UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Rômel da Rosa da Silva

O Problema de Cauchy para sistemas quase-lineares hiperbólicos é bem posto em espaços de Hölder

SÃO CARLOS
2012

O Problema de Cauchy para sistemas quase-lineares hiperbólicos é bem posto em espaços de Hölder

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Rômel da Rosa da Silva

O Problema de Cauchy para sistemas quase-lineares hiperbólicos é bem posto em espaços de Hölder

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho.

SÃO CARLOS
2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

S586pc

Silva, Rômel da Rosa da.
O problema de Cauchy para sistemas quase-lineares hiperbólicos é bem posto em espaços de Hölder / Rômel da Rosa da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
75 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Análise matemática. 2. Cauchy, Problemas de. 3. Espaços de Hölder. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
DM – UFSCar

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco
ICMC - USP

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
FFCLRP – USP

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

Agradecimentos

A Deus pelas oportunidades.

A meus pais, irmãos e a esposa pelo incentivo, apoio e principalmente pelo amor.

Ao meu orientador, Ruidival, meus sinceros agradecimentos, pelos ensinamentos, pela amizade, compreensão,... .

Aos professores, Adalberto, Cezar, Marcelo e Jorge por fazerem parte da banca examinadora.

A todos os demais professores que tive até agora.

Aos amigos do DM.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nós consideramos o problema de Cauchy para sistemas quase-lineares

$$\begin{cases} \partial_t u + a(u)\partial_x u &= 0 \\ u(0,x) &= \boldsymbol{u}_0(x), \end{cases}$$

com $u = (u_1, \ldots, u_N)$ e $a(u) = (a_{jk}(u))_{j,k=1}^N$ matriz real $N \times N$, com entradas C^∞, tal que $a(0)$ tem todos os autovalores reais e distintos, ou seja o sistema é hiperbólico em $u = 0$. Demonstramos que certos espaços de Besov são preservados pelo fluxo da solução, perto da solução nula.

Palavras-chave: Análise Matemática. Problema de Cauchy. Espaços de Hölder.

Abstract

We consider the Cauchy problem for the quasi-linear systems

$$\begin{cases} \partial_t u + a(u)\partial_x u &= 0 \\ u(0,x) &= \boldsymbol{u}_0(x), \end{cases}$$

with $u = (u_1, \ldots, u_N)$ and $a(u) = (a_{jk}(u))_{j,k=1}^{N}$ real matrix $N \times N$, with entries C^∞, such that the eigenvalues of $a(0)$ are real and distinct, that is, the system is hyperbolic at $u = 0$. We show that certain Besov spaces are preserved by flow of the solution, near the null solution.

Keywords: Mathematical Analysis. Cauchy Problem. Hölder spaces.

Sumário

Introdução

Lars Hörmander inicia o capítulo IV de [4] com uma discussão a respeito de soluções clássicas do problema de Cauchy para sistemas quase-lineares de primeira ordem. Considera o problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + a(u)\partial_x u &=& 0 \\ u(0,x) &=& \boldsymbol{u}_0(x), \end{array} \right. \tag{0.0.1}$$

com $u = (u_1, \ldots, u_N)$ e $a(u) = (a_{jk}(u))_{j,k=1}^N$ matriz real $N \times N$, com entradas C^∞, tal que $a(0)$ tem todos os autovalores reais e distintos. Sob certas condições impostas ao dado inicial o problema (0.0.1) é bem posto em C^k, $k \geq 1$. Mais precisamente, na seção 4.2 de [4] demonstra-se o seguinte teorema:

Teorema 0.0.1 *Se $\boldsymbol{u}_0 \in C^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$, tem todas as derivadas de ordem $\leq k$ limitadas e as de ordem ≤ 1 são suficientemente pequenas, então o problema de Cauchy (0.0.1) tem uma única solução $u \in C^k$, definida para todo $0 \leq t \leq T$, desde que*

$$T \sup |\boldsymbol{u}_0'| \leq c,$$

onde c é uma constante dependendo apenas de a. Mais ainda, existem constantes $C_1, \ldots, C_k$, (dependendo só da norma C^1 do dado inicial) para as quais valem as estimativas

$$\|u\|_{C^l} \leq C_l \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^l}. \tag{0.0.2}$$

Observamos que tal resultado não pode ser substancialmente melhorado, para tal vejamos o que se passa com a equação de Burgers; ou seja quando $N = 1$ e $a(u) = u$. Neste caso, via método das características, verifica-se: Para $\boldsymbol{u}_0 \in C^1$, a solução é dada por $u(t,x) = \boldsymbol{u}_0(y); \quad x = y + t\boldsymbol{u}_0(y)$. Como $x_y = 1 + t\boldsymbol{u}_0'(y)$ se $\boldsymbol{u}_0$ e $\boldsymbol{u}_0'$ são limitadas, então a equação $x = y + t\boldsymbol{u}_0(y)$ determina implicitamente y em termos de (t,x) quando $0 \leq t \leq T$ com

$$\frac{1}{T} = \sup\{-\boldsymbol{u}_0'\}.$$

Notemos ainda que se $-\boldsymbol{u}_0'(y)$ atinge o máximo positivo em y, então $u_x = x_y^{-1}\boldsymbol{u}_0'(y)$ converge para o infinito quando $t \to T$, assim a faixa em t que a solução permanece C^1 é $0 \leq t < T$.

