \mathbb{C}^{m\times m}$ e $Q^{m-1} \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(m-1)}$ matrizes tridiagonais que satisfazem (0.4.32). Da hipótese de indução segue o resultado.
(ii) De **(i)** resulta que se m é par então $\det(\lambda I - Q^m)$ é uma função par e se m é ímpar então $\det(\lambda I - Q^m)$ é uma função ímpar.
(iii) Seja $\lambda \in \operatorname{Spec} Q^m$ e u autovetor de Q^m associado a λ. Então de (0.4.32) segue que

$$\begin{cases} q_{1,2}u_2 = \lambda u_1, \\ q_{j,j-1}u_{j-1} + q_{j,j+1}u_{j+1} = \lambda u_j, j = 2, ..., m-1. \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ então $u_2 = 0$ e $u_3 = -(q_{2,1}/q_{2,3})\,u_1$. Desse modo é possível mostrar que se j é par então $u_j = 0$ e, se j é ímpar, então $u_j = c_j u_{j-2}$, sendo c_j constante que depende de Q^m. Daí resulta que se j é par então $u_j = 0$ e se j é ímpar então $u_j = c'_j u_1$, para algum $c'_j \in \mathbb{C}$. O caso $\lambda \neq 0$ é análogo.
(iv) De **(iii)** resulta que os autovalores de Q^m são dois a dois distintos. De Q^m real resulta que $\lambda \in \operatorname{Spec} Q^m \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \operatorname{Spec} Q^m$. Daí e de **(ii)** segue o resultado.
(v) Análogo ao item **(i)**. ■

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \neq 0$ e dados $b \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, defina

$$T_0\,(m : A : n : b) = 0 \in \mathbb{R}, \text{ se } m = 0$$

e, para $m \neq 0$ defina

$$T_0\,(m : A : n : b) = \begin{bmatrix} A & bmI & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -bI & A & b\,(m-1)\,I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b2I & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & bI \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -bmI & A \end{bmatrix}$$

sendo I matriz identidade da mesma dimensão de A.

Como todos os blocos de $T_0\,(m : A : n : b)$ comutam entre si, utilizando a Regra de Laplace para o cálculo de determinantes mostra-se que

Observação 2 *Existe $Q^m \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ satisfazendo as hipóteses do Lema 1 tal que*

$$\det(\lambda I - T_0\,(m : A : n : b)) = \det(\det(\lambda I - A)\,I - Q^m)\,, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Da Observação 2 e do Lema 1-(ii) segue que

Observação 3 $0 \in \operatorname{Spec} T_0\,(m : A : n : b) \Leftrightarrow \det A \in \operatorname{Spec} Q^m$.

Lema 4
(i) *Se A é real e* $\operatorname{Spec} A \subset i\mathbb{R}$ *então* $\operatorname{Spec} T_0\,(m : A : n : b) \subset i\mathbb{R}$.
(ii) *Se* $0 \in \operatorname{Spec} A$ *então* $0 \in \operatorname{Spec} T_0\,(m : A : n : b) \Leftrightarrow m \in 2\mathbb{N}$.

Demonstração.
(i) Considere $\lambda \in \operatorname{Spec} T_0\,(m : A : n : b)$ arbitrário. Da Observação 2 resulta que $\det(\lambda I - A) \in \operatorname{Spec} Q^m$. Do Lema 1-(iv) segue que $\operatorname{Re}\det(\lambda I - A) = 0$. Como A é real daí resulta que $\det(\operatorname{Re}\lambda I - A) = 0$, ou seja, $\operatorname{Re}\lambda \in \operatorname{Spec} A$. Como por hipótese $\operatorname{Spec} A \subset i\mathbb{R}$, temos que $\operatorname{Re}\lambda = 0$.
(ii) Suponha que $0 \in \operatorname{Spec} T_0\,(m : A : n : b)$. Como $0 \in \operatorname{Spec} A$, da Observação 3 resulta que $0 \in \operatorname{Spec} Q^m$, para algum $Q^m \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ que satisfaz as hipóteses do Lema 1. Pelo Lema 1-(v) temos que m é par. A recíproca é imediata do Lema 1-(v) e da Observação 2. ■

