

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Campos Localmente Resolúveis, Espaços de Hardy e
Extensão de Funções CR**

Paulo Antonio Liboni Filho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Campos Localmente Resolúveis, Espaços de Hardy e Extensão de
Funções CR**

Paulo Antonio Liboni Filho

Tese apresentada ao PPG-M da
UFSCar como parte dos requi-
sitos para a obtenção do título
de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

São Carlos - SP
2012

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

L696cL

Liboni Filho, Paulo Antonio.

Campos localmente resolúveis, espaços de Hardy e extensão de funções CR / Paulo Antonio Liboni Filho. -- São Carlos : UFSCar, 2012.

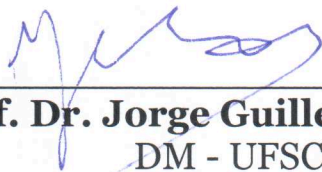
74 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Teorema de Baouendi-Treves. 3. Teoria das distribuições. 4. Hardy, Espaços de. 5. Distribuição CR. I. Título.

CDD: 515.353 (20^a)

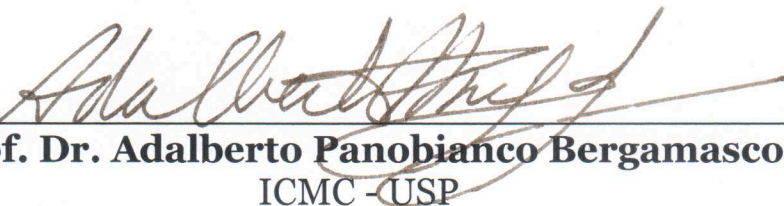
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
DM - UFSCar



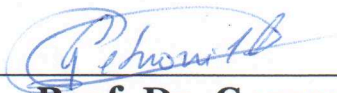
Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
IME - USP



Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco
ICMC - USP



Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
ICMC - USP



Prof. Dr. Gerson Petronilho
DM - UFSCar

*Dedico este trabalho a meus pais
Paulo (in memoriam) & Altiva Helena*

“Mathematical discoveries are never born of spontaneous generation.”

Poincaré, Jules Henri (1854-1912)

Agradecimentos

Acima de tudo agradeço a Deus. Mesmo na dor ou na dúvida Ele me abraça, me acalma e não condena.

Não posso deixar de agradecer e dedicar esta obra aos meus pais Paulo (*in memoriam*) & Altiva Helena. Se cheguei até aqui foi porque estive apoiado em ombros de gigantes.

Agradeço também à minha família, especialmente meus sobrinhos e seus pais. Quando estive aflito, cheio de saudades e ansioso, só bastava um abraço de quem amo para recomeçar.

Matemática, de algum modo, tornou-se parte da minha vida. Em reconhecimento a tudo o que aprendi agradeço ao professor Jorge que ao longo de 5 anos me guiou pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos: professores, servidores técnico-administrativos e estagiários. Estarei sempre em débito pelas conversas que tanto contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.

Impossível não agradecer à Temple University pela presteza com que me recebeu nos três meses em que estive lá. Agradeço especialmente ao professor Shif Berhanu e aos amigos que se tornaram *our family away from home*: Haline, Dayanne, Mariana, Renato, Paulo e Hayanne.

Não poderia deixar de agradecer aos amigos de república e agregados: Mendes, Thiago, Sarita, Pâmela e Gui. Foram muitas (e controversas!) as histórias que passamos juntos. Que essas sejam as primeiras de muitas.

Também guardo no meu coração uma lista imensa dos amigos destes últimos 3 anos. Como esta margem é muito estreita para contê-la, espero que cada um saiba quão importante é para mim. Amo todos vocês.

Finalmente agradeço à FAPESP pelo financiamento deste projeto.

Resumo

Suponha M uma subvariedade suave de \mathbb{C}^N e $\mathcal{L} = \cup_{z \in \mathbb{C}^n} \mathcal{L}_z$ a estrutura de Cauchy-Riemann associado ao espaço complexo N -dimensional. Para cada ponto $p \in M$ podemos considerar o espaço vetorial $\mathcal{A}_p = \mathbb{C}T_pM \cap \mathcal{L}_p$. Caso a reunião dessas fibras deem origem a uma estrutura localmente integrável diremos que M é uma subvariedade CR com estrutura $\mathcal{A} = \cup_{p \in M} \mathcal{A}_p$. Da construção feita, segue imediatamente que se h é uma aplicação holomorfa definida em uma vizinhança $U \supset M$ então $\mathcal{A}(h|_M) = 0$.

Ora, se considerarmos agora uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(M)$ tal que $\mathcal{A}u = 0$ surge uma pergunta natural: existe uma aplicação h holomorfa definida em um aberto U tal que $h|_M = u$? A pergunta, posta como está, poderá ser repetida de maneira enxuta como: a distribuição CR u tem extensão holomorfa? De forma geral a resposta é negativa e os exemplos são variados.

Considere uma aplicação $q : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^d$ quádrica e a variedade $M = \{(w, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d, \Im t = q(w, \bar{w})\}$. Ora, Boggess demonstrou em [Bog01] que toda distribuição CR em M , que também é uma função L^p com $p \geq 1$, admite uma extensão holomorfa no interior da envoltória convexa de M . Neste trabalho, investigaremos a mesma questão, mas consideraremos distribuições CR em M que estejam em h^p com $p > 0$. Como $h^p(M) = L^p(M)$ se $p > 1$ podemos entender que nosso texto é uma extensão do resultado apresentado por Boggess. O ingrediente fundamental para essa generalização é uma versão do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves.

Abstract

Suppose that M is a smooth submanifold of \mathbb{C}^N and that $\mathcal{L} = \cup_{z \in \mathbb{C}^n} \mathcal{L}_z$ is the Cauchy-Riemann structure associated to the N -dimensional complex space. For each $p \in M$ we can consider the vector space $\mathcal{A}_p = \mathbb{C}T_p M \cap \mathcal{L}_p$. If the reunion of those fibers originates a locally integrable structure, then we are going to say that M is a CR submanifold with CR structure $\mathcal{A} = \cup_{p \in M} \mathcal{A}_p$. It immediately follows that if h is a holomorphic application defined in a certain neighborhood $U \supset M$, then $\mathcal{A}(h|M) = 0$.

If we consider a distribution $u \in \mathcal{D}'(M)$ such that $\mathcal{A}u = 0$, then one can asks: is there a holomorphic application h defined in certain open set U such that $h|M = u$? The question, as it is, can be paraphrased as: is there any analytic extension of the CR distribution u ? The answer is negative and there are several examples one can create.

Consider a quadric application $q : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^d$ and the manifold given by $M = \{(w, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d, \exists t = q(w, \bar{w})\}$. Bogness has proved in [Bog01] that all L^p CR distributions in M (with $p \geq 1$) admit a holomorphic extension to the interior of the convex hull of M . In this work, we are going to address the same question, but we are going to deal with CR distributions that are in h^p with $p > 0$. Since $h^p(M) = L^p(M)$ if $p > 1$, then our result can be understood as an extension of the original Bogness theorem. The main ingredient of your work is a version of the Baouendi-Treves Approximation Theorem.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Símbolos	ix
Introdução	1
1 Valores de Fronteira de Funções Holomorfas	4
1.1 Caso Complexo	5
1.2 Traço em uma Aresta M	10
Notas	18
2 Teorema de Aproximação CR	19
2.1 Sistema de Coordenadas	20
2.2 Operador de Aproximação Modificado	26

2.3	Convergência do Operador Modificado	29
2.4	Operador de Aproximação e Operador Resto	31
2.5	Convergência em C^∞	38
2.6	Convergência nas Distribuições	42
	Notas	54
3	Teorema de Extensão CR	55
3.1	Caracterização Maximal de H^p	56
3.2	Família Geral de Bolas	60
3.3	Revisitando o Teorema de Aproximação CR	62
3.4	Teorema de Extensão CR	67
	Notas	71
	Referências Bibliográficas	72
	Índice Remissivo	73

Lista de Figuras

1.1	Existência de bf	6
1.2	Cunha \mathcal{W} de aresta M	11
2.1	Esboço de uma variedade quádrlica	20
2.2	Funcionamento do Teorema de Aproximação CR	42
2.3	Esboço de uma fatia de variedade quádrlica	45
3.1	Esboço de um disco analítico anexado a M	69

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição	Referência
bf	Traço de f no sentido das distribuições — distinto do <i>pullback</i> pela inclusão	teorema 6 (p.13)
$(bf)_v$	Traço de f em uma direção fixada $v \in \Gamma$	seção 1.2 (p. 14)
$\mathcal{H}(\Omega)$	Espaço das funções holomorfas definidas no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$	
$[L, M]$	Comutador entre os campos L e M	
$C^0(A, B)$	Espaço das funções contínuas de A até B	
$\mathcal{D}(\Omega)$	Funções infinitas vezes diferenciáveis com suporte compacto na subvariedade Ω	
$\text{CR}(M)$	Distribuições CR de M	definição 11 (p.25)
$\mathcal{D}^k(\Omega)$	Funções C^k com suporte compacto na subvariedade Ω	
$\mathcal{D}'^k(\Omega)$	Espaço das distribuições de ordem k na variedade Ω	
$E_k(\mathcal{W})$	Espaço de Banach das funções holomorfas de crescimento temperado em \mathcal{W}	seção 1.2 (p. 13)
$\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$	Inclusão compacta de cones	seção 1.2 (p. 13)
$h^p(\mathbb{R}^N)$	p -ésimo espaço de Hardy localizado	definição 34 (p. 59)

Símbolo	Descrição	Referência
$\Im z$	Parte imaginária de $z \in \mathbb{C}^n$	
$m_\phi f$	Função maximal truncada	seção 3.1 (p. 58)
$\ \cdot\ _k$	Norma no espaço $E_k(\mathcal{W})$, $L^k(\Omega)$ ou $h^k(\Omega)$	
$\ \tilde{q}\ _u$	Supremo das derivadas de \tilde{q} com respeito a u	seção 2.4 (p. 35)
$\Re z$	Parte real de $z \in \mathbb{C}^n$	
$L^{p,s}(\mathbb{R}^{m+d})$	Espaço de Sobolev em \mathbb{R}^{m+d}	definição 20 (p.42)
$H^s(\mathbb{R}^{m+d})$	Equivalente a $L^{p,s}(\mathbb{R}^{m+d})$ quando $s = 2$	seção 2.6 (p. 43)
$L_{loc}^{p,s}(\mathbb{R}^{m+d})$	Espaço Local de Sobolev em \mathbb{R}^{m+d}	definição 21 (p.43)
$\ f\ _{p,s}$	Norma em $L^{p,s}$	seção 2.6 (p. 43)
$\mathcal{W}_1 \preceq \mathcal{W}_2$	Inclusão (em um certo sentido) de cunhas	seção 1.2 (p. 13)
$\text{WF}h$	Wave Front Set de h	
$\mathcal{W}(\mathcal{O}, \rho, \Gamma)$	Cunha \mathcal{W} de aresta M	seção 1.2 (p. 11)
$(z)^m$	Generalização de z^m quando $z \in \mathbb{C}^n$	seção 2.2 (p. 26)

Introdução

O Teorema de Aproximação, provado em 1981 por Baouendi e Treves, é uma das principais ferramentas disponíveis na teoria das estruturas localmente integráveis. Esse resultado estabelece que qualquer distribuição h que seja solução das seções de uma estrutura localmente integrável \mathcal{L} pode expressar-se — localmente — como limite de uma sequência de soluções suaves da forma $P_k \circ Z$. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [BCH08, cap. II].

De forma geral, é impossível esperar que a convergência dada pelo Teorema de Aproximação seja melhor que local. Mais precisamente: não se pode oferecer quaisquer mecanismos de controle sobre o aberto em que se dá a convergência $P_k \circ Z \rightarrow h$. Em [Bog01, teo. 2] Boggess nos apresenta uma variação do Teorema de Aproximação de Baouendi e Treves (formulada para uma classe especial de variedades e distribuições) que lida com essa questão.

Considere $q : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^d$ quádrlica e defina a variedade $M = \{(w, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d, \Im t = q(w, \bar{w})\}$. Ora, fixados um ponto $z \in \mathbb{C}^{m+d}$ e um inteiro $j \in \{1, 2, \dots, m+d\}$ denotaremos por $\bar{\partial}_j(z)$ o vetor tangente a \mathbb{C}^{m+d} no ponto z dado por:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_j(z) : C_z^\infty(\mathbb{C}^{m+d}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [f] &\longmapsto (\partial f / \bar{z}_j)(z). \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{A}(z)$ o espaço vetorial span $\{\bar{\partial}_1(z), \dots, \bar{\partial}_{m+d}(z)\}$ e escreveremos $\mathcal{A} =$

$\cup_{z \in \mathbb{C}^{m+d}} \mathcal{A}(z)$. Essa estrutura localmente integrável nada mais é do que aquela que caracteriza todas as distribuições holomorfas. Em outras palavras: se U é um aberto em \mathbb{C}^{m+d} então $h \in \mathcal{H}(U)$ se, e somente se, $\mathcal{A}h = 0$.

Já para cada ponto $z \in M$, considere o espaço vetorial $\mathcal{L}(z)$ dado por $\mathcal{L}(z) = \mathbb{C}T_z M \cap \mathcal{A}(z)$. A estrutura localmente integrável $\mathcal{L} = \cup_{z \in M} \mathcal{L}(z)$ é chamada de *estrutura CR da variedade* M . O conjunto de todas as distribuições $h \in \mathcal{D}'(M)$ que são anuladas por essa estrutura será denotado por $\text{CR}(M)$ e tais aplicações serão chamadas de *distribuições CR*.

Da construção de \mathcal{L} fica evidente que se $U \supset M$ é um aberto de \mathbb{C}^{m+d} e $F \in \mathcal{H}(U)$, então $F|_M \in \text{CR}(M)$. A pergunta recíproca já é mais interessante: dada uma distribuição $f \in \text{CR}(M)$ existe uma aplicação holomorfa F definida em algum conjunto aberto tal que seu traço bF coincida com f ? Esse tipo de pergunta recebe o nome de *questão da extensibilidade de distribuições CR em M* .

De posse de todos esses ingredientes podemos enunciar uma consequência de [Bog01, teo. 2], que apresenta uma variação do Teorema de Aproximação de Baouendi e Treves:

Teorema 1. *Suponha M uma variedade quádrlica e considere que f seja uma distribuição em $\text{CR}(M) \cap L^p(M)$ para $1 \leq p < \infty$. Nestas condições existe uma sequência de funções inteiras F_k tais que para qualquer compacto $K \subset M$ vale que $F_k \rightarrow f$ em $L^p(K)$ à medida que $k \rightarrow \infty$. Se $p = \infty$ então F_k converge para f em quase toda parte.*

Boguess demonstrou, nesse mesmo artigo, que no caso de variedades quádrlicas é possível estender distribuições CR até o interior da envoltória convexa de M se a distribuição também estiver nos espaços $L^p(M)$ com $p \geq 1$. O teorema 1 é, sem dúvida nenhuma, a principal ferramenta na demonstração que Boguess apresentou. Deste ponto em diante lidaremos com a mesma questão de extensibilidade em variedades quádrlicas, mas em um contexto um pouco diferente: suporemos que as distribuições CR em questão estejam nos espaços de Hardy Localizados $h^p(M)$ com $p > 0$. Para trabalhar com essa questão teremos que, assim como Boguess, apresentar uma versão do Teorema de Aproximação.

Este texto foi dividido em três capítulos. O primeiro e o segundo são independentes e podem ser lidos separadamente. Já o terceiro trata da extensão de distribuições CR propriamente dita e faz referências tanto ao capítulo 1 como ao capítulo 2. Os pré-requisitos à leitura deste texto foram incorporados à medida que se tornaram necessários.

No capítulo 1, estaremos interessados em um ingrediente fundamental do nosso teorema: o conceito de traço de funções holomorfas. Este conceito é especialmente distinto do pullback

de uma distribuição pela inclusão. Para a existência do traço, não precisamos supor que M faça parte do domínio de holomorfia de f . Já no segundo conceito seria preciso, pelo menos, que M fosse uma subvariedade do domínio de f . Nesse capítulo serão discutidos itens como fronteira C^1 de conjuntos, Fórmula de Green-Gauss, crescimento temperado de aplicações, continuidade do traço, cunhas e aresta.

Já no capítulo 2, demonstraremos a principal ferramenta do nosso trabalho: uma versão especial do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves. Em oposição ao caráter local do teorema de aproximação provado em 1981, nossa versão permite que distribuições CR sejam aproximadas em compactos arbitrários por polinômios inteiros. Em contrapartida, não trabalharemos com variedades e estruturas localmente integráveis arbitrárias, e sim com variedades quádricas e suas estruturas CR. Nesse capítulo, discutiremos itens como aplicação quádrica, variedade quádrica, distribuição CR e núcleo de aproximação.

Finalmente, no capítulo 3, iniciaremos caracterizando os espaços h^p para $p > 0$ e os relacionando com os espaços L^p . Em seguida, trataremos de uma família de bolas generalizadas associadas a um conjunto de campos em M . Depois de apresentarmos todos esses ingredientes, revisitaremos nosso Teorema de Extensão e exibiremos uma demonstração para os espaços h^p e, através da estimativa associada as bolas anisotrópicas, construiremos uma aplicação holomorfa no interior da envoltória convexa de uma variedade quádrica. Utilizando o conceito de traço discutido no capítulo 1, observaremos que essa aplicação se trata de uma extensão da distribuição CR originalmente dada.

CAPÍTULO 1

Valores de Fronteira de Funções Holomorfas

RESUMO

Neste capítulo introduziremos a noção precisa de traço (ou valor de fronteira) de uma função holomorfa. Suponha que $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ e digamos que você tenha uma função $f \in \mathcal{H}(I \times I) \cap C^0(\bar{I} \times \bar{I})$. Nesta situação trivial definiremos o *traço* de f (denotado por bf) como a aplicação $bf(x) = f(x + i0)$. Em outras palavras: o traço de f nada mais é que a restrição da aplicação ao eixo real.

Uma situação mais delicada ocorre na perda da continuidade até a fronteira, isto é, quando $f \in \mathcal{H}(I \times I)$ apenas. Nesta novo ambiente gostaríamos de encontrar um análogo para bf que generalizasse a situação anterior. A ideia agora é definir um conceito fraco de bf . Mais precisamente: seja $\phi \in \mathcal{D}(I)$ e considere, para $y \in I$, a distribuição $f(\cdot + iy)$. Suponha que o limite $\lim_{y \rightarrow 0} \langle f(\cdot + iy), \phi \rangle$ exista. Nestas condições escreveremos que $\langle bf, \phi \rangle = \lim_{y \rightarrow 0} \langle f(\cdot + iy), \phi \rangle$. É fácil de ver que se $f \in C^0(\bar{I} \times \bar{I})$, então $bf \in \mathcal{D}'(I)$ e ainda $bf = f(\cdot + i0)$.

O objetivo deste capítulo é encontrar condições necessárias para a existência de $bf \in \mathcal{D}'(I)$ em uma situação de trabalho não tão primitiva quanto à apresentada nesta introdução. Logo em seguida vamos explorar algumas propriedades da aplicação b .

1.1 Caso Complexo

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos um teorema clássico que encontra condições para a existência de bf . Por motivos de clareza serão apresentadas duas demonstrações. A primeira delas fornece uma fórmula despojada de limite para bf — o que facilita a análise de certas propriedades da aplicação b . Já a outra demonstração contém o germe da ideia que é utilizada no caso geral.

Vamos começar os preparativos da demonstração enunciando a conhecida Fórmula de Gauss-Green.

Definição 2. Se $Y \subset X$ são conjuntos abertos em \mathbb{R}^n , então Y é dito ter fronteira C^1 em X se para todo ponto $x_0 \in X$ na fronteira de Y podemos encontrar uma aplicação Δ (C^1 por partes) definida em uma vizinhança X_0 de x_0 tal que:

$$\Delta(x_0) = 0, \quad d\Delta(x_0) \neq 0, \quad Y \cap X_0 = \{x \in X_0 : \Delta(x) = 0\}.$$

Sejam $Y \subset X$ conjuntos abertos em \mathbb{R}^n tal que Y tem fronteira C^1 em X . Se $f = (f_1, \dots, f_n)$ é um campo vetorial com componentes em $\mathcal{D}^0(X)$ tal que o $\text{div } f$ — definido no sentido das distribuições — está em $L^1(Y)$ então vale a Fórmula de Green-Gauss:

$$\int_Y \text{div } f \, dx = - \int_{\partial Y} \langle f, n \rangle \, dS, \quad (1.1.1)$$

onde n é o normal unitário que aponta para dentro de ∂Y e dS é o elemento de superfície em ∂Y .

Suponha agora $Y \subset X$ conjuntos abertos em \mathbb{C} tal que Y tem fronteira C^1 em X . Observe que se s é o parâmetro de comprimento de arco de ∂Y , então $(dx/ds, dy/ds)$ é vetor tangente unitário e $(-dy/ds, dx/ds)$ é o vetor normal unitário que aponta para dentro. Se $\phi \in \mathcal{D}^1(X)$, então podemos considerar o campo $f = (\phi, i\phi)$ e aplicar a equação 1.1.1 para obter:

$$2 \iint_Y \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \, dx \, dy = -i \int_{\partial Y} \phi \, d\omega, \quad (1.1.2)$$

onde $d\omega = dx + idy$.

Já estamos em condições para enunciar e apresentar a primeira demonstração do teorema.

Teorema 3 (Existência do Traço). *Seja I um intervalo aberto em \mathbb{R} e considere a vizi-*

1.1. Caso Complexo

nhança:

$$Z = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \in I \text{ e } 0 < \Im z < \gamma\}.$$

Se $f \in \mathcal{H}(Z)$ é uma aplicação tal que para algum $N \in \mathbb{N}$ vale

$$|f(z)| \leq C(\Im z)^{-N}, \forall z \in Z \quad (1.1.3)$$

então $\text{bf} \in \mathcal{D}^{N+1}(I)$ existe e é definida por $\langle \text{bf}, \phi \rangle = \lim_{y \rightarrow 0} \langle f(\cdot + iy), \phi \rangle$.

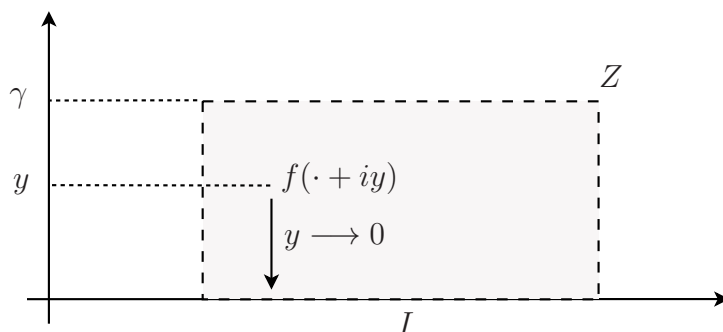


Figura 1.1: Existência de bf

Antes de iniciarmos a demonstração é importante mencionar que a estimativa 1.1.3 equivale a dizer que a função f tem *crescimento temperado*.

