Involuções fixando $F^n \bigcup F^3$

Évelin Meneguesso Barbaresco

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP

2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

B229if

Barbaresco, Évelin Meneguesso.
Involuções fixando F^nUF^3 / Évelin Meneguesso Barbaresco. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
150 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria de cobordismo. I. Título.

CDD: 510 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
DM - UFSCar

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC- USP

Prof. Dr. Mauro Flavio Spreafico
ICMC - USP

Prof. Dr. João Peres Vieira
IGCE - UNESP

"O temor do Senhor é o princípio da ciência;
os loucos desprezam a sabedoria e a instrução".
Provérbios, 1:7.

Ao meu esposo Rodrigo

e aos meus pais

Wilson e Miriam

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me conceder a graça de concluir mais esta etapa, por ter me fortalecido nos momentos difíceis e pelas pessoas que colocou no meu caminho.

À Capes pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização desse projeto.

Ao Prof. Pedro Luiz Queiroz Pergher, não só pelo problema proposto que resultou essa tese, mas também pela orientação precisa e dedicada. Em especial, gostaria de agradecer à amizade, à dedicação, ao incentivo e à paciência com que me acolheu em todas as etapas desse trabalho.

Ao Prof. Robert Stong, da Virginia University at Charlottesville - USA, pelas técnicas às quais tive acesso em virtude do intercâmbio científico entre ele e o Prof. Pedro Pergher.

À Profª. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, da Universidade Estadual Paulista de São José do Rio Preto, pela generosidade e dedicação com que me orientou durante o Programa de Mestrado.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos e a todos os demais que contribuíram para minha formação.

À querida amiga Patrícia pela grande ajuda e colaboração no desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu esposo Rodrigo pelo carinho, apoio e compreensão por muitos momentos dedicados a este trabalho em detrimento ao tempo destinado à sua companhia.

Aos meus pais pelo carinho, pelos conselhos, pela confiança e apoio que deles recebi durante todos os anos de minha vida.

A todos aqueles que contribuíram, de uma ou outra maneira, para que eu concluísse esta empreitada.

Que Deus abençoe a todos.

Sumário

Resumo

Sejam M^m uma variedade suave e fechada e $T : M^m \longrightarrow M^m$ uma involução suave definida em M^m. É bem conhecido o fato que o conjunto de pontos fixos F de T é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de diferentes dimensões. Escrevamos $F = \cup_{i=0}^{n} F^i$, $n \leq m$, onde F^i denota a união disjunta das componentes i-dimensionais de F.

Suponha que F tem a forma $F^n \cup F^j$, $0 \leq j < n$, e que $F^n \cup F^j$ não borda. Através do famoso *Five Halves Theorem of J. Boardman*, concluimos então que $m \leq \frac{5}{2}\, n$. Nosso interesse nesse trabalho é determinar o limite superior de m, para cada n, no caso em que $j = 3$ e $n > 3$. Resultados dessa natureza foram obtidos por *R. E. Stong* e *P. Pergher* para $j = 0$, *S. Kelton* para $j = 1$ e *F. Figueira* para $j = 2$. Veremos que o caso $j = 3$ tem como limitante superior $m(n-3) + 6$, onde $m(n)$ é o limitante de *Stong* e *Pergher* para o caso $j = 0$.

Abstract

Let M^m a closed and smooth m-dimensional manifold and $T : M^m \longrightarrow M^m$ a smooth involution defined on M^m. It is well known that the fixed point set F of T is a finite and disjoint union of closed submanifolds, with possibly different dimensions. Write $F = \cup_{i=0}^{n} F^i$, $n \leq m$, where F^i denotes the union of those components of dimension i.

Suppose that F has the form $F^n \cup F^j$, $0 \leq j < n$, and that F does not bound. From the *Five Halves Theorem of J. Boardman*, one then has $m \leq \frac{5}{2}\, n$. In this work, our interest is to obtain improvements of this general bound in the case $F = F^n \cup F^3$, where $n > 3$. Results of this nature were obtained by *R. E. Stong* and *P. Pergher* for $j = 0$, *S. Kelton* for $j = 1$ and *F. Figueira* for $j = 2$. We will see that a general bound in this case is $m(n-3)+6$, where $m(n)$ is a number discovered by *Stong* and *Pergher* which works as a best possible bound for the case $F = F^n \cup \{pto\}$ $(j = 0)$.

Introdução

Iniciaremos esse trabalho com uma breve abordagem histórica sobre as ferramentas matemáticas que nos permitiram realizar tal trabalho. Essas ferramentas inserem-se no contexto iniciado com o famoso trabalho de *R. Thom* de 1954 sobre a teoria de bordismo, *Quelques propriétés globales des variétés differentiables* [23], o qual proporcionou ao mesmo a *Medalha Fields* em 1958. Em seu trabalho, *R. Thom* transformou a questão de classificar todas as variedades fechadas, a menos de bordismo, em uma questão de homotopia, o que lhe permitiu mostrar que a classe de bordismo de uma variedade fechada e suave é completamente determinada por invariantes algébricos denominados *números de Stiefel-Whitney* ou *números característicos.* Dez anos depois (1964), em seu grandioso trabalho *Differentiable Periodic Maps* [16], *P. E. Conner* e *E. E. Floyd* estenderam o trabalho de *Thom* introduzindo os *grupos de bordismo singular n-dimensionais de um espaço topológico* X, $\mathcal{N}_n(X)$, cujos elementos são as classes de bordismo de pares (M^n, f), onde M^n é uma variedade suave, fechada, n-dimensional e $f : M^n \longrightarrow X$ é uma função contínua. A extensão é devida ao fato de que, quando $X = \{ponto\}$, $\mathcal{N}_n(X)$ reduz-se ao grupo de bordismo não-orientado de *Thom*, $\mathcal{N}_n$. Semelhantemente ao que ocorre com $X = \{ponto\}$, *Conner* e *Floyd* mostraram que, quando X é um CW-complexo finito em cada dimensão, então a classe de bordismo do par (M^n, f) é completamente determinada por números característicos, os quais são oriundos das classes de *Stiefel-Whitney* do fibrado tangente de M_n e da $\mathbb{Z}_2$-cohomologia de X.

Nesse contexto, um detalhe importante é que, quando G é um grupo de *Lie* compacto e

$X = B(G)$, onde $B(G)$ é o espaço classificante para G-fibrados principais, então o bordismo singular de X reduz-se ao bordismo das ações suaves e livres de G em variedades fechadas, ou bordismo G-equivariante. Isso deu origem à original estratégia de se estudar ações de certos grupos em variedades usando métodos de bordismo. Dessa forma um amplo estudo sobre involuções foi levado a cabo por *Conner* e *Floyd* em [16], através da seguinte estratégia: quando $X = BO(r) =$ o espaço classificante para fibrados vetoriais r-dimensionais, $\mathcal{N}_n(X)$ converte-se no *grupo de bordismo de fibrados r-dimensionais sobre variedades n-dimensionais*, e desse modo esses objetos são completamente determinados por números característicos. Em particular, esse estudo teve um enfoque especial para as propriedades referentes ao conjunto de pontos fixos de involuções. Especificamente, se M é uma variedade suave, fechada e $T : M \longrightarrow M$ é uma involução suave, então o conjunto dos pontos fixos de T, que denotaremos por F, é uma subvariedade fechada de M, a qual pode ser escrita como $F = \bigcup F^i$, onde F^i denota a união (disjunta) das componentes i-dimensionais de F. O fibrado normal $\eta \mapsto F$ de F em M (que é a união disjunta dos fibrados sobre as diversas componentes) é chamado o *fixed-data* da involução (M, T). Um dos resultados mais importantes de *Conner* e *Floyd* foi mostrar que o bordismo do *fixed-data* determina completamente o bordismo equivariante do par (M, T). Em outras palavras, se (M, T) e (N, S) são duas involuções com *fixed-data* $\eta \mapsto F$ e $\nu \mapsto V$, respectivamente, então eles mostraram que (M, T) e (N, S) são equivariantemente cobordantes se, e somente se, $\eta \mapsto F$ e $\nu \mapsto V$ são cobordantes como fibrados.

A conveniência desse resultado é que o bordismo de fibrados é completamente determinado por números característicos, por ser o bordismo singular dos espaços classificantes; enquanto que o bordismo de involuções sem restrições não é determinado por números característicos (a não ser no caso especial em que as involuções em jogo sejam livres de pontos fixos; esse caso se reduz ao bordismo singular do espaço classificante $BO(1)$, que é determinado por números característicos).

Uma ocorrência observada por *Conner* e *Floyd* foi o fato que, se uma involução suave T atua sobre uma variedade m-dimensional de tal sorte que o conjunto de pontos fixos F não borda (isto é, alguma F^i não borda), então m não pode ser muito grande em relação à n, onde n é a dimensão da componente de F com maior dimensão; isso não ocorre caso F borde. O resultado de *Conner* e *Floyd* que trouxe à tona tal fenômeno foi o seguinte: para cada natural $n \geq 1$, existe um natural $\varphi(n) > n$ com a seguinte propriedade: se uma involução (M^m, T) fixa F de tal sorte que a dimensão da componente de F com maior dimensão é n, e se $m > \varphi(n)$, então (M^m, T) borda equivariantemente; o que, em particular, implica que F borda.

A prova do resultado acima concernente à existência de $\varphi(n)$ tinha caráter apenas existencial; posteriormente, *J. Boardman* completou tal resultado através de seu famoso *5/2-Teorema de Boardman* (ou *Five Halves Theorem* de [8], Bulletin of the American Math. Soc. - 1967), onde mostrou o seguinte: se uma involução (M^m, T) não borda equivariantemente e se o conjunto de pontos fixos F é tal que sua componente maximal tem dimensão n, então $m \leq 5/2n$. Adicionalmente, e através de exemplos explícitos, *Boardman* mostrou que a estimativa em questão é a melhor possível nas condições gerais nas quais a mesma foi formulada.

Essa generalidade do resultado de *Boardman* independe de n e abrange a possibilidade de F possuir componentes com todas as dimensões, de 0 a n; por essa razão tal resultado possui embutido em si um leque de problemas interessantes, que se revelam mediante a observação simultânea de dois resultados posteriores da literatura, nos quais a preocupação não era a obtenção de resultados do tipo *Boardman*. O primeiro desses é o seguinte resultado de *C. Kosniowski e R. Stong* : se (M^m, T) fixa $F = F^n$, e se $m > 2n$, então (M^m, T) borda equivariantemente ([3]; Topology, 1978). Isso implica que o *fixed-data* de (M^m, T) borda, e em particular F borda, de onde se conclui que, caso F não borde, então $m \leq 2n$. O exemplo dado pela involução *twist* $((F \times F, T), T(x, y) = (y, x))$ ilustra essa situação e mostra que essa estimativa é a melhor possível, o que significa um limitante para m melhor que o de *Boardman* no caso especial em que F possui dimensão constante igual a n.

O segundo resultado é um Teorema de *Royster* contido em [4], segundo o qual, se (M^m, T) é uma involução fixando a união de um ponto com uma variedade F de dimensão n ímpar, então (M^m, T) é equivariantemente cobordante à uma específica involução definida em $\mathbb{R}P^{n+1}$, onde $\mathbb{R}P^{n+1}$ denota o espaço projetivo real de dimensão $n+1$. Em particular, $m \leq n+1$ (na verdade é igual à $n+1$), e por causa da involução sobre $\mathbb{R}P^{n+1}$ citada, essa estimativa é a melhor possível. Evidentemente, isso é também um limitante para m melhor que o de *Boardman* na situação especial em que F possui, além da componente maximal n-dimensional (com n ímpar), componentes 0-dimensionais (quando componentes 0-dimensionais efetivamente ocorrem, então a quantidade das mesmas precisa ser ímpar, o que pode ser reduzido, via bordismo, a um único ponto).

Essa linha de problemas foi descoberta e estabelecida por *P. Pergher* em seu trabalho [17]; especificamente, surge naturalmente o problema de se estabelecer um limitante para m, em termos de n, melhor que o de *Boardman*, quando alguma restrição sobre n é imposta, ou quando adicionalmente, algumas dimensões envolvidas em F (que em princípio seriam de 0 a n) são inicialmente omitidas. Tal problema pode ser formulado da seguinte forma geral: para cada número natural n, e para cada conjunto de naturais $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, onde $0 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_r < n$ e $0 \leq r$, definimos $m(n; X)$ como sendo o seguinte número natural:

$m(n;X) =$ $\max\{m$ tal que existe involução (M^m, T) fixando alguma F que não borda, cuja componente maximal é n-dimensional, e tal que F não possui componentes com dimensões diferentes de n e daquelas especificadas na lista $X\}$.

Com tal formulação, o Teorema 5/2 de *Boardman* estabelece simplesmente que $m(n;X) \leq \frac{5}{2}\, n$ para qualquer $(n;X)$. O teorema acima citado de *C. Kosniowski e R. Stong* diz que: se X é a lista vazia, então $m(n;X) = 2n$ para todo n; por outro lado, o resultado de *Royster* diz que $m(n;\{0\}) = n+1$ quando n é ímpar. Tal formulação relativa a $m(n;X)$ foi introduzida por *P. Pergher* e *F. Figueira* em [19].

É importante frisar que o valor de $m(n;X)$ independe da quantidade de componentes de F com alguma dimensão específica $p_j \in X$. Isso decorre do seguinte fato (que será detalhado no Capítulo 1, Seção 1.7.1, Teorema 1.7.5): suponha que uma involução (M^m, T) fixa F, e seja F^i a união disjunta das componentes de F com dimensão i. Então existe uma involução

(N^m, S), equivariantemente cobordante a (M^m, T) fixando $B = (F - F^i) \cup V^i$, onde V^i é uma subvariedade conexa i-dimensional de N^m. Dessa forma, $m(n; X)$ é de fato uma função exclusivamente de n e de X.

Além do resultado acima citado, o Capítulo 1 contém os demais pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Nesses pré-requisitos estão incluídos alguns tópicos fundamentais da teoria de bordismo equivariante desenvolvida por *Conner* e *Floyd*.

Como dito acima, uma vez que $m(n; X) = 2n$ está estabelecido para a lista vazia X e para qualquer n, o passo seguinte é a análise de $m(n; X)$ quando X é unitário, ou seja, quando F possui duas componentes com dimensões distintas F^n e F^j, $j < n$. O caso $j = 0$ e n ímpar foi resolvido por *Royster*, como já foi citado. Nessa direção e iniciando efetivamente o ataque a esse tipo de problema, *P. Pergher* mostrou que $m(2n; \{0\}) \leq 3n + 3$ quando n é ímpar em [17]. Esse resultado foi obtido com um refinamento da técnica de *Royster*. Posteriormente, em *11*, *R. Stong* e *P. Pergher* chamaram $m(n; \{0\})$ de $m(n)$ apenas, e determinaram seu valor exato para cada n. A técnica utilizada consistiu inicialmente em mostrar que, se (M^m, T) fixa $F^n \cup \{ponto\}$, então $m \leq m(n)$; isso foi obtido usando algumas classes características especiais e a teoria de *Conner* e *Floyd*. Em linhas gerais, a classe de bordismo de um fibrado $\nu \mapsto F$ dá origem à classe de bordismo equivariante de uma involução sem pontos fixos, dada pela involução A que atua como antipodal nas fibras do fibrado em esferas $S(\nu)$. Segundo *Conner* e *Floyd*, caso $\nu \mapsto F$ seja o *fixed-data* de alguma involução, então $(S(\nu), A)$ borda como elemento do grupo de bordismo de involuções livres de pontos fixos. Ocorre que tal grupo de bordismo pode ser identificado ao grupo de bordismo singular de $X = BO(1)$, o qual consiste das classes de bordismo de fibrados unidimensionais. Essa identificação é obtida associando-se $(S(\nu), A)$ ao fibrado linha canônico $\lambda \mapsto S(\nu)/A$. Por outro lado, as classes de bordismo de fibrados unidimensionais são completamente determinadas por números característicos, conforme já citado anteriormente. Tomando-se a situação particular na qual uma involução possui *fixed-data* do tipo $\nu \mapsto F = \eta \mapsto F^n \cup \mu \mapsto F^j, j < n$, isso dará origem à uma coleção de equações, obtidas por se igualar cada número característico de $\lambda \mapsto S(\eta)/A$ ao correspondente número característico de $\lambda \mapsto S(\mu)/A$. Quando $j = 0$, $\mu \mapsto F^0$ é sempre o fibrado trivial sobre um ponto e $\lambda \mapsto S(\mu)/A$ é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^{m-1}$ cujos números característicos são explicitamente conhecidos. Manipulando as equações acima mencionadas, com o auxílio de certas classes características especiais e com o conhecimento explícito dos números de $\lambda \mapsto \mathbb{R}P^{m-1}$, obtém-se os limitantes do caso $F = F^n \cup F^0$.

Com relação a $m(n; \{1\})$, em sua tese de doutorado *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$ (vide [10]), orientada pelo Prof. *Stong*, e posteriormente nos artigos [11] e [12], *Suzanne M. Kelton* analisou limitantes para as dimensões de variedades com involução cujo conjunto de pontos fixos é da forma $F^n \cup \mathbb{R}P^j$. Essa é uma linha de generalização para o caso $F = F^n \cup \{ponto\}$, uma vez que o ponto é igual a $\mathbb{R}P^0$. Entre os diversos resultados obtidos, *S. Kelton* mostrou que se (M^m, T) fixa $F^n \cup \mathbb{R}P^1$, então

$$m \leq \begin{cases} m(n-1)+1, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ m(n-1)+2, & \text{se } n \text{ par}, \end{cases}$$

e tais resultados são os melhores possíveis, o que encerra o estudo desse caso.

Já o caso $m(n; \{2\})$ foi estudado por *Fábio Gomes Figueira* em sua tese de doutorado *Involuções cujo conjunto de pontos fixos possui duas componentes* (vide [6]), sob orientação do Prof. *P. Pergher*, e posteriormente nos artigos [19], [20] e [22]. O resultado para esse caso é o seguinte: $m(n; \{2\}) = \max\{2n,\ m(n-2)+4\}$, para n qualquer, e esse é o melhor limitante possível. A abordagem desse caso segue a mesma idéia do caso $m(n; \{0\})$, sendo que a diferença crucial reside no fato que, enquanto só existe uma possibilidade para classes de bordismo estáveis sobre o ponto (dada pelos fibrados triviais), existem sete tais possíveis classes não nulas sobre variedades bidimensionais. Denotando tais classes por $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ e β_7, vimos acima que o limitante geral para esse caso é $m(n-2)+4$, e este mostra-se efetivo para qualquer n e qualquer uma das classes β_i. Nesse contexto, surge a questão: tal limitante pode ser melhorado para específicos n e específicas classes β_i? Tal questão deu origem à definição do número natural

$$\varphi(n,\beta_i) = \max\ \{m\ \ |\ \text{existe involução } (M^m,T) \text{ fixando } F \text{ do tipo } F = F^n \cup F^2,$$

$$\text{tal que a classe de bordismo estável do fibrado normal sobre } F^2 \text{ é } \beta_i\}.$$

Nos trabalhos [19], [20] e [22], *P. Pergher* e *F. G. Figueira* mostraram que $\varphi(n,\beta_i)$ pode sim ser melhorado em alguns casos de n e β_i específicos.

Seguindo essa direção, o principal objetivo do nosso trabalho é mostrar que $m(n,\{3\}) = \max\{2n, m(n-3)+6\}$, para n qualquer. Paralelamente ao caso $m(n,\{2\})$, no nosso caso existe uma lista de possibilidades para as classes de bordismo de fibrados estáveis sobre variedades tridimensionais. Mostraremos que essa lista possui 15 classes não nulas, que serão denotadas por $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{15}$; além disso, no Capítulo 2 exibiremos um modelo para cada uma das 15 classes. Isso foi obtido usando as classes de Wu, o Teorema de*Borel-Hirzebruch* e a estrutura de $\mathcal{N}_*$ (todos esses tópicos estão citados no Capítulo 1- Preliminares). Levando em conta que cada uma dessas classes pode ocorrer sobre a componente F^3 e estudando separadamente cada uma delas, o valor $m(n-3)+6$ pode ser melhorado para específicos n e específicas classes β_i. O Capítulo 3 é dedicado a este problema. Nesse capítulo, obteremos várias melhorias para o limitante geral $m(n-3)+6$, para uma certa quantidade de pares (n,β_i); no entanto, ainda há alguns pares para os quais não foi possível melhorar o limitante $m(n-3)+6$, e não se sabe se de fato pode ser melhorado. No Capítulo 4 exibiremos exemplos mostrando que em alguns casos os limitantes obtidos são os melhores possíveis. Ressaltamos que, comparativamente ao caso $F^n \cup F^2$, o caso $F^n \cup F^3$ demandou vários refinamentos das técnicas necessárias, no que se refere às duas frentes para se atacar o problema:

i) no cálculo de limitantes, onde polinomiais nas classes características mais apuradas foram necessárias, inclusive com a utilização dos quadrados de Steenrod;

ii) na construção de exemplos para se mostrar que os limitantes obtidos eram ou os melhores possíveis ou próximos dos melhores possíveis, inclusive com o estabelecimento de algumas técnicas novas para se construir involuções; nesse particular, destacamos a assim chamada "Técnica 2" (a "Técnica 1" é um refinamento de uma técnica introduzida por *P. Pergher* e *F. Figueira* em [22]).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Nesse capítulo reuniremos alguns fatos básicos, ferramentas e resultados presentes na literatura, necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Incluiremos nesse particular, tópicos básicos da teoria de bordismo equivariante, conforme desenvolvida por *Conner* e *Floyd* em [16]. Admitiremos que o leitor tenha noções de homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de $Stiefel - Whitney$.

Quando mencionarmos variedades e aplicações entre variedades, ficará subentendido que as variedades e as aplicações são de classe C^∞. Em todo esse trabalho, cohomologia será sempre com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

Seja M^n uma variedade fechada, suave, n-dimensional e considere uma aplicação suave $T : M^n \longrightarrow M^n$. Dizemos que essa aplicação é uma involução quando $T^2 = Id$.

Dada uma involução $T : M^n \longrightarrow M^n$, o conjunto $F_T = \{x \in M^n \mid T(x) = x\}$ é chamado o conjunto dos pontos fixos da involução; se $F_T = \emptyset$, dizemos que T é uma involução sem pontos fixos. Quando não houver margem para confusão, denotaremos tal conjunto apenas por F.

1.2 Bordismo de variedades

Dada uma variedade m-dimensional W^m compacta e com bordo, denotaremos por ∂W^m o bordo de W^m, o qual sabemos ser uma variedade $(m-1)$-dimensional *fechada*, isto é, compacta e sem bordo.

Definição 1.2.1. *Dizemos que uma variedade fechada n-dimensional M^n borda se existe uma variedade compacta W^{n+1} tal que $\partial W^{n+1} = M^n$. Dizemos que duas variedades fechadas M^n e V^n são cobordantes se a união disjunta $M^n \sqcup V^n$ borda.*

Para cada n, a relação de bordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das variedades fechadas n-dimensionais. Denotamos por $[M^n]$ a classe de equivalência a qual M^n pertence, denominada a *classe de bordismo de* M^n, e por $\mathcal{N}_n$ o conjunto de tais classes.

Com a operação $[M^n]+[V^n] = [M^n \sqcup V^n]$ (união disjunta), $\mathcal{N}_n$ tem estrutura de $\mathbb{Z}_2$-módulo (ou seja, um grupo abeliano em que todo elemento possui ordem 2). O elemento neutro é a classe de bordismo $[M^n] = 0$ das variedades que bordam.

A soma direta $\mathcal{N}_* = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}_n$ possui estrutura de anel graduado comutativo com unidade: o *anel de bordismo não orientado de Thom*. O produto dos elementos homogêneos $[M^n]$ e $[V^m]$ é dado por $[M^n] \cdot [V^m] = [M^n \times V^m]$ (produto cartesiano). A unidade é a classe de bordismo das variedades 0-dimensionais que são formadas por um número ímpar de pontos.

Os elementos de $\mathcal{N}_*$ podem ser manipulados através de certos invariantes algébricos, os números de *Stiefel-Whitney*, mas antes de definí-los faremos algumas considerações:

- fixada uma variedade fechada M^n, existe uma única *classe fundamental de homologia módulo 2* em $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$, a qual denotamos por $[M^n]_2$. Portanto para qualquer classe de cohomologia $v \in H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$ está definido o *índice de Kronecker* $v[M^n]_2 \in \mathbb{Z}_2$.

- sejam $\tau \mapsto M^n$ o fibrado tangente à M^n (eventualmente denotaremos τ por $T(M^n)$). Definimos então $W(M^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ a classe de *Stiefel-Whitney* de M^n, ou a classe do fibrado $\tau \mapsto M^n$. Assim, tomando $r_1, r_2, \dots r_n$ inteiros não negativos com $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, podemos formar o monômio (via produto *cup*) $w_1(\tau)^{r_1} \cdot w_2(\tau)^{r_2} \cdots w_n(\tau)^{r_n}$, o qual é uma classe de cohomologia em $H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$.

Definição 1.2.2. *O inteiro módulo 2,*

$$w_1(\tau)^{r_1} \cdot w_2(\tau)^{r_2} \cdots w_n(\tau)^{r_n}[M^n]_2,$$

ou resumidamente $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M^n]_2$*, é chamado um número de Stiefel-Whitney (ou o número característico) de* M^n *associado ao monômio* $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$.

Dessa maneira, associada à uma variedade fechada M^n, existe uma coleção de inteiros módulo 2 (ou seja, uma família formada por 0's e 1's), obtida ao considerarmos todos os possíveis monômios $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$ em $H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$. Dizemos que duas variedades fechadas M^n e V^n possuem os mesmos números de *Stiefel-Whitney* se

$$w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M^n]_2 = w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[V^n]_2$$

para todos os monômios $w_1^{r_1} \cdot w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$ de dimensão n.

A relação entre os números acima e os elementos de $\mathcal{N}_*$ é dada pelos seguintes

Teorema 1.2.1. ***(Pontrjagin)*** *Se* M^n *é bordo de uma variedade* C^∞ *compacta, então todos os números de Stiefel-Whitney de* M^n *são nulos.* ■

Teorema 1.2.2. ***(Thom)*** *Se todos os números de Stiefel-Whitney de uma variedade fechada* M^n *são nulos, então existe uma variedade* W^{n+1} *compacta, com bordo tal que* M^n *é o bordo de* W^{n+1} *(isto é,* M^n *borda).* ■

Exemplo: Considere o espaço projetivo real n-dimensional $\mathbb{R}P^n$. Usando os teoremas acima, a estrutura multiplicativa do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ e o fato de que $W(\mathbb{R}P^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, onde α é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$, verifica-se que: $\mathbb{R}P^n$ borda se, e somente se, n é ímpar.

Corolário 1.2.1. *Duas variedades fechadas M^n e V^n são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de Stiefel-Whitney.* ■

Em outras palavras, um elemento de $\mathcal{N}_*$ é completamente caracterizado pelos números de *Stiefel-Whitney* de qualquer um de seus representantes.

A estrutura de $\mathcal{N}_*$ foi completamente determinada por *Thom* em [23], e é dada pelo seguinte

Teorema 1.2.3. *$\mathcal{N}_*$ é uma álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador $x_n \in \mathcal{N}_n$ em cada dimensão $n \neq 2^j - 1 (n \geq 0)$. [23]* ■

Para cada n par, *Thom* mostrou que uma possibilidade para cada x_n é a classe de bordismo do espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$. Posteriormente *Dold*, em [2], exibiu representantes para os geradores nas dimensões ímpares, a saber: variedades do tipo $P(i,k) = \frac{S^i \times \mathbb{C}P^k}{\sim}$, com i e k apropriados e $\sim$ sendo a identificação

$$((x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}), [z_1, z_2, \ldots, z_k]) \sim ((-x_1, -x_2, \ldots, -x_{i+1}), [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_k]),$$

onde $\bar{z}$ denota o conjugado complexo de z. Geometricamente, isso significa que toda variedade fechada, que não borda, é bordante a uma união disjunta de certos produtos cartesianos envolvendo espaços projetivos reais pares e *variedades de Dold*.

1.3 Bordismo de aplicações

Para os fatos abaixo vide [15].

Fixemos um espaço topológico X. Uma *variedade singular* em X é um par (M^n, f) constituído por uma variedade fechada M^n e uma função contínua $f : M^n \longrightarrow X$.

Definição 1.3.1. *Dizemos que uma variedade singular (M^n, f) borda se existem uma variedade W^{n+1} compacta com bordo $\partial W^{n+1} = M^n$ e uma função contínua $F : W^{n+1} \longrightarrow X$ com restrição $F\mid_{M^n} = f$. Dizemos que duas variedades singulares em X, (M_1^n, f_1) e (M_2^n, f_2), são cobordantes se a união disjunta $(M_1^n \sqcup M_2^n, f_1 \sqcup f_2)$ borda (onde $f_1 \sqcup f_2 \mid_{M_i} = f_i, i = 1, 2$).*

A definição acima estabelece uma relação de equivalência na coleção das variedades singulares n-dimensionais em X. Denotamos por $[M^n, f]$ a *classe de bordismo da variedade singular* (M^n, f) em X, e por $\mathcal{N}_n(X)$ o conjunto de todas tais classes.

Com a operação $[M^n, f] + [N^n, g] = [M^n \sqcup N^n, f \sqcup g]$ (união disjunta) podemos introduzir em $\mathcal{N}_n(X)$ uma estrutura de grupo abeliano: o *grupo de bordismo n-dimensional não orientado de X*. A variedade singular (M^n, f) em X tal que M^n borda e f é constante, é um representante para o elemento neutro.

O grupo $\mathcal{N}_*(X) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}_n(X)$ possui uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado com a operação $\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_*(X) \longrightarrow \mathcal{N}_*(X)$ sendo dada por $[V^m] \cdot [M^n, f] = [V^m \times M^n, g]$, onde $g(x, y) = f(x)$. Note que, se $X = \{ponto\}$, então existe um isomorfismo natural de $\mathcal{N}_*$-módulos $\mathcal{N}_*(X) \cong \mathcal{N}_*$.

Podemos associar à uma variedade singular (M^n, f) em X certos números módulo 2, de maneira a estender o que foi feito para elementos de $\mathcal{N}_*$: para cada classe de cohomologia $h \in H^m(X, \mathbb{Z}_2)$ e cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n - m$, temos o inteiro módulo 2

$$w_{i_1}(\tau) \cdot w_{i_2}(\tau) \cdots w_{i_r}(\tau) f^*(h)[M^n]_2,$$

ou resumidamente, $w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdots w_{i_r} f^*(h)[M^n]_2$. Tais números são denominados *números de Whitney (ou números característicos) de f associados à classe de cohomologia h*, e se reduzem aos números de *Whitney* usuais de M^n se colocarmos $h = 1 \in H^0(X, \mathbb{Z}_2)$.

O teorema abaixo estabelece que os números de *Whitney* de f determinam a classe de cobordismo $[M^n, f]_2 \in \mathcal{N}_n(X)$ quando se impõe certas condições sobre X.

Teorema 1.3.1. ***(Conner-Floyd)*** *Seja X um CW-complexo finito em cada dimensão. Uma variedade singular $f : M^n \longrightarrow X$ borda se, e somente se, todos os números de Whitney de (M^n, f) se anulam. [16]* ■

Corolário 1.3.1. *Seja X um CW-complexo finito em cada dimensão. Duas variedades singulares são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de Whitney.* ■

1.4 Bordismo de fibrados vetoriais

Para os fatos abaixo vide [15].

Sejam $\xi^k \mapsto M^n$ e $\eta^k \mapsto V^n$ fibrados vetoriais k-dimensionais, onde os espaços base M^n e V^n são variedades fechadas n-dimensionais.

Definição 1.4.1. *Dizemos que um fibrado vetorial $\xi^k \mapsto M^n$ borda se existe um fibrado k-dimensional $\zeta^k \mapsto W^{n+1}$, sobre uma variedade W^{n+1} compacta com bordo, tal que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\zeta^k \mid_{M^n} = \xi^k$.*

Obs.: Note que se $\xi^k \mapsto M^n$ borda, então M^n borda.

Definição 1.4.2. *Dizemos que $\xi^k \mapsto M^n$ é cobordante a $\eta^k \mapsto V^n$ se existe uma variedade W^{n+1} compacta com bordo e um fibrado k-dimensional $\mu^k \mapsto W^{n+1}$ tal que $\partial W^{n+1} = M^n \sqcup V^n$, $\mu^k \mid_{M^n} \cong \xi^k$ e $\mu^k \mid_{V^n} \cong \eta^k$.*

A definição acima estabelece uma relação de equivalência na coleção dos fibrados vetoriais k-dimensionais sobre variedades fechadas n-dimensionais. A classe de bordismo de $\xi^k \mapsto M^n$ é denotada por $[\xi^k \mapsto M^n]$, ou às vezes simplesmente por $[\xi^k]$. A coleção formada por tais classes torna-se um grupo abeliano através da união disjunta (no qual todo elemento tem ordem 2) e torna-se um $\mathcal{N}_*$-módulo através da operação

$$[V^m] \bullet [\xi^k \mapsto M^n] = [p^*(\xi^k) \mapsto V^m \times M^n],$$

onde $p : V^m \times M^n \mapsto M^n$ é a projeção na segunda coordenada e $p^*(\xi^k)$ denota o *pullback* de ξ^k através de p. A classe do elemento neutro $[\xi^k \mapsto M^n] = 0$ pode ser representada pelos fibrados k-dimensionais triviais sobre as variedades que bordam.

O $\mathcal{N}_*$-módulo em questão nada mais é que $\mathcal{N}_*(BO(k))$, onde $BO(k)$ é o espaço total classificante para fibrados vetoriais k-dimensionais. Com efeito, denotemos por $\mu^k = E(O(k)) \mapsto BO(k)$ o fibrado universal. A identificação nos dois sentidos é feita da seguinte maneira: dado um fibrado $\xi^k \mapsto M^n$, escolhemos função classificante $f : M^n \mapsto BO(k)$ para ξ^k. Isso determina a variedade singular (M^n, f) em $BO(k)$. Reciprocamente, dada uma variedade singular (M^n, f) em $BO(k)$, associamos à mesma o pullback $f^*(\nu^k) \mapsto M^n$.

A bijeção assim obtida está bem definida e preserva as operações de grupo abeliano e de $\mathcal{N}_*$-módulo previamente introduzidas. Dessa forma, o $\mathcal{N}_*$-módulo de classes de bordismo de fibrados k-dimensionais pode ser visto como o $\mathcal{N}_*$-módulo de bordismo singular $\mathcal{N}_*(BO(k))$.

Como exemplo de um fibrado que borda, como já citado, tome N uma variedade que borda e $n\mathbb{R} \mapsto N$ o fibrado trivial n-dimensional.

Fixemos agora $[\xi^k \mapsto M^n] \in \mathcal{N}_n(BO(k))$, e tomemos seu correspondente $[M^n, f]$. Conforme visto anteriormente, o que determina $[M^n, f]$ são seus números de $Whitney$,

$$w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdots w_{i_r} f^*(h)[M^n]_2,$$

onde $h \in H^m(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ e $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n - m$. Ocorre que $H^*(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \ldots, w_k]$, onde $w_i \in H^i(BO(k), \mathbb{Z}_2)$, $1 \leq i \leq k$, é a i-ésima classe de *Stiefel-Whitney* do fibrado universal $\mu^k \mapsto BO(k)$. Um monômio básico $h \in H^m(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ pode ser escrito como $h = w_{j_1} \cdot w_{j_2} \cdots w_{j_s}$, $j_1 + j_2 + \cdots + j_s = m$; e pela naturalidade das classes características, $f^*(w_{j_1} \cdot w_{j_2} \cdots w_{j_s}) = v_{j_1} \cdot v_{j_2} \cdots v_{j_s}$, onde $v_j = w_j(\xi^k)$ é a j-ésima classe característica de ξ^k. Segue que,

$$w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdots w_{i_r} f^*(h)[M^n]_2 = w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdots w_{i_r} \cdot v_{j_1} \cdot v_{j_2} \cdots v_{j_s}[M^n]_2,$$

portanto, os *números de Whitney do fibrado vetorial* $\xi^k \mapsto M^n$ são dados por

$$w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdots w_{i_r} \cdot v_{j_1} \cdot v_{j_2} \cdots v_{j_s}[M^n]_2,$$

onde $i_1 + i_2 + \cdots + i_r + j_1 + j_2 + \cdots + j_s = n$, $v_j = w_j(\xi^k)$ e $w_{i_r} = w_{i_r}(\tau)$.

Dessa maneira, um fibrado borda se, e somente se, todos os números acima descritos se anulam.

Exemplo 1.4.1. *Considere o fibrado linha canônico $\lambda_1^1 \mapsto S^1$. Temos $v_1 = w_1(\lambda_1^1) = \alpha$, o gerador de $H^1(S^1, \mathbb{Z}_2)$, portanto o número de Whitney $w_1(\lambda_1^1)[S^1]_2$ de λ_1^1 é não nulo. Segue que λ_1^1 não borda (embora S^1 borde).*

1.5 Bordismo de ações de grupos

Para os fatos abaixo vide [15].

Seja G um grupo de Lie compacto. Cada par da forma (M^n, ϕ) denotará uma ação $\phi : G \times M^n \longrightarrow M^n$ de G em uma variedade fechada M^n. Lembramos que está subentendido que as variedades e aplicações entre variedades, em particular as ações, são diferenciáveis de classe C^∞.

