

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MARCIANO PEREIRA

EFEITO AHARONOV-BOHM: EXTENSÕES
AUTO-ADJUNTAS E ESPALHAMENTO

SÃO CARLOS
2009

**EFEITO AHARONOV-BOHM: EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS E
ESPALHAMENTO**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MARCIANO PEREIRA

EFEITO AHARONOV-BOHM: EXTENSÕES
AUTO-ADJUNTAS E ESPALHAMENTO

Tese apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática
da UFSCar como parte dos requi-
sitos para obtenção do Título de
Doutor em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. César
Rogério de Oliveira

SÃO CARLOS
2009

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

P436ea

Pereira, Marciano.

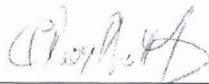
Efeito Aharonov-Bohm : extensões auto-adjuntas e espalhamento / Marciano Pereira. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
93 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Análise funcional. 2. Aharonov-Bohm, Teoria de. 3. Solenóides finitos. 4. Operadores auto-adjuntos. 5. Espalhamento (Matemática). I. Título.

CDD: 515.7 (20^a)

Banca Examinadora:




Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
DM- UFSCar



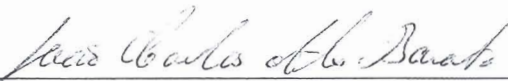
Prof. Dr. Marcus Vinicius Araújo Lima
DM - UFSCar



Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga
ICMC – USP



Prof. Dr. Pedro Paulo de Magalhães Rios
ICMC - USP



Prof. Dr. João Carlos Alves Barata
IF - USP

Dedico para Gisele, minha esposa, e Pedro, nosso filho,
e aos meus pais Ana (in memoriam) e Waldemar,
com muito amor e alegria.

Agradecimentos

A Deus pela saúde e força necessárias para me dedicar a este projeto.

Ao meu orientador, Prof. César Rogério de Oliveira, por ter proposto este trabalho e pela oportunidade de realizá-lo. Pelas orientações, paciência, incentivo, disponibilidade e atenção sempre num clima de amizade. Obrigado pelos ensinamentos e exemplo.

À minha esposa Gisele e ao nosso filho Pedro, meus “motivos”, minha motivação, pelo amor, compreensão e apoio incondicionais a cada dia ao longo desses anos. Obrigado por tudo! Essa vitória é nossa.

Aos meus pais, Dona Nidi e Seu Marzinho, pela dedicação e boa educação que nos deram, base de tudo, pelo amor, incentivo e por sempre acreditarem em mim. Ao meu irmão Marcelo pelo incentivo e torcida. Aos demais familiares que deram força e torceram por esta conquista.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa, incluindo os amigos e colegas do Departamento de Matemática e Estatística, que incentivaram e permitiram a minha liberação para o Doutorado.

Aos professores dos departamentos de Matemática da UFSCar e da UFSM pelos ensinamentos, confiança e amizade e pelo bom ambiente de trabalho. Em especial ao Brambilla, Peneireiro e Malagutti.

A todos os colegas e em especial aos amigos, os quais não citarei nomes para não cometer injustiças, pela parceria, confiança, amizade, convivência e pelo excelente ambiente de estudos e pelos momentos de descontração que passamos juntos e me proporcionaram grande alegria.

À banca examinadora pelos comentários e sugestões.

Às secretárias, Irma e Mariana, e aos funcionários do departamento pelo suporte sempre que necessário.

Ao CNPq pela bolsa de estudos.

À UAC pelo cuidado e carinho dedicados ao nosso filho Pedro e por guiá-lo em seus primeiros passos na vida escolar.

Enfim, gostaria de agradecer a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Obrigado, muito obrigado a todos!

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo de tópicos relacionados ao Efeito Aharonov-Bohm (AB). Nossa abordagem é a da mecânica quântica não-relativística e usamos o ponto de vista da física-matemática.

(1) Estudamos o solenóide de comprimento finito de raio zero e comparamos suas extensões auto-adjuntas com as do caso conhecido do solenóide de comprimento infinito também de raio zero no plano. (2) Considerando um solenóide cilíndrico infinito de raio maior do que zero, principalmente no plano, apresentamos uma classificação de todos os operadores de Schrödinger auto-adjuntos (isto é, as possíveis condições de fronteira na borda do solenóide) que matematicamente poderiam caracterizar o operador AB, cujos domínios estão contidos no espaço natural das funções duas vezes fracamente diferenciáveis (e, naturalmente, também de quadrado integrável). (3) Então consideramos as tradicionais condições de fronteira de Dirichlet, Neumann e Robin na borda do solenóide e calculamos e comparamos seus operadores de espalhamento e seções de choque. Esperamos que com tal estudo uma dessas extensões auto-adjuntas possa ser selecionada experimentalmente. (4) Finalmente, discutimos um mecanismo teórico que propomos para selecionar, e assim justificar, o usual hamiltoniano de AB com condições de Dirichlet na fronteira do solenóide. Isto é obtido por meio de uma sequência crescente de solenóides de comprimentos finitos junto com um procedimento natural de impermeabilização; além disso, mostramos que ambos os limites comutam. Tais limites rigorosos são no sentido forte do resolvente.

Abstract

In this work we present a study of topics related to the Aharonov-Bohm (AB) effect. Our framework is that of nonrelativistic quantum mechanics and we use the point of view of mathematical physics.

(1) We study the solenoid of finite length and zero radius and compare their self-adjoint extensions with the known case of the solenoid of infinite length and also of zero radius in the plane. (2) By considering an infinitely long cylindrical solenoid of radius greater than zero, mainly in the plane, we present a classification of all self-adjoint Schrödinger operators (i.e., the possible boundary conditions on the solenoid border) that mathematically could characterize the AB operator, whose domains are contained in the natural space of twice weakly differentiable functions (and, of course, also square integrable). (3) We then consider the traditional Dirichlet, Neumann and Robin boundary conditions on the solenoid border and calculate and compare their scattering matrices and cross sections. Hopefully this could be used to experimentally select one of such extensions. (4) Finally, we discuss a theoretical mechanism we propose to select and so justify the usual AB hamiltonian with Dirichlet boundary conditions on the solenoid. This is obtained by way of increasing sequences of finitely long solenoids together with a natural impermeability procedure; further, it is shown that both limits commute. Such rigorous limits are in the strong resolvent sense.

Algumas Notações

- $\mathbf{1}$ o operador identidade
- \mathbf{A} o potencial vetorial do solenóide infinito
- \mathbf{A}_L o potencial vetorial do solenóide finito, de comprimento $2L$
- \mathcal{S} a fronteira do solenóide infinito
- \mathcal{S}_L a fronteira do solenóide finito
- \mathcal{S}° o interior do solenóide infinito
- \mathcal{S}_L° o interior do solenóide finito
- \mathcal{S}' o exterior do solenóide infinito
- \mathcal{S}'_L o exterior do solenóide finito
- \mathcal{W}_\pm os operadores de onda
- S o operador de espalhamento
- $f(k, \theta)$ a amplitude de espalhamento
- $\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)(k, \theta)$ a seção de choque diferencial
- a o raio do solenóide

Sumário

Introdução	1
1 Solenóide Finito de Raio Nulo	5
1.1 Extensões Auto-Adjuntas	5
1.2 Uma Convergência	10
2 Extensões do Solenóide Infinito de Raio Positivo	13
2.1 Via Triplas de Fronteira	14
2.2 Via Operadores de Fronteira	19
3 Espalhamento para o Efeito Aharonov-Bohm	25
3.1 Teoria de Espalhamento	26
3.2 Extensões Auto-Adjuntas	31
3.3 Espalhamento com a Extensão de Neumann	33
3.3.1 Operador de Espalhamento	34
3.3.2 Comportamento Assintótico do Operador de Espalhamento	35
3.3.3 Operadores de Onda	37
3.3.4 Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque	43
3.4 Espalhamento com as Extensões do Tipo Robin	46
3.4.1 Operador de Espalhamento	46
3.4.2 Operadores de Onda	49
3.4.3 Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque	54
3.5 Alguns Gráficos e Comparações	56
4 Seleção Teórica da Condição de Dirichlet	69
4.1 O Potencial Vetorial	70
4.1.1 Potencial Vetorial de Um Solenóide Finito	70

4.1.2	Convergência Quando $L \rightarrow \infty$	72
4.2	Justificativa do Hamiltoniano de Aharonov-Bohm	73
4.3	Convergência no Sentido Uniforme do Resolvente	78
5	Conclusão	84
A	Limite Quando $a \rightarrow 0$	86
B	Dois Lemas Auxiliares	88
	Referências Bibliográficas	89

Introdução

O Efeito Aharonov-Bohm (AB) é uma questão fundamental em física, mais especificamente em Mecânica Quântica. Apesar de 50 anos já terem se passado desde o artigo original de AB de 1959, o efeito AB é algo ainda muito discutido na literatura. Só para se ter uma idéia, o artigo original de 1959 foi citado 2723 vezes (dados de junho/09) de acordo com o Web of Science^R. Isto dá uma dimensão do interesse da comunidade de físicos, e pesquisadores de áreas correlatas, no assunto. Mesmo assim, ainda não se chegou a uma conclusão unânime sobre o real significado físico atribuído ao potencial vetorial, o que revela seu caráter misterioso e intrigante.

Como é comum na literatura, o termo “efeito AB” será usado num sentido amplo, ou seja, a propriedades relacionadas a operadores similares àquele proposto originalmente por AB em 1959. Exatamente ao que nos referimos deve estar claro em cada contexto. Entretanto, o cenário mais considerado e tradicional para o efeito AB é como segue:

Dado um solenóide cilíndrico \mathcal{S} carregando uma corrente elétrica estacionária, de comprimento infinito e raio $a > 0$, centrado na origem e eixo na direção z , existe um campo magnético constante $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ confinado em \mathcal{S}° , o interior de \mathcal{S} , e anulando-se em sua região exterior \mathcal{S}' . O solenóide é considerado impermeável (impenetrável), no sentido que o movimento de uma partícula sem spin (de massa $m = 1/2$ e carga elétrica q) fora do solenóide não tem contato com seu interior, particularmente com o campo magnético \mathbf{B} . Se \mathbf{A} é o potencial vetorial gerando este campo magnético, isto é, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, o operador hamiltoniano usual descrevendo o movimento quântico desta partícula carregada é dado por (com $\hbar = 1$)

$$H_{AB} = \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad \mathbf{p} = -i\nabla,$$

com condições de Dirichlet na fronteira, isto é, as funções no domínio de H_{AB} anulam-se na fronteira do solenóide. Efeitos observáveis, como diferenças de fase na função de onda em função de \mathbf{A} , são previstos e confirmados em muitos experimentos, apesar da partícula estar

confinada em \mathcal{S}' (ver os artigos originais [3, 4, 5] e [19, 35, 36, 38, 43, 45] para descrições detalhadas e uma longa lista de referências adicionais). Desde que o potencial vetorial não é assumido ser (identicamente) nulo na região exterior \mathcal{S}' , a interpretação em [3, 4, 5], e seguida por uma enorme quantidade de artigos, é que \mathbf{A} desempenha um papel proeminente em mecânica quântica, de modo que estes efeitos mensuráveis seriam causados exclusivamente por \mathbf{A} , e não exatamente pelo campo magnético \mathbf{B} . Desde então, isto tem sido chamado de *o efeito Aharonov-Bohm* (apesar de tal questão ter sido considerada anteriormente [18, 21]) e ele está diretamente relacionado à aceitação de H_{AB} acima como o modelo quântico de tal situação (particularmente, a presença do potencial vetorial no hamiltoniano).

Com vários experimentos realizados (particularmente os de Tonomura e colaboradores [38]), o foco atual do AB não é o resultado experimental, mas sim a descrição e interpretação teóricas.

Neste trabalho estudamos tópicos relacionados ao efeito AB, motivados, em princípio, pela idéia de aproximar o solenóide idealizado de comprimento infinito por uma sequência crescente de solenóides de comprimentos finitos, uma vez que na prática não existe solenóide de comprimento infinito.

O conjunto das extensões auto-adjuntas do hamiltoniano inicial descreve todas as possibilidades de modelos quânticos de determinada situação. No caso específico aqui estudado, a partícula quântica não pode entrar no solenóide mas interage com ele (além, eventualmente, também com o potencial magnético); as condições de contorno que classificam as extensões auto-adjuntas são as fisicamente possíveis do ponto de vista da Mecânica Quântica, aquelas que descrevem essa interação com a superfície do solenóide, e gostaríamos de conhecer todas explicitamente ou, pelo menos, as “mais importantes”.

Há vários resultados teóricos na literatura sobre o efeito AB com solenóides infinitos de raio nulo, na maioria das vezes com condições de Dirichlet no solenóide; inclusive foi para esse sistema que o artigo original de AB [3] estudou o espalhamento. Esses estudos trazem duas idealizações, a saber, raio nulo e comprimento infinito, e a primeira contribuição técnica desta tese é sobre solenóides ainda de raio nulo, mas de comprimento finito [42] e em duas dimensões (2D), e relacionar as extensões auto-adjuntas nos dois casos [2, 13]. Este é o conteúdo do Capítulo 1 desta tese.

No caso de solenóides infinitos de raio maior do que zero tem-se um operador de Schrödinger inicial cujos índices de deficiência são iguais a infinito. O Capítulo 2 apresenta em 2D uma discussão a respeito de todas as extensões auto-adjuntas neste caso, e então elas

são devidamente explicitadas no importante caso de extensões no espaço de Sobolev \mathcal{H}^2 .

Essas condições de contorno devem ser vistas de forma “generalizada”, ou seja, não se restringem às tradicionais Dirichlet, Neumann e Robin. Os espaços de funções em que essas condições generalizadas aparecem são bastante abstratos, o que dificulta a obtenção explícita de todas elas e, inclusive, até pode-se questionar se devemos desenvolver um grande esforço para explicitá-las sem que haja um motivo específico para isso. No entanto, essas extensões “exóticas” devem, por exemplo, incluir a descrição de situações em que perturbações singulares e/ou dependentes do tempo (sobre o solenóide) são lentamente desligadas e os operadores hamiltonianos convergem a um limite também diretamente associado à modelagem matemática do sistema de Aharonov-Bohm.

No Capítulo 3 o espalhamento em 2D será discutido nesse contexto, mas com restrição às condições de contorno tradicionais mencionadas acima. Nestes casos será demonstrado que os operadores de onda existem e são completos. As expressões dos operadores de espalhamento serão encontradas, bem como seus comportamentos assintóticos para altas e baixas energias. A seção de choque diferencial também será estudada. Resultados serão comparados e ilustrados com alguns gráficos na Seção 3.5. Experimentos apropriados (ou seja, em regiões adequadas de energias) com vistas à seção de choque diferencial poderiam ser realizados para decidir sobre qual extensão descreveria tais observações em laboratório. Em caso de discordância com todos esses casos, então o espalhamento com operadores associados a extensões “não-habituais” devem ser considerados. De certo ponto de vista pode-se dizer que esse capítulo trata da seleção de extensões auto-adjuntas através de experimentos em laboratório via seções de choque.

A aceitação na literatura de H_{AB} acima, com o aparecimento explícito de \mathbf{A} não-nulo fora do solenóide impermeável, embora aí $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$, é baseado principalmente em uma aplicação do teorema de Stokes em uma região multiplamente conexa. Entretanto, este argumento apresenta dificuldades matemáticas e físicas que devem ser justificadas cuidadosamente. Ou seja, a aceitação de H_{AB} envolve uma escolha explícita que precisa de uma explicação. Seria também oportuno propor um mecanismo físico e matemático (ou seja, puramente teórico) de seleção das extensões mais “realistas”, e esse será nosso principal tópico no Capítulo 4, em 2D e 3D, no qual a extensão com condição de Dirichlet na fronteira do solenóide é selecionada. Contudo, antes será necessário encontrar a expressão do potencial vetorial gerado por um solenóide finito de raio positivo em todos os pontos do espaço.

De forma resumida, as contribuições originais desta tese estão assim estruturadas:

inicialmente apresenta-se uma discussão sobre solenóides finitos de raio zero e o limite para comprimento tendendo ao infinito. Então concentra-se ao caso mais realista de solenóides de raio maior do que zero e discutem-se as possíveis realizações físicas do modelo através das extensões auto-adjuntas. Como em princípio não é óbvio qual dessas extensões é a naturalmente realizada, estuda-se e compara-se o espalhamento nos casos mais usuais (Dirichlet, que foi estudada em [43], Neumann e Robin), e encontram-se faixas de energia que podem distingui-las experimentalmente. Finalmente apresentamos um argumento teórico que seleciona a extensão de Dirichlet por um processo limite; ressalta-se que normalmente Dirichlet é a extensão utilizada na literatura.

Capítulo 1

Solenóide Finito de Raio Nulo

Neste capítulo nosso objetivo é mostrar que o solenóide finito de raio nulo tem infinitas extensões auto-adjuntas e encontrá-las. Além disso, vamos relacioná-las com resultados conhecidos sobre o solenóide infinito, também de raio nulo, através de uma certa convergência.

1.1 Extensões Auto-Adjuntas

Em [2, 13] aparece um estudo das extensões auto-adjuntas do hamiltoniano de Aharonov-Bohm $(-i\nabla - \mathbf{A})^2$ do solenóide infinito de raio nulo no plano, em que \mathbf{A} é o bem-conhecido potencial vetorial $\mathbf{A} = (A_r, A_\phi)$, $A_r = 0$ e $A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{r}$, $r > 0$, em coordenadas polares (r, ϕ) , sendo Φ o fluxo através do solenóide. Note que foi para esse sistema de raio nulo que Aharonov e Bohm estudaram detalhes no artigo seminal [3].

Nesta e na próxima seção apresentaremos nossa contribuição ao problema; vamos considerar o caso do solenóide finito de raio nulo, talvez uma modelagem mais realista, e comparar as extensões auto-adjuntas nos dois casos. Outra motivação para tal estudo é que solenóides de raio nulo são os mais considerados na literatura, e de comprimento finito foi apenas tratado brevemente em [42]. Este nosso estudo serve, também, como “aquecimento” para o caso de solenóide de raio não-nulo a ser abordado em capítulos posteriores.

Consideremos um solenóide de comprimento $2L > 0$ e raio nulo, ao longo do eixo z , centrado na origem e simétrico em relação ao plano xy . Ignorando a coordenada z , eixo do solenóide, temos o movimento da partícula em \mathbb{R}^2 , plano xy .

Seja $H_{\alpha,L}$ o operador de Schrödinger

$$H_{\alpha,L} = (-i\nabla - \mathbf{A}_L)^2,$$

com domínio $\text{dom } H_{\alpha,L} = C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$. O potencial vetorial \mathbf{A}_L [42] é dado, em coordenadas polares (r, ϕ) , por

$$\mathbf{A}_L(r, \phi) = \left(0, \frac{-\alpha}{r\sqrt{1 + (r/L)^2}} \right), \quad r > 0,$$

com $\alpha = -\frac{\Phi}{2\pi}$. Como usual e sem perda de generalidade, vamos supor $0 < \alpha < 1$. Este operador é hermitiano, positivo e em coordenadas polares sua expressão é

$$H_{\alpha,L} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\alpha}{\sqrt{1 + (r/L)^2}} \right)^2.$$

Observe que quando $L \rightarrow \infty$ recuperamos pontualmente o potencial vetorial do solenóide infinito de raio nulo.

Observação 1.1 *O potencial vetorial \mathbf{A}_L acima, apesar de ter sido retirado de [42], pode ser recuperado do potencial vetorial do solenóide finito e raio positivo ($a > 0$), que calcularemos no Capítulo 4, tomando o limite para o raio tendendo a zero, $a \rightarrow 0$; isto será feito no Apêndice A deste trabalho. Este caso idealizado do solenóide de raio nulo é obtido a partir do limite $a \rightarrow 0$ com intensidade de campo magnético crescendo de forma que o fluxo total é mantido constante igual a Φ .*

Lembramos que se T é um operador hermitiano, então os subespaços vetoriais fechados $K_\pm(T) := N(T^* \pm i\mathbf{1}) = (\text{img}(T \mp i\mathbf{1}))^\perp$ são os subespaços de deficiência de T e os números inteiros, dados por suas respectivas dimensões,

$$n_\pm(T) := \dim N(T^* \pm i\mathbf{1}) = \dim(\text{img}(T \mp i\mathbf{1}))^\perp,$$

são seus índices de deficiência. Como é bem-conhecido, esses índices estão diretamente associados às extensões auto-adjuntas de T .

Agora vamos determinar os índices de deficiência $n_\pm(H_{\alpha,L})$ de $H_{\alpha,L}$. Para isto faremos a decomposição polar do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$, ou seja, introduzindo as coordenadas polares (r, ϕ) tem-se

$$L^2(\mathbb{R}^2) = L_{rdr}^2((0, \infty)) \otimes L_{d\phi}^2(S^1),$$

com S^1 denotando a circunferência unitária em \mathbb{R}^2 .

Usando o operador unitário $U : L_{rdr}^2((0, \infty)) \rightarrow L_{dr}^2((0, \infty))$, dado por $(Uf)(r) = r^{1/2}f(r)$, e a base ortonormal $\{e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de $L_{d\phi}^2(S^1)$ podemos escrever

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} U^{-1} L_{dr}^2((0, \infty)) \otimes \left[\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \right],$$

em que $[e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}]$ denota o subespaço vetorial gerado por $e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}$. Para detalhes veja, por exemplo, o Capítulo X em [40]. Assim, $H_{\alpha,L}$ pode ser escrito como

$$H_{\alpha,L} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} U^{-1} h_{\alpha,L,m} U \otimes \mathbf{1},$$

sendo $h_{\alpha,L,m}$ um operador em $L^2_{dr}((0, \infty))$, com domínio $\text{dom } h_{\alpha,L,m} = C_0^\infty((0, \infty))$, dado por

$$h_{\alpha,L,m} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_{\alpha,L,m}(r), \quad m \in \mathbb{Z},$$

com

$$V_{\alpha,L,m}(r) = \frac{1}{r^2} \left[\left(m + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + (r/L)^2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]. \quad (1.1)$$

Antes de continuar revisaremos algumas definições e resultados bem-conhecidos que serão usados na sequência, os quais podem ser encontrados em [17], [15] ou [40].

Definição 1.1 Dizemos que uma função mensurável $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ está em $L^2_{dr}((0, \infty))$ em 0 (respectivamente, em ∞) se existe $c \in (0, \infty)$ de modo que $\psi \in L^2_{dr}((0, c))$ (respectivamente, $\psi \in L^2_{dr}((c, \infty))$).

Consideremos o operador $T = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r)$ em $(0, \infty)$, sendo V contínua e real, e a equação

$$T\psi = \lambda\psi, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.2)$$

Definição 1.2 O operador T é limit circle em 0 (resp., em ∞) se para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ todas as soluções de (1.2) estão em $L^2_{dr}((0, \infty))$ em 0 (resp., em ∞). Se T não é limit circle em 0 (em ∞), dizemos que T é limit point em 0 (em ∞).

Teorema 1.1 Seja V uma função real e contínua em $(0, \infty)$ e suponha que exista uma função diferenciável M positiva satisfazendo (i) $V(r) \geq -M(r)$; (ii) $\int_1^\infty [M(r)]^{-1/2} dr = \infty$ e (iii) $M'(r)/[M(r)]^{3/2}$ é limitado no ∞ . Então T é limit point em ∞ .

Teorema 1.2 Seja V contínua e positiva próximo de 0. Se $V(r) \geq \frac{3}{4}r^{-2}$ próximo de 0, então T é limit point em 0.

Teorema 1.3 Se $\limsup_{r \rightarrow 0} |r^2 V(r)| < 3/4$, então T é limit circle em 0.

Teorema 1.4 (Weyl) Seja V uma função real e contínua em $(0, \infty)$. Então o operador T é essencialmente auto-adjunto em $C_0^\infty((0, \infty))$ se, e somente se, T é limite point em 0 e ∞ .

Continuando, vamos classificar o operador $h_{\alpha,L,m}$ em limit point e limit circle, em 0 e ∞ , para determinar seus índices de deficiência. Fazemos isto em dois casos:

Caso ∞ : O operador $h_{\alpha,L,m}$ é limit point no ∞ , para todo $m \in \mathbb{Z}$. De fato, basta escolher a função $M(r) = \frac{1}{4r^2}$ e aplicar o Teorema 1.1.

Caso 0: Mostra-se facilmente que $V_{\alpha,L,m}(r) > \frac{3}{4r^2}$, para todo $m \neq 0, -1$. Daí, segue pelo Teorema 1.2 que $h_{\alpha,L,m}$ é limit point em 0, para todo $m \neq 0, -1$. Por outro lado, para $m = 0, -1$ temos que $\limsup_{r \rightarrow 0} |r^2 V_{\alpha,L,m}(r)| < \frac{3}{4}$, e o Teorema 1.3 nos diz que $h_{\alpha,L,m}$ é limit circle em 0 neste caso.

Portanto, quando $m \neq 0, -1$ o operador $h_{\alpha,L,m}$ é essencialmente auto-adjunto pelo Teorema 1.4, e assim seus índices de deficiência $n_{\pm}(h_{\alpha,L,m})$ são iguais a zero; já quando $m = 0, -1$, temos $n_{\pm}(h_{\alpha,L,m}) = 1$.

Então $n_{\pm}(H_{\alpha,L}) = 2$ e, pelo Teorema de von Neumann 2.2.11 de [15], $H_{\alpha,L}$ tem infinitas extensões auto-adjuntas.

Agora, para encontrar todas as extensões auto-adjuntas de $H_{\alpha,L}$, consideramos as soluções em $L^2(\mathbb{R}^2)$ da equação $\overline{H}_{\alpha,L}^* \psi = \pm i \psi$, sendo $\overline{H}_{\alpha,L}$ o fecho de $H_{\alpha,L}$ e $\overline{H}_{\alpha,L}^*$ o adjunto de $\overline{H}_{\alpha,L}$. Analogamente ao que foi feito acima, podemos escrever

$$\overline{H}_{\alpha,L} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} U^{-1} \overline{h}_{\alpha,L,m} U \otimes \mathbf{1},$$

em que os operadores $\overline{h}_{\alpha,L,m}$, os fechados de $h_{\alpha,L,m}$ em $L^2_{dr}((0, \infty))$, são dados por (veja [6])

$$\begin{aligned} \text{dom } \overline{h}_{\alpha,L,0} &= \left\{ \xi \in L^2_{dr}((0, \infty)) : \xi, \xi' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^1((0, \infty)), \right. \\ &\quad \left. h_{\alpha,L,0} \xi \in L^2_{dr}((0, \infty)), W_0[\xi, \xi_{\pm}^{(0)}] = 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dom } \overline{h}_{\alpha,L,-1} &= \left\{ \xi \in L^2_{dr}((0, \infty)) : \xi, \xi' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^1((0, \infty)), \right. \\ &\quad \left. h_{\alpha,L,-1} \xi \in L^2_{dr}((0, \infty)), W_0[\xi, \xi_{\pm}^{(-1)}] = 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dom } \overline{h}_{\alpha,L,m} &= \left\{ \xi \in L^2_{dr}((0, \infty)) : \xi, \xi' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^1((0, \infty)), \right. \\ &\quad \left. h_{\alpha,L,m} \xi \in L^2_{dr}((0, \infty)) \right\}, \quad m \neq 0, -1, \end{aligned}$$

$$\overline{h}_{\alpha,L,m} \xi = h_{\alpha,L,m} \xi, \quad m \in \mathbb{Z},$$

sendo $W_0[\xi, \zeta] := \lim_{r \rightarrow 0^+} W_r[\xi, \zeta]$, com $W_r[\xi, \zeta] = \overline{\xi(r)} \zeta'(r) - \overline{\xi'(r)} \zeta(r)$ o Wronskiano de ξ e ζ em $r \in (0, \infty)$; $\xi_{\pm}^{(0)}$ e $\xi_{\pm}^{(-1)}$ são as soluções em $L^2_{dr}((0, \infty))$ das equações $\overline{h}_{\alpha,L,0}^* \xi =$

$\pm i\xi$ e $\bar{h}_{\alpha,L,-1}^*\xi = \pm i\xi$, respectivamente, visto que para $m = 0, -1$ os índices de deficiência $n_{\pm}(h_{\alpha,L,m})$ são iguais a 1, as soluções $\xi_{\pm}^{(0)}$ e $\xi_{\pm}^{(-1)}$ existem e pertencem a $L_{dr}^2((0, \infty))$.

Aqui os operadores $\bar{h}_{\alpha,L,0}^*$ e $\bar{h}_{\alpha,L,-1}^*$, adjuntos de $\bar{h}_{\alpha,L,0}$ e $\bar{h}_{\alpha,L,-1}$, respectivamente, são dados por

$$\begin{aligned} \text{dom } \bar{h}_{\alpha,L,0}^* &= \{ \xi \in L_{dr}^2((0, \infty)) : \xi, \xi' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^1((0, \infty)), \\ &\quad h_{\alpha,L,0}\xi \in L_{dr}^2((0, \infty)) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dom } \bar{h}_{\alpha,L,-1}^* &= \{ \xi \in L_{dr}^2((0, \infty)) : \xi, \xi' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^1((0, \infty)), \\ &\quad h_{\alpha,L,-1}\xi \in L_{dr}^2((0, \infty)) \}, \end{aligned}$$

$$\bar{h}_{\alpha,L,m}^*\xi = h_{\alpha,L,m}\xi, \quad m = 0, -1.$$

Usando

$$\bar{H}_{\alpha,L}^* = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} U^{-1} \bar{h}_{\alpha,L,m}^* U \otimes \mathbf{1},$$

e sabendo que $n_{\pm}(H_{\alpha,L}) = 2$, encontramos que a equação $\bar{H}_{\alpha,L}^*\psi = \pm i\psi$ tem duas soluções linearmente independentes em $L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\psi_{\pm}^{(0)}(r) = \frac{r^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \xi_{\pm}^{(0)}(r), \quad \psi_{\pm}^{(-1)}(r, \phi) = \frac{r^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \xi_{\pm}^{(-1)}(r) e^{-i\phi}.$$

Sendo assim, tomamos $\beta = \{ \psi_{\pm}^{(0)}, \psi_{\pm}^{(-1)} \}$ como uma base para os subespaços de deficiência $K_{\mp}(H_{\alpha,L}) = N(\bar{H}_{\alpha,L}^* \mp i\mathbf{1})$, e seja $\mathcal{U} : K_- \rightarrow K_+$ um operador unitário. Então, da teoria de von Neumann de extensões auto-adjuntas ([15], Capítulo 2), as extensões auto-adjuntas de $H_{\alpha,L}$ são dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} \text{dom } H_{\alpha,L}^{\mathcal{U}} &= \{ u \in L^2(\mathbb{R}^2) : u = v + \psi_+ + \mathcal{U}\psi_+, v \in \text{dom } \bar{H}_{\alpha,L}, \psi_+ \in K_- \}, \\ H_{\alpha,L}^{\mathcal{U}}u &= \bar{H}_{\alpha,L}v + i\psi_+ - i\mathcal{U}\psi_+, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \psi_+ &= c_0\psi_+^{(0)} + c_{-1}\psi_+^{(-1)}, \quad c_0, c_{-1} \in \mathbb{C}, \\ \mathcal{U}\psi_+ &= d_0\psi_-^{(0)} + d_{-1}\psi_-^{(-1)}, \quad d_j = \sum_{k=0,-1} \tilde{\mathcal{U}}_{jk}c_k, \quad j = 0, -1, \end{aligned}$$

e $\tilde{\mathcal{U}}$ é uma matriz unitária 2×2 , a qual pode ser representada como

$$\tilde{\mathcal{U}} = e^{i\tau} \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Para qualquer escolha possível dos parâmetros τ , a e b , obtemos uma extensão auto-adjunta do operador $H_{\alpha,L}$. E estas são todas as extensões auto-adjuntas deste operador.

1.2 Uma Convergência

Nesta seção demonstraremos que em cada setor $m \in \mathbb{Z}$ as extensões auto-adjuntas do solenóide finito convergem, no sentido uniforme do resolvente ([15], Capítulo 10), às extensões auto-adjuntas do solenóide infinito [2], quando $L \rightarrow \infty$.

Lembramos que se T_n e T são operadores auto-adjuntos agindo num espaço de Hilbert \mathcal{H} , então dizemos que T_n converge para T no sentido uniforme do resolvente quando $n \rightarrow \infty$ se

$$\|R_i(T_n) - R_i(T)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

em que $R_i(T_n)$ e $R_i(T)$ denotam os operadores resolventes de T_n e T no ponto i do plano complexo, respectivamente.

Para não sobrecarregar a notação, consideremos

$$h_{\alpha,L,m} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_{\alpha,L,m}(r),$$

com $V_{\alpha,L,m}$ dado por (1.1), e

$$h_{\alpha,m} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(m + \alpha)^2 - 1/4}{r^2},$$

as extensões auto-adjuntas do solenóide finito e infinito associadas a matriz $\tilde{\mathcal{U}}$, respectivamente, em cada setor $m \in \mathbb{Z}$ fixado. Nessas condições obtemos o seguinte

Teorema 1.5 $h_{\alpha,L,m}$ converge para $h_{\alpha,m}$ no sentido uniforme do resolvente quanto $L \rightarrow \infty$.