Demonstração. Para $\phi \in \mathcal{D}^{N+1}(I)$ defina a seguinte aplicação auxiliar:

$$\Gamma(x, y) = \sum_{j=0}^N \frac{\phi^{(j)}(x) (iy)^j}{j!}.$$

Observe que $\Gamma(x, 0) = \phi(x)$ e que ainda valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= \sum_{j=0}^N \frac{\phi^{(j+1)}(x) (iy)^j}{j!} \\ i \frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= - \sum_{j=1}^N \frac{\phi^{(j)}(x) (iy)^{j-1}}{(j-1)!} = - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\phi^{(j+1)}(x) (iy)^j}{j!} \end{aligned}$$

Somando as duas equações acima, obtemos:

$$2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + i \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = \frac{\phi^{(N+1)}(x) (iy)^N}{N!}.$$

1.1. Caso Complexo

Agora fixe Y com $0 < Y < \gamma$. Para cada y suficientemente pequeno, isto é, $0 < y < \gamma - Y$ nós obtemos da equação 1.1.2 aplicada à função $\Gamma(z)f(z + iy)$ o seguinte:

$$\int \Gamma(x, 0) f(x + iy) dx - \int \Gamma(x, Y) f(x + iy + iY) dx = 2i \int_{0 < \Im z < Y} f(z + iy) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} d\lambda(z),$$

onde λ é a medida de Lebesgue de \mathbb{C} e $\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}}$ está calculado no ponto z .

Como $0 < \Im z < Y$ podemos escrever $z = x + itY$, com $0 < t < 1$. Utilizando essa mudança de variáveis temos que:

$$2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}}(z) = 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}}(x + itY) = \frac{\phi^{(N+1)}(x) (iYt)^N}{N!} = 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}}(x, Y) t^N.$$

Utilizando esta parametrização e lembrando que $\Gamma(x, 0) = \phi(x)$, obtemos:

$$\int \phi(x) f(x + iy) dx = \int \Gamma(x, Y) f(x + iy + iY) dx + 2iY \iint_{0 < t < 1} f(x + itY + iy) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} t^N dx dt.$$

Observe que como $z = x + itY$ segue que $\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}}$ agora está calculado no ponto (x, Y) .

Portanto, o lado esquerdo da igualdade acima é justamente $\langle f(\cdot + iy), \phi \rangle$. Com isto, se provarmos que o lado direito da igualdade converge quando $y \rightarrow 0$ o teorema estará provado. Inicialmente vamos verificar que os integrandos convergem. Como $iy + iY \in Z$ para todo $0 \leq y < \gamma - Y$ é fácil ver que $\Gamma(x, Y) f(x + iy + iY) \rightarrow \Gamma(x, Y) f(x + iY)$ e que $f(x + itY + iy) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} t^N \rightarrow f(x + itY) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} t^N$. Utilizando a hipótese, podemos aplicar o teorema da Convergência Dominada e concluir que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int \phi(x) f(x + iy) dx = \int \Gamma(x, Y) f(x + iY) dx + 2iY \iint_{0 < t < 1} f(x + itY) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} t^N dx dt.$$

□

Como corolário da demonstração verificamos que $\langle bf, \phi \rangle = \int \Gamma(x, Y) f(x + iY) dx + 2iY \iint_{0 < t < 1} f(x + itY) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} t^N dx dt$. A grande vantagem desta técnica é fornecer uma definição para o cálculo de bf que seja desprovida de limite. Com isto, vamos demonstrar o seguinte corolário de grande interesse.

Corolário 4 (Continuidade do Traço). *Seja I um intervalo aberto em \mathbb{R} e considere a vizinhança:*

$$Z = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \in I \text{ e } 0 < \Im z < \gamma\}.$$

1.1. Caso Complexo

Se $\{f_j\} \in \mathcal{H}(Z)$ é uma sequência de aplicações tais que para algum $N \in \mathbb{N}$ vale:

$$|f_j(z)| \leq C(\Im z)^{-N}, \forall z \in Z$$

então $\{bf_j\} \in \mathcal{D}'^{N+1}(I)$ existem no sentido do teorema 3. Se além disso a sequência $\{f_j\}$ converge uniformemente para a aplicação nula em compactos de Z , então $bf_j \rightarrow 0$.

Demonstração. Como toda a sequência $\{f_j\}$ possui uma cota temperada uniforme segue que para verificarmos que $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle bf_j, \phi \rangle = 0$ temos que calcular:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int \Gamma(x, Y) f_j(x + iY) dx + 2iY \iint_{0 < t < 1} f_j(x + itY) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} t^N dx dt \right).$$

Para isto é suficiente aplicar o teorema da Convergência Dominada utilizando a informação da hipótese. \square

Note que se a sequência do corolário 4 convergir (uniformemente em compactos de Z) para uma aplicação $f \in \mathcal{H}(Z)$ que satisfaz $|f(z)| \leq C(\Im z)^{-N}$ (para as mesmas escolhas de C e N de $\{f_j\}$), então podemos aplicar o resultado para a sequência $\{f_j - f\}$ e obter que $bf_j \rightarrow bf$.

Vamos agora apresentar uma nova demonstração do teorema 3.

Demonstração. Vamos proceder por indução sobre N .

Inicialmente devemos demonstrar o resultado para $N = 1$. Da hipótese temos que $|f(z)| \leq C(\Im z)^{-1}$ para todo $z \in Z$. Fixe um ponto $z_0 \in Z$ e considere a primitiva:

$$\begin{aligned} F : Z &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Portanto, é fácil de ver que:

$$|F(z)| \leq \int_{z_0}^z |f(\xi)| d\xi \leq \int_{z_0}^z C(\Im \xi)^{-1} d\xi = -C \log \Im z + C_1.$$

É evidente que $F \in \mathcal{H}(Z)$ é uma aplicação tal que $F' = f$ em Z . Note que F é um pouco mais regular que f . Em outras palavras, enquanto a função original pode não estar definida na fronteira $y = 0$ sua primitiva é integrável, pois $\log t$ é integrável em uma vizinhança

1.1. Caso Complexo

próxima de $t = 0$. Para tirarmos vantagem deste fenômeno considere agora a primitiva para F :

$$\begin{aligned} G : Z &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_{z_0}^z F(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Como F é integrável até a fronteira segue que G é contínua até a fronteira $y = 0$, mais precisamente $G \in \mathcal{H}(Z) \cap C^0(Z \cup I \times \{0\})$.

Como a aplicação de derivação é contínua nas distribuições segue que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(\cdot + iy) = \lim_{y \rightarrow 0} G^{(2)}(\cdot + iy) = \left(\lim_{y \rightarrow 0} G(\cdot + iy) \right)^{(2)} = G(\cdot)^{(2)} = (bG)^{(2)}.$$

Desta forma, fica provado que $b f$ existe e é tal que $b f = (bG)^{(2)}$.

Suponha que o resultado vale para $N - 1$ e vamos provar para N . Da hipótese temos que $|f(z)| \leq C(\Im z)^{-N}$ para todo $z \in Z$. Fixe um ponto $z_0 \in Z$ e considere a primitiva:

$$\begin{aligned} F : Z &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_{z_0}^z f(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Portanto, é fácil de ver que:

$$|F(z)| \leq \int_{z_0}^z |f(\xi)| \, d\xi \leq \int_{z_0}^z C(\Im z)^{-N} \, d\xi = C_1(\Im z)^{-(N-1)}.$$

Conseqüentemente o teorema é válido para F (por hipótese de indução) e, portanto, existe o traço bF . Utilizando a continuidade da derivada temos

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(\cdot + iy) = \lim_{y \rightarrow 0} F'(\cdot + iy) = \left(\lim_{y \rightarrow 0} F(\cdot + iy) \right)' = (bF)'. \quad \square$$

Observando a demonstração anterior constatamos o seguinte fato: seja G uma $(N + 1)$ -primitiva de f . Temos que G é contínua até a fronteira e portanto existe seu traço bG . Como limites e derivadas comutam segue que $b f$ existe e é dado por $b f = (bG)^{(N+1)}$.

A próxima etapa é redemonstrar o corolário 4 utilizando a construção feita na demonstração anterior. É interessante observar que neste caso não temos uma fórmula simples para $b f$, com isto precisaremos de um argumento um pouco mais elaborado.

1.2. Traço em uma Aresta M

Demonstração. Considere a primeira primitiva:

$$\begin{aligned} F_j : Z &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_{z_0}^z f_j(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\{F_j\}$ converge a zero uniformemente em compactos de Z . Para isso considere $r > 0$ tal que $|z - z_0| < r$ e $\varepsilon > 0$. Escolha j_0 tal que $|f_j| < \varepsilon$ para todo $j > j_0$. Nestas condições temos que:

$$\left| \int_{z_0}^z f(\xi) \, d\xi \right| \leq \int_{z_0}^z |f(\xi)| \, d\xi \leq \int_{z_0}^z \varepsilon \, d\xi \leq r\varepsilon,$$

para todo $j > j_0$.

Para cada f_j considere sua $(N + 1)$ -primitiva G_j obtida através de sucessivas integrações sobre o caminho $[z_0, z]$. Iterando o argumento anterior obtemos que $\{G_j\}$ converge a zero uniformemente em compactos de Z . Como cada uma das aplicações G_j são contínuas até $y = 0$ é trivial notar que $\text{b}G_j = G_j(\cdot + i0)$.

A próxima etapa é mostrar que $\text{b}G_j \rightarrow 0$ uniformemente em compactos de I . Considere $|x - x_0| < r$ e $\varepsilon > 0$. Tome $\lambda > 0$ de tal forma que se $|y| < \lambda$ então $x + iy \in Z$. Como $|x - x_0| < r$ e $|y| < \lambda$ então existe um j_0 tal que se $j > j_0$ então $|G_j(x + iy)| < \varepsilon$. Tomando o limite quando $y \rightarrow 0$ temos que $|G_j(x)| < \varepsilon$. Com isto fica provado que $\text{b}G_j \rightarrow 0$.

Utilizando o fato que limites e derivadas comutam segue que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{b}f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\text{b}G_j)^{(N+1)} = \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \text{b}G_j \right)^{(N+1)} = 0.$$

□

Nesta próxima seção vamos verificar o comportamento do traço de funções holomorfas quando se tem várias variáveis complexas.

1.2 Traço em uma Aresta M

Seja M uma subvariedade genérica de \mathbb{C}^N de codimensão d e dimensão CR n e $p_0 \in M$. Escolha $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ uma função definidora de M próxima a p_0 e tome \mathcal{O} uma

1.2. Traço em uma Aresta M

vizinhança de p_0 na qual ρ esteja definida. Isto equivale a dizer que:

$$M \cap \mathcal{O} = \{z \in \mathcal{O} : \rho(z, \bar{z}) = 0\}.$$

Vamos agora rerepresentar uma definição praticamente conhecida por todos. Um subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ será dito um *cone com vértice na origem* se para todo $z \in \Gamma$ e para qualquer $t \in \mathbb{R}^+$ valer que $tz \in \Gamma$. É fácil de observar que o vértice pertence à fronteira topológica de Γ .

Se Γ é um cone aberto convexo com vértice na origem de \mathbb{R}^d nós definiremos:

$$\mathcal{W}(\mathcal{O}, \rho, \Gamma) = \{z \in \mathcal{O} : \rho(z, \bar{z}) \in \Gamma\}.$$

Inicialmente, note que o conjunto definido anteriormente é um subconjunto aberto de \mathbb{C}^{n+d} — pois é imagem inversa de um aberto por uma aplicação suave — e cuja fronteira topológica contém $M \cap \mathcal{O}$ — pois 0 é o vértice do cone Γ .

Note que a definição acima depende — *a priori* — da escolha da função definidora. Nós veremos logo abaixo que isto não será um problema. Deste ponto em diante chamaremos tal conjunto de *cunha de aresta M na direção Γ e centrado em p_0* .

O conjunto \mathcal{W} deve ser geometricamente entendido da seguinte forma: para cada ponto p de $M \cap \mathcal{O}$ considere uma cópia $\Gamma_p = \Gamma \times \{p\}$ do cone original Γ . Logo depois identifique cada ponto p com o vértice $(0, p)$ de Γ_p . Em outras palavras: estamos colando cones Γ em cada ponto de $M \cap \mathcal{O}$.

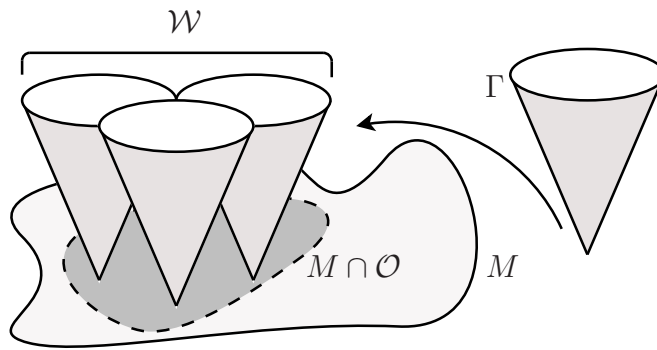


Figura 1.2: *Cunha \mathcal{W} de aresta M*

Note que quando M é uma hipersuperfície (isto é, $d = 1$) temos que \mathcal{W} é simplesmente uma vizinhança de um lado apenas de p_0 — mais precisamente: $\mathcal{W} = \mathcal{O} \cap \{\rho(z, \bar{z}) > 0\}$ ou $\mathcal{W} = \mathcal{O} \cap \{\rho(z, \bar{z}) < 0\}$.

1.2. Traço em uma Aresta M

A próxima etapa é verificar que a construção de \mathcal{W} é independente de ρ em um sentido bem específico — o que permitirá mudanças livres na escolha da função definidora.

Proposição 5. *Sejam ρ e ρ' duas funções definidoras de M próximas do ponto p_0 . Nestas condições existe uma matriz real $d \times d$ invertível B tal que para todo \mathcal{O} e Γ no contexto acima vale a seguinte propriedade. Para qualquer cone aberto convexo $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^d$ com $B\Gamma_1 \cap S^{d-1}$ relativamente compacto em $\Gamma \cap S^{d-1}$ implica que existe um \mathcal{O}_1 , uma vizinhança aberta de p_0 em \mathbb{C}^{n+d} , tal que:*

$$\mathcal{W}(\mathcal{O}_1, \rho', \Gamma_1) \subset \mathcal{W}(\mathcal{O}, \rho, \Gamma).$$

Demonstração. Sabemos que existe uma matriz suave A definida em uma vizinhança de p_0 tal que $\rho' = A\rho$. Defina $B = A(p_0, \bar{p}_0)^{-1}$. É claro que se $\rho'(z, \bar{z}) \in \Gamma_1$ então $A(z, \bar{z})\rho(z, \bar{z}) \in \Gamma_1$. Consequentemente $A(p_0, \bar{p}_0)^{-1}A(z, \bar{z})\rho(z, \bar{z}) \in A(p_0, \bar{p}_0)^{-1}\Gamma_1$. Escrevendo $A(p_0, \bar{p}_0)^{-1}A(z, \bar{z})$ como $(I + O(z, \bar{z}))$ obtemos:

$$(I + O(z, \bar{z}))\rho(z, \bar{z}) \in A(p_0, \bar{p}_0)^{-1}\Gamma_1,$$

onde I é a matriz identidade $d \times d$ e $O(z, \bar{z})$ é uma matriz tal que $\|O(z, \bar{z})\| \rightarrow 0$ a medida que $z \rightarrow p_0$. Ora, a hipótese de que $B\Gamma_1 \cap S^{d-1}$ é relativamente compacto em $\Gamma \cap S^{d-1}$ implica que $\rho(z, \bar{z})$ pertence a Γ para valores suficientemente pequenos de $z - p_0$. Isto prova nossa proposição para uma certa vizinhança \mathcal{O}_1 . \square

Seja $M \subset \mathbb{C}^n$ uma subvariedade genérica da forma

$$M = \{z = (u, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d : \Im w = \phi(u, \bar{u}, \Re w)\}$$

e $p_0 \in M$. Como anteriormente, denote por $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ uma função definidora para M próximo a p_0 . Suponha também, sem perda de generalidade, que $\phi(p_0) = 0$, $d\phi(p_0) = 0$ e $p_0 = 0$.

Vamos considerar uma cunha $\mathcal{W}' = \mathcal{W}(\mathcal{O}, \rho, \Gamma')$ com aresta M . Dizemos que uma função holomorfa f é de *crescimento temperado* se existe uma constante $C > 0$ e um inteiro $k \geq 0$ tal que:

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|\rho(z, \bar{z})|^k}, \forall z \in \mathcal{W}'.$$

Observe que como $\rho(z, \bar{z})$ representa um ponto dentro do cone Γ' segue que $|\rho(z, \bar{z})|$ é comparável com $|\text{dist}(z, M)|$. Com isto observamos que a formulação anterior é equivalente

1.2. Traço em uma Aresta M

a dizer que existe uma constante $C > 0$ (possivelmente diferente da do caso acima) e um inteiro $k \geq 0$ tal que:

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|\text{dist}(z, M)|^k}, \forall z \in \mathcal{W}'.$$

Vamos considerar uma cunha de aresta M com um formato um pouco mais especial. Suponha Γ um cone aberto convexo qualquer. Como nossa variedade M é o gráfico de uma função ϕ considere:

$$\mathcal{W} = \{(u, w) : w = s + i\phi(u, \bar{u}, s) + iv, |z| < \varepsilon, |s| < \varepsilon, |v| < \varepsilon, v \in \Gamma\}.$$

Note que se $v = 0$ estamos em M e à medida que v varia vamos parametrizando o cone Γ .

Ora, pela proposição 5 existe um $\varepsilon > 0$ e um cone aberto convexo $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. Em outras palavras: independentemente da cunha originalmente dada é possível construir essa cunha \mathcal{W} de coordenadas canônicas que está contido em \mathcal{W}' .

Nosso próximo objetivo é trabalhar com uma formulação de crescimento temperado mais útil para nossos cálculos. Para isto vamos assumir que $0 \notin \Gamma$ e que $f(u, w)$ é holomorfa em \mathcal{W} . Suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que f satisfaça a seguinte estimativa

$$|f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + iv)| \leq \frac{C}{|v|^k},$$

para todos u, s, v suficientemente pequenos com $v \in \Gamma$. Note que como $p(v) = (u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + iv) \in \mathcal{W}$ e $|\text{dist}(p(v), M)| \approx |v|$ temos que f tem crescimento temperado.

Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção vamos estabelecer uma notação simplificadora. Se $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ são cones abertos tais que $\Gamma_1 \cap S^{d-1}$ é relativamente compacto em $\Gamma_2 \cap S^{d-1}$ então escreveremos $\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$. Analogamente, se $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ e $\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$ então escreveremos $\mathcal{W}_1 \preceq \mathcal{W}_2$ onde $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_1(\mathcal{O}_1, \rho, \Gamma_1)$ e $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2(\mathcal{O}_2, \rho, \Gamma_2)$.

Denote por $E_k(\mathcal{W})$ o espaço de Banach das funções de crescimento temperado em \mathcal{W} munido da norma

$$\|f\|_k = \sup_{(z, w) \in \mathcal{W}, v \in \Gamma} |v|^k |f(u, w)|,$$

onde $w = s + i\phi(u, \bar{u}, s) + iv$.

Teorema 6 (Existência do Traço). *Seja $f(u, w)$ uma função holomorfa de crescimento temperado em \mathcal{W} . Nestas condições existe uma distribuição chamada bf definida em uma*

1.2. Traço em uma Aresta M

vizinhança de p_0 em M pela identidade

$$\langle \text{bf}, \psi \rangle = \lim_{\Gamma \ni v \rightarrow 0} \iiint_{\mathbb{R}^{2n+d}} f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + iv) \psi(x, y, s) \, dx \, dy \, ds,$$

onde $u = x + iy$ e ψ é uma função teste em \mathbb{R}^{2n+d} com suporte suficientemente pequeno. Além disso, se bf é uma aplicação contínua então para qualquer cunha $\widetilde{\mathcal{W}}$ com $\widetilde{\mathcal{W}} \preceq \mathcal{W}$ a restrição de f a $\widetilde{\mathcal{W}}$ se estende continuamente até uma vizinhança de p_0 em M . Ainda mais, se valer que $\text{bf} = 0$ então $f = 0$.

Neste trabalho iremos demonstrar uma versão não tão geral do teorema acima, mas que será suficiente para nossa aplicação. Na proposição a seguir estaremos preocupados com o a existência do traço $(\text{bf})_v$ em uma direção fixada $v \in \Gamma$.

Proposição 7. *Seja $f(u, w)$ uma função holomorfa de crescimento temperado em \mathcal{W} . Considere $v \in \Gamma$ e ψ uma função teste em \mathbb{R}^{2n+d} com suporte suficientemente pequeno. Nestas condições existe o limite*

$$\langle (\text{bf})_v, \psi \rangle = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \iiint_{\mathbb{R}^{2n+d}} f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v) \psi(x, y, s) \, dx \, dy \, ds,$$

onde $u = x + iy$.

Uma observação interessante: depois de demonstrarmos a proposição anterior, poderíamos demonstrar que dados $p, q \in \Gamma$ valeria que

$$(\text{bf})_p = (\text{bf})_q$$

e com isto mostraríamos que o traço independe da escolha da direção e certamente valeria o teorema 6. Entretanto, vamos nos concentrar apenas em demonstrar a existência de $(\text{bf})_v$.

Antes de iniciarmos a demonstração da proposição vamos trabalhar em um lema técnico que contém as ideias centrais da prova do teorema.

Lema 8. *Seja $f : (0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e seja $k > 0$ um inteiro não negativo. Se para todo j existe uma constante $C_j > 0$ tal que*

$$\left| \frac{d^j f}{dx^j}(x) \right| \leq \frac{C_j}{x^k}, \quad 0 < x < r$$

então f admite uma extensão suave em $[0, r)$.