Definição 1.5.1. *Dizemos que uma ação (M^n, ϕ) borda equivariantemente se existe uma variedade W^{n+1} compacta com bordo $\partial W^{n+1} = M^n$ e uma ação $\Phi : G \times W^{n+1} \longrightarrow W^{n+1}$, com restrição $\Phi \mid_{M^n} = \phi$. Dizemos que duas ações (M^n, ϕ) e (V^n, ψ) são cobordantes se a união disjunta $(M^n, \phi) \sqcup (V^n, \psi) = (M^n \sqcup V^n, \phi \sqcup \psi)$ borda.*

A relação de bordismo assim introduzida é uma relação de equivalência. Não é difícil mostrar a reflexividade e a simetria, enquanto a transitividade necessita do Teorema do Colar Equivariante para garantir a suavidade da ação.

Denotamos por $[M^n, \phi]$ a classe de bordismo de (M^n, ϕ), e por $\mathcal{I}_n(G)$ a coleção das classes de bordismo das G-ações nas variedades fechadas n-dimensionais. Com a operação de soma dada pela união disjunta $[M^n, \phi] + [V^n, \psi] = [M^n \sqcup V^n, \phi \sqcup \psi]$, $\mathcal{I}_n(G)$ é um grupo abeliano, denominado *grupo de G-bordismo irrestrito n-dimensional.* O elemento neutro é dado pela classe de bordismo $[M^n, \phi] = 0$ das G-ações (M^n, ϕ) que bordam equivariantemente (por exemplo, tome M^n uma variedade que borda e $\phi : G \times M^n \longrightarrow M^n$ dada por $\phi(g, x) = x$).

Podemos obter outros grupos de G-bordismo impondo restrições às ações consideradas. Nessa linha surge o *grupo de G-bordismo principal n-dimensional*, denotado por $\mathcal{N}_n(G)$, obtido ao impormos que todas as ações consideradas na relação de bordismo sejam livres.

Existe uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado em $\mathcal{I}_*(G) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n(G)$ (analogamente em $\mathcal{N}_*(G) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(G)$) dada pela operação:

$$[V^m] \cdot [M^n, \phi] = [V^m \times M^n, \psi]$$

onde $\psi : G \times (V^m \times M^n) \longrightarrow V^m \times M^n$ é dada por $\psi(g,(v,m)) = (v, \phi(g,m))$. Verifica-se que $[V^m \times M^n, \psi] \in I_{n+m}(G)$ depende somente de $[M^n, \phi]$ e de $[V^m]$, o que determina a estrutura pretendida.

Dada uma G-ação qualquer (M^m, ϕ) em uma variedade fechada M^m, a topologia diferencial e a teoria de ações de grupos de Lie garantem que o conjunto de pontos fixos de ϕ,

$$F_\phi = \{x \in M^m; \phi(g,x) = x, \forall g \in G\},$$

é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^m. Por outro lado, dados um grupo de Lie G compacto e uma união F, disjunta e finita, de variedades fechadas, cabe perguntar: existe um limitante máximo para a dimensão de variedades M^m dotadas de uma G-ação que possui F como conjunto de pontos fixos?

Conforme dissemos na Introdução, essa tese considera o estudo da questão acima para o caso $G = \mathbb{Z}_2$ e o caso particular $F = F^n \cup F^3$.

1.6 O grupo de $\mathbb{Z}_2$-bordismo principal

A partir de agora iremos considerar a situação particular em que $G = \mathbb{Z}_2$, e nesse caso estaremos trabalhando com $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ (o grupo de $\mathbb{Z}_2$-bordismo principal), ou seja, o grupo abeliano formado pelas classes de bordismo $[\phi, M^n]$, onde M^n é uma variedade fechada e $\phi : \mathbb{Z}_2 \times M^n \longrightarrow M^n$ é uma ação C^∞.

Observe que existe uma identificação imediata entre as $\mathbb{Z}_2$-ações (ϕ, M^n) e as involuções $T : M^n \longrightarrow M^n$, $T^2 = Id$, sobre variedades fechadas. Usaremos a notação $[M^n, T]$ no lugar de $[\phi, M^n]$ em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$ (em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$, no caso do $\mathbb{Z}_2$-bordismo principal).

Inicialmente, seja X um espaço topológico equipado com involução T contínua sem pontos fixos (X,T), e seja $\frac{X}{T}$ o espaço de órbitas. Considere o espaço quociente $\dfrac{X \times \mathbb{R}}{\sim}$ onde $\sim$ denota a relação que identifica (x,r) com $(T(x), -r)$, e seja $p : \dfrac{X \times \mathbb{R}}{\sim} \longrightarrow \dfrac{X}{T}$ a aplicação dada por

$p[x,r] = [x]$. Então pode-se provar que isso dá origem à um fibrado vetorial unidimensional cujo espaço total é $\dfrac{X \times \mathbb{R}}{\sim}$.

Considere agora (M^n, T) involução sobre uma variedade fechada M^n e suponha que T não possua pontos fixos. Então o espaço de órbitas $\frac{M^n}{T}$ ainda é uma variedade fechada n-dimensional.

Definição 1.6.1. *Definimos o "fibrado linha associado a T" como sendo o fibrado $\lambda \mapsto \frac{M^n}{T}$, onde o espaço total de λ é dado pelo espaço quociente $\dfrac{M^n \times \mathbb{R}}{(m,r) \sim (T(m), -r)}$.*

Um exemplo é o fibrado linha canônico $\lambda_n^1 \mapsto \mathbb{R}P^n$, que é o fibrado linha associado à involução antipodal (S^n, A).

A associação $[M^n, T] \mapsto [\lambda \mapsto \frac{M^n}{T}]$ define um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulo entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$. [15] [p.71, 20.4]

Podemos então reconhecer um elemento $[M^n, T]$ através dos números de $Whitney$ do seu correspondente $[\frac{M^n}{T}, f] \in \mathcal{N}_n(BO(1))$. Lembramos que $H^*(BO(1), \mathbb{Z}_2)$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[c]$, onde $c \in H^1(BO(1), \mathbb{Z}_2)$. Colocando $f^*(c) = c \in H^1(\frac{M^n}{T}, \mathbb{Z}_2)$, tal elemento é denominado *classe característica* da involução (M^n, T), e é na realidade a primeira classe de $Whitney$ do fibrado linha $\lambda \mapsto \frac{M^n}{T}$ associado a (M^n, T) (às vezes também chamada *classe de Euler* da involução livre).

Definição 1.6.2. *Dada uma involução sem pontos fixos (M^n, T), definimos os números de involução de (M^n, T) como sendo os números de $Whitney$ do fibrado linha associado $\lambda \mapsto \frac{M^n}{T}$. Ou seja, tais números são da forma $w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdots w_{i_r} c^k [\frac{M^n}{T}]_2$, onde os w_{i_j} são classes tangenciais de $[\frac{M^n}{T}]$.*

Assim temos: $[M^n, T] = 0$ em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ se, e somente se, todos seus números de involução são nulos. Temos, portanto, o

Teorema 1.6.1. *Duas involuções sem pontos fixos são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de involução.* ■

Serão de grande importância para nós as involuções sem pontos fixos dadas pelos *fibrados involução*, descritas a seguir.

Considere $\xi^k \overset{p}{\longmapsto} V^n$, um fibrado vetorial k-dimensional sobre uma variedade fechada V^n, com grupo $O(k)$ (grupo ortogonal), $k \geq 1$. Existe então o fibrado em esferas associado $S(\xi^k) \overset{p}{\longmapsto} V^n$ com fibra S^{k-1}, cujo espaço total $S(\xi^k)$ é uma variedade fechada $(n+k-1)$-dimensional. A aplicação antipodal $T : S^{k-1} \longrightarrow S^{k-1}$ comuta com todos os elementos de $O(k)$, portanto podemos introduzir em $S(\xi^k)$ uma involução T bem definida, sem pontos fixos, a qual restrita a cada fibra é a antipodal. Referimo-nos ao par $(S(\xi^k), T)$ como o *fibrado involução* associado a ξ^k. Considere o *fibrado projetivo* associado a ξ^k dado por $\mathbb{R}P(\xi^k) \overset{p}{\longmapsto} V^n$, com projeção p, fibra $\mathbb{R}P^{k-1}$ e espaço total $\mathbb{R}P(\xi^k) = \frac{S(\xi^k)}{T}$ (note que esse espaço total também é uma variedade de dimensão $n+k-1$); temos então a classe característica $c \in H^1(\mathbb{R}P(\xi^k), \mathbb{Z}_2)$ da involução $(S(\xi^k), T)$. A estrutura de $H^*(\mathbb{R}P(\xi^k), \mathbb{Z}_2)$ é fornecida pelo

Teorema 1.6.2. ***(Leray-Hirsch)***

Seja $E \overset{p}{\longmapsto} X$ um fibrado, onde X é um CW-complexo, e seja Λ um anel comutativo com unidade. Suponha que existam elementos homogêneos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in H^*(E, \Lambda)$ tal que, para cada $x \in X$, o Λ-módulo $H^*(E_x, \Lambda)$ seja livre com base $\{j_x^*(\alpha_1), j_x^*(\alpha_2), \ldots, j_x^*(\alpha_r)\}$, onde $E_x = p^{-1}(x)$ é a fibra sobre x e $j_x : E_x \to E$ é a aplicação inclusão. Então o $H^*(X, \Lambda)$-módulo $H^*(E, \Lambda)$ é livre com base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$. [7] ■

Voltando a $\mathbb{R}P(\xi^k) \overset{p}{\longmapsto} V^n$, notamos por construção que se $\mathbb{R}P^{k-1} \subset \mathbb{R}P(\xi^k)$ é um fibra típica, então o fibrado linha $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\xi^k)$ é tal que $\lambda\,|_{\mathbb{R}P^{k-1}} \mapsto \mathbb{R}P^{k-1}$ é o fibrado linha canônico usual. Pela naturalidade das classes de *Stiefel-Whitney*, segue que $i^*(c) = \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^{k-1}, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador , onde $i : \mathbb{R}P^{k-1} \to \mathbb{R}P(\xi^k)$ é a inclusão. Agora, $H^*(\mathbb{R}P^{k-1}, \mathbb{Z}_2)$ é um $\mathbb{Z}_2$-módulo livre com base $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{k-1}$. Pelo teorema acima segue que $H^*(\mathbb{R}P(\xi^k), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(V^n, \mathbb{Z}_2)$-módulo livre graduado com base $1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}$.

Sejam agora $T(V^n)$ e $T(\mathbb{R}P(\xi^k))$ os espaços totais dos respectivos fibrados tangentes. Baseado no fato de que $\mathbb{R}P(\xi^k)$ é localmente um produto, temos que $T(\mathbb{R}P(\xi^k)) \cong \tau_1 \oplus \tau_2$, onde τ_1 é o pullback $p^*(T(V^n))$ e τ_2 é o fibrado dos vetores tangentes paralelos às fibras. Coloquemos

$$W(T(V^n)) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n \qquad \text{e} \qquad W(\xi^k) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k,$$

as respectivas classes de *Stiefel-Whitney.* Pela naturalidade, temos que

$$W(\tau_1) = 1 + p^*(w_1) + p^*(w_2) + \cdots + p^*(w_n).$$

A classe de τ_2 é dada pelo

Teorema 1.6.3. ***(Borel-Hirzebruch)***

$$W(\tau_2) = (1+c)^k + (1+c)^{k-1}p^*(v_1) + (1+c)^{k-2}p^*(v_2) + \cdots + p^*(v_k).$$

[16] ■

Em particular, como τ_2 é um fibrado $(k-1)$-dimensional, vale a relação

$$c^k + c^{k-1}p^*(v_1) + c^{k-2}p^*(v_2) + \cdots + p^*(v_k) = 0.$$

Juntando os fatos acima, e omitindo-se, para simplificar a notação, o símbolo p^* (daqui por diante estaremos sempre omitindo p^*), concluimos que

Corolário 1.6.1. *A classe de Stiefel-Whitney do espaço total do fibrado projetivo associado a ξ^k é dada por*

$$W(\mathbb{R}P(\xi^k)) = (1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \cdot ((1+c)^k + (1+c)^{k-1}v_1 + (1+c)^{k-2}v_2 + \cdots + v_k).$$

■

1.7 Sequência exata de *Conner e Floyd*

Seja (M^n, T) uma involução suave sobre uma variedade fechada n-dimensional M^n. O conjunto de pontos fixos $F = F_T$ de T é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^n, que pode ser escrita como $F = \bigcup_{i=0}^n F^i$, onde cada F^i é a união (eventualmente vazia) das componentes i-dimensionais de F. O fibrado normal de F em M^n, $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \mapsto F^i)$, é chamado o *fixed-data* da involução (M^n, T). A notação F^n diz respeito às componentes de M^n restrita às quais T é a identidade. Dessa forma, $\eta^0 \mapsto F^n$ é o fibrado 0-dimensional.

Exemplo 1.7.1. *Para qualquer variedade fechada M^n, o fibrado tangente $\tau(M^n) \mapsto M^n$ pode ser realizado como um fixed-data. De fato, a involução*

$$twist : M^n \times M^n \mapsto M^n \times M^n, \qquad twist(x, y) = (y, x),$$

tem como conjunto de pontos fixos a diagonal $\Delta = \{(x, x); x \in M^n\}$, ou seja, uma cópia de M^n. O fibrado normal de Δ, no produto cartesiano $M^n \times M^n$, é equivalente ao fibrado tangente $\tau(M^n) \mapsto M^n$.

Com isso em mente, e conforme temos visto até agora, desejamos caracterizar quando duas involuções são cobordantes. Como vimos na Seção 1.6, o que caracteriza a classe de bordismo de uma involução sem pontos fixos (M^n, T) em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ são seus números de involução. No entanto, não existe, a priori, um tal critério para involuções (M^n, T) com $F_T \neq \emptyset$. Veremos a seguir que o monomorfismo j^* da *sequência exata de Conner e Floyd* de [16] fornece uma tecnologia algébrica para caracterizar um elemento de $\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$; esta sequência estabelece quando duas involuções são cobordantes, e ainda, quando um determinado fibrado pode ser caracterizado como o *fixed-data* de alguma involução.

De acordo com notações anteriores, $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$ denota o grupo de bordismo irrestrito de variedades n-dimensionais com involução, e $\mathcal{N}_n(BO(k))$ é o grupo de bordismo de fibrados k-dimensionais sobre variedades n-dimensionais. Portanto, no contexto acima, (M^n, T) representa uma classe em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$, enquanto cada $\eta^{n-i} \mapsto F^i$ representa uma classe em $\mathcal{N}_i(BO(n-i))$, $0 \leq i \leq n$.

Considere o $\mathbb{Z}_2$-módulo

$$\mathcal{M}_n = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{N}_i(BO(n-i)),$$

e as seguintes aplicações:

$$j^* : \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \mapsto \mathcal{M}_n \text{ dada por } j^*[M^n, T] = \textstyle\sum_{i=0}^{n}[\eta^{n-i} \mapsto F^i],$$

onde $\bigcup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \mapsto F^i)$ é o *fixed-data* da involução (M^n, T); e

$$\partial : \mathcal{M}_n \mapsto \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$$

que, a cada

$$[\eta \mapsto F] = \sum_{i=0}^{n}[\eta^{n-i} \mapsto F^i] \in \mathcal{M}_n$$

associa

$$[\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta)] = \sum_{i=0}^{n-1}[\lambda_{\eta^{n-i}} \mapsto \mathbb{R}P(\eta^{n-i})] \in \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)),$$

onde $\lambda_{\eta^{n-i}} \mapsto \mathbb{R}P(\eta^{n-i})$ é o fibrado linha associado à involução antipodal nas fibras de η^{n-i}. Para o caso em que $i = n$, $\partial : \mathcal{N}_n(BO(0)) \mapsto \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$ é o homomorfismo nulo.

Além de verificar que tais aplicações estão bem definidas, *Conner e Floyd* mostraram que j^* e ∂ são homomorfismos e compõem uma sequência exata curta.

Teorema 1.7.1. ***(Sequência de Conner e Floyd)*** *Para cada n, a sequência de $\mathbb{Z}_2$-módulos*

$$0 \to \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \mathcal{M}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2) \to 0$$

é exata. [16] ■

Obs.: $\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$ é uma $\mathcal{N}_*$-álgebra comutativa com unidade, com o produto sendo dado por $[M^n, T] \cdot [V^m, S] = [M^n \times V^m, T \times S]$ (produto cartesiano). A soma direta $\mathcal{M}_* = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{M}_n$ também possui a estrutura de uma $\mathcal{N}_*$-álgebra comutativa com unidade; especificamente, dados $[\eta_1^k \mapsto M_1^n]$ e $[\eta_2^l \mapsto M_2^m]$, definimos o produto:

$$[\eta_1^k \xrightarrow{\pi_1} M_1^n][\eta_2^l \xrightarrow{\pi_2} M_2^m] = [\eta_1^k \times \eta_2^l \xrightarrow{\pi_1 \times \pi_2} M_1^n \times M_2^m],$$

com $\eta_1^k \times \eta_2^l$ denotando o produto cartesiano (também chamado a *soma de Whitney externa*) dos fibrados vetoriais η_1^k e η_2^l. Com tais estruturas, $j^* : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \mapsto \mathcal{M}_*$ é um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-álgebras (vide [15]).

Veremos a seguir algumas consequências do Teorema 1.7.1.

Exemplo 1.7.2. *Se (M^n, T) é uma involução sem pontos fixos então $[M^n, T] = 0$ em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$, pois $j^*[M^n, T] = 0$. Observe que, se (M^n, T) é uma involução cujo conjunto de pontos fixos é uma variedade F^n de mesma dimensão, então F^n é a união das componentes conexas de M^n em que T atua como a identidade. Além disso, em $M^n \setminus F^n$, T atua sem pontos fixos. Logo, $[M^n, T] = [F^n, T] + [M^n \setminus F^n, T] = [F^n, Id]$ em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$.*

Exemplo 1.7.3. *Seja (M^n, T) uma involução com conjunto de pontos fixos $F = \cup_{i=0}^n F^i$. Se F não borda (ou seja, se existe i tal que $F^i \neq \emptyset$ não borda) então (M^n, T) não borda equivariantemente, pois $j^*[M^n, T]$ é necessariamente não nulo.*

Exemplo 1.7.4. *Não existe involução (M^n, T) em uma variedade fechada M^n, com $n \geq 1$, fixando exatamente um ponto. De fato, se existisse tal involução (M^n, T) teríamos $j^*[M^n, T] = [n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\}]$. Observe que o fibrado linha, $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(n\mathbb{R})$, é o fibrado linha canônico $\lambda^1 \mapsto \mathbb{R}P^{n-1}$ sobre $\mathbb{R}P^{n-1}$. Logo, teríamos $\partial j^*[M^n, T] = [\lambda^1 \mapsto \mathbb{R}P^{n-1}] \neq 0$ (conforme vimos no Exemplo 1.4.1), o que contraria a exatidão da sequência de Conner e Floyd.*

A classe de bordismo de uma involução é determinada, via o monomorfismo j^*, pela classe de bordismo do seu *fixed-data*:

Corolário 1.7.1. *Duas involuções (M^n, T) e (V^n, S) são cobordantes (ou $\mathbb{Z}_2$-bordantes) se, e somente se, seus fixed-data $\eta \mapsto F_T$ e $\eta' \mapsto F_S$ forem cobordantes. Em outras palavras, duas involuções (M^n, T) e (V^n, S) são cobordantes se, e somente se, seus fixed-data possuem os mesmos números característicos.* ■

Considere um fibrado qualquer $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^n (\eta^{n-i} \mapsto F^i)$. Se $[\eta \mapsto F] \in \mathcal{M}_n$ está no núcleo de ∂, então $[\eta] = j^*[M^n, T]$ para alguma involução (M^n, T). Ou seja, se $\partial[\eta] = 0$, então η é cobordante a um fibrado que pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução. Na verdade, a prova do Teorema 1.7.1 diz que, de fato, o próprio η pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução. Em particular, vemos que: *um fibrado bordante a um fixed-data também é um fixed-data.* Dessa forma obtemos o

Corolário 1.7.2. *Um fibrado $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \mapsto F^i)$ é um fixed-data se, e somente se, $\partial[\eta] = 0$. Equivalentemente: $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \mapsto F^i)$ é um fixed-data se, e somente se, todos os números característicos do fibrado linha $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta) = \cup_{i=0}^{n-1}(\lambda_{\eta^{n-i}} \mapsto \mathbb{R}P(\eta^{n-i}))$ são nulos.*
■

Exemplo 1.7.5. *Seja $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \mapsto F^i)$ um fibrado que borda (ou seja, cada $\eta^{n-i} \mapsto F^i$ borda). Então $\partial[\eta] = 0$ e, portanto, existe uma involução (M^n, T) cujo fixed-data é $\eta \mapsto F$ (nesse caso (M^n, T) borda equivariantemente).*

Exemplo 1.7.6. *Seja $\eta \mapsto F = (\eta^{n-i} \mapsto F^i) \cup (\eta^{n-j} \mapsto F^j)$ um fixed-data.*

a) *Se $\eta^{n-i} \mapsto F^i$ é um fixed-data, então $\eta^{n-j} \mapsto F^j$ também é um fixed-data.*

b) *Se $(\eta^{n-i} \mapsto F^i) \cup (n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\})$ é um fixed-data, então $(\eta^{n-j} \mapsto F^j) \cup (n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\})$ também é um fixed-data.*

Demonstração:

a) $0 = \partial[\eta] = \partial[\eta^{n-i} \mapsto F^i] + \partial[\eta^{n-j} \mapsto F^j] = \partial[\eta^{n-j} \mapsto F^j]$.

b) Observe que

$$[\eta^{n-i} \mapsto F^i]+[\eta^{n-j} \mapsto F^j] = [\eta^{n-i} \mapsto F^i]+[n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\}]+[\eta^{n-j} \mapsto F^j]+[n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\}].$$

Logo,

$0 = \partial[\eta] = \partial\big([\eta^{n-i} \mapsto F^i] + [n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\}]\big) + \partial\big([\eta^{n-j} \mapsto F^j] + [n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\}]\big) \Rightarrow \partial\big([\eta^{n-j} \mapsto F^j] + [n\mathbb{R} \mapsto \{ponto\}]\big) = 0.$ ■

Conforme citado previamente, duas involuções (M^n, T) e (V^n, T') são cobordantes se, e somente se, seus *fixed-data* $\eta \mapsto F_T$ e $\eta' \mapsto F'_T$ forem cobordantes. Ou seja, embora (M^n, T) não possua números característicos, a classe de (M^n, T) em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$ é indiretamente determinada por números característicos, a saber, os números de $\eta \mapsto F_T$.

Também temos um critério bem definido para avaliar se um determinado fibrado $\eta \mapsto F$ é ou não um *fixed-data* de alguma involução: $\partial([\eta]) = [S(\eta), T] \in \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$, e conforme vimos, a classe de $(S(\eta), T)$ em $\mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$ é determinada pelos números de *Whitney* da correspondente classe do fibrado linha $\lambda \mapsto \frac{S(\eta)}{T} = \mathbb{R}P(\eta)$ em $\mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$. Portanto, η é um *fixed-data* se, e somente se, todos os números de *Whitney* de $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta)$ forem nulos. Pelo exemplo 1.7.4, o fibrado trivial sobre o ponto não pode ser um *fixed-data*.

Como vimos acima, se (M^n, T) tem *fixed-data* $\eta \mapsto F$, então todos os números de *Whitney* de $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta)$ são nulos. Em particular, e de grande importância para nós, é a seguinte consequência:

Teorema 1.7.2. *Seja (M^n, T) uma involução tal que F é da forma $F^j \cup F^p$, $\quad j < p < n$. Sejam $\eta^{n-j} \mapsto F^j$ e $\mu^{n-p} \mapsto F^p$ os respectivos fibrados normais. Então os fibrados linhas usuais $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ e $\lambda' \mapsto \mathbb{R}P(\mu^{n-p})$ possuem os mesmos números de Whitney.* ■

Outra consequência dos fatos acima é o seguinte

Teorema 1.7.3. *Seja (M^n, T) uma involução com fixed-data $\eta \mapsto F$ e suponha $\eta \mapsto F = (\eta_1 \mapsto F_1) \cup (\eta_2 \mapsto F_2)$. Se $\eta_1 \mapsto F_1$ é cobordante a um certo fibrado $\mu \mapsto G$, então existe uma involução (W^n, T') cobordante a (M^n, T), cujo fixed-data é $(\mu \mapsto G) \cup (\eta_2 \mapsto F_2)$.*

Demonstração: Temos

$$\partial([\mu] + [\eta_2]) = \partial([\mu] + [\eta_1] + [\eta_1] + [\eta_2]) = \partial([\eta_1] + [\eta_2]) = 0.$$

Portanto existe uma involução (W^n, T') com *fixed-data* $\mu \cup \eta_2$. Como $\mu \cup \eta_2$ é cobordante a $\eta_1 \cup \eta_2$, (W^n, T') é cobordante a (M^n, T). ■

Ainda nessa direção temos o

Teorema 1.7.4. *Se o fixed-data de (M^n, T) é $\eta \mapsto F = (\eta_1 \mapsto F_1) \cup (\eta_2 \mapsto F_2)$ e $\eta_1 \mapsto F_1$ borda, então existe uma involução (W^n, T') cobordante a (M^n, T), cujo fixed-data é $\eta_2 \mapsto F_2$.* ■

O fato a seguir é de grande interesse para nós e diz que, podemos supor que toda involução possui a parte i-dimensional do seu conjunto de pontos fixos conexa, para cada $0 \leq i \leq n$.

Teorema 1.7.5. *Considere (M^n, T) uma involução suave sobre uma variedade n-dimensional, com fixed-data $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \mapsto F^i)$. Então (M^n, T) é cobordante a uma involução (W^n, T'), cujo fixed-data $\mu \mapsto G = \cup_{i=0}^{n}(\mu^{n-i} \mapsto G^i)$ é tal que cada G^i é conexa.*

O teorema acima decorre das seguintes considerações: sejam $\xi^r \mapsto V^n$ e $\theta^r \mapsto W^n$ fibrados vetoriais r-dimensionais sobre variedades fechadas n-dimensionais. Considere a soma conexa

$$W^n \sharp V^n = \frac{(W^n - D_1) \cup (V^n - D_2)}{\sim},$$

onde D_1 e D_2 denotam discos abertos n-dimensionais em torno de pontos pré-escolhidos $p \in W^n$ e $q \in V^n$, e $\sim$ é a relação que identifica os bordos $\partial(D_1) \cong \partial(D_2) \cong S^1$ através de um difeomorfismo C^∞, é conhecido o fato que essa soma é cobordante à união disjunta $W^n \sqcup V^n$.

Como $\xi^r \mid_{\partial D_1}$ e $\theta^r \mid_{\partial D_2}$ são fibrados triviais, a construção $W^n \sharp V^n$ pode ser estendida aos fibrados, e temos a *soma conexa dos fibrados* ξ^r e θ^r, $\xi^r \sharp \theta^r \mapsto W^n \sharp V^n$, que é um fibrado r-dimensional sobre a variedade fechada $W^n \sharp V^n$. Também é conhecido o fato que o cobordismo entre $W^n \sharp V^n$ e $W^n \sqcup V^n$ se estende aos fibrados, ou seja, $\xi^r \sharp \theta^r \mapsto W^n \sharp V^n$ é cobordante à $(\xi^r \mapsto V^n) \sqcup (\theta^r \mapsto W^n)$; vide mais detalhes a respeito no Capítulo 2.

Voltemos à justificativa do teorema, como a involução (M^n, T) tem *fixed-data* $\eta \mapsto F = \cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \mapsto F^i)$, podemos aplicar o argumento acima iteradamente nas componentes de F^i para trocar F^i por uma G^i conexa usando o Teorema 1.7.3, e a seguir em cada dimensão $0 \leq i \leq n$ para obter o teorema acima. ■

1.8 O *Splitting Principle*

Como referência para os fatos abaixo, vide [7].

Em geral, um fibrado vetorial r-dimensional sobre uma variedade fechada n-dimensional, $\eta^r \mapsto V^n$, não necessariamente se decompõe em uma soma de *Whitney* de fibrados unidimensionais $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_r \mapsto V^n$. Se isso ocorresse, a classe de *Stiefel-Whitney* $W(\eta^r) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_r$ se decomporia em fatores lineares

$$W(\eta^r) = \prod_{i=1}^{r} W(\lambda_i) = \prod_{i=1}^{r} (1 + v_1(\lambda_i)).$$

No entanto, em argumentos que se baseiam em classes características e números de *Stiefel-Whitney*, em geral pode-se supor que a classe de *Stiefel-Whitney* de qualquer fibrado vetorial pode ser fatorada em fatores lineares. Isso decorre do seguinte resultado ([7]): dado qualquer $\eta^r \mapsto V^n$, existe uma variedade fechada W e uma função $f : W \longrightarrow V^n$ tal que o *pullback* $f^*(\eta^r) \mapsto W$ se decompõe como $\lambda \oplus \mu^{r-1} \mapsto W$, onde λ é um fibrado unidimensional; adicionalmente, a induzida em cohomologia $f^* : H^*(V^n) \longrightarrow H^*(W^n)$ é um monomorfismo. Iterando o resultado acima com $\mu^{r-1} \mapsto W$ no lugar de $\eta^r \mapsto V^n$ (e assim sucessivamente), e levando-se em conta que:

- *pullback* de soma de *Whitney* é a soma de *Whitney* dos *pullbacks*;
- o *pullback* $(g \circ f)^*(\eta)$ é igual a $f^*(g^*(\eta))$;
- composta de monomorfismos é monomorfismo;

conclui-se o seguinte

Teorema 1.8.1. ***(Splitting Principle)***

Seja $\eta^r \mapsto V^n$ fibrado vetorial r-dimensional sobre variedade fechada n-dimensional V^n. Então existe uma variedade fechada W e uma função $f : W \longrightarrow V^n$ tal que:

i) *o pullback $f^*(\eta^r) \mapsto W$ se decompõe em uma soma de Whitney de fibrados unidimensionais $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_r \mapsto W$;*

ii) *$f^* : H^*(V^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(W, \mathbb{Z}_2)$ é um monomorfismo.*

■

Como consequência temos, pela naturalidade, que

$$W(\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_r) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_r) =$$
$$f^*(1+v_1+v_2+\cdots+v_r) = 1 + f^*(v_1) + f^*(v_2) + \cdots + f^*(v_r)$$

onde $v_i \in H^i(V^n, \mathbb{Z}_2)$ é a i-ésima classe de η^r e $x_i \in H^1(W, \mathbb{Z}_2)$ é a primeira (e única) classe de λ_i.

Como f^* é homomorfismo de anéis, em argumentos utilizando classes características e números de *Stiefel-Whitney* (que envolvem monômios nas classes características), o objeto $1+v_1+v_2+\cdots+v_r$, que mora em $H^*(V^n, \mathbb{Z}_2)$, pode ser substituído pelo objeto $1+f^*(v_1)+f^*(v_2)+\cdots+f^*(v_r)$, que mora em $f^*(H^*(V^n, \mathbb{Z}_2))$, o qual é uma cópia isomorfa (como anel) de $H^*(V^n, \mathbb{Z}_2)$ dentro de $H^*(W, \mathbb{Z}_2)$, e $1+f^*(v_1)+f^*(v_2)+\cdots+f^*(v_r)$ se fatora em termos lineares conforme acima.

Quando se usa o *splitting principle*, por abuso de notação, escreve-se:

$$\text{"}W(\eta^r) = 1+v_1+v_2+\cdots+v_r \;\text{ se fatora como }\; W(\eta^r) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_r)\text{"},$$

sem mencionar a variedade W e os fibrados unidimensionais $\lambda_i \mapsto W$ (embora, rigorosamente, $1+f^*(v_1)+f^*(v_2)+\cdots f^*(v_r)$ e não $1+v_1+v_2+\cdots+v_r$, seja igual a $\prod_{i=1}^r(1+x_i)$).

Por exemplo, suponhamos $\xi^k \mapsto V^n$ fibrado k-dimensional sobre uma variedade fechada n-dimensional V^n com $W(V^n) = 1+w_1+w_2+\cdots+w_n$ e $W(\xi^k) = 1+v_1+v_2+\cdots+v_k$. Já vimos que $W(\mathbb{R}P(\xi^k)) = (1+w_1+w_2+\cdots+w_n)(\sum_{j=0}^k (1+c)^j v_{k-j})$. Suponhamos que $W(V^n)$ e $W(\xi^k)$ se fatorem, através do *splitting principle*, como:

$$W(V^n) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \quad e \quad W(\xi^k) = (1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_k).$$

Temos então o

Teorema 1.8.2. *A forma fatorada de $W(\mathbb{R}P(\xi^k))$ é*

$$W(\mathbb{R}P(\xi^k)) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+c+y_1)(1+c+y_2)\cdots(1+c+y_k).$$

$\blacksquare$

Tal fatoração é mencionada no artigo [3], embora não esteja ali provada; mas em [6] há uma prova.

1.9 O limitante $m(n)$ de *Stong e Pergher*

Na introdução comentamos a respeito do fato que, para cada $n \in \mathbb{N}$, *Stong e Pergher* construíram, em [18], uma involução (M^m, T) onde a dimensão de M é um específico número natural $m(n) > n$, e o conjunto de pontos fixos é da forma $F^n \cup \{pto\}$; além disso esse valor é o máximo nessas condições. Em outras palavras, se (N^r, T) possui conjunto de pontos fixos da forma $F^n \cup \{pto\}$, então $r \leq m(n)$. A seguir detalharemos $m(n)$.

Escreva $n = 2^p q$, onde $p \geq 0$ e $q \geq 1$, com q ímpar. Então

$$m(n) = \begin{cases} 2n + p + 1 - q, & \text{se} \quad q \geq p \\ 2n + 2^{p-q}, & \text{se} \quad q < p. \end{cases}$$

Note em particular que:

i) se n é ímpar, então $n = 2^0 q$, $q \geq 1$, portanto $m(n) = 2n + 1 - q = n + 1$, que é o resultado de *Royster* [4];

ii) se $n = 2q$, com q ímpar, então $m(n) = 2n + 1 + 1 - q = 4q + 2 - q = 3q + 2 = \frac{3}{2}n + 2$. Nesse caso, esse valor (maximal) melhora o resultado de *Pergher* [17], o qual mostra que um limitante é $\frac{3}{2}n + 3$;

iii) se $n = 2^p, p \geq 1$, então

$$m(n) = \begin{cases} 5 = \frac{5}{2}2, & \text{se} \quad p = 1, \\ 2n + 2^{p-q} = 2^{p+1} + 2^{p-1} = 2^{p-1}(4+1) = 5 \cdot 2^{p-1} = \frac{5}{2}2^p = \frac{5}{2}n, & \text{se} \quad p > 1. \end{cases}$$

Em outras palavras, se $n = 2^p$ com $p \geq 1$, os exemplos $(M^{m(n)}, T)$ de *Stong e Pergher* atingem o limite $\frac{5}{2}n$ de *Boardman.*

A seguir enunciaremos o teorema de *Stong e Pergher* no formato em que o mesmo aparece em [18], com $m(n)$ sendo escrito de forma um pouco diferente, a qual é mais adequada em alguns contextos.

Teorema 1.9.1. *Seja (M^m, T) uma involução suave sobre uma variedade fechada, tal que $F = F^n \cup \{pto\}$, onde F^n é uma subvariedade fechada de dimensão $0 < n < m$. Se $n = 2^p(2q+1)$, então $m \leq m(n)$ onde*

$$m(n) = \begin{cases} (2^{p+1} - 1)(2q+1) + (p+1), & se \quad p \leq 2q+1, \\ (2^{p+1} - 2^{p-(2q+1)})(2q+1) + 2^{p-(2q+1)}(2q+2), & se \quad p \geq 2q+2. \end{cases}$$

Adicionalmente, para cada n existe uma involução $(M^{m(n)}, T)$ com F_T sendo da forma $F^n \cup \{pto\}$. ■

1.10 A fórmula de *Conner*

Seja $\eta^k \mapsto F^n$ um fibrado vetorial k-dimensional ($k \geq 1$) sobre uma variedade n-dimensional F^n fechada e conexa. Denote

$$W(\eta^k) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k.$$

Pelo Teorema de *Leray-Hirsch* (1.6.2) temos que $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(F^n)$-módulo livre graduado gerado por $\{1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}\}$ e sujeito à relação $c^k = v_1c^{k-1} + v_2c^{k-2} + \cdots + v_k$. Em particular, se $a_n \in H^n(F^n)$ e $a_nc^{k-1} = 0$ então necessariamente $a_n = 0$. Assim como $H^n(F^n)$ e $H^{n+r-1}(\mathbb{R}P(\eta^r))$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, vale a igualdade

$$a_n[F^n]_2 = a_nc^{r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2.$$

Se $a_s \in H^s(F^n)$ com $n < s \leq n+k-1$, então $a_s c^{n+k-1-s}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = 0$, pois $a_s = 0$.