O principal objetivo aqui é apresentar algumas extensões do Teorema 0.0.1. Em particular, nos concentramos no caso em que o dado inicial pertence ao espaço de Hölder C^ρ, com $\rho > 1$. Extensões do referido teorema tem sido exaustivamente estudados no âmbito dos espaços de Sobolev, veja [2] e [6].

O texto está dividido em quatro capítulos. No primeiro deles, apresentamos algumas definições e resultados que servem de suporte para os capítulos seguintes. Tal capítulo não é essencial, optamos por inseri-lo apenas para facilitar a leitura dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, demonstramos que a hipótese de pequenez na primeira derivada do dado inicial, imposta por Hörmander, não é necessária para que o problema de Cauchy (0.0.1) seja localmente bem posto em C^k, $k \geq 1$. Mais precisamente demonstramos o:

Teorema 0.0.2 *Se $\boldsymbol{u}_0 \in C^k$, $k \geq 1$, tem todas as derivadas limitadas e $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ é suficientemente pequeno, então o problema de Cauchy (0.0.1) admite solução k vezes diferenciável, e mais, existem $T > 0$ e constantes $C_0, \tilde{C}_0, C_1, \tilde{C}_1, \ldots, C_k, \tilde{C}_k$ para as quais a solução u satisfaz*

$$\|\partial_x^l u(t,\cdot)\|_\infty \leq C_l \|\boldsymbol{u}_0^{(l)}\|_\infty \exp(t\tilde{C}_l), \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Em seguida, ainda sem a hipótese de pequenez na derivada do dado inicial, verificamos que o problema é localmente bem posto no espaço de Hölder C^ρ, com $\rho > 1$. Isto é, demonstramos o:

Teorema 0.0.3 *Seja $\rho > 1$ um número real não-inteiro. Se $\boldsymbol{u}_0 \in C^\rho$ e $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ é suficientemente pequeno, então o problema (0.0.1) admite solução $u \in C^\rho([0,T] \times \mathbb{R})$ (para algum $T > 0$) e mais,*

$$\|u\|_{C^\rho} \leq C\, \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho}.$$

Nos resultados acima, principalmente quando a regularidade do dado inicial aumenta, não conseguimos relacionar o valor de T com a pequenez do dado inicial. No final do Capítulo 2, mantendo a hipótese de pequenez da derivada, apresentamos um resultado que generaliza o Teorema 0.0.1 para o caso C^ρ, $\rho > 1$, e mantem a relação entre T o a pequenez do dado inicial. A saber:

Teorema 0.0.4 *Seja $\boldsymbol{u}_0 \in C^\rho$, $\rho > 1$ não-inteiro. Se $\boldsymbol{u}_0$ tem todas as derivadas de ordem $\leq [\rho]$ limitadas e as de ordem ≤ 1 são suficientemente pequenas, então o problema de Cauchy (0.0.1) tem uma única solução $u \in C^\rho$, definida para todo $0 \leq t \leq T$, desde que*

$$T \sup |\boldsymbol{u}_0'| \leq c,$$

onde c é uma constante dependendo apenas de a. Mais ainda, existe constante C para a qual vale

$$\|u\|_{C^\rho} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho}. \tag{0.0.3}$$

No Capítulo 3, em um primeiro momento, demonstramos, utilizando a teoria de Littlewood-Paley, uma generalização do Teorema 0.0.1 que é de fato mais fraca que a já apresentada no Capítulo 2, no entanto, tal demonstração serve de inspiração para, numa segunda etapa, trabalhar com o problema numa classe mais ampla de funções, o que nos possibilita demonstrar uma extensão do Teorema 0.0.1 para os espaços de Besov $B^\rho_{\infty,r}$ com $\rho > 2$ não-inteiro. Mais precisamente com tal técnica demonstramos o:

Teorema 0.0.5 *Seja $\boldsymbol{u}_0 \in B^\rho_{\infty,r}$, $\rho > 2$ não-inteiro e $1 \leq r \leq \infty$. Se $\boldsymbol{u}_0$ tem as derivadas de ordem $\leq [\rho]$ limitadas e de ordem ≤ 1 suficientemente pequenas, então o problema de Cauchy (0.0.1) tem uma única solução $u \in C^{[\rho]}([0,T] \times \mathbb{R})$ desde que*

$$T \sup |\boldsymbol{u}_0'| \leq c,$$

onde c é uma constante dependendo apenas de a. Mais ainda, para cada $t \in [0,T], u(t,\cdot) \in B^\rho_{\infty,r}$ e satisfaz

$$\|u(t,\cdot)\|_{B^\rho_{\infty,r}} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{B^\rho_{\infty,r}} \quad \forall\, t \in [0,T],$$

com C constante independente de t.