1.2. Traço em uma Aresta M

Demonstração. Para simplificarmos nosso trabalho, assumamos que $k = 1$. Considere $t > 0$ suficientemente pequeno e escreva a Série de Taylor com Resto Integral para f' com os parâmetros $a = 1$, $a + h = t$ e $n = 1$. Em outras palavras:

$$f'(t) = f'(1) + f''(1)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} \int_0^1 (1-s) f'''(1+st-s) ds.$$

Como $t > 0$ podemos estimar o integrando anterior e obter:

$$|(1-s) f'''(1+st-s)| \leq \frac{C_3 |1-s|}{|1+st-s|} \leq |1-s| \frac{C_3}{|1-s|} \leq C_3.$$

Consequentemente temos que f' é uma aplicação limitada pois

$$|f'(t)| \leq |f'(1)| + |f''(1)(t-1)| + \frac{(t-1)^2}{2} \int_0^1 C_3 ds \leq C.$$

Considere agora $t > 0$ suficientemente pequeno e escreva a Série de Taylor com Resto Integral para f com os parâmetros $a = 1$, $a + h = t$ e $n = 0$. Mais precisamente:

$$f(t) = f(1) + (t-1) \int_0^1 f'(1+st-s) ds.$$

Como f' é limitada e ainda $f'(1+st-s) \rightarrow f'(1-s)$ a medida que $t \rightarrow 0$ podemos usar o teorema da Convergência Dominada e obter:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(1) - \int_0^1 f'(1-s) ds.$$

Com isto mostramos que f admite uma extensão contínua na origem. Ora, se no lugar de f aplicarmos o procedimento anterior para f' teríamos uma extensão contínua para f' (e assim sucessivamente).

Caso $k > 1$ teríamos que utilizar uma Série de Taylor com n suficientemente grande. O restante da demonstração ficaria inalterado. \square

Vamos agora demonstrar nossa proposição. A ideia central é utilizar a hipótese de crescimento temperado para verificar que podemos utilizar o lema anterior.

1.2. Traço em uma Aresta M

Demonstração. Considere $v \in \Gamma$ e ψ uma função teste em \mathbb{R}^{2n+d} com suporte suficientemente pequeno. Nestas condições defina a função:

$$F(\sigma) = \iiint_{\mathbb{R}^{2n+d}} f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v) \psi(x, y, s) \, dx \, dy \, ds,$$

onde $u = x + iy$. Queremos mostrar que existe $\lim_{\sigma \rightarrow 0} F(\sigma)$.

Inicialmente, vamos diferenciar sob o sinal da integral e obter:

$$F'(\sigma) = \sum_{l=1}^d \iiint_{\mathbb{R}^{2n+d}} f_{w_l}(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v) (iv_l) \psi(x, y, s) \, dx \, dy \, ds,$$

onde f_{w_l} é l -ésima derivada com respeito à componente w de $f(u, w)$.

Derivando $f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v)$ com respeito a s_m obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial s_m} (f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v)) = \sum_{l=1}^d f_{w_l}(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v) (\delta_{ml} + i\phi_{l,s_m}(u, \bar{u}, s)),$$

onde δ_{ml} é o Delta de Kronecker.

Como $d\phi_l(0) = 0$ podemos reescrever $\delta_{ml} + i\phi_{l,s_m}(u, \bar{u}, s)$ como funções suaves $a_{lm}(u, \bar{u}, s)$ tais que $a_{lm}(0) = \delta_{ml}$. Com esta simplificação temos:

$$f_{w_l}(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v) = \sum_{m=1}^d a_{lm}(u, \bar{u}, s) \frac{\partial}{\partial s_m} (f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v)).$$

Substituindo a equação anterior na fórmula de $F'(\sigma)$, obtemos que $F'(\sigma) =$

$$\sum_{l,m=1}^d \iiint_{\mathbb{R}^{2n+d}} a_{lm}(u, \bar{u}, s) \frac{\partial}{\partial s_m} (f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v)) \, iv_l \psi(x, y, s) \, dx \, dy \, ds.$$

Integrando por partes temos que $F'(\sigma) =$

$$- \sum_{l,m=1}^d \iiint_{\mathbb{R}^{2n+d}} \frac{\partial}{\partial s_m} (a_{lm}(u, \bar{u}, s) \, iv_l \psi(x, y, s)) f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v) \, dx \, dy \, ds.$$

Ora, da hipótese de crescimento temperado temos que $|f(u, s + i\phi(u, \bar{u}, s) + i\sigma v)| \leq C/\sigma^k$.

1.2. Traço em uma Aresta M

Como $a_{lm}(u, \bar{u}, s) i v_l \psi(x, y, s)$ não depende de σ obtemos a estimativa desejada para a primeira derivada de F :

$$|F'(\sigma)| \leq \frac{C}{\sigma^k}.$$

Naturalmente, para majorar as próximas derivadas, basta repetir os cálculos anteriores com a ordem desejada. \square

Da demonstração, concluímos que tomado $v \in \Gamma$ e construída a aplicação $F(\sigma) = F_v(\sigma)$ como anteriormente temos que:

$$\langle bf, \psi \rangle = \lim_{\sigma \rightarrow 0} F(\sigma).$$

Agora vamos nos dedicar ao estudo da continuidade do operador b neste contexto mais geral. Neste caso, a técnica que utilizamos para verificar a existência do traço será suficiente para investigarmos sua continuidade.

Uma inspeção da demonstração nos mostra que:

$$|\langle bf, \psi \rangle| = \left| \lim_{\sigma \rightarrow 0} F(\sigma) \right| \leq C_l \|f\|_l,$$

onde $l \geq k$.

Inicialmente, suponha uma sequência $\{f_n\} \in C^\omega(\mathcal{W})$ tal que exista uma constante $C > 0$ e um inteiro $k \geq 0$ tal que:

$$|f_n(z)| \leq \frac{C}{|\text{dist}(z, M)|^k}, \forall z \in \mathcal{W}.$$

Suponha que $\{f_n\}$ convirja a zero em compactos de \mathcal{W} . Inicialmente tome uma função ψ em M com suporte suficientemente pequeno K_0 . Observe que o estudo do valor de fronteira bf_n depende apenas do comportamento de f_n para valores de (u, w) suficientemente próximos de K_0 . Nestas condições dado $\varepsilon > 0$ existe um n_0 tal que se $|s| < C, |u| < C, |v| < C$ então $|f_n| < \varepsilon$. Desta forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|s|, |u|, |v| < C} |v|^k |f_n(u, w)| \leq C^k \varepsilon$$

Consequentemente, $\|f\|_k \rightarrow 0$ e, portanto, $bf_n \rightarrow 0$.

NOTAS PARA O CAPÍTULO 1

Quando definimos a distribuição bf na segunda seção nós fixamos um sistema de coordenadas em M . *A priori* é preciso demonstrar que bf independe dessa escolha. Apesar de não ter havido esta preocupação neste texto a estratégia é a seguinte: construa uma sequência f_n de aplicações em $E_k(\mathcal{W})$ que são contínuas até depois da aresta M tal que $\|f - f_n\|_{2k} \rightarrow 0$. Como $bf_n = f_n|_M$ independe da escolha de coordenadas (pois f_n são aplicações contínuas até M), então segue o mesmo para bf . Para detalhes das demonstrações ausentes nesta seção consulte o capítulo VII de [BER99]. Já para maiores informações sobre a primeira seção consulte o capítulo III de [Hör83].

CAPÍTULO 2

Teorema de Aproximação CR

RESUMO

O Teorema de Aproximação, provado em 1981 por Baouendi e Treves, é uma das principais ferramentas disponíveis na teoria das estruturas localmente integráveis. Esse resultado estabelece que qualquer distribuição h que seja solução das seções de uma estrutura localmente integrável \mathcal{L} em uma variedade diferenciável M pode expressar-se localmente como limite de uma sequência de soluções suaves da forma $P_k \circ Z$. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [BCH08, cap. II].

De forma geral é impossível esperar que a convergência dada pelo Teorema de Aproximação seja melhor que local. Mais precisamente: não se pode oferecer quaisquer mecanismos de controle sobre o aberto onde se dá a convergência $P_k \circ Z \rightarrow h$ com as hipóteses pouco restritivas requeridas pelo teorema. O principal problema envolvido nessa questão é a natureza euclidiana local de uma variedade M e a impossibilidade associada a ela de se obter uma carta de parametrização global.

Neste capítulo iremos apresentar uma versão do Teorema de Aproximação que apresenta hipóteses mais restritivas — tanto em M como em \mathcal{L} — e, em contrapartida, obteremos uma convergência em qualquer compacto dado.

2.1 Sistema de Coordenadas

Considere $q : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^d$ quádrica, isto é, q é bilinear e $\overline{q(u, v)} = q(\bar{v}, \bar{u})$. Observando que $q = (q_1, \dots, q_d)$ é claro que cada aplicação $q_i : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação quádrica. Se $w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^m$ então:

$$q_l(w, \bar{w}) = \sum_{i,j} w_i \bar{w}_j a_{ij}^l \text{ com } \overline{a_{ij}^l} = a_{ji}^l.$$

Defina a seguinte variedade:

$$M = \{(w, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d, \exists t = q(w, \bar{w})\}.$$

Como q é quádrica note que $\overline{q(w, \bar{w})} = q(w, \bar{w})$, isto é, $q(w, \bar{w}) \in \mathbb{R}^d$. Observe que M nada mais é senão o conjunto $M = \{w_1, \dots, w_m, x_1 + i q_1(w, \bar{w}), \dots, x_d + i q_d(w, \bar{w})\}$. Em particular M é gráfico sobre $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^d \approx \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^d$ e conseqüentemente temos que $\dim M = 2m + d$.

Deste ponto em diante nos referiremos a M como *variedade quádrica*. Note que, em alguns contextos, pode-se também entender por variedade quádrica o conjunto $M = \{(w, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d, \Re t = q(w, \bar{w})\}$. A vantagem dessa classe de superfícies se tornará clara a medida que formos caminhando em nossos cálculos: a presença de uma parametrização global que satisfaz uma certa estimativa polinomial.

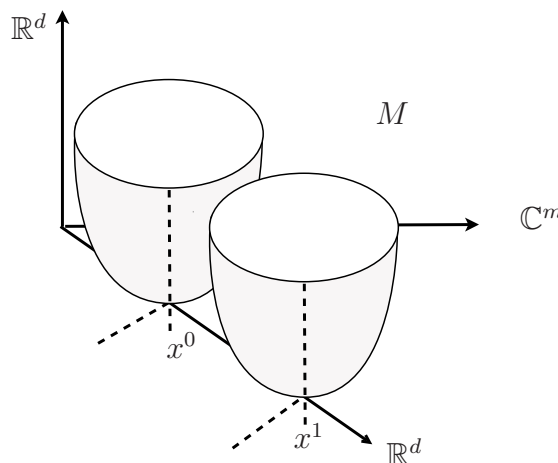


Figura 2.1: Esboço de uma variedade quádrica

2.1. Sistema de Coordenadas

Suponha $w = u + i v$. Em termos de coordenadas em $\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^d$ consideraremos:

$$(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_d).$$

Seja $\tilde{q}(u, v) = q(u + i v, u - i v)$ e considere a aplicação:

$$\begin{aligned} Z : \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d \\ (u, v, x) &\longmapsto (u + i v, x + i \tilde{q}(u, v)). \end{aligned}$$

Ora, Z é uma parametrização global para M . Suas coordenadas complexas, doravante denotadas por $Z_1, \dots, Z_m, Z_{m+1}, \dots, Z_{m+d}$, são

Caso A $1 \leq s \leq m$:

$$Z_s = u_s + i v_s,$$

Caso B $1 + m \leq s \leq d$:

$$Z_s = x_{s-m} + i \tilde{q}_{s-m}(u, v).$$

Para um ponto (u', v', x') arbitrário a matriz jacobiana de Z com respeito às variáveis (u, x) (doravante indicada por $Z_{u,x}$ ou Z_ϕ) tem determinante identicamente 1. De fato,

$$Z_{u,x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_j}{\partial u_i} & \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} \\ \frac{\partial Z_j}{\partial u_i} & \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

Lembre-se: a matriz anterior tem $m+d$ linhas. As primeiras m correspondem a $(u, v, x) \longmapsto (u + i v)$. Já o restante das linhas corresponde a $(u, v, x) \longmapsto x + i \tilde{q}(u, v)$. Com isto obtemos a seguinte matriz triangular inferior, cujo determinante é facilmente calculado:

2.1. Sistema de Coordenadas

$$Z_{u,x} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \tilde{q}_1(u',v')}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_1(u',v')}{\partial u_m} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{q}_d(u',v')}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_d(u',v')}{\partial u_m} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nosso próximo objetivo é introduzir certos campos e analisar sua interação com nossa aplicação Z . Considere M_k , $k = 1, \dots, m + d$, dados por

Caso A $1 \leq k \leq m$:

$$M_k = \frac{\partial}{\partial u_k} - i \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

Caso B $m + 1 \leq k \leq m + d$:

$$M_k = \frac{\partial}{\partial x_{k-m}}.$$

A próxima etapa é investigar a relação entre os campos M_k e as coordenadas da carta global da variedade M . Com efeito,

Afirmção 9. *Se $1 \leq k, s \leq m + d$ então $M_k Z_s = \delta_{ks}$.*

Demonstração. A estratégia consiste em analisar todos os possíveis casos. Inicialmente, suponha que $1 \leq k \leq m$. Desta forma obtemos dois casos: o primeiro é $1 \leq s \leq m$. Consequentemente:

$$M_k(u_s + i v_s) = \frac{\partial u_s}{\partial u_k} = \delta_{ks}.$$

Já o segundo caso é $m + 1 \leq s \leq m + d$. Com o qual temos:

$$M_k(x_{s-m} + i \tilde{q}_{s-m}) = i \frac{\partial \tilde{q}_{s-m}}{\partial u_k} - i \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u_k} \frac{\partial x_{s-m}}{\partial x_l} = i \frac{\partial \tilde{q}_{s-m}}{\partial u_k} - i \frac{\partial \tilde{q}_{s-m}}{\partial u_k} = 0 = \delta_{ks}.$$

Para concluirmos suponha que $m + 1 \leq k \leq m + d$. Novamente obtemos dois casos: o primeiro é $1 \leq s \leq m$. Facilmente verificamos que:

$$M_k Z_s = \frac{\partial (u_s + i v_s)}{\partial x_{k-m}} = 0 = \delta_{ks}.$$

2.1. Sistema de Coordenadas

Já no segundo caso, com $m + 1 \leq s \leq m + d$, obtemos:

$$M_k Z_s = \frac{\partial}{\partial x_{k-m}} (x_{s-m} + i \tilde{q}_{s-m}) = \delta_{k-m, s-m} = \delta_{ks}.$$

□

Com o objetivo de simplificarmos a notação, defina, para $1 \leq k \leq m + d$, $\Phi_k = \Im Z_k$. Lembrando da definição das coordenadas de Z é imediato observar que para $1 \leq j \leq m$ ocorre que

Caso A $1 \leq k \leq m$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial v_j} = \delta_{kj};$$

Caso B $m + 1 \leq k \leq m + d$:

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial v_j} = \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j}.$$

A partir deste ponto considere, para $1 \leq j \leq m$, os campos:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial v_j} - i \sum_{k=1}^{m+d} \frac{\partial \Phi_k}{\partial v_j} M_k.$$

Continuando com nosso estudo iremos procurar entender a relação entre os campos L_j e as coordenadas da carta global da variedade M . Com efeito,

Afirmção 10. Para $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq l \leq m + d$ vale que $L_j Z_l = 0$.

Demonstração. De fato,

$$L_j Z_l = \frac{\partial Z_l}{\partial v_j} - i \sum_{k=1}^{m+d} \frac{\partial \Phi_k}{\partial v_j} \delta_{kl} = \frac{\partial Z_l}{\partial v_j} - i \frac{\partial \Phi_l}{\partial v_j}.$$

Como $\Re Z_l$ não depende de v e lembrando que $\Phi_l = \Im Z_l$ então segue que

$$\frac{\partial Z_l}{\partial v_j} - i \frac{\partial \Phi_l}{\partial v_j} = \frac{\partial i \Im Z_l}{\partial v_j} - i \frac{\partial \Phi_l}{\partial v_j} = i \frac{\partial \Phi_l}{\partial v_j} - i \frac{\partial \Phi_l}{\partial v_j} = 0.$$

□

2.1. Sistema de Coordenadas

A expressão dos campos L_j foi bem útil para computarmos o valor de $L_j Z_l$, mas para continuarmos nosso trabalho será preciso encontrar uma formulação equivalente. O próximo objetivo é encontrar uma expressão que simplifique a representação dos campos L_j . Para isso comecemos observando que:

$$\sum_{k=1}^{m+d} \frac{\partial \Phi_k}{\partial v_j} M_k = \sum_{k=1}^m \delta_{kj} M_k + \sum_{k=m+1}^{m+d} \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j} M_k = M_j + \sum_{k=m+1}^{m+d} \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j} M_k.$$

Como $M_k = \frac{\partial}{\partial x_{k-m}}$ se $m+1 \leq k \leq m+d$ então temos que:

$$\sum_{k=1}^{m+d} \frac{\partial \Phi_k}{\partial v_j} M_k = M_j + \sum_{k=m+1}^{m+d} \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_{k-m}}.$$

Conseqüentemente temos:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial v_j} - i \left(M_j + \sum_{k=m+1}^{m+d} \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_{k-m}} \right).$$

Como $1 \leq j \leq m$ temos que $M_j = \frac{\partial}{\partial u_j} - i \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial x_l}$ e por ora podemos obter:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial v_j} - i \left(\frac{\partial}{\partial u_j} - i \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{k=m+1}^{m+d} \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_{k-m}} \right).$$

Distribuindo temos:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial v_j} - i \frac{\partial}{\partial u_j} - \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial x_l} - i \sum_{k=m+1}^{m+d} \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_{k-m}}.$$

Aplicando uma translação em um dos somatórios obtemos a igualdade:

$$\sum_{k=m+1}^{m+d} \frac{\partial \tilde{q}_{k-m}}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_{k-m}} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Desta forma podemos escrever:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial v_j} - i \frac{\partial}{\partial u_j} - \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial x_l} - i \sum_{l=1}^d \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial v_j} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

2.1. Sistema de Coordenadas

Concluimos que:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial v_j} - i \frac{\partial}{\partial u_j} - i \sum_{l=1}^d \left(-i \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial u_j} + \frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial v_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Lembrando as equações de Cauchy-Riemann:

$$(-2i) \bar{\partial}_j = -i \frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial}{\partial v_j}.$$

Podemos finalmente concluir que, a menos de uma constante,

$$L_j = \bar{\partial}_j - i \sum_{l=1}^d (\bar{\partial}_j \tilde{q}_l) \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Neste ponto é importante discutirmos algumas propriedades dos campos L_j . Inicialmente é fácil de verificar que eles constituem geradores linearmente independentes para uma estrutura localmente integrável \mathcal{L} . Além disso, observamos que L_j são campos tangentes a M que também são combinações lineares dos campos de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Em particular temos que se $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d)$ então $\mathcal{L}(h|M) = 0$. Depois dessa pequena discussão podemos enunciar a

Definição 11. O conjunto $\{Z_1, \dots, Z_m, Z_{m+1}, \dots, Z_{m+d}\}$ é dito ser um *conjunto completo de integrais primeiras*. Os campos $\{L_1, \dots, L_m\}$ são chamados de *geradores da estrutura CR* de M . Além disso, uma aplicação (ou mais geralmente, uma distribuição) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^d)$ é dita CR se $L_j u = 0$ para todo $1 \leq j \leq m$. O conjunto de todas as *distribuições CR* será denotado por $\text{CR}(M)$.

Os campos L_j e M_k possuem uma importante propriedade quando olhados em conjunto. Ora, como esses campos comutam dois a dois e geram \mathcal{CTM} , segue das propriedades destes campos (juntamente com o fato de que $dZ_1, \dots, dZ_{m+d}, dv_1, \dots, dv_m$ geram \mathcal{CT}^*M) que os campos L_j e M_k constituem uma base (em um sentido específico) para o diferencial de uma aplicação suave – em outras palavras: se $g \in C^\infty(M)$ então:

$$dg = \sum_{j=1}^m L_j g dv_j + \sum_{k=1}^{m+d} M_k g dZ_k \quad (2.1.1)$$

2.2 Operador de Aproximação Modificado

Dado $m \in \mathbb{N}$ e para cada $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, defina o número complexo $(z)^m$ por $z_1^m + \dots + z_n^m$. Naturalmente essa notação deve ser entendida como uma extensão natural da definição usual de $(z)^m$ caso $z \in \mathbb{C}$.

Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ e defina a função

$$E : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\eta, \zeta) \longmapsto \frac{1}{\omega} e^{(\zeta)^2 - (\eta)^4},$$

onde ω é escolhida de tal forma que

$$\iint_{\mathbb{R}^{p+q}} E(it, is) dt ds = 1.$$

Façamos uma pausa para uma discussão técnica.

Lema 12. *Seja $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira tal que se $z \in \mathbb{R}^n$ então $f(z) = 1$. Nestas condições vale que $f \equiv 1$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha $n = 2$. Primeiramente fixe $z_2 \in \mathbb{C}$. Como $z \longrightarrow f(z, z_2)$ é inteira e constante igual a 1 em um conjunto com ponto de acumulação em \mathbb{C} então é claro que $z \longmapsto f(z, z_2) \equiv 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Agora fixe $z_1 \in \mathbb{C}$. É claro que $z \longrightarrow f(z_1, z)$ é inteira (e lembrando que \mathbb{R} tem um ponto de acumulação em \mathbb{C}) então é claro que $z \longmapsto f(z_1, z) \equiv 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto segue o resultado. \square

Depois desta pequena digressão sobre funções de várias variáveis complexas vamos enunciar e demonstrar uma propriedade muito interessante do nosso núcleo.

Lema 13. *Para toda matriz B com $p \times q$ elementos complexos vale:*

$$\omega = \iint_{\mathbb{R}^{p+q}} e^{-(s+Bt)^2 - (t)^4} dt ds.$$

Demonstração. Considere a função:

$$I(B) = \frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{p+q}} e^{-(s+Bt)^2 - (t)^4} dt ds.$$

2.2. Operador de Aproximação Modificado

Derivando sob o sinal da integral, concluímos que I é uma função inteira na variável complexa B . Afirmamos que quando B tem entradas reais $I(B) \equiv 1$. De fato, aplicando a mudança de variável $\widehat{s} = s + Bt$ e $\widehat{t} = t$ e observando que seu determinante jacobiano é 1, pois

$$J = \left[\begin{array}{c|c} \text{Id} & B \\ \hline 0 & \text{Id} \end{array} \right],$$

concluímos que:

$$I(B) = \frac{1}{w} \iint_{\mathbb{R}^{p+q}} e^{-(\widehat{s})^2 - (\widehat{t})^4} d\widehat{t} d\widehat{s} = \iint_{\mathbb{R}^{p+q}} E(it, is) dt ds = 1.$$

Pelo lema anterior segue o resultado. □

Lembrando que $u \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^d$ escolha uma aplicação $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+d})$ satisfazendo as condições:

1. $f(u, x) = 0$ para $|(u, x)| > 2$;
2. $f(u, x) = 1$ para $|(u, x)| \leq 1$.