Demonstração: Inicialmente observe que

$$h_{\alpha,L,m} = h_{\alpha,m} + \mathcal{V}_{\alpha,L,m},$$

sendo

$$\mathcal{V}_{\alpha,L,m}(r) = \frac{2m\alpha}{r^2} \frac{\left(1 - \sqrt{1 + (r/L)^2}\right)}{\sqrt{1 + (r/L)^2}} - \frac{\alpha^2}{L^2} \frac{1}{1 + (r/L)^2}.$$

Vê-se facilmente que a função $\mathcal{V}_{\alpha,L,m}$ é contínua no intervalo $[0, \infty)$, com $\mathcal{V}_{\alpha,L,m}(0) := -\frac{\alpha(m + \alpha)}{L^2}$, e $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{\alpha,L,m}(r) = 0$. Daí segue que $\mathcal{V}_{\alpha,L,m}$ é limitada em $[0, \infty)$.

Além disso, $\mathcal{V}_{\alpha,L,m} \rightarrow 0$ uniformemente, quando $L \rightarrow \infty$, isto é, $\|\mathcal{V}_{\alpha,L,m}\|_\infty \rightarrow 0$,

quando $L \rightarrow \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}_{\alpha,L,m}(r)| &= \left| \frac{2m\alpha}{r^2} \frac{\left(1 - \sqrt{1 + (r/L)^2}\right)}{\sqrt{1 + (r/L)^2}} - \frac{\alpha^2}{L^2} \frac{1}{1 + (r/L)^2} \right| \\ &\leq \frac{2|m|\alpha}{r^2} \left| \frac{1 - \sqrt{1 + (r/L)^2}}{\sqrt{1 + (r/L)^2}} \right| + \frac{\alpha^2}{L^2} \frac{1}{1 + (r/L)^2}, \end{aligned}$$

e racionalizando o quociente na primeira parcela à direita da desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}_{\alpha,L,m}(r)| &\leq \frac{2|m|\alpha}{r^2} \left| \frac{1 - (1 + (r/L)^2)}{\sqrt{1 + (r/L)^2} + (1 + (r/L)^2)} \right| + \frac{\alpha^2}{L^2} \frac{1}{1 + (r/L)^2} \\ &\leq \frac{2|m|\alpha}{L^2} \left| \frac{1}{\sqrt{1 + (r/L)^2} + (1 + (r/L)^2)} \right| + \frac{\alpha^2}{L^2} \\ &\leq \frac{2|m|\alpha}{L^2} \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{L^2} = (|m|\alpha + \alpha^2) \frac{1}{L^2}, \quad \forall r \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Consideramos agora duas identidades envolvendo operadores lineares A e B . Supondo que exista A^{-1} , temos a seguinte relação $A+B = A(\mathbf{1} + A^{-1}B)$; e se existe $(A+B)^{-1}$, obtemos $(A+B)^{-1} = (\mathbf{1} + A^{-1}B)^{-1} A^{-1}$.

Assim, usando as relações acima com $A = h_{\alpha,m} - i$ e $B = \mathcal{V}_{\alpha,L,m}$, temos

$$A + B = h_{\alpha,m} - i + \mathcal{V}_{\alpha,L,m} = h_{\alpha,L,m} - i$$

e

$$(A + B)^{-1} = R_i(h_{\alpha,L,m}) = [\mathbf{1} + R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}]^{-1} R_i(h_{\alpha,m}). \quad (1.3)$$

Então para L grande de modo que $\|\mathcal{V}_{\alpha,L,m}\|_\infty < 1$ e lembrando que $\|R_i(h_{\alpha,m})\| \leq 1$ podemos expandir $[\mathbf{1} + R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}]^{-1}$, obtendo

$$\begin{aligned} [\mathbf{1} + R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}]^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}]^k \\ &= \mathbf{1} - R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m} + [R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}]^2 - \dots \\ &= \mathbf{1} - R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}]^k. \end{aligned}$$

Logo, (1.3) torna-se

$$R_i(h_{\alpha,L,m}) = R_i(h_{\alpha,m}) - R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}]^k \right) R_i(h_{\alpha,m}),$$

e, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \|R_i(h_{\alpha,L,m}) - R_i(h_{\alpha,m})\| &\leq \|\mathcal{V}_{\alpha,L,m}\|_\infty \frac{1}{1 - \|R_i(h_{\alpha,m})\mathcal{V}_{\alpha,L,m}\|} \\ &\leq \|\mathcal{V}_{\alpha,L,m}\|_\infty \frac{1}{1 - \|\mathcal{V}_{\alpha,L,m}\|_\infty} \rightarrow 0, \quad L \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Isto mostra que $h_{\alpha,L,m} \rightarrow h_{\alpha,m}$ no sentido uniforme do resolvente, quando $L \rightarrow \infty$, em cada setor $m \in \mathbb{Z}$. \square

Observamos que o que nos permitiu fazer essa comparação é que para cada matriz unitária \tilde{U} tem-se uma extensão auto-adjunta tanto no caso de solenóide finito (de qualquer comprimento) quanto infinito (sempre de raio nulo), e a convergência quando $L \rightarrow \infty$ é aquela esperada, ou seja, com \tilde{U} fixo para todo $L \in (0, \infty]$.

Para finalizar este capítulo note que inspecionando a demonstração do Teorema 1.5 podemos demonstrar, usando os mesmos argumentos, o seguinte resultado mais geral:

Teorema 1.6 *Sejam T, T_n operadores auto-adjuntos densamente definidos no espaço de Hilbert \mathcal{H} de modo que $T_n - T = V_n$. Se o fecho de V_n é um operador limitado em \mathcal{H} , ou seja, $\overline{V_n} \in B(\mathcal{H})$, e $\overline{V_n} \rightarrow 0$ em $B(\mathcal{H})$, então T_n converge para T no sentido uniforme do resolvente quando $n \rightarrow \infty$.*

Capítulo 2

Extensões do Solenóide Infinito de Raio Positivo

Neste capítulo consideraremos o solenóide cilíndrico de comprimento infinito e raio maior do que zero em 2D. Sejam $\mathcal{S}' = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0; a)}$, $a > 0$, e \mathcal{S} a fronteira de \mathcal{S}' . Consideremos o operador $H = (-i\nabla - \mathbf{A})^2$, com domínio $\text{dom } H = C_0^\infty(\mathcal{S}')$, no espaço de Hilbert $L^2(\mathcal{S}')$, sendo \mathbf{A} , em coordenadas polares (r, ϕ) , dado por $\mathbf{A} = (A_r, A_\phi)$, com $A_r \equiv 0$ e $A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi r}$, $r \geq a$, em que Φ é o fluxo magnético através do solenóide. Como veremos na Seção 3.2, o operador acima é hermitiano e seus índices de deficiência são $n_+(H) = n_-(H) = +\infty$, então este operador possui infinitas extensões auto-adjuntas [15].

Aqui estaremos interessados em encontrar e caracterizar, através de condições de contorno da fronteira \mathcal{S} , as extensões auto-adjuntas de H . A idéia é conhecer todos os possíveis operadores que potencialmente possam descrever o efeito Aharonov-Bohm. A partícula quântica não pode entrar no solenóide mas interage com ele; as condições de contorno que classificam as extensões auto-adjuntas são as fisicamente possíveis, do ponto de vista da Mecânica Quântica, que descrevem essa interação com a superfície do solenóide, e gostaríamos de conhecer todas explicitamente ou, pelo menos, as mais importantes. No Capítulo 3 consideramos as condições Dirichlet, Neumann e Robin, e no Capítulo 4 propomos e discutimos em detalhes um procedimento teórico para selecionar uma única dessas extensões; contudo, não é necessário conhecer detalhes do material deste capítulo para ler os seguintes desta tese.

Observamos que para se classificar todas as extensões auto-adjuntas de H será necessário usar alguns dos espaços $\mathcal{H}^s(\mathcal{S})$ com $s < 0$. Além disso, uma das principais dificul-

dades encontradas é que o domínio do operador adjunto

$$\text{dom } H^* = \{\psi \in L^2(\mathcal{S}') : H\psi \in L^2(\mathcal{S}')\}$$

não está contido em $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$ [24, 26, 27].

Não iremos discutir o caso em \mathbb{R}^3 porque a fronteira do solenóide não é compacta neste caso, e sendo assim não é claro como definir os operadores traço, e vamos evitar esta discussão. Mesmo definindo estes operadores para fronteiras não-compactas [27], acreditamos que os resultados não têm grandes diferenças do caso em \mathbb{R}^2 devido à simetria do problema.

2.1 Via Triplas de Fronteira

Nesta seção apresentaremos a nossa contribuição no sentido de caracterizar as extensões auto-adjuntas de H através das triplas de fronteira $(\mathbf{h}, \rho_1, \rho_2)$, descritas em [15], Capítulo 7. Faremos agora um breve e objetivo resumo dessa teoria, entretanto demonstrações e mais detalhes podem ser encontrados na referência citada acima. Iniciemos com as formas de fronteira.

Definição 2.1 *Seja T um operador hermitiano no espaço de Hilbert \mathcal{H} . A forma de fronteira de T é a aplicação sesquilinear $\Gamma = \Gamma_{T^*} : \text{dom } T^* \times \text{dom } T^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\Gamma(\xi, \eta) := \langle T^*\xi, \eta \rangle - \langle \xi, T^*\eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \text{dom } T^*.$$

Proposição 2.1 *$\Gamma(\xi, \eta) = 0, \forall \xi, \eta \in \text{dom } T^*$, se, e somente se, T^* é auto-adjunto, isto é, se, e somente se, T é essencialmente auto-adjunto.*

Portanto, vemos pela proposição acima que a forma de fronteira Γ mede quanto T^* se distancia de ser auto-adjunto, o que implicaria em que T fosse essencialmente auto-adjunto.

Além disso, formas de fronteira podem ser usadas para determinar extensões auto-adjuntas de T notando que tais extensões são restrições de T^* para certos domínios \mathcal{D} tal que $\Gamma(\xi, \eta) = 0, \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}$, como podemos ver no Lema 2.1 abaixo. Pela teoria de von Neumann [15] cada extensão auto-adjunta de T está associada biunivocamente a um operador unitário $\hat{U} : K_-(T) \rightarrow K_+(T)$ entre os subespaços de deficiência de T ; denote por $T^{\hat{U}}$ a correspondente extensão auto-adjunta, cujo domínio é $\text{dom } T^{\hat{U}} = \{\eta = \zeta + \eta_- - \hat{U}\eta_- : \zeta \in \text{dom } \bar{T}, \eta_- \in K_-(T)\}$. Então, temos o seguinte

Lema 2.1 *A forma de fronteira Γ restrita ao $\text{dom } T^{\hat{U}}$ anula-se identicamente.*

Passemos agora às triplas de fronteira.

Definição 2.2 *Seja T um operador hermitiano com $n_-(T) = n_+(T)$. Uma tripla de fronteira $(\mathbf{h}, \rho_1, \rho_2)$ para T é formada por um espaço de Hilbert \mathbf{h} e duas aplicações lineares $\rho_1, \rho_2 : \text{dom } T^* \rightarrow \mathbf{h}$ com imagens densas e de modo que*

$$b\Gamma_{T^*}(\xi, \eta) = \langle \rho_1(\xi), \rho_1(\eta) \rangle - \langle \rho_2(\xi), \rho_2(\eta) \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom } T^*,$$

para alguma constante $0 \neq b \in \mathbb{C}$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em \mathbf{h} e $\dim \mathbf{h} = n_+(T)$.

Novamente, extensões auto-adjuntas de T são restrições de T^* a certos domínios \mathcal{D} tal que $\Gamma(\xi, \eta) = 0$, $\forall \xi, \eta \in \mathcal{D}$, e dada uma tripla de fronteira para T , tais \mathcal{D} estão relacionados a operadores unitários $U : \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}$ de modo que $U\rho_1(\xi) = \rho_2(\xi)$ e

$$\langle \rho_1(\xi), \rho_1(\eta) \rangle = \langle \rho_2(\xi), \rho_2(\eta) \rangle = \langle U\rho_1(\xi), U\rho_1(\eta) \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}.$$

Isto é resumido abaixo no principal teorema desta teoria, o qual dá todas as extensões auto-adjuntas de T via triplas de fronteira.

Teorema 2.1 *Seja T um operador hermitiano com índices de deficiência iguais. Se $(\mathbf{h}, \rho_1, \rho_2)$ é uma tripla de fronteira para T , então as extensões auto-adjuntas de T são dadas por*

$$\begin{aligned} \text{dom } T^U &= \{\xi \in \text{dom } T^* : \rho_2(\xi) = U\rho_1(\xi)\}, \\ T^U \xi &= T^* \xi, \quad \forall \xi \in \text{dom } T^U, \end{aligned}$$

para todo operador unitário $U : \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}$.

Feito isto, agora voltemos ao objetivo inicial desta seção. Nossa contribuição efetiva foi incorporar o potencial vetorial \mathbf{A} na forma de fronteira Γ do operador H e obter novas expressões para ρ_1 e ρ_2 , como veremos a seguir.

Como é esperado que as extensões auto-adjuntas que possuem interpretações físicas mais claras são aquelas com domínio em $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$, nesta seção nos restringiremos a este caso. As demais extensões serão tratadas na Seção 2.2.

Como $\text{div } \mathbf{A} = 0$ e usando os operadores traços [11, 34] $\gamma_0 : \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \rightarrow L^2(\mathcal{S})$, $\gamma_0\psi = \psi|_{\mathcal{S}}$, e $\gamma_1 : \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \rightarrow L^2(\mathcal{S})$, $\gamma_1\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\vec{\eta}}\Big|_{\mathcal{S}}$, e as fórmulas de Green

$$\int_{\mathcal{S}'} \Delta\psi(x, y)\varphi(x, y) dx dy + \int_{\mathcal{S}'} \nabla\psi(x, y)\nabla\varphi(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{S}} \gamma_1\psi \gamma_0\varphi d\sigma,$$

válida para $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$, e

$$\int_{\mathcal{S}'} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \varphi(x, y) dx dy + \int_{\mathcal{S}'} \psi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{S}} \gamma_0 \psi \gamma_0 \varphi \gamma_0 (\vec{\eta} \cdot \vec{e}_x) d\sigma,$$

$$\int_{\mathcal{S}'} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \varphi(x, y) dx dy + \int_{\mathcal{S}'} \psi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{S}} \gamma_0 \psi \gamma_0 \varphi \gamma_0 (\vec{\eta} \cdot \vec{e}_y) d\sigma,$$

válidas para $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{S}')$, sendo $\vec{\eta}$ o vetor unitário e normal a \mathcal{S} que aponta para dentro, $d\sigma$ a medida de superfície, $\mathcal{S} = S(0; a)$ a circunferência centrada na origem de raio a , $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e \vec{e}_x, \vec{e}_y os vetores unitários nas direções dos eixos x e y , respectivamente, a forma de fronteira para H é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi, \varphi) &= \langle H^* \psi, \varphi \rangle - \langle \psi, H^* \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathcal{S}} (\overline{\gamma_0 \psi} \gamma_1 \varphi - \overline{\gamma_1 \psi} \gamma_0 \varphi) d\sigma - 2i \int_{\mathcal{S}} (\overline{\gamma_0 \psi} \gamma_0 (\mathbf{A} \cdot \vec{\eta}) \gamma_0 \varphi) d\sigma, \end{aligned}$$

$\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$.

Passando para coordenadas polares (r, ϕ) , a forma de fronteira Γ torna-se

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi, \varphi) &= a \int_0^{2\pi} \left(\overline{\psi(a, \phi)} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(a, \phi) - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial r}(a, \phi) \varphi(a, \phi) \right. \\ &\quad \left. - 2i \overline{\psi(a, \phi)} (\mathbf{A} \cdot \vec{r})(a, \phi) \varphi(a, \phi) \right) d\phi, \end{aligned}$$

$\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$, em que $\chi(a, \phi)$ e $\frac{\partial \chi}{\partial r}(a, \phi)$ denotam os traços $\gamma_0 \chi$ e $\gamma_1 \chi$, respectivamente, $\forall \chi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$.

Definamos agora a tripla de fronteira $(\mathbf{h}, \rho_1, \rho_2)$, com $\mathbf{h} = L^2(\mathcal{S})$, em $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$ por $\rho_j : \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \rightarrow L^2(\mathcal{S})$, $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \rho_1(\psi) &= \psi(a, \phi) + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}(a, \phi) - i (\mathbf{A} \cdot \vec{r})(a, \phi) \psi(a, \phi) \right), \\ \rho_2(\psi) &= \psi(a, \phi) - i \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}(a, \phi) - i (\mathbf{A} \cdot \vec{r})(a, \phi) \psi(a, \phi) \right). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$(2i/a) \Gamma(\psi, \varphi) = \langle \rho_1(\psi), \rho_1(\varphi) \rangle_{L^2(\mathcal{S})} - \langle \rho_2(\psi), \rho_2(\varphi) \rangle_{L^2(\mathcal{S})},$$

$\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$.

Como o produto interno do potencial vetorial \mathbf{A} pelo vetor \vec{r} se anula, ou seja, $\mathbf{A} \cdot \vec{r} = 0$, obtemos que as expressões de ρ_1 e ρ_2 se reduzem a

$$\begin{aligned} \rho_1(\psi) &= \psi(a, \phi) + i \frac{\partial \psi}{\partial r}(a, \phi), \\ \rho_2(\psi) &= \psi(a, \phi) - i \frac{\partial \psi}{\partial r}(a, \phi), \end{aligned}$$

o que para nossa surpresa possui as mesmas expressões que no caso sem potencial vetorial; note que isto só foi possível porque o solenóide é cilíndrico.

Assim, obtemos o nosso principal resultado nesta seção:

Teorema 2.2 *Todas as extensões auto-adjuntas H^U de H em $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$ são caracterizadas por operadores unitários $U : L^2(\mathcal{S}) \rightarrow L^2(\mathcal{S})$ de modo que $\rho_2(\psi) = U\rho_1(\psi)$, ou seja,*

$$\begin{aligned} \text{dom } H^U &= \left\{ \psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : (\mathbf{1} - U)\psi(a, \phi) = i(\mathbf{1} + U)\frac{\partial\psi}{\partial r}(a, \phi) \right\}, \\ H^U\psi &= H^*\psi, \quad \forall \psi \in \text{dom } H^U. \end{aligned}$$

Para encerrar esta seção, vejamos alguns exemplos com escolhas particulares do operador unitário U .

Exemplo 2.1 *Se $U = -\mathbf{1}$, então*

$$\begin{aligned} \text{dom } H^U &= \{ \psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \psi(a, \phi) = 0 \} = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \cap \mathcal{H}_0^1(\mathcal{S}'), \\ H^U\psi &= H^*\psi, \quad \forall \psi \in \text{dom } H^U, \end{aligned}$$

é a chamada extensão auto-adjunta de Dirichlet, em que $\mathcal{H}_0^1(\mathcal{S}') := \{ \psi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{S}') : \gamma_0\psi = \psi(a, \phi) = 0 \}$.

Exemplo 2.2 *Se $U = \mathbf{1}$, então*

$$\begin{aligned} \text{dom } H^U &= \{ \psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \partial\psi/\partial r(a, \phi) = 0 \}, \\ H^U\psi &= H^*\psi, \quad \forall \psi \in \text{dom } H^U, \end{aligned}$$

é a chamada extensão auto-adjunta de Neumann.

Exemplo 2.3 *Se $(\mathbf{1} + U)$ é invertível. Então para cada operador densamente definido e auto-adjunto $A : \text{dom } A \subset L^2(\mathcal{S}) \rightarrow L^2(\mathcal{S})$ corresponde uma extensão auto-adjunta H^A . De fato, tome um operador unitário U_A de modo que $A = -i(\mathbf{1} - U_A)(\mathbf{1} + U_A)^{-1}$, $\text{dom } A = \text{img } (\mathbf{1} + U_A)$ e $\text{img } A = \text{img } (\mathbf{1} - U_A)$, e lembre a Transformada de Cayley ([15], Capítulo 2). Agora, $\text{dom } H^A$ é o conjunto das $\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$ com “ $\partial\psi/\partial r(a, \cdot) = A\psi(a, \cdot)$ ”, entendido no sentido que*

$$(\mathbf{1} - U_A)\psi(a, \phi) = i(\mathbf{1} + U_A)\frac{\partial\psi}{\partial r}(a, \phi),$$

para evitar questões de domínio. Naturalmente a citação entre aspas pode ser retirada se o operador A for limitado.

Analogamente, para cada B densamente definido e auto-adjunto agindo em $L^2(\mathcal{S})$ corresponde um operador unitário U_B , e se $(\mathbf{1} - U)$ é invertível, então ele corresponde a uma extensão auto-adjunta H^B de H com $\text{dom } H^B$ o conjunto das $\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$ tal que “ $\psi(a, \cdot) = B \frac{\partial \psi}{\partial r}(a, \cdot)$ ”, no sentido que

$$(\mathbf{1} - U_B)\psi(a, \phi) = i(\mathbf{1} + U_B) \frac{\partial \psi}{\partial r}(a, \phi).$$

Novamente a citação entre aspas é retirada se B é limitado.

Exemplo 2.4 Se U é um operador de multiplicação. Dada uma função mensurável a valores reais $u(\phi)$ coloque $U = e^{iu(\phi)}$, ou seja, U é o operador de multiplicação pela função $e^{iu(\phi)}$. Se $\{\phi : e^{iu(\phi)} = -1\}$ tem medida nula, então a função

$$f(\phi) = -i \frac{1 - e^{iu(\phi)}}{1 + e^{iu(\phi)}}$$

está bem-definida e é mensurável a valores reais. O domínio da correspondente extensão auto-adjunta é

$$\text{dom } H^U = \{\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \partial \psi / \partial r(a, \phi) = f(\phi)\psi(a, \phi)\}.$$

Analogamente, se $\{\phi : e^{iu(\phi)} = 1\}$ tem medida nula, então

$$g(\phi) = i \frac{1 + e^{iu(\phi)}}{1 - e^{iu(\phi)}}$$

é uma função a valores reais e o domínio da extensão auto-adjunta é

$$\text{dom } H^U = \{\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \psi(a, \phi) = g(\phi)\partial \psi / \partial r(a, \phi)\}.$$

Exemplo 2.5 Casos particulares do Exemplo 2.4 são dados por funções constantes f e g . No caso em que u é constante, ou seja, $u(\phi) = \vartheta$, $\forall \phi$, com $\vartheta \in (0, 2\pi)$ fixado, temos as condições de fronteira de Robin com $\beta = i \frac{1 + e^{i\vartheta}}{1 - e^{i\vartheta}} \in \mathbb{R}$. Note que $\vartheta = 0$ pode ser incluído para obter-se o valor $\beta = \infty$.

Finalizando, parece-nos que usando as triplas de fronteira a caracterização das extensões auto-adjuntas de H , em $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$, são mais diretas do que usando operadores de fronteira, a qual veremos a seguir. Contudo, esses operadores de fronteira se aplicam com muito mais generalidade.

2.2 Via Operadores de Fronteira

Em um extenso trabalho, porém aparentemente não muito conhecido, Grubb [24] deu uma caracterização geral e bastante abstrata das extensões fechadas (não necessariamente auto-adjuntas) e não-fechadas de uma classe de operadores diferenciais parciais de ordem $2m$, com $m > 0$ inteiro. Referências relacionadas a esse trabalho são [12, 22, 26, 27].

Embora não seja uma prioridade deste nosso trabalho, nesta seção faremos uma breve exposição de sua caracterização das extensões auto-adjuntas aplicada ao nosso caso, isto é, caracterizaremos as extensões auto-adjuntas do operador $H = (-i\nabla - \mathbf{A})^2$ com $\text{dom } H = C_0^\infty(\mathcal{S}')$. Maiores detalhes e demonstrações podem ser encontrados facilmente em [24] e por isso não os apresentaremos aqui; sendo assim, acreditamos que esta seção funcione mais como um roteiro de como a caracterização é feita.

Iniciamos observando que o operador H se encaixa na definição do caso simétrico da teoria de [24], Seção 2 do Capítulo II.

Lembrando que γ_0 e γ_1 são os operadores traços da seção anterior, consideremos os operadores \overline{H} , H^* e H_D satisfazendo

$$\overline{H} \subset H_D \subset H^*,$$

sendo o operador \overline{H} com domínio

$$\text{dom } \overline{H} = \mathcal{H}_0^2(\mathcal{S}') = \{\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \gamma_1\psi = \gamma_0\psi = 0\},$$

o fecho de H com $\text{dom } H = C_0^\infty(\mathcal{S}')$; o operador H^* com a mesma ação de H e com domínio

$$\text{dom } H^* = \{\psi \in L^2(\mathcal{S}') : H\psi \in L^2(\mathcal{S}')\},$$

$H\psi$ definido no sentido das distribuições, o adjunto de H (o qual coincide com o adjunto de \overline{H} , ou seja, $H^* = \overline{H}^*$, ver [15], Capítulo 2); e o operador H_D com a mesma lei de H e com domínio

$$\text{dom } H_D = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \cap \mathcal{H}_0^1(\mathcal{S}') = \{\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \gamma_0\psi = 0\},$$

o operador auto-adjunto com condição de Dirichlet na fronteira discutido no Exemplo 2.1.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\lambda \in \rho(H_D)$. Assim, temos

$$\overline{H} - \lambda \mathbf{1} \subset H_D - \lambda \mathbf{1} \subset H^* - \lambda \mathbf{1},$$

e com $H_D - \lambda \mathbf{1}$ um operador auto-adjunto com inversa limitada, a saber $R_\lambda(H_D)$. O operador H_D é positivo, como mostra sua forma quadrática (por exemplo em [35]), e sendo assim, λ pode ser qualquer número < 0 .

Defina as aplicações

$$pr_\delta : \text{dom } H^* \rightarrow \text{dom } (H_D - \lambda \mathbf{1}) \quad \text{e} \quad pr_\zeta : \text{dom } H^* \rightarrow \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1}),$$

por $pr_\delta := (H_D - \lambda \mathbf{1})^{-1}(H^* - \lambda \mathbf{1})$ e $pr_\zeta := \mathbf{1} - pr_\delta$, respectivamente.

Lema 2.2 $\text{dom } H^* = \text{dom } (H_D - \lambda \mathbf{1}) \oplus \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1})$, soma direta na topologia do gráfico de $H^* - \lambda \mathbf{1}$.

Os operadores lineares \tilde{H} com $\overline{H} \subset \tilde{H} \subset H^*$ denotarão as extensões auto-adjuntas de H . No próximo teorema aparece a caracterização de todas as extensões auto-adjuntas $\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}$ de $H - \lambda \mathbf{1}$.

Teorema 2.3 *Existe uma correspondência bijetora entre extensões auto-adjuntas $\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}$ de $H - \lambda \mathbf{1}$ e operadores densamente definidos e auto-adjuntos $T : \text{dom } T \subset V \rightarrow V$, sendo V subespaço fechado de $\text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1})$; aqui*

$$\begin{aligned} \text{dom } T &= pr_\zeta \text{dom } \tilde{H}, & V &= \overline{\text{dom } T}, \\ T\psi_\zeta &= P_V((H^* - \lambda \mathbf{1})\psi), & \forall \psi &\in \text{dom } \tilde{H}, \\ \text{dom } \tilde{H} &= \{\psi \in \text{dom } H^* : \psi_\zeta \in \text{dom } T, P_V((H^* - \lambda \mathbf{1})\psi) = T\psi_\zeta\}, \end{aligned}$$

sendo $\psi_\zeta = pr_\zeta \psi$ e $P_V : L^2(\mathcal{S}') \rightarrow V$ o operador projeção ortogonal sobre V .

Agora podemos assumir, depois da adição de uma constante a H se necessário (ver [20], Capítulo 6), que o problema de Dirichlet para H é unicamente resolúvel.

Seja $K : f \mapsto \psi$ denotando o operador de Poisson resolvendo (o problema de Dirichlet semi-homogêneo)

$$(H^* - \lambda \mathbf{1})\psi = 0, \text{ em } \mathcal{S}', \quad \hat{\gamma}_0 \psi = f, \text{ em } \mathcal{S}.$$

É bem-conhecido que $K : \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S}) \rightarrow \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1})$ é um isomorfismo, com $\hat{\gamma}_0 : \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1}) \rightarrow \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$ agindo como sua inversa [34].

Assim, definamos o operador Dirichlet-para-Neumann para $\lambda \in \rho(H_D)$ por

$$P : \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{H}^{-3/2}(\mathcal{S}), \quad P = \hat{\gamma}_1 K,$$

sendo $\hat{\gamma}_1 : \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1}) \rightarrow \mathcal{H}^{-3/2}(\mathcal{S})$ o operador traço restrição de $\tilde{\gamma}_1 : \text{dom } H^* \rightarrow \mathcal{H}^{-3/2}(\mathcal{S})$ para $\text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1})$, o qual é a extensão por continuidade de $\gamma_1 : \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \rightarrow \mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ [34]. O operador traço $\hat{\gamma}_0$ acima pode ser visto de maneira análoga. P é um operador linear limitado (ver, por exemplo, [25] para detalhes sobre P).

Definamos também o operador traço

$$\gamma : \text{dom } H^* \rightarrow \mathcal{H}^{-3/2}(\mathcal{S}), \quad \gamma\psi = \tilde{\gamma}_1\psi - P\tilde{\gamma}_0\psi.$$

Algumas das principais propriedades de γ aparecem no seguinte teorema. Mas antes, observamos que para denotar a relação de dualidade entre os espaços de fronteira $\mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ e $\mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$, usamos a notação $(f, g)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}, \forall f \in \mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ e $\forall g \in \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$.

Teorema 2.4 (i) *As seguintes três definições são equivalentes:*

a) *Para $\psi \in \text{dom } H^*$, $\gamma\psi = \tilde{\gamma}_1\psi - P\tilde{\gamma}_0\psi$;*

b) *Para $\psi \in \text{dom } H^*$, $\gamma\psi = \tilde{\gamma}_1\psi_\delta$;*

c) *Seja $\psi \in \text{dom } H^*$, então $\gamma\psi$ é o único elemento de $\mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ para o qual*

$$\langle (H^* - \lambda\mathbf{1})\psi, \varphi \rangle = (\gamma\psi, \hat{\gamma}_0\varphi)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}, \forall \varphi \in \text{N}(H^* - \lambda\mathbf{1}).$$

(ii) *γ aplica $\text{dom } H^*$ continuamente sobre $\mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$, isto é, $\gamma : \text{dom } H^* \rightarrow \mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ é contínua e sobrejetora. Em $\text{dom } H_D$, γ coincide com $\tilde{\gamma}_1$, e aplica $\text{dom } H_D$ continuamente sobre $\mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$. (Topologia do gráfico em $\text{dom } H^*$ e $\text{dom } H_D$)*

(iii) *O Núcleo de $\gamma : \text{dom } H^* \rightarrow \mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ é $\text{N}(\gamma) = \text{dom } \bar{H} \oplus \text{N}(H^* - \lambda\mathbf{1})$.*

(iv) *Vale a seguinte Fórmula de Green*

$$\langle (H^* - \lambda\mathbf{1})\psi, \varphi \rangle - \langle \psi, (H^* - \lambda\mathbf{1})\varphi \rangle = (\gamma\psi, \tilde{\gamma}_0\varphi)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} - (\tilde{\gamma}_0\psi, \gamma\varphi)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}},$$

$$\forall \psi, \varphi \in \text{dom } H^*.$$

(v) *Defina a extensão $H_\gamma - \lambda\mathbf{1}$ de $H - \lambda\mathbf{1}$ por*

$$\text{dom } (H_\gamma - \lambda\mathbf{1}) = \{\psi \in \text{dom } H^* : \gamma\psi = 0\},$$

$$(H_\gamma - \lambda\mathbf{1})\psi = (H^* - \lambda\mathbf{1})\psi, \quad \forall \psi \in \text{dom } (H_\gamma - \lambda\mathbf{1}).$$

Então $H_\gamma - \lambda\mathbf{1}$ é auto-adjunta.

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [24].