Vejamos agora como calcular $a_s c^{n+k-1-s}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2$ no caso em que $0 \leq s < n$. Denotamos por $\bar{v}_i \in H^i(F^n)$ o termo homogêneo de grau i do inverso multiplicativo de $W(\eta^k)$ em $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$:

$$\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = 1 + \bar{v}_1 + \cdots + \bar{v}_n.$$

Vejamos mais precisamente o que significa $\bar{v}_i$. Seja X um espaço topológico. A coleção de todos os elementos da forma

$$v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots \in H^*(X),$$

em que $v_i \in H^i(X)$ e o termo de grau zero é $1 \in H^0(X)$, é um grupo comutativo com a operação dada pelo produto *cup* (vide [15]). Dado um elemento $v = 1 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$, o seu inverso (ou *dual*) é dado por

$$\frac{1}{v} = \bar{v} = 1 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \cdots,$$

caracterizado pela relação $v\bar{v} = 1 \in H^*(X)$, e pode ser construído indutivamente pelo algoritmo

$$\bar{v}_0 = 1; \qquad \bar{v}_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{v}_{n-i}.$$

Pela construção de $\bar{v}_i$ e usando a relação $c^k = v_1 c^{k-1} + v_2 c^{k-2} + \cdots + v_k$ iteradamente, verifica-se que, para cada $j \geq 1$,

$$c^{j+k-1} = \bar{v}_j c^{k-1} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{j+t} c^{k-1-t},$$

para certos $b_{j+t} \in H^{j+t}(F^n)$. Em particular,

$$a_s c^{n+k-1-s} = a_s \left(\bar{v}_{n-s} c^{n+k-1-s} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{n-s+t} c^{k-1-t} \right) = a_s \bar{v}_{n-s} c^{k-1},$$

pois para $t \geq 1$, $a_s b_{n-s+t} \in H^{n+t}(F^n) = 0$. Desse modo conclui-se que: para cada $0 \leq s \leq n$,

$$a_s c^{n+k-1-s}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = a_s \bar{v}_{n-s}[F^n]_2.$$

A fórmula acima é conhecida como a *Fórmula de Conner* (vide [13]).

1.11 A classe de *Wu*

Para definirmos a classe de Wu, serão necessárias algumas propriedades das operações co-homológicas Sq^i, conhecidas como *quadrado de Steenrod*. Tais operações são certos homomorfismos aditivos $Sq^i : H^n(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n+i}(X, \mathbb{Z}_2)$, os quais satisfazem as seguintes propriedades (vide [9]):

(1) (*Naturalidade*) Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua entre espaços topológicos, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^n(Y,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Sq^i"'] & H^n(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "Sq^i"'] \\ H^{n+i}(Y,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f^*"] & H^{n+i}(X,\mathbb{Z}_2) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

(2) Se $a \in H^n(X, \mathbb{Z}_2)$ então $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a^2$ e $Sq^i(a) = 0$ para cada $i > n$.

(3) (*Fórmula de Cartan*) Se a e b são elementos homogêneos de $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ e ab denota o produto *cup*, então vale a identidade

$$Sq^i(ab) = \sum_{j=0}^{i} Sq^j(a) Sq^{i-j}(b).$$

Temos ainda a operação *quadrado total* dada por

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \cdots + Sq^n(a), \text{ onde } a \in H^n(X, \mathbb{Z}_2).$$

Note então que a fórmula de *Cartan* pode ser expressa como

$$Sq(ab) = Sq(a)Sq(b).$$

Em relação às classes características de um fibrado vetorial temos o

Teorema 1.11.1. ***(Fórmula de Wu)*** *Se $\eta^k \mapsto X$ é um fibrado vetorial sobre um espaço X paracompacto, e $W(\eta^k) = 1 + w_1 + \cdots + w_k$ denota a classe de Stiefel-Whitney de η^k, então:*

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \begin{pmatrix} j-i-1+t \\ t \end{pmatrix} w_{i-t}w_{j+t},$$

para $i < j$. ■

O fato a seguir é verdadeiro (para mais detalhes, vide [9]):

- Se M^n é uma variedade conexa, fechada, n-dimensional e $0 \leq k \leq n$, então existe uma, e somente uma, classe de cohomologia $v_k \in H^k(M^n, \mathbb{Z}_2)$ tal que, para qualquer $x \in H^{n-k}(M^n, \mathbb{Z}_2)$, vale

  $$v_k \cdot x = Sq^k(x).$$

  Tal classe é chamada a *k-ésima classe de Wu de M^n* e

  $$V = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

  é chamada a *classe de Wu de M^n*. Observe que pela caracterização de V e pela propriedade (2) acima temos que $v_k = 0$ se $k > n - k$. Então, efetivamente, V assume a forma $V = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{[\frac{n}{2}]}$, onde $[\frac{n}{2}]$ denota o maior inteiro menor, ou igual, que $\frac{n}{2}$.

A classe de Wu de M^n se relaciona com a classe de *Stiefel-Whitney* de M^n através do seguinte

Teorema 1.11.2. ***(Wu)*** *Se $W(M^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ e $V(M^n) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{[n/2]}$ denotam, respectivamente, as classes de Stiefel- Whitney e de Wu de M^n, então*

$$Sq(V(M^n)) = W(M^n).$$

■

Por exemplo,

$$\begin{aligned} Sq(1+v_1+v_2+\cdots) &= 1+v_1+v_1^2+v_2+Sq^1(v_2)+v_2^2+ \text{ termos com grau} \geq 3 \\ &= 1+v_1+v_1^2+v_2+v_1v_2+v_2^2+ \text{ termos com grau} \geq 3; \end{aligned}$$

em particular, $v_1 = w_1$ e $v_2 = v_1^2 + w_2 = w_1^2 + w_2$. Em outras palavras, cada v_k pode ser explícita e recursivamente calculada em termos dos $w_{i's}$.

1.12 Funções simétricas

Para os fatos abaixo, vide [9].

Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ indeterminadas, às quais atribuímos grau 1, e considere o anel polinomial $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_2[t_1, t_2, \ldots, t_n]$.

Definição 1.12.1. *Dizemos que um polinômio $p(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$ é uma função simétrica se $p(t_1, t_2, \ldots, t_n) = p(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \ldots t_{\sigma(n)})$ para toda permutação $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$.*

A coleção $\mathcal{C}$ formada por todas as funções simétricas é um subanel de $\mathcal{F}$. Considere o polinômio

$$(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n) \in \mathcal{C}.$$

Tal polinômio contém termos com grau r, onde $0 \leq r \leq n$. Podemos então escrever

$$(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n) = 1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$$

onde σ_i é a soma de todos os monômios de grau i. Cada σ_i (o qual pertence a $\mathcal{C}$) é chamada a *i-ésima função simétrica elementar*, e é conhecido o fato que $\mathcal{C}$ é também um anel polinomial nos n geradores independentes $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, isto é, $\mathcal{C} = \mathbb{Z}_2[\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n]$. Note que

$$\sigma_1 = t_1 + t_2 + \ldots + t_n,$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j,$$

e, em geral,

$$\sigma_i = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_i} t_{j_1} t_{j_2} \cdots t_{j_i}.$$

Em particular,

$$\sigma_n = t_1 t_2 \cdots t_n.$$

Tome agora qualquer natural $n > 0$, e seja $\mathcal{C}_m$ o grupo aditivo formado por todas as funções simétricas de grau m. Considere o conjunto $\mathcal{L} = \{(i_1, i_2, \ldots, i_r)\}$ formado por todas as partições $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ de m, com $i_t \leq n$, $\forall t$, $1 \leq t \leq r$. Cada $(i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathcal{L}$ dá origem então à função simétrica $\sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_r}$. Decorre do fato acima que uma base para o grupo aditivo $\mathcal{C}_m$ é portanto $\{\sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_r};\ (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathcal{L}\}$.

Para nós serão de grande importância algumas funções simétricas especiais, as quais descrevemos a seguir. Fixe um natural k (o qual pode ser $\leq n$ ou $\geq n$), e seja ω uma partição $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ de k tal que $r \leq n$. Então cada tal ω dá origem a uma função simétrica de grau k, denotada por S_ω, descrita por

$$S_\omega = \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \ldots < j_r \\ 1 \leq j_i \leq n}} \sum_{\sigma \in S_r} t_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} t_{j_{\sigma(2)}}^{i_2} \cdots t_{j_{\sigma(r)}}^{i_r}.$$

Temos então que S_ω pode ser expressa em termos das funções simétricas elementares $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$. Em especial, se $k \leq n$ então S_ω pode ser expressa em termos de $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$. Mais ainda, se $k \leq n$, é conhecido o fato que a expressão de S_ω como polinomial em termos de $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ não depende de n com $n \geq k$.

Por exemplo, se $n \geq 2$, então $S_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2$, $S_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2$. Se $n \geq 3$, então $S_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$, $S_{1,2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$, $S_{1,1,1}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_3$ (vide [9]).

O *splitting principle*, detalhado na Seção 1.8, permite estabelecer uma conexão entre funções simétricas e classes características. De fato, se $\eta^r \mapsto V^n$ é um fibrado vetorial r-dimensional sobre uma variedade n-dimensional, e se

$$W(\eta^r) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_r$$

é sua classe de *Stiefel-Whitney*, então o *splitting principle* nos diz que $W(\eta^r)$ pode ser considerada na forma fatorada

$$W(\eta^r) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots v_r = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_r).$$

Em particular, cada v_i, $1 \leq i \leq r$, é a função simétrica elementar $\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ (rigorosamente, $f^*(v_i) = \sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, onde f^* é o monomorfismo em cohomologia do *splitting principle*; também aqui o grau algébrico é dado pelo grau cohomológico).

Dessa forma, e em sentido contrário, dada qualquer função simétrica

$$p(t_1, t_2, \cdots, t_r) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F},$$

sabemos que $p(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ é uma polinomial nas funções simétricas elementares $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, digamos, $q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$. Portanto $p(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ dá origem à polinomial nas classes características $q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$.

Por exemplo, se $p(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ é um polinômio simétrico e homogêneo de grau n, então $p(t_1, t_2, \ldots, t_r) = q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = q(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é uma soma de monômios nos $v_{i's}$ cada qual tendo grau n; em particular, se $\tau^n \mapsto V^n$ é o fibrado tangente a V^n, cada tal monômio dá origem a um número de *Stiefel-Whitney* de V^n. Portanto se V^n e M^n são variedades fechadas n-dimensionais cobordantes, faz sentido a identidade

$$p(t_1, t_2, \ldots, t_r)[V^n]_2 = p(t_1, t_2, \ldots, t_r)[M^n]_2,$$

o que, rigorosamente, significa dizer que

$$q(w_1(V^n), w_2(V^n), \ldots, w_n(V^n)) = q(w_1(M^n), w_2(M^n), \ldots, w_n(M^n)).$$

Particularmente, se $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ é uma partição de n, então $S_I[V^n]_2$ é uma soma de números de *Stiefel-Whitney* de V^n, e portanto um invariante de cobordismo. Exemplo: $S_{1,2}[M^3]_2 = (w_1 w_2 + w_3)[M^3]_2$.

1.13 Teorema de *Lucas*

Em computações envolvendo números característicos, é de grande importância técnica determinar a paridade de coeficientes binomiais $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Nesse contexto, o *Teorema de Lucas*, o qual descreveremos a seguir, é muito útil.

Definição 1.13.1. *Seja* $\boldsymbol{p}$ *um número natural primo. Dado um número natural* $\boldsymbol{n}$*, definimos a notação* $\boldsymbol{p}$*-ádica de* $\boldsymbol{n}$ *como sendo:*

$$n = n_k n_{k-1} \cdots n_2 n_1 n_0 = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_2 p^2 + n_1 p^1 + n_0, \quad (0 \leq n_i \leq p-1).$$

Obs.: Quando $p = 2$, temos a notação *diádica* (2-ádica) de n dada por:

$$n = n_k n_{k-1} \cdots n_2 n_1 n_0 = n_k 2^k + n_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0, \quad (0 \leq n_i \leq 1),$$

que é equivalente a representar n na base 2 (forma binária). Como cada $n_i = 0$ ou 1, temos que n é dado por uma soma de potências distintas de 2.

Teorema 1.13.1. ***(Teorema de** Lucas)* *Seja* $\boldsymbol{p}$ *um número primo e tome* $\boldsymbol{r}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *em notação* $\boldsymbol{p}$*-ádica:*

$$r = r_k r_{k-1} \cdots r_2 r_1 r_0 = r_k p^k + r_{k-1} p^{k-1} + \cdots + r_2 p^2 + r_1 p^1 + r_0, \quad (0 \leq r_i \leq p-1),$$

$$c = c_k c_{k-1} \cdots c_2 c_1 c_0 = c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \cdots + c_2 p^2 + c_1 p^1 + c_0, \quad (0 \leq c_i \leq p-1).$$

Então,

$$\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_0 \\ c_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} r_k \\ c_k \end{pmatrix} (mod\ p),$$

convencionando-se que $\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix} = 0$ *se* $c > r$*. [5]*

Em nossas computações envolvendo números caracerísticos, será de fundamental importância o seguinte

Corolário 1.13.1. *Tome* $\boldsymbol{r}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *em notação diádica:*

$$r = r_k 2^k + r_{k-1}2^{k-1} + \cdots + r_2 2^2 + r_1 2^1 + r_0,$$

$$c = c_k 2^k + c_{k-1}2^{k-1} + \cdots + c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0, \quad r_i, c_i = 0 \text{ } ou \text{ } 1.$$

Sejam $R = \{i \mid r_i = 1\}$ *e* $C = \{i \mid c_i = 1\}$. *Então*

$$\binom{r}{c} \equiv 1 \ (mod\ 2) \ se, \ e \ somente \ se, \ C \subset R.$$

Demonstração: Basta aplicar o Teorema de *Lucas* observando que

$$\binom{0}{0} \equiv \binom{1}{0} \equiv \binom{1}{1} \equiv 1 \ (mod\ 2) \ e \ \binom{0}{1} \equiv 0 \ (mod\ 2).$$

■

Capítulo 2

Involuções fixando $F^n \cup F^3$

2.1 Introdução

O objetivo desse capítulo é mostrar que $m(n;\{3\}) = \max\{2n,\ m(n-3)+6\}$, lembrando que

$$m(n,\{3\}) = \text{ max } \{\ m \mid \text{existe involução } (M^m, T) \text{ fixando alguma } F \text{ que não borda,}$$

$$\text{e tal que } F \text{ não possui componentes com dimensões diferentes de 3 e } n\},$$

e $m(n-3)$ é o limitante de *Stong* e *Pergher*, que vimos na Seção 1.9 do Capítulo 1.

Portanto, para a consideração de $m(n;\{3\})$, só podem ocorrer conjuntos de pontos fixos F da forma $F = F^n$ e $F = F^n \cup F^3$. Como o caso $F = F^n$ já é conhecido, para nossos estudos consideraremos então o caso $F = F^n \cup F^3$, com F não bordante, e podemos supor que F^n e F^3 são conexos (pelo Teorema 1.7.5). Se o fibrado normal sobre F^3 borda, ele pode ser equivariantemente removido (pela sequência de *Conner* e *Floyd*) e cairemos no caso $F = F^n$, cujo limitante (melhor possível) é $2n$. Então será efetivamente suficiente focar o caso $F = F^n \cup F^3$. O caso $n = 4$ não será considerado pois é um caso particular de $F = F^n \cup F^{n-1}$ que foi estudado em [6]. Sendo assim, daqui em diante iremos supor que $n > 4$.

Estabeleceremos a seguir alguns fatos básicos e notações que serão utilizados neste e nos próximos capítulos.

Denotaremos por $\xi_j \mapsto \mathbb{R}P^j$ o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^j$, e por $\mathbb{R} \mapsto X$ o fibrado trivial sobre um espaço X. Se $\eta \mapsto X$ é um fibrado qualquer, então $l\eta \mapsto X$ denotará a soma de *Whitney* de l cópias do fibrado η.

Usaremos a seguir, e mais adiante, a bem conhecida involução $(\mathbb{R}P^n, T)$, dada por

$$T[x_0, x_1, \ldots, x_n] = [-x_0, -x_1, \ldots, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n].$$

Essa involução tem como *fixed-data*

$$\Big((j+1)\xi_{n-(j+1)} \mapsto \mathbb{R}P^{(n-(j+1))}\Big) \ \cup \ \Big((n-j)\xi_j \mapsto \mathbb{R}P^j\Big).$$

Voltando ao objetivo desse capítulo, que é mostrar que $m(n;\{3\}) \leq m(n-3)+6$, observe que, no caso particular em que n é par, existe uma involução (M^m, T) fixando $F = F^n \cup F^3$ não bordante para $m = m(n-3)+6 = n+4$.

De fato, considere a involução $T : \mathbb{R}P^n \mapsto \mathbb{R}P^n$ dada por

$$T([x_0, x_1, \ldots, x_n]) = [-x_0, -x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

Tal involução tem como *fixed-data* $\big(2\xi_{n-2} \mapsto \mathbb{R}P^{n-2}\big) \cup \big((n-1)\xi_1 \mapsto \mathbb{R}P^1\big)$.

Considere agora a involução $S : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \longmapsto \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ dada por

$$S(x, y, z) = (T(x), z, y).$$

Sejam $p_1 : \mathbb{R}P^{n-2} \cup \mathbb{R}P^1 \longrightarrow (\mathbb{R}P^{n-2} \cup \mathbb{R}P^1) \times \mathbb{R}P^2$ e $p_2 : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow (\mathbb{R}P^{n-2} \cup \mathbb{R}P^1) \times \mathbb{R}P^2$ as projeções. Então o *fixed-data* de S é dado por

$$\begin{tikzcd}
p_1^*\big((2\xi_{n-2}) \cup (n-1)\xi_1\big) \oplus p_2^*(3\xi_2) \arrow[d] & & \big(p_1^*(2\xi_{n-2}) \oplus p_2^*(3\xi_2)\big) \arrow[d] & & \big(p_1^*((n-1)\xi_1) \oplus p_2^*(3\xi_2) \arrow[d] \\
(\mathbb{R}P^{n-2} \cup \mathbb{R}P^1) \times \mathbb{R}P^2 & = & \underbrace{\mathbb{R}P^{n-2} \times \mathbb{R}P^2}_{F^n} & \bigcup & \underbrace{\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2}_{F^3}
\end{tikzcd}$$

Vejamos que o fibrado $\big(p_1^*((n-1)\xi_1) \oplus p_2^*(3\xi_2)\big) \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$ não borda.

Sejam $\theta_1 \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ e $\theta_2 \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ os respectivos geradores; assim denotando $\alpha = p_1^*(\theta_1)$ e $\beta = p_2^*(\theta_2)$ temos

$$\begin{aligned} W\big(p_1^*((n-1)\xi_1) \oplus p_2^*(3\xi_2)\big) &= (1+\alpha)^{n-1}(1+\beta)^3 \\ &= (1+\alpha)(1+\beta+\beta^2) \\ &= 1 + \underbrace{(\alpha+\beta)}_{v_1} + \underbrace{(\alpha\beta+\beta^2)}_{v_2} + \underbrace{\alpha\beta^2}_{v_3}, \end{aligned}$$

onde v_i é a classe de *Whitney* de grau i do fibrado em questão. Assim, avaliando a classe $v_3 = \alpha\beta^2$ na classe fundamental de homologia $[\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2]_2$,

$$v_3[\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2]_2 = \alpha\beta^2[\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2]_2 \neq 0,$$

temos um número característico não nulo pois $\alpha\beta^2$ é o gerador de $H^3(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$.

O exemplo acima mostra que para provar nosso resultado é suficiente provar que: para qualquer $n > 4$, se (M^m, T) é uma involução fixando $F = F^n \cup F^3$ não bordante, então $m \leq \max\{2n, m(n-3)+6\}$. Agora, denote por

$$(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^3)$$

o *fixed-data* de (M^m, T), e suponha que $\eta \mapsto F^3$ borda como fibrado. Conforme já mencionado atrás, pelo Teorema 1.7.4, temos que (M^m, T) é equivariantemente cobordante à uma involução (N^m, S) cujo *fixed-data* é $\mu \mapsto F^n$. Temos que $F = F^n \cup F^3$ não borda e como F^3 borda (pois toda variedade tridimensional é um bordo) então F^n não borda. Assim, $\mu \mapsto F^n$ não borda e portanto (M^m, T) não borda. Pelo Teorema de *Kosniowski e Stong* de [3], segue que $m \leq 2n$. Em outras palavras, podemos supor a partir daqui, que $\eta \mapsto F^3$ não borda. Nosso resultado estará então completamente determinado quando provarmos o seguinte

Teorema 2.1.1. *Seja (M^m, T) involução fixando $F = F^n \cup F^3$ (não necessariamente não-bordante), e suponha que o fibrado normal $\eta \mapsto F^3$ não borda. Então $m \leq m(n-3)+6$.*

Obs.: Observe que o teorema acima prova um pouco mais do que é necessário para nós, já que não é preciso supor $F = F^n \cup F^3$ não bordante (embora o teorema abranja isso também), mas apenas $\eta \mapsto F^3$ não bordante. Ou seja, o resultado também é válido quando $F = F^n \cup F^3$ borda, mas $\eta \mapsto F^3$ não borda.

A prova desse teorema segue a mesma linha de raciocínio de *Stong e Pergher* em [18]: a técnica consiste em trabalhar com equações do tipo

$$p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2.$$

A seguir vamos explanar do que se tratam tais equações. Lembremos que denotamos $\mu \mapsto F^n$ e $\eta \mapsto F^3$ os respectivos fibrados normais em M^m; note que μ é $(m-n)$-dimensional e η é $(m-3)$-dimensional. Pelo Teorema 1.7.2, temos que os números característicos dos fibrados-linha $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta)$ e $\xi \mapsto \mathbb{R}P(\mu)$ são iguais. Genericamente, tais números assumem a forma

$$W_{i_1} W_{i_2} \cdots W_{i_r} c^t [A]_2,$$

onde $i_1 + i_2 + \cdots + i_r + t = m - 1$, c é a classe de *Stiefel-Whitney* de λ (ou ξ), W_{i_j} são classes de *Stiefel-Whitney* de $\mathbb{R}P(\eta)$ (ou $\mathbb{R}P(\mu)$) e $A = \mathbb{R}P(\eta)$ (ou $A = \mathbb{R}P(\mu)$), sendo que estas classes são fornecidas pelo Teorema de *Borel-Hirzebruch*. A manipulação destas é viabilizada pelo conhecimento da estrutura do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$, vista na Seção 1.6. Em particular, se $p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})$ é uma polinomial qualquer homogênea de grau $m-1$ nas classes $W_{i's}$ e c, temos que $p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2$, onde no lado esquerdo as classes correspondem à $\mathbb{R}P(\mu)$, e no lado direito à $\mathbb{R}P(\eta)$. O que faremos então é utilizar certas polinomiais adequadas, e especiais, na equação acima, de tal sorte que $p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = 0$ por razões dimensionais, enquanto que $p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2$ reproduz um número genérico de *Whitney* de $\eta \mapsto F^3$. Assim se denotarmos

$$W(F^3) = 1 + w_1 + w_2 + w_3 \quad \text{e} \quad W(\eta) = 1 + v_1 + v_2 + v_3,$$

então $p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2$ produz polinomiais avaliadas em $[\mathbb{R}P(\eta)]_2$ nas incógnitas $c, w_{i's}$ e $v_{i's}$, ou seja, a expressão

$$p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = 0$$

produz equações do tipo

$$F(c, w_1, w_2, w_3, v_1, v_2, v_3)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = 0,$$

que após reduções ficam do tipo,

$$G(w_1, w_2, w_3, v_1, v_2, v_3)[F^3]_2 = 0.$$

Estas são as equações que nos darão as informações procuradas. Essa é uma abordagem geral da técnica utilizada.

Como estamos considerando agora que $\eta \mapsto F^3$ não borda, temos muitas possibilidades para tais fibrados. De fato, se $M^m, T)$ tem *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^3)$ e $\theta \mapsto G^3$ é cobordante a $\eta \mapsto F^3$, então pelo Teorema 1.7.1 existe involução (N^m, S) com *fixed-data* $(\mu \mapsto F^n) \cup (\theta \mapsto G^3)$. Em outras palavras, para nossos propósitos, $\eta \mapsto F^3$ pode ser considerado a menos de cobordismo estável (dois fibrados são estavelmente cobordantes se, a menos de soma de fibrados triviais, são cobordantes como fibrados). Nossa primeira e importante tarefa será mostrar que existem, a menos de cobordismo estável, 15 tais possibilidades, as quais serão denotadas por $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$ (ou seja, 15 classes de cobordismo estável); além disso exibiremos um modelo para cada uma dessas possibilidades. Essa tarefa será descrita na Seção 2.2.

As polinomiais acima citadas serão obtidas com o auxílio de certas polinomiais especiais nos $W_{i's}$ e c, denotadas por $W[r]_i$, as quais foram introduzidas por *Stong e Pergher* em [18]. Na Seção 2.3 descreveremos tais polinomiais.

E por fim na última seção deste capítulo, Seção 2.4, provaremos o Teorema 2.1.1.

2.2 Classes de cobordismo estáveis de fibrados vetoriais sobre variedades fechadas tridimensionais

Nosso objetivo nessa seção é determinar todas as possíveis classes de cobordismo estável de fibrados k-dimensionais sobre variedades fechadas tridimensionais. Ou seja, como vimos no capítulo anterior, determinar os grupos $\mathcal{N}_3(BO(k))$ para qualquer $k \geq 3$. Lembremos que tais grupos são compostos por classes de fibrados $[\eta^k \mapsto F^3]$ e estas são completamente determinadas pelos números de *Whitney* do fibrado $\eta^k \mapsto F^3$.

Mostraremos que

$$\mathcal{N}_3(BO(k)) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

e exibiremos um representante para cada classe não nula de $\mathcal{N}_3(BO(k))$.

Considere $\eta^k \mapsto F^n$ um fibrado vetorial qualquer; temos então o fibrado $(k+t)$-dimensional $\eta^k \oplus t\mathbb{R} \mapsto F^n$. Usando os números de *Whitney* de tais fibrados temos que, se

$$\eta^k \mapsto F^n \quad \text{é cobordante à} \quad \mu^k \mapsto G^n,$$

então

$$\eta^k \oplus t\mathbb{R} \mapsto F^n \quad \text{é cobordante à} \quad \mu^k \oplus t\mathbb{R} \mapsto G^n.$$

Sendo assim temos uma função bem definida

$$\Gamma^t : \mathcal{N}_n(BO(k)) \longrightarrow \mathcal{N}_n(BO(k+t)),$$

dada por

$$\Gamma^t[\eta^k \mapsto F^n] = [\eta^k \oplus t\mathbb{R} \mapsto F^n].$$

Pode-se verificar que Γ^t é um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos.

Lema 2.2.1. *O homomorfismo $\Gamma^t : \mathcal{N}_n(BO(n)) \longrightarrow \mathcal{N}_n(BO(n+t))$ é, na verdade, um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos, para qualquer $t \geq 1$.*

Demonstração: Pelo axioma da soma para classes características temos que, $W(\eta^k \oplus t\mathbb{R}) = W(\eta^k)$. Logo qualquer número característico de $\eta^k \oplus t\mathbb{R}$ se reduz a um número característico de η^k. Disso segue que, se $\eta^k \oplus t\mathbb{R}$ borda então η^k borda, o que mostra a injetividade da aplicação Γ^t. Por outro lado, um resultado bem conhecido da teoria de fibrados (por exemplo, vide [7]) nos diz que, se X é um CW-complexo de dimensão n e $\eta^k \mapsto X$ é um fibrado k-dimensional sobre X, com $k > n$, então η^k é equivalente a um fibrado da forma $\nu^n \oplus (k-n)\mathbb{R} \mapsto X$, onde ν^n é n-dimensional. Como variedades n-dimensionais são CW-complexos n-dimensionais, concluímos que Γ^t é sobrejetora. ■

O Lema acima nos diz que, para determinar $\mathcal{N}_n(BO(k))$, $k > n$, é suficiente determinar $\mathcal{N}_n(BO(n))$; mais ainda, dado um fibrado $\eta^k \mapsto F^n$, com $k > n$, escrevendo-se $\eta^k = \nu^n \oplus (k-n)\mathbb{R} \mapsto F^n$, temos que a classe de bordismo de η^k é completamente determinada pela classe de bordismo de $\nu^n \mapsto F^n$. Por essa razão, a classe de bordismo $[\nu^n \mapsto F^n]$ é conhecida como *classe de bordismo estável*, o que indica sua invariância por soma de fatores triviais.

Conforme mencionamos acima, nosso interesse é obter $\mathcal{N}_3(BO(k))$, para qualquer $k \geq 3$, portanto é suficiente analisar $\mathcal{N}_3(BO(3))$. Sendo assim, comecemos então com um fibrado vetorial tridimensional $\eta^3 \mapsto F^3$ sobre a variedade fechada tridimensional F^3. Sejam

$$W(F^3) = 1 + w_1 + w_2 + w_3 \qquad e \qquad W(\eta^3) = 1 + v_1 + v_2 + v_3$$

as classes de *Stiefel-Whitney* de F^3 e η^3, respectivamente. A classe $[\eta^3] \in \mathcal{N}_3(BO(3))$ é determinada por seus números característicos, que são obtidos avaliando-se as classes de cohomologia

$$w_3,\ w_1w_2,\ w_1^3,\ v_3,\ v_1v_2,\ v_1^3,\ v_1^2w_1,\ v_2w_1,\ v_1w_1^2 \text{ e } v_1w_2$$

sobre a classe fundamental de homologia $[F^3]_2$.

Observe que

$$w_3[F^3]_2 = w_1w_2[F^3]_2 = w_1^3[F^3]_2 = 0, \tag{2.1}$$

pois toda variedade fechada tridimensional borda.

Seja agora $U = 1 + u_1$ a classe de Wu de F^3. Sabe-se que

$$W(F^3) = Sq(U),$$

onde Sq é a operação de Steenrod. Assim, temos

$$1 + w_1 + w_2 + w_3 = W(F^3) = Sq(1 + u_1) = 1 + u_1 + u_1^2$$

de onde se conclui que, $w_1 = u_1 \;\; e \;\; w_2 = u_1^2$.

Logo, $w_2 = u_1^2 = w_1^2$ e temos

$$v_1 w_2 = v_1 w_1^2. \tag{2.2}$$

Além disso, usando a fórmula de Cartan e a relação

$$u_k x = Sq^k(x),$$

para todo $x \in H^{3-k}(F^3)$, temos

$$v_1^2 w_1 = v_1^2 u_1 = Sq^1(v_1^2) = \sum_{i+j=1} Sq^i(v_1) Sq^j(v_1) = 0. \tag{2.3}$$

Finalmente, pela a fórmula de Wu, a qual recordamos ser

$$Sq^j(v_k) = \sum_{i=0}^{j} \begin{pmatrix} k-j+i-1 \\ i \end{pmatrix} v_{j-i} v_{k+i},$$

para $j < k$, temos

$$v_2 w_1 = v_2 u_1 = Sq^1(v_2) = v_1 v_2 + v_3. \tag{2.4}$$

Usando as relações de (2.1) a (2.4), podemos reduzir a lista de números característicos que determinam $[\eta^3]$ para

$$v_1 w_1^2[F^3]_2,\ v_1^3[F^3]_2,\ v_2 w_1[F^3]_2 \text{ e } v_3[F^3]_2.$$

Assim, cada classe de cobordismo de $[\eta^3]$ corresponde a uma lista de valores 0 ou 1 atribuídos a cada um dos objetos acima, resultando num total de $2^4 = 16$ possibilidades, que iremos denotar por $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{16}$ (incluindo aí a classe nula).

As possibilidades para as listas não nulas associadas à $\eta^3 \mapsto F^3$ são, portanto:

1) $v_1 w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2 w_1 = 0 \; e \; v_3 = 0$

2) $v_1 w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2 w_1 = 0 \; e \; v_3 \neq 0$

3) $v_1 w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2 w_1 = 0 \; e \; v_3 = 0$

4) $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 \neq 0$

5) $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 = 0$

6) $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$

7) $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 \neq 0$

8) $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$

9) $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 \neq 0$

10) $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$

11) $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$

12) $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$

13) $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$

14) $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$

15) $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$

Em princípio nada nos garante que, de fato, existam fibrados do tipo $\eta^3 \mapsto F^3$ com números característicos realizando todas as 15 possibilidades. Nosso interesse é exibir um exemplo de fibrado $\eta^3 \mapsto F^3$ para cada uma dessas listas.

Considere inicialmente o fibrado $\xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1$. Temos assim o fibrado projetivo associado $\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R})$, cujo espaço total é uma variedade fechada de dimensão 3 (vide Seção 1.6); denotaremos tal variedade por K^3.

Seja $\nu \mapsto K^3$ o fibrado linha usual, e escreva $W(\nu) = 1 + c$, onde $c \in H^1(K^3, \mathbb{Z}_2)$. Sabemos que $W(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R}) = 1 + \alpha$, onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador. Então, pelo Corolário 1.6.1, temos

$$\begin{aligned} W(K^3) &= W(\mathbb{R}P^1)\cdot\big((1+c)^3+(1+c)^2w_1(\xi_1\oplus 2\mathbb{R})+(1+c)w_2(\xi_1\oplus 2\mathbb{R})+w_3(\xi_1\oplus 2\mathbb{R})\big)=\\ &=(1+\alpha)^2\cdot((1+c)^3+(1+c)^2\alpha)=\\ &=(1+\alpha^2)\cdot(1+c+c^2+c^3+\alpha+c^2\alpha)=\\ &=1+(c+\alpha)+c^2+(c^3+c^2\alpha),\end{aligned}$$

já que $\alpha^2=0$.

Como em $H^*(K^3,\mathbb{Z}_2)$ vale a relação

$$c^3=c^2w_1(\xi_1\oplus 2\mathbb{R})+cw_2(\xi_1\oplus 2\mathbb{R})+w_3(\xi_1\oplus 2\mathbb{R})=c^2\alpha,$$

segue que $W(K^3)=1+(c+\alpha)+c^2$, logo $w_1(K^3)=c+\alpha$ e $w_2(K^3)=c^2$. A variedade tridimensional K^3 servirá como base para possíveis fibrados que realizam as listas 1 e 2. Sobre K^3 vamos considerar somas de *Whitney* do fibrado linha $\nu\mapsto K^3$ (lembrando da existência da classe estável), o que nos dará exemplos para as listas 1 e 2. De fato:

1) $\eta_1=\nu\oplus 2\mathbb{R}\mapsto K^3$: nesse caso $v_1=c$ e $v_2=v_3=0$. Como $H^*(K^3,\mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(\mathbb{R}P^1,\mathbb{Z}_2)$-módulo gerado por $1,c$ e c^2, então o elemento não nulo de $H^3(K^3,\mathbb{Z}_2)$ é $c^2\alpha$. Como $c^3=c^2\alpha$ então temos $v_1w_1^2\neq 0$, $v_1^3\neq 0$, $v_2w_1=0$ e $v_3=0$. Portanto $\nu\oplus 2\mathbb{R}\mapsto K^3$ é um exemplo para a lista 1.

2) $\eta_2=3\nu\mapsto K^3$. Nesse caso $W(\eta_2)=(1+c)^3=1+c+c^2+c^3$, logo $v_1=c, v_2=c^2$ e $v_3=c^3$. Portanto temos $v_1w_1^2\neq 0$, $v_1^3\neq 0$, $v_2w_1=0$ e $v_3\neq 0$, realizando a lista 2.

Para as duas próximas listas (3 e 4), considere o fibrado $\xi_2\oplus\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}P^2$. Então o espaço total do fibrado projetivo associado, $\mathbb{R}P(\xi_2\oplus\mathbb{R})$, é uma variedade tridimensional que iremos denotar por M^3. Novamente, sejam $\nu\mapsto M^3$ o fibrado linha usual, com $W(\nu)=1+c$, $c\in H^1(M^3,\mathbb{Z}_2)$. Seja agora $\alpha\in H^1(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z}_2)$ o gerador. Sabemos que $W(\xi_2\oplus\mathbb{R})=1+\alpha$; assim, pelo Corolário 1.6.1, temos

$$\begin{aligned} W(M^3) &= W(\mathbb{R}P^2)\cdot\big((1+c)^2+(1+c)w_1(\xi_2\oplus\mathbb{R})+w_2(\xi_2\oplus\mathbb{R})\big) = \\ &= (1+\alpha)^3\cdot((1+c)^2+(1+c)\alpha) = \\ &= (1+\alpha+\alpha^2)\cdot(1+c^2+\alpha+c\alpha) = \\ &= 1+(c\alpha+c^2)+(c\alpha^2+c^2\alpha)+c^2\alpha^2, \end{aligned}$$

uma vez que $\alpha^3 = 0$.

Pela relação

$$c^2 = cw_1(\xi_2\oplus\mathbb{R})+w_2(\xi_2\oplus\mathbb{R}) = c\alpha,$$

vigente em $H^*(M^3,\mathbb{Z}_2)$ segue que $W(M^3)=1$, ou seja, $w_1=w_2=w_3=0$. Sendo assim M^3 é uma variedade tridimensional que servirá como base para possíveis fibrados realizando as listas 3 e 4. Sobre M^3 vamos considerar, novamente, somas de *Whitney* do fibrado linha $\nu\mapsto M^3$. Assim temos:

3) $\eta_3=\nu\oplus 2\mathbb{R}\mapsto M^3$. Aqui $v_1=c$ e $v_2=v_3=0$. Como $H^*(M^3,\mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z}_2)$-módulo gerado por $1, c$ e c^2, então os elementos não nulos de $H^3(M^3,\mathbb{Z}_2)$ são $c^2\alpha$ e $c\alpha^2$. Como $c^3=c^2\alpha$, segue que $v_1w_1^2=0$, $v_1^3\neq 0$, $v_2w_1=0$ e $v_3=0$. Portanto temos um exemplo para a lista 3.

