

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JAMIL VIANA PEREIRA

PRESERVAÇÃO DE MÍNIMOS LOCAIS DE  
FAMÍLIAS DE FUNCIONAIS VIA  
GAMA-CONVERGÊNCIA E APLICAÇÕES<sup>1</sup>

SÃO CARLOS  
2009

---

<sup>1</sup>Projeto realizado com apoio da FAPESP, Processo 04/11940-5.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JAMIL VIANA PEREIRA

PRESERVAÇÃO DE MÍNIMOS LOCAIS DE  
FAMÍLIAS DE FUNCIONAIS VIA  
GAMA-CONVERGÊNCIA E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

SÃO CARLOS

2009

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

P436pm

Pereira, Jamil Viana.

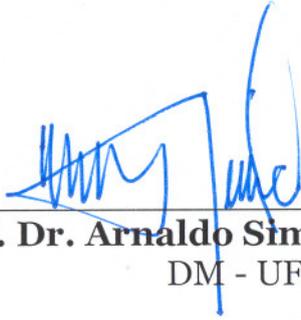
Preservação de mínimos locais de famílias de funcionais  
via Gama-convergência e aplicações / Jamil Viana Pereira. -  
- São Carlos : UFSCar, 2009.  
102 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,  
2009.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações de reação  
de difusão (Matemática). 3. Gama-convergência. 4.  
Soluções estacionárias estáveis. 5. Mínimos locais para o  
funcional energia. I. Título.

CDD: 515.353 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



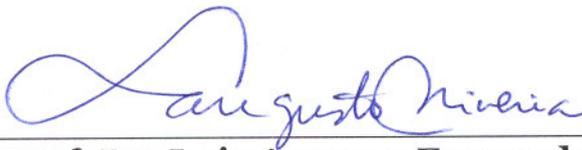
---

**Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento**  
DM - UFSCar



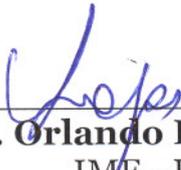
---

**Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile**  
DM - UFSCar



---

**Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira**  
IME - USP



---

**Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes**  
IME - USP



---

**Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho**  
ICMC - USP

À Paloma

## Agradecimentos

A Deus;

Aos muitos professores que tive na vida, acadêmicos ou não;

Ao Arnaldo, por todos os valiosos momentos de aprendizado ao longo desses últimos anos. Sou muito grato por acreditar em mim, pela dedicação e paciência;

A Professora Janete, pela parceria e pelas dicas valiosas;

A Banca examinadora: Professora Cláudia, Prof. Alexandre, Prof. Luís e Prof. Orlando, pelas preciosas sugestões e correções que contribuíram para o aprimoramento desta tese.

Ao Departamento de Matemática e a Universidade Federal de São Carlos, por proporcionar a oportunidade de realização deste projeto;

A FAPESP, pelo apoio financeiro e também por fomentar a pesquisa e a formação profissional neste estado;

À Paloma, pela convivência desses muitos anos, pelo amor e companheirismo dedicados a mim e ao nosso relacionamento;

Aos meus pais e irmãos, responsáveis por grande parte da minha educação e formação como pessoa. Agradeço muito pelo amor, compreensão e dedicação incondicionais;

A todos os amigos que conheci ao longo da minha vida, hoje presentes ou distantes, os quais nunca esquecerei.

# Resumo

Apresentaremos neste trabalho um resultado sobre preservação de minimalidade local via  $\Gamma$ -convergência e utilizaremos tal resultado para demonstrar a não existência de padrões (ou mínimos locais, se considerarmos a abordagem do Cálculo Variacional) para algumas equações parabólicas semilineares, com diferentes condições de fronteira e diferentes condições de difusibilidade em diferentes domínios. A preservação da minimalidade local será utilizada para que o problema de demonstrar a inexistência de mínimos locais de uma família a um parâmetro de funcionais (problema original) possa ser reduzido ao problema de demonstrar a inexistência de mínimos locais do  $\Gamma$ -limite de tal família. Utilizar esta relação entre inexistência de mínimos locais é viável sempre que o problema de inexistência de mínimos locais do  $\Gamma$ -limite for um problema mais simples que o problema original. Nos casos tratados aqui, os  $\Gamma$ -limites serão funcionais do tipo área ou perímetro, e para estes funcionais limite, o problema de demonstrar a inexistência de mínimos locais é mais simples que o problema original.

# Abstract

In this work we present some results on preservation of local minimizers under  $\Gamma$ -convergence and applications to nonexistence of nonconstant stationary solutions and of local minimizers when only variational approach is taken on. The local minimizer preservation will be used to transform the problem of local minimizers nonexistence of a one-parameter family of functionals (original problem) into a problem of local minimizers nonexistence of the  $\Gamma$ -limit of this family. The use of this local minimizers relation is viable when the problem of local minimizers nonexistence of the  $\Gamma$ -limit is an easier problem than the original. In the cases presented here, the  $\Gamma$ -limits will be area or perimeter functionals, and for this functionals, the local minimizers nonexistence problems are somehow easier to approach than the original ones.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Estabilidade versus minimalidade local . . . . .	12
1.2 Resultados clássicos utilizados . . . . .	19
<b>2 Apresentação dos problemas e resultados principais</b>	<b>23</b>
2.1 Problema 1: Inexistência de mínimos locais em superfícies convexas . . . . .	24
2.2 Problema 2: Inexistência de mínimos locais para o caso de difusibilidade variável . . . . .	28
2.3 Problema 3: Inexistência de soluções estacionárias estáveis para uma equação de reação e difusão com condição de fronteira de Dirichlet . . . . .	31
<b>3 <math>\Gamma</math>-convergência e <math>\Gamma</math>-limites</b>	<b>35</b>
3.1 Problema 1: $\Gamma$ -limite da família de funcionais . . . . .	36
3.2 Problema 2: $\Gamma$ -limite da família de funcionais . . . . .	41
3.3 Problema 3: $\Gamma$ -limite da família de funcionais . . . . .	42
<b>4 Preservação de mínimos locais no processo de <math>\Gamma</math>-limite</b>	<b>45</b>
<b>5 Sobre a existência de mínimos locais dos funcionais limite</b>	<b>47</b>
5.1 Primeira e segunda variações do comprimento de arco . . . . .	47
5.2 Problema 1: Inexistência de mínimos locais do $\Gamma$ -limite . . . . .	49
5.3 Primeira e segunda variações da área . . . . .	50
5.4 Problema 2: Inexistência de mínimos locais do $\Gamma$ -limite . . . . .	57
5.5 Problema 3: Inexistência de mínimos locais do $\Gamma$ -limite . . . . .	62
<b>6 Demonstração dos resultados principais</b>	<b>65</b>
6.1 Demonstração do resultado principal do Problema 1 . . . . .	65

6.2	Demonstração do resultado principal do Problema 2 . . . . .	66
6.3	Demonstração do resultado principal do Problema 3 . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Caso <math>n \geq 3</math> para os Problemas 1, 2 e 3</b>	<b>69</b>
<b>8</b>	<b>Problema 4: Outra definição de mínimo local</b>	<b>70</b>
8.1	Resultado principal do Problema 4 . . . . .	71
8.2	Estimativas de densidade . . . . .	72
8.3	Demonstração do Teorema 8.8 . . . . .	73
8.4	Demonstração do Teorema 8.2 . . . . .	87
	<b>Apêndice</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Funções de Variação Limitada (Funções BV)</b>	<b>91</b>
A.1	Definição e propriedades básicas . . . . .	91
A.2	Funções BV em superfícies . . . . .	93
<b>B</b>	<b>Resultado de Dal Maso e Modica sobre a preservação de mi-</b>	
	<b>nimalidade local no processo de <math>\Gamma</math>-limite</b>	<b>96</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>99</b>

## Introdução

No estudo da teoria qualitativa de equações diferenciais parciais parabólicas semilineares, no âmbito das quais se inserem as equações de reação e difusão, a questão de existência de soluções estacionárias (também denominadas de soluções de equilíbrio ou simplesmente equilíbrios) estáveis não constantes tem um papel relevante. Isto ocorre devido ao fato do funcional de energia de tais problemas ser em geral do tipo gradiente, e como tal, as soluções do problema se aproximam, com a evolução do tempo, das soluções estacionárias. Portanto, eventualmente a dinâmica do sistema será ditada pelo número de soluções de equilíbrio e suas propriedades de estabilidade.

Nesta linha de pesquisa, evidentemente de igual importância, é a investigação da situação oposta. Isto é, demonstrar a inexistência de soluções de equilíbrio estáveis não constantes, também conhecidas como padrões, para certas famílias de equações de reação e difusão a um parâmetro, que aparecem mais frequentemente nas aplicações.

Em certos problemas variacionais, em particular no caso de demonstrar a inexistência de mínimos locais de uma família de funcionais de energia a um parâmetro, a abordagem é facilitada estudando-se o limite (em um sentido apropriado) desta família. Para que isso seja útil, é necessário que a minimalidade seja preservada pelo processo de limite, e que o limite da família de funcionais seja um problema mais simples de ser abordado que o original.

Neste trabalho, estudaremos o limite dos funcionais via teoria da  $\Gamma$ -convergência, pois utilizando a característica da preservação, sob hipóteses adequadas, de mínimos locais sob o processo de  $\Gamma$ -limite, reduziremos o problema de demonstrar a inexistência de soluções estacionárias estáveis não constantes para uma família a um parâmetro de equações diferenciais parabólicas semilineares ao problema geométrico de demonstrar a inexistência de mínimos locais para um funcional limite conhecido como funcional área ou funcional perímetro, dependendo do domínio. Estes funcionais limite encontrados

admitem como mínimos locais funções que assumem apenas dois valores no domínio  $\Omega$ , isto é, funções do tipo  $u = \alpha\chi_A + \beta\chi_{\Omega\setminus A}$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes.

No artigo [9], Gianni Dal Maso e Luciano Modica apresentaram o seguinte resultado de preservação de mínimos locais no processo de  $\Gamma$ -Limite: “Dada uma família a um parâmetro de funcionais, se cada funcional da família possuir um mínimo local (em um certo sentido) e se as funções que são os mínimos locais da família convergem para uma função limite então essa função limite é um mínimo local do funcional dado pelo  $\Gamma$ -limite da família”.

A limitação desse resultado está no fato que a definição de mínimo local adotada em [9] só vale para perturbações com suporte compacto, e **neste caso, a geometria do domínio não tem contribuição para a existência ou não de mínimos locais**. Esse resultado não é interessante para alguns problemas em que a geometria do domínio está diretamente relacionada com a existência ou não de mínimos locais.

Iremos apresentar um resultado sobre a preservação de mínimos locais no processo de  $\Gamma$ -Limite no qual a definição de mínimos locais utilizada admite também perturbações sem suporte compacto. Com tal resultado, além de simplificar o problema de inexistência de mínimos locais não constantes para certas famílias de funcionais, poderemos considerar perturbações que não necessariamente tenham suporte compacto para resolver o problema limite que será essencialmente geométrico (minimizar área ou perímetro em hiperfícies ou domínios de dimensão  $n$ ).

A limitação do nosso resultado é que com tal definição de mínimos locais não conseguimos tratar o caso em que a família de mínimos locais dos funcionais originais converge para uma função constante, mas eliminamos o caso em que a família de mínimos locais dos funcionais originais desenvolve camada interna de transição.

Para demonstrar a inexistência de mínimos locais não constantes para os funcionais dados pelos  $\Gamma$ -limites das famílias serão necessários resultados de

Cálculo Variacional e Geometria Diferencial. Alguns destes resultados tiveram que ser generalizados para servirem ao propósito do trabalho. Quando tratarmos da questão da existência de mínimos locais para os funcionais-limite (área ou perímetro), veremos que a geometria do domínio será determinante na questão da inexistência de mínimos locais não constantes para tais funcionais.

**Utilizando a relação entre inexistência de mínimos locais do funcional energia e inexistência de soluções estacionárias estáveis da equação parabólica, apresentaremos resultados parciais que, sob certas condições, garantem a inexistência de determinadas soluções estacionárias estáveis não constantes para algumas equações diferenciais parabólicas semilineares.**

Todos os problemas abordados serão resolvidos utilizando a técnica citada, a qual seja, estudando o problema limite para obter informações do problema original. Nos três primeiros consideramos domínios estritamente convexos e uma definição de mínimo que permite perturbações sem suporte compacto. Como a técnica utilizada para resolver estes três problemas é a mesma, optamos por apresentá-los e resolvê-los por partes, ou seja, cada passo da nossa estratégia para solução dos problemas será feito para os Problemas 1, 2 e 3.

O quarto problema, que será apresentado no final do trabalho, é uma variação do Problema 2, sendo que a diferença principal é que utilizaremos uma definição de mínimos locais (a mesma adotada em [9]) que admite apenas perturbações com suporte compacto em  $\Omega$ . Neste caso a geometria do domínio não terá influência em nosso resultado. Além disso, com tal definição de mínimos locais, podemos utilizar o resultado de preservação de minimalidade local no processo de  $\Gamma$ -limite apresentado em [9], a que nos referimos anteriormente.

Outro ponto importante deste quarto problema é que utilizando a mesma definição de mínimos locais considerada em [9], poderemos obter algumas estimativas que permitem calcular a densidade de um ponto (da camada

interna de transição) em um conjunto (a ser escolhido apropriadamente). Tais estimativas foram apresentadas por Luis A. Caffarelli e Antonio Córdoba no trabalho [5]. Elas nos permitirão (caso o fecho da camada interna de transição não intersecte a fronteira do domínio) tratar o caso em que os mínimos locais da família original de funcionais não desenvolvem camada interna de transição, que não conseguimos resolver com a definição de mínimos locais anterior. Por outro lado, esta nova definição de mínimo local não nos permitirá tratar o caso em que o fecho da camada interna de transição intersecta a fronteira do domínio, pois neste caso o funcional limite admitirá mínimos locais não constantes.

A seguir damos uma breve apresentação da tese por capítulos. No Capítulo 1 apresentaremos, como preliminares, um resultado que relaciona a existência de soluções estacionárias estáveis da equação com a existência de mínimos locais do funcional energia associado. Também no Capítulo 1, enunciaremos alguns resultados clássicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Em seguida, no Capítulo 2, apresentaremos os três primeiros problemas da tese e os resultados que obtivemos. No Capítulo 3, encontram-se os  $\Gamma$ -limites dos funcionais associados a cada um dos problemas, incluindo uma generalização para domínios dados por hiperfícies de um  $\Gamma$ -limite que era conhecido em domínios abertos do  $\mathbb{R}^n$ . Esta generalização foi feita para calcular o  $\Gamma$ -limite da família de funcionais que será apresentada no Problema 1. Para conseguir tal generalização foi necessária uma formulação da teoria das Funções de Variação Limitada em hiperfícies, que optamos por apresentar no Apêndice A.

No Capítulo 4, apresentaremos nosso resultado de preservação de minimalidade local no processo de  $\Gamma$ -limite. Os resultados apresentados no Capítulo 5 tratam a questão da inexistência de mínimos locais para os funcionais limite dos Problemas 1, 2 e 3; tais resultados foram obtidos adaptando e/ou generalizando resultados já existentes do Cálculo Variacional e da Geometria Diferencial. As demonstrações dos resultados propostos no Capítulo 2 são

feitas no Capítulo 6, quando utilizaremos cada um dos capítulos anteriores para demonstrar os três primeiros resultados principais da tese. Faremos algumas considerações sobre casos mais gerais dos três resultados no Capítulo 7, onde citamos o que é necessário para podermos considerar domínios de dimensões maiores em nossos resultados.

No Capítulo 8 trataremos de um quarto problema, utilizando as técnicas dos problemas anteriores, mas como dito antes, o resultado de preservação de minimalidade local no processo de  $\Gamma$ -convergência utilizado será o mesmo do trabalho [9]. Poderemos também utilizar o resultado presente em [5] que fornece as estimativas de densidade para os mínimos locais da família de funcionais considerada neste problema. Optamos por detalhar a demonstração deste resultado, pois em [5] ela é feita de forma muito concisa.

# 1 Preliminares

## 1.1 Estabilidade versus minimalidade local

Antes de apresentar nossos resultados sobre inexistência de soluções estacionárias estáveis e não constantes, apresentaremos alguns resultados que relacionam minimalidade local e estabilidade.

Neste texto, chamaremos de domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, suave, conexo e limitado. A menos que seja dito o contrário, todos os domínios considerados neste trabalho devem satisfazer a definição acima. Por suave, queremos dizer que a fronteira deve ser pelo menos de classe  $C^1$ .

Consideremos a seguinte equação de reação e difusão com difusibilidade variável

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \operatorname{div}(a^2(x) \nabla u) - f(u) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{em } \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ ,  $a : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  estritamente positiva,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e  $\varepsilon$  um parâmetro real positivo.

Diremos que uma solução do problema (1) é uma solução estacionária se  $u$  não depender de  $t$ . As soluções estacionárias (ou de equilíbrio) de (1) são soluções do problema elíptico associado

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \operatorname{div}(a^2 \nabla u) = f(u) & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

que tem como funcional energia

$$H_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left[ \frac{\varepsilon}{2} a^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right] dx \quad (3)$$

sendo  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $W(t) = \int_0^t f(s) ds$ .

**Definição 1.1** *Seja  $v$  uma solução estacionária de (1). Dizemos que  $v$  é solução estacionária estável segundo Lyapunov de (1) se dado  $\gamma > 0$ , existe*

$\delta > 0$  tal que para toda função  $\tilde{v} \in H^1$  satisfazendo  $\|\tilde{v} - v\|_{H^1} < \delta$  existe uma solução  $u(t, x)$ ,  $t \geq 0$  de (1) tal que  $u(0, x) = \tilde{v}(x)$  e  $\|u(t, x) - v(x)\|_{H^1} < \gamma$ ,  $\forall t > 0$ .

É conhecido que para o problema (1), tanto com condição de fronteira de Neumann quanto de Dirichlet, que os mínimos locais de (3) são soluções estacionárias estáveis segundo Lyapunov de (1) (veja [21]). O que faremos a seguir, é buscar condições em que a inexistência de mínimos locais de (3) implica na inexistência de soluções estacionárias estáveis da equação (1). A resposta que encontramos para esta situação será apresentada no final desta seção (Corolário 1.10).

**Definição 1.2** Dizemos que uma função  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  é do tipo “poço duplo” com raízes  $\alpha$  e  $\beta$  se  $W$  satisfaz as condições:

$$\begin{aligned}
 i) \quad & W(x) \geq 0; \\
 ii) \quad & W(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\alpha, \beta\}; \\
 iii) \quad & |s| \rightarrow \infty \Rightarrow W(s) \rightarrow \infty; \\
 iv) \quad & W''(\alpha) > 0 \text{ e } W''(\beta) > 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

**Observação 1.3** A derivada de uma função  $W$  do tipo “poço duplo” satisfaz a condição de área  $\int_{\alpha}^{\beta} W'(x)dx = 0$ .

Uma outra hipótese que assumiremos sobre  $W$ , que será necessária para controlar o crescimento da função, é que existem constantes estritamente positivas  $c_1, c_2, s_0 > 1$  e um número  $p \geq 2$  tais que

$$c_1|s|^p \leq W(s) \leq c_2|s|^p, \quad \forall |s| \geq s_0 > 1. \tag{5}$$

**Exemplo 1.4** A função  $W(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$  satisfaz as condições (4) e (5).

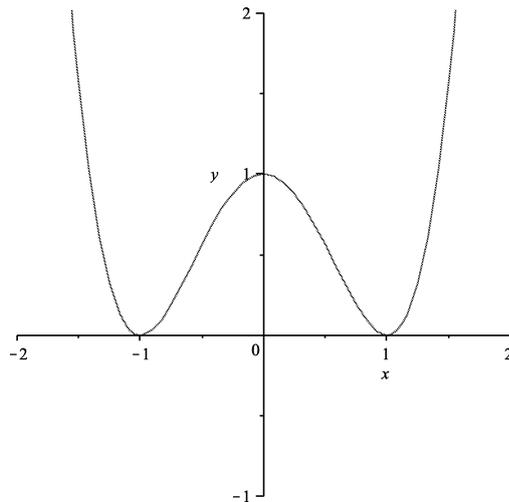


Figura 1: Função do tipo poço duplo  $W(x) = (1 - x^2)^2$ .

**Proposição 1.5** *Consideremos a família de funcionais  $H_\varepsilon$  definida em (3),  $W$  satisfazendo (4) e (5) e  $a : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  estritamente positiva. Seja  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , uma família de funções tal que  $H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq K < \infty, \forall \varepsilon > 0$ , para algum  $K > 0$  (independente de  $\varepsilon$ ). Então existem uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$ , um subconjunto  $A \subset \Omega$  e  $u_0 = \alpha\chi_A + \beta\chi_{\Omega \setminus A} \in BV(\Omega)$  tais que  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0$  em  $L^1(\Omega)$  quando  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ .*

**Demonstração:** A demonstração será feita seguindo os passos da demonstração da Proposição 3 apresentada em [29]. Consideremos a função  $\phi(s) = \int_0^s \sqrt{W(t)} dt$ . Segue de (4) que  $\phi$  é contínua e estritamente crescente em  $\mathbb{R}$ . Logo, sabemos que  $\phi^{-1}$  existe e é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ , pois  $(\phi^{-1})'(\phi(s)) = \frac{1}{\sqrt{W(s)}}$ .

Seja  $m = \inf\{a(x); x \in \bar{\Omega}\} > 0$ . Utilizando a desigualdade de Cauchy temos que

$$\sqrt{W(u_\varepsilon)}|\nabla u_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon a^2}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon a^2}W(u_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2m\varepsilon}W(u_\varepsilon).$$

Então existe  $M = M(m) > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi \circ u_\varepsilon)| dx = \int_{\Omega} \sqrt{W(u_\varepsilon)}|\nabla u_\varepsilon| dx \leq MH_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi(u_{\varepsilon})| \leq MH_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq MK, \forall \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Além disso, temos de (5) que

$$\sqrt{c_1}|s|^{\frac{p}{2}} \leq \phi'(s) \leq \sqrt{c_2}|s|^{\frac{p}{2}}, \quad \forall |s| \geq s_0,$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi(u_{\varepsilon})| &\leq \int_{\Omega} \left[ \int_0^{u_{\varepsilon}(x)} \sqrt{W(s)} ds \right] \\ &\leq \int_{\Omega} \int_0^{s_0} \sqrt{W(s)} ds + \int_{\Omega \cap \{|u_{\varepsilon}| > s_0\}} \int_{s_0}^{u_{\varepsilon}(x)} \sqrt{W(s)} ds \\ &\leq c_3 + c_4 \int_{\Omega \cap \{|u_{\varepsilon}| > s_0\}} (u_{\varepsilon})^{\frac{p}{2}+1} \\ &\leq c_3 + c_4 \int_{\Omega \cap \{|u_{\varepsilon}| > s_0\}} (u_{\varepsilon})^p \\ &\leq c_3 + \frac{c_4}{c_1} \int_{\Omega \cap \{|u_{\varepsilon}| > s_0\}} W(u_{\varepsilon}) \\ &\leq c_3 + \frac{c_4}{c_1} \varepsilon H_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \\ &\leq c_3 + \frac{c_4}{c_1} \varepsilon K \end{aligned} \quad (7)$$

sendo  $c_3$  e  $c_4$  constantes positivas que dependem de  $s_0$ ,  $\Omega$ ,  $W$  e  $p$ .

Logo, temos de (6) e (7) que  $\{\phi(u_{\varepsilon})\}_{0 < \varepsilon < 1}$  é uma seqüência limitada em  $BV(\Omega)$  e portanto, admite subsequência convergente em  $L^1(\Omega)$ , isto é, existe  $v_0 \in L^1(\Omega)$  e uma subsequência  $\{\phi(u_{\varepsilon_j})\}$  tais que  $\phi(u_{\varepsilon_j}) \rightarrow v_0$  em  $L^1(\Omega)$  quando  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ .

Tomando  $u_0 = \phi^{-1}(v_0)$  e utilizando o fato de  $\phi^{-1}$  ser uniformemente contínua, temos que  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0$  pois

$$\|u_{\varepsilon_j} - u_0\| \leq \|\phi^{-1}(\phi(u_{\varepsilon_j})) - \phi^{-1}(v_0)\| \leq C\|\phi(u_{\varepsilon_j}) - v_0\| \rightarrow 0.$$

Vamos provar que  $u_0$  é uma função de “duas fases”: Como  $W$  é de classe  $C^2$ , temos que existe uma subsequência de  $\{u_{\varepsilon_j}\}$ , que para simplificar a notação, denotaremos também por  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  tal que  $W(u_{\varepsilon_j}) \rightarrow W(u_0)$  q.t.p. quando  $j \rightarrow \infty$ . Segue disto, do Lema de Fatou e da limitação de  $H_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j})$  que

$$\int_{\Omega} W(u_0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} W(u_{\varepsilon_j}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j H_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j}) = 0.$$

Então,  $W(u_0(x)) = 0$  q.t.p. e conseqüentemente  $u_0(x)$  deve assumir os valores  $\alpha$  ou  $\beta$  q.t.p. em  $\Omega$ . Basta então tomar  $A = \{x \in \Omega; u_0(x) = \alpha\}$ . ■

**Proposição 1.6** *Considere o funcional  $\mathcal{D} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$\mathcal{D}(\varphi) = \int_{\Omega} (|\nabla\varphi|^2 + a(x)\varphi^2) dx$$

sendo  $a \in L^\infty(\Omega)$  uma função tal que  $\int_{\Omega} a(x) dx > 0$ .