Seja $\tilde{H} - \lambda\mathbf{1}$ a extensão auto-adjunta de $H - \lambda\mathbf{1}$ correspondendo (de maneira única) ao operador $T : \text{dom } T \subset V \rightarrow V$ densamente definido e auto-adjunto, sendo V subespaço fechado de $\text{N}(H^* - \lambda\mathbf{1})$, como no Teorema 2.3. Passemos esta correspondência para uma correspondência envolvendo condições de fronteira da seguinte maneira, em que X^* denota o espaço dual do subespaço X :

Definição 2.3 *Sejam $\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}$ e T como acima. Denote $X = \hat{\gamma}_0 V$ subespaço fechado de $\mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$, e defina o operador auto-adjunto $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow X^*$ por*

$$\begin{aligned} \text{dom } L &= \hat{\gamma}_0 \text{dom } T, \quad X = \overline{\text{dom } L}, \\ (L\hat{\gamma}_0\psi, \hat{\gamma}_0\varphi)_{X^*, X} &= \langle T\psi, \varphi \rangle, \quad \forall \psi \in \text{dom } T, \forall \varphi \in V. \end{aligned}$$

Lema 2.3 *A Definição 2.3 estabelece uma correspondência bijetora entre todos os operadores auto-adjuntos $T : \text{dom } T \subset V \rightarrow V$ ($V \subset N(H^* - \lambda \mathbf{1})$ subespaço fechado) e todos os operadores auto-adjuntos $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow X^*$ ($X \subset \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$ subespaço fechado).*

Note que o fato de $\hat{\gamma}_0 : N(H^* - \lambda \mathbf{1}) \rightarrow \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$ ser um isomorfismo dá o resultado acima, ou seja, quando $T : \text{dom } T \subset V \rightarrow V$ percorre todas as escolhas de subespaços fechados V de $N(H^* - \lambda \mathbf{1})$ e operadores auto-adjuntos de V em V , então $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow X^*$ percorre todas as escolhas de subespaços fechados de $\mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$ e operadores auto-adjuntos de X em X^* ; por outro lado, desde que $\hat{\gamma}_0$ é invertível T é determinado a partir de L .

Lema 2.4 *Seja $T : \text{dom } T \subset V \rightarrow V$ correspondendo a $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow X^*$ como na definição acima. Então os dois seguintes conjuntos \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 são idênticos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \{\psi \in \text{dom } H^* : \psi_\zeta \in \text{dom } T, P_V((H^* - \lambda \mathbf{1})\psi) = T\psi_\zeta\} \quad \text{e} \\ \mathcal{D}_2 &= \{\psi \in \text{dom } H^* : \hat{\gamma}_0\psi \in \text{dom } L, \gamma\psi = L\hat{\gamma}_0\psi \text{ em } X\}. \end{aligned}$$

Observação 2.1 *Para $f \in \mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ definimos o elemento $f|_X \in X^*$ como o funcional agindo como f em X :*

$$(f|_X, g)_{X^*, X} = (f, g)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}, \quad \forall g \in X.$$

Então $\gamma\psi = L\hat{\gamma}_0\psi$ em X no Lema 2.4 significa

$$(\gamma\psi, g)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = (L\hat{\gamma}_0\psi, g)_{X^*, X}, \quad \forall g \in X.$$

Agora estamos prontos para completar a correspondência e fazer a afirmação do Teorema 2.3 envolvendo condições de fronteira.

Teorema 2.5 *Existe uma correspondência bijetora entre todas as extensões auto-adjuntas $\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}$ de $H - \lambda \mathbf{1}$ e todos os operadores auto-adjuntos $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow X^*$, sendo X subespaço fechado de $\mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$, e a correspondência sendo dada por*

$$\text{dom}(\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}) = \{\psi \in \text{dom } H^* : \hat{\gamma}_0\psi \in \text{dom } L, \gamma\psi = L\hat{\gamma}_0\psi \text{ em } X\}.$$

Aqui $\text{dom } L = \hat{\gamma}_0 \text{dom}(\tilde{H} - \lambda \mathbf{1})$ (assim $X = \overline{\hat{\gamma}_0 \text{dom}(\tilde{H} - \lambda \mathbf{1})}$).

O resultado a seguir dá condições necessárias e suficientes para que o domínio da extensão auto-adjunta $\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}$ de $H - \lambda \mathbf{1}$ esteja contido em $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$.

Teorema 2.6 *Seja $\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}$ correspondendo a L como no teorema anterior. Então $\text{dom}(\tilde{H} - \lambda \mathbf{1}) \subset \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$ se, e somente se, $\text{dom} L \subset \mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S})$.*

Em [24] encontra-se a demonstração deste Teorema.

Encerramos esta seção com alguns exemplos das correspondências entre os operadores estabelecidas acima:

Exemplo 2.6 *Para $H_D - \lambda \mathbf{1}$, a extensão auto-adjunta de Dirichlet, com domínio $\text{dom}(H_D - \lambda \mathbf{1}) = \{\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \gamma_0 \psi = 0\}$, temos que o correspondente operador T é $V = \{0\}$, $\text{dom} T = \{0\}$ e $T \equiv 0$. Pela Definição 2.3 o operador L é dado por $X = \{0\}$, $\text{dom} L = \{0\}$ e $L \equiv 0$.*

Exemplo 2.7 *Considere a extensão auto-adjunta $H_\gamma - \lambda \mathbf{1}$ dada no Teorema 2.4, item (v). Seu domínio é*

$$\begin{aligned} \text{dom}(H_\gamma - \lambda \mathbf{1}) &= \{\psi \in \text{dom} H^* : \gamma \psi = 0\} \\ &= \text{dom} \bar{H} \oplus \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1}) = \mathcal{H}_0^2(\mathcal{S}') \oplus \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1}). \end{aligned}$$

Desde que $\text{dom} T = \text{pr}_\zeta \text{dom}(H_\gamma - \lambda \mathbf{1})$, então $V = \text{dom} T = \text{N}(H^ - \lambda \mathbf{1})$. Como $(H_\gamma - \lambda \mathbf{1})\psi \in \text{img}(\bar{H} - \lambda \mathbf{1})$, $\forall \psi \in \text{dom}(H_\gamma - \lambda \mathbf{1})$, e $L^2(\mathcal{S}') = \text{img}(\bar{H} - \lambda \mathbf{1}) \oplus \text{N}(H^* - \lambda \mathbf{1})$, segue que $0 = P_V((H_\gamma - \lambda \mathbf{1})\psi) = T\psi_\zeta$, $\forall \psi \in \text{dom}(H_\gamma - \lambda \mathbf{1})$, isto é, $T \equiv 0$. Então $X = \hat{\gamma}_0 V = \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$, com $\text{dom} L = \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$ e $L \equiv 0$. Observamos que $\text{dom}(H_\gamma - \lambda \mathbf{1}) \not\subset \mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$, pelo Teorema 2.6.*

Exemplo 2.8 *Considere agora a extensão auto-adjunta de Neumann $H_{\gamma_1} - \lambda \mathbf{1}$, com domínio $\text{dom}(H_{\gamma_1} - \lambda \mathbf{1}) = \{\psi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') : \gamma_1 \psi = 0\}$. Visto que $(\gamma_0, \gamma_1) : \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \rightarrow \mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S}) \times \mathcal{H}^{1/2}(\mathcal{S})$ é sobrejetora (ver [34], Capítulo 1, Seção 8), $(\gamma_0, \gamma_1)(\text{dom}(H_{\gamma_1} - \lambda \mathbf{1})) = \mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S}) \times \{0\}$, e assim $\text{dom} L = \mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S})$ e $X = \mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$, uma vez que $\mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S})$ é denso em $\mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$. O domínio $\text{dom}(H_{\gamma_1} - \lambda \mathbf{1})$ é caracterizado por*

$$\gamma \psi - L\gamma_0 \psi = 0, \quad \text{para } \gamma_0 \psi \in \mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S}),$$

ou seja,

$$\gamma_1 \psi - P\gamma_0 \psi - L\gamma_0 \psi = 0, \quad \text{para } \gamma_0 \psi \in \mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S}),$$

quando $\psi \in \text{dom}(H_{\gamma_1} - \lambda \mathbf{1})$. Como $\gamma_1 \psi = 0$ em $\text{dom}(H_{\gamma_1} - \lambda \mathbf{1})$, então $L + P = 0$ em $\mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S})$, isto é, $L = -P$ e $\text{dom} L = \mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S})$. Observamos que neste exemplo $\text{dom} T = K(\text{dom} L) = K(\mathcal{H}^{3/2}(\mathcal{S}))$, $V = K(X) = K(\mathcal{H}^{-1/2}(\mathcal{S})) = N(H^* - \lambda \mathbf{1})$ e $\langle T\psi, \varphi \rangle = (-P\gamma_0\psi, \gamma_0\varphi)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$, $\forall \psi \in \text{dom} T, \forall \varphi \in V$.

Capítulo 3

Espalhamento para o Efeito

Aharonov-Bohm

Neste capítulo nosso objetivo é fazer um estudo da teoria de espalhamento para algumas extensões do hamiltoniano de Aharonov-Bohm do solenóide infinito de raio positivo no plano \mathbb{R}^2 . Um dos pontos é mostrar a existência dos operadores de onda e que são completos, bem como obter sua expressão explícita. Nosso estudo foi baseado em [43], o qual, entre outras coisas, fez um estudo para a extensão auto-adjunta de Dirichlet. Nossa contribuição foi realizar um estudo similar para as extensões auto-adjuntas de Neumann e do tipo Robin, encontradas na Seção 2.1 do Capítulo 2 desta tese, e então comparar algumas grandezas relacionadas aos respectivos espalhamentos. Obteremos que o operador de espalhamento do caso Robin comporta-se como o do caso Neumann para altas energias (Observação 3.2). Por outro lado, para baixas energias o operador de espalhamento tem o mesmo comportamento nos três casos.

Na seção 3.1 aparece uma breve revisão da teoria de espalhamento e o contexto necessário às seções seguintes. Na seção 3.2 descrevemos as extensões auto-adjuntas com as quais iremos trabalhar. Nas seções 3.3 e 3.4 fazemos um estudo da teoria de espalhamento para as extensões de Neumann e do tipo Robin, respectivamente. Finalmente na seção 3.5 apresentamos alguns gráficos e comentários comparando alguns resultados obtidos nas seções anteriores.

Embora em princípio as discussões nos casos das extensões de Dirichlet e Neumann seguem do caso Robin, na prática os estudos de Dirichlet e Neumann guiam as considerações no caso Robin; assim consideramos os três casos explicitamente. Por conveniência denota-

remos por $ka \rightarrow \infty$ as situações em que ka for suficientemente grande e por $ka \rightarrow 0$ quando ka for suficientemente pequeno.

3.1 Teoria de Espalhamento

Nesta seção faremos uma rápida descrição da teoria de espalhamento, baseada principalmente em [7, 43], voltada para o que pretendemos fazer nas próximas seções. Para detalhes e um estudo profundo da teoria de espalhamento veja também [41, 46].

Consideremos um sistema em mecânica quântica cujos estados ξ são vetores unitários em um espaço de Hilbert \mathcal{H} e cuja evolução temporal é gerada por um operador auto-adjunto H agindo em \mathcal{H} . A teoria de espalhamento dependente do tempo está preocupada com a questão de saber se os estados $e^{-iHt}\xi$ são “estados de espalhamento”, isto é, se para $t \rightarrow \pm\infty$ eles “comportam-se como” estados que são “livres” em um sentido apropriado. Isto implica na comparação da dinâmica e^{-iHt} com a dinâmica livre e^{-iH_0t} que age em geral em outro espaço de Hilbert \mathcal{H}_0 . Assim, também precisamos de uma aplicação de comparação $\mathcal{J} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$, a qual é um operador unitário. Mais precisamente, um estado $\xi \in \mathcal{H}$ é um estado de espalhamento se podemos encontrar estados livres $\xi_{\pm} \in \mathcal{H}_0$ de modo que a diferença

$$\|e^{-iHt}\xi - \mathcal{J}e^{-iH_0t}\xi_{\pm}\| = \|\xi - e^{iHt}\mathcal{J}e^{-iH_0t}\xi_{\pm}\|$$

vai a zero quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Definição 3.1 *Os operadores de onda são os limites fortes*

$$\mathcal{W}_{\pm} := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt}\mathcal{J}e^{-iH_0t},$$

se eles existirem.

Assim, a relação entre ξ_{\pm} e ξ acima pode ser escrita como

$$\xi = \mathcal{W}_{\pm}\xi_{\pm}.$$

Definição 3.2 *Os operadores de onda \mathcal{W}_{\pm} são ditos completos se $\text{img } \mathcal{W}_{\pm} = \mathcal{H}_p(H)^{\perp}$, com $\mathcal{H}_p(H)$ denotando o fecho do subespaço gerado pelos autovetores de H .*

Desde que para $\xi \in \text{dom } \mathcal{W}_{\pm}$ temos

$$\|\mathcal{W}_{\pm}\xi\| = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{iHt}\mathcal{J}e^{-iH_0t}\xi\| = \|\xi\|,$$

segue que $\mathcal{W}_\pm : \text{dom } \mathcal{W}_\pm \rightarrow \text{img } \mathcal{W}_\pm$ são isometrias parciais. Assim, $\mathcal{W}_\pm \mathcal{W}_\pm^*$ são projeções ortogonais sobre $\text{img } \mathcal{W}_\pm$ e restrito a estes subespaços $\mathcal{W}_\pm^* = \mathcal{W}_\pm^{-1}$.

Os vetores ξ_+ e ξ_- estão relacionados por

$$\xi_+ = S\xi_-,$$

sendo S dado por

$$S := \mathcal{W}_+^* \mathcal{W}_-,$$

o qual é chamado *operador de espalhamento* ou *matriz S* .

Neste início a descrição foi bem geral, mas a partir de agora e por todo este capítulo consideraremos a situação especial em que \mathcal{H} é o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável dependendo de pontos $\vec{x} = (x, y)$ no plano. Isto corresponde ao sistema físico que queremos modelar, a saber, espalhamento de partículas fora de um obstáculo cilíndrico. Neste caso negligenciaremos a coordenada ao longo do eixo do cilindro e, assim, somente consideraremos espalhamento no plano. Ao longo deste capítulo nos limitaremos a uma situação deste tipo, ou seja, uma partícula (não-relativística) espalhando longe de um potencial contínuo de *curto alcance* $V(x, y)$, em que V é de curto alcance se existem constantes $C, R > 0$ de modo que

$$|V(x, y)| \leq \frac{C}{|(x, y)|^{1+\delta}}, \quad \forall |(x, y)| > R,$$

para algum $\delta > 0$. Esta é uma classificação tradicional e tecnicamente conveniente em teoria de espalhamento.

Sejam

$$H = -\Delta + V(x, y) \quad \text{e} \quad H_0 = p_1^2 + p_2^2,$$

agindo nos espaços posição, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$, e momento, $\mathcal{H}_0 = L^2(\hat{\mathbb{R}}^2)$, respectivamente, em que $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $p^2 = |\vec{p}|^2$ e o operador comparação \mathcal{J} é a transformada inversa de Fourier \mathcal{F} .

Por outro lado, na teoria de espalhamento independente do tempo resolve-se a equação de Schrödinger independente do tempo $H\varphi = p^2\varphi$ para as funções de entrada $\varphi_-(\vec{x}, \vec{p})$ e saída $\varphi_+(\vec{x}, \vec{p})$, as quais se reduzem a ondas planas $\phi(\vec{x}, \vec{p}) = e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}$ para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, sendo estas soluções da equação de Schrödinger da partícula livre. A conexão com os operadores de onda \mathcal{W}_\pm definidos acima é dada por

$$(\mathcal{W}_\pm \zeta)(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi_\pm(\vec{x}, \vec{p}) \zeta(\vec{p}) d\vec{p}, \quad \zeta \in \mathcal{H}_0.$$

De agora em diante consideremos o caso em que $V(x, y)$ é uma função esfericamente simétrica $V(r)$, e usaremos coordenadas polares tanto no espaço de posição (r, θ) como no espaço de momentos (k, θ') . Nas novas coordenadas

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V(r) \quad \text{e} \quad H_0 = k^2,$$

respectivamente. Na teoria de espalhamento independente do tempo considera-se o comportamento assintótico da solução (função de onda de entrada) da equação de Schrödinger independente do tempo, a qual para este caso no plano é

$$\varphi_-(r, \theta; k, \theta') \sim e^{ikr \cos(\theta - \theta')} + f(k, \theta - \theta') \frac{e^{ikr}}{r^{1/2}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

sendo f a chamada *amplitude de espalhamento*. A *seção de choque de espalhamento diferencial* é então dada por (na notação usual em física)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right) (k, \theta) = |f(k, \theta)|^2.$$

Fisicamente esta quantidade mede a densidade de probabilidade de uma partícula incidente, depois da interação com o alvo (centro espalhador), ou seja, uma partícula espalhada, ser encontrada dentro de um cone em torno de (k, θ) .

Para encontrar o comportamento assintótico de φ_- , e portanto, a amplitude de espalhamento $f(k, \theta)$, procedemos como segue. Primeiro fazemos a expansão de Fourier do fator de onda plana e da amplitude de espalhamento

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{|m|} J_{|m|}(kr) e^{im\theta}, \quad f(k, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(k) e^{im\theta},$$

respectivamente, sendo que J_n denota a função de Bessel de primeira espécie de ordem n . Substituindo em (3.1), usando o comportamento assintótico de $J_n(r)$ [37],

$$J_n(r) \sim \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{1/2} \cos \left(r - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4} \right), \quad r \rightarrow \infty,$$

e lembrando que $\cos \vartheta = (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta})/2$, obtemos

$$\varphi_-(r, \theta; k, 0) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m e^{i\pi/4 - ikr}}{(2\pi kr)^{1/2}} + \left(\frac{e^{-i\pi/4}}{(2\pi kr)^{1/2}} + \frac{f_m}{r^{1/2}} \right) e^{ikr} \right] e^{im\theta}. \quad (3.2)$$

Por outro lado, φ_- resolve a equação de Schrödinger e é regular na origem. Usando separação de variáveis chegamos a

$$\varphi_-(r, \theta; k, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(k) \varphi_m(r, k) e^{im\theta}, \quad (3.3)$$

sendo φ_m uma solução para a equação de Schrödinger radial de momento angular m ,

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{m^2}{r^2} + V(r) \right) \varphi = k^2 \varphi,$$

a qual é regular na origem. Desde que V é de curto alcance, o comportamento de φ_m para $r \rightarrow \infty$ deve ser

$$\varphi_m(r, k) \sim (2/\pi)^{1/2} \cos \left(kr - \frac{1}{2} |m| \pi - \frac{\pi}{4} + \delta_m(k) \right) / (kr)^{1/2}, \quad (3.4)$$

em que o deslocamento de fase δ_m mede a diferença no argumento quando comparado com o comportamento assintótico de $J_{|m|}(kr)$, a qual é a solução da equação radial livre, ou seja, com $V = 0$, que é regular na origem.

Agora podemos comparar o comportamento assintótico de φ_- dado por (3.2) por um lado, e por (3.3) e (3.4) por outro. Esta comparação leva a

$$a_m(k) = i^{|m|} e^{i\delta_m(k)}$$

e

$$f_m(k) = \frac{e^{2i\delta_m(k)} - 1}{(2\pi ik)^{1/2}}.$$

Assim, finalmente obtemos

$$f(k, \theta) = \frac{1}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m(k)} - 1) e^{im\theta}, \quad (3.5)$$

a qual expressa formalmente a amplitude de espalhamento em termos dos deslocamentos de fase δ_m .

Na abordagem dependente do tempo a simetria esférica pode ser levada em conta similarmente. Decompomos \mathcal{H} e \mathcal{H}_0 em subespaços \mathbf{H}_m , $\mathbf{H}_{0,m}$ com correspondentes projeções P_m , $P_{0,m}$. Por exemplo,

$$(P_m \eta)(r, \theta) = \frac{e^{im\theta}}{(2\pi)^{1/2}} \eta_m(r),$$

sendo

$$\eta_m(r) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \eta(r, \theta) d\theta$$

as componentes de η com momento angular m , pertencendo ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_r = L^2_{rdr}([0, \infty))$. O Hamiltoniano H deixa \mathbf{H}_m invariante e dá origem a uma sequência de Hamiltonianos

$$H_m = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{m^2}{r^2} + V(r)$$

em \mathcal{H}_r . A transformada inversa de Fourier \mathcal{F} pode ser decomposta como

$$(\mathcal{F}\zeta)(r, \theta) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} (\mathcal{F}_m \zeta_m)(r),$$

sendo $\mathcal{F}_m : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_r$ o operador unitário dado por

$$(\mathcal{F}_m \psi)(r) = i^{|m|} \int_0^{\infty} J_{|m|}(kr) \psi(k) k dk,$$

em que $\mathcal{H}_k = L^2_{kdk}([0, \infty))$. Correspondentemente, consideramos uma sequência de operadores de onda de \mathcal{H}_k em \mathcal{H}_r

$$\mathcal{W}_{\pm, m} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_m t} \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t}.$$

Como aqui estamos em \mathbb{R}^2 inteiro, isto é, sem obstáculo, para os potenciais V considerados aqui nesta seção, ou seja, V de curto alcance, mostra-se que $\mathcal{W}_{\pm, m}$ existem e são completos em cada setor m . A relação deles com a abordagem independente do tempo é dada por

$$(\mathcal{W}_{\pm, m} \psi)(r) = i^{|m|} \int_0^{\infty} \varphi_m(k, r) e^{\mp i\delta_m(k)} \psi(k) k dk.$$

Então a correspondente matriz S no setor m , $S_m : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$,

$$S_m = \mathcal{W}_{+, m}^* \mathcal{W}_{-, m},$$

é dada por

$$\begin{aligned} (S_m \psi)(k) &= [\mathcal{W}_{+, m}^* (\mathcal{W}_{-, m} \psi)](k) = (-i)^{|m|} \int_0^{\infty} \overline{\varphi_m(k, r)} e^{i\delta_m(k)} (\mathcal{W}_{-, m} \psi)(r) r dr \\ &= (-i)^{|m|} \int_0^{\infty} \overline{\varphi_m(k, r)} e^{i\delta_m(k)} \left[i^{|m|} \int_0^{\infty} \varphi_m(k', r) e^{i\delta_m(k')} \psi(k') k' dk' \right] r dr \\ &= \int_0^{\infty} e^{i[\delta_m(k) - \delta_m(k')]} \left[\int_0^{\infty} \overline{\varphi_m(k, r)} \varphi_m(k', r) r dr \right] \psi(k') k' dk' \\ &= \int_0^{\infty} e^{i[\delta_m(k) - \delta_m(k')]} \psi(k') \delta(k - k') k' dk' \\ &= e^{2i\delta_m(k)} \psi(k), \quad \psi \in \mathcal{H}_k, \end{aligned}$$

isto é,

$$(S_m \psi)(k) = \begin{cases} e^{2i\delta_m(k)} \psi(k), & k = k', \\ 0, & k \neq k', \end{cases}$$

ou seja, S_m é o operador de multiplicação por $e^{2i\delta_m(k)}$ em \mathcal{H}_k .

O operador de onda \mathcal{W}_{\pm} da Definição 3.1 agora pode ser escrito como

$$(\mathcal{W}_{\pm} \zeta)(r, \theta) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} (\mathcal{W}_{\pm, m} \zeta_m)(r).$$

Similarmente, o operador de espalhamento $S : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ satisfaz

$$\begin{aligned} \langle \zeta, S\xi \rangle &= \int \overline{\zeta(k, \theta)} (S\xi)(k, \theta) d\theta k dk = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{\zeta_m(k)} S_m(k) \xi_m(k) k dk \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[(2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} \overline{\zeta(k, \theta)} e^{im\theta} d\theta \right] e^{2i\delta_m(k)} \left[(2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} \xi(k, \theta') e^{-im\theta'} d\theta' \right] k dk \\ &= \langle \zeta, \xi \rangle + (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \overline{\zeta(k, \theta)} \xi(k, \theta') (e^{2i\delta_m(k)} - 1) d\theta d\theta' k dk, \end{aligned}$$

e de (3.5) concluímos que

$$\langle \zeta, S\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle + \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\zeta(k, \theta)} \xi(k, \theta') \left(\frac{ik}{2\pi} \right)^{1/2} f(k, \theta - \theta') d\theta d\theta' k dk,$$

$\forall \zeta, \xi \in \mathcal{H}_0$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em \mathcal{H}_0 , e assim

$$“(S - \mathbf{1})(k, \theta) = \left(\frac{ik}{2\pi} \right)^{1/2} f(k, \theta)”,$$

entendido no sentido descrito acima, a qual é a relação correta entre f e S .

3.2 Extensões Auto-Adjuntas

Nesta seção iremos descrever para quais extensões auto-adjuntas do hamiltoniano de Aharonov-Bohm do solenóide infinito de raio positivo no plano faremos teoria de espalhamento. Escolhemos algumas das extensões auto-adjuntas que preservam momento angular uma vez que estamos considerando que os subespaços \mathbf{H}_m são invariantes por H . Além disso, as extensões descritas abaixo são as mais comuns e as mais vistas na literatura quando fronteiras são consideradas. Entretanto, existem extensões que não preservam momento angular, veja, por exemplo, [2] na situação em que a matriz 2×2 entre os subespaços de deficiência, a qual dá todas as extensões auto-adjuntas do solenóide infinito de raio nulo, não é uma matriz diagonal; veja também [13].

Consideremos o operador formal

$$H = (-i\nabla - \mathbf{A})^2,$$

no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{S}')$, sendo \mathbf{A} , em coordenadas polares (r, θ) , dado por $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta)$, com $A_r \equiv 0$ e $A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi r}$, $r \geq a$. Este operador pode ser escrito em coordenadas polares como

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \alpha \right)^2,$$

sendo $\alpha = -\Phi/(2\pi)$. Sem perda de generalidade, vamos considerar $0 \leq \alpha < 1$.

O próximo passo é definir as desejadas extensões auto-adjuntas de H e isto é feito como segue. Fazendo a decomposição polar $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r^a \otimes \mathcal{H}_\theta$, sendo $\mathcal{H}_r^a = L_{rdr}^2([a, \infty))$ e $\mathcal{H}_\theta = L_{d\theta}^2(S^1)$, obtemos uma sequência de operadores formais

$$H_{m+\alpha} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\alpha)^2}{r^2}$$

em \mathcal{H}_r^a . Para alcançar nosso objetivo precisamos obter estes operadores como operadores auto-adjuntos em \mathcal{H}_r^a . Estes por sua vez não são essencialmente auto-adjuntos em $C_0^\infty((a, \infty))$ para qualquer $m + \alpha$. Para ver isto note que o termo potencial $(m + \alpha)^2/r^2$ é limitado em \mathcal{H}_r^a , então precisamos somente considerar o operador diferencial

$$h_1 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{4r^2}.$$

Mas usando o operador unitário $U : \mathcal{H}_r^a \rightarrow L_{dr}^2([a, \infty))$, dado por $(U\psi)(r) = r^{1/2}\psi(r)$, o operador h_1 transforma-se em

$$h_2 = -\frac{d^2}{dr^2},$$

ou seja, $Uh_1U^{-1} = h_2$, o qual não é essencialmente auto-adjunto em $C_0^\infty((a, \infty))$ visto que as funções $u_\pm(r) = e^{-e^{\pm i\pi/4}r} \in L_{dr}^2([a, \infty))$ e satisfazem $h_2^*u \pm iu = 0$, ou seja, $n_-(h_2) = n_+(h_2) = 1$. Note que isto justifica a afirmação feita na introdução do Capítulo 2 que $n_\pm(H) = \infty$.

Entretanto, podemos encontrar todas as extensões auto-adjuntas de h_2 [15], as quais são dadas por

$$\text{dom } h_2^{\tilde{\lambda}} = \{\psi \in \mathcal{H}^2([a, \infty)) : \psi(a) = \tilde{\lambda}\psi'(a)\}, \quad h_2^{\tilde{\lambda}}\psi = h_2\psi,$$

para cada $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Assim, temos as correspondentes extensões auto-adjuntas de $H_{m+\alpha}$

$$\text{dom } H_{m+\alpha}^{\tilde{\lambda}} = U^{-1}(\text{dom } h_2^{\tilde{\lambda}}), \quad H_{m+\alpha}^{\tilde{\lambda}}\psi = H_{m+\alpha}\psi,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \text{dom } H_{m+\alpha}^{\tilde{\lambda}} &= \left\{ u = r^{-1/2}\psi : \psi \in \mathcal{H}^2([a, \infty)) \text{ e } \psi(a) = \tilde{\lambda}\psi'(a) \right\} \\ &= \left\{ u \in U^{-1}(\mathcal{H}^2([a, \infty))) : r^{1/2}u(r)|_{r=a} = \tilde{\lambda} \frac{d}{dr}[r^{1/2}u(r)]|_{r=a} \right\}. \end{aligned}$$

Logo, as condições de fronteira que caracterizam as extensões auto-adjuntas de $H_{m+\alpha}$ são dadas por $(2a - \tilde{\lambda})u(a) = 2a\tilde{\lambda}u'(a)$. Se $\tilde{\lambda} \neq 2a$, então

$$\text{dom } H_{m+\alpha}^{\tilde{\lambda}} = \left\{ u \in U^{-1}(\mathcal{H}^2([a, \infty))) : u(a) = \frac{2a\tilde{\lambda}}{2a - \tilde{\lambda}}u'(a) \right\}.$$

Note que a extensão de Dirichlet correspondendo a $\tilde{\lambda} = 0$ em $L^2_{dr}([a, \infty))$ continua correspondendo a $\tilde{\lambda} = 0$ em \mathcal{H}_r^a ; entretanto, a extensão de Neumann que correspondia a $\tilde{\lambda} = \infty$ em $L^2_{dr}([a, \infty))$, agora corresponde a $\tilde{\lambda} = 2a$ em \mathcal{H}_r^a . A função que faz esta correspondência entre os $\tilde{\lambda}$'s é a função bijetora $g : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dada por $g(\tilde{\lambda}) = \frac{2a\tilde{\lambda}}{2a - \tilde{\lambda}}$, se $\tilde{\lambda} \neq 2a$, $g(2a) = \infty$ e $g(\infty) = -2a$.

Denotaremos as extensões auto-adjuntas de Neumann e do tipo Robin por $H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}$ e $H_{m+\alpha}^{\lambda}$, respectivamente, ou seja, Neumann é dada por

$$\text{dom } H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} = \{u \in U^{-1}(\mathcal{H}^2([a, \infty))) : u'(a) = 0\}, \quad H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}u = H_{m+\alpha}u,$$

e do tipo Robin por

$$\text{dom } H_{m+\alpha}^{\lambda} = \{u \in U^{-1}(\mathcal{H}^2([a, \infty))) : u(a) = \lambda u'(a)\}, \quad H_{m+\alpha}^{\lambda}u = H_{m+\alpha}u,$$

sendo $\lambda = 2a\tilde{\lambda}/(2a - \tilde{\lambda})$.

Note que fazendo uma integração por partes, segue que $\langle H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in \text{dom } H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}$, ou seja, o operador auto-adjunto $H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}$ é não-negativo e, portanto, $\sigma(H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}) \subset [0, \infty)$. O mesmo vale para o operador auto-adjunto $H_{m+\alpha}^{\lambda}$ se $\lambda \geq 0$; sendo assim, a partir de agora e por todo este capítulo sempre consideraremos $\lambda \geq 0$.

Como cada setor é invariante por H a extensão auto-adjunta de Neumann $H^{\mathcal{N}}$ de H é dada pela soma direta dos operadores auto-adjuntos em cada setor, isto é,

$$H^{\mathcal{N}} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} \otimes \mathbf{1}.$$

Similarmente, a extensão auto-adjunta do tipo Robin H^{λ} é dada por

$$H^{\lambda} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_{m+\alpha}^{\lambda} \otimes \mathbf{1},$$

e note que esta extensão foi descrita nos Exemplos 2.4 e 2.5 do Capítulo 2.

3.3 Espalhamento com a Extensão de Neumann

Nesta seção faremos um estudo da teoria de espalhamento para a extensão auto-adjunta de Neumann do operador de Aharonov-Bohm. Encontraremos, através da abordagem independente do tempo discutida na seção 3.1, o operador de espalhamento S ; mostraremos a existência dos operadores de onda e obteremos uma expressão explícita para eles, a qual dá uma conexão entre as abordagens independente e dependente do tempo. Além disso, determinaremos a amplitude de espalhamento e, conseqüentemente, a seção de choque de espalhamento para esta extensão de Neumann.