4) $\eta_4=3\nu\mapsto M^3$. Nesse caso $W(\eta_4)=(1+c)^3=1+c+c^2+c^3$; portanto $v_1=c$, $v_2=c^2$ e $v_3=c^3$. Então temos $v_1w_1^2=0$, $v_1^3\neq 0$, $v_2w_1=0$ e $v_3\neq 0$, que satisfaz a lista 4.

Para os próximos fibrados consideraremos a variedade tridimensional $V^3=\mathbb{R}P^1\times\mathbb{R}P^2$ que tem classe $W(V^3)=1+\beta+\beta^2$, onde $\beta\in H^1(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z}_2)$ é o gerador de $\mathbb{R}P^2$. Assim $w_1=\beta$ e $w_2=\beta^2$ (de fato, aqui, por simplicidade, estamos abusando da notação pois $\beta=1\times\beta$, $\beta^2=1\times\beta^2$). Considere os fibrados linha canônicos $\xi_1\mapsto\mathbb{R}P^1$ e $\xi_2\mapsto\mathbb{R}P^2$ e seja $\alpha\in H^1(\mathbb{R}P^1,\mathbb{Z}_2)$ o gerador de $\mathbb{R}P^1$. Então $W(\xi_1)=1+\alpha$ e $W(\xi_2)=1+\beta$.

Para realizar as listas 5, 6,7 e 8 vamos considerar diferentes fibrados sobre V^3, formados pela soma dos fibrados citados acima. De fato:

5) $\eta_5 = \xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto V^3$: nesse caso, $v_1 = \alpha$ e $v_2 = v_3 = 0$. Como α e β são os geradores de $\mathbb{R}P^1$ e $\mathbb{R}P^2$, respectivamente, então $\alpha\beta^2 \neq 0$. Segue que $v_1 w_1^2 \neq 0,\ v_1^3 = 0,\ v_2 w_1 = 0$ e $v_3 = 0$. Portanto $\xi \oplus 2\mathbb{R} \mapsto V^3$ é um modelo para a lista 5.

6) $\eta_6 = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \mathbb{R} \mapsto V^3$. Nesse caso, $W(\xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \mathbb{R}) = (1+\alpha)(1+\beta) = 1 + (\alpha+\beta) + \alpha\beta$, logo $v_1 = \alpha + \beta$ e $v_2 = \alpha\beta$. Como $\alpha^2 = 0$, $\beta^3 = 0$ e $\alpha\beta^2 \neq 0$, segue que $v_1 w_1^2 \neq 0,\ v_1^3 \neq 0,\ v_2 w_1 \neq 0$ e $v_3 = 0$. Portanto $\xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \mathbb{R} \mapsto V^3$ é um modelo que realiza a lista 6.

7) $\eta_7 = \xi_1 \oplus 2\xi_2 \mapsto V^3$. Aqui $W(\xi_1 \oplus 2\xi_2) = (1+\alpha)(1+\beta)^2 = 1 + \alpha + \beta^2 + \alpha\beta^2$, daí temos $v_1 = \alpha$, $v_2 = \beta^2$ e $v_3 = \alpha\beta^2$. Disto, e do fato de termos $\alpha^2 = 0$, $\beta^3 = 0$ e $\alpha\beta^2 \neq 0$, concluímos que $v_1 w_1^2 \neq 0,\ v_1^3 = 0,\ v_2 w_1 = 0$ e $v_3 \neq 0$. Logo esse é um exemplo para a lista 7.

8) $\eta_8 = \xi_1 \oplus 3\xi_2 \mapsto V^3$. Nesse caso $W(\eta_8) = (1+\alpha)(1+\beta)^3 = 1 + (\alpha+\beta) + (\alpha\beta+\beta^2) + \alpha\beta^2$, portanto $v_1 = \alpha+\beta, v_2 = \alpha\beta + \beta^2$ e $v_3 = \alpha\beta^2$. Então temos $v_1 w_1^2 \neq 0,\ v_1^3 \neq 0,\ v_2 w_1 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, que satisfaz a lista 8.

O próximo fibrado tem como base a variedade $L^3 = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ cuja classe é $W(L^3) = 1$, logo $w_1 = w_2 = 0$.

Para construir o fibrado desejado sobre essa variedade vamos fazer uso das projeções canônicas

$$p_1, p_2, p_3 : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1.$$

Seja $\xi_1 \mapsto \mathbb{R}P^1$ o fibrado linha canônico e denote por $\xi_{1,j} \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, $j = 1,2,3$, o *pullback* de $\xi_1 \mapsto \mathbb{R}P^1$ através da j-ésima projeção. Considere sobre a variedade L^3 o fibrado

$$\xi_{1,1} \oplus \xi_{1,2} \oplus \xi_{1,3} \longmapsto L^3.$$

Observe que nesse caso temos três cópias do espaço projetivo, então devemos considerar os geradores separadamente. Desse modo vamos denotar $\theta \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ como sendo o gerador. Escreva $\alpha = p_1^*(\theta),\ \beta = p_2^*(\theta)$ e $\gamma = p_3^*(\theta)$, onde $p_j^* : H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ é o homomorfismo induzido em cohomologia. Então temos:

9) $\eta_9 = \xi_{1,1} \oplus \xi_{1,2} \oplus \xi_{1,3} \mapsto L^3$, e nesse caso, $W(\xi_{1,1} \oplus \xi_{1,2} \oplus \xi_{1,3}) = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 1 + (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma)$. Logo $v_1 = \alpha+\beta+\gamma$, $v_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ e $v_3 = \alpha\beta\gamma$. Como $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 0$, segue que $v_1 w_1^2 = 0$, $v_1^3 = 0$, $v_2 w_1 = 0$ e $v_3 \neq 0$. Portanto $\xi_{1,1} \oplus \xi_{1,2} \oplus \xi_{1,3} \mapsto L^3$ é um modelo para a lista 9.

Exemplos de fibrados realizando as listas restantes são obtidos fazendo somas conexas dos fibrados anteriores.

Para entender esse ponto (citado no capítulo prévio), sejam M^n e V^n variedades suaves. Recordemos que a soma conexa de M^n e V^n é obtida da seguinte forma: tome $p \in M^n$ e $q \in V^n$ pontos nas respectivas variedades. Sejam $B^n \subset M^n$ e $B^{n'} \subset V^n$ bolas fechadas tais que $p \in B^n \subset M^n$ e $q \in B^{n'} \subset V^n$. Escolha um difeomorfismo $\varphi : B^n \longrightarrow B^{n'}$ com $\varphi(\partial B^n) = \partial B^{n'}$. Considere o seguinte espaço quociente

$$\frac{(M^n - B^n) \sqcup (V^n - B^{n'})}{x \sim \varphi(x),\ x \in \partial B^n},$$

que também é uma variedade, chamada *soma conexa de M^n e V^n* e é denotada por $M^n \sharp V^n$. Tal variedade é cobordante à união disjunta $M^n \sqcup V^n$.

De fato, esse cobordismo é dado da seguinte forma: considere as variedades disjuntas $M^n \times I$ e $V^n \times I$, onde $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. A seguir, identificamos M^n e V^n com $M^n \times \{0\}$ e $V^n \times \{0\}$, respectivamente. Lembrando que $B^n \subset M^n$ e $B^{n'} \subset V^n$, vamos tomar $B^n \times [0,\varepsilon] \subset M^n \times I$ e $B^{n'} \times [0,\varepsilon] \subset V^n \times I$, para ε suficientemente pequeno.

Considere agora $M^n \times I \setminus \big(int(B^n) \times [0,\varepsilon)\big)$ e $V^n \times I \setminus \big(int(B^{n'}) \times [0,\varepsilon)\big)$, cujos bordos são, respectivamente, $(\partial B^n \times [0,\varepsilon]) \cup (B^n \times \{0,\varepsilon\})$ e $(\partial B^{n'} \times [0,\varepsilon]) \cup (B^{n'} \times \{0,\varepsilon\})$.

Considere o difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi : & B^n \times [0,\varepsilon] & \longrightarrow & B^{n'} \times [0,\varepsilon] \\ & (x,t) & \longmapsto & (\varphi(x),t) \end{array}$$

com

$$\psi\,|_{\partial(B^n \times [0,\varepsilon])} \colon \partial(B^n \times [0,\varepsilon]) \longrightarrow \partial(B^{n'} \times [0,\varepsilon]).$$

Seja o espaço quociente

$$\frac{\Big(M^n \times I \setminus \big(int(B^n) \times [0,\varepsilon)\big)\Big) \bigsqcup \Big(V^n \times I \setminus \big(int(B^{n'}) \times [0,\varepsilon)\big)\Big)}{x \sim \psi(x)}.$$

Essa é uma variedade cujo bordo é a união disjunta de $M^n \sharp V^n$ e $M^n \sqcup V^n$.

Agora considere $\xi^k \mapsto M^n$ e $\eta^k \mapsto V^n$ fibrados vetoriais k-dimensionais. Veremos que existe um novo fibrado vetorial k-dimensional cuja base é a soma conexa $M^n \sharp V^n$.

Sejam E e W os espaços totais dos fibrados ξ^k e η^k, e $E \xrightarrow{p} M^n$, $W \xrightarrow{q} V^n$, as projeções. Seja $x \in M^n$ e escolha uma bola fechada $x \in B^n \subset M^n$ tal que o fibrado $\xi^k\mid_{B^n}$ seja trivial. Então existe um difeomorfismo fibrado

$$f : E\mid_{p^{-1}(B^n)} \longrightarrow B^n \times \mathbb{R}^k.$$

Analogamente, como $\varphi(x) \in V^n$, existe uma bola fechada $B^{n'} \subset V^n$ tal que $\varphi(x) \in B^{n'} \subset V^n$ e o fibrado $\eta^k\mid_{B^{n'}}$ é trivial. Então temos o difeomorfismo fibrado

$$g : W\mid_{q^{-1}(B^{n'})} \longrightarrow B^{n'} \times \mathbb{R}^k.$$

Em particular,

$$f\big(\partial(E\mid_{p^{-1}(B^n)})\big) = \partial(B^n \times \mathbb{R}^k)$$

e

$$g\big(\partial(W\mid_{q^{-1}(B^{n'})})\big) = \partial(B^{n'} \times \mathbb{R}^k).$$

Como $\partial(B^n \times \mathbb{R}^k) = S^{n-1} \times \mathbb{R}^k = \partial(B^{n'} \times \mathbb{R}^k)$, então podemos considerar

$$Id : \partial(B^n \times \mathbb{R}^k) \longrightarrow \partial(B^{n'} \times \mathbb{R}^k).$$

Considere agora a restrição

$$g^{-1} \circ Id \circ f : \partial(E\mid_{p^{-1}(B^n)}) \longrightarrow \partial(W\mid_{q^{-1}(B^{n'})}).$$

Então podemos unir os espaços totais dos fibrados iniciais fazendo uma colagem através da aplicação $g^{-1} \circ Id \circ f$. Dessa maneira construimos o espaço quociente

$$\frac{\Big(E \setminus \big(E\mid_{p^{-1}(B^n)}\big)\Big) \bigsqcup \Big(W \setminus \big(W\mid_{q^{-1}(B^{n'})}\big)\Big)}{x \sim (g^{-1} \circ Id \circ f)(x)},$$

que é o espaço total do novo fibrado $\xi^k \sharp \eta^k$ cuja base é a soma conexa $M^n \sharp V^n$.

Semelhantemente ao caso de variedades, também é verdade que a soma conexa de dois fibrados é cobordante à união disjunta dos mesmos. A prova segue os mesmos passos do caso de variedades: inicia-se com os *pullbacks* $p_1^*(\xi^k) \mapsto M^n \times I$ e $q_1^*(\eta^k) \mapsto V^n \times I$, onde p_1 e q_1 são as respectivas (primeiras) projeções.

Na prova de que $M^n \sqcup V^n$ é cobordante à $M^n \sharp V^n$, ao se considerar a união disjunta $(M^n \times I) \sqcup (V^n \times I)$ e tomar-se as vizinhanças $B^n \times [0, \varepsilon]$ e $B^{n'} \times [0, \varepsilon]$, para em seguida fazer as identificações através dos bordos destas vizinhanças, basta tomar-se o cuidado de escolher tais vizinhaças de modo que sobre as mesmas os fibrados $p_1^*(\xi^k)$ e $q_1^*(\eta^k)$ sejam triviais. Isso permitirá que esses fibrados determinem sobre a variedade

$$\frac{\Big(M^n \times I \setminus \big(int(B^n) \times [0, \varepsilon)\big)\Big) \bigsqcup \Big(V^n \times I \setminus \big(int(B^{n'}) \times [0, \varepsilon)\big)\Big)}{x \sim \psi(x)}$$

um bem definido fibrado k-dimensional de tal modo que restrito ao bordo coincida com $(\xi^k \mapsto M^n) \sqcup (\eta^k \mapsto V^n) \sqcup (\xi^k \sharp \eta^k \longmapsto M^n \sharp V^n)$.

Em particular, como números característicos são aditivos com respeito à união disjunta, segue que, se os fibrados ξ e η realizam as listas a e b, então $\xi \sharp \eta$ realiza a lista $a + b$.

Portanto, após todas essas considerações, podemos obter exemplos de fibrados realizando as listas restantes.

10) $\eta_{10} = \eta_2 \sharp \eta_6 = \eta_1 \sharp \eta_8$.

11) $\eta_{11} = \eta_7 \sharp \eta_6 = \eta_5 \sharp \eta_8$.

12) $\eta_{12} = \eta_4 \sharp \eta_6 = \eta_3 \sharp \eta_8$.

13) $\eta_{13} = \eta_1 \sharp \eta_6 = \eta_2 \sharp \eta_8$.

14) $\eta_{14} = \eta_5 \sharp \eta_6 = \eta_7 \sharp \eta_8$.

15) $\eta_{15} = \eta_3 \sharp \eta_6 = \eta_4 \sharp \eta_8$.

Enfim, provamos o seguinte

Teorema 2.2.1. *Para qualquer $k \geq 3$, $\mathcal{N}_3(BO(k))$ possui exatamente quinze classes não nulas, as quais podem ser descritas como:*

1) $\beta_1 = [\eta_1 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto K^3]$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 = 0$;

2) $\beta_2 = [\eta_2 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto K^3]$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

3) $\beta_3 = [\eta_3 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto M^3]$, *com* $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 = 0$;

4) $\beta_4 = [\eta_4 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto M^3]$, *com* $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

5) $\beta_5 = [\eta_5 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto V^3]$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 = 0$;

6) $\beta_6 = [\eta_6 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto V^3]$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$;

7) $\beta_7 = [\eta_7 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto V^3]$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

8) $\beta_8 = [\eta_8 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto V^3]$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

9) $\beta_9 = [\eta_9 \oplus (k-3)\mathbb{R} \mapsto L^3]$, *com* $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 = 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

10) $\beta_{10} = \beta_2 + \beta_6$, *com* $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

11) $\beta_{11} = \beta_7 + \beta_6$, *com* $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

12) $\beta_{12} = \beta_4 + \beta_6$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 \neq 0$;

13) $\beta_{13} = \beta_1 + \beta_6$, *com* $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$;

14) $\beta_{14} = \beta_5 + \beta_6$, *com* $v_1w_1^2 = 0, v_1^3 \neq 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$;

15) $\beta_{15} = \beta_3 + \beta_6$, *com* $v_1w_1^2 \neq 0, v_1^3 = 0, v_2w_1 \neq 0$ *e* $v_3 = 0$.

■

2.3 Classes características especiais

Considere $\eta^k \mapsto F^n$ um fibrado vetorial k-dimensional sobre uma variedade fechada n-dimensional e seja $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta^k)$ o fibrado linha usual. Denotaremos as classes características por:

$$\begin{aligned} W(F^n) &= 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n, \\ W(\eta^k) &= 1 + v_1 + \cdots + v_k, \\ W(\lambda) &= 1 + c. \end{aligned}$$

Como vimos em 1.6.2, temos que

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P(\eta^k)) &= 1 + W_1 + W_2 + \cdots + W_{n+k-1} = \\ &= (1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n)\Big((1+c)^k + (1+c)^{k-1}v_1 + \cdots + (1+c)v_{k-1} + v_k\Big). \end{aligned}$$

Observe que cada W_i é uma polinomial homogênea de grau i nos $w_{j's}$, $v_{t's}$ e c, obtida coletando-se a parte de grau i em

$$\left(\sum_{j=0}^{n} w_j\right)\left(\sum_{t=0}^{k}(1+c)^{k-t}v_t\right).$$

Agora, observe também que $(1+c)$ tem inverso multiplicativo em $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k), \mathbb{Z}_2)$, e

$$\frac{1}{(1+c)} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n+k-1},$$

pois $c^l = 0$, se $l > n + k - 1$ (lembrando que $n + k - 1$ é a dimensão de $\mathbb{R}P(\eta^k)$).

Dessa forma, dado qualquer $d \in \mathbb{Z}$, temos que

$$(1+c)^d = 1 + \varepsilon_1 c + \varepsilon_2 c^2 + \cdots + \varepsilon_{n+k-1}c^{n+k-1},$$

onde $\varepsilon = 0$ ou 1. Segue que, para qualquer $d \in \mathbb{Z}$,

$$(1+c)^d W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \left(\sum_{j=0}^{n} w_j\right)\left(\sum_{t=0}^{k}(1+c)^{k-t+d}v_t\right) =$$

$$= (1 + \varepsilon_1 c + \varepsilon_2 c^2 + \cdots + \varepsilon_{n+k-1} c^{n+k-1})(1 + W_1 + W_2 + \cdots + W_{n+k-1})$$

é tal que sua parte de grau i consiste em uma polinomial $p(c, W_1, W_2, \ldots, W_{n+k-1})$ homogênea de grau i em $W_{i's}$ e c.

Sendo assim, denotando

$$(1 + c)^d W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = 1 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n+k-1},$$

onde V_i é a parte homogênea de grau i, temos que, se $t + i_1 + i_2 + \cdots + i_q = n + k - 1$ então,

$$c^t V_1 V_2 \cdots V_{n+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2$$

é um número característico de $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta^k)$ e portanto um invariante de cobordismo do mesmo.

Nesse contexto, *Stong e Pergher* introduziram em [18] as classes $W[r]$, $r \geq 0$, sendo que,

$$W[r] = (1 + c)^{r-k} W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \frac{1}{(1 + c)^{k-r}} W(\mathbb{R}P(\eta^k)).$$

Assim, denotando

$$W[r] = 1 + W[r]_1 + W[r]_2 + \cdots + W[r]_{n+k-1},$$

a parte de grau i, $W[r]_i$, é obtida coletando-se os termos de grau i em

$$W[r] = (1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \left((1 + c)^r + (1 + c)^{r-1} v_1 + \cdots + (1 + c) v_{r-1} + v_r + \frac{v_{r+1}}{1 + c} + \frac{v_{r+2}}{(1 + c)^2} + \cdots + \frac{v_{r+i}}{(1 + c)^i} + \cdots + \frac{v_k}{(1 + c)^{k-r}} \right),$$

e cada tal $W[r]_i$ é portanto uma polinomial homogênea de grau i nas classes de $W_{j's}$ e c.

Em particular, sejam $\eta^k \mapsto F^n$ e $\mu^l \mapsto V^m$ fibrados vetoriais k e l-dimensionais, respectivamente, sobre variedades fechadas F^n e V^m, com $k + n = l + m$ e tal que os respectivos fibrados linhas $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\xi \mapsto \mathbb{R}P(\mu^l)$ sejam cobordantes.

Considere a partição $t + i_1 + i_2 + \cdots + i_q = k + n - 1 = l + m - 1$; tome números $0 \leq r_1, r_2, \ldots, r_q$. Para cada r_j, considere $s_j = l + r_j - k$, então $k - r_j = l - s_j = d_j$. Assim, considerando

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = 1 + W_1 + W_2 + \cdots + W_{n+k-1} \quad e$$

$$W(\mathbb{R}P(\mu^l)) = 1 + W_1' + W_2' + \cdots + W_{n+k-1}';$$

se $W[r_j]_{i_j}$ coletada em $\dfrac{W(\mathbb{R}P(\eta^k))}{(1+c)^{k-r_j}}$ é a polinomial $p(c, W_1, W_2, \ldots, W_{n+k-1})$, então $W[s_j]_{i_j}$ coletada em $\dfrac{W(\mathbb{R}P(\mu^l))}{(1+c)^{l-s_j}}$ é a mesma polinomial $p(c, W_1', W_2', \ldots, W_{n+k-1}')$.

Portanto temos,

$$c^t W[r_1]_{i_1} W[r_2]_{i_2} \cdots W[r_q]_{i_q} [\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = c^t W[s_1]_{i_1} W[s_2]_{i_2} \cdots W[s_q]_{i_q} [\mathbb{R}P(\mu^l)]_2.$$

Em nossos cálculos algumas $W[r]_i$'s especiais terão papel fundamental, especificamente $W[r]_{2r}$ e $W[r]_{2r+1}$. A importância dessas classes deve-se ao fato de que elas satisfazem certas propriedades que simplificam alguns cálculos. Tais propriedades são:

1) $W[r]_{2r} = w_r c^r$ + termos envolvendo c^x onde $x < r$.

2) $W[r]_{2r+1} = (w_{r+1} + v_{r+1})c^r$ + termos envolvendo c^x onde $x < r$.

Justifiquemos a propriedade **1)**. Sabemos que $W[r]_{2r}$ é obtida coletando-se a parte de grau $2r$ em $W[r]$, e que tal parte consiste de monômios que tem a forma $V^j c^x$, onde $j + x = 2r$ e V^j é uma classe de cohomologia proveniente de $H^j(F^n, \mathbb{Z}_2)$. Observe que a parte de $W[r]$ dada por $(1+c)^{r-1}v_1 + \cdots + (1+c)v_{r-1} + v_r$ contribui na formação de monômios $V^j c^x$ somente com termos onde $x < r$. Também, cada termo $\dfrac{v_{r+i}}{(1+c)^i}$ $1 \leq i \leq k-r$, de $W[r]$ tem todos seus monômios divisíveis por v_{r+i}. Dessa forma tal termo contribui na formação de monômios $V^j c^x$ de maneira que v_{r+i} sempre divide V^j. Logo $j > r$, e como $j+x = 2r$, segue que $x < r$. Em outras palavras, monômios $V^j c^x$ de $W[r]_{2r}$ com $x \geq r$ só podem ser coletados em $(1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n)(1+c)^r$. Agora, em $(1+c)^r$, o único termo c^x com $x \geq r$ é c^r; segue que o único monômio $V^j c^x$ em $W[r]_{2r}$ com $x \geq r$ é $w_r c^r$.

Em relação à propriedade **2)**, note que novamente $(1+c)^{r-1}v_1 + \cdots + (1+c)v_{r-1} + v_r$ contribui somente com termos envolvendo c^x com $x < r$. Por outro lado, se $i \geq 2$, o termo $\dfrac{v_{r+i}}{(1+c)^i}$ tem todos seus monômios divisíveis por v_{r+i}, e portanto os monômios $V^j c^x$ provenientes do mesmo são tais que v_{r+i} divide V^j. Sendo $j \geq r+2$, e como $j+x = 2r+1$, segue que $x < r$. Portanto os monômios $V^j c^x$ de $W[r]_{2r+1}$ com $x \geq r$ devem ser obtidos em

$$(1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n)\left((1+c)^r + \frac{v_{r+1}}{1+c}\right).$$

Como antes, o único tal monômio proveniente de $(1+w_1+w_2+\cdots+w_n)(1+c)^r$ é $w_{r+1}c^r$. Por outro lado, termos da forma $V^j c^x$ com $V_j = w_l v_{r+1}$ e $l \geq 1$ têm necessariamente $x < r$. Segue que o único monômio $V^j c^x$ com $x \geq r$ proveniente de $(1+w_1+w_2+\cdots+w_n)\left(\frac{v_{r+1}}{1+c}\right)$ é $v_{r+1}c^r$.

2.4 Prova do Teorema 2.1.1

Conforme vimos no início desse capítulo, para mostrar que $m(n;\{3\}) = \max\{2n, m(n-3)+6\}$, é suficiente provar o Teorema 2.1.1, o qual estabelece que, se (M^m, T) é uma involução fixando $F^n \cup F^3$ tal que o fibrado normal sobre F^3 não borda, então $m \leq m(n-3)+6$. Pela Seção 2.2, sabemos que $\eta \mapsto F^3$ pode ser assumido como um dos quinze modelos lá descritos. Seja $\mu \mapsto F^n$ o fibrado normal sobre F^n; a dimensão de η é $m-3$, e a dimensão de μ é $m-n$. Para facilitar a notação, denotemos $m-n=k$.

Usando a notação da Seção 2.2, temos

$$W(\eta) = 1 + v_1 + v_2 + v_3, \qquad W(F^3) = 1 + w_1 + w_2 + w_3$$

e, conforme vimos na seção citada, o que determina o modelo $\eta \mapsto F^3$ é a lista de números

$$v_1 w_1^2[F^3]_2,\ v_1^3[F^3]_2,\ v_2 w_1[F^3]_2 \text{ e } v_3[F^3]_2.$$

Como mencionamos na Introdução desse capítulo, a estratégia consistirá inicialmente em promover a redução do problema, de tal maneira que, após essa redução, o único modelo a ser considerado será η_6. Essa redução será possível depois de provarmos o seguinte

Lema 2.4.1. *Se $m > m(n-3)+6$ então temos $v_1^3 = v_1 w_1^2$ e $v_3 = v_2 w_1 + v_1 w_1^2$.*

Observando todos os modelos possíveis para $\eta \mapsto F^3$, vemos que o único que satisfaz $v_1 w_1^2 = v_1^3$ e $v_3 = v_2 w_1 + v_1 w_1^2$ é $\eta_6 \mapsto V^3$. Portanto o lema acima prova o Teorema 2.1.1 para todas as possibilidades de $\eta \mapsto F^3$, com exceção do modelo citado. Provado tal lema, voltaremos nossa atenção para esse modelo particular e, como já mencionamos, essa segunda parte da prova será inspirada na abordagem feita por *Stong e Pergher* em [18].

Para a prova do lema usaremos o fato já citado anteriormente, que

$$p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2$$

para qualquer polinomial p nas classes características do fibrados linhas usuais sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ e $\mathbb{R}P(\mu)$ nas classes de η, μ, $\mathbb{R}P(\eta)$ e $\mathbb{R}P(\mu)$. A estratégia é mostrar que se, $m > m(n-3)+6$, então é possível escolher polinomiais p especiais de tal sorte que $p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = 0$, por razões dimensionais, enquanto que $p(c, W_1, \ldots, W_{m-1})[\mathbb{R}P(\eta)]_2$ reproduz os números $V_1^3[F^3]_2$, $V_1V_2[F^3]_2$ e $V_3[F^3]_2$, onde $V = 1 + V_1 + V_2 + V_3$ é a classe de *Stiefel- Whitney* do fibrado $\eta \oplus \tau \mapsto F^3$, sendo $\tau \mapsto F^3$ o fibrado tangente sobre F^3(essa abordagem é inspirada na prova do teorema principal de [19]). Ou seja, iremos provar o seguinte

Lema 2.4.2. *Se $m > m(n-3)+6$ então $V_1^3[F^3]_2 = 0$, $V_1V_2[F^3]_2 = 0$ e $V_3[F^3]_2 = 0$, onde V_1, V_2 e V_3 são as classes de Stiefel- Whitney do fibrado $\eta \oplus \tau$.*

Notemos que o Lema 2.4.2 implica no Lema 2.4.1. De fato, temos

$$W(\eta \oplus \tau) = W(\eta) \cdot W(\tau) = (1 + v_1 + v_2 + v_3) \cdot (1 + w_1 + w_2 + w_3),$$

portanto $V_1 = v_1 + w_1$, $V_2 = v_2 + w_2 + v_1 w_1$ e $V_3 = v_3 + w_3 + v_2 w_1 + v_1 w_2$.

Como

$$\begin{cases} V_1^3[F^3]_2 &= 0, \\ V_1V_2[F^3]_2 &= 0, \\ V_3[F^3]_2 &= 0, \end{cases}$$

então

$$0 = V_1^3[F^3]_2 = (v_1 + w_1)^3[F^3]_2 = v_1^3 + v_1w_1^2 + v_1^2w_1 + w_1^3[F^3]_2.$$

Como $w_1^3 = 0$ (pois F^3 borda) e $v_1^2w_1 = 0$ (pela equação 2.3 vista na Seção 2.2) então temos

$$v_1^3 = v_1w_1^2.$$

Também,

$$0 = V_1V_2[F^3]_2 = (v_1 + w_1)(v_2 + w_2 + v_1w_1)[F^3]_2 =$$

$$= (v_1v_2 + v_1w_2 + v_1^2w_1 + w_1v_2 + w_1w_2 + v_1w_1^2)[F^3]_2,$$

e como $v_1^2w_1 = 0$, $v_1w_2 = v_1w_1^2$ (pela equação 2.2 da Seção 2.2) e $w_1w_2 = 0$ (F^3 borda), temos

$$v_1v_2 = w_1v_2.$$

Por fim,

$$0 = V_3[F^3]_2 = (v_3 + w_3 + v_2w_1 + v_1w_2)[F^3]_2.$$

Como $w_3 = 0$ (F^3 borda) e $v_3 = v_2w_1 + v_1v_2$ (pela equação 2.4), temos $v_1w_2 = v_1v_2$. Além disso, $w_2 = w_1^2$ (por 2.2), portanto

$$v_3 = v_2w_1 + v_1w_1^2.$$

■

A escolha das polinomiais utilizadas para provar o Lema 2.4.1 é bastante técnica e terá como ingrediente fundamental uma polinomial especial usada por *Stong e Pergher* em [18], denominada *classe X*. Outro ingrediente será dado por algumas funções polinomiais simétricas especiais, denominadas f_ω, associadas a fibrados linha $\lambda \mapsto B^n$, quando se considera o princípio *splitting* sobre o fibrado tangente a B^n e sobre λ. Tais f_ω terão conexões com as funções simétricas S_ω detalhadas na Seção 1.12 (aqui ω denota partições). Isso será estratégico, uma vez que, se $\omega = (1,1,1)$ temos $S_\omega = V_3$, se $\omega = (1,2)$ então $S_\omega = V_1V_2 + V_3$ e se $\omega = (3)$ então $S_\omega = V_1^3 + V_1V_2 + V_3$.

Formalmente, nossas polinomiais serão do tipo

$$f_\omega X c^d.$$

Sejam

$$W(F^n) = 1 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n, \qquad W(\mu) = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k.$$

Pelo Corolário 1.6.1, temos

$$W(\mathbb{R}P(\mu)) = (1 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\{(1+c)^k + (1+c)^{k-1}u_1 + \cdots + u_k\};$$

e na seção anterior vimos as classes $W[r]$ dadas por

$$W[r] = \frac{1}{(1+c)^{k-r}} W(\mathbb{R}P(\mu)) =$$
$$= (1+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\{(1+c)^r + (1+c)^{r-1}u_1 + \cdots + u_r + (1+c)^{-1}u_{r+1} + \cdots + (1+c)^{r-k}u_k\}.$$

Recordemos as propriedades já citadas:

1) $W[r]_{2r} = \theta_r c^r$ + termos envolvendo c^x onde $x < r$,

2) $W[r]_{2r+1} = (\theta_{r+1} + u_{r+1})c^r$ + termos envolvendo c^x onde $x < r$.

A classe X acima mencionada tem a forma

$$X = W[r_1]_{2r_1} \cdots W[r_h]_{2r_h} W[s_1]_{2s_1+1} \cdots W[s_t]_{2s_t+1}.$$

Note que a dimensão de X é

$$dim(X) = 2(r_1 + \cdots + r_h) + 2(s_1 + \cdots + s_t) + t.$$

Além disso, por causa das propriedade de $W[r]$, temos que

$$
\begin{aligned}
X = \ & (\theta_{r_1} c^{r_1} + \text{ termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < r_1) \cdot \\
& \cdot (\theta_{r_2} c^{r_2} + \text{ termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < r_2) \cdot \\
& \vdots \\
& \cdot (\theta_{r_h} c^{r_h} + \text{ termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < r_h) \cdot \\
& \cdot ((\theta_{s_1+1} + u_{s_1+1}) c^{s_1} + \text{ termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < s_1) \cdot \\
& \cdot ((\theta_{s_2+1} + u_{s_2+1}) c^{s_2} + \text{ termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < s_2) \cdot \\
& \vdots \\
& \cdot ((\theta_{s_t+1} + u_{s_t+1}) c^{s_t} + \text{ termos envolvendo } c^x \text{ onde } x < s_t).
\end{aligned}
$$

Disso temos

$$X = (\theta_{r_1} \cdots \theta_{r_h} (\theta_{s_1+1} + u_{s_1+1}) \cdots (\theta_{s_t+1} + u_{s_t+1})) c^{|r|+|s|} + \text{termos com } c^x,$$

onde $x <| r | + | s |$, sendo $| r |= r_1 + \cdots + r_h$ e $| s |= s_1 + \cdots + s_t$.

Escreva $n - 3 = 2^p q$, com q ímpar. Em [18], a classe X é construída com uma escolha especial dos valores $r_1, \ldots, r_h, s_1, \ldots, s_t$ expressos em termos de p e q. O que se pretende com tal X é que as seguintes propriedades técnicas sejam satisfeitas:

1) $dim(X) = 2(r_1 + \cdots + r_h) + 2(s_1 + \cdots + s_t) + t = m(n - 3)$,

2) $| r | + | s | + t = r_1 + \cdots + r_h + s_1 + \cdots + s_t + t > n - 3$.

Lembremos, para facilitar, que

$$m(n-3) = \begin{cases} (2^{p+1} - 1)q + p + 1, & \text{se} \quad p \leq q, \\ (2^{p+1} - 2^{p-q})q + 2^{p-q}(q + 1), & \text{se} \quad p \geq q + 1. \end{cases}$$

A lista dos valores $r_{i's}$ e $s_{j's}$ mencionados acima é descrita da seguinte forma:

i) se $p \leq q$, então $r_1 = 2^p - 2^{p-1}, r_2 = 2^p - 2^{p-2}, \ldots, r_i = 2^p - 2^{p-i}, \ldots, r_p = 2^p - 2^{p-p} = 2^p - 1$ e $s_j = 2^p - 1$, para todo $1 \leq j \leq q + 1 - p$ (observando que, se $p = q + 1$, os $s_{j's}$ não ocorrem);

ii) se $p \geq q+1$, então $r_1 = 2^p - 2^{p-1}, r_2 = 2^p - 2^{p-2}, \ldots, r_i = 2^p - 2^{p-i}, \ldots, r_{q+1} = 2^p - 2^{p-q-1}$ e nesse caso os $s_{j's}$ não ocorrem.

Com tais valores, em [18] é demonstrado que as propriedades 1 e 2 são satisfeitas. Note que, como $c^{|r|+|s|}$ é a potência máxima de c que ocorre em X, a propriedade 2 diz que cada monômio de X tem um termo proveniente de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n-3$. As polinomiais f_ω que construiremos adiante terão dimensão 6, e serão tais que cada um de seus monômios possuirá termo c^x, com $x \leq 3$, o que significa que a dimensão mínima do termo c^x de cada tal monômio que provém da cohomologia de F^n será 3. Segue que, se $m > m(n-3)+6$, então $m-1 \geq m(n-3)+6$ e poderemos então considerar a polinomial

$$f_\omega X c^{(m-1)-(m(n-3)+6)}$$

a qual terá dimensão $m-1$, podendo portanto ser avaliada em $\mathbb{R}P(\mu)$.

Agora, seja $c^x A$ um monômio de f_ω, onde conforme dito acima $dim(c^x A) = 6$, $x \leq 3$ (portanto $dim(A) \geq 3$) e A provém de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$. Pelas considerações acima, cada monômio de $f_\omega X$ terá um termo proveniente de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n$. Segue que,

$$f_\omega X c^{(m-1)-(m(n-3)+6)}[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = 0$$

por razões dimensionais.

