UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações de BBM-Burgers Generalizadas: Resultados de Existência e Convergência de Soluções

Claudete Matilde Webler

São Carlos - SP
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações de BBM-Burgers Generalizadas: Resultados de Existência e Convergência de Soluções

Claudete Matilde Webler
Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP
Março de 2009

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

W376eb

Webler, Claudete Matilde.
Equações de BBM-Burgers generalizadas : resultados de existência e convergência de soluções / Claudete Matilde Webler. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
109 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações de BBM-Burgers. 3. Existência de soluções suaves. 4. Convergência. 5. Soluções entrópicas. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

José Ruidival Soares dos Santos Filho

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile
DM- UFSCar

Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes
IME – USP

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
IMECC - UNICAMP

.

Orientador

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Aos meus pais Lothário e Ivone com todo amor e carinho.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por caminhar comigo tornando a concretização deste sonho possível. Meu profundo louvor e gratidão.

Ao Professor Dr. Cezar Issao Kondo pela orientação no mestrado e doutorado, pelos conselhos profissionais, exemplo e amizade.

Aos meus pais, Lothário e Ivone, por todo amor, carinho, orações e exemplos. Aos meus irmãos e cunhados: José, Dulce e Eloir, Lori e Dionísio, Egídio e Marisa, Cledir e Cheila. Obrigada por acreditarem em mim, obrigada pela força, obrigada pelo carinho, obrigada de coração! Às minhas sobrinhas: Franciele e Alecsandra, pelo carinho e amizade. Perdão meninas por todos os convites de festas (de aniversários, Crisma) recusados.

Ao Rodrigo, meu namorado, meu melhor amigo, que esteve ao meu lado me encorajando, incentivando e tornando bem mais alegres estes anos de estudo. Obrigada pelo carinho, pelo apoio, pela compreensão. Obrigada por tudo!

Aos meus padrinhos de Batismo e Crisma: José Aldino e Margarida, Maria e Alcídio, Lourdes e Rodolfo pelo carinho e amizade. Aos primos, tios e amigos pela amizade e torcida positiva.

Aos professores de colégio, por toda formação, pela amizade e por me incentivarem para eu dar continuidade aos estudos.

Aos professores dos departamentos de Matemática da UFSM e UFSCar pelos ensinamentos matemáticos e pela amizade.

A todos os colegas do PPGM pelo companheirismo, ensinamentos e amizade. Obrigada Jamil pela amizade, força e por estar sempre presente nestes seis anos de caminhada no mestrado e doutorado. Obrigada Elaine, Taísa, Ricardo e Marciano, pela amizade e torcida positiva. Aos amigos gaúchos, pelas conversas animadas relembrando histórias do RS e da UFSM. Vou sentir saudades!

À secretária Irma pela amizade.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Muito obrigada!

Resumo

Estudamos a existência de soluções globais para certas equações da forma

$$u_t + f(u)_x = \gamma B(u)_{xx} + \delta u_{xxt} - \alpha u_{xxxx},$$

$$u_t + f(u)_x = \gamma B(u_x)_x + \delta u_{xxt} - \alpha u_{xxxx},$$

$$u_t + f(u)_x = \delta u_{xxt} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \gamma_n \partial_x^{2n} u$$

e no caso multidimensional

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f_j(u)_{x_j} = \delta \sum_{j=1}^{d} u_{x_j x_j t} + \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \gamma_n \partial_{x_j}^{2n} u \right),$$

onde $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma_1 > 0$,..., $\gamma_N > 0$ são constantes positivas e f, B são funções suaves satisfazendo certas hipóteses apropriadas. Em seguida consideramos soluções de leis de conservação regularizadas destas equações. Seguindo um trabalho pioneiro feito por Schonbek e um trabalho de LeFloch e Natalini, estabelecemos a convergência das soluções regularizadas da segunda e terceira equações, para soluções descontínuas de leis de conservação hiperbólicas. Seguindo um trabalho de Szepessy e um trabalho de Kondo e LeFloch, mostramos (usando a teoria de soluções a valores de medida) que as soluções da quarta equação convergem para a única solução entrópica do problema hiperbólico associado.

Abstract

We study the global existence of solutions for certain equations of the form

$$u_t + f(u)_x = \gamma B(u)_{xx} + \delta u_{xxt} - \alpha u_{xxxx},$$

$$u_t + f(u)_x = \gamma B(u_x)_x + \delta u_{xxt} - \alpha u_{xxxx},$$

$$u_t + f(u)_x = \delta u_{xxt} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \gamma_n \partial_x^{2n} u,$$

and the multidimensional case

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f_j(u)_{x_j} = \delta \sum_{j=1}^{d} u_{x_j x_j t} + \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \gamma_n \partial_{x_j}^{2n} u \right)$$

where $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma_1 > 0$,..., $\gamma_N > 0$, are positive constants, f and B are a smooth functions satisfying certain appropriate assumptions. We consider solutions of conservation laws regularized of this equations. Following a pioneering work by Schonbek and a work by LeFloch and Natalini, we establish the convergence of the regularized solutions of the second and third equations toward discontinuous solutions of the hyperbolic conservation law. Following a work by Szepessy and and work by Kondo and LeFloch, we also deal with the convergence of solutions of the last equation, and the proofs are based instead on uniqueness theory for entropy measure-valued solutions.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência global de soluções para equações da forma

$$u_t + f(u)_x = \gamma B(u)_{xx} + \delta u_{xxt} - \alpha u_{xxxx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u_t + f(u)_x = \gamma B(u_x)_x + \delta u_{xxt} - \alpha u_{xxxx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

e na forma mais geral

$$u_t + f(u)_x = \delta u_{xxt} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \gamma_n \partial_x^{2n} u, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

com dado inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Também estudamos a existência global de soluções para o caso multidimensional

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f_j(u)_{x_j} = \delta \sum_{j=1}^{d} u_{x_j x_j t} + \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \gamma_n \partial_{x_j}^{2n} u \right), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

com dado inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

Consideramos as funções reais f e B suficientemente suaves satisfazendo certas hipóteses apropriadas que serão dadas nos próximos capítulos. As constantes δ, γ, α, γ_1,..., γ_N são positivas e $N \in \mathbb{N}$.

As equações do tipo (1), (2),(3) e (5) estão relacionadas com as bem conhecidas equações de BBM que foram estudadas por T. B. Benjamin, J. L. Bona e J. J. Mahony em [2] como um refinamento das equações de KdV [2], [20] e [1]. O estudo das equações (1), (2), (3) e (5) é motivado por considerações físicas da mecânica dos fluidos. Nas equações (1)-(3) os termos de viscosidade $\gamma B(u)_{xx}$, $\gamma B(u_x)_x$, $\gamma_1 u_{xx}$ e o termo dissipativo αu_{xxxx} (ou $\gamma_2 u_{xxxx}$) representam experiências físicas ([2],[5]) e como estudado em [5] e [22], a convergência das sequências de soluções $\{u(x,t;\gamma,\delta,\alpha)\}$ quando $\gamma \to 0$, $\delta \to 0$ e $\alpha \to 0$ corresponde a algum processo físico como, por exemplo, o desaparecimento da viscosidade.

Quando nas equações (1) ou (2) temos $\alpha = 0$, $B(\lambda) = \lambda$ e $f(u)$ é convexa e satisfaz certas condições de crescimento no infinito, M. E. Schonbek em [22] discutiu a convergência forte para a sequência de soluções $\{u(x,t;\delta,\gamma)\}$ quando $\delta \to 0$ e $\gamma \to 0$. No caso da equação (3), H. Zhao e B. Xuan, em [27], estudam o caso $N = 2$ se $\delta = O(\gamma_1^{\frac{(4+2p)}{(2-p)}})$ e $\gamma_2 = O(\gamma_1^{\frac{(6+3p)}{(2-p)}})$ valem para $0 \leq p < 2$. O caso $N = 1$ foi estudado por M. E. Schonbek em [22]. Logo nossos resultados estendem resultados de [22] e [27].

Existem investigações de convergência para a lei de conservação da forma

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \delta_n \partial_x^{2n+1} u, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

feitas por N. Fujino e M. Yamazaki em [8], onde eles obtem um resultado de convergência no caso $N = 3$. Além disso, H. Zhao, C.-J Zhu e Z. Yu estudam a existência e convergência de soluções de

$$u_t + f(u)_x + \delta \partial_x^{2n+1} u = \varepsilon u_{xx}$$

em [28] e

$$u_t + f(u)_x - \delta \partial_x^{4n+2} u = \varepsilon u_{xx}$$

em [29], quando ε e δ são constantes positivas e n é um inteiro positivo. Observamos que o estudo do problema envolvendo a equação (3) é diferente destes três casos pois nenhum deles tem o termo u_{xxt}. A presença deste termo na equação muda tanto o método de mostrar a existência de soluções bem como as estimativas que precisamos obter para garantir os resultados de convergência.

Dividimos este trabalho em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresentamos alguns resultados (definições, lemas, teoremas) que foram usados no decorrer do trabalho.

No segundo capítulo estudamos o problema de Cauchy (1) e (4). Mostramos um resultado de existência global de soluções usando uma técnica inspirada num trabalho de D. Hoff e J. Smoller em [10] (ou veja [26]).

No terceiro capítulo estudamos primeiramente a existência de soluções do problema de Cauchy (2) e (4). Consideramos $B(\lambda) = \beta(\lambda) + \lambda$. Mostramos que para f e β suficientemente suaves e $|\beta'(\nu)| \leq M$, para todo $\nu \in \mathbb{R}$ e algum $M > 0$, existe uma solução local em $C((0,T];H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}))$, para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ e $T > 0$ suficientemente pequeno. Se além das hipóteses acima assumirmos que $\beta(0) = 0$ e β é não-decrescente então obtemos uma solução global em $C((0,\infty);H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,\infty);H^{k-1}(\mathbb{R}))$, para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. Obtemos resultados de convergência para uma sequência de soluções de (2) e (4), quando $B(\lambda) = \frac{\varepsilon}{\gamma}\beta(\lambda) + \lambda$ e β satisfaz as hipóteses acima. Em alguns casos podemos considerar $\varepsilon = \gamma$. Também assumimos f satisfazendo a condição de crescimento $|f'(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|^p)$ para algum $p \in [0,2)$ ou $|f'(\lambda)| \leq C$ para $p > 0$ qualquer (o conteúdo deste capítulo está em [13]).

As equações (1) e (2) tem em comum o fato de terem um termo dissipativo não linear. A equação (3), estudada no quarto capítulo, não tem nenhum termo não linear além de f, mas tem derivadas pares de ordem $2N$ para $N \geq 1$ inteiro qualquer. Mostramos a existência de solução local em $C((0,T];H^k(\mathbb{R}))$, para um $T > 0$ suficientemente pequeno, e obtemos mais regularidade dependendo de N. Mais precisamente, mostramos que a solução está em $C((0,T];H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}))$ se $N \leq 3$ e está em $C((0,T];H^{k+N-3}(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}))$ se $N > 3$. Estendemos a solução globalmente, ou seja, para todo $t > 0$. Tomamos uma sequência de soluções de (3) e (4) e mostramos resultados de convergência quando f satisfaz as mesmas condições de crescimento como no capítulo 3 (o conteúdo do capítulo quatro está em [14]). Para mostrar os resultados de convergência (nos capítulos 3 e 4) consideramos sequências de soluções destas equações e seguindo um trabalho pioneiro de Schonbek [22] e um trabalho de LeFloch e Natalini [18] estabelecemos a convergência destas soluções regularizadas para soluções descontínuas da lei de conservação

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

No último capítulo estudamos a lei de conservação multidimensional (5) com dado inicial (6). Mostramos que se $f = (f_1, ..., f_d)$ é suficientemente suave e $u_0 \in H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)$ então o problema

(5) e (6) possui solução global $u \in C([0,T];H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d))$. Da mesma forma como no caso unidimensional, estudado no quarto capítulo, obtemos mais regularidade dependendo de N. Em seguida, consideramos uma sequência $\{u^\gamma\}$ de soluções de (5) e (6) e mostramos, usando a teoria de soluções a valores de medida (veja [23]), que estas soluções convergem para a única solução entrópica do problema hiperbólico associado

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f_j(u)_{x_j} = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \tag{7}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{8}$$

quando $\|f'\|_\infty \leq C$ para alguma constante $C > 0$, desde que $\lim\limits_{\gamma \to 0} u_0^\gamma = u_0 \ \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ (o conteúdo do capítulo cinco está em [15]).

Capítulo

1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é facilitar a leitura e o entendimento dos próximos capítulos. Para isso apresentamos alguns conteúdos preliminares (definições, lemas, teoremas) que foram importantes para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 A Transformada de Fourier e Espaços Envolvendo Tempo

Seguem abaixo algumas definições e propriedades da transformada de Fourier e sua inversa que podem ser encontrados em [7].

Definição 1.1 *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier*

$$\widehat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-ix.\xi\} u(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e sua transformada inversa por

$$\check{u}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\xi.x\} u(\xi)d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.1 *(Igualdade de Parseval) Assuma $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $\widehat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.1}$$

Definição 1.2 *Em vista da igualdade (1.1) podemos definir a transformada de Fourier de uma função* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *como segue. Escolha uma sequência* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *com*

$$u_k \to u \qquad em \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

De acordo com (1.1), $\|\widehat{u}_k - \widehat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u_k - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ *e assim* $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *é uma sequência de Cauchy em* $L^2(\mathbb{R}^n)$*. Esta sequência consequentemente converge a um limite, que definimos sendo* $\widehat{u}$ *:*

$$\widehat{u}_k \to \widehat{u} \qquad em \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

A definição de $\widehat{u}$ *independe da escolha da sequência* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$*. Analogamente definimos* $\check{u}$*.*

Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, onde cada componente α_i é um inteiro não negativo, é chamado de multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Dado um multi-índice α, definimos

$$D^{\alpha}u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n} u(x).$$

Se k é um inteiro não negativo então definimos

$$D^k u(x) := \{D^{\alpha}u(x); |\alpha| = k\},$$

como sendo o conjunto das derivadas de ordem k e

$$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha}u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.2 *(Propriedades da transformada de Fourier) Assuma que* $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$*. Então*
(i) $\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}\bar{\widehat{v}}d\xi$*;*
(ii) $\widehat{D^{\alpha}u} = (i\xi)^{\alpha}\widehat{u}$ *para cada multi-índice* α *tal que* $D^{\alpha}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$*;*
(iii) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *então* $(u * v)^{\wedge} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{u}\widehat{v}$*;*
(iv) Além disso, $u = (\widehat{u})^{\vee}$*.*

Teorema 1.3 *(Caracterização de H^k pela transformada de Fourier) Seja k um inteiro não negativo.*
i) A função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pertence a $H^k(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

$$(1+|y|^k)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

ii) Além disso, existe uma constante positiva C tal que

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1+|y|^k)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}$$

para cada $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$.

Seja X um espaço de Banach real com norma $\|.\|_X$. Definimos os seguintes espaços envolvendo um tempo $T > 0$ (veja também em [7]).

Definição 1.3 *Definimos $C([0,T];X)$ como sendo o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$ com*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Definição 1.4 *Definimos $L^p(0,T;X)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis $u : [0,T] \to X$ com*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \; ess \; \|u(t)\|_X < \infty.$$

1.2 Algumas Estimativas em $W^{S,p}(\mathbb{R}^n)$

Teorema 1.4 *Suponha que $G = G(w)$ é suficientemente suave para $w = (w_1, \ldots, w_N)$ tal que $G(0) = 0$. Para qualquer inteiro $S \geq 0$, se a função vetorial $w = w(x,t)$ satisfaz*

$$w = w(x) \in W^{S,p}(\mathbb{R}^n), \;\; 1 \leq p \leq +\infty \tag{1.2}$$

e

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M, \tag{1.3}$$

sendo M uma constante positiva, então a função composta $G(w) \in W^{S,p}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|G(w)\|_{W^{S,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(M)\|w\|_{W^{S,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $C(M)$ *é uma constante positiva que depende de* M*. Além disso, quando* $p = 2$*, para cada inteiro* $0 \leq k \leq S$ *temos*

$$\sum_{|\alpha|=k} \left\| \frac{\partial^k G(w)}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(M) \sum_{|\alpha|=k} \left\| \frac{\partial^k w}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração: Veja [19], página 22.

■

Teorema 1.5 *Suponha que* $G = G(w)$ *é suficientemente suave. Para quaisquer* $u, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *com* $s \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$*, se* w *satisfaz (1.3) então temos*

$$G(w)u \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\|G(w)u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_s\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}(|G(0)| + \|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)})$$

sendo C_s *uma constante positiva que depende de* M *e de* s*.*

Demonstração: Veja [19], página 31.

■

Corolário 1.1 *Suponha que* $G = G(w)$ *é suficientemente suave. Se as funções* $\overline{w} = \overline{w}(x)$ *e* $\overline{\overline{w}} = \overline{\overline{w}}(x)$ *satisfazem (1.3) e* $\overline{w}, \overline{\overline{w}} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *com* $s \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ *então para*

$$w^* = \overline{w} - \overline{\overline{w}}$$

temos

$$\|G(\overline{w})-G(\overline{\overline{w}})\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_s\|w^*\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}(|G'(0)|+\|\overline{w}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}+\|\overline{\overline{w}}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)})$$

sendo C_s uma constante positiva que depende de M e de s.

Demonstração: Pela fórmula de Taylor temos $G(\overline{w})-G(\overline{\overline{w}}) = G'(\theta)(\overline{w}-\overline{\overline{w}})$ com $\theta \in (\overline{w},\overline{\overline{w}})$. Podemos escrever $\theta = t\overline{w}+(1-t)\overline{\overline{w}}$, $t \in (0,1)$ e assim $\|\theta\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|\overline{w}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}+\|\overline{\overline{w}}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Pelo Teorema 1.5,

$$\|G'(\theta)(\overline{w}-\overline{\overline{w}})\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_s\|w^*\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}(|G'(0)|+\|\theta\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}).$$

■

1.3 Resultados de Compacidade

Em [25] Tartar provou o seguinte teorema:

Teorema 1.6 *Suponhamos que K é limitado em $\mathbb{R}^n$ e Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Seja $\{u^\gamma\}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $u^\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$, com $u^\gamma(x) \in K$ q.t.p $x \in \Omega$. Então existe uma subsequência $\{u^{\gamma_k}\}$ e uma família de medidas de probabilidade $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ em $\mathbb{R}^n$ com $Spt\,\nu_x \subset \overline{K}$ tal que se $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\overline{f}(x) = <\nu_x, f(\lambda)>, \;\; q.t.p$$

então

$$f(u^{\gamma_k}) \rightharpoonup \overline{f} \;\; em \;\; L^\infty(\Omega) \;\; fraca \;\; *.$$

Schonbek [22] estendeu o resultado de Tartar (Teorema 1.6) para sequências em L^p :

Teorema 1.7 *Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Seja $u^\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$, uma sequência de funções uniformemente limitadas em $L^p(\Omega)$ para algum $p > 1$. Então existe uma subsequência $\{u^{\gamma_k}\}$ e uma* *família de medidas de probabilidade* $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *tal que se* $f \in C(\mathbb{R}^n)$ *e satisfaz* $f(u) = o(|u|^p)$, *quando* $|u| \to \infty$, *então*

$$f(u^{\gamma_k}) \rightharpoonup < \nu_x, f(\lambda) > = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda)d\nu_x(\lambda)$$

no sentido das distribuições.

Em seguida, Schonbek estudou a compacidade de uma sequência de soluções aproximadas $\{u^\gamma\}$ de uma equação diferencial da forma

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1.4}$$

onde f é não linear, suave e satisfaz certas condições de crescimento no infinito.

De Schonbek [22] temos os seguintes resultados:

Teorema 1.8 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto e limitado. Seja* $f \in C^1$, *satisfazendo*

$$f(u) = o(|u|^p), \ \ quando \ \ |u| \to \infty,$$

para algum $p > 1$. *Seja* $\{u^\gamma\}$ *uma sequência de soluções aproximadas de (1.4), uniformemente limitada em* $L^p(\Omega)$, *que satisfaz a condição de entropia*

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\gamma) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u^\gamma) \in \{conjunto \ \ compacto \ \ de \ \ H^{-1}(\Omega)\}$$

para toda $\eta \in C^2$, *que tem suporte compacto e é convexa em algum intervalo limitado, não vazio e* $\psi'(u) = \eta'(u)f'(u)$ *então existe uma subsequência* $\{u^{\gamma_k}\}$ *tal que* $u^{\gamma_k} \rightharpoonup \overline{u}$, $f(u^{\gamma_k}) \rightharpoonup f(\overline{u})$ *no sentido das distribuições e* $\overline{u}$ *é solução fraca de (1.4).*

Corolário 1.2 *Sejam* Ω, $\{u^\gamma\}$ *e* f *como no Teorema 1.8. Se para quaisquer funções* $\eta \in C^2$ *que tem suporte compacto e são convexas em algum intervalo finito temos que* $\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\gamma) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u^\gamma) \in$ $\{$*conjunto compacto de* $H^{-1}(\Omega)\}$+ $\{$*conjunto limitado de* $M(\Omega)\}$, *onde* $M(\Omega)$ *denota um espaço de medida e* $\psi'(u) = \eta'(u)f'(u)$, *então a conclusão do Teorema 1.8 vale. Se, além disso,* $f'' > 0$ *então* $u^{\gamma_k} \to \overline{u}$ *fortemente em* $L^q(\Omega)$, $1 < q < p$.

Em [18] podemos encontrar uma versão mais simples (caso em que $m = 2$ e $n = 1$) do Teorema 1.7 dada no seguinte lema:

Lema 1.1 *Seja $\{u_j\}$ uma sequência uniformemente limitada em $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}))$. Então existe uma subsequência $\{u'_j\}$ e uma aplicação $\nu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to Prob(\mathbb{R})$ com valores no espaço das medidas não negativas com massa unitária (medidas de probabilidade) tal que, para toda função $g \in C(\mathbb{R})$ satisfazendo*

$$g(u) = o(|u|^r), \ \ quando \ \ |u| \to \infty, \tag{1.5}$$

para algum $r \in [0,q)$, vale o seguinte limite de representação

$$\lim_{j' \to \infty} \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} g(u_{j'}(x,t))\phi(x,t)dxdt = \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)d\nu_{(x,t)}(\lambda)\phi(x,t)dxdt \tag{1.6}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$.

Definição 1.5 *A aplicação a valores de medida $\nu_{(x,t)}$ é uma medida de Young associada com a sequência $\{u_j\}$.*

De Kruzkov [16], Lax [17], DiPerna [6] e Szepessy [23], definimos agora as soluções entrópicas e as soluções entrópicas a valores-de-medida (m.-v.) do problema de Cauchy

$$u_t + f(u)_x = 0, \ \ (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Definição 1.6 *Dizemos que u é uma solução entrópica de (1.7) se u é solução fraca de (1.7)-(1.8) e satisfaz a condição de entropia*

$$\eta(u)_t + \psi(u)_x \leq 0,$$

no sentido das distribuições, para toda função convexa $\eta(u)$ com $\psi'(u) = \eta'(u)f'(u)$.

Definição 1.7 *Assuma que f satisfaz a condição de crescimento (1.5) e $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$. Uma medida de Young ν associada com uma sequência $\{u_j\}$, que é assumida uniformemente limitada* *em* $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}))$, *é chamada uma solução entrópica m.-v. do problema (1.7) e (1.8) se*

$$\partial_t < \nu(.), |\lambda - k| > + \partial_x < \nu(.), sgn(\lambda - k)(f(\lambda) - f(k)) > \leq 0 \tag{1.9}$$

no sentido das distribuições para todo $k \in \mathbb{R}$ *e se para todo intervalo fechado e limitado* $I \subset \mathbb{R}$ *temos que*

$$\lim_{T \to 0^+} \frac{1}{T} \int_0^T \int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)| > dxdt = 0. \tag{1.10}$$

De LeFloch e Natalini [18] temos o seguinte resultado de convergência:

Lema 1.2 *Assuma que* f *satisfaz (1.5) e* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$. *Seja* $\{u_j\}$ *uma sequência uniformemente limitada em* $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}))$ *para* $q \geq 1$, *e seja* ν *uma medida de Young associada com esta sequência. Se* ν *é uma solução entrópica m.-v. do problema (1.7) e (1.8), então*

$$\lim_{j \to \infty} u_j = u \quad \in \quad L^\infty(\mathbb{R}_+;L^r_{loc}(\mathbb{R}))$$

para todo $r \in [1,q)$, *onde* $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}))$ *é a única solução entrópica de (1.7) e (1.8).*

1.4 Resultados de Compacidade: o Caso Multidimensional

Para começar damos a generalização de medida de Young associada com uma sequência limitada em L^∞ como usada por Tartar [25] e DiPerna [6], e limitada em L^p, como usada por DiPerna em [6] e por Szepessy em [23].

Lema 1.3 *Seja* $\{u_j\}$ *uma sequência uniformemente limitada em* $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^p(\mathbb{R}^d))$, *isto é,*

$$\|u_j(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq k, \qquad q.t.p. \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.11}$$

Então existe uma subsequência $\{u_{j'}\}$ *e uma aplicação mensurável* $\nu : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to Prob(\mathbb{R})$ *com valores no espaço das medidas não negativas com massa unitária (medidas de probabilidade) tal* *que, para toda função $g \in C(\mathbb{R})$ satisfazendo*

$$g(u) = o(1+|u|^r) \;\; quando \;\; |u| \to \infty \tag{1.12}$$

para algum $r \in [0,p)$, vale o seguinte limite de representação

$$\lim_{j' \to \infty} \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} g(u_{j'}(x,t))\phi(x,t)dxdt = \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)d\nu_{(x,t)}(\lambda)\phi(x,t)dxdt \tag{1.13}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.