3.3.1 Operador de Espalhamento

Considerando que os operadores de onda existem e são completos, o que será discutido em seguida, agora obtemos o operador de espalhamento. A solução de

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\alpha)^2}{r^2} \right) \varphi = k^2 \varphi,$$

com derivada anulando-se em $r = a$ é dada por

$$\varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) = F_m^{\mathcal{N}}(k, a) \left(N'_{|m+\alpha|}(ka) J_{|m+\alpha|}(kr) - J'_{|m+\alpha|}(ka) N_{|m+\alpha|}(kr) \right),$$

sendo $N'_{|m+\alpha|}(ka) = \frac{dN_{|m+\alpha|}(kr)|_{r=a}}{dr}$, com J_ν e N_ν denotando as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente, de ordem ν [1, 23], e com $F_m^{\mathcal{N}}(k, a)$ a ser determinada impondo a condição (3.4). Usando os comportamentos assintóticos de J_ν e N_ν [37],

$$J_\nu(r) \sim \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{1/2} \cos \left(r - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{\pi}{4} \right), \quad r \rightarrow \infty,$$

e

$$N_\nu(r) \sim \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{1/2} \sin \left(r - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{\pi}{4} \right), \quad r \rightarrow \infty,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) \sim (2/\pi)^{1/2} F_m^{\mathcal{N}}(k, a) \left[\cos \left(kr - \frac{1}{2} |m+\alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) N'_{|m+\alpha|}(ka)/(kr)^{1/2} \right. \\ \left. - \sin \left(kr - \frac{1}{2} |m+\alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) J'_{|m+\alpha|}(ka)/(kr)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com (3.4) temos

$$\begin{aligned} F_m^{\mathcal{N}}(k, a) \left[\cos \left(kr - \frac{1}{2} |m+\alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) N'_{|m+\alpha|}(ka) \right. \\ \left. - \sin \left(kr - \frac{1}{2} |m+\alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) J'_{|m+\alpha|}(ka) \right] \\ = \cos \left(kr - \frac{1}{2} |m| \pi - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha) \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos \left(kr - \frac{1}{2} |m+\alpha| \pi - \frac{\pi}{4} + \theta_{\mathcal{N}} \right) = \cos \left(kr - \frac{1}{2} |m| \pi - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha) \right),$$

sendo $\theta_{\mathcal{N}}$ de modo que

$$\cos \theta_{\mathcal{N}} = \frac{N'_{|m+\alpha|}(ka)}{\sqrt{N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J'_{|m+\alpha|}(ka)^2}} \quad \text{e} \quad \sin \theta_{\mathcal{N}} = \frac{J'_{|m+\alpha|}(ka)}{\sqrt{N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J'_{|m+\alpha|}(ka)^2}},$$

e portanto, (3.4) é satisfeita se

$$F_m^{\mathcal{N}}(k, a) = \frac{1}{\sqrt{N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J'_{|m+\alpha|}(ka)^2}}.$$

Note que o denominador na expressão de $F_m^{\mathcal{N}}$ nunca se anula pois os zeros positivos das funções de Bessel, de ordem real não-negativa, e de suas derivadas são intercalados [1, 37].

Agora, comparando os argumentos na igualdade entre co-senos acima, segue que o deslocamento de fase $\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)$ é dado por

$$\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha) = \Delta_m(\alpha) + \theta_{\mathcal{N}},$$

em que $\Delta_m(\alpha) = \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \alpha|)$. Logo, o operador de espalhamento $S_{\alpha, m}^{\mathcal{N}} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ é dado por

$$e^{2i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} = e^{2i\Delta_m(\alpha)} (\cos 2\theta_{\mathcal{N}} + i \operatorname{sen} 2\theta_{\mathcal{N}}) = e^{2i\Delta_m(\alpha)} (\cos \theta_{\mathcal{N}} + i \operatorname{sen} \theta_{\mathcal{N}})^2,$$

e, lembrando as expressões de $\cos \theta_{\mathcal{N}}$ e $\operatorname{sen} \theta_{\mathcal{N}}$ acima e um cálculo rápido, chegamos a

$$e^{2i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} = -e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J'_{|m+\alpha|}(ka) - iN'_{|m+\alpha|}(ka)}{J'_{|m+\alpha|}(ka) + iN'_{|m+\alpha|}(ka)},$$

ou seja,

$$S_{\alpha, m}^{\mathcal{N}} = -e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)},$$

sendo $H_{\nu}^{(1),(2)}(x) = J_{\nu}(x) \pm iN_{\nu}(x)$ as funções de Hankel [1, 23].

3.3.2 Comportamento Assintótico do Operador de Espalhamento

Nesta seção encontraremos os comportamentos assintóticos do operador de espalhamento da extensão de Neumann para $ka \rightarrow \infty$ e para $ka \rightarrow 0$ e os compararemos com os do caso Dirichlet. Isto é feito a partir dos comportamentos assintóticos das funções de Bessel.

Começamos com o comportamento para $ka \rightarrow \infty$. Para isto usamos que

$$J'_{|m+\alpha|}(ka) = \left(-J_{|m+\alpha|+1}(ka)k + \frac{|m+\alpha|}{a} J_{|m+\alpha|}(ka) \right),$$

e assim, seu comportamento para $ka \rightarrow \infty$ é dado por

$$\begin{aligned} J'_{|m+\alpha|}(ka) &\sim - \left(\frac{2}{\pi ka} \right)^{1/2} \cos \left(ka - (|m+\alpha|+1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) k \\ &\quad + \frac{|m+\alpha|}{a} \left(\frac{2}{\pi ka} \right)^{1/2} \cos \left(ka - |m+\alpha| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

uma vez que $\cos(\vartheta - \pi/2) = \text{sen}(\vartheta)$, temos

$$J'_{|m+\alpha|}(ka) \sim - \left(\frac{2}{\pi ka} \right)^{1/2} \text{sen} \left(ka - |m+\alpha| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) k + \frac{|m+\alpha|}{a} \left(\frac{2}{\pi ka} \right)^{1/2} \cos \left(ka - |m+\alpha| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad ka \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

Similarmente,

$$N'_{|m+\alpha|}(ka) = \left(-N_{|m+\alpha|+1}(ka)k + \frac{|m+\alpha|}{a} N_{|m+\alpha|}(ka) \right),$$

e seu comportamento para $ka \rightarrow \infty$ é dado por

$$N'_{|m+\alpha|}(ka) \sim \left(\frac{2}{\pi ka} \right)^{1/2} \cos \left(ka - |m+\alpha| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) k + \frac{|m+\alpha|}{a} \left(\frac{2}{\pi ka} \right)^{1/2} \text{sen} \left(ka - |m+\alpha| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad ka \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) na expressão de $S_{\alpha,m}^{\mathcal{N}}$ temos

$$S_{\alpha,m}^{\mathcal{N}} \sim (-1)^m e^{-2ika+i\pi/2} \left[\frac{(ka)^2 + 2ik|m+\alpha| - |m+\alpha|^2}{(ka)^2 + |m+\alpha|^2} \right],$$

e, uma vez que neste caso o termo entre colchetes é aproximadamente 1, obtemos portanto

$$S_{\alpha,m}^{\mathcal{N}} \sim (-1)^m e^{-2ika+i\pi/2} = (-1)^m [\cos(-2ka + \pi/2) + i \text{sen}(-2ka + \pi/2)], \quad ka \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

No caso Dirichlet [43] tem-se

$$S_{\alpha,m}^{\mathcal{D}} \sim (-1)^m e^{-2ika-i\pi/2} = (-1)^m [\cos(-2ka - \pi/2) + i \text{sen}(-2ka - \pi/2)], \quad ka \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, levando em conta que os comportamentos das funções de Bessel [37] para $ka \rightarrow 0$ são dados por

$$J_{|m+\alpha|}(ka) \sim [(1/2)ka]^{|m+\alpha|} / \Gamma(|m+\alpha| + 1), \quad ka \rightarrow 0,$$

e

$$N_{|m+\alpha|}(ka) \sim - \frac{\Gamma(|m+\alpha|)}{\pi [(1/2)ka]^{|m+\alpha|}}, \quad ka \rightarrow 0,$$

obtemos o seguinte comportamento para o operador de espalhamento $S_{\alpha,m}^{\mathcal{N}}$ quando $ka \rightarrow 0$

$$S_{\alpha,m}^{\mathcal{N}} \sim \cos \beta \frac{c_2 - c_1(ka/2)^{4|m+\alpha|}}{c_2 + c_1(ka/2)^{4|m+\alpha|}} - \text{sen} \beta \frac{2c_3(ka/2)^{2|m+\alpha|}}{c_2 + c_1(ka/2)^{4|m+\alpha|}} + i \left[\text{sen} \beta \frac{c_2 - c_1(ka/2)^{4|m+\alpha|}}{c_2 + c_1(ka/2)^{4|m+\alpha|}} + \cos \beta \frac{2c_3(ka/2)^{2|m+\alpha|}}{c_2 + c_1(ka/2)^{4|m+\alpha|}} \right],$$

em que os coeficientes

$$c_1 := (|m + \alpha|/2)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 2)^2,$$

$$c_2 := [2\Gamma(|m + \alpha| + 1) - |m + \alpha|\Gamma(|m + \alpha|)]^2 \Gamma(|m + \alpha| + 2)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1)^2 / (4\pi^2), \quad e$$

$$c_3 := [2\Gamma(|m + \alpha| + 1) - |m + \alpha|\Gamma(|m + \alpha|)] \Gamma(|m + \alpha| + 2)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1) |m + \alpha| / (4\pi)$$

independem de k e sendo $\beta = \pi(|m| - |m + \alpha|)$. Para a situação em que $m = 0$ e $\alpha = 0$, obtemos

$$S_{0,0}^{\mathcal{N}} \sim \frac{1 - \pi^2(ka/2)^4}{1 + \pi^2(ka/2)^4} + i \frac{2\pi(ka/2)^2}{1 + \pi^2(ka/2)^4}, \quad ka \rightarrow 0.$$

Já no caso Dirichlet obtem-se

$$\begin{aligned} S_{\alpha,m}^{\mathcal{D}} \sim & \cos \beta \frac{\Gamma(|m + \alpha|)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1)^2 - \pi^2 (ka/2)^{4|m+\alpha|}}{\Gamma(|m + \alpha|)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1)^2 + \pi^2 (ka/2)^{4|m+\alpha|}} \\ & + \sin \beta \frac{2\pi \Gamma(|m + \alpha|) \Gamma(|m + \alpha| + 1) (ka/2)^{2|m+\alpha|}}{\Gamma(|m + \alpha|)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1)^2 + \pi^2 (ka/2)^{4|m+\alpha|}} \\ & + i \left[\sin \beta \frac{[\Gamma(|m + \alpha|)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1)^2 - \pi^2 (ka/2)^{4|m+\alpha|}]}{\Gamma(|m + \alpha|)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1)^2 + \pi^2 (ka/2)^{4|m+\alpha|}} \right. \\ & \left. - \cos \beta \frac{2\pi \Gamma(|m + \alpha|) \Gamma(|m + \alpha| + 1) (ka/2)^{2|m+\alpha|}}{\Gamma(|m + \alpha|)^2 \Gamma(|m + \alpha| + 1)^2 + \pi^2 (ka/2)^{4|m+\alpha|}} \right], \quad ka \rightarrow 0, \end{aligned}$$

e no caso em que $m = 0$ e $\alpha = 0$ tem-se

$$S_{0,0}^{\mathcal{D}} \sim \frac{1 - \frac{\pi^2}{4 \ln(ka)^2}}{1 + \frac{\pi^2}{4 \ln(ka)^2}} + i \frac{\pi}{\ln(ka) \left(1 + \frac{\pi^2}{4 \ln(ka)^2} \right)}, \quad ka \rightarrow 0,$$

uma vez que $N_0(ka) \sim 2 \ln(ka)/\pi$, quando $ka \rightarrow 0$.

Note que no caso $ka \rightarrow 0$ os operadores de espalhamento dos casos Neumann e Dirichlet têm o mesmo comportamento, ou pelo menos estão bem próximos, e isto ocorre tanto para o caso com campo ($\alpha \neq 0$) como para o caso sem campo ($\alpha = 0$). Estes comportamentos foram recuperados numericamente.

3.3.3 Operadores de Onda

Aqui mostraremos que os operadores de onda existem e são completos no caso da extensão de Neumann. Além disso, obteremos uma expressão explícita para eles. Iniciamos apresentando um lema que será usado nas demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Lema 3.1 *Sejam A e B operadores auto-adjuntos e U um operador limitado de modo que $AU = UB$, assumindo que isso esteja definido. Então*

$$e^{-iAt}U = Ue^{-iBt}.$$

Demonstração: Para $\xi \in \text{dom } B$ de modo que $U\xi \in \text{dom } A$ sejam $u(t) = Ue^{-iBt}\xi$ e $v(t) = e^{-iAt}U\xi$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que $u(t) = v(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Se $w(t) = \|v(t) - u(t)\|^2$, então

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{d}{dt} \langle v(t) - u(t), v(t) - u(t) \rangle = 2\text{Re} \left\langle v(t) - u(t), \frac{d}{dt} [v(t) - u(t)] \right\rangle \\ &= 2\text{Re} [(-i) (\langle e^{-iAt}U\xi, Ae^{-iAt}U\xi \rangle + \langle Ue^{-iBt}\xi, AUe^{-iBt}\xi \rangle - 2\text{Re} \langle Ae^{-iAt}U\xi, Ue^{-iBt}\xi \rangle)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois o que está entre parênteses é real visto que A é auto-adjunto. Logo $w(t)$ é constante. Como $w(0) = 0$, segue que $w(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. \square

Seja $P_a : \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r^a$, dado por $(P_a\psi)(r) = (\chi_{[a,\infty)}\psi)(r)$, o operador projeção ortogonal sobre \mathcal{H}_r^a .

Teorema 3.1 *Os operadores de onda*

$$\mathcal{W}_{\pm, \alpha, m}^{\mathcal{N}} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}t} P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2t}$$

existem e são isometrias sobrejetoras de \mathcal{H}_k em \mathcal{H}_r^a . Explicitamente, eles são dados por

$$(\mathcal{W}_{\pm, \alpha, m}^{\mathcal{N}}\psi)(r) = i^{|m|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) e^{\mp i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \psi(k) k dk, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_k. \quad (3.9)$$

Demonstração: Consideremos somente o caso $\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}}$, a demonstração para $\mathcal{W}_{+, \alpha, m}^{\mathcal{N}}$ é similar. Como a demonstração é extensa a dividiremos em três etapas:

1^a *Etapa:* Definir o operador candidato a limite e mostrar duas igualdades.

2^a *Etapa:* Mostrar que o operador de onda existe e satisfaz (3.9).

3^a *Etapa:* Mostrar que o operador de onda $\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}}$ é uma isometria sobrejetora.

1^a *Etapa:* Definir o operador candidato a limite e mostrar duas igualdades. Definamos o operador $U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}}$ por

$$(U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}}\psi)(r) = i^{|m|} \int_{\varepsilon}^R \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \psi(k) k dk,$$

com $\psi \in \mathcal{H}_k$ e $\text{supp } \psi \subset (\varepsilon, R)$. Este operador está bem-definido pela desigualdade de Hölder. Usando que

$$J_{|\nu|}(kr) = (2/\pi)^{1/2} \cos(kr - |\nu|\pi/2 - \pi/4)/(kr)^{1/2} + O((kr)^{-3/2})$$

e

$$N_{|\nu|}(kr) = (2/\pi)^{1/2} \text{sen}(kr - |\nu|\pi/2 - \pi/4)/(kr)^{1/2} + O((kr)^{-3/2}),$$

mostra-se que $U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \in \mathcal{H}_r^a$ e satisfaz

$$\|U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi\|_{\mathcal{H}_r^a} \leq C_{R, \varepsilon} \|\psi\|_{\mathcal{H}_k},$$

com $C_{R, \varepsilon}$ dependendo somente de R e ε .

Agora afirmamos que $U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi$ está no domínio de $H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}$ e satisfaz

$$H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi = U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} k^2 \psi.$$

De fato, seja $u \in \text{dom } H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}$. Então pelo teorema de Fubini podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} u, U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \rangle &= \int_a^\infty \overline{(H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} u)(r)} (U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi)(r) r dr \\ &= \int_a^\infty \left[\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\alpha)^2}{r^2} \right) \bar{u}(r) i^{|m|} \int_\varepsilon^R \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \psi(k) k dk \right] r dr \\ &= i^{|m|} \int_\varepsilon^R e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \psi(k) \left[(m+\alpha)^2 \int_a^\infty \frac{1}{r^2} \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) \bar{u}(r) r dr \right. \\ &\quad \left. - \int_a^\infty \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \bar{u}(r) r dr \right] k dk, \end{aligned}$$

e integrando por partes a segunda parcela entre colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} \langle H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} u, U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \rangle &= i^{|m|} \int_\varepsilon^R e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \psi(k) \left[\int_a^\infty \left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\alpha)^2}{r^2} \right) \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) \bar{u}(r) r dr \right] k dk, \end{aligned}$$

repare que não aparecem termos de fronteira uma vez que as derivadas de $\varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r)$ e u com relação à r se anulam em $r = a$. Portanto,

$$\langle H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} u, U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \rangle = i^{|m|} \int_\varepsilon^R e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \psi(k) \left[\int_a^\infty k^2 \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) \bar{u}(r) r dr \right] k dk,$$

e, novamente usando Fubini, chegamos a

$$\langle H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} u, U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \rangle = \int_a^\infty \bar{u}(r) i^{|m|} \int_\varepsilon^R \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} k^2 \psi(k) k dk r dr,$$

isto é,

$$\langle H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} u, U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \rangle = \langle u, U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} k^2 \psi \rangle,$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotando o produto interno em \mathcal{H}_r^a . Então $U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \in \text{dom } H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}$ e

$$H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi = U_{-, \alpha, m}^{\mathcal{N}} k^2 \psi.$$

Agora, aplicando o Lema 3.1 com $A = H_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}$, $B = k^2$ e $U = U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}$ concluímos que

$$e^{-iH_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}t}U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}\psi = U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}e^{-ik^2t}\psi.$$

2ª Etapa: Mostrar que o operador de onda existe e satisfaz (3.9). Usando a última igualdade podemos escrever, assumindo de agora em diante $\psi \in C_0^\infty((\varepsilon, R))$,

$$\begin{aligned} & \left\| e^{iH_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}t}P_a\mathcal{F}_m e^{-ik^2t}\psi - U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}\psi \right\|^2 = \left\| P_a\mathcal{F}_m e^{-ik^2t}\psi - e^{-iH_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}t}U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}\psi \right\|^2 \\ & = \left\| P_a\mathcal{F}_m e^{-ik^2t}\psi - U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}e^{-ik^2t}\psi \right\|^2 = \int_a^\infty \left| \left((P_a\mathcal{F}_m - U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}})e^{-ik^2t}\psi \right)(r) \right|^2 r dr \\ & = \int_a^\infty \left| i^{|m|} \int_0^\infty J_{|m|}(kr)e^{-ik^2t}\psi(k)k dk - i^{|m|} \int_\varepsilon^R dk k \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r)e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)}e^{-ik^2t}\psi(k)k dk \right|^2 r dr \\ & = \int_a^\infty \left| i^{|m|} \int_\varepsilon^R e^{-ik^2t}\psi(k) \left(J_{|m|}(kr) - \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r)e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \right) k dk \right|^2 r dr, \end{aligned}$$

e depois de alguns cálculos com o comportamento assintótico das duas funções entre parênteses acima, chegamos a

$$\begin{aligned} & \left\| e^{iH_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}t}P_a\mathcal{F}_m e^{-ik^2t}\psi - U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}\psi \right\|^2 \\ & = \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2t}\psi(k) \left[C_1(ka) \frac{e^{ikr}}{(kr)^{1/2}} + C_2(ka)O((kr)^{-3/2}) \right] k dk \right|^2 r dr, \end{aligned}$$

com C_1 e C_2 funções C^∞ . Finalmente, usando a desigualdade $\|f + g\|^2 \leq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| e^{iH_{m+\alpha}^{\mathcal{N}}t}P_a\mathcal{F}_m e^{-ik^2t}\psi - U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}\psi \right\|^2 & \leq 2 \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2t}\psi(k)C_1(ka) \frac{e^{ikr}}{(kr)^{1/2}} k dk \right|^2 r dr \\ & \quad + 2 \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2t}\psi(k)C_2(ka)O((kr)^{-3/2}) k dk \right|^2 r dr, \end{aligned}$$

Analisemos cada parcela a direita da desigualdade em separado. Na primeira, substituindo e^{-ik^2t+ikr} por $(-2ikt + ir)^{-1}\partial_k e^{-ik^2t+ikr}$, integrando por partes e fazendo uma estimativa superior temos que ela vai a zero quando $t \rightarrow -\infty$, pelo teorema da convergência dominada. Quanto à segunda, seja $g(kr) = O((kr)^{-3/2})$, então $g(kr) = L(kr)(kr)^{-3/2}$, com $L(kr)$ limitado. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2t}\psi(k)C_2(ka)O((kr)^{-3/2}) k dk \right|^2 r dr \\ & = \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2t}\psi(k)C_2(ka)L(kr)k^{-1/2}dk \right|^2 r^{-2} dr \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow -\infty$, aplicando o lema de Riemann-Lebesgue e o teorema da convergência dominada. Então

$$\left\| e^{iH_{m+\alpha}^{\mathcal{N}} t} P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi - U_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \right\| \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow -\infty$, e desde que $C_0^\infty((0, \infty))$ é denso em \mathcal{H}_k , segue que o operador de onda $\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}$ existe e satisfaz (3.9).

3ª Etapa: Mostrar que o operador de onda $\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}$ é uma isometria sobrejetora. Para provar que $\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}$ é uma isometria tomamos $\psi \in \mathcal{H}_k$ com suporte compacto e

$$\left\| \mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}} \psi \right\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left\| P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi \right\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left\| \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi \right\| = \|\psi\|.$$

De fato, a integral $\int_0^a |(\mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi)(r)|^2 r dr$ anula-se para $t \rightarrow -\infty$ pelo lema de Riemann-Lebesgue e teorema da convergência dominada.

Para mostrar que $\text{img } \mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}} = \mathcal{H}_r^a$ é suficiente mostrar que seu adjunto é uma isometria, pois daí segue que $\{0\} = \text{N}((\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}})^*) = (\text{img } \mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}})^\perp$, e assim $\text{img } \mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}} = \mathcal{H}_r^a$. Como $\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}(\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}})^*$ é uma projeção ortogonal sobre $\text{img } \mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}$, o qual é fechado, e visto que

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}((\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}})^* \psi)(k)](r) &= i^{|m|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} ((\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}})^* \psi)(k) k dk \\ &= i^{|m|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, r) e^{i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \left((-i)^{|m|} \int_a^\infty \varphi_m^{\mathcal{N}}(k, s) e^{-i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} \psi(s) s ds \right) k dk \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R F_m^{\mathcal{N}}(k, a) D_\nu^{\mathcal{N}}(ka, kr) \int_a^\infty F_m^{\mathcal{N}}(k, a) D_\nu^{\mathcal{N}}(ka, ks) \psi(s) s ds k dk, \end{aligned}$$

lembrando que $F_m^{\mathcal{N}}(k, a) = [N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J'_{|m+\alpha|}(ka)^2]^{-1/2}$, com $\nu = |m + \alpha|$ e

$$D_\nu^{\mathcal{N}}(ka, y) := N'_\nu(ka) J_\nu(y) - J'_\nu(ka) N_\nu(y),$$

em que a linha denota a derivada de $N_\nu(kr)$ com relação à r calculada no ponto $r = a$, precisamos somente demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.2 *Sejam $\psi \in C_0^\infty((a, \infty))$ e $\nu \geq 0$. Então*

$$\psi(r) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1/R}^R [J'_\nu(ka)^2 + N'_\nu(ka)^2]^{-1} D_\nu^{\mathcal{N}}(ka, kr) \int_a^\infty D_\nu^{\mathcal{N}}(ka, ks) \psi(s) s ds k dk. \quad (3.10)$$

Então segue deste lema que

$$[\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}}((\mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}})^* \psi)(k)](r) = \psi(r),$$

$\forall \psi \in C_0^\infty((a, \infty))$, e uma vez que este conjunto é denso em \mathcal{H}_r^a obtemos $\text{img } \mathcal{W}_{-\alpha, m}^{\mathcal{N}} = \mathcal{H}_r^a$ e o teorema está demonstrado. \square

Na sequência apresentamos a demonstração do Lema 3.2.

Demonstração: [do Lema 3.2] Visto que o Wronskiano de $J_\nu(z)$ e $N_\nu(z)$ é igual a $2/(\pi z)$ [37], ou seja, $W_z[J_\nu, N_\nu] = 2/(\pi z)$, encontramos que $W_r[J_\nu(kr), N_\nu(kr)] = 2/(\pi r)$. Agora, consideramos o problema de valor de fronteira (ver, por exemplo, [44])

$$\begin{aligned} (E - H_\nu)\varphi &= \psi, \quad a < r < \infty, \quad |\operatorname{Im} E| > 0, \\ \varphi'(a) &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

A função de Green

$$g(r|s) = \begin{cases} \frac{u_1(r)u_2(s)}{W_s[u_1, u_2]}, & a < r < s, \\ \frac{u_1(s)u_2(r)}{W_s[u_1, u_2]}, & s < r < \infty, \end{cases}$$

é a solução do problema auxiliar

$$\begin{aligned} (E - H_\nu)g &= \delta(r - s), \quad a < r < \infty, \\ g'(a) &= 0, \end{aligned}$$

sendo

$$u_1(r) = N'_\nu(E^{1/2}a)J_\nu(E^{1/2}r) - J'_\nu(E^{1/2}a)N_\nu(E^{1/2}r) = D_\nu^N(E^{1/2}a, E^{1/2}r),$$

solução de $(E - H_\nu)u = 0$, satisfazendo a condição de fronteira em $r = a$, e

$$u_2(r) = H_\nu^{(1),(2)}(E^{1/2}r),$$

solução de $(E - H_\nu)u = 0$, satisfazendo a condição de fronteira no ∞ , em que (1) e (2) correspondem a $\operatorname{Im} E > 0$ (com $\operatorname{Im} \sqrt{E} > 0$) e $\operatorname{Im} E < 0$ (com $\operatorname{Im} \sqrt{E} < 0$), respectivamente; $W_s[u_1, u_2]$ é o wronskiano de u_1 e u_2 no ponto $r = s$, e que neste caso dá

$$W_s[u_1, u_2] = \frac{2}{\pi s} \frac{du_2}{dr}(a),$$

Então, denotando por $R_E := (E - H_\nu)^{-1}$ o resolvente de H_ν no ponto E , a solução $(R_E\psi)(r)$ de (3.11) é dada por

$$\begin{aligned} (R_E\psi)(r) &= \int_a^\infty g(r|s)\psi(s)ds = \int_a^r \frac{u_1(s)u_2(r)}{W_s[u_1, u_2]}\psi(s)ds + \int_r^\infty \frac{u_1(r)u_2(s)}{W_s[u_1, u_2]}\psi(s)ds \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{dH_\nu^{(1),(2)}}{dr}(E^{1/2}a) \right]^{-1} \left[H_\nu^{(1),(2)}(E^{1/2}r) \int_a^r D_\nu^N(E^{1/2}a, E^{1/2}s)\psi(s)s ds \right. \\ &\quad \left. + D_\nu^N(E^{1/2}a, E^{1/2}r) \int_r^\infty H_\nu^{(1),(2)}(E^{1/2}s)\psi(s)s ds \right]. \end{aligned}$$

Relembramos agora a fórmula de Stone para a projeção espectral de H_ν em $[a, b]$,

$$\chi_{[a,b]}(H_\nu) = s - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (R_{x-i\delta} - R_{x+i\delta}) dx.$$

Assim, sejam $E_- = x - i\delta$ e $E_+ = x + i\delta$ os pontos E com $\text{Im } E < 0$ e $\text{Im } E > 0$, respectivamente. Então

$$[\chi_{[1/R,R]}(H_\nu)\psi](r) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{1/R}^R [(R_{E_-}\psi)(r) - (R_{E_+}\psi)(r)] dx,$$

e, substituindo as respectivas expressões acima para os resolventes e usando o teorema da convergência dominada (uma vez que as funções J_ν e N_ν são contínuas e limitadas), após alguns cálculos e simplificações chegamos a

$$[\chi_{[1/R,R]}(H_\nu)\psi](r) = \frac{1}{2} \int_{1/R}^R \frac{D_\nu^N(x^{1/2}a, x^{1/2}r)}{J'_\nu(x^{1/2}a)^2 + N'_\nu(x^{1/2}a)^2} \int_a^\infty D_\nu^N(x^{1/2}a, x^{1/2}s)\psi(s)s ds dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x^{1/2} = k$, temos $dx/2 = k dk$ e encontramos

$$[\chi_{[1/R,R]}(H_\nu)\psi](r) = \int_{1/R}^R [J'_\nu(ka)^2 + N'_\nu(ka)^2]^{-1} D_\nu^N(ka, kr) \int_a^\infty D_\nu^N(ka, ks)\psi(s)s ds k dk,$$

a qual é igual q.t.p. na variável r à função definida pela integral no lado direito de (3.10).

Por outro lado, $\chi_{[a,b]}(H_\nu) \equiv 0$ para $[a, b] \subset (-\infty, 0)$ pelo Teorema 8.3.13 de [15], desde que $\sigma(H_\nu) \subset [0, \infty)$ e H_ν não tem autovalores. \square

3.3.4 Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque

Nesta seção encontraremos a amplitude de espalhamento e a seção de choque diferencial para o caso Neumann, sendo que algumas comparações com as seções de choque dos outros casos serão feitas adiante na Seção 3.5.

Antes, relembremos rapidamente o que foi feito em [43] para determinar a amplitude de espalhamento f_α para o caso do solenóide de raio zero com condição de Dirichlet na origem, pois a usaremos em nossos cálculos das amplitudes de espalhamento e seções de choque no caso de raio positivo para as extensões de Neumann, nesta seção, e Robin, na seção 3.4.3. Neste caso do raio zero, em cada setor de momento angular m encontra-se

$$\Delta_m(\alpha) = \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \alpha|),$$

para o deslocamento de fase que é função somente de α , e assim, o correspondente operador de espalhamento é

$$e^{2i\Delta_m(\alpha)} = \begin{cases} e^{-i\pi\alpha}, & m \geq -\alpha, \\ e^{i\pi\alpha}, & m \leq -\alpha. \end{cases}$$

Então, os coeficientes de Fourier de f_α na expressão (3.5) têm módulo constante e não vão a zero quando $|m| \rightarrow \infty$ e a amplitude de espalhamento f_α é vista como uma distribuição. Para obter a expressão correta da amplitude f_α nota-se que o operador de espalhamento S_α em \mathcal{H}_0 é um operador integral e usando-se as expressões acima obteve-se em [43] que

$$(S_\alpha \xi)(k, \theta) = \int_0^{2\pi} s_\alpha(\theta - \theta') \xi(k, \theta') d\theta',$$

sendo

$$s_\alpha(\theta) = \delta(\theta) \cos(\pi\alpha) + i \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} e^{-i[\alpha]\theta} \text{VP} \left(\frac{1}{e^{i\theta} - 1} \right),$$

em que $[\alpha]$ denota o maior inteiro menor ou igual a α e VP denota o valor principal. Destas expressões e da relação $(S - \mathbf{1})(k, \theta) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{1/2} f(k, \theta)$ tem-se que a amplitude de espalhamento é dada por

$$f_\alpha(k, \theta) = \left(\frac{2\pi}{ik}\right)^{1/2} \left[\delta(\theta) [\cos(\pi\alpha) - 1] + i \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} e^{-i[\alpha]\theta} \text{VP} \left(\frac{1}{e^{i\theta} - 1} \right) \right].$$

Agora, se $\theta \neq 0$ a distribuição f_α é representada por uma função e encontra-se

$$f_\alpha(k, \theta) = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{1/2}} \frac{e^{-i([\alpha]+1/2)\theta}}{\text{sen}(\theta/2)}, \quad \theta \neq 0,$$

e, conseqüentemente, a seção de choque diferencial neste caso é

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_\alpha(k, \theta) = \frac{1}{2\pi k} \frac{\text{sen}^2(\pi\alpha)}{\text{sen}^2(\theta/2)}, \quad \theta \neq 0,$$

as quais concordam com as expressões encontradas por Aharonov e Bohm [3] e por outros autores, como por exemplo, [28]. Desta forma vamos continuar olhando a amplitude de espalhamento como uma distribuição, a qual será convenientemente calculada a partir da série de Fourier.