Para $p > 0$ defina a função $f_p : \mathbb{R}^{m+d} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_p(u, x) = f(pu, px)$. Naturalmente f_p depende da escolha da própria f , do parâmetro p e também é uma função teste.

Conforme discutido na seção anterior, existem duas classes de componentes de nosso conjunto de integrais primeiras. Vamos considerar $Z = (Z^1, Z^2)$ onde $Z^1 = (Z_1, \dots, Z_m)$ e $Z^2 = (Z_{m+1}, \dots, Z_{m+d})$. Lembre-se que não existe possibilidade de confusão entre Z^2 e $(Z)^2$ ou entre Z^1 e $(Z)^1$: os primeiros símbolos são aplicações com d e m componentes respectivamente, já os segundos símbolos são números complexos.

Introduziremos uma notação que será muito utilizada deste ponto em diante. Para $\tau > 0$ denote por $e_\tau(u, v, x, u', v', x')$ a expressão:

$$\exp \left\{ -\tau (Z^1(u, v, x) - Z^1(u', v', x'))^4 \right\} \exp \left\{ -\tau^{1/2} (Z^2(u, v, x) - Z^2(u', v', x'))^2 \right\}.$$

Considerando que $Z^1(u, v, x) = u + iv$ e $Z^2(u, v, x) = x + i\tilde{q}(u, v)$ podemos calcular e_τ quando $v = v'$ com facilidade. De fato,

$$e_\tau(u, v, x, u', v, x') = \exp \left\{ -\tau (u - u')^4 - \tau^{1/2} (x - x' + i(\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v)))^2 \right\}.$$

2.2. Operador de Aproximação Modificado

A partir deste momento considere $h \in \text{CR}(M) \cap C^\infty(M)$ e, para $p > 0$ a ser escolhido oportunamente, defina $\rho(u, v, x) = f_p(u, x) h(u, v, x)$.

Construa o operador de aproximação modificado $G_\tau h(u, v, x)$ da seguinte forma:

$$G_\tau h(u, v, x) = \frac{\tau^{d/4+m/4}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} e_\tau(u, v, x, u', v, x') \rho(u', v, x') du' dx'.$$

Antes de prosseguirmos é importante salientar alguns pontos. Primeiro, a integral acima está bem definida pois todas as funções são suaves e ρ tem suporte compacto. Desta forma, temos que $G_\tau h$ é uma função suave das variáveis (u, v, x) que, infelizmente, não tem razão para ser uma função analítica. Além disso, no caso trivial em que $\tilde{q} \equiv 0$ é fácil de ver que $G_\tau h$ é simplesmente a convolução de h com uma Gaussiana. Isso nos inspira a verificar se $G_\tau h$ se comporta como uma aproximação da identidade. De forma geral esses pontos justificam o nome de “operador de aproximação modificado” para $G_\tau h$.

Depois dessas pequenas observações podemos continuar usando o lema 13 e obter:

$$\rho(u, v, x) = \frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ - (x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 - (u')^4 \right\} \rho(u, v, x) du' dx'. \quad (2.2.1)$$

Aplicando a mudança de variável $x' \rightarrow x + \tau^{-1/4} x'$ e $u' \rightarrow u + \tau^{-1/4} u'$ (cujo determinante jacobiano é $\tau^{-d/4-m/4}$) no operador de aproximação modificado segue que $G_\tau h(u, v, x)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ - (u')^4 - \tau^{1/2} \left(-\tau^{-1/4} x' + i \left(\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u + \tau^{-1/4} u', v) \right) \right)^2 \right\} \\ & \cdot \rho(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') du' dx'. \end{aligned}$$

Que pode ser reescrito como $G_\tau h(u, v, x) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ - (u')^4 - \tau^{1/2} \left(Z^2(u, v, x) - Z^2(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') \right)^2 \right\} \\ & \cdot \rho(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') du' dx'. \end{aligned}$$

2.3 Convergência do Operador Modificado

Vamos calcular $(G_\tau h - \rho)(u, v, x)$ utilizando a identidade 2.2.1, separar em duas partes de maneira conveniente e em seguida estimar cada uma das partes. Inicialmente observe que

$$(G_\tau h - \rho)(u, v, x) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ -(u')^4 - \tau^{1/2} (Z^2(u, v, x) - Z^2(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x'))^2 \right\} \\ & \quad \cdot \rho(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') - \exp \left\{ -(x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 - (u')^4 \right\} \\ & \quad \cdot \rho(u, v, x) \, du' \, dx'. \end{aligned}$$

Em seguida podemos acrescentar e subtrair o termo:

$$\frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ -(x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 - (u')^4 \right\} \rho(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') \, du' \, dx'.$$

Finalmente obtendo que $(G_\tau h - \rho)(u, v, x) = I_\tau + J_\tau$, onde

$$\begin{aligned} I_\tau(u, v, x) = & \frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ -(x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 - (u')^4 \right\} \\ & \cdot [\rho(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') - \rho(u, v, x)] \, du' \, dx', \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\tau(u, v, x) = & \frac{1}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \left[\exp \left\{ -(u')^4 - \tau^{1/2} (Z^2(u, v, x) - Z^2(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x'))^2 \right\} \right. \\ & \left. - \exp \left\{ -(x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 - (u')^4 \right\} \right] \\ & \cdot \rho(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') \, du' \, dx'. \end{aligned}$$

Considere $R > 0$ a ser escolhido oportunamente. A próxima etapa será estimar I_τ . Como $\nabla_{x,u} \rho(u, v, x)$ é limitado em $\mathbb{R}^m \times \{|v| \leq R\} \times \mathbb{R}^d$ então podemos utilizar a Desigualdade do Valor Médio e a Desigualdade Triangular e obter:

$$|\rho(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') - \rho(u, v, x)| \leq \|\nabla_u \rho\|_\infty \tau^{-1/4} + \|\nabla_x \rho\|_\infty \tau^{-1/4}.$$

Deste ponto em diante suponha que $|u| \leq R$. Nestas condições nosso espaço de trabalho se

2.3. Convergência do Operador Modificado

reduz a $\{|u| < R\} \times \{|v| \leq R\} \times \mathbb{R}^d$. Como $\iint_{\mathbb{R}^{m+d}} |\exp\{- (x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 - (u')^4\}| dx' du'$ se torna $\iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp\{-(x')^2 + (D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 - (u')^4\} dx' du' \leq L(R)$ obtemos a estimativa final

$$|I_\tau(u, v, x)| \leq \frac{1}{|\omega|} L \|\nabla_u \rho\|_\infty \tau^{-1/4} + \frac{1}{|\omega|} \|\nabla_u \rho\|_\infty \tau^{-1/2} \longrightarrow 0$$

uniformemente em $\{|u| \leq R\} \times \{|v| \leq R\} \times \mathbb{R}^d$.

Vamos agora a um pequeno argumento técnico auxiliar para estimarmos J_τ . Defina

$$\zeta_1 = \left\{ -(u')^4 - \tau^{1/2} \left(Z^2(u, v, x) - Z^2(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') \right)^2 \right\}$$

assim como

$$\zeta_2 = \left\{ -(u')^4 - (x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 \right\}.$$

Afirmção 14. $\exp\{\zeta_1\} \longrightarrow \exp\{\zeta_2\}$ uniformemente em $\{|u| \leq R\} \times \{|v| \leq R\} \times \mathbb{R}^d$.

Demonstração. De fato, $-\tau^{1/2} \left(Z^2(u, v, x) - Z^2(u + \tau^{-1/4} u', v, x + \tau^{-1/4} x') \right)^2$ pode ser escrito como $-\tau^{1/2} \left(-\tau^{-1/4} x' + i \left(\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u + \tau^{-1/4} u', v) \right) \right)^2$. Ajustando as potências de τ , obtemos:

$$- \left(-x' + i \frac{[\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u + \tau^{-1/4} u', v)]}{\tau^{-1/4}} \right)^2.$$

Como $D_u \tilde{q}(u, v)$ é linear em u então o coeficiente de Leibnitz converge uniformemente para sua derivada. Com isto a última expressão converge uniformemente para:

$$- (-x' - i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2 = - (x' + i D_u \tilde{q}(u, v) u')^2.$$

Verifiquemos por um instante que $\Re \zeta_1$ e $\Re \zeta_2$ são limitadas em $\{|u| \leq R\} \times \{|v| \leq R\} \times \mathbb{R}^d$. Ora, $\Re \zeta_2 = -(u')^4 - (x')^2 + (D_u \tilde{q}(u, v) u')^2$ que é claramente limitado. Já $\Re \zeta_1 = -(u')^4 - \tau^{1/2} \left(-\tau^{-1/4} x' \right)^2 + \tau^{1/2} \left(\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u + \tau^{-1/4} u', v) \right)^2$. Que pode ser formulado e estimado como

$$-(u')^4 - (x')^2 + \left(\frac{\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u + \tau^{-1/4} u', v)}{\tau^{1/4}} \right)^2 \leq -(u')^4 - (x')^2 + (\sup D_u \tilde{q}(u, v))^2.$$

Como e^ζ é Lipschitziano em $\Re \zeta \leq C$ então $|e^{\zeta_1} - e^{\zeta_2}| \leq K |\zeta_1 - \zeta_2|$. Como $\zeta_1 \longrightarrow \zeta_2$ uniformemente então segue o resultado. \square

2.4. Operador de Aproximação e Operador Resto

Agora estamos em condições de estimar J_τ . Inicialmente fixe um $K \in \mathbb{R}^+$ e observe que:

$$|\exp\{\zeta_1\} - \exp\{\zeta_2\}| \leq \exp\{\Re\zeta_1\} + \exp\{\Re\zeta_2\} \leq C \exp\{-(u')^4 - (x')^2\}.$$

Escreva $\Omega(K)$ para indicar o subconjunto de \mathbb{R}^{m+d} definido pela intersecção de $|u'| < K$ com $|x'| < K$. Com isto,

$$J_\tau(u, v, x) \leq C \iint_{\Omega(K)} |e^{\zeta_1} - e^{\zeta_2}| \, du' \, dx' + C \iint_{\mathbb{R}^{m+d} \setminus \Omega(K)} \exp\{-(u')^4 - (x')^2\} \, du' \, dx'.$$

Note que escolhendo K suficientemente grande a segunda parcela da soma anterior diminui, já para τ suficientemente grande, a primeira parcela fica pequena. Com isto mostramos que $G_\tau h(u, v, x) \rightarrow \rho(u, v, x)$ uniformemente em $\{|u| \leq R\} \times \{|v| \leq R\} \times \mathbb{R}^d$. É interessante observar que até o presente momento não foi preciso utilizar a hipótese de que a aplicação h é CR para mostrar que $G_\tau h(u, v, x) \rightarrow \rho(u, v, x)$. Na próxima etapa esse fato sera crucial.

2.4 Operador de Aproximação e Operador Resto

A partir deste momento considere $h \in \text{CR}(M) \cap C^\infty(M)$ e, para $p > 0$ a ser escolhido oportunamente, lembre que $\rho(u, v, x) = f_p(u, x) h(u, v, x)$.

Construa o operador de aproximação $E_\tau h(u, v, x)$ da seguinte forma

$$E_\tau h(u, v, x) = \frac{\tau^{d/4+m/4}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} e_\tau(u, v, x, u', 0, x') \rho(u', 0, x') \, du' \, dx'$$

Antes de prosseguirmos é importante ressaltar algumas informações. Assim como no caso anterior, a integral acima está bem definida pois todas as funções são suaves e ρ tem suporte compacto. A diferença crucial consiste no fato de que desta vez temos que $E_\tau h$ é uma função inteira das variáveis (u, v, x) — fato que pode ser facilmente verificado derivando sob o sinal da integral. Por estas razões este operador será chamado de “operador de aproximação”.

A relação entre os operadores $E_\tau h$ e $G_\tau h$ é central neste trabalho e será estudada nesta seção. Para começar esta análise construa também o operador resto:

$$R_\tau h(u, v, x) = G_\tau h(u, v, x) - E_\tau h(u, v, x).$$

2.4. Operador de Aproximação e Operador Resto

O próximo objetivo é mostrar que $R_\tau h \rightarrow 0$ uniformemente em compactos a medida que $\tau \rightarrow \infty$.

Para (u, v, x) fixado considere a $(m + d)$ -forma:

$$\Gamma(u', v', x') = \frac{\tau^{m/4+d/4}}{\omega} e_\tau(u, v, x, u', v', x') \rho(u', v', x') dZ(x', t'),$$

onde $dZ(x', t') = dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_{m+d}$. Desta forma podemos escrever:

$$G_\tau h(u, v, x) = \int_{\mathbb{R}^{m+d} \times \{v\}} \Gamma \quad \text{e} \quad E_\tau h(u, v, x) = \int_{\mathbb{R}^{m+d} \times \{0\}} \Gamma.$$

Denotando o segmento ligando v a origem por $[0, v]$, podemos lançar mão do Teorema de Stokes e obter:

$$R_\tau h(u, v, x) = G_\tau h(u, v, x) - E_\tau h(u, v, x) = \int_{\mathbb{R}^{m+d} \times [0, v]} d\Gamma.$$

Para calcularmos $d\Gamma$ vamos utilizar a fórmula 2.1.1 para ρ e observar que $d\Gamma = d\rho \wedge dZ$. Como os termos da expansão que não se anulam são justamente aqueles que não contém dZ_j , obtemos que $d\Gamma = \sum_{j=1}^m L_j \rho dv_j \wedge dZ$. Pela regra de Leibnitz temos $d\Gamma = \sum_{j=1}^m L_j h dv_j \wedge dZ + \sum_{j=1}^m L_j f_p dv_j \wedge dZ$. Ora, como h é uma função CR a primeira soma é identicamente nula. Consequentemente:

$$R_\tau h(u, v, x) = \frac{\tau^{m/4+d/4}}{\omega} \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbb{R}^{m+d} \times [0, v]} e_\tau(u, v, x, u', v', x') h(u', v', x') L_j f_p(u', x') dv_j \wedge dZ.$$

Deste ponto em diante considere $T > 0$ a ser escolhido futuramente e assumamos que $|x| \leq R$, $|u| \leq R$ e $|v| \leq T$. Queremos estimar o fator exponencial presente na integral anterior. Se conseguirmos mostrar que $e_\tau(u, v, x, u', v', x') \rightarrow 0$, mostraremos que $R_\tau h(u, v, x) \rightarrow 0$. Lembrando que $Z^1(u, v, x) = u + iv$, $Z^2(u, v, x) = x + i\tilde{q}(u, v)$ e representando as variáveis (u, v, x, u', v', x') por \cdot temos:

$$\begin{aligned} e_\tau(\cdot) &= \exp \left\{ -\tau (Z^1(u, v, x) - Z^1(u', v', x'))^4 - \tau^{1/2} (Z^2(u, v, x) - Z^2(u', v', x'))^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\tau (u - u' + i(v - v'))^4 - \tau^{1/2} (x - x' + i(\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v')))^2 \right\} \\ &= e_\tau^1(u, v, x, u', v', x') e_\tau^2(u, v, x, u', v', x'). \end{aligned}$$

2.4. Operador de Aproximação e Operador Resto

Em outras palavras: a função exponencial que queremos estimar foi dividida em duas partes de natureza distintas, a saber:

$$e_\tau^1(u, v, x, u', v', x') = \exp \left\{ -\tau (u - u' + i (v - v'))^4 \right\} \text{ e}$$

$$e_\tau^2(u, v, x, u', v', x') = \exp \left\{ -\tau^{1/2} (x - x' + i (\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v')))^2 \right\}.$$

Para estimar $e_\tau^1(\cdot)$ e $e_\tau^2(\cdot)$ começaremos com algumas observações iniciais. Note que $L_j f_p(u', x')$ se anula quando f_p for constante. Sabidamente essa situação ocorre nos seguintes casos:

Caso A $\frac{1}{\sqrt{2}p} \geq |u'|$ e $\frac{1}{\sqrt{2}p} \geq |x'|$ que implicam $|(u', x')| \leq \frac{1}{p}$;

ou

Caso B $\frac{2}{p} < |u'|$ ou $\frac{2}{p} < |x'|$ que implicam $|(u', x')| > \frac{2}{p}$.

Naturalmente é suficiente estimar $e_\tau(\cdot)$ quando $L_j f_p$ for distinto de zero. De acordo com a análise anterior podemos supor, sem perda de generalidade, que:

Caso A $|u'| > \frac{1}{\sqrt{2}p}$ ou $|x'| > \frac{1}{\sqrt{2}p}$;

e

Caso B $|u'| \leq \frac{2}{p}$ e $|x'| \leq \frac{2}{p}$.

Além disso observe que $v' \in [0, v]$ e portanto $|v'| \leq |v| \leq T$. Dado que $v - v' \in [0, v]$ então também podemos observar que $|v - v'| \leq |v| \leq T$.

De posse de todas essas estimativas sobre nossas variáveis podemos começar a estimar e_τ^1 . Ora, $|e_\tau^1(u, v, x, u', v', x')| = |\exp \{-\tau (u - u' + i (v - v'))^4\}| = \exp \{-\tau \Re (u - u' + i (v - v'))^4\}$. É claro que $-\Re (u - u' + i (v - v'))^4 = -\sum_{j=1}^m \Re (u_j - u'_j + i (v_j - v'_j))^4$. Expandido a potência e desprezando os termos com parte imaginária obtemos:

$$\sum_{j=1}^m -(u_j - u'_j)^4 + 6 (u_j - u'_j)^2 (v_j - v'_j)^2 - (v_j - v'_j)^4.$$

Antes de continuarmos com a estimativa do termo acima vamos enunciar e demonstrar uma desigualdade muito útil.

2.4. Operador de Aproximação e Operador Resto

Afirmção 15. *Suponha que $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ são as coordenadas de vetores $x, y \in \mathbb{R}^m$. Nestas condições vale que:*

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 y_j^2 \leq |x|^2 |y|^2.$$

Demonstração. É claro que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_j^2 y_j^2 &\leq \sum_{j=1}^m x_j^2 y_j^2 + \sum_{j=1}^m \left(\left(\sum_{i=1, i \neq j}^m x_i^2 \right) y_j^2 \right) = \sum_{j=1}^m \left(x_j^2 y_j^2 + \left(\sum_{i=1, i \neq j}^m x_i^2 \right) y_j^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\left(x_j^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^m x_i^2 \right) y_j^2 \right) = \sum_{j=1}^m \left(\left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) y_j^2 \right) = \sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{j=1}^m y_j^2 = |x|^2 |y|^2 \end{aligned}$$

□

Depois desta pequena estimativa sobre somatórios, podemos aplicá-la sobre nossos vetores $(u_j - u'_j)$ e $(v_j - v'_j)$ para obter:

$$-(u - u')^4 - (v - v')^4 + 6 \sum_{j=1}^m (u_j - u'_j)^2 (v_j - v'_j)^2 \leq -(u - u')^4 - (v - v')^4 + C |u - u'|^2 |v - v'|^2.$$

Portanto:

$$|e_\tau^1(u, v, x, u', v', x')| \leq \exp \left\{ \tau \left(-(u - u')^4 - (v - v')^4 + C |u - u'|^2 |v - v'|^2 \right) \right\}.$$

Vamos estimar os 4 termos presentes acima na ordem em que aparecem:

- $(u - u')^4 \geq (|u'| - |u|)^4 \geq (-R)^4 = R^4;$
- $(v - v')^4 \geq (|v'| - |v|)^4 \geq T^4;$
- $C |u - u'|^2 \leq C (|u| + |u'|)^2 \leq C \left(R + \frac{2}{p} \right)^2;$
- $|v - v'|^2 \leq (|v| + |v'|)^2 \leq (2T)^2 = 4T^2.$

2.4. Operador de Aproximação e Operador Resto

O que finalmente nos permite concluir que:

$$|e_\tau^1(u, v, x, u', v', x')| \leq \exp \left\{ \tau \left(-R^4 - T^4 + C \left(R + \frac{2}{p} \right)^2 T^2 \right) \right\}.$$

Agora vamos analisar e_τ^2 . Ora, procedendo como anteriormente vamos expandir a potência do parâmetro da exponencial e desprezar a parte imaginária. Com isso obtemos:

$$\begin{aligned} |e_\tau^2(u, v, x, u', v', x')| &= \left| \exp \left\{ -\tau^{1/2} (x - x' + i (\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v'))) \right\} \right| \\ &= \exp \left\{ -\tau^{1/2} \Re (x - x' + i (\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v'))) \right\} \\ &= \exp \left\{ \tau^{1/2} \left(-(x - x')^2 + (\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v'))^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Antes de estimarmos os 2 termos presentes acima vamos introduzir um símbolo que suaviza a notação dos cálculos a seguir. Considere:

$$\|\tilde{q}\|_u = \sup_{\substack{\eta \in [u, u'] \\ |v| \leq T \\ |u'| \leq 2/p \\ |u| \leq R}} |D_u \tilde{q}(\eta, v)|.$$

Em outras palavras: para cada $|u'| \leq 2/p$ e $|u| \leq R$ fixe $\eta \in [u, u']$ e escolha $|v| \leq T$. Em seguida considere a norma da aplicação linear $D_u \tilde{q}(\eta, v)$. Nestas condições o número real positivo $\|\tilde{q}\|_u$ estabelece a maior norma possível dentre todas as possíveis escolhas. É importante notar que $\|\tilde{q}\|_u$ é uma função de \tilde{q} , R , T e p . Analogamente:

$$\|\tilde{q}\|_v = \sup_{\substack{\eta \in [v, v'] \\ |u| \leq R \\ |v'| \leq T \\ |v| \leq T}} |D_v \tilde{q}(u, \eta)|.$$

Agora estamos em condições de estimar os 2 termos presentes na exponencial.