Então existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\mathcal{D}(\varphi) \geq \gamma \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

desde que  $\|a\|_{L^\infty}$  seja suficientemente pequena.

**Demonstração:** Veja Proposição 4.1 em [4].

**Corolário 1.7** *Consideremos  $H_\varepsilon$  dado por (3),  $a \in C^2$  estritamente positiva em  $\bar{\Omega}$ ,  $W$  um potencial satisfazendo (4) e  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , uma família de funções tal que  $\alpha \leq u_\varepsilon(x) \leq \beta$ ,  $\forall x \in \Omega$  e  $u_\varepsilon$  converge em  $L^1(\Omega)$  para uma função  $u_0 = \alpha\chi_A + \beta\chi_{\Omega \setminus A}$ , com  $A \subset \Omega$  mensurável. Então existem  $\varepsilon_0 > 0$ , uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  e uma seqüência de constantes estritamente positivas  $K_{\varepsilon_j}$ ,  $\varepsilon_j < \varepsilon_0$  tais que*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} H_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} + t\varphi) \geq K_{\varepsilon_j} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \forall \varepsilon_j < \varepsilon_0 \quad (8)$$

desde que  $m = \inf_{x \in \Omega} \{a^2(x)\} > 0$ .

**Demonstração:** Como  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  em  $L^1(\Omega)$ , existe uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  de  $\{u_\varepsilon\}$  tal que  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0$  q.t.p. em  $\Omega$ , e sendo  $W''$  contínua, temos que  $W''(u_{\varepsilon_j}) \rightarrow W''(u_0)$  q.t.p. em  $\Omega$ . Além disso, segue da expressão de  $u_0$  que

$W''(u_0) = W''(\alpha)\chi_A + W''(\beta)\chi_{\Omega \setminus A}$ . Como existe  $C = \max\{W''(t); t \in [\alpha, \beta]\}$  podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\int_{\Omega} W''(u_{\varepsilon_j}) \rightarrow \int_{\Omega} W''(u_0) = W''(\alpha)\mathcal{L}^n(A) + W''(\beta)\mathcal{L}^n(\Omega \setminus A) \geq R\mathcal{L}^n(\Omega)$$

sendo  $R = \min\{W''(\alpha), W''(\beta)\} > 0$  e  $\mathcal{L}^n$  a medida de Lebesgue n-dimensional.

Logo, existe  $\varepsilon_1 > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} W''(u_{\varepsilon_j}) \geq \frac{R}{2}\mathcal{L}^n(\Omega) > 0, \quad \forall \varepsilon_j \leq \varepsilon_1.$$

Existe  $\varepsilon_2 > 0$  tal que  $\varepsilon_j C$  é suficientemente pequeno para  $\varepsilon_j < \varepsilon_2$ , e consequentemente,  $\|\varepsilon_j W''(u_{\varepsilon_j})\|_{L^\infty}$  é suficientemente pequena, para todo  $\varepsilon_j < \varepsilon_2$ .

Tomando então  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , temos que o funcional

$$\tilde{H}_{\varepsilon_j}(\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \varepsilon_j W''(u_{\varepsilon_j})\varphi^2$$

satisfaz as hipóteses da Proposição 1.6, para todo  $\varepsilon_j < \varepsilon_0$ . Assim, existe  $\{\gamma(\varepsilon_j) > 0\}$  tal que

$$\tilde{H}_{\varepsilon_j}(\varphi) \geq \gamma(\varepsilon_j)\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \forall \varepsilon_j < \varepsilon_0.$$

Então, dada  $\varphi \in H^1(\Omega)$  temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} H_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} + t\varphi) &= \int_{\Omega} \left[ \varepsilon_j a^2 |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon_j} W''(u_{\varepsilon_j})\varphi^2 \right] \\ &\geq \varepsilon_j m \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{(\varepsilon_j)^2} \int_{\Omega} \varepsilon_j W''(u_{\varepsilon_j})\varphi^2 \\ &\geq C_j \tilde{H}_{\varepsilon_j}(\varphi) \\ &\geq C_j \gamma(\varepsilon_j)\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall \varepsilon_j < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

sendo  $C_j = \min\{m\varepsilon_j, \frac{1}{(\varepsilon_j)^2}\}$ .

Tomando  $K_{\varepsilon_j} = C_j \gamma(\varepsilon_j)$  segue o resultado. ■

**Teorema 1.8** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio com fronteira Lipschitz tal que  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup Z$ , sendo  $\Omega_1, \Omega_2$  subconjuntos disjuntos e abertos em  $\Omega$  e  $Z$  um*

conjunto tal que  $\mathcal{H}^{n-1}(Z) = 0$ . Consideremos o funcional  $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(x, u) \right) dx,$$

$\mathcal{F} = \{u \in H^1(\Omega); I(u) \text{ está bem definido}\}$  e  $F \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$  uma função tal que existe uma constante  $C > 0$  satisfazendo

$$F(x, u) \geq -C(1 + |u|^p), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \quad (9)$$

sendo  $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$  quando  $n \geq 3$  e  $1 \leq p < \infty$  quando  $n \leq 2$ .

Se  $u_0 \in \mathcal{F} \cap L^\infty(\Omega)$  é uma função tal que:

i)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I(u_0 + t\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega); \quad \varphi|_{\partial\Omega_1} = 0;$$

ii) existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} I(u_0 + t\varphi) \geq \gamma \|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega); \quad \varphi|_{\partial\Omega_1} = 0.$$

Então  $u_0$  é um mínimo local de  $I$ , no conjunto  $\mathcal{A}_{u_0}(\partial\Omega_1) = \{u \in \mathcal{F}; (u - u_0)|_{\partial\Omega_1} = 0\}$  munido da norma de  $H^1(\Omega)$ .

**Demonstração:** Veja Proposição 2.2 em [31].

**Teorema 1.9** *Seja  $H_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , a família de funcionais definida por (3) sendo  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial satisfazendo (4) e (5) e  $a : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  estritamente positiva. Suponhamos que:*

- $u_\varepsilon$  é uma família de funções em  $H_0^1(\Omega)$  tal que  $\alpha \leq u_\varepsilon(x) \leq \beta$ ,  $\forall x \in \Omega$ ;
- cada  $u_\varepsilon$  é ponto crítico do respectivo funcional  $H_\varepsilon$ ;
- existe  $K > 0$  tal que  $H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq K$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Então existe uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  de mínimos locais em  $H_0^1(\Omega)$  dos respectivos funcionais  $H_{\varepsilon_j}$ . Além disso, existe uma função  $u_0 = \alpha\chi_A + \beta\chi_{\Omega \setminus A}$  tal que  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0$  em  $L^1(\Omega)$ .

**Demonstração:** Segue da Proposição 1.5 que existe uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  e uma função  $u_0 = \alpha\chi_A + \beta\chi_{\Omega \setminus A}$  tais que  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0$  em  $L^1(\Omega)$ . O Corolário 1.7

garante a existência de uma subsequência de  $\{u_{\varepsilon_j}\}$ , que denotaremos também por  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  tal que a desigualdade (8) é satisfeita para todo  $\varepsilon_j < \varepsilon_0$ . O Teorema 1.8 garante que cada  $u_{\varepsilon_j}$  é um mínimo local do respectivo funcional  $H_{\varepsilon_j}$  no espaço  $\mathcal{A}_{u_{\varepsilon_j}}(\partial\Omega_1)$  munido da topologia do espaço  $H^1(\Omega)$ . Assim,  $u_{\varepsilon_j}$  é também um mínimo local de  $H_{\varepsilon_j}$  no espaço  $H_0^1(\Omega)$  munido da topologia do espaço  $H^1(\Omega)$ , pois neste caso,  $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{A}_{u_{\varepsilon_j}}(\partial\Omega_1)$ ,  $\forall \varepsilon_j < \varepsilon_0$ . ■

O seguinte corolário será utilizado na demonstração do resultado principal de um dos problemas desta tese.

**Corolário 1.10** *Considerando  $\Omega$ ,  $u_\varepsilon$ ,  $a$  e  $W$  como nas hipóteses do Teorema anterior com  $\alpha < 0 < \beta$ , se não existir uma subsequência convergente em  $L^1(\Omega)$   $\{u_{\varepsilon_j}\}$  de mínimos locais em  $H_0^1(\Omega)$  para a família de funcionais  $H_{\varepsilon_j}$ , então não existe uma família  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , de soluções estacionárias estáveis (segundo Lyapunov) que muda de sinal do problema (1) tal que  $H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq K$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  ( $K > 0$  independente de  $\varepsilon$ ).*

**Demonstração:** Segue do Teorema 1.9 que caso não exista uma subsequência convergente de mínimos locais não existirá uma família  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , de pontos críticos dos respectivos funcionais  $H_\varepsilon$  tal que  $H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq K$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , sendo  $K > 0$  uma constante. Consequentemente, não existem soluções estacionárias estáveis tais que  $H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq K$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . ■

## 1.2 Resultados clássicos utilizados

Enunciaremos agora alguns resultados clássicos utilizados neste trabalho.

**Teorema 1.11 (Teorema da Divergência)** *Seja  $M$  uma subvariedade  $n$ -dimensional de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}^{n+k}$ ,  $k \geq 0$ ,  $r \geq 2$ . Se  $\overline{M}$  é uma subvariedade compacta de classe  $C^2$  com bordo e  $X \in C^1$  é tal que  $X(y) \in T_y M, \forall y \in M$ , então*

$$\int_M \operatorname{div}(X) \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\partial M} X \cdot \eta \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

sendo  $\eta$  o vetor unitário co-normal exterior a  $\partial M$ , isto é,  $|\eta| = 1$ ,  $\eta$  é normal a  $\partial M$  e tangente a  $M$ .

Caso a hipótese  $X(y) \in T_y M$  não seja satisfeita vale a igualdade

$$\int_M \operatorname{div}_M X d\mathcal{H}^n = - \int_M X \cdot H d\mathcal{H}^n - \int_{\partial M} X \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1}$$

sendo  $H(y)$  o vetor curvatura média de  $M$  no ponto  $y$ .

Além disso vale a igualdade

$$\operatorname{div}_M X^\perp(x) = -X(x) \cdot H(x), \forall x \in M \quad (10)$$

sendo  $X^\perp(x)$  a componente do campo vetorial  $X(x)$  ortogonal a  $T_x M$ .

**Demonstração:** Veja páginas 43 e 46 em [28].

**Teorema 1.12 (Rellich-Kondrachov)** *Seja  $M^n$  uma Variedade Riemmaniana compacta de dimensão  $n$  com fronteira de classe  $C^1$ . Então, a imersão  $H_k^q(M^n) \subset L^p(M^n)$  é compacta se  $1 \geq \frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n} > 0$ .*

**Demonstração:** Veja Teorema 2.34 em [3].

**Teorema 1.13 (Desigualdade de Sobolev)** *Se  $1 < p < n$  existe uma constante finita  $K$  tal que*

$$\|\phi\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leq K \|\nabla \phi\|_{L^p}, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

**Demonstração:** Veja página 103 em [1].

**Teorema 1.14 (Fórmula da Co-área)** *Seja  $M$  uma subvariedade  $C^1$  de dimensão  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+k}$ , então se  $g$  é uma função não negativa  $\mathcal{H}^n$ -mensurável em  $M$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  é de classe  $C^1$ , vale*

$$\int_M (Jf)g d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^{n-N} \right) dL^n(y)$$

**Demonstração:** Veja página 56 em [28].

**Definição 1.15** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana  $P \subset M$  uma subvariedade. Denotemos por  $\nu$  o campo normal de  $P$  em  $M$  dado por*

$$\nu = \{(p, v); p \in P, v \in (T_p P)^\perp\}$$

*sendo  $(T_p P)^\perp$  o complemento ortogonal de  $T_p P$  em  $T_p M$ . Note que  $\nu$  é um campo vetorial sobre  $P$ .*

**Definição 1.16** *A exponencial no campo normal  $\nu$  é definida por*

$$\begin{aligned} \exp_\nu : \quad \nu &\rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto \exp_p(v) \end{aligned}$$

*sendo  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  a função exponencial da variedade  $M$  no ponto  $p$ .*

**Observação 1.17** *A função  $\exp_\nu$  pode ser definida apenas em uma vizinhança da seção  $(p, 0)$  de  $\nu$ , que denotaremos  $\nu_{(p,0)} := \{(p, 0); p \in P\}$ . Vamos identificar  $P$  com  $\nu_{(p,0)}$ , sendo assim  $P$  pode ser visto como subvariedade de  $\nu$ .*

**Lema 1.18** *Seja  $P$  uma subvariedade de uma variedade Riemanniana  $M$ . Então  $\exp_\nu : \nu \rightarrow M$  leva uma vizinhança de  $P \subset \nu$  difeomorficamente em uma vizinhança de  $P \subset M$ .*

**Demonstração:** Veja Lema 2.3 em [17].

**Definição 1.19** *Definimos  $O_p \subset \nu$  como a maior vizinhança da seção  $(p, 0)$  de  $\nu$  tal que  $\exp_\nu : O_p \rightarrow \exp(O_p)$  é um difeomorfismo (Veja Lema 1.18).*

**Teorema 1.20** *Sejam  $P$  uma subvariedade de uma Variedade Riemanniana  $M$  e  $m \in M$ . Então em  $\exp_\nu(O_p) \setminus P$  vale  $\|\nabla d\| = 1$ , sendo  $d = \text{dist}(m, P)$*

**Demonstração:** Veja Lemas 2.7, 2.8 e 2.11 em [17]:.

**Definição 1.21** *Seja  $M$  uma variedade e  $E \subset M$  um subconjunto com fronteira de classe  $C^1$  a função distância com sinal  $\bar{d} : M \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por*

$$\bar{d}(x) = \begin{cases} d(x, \partial E), & x \in E \\ -d(x, \partial E), & x \notin E \end{cases}$$

**Lema 1.22** Dado  $r > 0$  seja  $\Gamma_r = \{x \in M; |\bar{d}(x)| < r\}$ , então existe  $s > 0$  tal que  $\Gamma_s \subset \exp_\nu(O_{\partial E})$  sendo  $O_{\partial E}$  dado pela Definição 1.19.

**Demonstração:** Suponhamos por contradição que para todo  $s > 0$ , existe  $x_s \in \Gamma_s$  tal que  $x_s \notin \exp_\nu(O_{\partial E})$  e consideremos a sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_n \in \Gamma_{\frac{1}{n}}$  e  $x_n \notin \exp_\nu(O_{\partial E})$ .

Sabemos que  $\partial E$  e  $(\exp_\nu(O_{\partial E}))^c$  são conjuntos fechados e satisfazem  $(\exp_\nu(O_{\partial E}))^c \cap \partial E = \emptyset$ ; logo, existe  $r > 0$  tal que  $\text{dist}((\exp_\nu(O_{\partial E}))^c, \partial E) = r$  e tomando  $n_0$  tal que  $\frac{1}{n_0} < r$  temos que  $x_{n_0} \in (\exp_\nu(O_{\partial E}))^c$  gerando uma contradição com o fato de que  $\text{dist}(x_{n_0}, \partial E) < r$ . ■

**Lema 1.23** Seja  $\Gamma_s$  como no Lema anterior. Então dado  $x \in \Gamma_s \setminus \partial E$  temos que  $|\nabla \bar{d}(x)| = 1$

**Demonstração:** Segue do Teorema 1.20.

## 2 Apresentação dos problemas e resultados principais

As equações diferenciais parciais parabólicas semilineares, e em particular as equações de reação e difusão aparecem em muitos modelos matemáticos que descrevem fenômenos físicos, em várias áreas das ciências aplicadas. Por isso, a questão da existência de soluções de equilíbrio estáveis para estas equações tem sido intensivamente estudadas.

Apresentaremos agora alguns problemas, para os quais demonstraremos a inexistência de soluções estacionárias estáveis não constantes ou inexistência de mínimos locais (se considerarmos a caracterização variacional do problema). Veremos no decorrer do trabalho que a geometria do domínio será de extrema importância para o estudo destes problemas, assim como a definição de mínimo local adotada. Obviamente, para podermos utilizar as propriedades geométricas do domínio, necessitamos de uma noção de mínimo local no espaço em que as funções testes não tenham necessariamente suporte compacto. Por isso, adotaremos a seguinte definição:

**Definição 2.1** *Sejam  $(X, \mathcal{M}, \nu)$  um espaço de medida e  $H : L^1(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  um funcional contínuo. Dizemos que  $u \in L^1(X)$  é um mínimo local de  $H$  em  $L^1(X)$  se existir  $\delta > 0$  tal que*

$$H(u) \leq H(w), \forall w \in L^1(X); \|u - w\|_{L^1(X)} < \delta.$$

*Neste caso, dizemos que  $\delta$  é o raio da vizinhança onde  $u$  é mínimo local de  $H$ .*

**Definição 2.2** *Dado um espaço de medida  $(X, \mathcal{M}, \nu)$ , consideremos uma família de funcionais  $H_\varepsilon : L^1(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dizemos que  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , é uma família de mínimos locais  $\varepsilon$ -uniforme de  $H_\varepsilon$  se existe uma constante positiva  $r$  (independente de  $\varepsilon$ ) tal que  $H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq H_\varepsilon(v)$ , para todo  $\varepsilon > 0$  e toda  $v \in L^1(X)$  satisfazendo  $\|u_\varepsilon - v\|_{L^1(X)} < r$ .*

**Observação 2.3** *A família  $H_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , possui uma família de mínimos locais  $\varepsilon$ -uniforme se, e somente se, existir uma família de funções  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , em  $L^1(\Omega)$  e uma sequência de números reais  $\delta_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , tais que  $u_\varepsilon$  é mínimo local de  $H_\varepsilon$  com raio associado  $\delta_\varepsilon$  (no sentido da Definição 2.1) e  $\inf_{\varepsilon > 0} \delta_\varepsilon > 0$ .*

**Definição 2.4** *Dizemos que uma família de funções  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , tem energia limitada em relação à família de funcionais  $H_\varepsilon$  se existir  $K > 0$  (independente de  $\varepsilon$ ) tal que*

$$H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq K, \forall \varepsilon > 0.$$

**Definição 2.5** *Uma família de funções  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , desenvolve camada interna de transição, quando existir um subconjunto  $A \subset \Omega$  próprio ( $A \neq \emptyset$ ,  $A \neq \Omega$ ) de medida positiva, tal que  $u_\varepsilon$  converge em  $L^1(\Omega)$  para a função  $u = \alpha\chi_A + \beta\chi_{\Omega \setminus A}$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes reais distintas.*

**Definição 2.6** *Um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é estritamente convexo se*

$$T_x \partial\Omega \cap \overline{\Omega} = \{x\}, \forall x \in \partial\Omega,$$

sendo  $T_x \partial\Omega$  o plano tangente a  $\partial\Omega$  no ponto  $x$ .

Vamos agora apresentar os três primeiros problemas que compõem esta tese.

## 2.1 Problema 1: Inexistência de mínimos locais em superfícies convexas

Nossa intenção neste primeiro problema, é generalizar resultados já conhecidos (citados posteriormente) em domínios n-dimensionais, sobre inexistência de mínimos locais não constantes para certos funcionais do tipo gradiente, quando considerarmos domínios dados por superfícies. Tal generalização

consiste em determinar sob que condições não existem mínimos locais para o seguinte funcional:

$$E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_S \left[ \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W_1(u) \right] d\mathcal{H}^{n-1} & \text{se } u \in H^1(S) \\ \infty & \text{se } u \in L^1(S) \setminus H^1(S) \end{cases} \quad (11)$$

sendo:

- $S$  uma superfície de classe  $C^\infty$  suave, compacta, estritamente convexa e sem bordo;
- $W_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial de classe  $C^2$  do tipo “poço duplo” (4) com raízes  $\alpha$  e  $\beta$  e que satisfaz a condição (5).

Aqui, assim como no resto do trabalho,  $\mathcal{H}^k$  denota a medida de Hausdorff  $k$ -dimensional.

A questão da existência de mínimos locais não constantes para funcionais do tipo (11) foi bastante estudada em domínios abertos do  $\mathbb{R}^n$ , onde é possível relacionar a não existência de tais mínimos com a não existência de padrões para a equação parabólica associada.

Considerando domínios dados por superfícies, obtivemos o resultado abaixo, que demonstra, sob certas condições, a inexistência de mínimos locais de  $E_\varepsilon$  que desenvolvem camada interna de transição.

**Teorema 2.7 (Resultado principal do Problema 1)** *Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície suave, compacta, sem bordo e estritamente convexa e  $W_1$  um potencial real com raízes 0 e 1, satisfazendo (4) e (5). Seja  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , uma família de mínimos locais para a família de funcionais  $E_\varepsilon$  e suponhamos que:*

- i)  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , seja  $\varepsilon$ -uniforme (no sentido da Definição 2.2)*
- ii)  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , tenha energia limitada em relação à família de funcionais  $E_\varepsilon$ .*

*Então  $u_\varepsilon$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , não desenvolve camada interna de transição.*

Para maior esclarecimento da evolução deste problema, faremos agora uma rápida descrição dos trabalhos anteriores relativos ao assunto.

Nos trabalhos pioneiros de R. G. Casten e C. J. Holland [6] e de Hiroshi Matano [19], são estabelecidas condições sobre a geometria do domínio de forma que não existam padrões para o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - f(u) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (12)$$

sendo  $\nu$  o vetor normal exterior a  $\partial\Omega$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira suave.

As soluções de equilíbrio de (12) são soluções do problema elíptico associado

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13)$$

que tem como funcional energia

$$G(u) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right] dx \quad (14)$$

sendo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ .

Em [6] e [19], foi provado que para o problema de existência de padrões era possível dar uma resposta de caráter essencialmente geométrico, qual seja:

“Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio convexo com fronteira suave e  $u \in C^3(\overline{\Omega})$  é um equilíbrio não constante de (12) então  $u$  é instável. ”

Tais trabalhos posteriormente deram ensejo a um grande número de publicações que demonstravam a inexistência de tais soluções (ou de mínimos locais na interpretação variacional do problema) em domínios **convexos** para uma grande variedade de equações originárias de variados modelos físicos.

Evidentemente, por razões físicas e geométricas, seria interessante e desejável estudar tais problemas em superfícies e variedades.

Até onde sabemos, a única iniciativa neste sentido foi o trabalho [26], onde o resultado obtido em [6] e [19] foi estendido para o caso em que  $\Omega$  é uma superfície de revolução em  $\mathbb{R}^3$ .

A grande maioria, senão todos os resultados sobre a inexistência de soluções estacionárias estáveis não constantes, quando se trata de domínios limitados  $n$ -dimensionais foram demonstrados usando basicamente a mesma idéia utilizada em [6] e [19]. E o trabalho [26], que traz um resultado para superfícies, não foi exceção. Graças ao fato da superfície ser de revolução, os autores reduziram o problema original a um outro em um domínio unidimensional. Isto possibilitou o uso das técnicas originais utilizadas em [6] e [19].

No entanto ao se considerar como domínio uma hiperfície (superfície de dimensão  $(n - 1)$  em  $\mathbb{R}^n$ ) compacta sem bordo e estritamente convexa tais técnicas não fazem sentido e aparentemente, este problema ficou tanto tempo sem solução por falta de técnicas mais potentes para uma abordagem adequada.

**Nossa contribuição foi resolver este problema em domínios mais gerais, ou seja, encontramos condições nas quais (11) não admite famílias de mínimos locais não constantes que desenvolvem camada interna de transição, em domínios dados por superfícies em  $\mathbb{R}^3$  suaves, compactas, sem bordo e estritamente convexas.**

Faremos isto introduzindo um parâmetro no problema e utilizando a Teoria de  $\Gamma$ -Convergência juntamente com resultados de Geometria Diferencial e Cálculo Variacional. A idéia básica foi utilizar a propriedade de preservação de mínimos locais da teoria de  $\Gamma$ -Convergência, para reduzir o problema de inexistência de mínimos locais não constantes para a família de funcionais ao problema de mostrar a inexistência de mínimos locais de um problema limite que é essencialmente geométrico (cuja inexistência de mínimos depende apenas da geometria do domínio). Para tratar do problema limite foi necessária uma formulação da Teoria de Funções de Variação Limitada em superfícies do  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 Problema 2: Inexistência de mínimos locais para o caso de difusibilidade variável

O fenômeno de difusão não linear de uma substância cuja concentração é  $u(x, t)$  em um meio não homogêneo de difusibilidade  $a(\cdot)$  pode ser modelado pelo seguinte problema matemático:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \operatorname{div}(a^2 \nabla u) - W_2'(u) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (15)$$

cujas soluções estacionárias são os pontos críticos do funcional energia  $F_\varepsilon : L^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $\varepsilon > 0$ , definido por

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} a^2(x) |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W_2(u(x)) \right\} dx & \text{se } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{se } u \in L^1(\Omega) \setminus H^1(\Omega) \end{cases} \quad (16)$$

sendo:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio estritamente convexo;
- $W_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial de classe  $C^2$  satisfazendo as hipóteses (4) e (5), com raízes  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ .

**Definição 2.8** *Seja  $v$  uma solução estacionária de (15). Dizemos que  $v$  é solução estacionária fracamente estável de (15) se*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_\varepsilon(v + t\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

e

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} F_\varepsilon(v + t\varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

sendo  $F_\varepsilon$  o funcional energia (16).

Nesta seção daremos uma resposta parcial ao seguinte problema: Suponha em (16) que  $\Omega$  seja estritamente convexo. Que condições geométricas

$a(x)$  deve satisfazer para que os únicos mínimos locais do funcional sejam funções constantes?

Este problema que chamaremos Problema 2 pode ser considerado uma generalização do problema abordado em [6] e [19]. Considerando  $a \neq cte$ , este problema foi estudado em domínios unidimensionais por E. Yanagida [34], M. Chipot e J. K. Hale [7] e G. Fusco e J. K. Hale [14] que, considerando  $\Omega = (0, 1)$ , demonstraram a inexistência de soluções de equilíbrio estáveis e não constantes quando  $a''(x) \leq 0$  em  $\Omega$ . Em [34] foi mostrada também a existência de equilíbrios estáveis não constantes quando  $a''(x_0) > 0$  para algum  $x_0 \in (0, 1)$ . No trabalho [22], considerando termos não-lineares específicos, A. S. do Nascimento exibiu uma classe de funções difusibilidade para as quais o problema (15) admite soluções estacionárias estáveis não constantes, independente da geometria do domínio.

Em 2005, considerando domínios convexos, C. H. Santos [27] estudou alguns problemas relacionados, sistemas em domínios unidimensionais e sistemas com estrutura anti-gradiente, caracterizando as funções de difusibilidade  $a$  estritamente positivas tais que todo equilíbrio não constante do problema (15) fosse instável utilizando as mesmas técnicas apresentadas em [6] e [19]. Entretanto, apesar de ter sido utilizada para obter outros resultados no trabalho, esta técnica não foi suficiente para encontrar uma classe mais abrangente de funções difusibilidade  $a$  tais que os equilíbrios não constantes do problema sejam instáveis. Com tais técnicas, a resposta encontrada por Santos foi que a classe das funções  $a$  deveria satisfazer

$$\begin{cases} \Delta a \leq 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial a}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

ou seja,  $a$  deveria ser uma função constante, que é exatamente a situação considerada em [6] e [19].

**A classe de funções difusibilidade considerada neste problema, será a classe das funções estritamente positivas, suaves e estri-**

tamente côncavas, ou seja, a classe das funções  $a \in C^2(\bar{\Omega})$  tais que

$$\begin{cases} a(x) > 0, \forall x \in \bar{\Omega} \\ Hess(a(x)) \text{ é definida negativa} \end{cases} \quad (17)$$

sendo  $Hess(a(x))$  a matriz Hessiana de  $a(x)$ .

Aplicando as mesmas técnicas do Problema 1 pudemos encontrar condições para que não existam famílias de soluções estacionárias não constantes e fracamente estáveis para o problema (15) que desenvolvem camada interna de transição, quando a classe de funções difusibilidade satisfizer a condição (17).

Para tratar este problema foi necessário generalizar os resultados existentes (para o caso  $a(x) \equiv cte$ ) de primeira e segunda variações do funcional área. Estas generalizações nos permitiram trabalhar com o funcional limite desta família que como veremos na Seção 5.3 é uma generalização do funcional limite do Problema 1.

Conseguimos demonstrar o resultado abaixo, que estabelece condições para a inexistência de mínimos locais não constantes para a família de funcionais dada por (16).

**Teorema 2.9 (Resultado principal do Problema 2)** *Seja  $E_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , dado por (16) sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio estritamente convexo,  $W_2$  um potencial, com raízes 0 e 1, satisfazendo (4) e (5) e  $a \in C^2(\bar{\Omega})$  uma função estritamente positiva com Hessiana definida negativa.*

*Se  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , é uma família de soluções estacionárias fracamente estáveis de (15) tal que:*

- i) A família  $u_\varepsilon$  tem energia limitada em relação à família de funcionais  $F_\varepsilon$ ;*
- ii)  $u_\varepsilon$  é uma família  $\varepsilon$ -uniforme de mínimos locais de  $F_\varepsilon$ .*

*Então  $u_\varepsilon$  não desenvolve camada interna de transição, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

### 2.3 Problema 3: Inexistência de soluções estacionárias estáveis para uma equação de reação e difusão com condição de fronteira de Dirichlet

Devido a grande relevância do problema de encontrar mínimos locais para funcionais do tipo (14) que aparecem em inúmeras aplicações envolvendo modelos fenomenológicos com transição de fases, segue a importância de também estudar este problema para funções que se anulam na fronteira do domínio, isto é, em  $H_0^1(\Omega)$ .

A primeira iniciativa em estudar o  $\Gamma$ -limite da família de funcionais nestas condições foi tomada por N. C. Owen, J. Rubinstein e P. Sternberg [24]. Em um dos resultados do trabalho, eles calcularam o  $\Gamma$ -Limite da família de funcionais do tipo (14) considerando funções que se anulam na fronteira do domínio.

Isso nos permitiu aplicar a mesma técnica utilizada nos problemas anteriores para resolver, sob certas condições, a questão de inexistência de soluções estacionárias estáveis (segundo Lyapunov) que mudam de sinal para o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W_3'(u) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = h(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (18)$$

sendo:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto aberto, suave, limitado e estritamente convexo;
- $W_3$  uma função real do tipo poço duplo (4) com raízes  $-1$  e  $1$  e que satisfaz também a hipótese (5).

Aplicando neste problema as mesmas técnicas desenvolvidas para os Problemas 1 e 2, podemos novamente reduzir o problema original a um problema limite geométrico. A diferença principal neste caso é que o problema limite encontrado em [24] não é essencialmente geométrico, isto é, não é um

funcional do tipo área ou perímetro. Para contornar esta dificuldade, impomos sobre  $W_3$  uma outra condição de área

$$\int_{-1}^0 \sqrt{W_3(x)} dx = \int_0^1 \sqrt{W_3(x)} dx \quad (19)$$

que nos permitirá reduzir o funcional limite encontrado em [24] a um funcional com comportamento essencialmente geométrico.

Para resolver o problema de inexistência de soluções estacionárias estáveis de (18), demonstraremos a inexistência de mínimos locais para a família de funcionais  $G_\varepsilon : L^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , definida por

$$G_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W_3(u(x)) \right\} dx & u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (20)$$

**Teorema 2.10 (Resultado principal do Problema 3)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio estritamente convexo e  $W_3$  um potencial com raízes  $-1$  e  $1$ , satisfazendo (4), (5) e (19). Se  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , é uma família de soluções estacionárias estáveis (segundo Lyapunov) de (18) satisfazendo:*

- i)  $u_\varepsilon$  tem energia limitada em relação à família de funcionais  $G_\varepsilon$ ;*
- ii)  $u_\varepsilon$  é uma família  $\varepsilon$ -uniforme de mínimos locais para a família de funcionais  $G_\varepsilon$ .*

*Então  $u_\varepsilon$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , não desenvolve camada interna de transição, ou seja, nestas condições, as únicas famílias de soluções estacionárias estáveis que mudam de sinal possíveis são as que desenvolvem “spike” (concentração em torno de um ponto).*

Este terceiro problema foi abordado no trabalho [30] por Guido Sweers que provou, entre outros resultados, que considerando a função  $W_3(x) = (x^2 - 1)(10 - x)$  é possível construir domínios do tipo

$$D(\varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y^2 < x^2(1 - x) - \varepsilon\}$$

convexos, tais que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno o problema (18) possui soluções estacionárias estáveis que mudam de sinal.

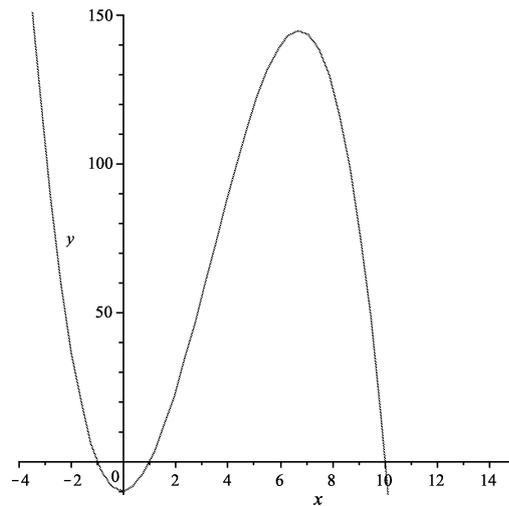


Figura 2: Potencial considerado em [30].

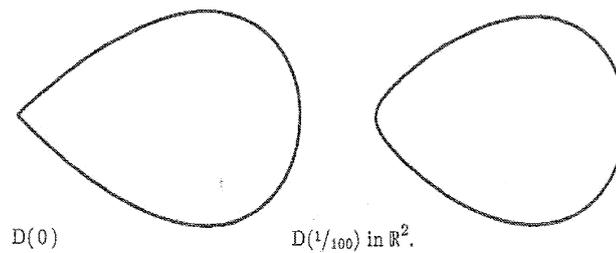


Figura 3: Domínios considerados em [30].

No trabalho [10] E. N. Dancer apresentou o seguinte resultado:

**Teorema 2.11** *Seja  $\Omega$  um domínio suave e limitado e consideremos o seguinte problema:*

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u) \text{ em } \Omega \quad (21)$$

*com condição de fronteira homogênea de Dirichlet ou Neumann. Suponha que:*

*i)  $n = 2$ ;*

*ii)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tem apenas zeros isolados, e  $f$  não tem dois zeros  $a, b$  tais que  $\int_a^b f(t) dt = 0$ ;*

*iii) Ou todos os zeros de  $f$  são simples, ou*

- $f(c) = f'(c) = 0$  implica que  $c = 0$
- $yf'(y) < f(y)$  para  $y$  positivo suficientemente pequeno.

*Então, dado  $k > 0$ , para  $\varepsilon$  pequeno o suficiente, não existem soluções fracamente estáveis de (21) que mudam de sinal satisfazendo  $\|u\|_{L^\infty} \leq k$ .*

Observe que no trabalho [30], o potencial considerado tem três raízes, logo não é do tipo “poço duplo”, e no Teorema acima, a hipótese sobre a condição de área do potencial, é exatamente a situação inversa da considerada em (4) (Veja Observação 1.3).

### 3 $\Gamma$ -convergência e $\Gamma$ -limites

Neste capítulo, após a definição de  $\Gamma$ -convergência, apresentaremos nosso resultado que exhibe o  $\Gamma$ -limite da família de funcionais do Problema 1 e também os resultados já existentes que exibem os  $\Gamma$ -limites das famílias de funcionais dos Problemas 2 e 3.

**Definição 3.1** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $\{f_h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}$ , uma sequência de funções. Dizemos que uma sequência  $f_h$   $\Gamma$ -converge para uma função  $f_0$  quando  $h \rightarrow \infty$  e denotamos  $f_h \xrightarrow{\Gamma} f_0$  se:*

i) *Dadas uma sequência  $\{x_h\}$ , e  $x_0$  tais que  $x_h \rightarrow x_0$  em  $X$  quando  $h \rightarrow \infty$  vale a desigualdade:*

$$f_0(x_0) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} f_h(x_h);$$

ii) *Dado  $x_0 \in X$  existe uma sequência  $\{y_h\}$ , em  $X$  convergindo para  $x_0$  tal que*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(y_h) = f_0(x_0).$$

**Observação 3.2** *Uma forma equivalente de definir  $\Gamma$ -convergência é a seguinte: Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $f_h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $h \in \mathbb{N}$ , uma sequência de funções. Defina-se*

$$\Gamma^- \liminf_{h \rightarrow \infty} f_h(x) := \inf \{ \liminf_{h \rightarrow \infty} f_h(x_h); x_h \rightarrow x \}$$

$$\Gamma^- \limsup_{h \rightarrow \infty} f_h(x) := \inf \{ \limsup_{h \rightarrow \infty} f_h(x_h); x_h \rightarrow x \}.$$

*A sequência  $(f_h)$  é  $\Gamma^-$  convergente se*

$$\Gamma^- \liminf_{h \rightarrow \infty} f_h(x) = \Gamma^- \limsup_{h \rightarrow \infty} f_h(x), \quad \forall x \in X$$

*e neste caso define-se  $\Gamma^- \lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x) = \Gamma^- \liminf_{h \rightarrow \infty} f_h(x)$ .*

*Neste caso, se  $f_0(x) = \Gamma^- \lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x)$ , dizemos que  $f_h$   $\Gamma^-$ -converge para  $f_0$  quando  $h \rightarrow \infty$  e utilizamos a notação  $f_h \xrightarrow{\Gamma^-} f_0$ . Para simplificar a notação não utilizaremos o sinal de “-” e diremos simplesmente que  $f_h$   $\Gamma$ -converge para  $f_0$  ou utilizaremos a notação  $f_h \xrightarrow{\Gamma} f_0$ .*

### 3.1 Problema 1: $\Gamma$ -limite da família de funcionais

O Teorema 3.4 enunciado abaixo, é uma generalização de um resultado encontrado em [2] sobre o  $\Gamma$ -limite da mesma família de funcionais que estamos utilizando, mas no caso do resultado existente, o domínio considerado é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Para utilizá-lo em nosso problema foi necessária a adaptação deste resultado para hiperfícies.

Para quem não está familiarizado com os espaços das Funções de Variação Limitada (Funções BV), recomendamos a leitura do Apêndice A onde estão as definições e os principais resultados sobre tal espaço. Também no Apêndice A, encontra-se a formulação do espaço das Funções BV quando o domínio considerado é uma hiperfície.

Utilizaremos a notação  $BV(\Omega, \{\alpha, \beta\})$  para o conjunto das funções  $u \in BV(\Omega)$  tais que  $u(x)$  assume apenas os valores  $\alpha$  ou  $\beta$ .

**Observação 3.3** *Se  $u \in BV(\Omega, \{\alpha, \beta\})$  então existe um conjunto  $E \subset \Omega$  tal que  $u = \alpha\chi_E + \beta\chi_{\Omega \setminus E}$ .*

**Teorema 3.4** *Considere a família de funcionais (11) com  $W_1$  satisfazendo (4) e (5) e  $S \subset \mathbb{R}^n$  uma hiperfície suave e sem bordo de dimensão  $n - 1$ . Então  $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E_0$  sendo*

$$E_0(u) := \begin{cases} \lambda_1 |D\chi_{\{u=1\}}|(S) & u \in BV(S, \{0, 1\}) \\ \infty & u \in L^1(S) \setminus BV(S, \{0, 1\}) \end{cases} \quad (22)$$

com  $\lambda_1 = \int_0^1 \sqrt{W_1(s)} ds$ .

**Demonstração:** Sejam  $u \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  e  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , uma família de funções tais que  $u_\varepsilon \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$ ,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = r < \infty.$$

Segue da definição de limite inferior que dado  $h \in \mathbb{N}$ , existe  $\varepsilon_h^1$  tal que

$$r - \frac{1}{h} \leq \inf_{\varepsilon \leq \varepsilon_h^1} \{E_\varepsilon(u_\varepsilon)\} \leq r < r + \frac{1}{h}.$$

Seja  $\varepsilon_h \leq \varepsilon_h^1$  tal que  $E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) \leq r + \frac{1}{h}$ , temos então

$$r - \frac{1}{h} \leq \inf_{\varepsilon \leq \varepsilon_h^1} \{E_\varepsilon(u_\varepsilon)\} \leq E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) \leq r + \frac{1}{h}$$

e passando o limite quando  $h \rightarrow \infty$  temos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) = r.$$

Logo, vale a igualdade

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = r$$

e consequentemente,  $E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) < \infty$  para  $h$  suficientemente grande. Disto segue que  $u_{\varepsilon_h} \in H^1(S)$  para  $h$  suficientemente grande. Temos então que

$$E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_h |\nabla u_{\varepsilon_h}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_h} W_1(u_{\varepsilon_h}) \right\} d\mathcal{H}^{n-1}$$

e segue da igualdade acima que

$$\int_S W_1(u_{\varepsilon_h}) d\mathcal{H}^{n-1} \leq \varepsilon_h E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}). \quad (23)$$

Como  $u_{\varepsilon_h} \rightarrow u$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  existe uma subsequência que para simplificar a notação denota-se também por  $\{u_{\varepsilon_h}\}$  que converge para  $u$  q.t.p. com relação a medida  $\mathcal{H}^{n-1}$  quando  $h \rightarrow \infty$ .

Logo, como  $W_1$  é de classe  $C^2$  tem-se  $W_1(u_{\varepsilon_h}) \rightarrow W_1(u)$  q.t.p. com relação a medida  $\mathcal{H}^{n-1}$  quando  $h \rightarrow \infty$ . Segue disto, do Lema de Fatou e de (23) que

$$\int_S W_1(u) d\mathcal{H}^{n-1} \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_S W_1(u_{\varepsilon_h}) d\mathcal{H}^{n-1} \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \varepsilon_h E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) = 0. \quad (24)$$

Concluimos então que  $W_1(u(x)) = 0$  q.t.p. e consequentemente  $u(x) = 0$  ou  $u(x) = 1$  q.t.p. Assim podemos escrever  $u = \chi_E$ , sendo  $E = u^{-1}(\{1\})$ .

Definindo uma nova sequência  $\tilde{u}_{\varepsilon_h} : S \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$\tilde{u}_{\varepsilon_h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } u_{\varepsilon_h}(x) < 0 \\ u_{\varepsilon_h}(x) & \text{se } 0 \leq u_{\varepsilon_h}(x) \leq 1 \\ 1 & \text{se } u_{\varepsilon_h}(x) > 1 \end{cases} \quad (25)$$

temos que:

i)  $u_{\varepsilon_h}(x) < 0 \Rightarrow |\tilde{u}_{\varepsilon_h}(x) - u(x)| = u(x) \leq |u_{\varepsilon_h}(x) - u(x)|$  q.t.p.

ii)  $u_{\varepsilon_h}(x) > 1 \Rightarrow |\tilde{u}_{\varepsilon_h}(x) - u(x)| = 1 - u(x) \leq |u_{\varepsilon_h}(x) - u(x)|$  q.t.p.

De i), ii) e da convergência de  $u_\varepsilon$  para  $u$ , segue que  $\tilde{u}_{\varepsilon_h} \rightarrow u$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$ .

Utilizando a desigualdade de Cauchy temos que

$$\sqrt{W_1(\tilde{u}_{\varepsilon_h})} |\nabla \tilde{u}_{\varepsilon_h}| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \tilde{u}_{\varepsilon_h}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} W_1(\tilde{u}_{\varepsilon_h})$$

e então

$$E_{\varepsilon_h}(\tilde{u}_{\varepsilon_h}) \geq \int_S \sqrt{W_1(\tilde{u}_{\varepsilon_h})} |\nabla \tilde{u}_{\varepsilon_h}| d\mathcal{H}^{n-1} = \int_S |\nabla(\phi \circ \tilde{u}_{\varepsilon_h})| d\mathcal{H}^{n-1} \quad (26)$$

sendo  $\phi(t) := \int_0^t \sqrt{W_1(s)} ds$ .

Como  $W_1(t)$  é limitada para  $t \in [0, 1]$ , temos que  $\phi(\tilde{u}_{\varepsilon_h}) \rightarrow \phi(u)$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  quando  $h \rightarrow \infty$ ; segue deste fato, de (26), da Observação A.4 e do Teorema A.15 que

$$\begin{aligned} |D(\phi \circ u)|(S) &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} |D(\phi \circ \tilde{u}_{\varepsilon_h})|(S) \\ &\leq \lim_{h \rightarrow \infty} E_{\varepsilon_h}(\tilde{u}_{\varepsilon_h}) \\ &\leq \lim_{h \rightarrow \infty} E_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon). \end{aligned} \quad (27)$$

Note que

$$\phi(u(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se } u(x) = 0 \\ \lambda_1 & \text{se } u(x) = 1 \end{cases}$$

e portanto,  $\phi(u) = \lambda_1 u = \lambda_1 \chi_E$ . Temos então de (27) que

$$\lambda_1 |Du|(S) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty.$$

Disto segue que  $u = \chi_E \in BV(S)$  e

$$E_0(u) = \lambda_1 |Du|(S) \leq \Gamma^- \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u). \quad (28)$$

Assim, dada  $u \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$ , se existir sequência  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , convergindo para  $u$  que satisfaça  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = r < \infty$  então vale a desigualdade (28).

Agora se tomarmos  $u \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  tal que toda sequência  $u_\varepsilon$  convergindo para  $u$  satisfaz  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \infty$  então

$$\Gamma^- \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u) = \infty \Rightarrow E_0(u) \leq \Gamma^- \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u)$$

e conseqüentemente,

$$E_0(u) \leq \Gamma^- \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u), \quad \forall u \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1}).$$

Passemos agora a prova de que  $\Gamma^- \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(\chi_E) \leq \lambda_1 |D\chi_E|(S)$ .

Seja  $u = \chi_E \in BV(S)$  sendo  $E$  um subconjunto com fronteira de classe  $C^2$ .

Foi provado em [13] que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \min \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|\gamma'(t)|^2 + W_1(\gamma(t))) dt; \gamma \in C^1(\mathbb{R}), \gamma(-\infty) = 1, \gamma(\infty) = 0 \right\}.$$

Vamos então utilizar  $\lambda_1$  dado pela igualdade acima. Dada  $\gamma \in C^1$  tal que  $\gamma(t) = 0$  e  $\gamma(-t) = 1$  a partir de um  $t > 0$  suficientemente grande. Defina  $u_\varepsilon = \gamma(\frac{\bar{d}}{\varepsilon})$  sendo  $\bar{d}$  a distância com sinal (veja Definição 1.21). Seja  $H_s$  dado pelo Lema 1.22 e tomemos  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $s > t\varepsilon, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$ . Temos então que

$$u_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (H_s)^c \cap E^c \\ 1 & \text{se } x \in (H_s)^c \cap E \end{cases}$$

e portanto

$$\int_{(H_s)^c} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} W_1(u_\varepsilon) \right\} d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \quad (29)$$

Utilizando (29) juntamente com o Lema 1.23 e o Teorema 1.14 temos

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{H_s} \left[ |\gamma'|^2 \left( \frac{\bar{d}}{\varepsilon} \right) |\nabla \bar{d}|^2 + W_1 \left( \gamma \left( \frac{\bar{d}}{\varepsilon} \right) \right) \right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{H_s} \left[ |\gamma'|^2 \left( \frac{\bar{d}}{\varepsilon} \right) + W_1 \left( \gamma \left( \frac{\bar{d}}{\varepsilon} \right) \right) \right] |\nabla \bar{d}| d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{\bar{d}^{-1}(s)} \left[ |\gamma'|^2 \left( \frac{\bar{d}}{\varepsilon} \right) + W_1 \left( \gamma \left( \frac{\bar{d}}{\varepsilon} \right) \right) \right] d\mathcal{H}^{n-2} \right\} ds \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |\gamma'|^2 \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) + W_1 \left( \gamma \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \right] \left\{ \int_{\bar{d}^{-1}(s)} d\mathcal{H}^{n-2} \right\} ds \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |\gamma'|^2 \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) + W_1 \left( \gamma \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \right] \mathcal{H}^{n-2}(\partial\{x; \bar{d}(x) \leq s\}) ds \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |\gamma'|^2 \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) + W_1 \left( \gamma \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) \right) \right] \left\{ \int_M |\nabla \chi_{\{\bar{d}(x) \leq s\}}| d\mathcal{H}^{n-2} \right\} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [|\gamma'|^2(t) + W_1(\gamma(t))] \{g(\varepsilon t)\} ds
\end{aligned}$$

sendo  $g(t) = \int_M |\nabla \chi_{\{\bar{d} \leq t\}}| d\mathcal{H}^{n-2}$ .