Assim, para $\alpha = 0$ e por (3.5) a amplitude de espalhamento associada a H^N é dada por

$$f_0^N(k, \theta) = \frac{1}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\delta_m^N(k,0)} - 1 \right) e^{im\theta},$$

e uma vez que

$$e^{2i\delta_m^N(k,0)} = -\frac{H_{|m|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m|}^{(1)'}(ka)},$$

obtemos

$$f_0^N(k, \theta) = -\left(\frac{2}{\pi ik}\right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J'_{|m|}(ka)}{H_{|m|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta}.$$

Mas note que para ka fixado e $k \neq 0$ a série acima é convergente desde que seus coeficientes convergem rapidamente a zero para $|m| \rightarrow \infty$, em virtude do comportamento das funções

de Bessel quando sua ordem $|m| \rightarrow \infty$. Então neste caso $f_0^{\mathcal{N}}$ é representada por uma função e, conseqüentemente, a seção de choque diferencial é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_0^{\mathcal{N}}(k, \theta) = \frac{2}{\pi k} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J'_{|m|}(ka)}{H'_{|m|}(1)'(ka)} e^{im\theta} \right|^2.$$

Por outro lado, para $\alpha \notin \mathbb{Z}$ e novamente por (3.5) a amplitude de espalhamento associada a $H^{\mathcal{N}}$ é

$$f_{\alpha}^{\mathcal{N}}(k, \theta) = \frac{1}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} - 1 \right) e^{im\theta},$$

e visto que

$$e^{2i\delta_m^{\mathcal{N}}(k, \alpha)} = -e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)},$$

temos

$$f_{\alpha}^{\mathcal{N}}(k, \theta) = \frac{1}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} - 1 \right) e^{im\theta}.$$

Agora, seja $n \in \mathbb{Z}$ fixado e fazemos uma mudança no índice do somatório. Seja $m' = m + n$, então $m = m' - n$ e como $\Delta_m(\alpha) = (\pi/2)(|m| - |m + \alpha|)$, obtemos

$$f_{\alpha}^{\mathcal{N}}(k, \theta) = \frac{e^{-in\theta}}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \left(-e^{2i\delta_{m'}(\alpha-n)} (-1)^n \frac{H_{|m'+\alpha-n|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m'+\alpha-n|}^{(1)'}(ka)} - 1 \right) e^{im'\theta},$$

que pode ser escrito como

$$f_{\alpha}^{\mathcal{N}}(k, \theta) = (-1)^n e^{-in\theta} f_{\alpha-n}^{\mathcal{N}}(k, \theta) + (2\pi/ik)^{1/2} [(-1)^n - 1] \delta(\theta), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, a seção de choque diferencial (para $\theta \neq 0$) dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{\alpha}^{\mathcal{N}}(k, \theta) = \frac{1}{2\pi k} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} + 1 \right) e^{im\theta} \right|^2,$$

é periódica em α de período 1, como esperado. Assim, podemos assumir aqui $0 < \alpha < 1$. Como observado acima, para estudar melhor $f_{\alpha}^{\mathcal{N}}$ podemos escrever

$$f_{\alpha}^{\mathcal{N}}(k, \theta) = f_{\alpha}(k, \theta) + f_{r, \mathcal{N}}(k, \theta),$$

sendo f_{α} a amplitude de espalhamento do caso de raio nulo $a = 0$ com condição de Dirichlet na origem dada por

$$f_{\alpha}(k, \theta) = (2\pi ik)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\Delta_m(\alpha)} - 1 \right) e^{im\theta},$$

e com $f_{r,\mathcal{N}}$ dada por

$$f_{r,\mathcal{N}}(k, \theta) = - \left(\frac{2}{\pi i k} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J'_{|m+\alpha|}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta}.$$

Note que pelo mesmo argumento dado acima a série para $f_{r,\mathcal{N}}$ é convergente e lembramos que a amplitude f_α neste caso satisfaz

$$f_\alpha(k, \theta) = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{(2\pi i k)^{1/2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{\text{sen}(\theta/2)}, \quad \theta \neq 0.$$

Então, a seção de choque diferencial para $k \neq 0$ e $\theta \neq 0$ é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)_\alpha^{\mathcal{N}}(k, \theta) = \left| \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{(2\pi i k)^{1/2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{\text{sen}(\theta/2)} - \left(\frac{2}{\pi i k} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J'_{|m+\alpha|}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta} \right|^2.$$

3.4 Espalhamento com as Extensões do Tipo Robin

Nesta seção faremos um estudo da teoria de espalhamento para as extensões auto-adjuntas do tipo Robin. Note que aqui estão inclusos os casos Dirichlet e Neumann e, embora estes dois casos sejam uma consequência do caso Robin, na prática eles guiam as considerações para esse último caso.

3.4.1 Operador de Espalhamento

Considerando inicialmente que os operadores de onda existem e são completos, obteremos o operador de espalhamento. A solução de

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\alpha)^2}{r^2} \right) \varphi = k^2 \varphi,$$

com a combinação linear $\varphi - \lambda \frac{d\varphi}{dr}$ anulando-se em $r = a$, sendo $\lambda = \frac{2a\tilde{\lambda}}{2a - \tilde{\lambda}}$, é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_m^\lambda(k, r) = G_m^\lambda(k, a) & \left[(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka)) J_{|m+\alpha|}(kr) \right. \\ & \left. - (J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka)) N_{|m+\alpha|}(kr) \right], \end{aligned}$$

com $G_m^\lambda(k, a)$ a ser determinada impondo a condição (3.4). Usando novamente o comportamento assintótico de J_ν e N_ν para $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_m^\lambda(k, r) & \sim \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} G_m^\lambda(k, a) \\ & \cdot \left[\cos \left(kr - \frac{1}{2} |m+\alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) (N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka)) \right. \\ & \left. - \text{sen} \left(kr - \frac{1}{2} |m+\alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) (J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka)) \right]. \end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com (3.4) temos

$$\begin{aligned} G_m^\lambda(k, a) & \left[\cos \left(kr - \frac{1}{2} |m + \alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) (N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka)) \right. \\ & \quad \left. - \text{sen} \left(kr - \frac{1}{2} |m + \alpha| \pi - \frac{\pi}{4} \right) (J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka)) \right] \\ & = \cos \left(kr - \frac{1}{2} |m| \pi - \frac{\pi}{4} + \delta_m^\lambda(k, \alpha) \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos \left(kr - \frac{1}{2} |m + \alpha| \pi - \frac{\pi}{4} + \theta_\lambda \right) = \cos \left(kr - \frac{1}{2} |m| \pi - \frac{\pi}{4} + \delta_m^\lambda(k, \alpha) \right),$$

sendo θ_λ de modo que

$$\cos \theta_\lambda = \frac{N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka)}{D} \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta_\lambda = \frac{J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka)}{D},$$

com $D = \sqrt{\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 + \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2}$ e, portanto, (3.4) é satisfeita se

$$G_m^\lambda(k, a) = \frac{1}{D}.$$

Note que D nunca é zero. De fato, suponha $D = 0$. Então $N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) = 0$ e $J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) = 0$. Daí, segue que $J_{|m+\alpha|}(ka)N'_{|m+\alpha|}(ka) - N_{|m+\alpha|}(ka)J'_{|m+\alpha|}(ka) = 0$. Mas isto é uma contradição com $W_{r=a}[J_{|m+\alpha|}(kr), N_{|m+\alpha|}(kr)] = 2/(\pi a) \neq 0$.

Agora, comparando os argumentos na igualdade entre co-senos acima, segue que

$$\delta_m^\lambda(k, \alpha) = \Delta_m(\alpha) + \theta_\lambda,$$

e assim, com um cálculo similar ao feito no caso Neumann, o operador de espalhamento $S_{\alpha, m}^\lambda$ é dado por

$$e^{2i\delta_m^\lambda(k, \alpha)} = -e^{2i\Delta_m(\alpha)} \left[\frac{(J_{|m+\alpha|}(ka) - iN_{|m+\alpha|}(ka)) - \lambda (J'_{|m+\alpha|}(ka) - iN'_{|m+\alpha|}(ka))}{(J_{|m+\alpha|}(ka) + iN_{|m+\alpha|}(ka)) - \lambda (J'_{|m+\alpha|}(ka) + iN'_{|m+\alpha|}(ka))} \right],$$

ou seja,

$$S_{\alpha, m}^\lambda = -e^{2i\Delta_m(\alpha)} \left[\frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} \right].$$

Observação 3.1 Note que se tomarmos em particular $\tilde{\lambda} = 0$, ou seja, $\lambda = 0$, estamos no caso Dirichlet e recuperamos a expressão do operador S encontrada em [43]; e, se escolhermos $\tilde{\lambda} = 2a$, isto é, $\lambda = \infty$, obtemos o operador S para o caso Neumann da seção anterior.

Observação 3.2 *Notemos aqui um fato curioso do comportamento do operador de espalhamento $S_{\alpha,m}^\lambda$ para $ka \rightarrow \infty$. Considerando $\lambda \neq 0$ e o comportamento assintótico das funções de Bessel e das suas derivadas (veja subseção 3.3.2), obtemos para $ka \rightarrow \infty$*

$$S_{\alpha,m}^\lambda \sim (-1)^m e^{-2ika+i\pi/2} \left[\frac{(ka)^2 \lambda^2 + 2i\lambda(\lambda|m+\alpha| - a)ka - \lambda^2|m+\alpha|^2 + 2\lambda|m+\alpha|a - a^2}{(ka)^2 \lambda^2 + \lambda^2|m+\alpha|^2 - 2\lambda|m+\alpha| + a^2} \right],$$

e, como o termo entre colchetes é aproximadamente 1 neste caso, logo temos

$$S_{\alpha,m}^\lambda \sim (-1)^m e^{-2ika+i\pi/2} = (-1)^m [\cos(-2ka + \pi/2) + i \operatorname{sen}(-2ka + \pi/2)], \quad ka \rightarrow \infty,$$

o qual coincide com o do caso Neumann (3.8); ou seja, o operador de espalhamento do caso Robin comporta-se como o do caso Neumann para grandes energias, independentemente de λ , desde que $\lambda \neq 0$.

Por outro lado, para $ka \rightarrow 0$ o comportamento do operador de espalhamento $S_{\alpha,m}^\lambda$ é dado por

$$S_{\alpha,m}^\lambda \sim \cos \beta \frac{d_1^2 - d_2(ka/2)^{4|m+\alpha|}}{d_1^2 + d_2(ka/2)^{4|m+\alpha|}} - \operatorname{sen} \beta \frac{2d_1 d_3 (ka/2)^{2|m+\alpha|}}{d_1^2 + d_2(ka/2)^{4|m+\alpha|}} \\ + i \left[\operatorname{sen} \beta \frac{d_1^2 - d_2(ka/2)^{4|m+\alpha|}}{d_1^2 + d_2(ka/2)^{4|m+\alpha|}} + \cos \beta \frac{2d_1 d_3 (ka/2)^{2|m+\alpha|}}{d_1^2 + d_2(ka/2)^{4|m+\alpha|}} \right], \quad ka \rightarrow 0,$$

em que os coeficientes

$$d_1 := -\Gamma(|m+\alpha|)/\pi - \lambda[2\Gamma(|m+\alpha|+1) - |m+\alpha|\Gamma(|m+\alpha|)]/(\pi a),$$

$$d_2 := \Gamma(|m+\alpha|+1)^{-2}(1 + \lambda^2|m+\alpha|^2/a^2 - 2\lambda|m+\alpha|/a), \quad e$$

$$d_3 := \Gamma(|m+\alpha|+1)^{-1}(1 - \lambda|m+\alpha|/a),$$

são independentes de k e lembrando que $\beta = \pi(|m| - |m+\alpha|)$. No caso em que $m = 0$ e $\alpha = 0$ temos

$$S_{0,0}^\lambda \sim \frac{1 - \frac{\pi^2}{4\ln(ka)^2} + \lambda \left(\frac{2}{a\ln(ka)} - \frac{\pi^2(ka/2)^2}{a\ln(ka)^2} \right) + \lambda^2 \left(\frac{1 - \pi^2(ka/2)^4}{a^2\ln(ka)^2} \right)}{1 + \frac{\pi^2}{4\ln(ka)^2} + \lambda \left(\frac{2}{a\ln(ka)} + \frac{\pi^2(ka/2)^2}{a\ln(ka)^2} \right) + \lambda^2 \left(\frac{1 + \pi^2(ka/2)^4}{a^2\ln(ka)^2} \right)} \\ + i \frac{\pi}{\ln(ka)} \frac{1 + \lambda \left(\frac{1}{a\ln(ka)} + \frac{2(ka/2)^2}{a} \right) + \lambda^2 \frac{2(ka/2)^2}{a^2\ln(ka)}}{1 + \frac{\pi^2}{4\ln(ka)^2} + \lambda \left(\frac{2}{a\ln(ka)} + \frac{\pi^2(ka/2)^2}{a\ln(ka)^2} \right) + \lambda^2 \left(\frac{1 + \pi^2(ka/2)^4}{a^2\ln(ka)^2} \right)}, \quad ka \rightarrow 0.$$

Observamos que no caso $ka \rightarrow 0$ o operador de espalhamento do caso Robin tem comportamento muito próximo aos apresentados pelos casos Dirichlet e Neumann. Com isto concluímos que na situação $ka \rightarrow 0$ o operador de espalhamento dos três casos tem o mesmo comportamento.

3.4.2 Operadores de Onda

Agora mostraremos que de fato os operadores de onda para as extensões auto-adjuntas do tipo Robin existem, são completos e obteremos sua expressão explícita. Este é o conteúdo do próximo teorema, o qual generaliza o Teorema 3.1 da seção anterior.

Teorema 3.2 *Os operadores de onda*

$$\mathcal{W}_{\pm, \alpha, m}^\lambda = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_{m+\alpha}^\lambda t} P_\alpha \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t}$$

existem e são isometrias sobrejetoras de \mathcal{H}_k em \mathcal{H}_r^a . Explicitamente, eles são dados por

$$(\mathcal{W}_{\pm, \alpha, m}^\lambda \psi)(r) = i^{|m|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \varphi_m^\lambda(k, r) e^{\mp i \delta_m^\lambda(k, \alpha)} \psi(k) k dk, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_k. \quad (3.12)$$

Demonstração: A idéia da demonstração é similar a do caso Neumann, exceto por alguns detalhes técnicos. Consideremos somente $\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda$. Novamente dividiremos a demonstração em três etapas:

1^a *Etapa:* Definir o operador candidato a limite e mostrar duas igualdades.

2^a *Etapa:* Mostrar que o operador de onda existe e satisfaz (3.12).

3^a *Etapa:* Mostrar que o operador de onda $\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda$ é uma isometria sobrejetora.

1^a *Etapa:* Definir o operador candidato a limite e mostrar duas igualdades. Definamos um operador $U_{-, \alpha, m}^\lambda$ por

$$(U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi)(r) = i^{|m|} \int_\varepsilon^R \varphi_m^\lambda(k, r) e^{i \delta_m^\lambda(k, \alpha)} \psi(k) k dk,$$

com $\psi \in \mathcal{H}_k$ e $\text{supp } \psi \subset (\varepsilon, R)$. Usando os comportamentos assintóticos de $J_{|\nu|}(kr)$ e $N_{|\nu|}(kr)$ mostra-se que $U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi \in \mathcal{H}_r$ e satisfaz

$$\|U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi\|_{\mathcal{H}_r^a} \leq C_\lambda(R, \varepsilon) \|\psi\|_{\mathcal{H}_k},$$

com $C_\lambda(R, \varepsilon)$ dependendo somente de R e ε .

Agora afirmamos que $U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi$ está realmente no domínio de $H_{m+\alpha}^\lambda$ e satisfaz

$$H_{m+\alpha}^\lambda U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi = U_{-, \alpha, m}^\lambda k^2 \psi.$$

De fato, seja $u \in \text{dom } H_{m+\alpha}^\lambda$. Então pelo teorema de Fubini podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle H_{m+\alpha}^\lambda u, U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi \rangle &= \int_a^\infty \overline{(H_{m+\alpha}^\lambda u)(r)} (U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi)(r) r dr \\ &= \int_a^\infty \left[\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\alpha)^2}{r^2} \right) \bar{u}(r) i^{|m|} \int_\varepsilon^R \varphi_m^\lambda(k, r) e^{i \delta_m^\lambda(k, \alpha)} \psi(k) k dk \right] r dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i^{|m|} \int_{\varepsilon}^R e^{i\delta_m^\lambda(k,\alpha)} \psi(k) \left[(m+\alpha)^2 \int_a^\infty \frac{1}{r^2} \varphi_m^\lambda(k,r) \bar{u}(r) r dr \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^\infty \varphi_m^\lambda(k,r) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \bar{u}(r) r dr \right] k dk,
 \end{aligned}$$

e integrando por partes a segunda parcela entre colchetes, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\langle H_{m+\alpha}^\lambda u, U_{-\alpha,m}^\lambda \psi \rangle \\
 &= i^{|m|} \int_{\varepsilon}^R e^{i\delta_m^\lambda(k,\alpha)} \psi(k) \left[\int_a^\infty \left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\alpha)^2}{r^2} \right) \varphi_m^\lambda(k,r) \bar{u}(r) r dr \right] k dk,
 \end{aligned}$$

repare que não aparecem termos de fronteira uma vez que $\varphi_m^\lambda(k,a) = \lambda \frac{d\varphi_m^\lambda}{dr}(k,a)$ e $u(a) = \lambda u'(a)$. Portanto,

$$\langle H_{m+\alpha}^\lambda u, U_{-\alpha,m}^\lambda \psi \rangle = i^{|m|} \int_{\varepsilon}^R e^{i\delta_m^\lambda(k,\alpha)} \psi(k) \left[\int_a^\infty k^2 \varphi_m^\lambda(k,r) \bar{u}(r) r dr \right] k dk,$$

e, novamente usando Fubini, chegamos a

$$\langle H_{m+\alpha}^\lambda u, U_{-\alpha,m}^\lambda \psi \rangle = \int_a^\infty \bar{u}(r) i^{|m|} \int_{\varepsilon}^R \varphi_m^\lambda(k,r) e^{i\delta_m^\lambda(k,\alpha)} k^2 \psi(k) k dk r dr,$$

isto é,

$$\langle H_{m+\alpha}^\lambda u, U_{-\alpha,m}^\lambda \psi \rangle = \langle u, U_{-\alpha,m}^\lambda k^2 \psi \rangle,$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotando o produto interno em \mathcal{H}_r^a . Então $U_{-\alpha,m}^\lambda \psi \in \text{dom } H_{m+\alpha}^\lambda$ e

$$H_{m+\alpha}^\lambda U_{-\alpha,m}^\lambda \psi = U_{-\alpha,m}^\lambda k^2 \psi.$$

Agora, aplicando o Lema 3.1 concluímos que

$$e^{-iH_{m+\alpha}^\lambda t} U_{-\alpha,m}^\lambda \psi = U_{-\alpha,m}^\lambda e^{-ik^2 t} \psi.$$

2ª Etapa: Mostrar que o operador de onda existe e satisfaz (3.12). Usando esta igualdade podemos escrever, assumindo de agora em diante $\psi \in C_0^\infty((\varepsilon, R))$,

$$\begin{aligned}
 &\left\| e^{iH_{m+\alpha}^\lambda t} P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi - U_{-\alpha,m}^\lambda \psi \right\|^2 = \left\| P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi - e^{-iH_{m+\alpha}^\lambda t} U_{-\alpha,m}^\lambda \psi \right\|^2 \\
 &= \left\| P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi - U_{-\alpha,m}^\lambda e^{-ik^2 t} \psi \right\|^2 = \int_a^\infty \left| \left((P_a \mathcal{F}_m - U_{-\alpha,m}^\lambda) e^{-ik^2 t} \psi \right) (r) \right|^2 r dr \\
 &= \int_a^\infty \left| i^{|m|} \int_0^\infty J_{|m|}(kr) e^{-ik^2 t} \psi(k) k dk - i^{|m|} \int_{\varepsilon}^R dk k \varphi_m^\lambda(k,r) e^{i\delta_m^\lambda(k,\alpha)} e^{-ik^2 t} \psi(k) k dk \right|^2 r dr \\
 &= \int_a^\infty \left| i^{|m|} \int_{\varepsilon}^R e^{-ik^2 t} \psi(k) \left(J_{|m|}(kr) - \varphi_m^\lambda(k,r) e^{i\delta_m^\lambda(k,\alpha)} \right) k dk \right|^2 r dr,
 \end{aligned}$$

e depois de alguns cálculos com o comportamento assintótico das duas funções entre parênteses acima, chegamos a

$$\begin{aligned} & \left\| e^{iH_{m+\alpha}^\lambda t} P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi - U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi \right\|^2 \\ &= \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2 t} \psi(k) \left[C_1^\lambda(ka) \frac{e^{ikr}}{(kr)^{1/2}} + C_2^\lambda(ka) O((kr)^{-3/2}) \right] k dk \right|^2 r dr, \end{aligned}$$

com C_1^λ e C_2^λ funções C^∞ . Finalmente, usando a desigualdade $\|f + g\|^2 \leq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| e^{iH_{m+\alpha}^\lambda t} P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi - U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi \right\|^2 &\leq 2 \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2 t} \psi(k) C_1^\lambda(ka) \frac{e^{ikr}}{(kr)^{1/2}} k dk \right|^2 r dr \\ &\quad + 2 \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2 t} \psi(k) C_2^\lambda(ka) O((kr)^{-3/2}) k dk \right|^2 r dr, \end{aligned}$$

Analisemos cada parcela a direita da desigualdade em separado. Na primeira, substituindo $e^{-ik^2 t + ikr}$ por $(-2ikt + ir)^{-1} \partial_k e^{-ik^2 t + ikr}$, integrando por partes e fazendo uma estimativa superior temos que ela vai a zero quando $t \rightarrow -\infty$, pelo teorema da convergência dominada. Quanto à segunda, seja $h(kr) = O((kr)^{-3/2})$, então $h(kr) = M(kr)(kr)^{-3/2}$, com $M(kr)$ limitado. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2 t} \psi(k) C_2^\lambda(ka) O((kr)^{-3/2}) k dk \right|^2 r dr \\ &= \int_a^\infty \left| \int_\varepsilon^R e^{-ik^2 t} \psi(k) C_2^\lambda(ka) M(kr) k^{-1/2} dk \right|^2 r^{-2} dr \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow -\infty$, aplicando o lema de Riemann-Lebesgue e o teorema da convergência dominada. Então

$$\left\| e^{iH_{m+\alpha}^\lambda t} P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi - U_{-, \alpha, m}^\lambda \psi \right\| \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow -\infty$, e desde que $C_0^\infty((0, \infty))$ é denso em \mathcal{H}_k , segue que o operador de onda $\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda$ existe e satisfaz (3.12).

3ª Etapa: Mostrar que o operador de onda $\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda$ é uma isometria sobrejetora. Para mostrar que o operador de onda é uma isometria tomamos $\psi \in \mathcal{H}_k$ com suporte compacto e assim

$$\left\| \mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda \psi \right\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left\| P_a \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi \right\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left\| \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t} \psi \right\| = \|\psi\|.$$

Para provar que $\text{img } \mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda = \mathcal{H}_r^a$ é suficiente mostrar que seu adjunto é uma isometria, pois daí segue que $\{0\} = \text{N}((\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda)^*) = (\text{img } \mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda)^\perp$, e assim $\text{img } \mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda = \mathcal{H}_r^a$.

Como $\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda (\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda)^*$ é uma projeção ortogonal sobre $\text{img } \mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda$, o qual é fechado, e visto que

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda ((\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda)^* \psi)(k)](r) &= i^{|m|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \varphi_m^\lambda(k, r) e^{i\delta_m^\lambda(k, \alpha)} ((\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda)^* \psi)(k) k dk \\ &= i^{|m|} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \varphi_m^\lambda(k, r) e^{i\delta_m^\lambda(k, \alpha)} \left((-i)^{|m|} \int_a^\infty \varphi_m^\lambda(k, s) e^{-i\delta_m^\lambda(k, \alpha)} \psi(s) ds \right) k dk \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R G_m^\lambda(k, a) D_\nu^\lambda(ka, kr) \int_a^\infty G_m^\lambda(k, a) D_\nu^\lambda(ka, ks) \psi(s) ds k dk, \end{aligned}$$

lembrando que $G_m^\lambda(k, a) = \frac{1}{D}$, em que

$$D = \sqrt{\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 + \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2},$$

com $\nu = |m + \alpha|$ e

$$D_\nu^\lambda(ka, y) := [N_\nu(ka) - \lambda N'_\nu(ka)] J_\nu(y) - [J_\nu(ka) - \lambda J'_\nu(ka)] N_\nu(y),$$

precisamos somente demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.3 *Sejam $\psi \in C_0^\infty((a, \infty))$ e $\nu \geq 0$. Então*

$$\psi(r) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1/R}^R \frac{1}{D^2} D_\nu^\lambda(ka, kr) \int_a^\infty D_\nu^\lambda(ka, ks) \psi(s) ds k dk. \quad (3.13)$$

Então segue deste lema que

$$[\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda ((\mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda)^* \psi)(k)](r) = \psi(r),$$

$\forall \psi \in C_0^\infty((a, \infty))$, e uma vez que este conjunto é denso em \mathcal{H}_r^a obtemos $\text{img } \mathcal{W}_{-, \alpha, m}^\lambda = \mathcal{H}_r^a$ e o teorema está demonstrado. \square

Na sequência apresentamos a demonstração do Lema 3.3.

Demonstração: [do Lema 3.3] Visto que o Wronskiano de $J_\nu(z)$ e $N_\nu(z)$ é igual a $2/(\pi z)$ [37], ou seja, $W_z[J_\nu, N_\nu] = 2/(\pi z)$, encontramos que $W_r[J_\nu(kr), N_\nu(kr)] = 2/(\pi r)$. Agora, consideramos o problema de valor de fronteira

$$\begin{aligned} (E - H_\nu)\varphi &= \psi, \quad a < r < \infty, \quad |\text{Im } E| > 0, \\ \varphi(a) - \lambda \varphi'(a) &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A função de Green

$$g(r|s) = \begin{cases} \frac{u_1(r)u_2(s)}{W_s[u_1, u_2]}, & a < r < s, \\ \frac{u_1(s)u_2(r)}{W_s[u_1, u_2]}, & s < r < \infty, \end{cases}$$

é a solução do problema auxiliar

$$\begin{aligned}(E - H_\nu)g &= \delta(r - s), \quad a < r < \infty, \\ g(a) - \lambda g'(a) &= 0,\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}u_1(r) &= [N_\nu(E^{1/2}a) - \lambda N'_\nu(E^{1/2}a)] J_\nu(E^{1/2}r) - [J_\nu(E^{1/2}a) - \lambda J'_\nu(E^{1/2}a)] N_\nu(E^{1/2}r) \\ &= D_\nu^\lambda(E^{1/2}a, E^{1/2}r),\end{aligned}$$

solução de $(E - H_\nu)u = 0$, satisfazendo a condição de fronteira em $r = a$, e

$$u_2(r) = H_\nu^{(1),(2)}(E^{1/2}r),$$

solução de $(E - H_\nu)u = 0$, satisfazendo a condição de fronteira no ∞ , em que (1) e (2) correspondem a $\text{Im } E > 0$ (com $\text{Im } \sqrt{E} > 0$) e $\text{Im } E < 0$ (com $\text{Im } \sqrt{E} < 0$), respectivamente; $W_s[u_1, u_2]$ é o wronskiano de u_1 e u_2 no ponto $r = s$, e que neste caso dá

$$W_s[u_1, u_2] = \frac{2}{\pi s} \left(u_2(a) - \lambda \frac{du_2}{dr}(a) \right),$$

Então, denotando por $R_E := (E - H_\nu)^{-1}$ o resolvente de H_ν no ponto E , a solução $(R_E\psi)(r)$ de (3.14) é dada por

$$\begin{aligned}(R_E\psi)(r) &= \int_a^\infty g(r|s)\psi(s)ds = \int_a^r \frac{u_1(s)u_2(r)}{W_s[u_1, u_2]}\psi(s)ds + \int_r^\infty \frac{u_1(r)u_2(s)}{W_s[u_1, u_2]}\psi(s)ds \\ &= \frac{\pi}{2} \left[u_2(a) - \lambda \frac{du_2}{dr}(a) \right]^{-1} \left[H_\nu^{(1),(2)}(E^{1/2}r) \int_a^r D_\nu^\lambda(E^{1/2}a, E^{1/2}s)\psi(s)s ds \right. \\ &\quad \left. + D_\nu^\lambda(E^{1/2}a, E^{1/2}r) \int_r^\infty H_\nu^{(1),(2)}(E^{1/2}s)\psi(s)s ds \right].\end{aligned}$$

Relembramos agora a fórmula de Stone para a projeção espectral de H_ν em $[a, b]$,

$$\chi_{[a,b]}(H_\nu) = s - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (R_{x-i\delta} - R_{x+i\delta})dx.$$

Assim, sejam $E_- = x - i\delta$ e $E_+ = x + i\delta$ os pontos E com $\text{Im } E < 0$ e $\text{Im } E > 0$, respectivamente. Então

$$[\chi_{[1/R,R]}(H_\nu)\psi](r) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{1/R}^R [(R_{E_-}\psi)(r) - (R_{E_+}\psi)(r)] dx,$$

e, substituindo as respectivas expressões acima para os resolventes e usando o teorema da convergência dominada (uma vez que as funções J_ν e N_ν são contínuas e limitadas), após

alguns cálculos e simplificações chegamos a

$$[\chi_{[1/R,R]}(H_\nu)\psi](r) = \frac{1}{2} \int_{1/R}^R \frac{D_\nu^\lambda(x^{1/2}a, x^{1/2}r)}{(N_\nu(x^{1/2}a) - \lambda N'_\nu(x^{1/2}a))^2 + (J_\nu(x^{1/2}a) - \lambda J'_\nu(x^{1/2}a))^2} \cdot \int_a^\infty D_\nu^\lambda(x^{1/2}a, x^{1/2}s)\psi(s)s ds dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x^{1/2} = k$, temos $dx/2 = k dk$ e encontramos

$$[\chi_{[1/R,R]}(H_\nu)\psi](r) = \int_{1/R}^R \frac{1}{D^2} D_\nu^\lambda(ka, kr) \int_a^\infty D_\nu^\lambda(ka, ks)\psi(s)s ds k dk,$$

a qual é igual q.t.p. na variável r à função definida pela integral no lado direito de (3.13).

Por outro lado, $\chi_{[a,b]}(H_\nu) \equiv 0$ para $[a, b] \subset (-\infty, 0)$ pelo Teorema 8.3.13 de [15], desde que $\sigma(H_\nu) \subset [0, \infty)$ e H_ν não tem autovalores. \square

3.4.3 Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque

Nesta seção encontraremos a amplitude de espalhamento e a seção de choque diferencial para as extensões do tipo Robin. Lembramos que como discutido no caso Neumann vamos olhar a amplitude de espalhamento como uma distribuição, que será novamente calculada a partir da série de Fourier.

Conforme (3.5) a amplitude de espalhamento associada a H^λ para $\alpha = 0$ é dada por

$$f_0^\lambda(k, \theta) = \frac{1}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\delta_m^\lambda(k,0)} - 1 \right) e^{im\theta},$$

e desde que

$$e^{2i\delta_m^\lambda(k,0)} = - \frac{H_{|m|}^{(2)}(ka) - \lambda H_{|m|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m|}^{(1)'}(ka)},$$

obtemos

$$f_0^\lambda(k, \theta) = - \left(\frac{2}{\pi ik} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_{|m|}(ka) - \lambda J'_{|m|}(ka)}{H_{|m|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta}.$$

Como anteriormente, para ka fixado e $k \neq 0$ note que a série acima é convergente desde que seus coeficientes convergem rapidamente a zero para $|m| \rightarrow \infty$, em virtude do comportamento das funções de Bessel quando sua ordem $|m| \rightarrow \infty$. Logo, a seção de choque diferencial neste caso é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)_0^\lambda(k, \theta) = \frac{2}{\pi k} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_{|m|}(ka) - \lambda J'_{|m|}(ka)}{H_{|m|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta} \right|^2.$$

Por outro lado, novamente de (3.5) a amplitude de espalhamento associada a H^λ para $\alpha \notin \mathbb{Z}$ é dada por

$$f_\alpha^\lambda(k, \theta) = \frac{1}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\delta_m^\lambda(k, \alpha)} - 1 \right) e^{im\theta},$$

e visto que

$$e^{2i\delta_m^\lambda(k, \alpha)} = -e^{2i\Delta_m(\alpha)} \left[\frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} \right],$$

obtemos

$$f_\alpha^\lambda(k, \theta) = \frac{1}{(2\pi ik)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-e^{2i\Delta_m(\alpha)} \left[\frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} \right] - 1 \right) e^{im\theta}.$$

Agora, seja $n \in \mathbb{Z}$ fixado e fazemos uma mudança no índice do somatório. Seja $m' = m + n$, então $m = m' - n$ e como $\Delta_m(\alpha) = (\pi/2)(|m| - |m + \alpha|)$, obtemos

$$f_\alpha^\lambda(k, \theta) = \frac{e^{-in\theta}}{(2\pi ik)^{1/2}} \cdot \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \left(-e^{2i\delta_{m'}(\alpha-n)} (-1)^n \left[\frac{H_{|m'+\alpha-n|}^{(2)}(ka) - \lambda H_{|m'+\alpha-n|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m'+\alpha-n|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m'+\alpha-n|}^{(1)'}(ka)} \right] - 1 \right) e^{im'\theta},$$

que pode ser escrito como

$$f_\alpha^\lambda(k, \theta) = (-1)^n e^{-in\theta} f_{\alpha-n}^\lambda(k, \theta) + (2\pi/ik)^{1/2} [(-1)^n - 1] \delta(\theta), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, a seção de choque diferencial (para $\theta \neq 0$) é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)_\alpha^\lambda(k, \theta) = \frac{1}{2\pi k} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\Delta_m(\alpha)} \left[\frac{H_{|m+\alpha|}^{(2)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(2)'}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} \right] + 1 \right) e^{im\theta} \right|^2,$$

a qual é periódica em α com período 1 e, então, aqui podemos assumir $0 < \alpha < 1$. Similarmente ao caso Neumann, para calcular f_α^λ podemos escrever

$$f_\alpha^\lambda(k, \theta) = f_\alpha(k, \theta) + f_{r,\lambda}(k, \theta),$$

em que f_α é a conhecida amplitude de espalhamento do caso de raio zero e $f_{r,\lambda}$ é escrita como

$$f_{r,\lambda}(k, \theta) = - \left(\frac{2}{\pi ik} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta}.$$

Note que pelo mesmo argumento dado acima a série para $f_{r,\lambda}$ é convergente. Assim, a seção de choque diferencial para $k \neq 0$ e $\theta \neq 0$ é dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)_\alpha^\lambda(k, \theta) &= \left| \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{1/2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{\text{sen}(\theta/2)} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2}{\pi ik} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta} \right|^2. \end{aligned}$$

3.5 Alguns Gráficos e Comparações

Nesta seção apresentaremos alguns gráficos e comentários para ilustrar e comparar alguns dos resultados obtidos neste capítulo. Todos os gráficos foram feitos no Software Maple™.