- $|x - x'|^2 \geq (|x| - |x'|)^2 \geq \left(\frac{-2}{p} \right)^2 = \frac{4}{p^2};$

2.4. Operador de Aproximação e Operador Resto

- como $|u - u'| \leq |u| + |u'| \leq R + \frac{2}{p}$ então

$$\begin{aligned} |\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v')| &\leq |\tilde{q}(u, v) - \tilde{q}(u', v)| + |\tilde{q}(u', v) - \tilde{q}(u', v')| \\ &\leq \|\tilde{q}\|_u |u - u'| + \|\tilde{q}\|_v |v - v'| \\ &\leq \|\tilde{q}\|_u \left(R + \frac{2}{p}\right) + \|\tilde{q}\|_v T. \end{aligned}$$

O que finalmente nos permite concluir que $|e_\tau^2(u, v, x, u', v', x')|$ pode ser majorado por:

$$\exp \left\{ \tau^{1/2} \left(-\frac{4}{p^2} + \|\tilde{q}\|_u^2 \left(R + \frac{2}{p}\right)^2 + 2\|\tilde{q}\|_u \|\tilde{q}\|_v \left(R + \frac{2}{p}\right) T + \|\tilde{q}\|_v^2 T^2 \right) \right\}.$$

Com isso concluímos nossa estimativa para $e_\tau(\cdot) = e_\tau^1(\cdot) e_\tau^2(\cdot)$. Para demonstrar que $e_\tau \rightarrow 0$ uniformemente em $\{|u| \leq R\} \times \{|v| \leq T\} \times \{|x| \leq R\}$ vamos lançar mão do seguinte resultado.

Lema 16. Para $j = 1, \dots, m$ escolha $p_j > 0$ (distintos dois a dois) e $c_j \in \mathbb{R}$. Defina $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ como sendo o índice tal que $\max\{p_j\} = p_{j_0}$. Considere a sequência:

$$x_\tau = \prod_{j=1}^m \exp \{ \tau^{p_j} c_j \}.$$

Se ocorrer que $c_{j_0} < 0$ então:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = 0.$$

Demonstração. Considere a sequência auxiliar:

$$h_\tau = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m \tau^{p_j - p_{j_0}} c_j.$$

Como $\max\{p_j\} = p_{j_0}$ e as escolhas de p_j são distintas umas das outras segue que $p_{j_0} > p_j$ para todo $j \neq j_0$. Com isto obtemos que a sequência $h_\tau \rightarrow 0$ à medida que $\tau \rightarrow \infty$. Defina outra sequência por $y_\tau = h_\tau + c_{j_0}$. É fácil de verificar que:

$$y_\tau = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^m \tau^{p_j - p_{j_0}} c_j + c_{j_0} = \sum_{j=1}^m \tau^{p_j - p_{j_0}} c_j.$$

2.4. Operador de Aproximação e Operador Resto

Naturalmente segue:

$$x_\tau = \prod_{j=1}^m \exp \{ \tau^{p_j} c_j \} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \tau^{p_j} c_j \right\} = \exp \left\{ \tau^{p_{j_0}} \left(\sum_{j=1}^m \tau^{p_j - p_{j_0}} c_j \right) \right\} = \exp \{ \tau^{p_{j_0}} y_\tau \}.$$

Dado que $c_{j_0} < 0$ escolha τ_0 suficientemente grande para que $y_\tau < 0$ sempre que $\tau > \tau_0$. \square

Chegou o momento de definirmos valores para R , T e p . Depois desta discussão fica claro que para mostrarmos que $e_\tau \rightarrow 0$ basta determinar que:

$$-R^4 - T^4 + C \left(R + \frac{2}{p} \right)^2 T^2 < 0.$$

Considere uma bola fechada B de raio $r > 0$ nas variáveis (u, v, x) . Escolha $p = 1/(2r)$, $R = 2r$ e considere o polinômio:

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \eta &\longmapsto -R^4 - \eta^4 + C \left(R + \frac{2}{p} \right)^2 \eta^2. \end{aligned}$$

Naturalmente $\Sigma(\eta) \rightarrow -\infty$ à medida que $\eta \rightarrow \infty$. Seja η_0 tal que $\Sigma(\eta) < 0$ se $\eta > \eta_0$. Defina $T = \max\{\eta_0, 2R\}$. Com estas escolhas de R , T e p temos que $e_\tau \rightarrow 0$, $B \subset \{|u| \leq R\} \times \{|v| \leq R\} \times \{|x| < T\}$ e ainda garantimos que $f_p|_B \equiv 1$ — o que implica que $\rho \equiv h$ em B .

É interessante observarmos um resumo do que foi feito até agora:

1. Fixe uma bola B de raio r e tome uma aplicação $h \in \text{CR}(M) \cap C^\infty(M)$. Construimos uma nova função chamada $G_\tau h$ tal que $G_\tau h \rightarrow h$ uniformemente em B ;
2. Também construimos uma nova aplicação inteira chamada $E_\tau h$;
3. Definimos o resto entre esses operadores como sendo $R_\tau h = G_\tau h - E_\tau h$ e mostramos que $R_\tau h \rightarrow 0$ uniformemente em B .

Com isto fica estabelecido o fato de que $E_\tau h \rightarrow h$ uniformemente em B . Em outras palavras: toda aplicação CR suave em M é limite de uma sequência de funções inteiras.

2.5 Convergência em C^∞

Suponha que $D = D\alpha$ seja um operador diferencial de primeira ordem atuando nas variáveis (u, v, x) . Nosso próximo objetivo é mostrar que a convergência uniforme anterior também ocorre com $DE_\tau h \rightarrow Dh$. Em seguida a estratégia será generalizar esse argumento para garantir que a convergência $E_\tau h \rightarrow h$ ocorra na topologia de C^∞ .

Deste ponto em diante considerarmos uma nova coordenada chamada ϕ que agrega simultaneamente u e x . Em outras palavras: $\phi = (u, x)$. Neste caso a variável $\phi \in \mathbb{R}^{m+d}$ e se f é uma aplicação que depende das variáveis (u, v, x) então poderemos escrever, indistintamente, $f(\phi, v)$ assim como $f(u, v, x)$.

Lema 17. Para $h \in C^1, k = 1, \dots, m + d$ vale a seguinte igualdade:

$$[M_k, G_\tau]h(u, v, x) = \frac{\tau^{\frac{d}{4} + \frac{m}{4}}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} e_\tau(u, v, x, u', v, x') M_k f_p(u', x') h(u', v, x'), du' dx'$$

onde $M_k G_\tau h - G_\tau M_k h = [M_k, G_\tau]h$.

Demonstração. Observando a simetria presente nas variáveis (u, x) e (u', x') na expressão $Z_j(u, v, x) - Z_j(u', v, x')$ obteremos:

$$\begin{aligned} \zeta_{jk} &= M_k(u, v, x, D_u, D_x)(Z_j(u, v, x) - Z_j(u', v, x')) \\ &= -M_k(u', v, x', D_{u'}, D_{x'})(Z_j(u, v, x) - Z_j(u', v, x')). \end{aligned}$$

A notação $M_k(u, v, x, D_u, D_x)$ indica que M_k está atuando nas variáveis (u, v, x) e diferenciando com respeito as variáveis (u, x) .

Defina $G(\phi, \phi', t) = Z(\phi, t) - Z(\phi', t)$ e suponha que $F(\zeta)$ seja uma função holomorfa e escreva $W = F \circ G$. Lembrando do fato de que $\phi = (u, x)$ e utilizando aplicações μ_i^k propriamente escolhidas temos que:

$$M_k = \sum_{i=1}^{m+d} \mu_i^k \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Utilizando o sistema de coordenadas $(\phi, \bar{\phi})$ em \mathbb{C}^{m+d} e lançando mão da Regra da Cadeia

2.5. Convergência em C^∞

obtemos:

$$\frac{\partial F \circ G}{\partial \phi_i} = \sum_{l=1}^{m+d} \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \frac{\partial G_i}{\partial \phi_l} + \sum_{l=1}^{m+d} \frac{\partial F}{\partial \bar{\phi}_i} \frac{\partial G_i}{\partial \bar{\phi}_l}$$

Como F é uma aplicação holomorfa, a segunda soma na equação anterior é identicamente nula. Consequentemente:

$$\begin{aligned} M_k(u, v, x, D_x, D_u)W(u, x, u', x', v) &= M_k(\phi, v, D_\phi)W(\phi, \phi', v) = \sum_{i=1}^{m+d} \mu_i^k \frac{\partial}{\partial \phi_i} F \circ G(\phi, \phi', t) \\ &= \sum_{i=1}^{m+d} \mu_i^k \left(\sum_{l=1}^{m+d} \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \frac{\partial G_i}{\partial \phi_l} \right) = \sum_{i=1}^{m+d} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_i} \sum_{l=1}^{m+d} \mu_i^k \frac{\partial G_i}{\partial \phi_l} \right) = - \sum_{i=1}^{m+d} \frac{\partial F}{\partial \phi_i} M_k(\phi', v, D_{\phi'}) (G_i(\phi, \phi', v)). \end{aligned}$$

Com isto obtemos que $M_k(u, v, x, D_x, D_u)W(u, x, u', x', v) = -M_k(\phi', v, D_{\phi'})W(\phi, \phi', v)$.

Considere $\zeta = (\alpha, \beta)$ e aplique a estratégia anterior no caso em que $F(\zeta) = e^{-\tau(\alpha)^2 - \tau(\beta)^4}$.

Diferenciando sob o sinal da integral obtemos que $M_k G_\tau h(u, v, x)$ é equivalente a:

$$-\frac{\tau^{\frac{d}{4} + \frac{m}{4}}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} M_k(u', v, x', D_{u'}, D_{x'}) \{e_\tau(u, v, x, u', v, x')\} h(u', v, x') f_p(u', x') du' dx'$$

Aplicando a fórmula da integração por partes para M_k — que é válida desde que uma das aplicações tenha suporte compacto — obtemos:

$$M_k G_\tau h(\phi, v) = \frac{\tau^{\frac{d}{4} + \frac{m}{4}}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} e_\tau(\phi, \phi', v) \{M_k h f_p + M_k f_p h\} du' dx'$$

O que prova o lema módulo a demonstração desta integração por partes. Para completar a demonstração vamos verificar que esta integração funciona de maneira geral, isto é:

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+d}} M_k p q = - \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} p M_k q.$$

Considere a $(m+d)$ -forma exata $\Gamma_k = d \left(p q dZ_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dZ_k} \wedge \dots \wedge dZ_{m+d} \right)$, onde o chapéu indica que o elemento foi removido. Naturalmente esta forma pode ser reescrita como $\Gamma_k = d(pq) \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dZ_k} \wedge \dots \wedge dZ_{m+d}$.

Ora, o pullback do Γ_k até a fatia $\{v\} \times \mathbb{R}^{m+d}$ é exata, portanto $\iint_{\{v\} \times \mathbb{R}^{m+d}} \Gamma_k = 0$. Utilizando

2.5. Convergência em C^∞

o fato de que $\{dv_j, dZ_k\}$ forma uma base para todas as 1-formas, obtemos:

$$\Gamma_k \Big|_{\{v\} \times \mathbb{R}^{m+d}} = (-1)^{k+1} (p M_k q + q M_k p) dZ \Big|_{\{v\} \times \mathbb{R}^{m+d}}.$$

Como o pullback de dZ a v é dado por $\det Z_\phi(\phi', v) d\phi' = d\phi'$ segue o resultado. \square

Vamos agora provar uma fórmula análoga para os comutadores de L_j . Primeiramente note que podemos escrever L_j utilizando a variável ϕ — após escolher funções λ_{jk} de forma apropriada — como:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial v_j} + \sum_{k=1}^{m+d} \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial \phi_k}.$$

Lembrando que $\det Z_\phi = 1$ podemos escrever a relação trivial:

$$\frac{\partial \det Z_\phi}{\partial v_j} + \sum_{k=1}^{m+d} \frac{\partial (\lambda_{kj} \det Z_\phi)}{\partial \phi_k} = 0. \quad (2.5.1)$$

Embora de fácil demonstração no nosso contexto, a fórmula anterior estabelece que os campos $\det Z_\phi L_j$ são livres de divergência, isto é, $\text{div}(\det Z_\phi L_h) = 0$. Essa relação também representa que $\det Z_\phi$ é solução do campo ${}^t L_j$.

Suponha $\tilde{g}(\zeta, v)$ suave e holomorfa com respeito a variável ζ . Defina $g(\phi, v) = \tilde{g}(Z(\phi, v), v)$. Pela Regra da Cadeia (e lembrando que $L_j Z_k = 0$) obtemos:

$$L_j g(\phi, v) = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial v} (Z(\phi, v), v).$$

Tomando vantagem deste fato podemos escrever

$$G_\tau h(\phi, v) = \frac{\tau^{\frac{m}{4} + \frac{d}{4}}}{\omega} \tilde{G}_\tau h(Z^1(\phi, v), Z^2(\phi, v), v), \text{ onde}$$

$$\tilde{G}_\tau h(\alpha, \beta, v) = \int_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ -\tau (\alpha - Z^1(\phi', v))^2 - \tau^{1/2} (\beta - Z^2(\phi', v))^4 \right\} \rho(u', v, x') d\phi'.$$

Portanto, podemos concluir que:

$$L_j G_\tau h(\phi, v) = \frac{\tau^{\frac{m}{4} + \frac{d}{4}}}{\omega} \frac{\partial \tilde{G}_\tau h}{\partial v_j} (Z(\phi, v), v).$$

2.5. Convergência em C^∞

Para que a notação não atrapalhe nossos cálculos, escreva:

$$\Psi_\tau(\alpha, \beta, \phi', v) = \exp \left\{ \tau (\alpha - Z^1(\phi', v))^2 - \tau^{1/2} (\beta - Z^2(\phi', v))^4 \right\}.$$

Inicialmente observe que como $L_j Z_k = 0$ podemos utilizar a regra da cadeia e obter que $L_j \Psi_\tau = 0$. Comentado este fato, podemos aplicar o campo L_j à função $(\Psi_\tau f_p h)$, reorganizar os termos e obter:

$$\frac{\partial}{\partial v_j} (\Psi_\tau f_p h) = L_j (\Psi_\tau f_p h) - \sum_{k=1}^{m+d} \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial \phi_k} (\Psi_\tau f_p h).$$

Note que o segundo termo do lado direito pode ser escrito, durante uma integração por partes, como:

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \Psi_\tau f_p h \sum_{k=1}^{m+d} \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial \phi_k} du dx.$$

De acordo com a equação 2.5.1 a integral acima é identicamente nula. Lembrando que Ψ_τ é solução de L_j , então $L_j (\Psi_\tau f_p h) = \Psi_\tau L_j (f_p h) = \Psi_\tau f_p L_j h + \Psi_\tau h L_j f_p$. Isso mostra que:

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \tilde{G}_\tau h(\alpha, \beta, v) = \tilde{G}_\tau h(\alpha, \beta, v) + \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \Psi_\tau(\alpha, \beta, \phi', v) h L_j f_p du' dx'.$$

Com isso concluímos o:

Lema 18. *Para $h \in C^1(M)$ e $j = 1, \dots, m+d$ a seguinte identidade vale*

$$[L_j, G_\tau]h = \frac{\tau^{\frac{m}{4} + \frac{d}{4}}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} e_\tau(u, v, x, u', v, x') L_j f_p(u', x') h(u', v, x') du' dx'.$$

Considere $B = B(0, r) \subset M$ uma bola de centro na origem e de raio r e seja $h \in C^\infty(M) \cap \text{CR}(M)$. Lembre-se que já provamos que $G_\tau h \rightarrow h$ uniformemente em B . Como os campos L_j e M_k comutam e h é uma aplicação CR, temos que $L_j M_k h = M_k L_j h = 0$. Portanto $M_k h$ também é uma aplicação em $C^\infty(M) \cap \text{CR}(M)$ e, portanto, $G_\tau M_k h \rightarrow M_k h$ uniformemente em B . Ora, a expressão $[M_k, G_\tau]h$ é praticamente idêntica a $G_\tau h$ — a única diferença diz respeito a troca de f_p por $M_k f_p$. Como originalmente $G_\tau h \rightarrow \rho = f_p h$ em um conjunto maior que B temos que $[M_k, G_\tau]h \rightarrow (M_k f_p)h$ neste mesmo conjunto. Como p foi escolhido de forma que $f_p|_B \equiv 1$ segue que $[M_k, G_\tau]h \rightarrow 0$ em B . Aplicando $\tau \rightarrow \infty$ na equação $M_k G_\tau h = G_\tau M_k h + [M_k, G_\tau]h$, obtemos $M_k G_\tau h \rightarrow M_k h$ em B . Uma conclusão análoga se aplica a $L_j G_\tau h$. Como qualquer derivada de primeira ordem

2.6. Convergência nas Distribuições

$D = D_\alpha$ é uma combinação de L_j, M_k segue que $DG_\tau h \rightarrow Dh$ uniformemente em B . Naturalmente este argumento pode ser iterado obtendo-se finalmente que $G_\tau h \rightarrow h$ na topologia de $C^\infty(B)$.

Antes de enunciarmos o que acabamos de provar, é importante lembrar que usamos as variáveis (u, v, x) tanto como coordenadas em M como em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^d$ indistintamente.

Teorema 19 (Teorema de Aproximação CR — Caso Suave). *Seja $M \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ uma variedade quádrica. Considere um compacto $K \subset M$ e $h \in C^\infty(M) \cap \text{CR}(M)$. Nestas condições existe uma sequência de aplicações inteiras, indexadas em $\tau > 0$, doravante denominadas $E_\tau h$, tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau h = h$ na topologia de $C^\infty(K)$.*

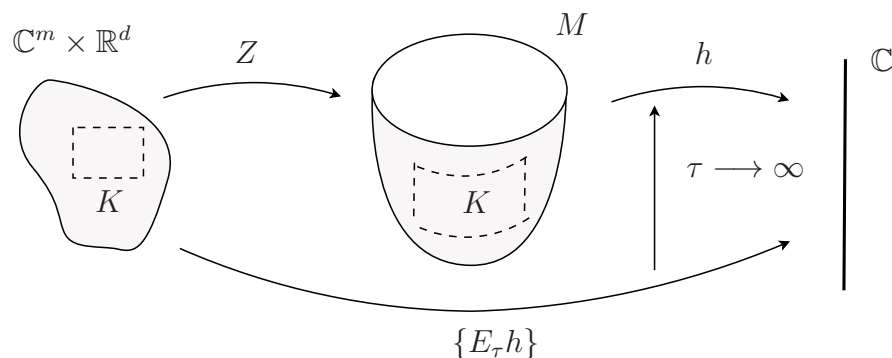


Figura 2.2: Funcionamento do Teorema de Aproximação CR

2.6 Convergência nas Distribuições

Antes de prosseguirmos nosso estudo, façamos uma pequena digressão sobre os Espaços de Sobolev, que serão empregados na solução de alguns dos problemas futuros.

Existem muitos critérios para se discutir regularidade de uma distribuição: alguns mais fracos, como o conceito de continuidade; outros mais sofisticados, como as funções de classe C^k , C^∞ e analíticas. No século XX, constatou-se que o melhor espaço funcional para julgar regularidade das distribuições eram os espaços de Sobolev, que são aprimoramentos modernos das classes de diferenciabilidade.

Definição 20. Dados $1 \leq p \leq \infty$ e $s \in \mathbb{R}$ denotemos por $L^{p,s}(\mathbb{R}^{m+d})$ o conjunto

$$\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{m+d}) : \|f\|_{p,s} < \infty\},$$

2.6. Convergência nas Distribuições

onde

$$\|f\|_{p,s} = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\mathcal{F}f)(\xi) \right) \right\|_p.$$

É possível verificar que a aplicação $f \mapsto \|f\|_{p,s}$ torna $L^{p,s}(\mathbb{R}^N)$ um espaço vetorial normado.

O caso especial $s = 2$ é eventualmente denotado por $H^s(\mathbb{R}^{m+d})$. Se ainda $s \in \mathbb{Z}_+$ e $1 < p < \infty$ obtém-se que

$$L^{p,s}(\mathbb{R}^m) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^m) : D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^N), |\alpha| \leq s\},$$

que pode ser equivalentemente normado com

$$\|f\|_{p,s} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_p.$$

Assim como ocorre com os espaços de Lebesgue, é interessante formular uma definição local para os Espaços de Sobolev. Este é o assunto da:

Definição 21. Dados $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e Ω um aberto de \mathbb{R}^{m+d} denotemos por $L_{loc}^{p,s}(\Omega)$ o conjunto:

$$\{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \psi f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^N), \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

O espaço $L_{loc}^{p,s}(\Omega)$ é considerado equipado com a topologia dada pelas seminormas $f \mapsto \|\psi f\|_{p,s}$.

Depois desta pequena pausa, estamos em condições de prosseguir o nosso estudo sobre o Teorema de Aproximação CR.

A próxima etapa da demonstração consiste em verificar sua conclusão no caso mais geral, isto é, considerar $h \in \mathcal{D}'(M)$ tal que h seja CR. Para isto, podemos nos inspirar na técnica empregada na seção anterior e verificar que ela pode ser estendida neste caso, ou seja, devemos demonstrar que:

1. $G_\tau h$ está bem definido para $h \in \mathcal{D}'(M) \cap \text{CR}(M)$;
2. $E_\tau h$ está bem definido para $h \in \mathcal{D}'(M) \cap \text{CR}(M)$;
3. $G_\tau h \rightarrow h$ em $\mathcal{D}'(B)$ à medida que $\tau \rightarrow \infty$ para $h \in \mathcal{D}'(M) \cap \text{CR}(M)$;

2.6. Convergência nas Distribuições

4. $R_\tau h = G_\tau h - E_\tau h \rightarrow 0$ em $D'(B)$ à medida que $\tau \rightarrow \infty$ para $h \in \mathcal{D}'(M) \cap \text{CR}(M)$.

Para lidarmos com os dois primeiros problemas, primeiramente observemos a expressão do operador $G_\tau h$ quando h é uma aplicação suave:

$$G_\tau h(u, v, x) = \frac{\tau^{d/4+m/4}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} e_\tau(u, v, x, u', v, x') \rho(u', v, x') du' dx'.$$

Ora, como $f_p(u', x') e_\tau(u, v, x, u', v, x')$ é uma função-teste então $G_\tau h$ pode ser reinterpretado através da atuação das variáveis (u', x') por dualidade

$$\frac{\tau^{d/4+m/4}}{\omega} \left\langle h(u', v, x'), f_p(u', x') e_\tau(u, v, x, u', v, x') \right\rangle.$$

A dificuldade presente na interpretação por dualidade de $G_\tau h$, no caso em que h é uma distribuição, vem do fato de que a distribuição h sofreu uma espécie de processo de restrição na segunda variável. Para contornarmos esse problema, considere o

Lema 22. Fixado $v_0 \in \mathbb{R}^m$ considere uma fatia da variedade M dada por

$$M_{v_0} = \{(w, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d, \Im t = q(w, \bar{w}) \text{ e } \Im w = v_0\}.$$

Neste caso existe uma aplicação $i^* : \text{CR}(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M_{v_0})$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $h \in C^\infty(M) \cap \text{CR}(M)$ então $i^*h = h|_{M_{v_0}}$;
2. Se h é uma distribuição, então $\text{WF}i^*h \subset \text{WF}h$;
3. Se Γ é um cone em M tal que $\Gamma \cap NM_{v_0} = \emptyset$ então $i^* : \text{CR}(M) \cap \{h \in \mathcal{D}'(M) : \text{WF}h \subset \Gamma\} \rightarrow \mathcal{D}'(M_{v_0})$ é contínua.