Definição 1.8 *A função a valores de medida $\nu_{(x,t)}$ é uma medida de Young associada com a sequência $\{u_j\}$.*

De DiPerna [6] e Szepessy [23] definimos as soluções entrópicas a valores de medida (m.-v.) do problema de Cauchy

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f_j(u)_{x_j} = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \tag{1.14}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.15}$$

como segue.

Definição 1.9 *Seja $f \in [C(\mathbb{R})]^d$ satisfazendo*

$$f(\lambda) = o(1+|\lambda|^r) \qquad para \qquad algum \qquad r, \qquad 0 \le r < p, \tag{1.16}$$

$$\limsup_{|\lambda| \to 0} \frac{|f(\lambda) - f(0)|}{|\lambda|^\alpha} < \infty \qquad para \qquad algum \qquad \alpha, \qquad \frac{d-1}{d} < \alpha \le 1 \tag{1.17}$$

e

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d). \tag{1.18}$$

Uma medida de Young ν associada a uma sequência satisfazendo (1.11) é então chamada de solução entrópica a valores de medida (m.-v.) de (1.14) e (1.15) se

$$\partial_t < \nu(.), |\lambda - k| > + div_x < \nu(.), sgn(\lambda - k)(f(\lambda) - f(k)) > \le 0 \tag{1.19}$$

no sentido das distribuições para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{T \to 0^+} \frac{1}{T} \int_0^T \int_K < \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)| > dxdt = 0. \tag{1.20}$$

Analogamente, uma função $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$ é chamada uma solução entrópica em L^p de (1.14) se $\delta_{u(.)}$ é uma solução entrópica m.-v. de (1.14) e (1.15).

Definição 1.10 *Um par de funções suaves $(\eta, \psi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ é chamado de par de entropia se $\nabla \psi = \eta' \nabla f$ e a função η é afim fora de um conjunto compacto. Dizemos que ele é convexo se η é convexa.*

Em [23], Szepessy provou os seguintes resultados de existência e unicidade de solução entrópica de (1.14) e (1.15):

Teorema 1.9 *(Unicidade) Suponhamos que ν e σ são soluções entrópicas m.-v. de (1.14) e (1.15) então existe uma função*

$$w \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d)) \tag{1.21}$$

tal que

$$\nu_y = \sigma_y = \delta_{w(y)} \qquad para \qquad q.t.p. \qquad y \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \tag{1.22}$$

isto é, $\nu(.)$ e $\sigma(.)$ são medidas de Dirac concentradas em $w(.)$.

Lema 1.4 *Suponhamos que ν é uma medida de Young associada com uma sequência $\{u_j\}$ satisfazendo (1.11). Então*

$$u_j \to u \qquad em \qquad L^r_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+), \qquad 1 \le r < p \tag{1.23}$$

se, e somente se,

$$\nu_y = \delta_{u(y)} \qquad q.t.p. \tag{1.24}$$

Teorema 1.10 *(Existência) Sejam f e u_0 satisfazendo as mesmas hipóteses como na Definição 1.9. Então existe uma única solução entrópica $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$ de (1.14) e (1.15) que, além disso, satisfaz*

$$\|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \le \|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^d)},$$

para q.t.p $t \in \mathbb{R}_+$ *e* $1 \leq r \leq p$*. A aplicação a valores de medida* $\nu_{(x,t)} = \delta_{u(x,t)}$ *é a única solução entrópica m.-v. do mesmo problema.*

Capítulo

2

Resultados de Existência de Soluções do Problema (1) e (4)

Neste capítulo estudamos somente a existência de soluções do problema de Cauchy (1) e (4). Aqui γ, δ e α são constantes positivas e f, $B(\lambda) = A(\lambda) + \lambda$ são funções suaves. Além disso, suponhamos que

$$A'(\lambda) = a(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por $F(u)$ a transformada de Fourier parcial de u com relação a x e F^{-1} a transformada inversa de F. Assim, formalmente, de (1) e (4) segue que

$$F(u_t - \delta u_{xxt} - \gamma u_{xx} + \alpha u_{xxxx}) = F(\gamma A(u)_{xx} - f(u)_x)$$

$$(1+\delta\xi^2)F(u)_t + (\gamma\xi^2 + \alpha\xi^4)F(u) = F(\gamma A(u)_{xx} - f(u)_x).$$

Assim

$$\left[\exp\left\{\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right]_t = \frac{\exp\left\{\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(\gamma A(u)_{xx} - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)},$$

de onde segue que

$$F(u) = \exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u_0) + \int_0^t \frac{\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(\gamma A(u)_{xx} - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}ds.$$

Logo

$$u(x,t) = F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u_0)\right)$$
$$+\int_0^t F^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(\gamma A(u)_{xx}-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds.$$

Portanto a equação integral da solução é

$$u(x,t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma A(u)_{xx}-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds \tag{2.1}$$

sendo

$$G(t)u = F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right).$$

A família de operadores lineares $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ definida acima (cuja linearidade segue da linearidade de F e F^{-1}) satisfaz as propriedades de semi-grupo:

i) $G(0)=I$ pois $G(0)u = F^{-1}(F(u)) = u = I(u)$;

ii) Para $t\geq 0$, $s\geq 0$ temos

$$\begin{aligned}
G(t)G(s)u &= G(t)F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)s}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right)\\
&= F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F\left[F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)s}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right)\right]\right)\\
&= F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t+s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right)\\
&= G(t+s)u.
\end{aligned}$$

O seguinte lema dá algumas estimativas que serão usadas no decorrer do trabalho.

Lema 2.1 *Para $\gamma>0$, $\alpha>0$, $\delta>0$ e $\theta>0$ temos as seguintes estimativas:*

i) $\dfrac{\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\leq \delta^{-2}$ *se* $\delta\leq 4$*;*

ii) $\dfrac{\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\leq (2\gamma e\theta)^{-1}$;

iii) $\dfrac{\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\leq \delta^{-2}$;

iv) $\xi^2\exp\left\{\dfrac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\leq \dfrac{(\alpha+\gamma\delta)}{2\gamma\alpha\theta}$;

v) $\dfrac{\xi^6}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\leq (2\alpha\delta\theta)^{-1}$;

vi) $\dfrac{\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} \leq (2\alpha e\theta)^{-1}$;

vii) $\xi^4\exp\{\dfrac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\} \leq \dfrac{(\alpha^2+\gamma\alpha\delta+\gamma^2\delta^2)}{2\alpha^2\gamma^2\theta^2}$.

Demonstração: i) Para provar (i), observe que $\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} \leq 1$ e que $\delta^2\xi^2 \leq (1+\delta\xi^2)^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\delta^2\xi^4+(2\delta-\delta^2)\xi^2+1 \geq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Fazendo $y=\xi^2$ obtemos $\delta^2y^2+(2\delta-\delta^2)y+1 \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}_+$, se $0<\delta\leq 4$.

ii) Para provar (ii), observe que $\dfrac{\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2} \leq \dfrac{\xi^2}{(1+\delta\xi^2)}$ e $\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} \leq \exp\left\{\frac{-2\gamma\xi^2\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}$. Além disso, a função $f(x)=x\exp\{-2\gamma\theta x\}$ definida em $(0,+\infty)$ atinge seu máximo em $x=\dfrac{1}{2\gamma\theta}$. Daí, $|x|\exp\{-2\gamma\theta|x|\} \leq (2e\gamma\theta)^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

iii) Para $\xi=0$ temos $\dfrac{\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} \leq \delta^{-2}$. Quando $\xi \neq 0$ então $\dfrac{\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} \leq \dfrac{\xi^4}{\delta^2\xi^4} = \delta^{-2}$, lembrando novamente que $\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} \leq 1$.

iv) Temos para $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned}
\xi^2\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} &\leq \frac{\xi^2}{1+\frac{2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{1+\delta\xi^2}}\\
&\leq \frac{\xi^2(1+\delta\xi^2)}{2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}\\
&\leq \frac{(\alpha+\gamma\delta)}{2\gamma\alpha\theta}.
\end{aligned}$$

v) A prova de (v) é análoga a de (iv).

vi) A prova de (vi) é análoga a de (ii).

vii) A prova de (vii) é análoga a de (iv).

■

Definimos o operador

$$\mathscr{L}u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma A(u)_{xx}-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds,$$

em

$$\mathscr{A}_T = \{u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})); \|u(t) - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, t \in [0,T]\}$$

e a norma em $\mathscr{A}_T$ como

$$\|u(x,t)\|_{\mathscr{A}_T} = \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Lema 2.2 *Sejam f e A suficientemente suaves. Sejam $u(t)$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tais que*

$$\|u(t) - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \forall t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Se $T > 0$ é suficientemente pequeno então vale o seguinte:

(i) $\mathscr{L}u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ com

$$\|\mathscr{L}u(t) - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \forall t \in [0,T]$$

e

$$\|\mathscr{L}u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \forall t \in [0,T];$$

(ii) $\|\mathscr{L}u(t)\|_\infty \leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$;

(iii) $\mathscr{A}_T$ é invariante por $\mathscr{L}$;

iv) $\mathscr{L}$ é uma contração na norma $\|.\|_{\mathscr{A}_T}$ em $\mathscr{A}_T$.

Demonstração: (i) Sejam $a_1 = \sup\limits_{|v|\leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} |a(v)|$ e $E = \sup\limits_{|v|\leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} |f'(v)|$. Sem perda de generalidade, consideramos $f(0) = 0$. Seja $u \in H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo (2.2). Então usando propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$ e a igualdade de Parseval temos

$$\begin{aligned}\|G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} &= \left[\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k G(t)u_0}{\partial x^k}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= \left[\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\left|F\left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right)\right|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Além disso

$$\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq$$

$$\int_0^t\left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\left|F^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)(i\xi)^k}{(1+\delta\xi^2)}\right)\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

usando a igualdade de Parseval

$$=\int_0^t\left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)|^2\xi^{2k}}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$=\int_0^t\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|F(\gamma a(u)u_x-f(u))|^2\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right.$$

$$\left.+\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|F(\gamma a(u)u_x-f(u))|^2\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

usando o Lema 2.1 (ii) e (vi)

$$\leq\int_0^t[(2\gamma e(t-s))^{-1}+(2\alpha e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\mathbb{R}}|F(\gamma a(u)u_x-f(u))|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

novamente pela igualdade de Parseval

$$=\int_0^t[(2\gamma e(t-s))^{-1}+(2\alpha e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\mathbb{R}}|\gamma a(u)u_x-f(u)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq\int_0^t[(2\gamma e(t-s))^{-1}+(2\alpha e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\int_{\mathbb{R}}|\gamma a(u)u_x|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_{\mathbb{R}}|f(u)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}ds$$

$$\leq\int_0^t[(2\gamma e(t-s))^{-1}+(2\alpha e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\left\{\gamma a_1\|u_x(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}+E\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right\}ds$$

usando (2.2)

$$\leq\int_0^t 2[(2\gamma e(t-s))^{-1}+(2\alpha e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}(\gamma a_1+E)\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}ds$$

$$\leq\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

se $T \leq \dfrac{1}{8[((\gamma e)^{-1}+(\alpha e)^{-1})(\gamma a_1+E)^2]}$.

(ii) Para mostrar (ii), basta observar que

$\|\mathscr{L}u(t)\|_\infty \leq (2\|\mathscr{L}u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(\mathscr{L}u(t))_x\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}$ e usar (i).

(iii) Falta mostrar que se $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ então $\mathscr{L}u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$. Seja $t_0 \in [0,T]$. Podemos considerar $t_0 > 0$ pois no caso $t_0 = 0$ temos $\mathscr{L}u(t_0) = u_0$ e o resultado vale. Seja $t \in (0,T]$. Sem perda de generalidade, supomos $t_0 < t$ nos cálculos abaixo. Temos

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R})} &\leq \|G(t)u_0-G(t_0)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&+\left\|\int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right.\\
&\left.-\int_0^{t_0} G(t_0-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&\leq \|G(t)u_0-G(t_0)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&+\int_{t_0}^{t}\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x-f(u(t-r))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}dr\\
&+\int_0^{t_0}\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{1}{(1+\delta\xi^2)}\,F\,[\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x-f(u(t-r))_x\right.\right.\\
&\quad -(\gamma[a(u(t_0-r))u_x(t_0-r)]_x-f(u(t_0-r))_x)])\|_{H^1(\mathbb{R})}\,dr\\
&=A+B+C.
\end{aligned}
$$

Vamos estimar separadamente cada uma das parcelas. Para A, pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{1+\delta\xi^2}\right\}-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\right]^2|F(u_0)|^2d\xi\right.\\
&\left.+\int_{\mathbb{R}}\left[\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{1+\delta\xi^2}\right\}-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\right]^2|F(u_{0x})|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{1+\delta\xi^2}\right\}(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2|t-t_0|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\left|F\left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\frac{|t-t_0|^2}{2\theta^2}\left|F\left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{|t-t_0|\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}}{\sqrt{2}t_0}.
\end{aligned}
$$

Para B, usando a igualdade de Parseval e o Lema 2.1 (i) e (iii)

$$B \leq \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{1+\delta\xi^2}\right\} |F(\gamma a(u(t-r))u_x(t-r) - f(u(t-r)))|^2 \xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{1+\delta\xi^2}\right\} |F(\gamma a(u(t-r))u_x(t-r) - f(u(t-r)))|^2 \xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} dr$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\delta^{-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |F(\gamma a(u(t-r))u_x(t-r) - f(u(t-r)))|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} dr$$

novamente pela igualdade de Parseval

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\delta^{-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\gamma a(u(t-r))u_x(t-r) - f(u(t-r))|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} dr$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\delta^{-1} \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}} |\gamma a(u(t-r))u_x(t-r)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{\mathbb{R}} |f(u(t-r))|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\} dr$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\delta^{-1} \left\{ \gamma a_1 \|u_x(t-r)\|_{L^2(\mathbb{R})} + E\|u(t-r)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} dr$$

usando (2.2)

$$\leq \int_{t_0}^{t} 2\sqrt{2}\delta^{-1}(\gamma a_1 + E)\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} dr$$

$$= (t-t_0)2\sqrt{2}\delta^{-1}(\gamma a_1 + E)\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Finalmente, para C

$$C = \int_{0}^{t_0} \left\{ \sum_{k=0}^{1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{1+\delta\xi^2}\right\} \xi^{2k}}{(1+\delta\xi^2)^2} \left| F\left(\gamma[a(u(t-r))(u_x(t-r))]_x - f(u(t-r)_x)\right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. -(\gamma[a(u(t_0-r))(u_x(t_0-r))]_x - f(u(t_0-r))_x)\right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} dr$$

e desde que $A'(u) = a(u)$

$$\leq \int_{0}^{t_0} \left\{ 2 \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{1+\delta\xi^2}\right\} (\xi^4+\xi^6)}{(1+\delta\xi^2)^2} |\gamma F\left[A(u(t-r)) - A(u(t_0-r))\right]|^2 d\xi \right. \right.$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{1+\delta\xi^2}\right\}(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2}|F(f(u(t-r))-f(u(t_0-r)))|^2 d\xi\Bigg]\Bigg\}^{\frac{1}{2}} dr$$

usando o Lema 2.1 (ii), (v) e (vi)

$$\leq \int_0^{t_0}\left\{2\left[((2\alpha er)^{-1}+(2\alpha\delta r)^{-1})\gamma^2\int_{\mathbb{R}}|A(u(t-r))-A(u(t_0-r))|^2dx\right.\right.$$

$$\left.\left.+((2\gamma er)^{-1}+(2\alpha er)^{-1})\int_{\mathbb{R}}|f(u(t-r))-f(u(t_0-r))|^2dx\right]\right\}^{\frac{1}{2}}dr$$

$$\leq \int_0^{t_0}\{[(\alpha e)^{-1}+(\alpha\delta)^{-1}]\gamma^2a_1^2+[(\gamma e)^{-1}+(\alpha e)^{-1}]E^2\}^{\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\|u(t-r)-u(t_0-r)\|_{H^1(\mathbb{R})}dr$$

$$\leq \overline{C}$$

onde $\overline{C}\to 0$ quando $|t-t_0|\to 0$ pois $u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ e $t_0-r\in[0,T]$. Portanto $\mathscr{L}u(t)\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$.

iv) Sejam u, $v\in\mathscr{A}_T$ então usando a igualdade de Parseval, (ii) e (vi) do Lema 2.1 e o Corolário 1.1 temos

$$\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq \int_0^t\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2}\right.$$

$$\left.|\gamma F[A(u)_x-A(v)_x]-F[f(u)-f(v)]|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}dr$$

$$\leq \int_0^t[(2\gamma e(t-s))^{-1}+(2\alpha e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\Big[E\|u(s)-v(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

$$+\gamma\|A(u(s))-A(v(s))\|_{H^1(\mathbb{R})}\Big]dr$$

$$\leq \int_0^t[(2\gamma e(t-s))^{-1}+(2\alpha e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\Big[E\|u(s)-v(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

$$+\gamma C\|u(s)-v(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}(a_1+2\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})})\Big]dr$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u(x,t)-v(x,t)\|_{\mathscr{A}_T}$$

se $T\leq \dfrac{1}{8[(\gamma e)^{-1}+(\alpha e)^{-1}][\gamma C(a_1+4\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})})+E]^2}$. ■

Observação 2.1 *No lema acima, o espaço $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ poderia ser substituído por $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$.*

Podemos agora provar nosso resultado de existência de solução local do problema de Cauchy (1) e (4):

Teorema 2.1 *Sejam u_0, f e A como no Lema 2.2. Então o problema de Cauchy (1) e (4) admite uma solução local suave*

$$u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T];L^2(\mathbb{R})).$$

Além disso, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq 1$, temos

$$u \in C((0,T];H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{k-1}(\mathbb{R})).$$

Aqui T é como no Lema 2.2.

Demonstração: Sejam $u^0 \equiv 0$ e $u^n \equiv \mathscr{L}(u^{n-1})$. Então usando o Lema 2.2 segue por indução que $u^n \in \mathscr{A}_T$ e satisfaz (i), (ii) do Lema 2.2, para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, por (iii) e (iv) do mesmo lema, $\mathscr{L}$ é uma contração na norma de $\mathscr{A}_T$. Segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que $\mathscr{L}$ tem um e somente um ponto fixo em $\mathscr{A}_T$, ou seja, a equação integral (2.1) possui uma solução $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$. Mostremos agora que se $u \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$, $l \geq 1$, então $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$. Seja $t_1 \in (0,T)$ qualquer, basta mostrar que $u \in C([t_1,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$. Escolha $t_2 = \frac{t_1}{2}$, pelas propriedades de semi-grupo do operador G, temos

$$u(x,t) = G(t-t_2)u(t_2) + \int_{t_2}^{t} G(t-s)F^{-1}\left[\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x - f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right] ds.$$

Mostremos primeiro que

$$\sup_{t_1 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Temos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} &\leq \|G(t-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} + \int_{t_2}^{t} \left\| G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x - f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} ds \\ &= A + B.\end{aligned}$$

Para o primeiro termo usamos a igualdade de Parseval para obter:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ \sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \left| F^{-1}\left(\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} (i\xi)^k F(u(t_2)) \right) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} |F(u(t_2))|^2 d\xi \right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \xi^2 \left| F\left(\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k} \right) \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

pelo Lema 2.1 (iv)

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |F(u(t_2))|^2 d\xi + \frac{(\alpha+\gamma\delta)}{2\gamma\alpha(t-t_2)} \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| F\left(\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k} \right) \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[1 + \frac{(\alpha+\gamma\delta)}{2\gamma\alpha(t_1-t_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

De modo análogo, para o segundo termo:

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{t_2}^{t} \left\{ \sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \left| F^{-1}\left(\frac{\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} (i\xi)^k}{1+\delta\xi^2} F\left(\gamma[a(u)u_x]_x - f(u)_x\right) \right) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \int_{t_2}^{t} \sqrt{2} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \xi^{2k}}{(1+\delta\xi^2)^2} \left| F\left(\gamma[a(u)u_x]_x\right) \right|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + \left[\sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \xi^{2k}}{(1+\delta\xi^2)^2} \left| F\left(f(u)_x\right) \right|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \right\} ds \\
&\leq \int_{t_2}^{t} \sqrt{2} \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} (\xi^2+\xi^4) \left| F\left(\gamma a(u)u_x\right) \right|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right. \right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \xi^{2k+6} \left| F\left(\gamma a(u)u_x\right) \right|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
+\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^2|F(f(u))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right.
$$

$$
\left.\left.+\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k+2}|F(f(u))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right\}ds
$$

$$
\leq \int_{t_2}^{t}\sqrt{2}\left\{\gamma[2\delta^{-1}+(2\alpha\delta(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\|a(u(s))u_x(s)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})}\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{2}\delta^{-1}\|f(u)\|_{H^l(\mathbb{R})}\right\}ds
$$

onde usamos o Lema 2.1 (i), (ii) e (v). Usando agora os Teoremas 1.5 e 1.4

$$
\leq \int_{t_2}^{t}\sqrt{2}\left\{\gamma[2\delta^{-1}+(2\alpha\delta(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}C_l\|u(s)\|_{H^l(\mathbb{R})}(a_1+\|u(s)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})})+\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{2}\delta^{-1}C\|u(s)\|_{H^l(\mathbb{R})}\right\}ds
$$

onde C_l depende de l e $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$ e C depende de $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$,

$$
\leq \int_{t_2}^{t}\sqrt{2}\left\{\gamma[2\delta^{-1}+(2\alpha\delta(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}C_l\sup_{[t_2,T]}[\|u(s)\|_{H^l(\mathbb{R})}(a_1+\|u(s)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})})]+\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{2}\delta^{-1}C\sup_{[t_2,T]}\|u(s)\|_{H^l(\mathbb{R})}\right\}ds.
$$

Logo,

$$
\sup_{[t_1,T]}\|u(s)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}<\infty.
$$

Da mesma forma colocando t_2 no lugar de t_1 nos cálculos acima, obtemos

$$
\sup_{t_2\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}<\infty.
$$

Seja $t_0\in[t_1,T]$. Seja $t\in[t_1,T]$. Temos

$$
\|u(t)-u(t_0)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}\leq\|G(t-t_2)u(t_2)-G(t_0-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}
$$

$$
+\left\|\int_{t_2}^{t}G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t_2}^{t_0} G(t_0-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\Bigg\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}\\
&\leq \|G(t-t_2)u(t_2)-G(t_0-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}\\
&+\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}dr\\
&+\int_0^{t_0-t_2}\Bigg\|G(r)F^{-1}\Bigg[\frac{F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\\
&-\frac{F(\gamma[a(u(t_0-r))u_x(t_0-r)]_x-f(u(t_0-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\Bigg]\Bigg\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}dr\\
&=A+B+C.
\end{aligned}
$$

Estimamos separadamente cada uma das parcelas:

$$
\begin{aligned}
A=\Bigg\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\Bigg|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\Bigg[\Bigg(&\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\\
&-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\Bigg)F(u(t_2))\Bigg]\Bigg|^2dx\Bigg\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
=\Bigg\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}&\left|\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right|^2\cdot\\
&\left|F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t_2)\right)\right|^2d\xi\Bigg\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

pela desigualdade do Valor Médio

$$
\begin{aligned}
&\leq\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|t-t_0|\right]^2\left|F\left(\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k}\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\frac{|t-t_0|}{(t_0-t_2)}\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k}\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\frac{|t-t_0|\|u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}}{(t_0-t_2)}.
\end{aligned}
$$

Para a segunda parcela, usando a igualdade de Parseval temos

$$B = \int_{t_0-t_2}^{t-t_2} \left\| G(r)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x - f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} dr$$

$$\leq \int_{t_0-t_2}^{t-t_2} \sqrt{2}\left\{\left[\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k}|F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k}|F(f(u(t-r))_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right\}dr$$

$$\leq \int_{t_0-t_2}^{t-t_2} \sqrt{2}\left\{\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2}|F(\gamma a(u(t-r))u_x(t-r))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k+4}|F(\gamma a(u(t-r))u_x(t-r))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2}|F(f(u(t-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k+4}|F(f(u(t-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right\}dr$$

$$\leq \int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\sqrt{2}\left\{\gamma\sqrt{2}\delta^{-1}\|a(u(t-r))u_x(t-r)\|_{H^l(\mathbb{R})} + \sqrt{2}\delta^{-1}\|f(u(t-r))\|_{H^l(\mathbb{R})}\right\}dr$$

usando o Teorema 1.5 e o Teorema 1.4 com C_l dependendo de l e $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$, C dependendo de $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$,

$$\leq \int_{t_0-t_2}^{t-t_2} 2\left\{\gamma\delta^{-1}C_l\|u(t-r)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}(a_1+\|u(t-r)\|_{H^l(\mathbb{R})}) + \delta^{-1}C\|u(t-r)\|_{H^l(\mathbb{R})}\right\}dr.$$

Finalmente,

$$C = \int_0^{t_0-t_2}\left\| G(r)F^{-1}\left[\frac{F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x - f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{F(\gamma[a(u(t_0-r))u_x(t_0-r)]_x - f(u(t_0-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right]\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} dr$$

$$\leq \int_0^{t_0-t_2} \sqrt{2}\left\{ \left[\sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k}}{(1+\delta\xi^2)^2} \right.\right.$$

$$|\gamma F([a(u(t-r))u_x(t-r)]_x - [a(u(t_0-r))u_x(t_0-r)]_x)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|F(f(u(t-r))_x - f(u(t_0-r))_x)|^2\xi^{2k}}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right\} dr$$

$$= C_1 + C_2.$$

Para C_1,

$$C_1 = \int_0^{t_0-t_2} \sqrt{2}\left\{ \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|\gamma F(A(u(t-r)) - A(u(t_0-r)))|^2\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|\gamma F(A(u(t-r)) - A(u(t_0-r)))|^2\xi^{6+2k}}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right\} dr$$

usando o Lema 2.1 (vi) e (v) e a igualdade de Parseval

$$\leq \int_0^{t_0-t_2} \sqrt{2}[(2\alpha e r)^{-1} + (2\alpha\delta r)^{-1}]^{\frac{1}{2}}\gamma\|A(u(t-r)) - A(u(t_0-r))\|_{H^l(\mathbb{R})} dr$$

usando o Corolário 1.1

$$\leq \int_0^{t_0-t_2} 2[(\alpha e)^{-1} + (\alpha\delta r)^{-1}]^{\frac{1}{2}}\gamma r^{-\frac{1}{2}} C_l\|u(t-r) - u(t_0-r)\|_{H^l(\mathbb{R})}(a_1 + 2\sup_{[t_2,T]}\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}) dr$$

$$\leq \overline{C}$$

onde $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$. Para C_2,

$$C_2 = \int_0^{t_0-t_2} \sqrt{2}\left\{ \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^2|F(f(u(t-r)) - f(u(t_0-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{4+2k}|F(f(u(t-r)) - f(u(t_0-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right\} dr$$

$$\leq 2\delta^{-1}\int_0^{t_0-t_2}\|f(u(t-r))-f(u(t_0-r))\|_{H^l(\mathbb{R})}dr$$

usando o Corolário 1.1

$$\begin{aligned}&\leq 2\delta^{-1}\int_0^{t_0-t_2}C_l\|u(t-r)-u(t_0-r)\|_{H^l(\mathbb{R})}(E+2\sup_{[t_2,T]}\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})})dr\\&\leq \overline{C}\end{aligned}$$

onde $\overline{C}\to 0$ quando $|t-t_0|\to 0$ pois $u\in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$. Portanto $u\in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$.