Consideramos para os operadores de espalhamento nos casos Dirichlet, Neumann e Robin as seguintes expressões, respectivamente,

$$S_{\alpha,m}^{\mathcal{D}} = \frac{\cos \beta [N_{|m+\alpha|}(ka)^2 - J_{|m+\alpha|}(ka)^2] - 2 \operatorname{sen} \beta J_{|m+\alpha|}(ka) N_{|m+\alpha|}(ka)}{N_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J_{|m+\alpha|}(ka)^2} + i \frac{\operatorname{sen} \beta [N_{|m+\alpha|}(ka)^2 - J_{|m+\alpha|}(ka)^2] + 2 \cos \beta J_{|m+\alpha|}(ka) N_{|m+\alpha|}(ka)}{N_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J_{|m+\alpha|}(ka)^2},$$

$$S_{\alpha,m}^{\mathcal{N}} = \frac{\cos \beta [N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 - J'_{|m+\alpha|}(ka)^2] - 2 \operatorname{sen} \beta J'_{|m+\alpha|}(ka) N'_{|m+\alpha|}(ka)}{N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J'_{|m+\alpha|}(ka)^2} + i \frac{\operatorname{sen} \beta [N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 - J'_{|m+\alpha|}(ka)^2] + 2 \cos \beta J'_{|m+\alpha|}(ka) N'_{|m+\alpha|}(ka)}{N'_{|m+\alpha|}(ka)^2 + J'_{|m+\alpha|}(ka)^2},$$

e

$$S_{\alpha,m}^{\lambda} = \frac{\cos \beta \left[\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 - \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 \right]}{\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 + \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2} - \frac{2 \operatorname{sen} \beta \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right) \left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)}{\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 + \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2} + i \left[\frac{\operatorname{sen} \beta \left[\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 - \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 \right]}{\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 + \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2} + \frac{2 \cos \beta \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right) \left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)}{\left(N_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda N'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2 + \left(J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka) \right)^2} \right],$$

lembrando que $\beta = \pi(|m| - |m + \alpha|)$.

Nas Figuras 3.1 e 3.2 apresentamos os gráficos da parte real dos operadores de espalhamento das três extensões.

Em ambas as figuras note que para altas energias o gráfico do operador de espalhamento da extensão de Robin se aproxima do gráfico do operador de espalhamento da extensão de Neumann, tanto no caso sem campo ($\alpha = 0$) como no caso com campo magnético ($\alpha \neq 0$) no interior do solenóide. Isto está de acordo com a Observação 3.2.

Ainda para altas energias note a “diferença de fase” entre os casos Dirichlet e Neumann, o que concorda com o previsto na seção 3.3.2.

Já para baixas energias estas duas figuras ilustram o que temos dito anteriormente sobre seus comportamentos, uma vez que na Figura 3.1 $\cos \beta = 1$ e na Figura 3.2 $\cos \beta = 0$.

Nas Figuras 3.3, 3.4 e 3.5 mostramos os gráficos da parte real dos operadores de espalhamento dos casos Dirichlet, Neumann e Robin, respectivamente, nas situações sem campo e com campo em cada uma delas.

Para o operador de espalhamento da extensão de Neumann, Figura 3.4, note que o caso com campo magnético ($\alpha \neq 0$) dentro do solenóide se aproxima do caso sem campo ($\alpha = 0$) para altas energias. Um comentário similar vale para os casos Dirichlet e Robin nas Figuras 3.3 e 3.5, respectivamente.

Observamos que os gráficos com outros valores de m , de $0 < \alpha < 1$ e de $\lambda \neq 0$ são similares aos apresentados aqui. Também não apresentamos gráficos e comentários sobre as partes imaginárias dos operadores de espalhamento por serem bastante similares às respectivas partes reais.

Agora, consideramos para as seções de choque diferencial, no caso de raio positivo $a > 0$, das extensões de Dirichlet, Neumann e do tipo Robin as seguintes expressões, respectivamente,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_\alpha^{\mathcal{D}}(k, \theta) &= \left| \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{1/2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{\text{sen}(\theta/2)} - \left(\frac{2}{\pi ik}\right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J_{|m+\alpha|}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka)} e^{im\theta} \right|^2, \quad \theta \neq 0, \\ \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_\alpha^{\mathcal{N}}(k, \theta) &= \left| \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{1/2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{\text{sen}(\theta/2)} - \left(\frac{2}{\pi ik}\right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J'_{|m+\alpha|}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta} \right|^2, \quad \theta \neq 0, \\ \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_\alpha^\lambda(k, \theta) &= \left| \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{1/2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{\text{sen}(\theta/2)} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2}{\pi ik}\right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\Delta_m(\alpha)} \frac{J_{|m+\alpha|}(ka) - \lambda J'_{|m+\alpha|}(ka)}{H_{|m+\alpha|}^{(1)}(ka) - \lambda H_{|m+\alpha|}^{(1)'}(ka)} e^{im\theta} \right|^2, \quad \theta \neq 0, \end{aligned}$$

e lembramos que a seção de choque diferencial do caso de raio nulo com condição de Dirichlet na origem é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)(k, \theta) = \frac{1}{2\pi k} \frac{\text{sen}^2(\pi\alpha)}{\text{sen}^2(\theta/2)}, \quad \theta \neq 0. \quad (3.15)$$

Para altas energias, tanto no caso sem campo ($\alpha = 0$) como no caso com campo ($\alpha \neq 0$), encontramos que a seção de choque diferencial dos casos Neumann e Robin estão

muito próximas de Dirichlet, exceto numa vizinhança de $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Veja as Figuras 3.6 e 3.7, onde mostramos gráficos dos casos $\alpha = 0$ e $\alpha = 1/2$, respectivamente.

Na Figura 3.8 apresentamos um gráfico da seção de choque diferencial dos três casos em função de k , para o caso com campo $\alpha = 1/2$ e com $a = 1$, $\theta = \pi/2$ e $\lambda = 1$, em que aparecem seus comportamentos para altas e baixas energias, bem como para energias intermediárias.

Para $k \rightarrow 0$, no caso com campo ($\alpha \neq 0$) e raio positivo, encontramos que a seção de choque diferencial dos três casos têm o mesmo comportamento, o qual é dado aproximadamente pela seção de choque diferencial do caso com campo e raio nulo (3.15). Veja a Figura 3.9.

Para energias intermediárias as seções de choque diferencial das extensões diferem significativamente, veja Figura 3.10; neste caso seria interessante realizar um experimento para tentar detectar qual extensão está aparecendo na natureza, já que nos outros casos parece difícil fazer uma distinção entre elas por terem comportamento similar.

Além disso, observamos que quando tomamos λ pequeno (por exemplo, $\lambda = 1/10$) na seção de choque diferencial do caso Robin recuperamos Dirichlet, e quando escolhemos λ grande (por exemplo, $\lambda = 10$) recupera-se Neumann. Isto certamente é esperado.

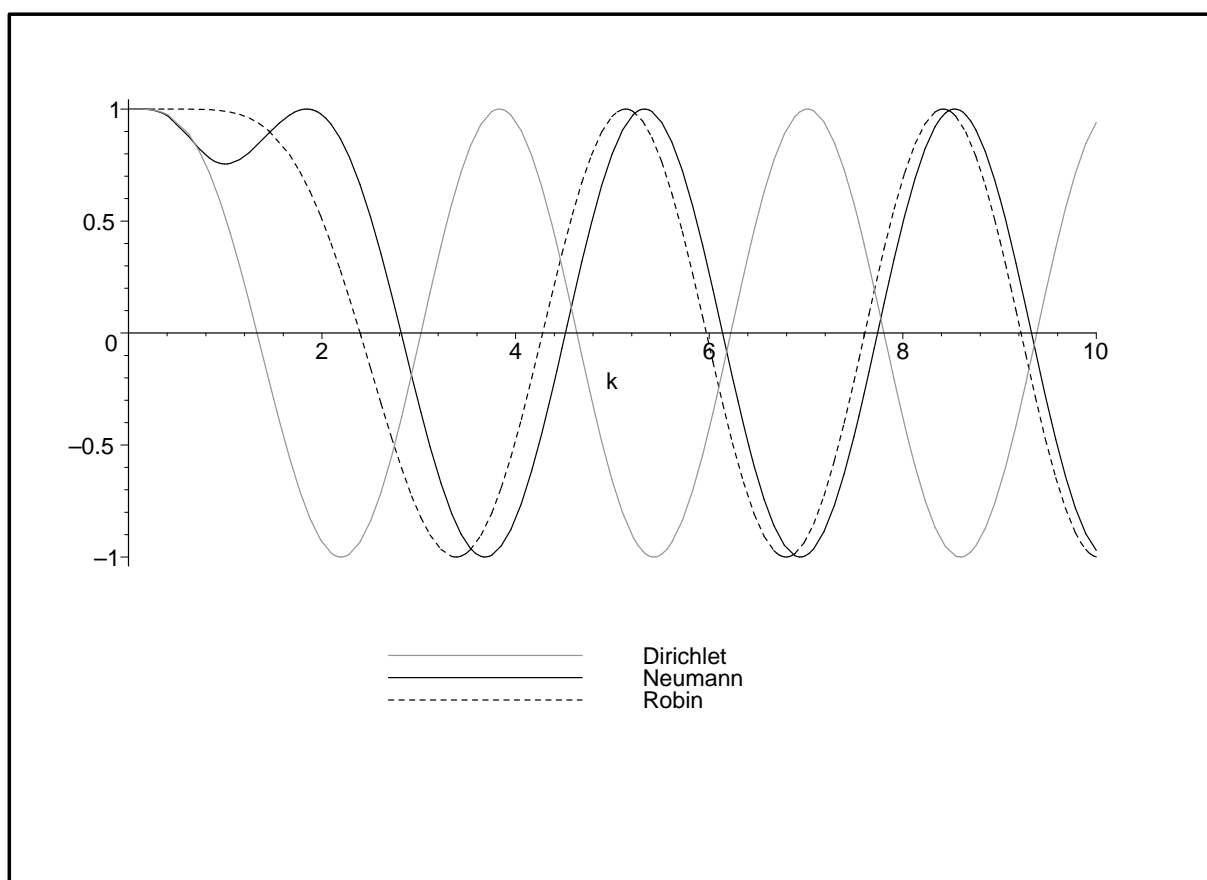


Figura 3.1: Partes reais dos operadores de espalhamento das três extensões sem campo ($\alpha = 0$) em função de k , com $a = 1$, $m = 1$ e $\lambda = 1$.

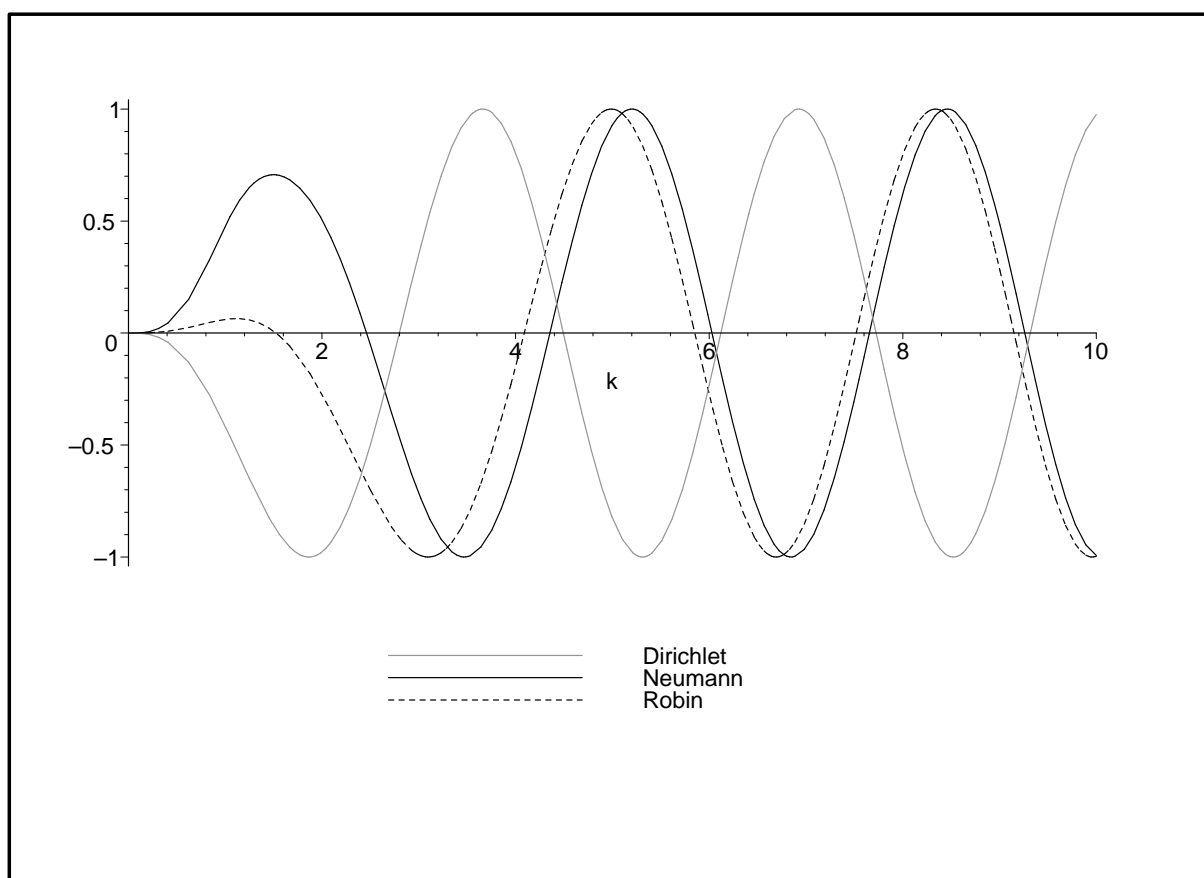


Figura 3.2: Partes reais dos operadores de espalhamento das três extensões com campo ($\alpha = 1/2$) em função de k , com $a = 1$, $m = 1$ e $\lambda = 1$.

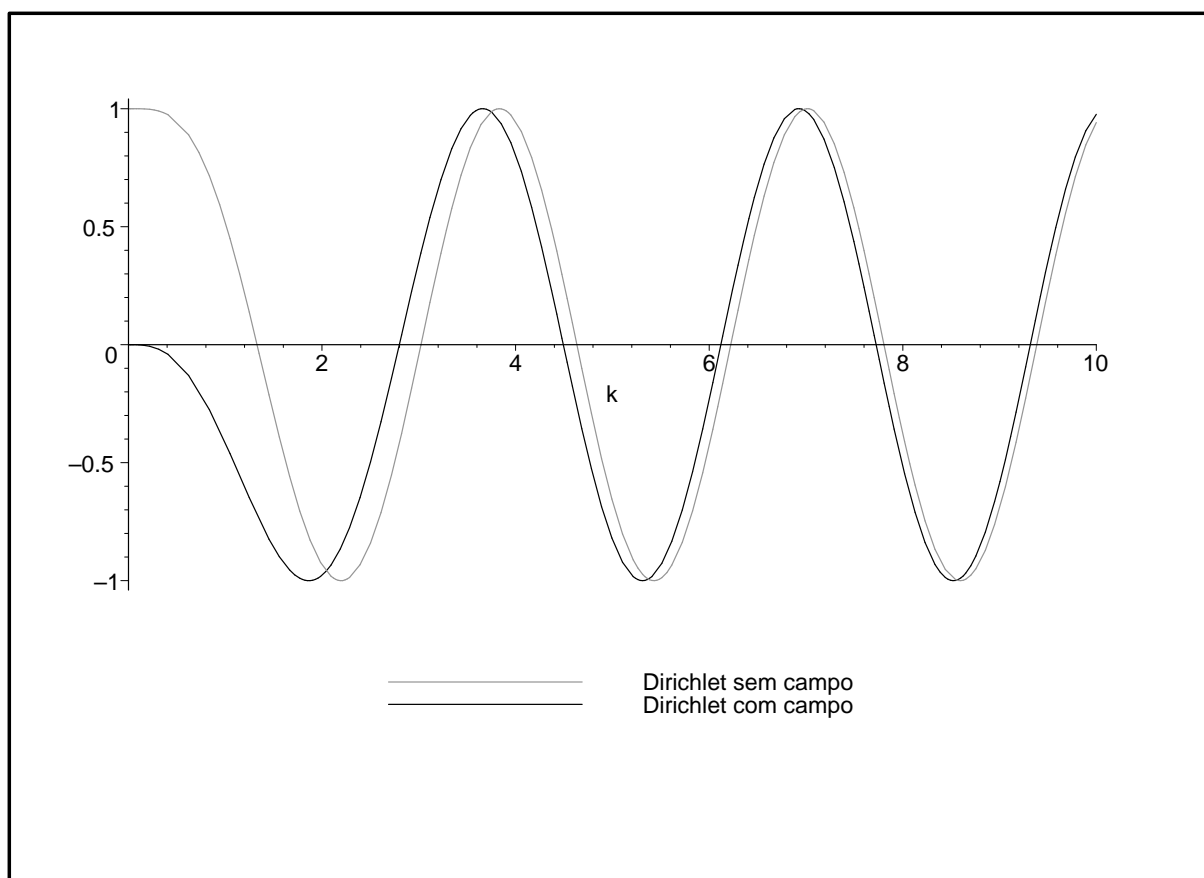


Figura 3.3: Parte real do operador de espalhamento do caso Dirichlet sem campo ($\alpha = 0$) e com campo ($\alpha = 1/2$) em função de k , com $a = 1$ e $m = 1$.

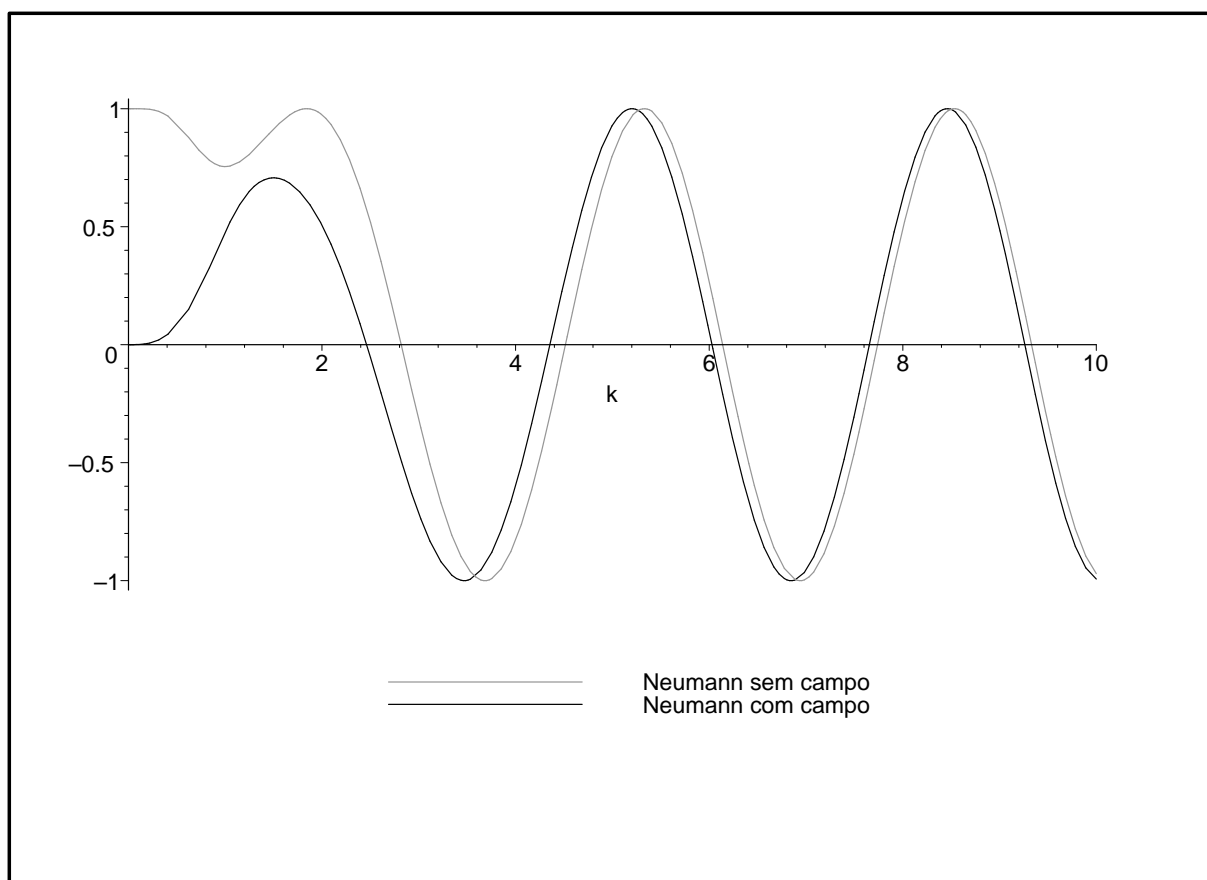


Figura 3.4: Parte real do operador de espalhamento do caso Neumann sem campo ($\alpha = 0$) e com campo ($\alpha = 1/2$) em função de k , com $a = 1$ e $m = 1$.

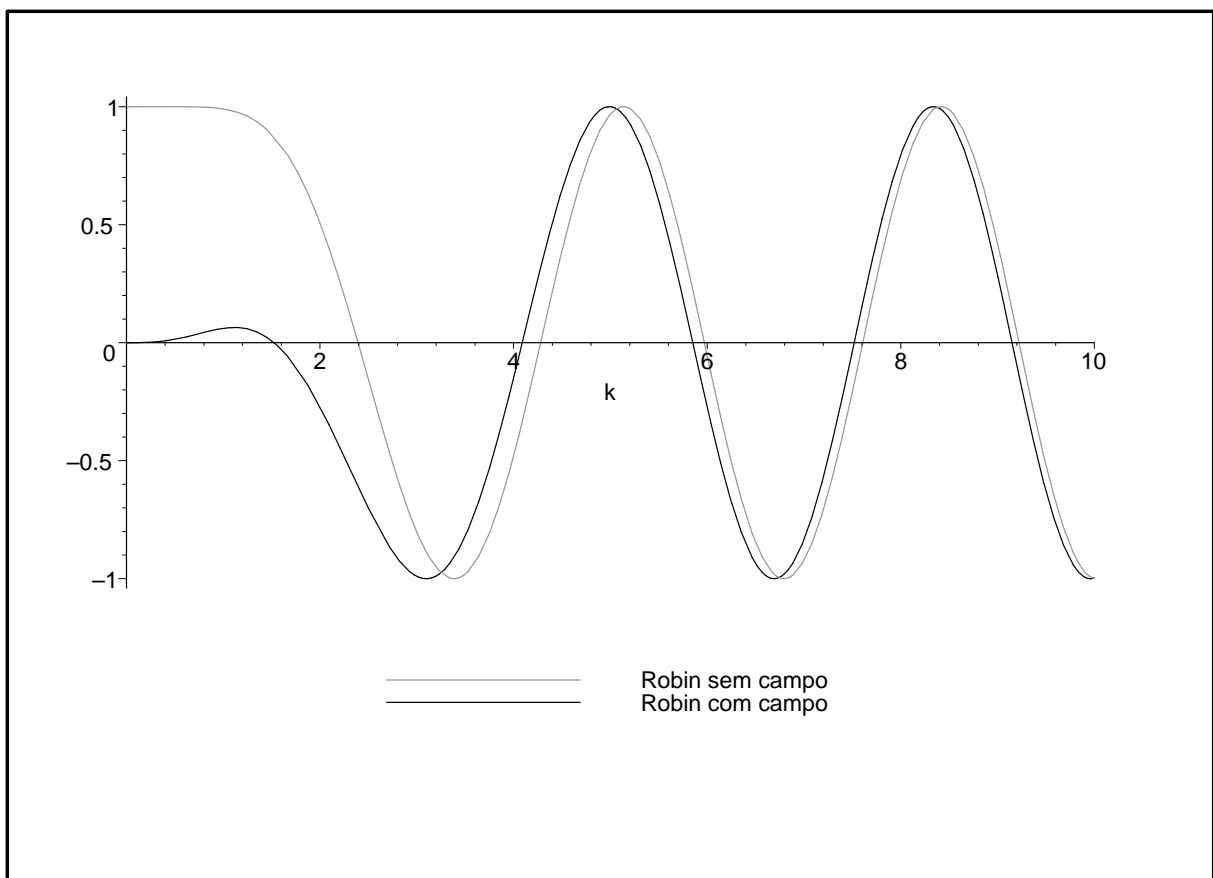


Figura 3.5: Parte real do operador de espalhamento do caso Robin ($\lambda = 1$) sem campo ($\alpha = 0$) e com campo ($\alpha = 1/2$) em função de k , com $a = 1$ e $m = 1$.

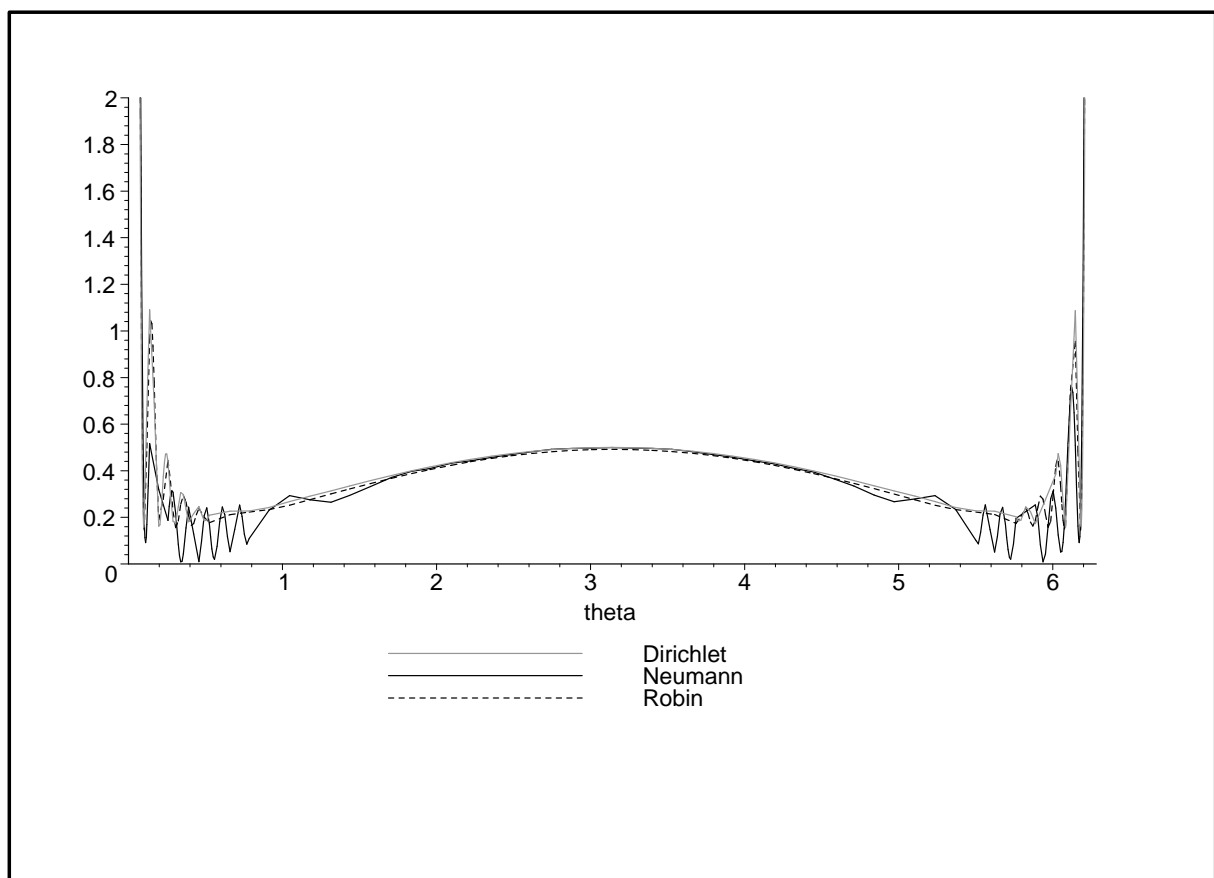


Figura 3.6: Seção de choque diferencial em função de θ no caso sem campo ($\alpha = 0$), com $a = 1$, $k = 30$ e $\lambda = 1$.

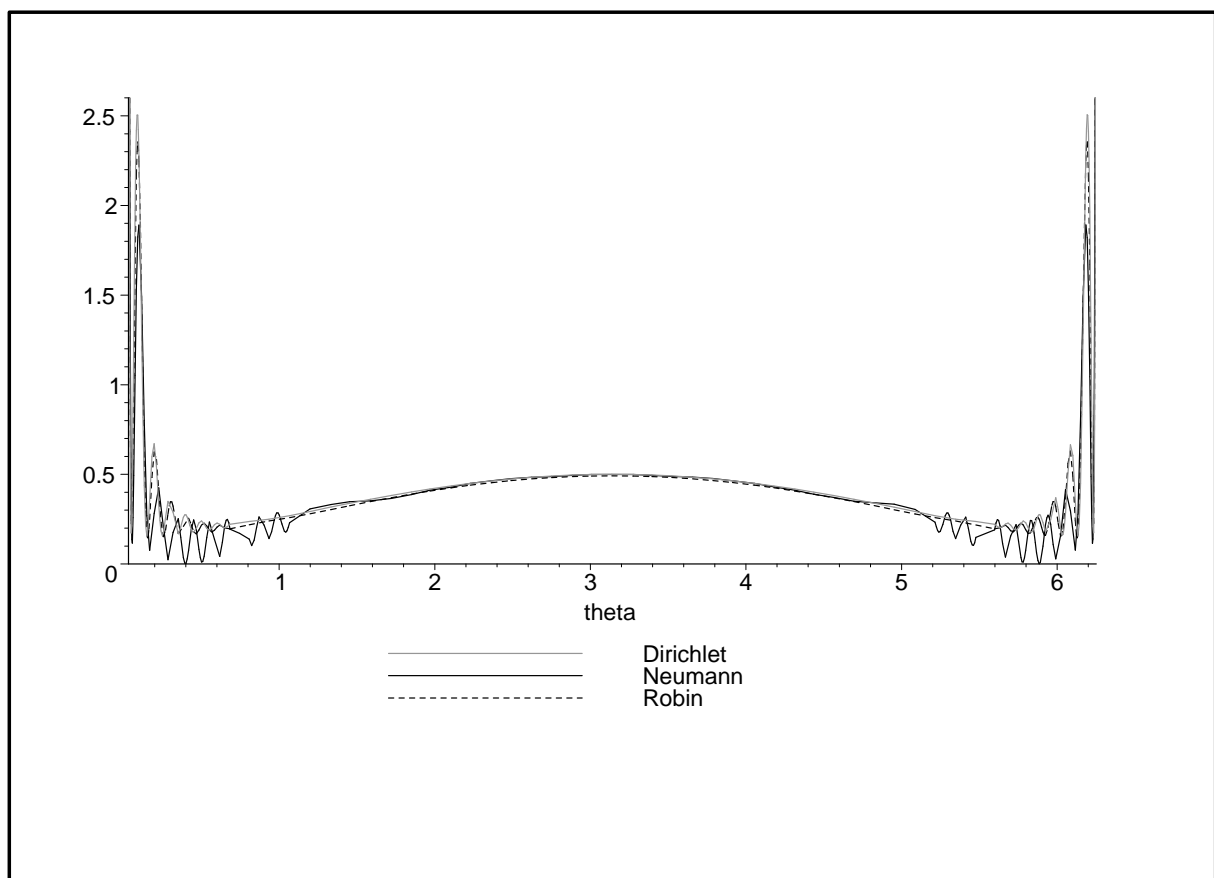


Figura 3.7: Seção de choque diferencial em função de θ no caso com campo ($\alpha = 1/2$), com $a = 1$, $k = 30$ e $\lambda = 1$.