Em outras palavras: o resultado acima garante-nos que a partir do momento que uma distribuição h em M é CR então existe uma outra distribuição, chamada provisoriamente de i^*h , que representa a restrição de h a M_{v_0} . Além disso, a restrição é uma aplicação contínua. Em breve abandonaremos a notação i^*h e utilizaremos as notações convencionais para restrição.

Demonstração. Sabemos que $\text{WF}h \subset \text{char CR}$, onde char CR representa o conjunto característico do campo CR associado a M . Vamos verificar que char CR não intercepta o normal

2.6. Convergência nas Distribuições

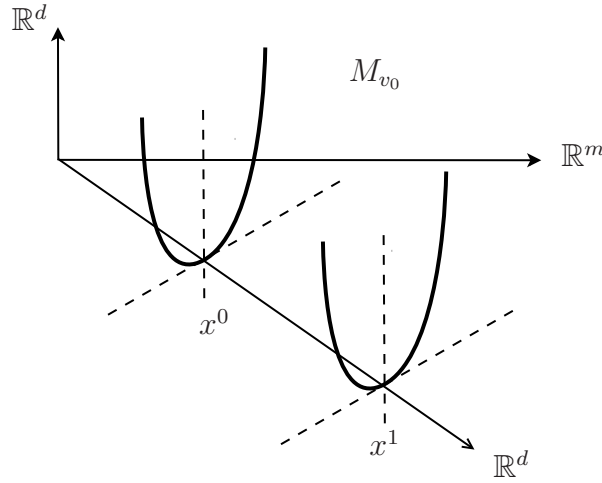


Figura 2.3: Esboço de uma fatia de variedade quádrlica

a M_{v_0} . Ora, podemos observar que $NM_{v_0} = \{(u, v, x; 0, \eta, 0) \in \mathbb{R}^{2m+d} \times \mathbb{R}^{2m+d} : \eta \neq 0\}$. Já o conjunto característico dos campos CR é gerado por:

$$L_j = \bar{\partial}_j - i \sum_{l=1}^d (\bar{\partial}_j \tilde{q}_l) \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Suponha que algum L_j intercepte o normal. Como, a menos de uma constante, $\bar{\partial}_j = -i \frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial}{\partial v_j}$ teríamos

$$\eta - i\xi - i \sum_{l=1}^d \bar{\partial}_j \tilde{q}_l \vartheta = 0,$$

o que implicaria que $\eta = 0$. Contradição. O restante segue imediatamente aplicando [Hör83, teo. 8.3.1]. \square

Ora, como $\{|u| < R\} \times \{|v| < R\} \times \{|x| < T\}$ é relativamente compacto, então para algum $s \in \mathbb{R}$ segue que $h \in C^0(\{|v| \leq R\}, L_{loc}^{2,s}(B))$, onde B é a bola, em \mathbb{R}^{m+d} , de raio R e centro na origem.

Finalmente, interpretando os operadores por dualidade, como já foi discutido anteriormente, segue que os dois primeiros obstáculos já foram ultrapassados.

Vamos alterar a ordem natural dos itens a resolver e iniciar verificando o último deles. Neste caso é conveniente expressar $R_\tau h$ através de uma interpretação da fórmula para h

2.6. Convergência nas Distribuições

suave. Verificaremos que

$$R_\tau h(\phi, v) = \int_{[0, v]} \sum_{j=1}^m r_j(u, v, x, v', \tau) dv'_j,$$

onde

$$r_j(u, v, x, v', \tau) = \frac{\tau^{\frac{m+d}{4} + \frac{d}{4}}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} e_\tau(u, v, x, u', v', x') h(u', v', x') L_j f_p(u', x') du' dx'$$

e $[0, v]$ indica o segmento que conecta v a origem.

Para a verificação desta afirmação, escreva: para $\zeta = (\alpha, \beta)$ e τ fixados, $g(v') = \tilde{G}_\tau h(\zeta, v') =$

$$= \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ -\tau (\alpha - Z^1(u', v', x'))^4 - \tau^{1/2} (\beta - Z^2(u', v', x'))^2 \right\} \rho(u', v', x') du' dx'.$$

Desta forma,

$$g(v) - g(0) = \int_{[0, v]} \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial v'_j}(v') dv'_j.$$

Para calcular as derivadas presentes no integrando, escreva:

$$\Psi(\alpha, \beta, \phi', v) = \exp \left\{ -\tau (\alpha - Z^1(u', v, x'))^4 - \tau^{1/2} (\beta - Z^2(u', v, x'))^2 \right\}.$$

Podemos aplicar o campo L_j à função $(\Psi_\tau f_p h)$, reorganizar os termos, e obter:

$$\frac{\partial}{\partial v_j} (\Psi_\tau f_p h) = L_j (\Psi_\tau f_p h) - \sum_{k=1}^{m+d} \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial \phi_k} (\Psi_\tau f_p h).$$

Note que o segundo termo do lado direito pode ser escrito, durante uma integração por partes, como:

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \Psi_\tau f_p h \sum_{k=1}^{m+d} \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial \phi_k} du dx.$$

De acordo com a equação 2.5.1 a integral acima é identicamente nula. Ora, devemos notar que esse tipo de argumento já foi utilizado na demonstração do caso suave.

Lembrando que h é solução de L_j , então $L_j (\Psi_\tau f_p h) = h L_j (\Psi_\tau f_p) = h \Psi_\tau L_j f_p$. Isso

2.6. Convergência nas Distribuições

mostra que

$$\frac{\partial g}{\partial v'_j} = \tilde{r}_j(\zeta, v', \tau), \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_j(\zeta, v', \tau) = \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \exp \left\{ -\tau (\alpha - Z^1(u', v', x'))^4 - \tau^{1/2} (\beta - Z^2(u', v', x'))^2 \right\} \\ \cdot h(u', v', x') L_j f_p(u', x') du' dx'. \end{aligned}$$

A vantagem desta formulação é que ela continua válida para distribuições $h \in \mathcal{D}'(M)$. Ora, escolhendo $\zeta = (Z^1, Z^2)$ concluímos que $R_\tau h$ — agora entendida por dualidade — coincide com a expressão $G_\tau h - E_\tau h$ — também entendida por dualidade. Como $R_\tau h$ é sempre uma função suave de (ϕ, v) , até mesmo quando $h \in \mathcal{D}'(M)$, podemos então enunciar e demonstrar a:

Proposição 23. *Seja $h \in \mathcal{D}'(M)$ uma distribuição CR e B uma bola fechada em M . Nestas condições temos que $R_\tau h(\phi, v) \rightarrow 0$ em $C^\infty(B)$.*

Demonstração. Seja Δ_ϕ o laplaciano atuando nas variáveis $(u, x) = \phi$ em \mathbb{R}^{m+d} . Para $k \in \mathbb{Z}^+$, escreva

$$L_j f_p(u', x') h(u', v', x') = \chi(u', x') (1 - \Delta_{\phi'})^k (1 - \Delta_{\phi'})^{-k} (L_j f_p(u', x') h(u', v', x')),$$

onde χ é uma função corte escolhida de tal sorte que $\chi L_j f_p = L_j f_p$.

Se denotarmos $\Gamma_j(u', x', v') = (1 - \Delta_{\phi'})^{-k} (L_j f_p(u', x') h(u', v', x'))$ então temos que $\Gamma_j \in C^0(\mathbb{R}^{m+d})$ para alguma escolha apropriada de k . De fato, o operador $(1 - \Delta_{\phi'})^{-k}$ definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+d})$ e dado por

$$(1 - \Delta_{\phi'})^{-k} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m+d}} \int e^{i\phi \cdot \xi} (1 + |\xi|^2)^{-k} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

mapeia $L^{2,s}(\mathbb{R}^{m+d})$ continuamente em $L^{2,s+2k}(\mathbb{R}^{m+d})$. Utilizando o Teorema de Imersão de Sobolev segue que para $s+2k > (m+d)/2$ vale que $L^{2,s+2k}(\mathbb{R}^{m+d}) \subset L^\infty(\mathbb{R}^{m+d}) \cap C^0(\mathbb{R}^{m+d})$.

Neste caso podemos integrar por partes e obter:

$$r_j = \frac{\tau^{\frac{m}{4} + \frac{d}{4}}}{\omega} \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} \Gamma_j(u', v', x') (1 - \Delta_{\phi'})^k (\chi(\phi') e_\tau(u, v, x, u', v', x')) du' dx'.$$

2.6. Convergência nas Distribuições

Já demonstramos anteriormente que a exponencial em r_j pode ser majorada por um produto do tipo $\exp\{\tau^{1/2} C_1\} \exp\{-\tau C_1\}$, com C_1 e C_2 constantes reais positivas. Ora, para τ suficientemente grande, também verificamos que a exponencial anterior pode ser reestimada para $\exp\{-\tau C_3\}$, com $C_3 > 0$.

Desta forma, $r_j(\phi, v, v', \tau)$ é contínuo com respeito a v' e converge a 0 uniformemente para $|\phi| \text{ soma} \leq R$, $|v'| \leq |v| \leq T$ à medida que $\tau \rightarrow \infty$. Como as derivadas de $(1 - \Delta_{\phi'})^{-k}$ produzem potências de τ , que são igualmente dominadas por $e^{-c\tau}$, então $R_\tau h(\phi, v) \rightarrow 0$ uniformemente. Derivando sob o sinal da integração finalmente segue o resultado. \square

Quanto ao problema (3) desta seção a estratégia será a seguinte: para provar esta convergência no espaço de distribuições é suficiente verificar que a mesma se dá para as funções generalizadas que, para algum inteiro k , satisfaçam:

$$h \in C^0\left(\{|v| \leq T\}, L_{loc}^{2,k}(B_R)\right).$$

Para demonstrar a convergência para as demais distribuições é suficiente tomar um inteiro k cuja topologia seja mais restritiva que a topologia que queremos verificar.

Iniciando com $k = 0$ e assumindo $h \in C^0(\{|v| \leq T\}, L_{loc}^2(B_{R'}))$, com $R' > R$, gostaríamos de provar que

$$\iint |G_\tau h(\phi, v) - h(\phi, v)|^2 du dx \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } |v| \leq T,$$

o que, para esta classe de distribuições, implica em (3).

Redefinindo h por zero fora de uma bola, assuma que $\phi \mapsto h(\phi, v) \in L^2(\mathbb{R}^{m+d})$ para cada v fixado, com $|v| \leq T$. Relembrando que a exponencial que define $G_\tau u$ é da ordem de $\exp\{-\tau(u - u')^4 - \tau^{1/2}(x - x')^2\}$, escreva:

$$F_\tau(\phi) = \tau^{\frac{m}{4} + \frac{d}{4}} \exp\{-\tau u^4 - \tau^{1/2} x^2\}$$

para concluir que, para v fixado satisfazendo $|v| \leq T$,

$$|G_\tau h(\phi, v)| \leq C(F_\tau * |h|)(\phi, v),$$

onde a convolução é realizada na variável ϕ .

2.6. Convergência nas Distribuições

Como $\|F_\tau\|_{L^1} = C$ (uniformemente em τ) segue, da Desigualdade de Young para Convoluções, que:

$$\sup_{|v| \leq T} \|G_\tau h(\cdot, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{m+d})} \leq C \sup_{|v| \leq T} \|h(\cdot, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{m+d})}. \quad (2.6.1)$$

Para que possamos tirar vantagem da estimativa anterior, demonstraremos o

Lema 24. *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $Y \subset X$ um subespaço denso. Suponha uma família de aplicações lineares $\{f_\lambda : X \rightarrow X; \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ tal que*

$$(i) \quad \|f_\lambda(x)\|_X \leq C\|x\|_X, \text{ para todo } x \text{ em } X;$$

$$(ii) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(y) \rightarrow y, \text{ uniformemente em } y, \text{ para todo } y \text{ em } Y.$$

Nestas condições vale que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) \rightarrow x$, uniformemente em x , para todo x em X .

Demonstração. Seja $x \in X$, $y_n \rightarrow x$ uma sequência em Y e $\varepsilon > 0$. Nestas condições, existem:

1. n_0 tal que, se $n \geq n_0$ então $\|x - y_n\|_X < \min\{\frac{\varepsilon}{3C}, \frac{\varepsilon}{3}\}$;
2. λ_0 tal que, se $\lambda \geq \lambda_0$ então $\|f_\lambda(y_n) - y_n\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para $n \geq n_0$ e $\lambda \geq \lambda_0$ segue que

$$\begin{aligned} \|f_\lambda(x) - x\|_X &= \|f_\lambda(x) - x + f_\lambda(y_n) - f_\lambda(y_n)\|_X \\ &\leq \|f_\lambda(x - y_n)\|_X + \|f_\lambda(y_n) - x\|_X \\ &\leq C\|x - y_n\|_X + \|f_\lambda(y_n) - y_n\|_X + \|-x + y_n\|_X \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Na seção anterior, estabelecemos que se $h \in \mathcal{D}(M)$ então $G_\tau h \rightarrow h$ uniformemente em

$$\{|u| < R\} \times \{|v| < T\} \times \{|x| < R\}$$

o que implica convergência no espaço $C^0(\{|v| \leq T\}, L^2(\{|u| < R\} \times \{|x| < R\}))$.

2.6. Convergência nas Distribuições

Com isso, o operador G_τ converge para operador identidade em um conjunto denso de

$$C^0(\{|v| \leq T\}, L^2(\{|u| < R\} \times \{|x| < R\})).$$

Como a família de operadores $\{G_\tau\}$ satisfaz 2.6.1 conclui-se, pelo lema anterior, que

$$G_\tau h \longrightarrow h \text{ em todo o espaço } C^0(\{|v| \leq T\}, L^2(\{|u| < R\} \times \{|x| < R\})).$$

Prossigamos para o próximo inteiro k . Assuma que

$$h \in C^0(\{|v| \leq T\}, L^{2,1}(\{|u| < R'\} \times \{|x| < R'\}))$$

para $R' > R$. Utilizando um função corte propriamente escolhida, assuma que $h \in C^0(\{|v| \leq R\}, L^{2,1}(\mathbb{R}^{m+d}))$ e que h permanece inalterada para $|x| < R$ e $|u| < R$. Desta forma, para $|v| \leq T$ fixado, nós observamos que tanto h — como suas derivadas com respeito a ϕ_k e v_j — estão em L^2 para $1 \leq k \leq m+d$ e $1 \leq j \leq m$.

Como estamos trabalhando em conjuntos compactos, os coeficientes de L_j e M_k são limitados e possuem derivadas limitadas. Em particular, $L_j h$ e $M_k h$ estão em $L^2(\mathbb{R}^{m+d})$ uniformemente para $|v| \leq T$. Para obter o resultado desejado para $k = 1$ é necessário provar a estimativa análoga à 2.6.1, isto é,

$$\sup_{|v| \leq T} \|G_\tau h(\cdot, v)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}^{m+d})} \leq C \sup_{|v| \leq T} \|h(\cdot, v)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}^m)}. \quad (2.6.2)$$

Ora, sabemos que qualquer derivada de primeira ordem, com respeito a ϕ , é uma combinação linear dos M_k 's. Desta forma, é suficiente verificar que para $|v| \leq T$ e $1 \leq k \leq m+d$

$$\sup_{|v| \leq T} \|M_k G_\tau h(\cdot, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{m+d})} \leq C \sup_{|v| \leq T} \|h(\cdot, v)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}^{m+d})}. \quad (2.6.3)$$

Para demonstrarmos essa desigualdade observe que como $M_k G_\tau = [M_k, G_\tau] + G_\tau M_k$ nos resta estimar $\|G_\tau M_k h\|_{L^2}$ e $\|[M_k, G_\tau] h\|_{L^2}$. Utilizando 2.6.1, obtemos que,

$$\|G_\tau M_k h\|_{L^2} \leq C \|M_k h\|_{L^2} \leq C' \|h\|_{L^{2,1}}.$$

Como já sabemos que as aplicações G_τ e $[M_k, G_\tau]$ são muito similares, então vale uma

2.6. Convergência nas Distribuições

estimativa análoga à 2.6.1 utilizando $[M_k, G_\tau]$. Desta forma

$$\|[M_k, G_\tau]h\|_{L^2} \leq C\|h\|_{L^{2,1}},$$

o que verifica 2.6.2 e conseqüentemente demonstra a estimativa 2.6.3.

Esta construção ainda nos fornece um algoritmo para os casos $k = 2, 3, \dots$ e conseqüentemente validamos a família de desigualdades

$$\sup_{|v| \leq T} \|G_\tau h(\cdot, v)\|_{L^{2,k}(\mathbb{R}^{m+d})} \leq C_k \sup_{|v| \leq T} \|h(\cdot, v)\|_{L^{2,k}(\mathbb{R}^{m+d})}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6.4)$$

Nos resta verificar o caso em que k' é um inteiro negativo, isto é, $k' = -k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Inicialmente, vamos introduzir uma pequena modificação do operador G_τ : considere $G'_\tau = f_p G_\tau$. É claro que $G'_\tau = G_\tau$ em B , já que $f_p|_B \equiv 1$. Conseqüentemente qualquer conclusão válida para o operador G'_τ também será verdadeira para G_τ se $\phi \in B$.

A vantagem de considerarmos este novo operador é que ele se torna simétrico na variável ϕ com respeito à medida $dZ \equiv 1$, isto é, se $p, q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+d})$ então, para v fixado,

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+d}} G'_\tau p(\phi) q(\phi) \det Z_\phi(\phi, v) du dx = \iint_{\mathbb{R}^{m+d}} G'_\tau q(\phi) p(\phi) \det Z_\phi(\phi, v) du dx.$$

Utilizando a notação de produto interno podemos escrever

$$\begin{aligned} \|G'_\tau h(\cdot, v)\|_{L^{2,k'}(\mathbb{R}^{m+d})} &\leq C \sup_{\substack{q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+d}) \\ \|q\|_{L^{2,k}} \leq 1}} |\langle G'_\tau h(\cdot, v), q \rangle| \\ &= C \sup_{\substack{q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+d}) \\ \|q\|_{L^{2,k}} \leq 1}} |\langle h(\cdot, v), G'_\tau q \rangle| \\ &\leq C \sup_{\substack{q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+d}) \\ \|q\|_{L^{2,k}} \leq 1}} \|h(\cdot, v)\|_{L^{2,k'}} \|G'_\tau q\|_{L^{2,k}} \\ &\leq C \|h(\cdot, v)\|_{L^{2,k'}}. \end{aligned}$$

Observe que, nesta seqüência de estimativas, utilizamos a majoração já verificada para $k \in \mathbb{N}$. Com isto, fica provada a equicontinuidade de G'_τ nos espaços

$$C^0(\{|v| \leq T\}, L^{2,k}(\{|u| < R'\} \times \{|x| < R'\})), \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.6. Convergência nas Distribuições

Juntamente com a convergência $G_\tau h \rightarrow h$, que ocorre para $h \in \mathcal{D}(\{|u| \leq R'\} \times \{|v| \leq T\} \times \{|x| \leq R'\})$ — que é denso em $C^0(\{|v| \leq T\}, L^{2,k}(\{|u| < R'\} \times \{|x| < R'\}))$, fica demonstrado que $G_\tau h \rightarrow h$ em $C^0(\{|v| \leq T\}, L^{2,k}(B))$ para qualquer $h \in C^0(\{|v| \leq T\}, L^{2,k}(M))$. Com isso demonstramos o

Teorema 25 (Teorema de Aproximação CR — Caso das Distribuições). *Seja $M \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ uma variedade quádrlica. Considere um compacto $K \subset M$ e $h \in \text{CR}(M)$. Nestas condições existe uma sequência de aplicações inteiras, indexadas em $\tau > 0$, doravante denominadas $E_\tau h$, tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau h = h$ na topologia de $\mathcal{D}'(K)$.*

Também é possível demonstrar uma versão mais aprimorada do teorema anterior — que versa sobre a convergência nos espaços C^j . Para isso, é suficiente demonstrar a equicontinuidade de G_τ em

$$C^j(\{|v| \leq T\}, C_b^k(\mathbb{R}^{m+d})),$$

onde $C_b^k(\mathbb{R}^{m+d})$ é o espaço das funções definidas em \mathbb{R}^{m+d} que admitem derivadas limitadas de ordem $\leq k$. O caso $j, k = 0$ é facilmente demonstrado observando que

$$|G_\tau h(\phi, v)| \leq C(F_\tau * |h|)(\phi, v) \leq C' \|h\|_{C^0(\{|v| \leq T\}, C_b^0(\mathbb{R}^{m+d}))}.$$

De maneira análoga ao que já foi feito anteriormente, é possível — através da inserção dos comutadores — reduzir o caso $j, k \leq 1$ à análise da equicontinuidade com respeito a $C^0(\{|v| \leq T\}, C_b^0(\mathbb{R}^{m+d}))$. Iterando este argumento, concluímos a demonstração do teorema final deste capítulo.

Teorema 26 (Teorema de Aproximação CR). *Seja $M \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ uma variedade quádrlica. Considere um compacto $K \subset M$ e $h \in \text{CR}(M)$. Nestas condições existe uma sequência de aplicações inteiras, indexadas em $\tau > 0$, doravante denominadas $E_\tau h$, tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau h = h$ na topologia de $\mathcal{D}'(K)$. Além disso, se $j = 0, 1, 2, \dots, \infty$ e $h \in C^j(M)$ então a convergência $\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau h = h$ ocorre na topologia de $C^j(K)$.*

O Teorema de Aproximação CR pode ser verificado para vários espaços funcionais. A estratégia, nesses casos, é utilizar o resultado provado na seção anterior: $R_\tau h = G_\tau h - E_\tau h \rightarrow 0$ em C^∞ para qualquer distribuição $h \in \text{CR}(M)$.

Mediante este resultado, o problema da convergência de $E_\tau h \rightarrow h$ em qualquer espaço funcional com topologia mais fina que a de C^∞ fica reduzido a convergência de $G_\tau h \rightarrow h$

2.6. Convergência nas Distribuições

ao mesmo espaço. Como já foi discutido, o operador G_τ é muito próximo — entendendo v como um parâmetro — a uma convolução na variável ϕ com uma Gaussiana. Deste modo, é esperado que a convergência $G_\tau h \rightarrow h$ ocorra em muitos espaços funcionais.