Mostremos agora que $u_t\in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$. Vimos que

$$F(u)_t=-\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}F(u)+\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}$$

e daí para $t_2=\frac{t_1}{2}<t_1\leq t$

$$\begin{aligned}u_t(t)=&-F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u(t_2))\right]\\&-\int_{t_2}^{t}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds\\&+F^{-1}\left[\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|u_t\|_{H^l(\mathbb{R})}\leq&\left\|F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u(t_2))\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})}\\&+\int_{t_2}^{t}\left\|F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})}ds\\&+\left\|F^{-1}\left[\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})}\\=&A+B+C.\end{aligned}$$

Para A temos

$$A=\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u(t_2))\right]\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2}{(1+\delta\xi^2)^2} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \left| F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t_2) \right) \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{(t-t_2)} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t_2) \right) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}}{(t_1-t_2)}.
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{t_2}^{t} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} (\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2 \xi^{2+2k} |F(\gamma a(u)u_x - f(u))|^2}{(1+\delta\xi^2)^4} d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \left[\frac{\gamma\delta+\alpha}{\delta^3} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{t_2}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \|\gamma a(u)u_x - f(u)\|_{H^l(\mathbb{R})} ds \\
&\leq 2 \left[\frac{\gamma\delta+\alpha}{\delta^3} \right]^{\frac{1}{2}} (T-t_2)^{\frac{1}{2}} \sup_{[t_2,T]} [\gamma C_l \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} (a_1 + 2\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}) + C\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}].
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
C &= \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^{2+2k} |F[\gamma a(u)u_x - f(u)]|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \delta^{-1} \|\gamma a(u)u_x - f(u)\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
&\leq \delta^{-1} \sup_{[t_2,T]} [\gamma C_l \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} (a_1 + 2\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}) + C\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}].
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\sup_{[t_1,T]} \|u_t(s)\|_{H^l(\mathbb{R})} < \infty.
$$

Seja $t_0 \in [t_1, T]$. Seja $t \in [t_1, T]$. Temos

$$
\begin{aligned}
\|u_t(t) - u_t(t_0)\|_{H^l(\mathbb{R})} \leq \Bigg\| F^{-1} \Bigg[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)} \Bigg(&\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \\
&- \exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \Bigg) F(u(t_2)) \Bigg] \Bigg\|_{H^l(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

$$+\left\|\int_{t_2}^{t} F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds\right.$$
$$\left.-\int_{t_2}^{t_0} F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds\right\|_{H^l(\mathbb{R})}$$
$$+\left\|F^{-1}\left[\frac{F(\gamma[a(u(t))u_x(t)]_x-f(u(t))_x)}{(1+\delta\xi^2)}-\frac{F(\gamma[a(u(t_0))u_x(t_0)]_x-f(u(t_0))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})}$$
$$\leq\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right)F(u(t_2))\right]\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\frac{F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x-f(u(t-r))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}dr$$
$$+\int_{0}^{t_0-t_2}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right. \cdot$$
$$\left.\left.\left.\cdot\frac{F(\gamma[a(u(t-r))u_x(t-r)]_x-f(u(t-r))_x-(\gamma[a(u(t_0-r))u_x(t_0-r)]_x-f(u(t_0-r))_x))}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}dr$$
$$+\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{F(\gamma[a(u(t))u_x(t)]_x-f(u(t))_x-(\gamma[a(u(t_0))u_x(t_0)]_x-f(u(t_0))_x))}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=A+B+C+D$$

Estimamos separadamente cada uma das parcelas. Para a primeira temos

$$A=\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right)F(u(t_2))\right]\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

pela igualdade de Parseval

$$=\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\left|\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}-\right.\right.$$

$$\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\Big|^2\left|\left[F\frac{\partial^k}{\partial x^k}(u(t_2))\right]\right|^2 d\xi\Bigg\}^{\frac{1}{2}}$$

pela desigualdade do Valor Médio

$$\begin{aligned}
&\leq\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^4}{(1+\delta\xi^2)^4}\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|t-t_0|^2\left|F\left[\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k}\right]\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\left\{\frac{3|t-t_0|^2}{2(t_1-t_2)^4}\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|F\left[\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k}\right]\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\frac{\sqrt{3}|t-t_0|\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}}{\sqrt{2}(t_1-t_2)^2}.
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela temos

$$\begin{aligned}
B=&\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2\xi^{2+2k}\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^4}.\right.\\
&\left.|F(\gamma a(u(t-r))u_x(t-r)-f(u(t-r)))|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
\leq&\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3 r}\right)^{\frac{1}{2}}\|\gamma a(u(t-r))u_x(t-r)-f(u(t-r)))\|_{H^l(\mathbb{R})}dr\\
\leq&\left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3(t_0-t_2)}\right)^{\frac{1}{2}}|t-t_0|\sup_{[t_2,T]}[C_l\gamma\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}(a_1+2\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})})+C\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}].
\end{aligned}$$

Para C, pela igualdade de Parseval

$$\begin{aligned}
C=&\int_0^{t_0-t_2}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2\xi^{2k+2}}{(1+\delta\xi^2)^4}\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\\
&\left.|F[\gamma a(u(t-r))u_x(t-r)-f(u(t-r))-(\gamma a(u(t_0-r))u_x(t_0-r)-f(u(t_0-r)))]|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}dr\\
\leq&\int_0^{t_0-t_2}\left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3 r}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[\gamma\|a(u(t-r))u_x(t-r)-a(u(t_0-r))u_x(t_0-r)\|_{H^l(\mathbb{R})}\\
&+\|f(u(t-r))-f(u(t_0-r))\|_{H^l(\mathbb{R})}\Big]dr\\
\leq&\int_0^{t_0-t_2}\left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3 r}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[\gamma\|A(u(t-r))-A(u(t_0-r))\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}\\
&+\|f(u(t-r))-f(u(t_0-r))\|_{H^l(\mathbb{R})}\Big]dr
\end{aligned}$$

e pelo Corolário 1.1 temos

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3}\right)^{\frac{1}{2}} C_l\|u(t-r)-u(t_0-r)\|_{H^{l+1}}\left[\gamma(a_1+2\sup_{[t_2,T]}\|u(t)\|_{H^{l+1}})+(E+2\sup_{[t_2,T]}\|u(t)\|_{H^l})\right]\\
&\leq \overline{C}
\end{aligned}
$$

onde $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$. Finalmente, para D pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
D = &\left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{(\xi^2+\xi^4)|F\left\{\gamma[a(u(t))u_x(t)-a(u(t_0))u_x(t_0)]-[f(u(t))-f(u(t_0))]\right\}|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right.\\
&\left.+\sum_{k=1}^{l-1}\int_{\mathbb{R}}\frac{\xi^{4+2k}|F\left\{[\gamma(a(u(t))u_x(t)-a(u(t_0))u_x(t_0))-(f(u(t))-f(u(t_0)))]\right\}|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2\delta^{-1}[\gamma\|a(u(t))u_x(t)-a(u(t_0))u_x(t_0)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})}+\|f(u(t))-f(u(t_0))\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})}]\\
&\leq 2\delta^{-1}[\gamma\|A(u(t))-A(u(t_0))\|_{H^l(\mathbb{R})}+\|f(u(t))-f(u(t_0))\|_{H^l(\mathbb{R})}]
\end{aligned}
$$

e pelo Corolário 1.1

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\delta^{-1}C_l\|u(s)-u(t_0-r)\|_{H^l(\mathbb{R})}[\gamma(a_1+2\sup_{[t_1,T]}\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})})+(E+2\sup_{[t_1,T]}\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})})]\\
&\leq \overline{C}
\end{aligned}
$$

onde $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$. Portanto $u_t \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$ e daí $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^l(\mathbb{R}))$. ∎

A fim de estender nossa solução globalmente precisamos de algumas estimativas dadas pelos seguintes lemas.

Lema 2.3 *Seja $u(x,t) = u(x,t;\gamma,\delta,\alpha)$ solução do problema de Cauchy (1) e (4) em $\mathbb{R}\times[0,t_2]$. Então u satisfaz as seguintes estimativas para $\delta \leq 1$ e $t_2 \geq t > t_0 \geq 0$:*

$$
\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{B_1\exp\{B_3(t_2-t_0)^{\frac{1}{2}}\}\|u(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}}{(t-t_0)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.3}
$$

sendo $B_1 = \left(\frac{\alpha+\gamma}{2\alpha\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $B_3 = [(\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\gamma a_1+(\gamma e)^{-\frac{1}{2}}E]B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e B é a função beta.

Demonstração: De (2.1) e das propriedades de semi-grupo do operador $G(t)$ segue que para $t > t_0$:

$$u(x,t) = G(t-t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds,$$

daí

$$u_x(x,t) = G_x(t-t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} G_x(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds$$

e

$$\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|G_x(t-t_0)u(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_{t_0}^{t} \left\|G_x(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma[a(u)u_x]_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} ds$$

usando a igualdade de Parseval e o Lema 2.1:

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_0)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^2|F(u(t_0))|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&+ \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\left\{\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^4|F(\gamma a(u)u_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right. \\
&+ \left.\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^2|F(f(u)_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\right\} ds \\
&\leq \left[\frac{\alpha+\gamma}{2\alpha\gamma(t-t_0)}\right]^{\frac{1}{2}} \|u(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_{t_0}^{t} \frac{[(\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\gamma a_1 + (\gamma e)^{-\frac{1}{2}}E]\|u_x(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $B_2 = (\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\gamma a_1 + (\gamma e)^{-\frac{1}{2}}E$, obtemos

$$(t-t_0)^{\frac{1}{2}}\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B_1\|u(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_{t_0}^{t} \frac{(t_2-t_0)^{\frac{1}{2}}B_2(s-t_0)^{\frac{1}{2}}\|u_x(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}(s-t_0)^{\frac{1}{2}}} ds,$$

e a desigualdade de Gronwall nos dá (2.3).

■

Lema 2.4 *Seja $u(x,t) = u(x,t;\gamma,\delta,\alpha)$ uma solução de (1) e (4) em $\mathbb{R}\times[0,t_2]$. Então temos a* *seguinte estimativa para* $0 \leq t_1 \leq t_2$*:*

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t_1)dx + 2\gamma \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} a(u(x,t))u_x^2(x,t)dxdt + \delta \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t_1)dx$$

$$+ 2\gamma \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dxdt + 2\alpha \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)dx + \delta \int_{\mathbb{R}} u_{0x}^2(x)dx. \tag{2.4}$$

Demonstração: Multiplicamos (1) por $2u$ e integramos em $\mathbb{R}$ e em $[0,t_1]$. ■

Podemos agora provar o resultado de existência global:

Teorema 2.2 *Sejam f, A e u_0 como no Teorema 2.1. Se*

$$(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta \|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}}{(1+C_1(T)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

sendo

$$C_1(T) = \frac{B_1 \exp\{B_3 \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\}}{\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

então a solução de (1) e (4) pode ser estendida globalmente e satisfaz

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad \forall \ t \geq 0.$$

Demonstração: Do Teorema 2.1, existe uma solução $u(x,t;\gamma,\delta,\alpha) = u(x,t)$ definida até um tempo T satisfazendo:

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

e de (2.4)

$$\|u(T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta \|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, aplicando (2.3) com $t_2 = t = T$, $t_0 = \frac{T}{2}$, obtemos

$$\|u_x(T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{B_1 \exp\left\{B_3 \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}{\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left\| u\left(\frac{T}{2}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq C_1(T)(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}.$$

Então

$$\begin{aligned}\|u(T)\|_{H^1(\mathbb{R})} &= (\|u(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_x(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}\\ &\leq (1+C_1(T)^2)^{\frac{1}{2}}(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

e segue do Teorema 2.1 que $u(x,t)$ pode ser estendida até o tempo $2T$. Agora suponhamos que $u(x,t)$ pode ser estendida até um tempo kT com $k \in \mathbb{Z}_+$ e que

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad 0 \leq t \leq kT \tag{2.5}$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad 0 \leq t \leq kT \tag{2.6}$$

$$\|u(kT)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

$$\|u_x(kT)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_1(T)(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Então por (2.7) e (2.8) temos

$$\|u(kT)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

assim pelo Teorema 2.1 podemos estender $u(x,t)$ para um tempo $(k+1)T$ com

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad 0 \leq t \leq (k+1)T$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad 0 \leq t \leq (k+1)T.$$

Mas então de (2.4) para $t_1 = (k+1)T$ temos

$$\|u((k+1)T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, usando (2.3) com $t = t_2 = (k+1)T$ e $t_0 = (k+\frac{1}{2})T$ obtemos

$$\|u_x((k+1)T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_1(T)(\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}.$$

Assim (2.5)-(2.8) valem para $(k+1)T$. Procedendo indutivamente, podemos estender $u(x,t)$ globalmente com

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

■

Observação 2.2 *A técnica usada acima para estender as soluções globalmente foi inspirada num trabalho de Hoff e Smoller (veja [10] ou [26]). Para estudar a convergência de uma sequência de soluções de (1) e (4) quando $\gamma+\delta+\alpha \to 0$ seria preciso encontrar estimativas para as limitações de T que não dependessem de γ, δ e α. No Teorema 2.2, o fato de $T \to 0$ quando tomamos $\gamma+\delta+\alpha \to 0$ faz com que os dados iniciais $u(x,0;\gamma,\delta,\alpha) \to 0$. A técnica usada nos próximos capítulos para estender as soluções globalmente poderia ter sido usada também neste caso, o que não nos daria condições suficientes para obter estimativas à priori para garantir os resultados de convergência de soluções de (1), da forma como obtemos para as equações (2) e (3).*

Capítulo

3

Resultados de Existência e Convergência de Soluções de (2) e (4)

3.1 Resultados de Existência

Nesta seção estudamos a existência de soluções do problema de Cauchy (2) com dado inicial (4), sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, para $B(\lambda)=\beta(\lambda)+\lambda$. Denotamos por $F(u)$ a transformada de Fourier parcial de u com relação a x e F^{-1} a transformada inversa de F. Assim, formalmente, segue de (2) e (4) que

$$
\begin{aligned}
&F(u_t-\delta u_{xxt}-\gamma u_{xx}+\alpha u_{xxxx})=F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)\\
&(1+\delta\xi^2)F(u)_t+(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)F(u)=F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)\\
&\left[\exp\left\{\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right]_t=\exp\left\{\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)},
\end{aligned}
$$

de onde segue que

$$
F(u)=\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u_0)+\int_0^t\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}ds.
$$

Logo

$$
u(x,t)=F^{-1}\left[\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u_0)\right]+
$$

$$+\int_0^t F^{-1}\left[\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds.$$

Portanto a equação integral da solução é

$$u(x,t)=G(t)u_0+\int_0^t G(t-s)F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds \tag{3.1}$$

sendo

$$G(t)u=F^{-1}\left[\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right].$$

A família de operadores lineares $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ definida acima (cuja linearidade segue da linearidade de F e F^{-1}) satisfaz as propriedades de semi-grupo, conforme vimos no capítulo anterior.

Definimos o operador

$$\mathscr{L}u(t)=G(t)u_0+\int_0^t G(t-s)F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds,$$

em

$$\mathscr{A}_T=\{u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}));\|u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},t\in[0,T]\}$$

e a norma em $\mathscr{A}_T$ como

$$\|u(x,t)\|_{\mathscr{A}_T}=\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Lema 3.1 *Sejam f e β suficientemente suaves com $|\beta'(v)|\leq M$, para todo $v\in\mathbb{R}$. Sejam $u(t),u_0\in H^1(\mathbb{R})$ tais que*

$$\|u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},\forall t\in[0,T]. \tag{3.2}$$

Se $T>0$ é suficientemente pequeno então vale o seguinte:

(i) $\mathscr{L}u(t)\in H^1(\mathbb{R})$ com

$$\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},\forall t\in[0,T]$$

e

$$\|\mathscr{L}u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},\forall t\in[0,T];$$

(ii) $\|\mathscr{L}u(t)\|_\infty \leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$;

(iii) $\mathscr{A}_T$ *é invariante por* $\mathscr{L}$;

iv) $\mathscr{L}$ *é uma contração na norma* $\|.\|_{\mathscr{A}_T}$ *em* $\mathscr{A}_T$.

Demonstração: (i) Sem perda de generalidade, consideramos $\beta(0) = 0$ e $f(0) = 0$. Seja $E = \sup_{|v|\leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} |f'(v)|$. Seja $u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo (3.2). Então usando propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$ e a igualdade de Parseval temos

$$\begin{aligned}
\|G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} &= \left[\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k G(t)u_0}{\partial x^k}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\left|F\left(\frac{\partial^k(u_0)}{\partial x^k}\right)\right|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\|\mathscr{L}u(t) - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq$$

$$\int_0^t \left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k}|F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

$$\leq \int_0^t \left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}(\xi^2+\xi^4)|F(\gamma\beta(u_x) - f(u))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

usando o Lema 2.1 (ii) e (vi) e a igualdade de Parseval

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \frac{[(2\gamma e)^{-1}+(2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{\mathbb{R}}|\gamma\beta(u_x) - f(u)|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \int_0^t \frac{[(2\gamma e)^{-1}+(2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}[\gamma M\|u_x(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} + E\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}]}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq 4[(2\gamma e)^{-1}+(2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}[\gamma M + E]\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

se tivermos

$$T \leq \frac{1}{8[((\gamma e)^{-1}+(\alpha e)^{-1})(\gamma M+E)^2]}.$$

Portanto segue (i).

(ii) Para mostrar (ii), basta observar que

$\|\mathscr{L}u(t)\|_\infty \leq (2\|\mathscr{L}u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(\mathscr{L}u(t))_x\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}$ e usar (i).

(iii) Falta mostrar que se $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ então $\mathscr{L}u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$. Seja $t_0 \in [0,T]$. Seja $t \in (0,T]$. Sem perda de generalidade, supomos $t_0 < t$ nos cálculos abaixo. Temos

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|G(t)u_0-G(t_0)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&+\left\|\int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds-\int_0^{t_0} G(t_0-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds\right\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&\leq \|G(t)u_0-G(t_0)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}+\int_{t_0}^t\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma\beta(u_x(t-r))_x-f(u(t-r))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}dr\\
&+\int_0^{t_0}\left\|G(r)F^{-1}\left\{\frac{1}{(1+\delta\xi^2)}.F\left[\gamma\beta(u_x(t-r))_x-f(u(t-r))_x\right.\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.\left.-(\gamma\beta(u_x(t_0-r))_x-f(u(t_0-r))_x)\right]\right\}\right\|_{H^1(\mathbb{R})}dr\\
&=A+B+C.
\end{aligned}$$

Usamos a igualdade de Parseval, a desigualdade do valor médio com $\theta \in (t_0,t)$ para obter

$$\begin{aligned}
A &\leq \left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\right)\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{1+\delta\xi^2}\right\}|t-t_0|^2\left|F\left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{|t-t_0|\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}}{t_0}.
\end{aligned}$$

Para estimar B, usamos um raciocínio análogo ao feito em (i) para obter

$$\begin{aligned}
B &\leq \int_{t_0}^t \frac{[(2\gamma e)^{-1}+(2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}[\gamma M\|u_x(t-r)\|_{L^2(\mathbb{R})}+E\|u(t-r)\|_{L^2(\mathbb{R})}]}{r^{\frac{1}{2}}}dr\\
&\leq 4[(2\gamma e)^{-1}+(2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}[\gamma M+E]\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}|t-t_0|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Para estimar C, vamos usar a igualdade de Parseval e o Lema 2.1 (i) e (iii)

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^{t_0} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{1+\delta\xi^2}\right\}(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2} |F\left[\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r))\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -(\gamma\beta(u_x(t_0-r)) - f(u(t_0-r)))\right]|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
&\leq \int_0^{t_0} \sqrt{2}\delta^{-1}[\gamma M + E]\|u(t-r) - u(t_0-r)\|_{H^1(\mathbb{R})} dr \\
&\leq \overline{C}
\end{aligned}$$

onde $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ e $t_0 - r \in [0,T]$.

iv) Sejam u, $v \in \mathscr{A}_T$, usando a igualdade de Parseval e o Lema 2.1 (ii) e (vi) obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{L}u(t) - \mathscr{L}v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}(\xi^2+\xi^4)|F[\gamma\beta(u_x) - \gamma\beta(v_x) - (f(u) - f(v))]|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \int_0^t \frac{[(2\gamma e)^{-1} + (2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\gamma[\beta(u_x) - \beta(v_x)]|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |f(v) - f(u)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \int_0^t \frac{[(2\gamma e)^{-1} + (2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}[\gamma M + E]\|u(s) - v(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq 2[(2\gamma e)^{-1} + (2\alpha e)^{-1}]^{\frac{1}{2}}[\gamma M + E] \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t) - v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|u(x,t) - v(x,t)\|_{\mathscr{A}_T}}{2}
\end{aligned}$$

se

$$T \leq \frac{1}{8[((\gamma e)^{-1} + (\alpha e)^{-1})(\gamma M + E)^2]}.$$

Portanto, nestas condições, $\mathscr{L}$ é uma contração. ■

Observação 3.1 *O espaço $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ poderia ser substituído por $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$.*

Podemos agora provar nosso resultado de existência de solução local do problema de Cauchy (2) e (4):

Teorema 3.1 *Sejam u_0, f e β como no Lema 3.1. Então o problema de Cauchy (2) e (4) admite uma solução local suave*

$$u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T];L^2(\mathbb{R})).$$

Além disso, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, temos

$$u \in C((0,T];H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{k-1}(\mathbb{R})).$$

Aqui T é como no Lema 3.1.