Como  $\partial E$  é suave temos que  $g(\varepsilon t) \rightarrow |D\chi_E|(S)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Da escolha de  $\gamma$  segue que  $u_\varepsilon \rightarrow \chi_E$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e então

$$\Gamma^- \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} |D\chi_E|(S) \int_{-\infty}^{\infty} [|\gamma'(t)|^2 + W_1(\gamma(t))] dt.$$

Tomando o ínfimo de todos os  $\gamma$  possíveis temos

$$\Gamma^- \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(\chi_E) \leq \lambda_1 |D\chi_E|(S).$$

Para o caso geral todo conjunto  $E$  tal que  $\chi_E \in BV(S)$  pode ser aproximado por conjuntos  $E_h$  com fronteira  $C^2$ , tais que,  $\chi_{E_h} \in BV(S)$ ,  $\forall h$  e  $\|\chi_{E_h} - \chi_E\|_{BV(S)} \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow \infty$ . Utilizando a propriedade de semicontinuidade inferior do  $\Gamma^-$  limite temos

$$\begin{aligned}
\Gamma^- \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(\chi_E) &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} [\Gamma^- \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(\chi_{E_h})] \\
&\leq \limsup_{h \rightarrow \infty} \lambda_1 |D\chi_{E_h}|(S) \\
&= \lambda_1 |D\chi_E|(S).
\end{aligned}$$

Portanto quando  $u = \chi_E \in BV(S)$  temos

$$\Gamma^- \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(\chi_E) \leq \lambda_1 |D\chi_E|(S) \leq \Gamma^- \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

ou seja,

$$\Gamma^- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(\chi_E) = \lambda_1 |D\chi_E|(S). \blacksquare$$

**Observação 3.5** *Segue da observação A.13 que quando*

$$u = \chi_E \in BV(S, \{0, 1\})$$

*e  $E \subset S$  tem fronteira suave, vale a igualdade*

$$E_0(u) = \lambda_1 \mathcal{H}^{n-2}(\partial E \cap S),$$

*ou seja, neste caso  $E_0$  é dado pela constante  $\lambda_1$  multiplicada pelo funcional que mede a fronteira do conjunto  $E$ .*

### 3.2 Problema 2: $\Gamma$ -limite da família de funcionais

Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio suave e limitado, consideremos a família de funcionais  $P_\varepsilon : L^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $\varepsilon > 0$ , dada por

$$P_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left( \frac{\varepsilon b(x)}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(x, u) \right) & u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus H^1(\Omega) \end{cases} \quad (30)$$

sendo  $b \in C^2(\bar{\Omega})$  uma função real estritamente positiva e  $F = F(x, v) \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$  uma função real tal que:

- i)  $F(x, \alpha) = F(x, \beta) = 0, \forall x \in \Omega,$
- ii)  $F(x, v) > 0, \forall v \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\},$
- iii)  $\frac{\partial F}{\partial v}(x, \alpha) = \frac{\partial F}{\partial v}(x, \beta) = 0, \forall x \in \Omega,$
- iv)  $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x, \alpha) > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x, \beta) > 0, \forall x \in \Omega,$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  constantes.

**Teorema 3.6** *Seja  $P_\varepsilon$  a família de funcionais dada por (30) e  $P_0$  o funcional definido por*

$$P_0(u) = \begin{cases} \int_\Omega \sqrt{b(x)h(x)} |Du| & u \in BV(\Omega, \{\alpha, \beta\}) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, \{\alpha, \beta\}). \end{cases}$$

sendo  $h(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{F(x, \xi)} d\xi$ ,  $x \in \Omega$ . Então

$$P_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma} P_0.$$

**Demonstração:** Veja Teorema 4.1 em [8].

**Corolário 3.7** *Considerando as hipóteses do Lema 6.3, temos que o  $\Gamma$ -limite da família  $F_{\varepsilon}$  definida em (16) é o funcional  $F_0 : L^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definido por*

$$F_0(u) = \begin{cases} \lambda_2 \int_{\Omega} a(x) |D\chi_{\{u=1\}}| & u \in BV(\Omega, \{0, 1\}) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, \{0, 1\}) \end{cases} \quad (31)$$

sendo  $\lambda_2 = \int_0^1 \sqrt{W_2(r)} dr$ .

**Demonstração:** Basta utilizar o teorema anterior, considerando  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $F(x, v) = W_2(v)$  e  $b = a^2$ . ■

**Observação 3.8** *Em particular quando  $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$  e o conjunto  $M := \Omega \cap \partial\{x; u(x) = 1\}$  é suave temos que*

$$F_0(u) = \lambda_2 \int_M a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Observe na igualdade acima que o funcional  $F_0$  não fornece exatamente a área de  $M$ , mas o comportamento deste funcional é bastante similar ao comportamento do funcional área. Com as hipóteses impostas sobre a função  $a$ , poderemos generalizar resultados conhecidos do funcional área para o funcional  $F_0$  e então provar a inexistência de mínimos locais para este funcional.

### 3.3 Problema 3: $\Gamma$ -limite da família de funcionais

Consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio aberto, suave e limitado e  $W_3$  uma função real, com raízes  $-1$  e  $1$ , satisfazendo (4) e (5). Seja  $\tilde{G}_0 : L^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definido por

$$\tilde{G}_0(u) = \begin{cases} |D\Phi(u)|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |\Phi(0) - \Phi(\tilde{u}(y))| d\mathcal{H}^{n-1}(y) & u \in BV(\Omega, \{-1, 1\}) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, \{-1, 1\}) \end{cases} \quad (32)$$

sendo  $\tilde{u} \in L^1(\partial\Omega)$  o traço de  $u$  em  $\partial\Omega$  e  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $\Phi(s) = \int_{-1}^s \sqrt{W_3(x)} dx$ .

**Teorema 3.9** *Considerando  $\Omega$  e  $W_3$  como nas hipóteses acima, temos que a família de funcionais definida em (20) satisfaz, para toda função  $u \in L^1(\Omega)$ , as seguintes propriedades:*

- i) *Se uma sequência  $v_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^1(\Omega)$  então  $\tilde{G}_0(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(v_\varepsilon)$ ;*
- ii) *Existe uma sequência  $\rho_\varepsilon$  tal que  $\rho_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^1(\Omega)$  e*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = \tilde{G}_0(u).$$

**Demonstração:** Veja Teorema 2.1 em [24].

**Corolário 3.10** *Considerando as hipóteses do Lema 6.4 temos que existe uma constante  $C$  que depende de  $W_3$  e de  $\Omega$  tal que o  $\Gamma$ -limite da família de funcionais  $G_\varepsilon$  definida por (20) é dado pelo funcional*

$$G_0(u) = \begin{cases} |D\Phi(u)|(\Omega) + C & u \in BV(\Omega, \{-1, 1\}) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, \{-1, 1\}) \end{cases} \quad (33)$$

**Demonstração:** Segue diretamente do teorema anterior, que o  $\Gamma$ -limite da família de funcionais  $G_\varepsilon$  é o funcional  $\tilde{G}_0$  dado por (32).

Se  $u \in BV(\Omega, \{-1, 1\})$  temos que  $u = \chi_A - \chi_B$  sendo  $A = \{x \in \Omega; u(x) = 1\}$  e  $B = \{x \in \Omega; u(x) = -1\}$ . Além disso, como  $u \in BV$  e  $\Omega$  é suave, o traço de  $u$  existe (Teorema 2.10 em [16]) e portanto o traço  $\tilde{u}$  de  $u$  deve satisfazer

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \partial A \cap \partial\Omega \\ -1 & x \in \partial B \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, se  $u \in BV(\Omega, \{-1, 1\})$  temos da igualdade acima e de (19) que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\Phi(0) - \Phi(\tilde{u}(y))| d\mathcal{H}^{n-1}(y) &= \int_{\partial\Omega \cap \partial A} \Phi(0) d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial\Omega \cap \partial B} \Phi(0) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} \Phi(0) d\mathcal{H}^{n-1} = \Phi(0) \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) = C. \end{aligned}$$

e portanto temos que

$$\tilde{G}_0(u) = \begin{cases} |D\Phi(u)|(\Omega) + C & u \in BV(\Omega, \{-1, 1\}) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega, \{-1, 1\}) \end{cases}$$

sendo  $C > 0$  uma constante. ■

**Observação 3.11** *Se  $u \in BV(\Omega, \{-1, 1\})$  é uma função suave por partes podemos escrever  $u = \chi_A - \chi_{\Omega \setminus A}$ , e neste caso, temos que*

$$|D\Phi(u)|(\Omega) = \lambda_3 \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega)$$

sendo  $\lambda_3 = \int_{-1}^1 \sqrt{W_3(x)} dx$ . Neste caso  $G_0$  é, a menos de constantes, o funcional que fornece a área de  $\partial A \cap \Omega$ .

Note que a condição (19) foi crucial para que o funcional  $G_0$  se comporte como um funcional do tipo “área”. Com esta condição, podemos simplificar o  $\Gamma$ -limite (32) e passaremos a trabalhar com o  $\Gamma$ -limite  $G_0$  dado por (33), que é essencialmente geométrico.

## 4 Preservação de mínimos locais no processo de $\Gamma$ -limite

Como citamos anteriormente, no resultado que apresentaremos a seguir, utilizamos a noção de mínimo dada pela Definição 2.1, que nos permite considerar perturbações que não necessariamente tenham suporte compacto.

**Observação 4.1** *No artigo [23] de fevereiro de 2007 os autores J. Norbury e L-C Yeh, apresentam um teorema sobre a preservação de mínimos locais pelo processo de  $\Gamma$ -limite para uma família de funcionais definida em domínios limitados do  $\mathbb{R}^n$ , do mesmo tipo da que foi considerada em [9].*

*Ocorre que um dos argumentos matemáticos usados na pretensa demonstração está errado e compromete de maneira irreversível o restante do artigo.*

**Teorema 4.2** *Seja  $(X, \mathcal{M}, \nu)$  um espaço de medida e consideremos  $J_\varepsilon : L^1(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\varepsilon > 0$ , uma família de funcionais tais que existe  $J_0 : L^1(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  satisfazendo  $J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Se  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , é uma família de mínimos locais  $\varepsilon$ -uniforme para a família de funcionais  $J_\varepsilon$  em  $L^1(X)$  tal que  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  em  $L^1(X)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  então  $u_0$  é mínimo local de  $J_0$ .*

**Demonstração:** Seja  $r$  a constante fornecida na definição de sequência  $\varepsilon$ -uniforme de mínimos locais. Vamos considerar uma vizinhança da função  $u_0$  em  $L^1(X)$ , de raio  $\frac{r}{3}$ . Dado  $w \in L^1(X)$  tal que  $\|u_0 - w\|_{L^1(X)} < \frac{r}{3}$ , segue da Definição 3.1, item ii), que existe uma sequência  $w_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , em  $L^1(X)$  tal que  $w_\varepsilon \rightarrow w$  e  $J_\varepsilon(w_\varepsilon) \rightarrow J_0(w)$ . Então existe  $\varepsilon_2 > 0$  tal que

$$\|w_\varepsilon - w\|_{L^1(X)} < \frac{r}{3}, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_2.$$

Além disso, como  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  em  $L^1(X)$  sabemos que:

1) Existe  $\varepsilon_1 > 0$  tal que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^1(X)} < \frac{r}{3}, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_1;$$

2)

$$J_0(u_0) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon(u_\varepsilon). \quad (34)$$

Tomando  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$  temos

$$\|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{L^1(X)} \leq \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^1(X)} + \|u_0 - w\|_{L^1(X)} + \|w_\varepsilon - w\|_{L^1(X)} < r, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

logo, se  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , toda função  $w_\varepsilon$  está em uma vizinhança de raio  $r$  de  $u_\varepsilon$ . Assim, segue do fato de  $u_\varepsilon$  ser  $\varepsilon$ -uniforme (com raio  $r$ ) que  $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(w_\varepsilon)$ ,  $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , e conseqüentemente,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon(w_\varepsilon). \quad (35)$$

De (34) e (35) temos que

$$J_0(u_0) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon(w_\varepsilon) = J_0(w)$$

provando que  $u_0$  é mínimo local de  $J_0$  no conjunto

$$\{w \in L^1(X); \|u_0 - w\|_{L^1(X)} < \frac{r}{3}\}. \blacksquare$$

## 5 Sobre a existência de mínimos locais dos funcionais limite

Trataremos neste capítulo das condições necessárias para que os funcionais dados pelos  $\Gamma$ -limites dos Problemas 1, 2 e 3 não admitam mínimos locais não constantes.

### 5.1 Primeira e segunda variações do comprimento de arco

Inicialmente, para tratarmos da questão de existência de mínimos locais do funcional  $E_0$  definido por (22), precisamos adaptar alguns resultados apresentados em [11]. **Utilizando alguns resultados já conhecidos de geometria diferencial, iremos relacionar a existência de mínimos locais do funcional que mede o comprimento de uma curva em uma superfície com a geometria da superfície (Proposições 5.8 e 5.9) .**

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície suave e  $\beta : [0, l] \rightarrow S$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Calcularemos aqui a Primeira e Segunda Variações de  $\beta$  em  $S$ .

**Definição 5.1** *Uma variação da curva  $\beta$  em  $S$  é uma função diferenciável  $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ,  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$h(s, 0) = \beta(s), \forall s \in [0, l].$$

*Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  a curva  $h_t : [0, l] \rightarrow S$  definida por  $h_t(s) = h(s, t)$  é chamada curva da variação  $h$  no ponto  $t$ .*

*Uma variação  $h$  é dita ortogonal a  $\beta$  quando  $\langle \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0), \beta'(s) \rangle = 0, \forall s \in [0, l]$ .*

**Definição 5.2** *Dada uma curva  $\beta$  e uma variação  $h$  de  $\beta$ , definimos a função comprimento  $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $L(t) = \int_0^l \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right| ds$ . Note que  $L(t)$  é o comprimento da curva  $h_t$ .*

**Definição 5.3** Considerando a função  $L$  definida acima, a função  $L'$  é denominada primeira variação de  $\beta$  com respeito a  $h$  e a função  $L''$  é denominada segunda variação de  $\beta$  com respeito a  $h$ .

**Definição 5.4** Uma curva  $\beta$  é um ponto crítico da função  $L$  se  $L'(0) = 0$  para toda variação diferenciável  $h$  de  $\beta$ .

**Observação 5.5** Uma condição necessária para que uma curva  $\beta$  seja mínimo local da função  $L$  é que  $\beta$  seja um ponto crítico de  $L$  e  $L''(0) \geq 0$  para toda variação  $h$  de  $\beta$ .

**Proposição 5.6** Seja  $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  uma variação ortogonal de uma curva  $\beta$  parametrizada pelo comprimento de arco. Se  $\beta$  é um ponto crítico de  $L$  então

$$L''(0) = \int_0^l \left( \left| \frac{D}{\partial s} V(s) \right|^2 - K(s) |V(s)|^2 \right) ds + \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (l, 0) - \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (0, 0)$$

sendo  $V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0)$  e  $K(s) = K(s, 0)$  a curvatura Gaussiana de  $S$  no ponto  $\beta(s) = h(s, 0)$ .

**Demonstração:** Veja Capítulo 5-4, Proposição 4 em [11].

**Observação 5.7** Se uma curva  $\beta$  é um ponto crítico de  $L$ , então existe uma variação ortogonal  $h$  de  $\beta$  tal que  $|V(s)| = 1$  e  $\frac{D}{\partial s} V(s) = 0$  para todo  $s \in [0, l]$  (veja página 352 em [11]).

**Proposição 5.8** Se  $\beta$  é uma curva fechada, suave e um ponto crítico de  $L$ , então existe uma variação  $h$  de  $\beta$  tal que

$$L''(0) = - \int_0^l K(s) ds.$$

**Demonstração:** Utilizando a variação  $h$  fornecida pela observação acima temos que

$$L''(0) = \int_0^l -K(s) ds + \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (l, 0) - \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (0, 0).$$

Como  $\beta$  é uma curva suave e fechada  $\frac{\partial h}{\partial s}(l, 0) = \frac{\partial h}{\partial s}(0, 0)$  e  $\frac{\partial h}{\partial t}(l, 0) = \frac{\partial h}{\partial t}(0, 0)$ , conseqüentemente  $\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (l, 0) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle (0, 0)$ . ■

## 5.2 Problema 1: Inexistência de mínimos locais do $\Gamma$ -limite

Utilizando os resultados da seção anterior, vamos provar a inexistência de mínimos locais não constantes do funcional  $E_0$  definido por (22) em superfícies estritamente convexas.

**Proposição 5.9** *Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície suave, compacta, estritamente convexa e sem bordo e  $E_0$  o funcional dado por (22). Então, os únicos mínimos locais (Definição 2.1) do funcional  $E_0$  são as funções constantes de valor 0 ou 1.*

**Demonstração:** Considerando o funcional  $E_0$ , seja  $u \in BV(S, \{0, 1\})$  tal que  $u = \chi_A$  sendo  $A$  um conjunto com fronteira suave,  $A \neq \emptyset$  e  $A \neq S$ . Vimos na Observação 3.5 que  $E_0(u) = \lambda_1 \mathcal{H}^{n-2}(M)$ , sendo  $M = \partial A \cap S$ , ou seja, neste caso  $E_0$  é o funcional que mede o comprimento de  $M$ . Se  $A$  possuir apenas uma componente conexa, podemos descrever  $M$  como o traço de uma curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$  fechada, suave, regular e parametrizada pelo comprimento de arco.

Como  $S$  é uma superfície estritamente convexa, sabemos que a Curvatura Gaussiana de  $S$  é estritamente positiva. Supondo que a curva  $\alpha$  seja um ponto crítico de  $L$ , podemos utilizar a Proposição 5.8 e garantir a existência de uma variação  $h$  de  $\alpha$  tal que

$$L''(0) < 0.$$

Isso prova que 0 não é um mínimo local de  $L$ , ou seja existe  $t^* \in (-\delta, \delta)$  tal que  $L(t^*) < L(0)$ . Assim  $h_{t^*}$  é uma curva em  $S$  que pertence a uma vizinhança de  $\alpha$  e tem comprimento menor que o comprimento do traço da curva  $\alpha$ . Além disso o traço de  $h_{t^*}$  divide o conjunto  $S$  em dois subconjuntos disjuntos. Considerando  $E^*$  um destes conjuntos temos que  $v = \chi_{E^*} \in BV(S, \{0, 1\})$  e  $E_0(v) < E_0(u)$  provando que  $E_0$  não possui mínimos

locais do tipo  $u = \chi_A$  sendo  $A$  um subconjunto próprio de  $S$  com fronteira suave.

Se o conjunto  $A$  tiver mais de uma componente conexa, basta tomarmos uma variação que age apenas sobre uma de suas componentes conexas.

Se  $u \in BV(S, \{0, 1\})$  é possível escrever  $u = \chi_A$ , sendo  $A$  um conjunto de Cacciopoli. Aproximando o conjunto  $A$  por conjuntos  $A_n$  de classe  $C^\infty$  podemos utilizar o raciocínio anterior e concluir que  $E_0$  não possui mínimos locais não constantes.

Podemos então concluir que os únicos mínimos locais possíveis para o funcional  $E_0$  são as funções constantes iguais a 0 ou 1. ■

### 5.3 Primeira e segunda variações da área

Antes de tratarmos da questão da existência de mínimos locais do funcional  $F_0$  definido por (31), vejamos alguns resultados de primeira e segunda variações de hiperfícies em conjuntos.

**Os resultados apresentados a seguir, foram adaptados de resultados existentes de primeira e segunda variações da área, que podem ser encontrados em [28]. Nossos resultados são mais gerais, pois os resultados de [28] tratam apenas o caso  $a \equiv 1$ .**

**Definição 5.10** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave,  $M \subset \Omega$  uma hiperfície,  $c > 0$  um número real e  $\phi : [-c, c] \times \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$  uma função suave tal que  $\phi(0, x) = x$ ,  $\forall x \in M$  e para cada  $t \in [-c, c]$ , a função  $\phi_t : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$  dada por  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$  é injetora. A função  $\phi$  é denominada variação de  $M$  em  $\Omega$ .*

*Neste caso, para cada  $t \in [-c, c]$  chamamos a hiperfície  $M_t := \phi_t(M)$  de hiperfície da variação  $\phi$  no ponto  $t$ .*

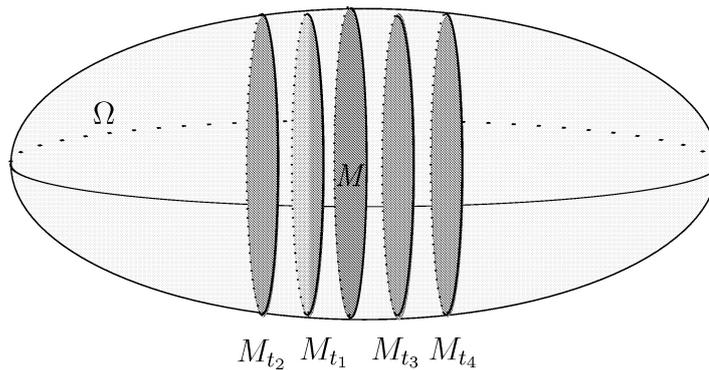


Figura 4:  $\Omega$  representado por um elipsóide,  $M$  representada pela interseção de um plano com o elipsóide.

**Definição 5.11** Consideremos  $\Omega$ ,  $M$  e  $\phi$  como na definição anterior e a uma função suave e positiva. Se definirmos a função  $A : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$A(t) = \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \quad (36)$$

então  $A'$  é denominada primeira variação da hiperfície  $M$  com respeito a  $\phi$  e  $A''$  é denominada segunda variação da hiperfície  $M$  com respeito a  $\phi$ .

**Lema 5.12** Seja  $\phi$  uma variação de uma hiperfície  $M$  em um conjunto  $\Omega$ , como na Definição 5.10. Se considerarmos para cada  $t \in [-c, c]$ , a função  $\psi_t : M \rightarrow \Omega$ ,  $\psi_t = \phi_t|_M$  então

$$\begin{aligned} J\psi_t = & 1 + t(\operatorname{div}_M X) + \frac{t^2}{2} \operatorname{div}_M Z \\ & + \frac{t^2}{2} (\operatorname{div}_M X)^2 + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} |(D_{\tau_i} X)^\perp|^2 \\ & - \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\tau_i D_{\tau_j} X)(\tau_j D_{\tau_i} X) + o(t^3) \end{aligned} \quad (37)$$

sendo  $X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \phi(t, x)$ ,  $Z(x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \phi(t, x)$ ,  $\{\tau_1(x), \dots, \tau_{n-1}(x)\}$  uma base de  $T_x M$  e  $D_{\tau_i} X$  a derivada direcional do campo  $X$  na direção de  $\tau_i$ .

**Demonstração:** Veja página 50 em [28].

**Proposição 5.13** *Se  $A$  é definido por (36), então*

$$\begin{aligned} A'(t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \\ &= \int_M [X \cdot \nabla^\perp a - a(X \cdot H)] d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial M} a(X \cdot \nu) d\mathcal{H}^{n-2}. \end{aligned} \quad (38)$$

sendo  $X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \phi(t, x)$ ,  $H(x)$  o vetor curvatura média de  $M$  no ponto  $x$ ,  $\nabla^\perp a(x)$  a componente ortogonal à  $T_x M$  de  $\nabla a(x)$  e  $\nu(y)$  o vetor co-normal unitário apontando para dentro de  $\partial M$  no ponto  $y$ , isto é,  $\nu(y)$  é normal a  $\partial M$ , tangente a  $M$  e aponta para dentro de  $M$ .

**Demonstração:** Tomando  $\psi_t = \phi_t|_M$  temos que

$$\begin{aligned} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) &= \int_{\psi_t(M)} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\psi_t^{-1}(y)} a(\psi_t(x)) dH^0(x) \right] d\mathcal{H}^{n-1}(y). \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 1.14 na expressão acima temos

$$\int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_M a(\psi_t(x)) J\psi_t(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Então para obter a Primeira Variação basta calcularmos

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M a(\psi_t(x)) J\psi_t(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

De (37) temos que  $J\psi_t$  é limitado, e segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M a(\psi_t(x)) J\psi_t(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_M \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} a(\psi_t(x)) J\psi_t(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Da expressão (37) segue também que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} a(\psi_t) J\psi_t = X \cdot \nabla a + a(\operatorname{div}_M X) \quad (39)$$

Se escrevermos  $\nabla a = \nabla^\perp a + \nabla^T a$ , sendo  $\nabla^T a(x)$ , a componente de  $\nabla a(x)$  contida em  $T_x M$ , temos que  $\operatorname{div}_M(aX) = \nabla^T a \cdot X + \operatorname{div}_M(aX)$ , pois

$\operatorname{div}_M X(y) \in T_y M$ . Podemos então utilizar (39) e o Teorema da Divergência 1.11 e escrever a Primeira Variação como

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) &= \int_M [X \cdot \nabla^\perp a + X \cdot \nabla^T a + a(\operatorname{div}_M X)] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_M [X \cdot \nabla^\perp a + \operatorname{div}_M(aX)] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_M [X \cdot \nabla^\perp a - a(X \cdot H)] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\partial M} a(X \cdot \nu) d\mathcal{H}^{n-2}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Definição 5.14** Dizemos que  $M$  é um ponto crítico da Primeira Variação de  $A$  se  $A'(0) = 0$ , para toda variação  $\phi$  de  $M$ .

**Proposição 5.15** Se  $M$  é um ponto crítico da Primeira Variação de  $A$  então a curvatura média  $H(\cdot)$  de  $M$  deve satisfazer

$$\eta(x) \cdot \nabla^\perp a(x) = a(x)[\eta(x) \cdot H(x)], \forall x \in M, \quad (40)$$

sendo  $\nabla^\perp a(x)$ , a componente de  $\nabla a(x)$  perpendicular a  $T_x M$ .

Além disso, se  $M$  intersectar  $\partial\Omega$  isso deve acontecer ortogonalmente, isto é, em cada ponto  $z \in \partial M \cap \partial\Omega$ , o vetor co-normal unitário a  $\partial M$  no ponto  $z$  é ortogonal ao plano tangente  $T_z \partial\Omega$ .