Dados $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ defina

$$T_0\,(m_1, m_2 : b_1, b_2) = T_0\,(m_1 : T_0\,(m_2 : 0 : 1 : b_2) : m_2 + 1 : b_1)\,.$$

Defina $T_0\,(m_1, m_2, ..., m_n : b_1, b_2, ..., b_n)$ indutivamente de modo análogo. Pelos lemas 1 e 4 temos o seguinte resultado:

Lema 5 *$\operatorname{Spec} T_0\,(m_1, m_2, ..., m_n : b_1, b_2, ..., b_n) \subset i\mathbb{R}$ e*

$$0 \in \operatorname{Spec} T_0\,(m_1, m_2, ..., m_n : b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow m_1, m_2, ..., m_n \in 2\mathbb{N}. \qquad (0.4.33)$$

Ordenação de conjuntos

Uma **ordenação** em um conjunto finito Λ é uma bijeção $h : \{1, 2, ..., |\Lambda|\} \to \Lambda$, no qual $|\Lambda| = \sharp\Lambda$. Dizemos que $h(k)$ **sucede** $h(j)$ quando $j < k$ e que $h(j+1)$ é o **sucessor** de $h(j)$. Dizemos que $h(j)$ **está entre** $h(k_1)$ e $h(k_2)$ quando $k_1 < j < k_2$ ou $k_2 < j < k_1$.

Dados os conjuntos finitos Λ_1, Λ_2 e as ordenações h_1, h_2 em Λ_1, Λ_2, respectivamente, definimos a **ordenação produto** $h_1 \times h_2$ em $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ por

$$h_1 \times h_2\,(j) = \begin{cases} (h_1(1), h_2(j)), j = 1, 2, ..., |\Lambda_2| \\ (h_1(2), h_2(j - |\Lambda_2|)), j = |\Lambda_2| + 1, ..., 2|\Lambda_2| \\ (h_2(3), h_2(j - 2|\Lambda_2|)), j = 2|\Lambda_2| + 1, ..., 3|\Lambda_2| \\ \vdots \\ (h_1(|\Lambda_1|), h_2(j - (|\Lambda_1| - 1)|\Lambda_2|)), \\ \qquad\qquad j = (|\Lambda_1| - 1)|\Lambda_2| + 1, ..., |\Lambda_1|\,|\Lambda_2|\,. \end{cases}$$

Observação 6 *Se $\alpha_1, \beta_1 \in \Lambda_1$ são tais que β_1 é o sucessor de α_1 então, para todo $\beta \in \Lambda_2$ temos que (β_1, β) sucede (α_1, β) e entre (β_1, β) e (α_1, β) existem exatamente $|\Lambda_2| - 1$ elementos de $\Lambda_1 \times \Lambda_2$.*

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \neq 0$ defina $\Lambda_n^m = \{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| = m\}$. Argumentando por indução sobre n mostra-se que existe uma ordenação em Λ_n^m com a seguinte propriedade:

(P.0) $\forall\alpha \in \Lambda_n^m$ temos que $\alpha + e_j - e_k$ sucede α, se $j < k$ e $\alpha_k \neq 0$.

A seguinte ordenação em Λ_2^m será útil:

$$h(j) = (j-1, m-j+1), j = 1, 2, ..., m+1. \tag{0.4.34}$$

Considerando a ordenação produto em $\Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_n}$, no qual $m_1, m_2, ..., m_n \in \mathbb{N}$, da Observação 6 resulta que

(P.1) Se $\alpha \in \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_n}$ e $\alpha_{2k} \neq 0, k = 1, 2, ..., n$ (resp. $\alpha_{2k-1} \neq 0$) então $\alpha + e_{2k-1} - e_{2k}$ sucede α (resp. α sucede $\alpha + e_{2k} - e_{2k-1}$) e entre α e $\alpha + e_{2k-1} - e_{2k}$ (resp. entre $\alpha + e_{2k} - e_{2k-1}$) existem exatamente $\sharp\left(\Lambda_2^{m_{k+1}} \times ... \times \Lambda_2^{m_n}\right) - 1$ elementos. Em particular, se $\alpha_{2n} \neq 0$ então $\alpha + e_{2n-1} - e_{2n}$ é o sucessor de α e, se $\alpha_{2n-1} \neq 0$, então α é o sucessor de $\alpha + e_{2n} - e_{2n-1}$.