Demonstração: Sejam $u^0 \equiv 0$ e $u^n \equiv \mathscr{L}(u^{n-1})$. Então usando o Lema 3.1 segue por indução que $u^n \in \mathscr{A}_T$ e satisfaz (i), (ii) para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, por (iii) e (iv), $\mathscr{L}$ é uma contração na norma de $\mathscr{A}_T$. Segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que $\mathscr{L}$ tem um e somente um ponto fixo em $\mathscr{A}_T$, ou seja, a equação integral (3.1) possui uma solução $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$. Mostremos agora que se $u \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$, $l \geq 1$, então $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$. Seja $t_1 \in (0,T)$ qualquer, basta mostrar que $u \in C([t_1,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$. Escolha $t_2 = \frac{t_1}{2}$, pelas propriedades de semi-grupo do operador G, temos

$$u(x,t) = G(t-t_2)u(t_2) + \int_{t_2}^{t} G(t-s)F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right] ds.$$

Mostremos primeiro que

$$\sup_{t_1 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} &\leq \|G(t-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} + \int_{t_2}^{t} \left\| G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} ds \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Para o primeiro termo usamos a igualdade de Parseval para obter:

$$A = \left\{ \sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F^{-1}\left(\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2 + \alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} F(u(t_2)) \right) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} |F(u(t_2))|^2 d\xi \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \xi^2 \left| F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}(u(t_2)) \right) \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

pelo Lema 2.1 (iv)

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |F(u(t_2))|^2 d\xi + \frac{(\alpha+\gamma\delta)}{2\gamma\alpha(t-t_2)} \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}(u(t_2)) \right) \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[1 + \frac{(\alpha+\gamma\delta)}{2\gamma\alpha(t_1-t_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Para o segundo termo:

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{t_2}^{t} \left\{ \sum_{k=0}^{l+1} \int_{\mathbb{R}} \left| F^{-1}\left[\frac{\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} (i\xi)^k F\left(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x\right)}{1+\delta\xi^2} \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \int_{t_2}^{t} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left| F^{-1}\left[\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \frac{i\xi}{1+\delta\xi^2} F(\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right] \right|^2 dx \right. \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left| F^{-1}\left[\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \frac{(i\xi)^2}{1+\delta\xi^2} F(\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right] \right|^2 dx \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\mathbb{R}} \left| F^{-1}\left[\exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \frac{(i\xi)^3}{1+\delta\xi^2} F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right) \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds
\end{aligned}
$$

pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_2}^{t} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} (\xi^2+\xi^4) |F(\gamma\beta(u_x) - f(u))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \frac{\xi^6}{(1+\delta\xi^2)^2} \left| F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right) \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds
\end{aligned}
$$

pelo Lema 2.1 (i), (iii) e (v)

$$
\leq \int_{t_2}^{t} \left\{ 2\delta^{-2} \int_{\mathbb{R}} |F\left(\gamma\beta(u_x) - f(u)\right)|^2 d\xi \right.
$$

$$
\begin{aligned}
&+(2\alpha\delta(t-s))^{-1}\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}}\left|F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x)-f(u))\right)\right|^2 d\xi\Bigg\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \int_{t_2}^{t}\left[\frac{2}{\delta^2}+\frac{1}{2\alpha\delta(t-s)}\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}}\left|F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x)-f(u))\right)\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \int_{t_2}^{t}\left[\frac{2}{\delta^2}+\frac{1}{2\alpha\delta(t-s)}\right]^{\frac{1}{2}}\|\gamma\beta(u_x)-f(u))\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})}ds
\end{aligned}
$$

e pelo Teorema 1.4

$$
\leq \int_{t_2}^{t}\left[\frac{2}{\delta^2}+\frac{1}{2\alpha\delta(t-s)}\right]^{\frac{1}{2}} C[\gamma\|u_x(s)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})}+\|u(s)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})}]ds
$$

onde C é uma constante que depende de $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$,

$$
\leq 2(1+\gamma)C\sup_{t_2\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}\left[\frac{(t-t_2)}{\delta}+\frac{(t-t_2)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\delta)^{\frac{1}{2}}}\right].
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\sup_{t_1\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} \leq &\left[1+\frac{(\alpha+\gamma\delta)}{2\gamma\alpha(t_1-t_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
&+2(1+\gamma)C\left[\frac{(T-t_2)}{\delta}+\frac{(T-t_2)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\delta)^{\frac{1}{2}}}\right]\sup_{t_2\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}<\infty.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma colocando t_2 no lugar de t_1 nos cálculos acima, obtemos

$$
\sup_{t_2\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}<\infty.
$$

Seja $t_0\in[t_1,T]$. Seja $t\in[t_1,T]$. Sem perda de generalidade, consideramos $t_0<t$. Temos

$$
\|u(t)-u(t_0)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}\leq\|G(t-t_2)u(t_2)-G(t_0-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\|\int_{t_2}^{t} G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_{t_2}^{t_0} G(t_0-s)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}\\
&\leq \|G(t-t_2)u(t_2)-G(t_0-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}\\
&\qquad+\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F(\gamma\beta(u_x(t-r))_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}dr\\
&\qquad+\int_{0}^{t_0-t_2}\left\|G(r)F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x(t-r))_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.-\frac{F(\gamma\beta(u_x(t_0-r))_x-f(u(t_0-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right]\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}dr\\
&=A+B+C.
\end{aligned}
$$

Vamos estimar separadamente cada uma das parcelas:

$$
\begin{aligned}
A=&\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.\left.-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right)F(u(t_2))\right]\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
=&\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\left|\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right|^2.\right.\\
&\qquad\left.\left|F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t_2)\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

pela desigualdade do Valor Médio

$$
\begin{aligned}
&\leq\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|t-t_0|\right]^2\left|F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t_2)\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\frac{|t-t_0|}{(t_0-t_2)}\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t_2)\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\frac{|t-t_0|\|u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}}{(t_0-t_2)}.
\end{aligned}
$$

Para a segunda parcela, usando a igualdade de Parseval temos

$$
\begin{aligned}
B = & \int_{t_0-t_2}^{t-t_2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \frac{\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2} \cdot \right. \\
& \qquad |F(\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r)))|^2 d\xi \\
& + \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \frac{\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} \cdot \\
& \qquad \left. \left| F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r))) \right] \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
& \leq 2\delta^{-1} \int_{t_0-t_2}^{t-t_2} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r))) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
& = 2\delta^{-1} \int_{t_0-t_2}^{t-t_2} \|\gamma\beta(u_x) - f(u))\|_{H^l(\mathbb{R})} dr
\end{aligned}
$$

e segue do Teorema 1.4

$$
\leq 2\delta^{-1}|t-t_0| C(1+\gamma) \sup_{t_2 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}.
$$

Finalmente, pela igualdade de Parseval e o Lema 2.1 (i), (iii) e (v)

$$
\begin{aligned}
C = & \int_0^{t_0-t_2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \cdot \right. \\
& \qquad \frac{(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2} |F(\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r)) - (\gamma\beta(u_x(t_0-r)) - f(u(t_0-r))))|^2 d\xi \\
& + \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(r)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \frac{\xi^6}{(1+\delta\xi^2)^2} \\
& \qquad \left. \left| F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r)) - (\gamma\beta(u_x(t_0-r)) - f(u(t_0-r)))) \right] \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
& \leq \int_0^{t_0-t_2} [2\delta^{-1} + (2\alpha\delta r)^{-1}]^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r)) \right. \right. \\
& \qquad \left. - (\gamma\beta(u_x(t_0-r)) - f(u(t_0-r))))|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
& \leq \int_0^{t_0-t_2} 2[(2\delta^{-1})^{\frac{1}{2}} + (2\alpha\delta r)^{-\frac{1}{2}}] \left\{ \gamma \|\beta(u_x(t-r)) - \beta(u_x(t_0-r))\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \right. \\
& \left. + \|f(u(t-r)) - f(u(t_0-r))\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \right\} dr
\end{aligned}
$$

usando o Corolário 1.1

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{t_0-t_2} 2[(2\delta^{-1})^{\frac{1}{2}} + (2\alpha\delta r)^{-\frac{1}{2}}](\gamma+1)C\|u(t-r)-u(t_0-r)\|_{H^l(\mathbb{R})}dr \\
&\leq \overline{C}
\end{aligned}$$

sendo C uma constante que depende de $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$, l e $\sup\limits_{[0,T]}\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}$ e $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$ e $t_0 - r \in (0,T]$. Mostremos agora que $u_t \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$. Temos que

$$F(u)_t = -\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}F(u) + \frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}$$

e daí para $t_2 < t$

$$\begin{aligned}
u_t(t) = &-F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u(t_2))\right] \\
&-\int_{t_2}^{t} F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds \\
&+F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u_t\|_{H^l(\mathbb{R})} \leq &\left\|F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u(t_2))\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
&+\int_{t_2}^{t}\left\|F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})}ds \\
&+\left\|F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
= &A+B+C.
\end{aligned}$$

Para A temos

$$A = \left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u(t_2))\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2}{(1+\delta\xi^2)^2} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \left| F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t_2) \right) \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{(t-t_2)} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| F\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t_2) \right) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(t-t_2)} \|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{t_2}^{t} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F^{-1} \left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)} \exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \cdot \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. \frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)} \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \int_{t_2}^{t} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2}{(1+\delta\xi^2)^4} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \xi^2 \cdot \right. \\
&\qquad \left. \left| F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} (\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \int_{t_2}^{t} \left[\frac{\gamma\delta+\alpha}{\delta^3(t-s)} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \left[\frac{\gamma\delta+\alpha}{\delta^3} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{t_2}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \|\gamma\beta(u_x) - f(u)\|_{H^l(\mathbb{R})} ds \\
&\leq 2 \left[\frac{\gamma\delta+\alpha}{\delta^3} \right]^{\frac{1}{2}} (t-t_2)^{\frac{1}{2}} (1+\gamma) C \sup_{t_2 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
C &= \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F^{-1} \left[\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x - f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)} \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2} \left| F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} (\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\delta} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\gamma\beta(u_x) - f(u)) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta} \|\gamma\beta(u_x) - f(u))\|_{H^l(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{\delta}(1+\gamma)C\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|u_t(t)-u_t(t_0)\|_{H^l(\mathbb{R})} \leq & \left\| F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. -\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right)F(u(t_2))\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
& + \left\|\int_{t_2}^{t} F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds\right. \\
& \left. -\int_{t_2}^{t_0} F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\frac{F(\gamma\beta(u_x)_x-f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]ds\right\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
& + \left\|F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x(t))_x-f(u(t))_x)}{(1+\delta\xi^2)}-\frac{F(\gamma\beta(u_x(t_0))_x-f(u(t_0))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
\leq & \left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.\left. -\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right)F(u(t_2))\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
& + \int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. \frac{F(\gamma\beta(u_x(t-r))_x-f(u(t-r))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
& + \int_{0}^{t_0-t_2}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. \frac{F(\gamma\beta(u_x(t-r))_x-f(u(t-r))_x-(\gamma\beta(u_x(t_0-r))_x-f(u(t_0-r))_x))}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
& + \left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{F(\gamma\beta(u_x(t))_x-f(u(t))_x-(\gamma\beta(u_x(t_0))_x-f(u(t_0))_x))}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
= & A+B+C+D
\end{aligned}$$

Para A,

$$A = \left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\left(\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right.\right.\right.\right.$$

$$-\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\Big)F(u(t_2))\Big]\Big|^2 dx\Bigg\}^{\frac{1}{2}}$$

pela igualdade de Parseval

$$=\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\left|\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)(t_0-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\right|^2\left|\left[F\frac{\partial^k}{\partial x^k}(u(t_2))\right]\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}$$

pela desigualdade do Valor Médio

$$\begin{aligned}
&\leq\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^4}{(1+\delta\xi^2)^4}\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|t-t_0|^2\left|F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}(u(t_2))\right]\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\left\{\frac{3|t-t_0|^2}{2(t_1-t_2)^4}\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}(u(t_2))\right]\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\frac{\sqrt{3}|t-t_0|}{\sqrt{2}(t_1-t_2)^2}\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Para B,

$$B=\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F^{-1}\left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)}\exp\left\{\frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\cdot\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\frac{F(\gamma\beta(u_x(t-r))_x-f(u(t-r))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}dr$$

pela igualdade de Parseval

$$\begin{aligned}
&=\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2}{(1+\delta\xi^2)^4}\exp\left\{\frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^2\cdot\right.\\
&\qquad\left.\left|F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x(t-r))-f(u(t-r)))\right]\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}dr\\
&\leq\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3 r}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\left|F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x(t-r))-f(u(t-r)))\right]\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}dr\\
&=\left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{t_0-t_2}^{t-t_2}\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\|\gamma\beta(u_x(t-r))-f(u(t-r))\|_{H^l(\mathbb{R})}dr
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3(t_0-t_2)}\right)^{\frac{1}{2}} |t-t_0|^{\frac{1}{2}}(1+\gamma)C \sup_{t_2\leq t\leq T} \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}$$

onde usamos o Teorema 1.4. Para C,

$$C = \int_0^{t_0-t_2} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F^{-1} \left[\frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)} \exp\left\{ \frac{-(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \frac{F(\gamma\beta(u_x(t-r))_x - f(u(t-r))_x - (\gamma\beta(u_x(t_0-r))_x - f(u(t_0-r))_x))}{(1+\delta\xi^2)} \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} dr$$

pela igualdade de Parseval

$$= \int_0^{t_0-t_2} \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)^2\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^4} \exp\left\{ \frac{-2(\gamma\xi^2+\alpha\xi^4)r}{(1+\delta\xi^2)} \right\} \right.$$
$$\left. \left| F\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\gamma\beta(u_x(t-r)) - f(u(t-r)) - (\gamma\beta(u_x(t_0-r)) - f(u(t_0-r)))) \right] \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} dr$$
$$\leq \int_0^{t_0-t_2} \left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3 r}\right)^{\frac{1}{2}} \Big[\gamma\|\beta(u_x(t-r)) - \beta(u_x(t_0-r))\|_{H^l(\mathbb{R})}$$
$$+ \|f(u(t-r)) - f(u(t_0-r))\|_{H^l(\mathbb{R})} \Big] dr$$

e pelo Corolário 1.1 temos

$$\leq \left(\frac{\gamma\delta+3\alpha}{6\delta^3}\right)^{\frac{1}{2}} (\gamma+1)C \int_0^{t_0-t_2} \frac{\|u(t-r)-u(t_0-r)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}}{r^{\frac{1}{2}}} dr$$
$$\leq \overline{C}$$

com $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$ e $t_0 - r \in (0,T]$. Finalmente

$$D = \left\{ \sum_{k=0}^{l} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F^{-1} \left[\frac{F[(\gamma\beta(u_x(t))_x - f(u(t))_x) - (\gamma\beta(u_x(t_0))_x - f(u(t_0))_x)]}{(1+\delta\xi^2)} \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

pela igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2} \left| F\left\{\gamma[\beta(u_x(t))-\beta(u_x(t_0))]-[f(u(t))-f(u(t_0))]\right\}\right|^2 d\xi \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^{l-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} \left| F\left\{ \frac{\partial^k}{\partial x^k}[\gamma[\beta(u_x(t))-\beta(u_x(t_0))]-[f(u(t))-f(u(t_0))]] \right\} \right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\delta^{-1}[\gamma\|\beta(u_x(t))-\beta(u_x(t_0))\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} + \|f(u(t))-f(u(t_0))\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})}]
\end{aligned}
$$

e pelo Corolário 1.1

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\delta^{-1}[\gamma+1]C\|u(t)-u(t_0)\|_{H^l(\mathbb{R})} \\
&\leq \overline{C}
\end{aligned}
$$

com $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$ e $t_0 - r \in (0,T]$. Logo $u_t \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$ e daí $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^l(\mathbb{R}))$. ■

A fim de estender nossa solução globalmente precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2 *Seja $u(x,t) = u(x,t;\delta,\gamma,\alpha)$ uma solução de (2) e (4) em $\mathbb{R}\times[0,t_2]$. Se β é uma aplicação não decrescente com $\beta(0)=0$ então temos a seguinte estimativa para $0 \leq t_1 \leq t_2$:*

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t_1)\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t_1)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}} u_{0x}^2(x)\,dx.$$

Demonstração: Multiplicamos (2) por $2u$, integramos em $\mathbb{R}$ e em $[0,t_1]$ e obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t_1)dx + 2\gamma \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} \beta(u_x(x,t))u_x(x,t)dxdt + \delta \int_{\mathbb{R}} {u_x}^2(x,t_1)dx \\
&+ 2\gamma \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} {u_x}^2(x,t)dxdt + 2\alpha \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} {u_{xx}}^2(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}} {u_0}^2(x)dx + \delta \int_{\mathbb{R}} {u_{0x}}^2(x)dx. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Como β é uma aplicação não decrescente e $\beta(0)=0$ temos $\beta(\lambda)\lambda \geq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, de onde segue que todos os termos do lado esquerdo da igualdade são positivos e o resultado do lema segue.
■

Combinando o Teorema 3.1 e o Lema 3.2 temos o seguinte resultado de existência global:

Teorema 3.2 *Sejam f, β e u_0 como no Teorema 3.1. Se β é uma aplicação não decrescente com*

$\beta(0)=0$ *então o problema (2) e (4) tem uma solução global suave*

$$u \in C([0,\infty);H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0,\infty);L^2(\mathbb{R})).$$

Além disso, para cada inteiro $k \geq 1$, *temos* $u \in C((0,\infty);H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,\infty);H^{k-1}(\mathbb{R}))$.

Demonstração: Do Teorema 3.1, existe uma solução $u(x,t;\gamma,\delta,\alpha) = u(x,t)$ definida até um tempo T satisfazendo $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T];L^2(\mathbb{R}))$ e para cada inteiro $l \geq 1$, temos $u \in C((0,T];H^l(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{l-1}(\mathbb{R}))$. Além disso, do Lema 3.2, temos para $0 \leq t \leq T$

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.4}$$

Consideramos então o problema (2) com dado inicial $u(x,T) = u_T(x)$. Temos $u_T \in H^1(\mathbb{R})$, e daí, pelo Teorema 3.1, $u(x,t)$ pode ser estendida até um tempo $2T$. Agora suponhamos que $u(x,t)$ está bem definida até um tempo kT para algum k, e que para cada inteiro $l \geq 1$, temos

$$u \in C((0,kT];H^l(\mathbb{R})) \cap C^1((0,kT];H^{l-1}(\mathbb{R})) \tag{3.5}$$

e (3.4) vale para $0 \leq t \leq kT$. Então pelo Teorema 3.1, $u(x,t)$ pode ser estendida até o tempo $(k+1)T$ e (3.5) vale para $(k+1)T$. Mas então do Lema 3.2 (para $kT \leq t \leq (k+1)T$) e (3.4) (para kT), temos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|u(kT)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_x(kT)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

e $u_{(k+1)T} \in H^1(\mathbb{R})$. Procedendo indutivamente, estabelecemos a existência de solução $u(x,t)$ para todo $t \geq 0$ e, para cada inteiro $l \geq 1$, temos $u \in C((0,\infty);H^l(\mathbb{R})) \cap C^1((0,\infty);H^{l-1}(\mathbb{R}))$. ■

Observação 3.2 *Consideramos a equação*

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon\beta(u_x)_x + \gamma u_{xx} + \delta u_{xxt} - \alpha u_{xxxx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \tag{3.6}$$

com f *e* β *satisfazendo as mesmas hipóteses como no Teorema 3.2. Tomamos* $\overline{\beta}(\lambda) = \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\beta(\lambda)$ *e então temos (2) com* $B(\lambda) = \overline{\beta}(\lambda) + \lambda$. *Logo existe solução de (3.6) e (4) pelos resultados acima.*

3.2 Resultados de Convergência

Consideramos a família de soluções suaves $u = u(x,t;\varepsilon,\delta,\gamma,\alpha)$ do problema de Cauchy (3.6) e (4), conforme seção anterior, para ε, δ, γ e α pequenos ($\varepsilon+\delta+\gamma+\alpha \to 0$) e os dados iniciais suaves $u_0 = u(x,0;\varepsilon,\delta,\gamma,\alpha)$ que tem suporte compacto e satisfazem

$$\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|u_0\|_{L^{2(p+1)}(\mathbb{R})} \leq C_0,$$

para algum $p \in [0,2)$ e $C_0 > 0$ que não depende de ε, δ, γ e α. Observamos que u depende de ε, δ, γ e α mas no teorema abaixo fazemos ε, δ e α dependerem de γ e por isso denotamos $u = u^\gamma$. Então temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja f suficientemente suave satisfazendo $|f'(u)| \leq C(1+|u|^p)$, $p \in [0,2)$. Se $\delta = O(\gamma^{\frac{(4+2p)}{(2-p)}})$, $\alpha = O(\gamma^{\frac{(6+p)}{(2-p)}})$ e $\varepsilon = O(\gamma^{\frac{2}{(2-p)}})$ então existe uma subsequência $\{u^{\gamma_k}\}$ tal que $u^{\gamma_k} \rightharpoonup \overline{u}$, $f(u^{\gamma_k}) \rightharpoonup f(\overline{u})$ no sentido das distribuições e $\overline{u}$ é uma solução fraca de (1.4). Se além disso, $f'' > 0$ então $u^{\gamma_k} \to \overline{u}$ fortemente em $L^q_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, $1 < q < 2(p+1)$.*

Demonstração: Seja $\Omega = \mathbb{R}\times(0,T)$ para algum $T > 0$. Seguindo Schonbek (temos $2(p+1) > 1$, $f(u) = o(|u|^{(p+\frac{3}{2})})$ quando $|u| \to \infty$ e $p+\frac{3}{2} \in [0,2(p+1))$, é suficiente provar que
(i) $\{u^\gamma\}$ é limitada em $L^{2(p+1)}(\Omega)$ e
(ii) $\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\gamma) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u^\gamma) \in$ {conjunto compacto de $H^{-1}(\Omega)$}+ {conjunto limitado de $M(\Omega)$},
sendo $M(\Omega)$ um espaço de medida e $\eta(u)$ qualquer função convexa tal que η' e η'' são uniformemente limitadas em $\mathbb{R}$ e $\psi'(u) = \eta'(u)f'(u)$. Para simplificar a notação, nos cálculos que seguem omitimos o índice superior γ. Multiplicamos (3.6) por $-u_{xx}$, integramos em $\mathbb{R}$ e em $(0,T)$ para obter:

$$\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2 dxdt + \gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dxdt + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx + \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \beta'(u_x)u_{xx}^2 dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{0x}^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{0xx}^2 dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}} f'(u)u_x u_{xx} dxdt.$$

Estimamos separadamente a última parcela do lado direito:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f'(u)u_x u_{xx}dxdt &\leq \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dxdt + \frac{\gamma^{-1}}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |f'(u)|^2 u_x^2 dxdt \\ &\leq \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dxdt + C\gamma^{-2}(1+\|u\|_\infty^{2p})\end{aligned}$$

onde usamos (3.3). Daí

$$\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2 dxdt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dxdt + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx + \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \beta'(u_x)u_{xx}^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx \leq C\gamma^{-2}(1+\|u\|_\infty^{2p}). \tag{3.7}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (3.7) e (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}|u(x,t)|^2 &\leq 2\int_{-\infty}^x |uu_x|\,dx \\ &\leq 2\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C(1+\|u\|_\infty^{2p})^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1},\end{aligned}$$

assim

$$\|u\|_\infty \leq C\gamma^{-\frac{1}{(2-p)}} \tag{3.8}$$

se $0 \leq p < 2$. Daí

$$\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2 dxdt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dxdt + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx + \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \beta'(u_x)u_{xx}^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx \leq C\gamma^{-\frac{4}{(2-p)}}. \tag{3.9}$$

Portanto usando (3.9) e (3.3) obtemos

$$\alpha^2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2 dxdt \leq C\alpha\gamma^{-\frac{4}{(2-p)}} \tag{3.10}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |u_x u_{xxx}|dxdt &\leq \alpha\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\alpha\gamma^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{2}{(2-p)}}\end{aligned}$$

$$= C\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{(6-p)}{2(2-p)}}. \tag{3.11}$$

Multiplicando a equação (3.6) por du^{2p+1} (com d a ser escolhido) e integrando em $\mathbb{R}$ e em $(0,T)$ obtemos

$$d\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2p+2}}{2p+2}dx + d(2p+1)\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}}u^{2p}\beta(u_x)u_xdxdt + d(2p+1)\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2dxdt$$

$$= d\int_{\mathbb{R}}\frac{u_0^{2p+2}}{2p+2}dx - d(2p+1)\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xt}dxdt + d(2p+1)\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xxx}dxdt. \tag{3.12}$$

Multiplicando agora a equação (3.6) por $2\gamma u_t$ e integrando em $\mathbb{R}$ e em $(0,T)$ obtemos

$$2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_t^2dxdt + \alpha\gamma\int_{\mathbb{R}}u_{xx}^2dx + 2\gamma\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_{xt}^2dxdt + \gamma^2\int_{\mathbb{R}}u_x^2dx = \alpha\gamma\int_{\mathbb{R}}u_{0xx}^2dx$$

$$+\gamma^2\int_{\mathbb{R}}u_{0x}^2dx - 2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}f'(u)u_xu_tdxdt + 2\varepsilon\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\beta(u_x)_xu_tdxdt. \tag{3.13}$$

Somando (3.12) e (3.13) vem

$$\begin{aligned}
& d\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2p+2}}{2p+2}dx + d(2p+1)\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}\beta(u_x)u_xdxdt + d(2p+1)\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2dxdt\\
&\quad +2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_t^2dxdt + \alpha\gamma\int_{\mathbb{R}}u_{xx}^2dx + 2\gamma\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_{xt}^2dxdt + \gamma^2\int_{\mathbb{R}}u_x^2dx\\
&= d\int_{\mathbb{R}}\frac{u_0^{2p+2}}{2p+2}dx + \alpha\gamma\int_{\mathbb{R}}u_{0xx}^2dx + \gamma^2\int_{\mathbb{R}}u_{0x}^2dx - d(2p+1)\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xt}dxdt\\
&\quad + d(2p+1)\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xxx}dxdt - 2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}f'(u)u_xu_tdxdt + 2\varepsilon\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\beta(u_x)_xu_tdxdt\\
&\le C_0 - d(2p+1)\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xt}dxdt + d(2p+1)\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xxx}dxdt\\
&\quad - 2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}f'(u)u_xu_tdxdt + 2\varepsilon\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\beta(u_x)_xu_tdxdt.
\end{aligned}$$

Estimamos separadamente cada uma das parcelas do lado direito. Para a primeira usamos (3.3)

$$\begin{aligned}
-d(2p+1)\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xt}dxdt &\le d(2p+1)\delta\|u\|_\infty^{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u_xu_{xt}|dxdt\\
&\le C\delta\gamma^{-1}\|u\|_\infty^{4p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_x^2dxdt + \delta\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_{xt}^2dxdt\\
&\le C\delta\gamma^{-\frac{(4+2p)}{(2-p)}} + \delta\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_{xt}^2dxdt.
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela usamos (3.3) e (3.10)

$$
\begin{aligned}
d(2p+1)\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x u_{xxx}dxdt &\leq \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x^2 dxdt + C\gamma^{-1}\|u\|_\infty^{2p}\alpha^2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2 dxdt \\
&\leq \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x^2 dxdt + C\alpha\gamma^{-\frac{(6+p)}{(2-p)}}.
\end{aligned}
$$

Para a terceira parcela usamos (3.3)

$$
\begin{aligned}
2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f'(u)u_x u_t dxdt &\leq C\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt + C^2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x^2 dxdt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dxdt \\
&\leq C + C^2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x^2 dxdt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dxdt
\end{aligned}
$$

Finalmente, para a última parcela usamos (3.9)

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \beta(u_x)_x u_t dxdt &\leq C\varepsilon^2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} [\beta(u_x)_x]^2 dxdt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dxdt \\
&\leq CM^2\varepsilon^2\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dxdt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dxdt \\
&\leq C\varepsilon^2\gamma^{-\frac{4}{(2-p)}} + \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
&d\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2p+2}}{2p+2}dx + d(2p+1)\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}\beta(u_x)u_x dxdt + d_1\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x^2 dxdt \\
&+\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dxdt + \alpha\gamma\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx + \gamma\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2 dxdt + \gamma^2\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx \leq C,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

se $\delta = O(\gamma^{\frac{(4+2p)}{(2-p)}})$, $\alpha = O(\gamma^{\frac{(6+p)}{(2-p)}})$, $\varepsilon = O(\gamma^{\frac{2}{(2-p)}})$ e $d_1 = (2p+1)d - C^2 - \frac{1}{2} > 0$. Para verificar (i), repetimos os cálculos acima trocando T por $t_* \in (0,T)$. Desta forma obtemos (3.14) trocando T por t_* e daí integramos sobre $(0,T)$. Falta verificar (ii). Multiplicando a equação (3.6) por $\eta'(u)$ e considerando que $\psi'(u) = \eta'(u)f'(u)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u) &= \varepsilon(\eta'(u)\beta(u_x))_x - \varepsilon\eta''(u)u_x\beta(u_x) + \delta(\eta'(u)u_{xt})_x - \delta\eta''(u)u_x u_{xt} \\
&+\gamma(\eta'(u)u_x)_x - \gamma\eta''(u)u_x^2 - \alpha(\eta'(u)u_{xxx})_x + \alpha\eta''(u)u_x u_{xxx} = \sum_{j=1}^{8}\Gamma_j.
\end{aligned}
$$

Seja $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$. Usando (3.3) temos

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_1,\theta>| &\leq \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta'(u)\beta(u_x)\theta_x| dxdt \\
&\leq C\varepsilon \|\theta_x\|_{L^2(\Omega)} \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta(u_x)|^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq CM\varepsilon \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\varepsilon\gamma^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma^{\frac{(2+p)}{2(2-p)}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_2,\theta>| &\leq \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta''(u)\beta(u_x)u_x\theta| dxdt \\
&\leq C\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \beta(u_x)u_x dxdt \\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Para Γ_3 usamos (3.14)

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_3,\theta>| &\leq \delta \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta'(u)u_{xt}\theta_x| dxdt \\
&\leq C\|\theta_x\|_{L^2(\Omega)} \delta^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}} \left[\delta\gamma \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma^{\frac{(2+3p)}{2(2-p)}}.
\end{aligned}
$$

Para Γ_4 usamos (3.14) e (3.3)

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_4,\theta>| &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\delta\eta''(u)u_x u_{xt}\theta| dxdt \\
&\leq C\delta \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\delta^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1} \left[\gamma \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\delta\gamma \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma^{\frac{2p}{(2-p)}}.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_5,\theta>| &\leq \int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\gamma\eta'(u)u_x\theta_x|dxdt \\
&\leq C\gamma^{\frac{1}{2}}\|\theta_x\|_{L^2(\Omega)}\left[\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_6,\theta>| &\leq \gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\eta''(u)u_x^2\theta|dxdt \\
&\leq C\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt \\
&\leq C
\end{aligned}
$$

por (3.3).