No último capítulo, Capítulo 4, comentamos a técnica usada em [6] para demonstrar que o problema de Cauchy é localmente bem posto em H^s para todo sistema quase-linear hiperbólico simetrizável. Destaco aqui, que os resultados de [6] são para dimensão espacial arbitrária e este é um dos motivos de comentarmos tais resultados.

Capítulo 1

Preliminares

Como mencionado na introdução, este é um capítulo informativo, nele apresentamos algumas definições e alguns resultados. Vamos ser bem sucintos uma vez que tal capítulo é, basicamente, um apanhado de informações que tem por objetivo fornecer uma consulta rápida, afim de sanar eventuais dúvidas, sobre fatos ou definições que serão utilizadas nos capítulos seguintes. Para maiores informações acerca dos conteúdos e resultados apresentados neste capítulo ver [2], para as seções 1.1 e 1.2, e para as seções 1.3 e 1.4 ver [1], [4], [5] e [7]. Observo que nem todas as definições ou os resultados que são utilizados nos capítulos seguintes estão aqui colecionados, por exemplo, as definições de campo vetorial e fluxo são assumidas. Alguns fatos básicos de cálculo são usados sem qualquer menção. Estamos especialmente interessados em apresentar aqui a definição dos espaços de Besov e a Decomposição de Bony.

1.1 Espaços de Besov

Algumas desigualdades bem conhecidas e que tem papel importante no estudo dos espaços de Besov são o conteúdo do:

Teorema 1.1.1 (Desigualdades de Bernstein) *Sejam $\mathcal{C}$ uma coroa e B uma bola. Existe uma constante C tal que para qualquer par de números reais (p,q) satisfazendo, $q \geq p \geq 1$, $\lambda > 0$ e $u \in L^p$ temos:*

i) $S(\hat{u}) \subset \lambda B \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C^{k+1}\lambda^{k+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)};$

ii) $S(\hat{u}) \subset \lambda\mathcal{C} \Rightarrow C^{-k-1}\lambda^k\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$

Para que possamos apresentar a definição dos espaços de Besov, precisamos considerar algumas funções especias, tais funções são apresentadas na:

Proposição 1.1.1 *Sejam $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, \frac{3}{4}, \frac{8}{3})$ e $B = B(0, \frac{4}{3})$. Existem funções radiais $\chi \in C_c^\infty(B, [0,1])$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{C}, [0,1])$ satisfazendo:*

$$\forall \ \ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1;$$

$$\forall \ \ \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1;$$

$$|j-j'|\geq 2 \Rightarrow S(\varphi(2^{-j}\cdot))\cap S(\varphi(2^{-j'}\cdot))=\emptyset;$$
$$j\geq 1 \Rightarrow S(\chi)\cap S(\varphi(2^{-j}\cdot))=\emptyset.$$

Além disto, se $\tilde{\mathcal{C}}=B(0,\frac{2}{3})+\mathcal{C}$, *então*

$$|j-j'|\geq 5 \Rightarrow 2^{j'}\tilde{\mathcal{C}}\cap 2^{j}\mathcal{C}=\emptyset;$$
$$\forall\ \ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \ \frac{1}{3}\leq \chi^2(\xi)+\sum_{j\geq 0}\varphi^2\left(2^{-j}\xi\right)\leq 1;$$
$$\forall\ \ \xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\},\ \ \frac{1}{2}\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi^2(2^{-j}\xi)\leq 1.$$

Para φ e χ satisfazendo as condições da proposição acima associa-se os seguintes multiplicadores de Fourier:

$$\begin{aligned}
\Delta_j u &= 0,\ \ \forall\ \ j<-1;\\
\Delta_{-1}u &= (\chi\hat{u})\check{};\\
\Delta_j u &= (\varphi(2^{-j}\cdot)\hat{u})\check{},\forall\ \ j\geq 0;\\
S_j u &= (\chi(2^{-j}\cdot)\hat{u})\check{},\ \ \forall\ \ j\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

No caso de $u\in L^p$, $1\leq p\leq\infty$, os operadores acima podem ser escritos utilizando convolução, a saber

$$\begin{aligned}
\Delta_{-1}u &= 2^{-n}\check{\chi}(2^{-1}\cdot)*u,\\
\Delta_j u &= 2^{jn}\check{\varphi}(2^{j}\cdot)*u,\ \ \forall\, j\geq 0,\\
S_j u &= 2^{jn}\check{\chi}(2^{j}\cdot)*u,\ \ \forall\, j\geq -1.
\end{aligned}$$