Para computar a polinomial $f_\omega X c^{(m-1)-(m(n-3)+6)}$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, analisemos inicialmente como X se comporta sobre $\mathbb{R}P(\eta)$. Temos

$$W(\mathbb{R}P(\eta) = (1+w_1+w_2+w_3)\Big((1+c)^{m-3} + (1+c)^{m-4}v_1 + (1+c)^{m-5}v_2 + (1+c)^{m-6}v_3\Big).$$

A classe X é um produto de $W[r's]_i$, e vimos na Seção 2.3 que $W[r]$ sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ produz a mesma polinomial que $W[l]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, onde $m-3-l = m-n-r$, ou seja, $l = n+r-3$. Tal $W[l]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ é

$$W[l] = \frac{W(\mathbb{R}P(\eta))}{(1+c)^{m-n-r}} =$$

$$= (1+w_1+w_2+w_3)\Big((1+c)^{n+r-3} + (1+c)^{n+r-4}v_1 + (1+c)^{n+r-5}v_2 + (1+c)^{n+r-6}v_3\Big).$$

Ou seja,

$$W[l] = \begin{cases} (1+c)^{n+r-3} + (1+c)^{n+r-4}v_1 + (1+c)^{n+r-5}v_2 + (1+c)^{n+r-6}v_3 + \\ (1+c)^{n+r-3}w_1 + (1+c)^{n+r-4}v_1w_1 + (1+c)^{n+r-5}v_2w_1 + (1+c)^{n+r-6}v_3w_1 + \\ (1+c)^{n+r-3}w_2 + (1+c)^{n+r-4}v_1w_2 + (1+c)^{n+r-5}v_2w_2 + (1+c)^{n+r-6}v_3w_2 + \\ (1+c)^{n+r-3}w_3 + (1+c)^{n+r-4}v_1w_3 + (1+c)^{n+r-5}v_2w_3 + (1+c)^{n+r-6}v_3w_3. \end{cases}$$

Como foi descrito acima, as polinomiais f_ω que construiremos serão formadas por monômios $c^x A$, onde $dim(A) \geq 3$ e A provém de $H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)$, portanto, $dim(A)$ só pode ser 3 nesse caso. Observando $W[l]$, o produto de $c^x A$ por cada termo da mesma sempre tem um termo que provém daqueles oriundos de $H^i(F^3, \mathbb{Z}_2)$ onde $i \geq 4$ (o qual é nulo por razões dimensionais), com exceção de $(1+c)^{n+r-3}$. Segue que, exceto $(1+c)^{n+r-3}$, todos os termos restantes de $W[l]$ nada contribuem em $f_\omega X c^d$. Portanto podemos considerar $W[l]$ módulo termos de dimensão positiva provenientes de $H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)$ em nossas computações. Isto é, vamos analisar

$$W[l] \equiv (1+c)^{n+r-3}$$

para os valores de $r_{i's}$ e $s_{j's}$ considerados para se obter a classe X, ou seja, $r_i = 2^p - 2^{p-i}$ e $s_j = 2^p - 1$. Lembramos que $n - 3 = 2^p q$, ou seja, $n = 2^p q + 3$, com q ímpar.

Para cada r_i e s_j considere seus correspondentes l_i e l_j; temos então

$$W[l_i] \equiv (1+c)^{n+r_i-3}.$$

Portanto, como $r_i = 2^p - 2^{p-i}$ e $n = 2^p q + 3$,

$$w[l_i]_{2r_i} = \begin{pmatrix} n + r_i - 3 \\ 2r_i \end{pmatrix} c^{2r_i} = \begin{pmatrix} \cdots + 2^{p+1} - 2^{p-i} \\ 2^{p+1} - 2^{p+1-i} \end{pmatrix} c^{2r_i}$$

e pelo Teorema de *Lucas* (1.13.1), segue que $w[l_i]_{2r_i} = c^{2r_i}$ uma vez que

$$\binom{\cdots + 2^{p+1} - 2^{p-i}}{2^{p+1} - 2^{p+1-i}} = 1, \quad \text{pois} \begin{cases} 2^{p+1} - 2^{p-i} = 2^p + 2^{p-1} + \cdots + 2^{p-i+1} + 2^{p-i} \text{ e} \\ 2^{p+1} - 2^{p+1-i} = 2^p + 2^{p-1} + \cdots + 2^{p-i+1}. \end{cases}$$

Agora,

$$W[l_j] \equiv (1+c)^{n+s_j-3},$$

e assim, como $s_j = 2^p - 1$ e $n = 2^p q + 3$,

$$w[l_j]_{2s_j+1} = \binom{n + s_j - 3}{2s_j + 1} c^{2s_j+1} = \binom{\cdots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 1} c^{2s_j+1}.$$

Portanto, segue que $w[l_j]_{2s_j+1} = c^{2s_j+1}$, já que

$$\binom{\cdots + 2^{p+1} - 1}{2^{p+1} - 1} = 1, \quad \text{pelo Teorema de } \textit{Lucas}.$$

Assim a classe X sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ é dada por

$$X = c^{2r_1+\cdots+2r_h+(2s_1+1)+\cdots+(2s_t+1)} \; +$$

$$+(\text{ termos contendo elementos de dimensão positiva provenientes de } H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)) =$$

$$= c^{m(n-3)} +$$

$$+(\text{ termos contendo elementos de dimensão positiva provenientes de } H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)).$$

Passemos agora a descrever as polinomiais f_ω atrás mencionadas. Em linhas gerais, tais polinomiais provêm de certas funções simétricas que podem ser associadas a fibrados linha genéricos $\gamma \mapsto V^n$, onde V^n é uma variedade fechada n-dimensional (e em particular aos fibrados linhas usuais associados a fibrados projetivos), quando se leva em consideração o princípío *splitting*. Levando em conta tal princípio (vide Seção 1.8), sejam

$$W(V^n) = 1 + w_1 + \cdots + w_n = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n),$$

e

$$W(\gamma) = 1 + c.$$

Considere l um natural e seja $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ partição de l tal que $r \leq n$. Temos então a função simétrica de grau $2l$ dada por

$$f_\omega = \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \cdots < j_r \\ 1 \leq j_i \leq n}} \sum_{\sigma \in S_r} x^{i_1}_{j_{\sigma(1)}} (c + x_{j_{\sigma(1)}})^{i_1} x^{i_2}_{j_{\sigma(2)}} (c + x_{j_{\sigma(2)}})^{i_2} \cdots x^{i_r}_{j_{\sigma(r)}} (c + x_{j_{\sigma(r)}})^{i_r}$$

onde S_r é o grupo das permutações de r elementos (compare com os S_ω da Seção 1.12). Como tal função é simétrica, ela pode ser expressa em uma polinomial nos $w_{i's}$ e c.

Para obter as f_ω que nos interessam, particularizemos as mesmas para o caso em que $l = 3$ e $\gamma \mapsto V^n$ é o fibrado linha usual associado ao fibrado projetivo $\mathbb{R}P(\zeta^k)$, $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\zeta^k)$, onde $\zeta^k \mapsto B^n$ é um fibrado k-dimensional sobre uma variedade fechada n-dimensional B^n. Nesse caso, temos as partições $\omega = (1, 1, 1)$, $\omega = (1, 2)$ e $\omega = (3)$, e a dimensão de f_ω será 6.

O lema a seguir irá relacionar tais f_ω com as S_w da Seção 1.12 associadas ao fibrado $\tau^n \oplus \zeta^k \mapsto B^n$, onde τ^n é o fibrado tangente a B^n.

Lema 2.4.3. *Para $\omega = (1, 1, 1)$, $\omega = (1, 2)$ e $\omega = (3)$ vale que*

$$f_\omega(\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\zeta^k)) = S_\omega(\zeta^k \oplus \tau^n) c^3 + \textit{ termos com } c^x, \ x < 3.$$

Demonstração: Usando o princípio *splitting*, sejam

$$W(B^n) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n), \qquad W(\zeta^k) = (1 + y_1)(1 + y_2) \cdots (1 + y_k).$$

Pelo Teorema 1.8.2

$$W(\mathbb{R}P(\zeta^k)) = (1 + z_1)(1 + z_2) \cdots (1 + z_n)(1 + z_{n+1}) \cdots (1 + z_{n+k}),$$

onde $z_i = x_i$, se $1 \leq i \leq n$ e $z_j = c + y_{j-n}$ se $n + 1 \leq j \leq n + k$.

Primeiro analisemos $\omega = (1, 1, 1)$. Lembremos que nesse caso S_ω é composto por monômios que são produto de três variáveis distintas de grau 1, todas com potência 1. Como, pelo princípio *splitting*

$$W(\tau^n \oplus \zeta^k) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_k),$$

temos que

$$S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k) = \sum_{i<j<m} x_i x_j x_m + \sum_{i<j<m} y_i y_j y_m + \sum_{\substack{i,j,m \\ j<m}} x_i y_j y_m + \sum_{\substack{i,j,m \\ i<j}} x_i x_j y_m.$$

Por outro lado, se $\lambda \mapsto V^n$ é qualquer fibrado linha com

$$W(\lambda) = 1 + c, \quad W(V^n) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$

então f_ω é formada por todos os possíveis termos do tipo

$$x_i(c+x_i)x_j(c+x_j)x_m(c+x_m)$$

com $i<j<m$. Em particular, $f_\omega(\mathbb{R}P(\zeta^k))$ tem o formato

$$\sum_{i<j<m} z_i(c+z_i)z_j(c+z_j)z_m(c+z_m).$$

Esses termos provêm de quatro fontes:

i) da parte $(1+z_1)(1+z_2)\cdots(1+z_n) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$, a qual contribui com

$$\sum_{i<j<m} x_i(c+x_i)x_j(c+x_j)x_m(c+x_m);$$

ii) da parte $(1+z_{n+1})\cdots(1+z_{n+k}) = (1+c+y_1)(1+c+y_2)\cdots(1+c+y_k)$, que contribui com

$$\sum_{i<j<m} (c+y_i)(c+c+y_i)(c+y_j)(c+c+y_j)(c+y_m)(c+c+y_m) = \sum_{i<j<m} y_i(c+y_i)y_j(c+y_j)y_m(c+y_m);$$

iii) da mistura das variáveis das partes acima sendo um termo da forma $(1+z_i), 1 \le i \le n$, e dois termos da forma $(1+z_j), n+1 \le j \le n+k$, a qual contribui com

$$\sum_{i<j<m} x_i(c+x_i)(c+y_j)(c+c+y_j)(c+y_m)(c+c+y_m) = \sum_{i<j<m} x_i(c+x_i)y_j(c+y_j)y_m(c+y_m);$$

iv) misturando dois termos da forma $(1+z_i), 1 \leq i \leq n$, com um termo da forma $(1+z_j), n+1 \leq j \leq n+k$, o que contribui com

$$\sum_{i<j<m} x_i(c+x_i)x_j(c+x_j)(c+y_m)(c+c+y_m) = \sum_{i<j<m} x_i(c+x_i)x_j(c+x_j)y_m(c+y_m).$$

Na parte i), em cada termo do somatório o monômio com maior potência de c é $x_ix_jx_mc^3$. Portanto,

$$x_i(c+x_i)x_j(c+x_j)x_m(c+x_m) = x_ix_jx_mc^3 + \text{ termos com } c^x, x < 3.$$

Analogamente, na parte ii) temos

$$y_i(c+y_i)y_j(c+y_j)y_m(c+y_m) = y_iy_jy_mc^3 + \text{ termos com } c^x, x < 3.$$

Na parte iii) temos

$$x_i(c+x_i)y_j(c+y_j)y_m(c+y_m) = x_iy_jy_mc^3 + \text{ termos com } c^x, x < 3.$$

Por fim, na parte iv) temos

$$x_i(c+x_i)x_j(c+x_j)y_m(c+y_m) = x_ix_jy_mc^3 + \text{ termos com } c^x, x < 3.$$

Juntando tais fatos, concluímos o seguinte

$$\begin{aligned}
f_\omega(\mathbb{R}P(\zeta^k)) &= ((\textstyle\sum_{i<j<m} x_ix_jx_m)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3)+ \\
&\quad +((\textstyle\sum_{i<j<m} y_iy_jy_m)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3)+ \\
&\quad +((\textstyle\sum_{\substack{i,j,m \\ j<m}} x_iy_jy_m)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3)+ \\
&\quad +((\textstyle\sum_{\substack{i,j,m \\ i<j}} x_ix_jy_m)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3) = \\
&= \Big((\textstyle\sum_{i<j<m} x_ix_jx_m) + (\sum_{i<j<m} y_iy_jy_m) + (\sum_{\substack{i,j,m \\ j<m}} x_iy_jy_m)+ \\
&\quad +(\textstyle\sum_{\substack{i,j,m \\ i<j}} x_ix_jy_m)\Big)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3 = \\
&= S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3.
\end{aligned}$$

Com isso provamos o resultado para $\omega = (1,1,1)$.

Analisemos agora $\omega = (1,2)$. Neste caso $f_\omega(\mathbb{R}P(\zeta^k))$ tem o formato

$$\sum_{i<j} z_i(c+z_i)z_j^2(c+z_j)^2.$$

Tais termos provêm :

i) da parte $(1+z_1)(1+z_2)\cdots(1+z_n) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$, a qual contribui com

$$\sum_{i<j} x_i(c+x_i)x_j^2(c+x_j)^2;$$

ii) da parte $(1+z_{n+1})\cdots(1+z_{n+k}) = (1+c+y_1)(1+c+y_2)\cdots(1+c+y_k)$, que contribui com

$$\sum_{i<j} y_i(c+y_i)y_j^2(c+y_j)^2;$$

iii) da mistura das variáveis das partes acima sendo um termo da forma $(1+z_i), 1 \leq i \leq n$, e dois termos da forma $(1+z_j), n+1 \leq j \leq n+k$, a qual contribui com

$$\sum_{i,j} x_i(c+x_i)y_j^2(c+y_j)^2;$$

iv) misturando dois termos da forma $(1+z_i), 1 \leq i \leq n$, com um termo da forma $(1+z_j), n+1 \leq j \leq n+k$, o que contribui com

$$\sum_{i,j} x_i^2(c+x_i)^2 y_j(c+y_j).$$

Como no caso anterior, na parte $i)$ temos

$$x_i(c+x_i)x_j^2(c^2+x_j^2) = x_i x_j^2 c^3 + \text{ termos com } c^x, x<3;$$

na parte $ii)$ temos

$$y_i(c+y_i)y_j^2(c^2+y_j^2) = y_i y_j^2 c^3 + \text{ termos com } c^x, x<3;$$

na parte $iii)$

$$x_i(c+x_i)y_j^2(c^2+y_j^2) = x_i y_j^2 c^3 + \text{ termos com } c^x, x<3;$$

por fim, na parte *iv*) temos

$$x_i^2(c^2+x_i^2)y_j(c+y_j) = x_i^2y_jc^3 + \text{ termos com } c^x, x<3.$$

Nesse caso, S_ω é composto por monômios constituídos por duas variáveis, sendo que uma delas tem grau 1 e a outra tem grau 2. Ou seja,

$$S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k) = \sum_{i<j} x_ix_j^2 + \sum_{i<j} y_iy_j^2 + \sum_{i,j} x_iy_j^2 + \sum_{i,j} x_i^2y_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f_\omega(\mathbb{R}P(\zeta^k)) &= ((\textstyle\sum_{i<j} x_ix_j^2)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3)+\\
&\quad +((\textstyle\sum_{i<j} y_iy_j^2)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3)+\\
&\quad +((\textstyle\sum_{i,j} x_i^2y_j)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3)+\\
&\quad +((\textstyle\sum_{i,j} x_iy_j^2)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3) =\\
&= \Big((\textstyle\sum_{i<j} x_ix_j^2) + (\sum_{i<j} y_iy_j^2) + (\sum_{i,j} x_i^2y_j)+\\
&\quad +(\textstyle\sum_{i,j} x_iy_j^2)\Big)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3 =\\
&= S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3.
\end{aligned}$$

Finalmente analisemos o caso $\omega = (3)$. Aqui temos S_ω composto por monômios constituído de uma única variável com grau 3. Ou seja,

$$S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k) = \sum_i x_i^3 + \sum_i y_i^3.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
f_\omega(\mathbb{R}P(\zeta^k)) &= \textstyle\sum_i x_i^3(c+x_i)^3 + \sum_j (c+y_j)^3(c+c+y_j)^3 =\\
&= \textstyle\sum_i x_i^3(c+x_i)^3 + \sum_j y_j^3(c+y_j)^3 =\\
&= \Big((\textstyle\sum_i x_i^3) + (\sum_j y_j^3)\Big)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3 =\\
&= S_\omega(\tau^n \oplus \zeta^k)c^3 + \text{termos com } c^x,\ x<3,
\end{aligned}$$

encerrando a demonstração. ■

Agora estamos em condições de provar o Lema 2.4.2, que era o nosso principal objetivo. Ou seja, vamos provar que, se $m > m(n-3)+6$ então $V_1^3[F^3]_2 = 0$, $V_1V_2[F^3]_2 = 0$ e $V_3[F^3]_2 = 0$, onde V_1, V_2 *e* V_3 são as classes de *Stiefel- Whitney* do fibrado $\eta \oplus \tau \mapsto F^3$.

Conforme explicado anteriormente, consideremos a polinomial $f_\omega X c^y$, onde $y = (m-1) - (m(n-3)+6)$, avaliada em $\mathbb{R}P(\mu)$ e $\mathbb{R}P(\eta)$. Para que essa polinomial se anule sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ (por razões dimensionais) vimos que o argumento é exibir f_ω com dimensão 6 e tal que cada um de seus monômios seja da forma $c^x A$, com A proveniente de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ e $dim(A) \geq 3$. Pelo Lema 2.4.3, temos que $f_\omega(\mathbb{R}P(\mu)) = S_\omega(\tau^n \oplus \mu)c^3+$ termos com $c^x,\ x < 3$, onde τ^n é o fibrado tangente a F^n e $\omega = (1,1,1)$, $\omega = (1,2)$ ou $\omega = (3)$. Como $S_\omega(\tau^n \oplus \mu)$ se expressa nas classes características de $\tau^n \oplus \mu$ (as quais provêm da cohomologia de F^n), temos que para tais ω,

$$f_\omega X c^y[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = 0,$$

por razões dimensionais.

Por outro lado, se temos τ^3 o fibrado tangente a F^3, e considerando que

$$W(\tau^3) = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1 + (x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1x_2x_3),$$

$$W(\eta) = (1+y_1)(1+y_2)(1+y_3) = 1 + (y_1+y_2+y_3) + (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) + (y_1y_2y_3),$$

$$W(\tau^3 \oplus \eta) = W(\tau^3)W(\eta) = 1 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6$$

então temos

$$V_1 = x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3,$$

$$V_2 = \begin{cases} x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + \\ +x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \\ +y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3, \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{cases} x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + x_1y_1y_2 + x_1y_1y_3 + x_1y_2y_3 + \\ +x_2y_1y_2 + x_2y_1y_3 + x_2y_2y_3 + x_3y_1y_2 + x_3y_1y_3 + \\ +x_3y_2y_3 + x_1x_2y_1 + x_1x_2y_2 + x_1x_2y_3 + x_1x_3y_1 + \\ +x_1x_3y_2 + x_1x_3y_3 + x_2x_3y_1 + x_2x_3y_2 + x_2x_3y_3. \end{cases}$$

Agora, se $\omega = (1, 1, 1)$,

$$S_\omega(\tau^3 \oplus \eta) = \begin{cases} x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + x_1y_1y_2 + x_1y_1y_3 + x_1y_2y_3 + \\ +x_2y_1y_2 + x_2y_1y_3 + x_2y_2y_3 + +x_3y_1y_2 + x_3y_1y_3 + \\ +x_3y_2y_3 + x_1x_2y_1 + x_1x_2y_2 + x_1x_2y_3 + x_1x_3y_1 + \\ +x_1x_3y_2 + x_1x_3y_3 + x_2x_3y_1 + x_2x_3y_2 + x_2x_3y_3 = \\ = V_3(\tau^3 \oplus \eta). \end{cases}$$

Se $\omega = (1, 2)$,

$$S_\omega(\tau^3 \oplus \eta) = \begin{cases} x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + y_1y_2^2 + y_1y_3^2 + y_2y_3^2 + \\ +x_1y_1^2 + x_1y_2^2 + x_1y_3^2 + x_2y_1^2 + x_2y_2^2 + x_2y_3^2 + \\ +x_3y_1^2 + x_3y_2^2 + x_3y_3^2 + x_1^2y_1 + x_1^2y_2 + x_1^2y_3 + \\ +x_2^2y_1 + x_2^2y_2 + x_2^2y_3 + x_3^2y_1 + x_3^2y_2 + x_3^2y_3 + \\ +x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + y_1^2y_2 + y_1^2y_3 + y_2^2y_3 = \\ = (V_1V_2 + V_3)(\tau^3 \oplus \eta). \end{cases}$$

E se $\omega = (3)$,

$$S_\omega(\tau^3 \oplus \eta) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (V_1^3 + V_1V_2 + V_3)(\tau^3 \oplus \eta).$$

Usando o Lema 2.4.3 e o cálculo anterior da classe X para $\mathbb{R}P(\eta)$, segue que

$$\begin{aligned} f_\omega X c^y[\mathbb{R}P(\eta)]_2 \quad = \quad & \big(S_\omega(\tau \oplus \eta)c^3 + (\text{termos com } c^x, x < 3)\big)\cdot \\ & \cdot\big(c^{m(n-3)} + \text{ termos contendo elementos com dimensão positiva} \\ & \text{provenientes de } H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)\ \big)c^y[\mathbb{R}P(\eta)]_2. \end{aligned}$$

Agora, cada termo de dimensão positiva proveniente de $H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)$ multiplicado por $S_\omega(\tau \oplus \eta)$ dá zero, uma vez que $S_\omega(\tau \oplus \eta) \in H^3(F^3, \mathbb{Z}_2)$. Logo,

$$f_\omega X c^y[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \left(S_\omega(\tau \oplus \eta)c^{m(n-3)+3+y} + \text{termos com } c^x\right)[\mathbb{R}P(\eta)]_2,$$

onde $x < m(n-3)+3+y$.

Observe que cada termo envolvendo c^x, com $x < m(n-3)+3+y$, tem necessariamente um termo proveniente de $H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão > 3, que é zero. Portanto,

$$\begin{aligned} f_\omega X c^y[\mathbb{R}P(\eta)]_2 &= S_\omega(\tau \oplus \eta)c^{m(n-3)+3+y}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\ &= S_\omega(\tau \oplus \eta)c^{m-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \begin{cases} V_3 c^{m-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2, & se\ \omega = (1,1,1), \\ (V_1V_2 + V_3)c^{m-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2, & se\ \omega = (1,2), \\ (V_1^3 + V_1V_2 + V_3)c^{m-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2, & se\ \omega = (3). \end{cases} \end{aligned}$$

Lembrando finalmente que $H^*(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F^3, \mathbb{Z}_2)$-módulo livre gerado por

$$1, c, c^2, \ldots, c^{m-4},$$

concluimos que

$$S_\omega(\tau \oplus \eta)c^{m(n-3)+3+y}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = S_\omega(\tau \oplus \eta)[F^3]_2,$$

ou seja,

$$f_\omega X c^y[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \begin{cases} V_3[F^3]_2, & se \quad \omega = (1,1,1), \\ (V_1V_2 + V_3)[F^3]_2, & se \quad \omega = (1,2), \\ (V_1^3 + V_1V_2 + V_3)[F^3]_2, & se \quad \omega = (3). \end{cases}$$

Isso encerra a prova do Lema 2.4.2. ■

A tarefa acima encerrada reduz nosso trabalho, conforme já explicado, a provar o seguinte fato: se (M^m, T) é uma involução com *fixed-data*

$$(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta_6 \oplus (m-6)\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2),$$

onde $\eta_6 = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \mathbb{R}$ sendo que ξ_1 é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^1$ e ξ_2 é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^2$, então $m \leq m(n-3)+6$. Para facilitar nossa tarefa, estabeleceremos algumas notações que serão válidas até o final do capítulo. Manteremos a notação já previamente estabelecida

$$W(F^n) = 1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n, \qquad W(\mu) = 1 + u_1 + \cdots + u_k, \qquad k = m - n.$$

Daqui em diante, portanto, (M^m, T) será uma involução com *fixed-data* da forma acima. Denotemos por $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ e $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ os respectivos geradores, e o fibrado

$$\eta_6 \oplus (m-6)\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2 = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2,$$

será denotado simplesmente por $\eta \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$. Sabemos que

$$W(\eta) = (1+\alpha)(1+\beta) = 1 + (\alpha+\beta) + \alpha\beta.$$

A letra c será designada para denotar simultaneamente as primeiras classes de *Whitney* dos fibrados linhas usuais sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ e $\mathbb{R}P(\mu)$, dependendo do contexto. Nossa estratégia consistirá em mostrar que, caso $m > m(n-3)+6$, então é possível escolher polinomiais especiais $p(c, w_1, \ldots, w_n)$ com dimensão $m-1$ de tal sorte que

$$p(c, w_1, \ldots, w_n)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 \neq 0$$

(o que é viável, uma vez que os números caracerísticos do fibrado linha sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ são explicitamente conhecidos) e

$$p(c, w_1, \ldots, w_n)[\mathbb{R}P(\mu)]_2 = 0$$

(por razões dimensionais), o que nos dará a contradição. Tais polinomiais não serão únicas para todos os valores de n, sendo diferentes nos casos n par e n ímpar. Particularmente, para n ímpar, a construção de tais polinomiais dependerá crucialmente da classe X de *Stong e Pergher*.

Lema 2.4.4. *Em $H^*(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$ temos que $c^{m-1} = c^{m-2}\beta = c^{m-3}\alpha\beta = c^{m-4}\alpha\beta^2$, que é o gerador de $H^{m-1}(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$.*

Demonstração: Pelo Teorema de *Leray- Hirsch* (1.6.2), sabemos que $H^*(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$-módulo livre gerado por $1, c, c^2, \dots, c^{m-4}$. Segue que $c^{m-4}\alpha\beta^2$ é o gerador na dimensão *top*, ou seja, de $H^{m-1}(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$. Agora, em $H^*(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$ vale a relação

$$c^{m-3} = c^{m-4}w_1(\eta) + c^{m-5}w_2(\eta) + \cdots + w_{m-3}(\eta)$$

e como $w_1(\eta) = \alpha + \beta$, $w_2(\eta) = \alpha\beta$ e $w_i(\eta) = 0$ para $i > 2$, temos

$$c^{m-3} = c^{m-4}(\alpha + \beta) + c^{m-5}\alpha\beta.$$

Daí, multiplicando a equação acima por c^2, $c\alpha$, $c\beta$, β^2 e $\alpha\beta$, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} c^{m-1} &= c^{m-2}(\alpha+\beta) + c^{m-3}\alpha\beta, & (i) \\ c^{m-2}\alpha &= c^{m-3}\alpha\beta, & (ii) \\ c^{m-2}\beta &= c^{m-3}\alpha\beta + c^{m-3}\beta^2 + c^{m-4}\alpha\beta^2, & (iii) \\ c^{m-3}\beta^2 &= c^{m-4}\alpha\beta^2, & (iv) \\ c^{m-3}\alpha\beta &= c^{m-4}\alpha\beta^2. & (v) \end{cases}$$

Substituindo (iv) em (iii) temos

$$c^{m-2}\beta = c^{m-3}\alpha\beta;$$

agora, substituindo (iii) e (ii) em (i), temos

$$c^{m-1} = c^{m-3}\alpha\beta$$

e por (v) temos

$$c^{m-1} = c^{m-4}\alpha\beta^2.$$

Portanto,

$$c^{m-1} = c^{m-2}\beta = c^{m-3}\alpha\beta = c^{m-4}\alpha\beta^2.$$

■

Nosso primeiro passo será mostrar o resultado para n par, que é o caso mais simples. Se n é par, então $n-3$ é ímpar, e portanto $m(n-3)+6 = n-2+6 = n+4$. Temos que

$$W(\mathbb{R}P(\mu)) = (1+\theta_1+\cdots+\theta_n)\{(1+c)^k+(1+c)^{k-1}u_1+\cdots+u_k\}$$

e

$$W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1+\beta+\beta^2)\{(1+c)^{m-3}+(1+c)^{m-4}(\alpha+\beta)+(1+c)^{m-5}\alpha\beta\}.$$

A polinomial adequada nesse caso será oriunda de $W[0]$ associada a μ, o que obriga a considerar $W[l]$ associada a η, onde $l = n-3$.

Se $m > n+2$, e por consequência $m-1 \geq n+2$, então podemos considerar a polinomial $W[0]_1^{n+2}c^{m-1-(n+2)}$ associada a μ, a qual tem dimensão $m-1$ e é idêntica à polinomial $W[l]_1^{n+2}c^{m-1-(n+2)}$ associada a η. Temos que

$$W[0] = \frac{1}{(1+c)^k}W(\mathbb{R}P(\mu)) = (1+\theta_1+\cdots+\theta_n)\{1+\frac{u_1}{(1+c)}+\cdots+\frac{u_k}{(1+c)^k}\}$$

e

$$W[n-3] = \frac{1}{(1+c)^k}W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1+\beta+\beta^2)\{(1+c)^{n-3}+(1+c)^{n-4}(\alpha+\beta)+(1+c)^{n-5}\alpha\beta\}.$$

Assim, sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ temos que

$$W[0]_1 = \theta_1+u_1 \quad \Longrightarrow \quad W[0]_1^{n+2} = (\theta_1+u_1)^{n+2}$$

que é zero pois $(\theta_1+u_1)^{n+2}$ provém de $H^{n+2}(F^n,\mathbb{Z}_2)$.

Por outro lado, sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ temos que

$$\begin{aligned} W[n-3]_1 &= \binom{n-3}{1}c+(\alpha+\beta)+\beta \\ &= c+\alpha, \end{aligned}$$

pois, como n é par, pelo Teorema de *Lucas* temos $\binom{n-3}{1} \equiv 1\ (mod\ 2)$.

Assim,

$$\begin{aligned} W[n-3]_1^{n+2} c^{m-1-(n+2)} &= (c+\alpha)^{n+2} c^{m-1-(n+2)} \\ &= \sum_{i=0}^{n+2} \begin{pmatrix} n+2 \\ i \end{pmatrix} c^i \alpha^{n+2-i} c^{m-1-(n+2)} \\ &= \left(\begin{pmatrix} n+2 \\ n+2 \end{pmatrix} c^{n+2} + \begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} c^{n+1}\alpha \right) c^{m-1-(n+2)} \end{aligned}$$

pelo fato de que $\alpha^i = 0$ para $i \geq 2$.

Além disso, como $\begin{pmatrix} n+2 \\ n+2 \end{pmatrix} \equiv 1 \ (mod\ 2)$ e $\begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} \equiv 0 \ (mod\ 2)$ (pois $n+2$ é par e $n+1$ ímpar), segue que

$$W[l]_1^{n+2} c^{m-1-(n+2)} = c^{n+2} c^{m-1-(n+2)} = c^{m-1},$$

o qual, pelo Lema 2.4.4, é o gerador de $H^{m-1}(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$. Isso encerra a prova para o caso n par.

Iniciaremos agora a abordagem do caso em que n é ímpar, portanto a partir de agora $n-3$ é par. Escreva $n-3 = 2^p q$, onde q é ímpar e $p > 0$. A escolha das polinomiais nesse caso não é tão simples como no caso anterior, de fato aqui necessitamos da classe X. Conforme vimos, tal classe sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ assume o aspecto geral

$$X = W[r_1]_{2r_1} W[r_2]_{2r_2} \cdots W[r_h]_{2r_h} W[s_1]_{2s_1+1} W[s_2]_{2s_2+1} \cdots W[s_t]_{2s_t+1},$$

e a mesma é usada com valores especiais $r_{i's}$ e $s_{i's}$ (mais precisamente, $r_i = 2^p - 2^{p-i}$ e $s_i = 2^p - 1$) levando em conta as propriedades especiais descritas para $W[r]_{2r}$ e $W[r]_{2r+1}$. Ao utilizar tal tipo de classe para produzir polinomiais sobre $\mathbb{R}P(\mu)$, devemos levar em conta que as mesmas polinomiais deverão ser consideradas sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, e portanto devem ser utilizados os pedaços $W[l]_{2r}$ e $W[l]_{2r+1}$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, onde $l = n + r - 3$, no lugar de $W[r]_{2r}$ e $W[r]_{2r+1}$, respectivamente.

Suponha então $m > m(n-3)+6$, ou seja, $m-1 \geq m(n-3)+6$, e considere inicialmente $p > 1$. Vamos usar a classe $W[0]_2^3$ sobre $\mathbb{R}P(\mu)$. Lembrando que

$$W[0]_2 = u_1c + u_2 + \theta_1 u_1 + \theta_2,$$

então

$$W[0]_2^3 = (u_1^2c^2 + u_2^2 + \theta_1^2u_1^2 + \theta_2^2)(u_1c + u_2 + \theta_1u_1 + \theta_2)$$

é tal que todos seus termos possuem classes que provêm de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão no mínimo 3.

Por outro lado, como vimos anteriormente, a classe X acima descrita possui dimensão $m(n-3)$ e é tal que os seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n-3$. Então

$$W[0]_2^3X$$

é tal que todos seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n$, ou seja,

$$W[0]_2^3X = 0.$$

Agora note que, $dim(W[0]_2^3X) = m(n-3)+6$; como $(m-1)-(m(n-3)+6) \geq 0$, podemos considerar a polinomial

$$W[0]_2^3Xc^{m-1-(m(n-3)+6)}$$

a qual tem dimensão $m-1$ e obviamente também é nula. Se provarmos que sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ a polinomial acima produz número característico não nulo, nossa tarefa estará completa para $p > 1$. Note que, sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, $W[0]_2$ deve ser substituída por $W[n-3]_2$, então

$$\begin{aligned}W[n-3]_2 = & \binom{n-3}{2}c^2+\binom{n-4}{1}c(\alpha+\beta)+\alpha\beta+ \\ & +\binom{n-3}{1}c\beta+(\alpha\beta+\beta^2)+\beta^2 \\ = & \binom{n-3}{2}c^2+c(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

Observe que $\binom{n-4}{1} \equiv 1\ (mod\ 2)$, pois $n-4$ é ímpar e 1 comparece na expansão diádica de $n-4$ (Teorema de *Lucas* 1.13.1) e $\binom{n-3}{1} \equiv 0\ (mod\ 2)$ pois $n-3$ é par e portanto 1 não comparece na expansão diádica de $n-3$.

Além disso, como $n-3 = 2^p q$, com q ímpar e estamos no caso $p > 1$, vemos que 2 não comparece na expansão diádica de $n-3$. Logo

$$W[n-3]_2 = c(\alpha+\beta)$$

e portanto

$$\begin{aligned}W[n-3]_2^3 &= (c(\alpha+\beta))^3 \\ &= (c(\alpha+\beta))^2(c(\alpha+\beta)) \\ &= c^2\beta^2(c(\alpha+\beta)) \\ &= c^3\alpha\beta^2.\end{aligned}$$

Lembremos que a classe X é composta por pedaços do tipo $W[l]_{2r}$ e $W[l]_{2r+1}$, vindos de

$$W[l] = \frac{1}{(1+c)^{k-r}}W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1+\beta+\beta^2)\{(1+c)^{n+r-3}+(1+c)^{n+r-4}(\alpha+\beta)+(1+c)^{n+r-5}\alpha\beta\}.$$

Como estamos interessados na polinomial $W[n-3]_2^3 X c^{m-1-(m(n-3)+6)}$, podemos considerar a classe $W[l]$ acima como sendo

$$W[l] \equiv (1+c)^{n+r-3}$$

pois todos os outros termos de $W[l]$ quando multiplicados por $W[n-3]_2^3 = c^3\alpha\beta^2$ se anulam por razões dimensionais (pois $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1)$ e $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^2)$).

Então vamos analisar $W[l]$ para os valores de $r_{i's}$ e $s_{j's}$ considerados para a obtenção da classe X. Ou seja, para $p \leq q$ temos $r_i = 2^p - 2^i$ e $s_j = 2^p - 1$, para $p \geq q+1$ temos $r_i = 2^p - 2^i$ e os $s_{j's}$ não ocorrem.

Lembramos que $n-3 = 2^p q$, com q ímpar e $p > 1$. Para cada r_i e s_j considere seus correspondentes l_i e l_j ; temos então

$$W[l_i] \equiv (1+c)^{n+r_i-3}.$$

Para $r_i = 2^p - 2^i, \quad 0 \leq i \leq p-1$, temos

$$W[l_i]_{2r_i} = \begin{pmatrix} n+r_i-3 \\ 2r_i \end{pmatrix} c^{2r_i} = c^{2r_i}.$$

De fato, como q é ímpar então $q+1$ é par e sua partição diádica pode ser escrita como $q+1 = 2^{t_0} + 2^{t_1} + \cdots + 2^{t_l}$, $1 < t_0 < t_1 < \ldots < t_l$. Logo

$$\begin{aligned} n-3+r_i &= 2^p q + 2^p - 2^i = 2^p(q+1) - 2^i \\ &= 2^p(2^{t_0} + 2^{t_1} + \cdots) - 2^i \\ &= \cdots + 2^{p+t_0} - 2^i \\ &= \cdots + 2^{p+t_0+1} + 2^{p+t_0-1} + \cdots + 2^i \end{aligned}$$

e

$$2r_i = 2^{p+1} - 2^{i+1} = 2^p + 2^{p-1} + \cdots + 2^{i+1},$$

ou seja, $2r_i$ pertence à expansão diádica de $n+r_i-3$. Portanto $\begin{pmatrix} n+r_i-3 \\ 2r_i \end{pmatrix} \equiv 1.$

Para $s_j = 2^p - 1$, temos

$$W[l_j]_{2s_j+1} = \begin{pmatrix} n+s_j-3 \\ 2s_j+1 \end{pmatrix} c^{2s_j+1} = c^{2s_j+1},$$

pois

$$\begin{aligned} n-3+s_j &= 2^p q + 2^p - 1 = 2^p(q+1)-1 \\ &= 2^p(2^{t_0}+2^{t_1}+\cdots)-1 \\ &= \cdots + 2^{p+t_0} - 1 \\ &= \cdots + 2^{p+t_0+1} + 2^{p+t_0-1} + \cdots + 2^0 \end{aligned}$$

e

$$2s_j+1 = 2^{p+1}-2+1 = 2^p+\cdots+2^1+1 = 2^p+\cdots+2^1+2^0,$$

portanto $2s_j+1$ está contido na expansão diádica de $n+s_j-3$.