Demonstração de (4.2.3)

Nesta seção seguimos a notação da Seção 4.2. A demonstração de (4.2.3) é feita no resultado que segue.

Lema 7 *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n'}, \lambda_{n'+1} ... \lambda_n$ os autovalores de $DL(0)$, no qual $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n'}$ são os autovalores reais e $\lambda_{n'+1}, \lambda_{n'+2}, ..., \lambda_n$ são os autovalores complexos de $DL(0)$ (isto é, $\lambda_j \notin \mathbb{R}, j = n'+1, ..., n$). Então*

$$\operatorname{Spec} B^m \cap \mathbb{R} =$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} m_j \operatorname{Re} \lambda_j; m_1, m_2, ..., m_{n'} \in \mathbb{N}, m_{n'+1}, m_{n'+2}, ..., m_n \in 2\mathbb{N} \text{ } e \text{ } \sum_{j=1}^{n} m_j = m \right\}.$$

Demonstração. Por uma mudança linear de coordenadas podemos supor que $DL(0)$ está na sua forma de Jordan real. Suponha que $\lambda_{n'+1}, \lambda_{n'+2}, ..., \lambda_n$ estejam ordenados de modo que autovalores complexos conjugados sejam consecutivos. Defina $r = (n-n')/2$ e $a_j = \operatorname{Re} \lambda_{n'+2j-1}, b_j = \operatorname{Im} \lambda_{n'+2j-1}, j = 1, 2, ..., r$.

Note que

$$\Lambda_n^m = \bigcup_{m'+m_1+m_2+...+m_r=m} \Lambda_{n'}^{m'} \times \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}.$$

Então, considere:

- em $\Lambda_{n'}^{m'}$ uma ordenação que tenha tenha a propriedade (P.0),
- em $\Lambda_2^{m_j}$ a ordenação dada por (0.4.34), $j = 1, 2, ..., r$,
- em cada $\Lambda_{n'}^{m'} \times \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}$ a ordenação produto,
- em

$$\left\{ \Lambda_{n'}^{m'} \times \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}; m' + m_1 + m_2 + ... + m_r = m \right\} \tag{0.4.35}$$

uma ordenação que tenha a seguinte propriedade:

(P.2) Se $m_{j+1} \neq 0$ e $j = 1, 2, ..., n-1$ então

$$\Lambda_{n'}^{m'} \times \Lambda_2^{m_1} \times ... \times \Lambda_2^{m_j+1} \times \Lambda_2^{m_{j+1}-1} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}$$

sucede

$$\Lambda_{n'}^{m'} \times \Lambda_2^{m_1} \times ... \times \Lambda_2^{m_j} \times \Lambda_2^{m_{j+1}} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}.$$

Com isso temos uma ordenação fixada em Λ_n^m. Denote um $n-$multi-índice por (α, β), sendo $\alpha \in \mathbb{N}^{n'}$ e $\beta \in \mathbb{N}^{2r}$. Usando o fato de que $DL(0)$ está na sua forma de Jordan real, podemos escrever (4.2.1) da seguinte forma:

$$\begin{gathered}
\left(\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \lambda_j\right) \partial^{(\alpha,\beta)} u(0) + \\
\left(\sum_{j=1}^{r} \left(\beta_{2j-1} + \beta_{2j}\right) a_j\right) \partial^{(\alpha,\beta)} u(0) + \\
\sum_{j=1}^{r} b_j \left[\beta_{2j} \partial^{(\alpha,\beta+e_{2j-1}-e_{2j})} u(0) - \alpha_{2j-1} \partial^{(\alpha,\beta+e_{2j}-e_{2j-1})} u(0)\right] + \\
\sum_{j=1}^{n'-1} \mu_j \alpha_{j+1} \partial^{(\alpha+e_j-e_{j+1},\beta)} u(0) + \\
\sum_{j=1}^{r-1} \epsilon_j \left[\beta_{2j+1} \partial^{(\alpha,\beta+e_{2j-1}-e_{2j+1})} u(0) + \beta_{2j+2} \partial^{(\alpha,\beta+e_{2j}-e_{2j+2})} u(0)\right] + \\
c(0)\, \partial^{(\alpha,\beta)} u(0) = \partial^{(\alpha,\beta)} f(0), \alpha \in \mathbb{N}^{n'}, \beta \in \mathbb{N}^{2r},
\end{gathered} \tag{0.4.36}$$

sendo $\mu_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, ..., n'-1$ e $\epsilon_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, ..., r-1$. Dividiremos o restante da demonstração em etapas.

Etapa 1. B^m é uma matriz triangular superior em blocos e o conjunto dos blocos da diagonal de B^m está em correspondência biunívoca com o conjunto definido em (0.4.35) e para o cálculo dos autovalores de B^m, podemos considerar $\epsilon_j = 0, j = 1, 2, ..., r-1$ em (0.4.36).

De fato, observe que:

$$j = 1, 2, ..., r, \beta \in \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta + e_{2j-1} - e_{2j} \in \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}, \text{ se } \beta_{2j} \neq 0, \\ \beta + e_{2j} - e_{2j-1} \in \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}, \text{ se } \beta_{2j-1} \neq 0, \end{cases} \tag{0.4.37}$$

$$j = 1, 2, ..., n'-1, \alpha \in \Lambda_{n'}^{m'} \Rightarrow \alpha + e_j - e_{j+1} \in \Lambda_{n'}^{m'}, \text{ se } \alpha_j \neq 0 \tag{0.4.38}$$

e

$$j=1,2,...,r-1, \beta \in \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta + e_{2j-1} - e_{2j+1} \in \Lambda_2^{m_1} \times ... \times \Lambda_2^{m_j+1} \times \Lambda_2^{m_{j+1}-1} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}, \text{ se } \beta_{2j+1} \neq 0, \\ \\ \beta + e_{2j} - e_{2j+2} \in \Lambda_2^{m_1} \times ... \times \Lambda_2^{m_j+1} \times \Lambda_2^{m_{j+1}-1} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}, \text{ se } \beta_{2j+2} \neq 0. \end{cases} \tag{0.4.39}$$

De (0.4.36)-(0.4.39) e de (P.2) segue a **Etapa 1.**

Etapa 2. Seja B o bloco da diagonal de B^m que corresponde a $\Lambda_{n'}^{m'} \times \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}$. Se $m_1, m_2, ..., m_r \in 2\mathbb{N}$ então

$$\operatorname{Spec} B \cap \mathbb{R} = \left\{ \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \lambda_j + \sum_{j=1}^{r} m_j a_j ; \alpha \in \Lambda_{n'}^{m'} \right\}$$

e se $m_j \notin 2\mathbb{N}$ para algum $j = 1, 2, ..., r$ então

$$\operatorname{Spec} B \cap \mathbb{R} = \emptyset.$$

De fato, observe que

(P.3) se

$$(\alpha, \beta) \in \Lambda_{n'}^{m'} \times \Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}$$

e $\alpha_{j+1} \neq 0$ então $(\alpha + e_j - e_{j+1}, \beta)$ sucede (α, β) e, entre eles existem exatamente $\sharp \left(\Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r} \right) - 1$ elementos.

Daí segue que B é uma matriz triangular superior em blocos e, para o cálculo dos autovalores de B, podemos considerar $\mu_j = 0, j = 1, 2, ..., n' - 1$, em (0.4.36).