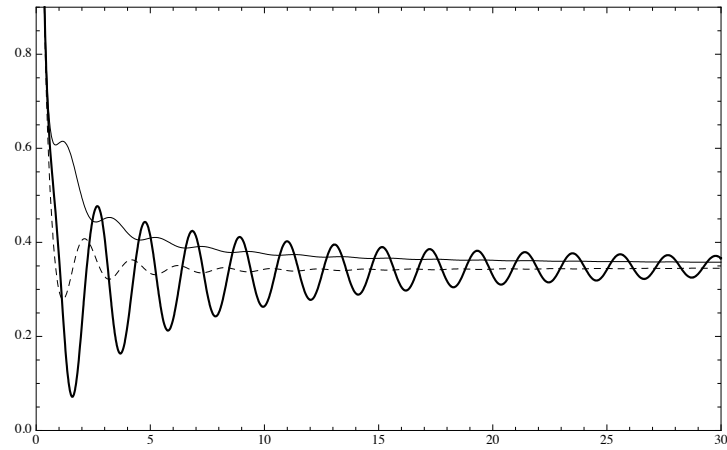


Figura 3.8: Seção de choque diferencial em função de k no caso com campo ($\alpha = 1/2$), com $a = 1$, $\theta = \pi/2$ e $\lambda = 1$.

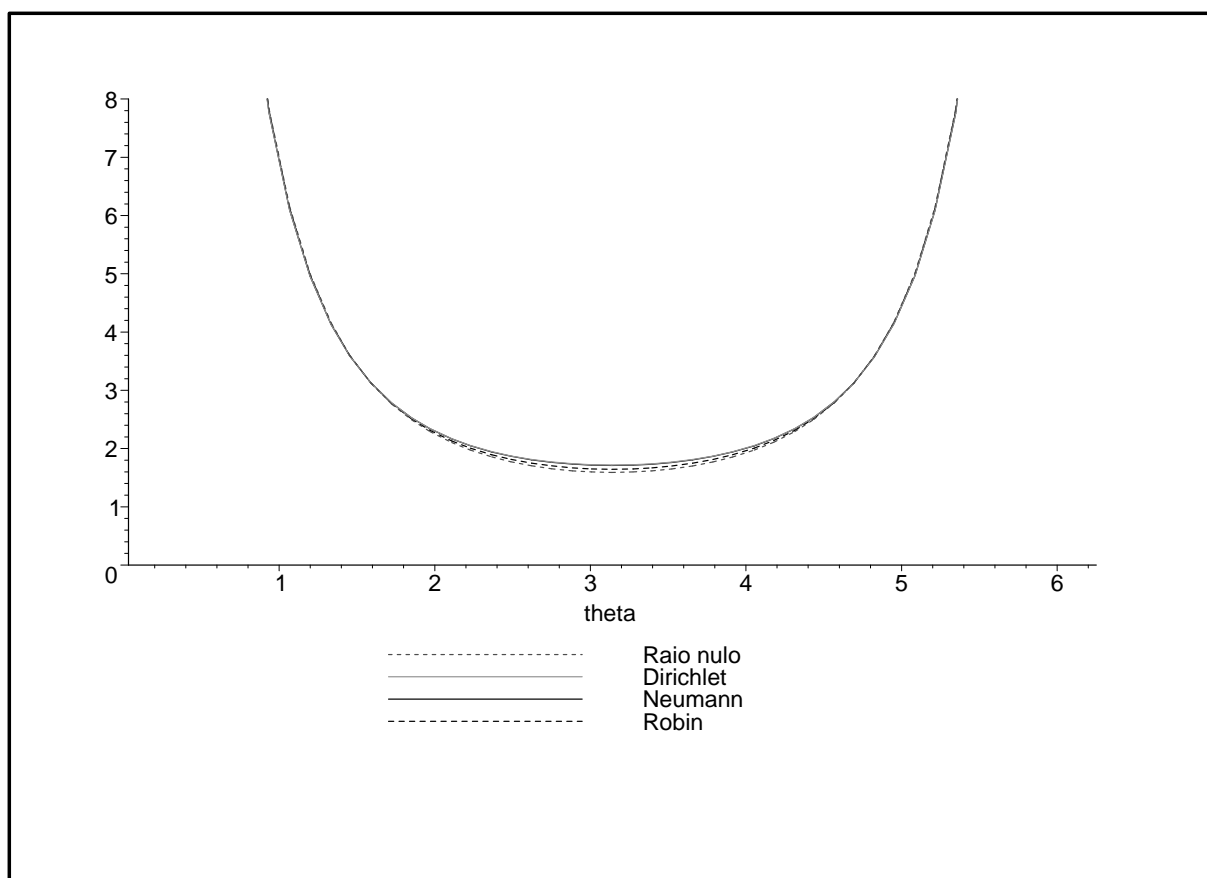


Figura 3.9: Seção de choque diferencial em função de θ no caso com campo ($\alpha = 1/2$), com $a = 1$, $k = 1/10$ e $\lambda = 1$.

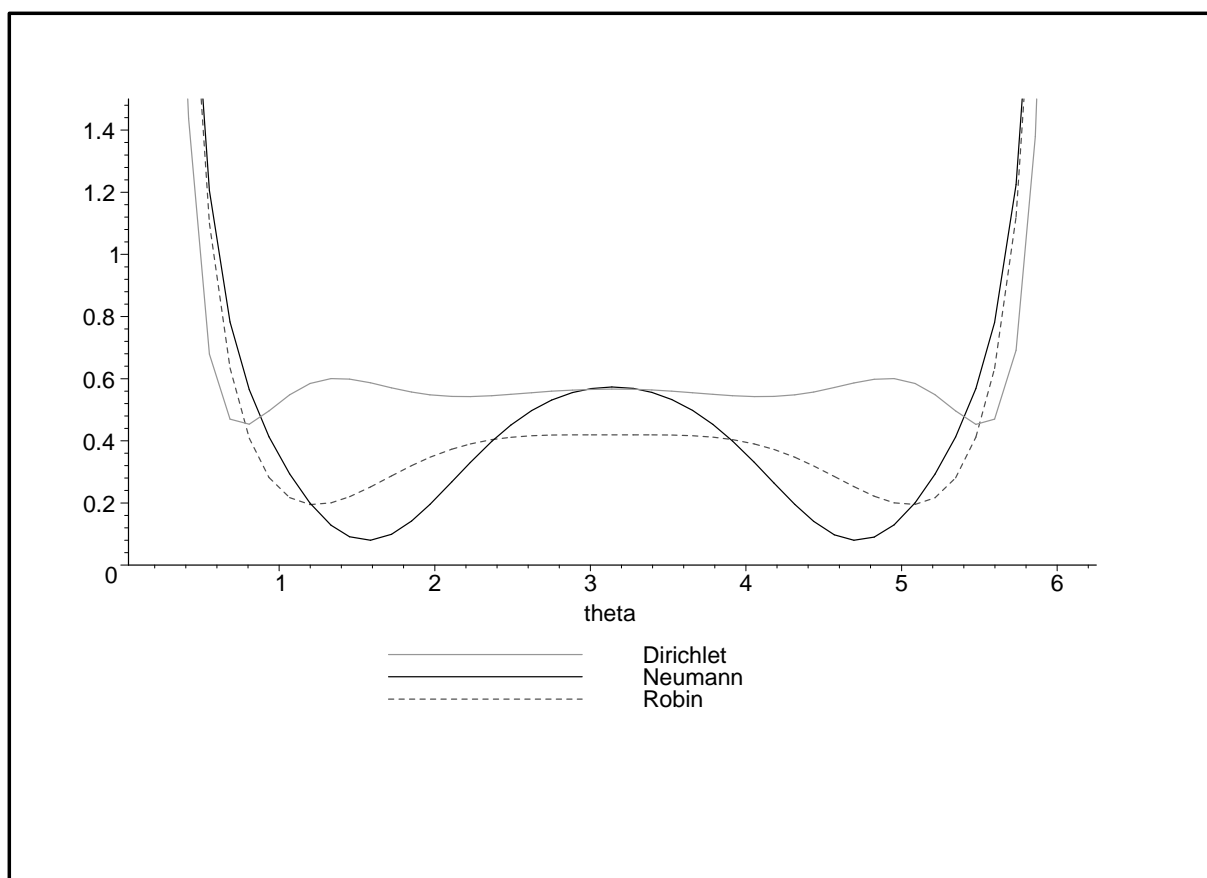


Figura 3.10: Seção de choque diferencial em função de θ no caso com campo ($\alpha = 1/2$), com $a = 1$, $k = 3/2$ e $\lambda = 1$.

Capítulo 4

Seleção Teórica da Condição de Dirichlet

Neste capítulo nosso principal objetivo é dar base para o uso do hamiltoniano de Aharonov-Bohm com condição de Dirichlet na fronteira do solenóide através de uma combinação de modelagem física e argumentos matemáticos precisos.

Na seção 4.1 encontraremos o potencial vetorial de um solenóide finito de raio positivo e veremos que ele converge pontualmente quando seu comprimento vai para infinito, como esperado, para o potencial vetorial do solenóide infinito. Na seção 4.2 apresentaremos uma justificativa teórica do habitual hamiltoniano de Aharonov-Bohm (com solenóide de raio maior que zero). Isto é obtido por meio de uma sequência crescente de solenóides de comprimentos finitos junto com um procedimento natural de impermeabilização; além disso, ambos os limites comutam. Tais limites rigorosos são calculados no sentido forte do resolvente e em ambos os espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Note que o material destas duas primeiras seções é praticamente o conteúdo que apareceu em [16]. Na seção 4.3 mostraremos que há convergência no sentido uniforme do resolvente em algumas situações no plano e no espaço.

Para tanto, como na Introdução, consideremos um solenóide cilíndrico \mathcal{S} carregando uma corrente elétrica estacionária, de comprimento infinito e raio $a > 0$, centrado na origem e eixo na direção z . Então existe um campo magnético constante $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ confinado em \mathcal{S}° , o interior de \mathcal{S} , e anulando-se em sua região exterior \mathcal{S}' . O solenóide é considerado impermeável (impenetrável), no sentido que o movimento de uma partícula sem spin (de massa $m = 1/2$ e carga elétrica q) fora do solenóide não tem contato com seu interior, particularmente com o campo magnético \mathbf{B} . Se \mathbf{A} é o potencial vetorial gerando este campo

magnético, isto é, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, é corrente na literatura que o operador hamiltoniano usual descrevendo o movimento quântico desta partícula carregada é dado por (com $\hbar = 1$)

$$H_{AB} = \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad \mathbf{p} = -i\nabla,$$

com condição de Dirichlet na fronteira, isto é, as funções ψ no domínio de H_{AB} anulam-se $\psi = 0$ na fronteira do solenóide, ou seja,

$$\text{dom } H_{AB} = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \cap \mathcal{H}_0^1(\mathcal{S}').$$

Problema aberto muito interessante seria encontrar mecanismos de aproximação que resultassem em extensões auto-adjuntas diferentes de Dirichlet.

4.1 O Potencial Vetorial

Nesta seção encontraremos a expressão do potencial vetorial \mathbf{A}_L gerado por um solenóide finito de comprimento $2L$ em \mathbb{R}^3 , em um adequado calibre. Note que não encontramos tal expressão na literatura; contudo, veja [9]. Então mostraremos sua convergência pontual para \mathbf{A} quando $L \rightarrow \infty$, sendo $\mathbf{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$ em coordenadas cilíndricas, com $A_\rho = A_z = 0$ e

$$A_\phi(\rho) = \begin{cases} \Phi/(2\pi\rho), & \rho \geq a > 0, \\ \Phi\rho/(2\pi a^2), & 0 \leq \rho \leq a, \end{cases}$$

em que Φ é o fluxo magnético, o bem-conhecido potencial vetorial do hamiltoniano de Aharonov-Bohm. A construção e a convergência pontual do potencial vetorial também valem no plano \mathbb{R}^2 . Este fato será usado nas demonstrações da seção seguinte.

4.1.1 Potencial Vetorial de Um Solenóide Finito

O ponto de partida é o potencial vetorial devido a um laço circular de corrente calculado em [30], Seção 5.5. Então uma integração sobre a densidade de laços dá o potencial vetorial desejado. Considere um laço circular de raio $a > 0$ centrado em $(0, 0, z')$, em coordenadas cartesianas, $z' \geq 0$, e paralelo ao plano xy . Seja \mathbf{x}' um ponto do laço e \mathbf{x} um ponto arbitrário em \mathbb{R}^3 , cujas coordenadas esféricas são $\mathbf{x}' = (r', \theta', \phi')$ e $\mathbf{x} = (r, \theta, \phi)$, respectivamente.

A única componente não nula da densidade de corrente \mathbf{J} é na direção ϕ e, por [30], ela é dada por

$$J_\phi = I \delta \left(\cos \theta' - \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} \right) \frac{\delta \left(r' - \sqrt{a^2 + z'^2} \right)}{\sqrt{a^2 + z'^2}},$$

com I denotando a corrente elétrica no laço. Devido a simetria do problema, é possível assumir que o potencial vetorial resultante tem somente a componente na direção ϕ , a qual realmente não depende de ϕ ; então escolhamos $\phi = 0$ nos cálculos que seguem. Temos

$$A_{\phi}^{z'}(r, \theta) = \frac{I}{c\sqrt{a^2 + z'^2}} \int \frac{\cos \phi' \delta\left(\cos \theta' - \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}}\right) \delta\left(r' - \sqrt{a^2 + z'^2}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} r'^2 dr' d\Omega',$$

com $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi')]^{1/2}$ e $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\phi'$.

Integrando com respeito a $r' = \sqrt{a^2 + z'^2}$, e então com respeito a θ' , com $\cos \theta' = \frac{z'}{r'}$ e $\sin \theta' = \frac{a}{r'}$, encontramos

$$A_{\phi}^{z'}(r, \theta) = \frac{I}{c\sqrt{a^2 + z'^2}} \int_0^{2\pi} (a^2 + z'^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 + z'^2}} \frac{\cos \phi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\phi',$$

isto é,

$$A_{\phi}^{z'}(r, \theta) = \frac{Ia}{c} \times \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{\left[r^2 + a^2 + z'^2 - 2r\sqrt{a^2 + z'^2} \left(\cos \theta \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} + \sin \theta \frac{a}{\sqrt{a^2 + z'^2}} \cos \phi'\right)\right]^{1/2}} d\phi'.$$

Analogamente para $z' \leq 0$.

Assim, o potencial vetorial do solenóide finito de comprimento $2L$ e raio $a > 0$ no ponto $\mathbf{x} = (r, \theta, \phi)$ em coordenadas esféricas é $\mathbf{A}_L = (0, 0, A_{L,\phi})$, sendo

$$A_{L,\phi}(r, \theta) = n \int_{-L}^L A_{\phi}^{z'}(r, \theta) dz' = \frac{\Phi}{4\pi^2 a} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{f(r, \theta, z', \phi')} d\phi' dz',$$

em que n é o número de voltas por unidade de comprimento no solenóide, Φ o fluxo magnético (de modo que $\frac{\Phi}{4\pi^2 a} = \frac{nIa}{c}$) e, finalmente,

$$f(r, \theta, z', \phi') := \left(r^2 + a^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta - 2ra \sin \theta \cos \phi'\right)^{1/2}.$$

Aqui usamos a notação $A_{\phi}(r, \theta) = A_{\infty,\phi}(r, \theta)$ para a componente ϕ do potencial vetorial no caso $L = \infty$.

Note que para $\theta = \pi/2$ temos $z = 0$ e obtemos o potencial vetorial em um ponto $\mathbf{x} = (r, \pi/2, \phi)$ do plano xy

$$A_{L,\phi}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Phi}{4\pi^2 a} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{(r^2 + a^2 + z'^2 - 2ra \cos \phi')^{1/2}} d\phi' dz',$$

o qual em coordenadas polares será denotado por $A_{L,\phi}(\rho)$. Ele também pode ser expresso em termos de integrais completas elípticas $K(k)$ e $E(k)$ [9], ou seja,

$$A_{L,\phi}(\rho) = \frac{\Phi}{\pi^2 a} \int_{-L}^L \frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2[(a + \rho)^2 + z'^2]^{1/2}} dz',$$

e k é dado por $k^2 = 4a\rho/[(a + \rho)^2 + z'^2]$.

4.1.2 Convergência Quando $L \rightarrow \infty$

Fixe r, θ . Nas três situações abaixo o termo

$$\left| \frac{2ra \operatorname{sen} \theta \cos \phi'}{r^2 + a^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta} \right|$$

é uniformemente pequeno: ou 1) $r \ll a$, ou 2) $r \gg a$ e $r \gg 1$ ou 3) para z' grande, $z' \gg 1$ e $z' \gg a$. Em qualquer de tais situações temos

$$\frac{\cos \phi'}{f(r, \theta, z', \phi')} = \frac{\cos \phi'}{g(r, \theta, z')^{1/2}} + \frac{ra \operatorname{sen} \theta \cos^2 \phi'}{g(r, \theta, z')^{3/2}} + \frac{3(ra \operatorname{sen} \theta)^2 \cos^3 \phi'}{2g(r, \theta, z')^{5/2}} + O(r^{-4}, z'^{-7}),$$

com $g(r, \theta, z') := r^2 + a^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta$. Note que as integrais do primeiro e terceiro termos no lado direito da igualdade acima anulam-se. Então, o erro na aproximação de $A_\phi(r, \theta)$ por $A_{L,\phi}(r, \theta)$ pode ser estimado por (para L grande)

$$\begin{aligned} |A_\phi(r, \theta) - A_{L,\phi}(r, \theta)| &= \left| \left(\int_L^\infty + \int_{-\infty}^{-L} \right) A_\phi^{z'}(r, \theta) dz' \right| \\ &= \left| \left(\int_L^\infty + \int_{-\infty}^{-L} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{f(r, \theta, z', \phi')} d\phi' dz' \right| \\ &\leq \text{cte} \left| \int_L^\infty \int_0^{2\pi} \frac{ra \operatorname{sen} \theta \cos^2 \phi'}{g(r, \theta, z')^{3/2}} d\phi' dz' \right| \\ &\leq \text{cte} \int_L^\infty \frac{1}{(z'^2 - 2rz')^{3/2}} dz' \leq \text{cte} \int_L^\infty \frac{1}{z'^3} dz' = \frac{\text{cte}}{L^2}, \end{aligned}$$

o qual se anula quando $L \rightarrow \infty$. Note que temos um limite superior, L^{-2} , para a razão de convergência a zero (esta razão também foi encontrada numericamente).

Agora checamos que as expressões acima para $A_{L,\phi}(r, \theta)$ realmente resultam no calibre esperado no limite $L \rightarrow \infty$, isto é, em coordenadas cilíndricas $\rho = r \operatorname{sen} \theta$,

$$A_\phi(r, \theta) = \begin{cases} \Phi/(2\pi\rho), & \rho \geq a > 0, \\ \Phi\rho/(2\pi a^2), & 0 \leq \rho \leq a. \end{cases}$$

Vamos verificar explicitamente essa convergência nas regiões de r, θ com $r \gg a$ e $r \ll a$, para as outras regiões confirmamos a convergência numericamente, a qual é muito simples de se fazer.

Vamos considerar o caso de um ponto \mathbf{x} longe do solenóide, ou seja, $r \operatorname{sen} \theta \gg a$. Substituindo a expressão acima para $\cos \phi'/f(r, \theta, z', \phi')$ em $A_{L,\phi}(r, \theta)$ de modo que, após calcular as integrais resultantes, obtemos

$$A_{L,\phi}(r, \theta) \approx \frac{\Phi}{2\pi} \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r^2 + a^2 - r^2 \cos^2 \theta} \frac{\beta_1(L - r \cos \theta) + \beta_2(L + r \cos \theta)}{2\beta_1\beta_2},$$

com $\beta_1 = \sqrt{r^2 + a^2 + L^2 + 2rL \cos \theta}$ e $\beta_2 = \sqrt{r^2 + a^2 + L^2 - 2rL \cos \theta}$. Portanto, para L grande

$$A_{L,\phi}(r, \theta) \approx \frac{\Phi}{2\pi} \frac{r \sin \theta}{r^2 + a^2 - r^2 \cos^2 \theta}.$$

Tendo em conta que $r \sin \theta \gg a$, temos que $A_{L,\phi}$ aproxima A_ϕ acima quando $L \rightarrow \infty$, e o calibre certo é obtido. Argumentos similares valem para $r \sin \theta \ll a$. Observe que para $\theta = \pi/2$ os passos acima inferem a convergência no plano xy , ou seja, em \mathbb{R}^2 .

Salientamos que para os pontos $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}$ o integrando na expressão de $A_{L,\phi}$ é uma função contínua e, para r e θ fixados com $r \sin \theta \neq a$, existe $d > 0$ de modo que o valor absoluto do denominador no integrando é uniformemente $\geq d$. De fato, podemos tomar

$$d := \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{S}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = |r \sin \theta - a| > 0.$$

Em resumo, fora da borda do solenóide, as expressões acima para o potencial vetorial resultam em valores finitos para ambos $L < \infty$ e $L = \infty$.

Para pontos \mathbf{x} na borda do solenóide, isto é, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = 0$, para algum $\mathbf{x}' \in \mathcal{S}$, o denominador do integrando na expressão de $A_{L,\phi}$ anula-se, o que causa uma divergência na integral; entretanto, tal expressão para $A_{L,\phi}$ não é suposta valer nesta borda, e os valores de \mathbf{A} são recuperados por continuidade (usando os limites laterais de dentro e fora do solenóide). De qualquer modo, a fronteira do solenóide é um conjunto de medida de Lebesgue zero em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .

Finalmente, note que não é necessário nos restringirmos (como fizemos acima) a um solenóide finito com $-L < z' < L$, desde que todos os argumentos são facilmente adaptados para $-L_1 < z' < L_2$, com $L_1 \rightarrow \infty, L_2 \rightarrow \infty$.

4.2 Justificativa do Hamiltoniano de Aharonov-Bohm

Nesta seção apresentaremos uma justificativa teórica para o hamiltoniano H_{AB} . Consideremos um solenóide \mathcal{S}_L de comprimento finito $2L > 0$ e também permeável. Relembre que um solenóide finito carregando uma corrente gera um campo magnético não nulo em seu exterior e, desde que ele é também considerado permeável, o teorema de Stokes pode ser aplicado; portanto o correspondente operador hamiltoniano está bem definido e sem condições de fronteira na borda do solenóide. Modelamos a impermeabilidade por uma sequência de potenciais positivos V_n os quais se anulam na região exterior ao solenóide \mathcal{S}'_L e vão para o infinito em seu interior \mathcal{S}°_L quando $n \rightarrow \infty$ [35] (o primeiro a propor a impermeabilidade

do solenóide através de potenciais crescentes V_n foi Kretzschmar [32]). Então discutimos os limites do solenóide de comprimento infinito, isto é, $L \rightarrow \infty$, e impermeabilização $n \rightarrow \infty$ (obtendo assim uma região multiplamente conexa) mostrando que eles existem e, finalmente, que ambos os limites comutam, ou seja, não importa qual limite é tomado primeiro, e o hamiltoniano resultante é sempre H_{AB} . Tais limites são no sentido forte do resolvente em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 e discutimos ambos simultâneamente, visto que os argumentos são quase os mesmos.

Alguns artigos têm considerado explicitamente um solenóide finito [9, 42] neste contexto; também alguns processos limites matematicamente não rigorosos são discutidos em [10] para justificar o hamiltoniano. Entretanto, os argumentos não podem ser considerados no critério de rigor típico da física matemática que demandamos aqui, e esta é nossa principal contribuição. Uma dificuldade é que os índices de deficiência do hamiltoniano Aharonov-Bohm com domínio $C_0^\infty(\mathcal{S}')$ são ambos infinitos, os quais levam para muitas extensões auto-adjuntas; todas as extensões auto-adjuntas em $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}')$, no espaço de Hilbert $L^2(\mathcal{S}')$, deste operador apareceram no Capítulo 2 desta tese.

Agora vamos aos detalhes da idéia esboçada acima para a justificativa teórica de H_{AB} . Seja (x, y, z) denotando as coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 ; o interior do solenóide finito \mathcal{S}_L , simetricamente disposto com respeito ao plano x, y , é

$$\mathcal{S}_L^\circ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < a^2, |z| < L\},$$

e denote por χ_L sua função característica, isto é, $\chi_L(x, y, z) = 1$ se $(x, y, z) \in \mathcal{S}_L^\circ$ e $\chi_L(x, y, z) = 0$ caso contrário. A sequência de barreiras potenciais será $V_n = n \cdot \chi_L$, ou seja, $V_n(x, y, z) = n\chi_L(x, y, z)$. Se \mathbf{A}_L denota o potencial vetorial gerado por este solenóide finito e permeável, então o hamiltoniano correspondente é ($0 < L \leq \infty$; note que escrevemos $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{L=\infty}$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{L=\infty}$)

$$H_{L,n} = \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}_L \right)^2 + V_n, \quad \text{dom } H_{L,n} = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d), \quad d = 2, 3,$$

sendo \mathcal{H}^2 o espaço de Sobolev usual, domínio do hamiltoniano livre (ou seja, o laplaciano negativo) $-\Delta$. No caso de \mathbb{R}^2 apenas restringimos o potencial vetorial e V_n para o plano e $\mathcal{S} \cap \mathbb{R}^2$ é uma circunferência centrada na origem.

Em \mathbb{R}^3 existe a possibilidade da partícula entrar no solenóide finito em um ponto com $x_3 = \pm L$ (com área total $\alpha_t = 2\pi a^2$), o qual é fisicamente diferente da entrada através da borda lateral do solenóide (com área total $\alpha_l = 2\pi a \times (2L)$), mas a barreira potencial V_n impede igualmente a entrada da partícula em qualquer direção. Este efeito torna-se menos

e menos importante quando L cresce, visto que a razão das áreas $\alpha_t/\alpha_l \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$ (note também que, na verdade, α_t não depende de L) e para L grande o topo e o fundo do solenóide geralmente estarão longe do movimento do elétron; além disso, este efeito não está presente em duas dimensões. Portanto, ele não será modelado aqui.

Em ambas as dimensões $d = 2, 3$, o fato de o solenóide ser finito e permeável faz a modelagem mais viável, e para cada par de valores finitos n, L o hamiltoniano $H_{L,n}$ é um operador bem definido e auto-adjunto. Note que \mathbf{A}_L é uma função vetorial limitada e contínua; por exemplo, em \mathbb{R}^2 , usando coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , $z = 0$, e o cálculo em [30] do potencial vetorial de um laço circular de corrente, encontramos que (em um particular calibre) as componentes ρ e z de \mathbf{A}_L anulam-se, enquanto a componente ϕ depende somente de ρ e é dada por

$$A_{L,\phi}(\rho) = \frac{\Phi}{4\pi^2 a} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{(\rho^2 + a^2 + z'^2 - 2a\rho \cos \phi')^{1/2}} d\phi' dz'.$$

Agora, para $\rho \neq a$ (a borda do solenóide $\rho = a$ é um conjunto de medida de Lebesgue zero), temos a convergência pontual de \mathbf{A}_L para \mathbf{A} quando $L \rightarrow \infty$ em \mathbb{R}^2 , cuja componente ϕ de \mathbf{A} é bem conhecida e dada por $A_\phi(\rho) = \Phi/(2\pi\rho)$ se $a \leq \rho$, e $A_\phi(\rho) = \Phi\rho/(2\pi a^2)$ se $0 \leq \rho \leq a$. Similarmente para convergência pontual quando $L \rightarrow \infty$ do potencial vetorial em \mathbb{R}^3 , como mostrada na seção anterior.

No caso particular de um solenóide de comprimento infinito $L = \infty$ em \mathbb{R}^3 , o limite impermeável $n \rightarrow \infty$ foi considerado em [35]; usando o teorema de Kato-Robinson [14] foi mostrado que $H_{\infty,n}$ converge para H_{AB} com domínio

$$\text{dom } H_{AB} = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}') \cap \mathcal{H}_0^1(\mathcal{S}')$$

no sentido forte do resolvente quando $n \rightarrow \infty$, e desde que os elementos de $\mathcal{H}_0^1(\mathcal{S}')$ anulam-se na borda do solenóide (no sentido dos traços de Sobolev), condições de fronteira de Dirichlet apareceram nesta situação. Visto que o mesmo procedimento de [35] para impermeabilização aplica-se também para o caso do solenóide finito \mathcal{S}_L (com L fixado), obtemos (em dimensões $d = 2, 3$)

Proposição 4.1 *Quando $n \rightarrow \infty$ a seqüência de operadores $H_{L,n}$ converge no sentido forte do resolvente para o operador*

$$H_{L,\infty} := \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}_L \right)^2, \quad \text{dom } H_{L,\infty} = \mathcal{H}^2(\mathcal{S}'_L) \cap \mathcal{H}_0^1(\mathcal{S}'_L).$$

Agora fixe n . Se $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $\text{supp } \psi$ denota seu suporte, então

$$\|H_{L,n}\psi - H_{\infty,n}\psi\|^2 = \int_{\text{supp } \psi} |2i(\mathbf{A}_L - \mathbf{A}) \cdot \nabla\psi + (\mathbf{A}_L^2 - \mathbf{A}^2)\psi|^2 dx,$$

e visto que quando $L \rightarrow \infty$ temos o limite pontual $\mathbf{A}_L \rightarrow \mathbf{A}$, segue que $H_{L,n}\psi \rightarrow H_{\infty,n}\psi$ pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue. O conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ é um cerne de ambos $H_{\infty,n}$ e $H_{L,n}$, para todo $L > 0$. Isto pode ser visto, por exemplo para $H_{\infty,n}$, da seguinte maneira: para facilitar a notação considere $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ somente neste parágrafo e considere os operadores auto-adjuntos P_j dados pelo fecho de $\text{dom } \tilde{P}_j = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\tilde{P}_j\psi = -i\partial\psi/\partial x_j$, e

$$\text{dom } T_j = \text{dom } P_j, \quad T_j\psi := P_j\psi - A_j\psi, \quad 1 \leq j \leq d,$$

os quais são auto-adjuntos visto que A_j são funções limitadas (e assim, operadores de multiplicação limitados). Note que $\bigcap_j \text{dom } P_j = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$. Pela Proposição 4.3.9 de [15], o operador $\sum_{j=1}^d T_j^2$, com domínio $\{\psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d) : T_j\psi \in \text{dom } T_j, 1 \leq j \leq d\} = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$, é auto-adjunto. Logo, o operador $H_{\infty,n} = \sum_{j=1}^d T_j^2 + n\chi_{S^0}$, $\text{dom } H_{\infty,n} = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$ é auto-adjunto, já que a função $n\chi_{S^0}$ é limitada $\forall n$, ou seja, o conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ é um cerne para $H_{\infty,n}$. Similarmente para $H_{L,n}$.

Então uma aplicação do Teorema VIII.25 de [39] implica

Proposição 4.2 *Para cada n fixado, a seqüência de operadores $H_{L,n}$ converge para $H_{\infty,n}$ no sentido forte do resolvente quando $L \rightarrow \infty$.*

Seja $R_i(T) = (T - i)^{-1}$ denotando o resolvente de um operador auto-adjunto T no número complexo i . Para $\psi \in L^2(\mathcal{S}')$ temos

$$\begin{aligned} \|R_i(H_{L,\infty})\psi - R_i(H_{AB})\psi\| &\leq \|R_i(H_{L,\infty})\psi - R_i(H_{L,n})\psi\| + \|R_i(H_{L,n})\psi - R_i(H_{\infty,n})\psi\| \\ &\quad + \|R_i(H_{\infty,n})\psi - R_i(H_{AB})\psi\|, \end{aligned}$$

e, dado $\varepsilon > 0$, pela Proposição 4.2, se L é suficientemente grande temos

$$\|R_i(H_{L,n})\psi - R_i(H_{\infty,n})\psi\| < \varepsilon/3,$$

e depois, fixando tal L , tomamos n suficientemente grande de modo que, pela Proposição 4.1 e a convergência no sentido do resolvente $H_{\infty,n} \rightarrow H_{AB}$ [35], obtemos

$$\|R_i(H_{L,\infty})\psi - R_i(H_{L,n})\psi\| < \varepsilon/3, \quad \|R_i(H_{\infty,n})\psi - R_i(H_{AB})\psi\| < \varepsilon/3,$$

respectivamente, e portanto

$$\|R_i(H_{L,\infty})\psi - R_i(H_{AB})\psi\| < \varepsilon,$$

para L suficientemente grande. Assim, demonstramos:

Proposição 4.3 *O operador $H_{L,\infty}$ converge para H_{AB} no sentido forte do resolvente quando $L \rightarrow \infty$.*

Denote por P_0 o operador projeção $L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathcal{S}')$. Se $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, então

$$\begin{aligned} \|R_i(H_{AB})P_0\psi - R_i(H_{L,n})P_0\psi\| &\leq \|R_i(H_{AB})P_0\psi - R_i(H_{L,\infty})P_0\psi\| \\ &\quad + \|R_i(H_{L,\infty})P_0\psi - R_i(H_{L,n})P_0\psi\|. \end{aligned}$$

Pelas proposições acima ambos os termos a direita da desigualdade anulam-se quando $L, n \rightarrow \infty$, e assim concluímos

Teorema 4.1 *O operador $H_{L,n}$ converge para H_{AB} no sentido forte do resolvente quando $L, n \rightarrow \infty$, independentemente da maneira que ambos os limites são tomados.*

Veja [14, 35] para uma discussão da convergência no sentido do resolvente quando o domínio do operador limite não é denso no espaço original (como $L^2(\mathcal{S}')$ não é denso em $L^2(\mathbb{R}^d)$). O Teorema 4.1 diz que o mesmo operador H_{AB} é obtido independentemente da maneira como os limites do solenóide de comprimento infinito e de impermeabilização são processados. Por exemplo, ambas as operações podem ser feitas simultaneamente tomando, digamos, $n = L$ e então $L \rightarrow \infty$, etc. Em particular, os limites $L \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow \infty$ comutam. Isto é resumido no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} H_{L,n} & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & H_{L,\infty} \\ L \rightarrow \infty \downarrow & \searrow L, n \rightarrow \infty & \downarrow L \rightarrow \infty \\ H_{\infty,n} & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & H_{AB} \end{array}$$

Portanto, estamos apresentando uma justificativa teórica para o uso de H_{AB} enquanto modelagem de um solenóide de comprimento infinito e impermeável, ainda que estejamos em uma situação de região multiplamente conexa e com um campo magnético restrito à região impenetrável.