Assim, no caso em que $p \leq q$, a classe X tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} X &= (W[l_0]_{2s_0+1})^{q+1-p} \cdot W[l_{p-1}]_{2r_{p-1}} \cdots W[l_0]_{2r_0} \\ &= (c^{2^{p+1}-1})^{q+1-p} \cdot c^{2^{p+1}-2^p} \cdots c^{2^{p+1}-2} + \\ &+ \text{ termos contendo elementos com dimensão positiva} \\ &\quad \text{provenientes de } H^*(F^3,\mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

Observe que o termo de maior grau tem dimensão t onde

$$\begin{aligned} t &= (2^{p+1}-1)(q+1-p) + (2^{p+1}-2^p) + \cdots + (2^{p+1}-2) \\ &= (2^{p+1}-1)(q+1-p) + p2^{p+1} - (2^{p+1}-2) \\ &= (2^{p+1}-1)(q+1-p) + (p-1)(2^{p+1}-1+1) + 2 \\ &= (2^{p+1}-1)q + p + 1 \\ &= m(n-3). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} X &= c^t + \text{ termos contendo elementos com dimensão positiva} \\ &\quad \text{provenientes de } H^*(F^3,\mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

No caso em que $p \geq q+1$, a classe X assume a forma

$$\begin{aligned} X &= W[l_1]_{2r_1} \cdots W[l_{q+1}]_{2r_{q+1}} \\ &= c^{2^{p+1}-2^p} \cdots c^{2^{p+1}-2^{p-q}} + \text{termos contendo elementos com dimensão positiva} \\ &\qquad \text{provenientes de } H^*(F^3, \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

Observe que nesse caso o termo de maior grau tem dimensão t, onde

$$\begin{aligned} t &= (2^{p+1} - 2^p) + \cdots + (2^{p+1} - 2^{p-q}) \\ &= (q+1)2^{p+1} - (2^{p+1} - 2^{p-q}) \\ &= q2^{p+1} + 2^{p-q} \\ &= 2(2^p q) + 2^{p-q} \\ &= m(n-3). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} X &= c^t + \text{ termos contendo elementos com dimensão positiva} \\ &\qquad \text{provenientes de } H^*(F^3, \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

Portanto, para $p > 1$, temos

$$W[n-3]_2^3 X c^{m-1-(t+6)} = c^3 \alpha \beta^2 c^t c^{m-1-(t+6)} =$$

$$= \alpha \beta^2 c^{t+3+m-1-(t+6)} = \alpha \beta^2 c^{m-4},$$

que é o gerador de $H^{m-1}(\mathbb{R}P(\eta))$ (pelo Lema 2.4.4) e portanto essa polinomial é não nula, como queríamos demonstrar.

Suponha agora que $p = 1$. Sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ temos

$$W[1] = \frac{1}{(1+c)^{k-1}} W(\mathbb{R}P(\mu)) = (1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n)\{(1+c) + u_1 + \frac{u_2}{(1+c)} + \cdots + \frac{u_k}{(1+c)^{k-1}}\}.$$

Então

$$W[1]_3 = u_2 c + u_3 + \theta_1 u_2 + \theta_2 c + \theta_2 u_1 + \theta_3,$$

logo

$$W[1]_3^2 = (u_2c + u_3 + \theta_1 u_2 + \theta_2 c + \theta_2 u_1 + \theta_3)^2$$

é tal que todos seus termos possuem elementos que provêm de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão no mínimo 4.

Por outro lado, a classe X possui dimensão $m(n-3)$ e é tal que os seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n-3$. Então

$$W[1]_3^2 X$$

é tal que todos seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com dimensão $> n$, ou seja,

$$W[1]_3^2 X = 0.$$

Agora podemos considerar a polinomial

$$W[1]_3^2 X c^{m-1-(m(n-3)+6)}$$

a qual tem dimensão $m-1$ e obviamente também é nula.

Para completar a prova do Teorema 2.1.1 basta provarmos que sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ a polinomial acima produz número característico não nulo.

O correspondente à $W[1]$ sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ é $W[n-2]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, que é dado por

$$W[n-2] = \frac{1}{(1+c)^{k-1}} W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1+\beta+\beta^2)\{(1+c)^{n-2} + (1+c)^{n-3}(\alpha+\beta) + (1+c)^{n-4}\alpha\beta\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} W[n-2]_3 = & \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} c^3 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} c^2(\alpha+\beta) + \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix} c\alpha\beta + \\ & + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} c^2\beta + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} c(\alpha\beta+\beta^2) + \alpha\beta^2 + \\ & + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} c\beta^2 + \alpha\beta^2. \end{aligned}$$

Analisemos então os binômios envolvidos na classe $W[n-2]_3$: $\begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0$ pois $n-3$ é par e $\begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1$ pois $n-4$ é ímpar. Agora, $\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv 1$ pois

$$\begin{aligned} n-2 &= n-3+1 = 2q+1 \\ &= 2(1+2^{t_0}+2^{t_1}+\cdots)+1 \\ &= 2+2^{t_0+1}\cdots+1 \\ &= \cdots+2^{t_0+1}+2^1+2^0, \quad \text{com } 0<t_0<t_1<\cdots \end{aligned}$$

e

$$3 = 2^1+2^0, \qquad 2 = 2^1,$$

logo 3 e 2 pertencem à expansão diádica de $n-2$. Também $\begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 1$ pois

$$n-3 = 2q = 2+2^{t_0+1}\cdots$$

e portanto 2 pertence à expansão de $n-3$.

Assim temos

$$W[n-2]_3 = c^3+c^2\alpha+c(\alpha\beta+\beta^2)$$

e portanto

$$W[n-2]_3^2 = c^6.$$

Vejamos quem é a classe X para $p=1$; analisemos as componentes $W[l]_{2r}$ e $W[l]_{2s+1}$. Lembremos que

$$W[l] = \frac{1}{(1+c)^{k-r}} W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1+\beta+\beta^2)\{(1+c)^{n+r-3}+(1+c)^{n+r-4}(\alpha+\beta)+(1+c)^{n+r-5}\alpha\beta\}.$$

Assim para $r = 2^p-2^0 = 2-1 = 1$ temos

$$\begin{aligned}
W[l]_{2r} = W[l]_2 = & \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} c^2 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} c(\alpha+\beta) + \alpha\beta + \\
+ & \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} c\beta + (\alpha\beta + \beta^2) + \beta^2 \\
= & \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} c^2 + c\beta \\
= & \; c^2 + c\beta
\end{aligned}$$

por justificativas análogas às anteriores.

Agora para $s = 2^p - 1 = 2^1 - 1 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
W[l]_{2s+1} = W[l]_3 = & \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} c^3 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} c^2(\alpha+\beta) + \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix} c\alpha\beta + \\
+ & \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} c^2\beta + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} c(\alpha\beta+\beta^2) + \begin{pmatrix} n-4 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha\beta^2 \\
= & \; c^3 + c^2\alpha + c(\alpha\beta + \beta^2)
\end{aligned}$$

pelas mesmas justificativas anteriores.

Então

$$\begin{aligned}
X &= (W[l]_{2s+1})^{q+1-p} W[l]_{2r} \\
&= \big(c^3 + c^2\alpha + c(\alpha\beta+\beta^2)\big)^{q+1-p}(c^2 + c\beta) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{q} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} (c^3 + c^2\alpha)^{q-i}\big(c(\alpha\beta+\beta^2)\big)^i\right)(c^2 + c\beta) \\
&= \left((c^3 + c^2\alpha)^q + \left((c^3+c^2\alpha)^{q-1}\right)\left(c(\alpha\beta+\beta^2)\right)\right)(c^2 + c\beta),
\end{aligned}$$

uma vez que $(c(\alpha\beta + \beta^2))^j = 0$ se $j \geq 2$.

Mas,

$$\begin{aligned}(c^3+c^2\alpha)^q &= \sum_{i=0}^{q}\begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix}(c^3)^{q-i}(c^2\alpha)^i \\ &= c^{3q}+c^{3q-3}c^2\alpha \\ &= c^{3q}+c^{3q-3+2}\alpha\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(c^3+c^2\alpha)^{q-1} &= \sum_{i=0}^{q-1}\begin{pmatrix} q-1 \\ i \end{pmatrix}(c^3)^{q-1-i}(c^2\alpha)^i \\ &= c^{3q-3}\end{aligned}$$

pelo fato de q ser ímpar e $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$.

Logo,

$$\begin{aligned}X &= \Big((c^{3q}+c^{3(q-1)+2}\alpha+c^{3(q-1)+1}(\alpha\beta+\beta^2)\Big)(c^2+c\beta) \\ &= \Big(c^{3q+2}+c^{3q+1}\beta\Big)+\Big(c^{3q+1}\alpha+c^{3q}\alpha\beta\Big)+\Big(c^{3q}(\alpha\beta+\beta^2)+c^{3q-1}\alpha\beta^2\Big) \\ &= c^{3q+2}+c^{3q+1}(\alpha+\beta)+c^{3q}\beta^2+c^{3q-1}\alpha\beta^2.\end{aligned}$$

Escreva

$$t = m(n-3) = 3q+2 \quad (\text{ para } \ p=1).$$

Então

$$X = c^t + c^{t-1}(\alpha+\beta)+c^{t-2}\beta^2+c^{t-3}\alpha\beta^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}W[n-2]_3^2 X c^{m-1-(t+6)} &= c^6\Big(c^t+c^{t-1}(\alpha+\beta)+c^{t-2}\beta^2+c^{t-3}\alpha\beta^2\Big)c^{m-1-(t+6)} \\ &= c^{m-1}+c^{m-2}(\alpha+\beta)+c^{m-3}\beta^2+c^{m-4}\alpha\beta^2 \\ &= c^{m-3}\alpha\beta+c^{m-3}\beta^2+c^{m-4}\alpha\beta^2 \\ &= c^{m-3}\beta^2\end{aligned}$$

pelo Lema 2.4.4. Por esse mesmo lema concluimos que essa polinomial é não nula. Com isso terminamos a demonstração do Teorema 2.4.4. ■

Capítulo 3

Limitantes Específicos

3.1 Introdução

No capítulo anterior foi mostrado que, se (M^m, T) fixa $F^n \cup F^3$ com o fibrado normal $\eta \mapsto F^3$ sendo não bordante, então $m \leq m(n-3)+6$.

A técnica utilizada para a prova desse resultado seguiu a filosofia do caso $m(n, \{0\})$, onde o *fixed-data* é da forma $(\mu \mapsto F^n) \cup (n\mathbb{R} \mapsto \ \{ponto\})$. A diferença crucial esteve no fato que, enquanto só existe uma possibilidade para classes de bordismos estáveis sobre o ponto (e esta é dada pelo fibrado trivial), o mesmo não ocorre quando se considera todas as possíveis classes de bordismos estáveis sobre variedades tridimensionais. Na verdade existem quinze tais possíveis classes não nulas, como foi mostrado. Dessa forma, a utilização da técnica mencionada para o caso $F^n \cup F^3$, abrangeu todas as quinze classes, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{15}$, sobre a componente F^3.

Em outras palavras, o limitante $m(n-3)+6$ mostra-se efetivo para qualquer n e qualquer uma das classes β_i acima mencionadas. Nesse contexto, surge naturalmente a questão sobre se o referido limitante pode ser ou não melhorado para específicos n e específicas classes β_i. Mais precisamente, tal questão dá origem à definição do número natural

$$\varphi(n, \beta_i) = \max \{m \mid \text{existe involução } (M^m, T) \text{ fixando } F \text{ do tipo } F = F^n \cup F^3$$

$$\text{tal que a classe de bordismo estável do fibrado normal sobre } F^3 \text{ é } \beta_i\}.$$

Pelo capítulo anterior, $\varphi(n, \beta_i) \leq m(n-3) + 6$, $\forall i$. Neste capítulo o número $\varphi(n, \beta_i)$ é calculado para uma ampla gama de pares (n, β_i). Também, em alguns casos, embora o valor $\varphi(n, \beta_i)$ não seja precisamente calculado, obteremos melhorias para o limitante $\varphi(n, \beta_i) \leq m(n-3) + 6$.

Esse problema foi abordado por *P. Pergher* e *F. Figueira*, em [20] e [22], no caso $F^n \cup F^2$. Especificamente, temos para n par:

β_i	n par	melhorias obtidas
β_1	$\forall n$ par	$\varphi(n, \beta_1) = m(n-3) + 4 = n + 2$
β_2	$\forall n$ par	$\varphi(n, \beta_2) \leq m(n-3) + 5 = n + 3$
β_3	$n \equiv 2 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_3) = m(n-3) + 4 = n + 2$
β_4	$n \equiv 0 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_4) = m(n-3) + 4 = n + 2$
β_5	$n \equiv 0 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_5) = m(n-3) + 4 = n + 2$
	$n \equiv 2 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_5) \leq m(n-3) + 5 = n + 3$
β_6	$\forall n$ par	$\varphi(n, \beta_6) \leq m(n-3) + 4 = n + 2$
β_7	$n \equiv 0 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_7) \leq m(n-3) + 5 = n + 3$
	$n \equiv 2 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_7) = m(n-3) + 4 = n + 2$
β_8	$\forall n$ par	$\varphi(n, \beta_8) = m(n-3) + 6 = n + 4$
β_9	$\forall n$ par	$\varphi(n, \beta_9) = m(n-3) + 4 = n + 2$
β_{10}	$\forall n$ par	$\varphi(n, \beta_{10}) \leq m(n-3) + 4 = n + 2$
β_{11}	$n \equiv 0 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{11}) \leq m(n-3) + 4 = n + 2$
	$n \equiv 2 \ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{11}) \leq m(n-3) + 5 = n + 3$

β_{12}	$n \equiv 2\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{12}) \leq m(n-3) + 4 = n + 2$
β_{13}	$\forall n$ par	$\varphi(n, \beta_{13}) \leq m(n-3) + 5 = n + 3$
β_{14}	$n \equiv 0\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{14}) \leq m(n-3) + 5 = n + 3$
	$n \equiv 2\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{14}) \leq m(n-3) + 4 = n + 2$
β_{15}	$n \equiv 0\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{15}) \leq m(n-3) + 4 = n + 2$

Agora, considerando n ímpar, temos a seguinte tabela:

β_i	n ímpar	melhorias obtidas
β_1	$n \equiv 3\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_1) \leq m(n-3) + 4$
	$n \equiv 1\ (mod\ 8)$	$\varphi(n, \beta_1) \leq m(n-3) + 5$
β_2	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_2) \leq m(n-3) + 5$
β_3	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_3) = m(n-3) + 3$
β_4	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_4) = m(n-3) + 3$
β_5	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_5) = m(n-3) + 3$
β_6	$n \equiv 3\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_6) \leq m(n-3) + 4$
	$n \equiv 1\ (mod\ 8)$	$\varphi(n, \beta_6) \leq m(n-3) + 5$
β_7	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_7) = m(n-3) + 3$
β_8	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_8) \leq m(n-3) + 5$
	$n \neq 2^p + 3,\ p \geq 2$	$\varphi(n, \beta_8) = m(n-3) + 5$

β_9	$n \equiv 1\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_9) \leq m(n-3) + 5$
	$n \equiv 3\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_9) \leq m(n-3) + 4$
β_{10}	$n \equiv 1\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{10}) \leq m(n-3) + 5$
	$n \equiv 3\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{10}) \leq m(n-3) + 4$
β_{11}	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_{11}) \leq m(n-3) + 3$
β_{12}	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_{12}) \leq m(n-3) + 3$
β_{13}	$n \equiv 3\ (mod\ 4)$	$\varphi(n, \beta_{13}) \leq m(n-3) + 5$
β_{14}	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_{14}) \leq m(n-3) + 3$
β_{15}	$\forall n$ ímpar	$\varphi(n, \beta_{15}) \leq m(n-3) + 3$

No capítulo seguinte exibiremos exemplos garantindo que as melhorias obtidas para $\varphi(n, \beta_i)$ são as melhores possíveis para:

1) $\forall n$ par e $\beta_i \in \{\beta_1, \beta_8, \beta_9\}$.

2) $n \equiv 0\ (mod\ 4)$ e $\beta_i \in \{\beta_4, \beta_5\}$.

3) $n \equiv 2\ (mod\ 4)$ e $\beta_i \in \{\beta_3, \beta_7\}$.

4) $\forall n$ ímpar e $\beta_i \in \{\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7\}$.

5) $\forall n$ ímpar, exceto $n = 2^p + 3$, $p \geq 1$ e β_8.

Também exibiremos alguns exemplos mostrando que certos resultados são "quase" os melhores possíveis (esses exemplos têm dimensão "quase" ideal, a menos de um). Especificamente, tais exemplos são obtidos para os casos:

1) $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ e β_1.

2) $\forall n$ par e β_2.

3) $n \equiv 0\ (mod\ 4)$ e $\beta_i \in \{\beta_7, \beta_{12}\}$.

4) $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ e $\beta_i \in \{\beta_5, \beta_{15}\}$.

Adotaremos em todos os resultados descritos nesse capítulo as mesmas notações usadas no capítulo anterior. Isto é, (M^m, T) é uma involução cujo *fixed-data* é $(\mu \mapsto F^n) \cup (\eta \mapsto F^3)$, com

$$W(F^n) = 1 + \theta_1 + \cdots + \theta_n, \qquad W(\mu) = 1 + u_1 + \cdots + u_n, \qquad k = m - n,$$
$$W(F^3) = 1 + w_1 + w_2 + w_3, \qquad W(\eta) = 1 + v_1 + v_2 + v_3$$

e $\eta \mapsto F^3$ não bordante.

Lembremos que os fibrados projetivos $\mathbb{R}P(\mu)$ e $\mathbb{R}P(\eta)$, com seus respectivos fibrados linha usuais $\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\mu)$ e $\nu \mapsto \mathbb{R}P(\eta)$ são cobordantes como elementos do grupo de bordismo $\mathcal{N}_{m-1}(BO(1))$. Escreva

$$W(\lambda \mapsto \mathbb{R}P(\mu)) = 1 + c \qquad e \qquad W(\nu \mapsto \mathbb{R}P(\eta)) = 1 + d.$$

Usaremos novamente as classes $W[0]$ e $W[1]$ sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ e suas respectivas correspondentes, $W[n-3]$ e $W[n-2]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$. Estas classes estão descritas no capítulo anterior (páginas 85, 91 e 92).

3.2 Sobre $\varphi(n,\beta)$ para n par

Nessa seção iremos considerar sempre n par. Como vimos anteriormente, o limitante nesse caso é $\varphi(n,\beta) \leq m(n-3) + 6 = n + 4$. Mostraremos que para alguns β's e n's específicos esse valor pode ser melhorado.

Provemos o seguinte

Lema 3.2.1. *Se $k > 2$, então* $\left(\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}(v_1 w_1^2 + v_1^3) + v_3 + v_1^3\right) = 0.$

Demonstração: Considere a classe $W[0]_1$ associada a μ, a qual é dada por

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1.$$

Assim $W[0]_1^{n+2} = 0$, pois seus termos têm dimensão $n+2$ e são provenientes da cohomologia de F^n.

Como $k > 2 \Rightarrow n+k-1 > n+1$, então podemos formar a classe

$$W[0]_1^{n+2} c^{k-3} [\mathbb{R}P(\mu)]_2$$

que dá um número característico nulo para λ.

Portanto o mesmo número característico correspondente para ν também é zero, e tal número é dado por

$$W[n-3]_1^{n+2} d^{k-3} [\mathbb{R}P(\eta)]_2.$$

Como n é par, temos

$$W[n-3]_1^{n+2} = (d + w_1 + v_1)^{n+2}.$$

Assim, como $n > 3 \Rightarrow n+2 > 5$ e como qualquer classe de dimensão > 3 vinda da cohomologia de F^3 é nula, temos que

$$\begin{aligned}
\Big(d + w_1 + v_1\Big)^{n+2} &= \sum_{j=0}^{n+2} \begin{pmatrix} n+2 \\ j \end{pmatrix} d^{n+2-j} (w_1 + v_1)^j \\
&= d^{n+2} + \begin{pmatrix} n+2 \\ 1 \end{pmatrix} d^{n+1} (w_1 + v_1) + \\
&+ \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} d^{n} (w_1 + v_1)^2 + \begin{pmatrix} n+2 \\ 3 \end{pmatrix} d^{n-1} (w_1 + v_1)^3 = \\
&= d^{n+2} + \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} d^{n} (w_1 + v_1)^2,
\end{aligned}$$

pois $n-2$ é par.

Portanto,

$$\begin{aligned}
W[n-3]_1^{n+2}d^{k-3} &= \Big(d+w_1+v_1\Big)^{n+2}d^{k-3} = \\
&= \sum_{j=0}^{n+2}\left(\begin{array}{c} n+2 \\ j \end{array}\right) d^{n+2-j}(w_1+v_1)^j d^{k-3} = \\
&= d^{n+k-1} + \left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right) d^{n+k-3}(w_1+v_1)^2.
\end{aligned}$$

Recordemos agora o fato decorrente da *fórmula de Conner* da Seção 1.10 : se $\nu^k \mapsto W^n$ é um fibrado vetorial k-dimensional sobre uma variedade fechada n-dimensional com $W(\nu^k) = 1 + v_1 + \cdots + v_k$, e se $w \in H^t(W^n)$ com $t \leq n$ e $t + l = n + k - 1$, então

$$w\ c^l\ [\mathbb{R}P(\nu^k)]_2 = w\ \overline{v_{n-t}}\ [W^n]_2,$$

onde $\overline{W(\nu^k)} = 1 + \overline{v_1} + \overline{v_2} + \cdots$ é a *classe dual* de $W(\nu^k)$, caracterizada por

$$W(\nu^k)\overline{W(\nu^k)} = 1.$$

Com isso em mente, temos que

$$\begin{aligned}
W[n-3]_1^{n+2}d^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 &= \Big(d^{n+k-1} + \left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right) d^{n+k-3}(w_1+v_1)^2\Big)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(\overline{v_3} + \left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right) \overline{v_1}(w_1+v_1)^2\Big)[F^3]_2 = \\
&= \Big(v_3 + v_1^3 + \left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right) (v_1w_1^2 + v_1^3)\Big)[F^3]_2 = 0,
\end{aligned}$$

o que encerra a prova. ■

O Lema acima tem como consequência as seguintes proposições:

Proposição 3.2.1. i) *Se $n \equiv 0$ (mod 4) e β é igual a $\beta_1, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{11}$ ou β_{15} então $\varphi(n,\beta) \leq n+2$.*

ii) *Se $n \equiv 2$ $(mod\ 4)$ e β é igual a $\beta_1, \beta_3, \beta_6, \beta_7, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{12}$ ou β_{14} então $\varphi(n,\beta) \leq n+2$.*

Demonstração: De fato, suponha que $\varphi(n,\beta) > n+2$. Então existe uma involução (M^m, T) com $(\eta \mapsto F^3) \in \beta$ tal que $m > n+2$; ou seja, $m - n = k > 2$. Pelo Lema acima

$$v_3 + v_1^3 + \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} (v_1 w_1^2 + v_1^3) = 0.$$

Se $n \equiv 0$ $(mod\ 4)$, então 2 não aparece na partição diádica de n, mas está na partição diádica de $n+2$. Logo, pelo Teorema de *Lucas*, temos que

$$\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 1\ (mod\ 2),$$

e portanto

$$v_3 = v_1 w_1^2.$$

Porém para β igual a $\beta_1, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{11}$ ou β_{15} essa igualdade não é válida. Isso prova o item **(i)**.

Agora, $n \equiv 2$ $(mod\ 4)$ significa que 2 está na partição diádica de n e então 2 não está na partição diádica de $n+2$. Logo, pelo Teorema de *Lucas*, temos

$$\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 0\ (mod\ 2),$$

e portanto

$$v_3 = v_1^3.$$

Como para β igual a $\beta_1, \beta_3, \beta_6, \beta_7, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{12}$ ou β_{14} é válido que $v_3 \neq v_1^3$, concluímos que $\varphi(n,\beta) \leq n+2$ para tais $\beta's$. ■

Obs.: Observe que para $\beta_1, \beta_6, \beta_9, \beta_{10}$ temos que $\varphi(n,\beta) \leq n+2$ para qualquer que seja n par.

Proposição 3.2.2. *Seja n par. Se*

i) *Se $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$ e β é igual a $\beta_2, \beta_7, \beta_{13}$ ou β_{14} então $\varphi(n,\beta) \leq n+3$.*

ii) *Se $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ e β é igual a $\beta_2, \beta_5, \beta_{11}$ ou β_{13} então $\varphi(n,\beta) \leq n+3$.*

Demonstração: Usaremos as mesmas notações do Lema anterior.

Para provar tal resultado iremos usar a classe

$$W[0]_1^{n-2}W[1]_2W[1]_3c^{k-4}.$$

Temos que

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1.$$

Assim,

$$W[0]_1^{n-2} = (\theta_1 + u_1)^{n-2}.$$

Também temos

$$W[1]_2 = \theta_2 + \theta_1 u_1 + \theta_1 c + u_2 \qquad \text{e}$$

$$W[1]_3 = \theta_3 + \theta_2 u_1 + \theta_2 c + \theta_1 u_2 + u_2 c + u_3.$$

Logo $W[0]_1^{n-2}W[1]_2W[1]_3 = 0$, pois todos seus monômios têm um termo proveniente da cohomologia de F^n com dimensão no mínimo $n+1$.

Como $k > 3 \Rightarrow n+k-1 > n+2$; podemos então considerar a polinomial

$$W[0]_1^{n-2}W[1]_2W[1]_3c^{k-4} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$ e produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Disso, temos que o mesmo número característico correspondente para η também é zero; e tal número é

$$W[n-3]_1^{n-2}W[n-2]_2W[n-2]_3d^{k-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2.$$

Temos que

$$W[n-3]_1 = \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} n-4 \\ 0 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 0 \end{pmatrix} w_1.$$

Como n é par, usando o Teorema de *Lucas* temos que

$$W[n-3]_1 = d + v_1 + w_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W[n-3]_1^{n-2} &= (d+v_1+w_1)^{n-2} = \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \begin{pmatrix} n-2 \\ j \end{pmatrix} d^{n-2-j}(v_1+w_1)^j = \\
&= d^{n-2} + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} d^{n-3}(v_1+w_1) + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^{n-4}(v_1+w_1)^2 + \\
&+ \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} d^{n-5}(v_1+w_1)^3 = \\
&= d^{n-2} + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^{n-4}(v_1+w_1)^2 \quad \text{(pois } n-2 \text{ é par).}
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
W[n-2]_2 &= \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} dv_1 + \begin{pmatrix} n-4 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 + \\
&+ \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} dw_1 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 0 \end{pmatrix} v_1w_1 + \begin{pmatrix} n-2 \\ 0 \end{pmatrix} w_2 = \\
&= \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 + dv_1 + v_2 + v_1w_1 + w_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
W[n-2]_3 \;&= \binom{n-2}{3} d^3 + \binom{n-3}{2} d^2 v_1 + \binom{n-4}{1} d v_2 + \binom{n-5}{0} v_3 + \\
&+ \binom{n-2}{2} d^2 w_1 + \binom{n-3}{1} d v_1 w_1 + \binom{n-4}{0} v_2 w_1 + \\
&+ \binom{n-2}{1} d w_2 + \binom{n-3}{0} v_1 w_2 + \binom{n-2}{0} w_3 = \\
&= \binom{n-3}{2} d^2 v_1 + \binom{n-2}{2} d^2 w_1 + d v_1 w_1 + v_3 + v_2 w_1 + v_1 w_2 + w_3.
\end{aligned}$$

A partir daqui vamos analisar separadamente os casos em questão:

i) $n \equiv 0\ (mod\ 4)$. Nesse caso podemos escrever $n = 4x$, e então

$$n-2 = 4x-2 \text{ (2 aparece na partição diádica de } n-2) \Rightarrow \binom{n-2}{2} \equiv 1 \text{ e}$$

$$n-3 = 4x-3 \text{ (2 não aparece na partição diádica de } n-3) \Rightarrow \binom{n-3}{2} \equiv 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&W[n-3]_1^{n-2} W[n-2]_2 W[n-2]_3 d^{k-4} [\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^{n-2} + d^{n-4}(v_1^2 + w_1^2)\Big)\Big(d^2 + dv_1 + (v_2 + v_1 w_1 + w_2)\Big) \\
&\Big(d^2 w_1 + d v_1 w_1 + (v_3 + v_2 w_1 + v_1 w_2 + w_3)\Big) d^{k-4} [\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^{n+2} w_1 + d^n v_3\Big) d^{k-4} [\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= d^{n+k-2} w_1 + d^{n+k-4} v_3 [\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \overline{v}_2 w_1 + v_3 [F^3]_2 = \\
&= (v_1^2 + v_2) w_1 + v_3 [F^3]_2 = \\
&= v_2 w_1 + v_3 [F^3]_2 \quad (\text{pois } v_1^2 w_1 = 0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v_2w_1 = v_3.$$

Como os fibrados pertencentes às classes $\beta_2, \beta_7, \beta_{13}$ e β_{14} não satisfazem $v_2w_1 = v_3$, então para tais fibrados tem-se que $\varphi(n,\beta) \leq n+3$.

ii) $n \equiv 2$ $(mod\ 4)$. Nesse caso escrevemos $n = 4x+2$, e então

$$n-2 = 4x \text{ (2 não aparece na partição diádica de } n-2) \Rightarrow \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 0 \text{ e}$$

$$n-3 = 4x-1 \text{ (2 aparece na partição diádica de } n-3) \Rightarrow \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&W[n-3]_1^{n-2}W[n-2]_2W[n-2]_3d^{k-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= d^{n-2}\Big(dv_1 + (v_2 + v_1w_1 + w_2)\Big)\Big(d^2v_1 + dv_1w_1 + \\
&(v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + w_3)\Big)d^{k-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^{n+1}v_1^2 + d^n(v_1v_2 + v_1w_2)\Big)d^{k-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= d^{n+k-3}v_1^2 + d^{n+k-4}(v_1v_2 + v_1w_2)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \overline{v}_1v_1^2 + v_1v_2 + v_1w_2[F^3]_2 = \\
&= v_1^3 + v_1v_2 + v_1w_2[F^3]_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v_1^3 + v_1v_2 + v_1w_2 = 0.$$

Como os fibrados pertencentes às classes $\beta_2, \beta_6, \beta_{11}$ e β_{13} não satisfazem a igualdade acima, então para tais fibrados temos $\varphi(n,\beta) \leq n+3$. ∎

3.3 Sobre $\varphi(n,\beta)$ para n ímpar

As notações aqui utilizadas serão as mesmas da seção anterior.

Nessa seção iremos considerar sempre n ímpar. O que sabemos até agora é que $\varphi(n,\beta) \leq m(n-3)+6, \forall\beta, \forall n$. Para melhorar esse resultado precisaremos de alguns lemas e suas consequências. Iniciemos com o seguinte

Lema 3.3.1. *Se $m > m(n-3)+3$, então $v_1^3 = v_1 w_1^2$.*

Demonstração: Considere a classe X associada a $\mathbb{R}P(\mu)$ vista no Capítulo 2. Tal classe tem dimensão $m(n-3)$ e é tal que todos os seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior que $n-3$. Considere também a classe $W[0]_1$ associada a μ, a qual é dada por

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1.$$

Então $W[0]_1^3 X = (\theta_1+u_1)^3 X$ tem dimensão $m(n-3)+3$ e é tal que todos seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior do que n, portanto

$$W[0]_1^3 X = 0.$$

Como $m > m(n-3)+3 \Rightarrow m-1 \geq m(n-3)+3$, podemos considerar então a polinomial

$$W[0]_1^3 X c^{m-1-(m(n-3)+3)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$ e produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Avaliemos a polinomial correspondente

$$W[n-3]_1^3 Y d^{m-1-(m(n-3)+3)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}P(\eta),$$

onde Y é a classe correspondente à classe X avaliada sobre $\mathbb{R}P(\eta)$. Temos

$$W[n-3]_1 = \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} d + v_1 + w_1 = v_1 + w_1,$$

pois $n-3$ é par. Portanto

$$W[n-3]_1^3 = (v_1+w_1)^3 = v_1^3 + v_1 w_1^2,$$

pois $v_1^2 w_1 = w_1^3 = 0$.

Assim, como os termos de $W[n-3]_1^3$ provêm de $H^3(F^3)$, segue por razões dimensionais que, qualquer termo de Y contendo elementos provindos de $H^*(F^3)$ com dimensão maior que zero não contribui com a polinomial acima, uma vez que cada tal termo multiplicado por $(v_1+w_1)^3$ dá automaticamente zero. Portanto a classe Y sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ deve ser analisada módulo o ideal gerado por $H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)$ (que será denotado por $\langle H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)\rangle$). Em outras palavras, só nos interessa os termos da classe Y do tipo d^l.

Agora, a classe X sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ envolve classes do tipo $W[r]_{2r}$ para $r = 2^p - 2^i$, $i = 0,1,\ldots,p-1$ e $W[r]_{2r+1}$ para $r = 2^p - 1$, onde $n-3 = 2^p q$, q ímpar, $p \geq 1$. Para cada tal r, consideramos $W[l]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, onde $l = n+r-3$. Temos que

$$W[l] = (1+w_1+w_2+w_3)\Big((1+d)^{n+r-3} + (1+d)^{n+r-4}v_1 + (1+d)^{n+r-5}v_2 + (1+d)^{n+r-6}v_3\Big).$$

Então

$$W[l] \equiv (1+d)^{n+r-3}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)\rangle).$$

Para $r = 2^p - 2^i$, $i = 0,1,\ldots,p-1$ e $n = 2^p q + 3$, q ímpar, $p \geq 1$, temos que

$$W[l]_{2r} = W[l]_{2^{p+1}-2^{i+1}} \equiv \begin{pmatrix} n+r-3 \\ 2r \end{pmatrix} d^{2r}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)\rangle).$$

Agora,

$$\begin{pmatrix} n+r-3 \\ 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^p q + 2^p - 2^i \\ 2^{p+1} - 2^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Como q é ímpar,

$$\begin{aligned} 2^p q &= 2^p(1+2^{s_1}+\cdots+2^{s_l}) \\ &= 2^p + 2^{p+s_1} + \cdots + 2^{p+s_l}) \\ &= 2^p + (\text{ potências do tipo } 2^x,\ x > p). \end{aligned}$$

Assim, para algum $y \geq p+1$, temos que

$$\begin{aligned}
2^pq+2^p-2^i &= 2^p + (\text{ potências do tipo } 2^x,\, x>p) + 2^p - 2^i = \\
&= 2^{p+1} + (\text{ potências do tipo } 2^x,\, x>p) - 2^i = \\
&= (2^y + \text{ potências do tipo } 2^x,\, x>y) - 2^i = \\
&= 2^i + 2^{i+1} + \cdots + 2^{y-1} + (\text{ potências do tipo } 2^x,\, x>y).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2^{p+1}-2^{i+1} = 2^{i+1}+\cdots+2^p.$$

Pelo Teorema de *Lucas*

$$\begin{pmatrix} n+r-3 \\ 2r \end{pmatrix} \equiv 1 \ (mod\ 2),$$

e assim

$$W[l]_{2r} \equiv d^{2r}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)\rangle),$$

para tais valores de r.

Para $r=2^p-1$, temos que

$$W[l]_{2r+1} = W[l]_{2^{p+1}-1} \equiv \begin{pmatrix} 2^pq+2^p-1 \\ 2^{p+1}-1 \end{pmatrix} d^{2^{p+1}-1}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)\rangle).$$

Temos que, para algum $y\geq p+1$,

$$\begin{aligned}
2^pq+2^p-1 &= (2^p + \text{ potências do tipo } 2^x,\, x>p) + 2^p - 1 = \\
&= (2^y + \text{ potências do tipo } 2^x,\, x>y) - 1 = \\
&= 1+2+2^2+\cdots+2^{y-1} + (\text{ potências do tipo } 2^x,\, x>y).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2^{p+1}-1 = 1+2+2^2+\cdots+2^p.$$

O Teorema de *Lucas* garante que o coeficiente binomial acima é $\equiv 1$ $(mod\ 2)$, assim

$$W[l]_{2r+1} \equiv d^{2r+1}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)\rangle).$$

A conclusão é que, sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, vale que

$$Y \equiv d^{m(n-3)}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3) \oplus H^2(F^3) \oplus H^3(F^3)\rangle).$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} W[n-3]_1^3 Y d^{m-1-(m(n-3)+3)}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 &= (v_1+w_1)^3 d^{m-4}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\ &= (v_1^3 + v_1 w_1^2)[F^3]_2 = 0 \end{aligned}$$

encerrando a prova. ∎

Corolário 3.3.1. *Se n é ímpar e $\eta \in \{\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{14}, \beta_{15}\}$, então $m \leq m(n-3)+3$.*

Demonstração: Basta observar que para as classes $\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{14}$ ou β_{15}, temos $v_1^3 \neq v_1 w_1^2$. ∎

Lema 3.3.2. *Se $m > m(n-3)+4$ e $n \equiv 3$ (mod 4), então $v_3 = v_1 w_1^2$.*

Demonstração: Analogamente ao Lema 3.3.1, temos que a classe X associada a $\mathbb{R}P(\mu)$ tem dimensão $m(n-3)$ e é tal que todos os seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior que $n-3$. Também do Lema citado, sabemos que $W[0]_1$ associada a μ é dada por

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1.$$

Além disso, $W[1]_3$ sobre μ é dada por

$$W[1]_3 = \theta_3 + \theta_2 u_1 + \theta_2 c + \theta_1 u_2 + u_2 c + u_3.$$

Então

$$W[0]_1 W[1]_3 X = (\theta_1 + u_1)(\theta_3 + \theta_2 u_1 + \theta_2 c + \theta_1 u_2 + u_2 c + u_3)X$$

tem dimensão $m(n-3)+4$ e é tal que todos seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior do que n, portanto

$$W[0]_1 W[1]_3 X = 0.$$

Como $m > m(n-3)+4 \Rightarrow m-1 \geq m(n-3)+4$, e assim podemos considerar a polinomial

$$W[0]_1 W[1]_3 X c^{m-1-(m(n-3)+4)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$ e produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Analisemos então a polinomial correspondente

$$W[n-3]_1 W[n-2]_3 Y d^{m-1-(m(n-3)+4)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\eta).$$

Temos

$$W[n-3]_1 = v_1 + w_1,$$

vejamos então quem é $W[n-2]_3$:

$$\begin{aligned}
W[n-2]_3 &= \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} d^3 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 v_1 + \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix} d v_2 + v_3 + \\
&+ \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 w_1 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} d v_1 w_1 + v_2 w_1 + \\
&+ \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} d w_2 + v_1 w_2 + w_3 = \\
&= \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} d^3 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 v_1 + d v_2 + v_3 + \\
&+ \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 w_1 + v_2 w_1 + d w_2 + v_1 w_2 + w_3,
\end{aligned}$$

pois $n-3$ é par e $n-2$ e $n-4$ são ímpares.