A abordagem das demonstrações da convergência $G_\tau h \rightarrow h$ poderá ser sempre a mesma. Se quisermos verificar que o teorema é verdadeiro para um certo espaço de distribuições $X(M)$, temos que, primeiramente, tentar provar a equicontinuidade da família $\{G_\tau\}$ em X e, em seguida, mostrar que a convergência ocorre em um subespaço denso de $Y \subset X$. Em geral, o subconjunto denso será o das funções-testes para o qual já sabemos que $G_\tau h \rightarrow h$.

Em geral, esta abordagem funciona se:

1. X é um espaço normal de distribuições, isto é, \mathcal{D} é denso em X ;
2. existe uma aplicação $J : C^\infty \rightarrow X$ contínua e injetora.

Este princípio foi aplicado nesse último momento com $X = C^0(\{|v| \leq T\}, L^{2,k})$.

2.6. Convergência nas Distribuições

NOTAS PARA O CAPÍTULO 2

Em [Bog01, teo. 2] Boggess nos apresenta uma outra variação do Teorema de Aproximação de Baouendi e Treves. Para efeitos de comparação com nosso teorema vamos enunciar sua versão abaixo.

Teorema 27. *Suponha $M = \{(w = u + iv, z); \Re z = q(u, v)\}$, onde $q : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação suave com a seguinte estimativa polinomial*

$$|(\mathcal{D}q)(u, v)| \leq C|w|^N \text{ para todo } w \in \mathbb{C}^m,$$

onde D é qualquer derivada de primeira ordem e C e N são inteiros positivos uniformes. Suponha que f seja uma distribuição em $\text{CR}(M) \cap L^p(M)$ para $1 \leq p < \infty$. Nestas condições existe uma sequência de funções inteiras F_k tais que para qualquer compacto $K \subset M$ vale que $F_k \rightarrow f$ em $L^p(K)$ à medida que $k \rightarrow \infty$. Se $p = \infty$ então F_k converge qtp para f .

Nosso teorema apresenta algumas distinções com relação ao teorema de Boggess. Inicialmente nossa versão apresenta formulações específicas para os espaços $\mathcal{D}'(M)$ e $C^k(M)$, $k = 0, \dots, \infty$, enquanto o resultado anterior lida apenas com distribuições que estejam em $L^p(M)$.

No nosso trabalho optamos por substituir a aplicação q com caimento polinomial $|(\mathcal{D}q)(u, v)| \leq C|w|^N$ para todo $w \in \mathbb{C}^m$, por uma outra aplicação q quádrica. Essa simplificação foi feita para que pudéssemos efetuar os cálculos em um ambiente mais simples. Note que essa substituição pode ser facilmente desfeita já que não se mostrou crucial durante a demonstração.

Além disso, para aqueles familiarizados com o artigo de Boggess, fica evidente que a técnica de demonstração utilizada na nossa versão é razoavelmente distinta da apresentada por ele. Mais precisamente: com os elementos que desenvolvemos ao longo de nossa demonstração, podemos generalizar nosso resultado para outros espaços. Isso será feito no próximo capítulo para distribuições nos espaços de Hardy localizados $h^p(M)$, com $p < 1$.

Outra diferença fundamental na demonstração consiste no processo de restrição de uma distribuição h . No nosso caso optamos por uma aproximação tradicional através do cálculo do Wave Front Set. Já na demonstração apresentada por Boggess se menciona apenas uma justificativa incompleta.

CAPÍTULO 3

Teorema de Extensão CR

RESUMO

Já é sabido da impossibilidade de se estender distribuições CR em uma variedade suave M qualquer. Boggess demonstrou em [Bog01] que no caso de variedades quádricas é possível estender distribuições CR até a envoltória convexa de M , desde que a distribuição também esteja nos espaços $L^p(M)$ com $p \geq 1$.

Neste capítulo, lidaremos com a mesma questão de extensibilidade em variedades quádricas, mas em um contexto um pouco diferente: suporemos que as distribuições CR em questão estejam nos espaços de Hardy Localizados $h^p(M)$ com $p > 0$. Iniciaremos com uma pequena revisão desses espaços e logo em seguida revisitaremos nossa versão do Teorema de Aproximação para verificarmos sua validade também em $h^p(M)$ com $p > 0$.

Na sequência, vamos utilizar as aplicações aproximantes para construir uma função holomorfa F na envoltória convexa de M . Logo depois, vamos utilizar os conceitos do capítulo 1 para trazer sentido ao símbolo $F|_M$ e finalmente verificar que $F|_M$ é na verdade a distribuição CR original.

3.1 Caracterização Maximal de H^p

É fato conhecido que os espaços L^p , quando $p < 1$, tem dual trivial e portanto não oferecem nada de interessante no que se refere ao estudo de distribuições. Mesmo quando $p = 1$ o espaço L^1 não é tão bem comportado quanto seus análogos L^p para $p > 1$ (um exemplo desse tipo de fenômeno é a continuidade da Função Maximal de Hardy-Littlewood ou então continuidade de certos operadores com núcleos tipo segunda-geração de Calderon-Zygmund). Para lidar com essa questão, Stein e Weiss introduziram uma nova família de espaços, chamados de $H^p(\mathbb{R}^N)$, que são idênticos aos espaços L^p quando $p > 1$, mas que ainda assim constituem um espaço adequado de distribuições (potencialmente não localmente integráveis) quando $p < 1$. Nosso objetivo nesta seção é apresentar resumidamente os principais ingredientes para o entendimento desses espaços e de suas versões localizadas.

Seja $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ com $\int \Phi(z) dz \neq 0$ e defina:

$$\begin{aligned} \Phi_t : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{t^n} \Phi\left(\frac{x}{t}\right). \end{aligned}$$

A partir disso, construa, para cada aplicação $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, a *função maximal radial* de f , dada por:

$$M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |(\Phi_t \star f)(x)|.$$

Considere agora as seminormas contínuas em \mathcal{S} dadas por $\rho_{\alpha,\beta}(\phi) = \|x^\alpha D^\beta \phi\|_{L^\infty}$ e o conjunto:

$$\mathcal{F} = \{\psi \in \mathcal{S} : \rho_{\alpha,\beta}(\psi) \leq 1, \text{ para todo } |\alpha|, |\beta| \leq N\}.$$

Assim definimos a *grande função maximal* de $f \in \mathcal{S}'$ associada à família \mathcal{F} por:

$$\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) = \sup_{\psi \in \mathcal{F}} M_\psi f(x).$$

Definição 28. Diremos que uma distribuição temperada u é *limitada* se $u \star \phi \in L^\infty$ para toda $\phi \in \mathcal{S}$. O conjunto de todas essas distribuições será denotado por $\mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^N)$.

Se $u \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^N)$ e $f \in L^1$ podemos definir $u \star f \in \mathcal{S}'$ como $\langle u \star f, \eta \rangle = \langle u \star \check{\eta}, \check{f} \rangle$, onde $\check{g}(y) = g(-y)$. É possível verificar que $u \star f \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^N)$ e que ainda vale que $(u \star f_1) \star f_2 = u \star (f_1 \star f_2)$. A grande importância das distribuições limitadas é que suas regularizações

3.1. Caracterização Maximal de H^p

(através da convolução com o Núcleo de Poisson) $u_t = P_t \star u$ são limitadas e suaves. Além disso, se $u \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^N)$, então podemos entender u como uma aplicação harmônica em \mathbb{R}_+^{N+1} através da fórmula $u(x, t) = (f \star P_t)(x)$. A partir disso, definimos as aplicações auxiliares:

$$u^* : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sup_{|x-y|<t} |u(y, t)| \quad e$$

$$u^\perp : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sup_{t>0} |u(x, t)|.$$

Teorema 29. *Sejam $0 < p \leq \infty$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. São equivalentes:*

1. *Existe uma $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi(z) dz \neq 0$ tal que $\|M_\Phi f\|_{L^p} < \infty$;*
2. *Existe uma família $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ tal que $\|\mathcal{M}_\mathcal{F} f\|_{L^p} < \infty$;*
3. *$f \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^N)$ e ainda $\|u^*\|_{L^p} < \infty$;*
4. *$f \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^N)$ e ainda $\|u^\perp\|_{L^p} < \infty$;*
5. *Para toda $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi(z) dz \neq 0$ vale que $\|M_\Phi f\|_{L^p} < \infty$.*

Definição 30. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ satisfaz quaisquer uma das propriedades anteriores, diremos que $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$. O espaço $H^p(\mathbb{R}^N)$ é chamado de *p-ésimo espaço de Hardy*.

Façamos alguns pequenos comentários sobre a topologia associada a esse espaço. Considere $\|f\|_{H^p} = \|M_\Phi f\|_{L^p}$. Ora, para $p > 1$ o espaço H^p torna-se idêntico a L^p . Para $p = 1$ a aplicação $f \mapsto \|M_\Phi f\|_{L^1}$ é uma norma, pois M_Φ é uma aplicação sublinear. Já para $p < 1$ a aplicação $\|\cdot\|_{H^p}$ não é mais uma norma, porém $d(f, g) = \|f - g\|_{H^p}^p$ é uma métrica. Com essas definições topológicas vale que convergência em H^p implica em convergência fraca (no sentido das distribuições).

Definição 31. Uma função mensurável a definida em \mathbb{R}^N é dita ser um *H^p -átomo* ($0 < p \leq 1$) se existe uma bola B tal que:

1. $\text{supp}(a) \subset B$;
2. $\|a\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{1}{|B|}\right)^{1/p}$;

3.1. Caracterização Maximal de H^p

$$3. \int x^\alpha a(x) dx = 0 \text{ para todo } |\alpha| \leq N \left(\frac{1}{p} - 1 \right)$$

É possível demonstrar que o conjunto dos H^p -átomos em \mathbb{R}^N é um subconjunto limitado de $H^p(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para qualquer elemento $(\lambda_j) \in l^p$ e para qualquer sequência arbitrária $\{a_j\}$ de p -átomos é possível verificar que a sequência $S_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$ é de Cauchy em H^p . A recíproca dessa afirmação é o conteúdo do teorema abaixo.

Teorema 32 (Decomposição Atômica Suave). *Sejam $0 < p \leq 1$ e $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$. Nestas condições existem uma sequência de p -átomos suaves e um elemento $(\lambda_j) \in l^p$ tal que:*

1. $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ na topologia de H^p ;
2. $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \approx \|f\|_{H^p}^p$.

Os espaços $H^p(\mathbb{R}^N)$ ainda não são os espaços que lidaremos neste texto. Apesar de parecerem substitutos adequados aos espaços das funções p -integráveis, eles sofrem de um problema central: não podem ser localizados. Em outras palavras: não temos que $h f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ sempre que $h \in H^p(\mathbb{R}^N)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Para lidarmos com essa questão, vamos apresentar uma nova família de espaços, chamados agora de $h^p(\mathbb{R}^N)$.

Dados $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi(z) dz \neq 0$ defina as funções:

$$m_\Phi f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sup_{0 < t \leq 1} |\Phi_t \star f(x)| \quad e$$

$$m_\Phi^* f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sup_{\substack{0 < t \leq 1 \\ |y-x| < t}} |\Phi_t \star f(x)|.$$

Se nos for dado o conjunto:

$$\mathcal{F} = \{\psi \in \mathcal{S} : \rho_{\alpha,\beta}(\psi) \leq 1, \text{ para todo } |\alpha|, |\beta| \leq N\},$$

então considere ainda $m_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\psi \in \mathcal{F}} m_\psi f(x)$. A relação entre essas aplicações é dada abaixo.

Teorema 33. *Sejam $0 < p \leq \infty$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. São equivalentes:*

3.1. Caracterização Maximal de H^p

1. Existe uma $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi(z) dz \neq 0$ tal que $m_\Phi f \in L^p$;
2. Existe uma família $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ tal que $\|m_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} < \infty$;
3. Existe uma $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi(z) dz \neq 0$ tal que $m_\Phi^* f \in L^p$.

Definição 34. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ satisfaz quaisquer uma das propriedades anteriores, diremos que $f \in h^p(\mathbb{R}^N)$. O espaço $h^p(\mathbb{R}^N)$ é chamado de *p-ésimo espaço localizado de Hardy*.

Façamos alguns comentários sobre a topologia associada a essa família de espaços. Considere $\|f\|_{h^p} = \|m_\Phi f\|_{L^p}$. Ora, para $p > 1$ o espaço h^p se torna idêntico a $L^p = H^p$. Para $p = 1$ a aplicação $f \mapsto \|m_\Phi f\|_{L^1}$ é uma norma, pois analogamente ao caso anterior, m_Φ é uma aplicação sublinear. Já para $p < 1$ a aplicação $\|\cdot\|_{h^p}$ não é mais uma norma, porém $d(f, g) = \|f - g\|_{h^p}^p$ é uma métrica. Com essas definições topológicas vale que $H^p \subset h^p$ e que ainda convergência em h^p implica em convergência fraca (no sentido das distribuições).

A relação entre os espaços $H^p(\mathbb{R}^N)$ e $h^p(\mathbb{R}^N)$ é dada pelo:

Lema 35. Para toda $u \in h^p(\mathbb{R}^N)$ existem $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap h^p(\mathbb{R}^N)$ tais que $u = f + g$, $\|f\|_{H^p} \leq C \|u\|_{h^p}$ e $\|g\|_{h^p} \leq C \|u\|_{h^p}$. Em outras palavras: $H^p = h^p \pmod{C^\infty}$.

Definição 36. Uma função q -integrável a definida em \mathbb{R}^N é dita ser um *h^p - q -átomo* ($0 < p \leq 1$) se existe um cubo Q tal que:

1. $\text{supp}(a) \subset Q$;
2. $\left(\frac{1}{|Q|}\right)^{1/q} \|a\|_{L^q} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\right)^{1/p}$;
3. Se $|Q| < 1$, então $\int x^\alpha a(x) dx = 0$ para todo $|\alpha| \leq N \left(\frac{1}{p} - 1\right)$.

Se $|Q| < 1$, então a é chamado de *átomo pequeno*. Caso contrário é chamado de *átomo grande*.

É possível demonstrar que o conjunto dos h^p - q -átomos em \mathbb{R}^N é um subconjunto limitado de $h^p(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para qualquer elemento $(\lambda_j) \in l^p$ e para qualquer sequência arbitrária $\{a_j\}$ de h^p - q -átomos é possível verificar que a sequência $S_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$ é de Cauchy em h^p . A recíproca dessa afirmação é o conteúdo do teorema abaixo.

3.2. Família Geral de Bolas

Teorema 37 (Decomposição Atômica Suave). *Sejam $0 < p \leq 1$ e $f \in h^p(\mathbb{R}^N)$. Nestas condições existem uma sequência de h^p - ∞ -átomos suaves e um elemento $(\lambda_j) \in l^p$ tal que:*

1. $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ na topologia de h^p ;
2. $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \approx \|f\|_{h^p}^p$.

Também é possível verificar que \mathcal{S} é um subconjunto denso de h^p e que dada $f \in h^p(\mathbb{R}^N)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vale que $f\psi \in h^p(\mathbb{R}^N)$. Em outras palavras: h^p é um conjunto normal de distribuições que podem ser definidas em variedades suaves. No caso particular de um subconjunto Ω de \mathbb{R}^N escreveremos:

$$h^p(\Omega) = H_{\text{loc}}^p(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \psi u \in h^p(\mathbb{R}^N) \text{ para toda } \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

3.2 Família Geral de Bolas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\delta_0 > 0$ fixados. Suponha que para cada $x \in \Omega$ e $0 < \delta \leq \delta_0$ seja dado um conjunto $B(x, \delta) \subset \Omega$ (não necessariamente uma bola euclidiana) satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $B(x, \delta)$ é aberto;
2. $0 < \delta \leq \delta_0$ implica que $B(x, \delta) = \cup_{s < \delta} B(x, s)$;
3. $\cap_{s > 0} B(x, s) = \{x\}$;
4. Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $C > 0$ tal que se $x_1, x_2 \in K$, $\delta_1 \leq \delta_2 \leq 1/C \delta_0$ e se ainda $B(x_1, \delta_1) \cap B(x_2, \delta_2) \neq \emptyset$, então $B(x_1, \delta_1) \subset B(x_2, \delta_2)$;
5. Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $C > 0$ tal que se $x \in K$ e se $\delta < 1/2 \delta_0$, então $|B(x, 2\delta)| \leq C |B(x, \delta)|$.

Nestas condições, diremos que $\{B(x, \delta)\}$ é uma *família geral de bolas* e chamaremos $B(x, \delta)$ de bola geral centrada em x de raio δ .

Uma função $\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty]$ é chamada de *quase-distância* em Ω se as seguintes condições forem verificadas:

3.2. Família Geral de Bolas

1. $\rho(x, y) = 0$, se e somente se, $x = y$;
2. O conjunto $\{y : \rho(x, y) < \delta\}$ é aberto para todo $x \in \Omega$ e $\delta > 0$;
3. Para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $C > 0$ tal que se $x, y, z \in K$, então $\rho(x, y) \leq C (\rho(x, z) + \rho(y, z))$.

Primeiramente, observe que ρ pode não ser simétrica. O máximo que podemos esperar de uma quase-distância é que para todo compacto $K \subset \Omega$ exista uma constante $C > 0$ tal que se $x, y \in K$, então $\rho(x, y) \leq C \rho(y, x)$.

É possível verificar que existe uma relação biunívoca entre uma família geral de bolas em Ω e uma quase-distância em Ω . Para ilustrarmos essa relação comecemos supondo que $\{B(x, \delta)\}$ seja uma família geral de bolas. Defina $\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty]$ como segue:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \inf\{\delta > 0 : y \in B(x, \delta)\} & \text{se } y \in B(x, \delta_0) \\ \infty & \text{se } y \notin B(x, \delta_0) \end{cases}$$

Reciprocamente, se for dada uma quase-distância $\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty]$, defina a família $B(x, \delta) = \{y \in \Omega : \rho(x, y) < \delta\}$.

Nosso próximo passo é introduzir uma quase-distância (e conseqüentemente uma família geral de bolas) a partir de uma estrutura em Ω . Para começar suponha L_1, \dots, L_q campos vetoriais reais (ou então considere suas componentes reais e imaginárias) e d_1, \dots, d_q números naturais não nulos satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para todo ponto $x \in \Omega$ vale que $\{L_i(x)\}$ é um gerador para o espaço tangente;
2. $[L_i, L_j] = \sum_{d_k \leq d_j + d_k} C_{jk}^i L_k$.

Para $\delta > 0$, defina $C(\delta) = C(\delta, L_1, \dots, L_q, d_1, \dots, d_q)$ como a classe de todas as funções absolutamente contínuas $\phi : [0, 1] \rightarrow \Omega$ que satisfazem quase toda parte a equação diferencial:

$$\phi'(t) = \sum_{j=1}^q a_j(t) L_j(\phi)(t),$$

onde os coeficientes $a_j(t)$ são tais que $|a_j(t)| < \delta^{d_j}$. Finalmente, defina:

$$\rho(x, y) = \inf\{\delta > 0 : \exists \phi \in C(\delta) \text{ satisfazendo } \phi(0) = x \text{ e } \phi(1) = y\}.$$

3.3. Revisitando o Teorema de Aproximação CR

Dentro deste contexto é possível verificar a:

Proposição 38. *A aplicação ρ anteriormente dada é uma métrica em Ω . Se $m = \max\{d_j\}$ e $K \subset \Omega$ é um compacto, então existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que para todo $x, y \in K$ vale:*

$$C_1 |x - y| \leq \rho(x, y) \leq C_2 |x - y|^{1/m}.$$

Ora, a família de bolas associadas a esta métrica (e por consequência relacionados a L_1, \dots, L_q) refletem a natureza anisotrópica dos campos e dos seus comutadores. Uma bola geral $B(x, \delta)$ é essencialmente um elipsoide de tamanho δ^n nas direções dos comutadores de ordem n de L_1, \dots, L_q . Como veremos adiante, essas bolas desempenham papel especial no estudo de valores de fronteira de funções holomorfas.

Depois dessa pequena digressão, vamos voltar ao nosso contexto. Considere $\{B(x, \delta)\}$ a família de bolas anisotrópicas associadas ao complexo CR da nossa variedade quádrlica M . É possível demonstrar que uma aplicação F suficientemente regular pode ser majorada por suas médias em bolas anisotrópicas. Mais precisamente temos o:

Lema 39. *Seja Γ' um cone estritamente menor que $\text{ch}\{q(w, \bar{w})\}$. Nessas condições existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que para todo $(w_0, z_0) \in M + \Gamma'$ existe uma vizinhança V de (w_0, z_0) de modo que se F é plurisubharmônica em $\text{ch} M$, não negativa e contínua até a fronteira, então:*

$$\sup_V |F| \leq \frac{C_1}{|B(m_0, C_2 \sqrt{\delta})|} \int_B |F| d\sigma,$$

onde σ é a medida de Lebesgue em M e δ é a distância euclidiana de (w_0, z_0) ao ponto $m_0 = (w_0, x_0 + i q(w_0, \bar{w}_0))$.

O lema anterior é um resultado fundamental ao provar teoremas de extensão. Como sua demonstração é demasiadamente técnica, preferimos omitir sua prova neste texto. Para maiores informações consulte [BN95, lema 5.5].

3.3 Revisitando o Teorema de Aproximação CR

Nesta seção vamos introduzir uma nova versão do Teorema de Aproximação CR para uma classe especial de espaços.

3.3. Revisitando o Teorema de Aproximação CR

Teorema 40 (Teorema de Aproximação CR em h^p). *Seja $M \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ uma variedade quádrlica. Considere um compacto $K \subset M$ e $h \in \text{CR}(M)$. Nestas condições existe uma sequência de aplicações inteiras, indexadas em $\tau > 0$, doravante denominadas $E_\tau h$, tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau h = h$ na topologia de $\mathcal{D}'(K)$. Além disso, se $0 < p \leq 1$ e $h \in H_{loc}^p(M)$, então a convergência $\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_\tau h = h$ ocorre na topologia de $H_{loc}^p(K)$.*

Demonstração. A demonstração desse teorema será dada através de uma série sucessiva de simplificações. Inicialmente, observe que como o espaço das funções testes está continuamente incluso em H_{loc}^p o teorema fica demonstrado, de acordo com a observação final do capítulo anterior, assim que verificarmos que:

1. $G_\tau h \rightarrow h$ em h^p para toda $h \in \mathcal{D}$;
2. a família de operadores $\{G_\tau\}$ é equicontínua em h^p .