**Demonstração:** Seja  $\eta$  o campo vetorial tal que para cada  $x \in M$ ,  $\eta(x)$  é normal a  $M$  no ponto  $x$ . Considerando o caso particular em que a variação  $\phi$  satisfaz  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = \xi \eta$ , ( $X = \xi \eta$ ), sendo  $\xi$  uma função real e suave com suporte compacto em  $M$ , temos de (38) que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \int_M [\eta \cdot \nabla^\perp a - a(\eta \cdot H)] \xi d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Como  $\xi$  pode ser qualquer função com suporte compacto em  $M$  concluímos que caso a Primeira Variação seja nula deve acontecer

$$\eta(x) \cdot \nabla^\perp a(x) = a(x)[\eta(x) \cdot H(x)], \forall x \in M.$$

Vamos supor agora que  $M$  é um ponto crítico da Primeira Variação de  $A$  que  $M$  intersecta a fronteira de  $\Omega$ , ou seja,  $\partial M \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ . Tomando  $z \in \partial M \cap \partial\Omega$  e  $e_n$  o vetor normal unitário a  $\partial\Omega$  no ponto  $z$ , podemos escrever  $\nu(z) = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ , sendo  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

Considerando o campo vetorial constante  $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i$ , podemos escrever

$$\bar{X}(x) = g(x)\eta(x) + T(x)$$

sendo  $g$  uma função real,  $g(x)\eta(x) \in (T_x M)^\perp$  e  $T(x) \in T_x M$ .

Seja  $\rho$  uma função suave tal que  $\rho$  é positiva no conjunto  $C^+ = \{y \in \partial M; \bar{X}(y) \cdot \nu(y) > 0\}$  e negativa no conjunto  $C^- = \{y \in \partial M; \bar{X}(y) \cdot \nu(y) < 0\}$ . Se consideremos o campo  $X = \rho \bar{X}$  temos a igualdade

$$\begin{aligned} X \cdot \nabla^\perp a - a(X \cdot H) &= \rho g(\eta \cdot \nabla^\perp a) + \rho(T \cdot \nabla^\perp a) - a\rho g(\eta \cdot H) - a(T \cdot H) = \\ &= \rho g(\eta \cdot \nabla^\perp a - a(\eta \cdot H)) = 0, \end{aligned}$$

pois  $H(y) \in (T_y M)^\perp$ . Portanto

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \int_{\partial M} a(y)(X(y) \cdot \nu(y)) d\mathcal{H}^{n-2}(y) = 0.$$

Como  $a > 0$ , segue da igualdade acima que  $X(y) \cdot \nu(y) = 0$ ,  $\forall y \in \partial M$ . Em particular no ponto  $z$  temos

$$X(z) \cdot \nu(z) = (c_1)^2 + (c_2)^2 + \dots + (c_{n-1})^2 = 0$$

concluindo que  $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$  e portanto  $\nu(z)$  tem a mesma direção do vetor normal a  $\partial\Omega$  no ponto  $z$ .

Logo se  $M$  é um ponto crítico da função  $A$  dada por (36), isto é, a primeira derivada de  $A$  em  $M$  é nula para todo campo  $X$ , concluímos que a curvatura média de  $M$  deve satisfazer (40), e caso  $M$  intersecte  $\partial\Omega$  isso deve acontecer ortogonalmente. ■

**Proposição 5.16** *A Segunda Variação de A é dada por*

$$\begin{aligned}
A''(t) &= \int_M [X^T \cdot (\text{Hess}(a) \cdot X) + \nabla a \cdot Z + 2(\nabla a \cdot X)\text{div}_M X] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \int_M a[(\text{div}_M Z) + (\text{div}_M X)^2] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&+ \int_M a \left[ \sum_{i=1}^{n-1} |(D_{\tau_i} X)^\perp|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\tau_i D_{\tau_j} X)(\tau_j D_{\tau_i} X) \right] d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{41}$$

**Demonstração:** Assim como na demonstração da Proposição 5.13, vale a igualdade

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \int_M a(\psi_t(x)) J\psi_t(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} a(\psi_t(x)) J\psi_t(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Segue da expressão (37) que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} a(\psi_t) J\psi_t &= X^T \cdot (\text{Hess}(a) \cdot X) + \nabla a \cdot Z + 2(\nabla a \cdot X)\text{div}_M X \\
&+ a(\text{div}_M Z) + a(\text{div}_M X)^2 \\
&+ a \left[ \sum_{i=1}^{n-1} |(D_{\tau_i} X)^\perp|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\tau_i D_{\tau_j} X)(\tau_j D_{\tau_i} X) \right]. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 5.17** *Se M é de classe C<sup>2</sup> e um ponto crítico da função A, isto é, A'(0) = 0 para toda variação φ de M, então*

$$\int_M a \left[ \sum_{i=1}^{n-1} |(D_{\tau_i} \eta)^\perp|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\tau_i D_{\tau_j} \eta)(\tau_j D_{\tau_i} \eta) \right] d\mathcal{H}^{n-1} = - \int_M a|B|^2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

sendo B a segunda forma fundamental de M.

**Demonstração:** Veja página 53 em [28].

**Observação 5.18** *Em muitos casos, dados dois campos vetoriais X e Z, é possível tomar a variação φ da forma*

$$\phi(t, x) = x + tX(x) + \frac{t^2}{2}Z(x) + o(t^3).$$

**Corolário 5.19** *Considerando as hipóteses do teorema anterior, existe uma variação  $\phi$  tal que*

$$\begin{aligned} A''(0) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \\ &= \int_M [\eta^T \cdot (\text{Hess}(a) \cdot \eta) - a(\eta \cdot H)^2 - a|B|^2] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_M [Z \cdot \nabla^\perp a - a(Z \cdot H)] d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial M} a(Z \cdot \nu) d\mathcal{H}^{n-2}. \end{aligned} \quad (42)$$

**Demonstração:** Substituindo (40) na expressão (41) e considerando  $X$  tal que  $X|_M = \eta$  segue do Teorema da Divergência, de (40) e do Teorema 5.17 que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) &= \int_M [\eta^T \cdot (\text{Hess}(a) \cdot \eta) - a(\eta \cdot H)^2 - a|B|^2] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_M [\nabla a \cdot Z + a(\text{div}_M Z)] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_M [\eta^T (\text{Hess}(a) \cdot \eta) - a(\eta \cdot H)^2 - a|B|^2] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \int_M [\nabla^\perp a \cdot Z - a(Z \cdot H)] d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\partial M} a(Z \cdot \nu) d\mathcal{H}^{n-2}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolário 5.20** *Se estivermos interessados em perturbar o conjunto  $M$  de forma que a variação  $\phi$  tenha suporte compacto, existe uma variação  $\phi$  tal que*

$$A''(0) = \int_M \xi^2 [\eta^T \cdot (\text{Hess}(a) \cdot \eta) - a\xi^2(\eta \cdot H)^2 - a\xi^2|B|^2] d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (43)$$

**Demonstração:** Neste caso, tomando  $\xi$  uma função real com suporte compacto em  $\Omega$  tal que  $|\xi| \leq 1$  e tomando  $c < \text{dist}(\text{supp}(\xi), \partial\Omega)$  é possível tomar uma variação  $\phi$  do tipo  $\phi(t, x) = x + t\xi(x)\nu(x)$ ,  $t \in [-c, c]$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , sendo  $\nu$  o campo vetorial normal a  $M$ . Observe que desta forma  $Z \equiv 0$ .  $\blacksquare$

## 5.4 Problema 2: Inexistência de mínimos locais do $\Gamma$ -limite

Vejam agora a questão da existência de mínimos locais para o funcional limite do Problema 2.

**Proposição 5.21** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto, limitado e estritamente convexo e  $F_0$  o funcional dado por (31). Então os únicos mínimos locais (segundo a Definição 2.1) do funcional  $F_0$  são as funções constantes 0 ou 1.*

**Demonstração:** Vimos na Observação 3.8 que quando  $u = \chi_E \in BV(\Omega)$  e a fronteira de  $E$  for de classe  $C^2$  temos que

$$F_0(u) = \lambda \int_M a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

sendo  $M := \partial E \cap \Omega$ .

Neste caso o valor do funcional  $F_0$  depende apenas de  $a$  e  $M$ . Note que se  $u \equiv 0$  ou  $u \equiv 1$  então o conjunto  $M$  é vazio e portanto  $u$  é um mínimo global de  $F_0$ .

Vamos admitir que  $M$  seja não vazio e também um ponto crítico do funcional  $A$  definido por (36). Se  $M$  intersectar a fronteira de  $\Omega$ ,  $M$  pode ser representada por uma curva regular suave que particiona o conjunto  $\Omega$  em duas partes e que intersecta a fronteira de  $\Omega$  ortogonalmente em dois pontos  $x_0, x_1 \in \partial\Omega$ , como na representação da Figura 5. Consideremos a curva suave, regular e parametrizada pelo comprimento de arco  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \overline{M}$  tal que  $\gamma_0(0) = x_0$  e  $\gamma_0(1) = x_1$ .

Seja  $\tilde{V}_c$  uma vizinhança tubular de raio  $c > 0$  do traço de  $\gamma_0$  e consideremos  $V_c = \tilde{V}_c \cap \Omega$ . Sejam  $\tilde{f}_0 : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\tilde{f}_1 : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas funções reais contínuas tais que  $\tilde{f}_0$  é o traço de  $\partial\Omega \cap \partial V_c$  na vizinhança do ponto  $x_0$  com  $\tilde{f}_0(0) = x_0$  e  $\tilde{f}_1$  é o traço de  $\partial\Omega \cap \partial V_c$  na vizinhança do ponto  $x_1$  com  $\tilde{f}_1(0) = x_1$ .

Rotacionando e transladando separadamente os traços de  $\tilde{f}_0$  e  $\tilde{f}_1$ , obtemos duas funções  $f_0 : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_1 : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f_0(0) = 0$ ,  $f_0$  tem

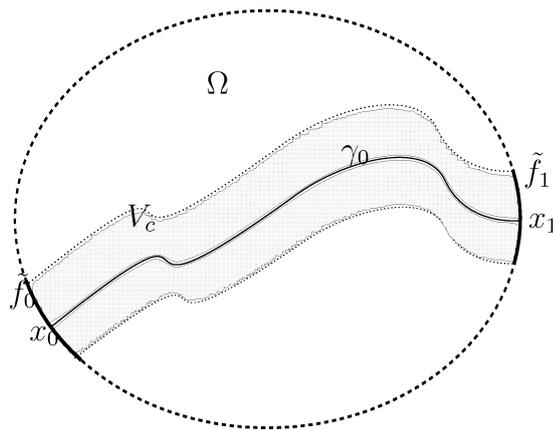


Figura 5: Representação de  $V_c$ .

um mínimo global em 0,  $f_1(0) = 1$  e  $f_1$  tem um máximo global em 0 (Veja Figura 6). Observe que o comportamento de mínimo e máximo globais das funções  $f_0$  e  $f_1$  só é obtido quando o conjunto  $\Omega$  for estritamente convexo.

Consideremos, como na Figura 6 o conjunto  $U_c \subset \mathbb{R}^2$  dos pontos  $(s, t)$  que estão dentro do conjunto delimitado pelas curvas  $t = -c$ ,  $t = c$ ,  $\{(t, f_0(t)); t \in [-c, c]\}$  e  $\{(t, f_1(t)); t \in [-c, c]\}$ .

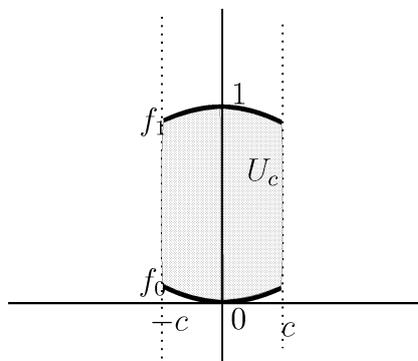


Figura 6: Conjunto  $U_c$  e funções  $f_0$  e  $f_1$ .

Dado  $t \in [-c, c]$  definimos uma curva  $\alpha_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha_t(s) = (\alpha_t^1(s), \alpha_t^2(s)) = ((1-s)f_0(t) + sf_1(t), t)$ .

Seja  $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial normal unitário a  $M$  e consideremos  $D : U_c \rightarrow V_c$  um difeomorfismo de classe  $C^2$  tal que:

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & D(\alpha_0(s)) = \gamma_0(s), \forall s \in [0, 1]; \\
\text{ii)} \quad & D(t, f_i(t)) = \tilde{f}_i(t), \forall t \in [-c, c], i = 1, 2; \\
\text{iii)} \quad & \frac{\partial D}{\partial t}(\alpha_0(s)) = \eta(\gamma_0(s)), \forall s \in [0, 1]; \\
\text{iv)} \quad & \frac{\partial D}{\partial s}(\alpha_0(s)) = \gamma'_0(s), \forall s \in [0, 1]; \\
\text{v)} \quad & \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\alpha_0(0)) = \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\alpha_0(1)) = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Note que

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \alpha_t^1(s) = 0, \forall s \in [0, 1]; \\
2) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^2(s) = 1, \forall s \in [0, 1], \forall t \in (-c, c); \\
3) \quad & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \alpha_t^1(0) = f''_0(0) \geq 0; \\
4) \quad & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \alpha_t^1(1) = f''_1(0) \leq 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Consideremos agora a função suave e injetora  $\phi : \overline{\Omega} \times (-c, c) \rightarrow \overline{\Omega}$  tal que  $\phi_t(x) = \phi(t, x) = D(\alpha_t(\gamma_0^{-1}(x)))$ ,  $\forall x \in M$ .

Dado  $x \in M$ , vamos calcular

$$X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \phi(t, x)$$

e

$$Z(x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \phi(t, x).$$

Considerando  $s = \gamma_0^{-1}(x)$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) = \frac{\partial D}{\partial s}(\alpha_t(s)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^1(s) \right) + \frac{\partial D}{\partial t}(\alpha_t(s)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^2(s) \right).$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_t(x) = & \frac{\partial^2 D}{\partial s^2}(\alpha_t(s)) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^1(s) \right]^2 \\
& + \frac{\partial^2 D}{\partial s t} \alpha_t(s) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^1(s) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^2(s) \right] \\
& + \frac{\partial^2 D}{\partial t s}(\alpha_t(s)) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^2(s) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^1(s) \right] \\
& + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \alpha_t(s) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t^2(s) \right]^2 \\
& + \frac{\partial D}{\partial s}(\alpha_t(s)) \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha_t^1(s) \right] \\
& + \frac{\partial D}{\partial t}(\alpha_t(s)) \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha_t^2(s) \right].
\end{aligned}$$

Logo segue das igualdades acima, de (45) e de (44) que

$$X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \phi_t(x) = \frac{\partial D}{\partial t}(\alpha_0(s)) = \eta(\gamma_0(s)) = \eta(x), \forall x \in M \quad (46)$$

e

$$Z(x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \phi_t(x) = \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\alpha_0(s)) + \frac{\partial D}{\partial s}(\alpha_0(s))[(\alpha_0^1)''(s)], \forall x \in M.$$

Note que  $Z(x) \in T_x M, \forall x \in M$  e em particular,

$$Z(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \phi_t(x_0) = \gamma_0'(0) f_1''(0) = d_0 \nu(x_0) \quad (47)$$

e

$$Z(x_1) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \phi_t(x_1) = \gamma_0'(1) f_1''(0) = d_1 \nu(x_1) \quad (48)$$

sendo  $d_0, d_1$  constantes positivas e  $\nu(y)$  o vetor co-normal unitário a  $\partial M$  no ponto  $y$ , isto é,  $\nu(y)$  é normal a  $\partial M$ , tangente a  $M$  e aponta para dentro de  $M$ .

Substituindo (46), (47) e (48) em (42) temos que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^1(x) &= \int_M [\eta^T \cdot (\text{Hess}(a) \cdot \eta) - a(\eta \cdot H)^2 - a|B|^2] d\mathcal{H}^1 \\
&+ \int_M [Z \cdot \nabla^\perp a - a(Z \cdot H)] d\mathcal{H}^1 - \int_{\partial M} a(Z \cdot \nu) d\mathcal{H}^0 \\
&= \int_M \{ \eta^T \cdot (\text{Hess}(a) \cdot \eta) - a(\eta \cdot H)^2 - a|B|^2 \} d\mathcal{H}^1 \\
&- d_1 a(x_1) - d_0 a(x_0).
\end{aligned}$$

Como  $d_0, d_1 \geq 0$  e por hipótese  $\text{Hess}(a)$  é definida negativa e  $a$  é estritamente positiva, podemos concluir que

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^1(x) < 0.$$

Consideremos a função suave  $h : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(t) = \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^1(x)$ . Segue da equação acima que  $h''(0) < 0$  e portanto sabemos que  $h$  não possui um mínimo local em 0. Logo existe  $t_0 \in (-c, c)$  tal que  $h(t_0) < h(0)$ , ou seja,

$$\int_{M_{t_0}} a(x) d\mathcal{H}^1(x) < \int_M a(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Observe que  $M_{t_0} = \phi_{t_0}(M)$  pode ser escrito como o traço da curva  $\alpha_{t_0}$  que divide  $\overline{\Omega}$  em dois subconjuntos. Temos então

$$\int_{\alpha_{t_0}([0,1])} a(x) d\mathcal{H}^1(x) = \int_{M_{t_0}} a(x) d\mathcal{H}^1(x) < \int_M a(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Considerando  $A$  um dos subconjuntos de  $\Omega$  tal que  $\partial A \cap \Omega$  é dado pelo traço da curva  $\alpha_{t_0}$  temos que  $F_0(\chi_A) < F_0(\chi_E)$  e conseqüentemente  $u = \chi_E$  não é um mínimo local do funcional  $F_0$ . Como  $u$  é um ponto crítico qualquer de  $F_0$ , concluímos que  $F_0$  não possui mínimos locais do tipo  $u = \chi_E$  sendo  $E$  um subconjunto com fronteira suave tal que  $0 < |E| < |\Omega|$ . Assim como no Problema 1 a inexistência de mínimos locais não constantes de  $F_0$  para o caso em que  $E$  não é suave é feito aproximando  $E$  por conjuntos  $E_n$  suaves.

No caso em que  $M$  não intersecta  $\partial\Omega$ , podemos utilizar o Corolário 5.20 para mostrar que existe uma variação  $\phi$  tal que

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \int_{M_t} a(x) d\mathcal{H}^1(x) < 0.$$

e podemos, assim como no caso anterior, concluir que  $F_0$  não admite mínimos locais diferentes das funções constantes 0 ou 1.

Logo, os únicos mínimos locais que o funcional  $F_0$  admite são as funções constantes iguais a 0 ou 1. ■

### 5.5 Problema 3: Inexistência de mínimos locais do $\Gamma$ -limite

Consideremos  $u \in BV(\Omega, \{-1, 1\})$  e suponhamos que o conjunto  $M = \partial\{x; u(x) = 1\} \cap \Omega$  é suave. Vimos que nesse caso  $G_0(u) = \lambda_3 \mathcal{H}^{n-1}(M) + C$ .

**Teorema 5.22** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto aberto suave e limitado, então para toda bola  $B \Subset \Omega$ ,  $M \cap B$  consiste em um número finito de segmentos de reta  $\cup_{i=1}^n (a_j, b_j)$  tais que  $a_j, b_j \in \partial B$  e  $[a_j, b_j] \cap [a_k, b_k] = \emptyset$ , para  $j \neq k$ .*

**Demonstração:** Veja Teorema 5 em [32].

**Corolário 5.23** *Considerando  $\Omega$  nas hipóteses do Teorema anterior então  $M$ , caso exista, consiste em um número finito de segmentos de reta  $\cup_{i=1}^m (a_j, b_j)$ .*

**Demonstração:** Se considerarmos uma componente conexa de  $M$ , podemos cobrir tal componente, a menos de um conjunto de medida nula, por bolas disjuntas de raio  $r$  contidas em  $\Omega$  (Figura 7 A).

Desta forma, utilizando o Teorema 5.22, podemos concluir que tal componente conexa é uma linha poligonal (Figura 7 B). Finalmente, tomando bolas centradas nos vértices  $P_0, P_1, \dots, P_n$  da poligonal e utilizando novamente o Teorema 5.22 nestas bolas, podemos concluir que cada componente conexa de  $M$  é um segmento de reta. ■

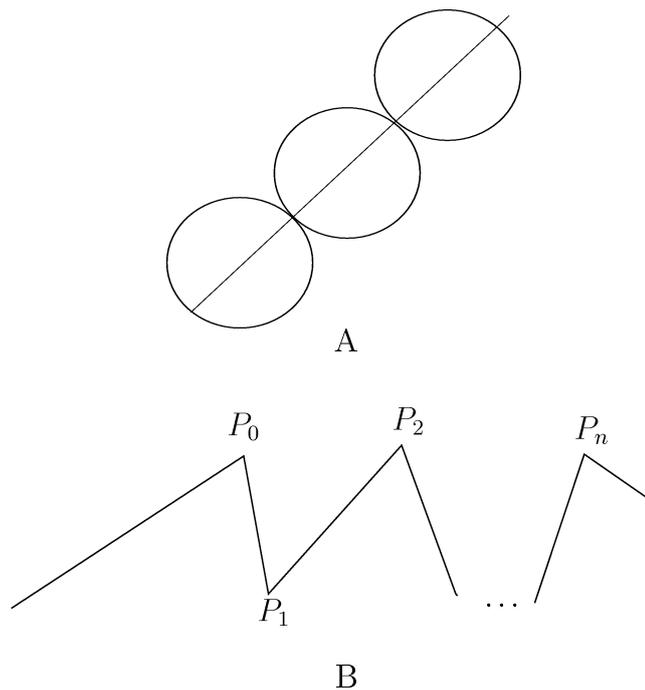


Figura 7: Interface  $M$ .

**Proposição 5.24** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto, limitado e estritamente convexo e  $G_0$  o funcional dado por (33). Então, utilizando a Definição (2.1), temos que os únicos mínimos locais do funcional  $G_0$  são as funções constantes  $-1$  e  $1$ .*

**Demonstração:** Segue do Corolário 5.23 que  $M$  é composta de finitos segmentos  $(a_j, b_j), j = 1, 2, \dots, m$  tais que  $a_j, b_j \in \partial\Omega, \forall j$ . Além disso, o funcional limite do problema se comporta como a função  $A$  definida por (36) (neste caso,  $a \equiv 1$ ). Assim, as conclusões da Seção 5.3 se aplicam também a este caso, e podemos concluir que  $M$  deve intersectar a fronteira de  $\Omega$  ortogonalmente.

Chamemos de  $(a, b)$  um dos segmentos que compõem  $M$  e seja  $r_\varepsilon$  a reta paralela a  $(a, b)$  distando  $\varepsilon$  de  $(a, b)$ .

Considerando  $a_\varepsilon$  e  $b_\varepsilon$  as interseções de  $r_\varepsilon$  com a fronteira do conjunto  $\Omega$ ,  $\tilde{a}_\varepsilon = r_\varepsilon \cap T_a\partial\Omega$  e  $\tilde{b}_\varepsilon = r_\varepsilon \cap T_b\partial\Omega$ . Como  $r$  intersecta a fronteira de  $\Omega$  ortogonalmente o comprimento de  $(\tilde{a}_\varepsilon, \tilde{b}_\varepsilon)$  é igual ao comprimento de  $(a, b)$ .

Como  $\Omega$  é estritamente convexo sabemos que  $T_a\partial\Omega \cap \overline{\Omega} = \{a\}$ . Consequentemente  $\tilde{a}_\varepsilon \neq a_\varepsilon$ . Logo, o comprimento de  $(\tilde{a}_\varepsilon, \tilde{b}_\varepsilon)$  deve ser maior que

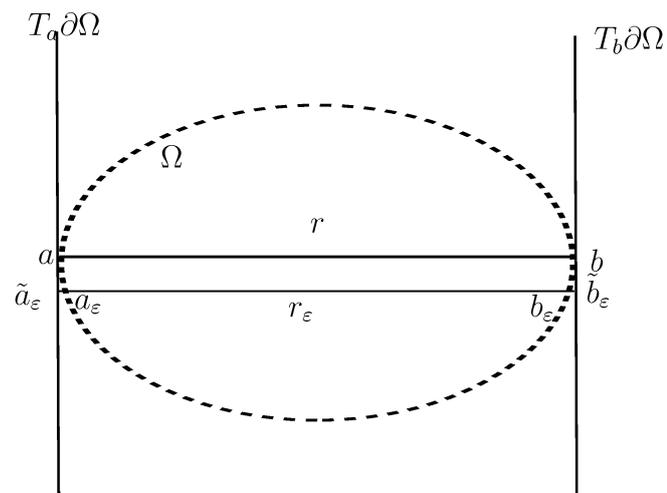


Figura 8: Conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

o comprimento de  $(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$  e portanto a função  $u \in BV(\Omega, \{-1, 1\})$  que tem o segmento  $(a, b)$  como camada interna de transição não é mínimo local do funcional área  $G_0$ .