Observe que, sendo $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$ podemos escrever $n = 4x+3$. Disso temos:

(i) $n-2 = 4x+1 = 1 + 2^2 x, \ x \geq 1$, portanto 2 não aparece na partição diádica de $n-2$.

Logo, pelo Teorema de *Lucas*,

$$\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

(ii) $n-3 = 4x = 2^2x,\ x \geq 1$, e também 2 não aparece na partição diádica de $n-3$. Então,

$$\binom{n-3}{2} \equiv 0.$$

Portanto,

$$W[n-2]_3 = d(v_2+w_2) + v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + w_3.$$

Assim, como os termos de $W[n-3]_1W[n-2]_3$ provêm de $H^3(F^3)$, segue por razões dimensionais que, qualquer termo de Y contendo elementos provenientes de $H^*(F^3)$ com dimensão maior que zero não contribui com a polinomial acima. Portanto, como no Lema anterior (3.3.1), a classe Y sobre $\mathbb{R}P(\eta)$ deve ser analisada módulo o ideal gerado por $H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)$. Em outras palavras, só nos interessa os termos da classe Y do tipo d^l.

Concluímos então que, sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, vale

$$Y \equiv d^{m(n-3)}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3)\oplus H^2(F^3)\oplus H^3(F^3)\rangle).$$

Com essas considerações em mente temos que

$$\begin{aligned}
&W[n-3]_1W[n-2]_3Yd^{m-1-(m(n-3)+4)}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big((v_1+w_1)(d(v_2+w_2)+v_3+v_2w_1+v_1w_2+w_3)\Big)d^{m-5}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d(v_1v_2+v_1w_2)+v_1v_3+v_1v_2w_1+v_1^2w_2+v_1w_3+d(v_2w_1+w_1w_2)+v_3w_1+v_2w_1^2+ \\
&+v_1w_1w_2+w_1w_3\Big)d^{m-5}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d(v_1v_2+v_1w_2+v_2w_1+w_1w_2)\Big)d^{m-5}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= d^{m-4}(v_1v_2+v_1w_2+v_2w_1)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (v_1v_2+v_1w_2+v_2w_1)[F^3]_2.
\end{aligned}$$

Lembrando que $v_1v_2+v_2w_1 = v_3$ (vide Seção 2.2), temos portanto,

$$v_3 = v_1w_1^2.$$

■

Corolário 3.3.2. *Se $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$, então para $\eta \in \{\beta_1, \beta_6, \beta_9, \beta_{10}\}$ temos $m \leq m(n-3)+4$.*

Demonstração: Basta observar que para as classes $\beta_1, \beta_6, \beta_9$ ou β_{10}, temos $v_3 \neq v_1 w_1^2$. ■

Lema 3.3.3. *Se $m > m(n-3)+5$ e $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$, então $v_1^3 = 0$.*

Demonstração: Como $m > m(n-3)+5 \Rightarrow m-1 \geq m(n-3)+5$, podemos considerar a polinomial

$$W[0]_1 W[0]_2^2 X c^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$.

Já sabemos que

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1.$$

Agora

$$W[0]_2 = \theta_2 + \theta_1 u_1 + u_1 c + u_2,$$

então

$$W[0]_2^2 = \theta_2^2 + \theta_1^2 u_1^2 + u_1^2 c^2 + u_2^2.$$

Assim, por justificativas análogas às dos lemas anteriores, temos que

$$W[0]_1 W[0]_2^2 X = 0.$$

Portanto, a polinomial

$$W[0]_1 W[0]_2^2 X c^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\mu)$$

produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Analisando a polinomial correspondente

$$W[n-3]_1 W[n-3]_2^2 Y d^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\eta),$$

sabemos que

$$W[n-3]_1 = v_1 + w_1$$

e

$$W[n-3]_2^2 = \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix}^2 d^4 + d^2v_1^2 + v_2^2 + v_1^2w_1^2 + w_2^2.$$

Além disso, como $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$, então

$$\begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Recordando que

$$Y \equiv d^{m(n-3)}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3) \oplus H^2(F^3) \oplus H^3(F^3)\rangle),$$

e então temos

$$\begin{aligned}
&W[n-3]_1W[n-3]_2^2Yd^{m-1-(m(n-3)+5)}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big((v_1+w_1)(d^2v_1^2+v_2^2+v_1^2w_1^2+w_2^2)\Big)d^{m-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^2v_1^3+v_1v_2^2+v_1^3w_1^2+v_1w_2^2+d^2v_1^2w_1+v_2^2w_1+v_1^2w_1^3+w_1w_2^2\Big)d^{m-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^2v_1^3+d^2v_1^2w_1\Big)d^{m-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= d^{m-4}(v_1^3+v_1^2w_1)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (v_1^3+v_1^2w_1)[F^3]_2.
\end{aligned}$$

Como $v_1^2w_1 = 0$ (pela Seção 2.2),

$$v_1^3 = 0.$$

■

Corolário 3.3.3. *Se $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$, então para β igual a β_2 ou β_8 temos $\varphi(n,\beta) \leq m(n-3)+5$.*

Demonstração: Basta observar que as classes β_2 e β_8 tem $v_1^3 \neq 0$. ■

Lema 3.3.4. *Se $m > m(n-3)+5$ e $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$, então $v_2w_1 = 0$.*

Demonstração: Iremos considerar aqui a polinomial

$$W[1]_2W[1]_3Xc^{m-1-(m(n-3)+5)} \text{ sobre } \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$.

Temos

$$W[1]_2 = \theta_2 + \theta_1u_1 + \theta_1c + u_2 \qquad e$$

$$W[1]_3 = \theta_3 + \theta_2u_1 + \theta_2c + \theta_1u_2 + u_2c + u_3.$$

Assim, pela mesma justificativa dos lemas anteriores, temos que

$$W[1]_2W[1]_3X = 0.$$

Portanto a polinomial

$$W[1]_2W[1]_3Xc^{m-1-(m(n-3)+5)} \text{ sobre } \mathbb{R}P(\mu),$$

produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Analisemos então a polinomial correspondente

$$W[n-2]_2W[n-2]_3Yd^{m-1-(m(n-3)+5)} \text{ sobre } \mathbb{R}P(\eta).$$

Observe que

$$W[n-2]_2 = \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 + dw_1 + v_2 + v_1w_1 + w_2 \qquad \text{e}$$

$$W[n-2]_3 = \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} d^3 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} d^2v_1 + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2w_1^2 + dv_2 + dw_2 + v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + w_3.$$

Escrevendo $n = 4x+3$ e usando o Teorema de *Lucas*, temos que

$$\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Portanto,

$$W[n-2]_2 = dw_1 + v_2 + v_1w_1 + w_2 \qquad \text{e}$$

$$W[n-2]_3 = d(v_2+w_2) + v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + w_3.$$

Portanto novamente

$$Y \equiv d^{m(n-3)}(\text{ módulo } \langle H^1(F^3) \oplus H^2(F^3) \oplus H^3(F^3)\rangle).$$

Juntando os fatos acima, temos

$$\begin{aligned}
&W[n-2]_2W[n-2]_3Yd^{m-1-(m(n-3)+5)}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (dw_1+v_2+v_1w_1+w_2)(d(v_2+w_2)+v_3+v_2w_1+v_1w_2+w_3)d^{m-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (d^2(w_1v_2+w_1w_2)d^{m-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \qquad (\text{ por razões dimensionais}) \\
&= d^{m-4}(w_1v_2+w_1w_2)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (w_1v_2+w_1w_2)[F^3]_2.
\end{aligned}$$

Como $w_1w_2 = 0$ (pois F^3 borda),

$$w_1v_2 = 0.$$

■

Corolário 3.3.4. *Se $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$ então para β_{13} temos $\varphi(n,\beta) \leq m(n-3)+5$.*

Demonstração: Basta observar que a classe β_{13} não satisfaz $w_1v_2 = 0$. ■

Resumindo, observe que:

1) Até agora conseguimos melhorar o limitante $m(n-3)+6$ para todas as possíveis classes de fibrados $\eta \mapsto F^3$, quando $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$. Porém, para $n \equiv 1$ $(mod\ 4)$, ainda não houveram melhorias no que se refere às classes $\beta_1, \beta_2, \beta_6, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}$ e β_{13}.

2) Até aqui foi possível considerar $Y \equiv d^{m(n-3)}($ módulo $\langle H^1(F^3) \oplus H^2(F^3) \oplus H^3(F^3)\rangle)$, pois todas as polinomiais usadas foram do tipo $AYd^{m-1-(m(n-3)+i)}$, $i = 3, 4$ ou 5, onde A possui todos seus monômios com termos pertencentes a $H^*(F^3)$, com grau ≥ 3. Porém, as próximas polinomiais utilizarão classes A onde nem todos os monômios terão termos pertencentes a $H^*(F^3)$ com grau ≥ 3. Portanto, a partir de agora a classe Y será utilizada de forma diferente.

Primeiramente, vamos considerar a partir de agora $n \equiv 1\ (mod\ 4)$, pois é o caso em que ainda não houveram melhorias.

Lembremos que $n-3 = 2^p q$, com q ímpar e $p \geq 1$. Como estamos considerando $n \equiv 1\ (mod\ 4)$, podemos escrever $n = 5+4x'$. Então

$$n-3 = 2^p q \Longrightarrow 5+4x'-3 = 2^p q \Longrightarrow 2(1+2x') = 2^p q.$$

Portanto $p = 1$ e $q = 1+2x'$.

Agora, sabemos que a classe X sobre $\mathbb{R}P(\mu)$ envolve classes do tipo $W[r]_{2r}$ para $r = 2^p - 2^i$, $i = 0,1,\ldots,p-1$ e $W[r]_{2r+1}$ para $r = 2^p - 1$. Para cada tal r, temos $W[l]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta)$, onde $l = n+r-3$. Como estamos no caso particular em que $p = 1$, temos que $r = 1$. Portanto, para formar a classe Y, vamos considerar $W[l]_{2r} = W[l]_2$ e $W[l]_{2r+1} = W[l]_3$.

Temos que

$$W[l] = (1+w_1+w_2+w_3)\Big((1+d)^{n+r-3} + (1+d)^{n+r-4}v_1 + (1+d)^{n+r-5}v_2 + (1+d)^{n+r-6}v_3\Big) =$$
$$= (1+w_1+w_2+w_3)\Big((1+d)^{n-2} + (1+d)^{n-3}v_1 + (1+d)^{n-4}v_2 + (1+d)^{n-5}v_3\Big).$$

Então,

$$W[l]_2 = \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} dv_1 + v_2 + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} dw_1 + v_1w_1 + w_2$$

e

$$\begin{aligned} W[l]_3 \;&=\; \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} d^3 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} d^2v_1 + \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix} dv_2 + v_3 \\ &+ \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2w_1 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} dv_1w_1 + w_1v_2 + \\ &+ \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} dw_2 + v_1w_2 + w_3. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de *Lucas* e o fato que $n \equiv 1$ $(mod\ 4)$ temos

$$\begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1 \ (mod\ 2)$$

e

$$\begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0 \ (mod\ 2).$$

Portanto,

$$W[l]_2 = d^2 + dw_1 + v_1w_1 + v_2 + w_2 \quad \text{e}$$

$$W[l]_3 = d^3 + d^2(v_1 + w_1) + d(v_2 + w_2) + v_1w_2 + v_2w_1 + v_3.$$

Como

$$Y = W[l]_3^q \cdot W[l]_2,$$

analisemos então $W[l]_3^q$.

Para simplificar a notação, escrevemos

$$W[l]_3 = \underbrace{d^3}_{A} + \underbrace{d^2(v_1 + w_1) + d(v_2 + w_2) + v_1w_2 + v_2w_1 + v_3}_{B}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} W[l]_3^q &= (A+B)^q = \sum_{i=0}^{3} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} A^{q-i}B^i = \\ &= A^q + A^{q-1}B + \begin{pmatrix} q \\ 2 \end{pmatrix} A^{q-2}B^2 + \begin{pmatrix} q \\ 3 \end{pmatrix} A^{q-3}B^3. \end{aligned}$$

Para analisar tal classe precisamos primeiro analisar os binômios. Sendo assim, vamos dividir em dois casos. Lembrando que q é ímpar, vamos considerar:

i) $q = 4x + 1 \Longrightarrow n = 8x + 5$ e

ii) $q = 4x + 3 \Longrightarrow n = 8x + 1$.

Dessa forma temos,

$$W[l]_3^q = \begin{cases} A^q + A^{q-1}B, & \text{se} \quad q = 4x+1 \quad (I) \\ A^q + A^{q-1}B + A^{q-2}B^2 + A^{q-3}B^3, & \text{se} \quad q = 4x+3 \quad (II) \end{cases}$$

Vejamos o caso (I):

$$\begin{aligned} (A+B)^q &= d^{3q} + d^{3(q-1)} \cdot \Big(d^2(v_1+w_1) + d(v_2+w_2) + v_1w_2 + v_2w_1 + v_3\Big) = \\ &= \underbrace{d^{3q} + d^{3q-1}(v_1+w_1) + d^{3q-2}(v_2+w_2) + d^{3q-3}(v_1w_2 + v_2w_1 + v_3)}_{H}. \end{aligned}$$

Agora o caso (II):

$$\begin{aligned} (A+B)^q &= H + A^{q-2}B^2 + A^{q-3}B^3 = \\ &= H + d^{3(q-2)}d^4(v_1^2 + w_1^2) + d^{3(q-3)}d^6(v_1+w_1)^3 = \\ &= d^{3q} + d^{3q-1}(v_1+w_1) + d^{3q-2}(v_1^2 + v_2 + w_1^2 + w_2) + \\ &+ d^{3q-3}(v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + w_1^3 + w_1^2v_1 + w_1v_1^2 + v_1^3) \\ &= d^{3q} + d^{3q-1}(v_1+w_1) + d^{3q-2}(v_1^2 + v_2) + d^{3q-3}(v_1v_2 + v_1^3). \end{aligned}$$

Lembrando que $Y = W[l]_3^q \cdot W[l]_2$, temos:

- $n = 8x+5, \quad (q = 4x+1)$

$$\begin{aligned} Y = \; & \Big(d^{3q} + d^{3q-1}(v_1+w_1) + d^{3q-2}(v_2+w_2) + d^{3q-3}(v_1w_2 + v_2w_1 + v_3)\Big) \cdot \\ & \cdot \Big(d^2 + dw_1 + v_1w_1 + v_2 + w_2\Big) = \\ = \; & d^{3q+2} + d^{3q+1}v_1 + d^{3q}w_1^2 + d^{3q-1}v_1w_2. \end{aligned}$$

Escrevendo $3q+2 = m(n-3) = t$, temos

$$Y = d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}w_1^2 + d^{t-3}v_1w_2.$$

- $n = 8x+1, \quad (q = 4x+3)$

$$\begin{aligned} Y = & \Big(d^{3q} + d^{3q-1}(v_1+w_1) + d^{3q-2}(v_1^2+v_2) + d^{3q-3}(v_1v_2+v_1^3)\Big)\cdot \\ & \cdot\Big(d^2 + dw_1 + (v_1w_1+v_2+w_2)\Big) = \\ = & \; d^{3q+2} + d^{3q+1}v_1 + d^{3q}v_1^2 + d^{3q-1}v_1^3. \end{aligned}$$

Colocando $3q+2=t$, temos

$$Y = d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}v_1^2 + d^{t-3}v_1^3.$$

Enfim, com esse "novo formato" para a classe Y em mãos, voltemos à análise de $\varphi(n,\beta)$.

Lema 3.3.5. *Seja $n \equiv 1$ (mod 4). Se $m > m(n-3)+5$, então*

- $v_3 + v_1^3 + v_1w_1^2 = 0$, *para $n = 8x+1$ e*
- $v_3 = 0$, *para $n = 8x+5$.*

Demonstração: Considerando a polinomial

$$W[1]_2W[1]_3Xc^{m-1-(m(n-3)+5)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$.

Já sabemos de cálculos anteriores que

$$W[1]_2 = \theta_2 + \theta_1u_1 + \theta_1c + u_2 \qquad e$$

$$W[1]_3 = \theta_3 + \theta_2u_1 + \theta_2c + \theta_1u_2 + u_2c + u_3.$$

Também, de considerações anteriores, temos que a classe X associada a $\mathbb{R}P(\mu)$ tem dimensão $m(n-3)$ e é tal que todos os seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior que $n-3$. Então $W[1]_2W[1]_3X$ tem dimensão $m(n-3)+5$ e é tal que todos seus termos contêm elementos provindos de $H^*(F^n)$ com dimensão maior do que n, portanto $W[1]_2W[1]_3X = 0$. Como $m > m(n-3)+5 \Rightarrow m-1 \geq m(n-3)+5$, podemos considerar a polinomial

$$W[1]_2W[1]_3Xc^{m-1-(m(n-3)+5)} \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$ e produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Analisemos a polinomial correspondente

$$W[n-2]_2 W[n-2]_3 Y d^{m-1-(m(n-3)+5)} \text{ sobre } \mathbb{R}P(\eta).$$

Observe que,

$$W[n-2]_2 = \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2 + dw_1 + v_2 + v_1w_1 + w_2 \qquad e$$

$$W[n-2]_3 = \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} d^3 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} d^2v_1 + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d^2w_1^2 + dv_2 + dw_2 + v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + w_3.$$

Escrevendo $n = 4x+1$ e usando o Teorema de *Lucas*, temos que

$$\begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-2 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 1 \ (mod\ 2).$$

Portanto,

$$W[n-2]_2 = d^2 + dw_1 + v_2 + v_1w_1 + w_2 \qquad \text{e}$$

$$W[n-2]_3 = d^3 + d^2(v_1+w_1) + d(v_2+w_2) + v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + w_3.$$

Assim,

- para $n = 8x+1$, temos $Y = d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}v_1^2 + d^{t-3}v_1^3$. Logo,

$$\begin{aligned}
&W[n-2]_2W[n-2]_3Yd^{m-1-(m(n-3)+5)}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^2 + dw_1 + v_2 + v_1w_1 + w_2\Big) \cdot \Big(d^3 + d^2(v_1+w_1) + d(v_2+w_2) + v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + \\
&+ w_3\Big) \cdot \Big(d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}v_1^2 + d^{t-3}v_1^3\Big) d^{m-t-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^5 + d^4v_1 + d^3w_1^2 + d^2v_1w_2\Big)\Big(d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}v_1^2 + d^{t-3}v_1^3\Big) d^{m-t-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (d^{m-1} + d^{m-3}w_1^2)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (\overline{v}_3 + \overline{v}_1(w_1^2))[F^3]_2 = \\
&= (v_3 + v_1^3 + v_1w_1^2)[F^3]_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v_3 + v_1^3 + v_1 w_1^2 = 0.$$

- para $n = 8x+5$, temos $Y = d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}w_1^2 + d^{t-3}v_1w_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
&W[n-2]_2 W[n-2]_3 Y d^{m-1-(m(n-3)+5)}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^2 + dw_1 + v_2 + v_1w_1 + w_2\Big) \cdot \Big(d^3 + d^2(v_1+w_1) + d(v_2+w_2) + v_3 + v_2w_1 + v_1w_2 + \\
&+ w_3\Big) \cdot \Big(d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}w_1^2 + d^{t-3}v_1w_2\Big) d^{m-t-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^5 + d^4v_1 + d^3w_1^2 + d^2v_1w_2\Big)\Big(d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}w_1^2 + d^{t-3}v_1w_2\Big) d^{m-t-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (d^{m-1} + d^{m-3}v_1^2)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= (\overline{v}_3 + \overline{v}_1(v_1^2))[F^3]_2 = \\
&= (v_3 + v_1^3 + v_1^3)[F^3]_2 \\
&= v_3[F^3]_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$v_3 = 0.$$

■

Corolário 3.3.5. *Se $n \equiv 1$ (mod 4) então para $\eta \in \{\beta_2, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}\}$ temos $m \le m(n-3)+5$.*

Demonstração: Basta observar que essas classes possuem $v_3 \neq 0$ ($n = 8x+5$) e $v_3 \neq v_1^3 + v_1w_1^2$ ($n = 8x+1$). ■

Lema 3.3.6. *Se $m > m(n-3)+5$ e $n \equiv 1$ (mod 8), então $v_3 + v_1w_1^2 = 0$.*

Demonstração: Tome a polinomial

$$W[0]_1 W[2]_4 X c^{m-1-(m(n-3)+5)} \text{ sobre } \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$.

Já sabemos de cálculos anteriores que

$$W[0]_1 = \theta_1 + u_1.$$

Vejamos quem é $W[2]_4$. Como

$$W[2] = \frac{W(\mathbb{R}P(\mu))}{(1+c)^{k-2}} = (1+\theta_1+\cdots+\theta_n)\{(1+c)^2+(1+c)u_1+u_2+\frac{u_3}{(1+c)}\cdots+\frac{u_k}{(1+c)^{k-2}}\},$$

então

$$W[2]_4 = \theta_4+\theta_3u_1+\theta_2u_2+\theta_2c^2+\theta_2cu_1+\theta_1u_3+u_3c+u_4.$$

Assim, pela mesma justificativa dos lemas anteriores, temos que

$$W[0]_1W[2]_4X = 0.$$

Portanto a polinomial

$$W[0]_1W[2]_4Xc^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\mu),$$

produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Analisando a polinomial correspondente

$$W[n-3]_1W[n-1]_4Yd^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\eta),$$

temos que

$$W[n-3]_1 = v_1 + w_1.$$

Como

$$W[n-1] = (1+w_1+w_2+w_3)\Big((1+d)^{n-1}+(1+d)^{n-2}v_1+(1+d)^{n-3}v_2+(1+d)^{n-4}v_3\Big),$$

então

$$\begin{aligned} W[n-1]_4 &= \binom{n-1}{4} d^4 + \binom{n-2}{3} d^3 v_1 + \binom{n-3}{2} d^2 v_2 + d v_3 + \\ &+ \binom{n-2}{2} d^2 v_1 w_1 + v_3 w_1 + \binom{n-1}{2} d^2 w_2 + d v_1 w_2 + \\ &+ v_2 w_2 + v_1 w_3 + \binom{n-1}{3} d^3 w_1. \end{aligned}$$

Escrevendo $n = 8x+1$ e usando o Teorema de *Lucas*, temos que

$$\binom{n-1}{3} \equiv \binom{n-1}{4} \equiv \binom{n-1}{2} \equiv 0$$

e

$$\binom{n-2}{2} \equiv \binom{n-2}{3} \equiv \binom{n-3}{2} \equiv 1.$$

Logo,

$$W[n-1]_4 = d^3 v_1 + d^2(v_2 + v_1 w_1) + d(v_3 + v_1 w_2).$$

Então, como $Y = d^t + d^{t-1} v_1 + d^{t-2} v_1^2 + d^{t-3} v_1^3$, temos

$$\begin{aligned} &W[n-3]_1 W[n-1]_4 Y d^{m-1-(m(n-3)+5)} [\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\ &= \Big(v_1 + w_1\Big) \cdot \Big(d^3 v_1 + d^2(v_2 + v_1 w_1) + d(v_3 + v_1 w_2)\Big) \cdot \\ &\cdot \Big(d^t + d^{t-1} v_1 + d^{t-2} v_1^2 + d^{t-3} v_1^3\Big) d^{m-t-6} [\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\ &= \Big(d^{m-3}(v_1^2 + v_1 w_1) + d^{m-4}(v_1 v_2 + v_1 w_1^2 + v_2 w_1 + v_1^3)\Big) [\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\ &= \Big(\overline{v}_1 (v_1^2 + v_1 w_1) + (v_1 v_2 + v_1 w_1^2 + v_2 w_1 + v_1^3)\Big) [F^3]_2 = \\ &= (v_1 v_2 + v_2 w_1 + v_1 w_1^2)[F^3]_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$v_3 + v_1 w_1^2 = 0,$$

pois $v_1 v_2 + v_2 w_1 = v_3$. ■

Corolário 3.3.6. *Se $n \equiv 1 \ (mod\ 8)$ então para $\eta \in \{\beta_1, \beta_6\}$ temos $m \leq m(n-3)+5$.*

Demonstração: Basta observar que essas classes possuem $v_3 \neq v_1 w_1^2$. ∎

Lema 3.3.7. *Se $m > m(n-3)+5$ e $n \equiv 5$ $(mod\ 8)$, então $v_1 w_1^2 = 0$.*

Demonstração: Consideremos a polinomial

$$Sq^1(W[1]_4)Xc^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\mu),$$

que tem dimensão $m-1$; nas computações a seguir, usaremos as fórmulas de Wu e Cartan.

Como

$$W[1]_4 = \theta_4 + \theta_3 u_1 + \theta_3 c + \theta_2 u_2 + \theta_1 u_3 + \theta_1 c u_2 + u_2 c^2 + u_4,$$

então aplicando a operação quadrado de Stenrood Sq^1 temos que $Sq^1(W[1]_4)X = 0$. Portanto a polinomial

$$Sq^1(W[1]_4)Xc^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\mu),$$

produz número característico nulo quando avaliada sobre $[\mathbb{R}P(\mu)]_2$.

Analisemos a polinomial correspondente,

$$Sq^1(W[n-2]_4)Yd^{m-1-(m(n-3)+5)} \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}P(\eta).$$

Como $n \equiv 1$ $(mod\ 4)$ temos que,

$$W[n-2]_4 = \begin{pmatrix} n-2 \\ 4 \end{pmatrix} d^4 + d^3 w_1 + d^2(v_1 w_1 + w_2) + d v_2 w_1.$$

Além disso, como $n = 8x+5$, usando o Teorema de *Lucas* temos que $\begin{pmatrix} n-2 \\ 4 \end{pmatrix} \equiv 0$.

Logo,

$$W[n-2]_4 = d^3 w_1 + d^2(v_1 w_1 + w_2) + d v_2 w_1.$$

Portanto,

$$Sq^1(W[n-2]_4) = Sq^1(d^3 w_1 + d^2(v_1 w_1 + w_2) + d v_2 w_1) =$$

$$= d^4 w_1 + d^3 w_1^2 + d^2(v_1 w_1^2 + v_2 w_1).$$

Como $Y = d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}w_1^2 + d^{t-3}v_1w_2$, temos então

$$
\begin{aligned}
&Sq^1(W[n-2]_4)Yd^{m-1-(m(n-3)+5)}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^4w_1 + d^3w_1^2 + d^2(v_1w_1^2 + v_2w_1)\Big)\cdot\Big(d^t + d^{t-1}v_1 + d^{t-2}w_1^2 + d^{t-3}v_1w_2\Big)\cdot d^{m-t-6}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(d^{m-2}w_1 + d^{m-3}(v_1w_1 + w_1^2) + d^{m-4}(v_2w_1 + w_1^3)\Big)[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = \\
&= \Big(\overline{v}_2w_1 + \overline{v}_1(v_1w_1 + w_1^2) + (v_2w_1 + w_1^3)\Big)[F^3]_2 = \\
&= v_1w_1^2[F^3]_2.
\end{aligned}
$$

Portanto, $$v_1w_1^2 = 0.$$ ∎

Corolário 3.3.7. *Se $n \equiv 5 \ (mod\ 8)$ então para $\eta \in \{\beta_1, \beta_6\}$ temos $m \leq m(n-3)+5$.*

Demonstração: Basta observar que essas classes possuem $v_1w_1^2 \neq 0$. ∎

Capítulo 4

Exemplos

4.1 Técnicas para construir exemplos

Nesse capítulo descreveremos algumas técnicas para construir involuções, com o objetivo de obter exemplos maximais ou quase maximais para os limitantes obtidos no capítulo anterior. A primeira técnica a ser descrita será baseada no seguinte lema provado por *P. Pergher* e *F. Figueira* em [22] (recordemos que, em [18], *P. Pergher* e *R. Stong* construíram uma variedade $V^{m(n)}$ com involução T_n cujo conjunto de pontos fixos é da forma $F^n \cup \{ponto\}$):

Lema 4.1.1. *Escreva $n = 2^p q$, onde $p \geq 1$, q é ímpar e $p \leq q$. Então para cada $0 \leq r \leq m(n)$, existe uma involução $S : V^{m(n)} \mapsto V^{m(n)}$ comutando com T_n (assim o ponto fixo isolado P de T_n também é fixado por S) tal que a dimensão do subespaço vetorial do espaço tangente de $V^{m(n)}$ em P no qual a representação de S atua como -1 é $m(n) - r$ (em outras palavras, a dimensão da componente do conjunto de pontos fixos de S contendo P é r; dizemos nesse caso que a representação de S no espaço tangente a $V^{m(n)}$ em P tem a forma $\mathbb{R}^r_+ \oplus \mathbb{R}^{m(n)-r}_-$).*

Baseado nesse Lema, ainda em [22], temos o Teorema 3.3 (pg. 601), no qual foi feita a seguinte construção: considere a variedade fechada de dimensão $m(n-2)+2$, dada pelo espaço de órbitas

$$\frac{V^{m(n-2)} \times S^2}{\Theta},$$

onde Θ é a involução $\Theta(x, y) = (S(x), -y)$. Sobre essa variedade tome a involução

$$B([x, y]) = [T_{n-2}(x), y],$$

cujo conjunto de pontos fixos é

$$\frac{F^{n-2} \cup \{pto\} \times S^2}{\Theta} = \frac{F^{n-2} \times S^2}{\Theta} \cup \mathbb{R}P^2,$$

que tem a forma $F^n \cup F^2$. O fibrado normal de $\mathbb{R}P^2$ em

$$\frac{V^{m(n-2)} \times S^2}{\Theta}$$

é $(m(n-2) - r)\xi_2 \oplus r\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2$, onde $(m(n-2) - r)\xi_2 \mapsto \mathbb{R}P^2$ é a soma de *Whitney* de $m(n-2) - r$ cópias do fibrado linha canônico $\xi_2 \mapsto \mathbb{R}P^2$.

A mesma construção pode ser levada a cabo, se substituirmos a involução livre $(S^2, \text{antípoda})$ por uma involução livre arbitrária (B^j, L), $0 < j < n$, onde B^j é uma variedade fechada j-dimensional.

No caso,

$$\frac{V^{m(n-2)} \times S^2}{\Theta}$$

será substituída por

$$\frac{V^{m(n-j)} \times B^j}{\Theta},$$

onde Θ é a involução (S, L).

Da mesma forma, sobre tal variedade temos a involução $B([x, y]) = [T_{n-j}(x), y]$, cujo conjunto de pontos fixos, nesse caso, será

$$\frac{F^{n-j} \cup \{pto\} \times B^j}{\Theta} = \frac{F^{n-j} \times B^j}{\Theta} \cup \frac{B^j}{L},$$

o qual tem a forma $F^n \cup F^j$.

Semelhantemente, o fibrado normal sobre a componente $\dfrac{B^j}{L}$ é $(m(n-j)-r)\lambda \oplus r\mathbb{R} \mapsto \dfrac{B^j}{L}$, onde λ é o fibrado linha associado à involução livre L (vide Capítulo 1, Seção 1.6).

Por facilidade de notação, nos referiremos a tal técnica, quando usada, por **Técnica 1**.

A seguir descreveremos uma nova técnica, a qual será referida por **Técnica 2**; para obtenção da mesma, o ponto crucial será a Seção 33, pg.114 de [15].

Considere η e μ fibrados vetoriais sobre uma variedade n-dimensional V, onde $\dim(\eta) = k$ e $\dim(\mu)=r$. Para simplificar a notação, denotaremos os espaços totais dos fibrados envolvidos pelos mesmos símbolos usados para denotar os fibrados. Considere a soma de *Whitney* $\eta \oplus \mu \mapsto V$. Temos que $\eta\oplus\mu$, η e μ são variedades com dimensões $n+k+r$, $n+k$ e $n+r$, respectivamente. Através das inclusões $v \mapsto (v,0)$ e $w \mapsto (0,w)$, podemos considerar η e μ como subvariedades de $\eta \oplus \mu$.

Seja $p : \eta \oplus \mu \longrightarrow V$ a projeção; as restrições de p à η e μ servem como projeções de tais fibrados, portanto usaremos a mesma letra p para denotar todas tais projeções.

Da Teoria de Fibrados temos o seguinte fato: o fibrado normal de η em $\eta \oplus \mu$ é o espaço total do *pullback* $p^*(\mu) \mapsto \eta$. Isso se estende naturalmente se considerarmos os correspondentes fibrados em esferas $S(\eta)$ e $S(\eta \oplus \mu)$, que tem dimensões $n+k-1$ e $n+k+r-1$. Lembremos que $(v,w) \in S(\eta \oplus \mu)$ quando $\|v^2\| + \|w\|^2 = 1$, e $S(\eta)$ é naturalmente uma subvariedade de $S(\eta \oplus \mu)$ através da inclusão $v \mapsto (v,0)$. Novamente, o fibrado normal de $S(\eta)$ em $S(\eta \oplus \mu)$ é o espaço total do *pullback* $p^*(\mu) \mapsto S(\eta)$.

Seja $q : S(\eta) \longrightarrow \mathbb{R}P(\eta)$ a aplicação quociente, que é um recobrimento a duas folhas. Temos então o diagrama,

$$\begin{tikzcd} S(\eta) \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R}P(\eta) \arrow[dl, "\bar{p}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

onde $\bar{p} \circ q = p$ e $\bar{p}$ denota a projeção correspondente ao fibrado projetivo.

Denote $\bar{\mu} = \bar{p}^*\ (\mu)$. Temos que

$$p^*(\mu) = q^* \circ \bar{p}^*(\mu) = q^*(\bar{\mu}).$$

Segue que

$$p^*(\mu) = \{(v, w) \in S(\eta) \times \bar{\mu} \mid w \text{ está na fibra sobre } q(v) = [v, -v]\}.$$

Ao passarmos ao quociente,

$$\frac{S(\eta \oplus \mu)}{\text{antipodal}} \cong \mathbb{R}P(\eta \oplus \mu),$$

considerando o fibrado normal $p^*(\mu)$ de $S(\eta)$ em $S(\eta \oplus \mu)$ realizado como uma vizinhança tubular de $S(\eta)$ em $S(\eta \oplus \mu)$, e usando o mesmo argumento utilizado para determinar os fibrados tangentes dos espaços projetivos a partir dos fibrados tangentes das esferas correspondentes, vemos que:

i) $S(\eta)$ é transformado em $\mathbb{R}P(\eta) \subset \mathbb{R}P(\eta \oplus \mu)$;

ii) o fibrado normal de $\mathbb{R}P(\eta)$ em $\mathbb{R}P(\eta \oplus \mu)$ terá como espaço total $\frac{p^*(\mu)}{\sim} = \frac{q^*(\bar{\mu})}{\sim}$, onde $\sim$ identifica (v, w) com$(-v, -w)$ (vendo, como acima mencioando, $p^*(\mu)$ como uma vizinhança tubular).

Recordemos agora um fato descrito em [15] (Seção 33, pg.114). Seja X um espaço equipado com involução $T : X \longrightarrow X$ sem pontos fixos. Seja $\xi \mapsto \frac{X}{T}$ o fibrado linha associado a involução T (vide Seção 1.6, Definição 1.6.1) e $q : X \longrightarrow \frac{X}{T}$ a aplicação quociente.

Suponha $\eta \overset{p}{\longmapsto} \frac{X}{T}$ um fibrado k-dimensional arbitrário. Considere o *pullback* $q^*(\eta) \mapsto X$. Temos que

$$q^*(\eta) = \{(x, v) \in X \times \eta \mid q(x) = p(v)\}.$$

Dado $(x, v) \in q^*(\eta)$, temos que $p(v) = p(-v)$ pois v e $-v$ estão na mesma fibra de η. Também $q(x) = \{x, T(x)\} = q(T(x))$. Segue que $q(T(x)) = q(x) = p(v) = p(-v)$, e portanto o par $(T(x), -v) \in q^*(\eta)$.