Para a realização destas duas tarefas, lançaremos mão da decomposição atômica suave desses espaços. Deste ponto em diante, assuma que a aplicação $\Phi \in \mathcal{S}$ geradora da função maximal truncada m_Φ está suportada na bola unitária. Para a próxima simplificação suponha que $\|G_\tau a\|_{h^p}^p \leq C$ para todo átomo suave a de h^p . Nestas condições, verifiquemos que as duas observações anteriores ficam demonstradas. De fato, se $w \in h^p$, então $w = \sum_k \lambda_k a_k$ com a_k átomos suaves e $\sum_k |\lambda_k|^p \approx \|w\|_{h^p}$. Como $p \leq 1$ e lembrando que $\|G_\tau w\|_{h^p}^p = \int (m_\Phi G_\tau w)^p dz$, então:

$$\int \left(m_\Phi G_\tau \sum_k \lambda_k a_k \right)^p dz \leq \int \left(\sum_k |\lambda_k| m_\Phi G_\tau a_k \right)^p dz \leq \sum_k |\lambda_k|^p \|G_\tau a_k\|_{h^p}^p \leq C \|w\|_{h^p}.$$

Com a equicontinuidade da família G_τ , seguido do fato de que as funções testes são densas em h^p , temos a demonstração das duas afirmações anteriores. Nos resta então verificar que $\|G_\tau a\|_{h^p}^p \leq C$ para todo átomo suave a de h^p .

Seja τ_0 suficientemente grande e $F_\tau(\phi) = C \tau^{\frac{m}{4} + \frac{d}{4}} \exp\{-\tau u^4 - \tau^{1/2} x^2\}$ (para alguma constante $C > 0$ apropriada). Considere o operador maximal associado com $G_\tau h$:

$$G^* h(\phi, v) = \sup_{\tau \geq \tau_0} |G_\tau h(\phi, v)|.$$

3.3. Revisitando o Teorema de Aproximação CR

Se $h \in L^1$, então, aplicando uma estimativa pontual no integrando de $G_\tau h$, obtemos:

$$|G_\tau h(\phi, v)| \leq \sup_{\tau \geq \tau_0} F_\tau \star |f T_v h|,$$

onde $T_v h$ é traço de h com respeito à segunda variável no nível v e f é uma função corte propriamente escolhida. Consequentemente:

$$G_\tau^* h(\phi, v) \leq \sup_{\tau \geq \tau_0} F_\tau \star |f T_v h|.$$

Antes de prosseguirmos, vamos estabelecer alguns símbolos de modo que nossa notação não seja ambígua. Deste ponto em diante escreveremos \star para uma convolução nas variáveis (ϕ, v) assim como denotaremos por \diamond uma convolução na variável t e utilizaremos \square para uma convolução na variável ϕ . Desta forma, considere $F(\phi) = \exp\{-u^4 - x^2\}$ e escreva $F_\sigma(\phi) = \sigma^{-m-d} F(\phi/\sigma)$, onde $\sigma = \tau^{-1/4}$. Fixado $\tau > 0$ podemos entender F_σ como a função F_τ na desigualdade anterior e concluir que:

$$(\Phi_\varepsilon \star G_\tau a)(\phi, v) \leq C |\Phi_\varepsilon \star (F_\sigma \square a)(\phi, v)| = C |(\Phi_\varepsilon \star a) \square F_\sigma(\phi, v)|.$$

Considere $Q = Q_1 \times Q_2$ um cubo contendo o suporte de a de modo que $Q_1 \subset \mathbb{C}^{m+d}$ e $Q_2 \subset \mathbb{C}^d$. Supondo que a é um átomo, temos que seu supremo pode ser controlado por uma potência fracionária (negativa) da medida de Lebesgue de Q . Com isso, temos que:

$$m_\Phi(G_\tau a)(\phi, v) \leq C |Q|^{-1/p} \chi_{Q_2}(v),$$

onde χ_A indica a função característica de um conjunto mensurável A . Ora, considere um cubo Q_1^* concêntrico com Q_1 de forma que seu lado seja o dobro da aresta do cubo original. Analogamente considere um cubo Q_1^{**} concêntrico com Q_1 de forma que seu lado seja quatro vezes maior que a aresta do cubo original Q_1 . Nessas condições a estimativa anterior implica que:

$$\iint_{Q_1^{**} \times \mathbb{R}^d} |m_\Phi(G_\tau a)(\phi, v)|^p d\phi dv \leq C.$$

Consequentemente para verificarmos que $\|G_\tau a\|_{h^p}^p \leq C$ para todo átomo suave a de h^p nos

3.3. Revisitando o Teorema de Aproximação CR

resta demonstrar que:

$$\iint_{(\mathbb{R}^{m+d} \setminus Q_1^{**}) \times \mathbb{R}^d} \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} |\Phi_\varepsilon \star (F_\sigma \square a)(\phi, v)|^p d\phi dv \leq C. \quad (3.3.1)$$

Assumindo que $\Phi(\phi, v) = \Phi_1(\phi)\Phi_2(v)$, onde Φ_1 e Φ_2 estão suportadas em \mathbb{R}^{m+d} e \mathbb{R}^d respectivamente, somos levados a considerar apenas a convolução na variável ϕ e entender v como um parâmetro. Ora, como Φ_1 está suportada na bola unitária segue que $\Phi_\varepsilon^1 \square a = a^\varepsilon$ está suportada em Q_1^* para todo $0 < \varepsilon \leq 1$. Escreva $C_L = \sup |\phi|^L F(\phi)$ e considere ϕ_0 o centro do cubo Q_1 . Como $|\phi - \phi_0|$ é comparável com $|\phi - y|$ para todo $y \in Q_1^*$ e para todo $\phi \notin Q_1^{**}$ nós temos que se $\phi \notin Q_1^{**}$, então:

$$\begin{aligned} |(\Phi_\varepsilon^1 \square a \square F_\sigma)(\phi, v)| &\leq \chi_{Q_2}(v) \left| \int_{\mathbb{R}^{m+d}} a^\varepsilon(y, v) F_\sigma(\phi - y) dy \right| \\ &\leq C C_L \chi_{Q_2}(v) |Q|^{-1/p} \sigma^{-m-d} \left[\frac{|\phi - \phi_0|}{\sigma} \right]^{-L}. \end{aligned}$$

Como $|Q_1^*| = (2r)^{m+d} \leq (2|\phi - \phi_0|)^{m+d}$ e $\sigma^{L-m-d} \leq 1$ se tomarmos L suficientemente grande, nós obteremos que para um certo inteiro T vale que:

$$|(\Phi_\varepsilon^1 \square a \square F_\sigma)(\phi, v)| \leq C \chi_{Q_2}(v) |Q|^{-1/p} |\phi - \phi_0|^{-T}.$$

Aplicando uma convolução com Φ_ε^2 temos, para $\phi \notin Q_1^{**}$ e $v \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |\Phi_\varepsilon \star (F_\sigma \square a)(\phi, v)| &\leq C |Q|^{-1/p} |\phi - \phi_0|^{-T} (\Phi_\varepsilon^2 \diamond \chi_{Q_2})(v) \\ &\leq C |Q|^{-1/p} |\phi - \phi_0|^{-T} \chi_{Q_2^*}(v). \end{aligned}$$

Assuma por um instante que o átomo esteja suportado em um cubo grande. Nesse caso, podemos tomar o supremo em $0 < \varepsilon \leq 1$, elevar ambos os lados à potência p e integrar em $\mathbb{R}^{m+d} \setminus Q_1^{**}) \times \mathbb{R}^d$ para obter a inequação 3.3.1.

Já para átomos pequenos a estratégia será a seguinte: escreva $F(\phi)$ como uma série convergente em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+d})$ da forma que $F = \sum_k F^{(k)}$ com $F^{(0)}$ suportada na bola unitária e cada $F^{(k)}$ suportada em alguma bola de raio unitário. Lembre-se que, como a é um átomo pequeno, existe uma certa família de integrais (que pareiam a com polinômios) que são identicamente nulas. Nosso objetivo, por ora, é demonstrar a inequação 3.3.1 com $F^{(k)}$ no

3.3. Revisitando o Teorema de Aproximação CR

lugar de F . Lembrando que a é um átomo pequeno, temos:

$$\begin{aligned} (a^\varepsilon \square F_\sigma^{(k)})(\phi, v) &= \chi_{Q_2^*}(v) \int a(y, v) G_{\sigma, \varepsilon}^{(k)}(\phi - y) dy \\ &= \int a(y, v) [G_{\sigma, \varepsilon}^{(k)}(\phi - y) - q_{\phi, \varepsilon}(y)] dy, \end{aligned}$$

onde $G_{\sigma, \varepsilon}^{(k)} = \Phi_\varepsilon^1 \square F_\sigma^{(k)}$ e $q_{\phi, \varepsilon}$ é o polinômio de Taylor de ordem T da função $y \mapsto G_{\sigma, \varepsilon}^{(k)}(\phi - y)$ próxima do ponto ϕ_0 . Neste caso T é escolhido como a parte inteira de $(2m + 2d)(1/p - 1)$.

A estimativa para o resto da Série de Taylor mostra que o lado direito da equação anterior pode ser majorado por $C|Q|^{-1/p} \sigma^{-T-1-m-d} r^{T+1}$. Assuma inicialmente que $k = 0$. Desta forma segue que $F^{(0)}$ está suportada na bola unitária. Como $|\phi - \phi_0|$ é comparável com $|\phi - y|$ para todo $y \in Q_1^*$ e $\phi \notin Q_1^{**}$ e, além disso, temos que $|\phi - y| \leq \sigma$ no suporte de $F_\sigma^{(0)}(\phi - y)$ segue que, para todo $0 < \varepsilon \leq 1$ e $0 < \sigma \leq 1$,

$$|(a^\varepsilon \square F_\sigma^{(0)})(\phi, v)|^p \leq C_0 \chi_{Q_2}(v) \left(\frac{r}{|\phi - \phi_0|} \right)^{(T+m+d+1)p} \text{ para todo } \phi \notin Q_1^{**}.$$

Que depois de uma integração, torna-se:

$$\iint_{(\mathbb{R}^{m+d} \setminus Q_1^{**}) \times \mathbb{R}^d} \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} |\Phi_\varepsilon \star (F_\sigma^{(0)} \square a)(\phi, v)|^p d\phi dv \leq C_0.$$

Por outro lado, já sabemos que:

$$\iint_{Q_1^{**} \times \mathbb{R}^d} \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} |\Phi_\varepsilon \star (F_\sigma^{(0)} \square a)(\phi, v)|^p d\phi dv \leq C_0.$$

Combinando as duas inequações anteriores, obtemos:

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+d} \times \mathbb{R}^d} \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} |\Phi_\varepsilon \star (F_\sigma^{(0)} \square a)(\phi, v)|^p d\phi dv \leq C_0.$$

Para outros valores de k considere uma translação apropriada $\tilde{F}^{(k)}$ de $F^{(k)}$ de tal forma que $\tilde{F}^{(k)}$ esteja suportada na bola unitária. Associando a cada átomo pequeno a um outro átomo transladado \tilde{a} , podemos escrever $a^\varepsilon \square F_\sigma^{(k)} = \tilde{a}^\varepsilon \square \tilde{F}^{(k)}$. Procedendo como

3.4. Teorema de Extensão CR

anteriormente, podemos obter:

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+d} \times \mathbb{R}^d} \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} |\Phi_\varepsilon \star (F_\sigma^{(0)} \square a)(\phi, v)|^p d\phi dv \leq C_k. \quad (3.3.2)$$

Observe que existe uma seminorma contínua ρ em \mathcal{S} — dada pelas integrais anteriores — envolvendo apenas as derivadas de ordem $\leq T + 1$ de forma que $C_k \leq \rho(F^{(k)})$. Como $\sum_k F^{(k)}$ converge absolutamente em \mathcal{S} observamos que $\sum_k C_k < \infty$. Portanto, a família de desigualdades 3.3.2 implica 3.3.1 por subaditividade. \square

3.4 Teorema de Extensão CR

Digamos que h seja uma distribuição CR em M que esteja em algum $h^p(M)$ com $p > 0$. Pelo teorema 40 existe uma sequência de aplicações inteiras F_j , cujos traços bF_j convergem para h na topologia de h^p para cada compacto fixado. O conteúdo do próximo lema discute uma propriedade muito interessante da sequência $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$: mesmo sem explicitamente conhecer as funções, é possível demonstrar que elas dão origem a uma aplicação holomorfa F que está definida no interior de $\text{ch } M$.

Lema 41. *Fixe $p > 0$ e considere $M \subset \mathbb{C}^{m+d}$ uma variedade quádrlica e K um compacto arbitrário em M . Seja Γ' um cone estritamente menor que $\text{ch}\{q(w, \bar{w})\}$ e $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de aplicações inteiras. Suponha que a sequência dada pela restrição de cada F_j a M (isto é, $\{bF_j\}_{j \in \mathbb{N}}$) seja uma sequência de Cauchy quando olhadas em $h^p(K)$. Nestas condições, existe uma aplicação holomorfa F definida em $M + \Gamma'$ tal que:*

1. *Para todo $(w_0, z_0) \in M + \Gamma'$ existe uma vizinhança V de (w_0, z_0) de modo que $F_j \rightarrow F$ uniformemente;*
2. *F admite valor de fronteira bF em $\mathcal{D}'(M)$;*
3. *$bF_j \rightarrow bF$ na topologia das distribuições.*

Demonstração. Seja $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi(z) dz \neq 0$ e tome $(w_0, z_0) \in M + \Gamma'$. Para cada par de índices (j, k) temos que F_j e F_k são aplicações inteiras. Nestas condições, segue que $G_{j,k} = |m_\Phi(F_j - F_k)|^p$ é uma função plurisubharmônica em $\text{ch } M$, não negativa e contínua

3.4. Teorema de Extensão CR

até a fronteira. De acordo com o lema 39 existem constantes C_1, C_2 e uma vizinhança V de (w_0, z_0) tal que:

$$\sup_V |G_{j,k}| \leq \frac{C_1}{|B(m_0, C_2 \sqrt{\delta})|} \int_B |G_{j,k}| d\sigma,$$

onde B é a bola anisotrópica em M e δ é a distância euclidiana de (w_0, z_0) ao ponto $m_0 = (w_0, x_0 + iq(w_0, \bar{w}_0))$. Considere em M um compacto tal que $B(m_0, C_2 \sqrt{\delta}) \subset K$. Como, por hipótese, $\{bF_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy quando olhadas em $h^p(K)$, então dado $\varepsilon > 0$ segue que existe N_0 tal que:

$$j, k > N_0 \Rightarrow \frac{C_1}{|B(m_0, C_2 \sqrt{\delta})|} \int_B |G_{j,k}| d\sigma < \varepsilon.$$

Se $z \in V$, então $|(F_j - F_k)(z)|^p \leq G_{j,k}(z) \leq \sup_V |G_{j,k}| \leq \varepsilon$. Portanto a sequência $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy em V . Para o restante da conclusão do lema basta observar que todas as aplicações F_j tem uma estimativa temperada uniforme e aplicar a continuidade do operador b □

Nossa demonstração do lema 41 depende fortemente do lema 39, que é extremamente técnico. Por isso, seria interessante contar com outra demonstração mais elementar do mesmo fato. Como exemplo de uma abordagem possível utilizaremos discos analíticos em um caso especial.

Definição 42. Suponha M uma subvariedade de \mathbb{C}^N e $A : \bar{D}^1 \rightarrow \mathbb{C}^N$ uma aplicação contínua. Se A for holomorfa no interior do disco, então diremos que A é um disco analítico. Nestas condições, o conjunto $\partial A = \{z \in \mathbb{C}^N : z \in A(S^1)\}$ será chamado de fronteira de A e o ponto $A(0) = P \in \mathbb{C}^n$ será dito o centro de A . Se, além disso, $\partial A \subset M$, então diremos que A está anexado a M .

Durante esta digressão consideraremos $\tilde{q}(u, v) = u^2 + v^2$ e $m = d = 1$. Nessas condições teremos que:

$$M = \{(w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \Im t = q(w, \bar{w})\}.$$

Fixe $x_0 > 0$ e tome um ponto $P_0 = (u_0 + iv_0, x_0 + iy_0)$ no interior da envoltória convexa de M . Considere um biholomorfismo (contínuo até a fronteira) $\eta : \bar{D}^1 \rightarrow u_0 + iv_0 + |x_0| \bar{D}^1$ satisfazendo $\eta(0) = u_0 + iv_0$ e $\eta(e^{i\theta}) = |x_0|^{1/2} e^{i\theta}$. Com isso defina o disco analítico $A_{P_0}(\rho, \theta) = (\eta(\rho e^{i\theta}), x_0 + iy_0)$.

3.4. Teorema de Extensão CR

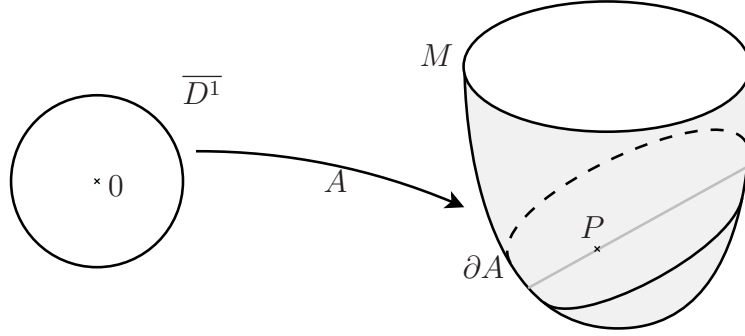


Figura 3.1: Esboço de um disco analítico anexado a M

Suponha que $V = B(P_0, r) \subset \text{int ch } M$. Ora, para $p \in V$ vale que:

$$|G_{j,k}|(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_{j,k}|(A_p(e^{i\theta})) d\theta.$$

Integrando em p , obtemos:

$$\int_V |G_{j,k}|(p) dp \leq \frac{1}{2\pi} \int_V \int_0^{2\pi} |G_{j,k}|(A_p(e^{i\theta})) d\theta dp.$$

Fixado θ , calculemos a integral $\int_V |G_{j,k}|(A_p(e^{i\theta})) dp$. Ora, para cada $p \in V$ associe a fronteira ∂A_p . Desta forma, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$S = \bigcup_{p \in V} \partial A_p = \bigcup_{a < x_0 < b} \{(|x_0|^{1/2} e^{i\theta}, x_0 + i y_0)\} \subset M.$$

Consequentemente:

$$\int_V |G_{j,k}|(A_p(e^{i\theta})) dp = \int_{a < x_0 < b} |G_{j,k}|(\eta(\rho e^{i\theta}), x_0 + i y_0) dp.$$

Para cada y_0 a aplicação:

$$\begin{aligned} \Psi : (a, b) &\longrightarrow S \\ x_0 &\longmapsto (\eta(\rho e^{i\theta}), x_0 + i y_0) \end{aligned}$$

constitui uma mudança de variáveis e, portanto:

$$\int_V |G_{j,k}|(A_p(e^{i\theta})) dp \approx \int_X |G_{j,k}| d\sigma,$$

3.4. Teorema de Extensão CR

onde σ representa o elemento de área em M .

Como X é limitado, podemos ficar $\varepsilon > 0$ e tomar j, k suficientemente grandes para tornar $\int_X |G_{j,k}| d\sigma < \varepsilon$. \square

Terminada essa pequena digressão, podemos finalmente enunciar o Teorema de Extensão CR. Em resumo: o lema 41 estabelece que $\lim bF_j = bF$ e o teorema 40 certifica que $bF_j = h$ (nas topologias adequadas). Com isso, fica demonstrado o:

Teorema 43 (Teorema de Extensão CR). *Fixe $p > 0$ e considere $M \subset \mathbb{C}^{m+d}$ uma variedade quádrlica. Sejam Γ' um cone estritamente menor que $\text{ch}\{q(w, \bar{w})\}$ e $f \in \text{CR}(M) \cap h^p(M)$. Nessas condições existe uma aplicação holomorfa F definida em $\text{int } M + \Gamma'$ tal que $bF = f$.*

NOTAS PARA O CAPÍTULO 3

Assumimos implicitamente que $p \leq 1$ durante a demonstração dos teoremas desse capítulo. Se $p > 1$, note que os enunciados se resumem a seus análogos com os espaços L^p , visto que h^p e L^p coincidem quando $p > 1$. A validade dessas versões segue imediatamente dos resultados provados por Boggess.

Para a apresentação original dos espaços de Hardy localizados, consulte [Gol79]. Já para as demonstrações ausentes na primeira seção deste capítulo, consulte [NSW85].

Referências Bibliográficas

- [BCH08] S. Berhanu, P.D. Cordaro, and J. Hounie. *An introduction to involutive structures*. New mathematical monographs. Cambridge University Press, 2008.
- [BER99] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L.P. Rothschild. *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton mathematical series. Princeton University Press, New Jersey, 1999.
- [BN95] A. Boggess and A. Nagel. Local reproducing kernels on wedge-like domains with type 2 edges. *Pacific Journal of Mathematics*, 167(1):1–47, 1995.
- [Bog01] Albert Boggess. Cr extension for lp cr functions on a quadric submanifold of cn. *Pacific Journal of Mathematics*, 201(1), 2001.
- [Gol79] David Goldberg. A local version of real hardy spaces. *Duke Mathematical Journal*, 46(1):27–42, 1979.
- [Hör83] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators: Distribution theory and Fourier analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Alemanha, 1983.
- [NSW85] Alexander Nagel, Elias Stein, and Stephen Wainger. Balls and metrics defined by vector fields i: Basic properties. *Acta Mathematica*, 155(1):103–147, 1985.

Índice Remissivo

A

Átomo

H^p -átomo, 57

h^p - q -átomo, 59

Grande, 59

Pequeno, 59

B

Bolas Anisotrópicas, 62

C

Cone, 11

Conjunto de Integrais Primeiras, 25

Crescimento Temperado, 6, 12, 13

Cunha de Aresta M , 11

D

Decomposição Atômica Suave, 58, 60

Disco Analítico, 68

Anexado a M , 68

Centro, 68

Fronteira, 68

Distribuição

CR, 2, 25

Limitada, 56

E

Espaço

de Hardy, 57

de Sobolev, 42

de Sobolev Local, 43

Localizado de Hardy, 59

Estrutura CR, 2

Geradores da Estrutura CR, 25

F

Fórmula

de Baouendi e Treves, 19

de Green-Gauss, 5

Família Geral de Bolas, 60

Forma Quádrica, 20

Fronteira C^1 , 5

Função Maximal Radial de f , 56

Função Maximal Truncada, 58

G

Grande Função Maximal de f , 56

O

Operador

de Aproximação, 31

de Aproximação Modificado, 28

Resto, 31

Q

Quase-distância, 60

T

Teorema

de Aproximação CR

Caso h^p , 63

Caso das Distribuições, 52

Caso dos Espaços L^p , 54

Caso Geral, 52

Caso Suave, 42

de Baouendi e Treves, 19

de Extensão CR, 70

Traço

Continuidade, 7, 10, 17

Existência, 5, 8, 13, 14

V

Variedade Quádrica, 20