Logo, considerando domínios planos e estritamente convexos, os únicos mínimos locais possíveis para o funcional  $G_0$  são as funções constantes iguais a  $-1$  ou  $1$ . ■

## 6 Demonstração dos resultados principais

Antes da demonstração dos resultados principais desta tese, chamamos a atenção para a seguinte observação:

**Observação 6.1** *A Proposição 1.5 é válida também para os funcionais  $E_\varepsilon$ ,  $F_\varepsilon$  e  $G_\varepsilon$ , definidos respectivamente por (11), (16) e (20), desde que tais funcionais satisfaçam as hipóteses dos Lemas 6.2, 6.3 e 6.4 (apresentados a seguir), respectivamente.*

### 6.1 Demonstração do resultado principal do Problema

#### 1

**Lema 6.2** *Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície suave, compacta, sem bordo e estritamente convexa e  $W_1$  um potencial com raízes 0 e 1, satisfazendo (4) e (5). Se a família de funcionais  $E_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  definida por (11) possuir uma família de mínimos locais  $\varepsilon$ -uniforme  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , com energia limitada, então existe uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  convergente que satisfaz uma das condições:*

*i)  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow 0$  em  $L^1(S)$  ou*

*ii)  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow 1$  em  $L^1(S)$ .*

*Além disso, todas as subsequências convergentes de  $u_\varepsilon$  também devem convergir para uma das funções constantes de valor 0 ou 1.*

**Demonstração:** Da observação 6.1 temos que existem uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  e uma função  $u_0 \in L^1(S)$  tais que

$$\|u_{\varepsilon_j} - u_0\|_{L^1(S)} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon_j \rightarrow 0.$$

Assim, temos do Teorema 4.2 que  $u_0$  é um mínimo local do funcional  $E_0$  e utilizando a Proposição 5.9 podemos concluir que  $u_0 \equiv 0$  ou  $u_0 \equiv 1$ . Se existir outra subsequência convergente de  $u_\varepsilon$ , podemos utilizar este mesmo raciocínio para concluir que ela também deve convergir para 0 ou 1. ■

Logo, fica provado que as únicas possibilidades de existência de mínimos locais com energia limitada para a família de funcionais (11) são: a família de mínimos locais não ser  $\varepsilon$ -uniforme ou as funções  $u_\varepsilon$  convergirem para uma das funções constantes 0 ou 1.

### Demonstração do Teorema 2.7

Considerando as hipóteses do Teorema 2.6, podemos utilizar o Lema 6.2 e concluir que  $u_\varepsilon$  possui pelo menos uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  que converge para uma das funções constantes de valor 0 ou 1. Conseqüentemente,  $u_\varepsilon$  não pode desenvolver camada interna de transição, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

## 6.2 Demonstração do resultado principal do Problema 2

**Lema 6.3** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio estritamente convexo,  $W_2$  um potencial com raízes 0 e 1, satisfazendo (4) e (5) e  $a \in C^2(\bar{\Omega})$  uma função estritamente positiva satisfazendo (17). Se a família de funcionais  $F_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , definida por (16) possuir uma família de mínimos locais  $\varepsilon$ -uniforme  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , com energia limitada, então existe uma subsequência convergente  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  que satisfaz uma das situações:*

$$i) u_{\varepsilon_j} \rightarrow 0 \text{ em } L^1(\Omega) \text{ ou}$$

$$ii) u_{\varepsilon_j} \rightarrow 1 \text{ em } L^1(\Omega).$$

*Além disso, todas as subsequências convergentes de  $u_\varepsilon$  também devem convergir para uma das funções constantes 0 ou 1.*

**Demonstração:** Segue da Observação 6.1 que existe uma função  $u_0 \in L^1(\Omega)$  e uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  de  $u_\varepsilon$  tais que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon_j \rightarrow 0.$$

Logo, utilizando o Teorema 4.2 e a Proposição 5.21 podemos concluir que a função  $u_0$  deve ser uma função constante igual a 0 ou 1. O mesmo vale para outras subsequências convergentes de  $u_\varepsilon$ . ■

### Demonstração do Teorema 2.9

Toda solução estacionária fracamente estável de  $E_\varepsilon$  é um mínimo local de  $F_\varepsilon$ . Considerando também as hipóteses i) e ii) do Teorema 2.8, podemos utilizar o Lema 6.3 e concluir que  $u_\varepsilon$  possui pelo menos uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  que converge para uma das funções constantes de valor 0 ou 1. Consequentemente,  $u_\varepsilon$  não pode desenvolver camada interna de transição, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

Provamos então que uma das duas condições é necessária para que existam soluções estacionárias fracamente estáveis  $u_\varepsilon$  com energia limitada para o problema (15): ou  $u_\varepsilon$  não é uma sequência  $\varepsilon$ -uniforme de mínimos locais de  $F_\varepsilon$ , ou as funções  $u_\varepsilon$  convergem para uma das funções constantes 0 ou 1.

### 6.3 Demonstração do resultado principal do Problema 3

**Lema 6.4** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto suave e estritamente convexo e  $W_3$  um potencial com raízes  $-1$  e  $1$ , satisfazendo (4), (5) e (19). Se a família de funcionais  $G_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , definida por (20) possuir uma família de mínimos locais  $\varepsilon$ -uniforme  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , com energia limitada, então existe pelo menos uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  convergente que satisfaz uma das condições:*

$$i) u_{\varepsilon_j} \rightarrow -1 \text{ em } L^1(\Omega) \text{ ou}$$

$$ii) u_{\varepsilon_j} \rightarrow 1 \text{ em } L^1(\Omega).$$

*Além disso, todas as subsequências convergentes de  $u_\varepsilon$  também devem convergir para uma das funções constantes de valor  $-1$  ou  $1$ .*

**Demonstração:** Considerando as hipóteses do Lema 6.4, a Observação 6.1 garante a existência de uma subsequência  $\{u_{\varepsilon_j}\}$  e uma função  $u_0 \in L^1(\Omega)$  tais que  $\|u_{\varepsilon_j} - u_0\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ . Segue do Teorema 4.2 que a função  $u_0$  é um mínimo local do funcional  $G_0$ . Então, utilizando a Proposição 5.24

concluimos que  $u_0$  deve ser constante igual a  $-1$  ou  $1$ . O mesmo raciocínio pode ser utilizado para mostrar que todas as subsequências convergentes de  $u_\varepsilon$  devem convergir para  $-1$  ou  $1$ . ■

Neste caso, as únicas possibilidades de existência de mínimos locais  $u_\varepsilon$ , com energia limitada, para os funcionais  $G_\varepsilon$  é que  $u_\varepsilon$  não seja uma sequência  $\varepsilon$ -uniforme de mínimos locais de  $G_\varepsilon$  ou então que  $u_\varepsilon$  convirja em  $L^1(\Omega)$  para uma das funções constantes  $u_0 \equiv -1$  ou  $u_0 \equiv 1$ .

### Demonstração do Teorema 2.10

Considerando as hipóteses do Teorema 2.9, segue do lema anterior que só existem subsequências convergentes de mínimos locais que convergem para as funções constantes  $-1$  ou  $1$ . Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que  $-1 \leq u_\varepsilon \leq 1$  (procedendo como em (25)). Utilizando esta informação sobre a convergência de  $u_\varepsilon$ , o Corolário 1.10 garante que a única possibilidade de existência de uma família  $u_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , de soluções estacionárias estáveis que mudam de sinal para (18) é que  $u_\varepsilon$  possua uma subsequência convergente para  $-1$  ou  $1$  e portanto,  $u_\varepsilon$  não pode desenvolver camada interna de transição, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

## 7 Caso $n \geq 3$ para os Problemas 1, 2 e 3

Chamamos a atenção para o fato de que tanto os resultados que calculam os  $\Gamma$ -limites dos Problemas 1, 2 e 3 quanto o resultado da preservação de mínimos locais no processo de  $\Gamma$ -limite são válidos em hiperfícies e/ou domínios contidos em  $\mathbb{R}^n$ . Como podemos observar nos Lemas 6.2, 6.3 e 6.4, os resultados que obtivemos até o momento são válidos em domínios de dimensão 2, desde que assumidas certas condições geométricas sobre o domínio. A observação a seguir fala sobre o que é necessário para conseguir os mesmos resultados em domínios de dimensões maiores (hiperfícies de grau  $n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , no caso do Problema 1 e abertos contidos em  $\mathbb{R}^n$ , no caso dos Problemas 2 e 3, em ambos os casos  $n \geq 3$ ).

**Observação 7.1** *Embora a técnica de utilizar a preservação de minimalidade local no processo de  $\Gamma$ -limite possa ser aplicada em domínios mais gerais, conseguimos demonstrar a inexistência de mínimos locais para o funcional limite do Problema 1 apenas em superfícies suaves, compactas, estritamente convexas e sem bordo contidas em  $\mathbb{R}^3$ , e para os funcionais limite dos Problemas 2 e 3 apenas em conjuntos abertos, suaves e estritamente convexos bidimensionais. Chamamos a atenção que para utilizar esta mesma técnica, e conseguir os mesmos resultados dos Problemas 1, 2 e 3 em dimensões maiores, falta apenas o tratamento do problema limite em tais dimensões, ou seja, utilizar as hipóteses sobre a geometria do domínio para demonstrar a inexistência de mínimos locais para os funcionais limite.*

## 8 Problema 4: Outra definição de mínimo local

Como citado anteriormente, a principal limitação da técnica utilizada nos problemas anteriores, é a questão da sequência de mínimos locais  $u_\varepsilon$  dos funcionais poder convergir para uma função  $u_0$  constante, que geometricamente é o caso em que os mínimos locais  $u_\varepsilon$  não desenvolvem camada interna de transição (Figura 9 abaixo). Neste capítulo vamos utilizar uma outra definição de mínimos locais, que nos permitirá (caso o fecho da camada de transição de  $u_0$  não intersecte a fronteira de  $\Omega$ ) superar tal limitação.

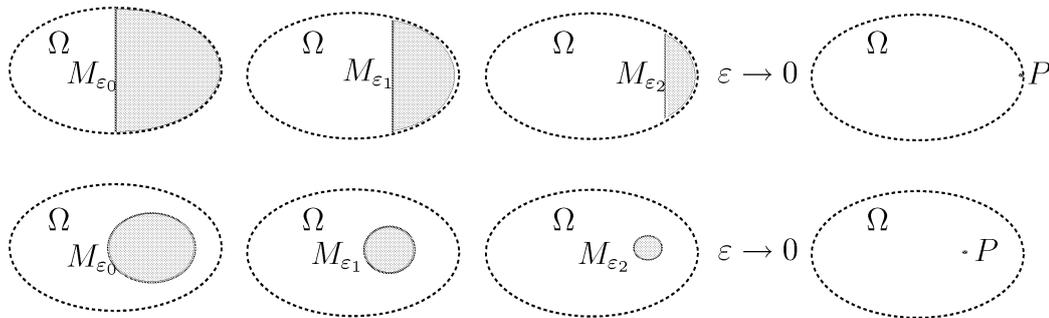


Figura 9: Interfaces  $M_\varepsilon$  (traços contínuos) de  $u_\varepsilon$  se concentrando no ponto  $P$  ( $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ ).

A nova definição de mínimos locais será adotada para que possamos utilizar algumas estimativas de densidade apresentadas em [5] e com elas, excluir a possibilidade dos mínimos locais  $u_\varepsilon$  convergirem para uma função constante. Além disso, a nova definição de mínimos locais nos permitirá utilizar o resultado de preservação de mínimos locais de Dal Maso e Modica, que não depende da hipótese de  $u_\varepsilon$  ser  $\varepsilon$ -uniforme.

Infelizmente, com a nova definição de mínimos locais, o caso em que o fecho da camada interna de transição do problema limite intersecta a fronteira do domínio não pode ser tratado, pois considerando apenas variações com suporte compacto, se a camada interna intersectar a fronteira do domínio existirão mínimos locais para o funcional área ou perímetro.

Neste capítulo vamos novamente considerar a família de equações dada por (16), mas aqui o potencial  $W_2$  será fixado como  $W(x) = (1 - x^2)^2$ , que obviamente satisfaz (4) e (5). Como no Problema 2, assumiremos a condição (17) sobre o termo de difusibilidade  $a$ . Outra diferença importante é que podemos agora considerar  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  apenas aberto, suave e limitado excluindo a hipótese sobre a convexidade de  $\Omega$ .

**Definição 8.1** *Dado um funcional  $H : L^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  dizemos que  $u \in L^1(\Omega)$  é um mínimo local de  $H$  se para todo subconjunto relativamente compacto  $U \Subset \Omega$  e para toda  $w \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que  $\text{supp}(w) \subset U$  vale a desigualdade*

$$H(u) \leq H(u + w).$$

## 8.1 Resultado principal do Problema 4

Seja  $H_\varepsilon : L^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $\varepsilon > 0$ , uma família de funcionais dada pela expressão

$$H_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} a^2(x) |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) & u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & u \in L^1(\Omega) \setminus H^1(\Omega) \end{cases}$$

sendo  $W(x) = (1 - x^2)^2$  e  $a \in C^2(\bar{\Omega})$  satisfazendo (17).

**Teorema 8.2** *Se considerarmos  $H_\varepsilon$  nas hipóteses assumidas acima, então não existe uma família não constante de mínimos locais  $u_\varepsilon$  de  $H_\varepsilon$  tal que  $u_\varepsilon(0) = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , e  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ , sendo  $u_0 = \chi_A - \chi_{(A^c \cap \Omega)}$  e  $A \subset \Omega$  um conjunto não vazio tal que  $\bar{A} \cap \partial\Omega = \emptyset$ . Também não existe uma família não constante de mínimos locais  $u_\varepsilon$  de  $H_\varepsilon$  tal que:*

- $u_\varepsilon(0) = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ;
- $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ , sendo  $u_0 \equiv 1$  ou  $u_0 \equiv -1$ .

**Interpretação:** Se  $u_\varepsilon$  é uma família não constante de mínimos locais dos funcionais  $H_\varepsilon$  tal que  $u_\varepsilon(0) = 0$ , então a curva de transição de camadas, do limite de  $u_\varepsilon$  não pode ser uma curva  $\gamma \subset U \Subset \Omega$ , tampouco as curvas de transição de camadas de  $u_\varepsilon$  podem se concentrar no ponto  $0 \in \Omega$ .

**Observação 8.3** A hipótese  $u_\varepsilon(0) = 0$ ,  $\forall \varepsilon$  assumida em nosso resultado, poderia ser substituída pela seguinte hipótese mais fraca: Dado  $\lambda < 1$ , existe  $r_0 > 0$  e uma família de pontos  $\{x_\varepsilon\}$  tais que  $u_\varepsilon(x_\varepsilon) \in (-\lambda, \lambda)$  e  $B_{r_0}(x_\varepsilon) \Subset \Omega$ ,  $\forall \varepsilon$ .

## 8.2 Estimativas de densidade

**Definição 8.4** Dado um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  mensurável a Lebesgue e um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , definimos a densidade de  $x$  em  $E$  por

$$\text{Dens}(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}$$

sendo  $\mathcal{L}^n$  a medida de Lebesgue  $n$ -dimensional.

**Observação 8.5** A densidade  $\text{Dens}(x, E)$  satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $0 \leq \text{Dens}(x, E) \leq 1$ ;
- ii)  $x \in \mathring{E} \Rightarrow \text{Dens}(x, E) = 1$ ;
- iii)  $x \notin \bar{E} \Rightarrow \text{Dens}(x, E) = 0$ .

**Observação 8.6** No caso de uma função  $u_\varepsilon$  ser um mínimo local do funcional  $H_\varepsilon$  podemos assumir que  $|u_\varepsilon| \leq 1$ . Para provar este fato, basta definir funções  $\tilde{u}_\varepsilon$  como na demonstração do Teorema 3.4, e observar que se  $u_\varepsilon$  é um mínimo local de  $H_\varepsilon$  então  $\tilde{u}_\varepsilon$  também é.

**Observação 8.7** Dada uma função  $u \in H^1(\Omega)$ , se considerarmos  $a^*(x) = a(\varepsilon x)$  e  $u^*(x) = u(\varepsilon x)$ ;  $x \in \frac{1}{\varepsilon}\Omega$  temos que

$$H_\varepsilon(u) = \varepsilon^{n-1} \int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \left[ \frac{(a^*)^2}{2} |\nabla u^*|^2 + W(u^*) \right] dx.$$

**Teorema 8.8** Sejam  $\lambda \in (-1, 1)$  e  $u \in L^1(\Omega)$  um mínimo local do funcional

$$H(u) = \int_{B_R} \left[ \frac{a^2}{2} |\nabla u|^2 + W(u) \right] dx.$$

Suponhamos que  $a \in C^2(\bar{\Omega})$  satisfaz (17),  $W(x) = (1 - x^2)^2$  e existe  $\rho_0 > 0$  satisfazendo

$$\mu(B(0, \rho_0) \cap \{u > \lambda\}) > 0.$$

Então existem  $C > 0$  e  $\rho_1$  tal que

$$\mu(B(0, \rho) \cap \{u > \lambda\}) \geq C\rho^n, \forall \rho \geq \rho_1.$$

**Demonstração:** Veja Seção 8.3.

**Corolário 8.9 (Estimativas de densidade)** *Considerando as hipóteses do Teorema 8.8 e  $u_\varepsilon$  um mínimo local do funcional  $H_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , temos que*

$$\mu(B(0, \rho\varepsilon) \cap \{u_\varepsilon(y) > \lambda\}) \geq C\rho^n\varepsilon^n, \forall \rho > \rho_1.$$

**Demonstração:** Segue da Observação 8.7 que  $u_\varepsilon^*$  é um mínimo local do funcional

$$H_\varepsilon^*(u) = \int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} \left[ \frac{(a^*)^2}{2} |\nabla u^*|^2 + W(u^*) \right] dx.$$

Utilizando então o Teorema 8.8 temos que

$$\mu(\{x \in \frac{1}{\varepsilon}\Omega \cap B(0, \rho) \cap \{u_\varepsilon^*(x) > \lambda\}\}) \geq C\rho^n, \forall \rho > \rho_1.$$

Realizando a mudança de coordenadas  $y = \varepsilon x$ ,  $x \in \frac{1}{\varepsilon}\Omega$  obtemos

$$\mu(\{x \in \frac{1}{\varepsilon}\Omega \cap B(0, \rho) \cap \{u_\varepsilon(\varepsilon x) > \lambda\}\}) = \frac{1}{\varepsilon^n} \mu(\{y \in \Omega \cap B(0, \rho\varepsilon) \cap \{u_\varepsilon(y) > \lambda\}\})$$

e conseqüentemente,

$$\mu(\{y \in \Omega \cap B(0, \rho\varepsilon) \cap \{u_\varepsilon(y) > \lambda\}\}) \geq C\rho^n\varepsilon^n, \forall \rho > \rho_1. \blacksquare$$

### 8.3 Demonstração do Teorema 8.8

O Teorema 8.8 foi apresentado no artigo [5], considerando a função difusibilidade  $a$  constante. Optamos aqui por fazer a demonstração do resultado pois existem algumas diferenças, entre o nosso caso (difusibilidade não constante) e o caso considerado em [5]. A versão original do resultado é apresentada de forma bastante concisa, e o detalhamento da mesma é algo bastante técnico, necessitando de vários resultados auxiliares. Durante o processo de demonstração do resultado encontramos os artigos [12] e [33], que também

utilizaram e detalharam o resultado apresentado em [5]. Utilizamos então alguns resultados presentes nestes artigos (Lemas 8.10, 8.12 e 8.13) para finalizar nossa demonstração.

Vejam primeiramente alguns resultados técnicos que serão necessários para a demonstração do Teorema 8.8

**Lema 8.10** *Sejam  $L > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Então*

$$\sum_{j=1}^k e^{-L(k+1-j)} \leq \frac{e^{-L}}{1 - e^{-L}}.$$

**Demonstração:** Utilizaremos o Princípio da Indução Matemática. Note que a afirmação é verdadeira para  $k = 1$ , pois  $1 - e^{-L} < 1$ , e conseqüentemente

$$e^{-L} \leq \frac{e^{-L}}{1 - e^{-L}}.$$

Suponhamos por hipótese de indução que

$$\sum_{j=1}^p e^{-L(p+1-j)} \leq \frac{e^{-L}}{1 - e^{-L}}.$$

Segue da hipótese de indução que

$$\sum_{j=1}^{p+1} e^{-L(p+1+1-j)} = e^{-L} + e^{-L} \sum_{j=1}^p e^{-L(p+1-j)} \leq e^{-L} + \frac{e^{-2L}}{1 - e^{-L}} = \frac{e^{-L}}{1 - e^{-L}}. \blacksquare$$

**Observação 8.11** *Dados  $\tilde{C} > 0$  e  $\Theta > 0$ , definimos*

$$\gamma(T) := \frac{1}{\alpha} \left( \frac{4(\tilde{C})^2 T e^{-\Theta T}}{1 - e^{-\Theta T}} \right)^{\frac{n}{n-1}}, T > 0. \quad (49)$$

sendo  $\alpha \in (0, 1)$  tal que

$$\frac{\alpha^{\frac{n-1}{n}}}{1 - \alpha} = \frac{1}{2(\tilde{C})^{\frac{1}{n}}}. \quad (50)$$

Então existe  $T_1$  suficientemente grande tal que

$$\gamma(T) \leq \min \left\{ \frac{1}{\tilde{C} T^n}, \alpha^{n-1} \left( \frac{I_0}{2\tilde{C} T} \right)^n \right\}, \forall T \geq T_1. \quad (51)$$

sendo

$$I_0 := \inf_{x \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(x+1)^n - x^n} > 0. \quad (52)$$

Observe que  $I_0 > 0$  pois a função  $f(x) = \frac{x^{n-1}}{(x+1)^n - x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é não decrescente em  $[1, +\infty)$  e  $f(1) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$ .

**Lema 8.12** *Dados  $\tilde{C} > 0$  e  $\Theta > 0$ , consideremos  $\gamma(T)$  e  $T_1$  dados pela Observação 8.11. Se  $a_k$  é uma sequência de números reais não negativos tal que*

$$a_1 \geq \frac{1}{\tilde{C}}, \quad (53)$$

$$a_k \leq \tilde{C}T^n k^{n-1}, \forall k \geq 1, \forall T \geq T_1 \quad (54)$$

e

$$\left( \sum_{j=1}^k a_j \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \tilde{C} \sum_{j=1}^{k+1} a_j e^{-\Theta T(k+1-j)}, \forall k \geq 1, \forall T \geq T_1. \quad (55)$$

Então,

$$\sum_{j=1}^k a_j \geq [\gamma(T)]T^n k^n, \forall k \geq 1, \forall T \geq T_1. \quad (56)$$

**Demonstração:** Procederemos por indução. Considerando o caso  $k = 1$  temos de (53) e (51) que

$$a_1 \geq \frac{1}{\tilde{C}} \geq [\gamma(T)]T^n, \forall T \geq T_1.$$

Suponhamos por hipótese de indução que

$$\sum_{j=1}^p a_j \geq [\gamma(T)]T^n p^n, \forall T \geq T_1.$$

Provemos então o caso  $k = p + 1$ . Segue da hipótese de indução que para  $T > T_1$  vale

$$\sum_{j=1}^p a_j \geq \alpha[\gamma(T)]T^n p^n$$

e conseqüentemente,

$$\left( \sum_{j=1}^p a_j \right)^{\frac{n-1}{n}} \geq (\alpha[\gamma(T)])^{\frac{n-1}{n}} T^{n-1} p^{n-1}, \forall T > T_1. \quad (57)$$

Temos de (54), (49) e do Lema 8.10 que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p+1} a_j e^{-\Theta T(p+1-j)} &\leq a_{p+1} + \tilde{C} T^n \sum_{j=1}^p j^{n-1} e^{-\Theta T(p+1-j)} \\
&\leq a_{p+1} + \tilde{C} T^n p^{n-1} \sum_{j=1}^p e^{-\Theta T(p+1-j)} \\
&\leq a_{p+1} + \tilde{C} T^n p^{n-1} \frac{e^{-\Theta T}}{1 - e^{-\Theta T}} \\
&= a_{p+1} + \frac{(\alpha[\gamma(T)])^{\frac{n-1}{n}}}{4\tilde{C}} T^{n-1} p^{n-1}.
\end{aligned}$$

Segue da estimativa acima e das desigualdades (55) e (57) temos que

$$\begin{aligned}
a_{p+1} &\geq \sum_{j=1}^{p+1} a_j e^{-\Theta T(p+1-j)} - \frac{(\alpha[\gamma(T)])^{\frac{n-1}{n}}}{4\tilde{C}} T^{n-1} p^{n-1} \\
&\geq \frac{1}{\tilde{C}} \left( \sum_{j=1}^p a_j \right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{(\alpha[\gamma(T)])^{\frac{n-1}{n}}}{4\tilde{C}} T^{n-1} p^{n-1} \quad (58) \\
&\geq \frac{(\alpha[\gamma(T)])^{\frac{n-1}{n}}}{2\tilde{C}} T^{n-1} p^{n-1}.
\end{aligned}$$

Segue de (52) e (51) que

$$[\gamma(T)]^{-\frac{1}{n}} \geq \frac{2\tilde{C}T[(p+1)^n - p^n]}{\alpha^{\frac{n-1}{n}} p^{n-1}}.$$

Utilizando a desigualdade acima juntamente com a hipótese de indução e a desigualdade (58) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p+1} a_j &= a_{p+1} + \sum_{j=1}^p a_j \\
&\geq [\gamma(T)] T^n p^n + \frac{(\alpha[\gamma(T)])^{\frac{n-1}{n}}}{2\tilde{C}} T^{n-1} p^{n-1} \\
&\geq [\gamma(T)] T^n (p+1)^n, \forall T > T_1.
\end{aligned}$$

■

**Lema 8.13** *Dados  $0 < \Theta < 1$  e  $k \in \mathbb{N}$ , existem  $T > 0$  e uma função  $h = h_{\Theta, k} \in C^2(B_{(k+1)T})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tais que*

*i)  $|h| \leq 1$ ;*

ii)  $h(x) = 1, \forall x \in \partial B_{(k+1)T}$ ;

iii) Existe  $C_1 > 0$  tal que

$$(h+1) + |\nabla h| + |\Delta h| \leq C_1(h+1) \leq 2C_1 e^{-\Theta T(k+1-j)}$$

em  $B_{jT} \setminus B_{(j-1)T}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k+1$ ;

iv)  $|\nabla h| + |\Delta h| \leq C_1 \Theta(h+1)$  em  $B_{(k+1)T}$ ;

v) Fixado  $h^* \in (-1, 0)$  próximo de  $-1$ , se  $h(x) \in [-1, h^*]$  então existe  $0 < \Theta_0 < 1$  tal que  $|\nabla h| + |\Delta h| \leq \sqrt{\Theta}[4h(h^2 - 1)]$ ,  $\forall 0 < \Theta < \Theta_0$ .