Portanto

$$(x, v) \overset{S}{\longmapsto} (T(x), -v)$$

é uma involução bem definida em $q^*(\eta)$, sem pontos fixos. Então $\dfrac{q^*(\eta)}{S}$ é o espaço total de um novo fibrado k-dimensional sobre $\frac{X}{T}$ com projeção $\{(x, v), (T(x), -v)\} \longrightarrow \{x, T(x)\}$.

Fato (Lema 33.1, pg. 114, de [15]): O fibrado $\dfrac{q^*(\eta)}{S} \longmapsto \dfrac{X}{T}$ é equivalente como fibrado à $\eta \otimes \xi$.

Como consequência, colocando-se $X = S(\eta)$, $T : X \longrightarrow X$ a antipodal nas fibras, e $\eta \mapsto \frac{X}{T} = \bar{\mu} \mapsto \mathbb{R}P(\eta)$, e juntando o fato acima com a discussão prévia sobre o fibrado normal de $\mathbb{R}P(\eta)$ em $\mathbb{R}P(\eta \oplus \mu)$, concluimos que tal fibrado normal é equivalente à $\bar{\mu} \otimes \xi \longmapsto \mathbb{R}P(\eta)$, onde ξ é o fibrado linha usual sobre $\mathbb{R}P(\eta)$.

Os fatos acima nos levam à uma nova técnica para construir involuções com *fixed-data* calculável (Técnica 2): em $\mathbb{R}P(\eta \oplus \mu)$ considere a involução

$$[(v, w)] \overset{U}{\longmapsto} [(-v, w)].$$

Temos que

$$Fix\ (U) = \Big\{[(0, w)], w \in S(\mu)\Big\} \cup \Big\{[(v, 0)], v \in S(\eta)\Big\} = \mathbb{R}P(\eta) \cup \mathbb{R}P(\mu).$$

Conforme visto, os fibrados normais são

$$\xi_\eta \otimes \mu \mapsto \mathbb{R}P(\eta) \text{ e } \xi_\mu \otimes \eta \mapsto \mathbb{R}P(\mu),$$

onde, por facilidade, omitimos a notação de *pullback*.

4.2 Exemplos

4.2.1 n ímpar

Proposição 4.2.1. $\varphi(n, \beta_3) = \varphi(n, \beta_4) = m(n - 3) + 3.$

Demonstração: Usando o Lema 4.1.1, considere $0 \leq r \leq m(n-3)$. Tome uma involução

$$S : V^{m(n-3)} \mapsto V^{m(n-3)}$$

comutando com T_{n-3} tal que sua representação no espaço tangente a $V^{m(n-3)}$ no ponto fixo isolado de T_{n-3} tem a forma $\mathbb{R}^r_+ \oplus \mathbb{R}^{m(n-3)-r}_-$.

Considere a variedade fechada de dimensão $m(n-3)+3$, dada pelo espaço de órbitas

$$\frac{V^{m(n-3)} \times S^3}{\Theta},$$

onde Θ é a involução $\Theta(x,y) = (S(x), -y)$. Sobre essa variedade tome a involução

$$B([x,y]) = [T_{n-3}(x), y],$$

cujo conjunto de pontos fixos é

$$\frac{F^{n-3} \cup \{pto\} \times S^3}{\Theta} = \frac{F^{n-3} \times S^3}{\Theta} \cup \mathbb{R}P^3,$$

que tem a forma $F^n \cup F^3$. Conforme atrás visto, o fibrado normal de $\mathbb{R}P^3$ em

$$\frac{V^{m(n-3)} \times S^3}{\Theta}$$

é $(m(n-3)-r)\xi_3 \oplus \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}P^3$.

Como $n \geq 5$, então $m(n-3) \geq 5$; assim podemos considerar $r = m(n-3)-1$ e $r = m(n-3)-3$. Como

$$W((m(n-3)-r)\xi_3) = (1+\alpha)^{m(n-3)-r},$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2)$, então para

- $r = m(n-3)-1$, temos

$$W((m(n-3)-r)\xi_3) = W(\xi) = 1+\alpha = 1+v_1.$$

  Como $W(\mathbb{R}P^3) = 1$, então para tal fibrado a lista $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3)$ é $(0,1,0,0)$, que representa o fibrado β_3.

- $r = m(n-3) - 3$, então

$$W((m(n-3)-r)\xi_3) = (1+\alpha)^3 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 1 + v_1 + v_2 + v_3.$$

Portanto $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ então para tal fibrado a lista $(v_1w_1^2, v_1^3, v_2w_1, v_3)$ é $(0,1,0,1)$, que representa o fibrado β_4. Levando em conta o Corolário 3.3.1, concluimos o resultado.

■

Proposição 4.2.2. $\varphi(n, \beta_5) = m(n-3) + 3$.

Demonstração: Usaremos a Técnica 1 considerando a involução $(S^1 \times \mathbb{R}P^2, L)$ onde $L(x,y) = (-x, y)$. Então a variedade

$$\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2 = \frac{S^1 \times \mathbb{R}P^2}{L}$$

tem dimensão 3. Assim considerando $M^{m(n-3)+3} = \dfrac{V^{m(n-3)} \times (S^1 \times \mathbb{R}P^2)}{\Theta}$ com a involução $B([x,y]) = [T_{n-3}(x), y]$, temos que o conjunto de pontos fixos é da forma $F^n \cup F^3$.

Colocando-se $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2)$, $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2)$ os geradores provindos de $\mathbb{R}P^1$ e $\mathbb{R}P^2$, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2) &= (1+\alpha)^2(1+\beta)^3 \\ &= 1 + \beta + \beta^2 \\ &= 1 + w_1 + w_2. \end{aligned}$$

Note que o elemento não nulo de $H^3(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2)$ é $\alpha\beta^2$.

O fibrado normal sobre $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$ é da forma $(m(n-3) - r)\lambda \oplus r\mathbb{R}$, onde λ é o *pullback* pela primeira projeção do fibrado $\xi_1 \mapsto \mathbb{R}P^1$; se considerarmos $r = m(n-3) - 1$, temos

$$W((m(n-3)-r)\lambda) = (1+\alpha)^{m(n-3)-r} = 1 + \alpha = 1 + v_1.$$

Assim, a lista $(v_1w_1^2, v_1^3, v_2w_1, v_3)$ é nesse caso $(1,0,0,0)$, que representa a classe β_5. Novamente levando em conta o Corolário 3.3.1, concluimos o resultado. ■

Proposição 4.2.3. $\varphi(n, \beta_7) = m(n-3) + 3.$

Demonstração: Somando as listas correspondentes, notamos que $\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = \beta_7$. Portanto, se tomarmos a união disjunta dos três exemplos dados pelas Proposições 4.2.1 e 4.2.2, obteremos um exemplo com dimensão $m(n-3)+3$ realizando β_7. Juntando-se com o corolário 3.3.1, chegamos ao resultado. ■

Proposição 4.2.4. *Pelos Corolários 3.3.2, 3.3.6 e 3.3.7 temos para β_1:*

i) *se* $n \equiv 3 \ (mod\ 4) \Longrightarrow \varphi(n, \beta_1) \leq m(n-3) + 4;$

ii) *se* $n \equiv 1 \ (mod\ 4) \Longrightarrow \varphi(n, \beta_1) \leq m(n-3) + 5.$

Os limitantes acima são "quase " maximais, no sentido de que existe um exemplo de (M^m, T) fixando $\mu \mapsto F^n \cup \eta \mapsto F^3$, para $\eta \in \beta_1$, onde $m = m(n-3)+3$.

Demonstração: Usando novamente a Técnica 1, considere a variedade $B^j = S(2\xi_2 \mapsto \mathbb{R}P^2)$, com a involução L sendo a antipodal nas fibras (vide Seção 1.6 , pg. 28). Então $\dfrac{B^j}{L} = \mathbb{R}P(2\xi_2 \mapsto \mathbb{R}P^2)$ que tem dimensão 3. Assim $M^{m(n-3)+3} = \dfrac{V^{m(n-3)} \times B^j}{\Theta}$ é a variedade de dimensão $m(n-3)+3$ onde atua a involução B, da Técnica 1, que fixa $F^n \cup F^3$.

Agora tomando $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ o gerador, pelo Teorema de *Borel - Hirzebruch* temos que

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P(2\xi_2 \mapsto \mathbb{R}P^2)) &= (1+\alpha)^3((1+c)^2 + \alpha^2) \\ &= (1+\alpha+\alpha^2)(1+c^2+\alpha^2). \end{aligned}$$

Mas, da relação $c^2 = cu_1 + u_2 = c\ 0 + \alpha^2$ temos que $c^2 = \alpha^2$. Logo,

$$W(\mathbb{R}P(2\xi_2 \mapsto \mathbb{R}P^2)) = 1 + \alpha + \alpha^2.$$

Como o fibrado normal sobre $\mathbb{R}P(2\xi_2 \mapsto \mathbb{R}P^2)$ é da forma $(m(n-3)-r)\lambda \oplus r\mathbb{R}$, considerando $r = m(n-3)-1$ temos

$$W((m(n-3)-r)\lambda) = (1+c)^{m(n-3)-r} = 1 + c = 1 + v_1.$$

Temos que $c^3 = c\alpha^2$ é o elemento não nulo de $H^3(\mathbb{R}P(2\xi_2), \mathbb{Z}_2)$. Segue que a lista $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3)$ é $(1, 1, 0, 0)$, que representa a classe β_1. ■

Proposição 4.2.5. *Pelos Corolários 3.3.3 e 3.3.5, temos que* $\varphi(n, \beta_2) \leq m(n-3) + 5$ *para todo* n *ímpar. Tal limitante é "quase" ótimo, no sentido de que existe um exemplo* (M^m, T) *fixando* $\mu \mapsto F^n \cup \eta \mapsto F^3$, *para* $\eta \in \beta_2$, *onde* $m = m(n-3) + 3$.

Demonstração: Usamos a Técnica 1, colocando $B^j = S(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1)$ com a involução L sendo a antipodal nas fibras. Então $\dfrac{B^j}{L} = \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1)$ e temos

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1)) &= (1+c)^3 + (1+c)^2\alpha \\ &= 1 + (c+\alpha) + c^2 + (c^2\alpha + c^3) \\ &= 1 + w_1 + w_2 + w_3. \end{aligned}$$

Agora, como o fibrado normal sobre $\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1)$ é da forma $(m(n-3) - r)\xi \oplus r\mathbb{R}$, considerado $r = m(n-3) - 3$ temos

$$W((m(n-3) - r)\lambda) = (1+c)^3 = 1 + c + c^2 + c^3 = 1 + v_1 + v_2 + v_3.$$

Fazendo computações na cohomologia $H^*(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2)$, concluimos que a lista $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3)$ é $(1, 1, 0, 1)$, que representa a classe β_2. ■

Proposição 4.2.6. $\varphi(n, \beta_8) = m(n-3) + 5$, *para* $n - 3 \neq 2^p$, *onde* $p \geq 2$.

Demonstração: Seja $n - 3 = 2^p q$, onde q é ímpar e $p \leq q$. Fazendo uma pequena variante para o Lema 4.1.1, seja $0 \leq r \leq m(n-3)$; tome uma involução $S : M^{m(n-3)} \to M^{m(n-3)}$ comutando com T_{n-3} tal que sua representação no espaço tangente à $M^{m(n-3)}$ no ponto fixo isolado de T_{n-3} tem a forma $\mathbb{R}^r_+ \oplus \mathbb{R}^{m(n-3)-r}_-$. Considere

$$\frac{M^{m(n-3)} \times S^1}{\Theta},$$

onde Θ é a involução $\Theta(x, y) = (S(x), -y)$. Semelhantemente ao Lema 4.1.1, sobre essa variedade tome a involução

$$B([x, y]) = [T_{n-3}(x), y],$$

cujo conjunto de pontos fixos é

$$\frac{F^{n-3} \cup \{pto\} \times S^1}{\Theta} = \frac{F^{n-3} \times S^1}{\Theta} \cup \mathbb{R}P^1$$

que tem a forma $F^{n-2} \cup F^1$. O fibrado normal de $\mathbb{R}P^1$ em

$$\frac{M^{m(n-3)} \times S^1}{\Theta}$$

é $(m(n-3)-r)\xi_1 \oplus r\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1$. Como $n \geq 5$ e $m(n-3) \geq 5$, então podemos considerar $r = m(n-3)-1$. Assim

$$W(\xi_1 \oplus r\mathbb{R}) = 1 + \alpha, \quad \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)\text{o gerador.}$$

Considere agora a variedade

$$\frac{M^{m(n-3)} \times S^1}{\Theta} \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$$

com involução

$$J([x, y, z]) = [B(x), z, y].$$

Então o conjunto de pontos fixos é

$$\left(\frac{F^{n-3} \times S^1}{\Theta} \cup \mathbb{R}P^1\right) \times \mathbb{R}P^2 = \left(\frac{F^{n-3} \times S^1}{\Theta} \times \mathbb{R}P^2\right) \cup (\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2)$$

que é da forma $F^n \cup F^3$ com F^3 não bordante. O fibrado normal de $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$ em $\frac{M^{m(n-3)} \times S^1}{\Theta} \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ é dado por $((m(n-3)-r)\xi_1 \oplus r\mathbb{R}) \oplus \tau^2 \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$, onde $\tau^2 \mapsto \mathbb{R}P^2$ é o fibrado tangente sobre $\mathbb{R}P^2$. Temos

$$W(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2) = (1+\beta)^3 = 1 + \beta + \beta^2 = 1 + w_1 + w_2,$$

onde $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador unidimensional. Também, como estamos considerando $r = m(n-3)-1$, então

$$\begin{aligned} W(((m(n-3)-r)\xi_1 \oplus r\mathbb{R}) \oplus \tau^2) &= (1+\alpha)(1+\beta)^3 \\ &= 1 + (\alpha+\beta) + (\alpha\beta+\beta^2) + \alpha\beta^2 \\ &= 1 + v_1 + v_2 + v_3 \end{aligned}$$

Fazendo computações na cohomologia $H^*(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$, concluimos que a lista $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3)$ é $(1,1,1,1)$, que representa a classe β_8.

Agora observe que, se $n \equiv 1$ $(mod\ 4)$ então temos $n - 3 = 2^p q$, com q ímpar e $p \leq q$. No entanto, para $n \equiv 3$ $(mod\ 4)$ isso só é válido quando $n - 3 \neq 2^p$, com $p \geq 2$. Juntando com os Corolários 3.3.3 e 3.3.5 concluimos o resultado. ∎

4.2.2 n par

Nessa seção consideramos n par.

Proposição 4.2.7. *$\varphi(n, \beta_1) = n + 2$.*

Demonstração: Usando a Técnica 2, sejam $V = \mathbb{R}P^2$, $\mu = \xi_2 \oplus (n-2)\mathbb{R}$ e $\eta = 2\mathbb{R}$. Então temos a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P(\xi_2 \oplus (n-2)\mathbb{R} \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2)$ com involução $T([v,w]) = [-v, w]$. Como vimos na descrição da Técnica 2, o *fixed-data* da involução (M^{n+2}, T) é dado por

$$\Big(2\mathbb{R} \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P(\xi_2 \oplus (n-2)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((\xi_2 \oplus (n-2)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(2\mathbb{R})\Big).$$

Note que a variedade F^3 é $\mathbb{R}P(2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2) = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$, que tem como classe característica

$$W(\mathbb{R}P(2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2)) = 1 + \alpha + \alpha^2 = 1 + w_1 + w_2,$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^2)$ é o gerador. Agora, a classe do fibrado normal sobre F^3 é (aqui, usamos a fórmula para computar $W(\eta \otimes \lambda)$, que pode ser vista, por exemplo, em [16]):

$$\begin{aligned}
W((\xi_2 \oplus (n-2)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= (1+c)^{n-1} + (1+c)^{n-2}\alpha \\
&= 1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} c^2 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} c^3 + \\
&+\alpha + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} c\alpha + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} c^2\alpha \\
&= 1 + (c+\alpha) \\
&= 1 + v_1,
\end{aligned}$$

pois $c^2 = 0$ (pela relação obtida do Teorema de *Borel- Hirzebruch*) e pelo fato de n ser par temos

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Com isso temos $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3) = (1,1,0,0)$, que representa a classe β_1. Juntando isso com a Proposição 3.2.1, obtemos o resultado. ■

Proposição 4.2.8. *Pela Proposição 3.2.2, temos $\varphi(n, \beta_2) \leq n+3$. Tal estimativa é quase ótima, no sentido de que existe um exemplo de involução (M^m, T) cujo fixed-data é $\mu \mapsto F^n \cup \eta \mapsto F^3$, para $\eta \in \beta_2$, onde $m = n+2$.*

Demonstração: Usando a Técnica 2, coloque $V = \mathbb{R}P^2$, $\mu = 3\xi_2 \oplus (n-4)\mathbb{R}$ e $\eta = 2\mathbb{R}$. Então a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P\big((3\xi_2 \oplus (n-4)\mathbb{R}) \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2\big)$ com involução $T([v,w]) = [-v,w]$, tem como *fixed-data*

$$\Big(2\mathbb{R} \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P(3\xi_2 \oplus (n-4)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((3\xi_2 \oplus (n-4)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(2\mathbb{R})\Big).$$

A base $F^3 = \mathbb{R}P(2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2) = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$ do fibrado $(3\xi_2 \oplus (n-4)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(2\mathbb{R})$, tem como classe característica

$$\begin{aligned}
W\big(\mathbb{R}P(2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2)\big) &= 1 + \alpha + \alpha^2 \\
&= 1 + w_1 + w_2,
\end{aligned}$$

como no exemplo anterior.

Nesse caso, a classe característica do fibrado normal sobre F^3 é

$$\begin{aligned} W((3\xi_2 \oplus (n-4)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= (1+c)^{n-1} + (1+c)^{n-2}\alpha + (1+c)^{n-3}\alpha^2 \\ &= 1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} c + \alpha + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} c\alpha + \alpha^2 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} c\alpha^2 \\ &= 1 + (c+\alpha) + \alpha^2 + c\alpha^2 \\ &= 1 + v_1 + v_2 + v_3, \end{aligned}$$

pois novamente temos $c^2 = 0$, e por ser n par temos

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Portanto a lista $(v_1w_1^2, v_1^3, v_2w_1, v_3)$ é $(1,1,0,1)$, que representa a classe β_2. ■

Proposição 4.2.9. *Para $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$ temos $\varphi(n, \beta_4) = n+2$; e se $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ então $\varphi(n, \beta_3) = n+2$.*

Demonstração: Usando a Técnica 2, coloque agora $V = \mathbb{R}P^2$, $\mu = (n-1)\mathbb{R}$ e $\eta = \xi_2 \oplus \mathbb{R}$. Então a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P((n-1)\mathbb{R} \oplus (\xi_2 \oplus \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}P^2)$ com involução $T([v,w]) = [-v,w]$, tem como *fixed-data*

$$\Big((\xi_2 \oplus \mathbb{R}) \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P((n-1)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((n-1)\mathbb{R} \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(\xi_2 \oplus \mathbb{R})\Big).$$

A componente tridimensional $F^3 = \mathbb{R}P(\xi_2 \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2)$ tem como classe característica

$$\begin{aligned} W\big(\mathbb{R}P(\xi_2 \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2)\big) &= (1+\alpha)^3\Big((1+c)^2 + (1+c)\alpha\Big) \\ &= (1+\alpha+\alpha^2)(1+c^2+\alpha+c\alpha) \\ &= 1, \end{aligned}$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^2)$ é o gerador. Aqui, usamos o fato que $c^2 = c\alpha$, dado pelo Teorema de *Borel - Hirzebruch.*

Agora, a classe do fibrado normal sobre F^3 é

$$\begin{aligned} W\big((n-1)\mathbb{R}\otimes\lambda'\big) &= (1+c)^{n-1} \\ &= 1+\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} c+\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} c^2+\begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} c^3. \end{aligned}$$

Analisemos separadamente os casos:

- $n \equiv 0$ $(mod\ 4)$.

  Nesse caso, usando o Teorema de *Lucas*, temos

  $$\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv 1.$$

  Logo,

  $$\begin{aligned} W\big((n-1)\mathbb{R}\otimes\lambda'\big) &= 1+c+c^2+c^3 \\ &= 1+v_1+v_2+v_3. \end{aligned}$$

  Portanto temos $(v_1w_1^2, v_1^3, v_2w_1, v_3) = (0,1,0,1)$, que representa a classe β_4.

- $n \equiv 2$ $(mod\ 4)$.

  Aqui,

  $$\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1 \quad e \quad \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

  Logo,

  $$W\big((n-1)\mathbb{R}\otimes\lambda'\big) = 1+c = 1+v_1.$$

  Portanto $(v_1w_1^2, v_1^3, v_2w_1, v_3) = (0,1,0,0)$ representa a classe β_3. Juntando com a Proposição 3.2.1, obtemos o resultado.

■

Proposição 4.2.10. *Para $n \equiv 0$ $(mod\ 4)$ temos que $\varphi(n,\beta_3) \leq n+4$ (que é o limitante geral). Tal estimativa é quase ótima, no sentido de que existe um exemplo de (M^m,T) onde $\eta \mapsto F^3$ é tal que $\eta \in \beta_3$ e $m = n+2$.*

Demonstração: Sejam $p_1 : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ e $p_2 : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ as projeções, e coloque $\zeta_1 = p_1^*(\xi_1) \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, $\zeta_2 = p_2^*(\xi_1) \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$. Usando a Técnica 2, sejam $V = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, $\mu = \zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}$ e $\eta = \zeta_1 \oplus \zeta_2$. Então a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P\big((\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \oplus (\zeta_1 \oplus \zeta_2) \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1\big)$ com involução $T([v,w]) = [-v,w]$, tem como *fixed-data*

$$\Big((\zeta_1 \oplus \zeta_2) \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P(\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(\zeta_1 \oplus \zeta_2)\Big).$$

Denote por $a \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ o gerador, e coloque $\alpha = p_1^*(a)$ e $\beta = p_2^*(a)$. Então a classe característica da base $F^3 = \mathbb{R}P(\zeta_1 \oplus \zeta_2 \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1)$ é

$$\begin{aligned} W\big(\zeta_1 \oplus \zeta_2 \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1\big) &= 1 + (\alpha + \beta) \\ &= 1 + w_1. \end{aligned}$$

Agora, a classe característica do fibrado normal sobre F^3 é

$$\begin{aligned} W((\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= (1+c)^{n-1} + (1+c)^{n-2}(\alpha+\beta) + (1+c)^{n-3}\alpha\beta \\ &= 1 + \binom{n-1}{1} c + \binom{n-1}{2} c^2 + \binom{n-1}{3} c^3 + \\ &+ (\alpha+\beta) + \binom{n-2}{1} c(\alpha+\beta) + \binom{n-2}{2} c^2(\alpha+\beta) + \\ &+ \alpha\beta + \binom{n-3}{1} c\alpha\beta \\ &= 1 + (c+\alpha+\beta) + \binom{n-1}{2} c^2 + \alpha\beta + \\ &+ \binom{n-1}{3} c^3 + \binom{n-2}{2} c^2(\alpha+\beta) + c\alpha\beta. \end{aligned}$$

Como $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$, temos

$$\binom{n-1}{2} \equiv \binom{n-1}{3} \equiv \binom{n-2}{2} \equiv 1.$$

Então

$$\begin{aligned} W((\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= 1 + \big(c + \alpha + \beta\big) + \big(c^2 + \alpha\beta\big) + \big(c^3 + c^2(\alpha+\beta) + c\alpha\beta\big) \\ &= 1 + v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Portanto $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3) = (0,1,0,0)$, que representa a classe β_3. ■

Proposição 4.2.11. *Para $n \equiv 2$ (mod 4) temos que $\varphi(n, \beta_4) \leq n+4$ (que é o limitante geral). Essa estimativa é quase ótima, no sentido de que existe um exemplo de (M^m, T) onde $\eta \mapsto F^3$ é tal que $\eta \in \beta_4$ e $m = n+2$.*

Demonstração: Usando a Técnica 2, coloque $V = \mathbb{R}P^2$, $\mu = 2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}$ e $\eta = \xi_2 \oplus \mathbb{R}$. Então a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P\big((2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \oplus (\xi_2 \oplus \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}P^2\big)$ com involução $T([v,w]) = [-v, w]$, tem como *fixed-data*

$$\Big((\xi_2 \oplus \mathbb{R}) \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P(2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(\xi_2 \oplus \mathbb{R})\Big).$$

A base $F^3 = \mathbb{R}P(\xi_2 \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2)$ do fibrado $(2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(\xi_2 \oplus \mathbb{R})$ tem como classe característica

$$\begin{aligned} W\big(\mathbb{R}P(\xi_2 \oplus \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2)\big) &= (1+\alpha)^3\big((1+c)^2 + (1+c)\alpha\big) \\ &= (1 + \alpha + \alpha^2)(1 + c^2 + \alpha + c\alpha) \\ &= 1 \end{aligned}$$

pois $c^2 = c\alpha$.

A classe do fibrado normal sobre F^3 é

$$\begin{aligned} W((2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= (1+c)^{n-1} + (1+c)^{n-3}\alpha^2 \\ &= 1 + \binom{n-1}{1} c + \binom{n-1}{2} c^2 + \binom{n-1}{3} c^3 + \\ &\quad + \alpha^2 + \binom{n-3}{1} c\alpha^2 \\ &= 1 + c + \binom{n-1}{2} c^2 + \alpha^2 + c\alpha^2 + \binom{n-1}{3} c^3 \end{aligned}$$

Como $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$, temos

$$\binom{n-1}{2} \equiv \binom{n-1}{3} \equiv 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} W((2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= 1 + c + \alpha^2 + c\alpha^2 \\ &= 1 + v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Portanto $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3) = (0, 1, 0, 1)$, que representa a classe β_4. ■

Proposição 4.2.12. *Pelas Proposições 3.2.1 e 3.2.2 temos que* $\varphi(n, \beta_5) \leq n + 2$ *se* $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$, *e* $\varphi(n, \beta_5) \leq n + 3$ *se* $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$. *No caso* $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$ *esse limitante é maximal, e no caso* $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ *é quase maximal, no sentido de que existe um exemplo de involução* (M^m, T) *cujo fixed-data é* $\mu \mapsto F^n \cup \eta \mapsto F^3$ *onde* $\eta \in \beta_5$ *e* $m = n + 2$.

Demonstração: Mais uma vez, usando a Técnica 2, tomando $V = \mathbb{R}P^2$, $\mu = (n-1)\mathbb{R}$ e $\eta = 2\mathbb{R}$, então a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P\Big((n-1)\mathbb{R} \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2\Big)$ com involução $T([v, w]) = [-v, w]$, tem como *fixed-data*

$$\Big(2\mathbb{R} \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P((n-1)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((n-1)\mathbb{R} \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(2\mathbb{R})\Big).$$

A base $F^3 = \mathbb{R}P(2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2) = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$ do fibrado $(n-1)\mathbb{R} \otimes \lambda'$ tem como classe característica

$$\begin{aligned} W\big(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2\big) &= (1 + \alpha)^3 (1 + c)^2 \\ &= 1 + \alpha + \alpha^2 \\ &= 1 + w_1 + w_2, \end{aligned}$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador.

A classe do fibrado normal sobre F^3 é

$$\begin{aligned} W((n-1)\mathbb{R}\otimes\lambda') &= (1+c)^{n-1} \\ &= 1+\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} c \\ &= 1+c \\ &= 1+v_1, \end{aligned}$$

pois n é par.

Assim a lista $(v_1w_1^2, v_1^3, v_2w_1, v_3)$ é igual à $(1,0,0,0)$, que representa a classe β_5. ■

Proposição 4.2.13. *Pelas Proposições 3.2.1 e 3.2.2 temos que $\varphi(n,\beta_7) \leq n+3$ se $n \equiv 0 \pmod 4$ e $\varphi(n,\beta_7) \leq n+2$ se $n \equiv 2 \pmod 4$. No caso $n \equiv 2 \pmod 4$ esse limitante é maximal, e no caso $n \equiv 0 \pmod 4$ é quase maximal, no sentido de que existe um exemplo de involução (M^m, T) cujo fixed-data é $\mu \mapsto F^n \cup \eta \mapsto F^3$ onde $\eta \in \beta_7$ e $m = n+2$.*

Demonstração: Tome $V = \mathbb{R}P^2$, $\mu = 2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}$ e $\eta = 2\mathbb{R}$. Então a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P\Big((2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2\Big)$ com involução $T([v,w]) = [-v,w]$ tem como *fixed-data*

$$\Big(2\mathbb{R}\otimes\lambda \mapsto \mathbb{R}P(2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R})\otimes\lambda' \mapsto \mathbb{R}P(2\mathbb{R})\Big).$$

A base $F^3 = \mathbb{R}P(2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^2) = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2$ do fibrado $(2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda'$ tem como classe característica

$$\begin{aligned} W(F^3) &= 1+\alpha+\alpha^2 \\ &= 1+w_1+w_2, \end{aligned}$$

como nos exemplos anteriores.

A classe do fibrado normal sobre F^3 é

$$\begin{aligned} W((2\xi_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= (1+c)^{n-1} + (1+c)^{n-3}\alpha^2 \\ &= 1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} c + \alpha^2 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} c\alpha^2 \\ &= 1 + c + \alpha^2 + c\alpha^2 \\ &= 1 + v_1 + v_2 + v_3, \end{aligned}$$

pois n é par.

Logo, a lista $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3)$ é igual a $(1, 0, 0, 1)$, que representa a classe β_7. ■

Proposição 4.2.14. $\varphi(n, \beta_8) = n + 4$.

Demonstração: Sabemos que $\varphi(n, \beta_8) \leq n + 4$ é o nosso limitante geral. Tome agora o exemplo descrito nas páginas 49 e 50 para mostrar que $m(n, \{3\}) = m(n-3) + 6$. Observando a computação da classe característica do fibrado normal sobre a componente F^3 desse exemplo, concluimos que tal fibrado nesse caso realiza a lista $(1, 1, 1, 1)$, que representa β_8. ■

Proposição 4.2.15. $\varphi(n, \beta_9) = n + 2$.

Demonstração: Sejam $p_1 : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ e $p_2 : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ as projeções, e coloque $\zeta_1 = p_1^*(\xi_1) \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, $\zeta_2 = p_2^*(\xi_1) \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$. Novamente usando a Técnica 2, tome $V = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, $\mu = \zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}$ e $\eta = 2\mathbb{R}$. Então temos a variedade $M^{n+2} = \mathbb{R}P\Big((\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1\Big)$ com involução $T([v, w]) = [-v, w]$, e o *fixed-data* da involução (M^{n+2}, T) é

$$\Big(2\mathbb{R} \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P(\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(2\mathbb{R})\Big).$$

Note que $F^3 = \mathbb{R}P(2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1) = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, então

$$W(F^3) = 1.$$

Agora, se denotarmos por $a \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ o gerador, e colocarmos $\alpha = p_1^*(a)$ e $\beta = p_2^*(a)$, a classe do fibrado normal sobre F^3 é

$$
\begin{aligned}
&W((\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus (n-3)\mathbb{R}) \otimes \lambda') = \\
&= (1+c)^{n-1} + (1+c)^{n-2}(\alpha+\beta) + (1+c)^{n-3}\alpha\beta \\
&= 1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} c + (\alpha+\beta) + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} c(\alpha+\beta) + \alpha\beta + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} c\alpha\beta \\
&= 1 + (c+\alpha+\beta) + \alpha\beta + c\alpha\beta \\
&= 1 + v_1 + v_2 + v_3,
\end{aligned}
$$

pois n é par e $c^2 = 0$.

Portanto temos $(v_1w_1^2, v_1^3, v_2w_1, v_3) = (0,0,0,1)$, que representa a classe β_9. Juntando com a Proposição 3.2.1, concluimos o resultado. ■

Proposição 4.2.16. *Pelo resultado do limitante geral temos:*

i) $\varphi(n, \beta_{12}) \leq n+4$. *No caso em que* $n \equiv 0 \pmod 4$, *esse limitante é quase ótimo, uma vez que existe um exemplo de involução* (M^m, T) *cujo fixed-data é* $\mu \mapsto F^n \cup \eta \mapsto F^3$ *onde* $\eta \in \beta_{12}$ *e* $m = n+3$.

ii) $\varphi(n, \beta_{15}) \leq n+4$. *Se* $n \equiv 2 \pmod 4$, *essa estimativa é quase ótima, no sentido de que existe um exemplo* (M^m, T) *cujo fixed-data é* $\mu \mapsto F^n \cup \eta \mapsto F^3$ *onde* $\eta \in \beta_{15}$ *e* $m = n+3$.

Demonstração: Pela Técnica 2, tomando $V = \mathbb{R}P^1$, $\mu = \xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R}$ e $\eta = \xi_1 \oplus 2\mathbb{R}$, temos a variedade $M^{n+3} = \mathbb{R}P\Big((\xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R}) \oplus (\xi_1 \oplus 2\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}P^1\Big)$. Sobre essa variedade temos a involução $T([v,w]) = [-v,w]$ com *fixed-data*

$$\Big((\xi_1 \oplus 2\mathbb{R}) \otimes \lambda \mapsto \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R})\Big) \cup \Big((\xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R}) \otimes \lambda' \mapsto \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R})\Big).$$

A base $F^3 = \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1)$ do fibrado $(\xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R}) \otimes \lambda'$, tem como classe característica

$$
\begin{aligned}
W\big(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus 2\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}P^1)\big) &= (1+c)^3 + (1+c)^2\alpha \\
&= 1 + (c+\alpha) + c^2 \\
&= 1 + w_1 + w_2,
\end{aligned}
$$

pois $c^3 = c^2\alpha$.

A classe do fibrado normal sobre F^3 é

$$\begin{aligned} W((\xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= (1+c)^n + (1+c)^{n-1}\alpha \\ &= 1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} c^2 + \alpha + c\alpha + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} c^2\alpha \end{aligned}$$

pois n é par. Assim,

i) se $n \equiv 0$ $(mod\ 4)$,

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} W((\xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= 1 + \alpha + c\alpha + c^2\alpha \\ &= 1 + v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Portanto $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3)$ é igual à $(1,0,1,1)$, que representa a classe β_{12}.

ii) se $n \equiv 2$ $(mod\ 4)$,

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 1 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} W((\xi_1 \oplus (n-1)\mathbb{R}) \otimes \lambda') &= 1 + \alpha + (c^2 + c\alpha) \\ &= 1 + v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Portanto $(v_1 w_1^2, v_1^3, v_2 w_1, v_3) = (1,0,1,0)$, que representa a classe β_{15}.

■

Referências Bibliográficas

[1] A. Borel and F. Hirzebruch, *On characteristic classes and homogeneous spaces* I, Amer. J. Math. **80**, 458-538 (1958).

[2] A. Dold, *Erzeugend der Thomshen algebra* $\mathbb{N}$, Math. Z. **65**, 25-35 (1956).

[3] C. Koniowski and R. E. Stong, *Involutions and characteristic numbers*, Topology **17**, no.4, 309-330 (1978).

[4] D.C. Royster, *Involutions fixing the disjoint unio of two projective spaces*, Indiana University Mathematics Journal **29**, no.2, 267-276 (1980).

[5] E. Lucas, *Théorie des nombres, 1878; reprint*, Librarie Blanchard, Paris, (1961).

[6] F. G. Figueira, *Involuções cujo conjunto de pontos fixos possui duas componentes*, Tese de Doutorado - DM / UFSCar (2004).

[7] H. Osborn, *Vector Bundles*, Academic Press, Inc, (1982).

[8] J. Boardman, *On manifolds with involutions*, Bull Am. Math. Soc. **73** no. 2, 136-138 (1967).

[9] J. W. Milnor and J.D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Uniersity Press, (1974).

[10] S. M. Kelton, *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$, Tese de Doutorado - Department of Mathematics / University of Virginia (2001).

[11] S. M. Kelton, *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$, Topology Appl. **142**, 197-203 (2004).

[12] S. M. Kelton, *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$*, II*, Topology Appl. **149**, 217-226 (2005).

[13] P. E. Conner, *Diffeomorphisms of period two*, Michigan Math. Journal, **10**, 341-352 (1963).

[14] P. E. Conner, *The bordism class of a bundle space*, Michigan Math. J. **14**, 289-303 (1967).

[15] P. E. Conner, *Differentiable periodic maps*,second ed., Springer-Verlag, Berlin (1979).

[16] P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable periodic maps*, Springer-Verlag, Berlin (1964).

[17] P. L. Q. Pergher, *Upper bounds of tue dimension of manifolds with certain* $\mathbb{Z}_2$ *fixed sets*, Mathemática Contemporânea, **13**, 269-275 (1997).

[18] P. L. Q. Pergher and R. E. Stong, *Involutions fixing (point)* $\cup F^n$, Transformation Groups, **6**, 79-86 (2001).

[19] P. L. Q. Pergher and Fabio G. Figueira, *Involutions fixing* $F^n \cup F^2$, Topology Appl. **153** no. 14, 2499-2507 (2006).

[20] P. L. Q. Pergher and Fabio G. Figueira, *Dimensions of fixed point sets of involutions*, Archiv der Mathematik **87**, 280-288 (2006).

[21] P. L. Q. Pergher and Fabio G. Figueira, *Two commuting involutions fixing* $F^n \cup F^{n-1}$, Geometriae Dedicata, **117**, 181-193 (2006).

[22] P. L. Q. Pergher and F. G. Figueira, *Bounds on the dimension of manifold with involution fixing* $F^n \cup F^2$, Glasgow Math, **50**, 595-604 (2008).

[23] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés differentiables*, Comm. Math. Helv. **28**, 18-88 (1954).