Fixado $\alpha \in \Lambda_{n'}^{m'}$, de (P.1) segue que, quando β percorre $\Lambda_2^{m_1} \times \Lambda_2^{m_2} \times ... \times \Lambda_2^{m_r}$ a segunda e terceira linhas de (0.4.36) produzem um bloco igual a

$$\left(\sum_{j=1}^{r} m_j a_j \right) I + T_0 \left(m_1, m_2, ..., m_r : b_1, b_2, ..., b_r \right)$$

que está na diagonal de B. Logo, no caso em que $\mu_j = \epsilon_j = 0$ temos que B é uma matriz diagonal em blocos e que, cada bloco da sua diagonal, é igual a

$$\left(\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \lambda_j + \sum_{j=1}^{r} m_j a_j \right) I + T_0 \left(m_1, m_2, ..., m_r : b_1, b_2, ..., b_r \right)$$

para algum $\alpha \in \Lambda_{n'}^{m'}$ e reciprocamente. Do Lema 5 segue a **Etapa 2.** ∎

Referências Bibliográficas

[BCP] BERGAMASCO, A. P.; CORDARO, P. D.; and PETRONILHO, G.: Global Solvability for a Class of Complex Vector Fields on the Two-Torus, **Comm. Partial Diff. Equations**, vol. 29 (2004) 785–819.

[BP] BERGAMASCO, A. P.; PETRONILHO, G.: Closedness of the Range for Vector Fields on the Torus, **J. Diff. Eq.**, 154 (1999) 132–139.

[Da] DATTORI DA SILVA, P. L.: **Resolubilidade Global para Campos Reais,** Dissertação de Mestrado, UFSCar, 1999.

[DH] DUISTERMAAT, J.; HÖRMANDER, L.: Fourier integral operators II, **Acta Math.**, v. 128 (1972) 183-269.

[El] LIMA, E. L.: **Variedades Diferenciáveis**, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[GS] GUILLEMIN, V., SCHAEFFER, D.: On a certain class of Fuchsian partial differential equations, **Duke Math. Journal**, vol. 44 (1977) 157-199.

[Ha] HARVEY, C.: On Domination Estimates and Global Existence, **Journal of Mathematics and Mechanics**, vol. 16, No 7 (1967) 675-890.

[Hö] HÖRMANDER, L.: **Linear Partial Differential Operators**, Springer-Verlag, 1976.

[H1] HÖRMANDER, L.: **The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol I**, Springer-Verlag, 1983.

[H2] HÖRMANDER, L.: **The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol II**, Springer-Verlag, 1983.

[H3] HÖRMANDER, L.: **The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol III**, Springer-Verlag, 1983.

[H4] HÖRMANDER, L.: **The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol IV**, Springer-Verlag, 1983.

[Kö] KÖTHE, G.: **Topological vector spaces II**, Springer-Verlag, 1979.

[Ku] KUPERBERG, K.: A smooth couterexample to the Seifert conjecture, **Ann. of Math.**, 140 (1994) 723-732.

[Ma] MALGRANGE, B.: Existence et approximation des solutions des équations aus dérivées partielles et des équations de convolution, **Ann. Inst. Fourier Grenoble** 6, (1955-56) 271-355.

[MP] MELO, W.; PALIS, J.: **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[Ne] NELSON, E.: **Topics in Dynamics I: Flows**, Princeton University Press, Princeton, 1969.

[Ru] RUDIN, W.: **Functional Analysis**, McGraw-Hill, New York, 1991.

[Sa] SANTOS FILHO, J. R.: Injective mappings and solvable vector fields of Euclidean spaces, **Topology and its Applications**, 136 (2004) 261-274.

[Sc] SCHWEITZER, P.: Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, **Ann. of Math.**, 100 (1974), 386-400.

[Se] SEIFERT, H.: Closed integral curves in $3-$spaces and isotopic two-dimensional deformation, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 1 (1950) 287-302.

[So] SOTOMAYOR, J.: **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[St] STERNBERG, S.: On the structure of local homeomorphisms of Euclidean $n-$Space II, **Amer. J. Math.**, 80 (1958), 623-632.

[T1] TREVES, F.: **Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations**, Springer-Verlag, 1967.

[T2] TREVES, F.: **Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels**, Academic Press, New York, 1967.