**Demonstração:** Sejam  $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Psi : [1, (k+1)T] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções definidas por

$$\Phi(\rho) = -1 + 2e^{\Theta[\frac{3}{8}\rho^6 - \frac{10}{8}\rho^4 + \frac{15}{8}\rho^2 - (k+1)T]}$$

e

$$\Psi(\rho) = -1 + 2e^{\Theta[\rho - (k+1)T]}$$

sendo  $T > 0$  a ser escolhido posteriormente.

Temos:

$$\Phi(1) = \Psi(1), \quad \Phi'(1) = \Psi'(1) \quad \text{e} \quad \Phi''(1) = \Psi''(1).$$

Logo, a função  $h_0 : [0, (k+1)T] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h_0(\rho) = \begin{cases} \Phi(\rho), & \rho \in [0, 1] \\ \Psi(\rho), & \rho \in [1, (k+1)T] \end{cases}$$

é de classe  $C^2$  em  $[0, (k+1)T]$ . Definimos então  $h : B_{(k+1)T} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(x) = h_0(|x|).$$

Segue diretamente da definição de  $\Phi$  e  $\Psi$  que  $h$  satisfaz i) e ii).

Além disso, existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |\Phi'(\rho)| &\leq C_2 \rho \Theta [\Phi(\rho) + 1], \quad \forall \rho \in [0, 1], \\ |\Phi''(\rho)| &\leq C_2 \Theta [\Phi(\rho) + 1], \quad \forall \rho \in [0, 1] \end{aligned} \tag{59}$$

e

$$|\Psi'(\rho)| + |\Psi''(\rho)| \leq C_2 \Theta[\Psi(\rho) + 1], \quad \forall \rho \in [1, (k+1)T]. \quad (60)$$

Podemos sem perda de generalidade supor que

$$C_2 > \max\left\{\frac{3}{8}\rho^6 - \frac{10}{8}\rho^4 + \frac{15}{8}\rho^2; \rho \in [0, 1]\right\}.$$

Temos então que em  $B_{(k+1)T}$  vale a desigualdade

$$h + 1 + |\nabla h| + |\Delta h| \leq h_0 + 1 + \left(1 + \frac{n-1}{|x|}\right) |h_0'| + |h_0''|. \quad (61)$$

Na bola  $B_1$  temos de (59) que

$$h + 1 + |\nabla h| + |\Delta h| \leq [1 + (n+1)C_2]\Theta(h+1) \leq [1 + (n+1)C_2]2e^{\Theta[C_2 - (k+1)T]}$$

e supondo  $T$  suficientemente grande podemos admitir que em  $B_1$  vale

$$h + 1 + |\nabla h| + |\Delta h| \leq [1 + (n+1)C_2]\Theta(h+1) \leq [1 + (n+1)C_2]2e^{-\Theta kT}.$$

No anel  $B_{jT} \setminus B_1$  temos de (60) que

$$h + 1 + |\nabla h| + |\Delta h| \leq [1 + nC_2]\Theta(h+1) \leq [1 + nC_2]2e^{-\Theta(k+1-j)T}.$$

Logo, tomando  $C_1 = 1 + (n+1)C_2$  ficam provadas as afirmações iii) e iv).

Para provar o item v) basta utilizar iv) e tomar  $\Theta_0 = \left(\frac{4h^*(h^*-1)}{C_1}\right)^2$ . ■

**Lema 8.14** *Se o Teorema 8.8 for válido para algum  $\lambda^* \in (-1, 1)$  então ele será válido para todo  $\lambda \in [\lambda^*, 1)$ .*

**Demonstração:** Veja [5].

## Demonstração do Teorema 8.8

Devido ao Lema 8.14, para demonstrarmos o Teorema 8.8, basta considerarmos o caso  $\lambda$  próximo de  $-1$ .

Seja  $-1 < \lambda < 0$  próximo de  $-1$ . Tomemos  $h$ ,  $C_1$  e  $\Theta_0$  definidos pelo Lema 8.13 e consideremos

$$\lambda' = \lambda - 3C_1 e^{-\Theta T}.$$

Tomando  $T$  suficientemente grande temos

$$\lambda' > -1. \quad (62)$$

Por outro lado, tomando o mínimo local  $u$  de  $H$  dado na hipótese do teorema e definindo  $\sigma = \min\{u, h\}$  e  $\beta = \min\{u - \sigma, 1 + \lambda'\}$ , tem-se também para  $T$  suficientemente grande que

$$\beta \geq 0. \quad (63)$$

Note que se  $u - \sigma > 1 + \lambda'$  então  $\beta = 1 + \lambda'$ , e conseqüentemente,  $|\nabla\beta| = 0$ . Segue deste fato, da Desigualdade de Sobolev 1.13 e da Desigualdade de Cauchy que

$$\begin{aligned} \left[ \int_{B_{(k+1)T}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} &\leq C_3 \int_{B_{(k+1)T}} |\nabla(\beta^2)| = 2C_3 \int_{B_{(k+1)T}} |\beta| |\nabla\beta| \\ &= 2C_3 \int_{B_{(k+1)T} \cap \{u - \sigma \leq 1 + \lambda'\}} |\beta| |\nabla\beta| \\ &\leq C_3 \int_{B_{(k+1)T} \cap \{u - \sigma \leq 1 + \lambda'\}} \frac{1}{A} |\beta|^2 + A |\nabla\beta|^2 \end{aligned} \quad (64)$$

sendo  $C_3 > 0$  a constante de Sobolev e  $A > 0$  a ser escolhido posteriormente.

Segue da definição de  $\beta$  e da hipótese  $m = \inf\{a(x)\} > 0$  que

$$\begin{aligned}
C_3 A \int_{B_{(k+1)T} \cap \{u-\sigma \leq 1+\lambda'\}} |\nabla \beta|^2 &= C_3 A \int_{B_{(k+1)T} \cap \{u-\sigma \leq 1+\lambda'\}} |\nabla(u-\sigma)|^2 \\
&\leq C_3 A \int_{B_{(k+1)T}} |\nabla(u-\sigma)|^2 \\
&\leq \frac{C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a^2 |\nabla(u-\sigma)|^2 \\
&= \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} \frac{a^2}{2} (|\nabla u|^2 + |\nabla \sigma|^2) \\
&\quad - \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a^2 \nabla u \cdot \nabla \sigma \\
&= \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} \frac{a^2}{2} (|\nabla u|^2 - |\nabla \sigma|^2) \\
&\quad + \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a^2 \nabla(\sigma - u) \cdot \nabla \sigma
\end{aligned} \tag{65}$$

Sabemos que  $u = \sigma$  em  $\partial B_{(k+1)T}$ . Logo, segue do fato de  $u$  ser mínimo local de  $H$  que

$$\frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} \frac{a^2}{2} (|\nabla u|^2 - |\nabla \sigma|^2) \leq \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} [W(\sigma) - W(u)]$$

e do Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned}
\frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a^2 \nabla(\sigma - u) \cdot \nabla \sigma &\leq \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a^2 (u - \sigma) \Delta \sigma \\
&\quad + \frac{4C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a (u - \sigma) \nabla a \nabla \sigma.
\end{aligned}$$

Substituindo em (65) temos

$$\begin{aligned}
C_3 A \int_{B_{(k+1)T} \cap \{u-\sigma \leq 1+\lambda'\}} |\nabla \beta|^2 &\leq \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} [W(\sigma) - W(u)] \\
&\quad + \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a^2 (u - \sigma) \Delta \sigma \\
&\quad + \frac{4C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a (u - \sigma) \nabla a \nabla \sigma.
\end{aligned} \tag{66}$$

Segue de (64) e (66) que

$$\begin{aligned}
\left[ \int_{B_{(k+1)T}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} &\leq \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} [W(\sigma) - W(u)] \\
&+ \frac{2C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a^2(u - \sigma) \Delta \sigma \\
&+ \frac{4C_3 A}{m^2} \int_{B_{(k+1)T}} a(u - \sigma) \nabla a \nabla \sigma \\
&+ \frac{C_3}{A} \int_{B_{(k+1)T} \cap \{u - \sigma \leq 1 + \lambda'\}} |u - \sigma|^2.
\end{aligned} \tag{67}$$

Note que:

$$B_{kT} \cap \{0 < u - \sigma \leq 1 + \lambda'\} \subset B_{kT} \cap \{h < u < \lambda\}. \tag{68}$$

De fato: Se  $u(x) - \sigma(x) > 0$  então  $\sigma(x) = h(x)$  e conseqüentemente,

$$h(x) < u(x).$$

Daí, se  $0 < u - \sigma \leq 1 + \lambda'$ , então

$$u(x) - \sigma(x) = u(x) - h(x) \leq 1 + \lambda' = 1 + \lambda - 3C_1 e^{-\Theta T}.$$

Temos então  $u(x) \leq h(x) + 1 + \lambda - 3C_1 e^{-\Theta T}$  e utilizando o Lema 8.13 item iii) temos

$$u(x) < h(x) + 1 + \lambda - 3C_1 e^{-\Theta T} \leq \lambda + 2C_1 e^{-\Theta T} - 3C_1 e^{-\Theta T} \leq \lambda.$$

Assim fica provada (68).

Segue de (67) e (68) que

$$\begin{aligned}
\left[ \int_{B_{(k+1)T}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} &\leq \frac{2C_3}{m^2} A \int_{B_{(k+1)T}} [W(\sigma) - W(u)] \\
&+ \frac{2C_3}{m^2} A \int_{B_{(k+1)T}} [a^2(u - \sigma) \Delta \sigma] \\
&+ \frac{4C_3}{m^2} A \int_{B_{(k+1)T}} [a(u - \sigma) \nabla a \nabla \sigma] \\
&+ \frac{C_3}{A} \int_{B_{kT} \cap \{h < u < \lambda\}} |u - \sigma|^2 \\
&+ \frac{C_3}{A} \int_{(B_{(k+1)T} \setminus B_{kT}) \cap \{u - \sigma \leq 1 + \lambda'\}} |u - \sigma|^2,
\end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\left[ \int_{B_{(k+1)T}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} &\leq \frac{2C_3}{m^2} A \int_{B_{(k+1)T}} [W(\sigma) - W(u)] \\
&+ \frac{2C_3}{m^2} A \int_{B_{(k+1)T}} [a^2(u - \sigma)\Delta\sigma] \\
&+ \frac{4C_3}{m^2} A \int_{B_{(k+1)T}} [a(u - \sigma)\nabla a\nabla\sigma] \\
&+ \frac{C_3}{A} \int_{B_{(k+1)T} \cap \{h < u < \lambda\}} |u - \sigma|^2 \\
&+ \frac{C_3}{A} \int_{(B_{(k+1)T} \setminus B_{kT}) \cap \{u - \sigma \leq 1 + \lambda'\} \cap \{u > \lambda\}} |u - \sigma|^2.
\end{aligned} \tag{69}$$

Vamos explorar o lado esquerdo da desigualdade (69). Seja  $\lambda_0 < 1$  tal que  $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$  e assumimos  $T$  suficientemente grande para que

$$C_1 e^{-\Theta T} < \frac{1 - \lambda_0}{4}. \tag{70}$$

Logo, utilizando o item iii) do Lema 8.13 temos que em  $B_{kT} \cap \{u > \lambda\}$  vale a desigualdade

$$u - \sigma \geq \lambda - h = \lambda + 1 - (h + 1) \geq \lambda_0 + 1 - 2C_1 e^{-\Theta T} \geq \frac{1 - \lambda_0}{2}.$$

Por outro lado,

$$1 + \lambda' = \lambda + 1 - 2C_1 e^{-\Theta T} \geq \lambda_0 + 1 - 2C_2 e^{-\Theta T} \geq \frac{1 - \lambda_0}{2}.$$

E portanto

$$\beta = \min\{u - \sigma, 1 + \lambda'\} > \frac{1 - \lambda_0}{2} \text{ em } B_{kT} \cap \{u > \lambda\}. \tag{71}$$

Definindo

$$a_j = \mu(\{x \in B_{jT} \setminus B_{(j-1)T} \text{ e } u(x) > \lambda\}) \tag{72}$$

e utilizando (69) e (71) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - \lambda_0)^2}{4} \left( \sum_{j=1}^k a_j \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left( \int_{B_{kT} \cap \{u > \lambda\}} \frac{(1 - \lambda_0)^{\frac{2n}{n-1}}}{4} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\leq \left( \int_{B_{kT} \cap \{u > \lambda\}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\leq \left( \int_{B_{(k+1)T}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Voltemos agora nossa atenção para o lado direito de (69). Observe inicialmente que se  $u \leq h$  então  $u - \sigma = 0$ . Logo, na região onde isto acontece, o lado direito de (69) é nulo.

Consideremos então o caso  $u > h$ , isto é,  $\sigma = h$ . Inicialmente mostraremos que no conjunto

$$\bar{B} := B_{(k+1)T} \cap \{h < u \leq \lambda\},$$

a contribuição do lado direito de (69) também é negativa, lembrando que  $\lambda$  está próximo de  $-1$ , e conseqüentemente  $u$  e  $h$  também.

Inicialmente temos que

$$W(u) - W(h) = \int_h^u W'(s) ds = \int_h^u -4s(1-s)(1+s) ds \geq 2 \int_h^u (s+1) ds \text{ em } \bar{B}$$

pois a função  $g(x) = -4x(1-x)$  é decrescente em  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  e  $g(-\frac{1}{2}) \geq 2$ . Logo, temos que

$$W(u) - W(h) \geq (u+1)^2 - (h+1)^2 \geq \frac{1}{2}(u-h)^2 \text{ em } \bar{B}. \tag{74}$$

Portanto,

$$\frac{2C_3A}{m^2} \int_{\bar{B}} [W(h) - W(u)] + \frac{C_3}{A} \int_{\bar{B}} |u - \sigma|^2 \leq \left( \frac{C_3A}{m^2} - 2\frac{C_3}{A} \right) \int_{\bar{B}} [W(h) - W(u)]. \tag{75}$$

Por outro lado, segue do item v) do Lema 8.13 segue que

$$\Delta h \leq \sqrt{\Theta} W'(h) \text{ em } \bar{B}, \forall 0 < \Theta < \Theta_0 \tag{76}$$

e

$$|\nabla h| \leq \sqrt{\Theta} W'(h) \text{ em } \bar{B}, \forall 0 < \Theta < \Theta_0. \quad (77)$$

Como  $a \in C^1(\bar{\Omega})$  podemos considerar  $M_1 = \max\{a(x), x \in \bar{\Omega}\} > 0$  e  $M_2 = \max\{|\nabla a(x)|, x \in \bar{\Omega}\}$ . Temos então de (76) e (77) a estimativa

$$\int_{\bar{B}} [a^2(u-h)\Delta h + 2a(u-h)\nabla a \nabla h] \leq [(M_1)^2 + 2M_1M_2]\sqrt{\Theta} \int_{\bar{B}} W'(h)(u-h), \quad (78)$$

válida para  $0 < \Theta < \Theta_0$ .

Segue do Teorema de Valor Médio que para cada  $x$  no conjunto  $\bar{B}$  existe um número  $c = c(x)$  tal que  $h < c < u < \lambda$  e

$$W(u) - W(h) = W'(c)(u-h).$$

Utilizando a igualdade acima e o fato de  $F'$  ser crescente em  $[-1, \lambda]$  temos que

$$W(u) - W(h) \geq W'(h)(u-h) \text{ em } \bar{B}.$$

Substituindo isto em (78) temos

$$\frac{2C_3A}{m^2} \int_{\bar{B}} [a^2(u-h)\Delta h + 2a(u-h)\nabla a \nabla h] \leq C_4 \frac{2C_3A}{m^2} \sqrt{\Theta} \int_{\bar{B}} W(u) - W(h) \quad (79)$$

sendo  $C_4 = [(M_1)^2 + 2M_1M_2] > 0$ .

Somando as desigualdades (75) e (79) temos

$$\begin{aligned} \frac{C_3A}{m^2} \left(1 - \frac{2m^2}{A^2} - 2C_4\sqrt{\Theta}\right) \int_{\bar{B}} [W(h) - W(u)] &\geq \frac{2C_3A}{m^2} \int_{\bar{B}} [W(h) - W(u)] \\ &+ \frac{C_3}{A} \int_{\bar{B}} |u - \sigma|^2 \\ &+ \frac{2C_3A}{m^2} \int_{\bar{B}} [a^2(u-h)\Delta h] \\ &+ \frac{4C_3A}{m^2} \int_{\bar{B}} [a(u-h)\nabla a \nabla h]. \end{aligned} \quad (80)$$

Escolhendo agora  $A$  suficientemente grande e  $\Theta$  suficientemente pequeno podemos tornar lado esquerdo da desigualdade acima não positivo, pois

$F(h) \leq F(u)$  em  $\bar{B}$ . Fixados então  $A$  e  $\Theta$  podemos reescrever (69) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{B_{(k+1)T}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} &\leq \frac{2C_3}{m^2} A \int_{\hat{B}} [W(h) - W(u)] \\ &+ \frac{2C_3}{m^2} A \int_{\hat{B}} [a^2(u-h)\Delta h] \\ &+ \frac{4C_3}{m^2} A \int_{\hat{B}} [a(u-h)\nabla a \nabla h] \\ &+ \frac{C_3}{A} \int_{B^*} |u-h|^2 \end{aligned} \quad (81)$$

sendo

$$\hat{B} := B_{(k+1)T} \cap \{u > \max\{\lambda, h\}\}$$

e

$$B^* := (B_{(k+1)T} \setminus B_{kT}) \cap \{u > \max\{\lambda, h\}\}.$$

Vamos olhar agora para o lado direito de (81). Utilizando novamente o Teorema do Valor Médio temos que existe  $c \in [-1, h]$  tal que

$$W(h) - W(u) \leq W(h) = W(h) - W(-1) \leq W'(c)(h+1) \text{ em } \hat{B}.$$

Logo, se tomarmos  $C_5 = \max\{W'(x); x \in [-1, 1]\}$  temos

$$W(h) - W(u) \leq C_5(h+1) \text{ em } \hat{B}.$$

Segue desta desigualdade e do item iii) do Lema 8.13 que dado  $j \in \{0, 1, \dots, k+1\}$

$$W(h) - W(u) \leq C_5(h+1) \leq 2C_5 e^{-\Theta T(k+1-j)} \text{ em } B_{jT} \setminus B_{(j-1)T}$$

e portanto

$$\frac{2C_3 A}{m^2} \int_{\hat{B}} [W(h) - W(u)] \leq \frac{4C_3 C_5 A}{m^2} \sum_{j=1}^{k+1} a_j e^{-\Theta T(k+1-j)}. \quad (82)$$

Também da parte iii) do Lema 8.13 podemos concluir de modo similar ao que foi feito para encontrar a desigualdade (79) que

$$\frac{2C_3 A}{m^2} \int_{\hat{B}} [a^2(u-h)\Delta h + 2a(u-h)\nabla a \nabla h] \leq C_4 \frac{2C_3 A}{m^2} \sum_{j=1}^{k+1} a_j e^{-\Theta T(k+1-j)}. \quad (83)$$

Como  $|u| \leq 1$  e  $|h| \leq 1$  temos  $|u - h|^2 \leq 2$  e conseqüentemente,

$$\frac{C_3}{A} \int_{B^*} |u - h|^2 \leq \frac{4C_3}{A} a_{k+1}. \quad (84)$$

Se considerarmos  $C_6 = \left( \frac{4C_3C_5A}{m^2} + C_4 \frac{2C_3A}{m^2} + \frac{4C_3}{A} \right)$  temos de (81), (82), (83) e (84) que

$$\left[ \int_{B_{(k+1)T}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \leq C_6 \sum_{j=1}^{k+1} a_j e^{-\Theta T(k+1-j)}.$$

Se utilizarmos a desigualdade (73) juntamente com a desigualdade acima temos

$$\left( \sum_{j=1}^k a_j \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{4C_6}{(1-\lambda_0)^2} \sum_{j=1}^{k+1} a_j e^{-\Theta T(k+1-j)} \quad (85)$$

Consideramos agora  $T_0$  suficientemente grande para que quando considerarmos  $T > T_0$  valham as estimativas (51), (62), (63), (70), e o Lema 8.13. Podemos exigir ainda que  $T_0 > \rho_0$ . Assim, considerando  $T > T_0$  temos

$$a_1 := \mu(B_T \cap \{u > \lambda\}) \geq \mu(B_{\rho_0} \cap \{u > \lambda\}). \quad (86)$$

Considerando o volumes das bolas  $B_{(k+1)T}$  e  $B_{kT}$  temos que existe  $C_7 > 0$  tal que

$$a_k \leq \mu(B_{(k+1)T} \setminus B_{kT}) \leq C_7 T^n k^{n-1}. \quad (87)$$

Se considerarmos  $T_0$  acima,  $\Theta$  encontrado em (81) e definirmos

$$\tilde{C} = \max \left\{ \frac{4C_6}{(1-\lambda_0)^2}, C_7, \frac{1}{\mu(B_{\rho_0} \cap \{u > \lambda\})} \right\}$$

temos de (85), (86) e (87) que a seqüência  $a_k$  definida por (72) satisfaz as hipóteses do Lema 8.12.

Conseqüentemente,

$$\mu(B_{kT} \cap \{u > \lambda\}) = \sum_{j=1}^k a_j \geq [\gamma(T)] T^n k^n, \forall k \geq 1, \forall T \geq T_2 := \max\{T_0, T_1\}.$$

Daí temos

$$\mu(B_{kT} \cap \{u > \lambda\}) \geq [\gamma(T)] T^n k^n, \forall k \geq 1, \forall T \in [T_2, 2T_2].$$

Considerando  $C = \min\{\gamma(T), T \in [T_2, 2T_2]\}$  temos

$$\mu(B_{kT} \cap \{u > \lambda\}) \geq CT^n k^n, \forall k \geq 1, \forall T \in [T_2, 2T_2].$$

Finalmente, tomando  $\rho_1 = T_2$ , podemos concluir que

$$\mu(B_\rho \cap \{u > \lambda\}) \geq C\rho^n, \forall \rho \geq \rho_1.$$

■

## 8.4 Demonstração do Teorema 8.2

Inicialmente apresentaremos alguns resultados que posteriormente serão utilizados na demonstração do Teorema 8.2

**Teorema 8.15** *Consideremos o funcional*

$$F(u, \Omega) = \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx$$

sendo  $\Omega$  um conjunto aberto, suave e limitado e  $f$  uma função contínua tal que

$$|p|^m - b(M) \leq f(x, u, p) \leq a(M)|p|^m + b(M), \forall x \in \Omega, |u| \leq M, p \in \mathbb{R}^n.$$

Se  $u \in W_{loc}^{1,m}(\Omega) \cap L_{loc}^{\infty}(\Omega)$  é um mínimo local do funcional  $f$ , então  $u$  é Hölder-contínua em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Veja Teorema 3.1 em [15].