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_7,\theta>| &\leq \alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\eta'(u)u_{xxx}\theta_x|dxdt \\
&\leq C\left[\alpha^2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma^{\frac{(2+p)}{2(2-p)}}
\end{aligned}
$$

por (3.10).

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_8,\theta>| &\leq \alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\eta''(u)u_x u_{xxx}\theta|dxdt \\
&\leq C\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |u_x u_{xxx}|dxdt \\
&\leq C\gamma^{\frac{p}{(2-p)}}
\end{aligned}
$$

por (3.11). Daí escrevendo

$$
\frac{\partial}{\partial t}\eta(u)+\frac{\partial}{\partial x}\psi(u)=\widetilde{\Gamma}_1+\widetilde{\Gamma}_2,
$$

sendo $\widetilde{\Gamma}_1=\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_7+\Gamma_8$ e $\widetilde{\Gamma}_2=\Gamma_2+\Gamma_6$, vimos que $\widetilde{\Gamma}_1 \in$\{conjunto compacto de $H^{-1}(\Omega)$\} e $\widetilde{\Gamma}_2 \in$\{conjunto limitado de $M(\Omega)$\}, logo vale (ii). ■

Suponhamos agora que existe uma função $u_0 \in L^1(\mathbb{R})\cap L^{2(p+1)}(\mathbb{R})$ tal que

$$
\lim_{\gamma\to 0} u_0^\gamma = u_0 \quad \in L^1(\mathbb{R})\cap L^{2(p+1)}(\mathbb{R}). \tag{3.15}
$$

Teorema 3.4 *Suponha que f, ε, δ e α satisfazem as mesmas hipóteses do Teorema 3.3 (No caso*

$p=0$, consideramos $\varepsilon = O(\gamma)$, $\delta = o(\gamma^2)$ e $\alpha = o(\gamma^3)$). Então

$$\lim_{\gamma\to 0} u^\gamma = u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^r_{loc}(\mathbb{R}))$$

para todo $r\in[1,2(p+1))$, onde $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+;L^{2(p+1)}(\mathbb{R}))$ é a única solução entrópica de (1.7) e (1.8).

Demonstração: Primeiramente estabelecemos que para qualquer função $\eta(u)$ tal que η' e η'' são uniformemente limitadas em $\mathbb{R}$, temos

$$\Lambda^\gamma = \sum_{i=1}^{8} \Gamma_i \; converge \;\; em \; \mathfrak{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+), \tag{3.16}$$

a uma medida não positiva, com Γ_i, $i=1,...,8$, dados como na prova do Teorema 3.3. Observe que Γ_2 e Γ_6 são não positivas:

$$<\Gamma_2,\theta> = -\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \eta''(u)\beta(u_x)u_x\theta\,dxdt \le 0;$$

$$<\Gamma_6,\theta> = -\gamma\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \eta''(u)u_x^2\theta\,dxdt \le 0.$$

Temos então que (3.16) segue do fato de que para qualquer $\theta\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$, $\theta\ge 0$, temos $<\widetilde{\Gamma}_1,\theta>\to 0$ quando $\gamma\to 0$ (como vimos na prova do Teorema 3.3) e do fato de que Γ_2 e Γ_6 são não positivas.

Para aplicar o Lema 1.2 mostramos que (1.9) e (1.10) são satisfeitas para uma medida de Young ν associada com a sequência $\{u^\gamma\}$. É um tópico padrão provar que, para todo par de entropia convexo (satisfazendo (1.5)),

$$\partial_t <\nu(.),\eta(\lambda)> + \partial_x <\nu(.),\psi(\lambda)> \le 0,$$

da propriedade de convergência (3.16). Em poucas palavras, segue da definição de medida de Young que os termos em (3.16) convergem (no sentido das distribuições) a seus "limites naturais",

$$\eta(u^\gamma) \rightharpoonup <\nu,\eta>, \;\; \psi(u^\gamma)\rightharpoonup <\nu,\psi>.$$

Mais precisamente, seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))$

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{\gamma\to 0}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \eta(u^\gamma)\phi_t dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi(u^\gamma)\phi_x dxdt\right] \\
&= -\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} < \nu_{(x,t)}, \eta > \phi_t dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}} < \nu_{(x,t)}, \psi > \phi_x dxdt\right]
\end{aligned}
$$

Por outro lado, por (3.16), $\eta(u^\gamma)_t + \psi(u^\gamma)_x$ converge a uma medida não positiva em $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$. A desigualdade (1.9) (para todo $k \in \mathbb{R}$) então segue de uma regularização padrão da função $|u-k|$. Para mostrar que (1.10) é satisfeita, nos baseamos em argumentos detalhados por Szepessy em [23] e por LeFloch e Natalini em [18]. Consideramos a função $g(\lambda) = \lambda^2$ e tomamos

$$
G(\lambda,\lambda_0) := g(\lambda) - g(\lambda_0) - g'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) = (\lambda-\lambda_0)^2 \geq 0 \tag{3.17}
$$

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e limitado. Usando a desigualdade de Jensen e (3.17), segue que

$$
\left|\frac{1}{T|I|}\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)| > dxdt\right|^2 \leq \frac{1}{T|I|}\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)|^2 > dxdt
$$

$$
= \frac{1}{T|I|}\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt
$$

e assim obtemos

$$
\frac{1}{T}\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)| > dxdt \leq C_I\left(\frac{1}{T}\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}
$$

Seja $\{\psi_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma sequência de funções teste tais que

$$
\lim_{n\to\infty} \psi_n = g'(u_0) \ \ em \ \ L^2(\mathbb{R}).
$$

Temos

$$
\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt = \int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2 - |u_0(x)|^2 - g'(u_0(x))(\lambda - u_0(x)) > dxdt
$$

$$
= \int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2 - |u_0(x)|^2 > dxdt + \int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, (\lambda - u_0(x)) > (\psi_n(x) - g'(u_0(x)))dxdt
$$

$$+\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, (u_0(x)-\lambda) > \psi_n(x)dxdt. \tag{3.19}$$

Vamos analisar separadamente os dois primeiros termos do lado direito de (3.19).

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2-|u_0(x)|^2 > dxdt &= \int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2 > dxdt - \int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |u_0(x)|^2 > dxdt\\ &\leq \int_0^T\int_{\mathbb{R}} < \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2 > \phi(x,t)dxdt - \int_0^T\int_I |u_0(x)|^2dxdt\end{aligned}$$

para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ satisfazendo $\phi(x,t)=1$ em I e $0\leq\phi(x,t)\leq 1$. Usando então (1.6) e (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}&= \lim_{\gamma\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |u^\gamma(x,t)|^2\phi(x,t)dxdt - \int_0^T\int_I |u_0(x)|^2dxdt\\ &\leq \lim_{\gamma\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |u^\gamma(x,t)|^2dxdt - \int_0^T\int_I |u_0(x)|^2dxdt\\ &\leq \lim_{\gamma\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \left[|u_0^\gamma(x)|^2+\delta|u_{0x}^\gamma(x)|^2\right]dxdt - \int_0^T\int_I |u_0(x)|^2dxdt.\end{aligned}$$

Portanto, por (3.15)

$$\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda|^2-|u_0(x)|^2 > dxdt \leq T\int_{\mathbb{R}-I}|u_0(x)|^2dx. \tag{3.20}$$

Para o segundo termo,

$$\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, (\lambda-u_0(x)) > (\psi_n(x)-g'(u_0(x)))dxdt = \int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, \lambda > (\psi_n(x)-g'(u_0(x)))dxdt$$

$$-\int_0^T\int_I u_0(x)(\psi_n(x)-g'(u_0(x)))dxdt$$

e usando (1.6), como fizemos acima,

$$\leq \lim_{\gamma\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |u^\gamma(x,t)(g'(u_0(x))-\psi_n(x))|dxdt + \int_0^T\int_I |u_0(x)||(g'(u_0(x))-\psi_n(x))|dxdt.$$

Usando então a desigualdade de Hölder, (3.3) e (3.15), obtemos

$$\int_0^T\int_I < \nu_{(x,t)}, (\lambda-u_0(x)) > (\psi_n(x)-g'(u_0(x)))dxdt \leq 2T\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g'(u_0)-\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.21}$$

Daí por (3.19), (3.20) e (3.21) vem que

$$\int_0^T \int_I < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt \leq \int_0^T \int_I < \nu_{(x,t)}, u_0(x) - \lambda > \psi_n(x)dxdt + T\int_{\mathbb{R}^d - I} |u_0(x)|^2 dx$$

$$+ 2T\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g'(u_0) - \psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.22}$$

Tomamos uma sequência crescente de conjuntos compactos K_j que cobrem $\mathbb{R}$, isto é, tais que $I \subset K_1 \subset K_2 \subset ...$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \mathbb{R}$, temos

$$\int_0^T \int_I < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt \leq \int_0^T \int_{K_j} < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt.$$

Usando esta desigualdade e (3.22) para K_j, obtemos

$$\frac{1}{T}\int_0^T \int_I < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \int_{K_j} < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt \tag{3.23}$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} < \nu_{(x,t)}, u_0(x) - \lambda > \psi_n(x)dxdt + 2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g'(u_0) - \psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

desde que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R} - K_j} |u_0(x)|^2 dx = 0.$$

Agora, em vista de (3.18) e (3.23), a propriedade de consistência forte (1.10) será estabelecida se mostrarmos que

$$\lim_{T\to 0^+} \frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} < \nu_{(x,t)}, u_0(x) - \lambda > \psi_n dxdt \leq 0 \tag{3.24}$$

para todo n. De fato, suponha que (3.24) vale, por (3.18), (3.23) e (1.10) temos

$$\begin{aligned}
&0 \leq \lim_{T\to 0^+} \left[\frac{1}{T}\int_0^T \int_I < \nu_{(x,t)}, |\lambda - u_0(x)| > dxdt\right]^2 \\
&\leq \lim_{T\to 0^+} C_I^2 \left[\frac{1}{T}\int_0^T \int_I < \nu_{(x,t)}, G(\lambda, u_0(x)) > dxdt\right] \\
&\leq \lim_{T\to 0^+} C_I^2 \left[\frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} < \nu_{(x,t)}, \lambda - u_0(x) > \psi_n(x)dxdt + 2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g'(u_0) - \psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\right] \\
&\leq 2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g'(u_0) - \psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

e o lado direito vai a zero quando $n \to \infty$. Falta mostrar que vale (3.24). Pela definição de medida de Young (Equação (1.6)), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} < \nu_{(x,t)}, u_0(x)-\lambda > \psi_n dxdt = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}[u_0(x)-u^\gamma(x,t)]\psi_n(x)dxdt \\
&= \lim_{\gamma\to 0}\left[\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}[u_0(x)-u_0^\gamma(x)]\psi_n(x)dxdt - \frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_0^t u_s^\gamma(x,s)ds\psi_n(x)dxdt\right] \\
&:= \lim_{\gamma\to 0}(A+B).
\end{aligned}
$$

Pela propriedade (3.15), o termo A tende a zero quando $\gamma \to 0$. Usando (3.6) temos

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_0^t u_s^\gamma(x,s)ds\psi_n(x)dxdt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_0^t[-f(u^\gamma)_x+\varepsilon\beta(u_x^\gamma)_x+\gamma u_{xx}^\gamma+\delta u_{xxt}^\gamma-\alpha u_{xxxx}^\gamma]ds\psi_n(x)dxdt \le C_nT,
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de $\psi_n \in L^2$, assim como todas as suas derivadas . Isto nos dá (3.24).

Observação 3.3 *O mesmo resultado de convergência é estabelecido no caso* $p>0$ *e* $|f'(u)| \le C$ *se* $\varepsilon = O(\gamma)$ *(ou* $\varepsilon=\gamma$*),* $\delta = O(\gamma^{2p+2})$ *e* $\alpha = O(\gamma^{p+3})$.

Capítulo

4

Estudo do Caso Geral

4.1 Resultados de Existência

Nesta seção estudamos a existência global de soluções suaves do problema de Cauchy (3) e (4). Aqui δ e γ_n, $n = 1, \ldots, N$, são constantes positivas e f é uma função suficientemente suave.

Seguindo a idéia do capítulo 2, a equação integral da solução é

$$u(x,t) = G(t)u_0 - \int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds \tag{4.1}$$

onde $G(t)u = F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}F(u)\right)$. A família de operadores lineares $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz as propriedades de semigrupo.

O seguinte lema dá algumas estimativas que serão usadas nesta seção:

Lema 4.1 *Para $\theta > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma_n > 0$, $n = 1, \ldots, N$, temos as seguintes estimativas:*

i) $\dfrac{\xi^{2j}}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} \leq \delta^{-2}$, *se* $\delta \leq 4$, $j = 1, 2$;

ii) $\dfrac{\xi^{2j}}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} \leq (2\gamma_j e\theta)^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$;

iii) $\xi^2\exp\left\{\dfrac{-2(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})\theta}{(1+\delta\xi^2)}\right\} \leq \dfrac{(\gamma_2 + \gamma_1\delta)}{2\gamma_1\gamma_2\theta}$.

Demonstração: As estimativas (i) para o caso $j=1$, (i) para o caso $j=2$, (ii) e (iii) são provadas de forma análoga como foram provadas as estimativas (i), (iii), (ii) e (iv), respectivamente, no Lema 2.1 do capítulo 2. ■

Para iniciar, definimos o operador

$$\mathscr{L}u(t) = G(t)u_0 - \int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)ds$$

em

$$\mathscr{A}_T = \{u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})); \|u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, t \in [0,T]\}$$

e a norma em $\mathscr{A}_T$ por $\|u(x,t)\|_{\mathscr{A}_T} = \sup\limits_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

Nosso resultado de existência local segue das propriedades de $\mathscr{L}$ dadas no seguinte lema:

Lema 4.2 *Suponha que f é suficientemente suave. Assuma que $u(t)$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e que*

$$\|u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Se $T>0$ é suficientemente pequeno então vale o seguinte:

(i) $\mathscr{L}u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ com

$$\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad \forall t \in [0,T]$$

e

$$\|\mathscr{L}u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad \forall t \in [0,T];$$

(ii) $\|\mathscr{L}u(t)\|_\infty \leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$;

(iii) $\mathscr{A}_T$ é invariante por $\mathscr{L}$;

iv) $\mathscr{L}$ é uma contração em $\mathscr{A}_T$.

Demonstração: Seja $E = \sup\limits_{|v|\leq 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} |f'(v)|$. Sem perda de generalidade, tomamos $f(0)=0$.

(i) Seja $u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo (4.2), então usando as propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$ e a igualdade de Parseval temos

$$
\begin{aligned}
\|G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} &= \left[\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k G(t)u_0}{\partial x^k}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\left|F\left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right)\right|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Além disso, usando novamente a igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \int_0^t \Bigg\{ &\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|F(f(u))|^2\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi \\
&+\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|F(f(u))|^2\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi \Bigg\}^{\frac{1}{2}} ds,
\end{aligned}
$$

usando o Lema 4.1 (ii) e a igualdade de Parseval

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^t [(2\gamma_1 e(t-s))^{-1}+(2\gamma_2 e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\mathbb{R}}|f(u)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \int_0^t [(2\gamma_1 e(t-s))^{-1}+(2\gamma_2 e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}} E\|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds \\
&\leq \int_0^t 2[(2\gamma_1 e(t-s))^{-1}+(2\gamma_2 e(t-s))^{-1}]^{\frac{1}{2}} E\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} ds \\
&\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

se $T \leq \dfrac{1}{8[(\gamma_1 e)^{-1}+(\gamma_2 e)^{-1}]E^2}$.

(ii) A estimativa (ii) é uma consequência de (i) e
$\|\mathscr{L}u(t)\|_\infty \leq (2\|\mathscr{L}u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(\mathscr{L}u(t))_x\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}$.

(iii) Para provar (iii), somente precisamos mostrar que se $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ então $\mathscr{L}u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$. Seja $t_0 \in (0,T]$. Seja $t \in (0,T]$. Sem perda de generalidade, tomamos $t_0 < t$. Temos

$$\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|G(t)u_0-G(t_0)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\|\int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds-\int_0^{t_0} G(t_0-s)F^{-1}\left(\frac{F(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|_{H^1(\mathbb{R})}\\
&\leq \|G(t)u_0-G(t_0)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}+\int_{t_0}^t\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F(f(u(t-r))_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}dr\\
&+\int_0^{t_0}\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F\left[f(u(t-r))_x-f(u(t_0-r))_x)\right]}{(1+\delta\xi^2)}\right)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}dr=A+B+C.
\end{aligned}
$$

Para A, usando a igualdade de Parseval e a Desigualdade do valor médio, obtemos

$$
\begin{aligned}
A &\leq \left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi^{2n})\theta}{1+\delta\xi^2}\right\}(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi^{2n})^2|t-t_0|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\left|F\left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right)\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{|t-t_0|\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}}{\sqrt{2}t_0}.
\end{aligned}
$$

Para estimar B, usamos a igualdade de Parseval e o Lema 4.1 (i)

$$
\begin{aligned}
B &\leq \int_{t_0}^t\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi^{2n})r}{1+\delta\xi^2}\right\}|F(f(u(t-r)))|^2(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right.\\
&\leq \int_{t_0}^t\sqrt{2}\delta^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}}|f(u(t-r))|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}dr\\
&\leq \int_{t_0}^t\sqrt{2}\delta^{-1}E\|u(t-r)\|_{L^2(\mathbb{R})}dr\\
&\leq 2\sqrt{2}\delta^{-1}E\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}|t-t_0|.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
C \leq \int_0^{t_0}&\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi^{2n})r}{1+\delta\xi^2}\right\}(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2}.\right.\\
&|F(f(u(t-r))-f(u(t_0-r)))|^2d\xi\}^{\frac{1}{2}}dr
\end{aligned}
$$

usando o Lema 4.1 (i)

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^{t_0}\sqrt{2}\delta^{-1}\left\{\int_{\mathbb{R}}|f(u(t-r))-f(u(t_0-r))|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}dr\\
&\leq \sqrt{2}\delta^{-1}E\int_0^{t_0}\|u(t-r)-u(t_0-r)\|_{H^1(\mathbb{R})}dr\\
&\leq \overline{C}
\end{aligned}
$$

onde $\overline{C} \to 0$ quando $|t-t_0| \to 0$ pois $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ e $t_0 - r \in [0,T]$.

iv) Sejam $u, v \in \mathscr{A}_T$,

$$
\begin{aligned}
&\|\mathscr{L}u(t) - \mathscr{L}v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \\
&\qquad \int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}(\xi^2+\xi^4)}{(1+\delta\xi^2)^2} |F[f(u)-f(v)]|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds \\
&\qquad \leq \int_0^t \frac{[(2\gamma_1 e)^{-1} + (2\gamma_2 e)^{-1}]^{\frac{1}{2}} E \|u(s)-v(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\|u(x,t)-v(x,t)\|_{\mathscr{A}_T}
\end{aligned}
$$

se $T \leq \dfrac{1}{8\{((\gamma_1 e)^{-1} + (\gamma_2 e)^{-1})E^2\}}$. ■

Podemos agora obter nosso resultado de existência local de soluções de (3) e (4). Observamos que se $N \leq 3$, os resultados obtidos aqui são análogos aos obtidos para o problema (2) e (4). Se $N > 3$ os resultados são diferentes, como veremos no teorema abaixo.

Teorema 4.1 *Suponha que u_0 e f satisfazem as mesmas hipóteses como no Lema 4.2 então o problema de Cauchy (3) e (4) admite uma solução local suave*

$$u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})).$$

Além disso, para cada inteiro $k \geq 1$, temos
i) $u \in C((0,T];H^k(\mathbb{R}))$;
ii) $u \in C((0,T];H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}))$ se $N \leq 3$;
iii) $u \in C((0,T];H^{k+N-3}(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T];H^{k-1}(\mathbb{R}))$ se $N > 3$,
onde T depende de γ_1, γ_2, E e $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

Demonstração: Sejam $u^0 \equiv 0$ e $u^n \equiv \mathscr{L}(u^{n-1})$. Então, por indução, as estimativas (i) e (ii) do Lema 4.2 valem para cada u^n. Além disso, pelo Lema 4.2 (iii) e (iv), $\mathscr{A}_T$ é invariante por $\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}$ é uma contração. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach, a equação integral (4.1) possui uma solução $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$. Para provar os resultados de regularidade, somente precisamos mostrar que se $u \in C((0,T];H^l(\mathbb{R}))$, $l \geq 1$, então $u \in C((0,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$ (e no caso $N \leq 3$, $u_t \in C((0,T];H^{l-1}(\mathbb{R}))$

ou se $N>3$ e $u\in C((0,T];H^{l+N-3}(\mathbb{R}))$ então $u_t\in C((0,T];H^{l-1}(\mathbb{R})))$. Seja $t_1\in(0,T)$, precisamos mostrar que $u\in C([t_1,T];H^{l+1}(\mathbb{R}))$ (e no caso $N\leq 3$, $u_t\in C([t_1,T];H^{l-1}(\mathbb{R}))$ ou se $N>3$ e $u\in C((0,T];H^{l+N-3}(\mathbb{R}))$ então $u_t\in C([t_1,T];H^{l-1}(\mathbb{R})))$. Tomamos $t_2=\frac{t_1}{2}$. Então as propriedades de semi-grupo de G implicam que, para $t>t_2$

$$u(x,t)=G(t-t_2)u(t_2)-\int_{t_2}^{t}G(t-s)F^{-1}\left[\frac{F(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right]ds.$$

Para começar, usando a igualdade de Parseval e o Lema 4.1 (i) e (iii), temos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} &\leq \|G(t-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}+\int_{t_2}^{t}\left\|G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})}ds\\
&\leq \left\{\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}|F(u(t_2))|^2d\xi\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^2\left|F\left(\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k}\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k}}{(1+\delta\xi^2)^2}|F(f(u)_x)|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds\\
&\leq \left\{\int_{\mathbb{R}}|F(u(t_2))|^2d\xi+\frac{(\gamma_2+\gamma_1\delta)}{2\gamma_1\gamma_2(t-t_2)}\sum_{k=0}^{l}\left|F\left(\frac{\partial^k u(t_2)}{\partial x^k}\right)\right|^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^2|F(f(u))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=0}^{l}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\xi^{2k+4}|F(f(u))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds\\
&\leq \left[1+\frac{(\gamma_2+\gamma_1\delta)}{2\gamma_1\gamma_2(t_1-t_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}+\int_{t_2}^{t}\sqrt{2}\delta^{-1}\|f(u(s))\|_{H^l(\mathbb{R})}ds
\end{aligned}$$

usando o Teorema 1.4,

$$\leq\left[1+\frac{(\gamma_2+\gamma_1\delta)}{2\gamma_1\gamma_2(t_1-t_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}+\int_{t_2}^{t}\sqrt{2}\delta^{-1}C\sup_{[t_2,T]}\|u(s)\|_{H^l(\mathbb{R})}ds.$$

onde C é uma constante positiva dependendo de $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$. Assim

$$\sup_{t_1 \le t \le T} \|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Por outro lado, note que

$$F(u)_t = -\frac{(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi^{2n})}{(1+\delta\xi^2)} F(u) - \frac{F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}$$

e para $t_2 = \frac{t_1}{2} < t_1 \le t$

$$\begin{aligned} u_t(t) = &- F^{-1}\left[\frac{(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi^{2n})}{(1+\delta\xi^2)} \exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi^{2n})(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\} F(u(t_2))\right] \\ &+ \int_{t_2}^{t} F^{-1}\left[\frac{(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi^{2n}) \exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\} F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)^2}\right] ds \\ &- F^{-1}\left[\frac{F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]. \end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente os casos $N > 3$ e $N \le 3$. No caso $N \le 3$, observe que

$$\frac{(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi^{2n})^2 \exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^4} \le \frac{C}{(t-s)}$$

onde $C = C(\delta, \gamma_1, ..., \gamma_N)$, pois se $N = 1$

$$\frac{\gamma_1^2 \xi^4 \exp\left\{\frac{-2\gamma_1 \xi^2 (t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^4} \le \frac{\gamma_1}{6\delta(t-s)},$$

se $N = 2$

$$\frac{(\gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi^4)^2 \exp\left\{\frac{-2(\gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi^4)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^4} \le \left[\frac{\gamma_1}{6\delta} + \frac{\gamma_2}{6\delta^2}\right] \frac{1}{(t-s)}$$

e se $N = 3$

$$\frac{(\gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi^4 + \gamma_3 \xi^6)^2 \exp\left\{\frac{-2(\gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi^4 + \gamma_3 \xi^6)(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^4} \le \left[\frac{\gamma_1}{6\delta} + \frac{\gamma_2}{6\delta^2} + \frac{\gamma_3}{2\delta^3}\right] \frac{1}{(t-s)}.$$