Observação 4.1 *Para cada n fixado é possível verificar que $H_{L,n}$ converge para $H_{\infty,n}$ no sentido forte em $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$ quando $L \rightarrow \infty$, para $d = 2, 3$.*

Note que todos os resultados acima continuam válidos se no lugar dos atuais potenciais V_n considerarmos uma sequência crescente de potenciais \tilde{V}_n que são funções positivas e limitadas, se anulem fora do solenóide (por exemplo, de suportes compactos contidos em \mathcal{S}_L°) e tendem a infinito dentro do solenóide quando $n \rightarrow \infty$.

Os processos limites discutidos aqui constituem um passo além e complementar a [35], os quais consideraram somente solenóides de comprimento infinito.

É intrigante que a (habitualmente apenas formal) convergência do processo limite para H_{AB} tenha levado diferentes autores para conclusões extremamente opostas: enquanto Magni e Valz-Gris ([35], pp. 185-186) concluíram que “The way of coming to that hamiltonian, however, makes it clear that there is no cogent reason to attribute vector potentials any physical activity...,” Berry [10] argumenta que tais limites justificam o exclusivo papel quântico dos potenciais. Pelo menos com respeito a este trabalho, decidimos nos manter fora desta controvérsia e nos restringir ao diagrama acima.

4.3 Convergência no Sentido Uniforme do Resolvente

Nesta seção mostraremos que para cada $L < \infty$ fixado, $H_{L,n}$ converge para $H_{L,\infty}$ no sentido uniforme do resolvente quando $n \rightarrow \infty$, em \mathbb{R}^d , sendo $d = 2, 3$. Este é o conteúdo do principal resultado desta seção, Proposição 4.4 abaixo.

Consideremos os seguintes operadores auto-adjuntos e positivos da seção anterior $H_{L,n}$, H_L e $H_{L,\infty}$, sendo H_L dado por

$$H_L := \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}_L \right)^2, \quad \text{dom } H_L = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d).$$

Denotaremos seus resolventes no ponto -1 por $R_{L,n}$, $R_{L,0}$ e $R_{L,\infty}$, respectivamente. Por exemplo, $R_{L,0} = (H_L + \mathbf{1})^{-1}$.

Proposição 4.4 *Para cada $L > 0$ finito e fixado, $H_{L,n}$ converge no sentido uniforme do resolvente para $H_{L,\infty}$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Fixe $0 < L < \infty$ finito e tome um conjunto aberto $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}_L^\circ$ satisfazendo $\text{dist}(\mathcal{O}, \partial \mathcal{S}_L^\circ) > 0$. Agora escolha um aberto $\mathcal{U} \supset \overline{\mathcal{S}_L^\circ} \setminus \mathcal{O} \supset \mathcal{S}_L$ com $\overline{\mathcal{U}}$ compacto, e uma função não-negativa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ com $\varphi = 1$ em \mathcal{U} . Então com a notação dos resolventes acima e com φ denotando também o operador de multiplicação pela função φ , temos

$$0 \leq \varphi (R_{L,n} - R_{L,\infty}) \varphi \leq \varphi (R_{L,0} - R_{L,\infty}) \varphi,$$

com $\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi$ e $\varphi(R_{L,0} - R_{L,\infty})\varphi$ compactos, para todo n . Antes de continuar justifiquemos as desigualdades acima: para a primeira, com a idéia usada na demonstração do Teorema de Kato-Robinson (Teorema 10.4.2 de [15]) mostra-se que $R_{L,n} - R_{L,\infty} \geq 0$. Assim, pela Proposição 9.3.1 de [15] temos

$$\begin{aligned} \langle \xi, \varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi\xi \rangle &= \langle \varphi\xi, (R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi\xi \rangle \\ &= \left\langle (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2}\varphi\xi, (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2}\varphi\xi \right\rangle \\ &= \left\| (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2}\varphi\xi \right\|^2 \geq 0, \quad \forall \xi \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Quanto à segunda, considerando as formas $b^{L,n}$ e $b^{L,0}$ associadas aos operadores $H_{L,n}$ e H_L , respectivamente, vemos que $b^{L,0} \leq b^{L,n}$. Segue pelo Lema 10.4.4 de [15] que $R_{L,n} \leq R_{L,0}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\langle \xi, [\varphi(R_{L,0} - R_{L,\infty})\varphi - \varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi]\xi \rangle \\ &= \langle \xi, \varphi(R_{L,0} - R_{L,n})\varphi\xi \rangle = \left\| (R_{L,0} - R_{L,n})^{1/2}\varphi\xi \right\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$\forall \xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Agora para justificar que o par de operadores $\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi$ e $\varphi(R_{L,0} - R_{L,\infty})\varphi$ é compacto, para todo n , considere os dois seguintes lemas, sendo $B_\infty(\mathbb{R}^d)$ o conjunto das funções de Borel, limitadas e que se anulam no infinito, com a norma do sup.

Lema 4.1 *Se $f \in B_\infty(\mathbb{R}^d)$, $\vec{\mathbf{a}} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)^d$ e $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ é não-negativo, então $fR_{-\lambda}((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + V)$ é compacto, $\forall \lambda > 0$.*

Lema 4.2 *Sejam λ , f , $\vec{\mathbf{a}}$ e V como no lema anterior. Seja $H_\infty(\vec{\mathbf{a}})$ o limite no sentido forte do resolvente da seqüência de operadores $(-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + nV$ quando $n \rightarrow \infty$. Então $fR_{-\lambda}(H_\infty(\vec{\mathbf{a}}))$ é compacto.*

Esses lemas são consequências de resultados de [8, 33] e incluímos suas demonstrações no Apêndice B.

Aplique o Lema 4.1 com $f = \varphi$ e $R_{-\lambda}((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + V) = R_{L,n}$ para obter $\varphi R_{L,n}$ compacto e, logo, $\varphi R_{L,n}\varphi$ é compacto como composição de compacto com limitado. Similarmente, aplique o Lema 4.2 com $f = \varphi$ e $R_{-\lambda}(H_\infty(\vec{\mathbf{a}})) = R_{L,\infty}$ para obter $\varphi R_{L,\infty}$ compacto. Como φ é limitado, obtemos $\varphi R_{L,\infty}\varphi$ compacto. Sabemos pela Proposição 4.1 que $H_{L,n}$ converge no sentido forte do resolvente para $H_{L,\infty}$ quando $n \rightarrow \infty$, e assim, se $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\|\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi\xi\| \leq \|\varphi\| \|(R_{L,n} - R_{L,\infty})(\varphi\xi)\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, uma vez que φ é um operador limitado; ou seja, o operador $\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi$ converge fortemente a zero quando $n \rightarrow \infty$. Analogamente para $\varphi(R_{L,0} - R_{L,\infty})\varphi$.

Voltando à demonstração, desde que $\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi$ são como no Teorema VIII-3.3 de [31], e como $\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi$ é compacto, para todo n , estamos na hipótese do Teorema VIII-3.5 de [31], e segue deste que

$$\|\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Daí

$$\left\| (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2} \varphi \right\|^2 = \|\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Assim,

$$\begin{aligned} \|(R_{L,n} - R_{L,\infty})\varphi\| &= \left\| (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2} (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2} \varphi \right\| \\ &\leq \left\| (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2} \right\| \left\| (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2} \varphi \right\| \\ &\leq \left\| (R_{L,0} - R_{L,\infty})^{1/2} \right\| \left\| (R_{L,n} - R_{L,\infty})^{1/2} \varphi \right\| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Como na demonstração do Lema 2.3 de [29], temos

$$\|R_{L,n}\chi_{\mathcal{O}}\| \leq \kappa n^{-1/2},$$

sendo $\kappa \geq 1$ uma constante. De fato, podemos encontrar funções não-negativas $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ de modo que $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$, com $\eta_1 = 1$ em \mathcal{O} e $\text{supp } \eta_1 \subset \mathcal{S}_L^\circ$. Além disso, podemos assumir que $|\nabla \eta_1|, |\nabla \eta_2|$ são funções limitadas. Então

$$H_{L,n} = \eta_1 H_{L,n} \eta_1 + \eta_2 H_{L,n} \eta_2 - |\nabla \eta_1|^2 - |\nabla \eta_2|^2.$$

Como

$$\begin{aligned} \langle \xi, H_{L,n} \xi \rangle &= \langle \xi, H_L \xi \rangle + \langle \xi, n \chi_{\mathcal{S}_L^\circ} \xi \rangle \\ &= \langle H_L^{1/2} \xi, H_L^{1/2} \xi \rangle + n \int_{\mathcal{S}_L^\circ} |\xi|^2 \geq n \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\mathcal{S}_L^\circ), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta_1 H_{L,n} \eta_1 \xi \rangle &= \langle \eta_1 \xi, H_{L,n} \eta_1 \xi \rangle \geq n \langle \eta_1 \xi, \eta_1 \xi \rangle \\ &= n \langle \xi, \eta_1^2 \xi \rangle \geq n \langle \xi, \chi_{\mathcal{O}} \xi \rangle, \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\eta_1 H_{L,n} \eta_1 \geq n \eta_1^2 \geq n \chi_{\mathcal{O}},$$

e podemos encontrar uma constante κ tal que $H_{L,n} \geq n \chi_{\mathcal{O}} - \kappa$; sem perda de generalidade, podemos assumir $\kappa \geq 1$. Daí, segue que se $T = R_{-\kappa}(H_{L,n}) = (H_{L,n} + \kappa \mathbf{1})^{-1}$, então

$$\begin{aligned} \langle \xi, T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}} T^{1/2} \xi \rangle &= \langle T^{1/2} \xi, \chi_{\mathcal{O}} T^{1/2} \xi \rangle \leq n^{-1} \langle T^{1/2} \xi, (H_{L,n} + \kappa \mathbf{1}) T^{1/2} \xi \rangle \\ &= n^{-1} \langle \xi, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

isto é,

$$(H_{L,n} + \kappa \mathbf{1})^{-1/2} \chi_{\mathcal{O}} (H_{L,n} + \kappa \mathbf{1})^{-1/2} \leq n^{-1}.$$

Agora, seja $S = T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}}$. Então S é limitado, $S^* = \chi_{\mathcal{O}} T^{1/2}$ e

$$SS^* = T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}} \chi_{\mathcal{O}} T^{1/2} = T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}} T^{1/2}$$

é auto-adjunto e limitado. Então,

$$\|T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}}\|^2 = \|S\|^2 = \|S^* S\| = \|T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}} T^{1/2}\| \leq n^{-1},$$

e assim,

$$\|T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}}\| \leq n^{-1/2}.$$

Portanto,

$$\|T \chi_{\mathcal{O}}\| = \|T^{1/2} T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}}\| \leq \|T^{1/2}\| \|T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}}\| \leq \|T^{1/2} \chi_{\mathcal{O}}\| \leq n^{-1/2},$$

em que $\|T^{1/2}\| \leq 1$, uma vez que $\kappa \geq 1$ e que se $T_1 \geq 0$, T_1 auto-adjunto e limitado, então

$$\|T_1\| = \sup_{\|\xi\|=1} \langle T_1 \xi, \xi \rangle = \sup_{\|\xi\|=1} \langle T_1^{1/2} \xi, T_1^{1/2} \xi \rangle = \sup_{\|\xi\|=1} \|T_1^{1/2} \xi\|^2 = \|T_1^{1/2}\|^2.$$

Ou seja,

$$\|(H_{L,n} + \kappa \mathbf{1})^{-1} \chi_{\mathcal{O}}\| \leq \left\| (H_{L,n} + \kappa \mathbf{1})^{-1/2} \chi_{\mathcal{O}} \right\| \leq n^{-1/2}.$$

Finalmente, denotemos por $R = (H_{L,n} + \kappa \mathbf{1})^{-1}$ o resolvente de $H_{L,n}$ no ponto $-\kappa$ e, pela primeira equação do resolvente, temos

$$R_{L,n} = R + (\kappa - 1) R_{L,n} R.$$

Assim,

$$R_{L,n} \chi_{\mathcal{O}} = R \chi_{\mathcal{O}} + (\kappa - 1) R_{L,n} R \chi_{\mathcal{O}},$$

e, segue que

$$\begin{aligned} \|R_{L,n}\chi_{\mathcal{O}}\| &\leq \|R\chi_{\mathcal{O}}\| + (\kappa - 1)\|R_{L,n}\|\|R\chi_{\mathcal{O}}\| \\ &\leq n^{-1/2} + (\kappa - 1)n^{-1/2} = \kappa n^{-1/2}, \end{aligned}$$

uma vez que $\|R_{L,n}\| \leq 1$, ou seja,

$$\|R_{L,n}\chi_{\mathcal{O}}\| \leq \kappa n^{-1/2}.$$

Desta desigualdade segue que

$$\|(R_{L,n} - R_{L,\infty})\chi_{\mathcal{O}}\| = \|R_{L,n}\chi_{\mathcal{O}}\| \rightarrow 0, \quad (4.2)$$

quando $n \rightarrow \infty$, uma vez que $R_{L,\infty}\chi_{\mathcal{O}} \equiv 0$.

Agora, seja $\psi = (1 - \varphi)\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}$, sendo que $\tilde{\mathcal{S}}$ denota o complementar de \mathcal{S}_L° , ou seja, $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_L \cup \mathcal{S}'_L$. Note que $\psi \in C^\infty$. Calculamos

$$\begin{aligned} (H_L + \mathbf{1})[\psi(R_{L,0} - R_{L,\infty})] &= (\Delta\varphi)\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}(R_{L,0} - R_{L,\infty}) \\ &\quad + 2(\nabla\varphi)\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}\cdot\nabla(R_{L,0} - R_{L,\infty}) \\ &\quad - 2i(\mathbf{A}_L \cdot \nabla\varphi)\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}(R_{L,0} - R_{L,\infty}), \end{aligned}$$

de modo que, aplicando $R_{L,0}$ em ambos os membros, temos que

$$\begin{aligned} \psi(R_{L,0} - R_{L,\infty}) &= R_{L,0}\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\Delta\varphi)(R_{L,0} - R_{L,\infty}) \\ &\quad + 2R_{L,0}\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\nabla\varphi)\cdot\nabla(R_{L,0} - R_{L,\infty}) \\ &\quad - 2iR_{L,0}\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{A}_L \cdot \nabla\varphi)(R_{L,0} - R_{L,\infty}) \end{aligned}$$

é um operador compacto, novamente usando os Lemas 4.1 e 4.2.

Repetindo-se os argumentos usados acima obtemos que $\psi(R_{L,n} - R_{L,\infty})$ é um operador compacto.

Assim, $\psi(R_{L,n} - R_{L,\infty})\psi \leq \psi(R_{L,0} - R_{L,\infty})\psi$ implica

$$\|(R_{L,n} - R_{L,\infty})(1 - \varphi)\chi_{\tilde{\mathcal{S}}}\| \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

quando $n \rightarrow \infty$, analogamente ao que foi feito anteriormente.

Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned} R_{L,n} - R_{L,\infty} &= \chi_{\mathcal{O}}(R_{L,n} - R_{L,\infty}) + \chi_{\mathcal{S}_L^\circ \setminus \mathcal{O}}\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty}) + \chi_{\tilde{\mathcal{S}}}\varphi(R_{L,n} - R_{L,\infty}) \\ &\quad + \chi_{\tilde{\mathcal{S}}}(1 - \varphi)(R_{L,n} - R_{L,\infty}), \end{aligned}$$

e, segue de (4.1), (4.2) e (4.3) que

$$\|R_{L,n} - R_{L,\infty}\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, $H_{L,n}$ converge no sentido uniforme do resolvente para $H_{L,\infty}$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

Esta convergência uniforme também vale para $L = \infty$ em \mathbb{R}^2 com demonstração inteiramente similar. Entretanto, tal convergência uniforme não deve ser esperada ocorrer em \mathbb{R}^3 quando $L = \infty$, porque a borda do solenóide não é compacta neste caso.

Note que a borda \mathcal{S}_L ser compacta é fundamental para podermos tomar o aberto \mathcal{U} e a função não-negativa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo $\mathcal{U} \supset \mathcal{S}_L$ com $\overline{\mathcal{U}}$ compacto e $\varphi = 1$ em \mathcal{U} . De certa forma, tal $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ é responsável pela compacidade dos operadores.

Para encerrar esta seção observamos que, para cada n fixado, não temos uma demonstração da convergência no sentido uniforme do resolvente de $H_{L,n}$ para $H_{\infty,n}$ quando $L \rightarrow \infty$, pois não é claro que \mathbf{A}_L convirja uniformemente para \mathbf{A} quando $L \rightarrow \infty$.

Capítulo 5

Conclusão

Aqui apresentaremos rapidamente o que se procurou fazer neste trabalho e seus resultados, bem como algumas palavras sobre possíveis perspectivas futuras.

Neste trabalho procuramos fazer um estudo de alguns tópicos relacionados ao Efeito Aharonov-Bohm.

Inicialmente estudamos o solenóide de raio nulo e comprimento finito no plano. Mostramos que há infinitas extensões auto-adjuntas e as descrevemos. Em seguida comparamos estas com as do conhecido caso do solenóide de comprimento infinito de raio nulo. Isto foi feito através da convergência no sentido uniforme do resolvente, em cada setor, quando o comprimento do solenóide tende ao infinito.

Fizemos também um estudo do caso mais realista, que é o do solenóide de raio maior do que zero, no qual procuramos caracterizar todas as extensões auto-adjuntas através de condições de contorno na fronteira do solenóide. Obtivemos a caracterização de todas as extensões auto-adjuntas cujos domínios estão contidos no espaço de Sobolev \mathcal{H}^2 . Isto foi feito usando as triplas de fronteira, sendo que a nossa contribuição foi incorporar o potencial vetorial em suas expressões. Para extensões mais gerais, ou seja, aquelas cujos domínios não estão contidos em \mathcal{H}^2 , aplicamos a teoria de [24] e neste caso as condições de fronteiras tornam-se bastante abstratas. Num próximo passo, seria interessante tentar relacionar/aliar esta teoria com a teoria das triplas de fronteira para propor uma caracterização mais simples de todas as extensões auto-adjuntas, uma vez que esta última parece dar uma caracterização mais direta das condições de fronteira.

Para algumas das extensões encontradas em \mathcal{H}^2 , a saber, Neumann e do tipo Robin, estudamos o espalhamento e comparamos com a de Dirichlet, a qual foi estudada em [43].

Encontramos, por exemplo, que para altas energias o operador de espalhamento de Robin comporta-se como o de Neumann, e este comportamento difere do caso Dirichlet. Para a seção de choque diferencial destacamos que para certas energias o comportamento dos três casos difere significativamente. Isto sugere que um experimento poderia ser realizado para detectar qual extensão descreve a situação neste caso. Uma questão interessante seria estudar o espalhamento para outras extensões e compará-los, e também realizar tal estudo sem utilizar a decomposição nos setores de momento angular m , um passo certamente necessário para o estudo de extensões auto-adjuntas gerais.

Por último, propomos no Capítulo 4 uma justificativa teórica que seleciona o hamiltoniano usual de Aharonov-Bohm com condição de Dirichlet na fronteira do solenóide, o qual é a extensão que geralmente aparece na literatura. Isto foi feito via os limites de uma sequência crescente de solenóides de comprimentos finitos e de um procedimento de impermeabilização. Tais limites foram calculados no sentido forte do resolvente e obtivemos que ambos os limites comutam.

Contudo, finalizamos dizendo que em princípio, baseados em nossos estudos ainda não podemos tirar uma conclusão sobre o papel do potencial vetorial como ente físico primordial, mas concluímos que ele de fato deve estar explicitamente presente em certas modelagens que envolvem regiões que não são simplesmente conexas.

Apêndice A

Limite Quando $a \rightarrow 0$

Na Observação 1.1 do Capítulo 1 mencionamos que em \mathbb{R}^2 o potencial vetorial do solenóide finito de raio nulo pode ser recuperado a partir do potencial vetorial do solenóide finito de raio positivo, $a > 0$, tomando o limite $a \rightarrow 0$. Neste apêndice nosso objetivo é justificar esta afirmação. Note que este limite dá certa consistência adicional à expressão do potencial que encontramos no início do Capítulo 4.

Sabemos, da seção 4.1.1, que

$$\mathbf{A}_{L,\phi}(r, \pi/2) = \frac{\Phi}{4\pi^2 a} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{(r^2 + a^2 + z'^2 - 2ra \cos \phi')^{1/2}} d\phi' dz'$$

é o potencial vetorial do solenóide finito, comprimento $2L$ e raio $a > 0$ num ponto $\mathbf{x} = (r, \pi/2, \phi)$ em \mathbb{R}^2 .

Supondo a pequeno, podemos expandir

$$\frac{\cos \phi'}{(r^2 + a^2 + z'^2 - 2ra \cos \phi')^{1/2}}$$

e escrevê-lo como

$$\begin{aligned} \frac{\cos \phi'}{(r^2 + a^2 + z'^2 - 2ra \cos \phi')^{1/2}} &= \frac{\cos \phi'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} + \frac{r \cos^2 \phi'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} a \\ &+ \left(\frac{-\cos \phi'}{2(r^2 + z'^2)^{3/2}} + \frac{3r^2 \cos^3 \phi'}{2(r^2 + z'^2)^{5/2}} \right) a^2 + O(a^3). \end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima no integrando de $\mathbf{A}_{L,\phi}(r, \pi/2)$ e observando que $\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos^3 \phi' d\phi' = 0$, obtemos

$$\mathbf{A}_{L,\phi}(r, \pi/2) = \frac{\Phi}{4\pi^2 a} \left(\int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{r \cos^2 \phi'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} a d\phi' dz' + O(a^3) \right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{L,\phi}(r, \pi/2) &= \frac{\Phi}{4\pi^2 a} \int_{-L}^L \frac{\pi r a}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} dz' + O(a^2) \\
 &= \frac{\Phi r}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} + O(a^2) \\
 &= \frac{\Phi r}{4\pi} \left[\frac{z'}{r^2(r^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-L}^L + O(a^2) \\
 &= \frac{\Phi}{2\pi r} \frac{1}{[1 + (r/L)^2]^{1/2}} + O(a^2), \quad r > 0.
 \end{aligned}$$

Logo, fazendo $a \rightarrow 0$ chegamos a

$$\mathbf{A}_{L,\phi}(r, \pi/2) = \frac{\Phi}{2\pi r} \frac{1}{[1 + (r/L)^2]^{1/2}}, \quad r > 0,$$

e, portanto, recuperamos o potencial vetorial do solenóide finito de raio nulo no plano, usado no Capítulo 1.

Apêndice B

Dois Lemas Auxiliares

Neste apêndice apresentaremos as demonstrações dos Lemas 4.1 e 4.2, os quais foram usados na demonstração da Proposição 4.4, e são baseadas principalmente em resultados de [8, 33]. Para isto faremos algumas considerações iniciais.

Sejam B e C operadores limitados em $L^2(\mathbb{R}^d)$. Então escreveremos $B \dot{\leq} C$ para indicar que $|B\psi| \leq C|\psi|$, $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ou seja, $|B\psi|(x) \leq (C|\psi|)(x)$. Relembremos que a notação $B_\infty^\infty(\mathbb{R}^d)$ foi introduzida no parágrafo anterior ao Lema 4.1 para denotar o conjunto das funções de Borel, limitadas e que se anulam no infinito, com a norma do sup. Também usaremos os seguintes resultados conhecidos da literatura, sendo que indicamos as referências para as suas demonstrações:

- (i) Se $B \dot{\leq} C$ e C é um operador compacto, então B é compacto. (Teorema 2.2 de [8])
- (ii) Se $\lambda > 0$, $\vec{\mathbf{a}} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)^d$ e $V \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ é não-negativo, então $[(-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + V + \lambda]^{-1} \dot{\leq} (-\Delta + \lambda)^{-1}$. (Lema 6 de [33])
- (iii) Se $f, g \in B_\infty^\infty(\mathbb{R}^d)$, então o operador de multiplicação por $f(x)g(p)$ em $L^2(\mathbb{R}^d)$ é compacto. (Seção 11.4.1 de [15])

Feito isto, agora apresentamos as demonstrações dos Lemas 4.1 e 4.2, respectivamente.

Demonstração: [do Lema 4.1] Sejam $\lambda > 0$ e $f \in B_\infty^\infty(\mathbb{R}^d)$. Por (ii) acima temos

$$R_{-\lambda} \left((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + V \right) \dot{\leq} R_{-\lambda}(-\Delta),$$

ou seja,

$$|R_{-\lambda} \left((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + V \right) \psi| \leq R_{-\lambda}(-\Delta)|\psi|, \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Daí segue que

$$|f(x)R_{-\lambda}((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + V)\psi| \leq |f(x)|R_{-\lambda}(-\Delta)|\psi|, \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

isto é,

$$f(x)R_{-\lambda}((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + V) \dot{\leq} |f(x)|R_{-\lambda}(-\Delta).$$

Uma vez que o operador a direita da desigualdade acima é compacto por (iii), o resultado segue por (i). \square

Demonstração: [do Lema 4.2] Novamente por (ii) temos $\forall n$

$$R_{-\lambda}((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + nV) \dot{\leq} R_{-\lambda}(-\Delta),$$

isto é,

$$|R_{-\lambda}((-i\nabla - \vec{\mathbf{a}})^2 + nV)\psi| \leq R_{-\lambda}(-\Delta)|\psi|, \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos por hipótese a convergência forte dos resolventes em $L^2(\mathbb{R}^d)$ e portanto existe uma subsequência que converge q.t.p., assim obtemos

$$|R_{-\lambda}(H_\infty(\vec{\mathbf{a}}))\psi| \leq R_{-\lambda}(-\Delta)|\psi|.$$

Logo,

$$|f(x)R_{-\lambda}(H_\infty(\vec{\mathbf{a}}))\psi| \leq |f(x)|R_{-\lambda}(-\Delta)|\psi|, \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

ou seja,

$$f(x)R_{-\lambda}(H_\infty(\vec{\mathbf{a}})) \dot{\leq} |f(x)|R_{-\lambda}(-\Delta)$$

e o resultado segue aplicando (iii) e então (i). \square

Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M. e Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Nova Iorque: Dover Publications, 1972.
- [2] Adami, R. e Teta, A.: On the Aharonov-Bohm hamiltonian, *Lett. Math. Phys.* **43**, 43–54 (1998).
- [3] Aharonov, Y. e Bohm, D.: Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.* **115**, 485–491 (1959).
- [4] Aharonov, Y. e Bohm, D.: Remarks on the possibility of quantum electrodynamics without potentials, *Phys. Rev.* **125**, 2192 (1962).
- [5] Aharonov, Y. e Bohm, D.: Further discussion of the role of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.* **130**, 1625 (1963).
- [6] Albeverio, S.; Gesztesy, F.; Høgh-Krohn, R. e Holden, H.: *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1988.
- [7] Amrein, W. O.; Jauch, J. M. e Sinha, K. B.: *Scattering Theory in Quantum Mechanics: Physical Principles and Mathematical Methods*. Reading: Benjamin, 1977.
- [8] Avron, J., Herbst, I. e Simon, B.: Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions, *Duke Math. J.* **45**, 847–883 (1978).
- [9] Babiker, M. e Loudon, R.: Gauge invariance of the Aharonov-Bohm effect, *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 2973–2982 (1984).
- [10] Berry, M. V.: The Aharonov-Bohm effect is real physics not ideal physics. In “Fundamental aspects of quantum theory”, Eds. V. Gorini and A. Frigerio, pp. 319–320, Plenum Vol 144 (1986).

- [11] Brezis, H.: *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*. Paris: Dunod, 1999.
- [12] Brown, B. M.; Grubb, G. e Wood, I. G.: M -Functions for closed extensions of adjoint pairs of operators with applications to elliptic boundary problems, *Math. Nachr.* **282**, 314–347 (2009).
- [13] Dąbrowski, L. e Šťovíček, P.: Aharonov-Bohm effect with δ -type interaction, *J. Math. Phys.* **39**, 47–62 (1998).
- [14] Davies, E. B.: *One-Parameter Semigroups*. Londres: Academic Press, 1980.
- [15] de Oliveira, C. R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Basel: Birkhäuser, 2008.
- [16] de Oliveira, C. R. e Pereira, M.: Mathematical justification of the Aharonov-Bohm hamiltonian, *J. Stat. Phys.* **133**, 1175 – 1184 (2008).
- [17] Dunford, N. e Schwartz, J.: *Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. Nova Iorque: John Wiley, 1963.
- [18] Ehrenberg, W. e Siday, R. E.: The refractive index in electron optics and the principles of dynamics, *Proc. Phys. Soc. London, Sect. B* **62**, 8–21 (1949).
- [19] Eskin, G.: Inverse boundary value problems and the Aharonov-Bohm effect, *Inverse Problems* **19**, 49–62 (2003).
- [20] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*. Providence: American Mathematical Society, 1998.
- [21] Franz, W.: Elektroneninterferenzen im Magnetfeld, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* **2**, 65 (1939).
- [22] Gesztesy, F. e Malamud, M. M.: Spectral theory of elliptic operators in exterior domains. Preprint: arXiv:0810.1789v1 [math.SP] (2008).
- [23] Gradshteyn, L. S. e Ryzhik, I. M.: *Table of Integrals, Series and Products*. San Diego: Academic Press, 1994.
- [24] Grubb, G.: A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **22**, 425–513 (1968).

- [25] Grubb, G.: On coerciveness and semiboundedness of general problems, *Israel J. Math.* **10**, 32–95 (1971).
- [26] Grubb, G.: Known and unknown results on elliptic boundary problems, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43**, 227–230 (2006).
- [27] Grubb, G.: *Distributions and Operators*. Berlim: Springer-Verlag, 2008.
- [28] Hagen, C. R.: Aharonov-Bohm scattering amplitude, *Phys. Rev. D* **41**, 2015–2017 (1990).
- [29] Hempel, R. e Herbst, I.: Strong magnetic fields, Dirichlet boundaries, and spectral gaps, *Commun. Math. Phys.* **169**, 237–259 (1995).
- [30] Jackson, J. D.: *Classical Electrodynamics*. 2^a edição. Nova Iorque: John Wiley, 1975.
- [31] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators*. 2^a edição. Berlim: Springer-Verlag, 1995.
- [32] Kretzschmar, M.: Aharonov-Bohm scattering of a wave packet of finite extension, *Z. Phys.* **185**, 84–96 (1965).
- [33] Leinfelder, H. e Simader, C. G.: Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials, *Math. Z.* **176**, 1–19 (1981).
- [34] Lions, J. L. e Magenes, E.: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications - Vol. I*. Berlim: Springer-Verlag, 1972.
- [35] Magni, C. e Valz-Gris, F.: Can elementary quantum mechanics explain the Aharonov-Bohm effect?, *J. Math. Phys.* **36**, 177–186 (1995).
- [36] Olariu, S. e Popescu, I. I.: The quantum effects of electromagnetic fluxes, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 339–436 (1985).
- [37] Olver, F. W. J.: *Asymptotics and Special Functions*. Nova Iorque: Academic Press, 1974.
- [38] Peshkin, M. e Tonomura, A.: *The Aharonov-Bohm Effect. LNP 340*. Berlim: Springer-Verlag, 1989.

- [39] Reed, M. e Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics I. Functional Analysis*. Nova Iorque: Academic Press, 1980.
- [40] Reed, M. e Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*. San Diego: Academic Press, 1972.
- [41] Reed, M. e Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics III. Scattering Theory*. San Diego: Academic Press, 1979.
- [42] Roy, S. M.: Condition for nonexistence of Aharonov-Bohm effect, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 111–114 (1980).
- [43] Ruijsenaars, S. N. M.: The Aharonov-Bohm effect and scattering theory, *Ann. Phys.* **146**, 1–34 (1983).
- [44] Stakgold, I.: *Boundary Value Problems of Mathematical Physics - Vol. I*. Nova Iorque: Macmillan, 1970.
- [45] Weder, R.: The Aharonov-Bohm effect and time-dependent inverse scattering theory, *Inverse Problems* **18**, 1041–1056 (2002).
- [46] Yafaev, D. R.: *Mathematical Scattering Theory: General Theory. Translations of Mathematical Monographs*, **105**. Providence: AMS, 1992.