**Teorema 8.16** *As constantes de Hölder-continuidade encontradas no Teorema 8.15 são uniformes (independem do mínimo local  $u$  escolhido). Ou seja, Se  $u$  e  $F$  estão nas hipóteses do Teorema 8.15 então existem constantes  $M > 0$  e  $0 < \gamma \leq 1$  independentes de  $u$  tais que*

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^{\gamma}.$$

**Demonstração:** Veja Teorema 6.1, Capítulo 2 em [18].

**Teorema 8.17** *Seja  $F$  um funcional que satisfaz as hipóteses do Teorema 8.2. Dado  $\lambda \in (0, 1)$ , se  $u$  é um mínimo local de  $F$  tal que  $|u| \leq 1$  e  $x \in \Omega$  tal que  $u(x) \in (-\lambda, \lambda)$  então para todo  $\delta > 0$  existem constantes positivas  $r_0$  e  $C$  dependendo apenas de  $\lambda$ , de  $\delta$  e de constantes estruturais tais que*

$$\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap \{u > \lambda\}) \geq Cr^n$$

e

$$\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap \{u < -\lambda\}) \geq Cr^n$$

para todo  $r \geq r_0$ , desde que  $B_{r+\delta}(x) \Subset \Omega$ .

**Demonstração:** A demonstração deste resultado pode ser encontrada no artigo [25] (Teorema 1.1). Em linhas gerais, a idéia da demonstração é utilizar os Teoremas 8.15 e 8.16 para provar que dado  $\delta > 0$  existem constantes positivas,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , independentes da função  $u$ , tais que

$$\mu(B(x, \mu_1) \cap \{u > \lambda\}) \geq \mu_2.$$

Desta forma fica provado que as hipóteses do Teorema 8.8 são uniformemente satisfeitas, para todas as funções  $u$  que são mínimos locais do funcional  $F$ , desde que  $B_{r+\delta}(x) \Subset \Omega$ . Assim, pode-se concluir que as constantes  $C$  e  $\rho_1$  encontradas no Teorema 8.8 independem dos mínimos locais.

## Demonstração do Teorema 8.2

Utilizando os Corolários 5.20 e B.7 temos, como nos problemas anteriores, que a família de funções  $u_\varepsilon$  admite uma subsequência  $u_{\varepsilon_k}$  que converge para uma função  $u_0$  constante igual a  $-1$  ou  $1$ . Isso já exclui a possibilidade de  $u_\varepsilon$  desenvolver camada interna de transição de maneira análoga aos resultados anteriores.

Vejamus então que, neste caso,  $u_\varepsilon$  também não pode convergir para as funções contantes  $-1$  ou  $1$ . Realizando uma mudança de coordenadas como

na Observação 8.7 ou no Corolário 8.9 temos que os elementos da família de funções  $u_\varepsilon^*$  são mínimos locais dos funcionais  $H_\varepsilon^*$  definidos por

$$H_{\varepsilon_k}^*(u_{\varepsilon_k}^*) = \int_{\frac{1}{\varepsilon_k}\Omega} \frac{a^*}{2} |\nabla u_{\varepsilon_k}^*|^2 + W(u_{\varepsilon_k}^*).$$

Agora dado  $\lambda > 0$  e considerando a hipótese  $u_{\varepsilon_k}(0) = 0$ ,  $\forall \varepsilon_k$  podemos concluir que existe  $k_0 > 0$  tal que as hipóteses do Teorema 8.17 são satisfeitas para todo  $k \geq k_0$  e conseqüentemente, existem números positivos  $r_0$  e  $C$  tais que

$$\mathcal{L}^n(B_r(0) \cap \{u_{\varepsilon_k}^* > \lambda\}) \geq Cr^n$$

e

$$\mathcal{L}^n(B_r(0) \cap \{u_{\varepsilon_k}^* < -\lambda\}) \geq Cr^n$$

para todo  $r \geq r_0$ .

Agora considerando o Corolário 8.9 temos que

$$\mathcal{L}^n(B_{r\varepsilon_k}(0) \cap \{u_{\varepsilon_k} > \lambda\}) \geq Cr^n \varepsilon_k^n$$

e

$$\mathcal{L}^n(B_{r\varepsilon_k}(0) \cap \{u_{\varepsilon_k} < -\lambda\}) \geq Cr^n \varepsilon_k^n$$

para todo  $r \geq r_0$ .

Em particular, podemos tomar  $r_k = \frac{r_0}{\varepsilon_k}$

$$\mathcal{L}^n(B_{r_0}(0) \cap \{u_{\varepsilon_k} > \lambda\}) \geq Cr_0^n \tag{88}$$

e

$$\mathcal{L}^n(B_{r_0}(0) \cap \{u_{\varepsilon_k} < -\lambda\}) \geq Cr_0^n \tag{89}$$

para todo  $k \geq k_0$ .

Supondo sem perda de generalidade  $u_0 \equiv 1$  e tomando

$$B_k = \{B_{r_0}(0) \cap \{u_\varepsilon < -\lambda\}\}$$

temos de (89) que

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon_k} - u_0| dx \geq \int_{B_k} |u_{\varepsilon_k} + 1| dx \geq \int_{B_k} (1 - u_{\varepsilon_k}) dx \geq (1 + \lambda) \mathcal{L}^n(B_k) \geq (1 + \lambda) Cr_0^n$$

para todo  $k \geq k_0$ , contradizendo  $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_0$  em  $L^1(\Omega)$ .

O caso  $u_0 \equiv -1$  é análogo, mas considerando (88) ao invés de (89). ■

## Apêndice

### A Funções de Variação Limitada (Funções BV)

Apresentamos aqui as definições e alguns resultados básicos sobre as Funções de Variação Limitada. Inicialmente apresentamos alguns resultados em domínios  $n$ -dimensionais e depois as generalizações que fizemos destes resultados para hiperfícies.

#### A.1 Definição e propriedades básicas

**Definição A.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f \in L^1(\Omega)$ . Definimos a variação de  $f$  em  $\Omega$  por*

$$|Df|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f(\operatorname{div} g) dx; g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ e } |g(x)| \leq 1, \forall x \in \Omega \right\}.$$

**Definição A.2** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f \in L^1(\Omega)$ . Dizemos que  $f$  tem variação limitada em  $\Omega$  se  $|Df|(\Omega) < \infty$ . Denotamos por  $BV(\Omega)$  o conjunto das funções em  $L^1(\Omega)$  que tem variação limitada em  $\Omega$ .*

**Definição A.3** *Quando  $f \in BV(\Omega)$  e  $\{f(x); x \in \Omega\} = \{\alpha, \beta\}$  denotamos  $f \in BV(\Omega, \{\alpha, \beta\})$ .*

**Observação A.4** *i) Se  $f \in C^1(\Omega)$  então*

$$|Df|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla f| dx;$$

*ii) Se  $f = \chi_E$  sendo  $E \in \mathbb{R}^n$  um conjunto com fronteira de classe  $C^2$  então*

$$|Df|(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega)$$

*sendo  $\mathcal{H}^k$  a medida de Hausdorff  $k$ -dimensional.*

No caso de  $\Omega$  ser um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$  a observação ii) acima nos diz que a variação da função característica de um conjunto  $E \subset \Omega$  com fronteira de classe  $C^2$  será dada pelo comprimento da curva que descreve a interseção de  $\Omega$  com a fronteira do conjunto  $E$ . Na Figura 10 abaixo o traço contínuo ilustra o traço da curva que descreve tal interseção em duas situações diferentes.

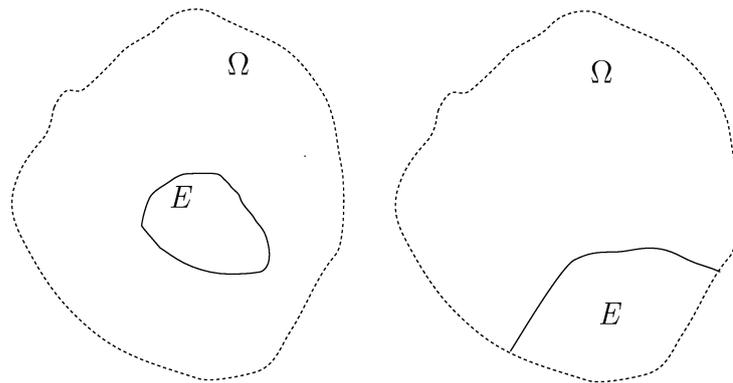


Figura 10: Conjuntos  $\Omega$  e  $E$ .

**Teorema A.5** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $\{f_n\}$  uma sequência de funções em  $BV(\Omega)$  que convergem em  $L^1_{loc}(\Omega)$  para uma função  $f$ . Então*

$$|Df|(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |Df_n|(\Omega).$$

**Demonstração:** Veja Teorema 1.9 em [16].

**Teorema A.6** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto com fronteira suficientemente regular nas hipóteses do Teorema de Rellich. Então  $BV(\Omega)$  é relativamente compacto em  $L^1(\Omega)$ .*

**Demonstração:** Veja Teorema 1.19 em [16].

**Definição A.7** *Seja  $E$  um conjunto de Borel e  $\Omega$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos o perímetro de  $E$  em  $\Omega$  como*

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega).$$

*Se  $P(E, \Omega) < \infty$  dizemos que  $E$  é um conjunto de Caccioppoli.*

**Teorema A.8** *Todo conjunto de Caccioppoli limitado  $E$  pode ser aproximado por uma seqüência  $\{E_n\}$  de conjuntos de classe  $C^\infty$ , tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\chi_{E_n} - \chi_E| dx = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |D\chi_{E_n}| = |D\chi_E|$$

**Demonstração:** Veja Teorema 1.24 em [16].

## A.2 Funções BV em hiperfícies

Apresentamos aqui nossa formulação da Teoria das Funções de Variação Limitada em hiperfícies que é essencial para calcular o  $\Gamma$ -limite da família de funcionais do Problema 1. Nesta seção,  $S$  representa uma hiperfície fechada de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{H}^n$  representa a medida de Hausdorff  $n$ -dimensional.

Dada  $u : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  definimos

$$|Du|(S) := \sup_{g \in G(S)} \int_S u \operatorname{div}(g) d\mathcal{H}^{n-1}$$

sendo

$$G(S) := \{g \in C_0^1(S); |g(x)| \leq 1 \text{ e } g(x) \in T_x S, \forall x \in S\}.$$

**Definição A.9** *Uma função  $u : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  tem variação limitada em  $S$  se*

$$|Du|(S) < \infty$$

e define-se

$$BV(S) := \{u : S \rightarrow \mathbb{R}; u \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1}) \text{ e } |Du|(S) < \infty\}.$$

**Definição A.10** *Dada  $u \in BV(S)$  define-se  $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1(S)} + |Du|(S)$ .*

**Exemplo A.11** *Seja  $A \subset S$  um aberto na topologia induzida em  $S$  e considere a função característica  $\chi_A : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso*

$$|D\chi_A|(S) = \sup_{g \in G(S)} \int_S \chi_A \operatorname{div}(g) d\mathcal{H}^{n-1} = \sup_{g \in G(S)} \int_A \operatorname{div}(g) d\mathcal{H}^{n-1}$$

**Definição A.12** *Define-se o perímetro de um subconjunto  $A \subset S$  em  $S$  por  $\text{Per}_S A := |D\chi_A|(S)$ .*

**Observação A.13** *No caso em que  $A \subset S$  e  $\bar{A}$  é uma subvariedade compacta suave de dimensão  $n - 1$  e classe  $C^2$  com bordo, tem-se que*

$$|D\chi_A|(S) = \mathcal{H}^{n-2}(\partial A \cap S). \quad (90)$$

**Observação A.14** *Quando  $u$  for de classe  $C^2$  vale a igualdade*

$$|Du|(S) = \int_S |\nabla u| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

**Teorema A.15 (Semicontinuidade inferior)** *Sejam  $S$  uma hiperfície de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  uma família de funções do espaço  $BV(S)$  tais que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Então*

$$|Du|(S) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |Du_\varepsilon|(S)$$

**Demonstração:** Sejam  $g \in G(S)$  e  $c > 0$  uma constante tal que  $|\text{div}g| < c$  em  $M$ . Então

$$\left| \int_S [(u - u_\varepsilon) \text{div}(g)] \, d\mathcal{H}^{n-1} \right| \leq \int_S |u - u_\varepsilon| |\text{div}g| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq c \int_S |u - u_\varepsilon| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

e assim

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_S u_\varepsilon \text{div}(g) \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_S u \text{div}(g) \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Além disso,

$$\int_S u_\varepsilon \text{div}(g) \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq |Du_\varepsilon|(S), \quad \forall g \in G(S).$$

Logo

$$\int_S u \text{div}(g) \, d\mathcal{H}^{n-1} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_S u_\varepsilon \text{div}(g) \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |Du_\varepsilon|(S),$$

para toda função  $g \in G(S)$ . Tomando o supremo no lado esquerdo da desigualdade acima segue o resultado. ■

**Teorema A.16 (Compacidade de  $BV(S)$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$ )** *Sejam  $S$  uma hipersfície de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções do espaço  $BV(S)$  tais que*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{BV(S)} < \infty.$$

*Então existem uma subsequência  $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  e uma função  $u \in BV(S)$  tais que  $u_{k_j} \rightarrow u$  em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  quando  $j \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Segue de [20] que existe uma sequência  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $h_k \in C^\infty(S) \cap BV(S)$  e

$$\begin{cases} \int_M |u_k - h_k| \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |Dh_k|(S) < \infty. \end{cases}$$

Como  $h_k \in C^\infty(S)$ , temos que  $|Dh_k|(S) = \int_S |\nabla h_k| d\mathcal{H}^{n-1}$ , ou seja,  $h_k \in H_1^1(S)$ .

Logo, segue do Teorema 1.12 que  $h_k$  possui subsequência  $h_{k_j}$  que converge em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  para uma função  $f \in L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$ . Utilizando o Teorema A.15 tem-se que  $f \in BV(S)$  e da desigualdade  $\|h_{k_j} - u_{k_j}\|_{L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})} < \frac{1}{k_j}$  segue que  $u_{k_j}$  converge em  $L^1(S, \mathcal{H}^{n-1})$  para  $f$ . ■

## B Resultado de Dal Maso e Modica sobre a preservação de minimalidade local no processo de $\Gamma$ -limite

**Definição B.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, definimos por  $\mathcal{A}$  a família dos conjuntos abertos contidos em  $\Omega$  e  $\mathcal{A}_0$  a subfamília de  $\mathcal{A}$  formada pelos conjuntos  $A \in \mathcal{A}$  tais que  $A \Subset \Omega$ .*

**Definição B.2** *Seja  $X(\Omega)$  um espaço vetorial e topológico de funções reais definidas em  $\Omega$ , dizemos que  $F : X(\Omega) \times \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é um funcional local em  $X(\Omega)$  se  $F(u, A) = F(v, A)$  para todo conjunto  $A \in \mathcal{A}$  e para todo par de funções  $u, v \in X(\Omega)$  que são iguais em  $A$ , a menos de um conjunto de medida nula.*

**Definição B.3** *Sejam  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  tais que  $A_1 \Subset A_2$ . Dizemos que  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de conexão entre  $A_1$  e  $A_2$  se*

$$\varphi \in C_0^\infty(A_2), 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ e } \varphi = 1 \text{ em uma vizinhança de } \bar{A}_1.$$

**Definição B.4** *Seja  $\alpha \in [1, +\infty[$  e  $F$  um funcional local não negativo em  $L^\alpha(\Omega)$ . Dizemos que  $F$  satisfaz a propriedade-J se para todo  $\varepsilon > 0$  e para todo  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  tais que  $A_1 \Subset A_2$ , existe  $M > 0$  e um número finito de funções de conexão  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  entre  $A_1$  e  $A_2$  tais que*

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq k} F(\varphi_i u + (1 - \varphi_i)v, A \cup B) &\leq (1 + \varepsilon)[F(u, A') + F(v, B)] \\ &+ \varepsilon[\|u\|_{L^\alpha(A')}^\alpha + \|v\|_{L^\alpha(B)}^\alpha + 1] \\ &+ M\|u - v\|_{L^\alpha(A' \cap B)}^\alpha \end{aligned}$$

*quando  $A, A', B \in \mathcal{A}_0$ ,  $A \Subset A_1 \Subset A_2 \Subset A'$  e  $u, v \in L^\alpha(\Omega)$ . Além disso, se  $\mathcal{F}$  é uma classe de funcionais locais não negativos em  $L^\alpha(\Omega)$ , dizemos que a propriedade-J vale uniformemente em  $\mathcal{F}$  se cada elemento  $F \in \mathcal{F}$  satisfaz a propriedade-J com  $M, k, \varphi_1, \dots, \varphi_k$  dependendo de  $\varepsilon, A_1, A_2$ , mas não de  $F$ .*

**Definição B.5** *Seja  $F$  um funcional local em  $X(\Omega)$ . Dizemos que  $u \in X(\Omega)$  é um mínimo local de  $F$  em  $X(\Omega)$  se*

$$F(u, A) < +\infty$$

$$F(u, A) \leq F(u + \varphi, A)$$

para todo  $A \in \mathcal{A}_0$  e para todo  $\varphi \in X(\Omega)$  tal que  $\text{spt}(\varphi) \subseteq A$ .

**Teorema B.6** *Sejam  $F_h$  e  $G_h$  duas sequências de funcionais locais em  $L^\alpha(\Omega)$ ,  $G_\infty$  outro funcional local em  $L^\alpha(\Omega)$  e suponhamos que:*

- i) Cada  $F_h$  é uma medida não negativa;*
- ii) A propriedade-J vale uniformemente no conjunto  $\{F_h\}$ ;*
- iii) A sequência  $F_h$   $\Gamma^*$ -converge para um funcional local  $F_\infty$ ;*
- iv) Cada funcional local  $G_h$  e também o funcional local  $G_\infty$  são medidas (não necessariamente positivas) com valores em  $\mathbb{R}$ ;*
- v) Dada uma sequência de funções  $v_h$  convergindo para  $v_\infty$  em  $L^\alpha(\Omega)$  e  $A \in \mathcal{A}$ , temos*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} G_h(v_h, A) = G_\infty(v_\infty, A).$$

*Além disso, suponhamos que  $u_h$  é uma sequência em  $L^\alpha(\Omega)$  tal que:*

- vi)  $u_h$  é um mínimo local (no sentido da Definição B.5) de  $F_h + G_h$  em  $L^\alpha(\Omega)$ ,  $h \in \mathbb{N}$ ;*
- vii) A sequência  $u_h$  converge para uma função  $u_\infty$  em  $L^\alpha(\Omega)$ ;*
- viii) Para todo  $A \in \mathcal{A}_0$*

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(u_h, A) < +\infty.$$

*Então  $u_\infty$  é um mínimo local (no sentido da Definição B.5) do funcional  $F_\infty + G_\infty$  em  $L^\alpha(\Omega)$ , e*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} F_h(u_h, A) = F_\infty(u_\infty, A)$$

para todo  $A \in \mathcal{A}_0$  tal que  $\tilde{F}_\infty(u_\infty, \partial A) = 0$ , sendo

$$\tilde{F}(u_\infty, B) = \inf\{F(u, C); C \in \mathcal{A}, B \subset C\}.$$

**Demonstração:** Veja Teorema 5.1 em [9].

**Corolário B.7** *Considere a família de funcionais  $F_\varepsilon$  definida em (16) e  $F_0$  definido em (31). Se existe uma família de mínimos locais  $u_\varepsilon$  dos funcionais  $F_\varepsilon$  (no sentido da Definição 8.1) tal que  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  em  $L^1(\Omega)$  então  $u_0$  é um mínimo local do funcional  $F_0$  (no sentido da Definição 8.1).*

**Demonstração:** Veja pág 215 em [9].

## Referências

- [1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. **Sobolev Spaces**. 2. ed. Netherlands: Elsevier Science Ltd, 2003. 305 p.
- [2] AMBROSIO, L.; DANCER, N. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**. 1. ed. Berlin: Springer-verlag, 2000. 347 p.
- [3] AUBIN, T. **Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1982. 220 p.
- [4] BALL, J. M.; TAHERI, A.; WINTER, M. Local minimizers in micromagnetics and related problems. **Calc. Var. and PDE**, 14 number 1, p. 1-27. 2002.
- [5] CAFFARELLI, L. A.; CÓRDOBA, A. Uniform Convergence of a Singular Perturbation Problem. **Comm. Pure Appl. Math.**, 48, p. 1-12. 1995.
- [6] CASTEN, R. G.; HOLLAND, C. J. Instability Results for Reaction Diffusion Equations with Neumann Boundary Conditions. **J. Diff. Eq.**, 27, p. 266-273. 1978.
- [7] CHIPOT, M.; HALE, J. K. Stable equilibria with variable diffusion. **Comtemp. Math.**, 17, p. 209-213. 1983.
- [8] CREMA, J.; DO NASCIMENTO, A. S. A geometric sufficient condition for existence of stable transition layers for some reaction-diffusion equations. **Matemática Contemporânea**, 27, p. 53-73. 2004.
- [9] DAL MASO, G.; MODICA, L. A General Theory of Variational Functionals. **Topics in Functional Analysis**, Scuola Norm. Sup. Pisa, p. 149-221. 1982.
- [10] DANCER, E. N. Stable and Finite Morse index Solutions on  $\mathbb{R}^n$  or on Bounded Domains with Small Diffusion. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 357, number 3, p. 1225-1243. 2005.

- [11] DO CARMO, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1976. 503 p.
- [12] FARINA, A.; VALDINOCI, E. Geometry of quasiminimal phase transitions. **Calc. Var.**, 33, p. 1-35. 2008.
- [13] FONSECA, I.; TARTAR, L. The gradient theory of phase transitions for systems with two potential wells. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh**, Sect. A 111, p. 89-102. 1989.
- [14] FUSCO, G.; HALE, J. K. Stable equilibria in a scalar parabolic equation with variable diffusion. **SIAM J. Math. Anal.**, 16, Number 6, p. 1152-1164. 1985.
- [15] GIAQUINTA, M.; GIUSTI, E. On the regularity of the minima of variational integrals. **Acta Math.**, 148, 31-46. 1982.
- [16] GIUSTI, E. **Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation**. 1. ed. Boston: Birkhäuser, 1984. 240 p.
- [17] GRAY, A. **Tubes**, 1. ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1990. 280 p.
- [18] LADYZHENSKAYA, O. A.; URAL'TSEVA, N. N. **Linear and Quasilinear Elliptic Equations**, New York: Academic Press Inc., 1968. 495 p.
- [19] MATANO, H. Asymptotic Behavior and Stability of Solutions of Semilinear Diffusion Equations. **Public. RIMS Kyoto Univ.**, 15, p. 401-454. 1979.
- [20] MIRANDA, M.; PALLARA, D.; PARONETTO, F.; PREUNKERT, M. Heat Semigroup and Functions of Bounded Variation on Riemannian Manifolds. **J. Reine Angew. Math.**, 613 p. 99119. 2007.

- [21] DO NASCIMENTO, A. S. Stable Stationary Solutions Induced by Spatial Inhomogeneity Via  $\Gamma$ -Convergence. **J. Bol. Soc. Bras. Mat.**, Vol. 29, N. 1, p. 75-97. 1998.
- [22] DO NASCIMENTO, A. S. On the role of diffusivity in some stable equilibria of a diffusion equation. **J. Diff. Equations**, 155, p. 231-244. 1999.
- [23] NORBURY, J.; YEH, L. Variational problems with singular perturbation. **Nonlinear Analysis**, 66, p. 51-61. 2007.
- [24] OWEN, N. C.; RUBINSTEIN, J.; STERNBERG, P. Minimizers and gradient flows for singularly perturbed bi-stable potentials with a Dirichlet condition. **Proc. R. Soc. Lond.**, A 429, p. 505-532. 1990.
- [25] PETROSYAN, A.; VALDINOCI, E. Density estimates for a Degenerate/Singular Phase-Transition model. **SIAM J. Math. Anal.**, 36, Number 4, p. 1057-1079. 2005.
- [26] RUBINSTEIN, J.; WOLANSKI, G. Instability Results for Reaction Diffusion Equations over Surfaces of Revolutions, **J. Math. Anal. and Applic.**, 187, p. 485-489. 1994.
- [27] SANTOS, C. H. **Sistemas de Reação-Difusão com Estrutura Antigradiente**. 2005. 116 p. Tese (Doutorado em Matemática)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- [28] SIMON, L. Lectures on Geometric Measure Theory. **Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis**, V. 3. Australia. 1984.
- [29] STERNBERG, P. The Effect of a Singular Perturbation on Nonconvex Variational Problems. **Arch. Rational Mech. Analysis**, 101, Number 3, p. 209-260. 1988.

- [30] SWEERS, G. Semilinear Elliptic Problems on Domains with Corners. **Commun. Partial Differential Equations**, 14, Number 8-9, p. 1229-1247. 1989.
- [31] TAHERI, A. Strong versus weak local minimizers for the perturbed Dirichlet functional. **Calc. Var. and PDE**, 15, Number 2, p. 215-235. 2002.
- [32] TONEGAWA, Y. On Stable Critical Points for a Singular Perturbation Problem. **Communications in Analysis and Geometry**, Volume 13, Number 2, p. 439-459. 2005.
- [33] VALDINOCI, E. Plane-like minimizers in periodic media: jet flows and Ginzburg-Landau-type functionals. **J. für die reine und ang. Math.**, 574, p. 147-185. 2004.
- [34] YANAGIDA, E. Stability of stationary distributions in a space-dependent population growth process. **J. Math. Biology**, Volume 15, p. 37-50. 1982.