Desta forma

$$
\begin{aligned}
&\|u_t(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \leq \left\| F^{-1}\left[\frac{F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \\
&+ \left\| F^{-1}\left[\frac{(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})}{(1+\delta\xi^2)} \exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\} F(u(t_2))\right]\right\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \\
&+ \int_{t_2}^{t} \left\| F^{-1}\left[\frac{(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n}) \exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\} F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)^2}\right]\right\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} ds \\
&\leq \|f(u(t))\|_{H^l(\mathbb{R})} + \left[\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^{2k}|F(u(t_2))|^2}{2(t-t_2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} + \int_{t_2}^{t} \left[\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}} \frac{C\xi^{2k}F(f(u)_x)}{(t-s)} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C' \sup_{[t_1,T]} \|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})} + \frac{\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}}{\sqrt{2}(t_1-t_2)} + \overline{C}(T-t_2)^{\frac{1}{2}} \sup_{[t_2,T]} \|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

onde $C' = C'(\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})})$ e $\overline{C} = \overline{C}(N,\delta,\gamma_1,...,\gamma_N)$. No caso $N > 3$

$$
\begin{aligned}
&\|u_t(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \leq \left\| F^{-1}\left[\frac{F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)}\right]\right\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \\
&+ \left\| F^{-1}\left[\frac{(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})}{(1+\delta\xi^2)} \exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})(t-t_2)}{(1+\delta\xi^2)}\right\} F(u(t_2))\right]\right\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} \\
&+ \int_{t_2}^{t} \left\| F^{-1}\left[\frac{(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n}) \exp\left\{\frac{-(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})(t-s)}{(1+\delta\xi^2)}\right\} F(f(u)_x)}{(1+\delta\xi^2)^2}\right]\right\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} ds \\
&\leq \|f(u(t))\|_{H^l(\mathbb{R})} + \left[\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^{2k}|F(u(t_2))|^2}{2(t-t_2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&+ \int_{t_2}^{t} \left[\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}} \frac{(\sum_{n=1}^N \gamma_n \xi^{2n})\xi^{2k}F(f(u)_x)}{2(1+\delta\xi^2)^3(t-s)} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C\|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})} + \frac{\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}}{\sqrt{2}(t_1-t_2)} \\
&+ \int_{t_2}^{t} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}} \frac{(\sum_{n=1}^3 \gamma_n \xi^{2n})\xi^{2k}F(f(u)_x)}{2(1+\delta\xi^2)^3(t-s)} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^6(\sum_{n=0}^{N-3} \gamma_{(n+3)} \xi^{2n})\xi^{2k}F(f(u)_x)}{2(1+\delta\xi^2)^3(t-s)} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \right\} ds. \\
&\leq C \sup_{[t_1,T]} \|u(t)\|_{H^l(\mathbb{R})} + \frac{\|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R})}}{\sqrt{2}(t_1-t_2)} + \overline{C}(T-t_2)^{\frac{1}{2}} \sup_{[t_2,T]} \|u(t)\|_{H^{l+N-3}(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

onde $C = C(\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})})$ e $\overline{C} = \overline{C}(\delta, \gamma_1, ..., \gamma_N)$. Assim

$$\sup_{t_1 \le t \le T} \|u_t(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Para o restante da prova usa-se argumentos análogos aos usados na demonstração do Teorema 2.1 no capítulo 2. ■

A fim de estender estas soluções globalmente, provamos primeiro o seguinte lema.

Lema 4.3 *Suponha que $u(x,t) = u(x,t;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N)$ é uma solução de (3) e (4) em $\mathbb{R} \times [0,t_2]$. Então temos as seguintes estimativas para $0 \le t_1 \le t_2$:*

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t_1)\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t_1)\,dx \le \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}} u_{0x}^2(x)\,dx.$$

Demonstração: Multiplicamos (3) por $2u$ e integramos em $\mathbb{R}$ e em $[0,t_1]$ e obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t_1)\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t_1)\,dx + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^n u(x,t)|^2\,dxdt = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}} u_{0x}^2(x)\,dx. \tag{4.3}$$

■

Podemos agora afirmar nosso resultado de existência global:

Teorema 4.2 *Suponha que f e u_0 satisfazem as mesmas hipóteses como no Teorema 4.1. Então o problema (3) e (4) tem uma solução global suave*

$$u \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R})).$$

Além disso, para cada inteiro $k \ge 1$, temos

i) $u \in C((0,\infty); H^k(\mathbb{R}))$;

ii) $u \in C((0,\infty); H^k(\mathbb{R})) \cap C^1((0,\infty); H^{k-1}(\mathbb{R}))$ se $N \le 3$;

iii) $u \in C((0,\infty); H^{k+N-3}(\mathbb{R})) \cap C^1((0,\infty); H^{k-1}(\mathbb{R}))$ se $N > 3$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.1, existe uma solução $u(x,t;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N) = u(x,t)$ definida até um tempo T e que satisfaz (i)-(iii) do Teorema 4.1. Além disso, do Lema 4.3, temos para $0 \leq t \leq T$

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.4}$$

Consideramos o problema (3) com dado inicial $u(x,T) = u_T(x)$. Então $u_T \in H^1(\mathbb{R})$ e daí pelo Teorema 4.1, $u(x,t)$ pode ser estendida até o tempo $2T$. Agora suponha que $u(x,t)$ está bem definida até um tempo kT, para algum inteiro k, e que para cada inteiro $l \geq 1$, temos

a) $u \in C((0,kT];H^l(\mathbb{R}))$;

b) $u \in C((0,kT];H^l(\mathbb{R})) \cap C^1((0,kT];H^{l-1}(\mathbb{R}))$ se $N \leq 3$;

c) $u \in C((0,kT];H^{l+N-3}(\mathbb{R})) \cap C^1((0,kT];H^{l-1}(\mathbb{R}))$ se $N > 3$,

e (4) vale para $0 \leq t \leq kT$. Então pelo Teorema 4.1, $u(x,t)$ pode ser estendida até um tempo $(k+1)T$ e (a)-(c) valem para $(k+1)T$. Mas então do Lema 4.3 (para $kT \leq t \leq (k+1)T$) e (4.4) (para kT) , temos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|u(kT)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_x(kT)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \delta\|u_{0x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

e $u_{(k+1)T} \in H^1(\mathbb{R})$. Procedendo indutivamente, estabelecemos assim a existência de solução $u(x,t)$ para todo $t \geq 0$ e $u(x,t)$ satisfaz (i)-(iii).

∎

4.2 Estimativas a Priori

Seja f suave satisfazendo a condição de crescimento $|f'(u)| \leq C(1+|u|^p)$, $0 \leq p < 2$. Seja $\{u = u(x,t;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N)\}$ uma sequência de soluções de (3) e (4) obtidas anteriormente, para δ e γ_n suficientemente pequenos ($\delta + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \to 0$) e com dados iniciais suaves $u_0(x) = u(x,0;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N)$ com suporte compacto e satisfazendo

$$\|u_0\|_{H^N(\mathbb{R})} + \|u_0\|_{L^{2(p+1)}(\mathbb{R})} \leq C_0, \tag{4.5}$$

para algum $0 \leq p < 2$, e $C_0 > 0$ independente de δ, $\gamma_1,...,\gamma_N$.

Lema 4.4 *Para todo $T > 0$ temos*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u_x^2}{2}\,dx + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2\,dx + \sum_{n=2}^{N}\gamma_n \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{n+1}u|^2\,dxdt + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2\,dxdt \le \overline{C}\gamma_1^{-\frac{4}{(2-p)}}; \tag{4.6}$$

$$\gamma_n^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{n+1}u|^2\,dxdt \le \overline{C}\gamma_n\gamma_1^{-\frac{4}{(2-p)}}; \tag{4.7}$$

$$\sum_{j=2}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\gamma_j\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{j}u|^2\,dx + \delta\gamma_j\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{j+1}u|^2\,dx\right] \tag{4.8}$$

$$+\sum_{j=2}^{N-1}\left[\frac{\gamma_j^2}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{2j}u|^2\,dxdt + \sum_{\substack{n=1,\\ n\neq j}}^{N} \gamma_n\gamma_j\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{n+j}u|^2\,dxdt\right] \le C\gamma_1^{-\frac{(2+p)}{(2-p)}}.$$

Se $\delta = O(\gamma_1^{\frac{(4+2p)}{(2-p)}})$, $\gamma_2 = O(\gamma_1^{\frac{(6+p)}{(2-p)}})$ e $\gamma_n = O(\gamma_{n-1}\gamma_1^{\frac{(4+2p)}{(2-p)}})$, $n = 3,\ldots,N$ então

$$d\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2p+2}}{2p+2}\,dx + \left[(2p+1)d - C^2 - \frac{1}{2}\right]\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x^2\,dxdt + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2\,dxdt \tag{4.9}$$

$$+\frac{\gamma_1\delta}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2\,dxdt + \sum_{n=1}^{N}\frac{\gamma_1\gamma_n}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^n u|^2\,dx \le C.$$

Demonstração: Primeiramente multiplicamos (3) por $-u_{xx}$ e integramos em $\mathbb{R}$ e em $[0,T]$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2\,dx + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2\,dx + \sum_{n=1}^{N}\gamma_n\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{n+1}u|^2\,dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{0x}^2\,dx + \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{0xx}^2\,dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}} f'(u)u_xu_{xx}\,dxdt.$$

A última integral pode ser estimada usando (4.3)

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f'(u)u_xu_{xx}\,dxdt \le \frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2\,dxdt + \gamma_1^{-1}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |f'(u)|^2u_x^2\,dxdt$$
$$\le \frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2\,dxdt + C(1+\|u\|_\infty^{2p})\gamma_1^{-2}.$$

Obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2\,dx+\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2\,dx+\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2\,dxdt+\sum_{n=2}^{N}\gamma_n\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^{n+1}u|^2\,dxdt\le C(1+\|u\|_\infty^{2p})\gamma_1^{-2}. \tag{4.10}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (4.10) e (4.3) obtemos

$$\begin{aligned}|u(x,t)|^2 &\le 2\int_{-\infty}^{x}|uu_x|\,dx\\ &\le 2\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\le C(1+\|u\|_\infty^{2p})^{\frac{1}{2}}\gamma_1^{-1},\end{aligned}$$

e assim

$$\|u\|_\infty\le C\gamma_1^{-\frac{1}{(2-p)}}. \tag{4.11}$$

Combinando (4.10) e (4.11) obtemos (4.6) e (4.7). Multiplicamos (3) por $(-1)^j\gamma_j\partial_x^{2j}u$, $j\in\{2,...,N-1\}$ e integramos em $\mathbb{R}$ e em $[0,T]$,

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma_j}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^j u|^2\,dx+\frac{\delta\gamma_j}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^{j+1}u|^2\,dx+\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\gamma_j\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^{n+j}u|^2\,dxdt\\ &=\frac{\gamma_j}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^j u_0|^2\,dx+\frac{\delta\gamma_j}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^{j+1}u_0|^2\,dx+(-1)^{j+1}\gamma_j\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f(u)_x\partial_x^{2j}u\,dxdt.\end{aligned}$$

A última integral pode ser estimada usando (4.3) e (4.11)

$$\begin{aligned}(-1)^{j+1}\gamma_j\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f(u)_x\partial_x^{2j}u\,dxdt &\le \gamma_j\int_0^T\int_{\mathbb{R}} C(1+|u|^p)|u_x\partial_x^{2j}u|\,dxdt\\ &\le \frac{\gamma_j^2}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^{2j}u|^2\,dxdt+C\gamma_1^{-\frac{(p+2)}{(2-p)}}.\end{aligned}$$

Isto dá (4.8). Finalmente, multiplicamos (3) por $du^{2p+1}+\gamma_1 u_t$, e integramos em $\mathbb{R}$ e em $[0,T]$,

$$\begin{aligned}&d\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2p+2}}{2p+2}\,dx+(2p+1)d\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x^2\,dxdt+\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_t^2\,dxdt\\ &+\gamma_1\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2\,dxdt+\sum_{n=1}^{N}\frac{\gamma_1\gamma_n}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^n u|^2\,dx=\sum_{n=1}^{N}\frac{\gamma_1\gamma_n}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^n u_0|^2\,dx\\ &+d\int_{\mathbb{R}}\frac{u_0^{2p+2}}{2p+2}\,dx-\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f(u)_x u_t\,dxdt-(2p+1)d\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{2p}u_x u_{xt}\,dxdt\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=2}^{N}(-1)^n(2p+1)d\gamma_n\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x(\partial_x^{2n-1}u)\,dxdt.$$

As últimas $(N+1)$ integrais podem ser estimadas como segue. Usando (4.3)

$$-\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}}f(u)_xu_t\,dxdt\le\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_t^2\,dxdt+C+C^2\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2\,dxdt.$$

Usando (4.3) e (4.11)

$$\begin{aligned}-(2p+1)d\delta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xt}\,dxdt&\le\frac{\gamma_1\delta}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_{xt}^2\,dxdt+(2p+1)^2d^2\delta\|u\|_\infty^{4p}\gamma_1^{-1}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_x^2\,dxdt\\&\le\frac{\gamma_1\delta}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_{xt}^2\,dxdt+C\delta\gamma_1^{-\frac{(2p+4)}{(2-p)}}.\end{aligned}$$

Para $n=2$ usamos (4.11) e (4.7)

$$\begin{aligned}(2p+1)d\gamma_2\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_xu_{xxx}\,dxdt&\le\frac{\gamma_1}{2(N-1)}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2\,dxdt\\&\quad+C\gamma_1^{-1}\|u\|_\infty^{2p}\gamma_2^2\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u_{xxx}|^2\,dxdt\\&\le\frac{\gamma_1}{2(N-1)}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2\,dxdt+C\gamma_2\gamma_1^{-\frac{(6+p)}{(2-p)}}.\end{aligned}$$

Para $n\ge3$ usamos (4.11) e (4.8) com $j=(n-1)$

$$\begin{aligned}(-1)^n(2p+1)d\gamma_n\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x\partial_x^{2n-1}u\,dxdt&\le\frac{\gamma_1}{2(N-1)}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2\,dxdt\\&\quad+C\gamma_n^2\gamma_1^{-1}\|u\|_\infty^{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^{2n-1}u|^2\,dxdt\\&\le\frac{\gamma_1}{2(N-1)}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2\,dxdt+C\gamma_n\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_1^{-\frac{(4+2p)}{(2-p)}}.\end{aligned}$$

Assim

$$d\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2p+2}}{2p+2}dx+\left[(2p+1)d-C^2-\frac{1}{2}\right]\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u^{2p}u_x^2\,dxdt+$$

$$+\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_t^2\,dxdt+\frac{\gamma_1\delta}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_{xt}^2\,dxdt+\sum_{n=1}^{N}\frac{\gamma_1\gamma_n}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^nu|^2\,dx$$

$$\le C[1+\delta\gamma_1^{-\frac{(2p+4)}{(2-p)}}+\gamma_2\gamma_1^{-\frac{(6+p)}{(2-p)}}+\gamma_n\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_1^{-\frac{(4+2p)}{(2-p)}}].$$

A prova do Lema 4.4 está completa. ∎

4.3 Resultados de Convergência

Usando as estimativas obtidas no Lema 4.4 podemos agora afirmar nossos resultados de convergência. Para melhorar a leitura, denotamos $u(x,t;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N) = u^\gamma(x,t)$ e $\gamma \to 0$ significa que $\delta + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \to 0$.

Teorema 4.3 *Assuma f suficientemente suave satisfazendo a condição de crescimento $|f'(u)| \leq C(1+|u|^p)$, $0 \leq p < 2$. Se $\delta = O(\gamma_1^{\frac{(4+2p)}{(2-p)}})$ e $\gamma_n = O(\gamma_{n-1}\gamma_1^{\frac{(4+2p)}{(2-p)}})$, $n = 2,...,N$, então existe uma subsequência $\{u^{\gamma_k}\}$ tal que $u^{\gamma_k} \rightharpoonup \overline{u}$, $f(u^{\gamma_k}) \rightharpoonup f(\overline{u})$ no sentido das distribuições e $\overline{u}$ é solução fraca de (1.4). Além disso, se $f'' > 0$ então $u^{\gamma_k} \to \overline{u}$ fortemente em $L^q_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, $1 < q < 2(p+1)$.*

Demonstração: Seja $\Omega = \mathbb{R}\times(0,T)$ para algum $T > 0$. Seguindo Schonbek [22] (temos $2(p+1) > 1$, $f = o(|u|^{(p+\frac{3}{2})})$ quando $|u| \to \infty$ e $p+\frac{3}{2} \in [0,2(p+1))$, somente precisamos mostrar que
(i) $\{u^\gamma\}$ fica num conjunto limitado de $L^{2(p+1)}(\Omega)$;
(ii) $\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\gamma) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u^\gamma) \in$ {conjunto compacto de $H^{-1}(\Omega)$}+ {conjunto limitado de $M(\Omega)$}
onde $M(\Omega)$ denota um espaço de medidas e $\eta(u)$ é uma função suave com crescimento linear no infinito e, mais precisamente, tal que η' e η'' são uniformemente limitadas em $\mathbb{R}$ e $\psi'(u) = \eta'(u)f'(u)$. Daqui pra frente nos cálculos, por simplicidade, omitimos o índice superior γ sempre que isto não gerar dúvidas.

Substituindo T por $t* \in (0,T)$ em (4.9) e integrando a equação obtida em $(0,T)$, obtemos (i). Agora falta mostrar (ii). Multiplicamos (3) por $\eta'(u)$ e substituímos $\eta'(u)f'(u)$ por $\psi'(u)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u) = \delta[\eta'(u)u_{xt}]_x - \delta\eta''(u)u_x u_{xt} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N}\left\{(-1)^{n+1}\gamma_n[\eta'(u)\partial_x^{2n-1}u]_x + (-1)^n\gamma_n\eta''(u)u_x\partial_x^{2n-1}u\right\} = \sum_{j=1}^{2N+2}\Gamma_j
\end{aligned}
$$

Seja $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$. Para estimar Γ_1 usamos (4.9)

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_1,\theta>| &\leq \delta \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta'(u)u_{xt}\theta_x|\,dxdt \\
&\leq C\gamma_1^{-\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}\left[\delta\gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2\,dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{(3p+2)}{2(2-p)}}.
\end{aligned}
$$

Para estimar Γ_2 usamos (4.9) e (4.3)

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_2,\theta>| &\leq \delta \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta''(u)u_x u_{xt}\theta|\,dxdt \\
&\leq C\delta^{\frac{1}{2}}\gamma_1^{-1}\left[\gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2\,dxdt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\delta\gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2\,dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{2p}{(2-p)}}.
\end{aligned}
$$

Para estimar Γ_3 e Γ_4 usamos (4.3)

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_3,\theta>| &\leq \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta'(u)u_x\theta_x|\,dxdt \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{1}{2}}\left[\gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2\,dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{1}{2}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_4,\theta>| &\leq \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta''(u)u_x^2\theta|\,dxdt \\
&\leq C\gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2\,dxdt \\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Para Γ_5 e Γ_6 usamos (4.7) e (4.3)

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_5,\theta>| &\leq \gamma_2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta'(u)u_{xxx}\theta_x|\,dxdt \\
&\leq C\left[\gamma_2^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2\,dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{(2+p)}{2(2-p)}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|<\Gamma_6,\theta>| &\leq \gamma_2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\eta''(u) u_x u_{xxx}\theta|\, dxdt \\
&\leq C\left[\gamma_2^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_{xxx}^2\, dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2\, dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_2^{\frac{1}{2}} \gamma_1^{-\frac{(6-p)}{2(2-p)}} \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{p}{(2-p)}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para $n \geq 3$ usamos (4.8):

$$
\begin{aligned}
\gamma_n \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u)\partial_x^{2n-1} u\theta_x\, dxdt \right| &\leq C\gamma_n \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{2n-1}u|^2\, dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_n \gamma_{n-1}^{-\frac{1}{2}} \gamma_n^{-\frac{1}{2}} \left[\gamma_{n-1}\gamma_n \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{2n-1}u|^2\, dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_n^{\frac{1}{2}} \gamma_{n-1}^{-\frac{1}{2}} \gamma_1^{-\frac{(2+p)}{(2-p)}} \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{(2+p)}{2(2-p)}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\gamma_n \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u) u_x \partial_x^{2n-1} u\theta\, dxdt \right| &\leq C\gamma_n \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^{2n-1}u|^2\, dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u_x^2\, dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\gamma_n^{\frac{1}{2}} \gamma_{n-1}^{-\frac{1}{2}} \gamma_1^{-\frac{4}{2(2-p)}} \\
&\leq C\gamma_1^{\frac{p}{(2-p)}}.
\end{aligned}
$$

Vemos que $\dfrac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \dfrac{\partial}{\partial x}\psi(u)$ decompõem-se na forma

$$
\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u) = \widetilde{\Gamma}_1 + \widetilde{\Gamma}_2,
$$

sendo $\widetilde{\Gamma}_1 = \sum_{i\neq 4} \Gamma_i \in \{$conjunto compacto de $H^{-1}(\Omega)\}$ e $\widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_4 \in\{$conjunto limitado de $M(\Omega)\}$ se $p > 0$. Quando $p = 0$ então $\widetilde{\Gamma}_1 = \sum_{i=1}^{N+1} \Gamma_{2i-1}$ e $\widetilde{\Gamma}_2 = \sum_{i=1}^{N+1} \Gamma_{2i}$ o que completa a prova.

■

Assumimos agora que existe uma função $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{2(p+1)}(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{\gamma\to 0} u_0^\gamma = u_0 \quad \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{2(p+1)}(\mathbb{R}). \tag{4.12}$$

Teorema 4.4 *Suponha que f, δ e γ_n satisfazem as mesmas hipóteses como no Teorema 4.3 (quando $p = 0$ então consideramos $\delta = o(\gamma_1^2)$ e $\gamma_n = o(\gamma_{n-1}\gamma_1^2)$, $n \geq 2$). Então*

$$\lim_{\gamma\to 0} u^\gamma = u \ \ in \ \ L^\infty(\mathbb{R}_+; L^r_{loc}(\mathbb{R}))$$

para todo $r \in [1, 2(p+1))$, onde $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{2(p+1)}(\mathbb{R}))$ é a única solução entrópica de (1.7)-(1.8).

Demonstração: Primeiramente estabelecemos que, para qualquer função convexa $\eta(u)$ tal que η' e η'' são uniformemente limitadas em $\mathbb{R}$, temos

$$\Lambda^\gamma = \sum_{i=1}^{2N+2} \Gamma_i \ converge \ em \ \mathfrak{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+), \tag{4.13}$$

a uma medida não positiva, onde os Γ_i, $i = 1, ..., 2N+2$ são como na prova do Teorema 4.3. Além disso, vimos que para qualquer $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$, $\theta \geq 0$, $< \sum_{i\neq 4} \Gamma_i, \theta > \to 0$ quando $\gamma \to 0$. Temos Γ_4 não positiva:

$$< \Gamma_4, \theta >= -\gamma_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u) u_x^2 \theta \, dxdt \leq 0.$$

Agora a prova segue da mesma forma como fizemos no capítulo anterior, na prova do Teorema 3.4.

Observação 4.1 *O mesmo resultado de convergência é também estabelecido no caso $p > 0$ e $|f'(u)| \leq C$ se $\delta = O(\gamma_1^{2(p+1)})$ e $\gamma_n = O(\gamma_{n-1}\gamma_1^{p+2})$.*

Capítulo

5

Resultados de Existência e Convergência do Caso Multidimensional

5.1 Resultados de Existência

Nesta seção estudamos a existência de soluções do problema (5) e (6) para $f_j(u),\ j = 1,...,d$, suficientemente suaves.

Como nos capítulos anteriores, encontramos a representação integral da solução

$$u(x,t) = G(t)u_0 - \sum_{j=1}^{d} \int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(f_j(u)_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)}\right) ds \tag{5.1}$$

sendo

$G(t)u = F^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})]t}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}F(u)\right)$. A família de operadores lineares $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ definida desta forma satisfaz as propriedades de semi-grupo.

O lema abaixo nos dá algumas estimativas que serão usadas nesta seção.

Lema 5.1 *Para $\theta > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma_n > 0$, $n = 1,...,N$, temos as seguintes estimativas:*

i) $\dfrac{\xi_j^{2n}}{(1+\delta|\xi|^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\} \leq \delta^{-2}$, *se $\delta \leq 4$, $n = 1,2$ e $j = 1,...,d$;*

ii) $\dfrac{\xi_j^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}\leq(2\gamma_1 e\theta)^{-1},\ j=1,...,d;$

iii) $|\xi|^2\exp\left\{\dfrac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}\leq\dfrac{(\gamma_2+2^{d-1}\delta\gamma_1)}{2\gamma_1\gamma_2\theta};$

iv) $\dfrac{\xi_j^2|\xi|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2}\exp\left\{\dfrac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}\leq(2\delta\gamma_1 e\theta)^{-1}.$

Demonstração: A prova de (i) é análoga a prova de (i) (se $n=1$) e de (iii) (se $n=2$) do Lema 2.1 do capítulo 2.

Para provar (ii) basta considerar o fato de que $|x|\exp\{-2\gamma\theta|x|\}\leq(2\gamma e\theta)^{-1}$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

iii) Como para quaisquer $a_1,...,a_d$ constantes positivas temos $(a_1+...+a_d)^2\leq 2^{d-1}(a_1^2+...+a_d^2)$ (visto que $((a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$, para $a,\,b\in\mathbb{R}$) então, para $|\xi|\neq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
|\xi|^2\exp\left\{\frac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\} &\leq \frac{|\xi|^2(1+\delta|\xi|^2)}{2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}\\
&\leq \frac{|\xi|^2}{2\gamma_1|\xi|^2\theta}+\frac{\delta|\xi|^4}{2\gamma_2\sum_{j=1}^d\xi_j^4\theta}\\
&\leq \frac{1}{2\gamma_1\theta}+\frac{2^{d-1}\delta}{2\gamma_2\theta}.
\end{aligned}
$$

iv) Para provar (iv) também usamos o fato de que $|x|\exp\{-2\gamma\theta|x|\}\leq(2\gamma e\theta)^{-1}$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$ e $\gamma>0$. Para $|\xi|\neq 0$ temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi_j^2|\xi|^2\exp\left\{\frac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}}{(1+\delta|\xi|^2)^2} &\leq \frac{\xi_j^2|\xi|^2\exp\left\{\frac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}}{\delta|\xi|^2(1+\delta|\xi|^2)}\\
&= \frac{\xi_j^2\exp\left\{\frac{-2\gamma_1\xi_j^2\theta}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}}{\delta(1+\delta|\xi|^2)}.
\end{aligned}
$$

■

Definimos o operador

$$\mathscr{L}u(t) = G(t)u_0 - \sum_{j=1}^{d}\int_0^t G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(f_j(u)_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)}\right)ds$$

em

$$\mathscr{A}_T = \{u \in C([0,T];H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)); \|u(t)-G(t)u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}, t \in [0,T]\}$$

e a norma em $\mathscr{A}_T$ por $\|u(x,t)\|_{\mathscr{A}_T} = \sup\limits_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}$.

Nosso resultado de existência local segue das propriedades de $\mathscr{L}$ dadas no seguinte lema:

Lema 5.2 *Suponha que f_j, $j=1,...,d$, são suficientemente suaves. Assuma que $u(t), u_0 \in H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)$ e que*

$$\|u(t)-G(t)u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{5.2}$$

Se $T>0$ é suficientemente pequeno então vale o seguinte:

(i) $\mathscr{L}u(t) \in H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)$ com

$$\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall t \in [0,T]$$

e

$$\|\mathscr{L}u(t)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall t \in [0,T];$$

(ii) $\|\mathscr{L}u(t)\|_\infty \leq C\|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}$;

(iii) $\mathscr{A}_T$ é invariante por $\mathscr{L}$;

iv) $\mathscr{L}$ é uma contração em $\mathscr{A}_T$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, tomamos $f_j(0)=0$, $j=1,...,d$.

(i) Seja $u(t) \in H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo (5.2). Usando as propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^d)$ e a igualdade de Parseval temos

$$\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{j=1}^{d}\int_0^t\left\{\sum_{|\alpha|\leq\left[\frac{d}{2}\right]+1}\int_{\mathbb{R}^d}\left|D^\alpha\left[G(t-s)F^{-1}\left(\frac{F(f_j(u)_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)}\right)\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \left\{ \sum_{|\alpha| \leq [\frac{d}{2}]+1} \int_{\mathbb{R}^d} \left| F^{-1} \left[\frac{(i\xi)^\alpha \exp\left\{ \frac{-[\sum_{j=1}^{d} (\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi_j^{2n})](t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)} \right\} (i\xi_j) F(f_j(u))}{(1+\delta|\xi|^2)} \right] \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \left\{ \sum_{|\alpha| \leq [\frac{d}{2}]+1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp\left\{ \frac{-2[\sum_{j=1}^{d} (\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi_j^{2n})](t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)} \right\} \xi_j^2 |(i\xi)^\alpha F(f_j(u))|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

pelo Lema 5.1 (ii)

$$\leq \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{1}{[2\gamma_1 e(t-s)]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq [\frac{d}{2}]+1} \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^\alpha F(f_j(u))|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

usando novamente a igualdade de Parseval

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\|f_j(u(s))\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)}}{[2\gamma_1 e(t-s)]^{\frac{1}{2}}} ds$$

pelo Teorema 1.4

$$\leq \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{C\|u(s)\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)}}{[2\gamma_1 e(t-s)]^{\frac{1}{2}}} ds$$

onde C é uma constante que depende de $\|u_0\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)}$,

$$\leq \|u_0\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)}$$

desde que

$$T \leq C_1 \gamma_1^{-\frac{1}{2}}$$

onde C_1 depende de $\|u_0\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)}$.

ii) Para provar (ii) usamos o fato de que a inclusão $H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ é contínua e (i), ou seja, existe uma constante C tal que

$$\|\mathscr{L}u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C\|\mathscr{L}u(t)\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)}$$

e por (i)

$$\|\mathscr{L}u(t)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mathscr{L}u(t) - G(t)u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} + \|G(t)u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq 2\|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

iii) Para provar (iii), somente precisamos mostrar que se $u \in C([0,T];H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d))$ então $\mathscr{L}u \in C([0,T];H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d))$. Seja $t_0 \in (0,T]$. Seja $t \in (0,T]$. Sem perda de generalidade, tomamos $t_0 < t$. Temos

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{L}u(t) - \mathscr{L}u(t_0)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} &\leq \|G(t)u_0 - G(t_0)u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&+ \sum_{j=1}^{d}\int_{t_0}^{t}\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F(f_j(u(t-r))_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)}\right)\right\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} dr \\
&+ \sum_{j=1}^{d}\int_{0}^{t_0}\left\|G(r)F^{-1}\left(\frac{F(f_j(u(t-r))_{x_j} - f_j(u(t_0-r))_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)}\right)\right\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} dr \\
&= A+B+C.
\end{aligned}$$

Para A, usando a igualdade de Parseval e a desigualdade do valor médio, temos

$$A \leq \frac{|t-t_0|\|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}}{2t_0}.$$

Para B,

$$\begin{aligned}
B &= \int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{|\alpha|\leq\left[\frac{d}{2}\right]+1}\int_{\mathbb{R}^d}\left|F^{-1}\left[\frac{(i\xi)^{\alpha}\exp\left\{\frac{-[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})]r}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}(i\xi_j)F(f_j(u(t-r)))}{(1+\delta|\xi|^2)}\right]\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
&= \int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{|\alpha|\leq\left[\frac{d}{2}\right]+1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\exp\left\{\frac{-2[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})]r}{(1+\delta|\xi|^2)^2}\right\}\xi_j^2|(i\xi)^{\alpha}F(f_j(u(t-r))|^2)}{(1+\delta|\xi|^2)}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} dr \\
&\leq \int_{t_0}^{t}\delta^{-1}\|f_j(u(t-r))\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} dr \\
&\leq C|t-t_0|\delta^{-1}
\end{aligned}$$

pelo Lema 5.1 (i) e pelo Teorema 1.4, para C dependendo de $\|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}$.

Finalmente para C, usando a igualdade de Parseval, o Lema 5.1 (i), temos

$$C =$$

$$\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t_0}\left\{\sum_{|\alpha|\le\left[\frac{d}{2}\right]+1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\exp\left\{\frac{-2[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})]r}{(1+\delta|\xi|^2)^2}\right\}\xi_j^2|(i\xi)^\alpha F(f_j(u(t-r))-f_j(u(t_0-r)))|^2}{(1+\delta|\xi|^2)}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} dr$$
$$\le \delta^{-1}\int_0^{t_0}\|f_j(u(t-r))-f_j(u(t_0-r))\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}dr$$

pelo Corolário 1.1

$$\le C\delta^{-1}\int_0^{t_0}\|u(t-r)-u(t_0-r)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}dr$$
$$\le \overline{C}$$

onde $\overline{C}\to 0$ quando $|t-t_0|\to 0$ pois $u\in C([0,T];H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d))$ e $t_0-r\in[0,T]$.

iv) Sejam u, $v\in\mathscr{A}_T$,

$$\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}v(t)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}\le$$
$$\le\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t}\left\{\sum_{|\alpha|\le\left[\frac{d}{2}\right]+1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\exp\left\{\frac{-2[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})](t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)^2}\right\}\xi_j^2|(i\xi)^\alpha F(f_j(u)-f_j(v))|^2}{(1+\delta|\xi|^2)}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} ds$$
$$\le\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t}\frac{\|f_j(u)-f_j(v)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}}{[2\gamma_1 e(t-s)]^{\frac{1}{2}}}ds$$

pelo Corolário 1.1 obtemos

$$\le\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t}\frac{C\|u(s)-v(s)\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}}{[2\gamma_1 e(t-s)]^{\frac{1}{2}}}ds$$
$$\le\frac{\|u(s)-v(s)\|_{A_T}}{2}$$

se $T\le C\gamma_1^{-\frac{1}{2}}$, onde C é uma constante apropriada que depende de $\|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)}$. ■

Temos então o seguinte resultado de existência de solução local.

Teorema 5.1 *Suponha que u_0 e f_j, $j = 1,...,d$, satisfazem as mesmas hipóteses como no Lema 5.2. Então o problema de Cauchy (5) e (6) admite uma solução local suave*

$$u \in C([0,T]; H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)).$$

Além disso, para cada inteiro $k \geq \left[\frac{d}{2}\right]+1$, temos

i) $u \in C((0,T]; H^k(\mathbb{R}^d))$;

ii) $u \in C((0,T]; H^k(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((0,T]; H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$ se $N \leq 3$;

iii) $u \in C((0,T]; H^{k+N-3}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((0,T]; H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$ se $N > 3$,

onde T depende de γ_1 e $\|u_0\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)}$.

Demonstração: Sejam $u^0 \equiv 0$ e $u^n \equiv \mathscr{L}(u^{n-1})$. Então, por indução, as estimativas (i) e (ii) do Lema 5.2 valem para cada u^n. Além disso, pelo Lema 5.2 (iii) e (iv), $\mathscr{A}_T$ é invariante por $\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}$ é uma contração. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach, a equação integral (5.1) possui uma solução $u \in C([0,T]; H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d))$. Para provar os resultados de regularidade, somente precisamos mostrar que se $u \in C((0,T]; H^l(\mathbb{R}^d))$, $l \geq \left[\frac{d}{2}\right]+1$, então $u \in C((0,T]; H^{l+1}(\mathbb{R}^d))$ (e no caso $N \leq 3$, $u_t \in C((0,T]; H^{l-1}(\mathbb{R}^d))$ ou se $N > 3$ e $u \in C((0,T]; H^{l+N-3}(\mathbb{R}^d))$ então $u_t \in C((0,T]; H^{l-1}(\mathbb{R}^d))$). Seja $t_1 \in (0,T)$, precisamos mostrar que $u \in C([t_1,T]; H^{l+1}(\mathbb{R}^d))$ (e no caso $N \leq 3$, $u_t \in C([t_1,T]; H^{l-1}(\mathbb{R}^d))$ ou se $N > 3$ e $u \in C((0,T]; H^{l+N-3}(\mathbb{R}^d))$ então $u_t \in C([t_1,T]; H^{l-1}(\mathbb{R}^d))$). Tomamos $t_2 = \frac{t_1}{2}$. Então as propriedades de semi-grupo de G implicam que, para $t > t_2$

$$u(x,t) = G(t-t_2)u(t_2) - \sum_{j=1}^{d} \int_{t_2}^{t} G(t-s) F^{-1}\left[\frac{F(f_j(u)_{x_j})}{1+\delta|\xi|^2}\right] ds. \tag{5.3}$$

Para começar, usando a igualdade de Parseval e o Lema 5.1 (iii) e (iv), temos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)} &\leq \|G(t-t_2)u(t_2)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j=1}^{d} \int_{t_2}^{t} \left\| G(t-s) F^{-1}\left(\frac{F(f_j(u)_{x_j})}{1+\delta|\xi|^2}\right)\right\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)} ds \\
&= \left\{ \sum_{|\alpha| \leq l+1} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{ \frac{-2[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi_j^{2n})](t-t_2)}{(1+\delta|\xi|^2)} \right\} |(i\xi)^\alpha F(u(t_2))|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{j=1}^{d} \int_{t_2}^{t} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq l+1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp\left\{ \frac{-2[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi_j^{2n})](t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)} \right\} \xi_j^2 |(i\xi)^\alpha F(f_j(u))|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds
\end{aligned}$$

$$\leq \left\{ \sum_{|\alpha|\leq l} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{ \frac{-2[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})](t-t_2)}{(1+\delta|\xi|^2)} \right\} |\xi|^2|(i\xi)^\alpha F(u(t_2))|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sum_{j=1}^{d}\int_{t_2}^{t}\left\{ \sum_{|\alpha|\leq l}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp\left\{\frac{-2[\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})](t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}\xi_j^2|\xi|^2|(i\xi)^\alpha F(f_j(u))|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

$$\leq \left(\frac{\gamma_2+2^{d-1}\delta\gamma_1}{2\gamma_1\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2}} \|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j=1}^{d}\int_{t_2}^{t} \frac{\|f_j(u(s))\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}}{[2\delta\gamma_1 e(t-s)]^{\frac{1}{2}}} ds$$

pelo Teorema 1.4

$$\leq \left(\frac{\gamma_2+2^{d-1}\delta\gamma_1}{2\gamma_1\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2}} \|u(t_2)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} + dC\int_{t_2}^{t} \frac{\|(u(s)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}}{[2\delta\gamma_1 e(t-s)]^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Isto prova que $u(t)\in H^{l+1}(\mathbb{R}^d)$. A continuidade é provada de forma análoga como fizemos no caso $H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)$ em (iii) do Lema 5.2.

Por outro lado, note que

$$F(u)_t = -\sum_{j=1}^{d}\frac{F(f_j(u)_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)} - \frac{\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})}{(1+\delta|\xi|^2)}F(u)$$

e como para $t_2=\frac{t_1}{2}<t_1\leq t$ vale (5.3) e então

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = &-\sum_{j=1}^{d}F^{-1}\left[\frac{F(f_j(u)_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)}\right] \\ &-F^{-1}\left[\frac{\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})}{(1+\delta|\xi|^2)}\exp\left\{\frac{-(\sum_{j=1}^{d}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})(t-t_2)}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}F(u(t_2))\right] \\ &+\sum_{j=1}^{d}\int_{t_2}^{t}F^{-1}\left[\frac{\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})\exp\left\{\frac{-\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\xi_j^{2n})(t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}F(f_j(u)_{x_j})}{(1+\delta|\xi|^2)^2}\right]ds. \end{aligned}$$

Daí

$$\|u_t(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{j=1}^{d}\left\{\sum_{|\alpha|\leq l-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|(i\xi)^\alpha F(f_j(u)_{x_j})|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{\sum_{|\alpha|\le l-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{[\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})]^2\exp\left\{\frac{-2(\sum_{j=1}^d\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})(t-t_2)}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}|(i\xi)^\alpha F(u(t_2))|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sum_{j=1}^d\int_{t_2}^t\left\{\sum_{|\alpha|\le l-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{[\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})]^2\exp\left\{\frac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})(t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}|(i\xi)^\alpha F(f_j(u)_{x_j})|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^4}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$=A+B+C.$$

Temos

$$A=\sum_{j=1}^d\left\{\sum_{|\alpha|\le l-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\xi_j^2|(i\xi)^\alpha F(f_j(u))|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^2}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\frac{d\overline{C}\|u(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}}{\delta}$$

pelo Teorema 1.4 e

$$B\le\frac{\|u(t_2)\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{2}(t-t_2)}.$$

Precisamos analisar C.

$$C=$$

$$\sum_{j=1}^d\int_{t_2}^t\left\{\sum_{|\alpha|\le l-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{[\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})]^2\exp\left\{\frac{-2\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})(t-s)}{(1+\delta|\xi|^2)}\right\}|(i\xi)^\alpha F(f_j(u)_{x_j})|^2}{(1+\delta|\xi|^2)^4}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\le\sum_{j=1}^d\int_{t_2}^t\left\{\sum_{|\alpha|\le l-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^N\gamma_n\xi_j^{2n})|(i\xi)^\alpha F(f_j(u)_{x_j})|^2}{2(1+\delta|\xi|^2)^3(t-s)}d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\le\sum_{j=1}^d\int_{t_2}^t\left\{\sum_{|\alpha|\le l-1}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sum_{j=1}^d(\sum_{n=1}^3\gamma_n\xi_j^{2n})|(i\xi)^\alpha F(f_j(u)_{x_j})|^2}{2(1+\delta|\xi|^2)^3(t-s)}d\xi\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sum_{j=1}^d(\sum_{n=4}^N\gamma_n\xi_j^{2n})|(i\xi)^\alpha F(f_j(u)_{x_j})|^2}{2(1+\delta|\xi|^2)^3(t-s)}d\xi\right]\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq \sum_{j=1}^{d}\int_{t_2}^{t}\left\{\sum_{|\alpha|\leq l-1}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\overline{C}|(i\xi)^{\alpha}F(f_j(u)_{x_j})|^2}{(t-s)}d\xi\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sum_{j=1}^{d}(\sum_{n=4}^{N}\gamma_n\xi_j^{2(n-3)})|(i\xi)^{\alpha}F(f_j(u)_{x_j})|^2}{2\delta^3(t-s)}d\xi\right]\right\}^{\frac{1}{2}}ds$$

onde $\overline{C}=\overline{C}(\delta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,

$$\leq \sum_{j=1}^{d}\int_{t_2}^{t}\frac{\overline{\overline{C}}\|f_j(u)\|_{H^{l+N-3}(\mathbb{R}^d)}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}ds$$
$$\leq d\int_{t_2}^{t}\frac{\widetilde{C}\|u(s)\|_{H^{l+N-3}(\mathbb{R}^d)}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}ds$$

com $\widetilde{C}=\widetilde{C}(\delta,\gamma_1,...,\gamma_N,\|u_0\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)})$.

Para terminar a demonstração, usamos argumentos análogos aos usados na demonstração do Teorema 2.1 no capítulo 2. ∎

A fim de estender estas soluções globalmente, provamos primeiro o seguinte lema.

Lema 5.3 *Suponha que $u(x,t)=u(x,t;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N)$ é uma solução de (5) e (6) em $\mathbb{R}^d\times[0,t_1]$ (com $t_1\geq T$). Então temos as seguintes estimativas:*

i)

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left[|u|^2+\delta\sum_{j=1}^{d}|u_{x_j}|^2\right]dx+2\sum_{j=1}^{d}\left[\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{x_j}^n u|^2dxdt\right]=\int_{\mathbb{R}^d}\left[|u_0|^2+\delta\sum_{j=1}^{d}|u_{0x_j}|^2\right]dx. \tag{5.4}$$

ii) Se $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\leq C(\gamma_1,T)$, para todo $0\leq t\leq t_1$, então para cada multi-índice $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_d)$ com $\alpha_k\geq 0$, $k=1,...,d$, inteiros e $|\alpha|>0$ temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[|D^{\alpha}u|^2+\delta\sum_{j=1}^{d}|D^{\beta_1^j}u|^2\right]dx+\sum_{j=1}^{d}\frac{\gamma_1}{2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{\beta_1^j}u|^2dxdt+\sum_{j=1}^{d}\left[\sum_{n=2}^{N}\gamma_n\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{\beta_n^j}u|^2dxdt\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[|D^{\alpha}u_0|^2+\delta\sum_{j=1}^{d}|D^{\beta_1^j}u_0|^2\right]dx+\overline{C}(\gamma_1,T)\sum_{|\gamma|=|\alpha|}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{\gamma}u|^2dxdt \tag{5.5}$$

sendo $\beta_n^j=(\alpha_1,...,\alpha_{j-1},\alpha_j+n,\alpha_{j+1},...,\alpha_d)$.

Demonstração: Multiplicamos (5) por $2u$ e integramos em $\mathbb{R}^d$ e em $[0,t_1]$ para obter (5.4).

Agora, para $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_d)$ com $\alpha_k\geq 0$, $k=1,...,d$, inteiros e $|\alpha|>0$ multiplicamos (5) por $(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}u$, integramos em $\mathbb{R}^d$ e em $[0,t_1]$, para obter

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[|D^\alpha u|^2+\delta\sum_{j=1}^d|D^{\beta_1^j}u|^2\right]dx+\sum_{j=1}^d\left[\sum_{n=1}^N\gamma_n\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{\beta_n^j}u|^2dxdt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[|D^\alpha u_0|^2+\delta\sum_{j=1}^d|D^{\beta_1^j}u_0|^2\right]dx+(-1)^{|\alpha|}\sum_{j=1}^d\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}f_j(u)_{x_j}D^{2\alpha}udxdt. \qquad (5.6)$$

Precisamos estimar a última parcela:

$$(-1)^{|\alpha|}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}f_j(u)_{x_j}D^{2\alpha}udxdt\leq\frac{\gamma_1^{-1}}{2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^\alpha f_j(u)|^2dxdt+\frac{\gamma_1}{2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{\beta_1^j}u|^2dxdt.$$

Como $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\leq C(\gamma_1,T)$, segue do Teorema 1.4 que

$$\frac{\gamma_1^{-1}}{2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^\alpha f_j(u)|^2dxdt\leq\frac{C(\gamma_1,T)\gamma_1^{-1}}{2}\sum_{|\gamma|=|\alpha|}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|D^\gamma u|^2dxdt.$$

Estas estimativas junto com (5.6) nos dão (5.5). ■

Observação 5.1 *Analisamos algumas estimativas dadas pelo Lema 5.3. Para $i\in\{1,...,d\}$ fixo, tomamos $\alpha_i=1$ e $\alpha_s=0$ para $s\neq i$. Daí obtemos de (5.5) que*

$$\sum_{j=1}^d\frac{\gamma_1}{2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_ix_j}|^2dxdt\leq C_0+\overline{C}(\gamma_1,T)\sum_{k=1}^d\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{x_k}u|^2dxdt$$

$$\leq C(\gamma_1,T)$$

onde usamos (5.4) para $n=1$. Logo

$$\sum_{j=1}^d\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_ix_j}|^2dxdt\leq C(\gamma_1,T),\qquad i=1,...,d. \qquad (5.7)$$

Em seguida, para $i,r\in\{1,...,d\}$ tomando $|\alpha|=2$ com $\alpha_i=\alpha_r=1$, se $i\neq r$ ($\alpha_i=2$ se $i=r$) e

$\alpha_s = 0$ se $s \neq i$ e $s \neq r$ em (5.5), obtemos

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\gamma_1}{2} \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} |u_{x_i x_r x_j}|^2 dxdt \leq C_0 + \overline{C}(\gamma_1, T) \sum_{|\gamma|=2} \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\gamma u|^2 dxdt$$

e por (5.7) vem que

$$\sum_{j=1}^{d} \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} |u_{x_i x_r x_j}|^2 dxdt \leq C(\gamma_1, T), \qquad i, r = 1, ..., d.$$

Seguindo este processo, obtemos que

$$\int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u|^2 dxdt \leq C(\gamma_1, T), \qquad |\alpha| \leq d. \tag{5.8}$$

Daí, usando (5.5) para qualquer α tal que $|\alpha| = d$ e (5.8) obtemos

$$\int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\sigma u|^2 dxdt \leq C_0 + \overline{C}(\gamma_1, T) \sum_{|\gamma|=d} \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\gamma u|^2 dxdt$$

$$\leq C(\gamma_1, T)$$

onde $|\sigma| = d+1$. Procedendo indutivamente estabelecemos que para qualquer multi-índice σ temos

$$\int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\sigma u|^2 dxdt \leq C(\gamma_1, T).$$

Teorema 5.2 *Suponhamos válidas as hipóteses do Teorema 5.1. Então o problema de Cauchy (5) e (6) possui solução global suave*

$$u \in C([0, \infty); H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)).$$

Além disso, para cada inteiro $k \geq \left[\frac{d}{2}\right] + 1$, temos
i) $u \in C((0, \infty); H^k(\mathbb{R}^d))$;
ii) $u \in C((0, \infty); H^k(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((0, \infty); H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$ se $N \leq 3$;
iii) $u \in C((0, \infty); H^{k+N-3}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((0, \infty); H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$ se $N > 3$.

Demonstração: Pelo Teorema 5.1, existe uma solução $u(x, t; \delta, \gamma_1, ..., \gamma_N) = u(x, t)$ definida até um tempo T e que satisfaz (i)-(iii) do Teorema 5.1. Além disso, do Lema 5.2, temos para $0 \leq t \leq T$ que

$$\|u(t)\|_\infty \leq C\|u_0\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)},$$

logo vale a hipótese do Lema 5.3 (ii) e portanto as estimativas deste lema. Consideramos então o problema (5) com dado inicial $u(x,T) = u_T(x)$. Pelo Lema 5.3 (Observação 5.1), concluímos que $u_T \in H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)$ e que $\|u_T\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq C(\gamma_1, T)$. Portanto, nossa solução pode ser estendida até o tempo $2T$ e vale o Lema 5.3. Suponhamos que $u(x,t)$ está bem definida até um tempo kT para algum inteiro k e que para $l \geq \left[\frac{d}{2}\right]+1$, temos

a) $u \in C((0,kT];H^l(\mathbb{R}^d))$;

b) $u \in C((0,kT];H^l(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((0,kT];H^{l-1}(\mathbb{R}^d))$ se $N \leq 3$;

c) $u \in C((0,kT];H^{l+N-3}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((0,kT];H^{l-1}(\mathbb{R}^d))$ se $N > 3$,

e o Lema 5.3 vale para $0 \leq t \leq kT$. Pelas estimativas do Lema 5.3 garantimos que $u_{kT} \in H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)$ e que $\|u_{kT}\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^d)} \leq C(\gamma_1, T)$. Procedendo indutivamente, estabelecemos assim a existência de solução $u(x,t)$ para todo $t \geq 0$ e $u(x,t)$ satisfaz (i)-(iii). ∎

5.2 Resultados de Convergência

Seja $\{u^\gamma(x,t) = u(x,t;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N)\}$ uma sequência de soluções de (5) e (6) obtidas anteriormente, para δ e γ_n suficientemente pequenos ($\delta + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \to 0$ representado por $\gamma \to 0$) e com os dados iniciais $u_0^\gamma(x) = u(x,0;\delta,\gamma_1,...,\gamma_N)$ suaves . Assumimos também que a função u_0 em (1.15) é tal que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ e

$$\lim_{\gamma \to 0} u_0^\gamma = u_0 \qquad em \qquad L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d). \tag{5.9}$$

Nosso objetivo agora é provar que as soluções de (5) e (6) convergem para a solução entrópica do problema hiperbólico associado (1.14) e (1.15).

Para cada $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ o problema de Cauchy (1.14) e (1.15) admite uma única solução $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)$ no sentido de Kruzkov. Veja [16], [6],[23] e [12]. Assumimos que, para alguma constante $C_0 > 0$ independente de δ, $\gamma_1, ..., \gamma_N$,

$$\|u_0^\gamma\|_{H^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d)} + \|u_0^\gamma\|_{H^N(\mathbb{R}^d)} \leq C_0.$$

Podemos agora afirmar nosso resultado de convergência:

Teorema 5.3 *Sejam f_j, $j = 1, ..., d$ suficientemente suaves satisfazendo a condição de crescimento $\|f_j'(\lambda)\|_\infty \leq C$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\delta = o(\gamma_1^2)$ e $\gamma_n = o(\gamma_{n-1}\gamma_1^2)$, para $n \geq 2$, então as soluções de (5) e (6) convergem em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ (para $1 \leq r < 2$) para a única solução entrópica no sentido de Kruzkov do problema de Cauchy (1.14)-(1.15).*

Demonstração: Nos baseamos em resultados de convergência propostos por Diperna [6] para soluções L^∞ e generalizadas para soluções L^p por Szepessy [23] e Kondo e LeFloch [12]. Consideramos uma medida de Young ν associada com a sequência $\{u^\gamma\}$ e baseada na limitação uniforme em L^2 garantida por (5.4). Para mostrar que ν é uma solução entrópica a valores de medida precisamos verificar que valem (1.19) e (1.20). Para começar, mostramos que valem as desigualdades de entropia associadas com (1.14), isto é,

$$< \nu, \eta >_t + \sum_{j=1}^{d} < \nu, \psi_j >_{x_j} \leq 0, \tag{5.10}$$

sendo $(\eta, \psi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ um par de entropia convexo onde ψ_j é normalizado tal que $\psi_j(0) = 0$. Para simplificar a notação, nos cálculos que seguem omitimos o índice superior γ sempre que isto não gerar dúvidas. Pela definição de medida de Young, somente precisamos estabelecer que, na decomposição

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_j(u) = \sum_{j=1}^{d} [\delta(\eta'(u)u_{x_jt})_{x_j} - \delta\eta''(u)u_{x_j}u_{x_jt}]$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \left\{ \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\gamma_n[\eta'(u)\partial_{x_j}^{2n-1}u]_{x_j} + (-1)^n\gamma_n\eta''(u)u_{x_j}\partial_{x_j}^{2n-1}u \right\} = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

sendo $\Gamma_1 = \sum_{j=1}^{d} [\delta(\eta'(u)u_{x_jt})_{x_j} - \delta\eta''(u)u_{x_j}u_{x_jt}] + \sum_{j=1}^{d} \left\{ \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\gamma_n[\eta'(u)\partial_{x_j}^{2n-1}u]_{x_j} \right.$

$$+\sum_{n=2}^{N}(-1)^n\gamma_n\eta''(u)u_{x_j}\partial_{x_j}^{2n-1}u\Bigg\} \text{ e } \Gamma_2=-\gamma_1\sum_{j=1}^{d}\eta''(u)u_{x_j}^2, \text{ temos}$$

$$\Gamma_1\to 0 \tag{5.11}$$

e

$$\Gamma_2\leq 0, \tag{5.12}$$

no sentido das distribuições. (Mais precisamente, isto significa que, por um lado $\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\gamma)+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_j(u^\gamma)$ converge a uma medida não positiva em $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+)$ quando $\gamma\to 0$. Por outro lado, usando a definição de medida de Young (equação (1.13)) obtemos que

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\left[\eta(u^\gamma)\theta_t+\sum_{j=1}^{d}\psi_j(u^\gamma)\theta_{x_j}\right]dxdt=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\left[<\nu,\eta>\theta_t+\sum_{j=1}^{d}<\nu,\psi_j>\theta_{x_j}\right]dxdt.$$

Logo se (5.11) e (5.12) valem então temos (5.10). A desigualdade (1.19) (para todo $k\in\mathbb{R}$) então segue de uma regularização padrão da função $|u-k|$.)

Antes de mostrarmos que valem (5.11) e (5.12) precisamos obter algumas estimativas.

Primeiramente, para $k\in\{1,...,d\}$ e $i\in\{1,...,N-1\}$ multiplicamos (5) por $(-1)^i\gamma_i\partial_{x_k}^{2i}u$, integramos em $\mathbb{R}^d$ e em $[0,T]$, para obter

$$\frac{\gamma_i}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[|\partial_{x_k}^i u|^2+\delta\sum_{j=1}^{d}|\partial_{x_k}^i(u_{x_j})|^2\right]dx+\sum_{j=1}^{d}\left[\sum_{n=1}^{N}\gamma_i\gamma_n\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{x_k}^i(\partial_{x_j}^n u)|^2dxdt\right]$$

$$=\frac{\gamma_i}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[|\partial_{x_k}^i u_0|^2+\delta\sum_{j=1}^{d}|\partial_{x_k}^i(u_{0x_j})|^2\right]dx+(-1)^{i+1}\gamma_i\sum_{j=1}^{d}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}f_j(u)_{x_j}\partial_{x_k}^{2i}udxdt$$

e estimamos o último termo usando (5.4):

$$\begin{aligned}(-1)^{i+1}\gamma_i\sum_{j=1}^{d}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}f_j(u)_{x_j}\partial_{x_k}^{2i}udxdt &\leq \gamma_i\sum_{j=1}^{d}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|f'_j(u)||u_{x_j}||\partial_{x_k}^{2i}u|dxdt\\ &\leq C\sum_{j=1}^{d}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_j}|^2dxdt+\frac{\gamma_i^2}{2d}\sum_{j=1}^{d}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{x_k}^{2i}u|^2dxdt\\ &\leq C\gamma_1^{-1}+\frac{\gamma_i^2}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{x_k}^{2i}u|^2dxdt\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\frac{\gamma_i}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[|\partial^i_{x_k}u|^2+\delta\sum_{j=1}^d|\partial^i_{x_k}(u_{x_j})|^2\right]dx+\frac{\gamma_i^2}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^{2i}_{x_k}u|^2dxdt$$
$$+\sum_{j=1}^d\left[\sum_{n^*=1}^N\gamma_n\gamma_i\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^i_{x_k}(\partial^n_{x_j}u)|^2dxdt\right]\le C\gamma_1^{-1} \tag{5.13}$$

onde n^* significa que $n\neq i$ se $j=k$.

Multiplicamos (5) por $\gamma_1 u_t$ e integramos em $\mathbb{R}^d$ e em $[0,T]$

$$\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}u_t^2dxdt+\frac{\delta\gamma_1}{2}\sum_{j=1}^d\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_jt}|^2dxdt+\sum_{j=1}^d\left[\sum_{n=1}^N\frac{\gamma_n\gamma_1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^n_{x_j}u|^2dx\right]$$

$$=\sum_{j=1}^d\left[\sum_{n=1}^N\frac{\gamma_1\gamma_n}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^n_{x_j}u_0|^2dx\right]-\gamma_1\sum_{j=1}^d\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}f_j(u)_{x_j}u_tdxdt.$$

Para estimar o último termo usamos (5.4)

$$-\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}f_j(u)_{x_j}u_tdxdt\le C\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_j}|^2dxdt+\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}u_t^2dxdt$$
$$\le C+\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}u_t^2dxdt.$$

Obtemos

$$\gamma_1\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}u_t^2dxdt+\delta\gamma_1\sum_{j=1}^d\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_jt}|^2dxdt+\sum_{j=1}^d\left[\sum_{n=1}^N\gamma_n\gamma_1\int_{\mathbb{R}^d}|\partial^n_{x_j}u|^2dx\right]\le C. \tag{5.14}$$

Agora podemos provar que valem (5.11) e (5.12). Seja $\theta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ tal que $\theta\ge 0$. Temos para cada $j\in\{1,...,d\}$, por (5.14), que

$$\delta\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\eta'(u)u_{x_jt}\theta_{x_j}dxdt\right|\le C\delta\|\theta_{x_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_jt}|^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\le C\delta^{\frac{1}{2}}\gamma_1^{-\frac{1}{2}}$$

e por (5.14) e (5.4) (com $n=1$) que

$$\delta\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\eta''(u)u_{x_j}u_{x_jt}\theta dxdt\right| \le C\delta\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_j}|^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_jt}|^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\le C\delta^{\frac{1}{2}}\gamma_1^{-1}.$$

Quando $n=1$, temos por (5.4)

$$\gamma_1\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\eta'(u)u_{x_j}\theta_{x_j}dxdt\right| \le C\gamma_1\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_j}|^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \le C\gamma_1^{\frac{1}{2}}$$

e

$$<\Gamma_2,\theta>= -\gamma_1\sum_{j=1}^d\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\eta''(u)u_{x_j}^2\theta dxdt \le 0.$$

Para $n\ge 2$ usamos (5.13) (com $i=n-1$ e $j=k$)

$$\gamma_n\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\eta'(u)\partial_{x_j}^{2n-1}u\theta_{x_j}dxdt\right| \le C\gamma_n\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{x_j}^{2n-1}u|^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\le C\gamma_n^{\frac{1}{2}}\gamma_{n-1}^{-\frac{1}{2}}\gamma_1^{-\frac{1}{2}}$$

e finalmente, usamos (5.13) e (5.4) para obter

$$\gamma_n\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\eta''(u)u_{x_j}\partial_{x_j}^{2n-1}u\theta dxdt\right| \le C\gamma_n\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|u_{x_j}|^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{x_j}^{2n-1}u|^2dxdt\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\le C\gamma_n^{\frac{1}{2}}\gamma_{n-1}^{-\frac{1}{2}}\gamma_1^{-1}.$$

Portanto vale (5.10).

A fim de mostrar que (1.20) vale para ν nos baseamos em argumentos detalhados por Kondo e LeFloch em [12]. Observemos primeiro que sendo $(\eta,\psi):\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ um par de entropia convexo qualquer, existe um subconjunto compacto $I\subset\mathbb{R}$ fora do qual η é afim. Fora de I temos

$$\eta(u)=au+b, \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

e então $\eta'(u)=a$. Como $\psi'(u)=\eta'(u)\nabla f(u)$ então fora de I temos $\psi(u)=af(u)$, ou seja, fora de I temos $\psi_j(u) = af_j(u)$. Vimos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_j(u) \leq 0,$$

no sentido das distribuições. Para mostrar este resultado, mostramos (5.11) e (5.12) usando $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ tal que $\theta \geq 0$. Mas (5.11) e (5.12) também valem (mesmas contas) para $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T))$ e daí obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0^\gamma(x))\theta(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} \eta(u^\gamma(x,t))\theta_t(x,t)dxdt$$

$$-\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} \psi_j(u^\gamma(x,t))\theta_{x_j}(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d}[\Gamma_1 + \Gamma_2]\theta(x)dxdt.$$

Fazendo $\gamma \to 0$ e usando o fato de que $u_0^\gamma \to u_0$ em $L^1(\mathbb{R}^d)$, obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x))\theta(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} < \nu_{(x,t)}, \eta > \theta_t dxdt - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} < \nu_{(x,t)}, \psi_j > \theta_{x_j} dxdt \leq 0, \tag{5.15}$$

no sentido das distribuições. Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto compacto qualquer. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto e limitado tal que $K \subset \Omega$. Agora, usando (5.15) com $\theta(x,t) = \theta_1(x)\theta_2(t)$ com suporte compacto em $\Omega \times [0,T)$ e tal que $\theta_1, \theta_2 \geq 0$:

$$-\theta_2(0)\int_{\Omega} \eta(u_0(x))\theta_1(x)dx - \int_{\mathbb{R}_+} \theta_{2t}(t)\int_{\Omega} < \nu_{(x,t)}, \eta > \theta_1(x)dxdt \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t)\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{d} < \nu_{(x,t)}, \psi_j > \theta_{1x_j}(x)dxdt. \tag{5.16}$$

Vamos estimar separadamente a integral do lado direito de (5.16). Vimos que fora de um conjunto compacto $I \subset \mathbb{R}$ temos para $j = 1, ..., d$, que $\psi_j(u) = af_j(u)$ e ψ_j são suaves. Assim

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) \int_\Omega \sum_{j=1}^{d} < \nu_{(x,t)}, \psi_j > \theta_{1x_j}(x) dx dt = \\
&\int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) \int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \left[\int_I \psi_j(\lambda) d\nu + \int_{\mathbb{R}-I} \psi_j(\lambda) d\nu \right] \theta_{1x_j}(x) dx dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) \sum_{j=1}^{d} \left[\int_\Omega \|\psi_j\|_{L^\infty(I)} |\theta_{1x_j}(x)| dx + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}-I} |af_j(\lambda)| d\nu |\theta_{1x_j}(x)| dx \right] dt,
\end{aligned}
$$

usando a definição de medida de Young (Equação (1.13)) para a segunda parcela,

$$
\leq C \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) dt + \sum_{j=1}^{d} \lim_{\gamma \to 0} \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) \int_{\mathbb{R}^d} |af_j(u^\gamma(x,t))| |\theta_{1x_j}(x)| dx dt
$$

e para $\|f'\|_\infty \leq C$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) dt + \sum_{j=1}^{d} \lim_{\gamma \to 0} \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) \int_{\mathbb{R}^d} |a| C |u^\gamma(x,t)| |\theta_{1x_j}(x)| dx dt \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) dt + \sum_{j=1}^{d} \lim_{\gamma \to 0} \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) |a| C \|u^\gamma(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\theta_{1x_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) dt.
\end{aligned}
$$

Substituindo esta estimativa em (5.16) obtemos

$$
-\theta_2(0) \int_\Omega \eta(u_0(x)) \theta_1(x) dx - \int_{\mathbb{R}_+} \theta_{2t}(t) \int_\Omega < \nu_{(x,t)}, \eta > \theta_1(x) dx dt \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_+} \theta_2(t) dt. \tag{5.17}
$$

Agora, a função

$$
V(t) = -C_1 t + \int_\Omega < \nu_{(x,t)}, \eta > \theta_1(x) dx
$$

satisfaz a desigualdade

$$
-\int_{\mathbb{R}_+} V(t) \frac{d\theta_2(t)}{dt} dt \leq \theta_2(0) \int_\Omega \eta(u_0(x)) \theta_1(x) dx. \tag{5.18}
$$

Usando em (5.17) uma função $\theta_2 \geq 0$ com suporte compacto em $(0,T)$ encontramos

$$-\int_{\mathbb{R}_+} V(t)\frac{d\theta_2(t)}{dt}dt \leq 0,$$

isto é, (no sentido das distribuições) a função $V(t)$ é decrescente e portanto tem variação total localmente limitada. Desde que é uniformemente limitada, $V(t)$ tem um limite quando $t \to 0^+$. Resumindo, provamos que:

a) para toda entropia convexa $\eta = \eta(u)$ e toda função suave $\theta = \theta(x)$ com suporte compacto em Ω, a função

$$t \mapsto \int_\Omega < \nu_{(x,t)}, \eta > \theta_1(x)dx$$

tem variação total localmente limitada e admite um traço quando $t \to 0^+$.

Agora, fixe um tempo $t_0 > 0$ e considere a sequência de funções contínuas

$$\theta_2^\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & para \quad t \in [0,t_0] \\ \frac{(t_0+\varepsilon-t)}{\varepsilon} & para \quad t \in [t_0, t_0+\varepsilon] \\ 0 & para \quad t \geq t_0+\varepsilon. \end{cases}$$

Pela propriedade de regularidade (a) acima, vemos que

$$-\int_{\mathbb{R}_+} V(t)\frac{d\theta_2^\varepsilon(t)}{dt}dt \to V(t_0^+), \qquad quando \qquad \varepsilon \to 0.$$

Como $\theta_2^\varepsilon(0) = 1$ e t_0 é arbitrário, por (5.18) vale

$$V(t_0) = -C_1 t_0 + \int_\Omega < \nu_{(x,t_0)}, \eta > \theta_1(x)dx \leq \int_\Omega \eta(u_0(x))\theta_1(x)dx$$

para todo $t_0 > 0$ e em particular

$$\lim_{t\to 0^+} \int_\Omega < \nu_{(x,t)}, \eta > \theta_1(x)dx \leq \int_\Omega \eta(u_0(x))\theta_1(x)dx, \qquad \forall \theta_1 = \theta_1(x) \geq 0. \tag{5.19}$$

Note que o limite do lado esquerdo existe por (a). Consideramos o conjunto de todas as combinações lineares finitas, convexas da forma $\sum_j \alpha_j \theta_{1,j}(x) U_j(u)$, sendo $\alpha_j \geq 0$, $\sum_j \alpha_j = 1$, as funções U_j são suaves e convexas em u e as funções $\theta_{1,j}(x) \geq 0$ são suaves com suporte compacto, e além disso,

$$|U_j(u)\theta_{1,j}(x)| \leq C|u| + |\widetilde{U}_j(x)|$$

com $C \geq 0$ e $\widetilde{U}_j \in L^1(\Omega)$. Este conjunto é denso (para a topologia uniforme em u e topologia L^1 em x) no conjunto de todas as funções $U = U(u,x)$ que são convexas em u e mensuráveis em x e satisfazem

$$|U(u,x)| \leq C|u| + |\widetilde{U}(x)|$$

para algum $C > 0$ e $\widetilde{U} \in L^1(\Omega)$. Portanto pela densidade podemos deduzir que

$$\limsup_{t\to 0^+} \int_\Omega < \nu_{(x,t)}, U(.,x) > dx \leq \int_\Omega U(u_0(x),x)dx \tag{5.20}$$

para toda $U = U(u,x)$ que é convexa em u e mensurável em x tal que $|U(u,x)| \leq C|u| + |\widetilde{U}(x)|$ onde $\widetilde{U} \in L^1(\Omega)$ e $C \geq 0$. Em particular, escolhendo $U(u,x) = |u - u_0(x)|$ em (5.20) obtemos que

$$\limsup_{t\to 0^+} \int_\Omega < \nu_{(x,t)}, |u - u_0(x)| > dx = 0.$$

Como $\nu_{(x,t)} \geq 0$ e $K \subset \Omega$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_K < \nu_{(x,t)}, |u - u_0(x)| > dx = 0. \tag{5.21}$$

Suponhamos que (1.20) não vale, ou seja, que existe um $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{T_n\}$ com $T_n > 0$, $T_n \to 0$ e

$$\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\int_K < \nu_{(x,t)}, |u - u_0(x)| > dxdt > \varepsilon_0, \qquad \forall T_n. \tag{5.22}$$

Por (5.21), existe um $\delta = \delta(\varepsilon_0)$ tal que

$$\int_K < \nu_{(x,t)}, |u - u_0(x)| > dx < \frac{\varepsilon_0}{2}, \qquad se \qquad 0 < t < \delta. \tag{5.23}$$

Como $T_n \to 0$, existe $T_{n_0} < \delta$. Por (5.22) e (5.23) obtemos então que

$$\varepsilon_0 < \frac{1}{T_{n_0}}\int_0^{T_{n_0}}\int_K < \nu_{(x,t)}, |u - u_0(x)| > dxdt < \frac{1}{T_{n_0}}\int_0^{T_{n_0}} \frac{\varepsilon_0}{2}dt = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

o que é um absurdo. Logo vale (1.20).

Portanto ν é uma solução entrópica m.-v. de (1.14) e (1.15). Pelo Teorema 1.9 existe uma função $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$ tal que

$$\nu_y = \delta_{u(y)} \qquad para \qquad q.t.p. \qquad y \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+,$$

isto é, $\nu(.)$ é uma medida de Dirac concentrada em $u(.)$ e u é a única solução entrópica de (1.14) e (1.15). Pelo Lema 1.4, como $\nu_y = \delta_{u(y)}$ $q.t.p.$, segue que $u_j \rightarrow u$ em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, para $1 \leq r < 2$.

■

Referências Bibliográficas

[1] AVRIN, J. The generalized Benjamin-Bona-Mahony equation in $\mathbb{R}^n$ with singular initial data. **Nonlinear Analysis** 11, 139-147, 1987.

[2] BENJAMIN, T. B.; BONA, J. L.; MAHONY, J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive system. **Phil. Trans. R. Soc. London.**, Ser A 272, 47-78, 1972 .

[3] COQUEL, F.; LEFLOCH, P. Convergence de schémas aux différences finies pour des lois de conservation à plusieurs dimensions d'espace. (French) [Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions] **C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.** 310 (1990), no.6, 455-460.

[4] COQUEL, F.; LEFLOCH, P. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: the corrected antidiffusive flux approach. **Math. Comp.** 57 (1991), no. 195, 169-210.

[5] BOLING, G. **The Vanishing Viscosity Method and the Viscosity of the Difference Scheme**. Science Press, China, 1992. (In Chinese.)

[6] DIPERNA, R. J. Measure-valued solutions to conservation laws. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, 88, 223-270, 1985.

[7] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1998.

[8] FUJINO, N.; YAMAZAKI, M. Vanishing at most sventh-order terms of scalar conservation laws. **Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applicatons** , Proceedings of the Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems, 1093-1100, 2008.

[9] HOFF, D.; SMOLLER, J. Solutions in the Large for Certain Nonlinear Parabolic Systems. **Ann. Inst. Henri Poincaré**, Vol.2, n^o 3, 213-235, 1985.

[10] HOFF, D.; SMOLLER, J. Global existence for systems of parabolic conservation laws in several space variables. **J. Differential Equations** 68 (1987), no. 2, 210-220.

[11] S. HWANG, Kinetic decomposition for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term, **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A**, 134, no.6, 1149-1162, 2004.

[12] KONDO, C.; LEFLOCH, P. G. Measure-valued solutions and well-posedness of multidimensional conservation laws in a bounded domain. **Portugal. Math.**, 58, 171-194, 2001.

[13] KONDO, C.; WEBLER, C. M. The generalized BBM-Burgers equations with nonlinear dissipative term: existence and convergence results. **Applicable Analysis,** v.87, 1085 - 1101, 2008.

[14] KONDO, C.; WEBLER, C. M. Higher-order for the generalized BBM-Burgers equation: existence and convergence results. **Preprint.**

[15] KONDO, C.; WEBLER, C. M. Higher-order for the multidimensional generalized BBM-Burgers equation: existence and convergence results. **Preprint.**

[16] KRUZKOV, S. N. First order quasilinear equations in several independent variables. **Math. USSR-Sb**, 10, 217-243, 1970.

[17] LAX, P. D. **Shock waves and entropy**. Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. E.A. Zarantonello, Academic Press, 603-634, 1971.

[18] LEFLOCH, P. ; NATALINI, R. Conservation laws with vanishing nonlinear diffusion and dispersion. **Nonlinear Analisys**, TMA 36, 213-230, 1999.

[19] LI, T.-T; CHEN, Y.-M. **Global Classical Solutions for Nonlinear Evolution Equations**. Longman Scientific and Technical, New York, 1992.

[20] MEDEIROS, L. A.; MENZALA, P. G. Existence and uniqueness for periodic solutions of the Benjamin-Bona-Mahony equation. **SIAM J. math. Analysis** 8(5), 792-799, 1977.

[21] SCHOCHET, S. Examples of measure-valued solutions. **Comm. Partial Differential Equations** 14 (1989), no. 5, 545-575.

[22] SCHONBEK, M. E. Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations. **Comm. Partial Differential Equations**, 7, 959-1000, 1982.

[23] SZEPESSY, A. An existence result for scalar conservation laws using measure-valued solutions. **Comm. Part. Diff. Equa.**, 14, 1329-1350, 1989.

[24] SZEPESSY, Anders Measure-valued solutions of scalar conservation laws with boundary conditions. **Arch. Rational Mech. Anal.** 107 (1989), no. 2, 181-193.

[25] TARTAR, L. Compensated compactness and aplications to partial differential equations. **Nonlinear Analisys and Mechanics: Heriot-Watt Symposium**, IV. Research Notes in Math., 39, 136-210, 1979.

[26] WEBLER, C. M. **Existência Global de Soluções para Certos Sistemas Parabólicos Não Lineares.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2005.

[27] ZHAO, H.-J.; XUAN, B.-J. Existence and convergence of solutions for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term. **Nonlinear Analisys**, TMA 28 (11), 1835-1849, 1997.

[28] ZHAO, H.-J.; ZHU, C.-J; YU, Z. Existence and Convergence of solutions to higher order generalized Kdv-Burgers equation. **Proc. of the Int. Conf. on Nonlinear Evolution PDEs,** 21-25 June, Beijing, China, 1993.

[29] ZHAO, H.-J.; ZHU, C.-J; YU, Z. Existence and Convergence of solutions to a singularly perturbed higher order PDE. **Nonlinear Analysis** 24, 1435-1455, 1995.