Observemos ainda que os operadores Δ_{j} comutam com as derivadas, isto é,

$$\Delta_j\partial^\alpha u=\partial^\alpha\Delta_j u;\ \ \forall\,\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \ \forall\, u\in\mathcal{S}',$$

notemos, além disto, que Δ_j e S_j mapeiam L^p em L^p e existe constante C (independente de $j\in\mathbb{Z}$), tal que

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_j u\|_{L^p}\leq C\|u\|_{L^p}\ \text{ e}\\
&\|S_j u\|_{L^p}\leq C\|u\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Verifica-se também, para toda $u\in\mathcal{S}'$, que

$$S_j u=\sum_{j'\leq j-1}\Delta_{j'}u$$

e que

$$u=\lim_{j\to\infty}S_j u \text{ no espaço } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Logo tem sentido escrever

$$u=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j u.\tag{1.1.2}$$

Definição 1.1.1 (Decomposição de Littlewood-Paley) *O lado direito de (1.1.2) é chamado decomposição não-homogênea de Littlewood-Paley da u.*

Podemos agora apresentar a definição dos espaços de Besov não-homogêneos.

Definição 1.1.2 *Sejam $(p, r) \in [1, \infty]^2$ e s um número real. Para $u \in \mathcal{S}'$, consideremos*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \doteq \|(2^{sj}\|\Delta_j u\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{Z})}.$$

O espaço de Besov $B^s_{p,r}$ é o conjunto de todas as distribuições temperadas u tais que $\|u\|_{B^s_{p,r}} < \infty$.

Observamos aqui que os espaços $B^s_{p,r}$ não dependem da escolha do par (χ, φ).
Algumas propriedades muito úteis dos operadores Δ_q são dadas na:

Proposição 1.1.2 *Para quaisquer u e $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, valem as seguintes propriedades:*

$$\Delta_q \Delta_p u \equiv 0 \ \text{se} \ |q-p| \geq 2;$$

$$\Delta_q \left(S_{p-1} u \Delta_p v\right) \equiv 0 \ \text{se} \ |q-p| \geq 5.$$

Agora apresentaremos uma caracterização dos espaços de Hölder via decomposição de Littlewood-Paley. Primeiramente lembremos a:

Definição 1.1.3 (Espaços de Hölder) *Seja $\rho \in (0, 1)$. Denotamos por $C^\rho(\mathbb{R}^d)$ o conjunto das funções $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ contínuas e limitadas satisfazendo, para alguma constante C,*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\rho, \quad \forall\, x \ \text{e} \ y \in \mathbb{R}^d.$$

Mais geralmente, se $\rho > 0$, e não é um número inteiro, denotamos por $C^\rho(\mathbb{R}^d)$ o conjunto das funções u, $[\rho]$ vezes[1] diferenciáveis tais que $\partial^\alpha u \in C^{\rho-[\rho]}(\mathbb{R}^d)$, para todo $|\alpha| = [\rho]$. O conjunto $C^\rho(\mathbb{R}^d)$ munido com a norma

$$\|u\|_{C^\rho} \doteq \sum_{|\alpha|\leq[\rho]} \|\partial^\alpha u\|_\infty + \sum_{|\alpha|=[\rho]} \sup_{x\neq y} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}.$$

é o espaço de Hölder $C^\rho(\mathbb{R}^d)$.

Temos a seguinte caracterização, via decomposição de Littlewood-Paley, para os espaços de Hölder.

Teorema 1.1.2 *Se ρ é um número real positivo não-inteiro, então os espaços $B^\rho_{\infty,\infty}$ e C^ρ são iguais e, para alguma constante C, vale*

$$C^{-1}\|u\|_{B^\rho_{\infty,\infty}} \leq \|u\|_{C^\rho} \leq C\|u\|_{B^\rho_{\infty,\infty}}.$$

A próxima proposição contém uma lista de importantes propriedades dos espaços de Besov.

Proposição 1.1.3 *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p, r \leq \infty$.*

[1] $[r]$ é o maior inteiro menor ou igual a r

(i) *Propriedade topológica:* $B^s_{p,r}$ *é um espaço de Banach continuamente mergulhado em* $\mathcal{S}'$.

(ii) *O espaço das funções suaves com suporte compacto é denso em* $B^s_{p,r}$ *se, e somente se,* p *e* r *são finitos.*

(iii) *Se* $1 \leq p$ *e* $r < \infty$*, então* $B^s_{p,r}$ *é separável.*

(iv) *Alguns mergulhos:*

(a) $B^s_{p,r} \hookrightarrow B^{\tilde{s}}_{p,\tilde{r}}$ *sempre que* $\tilde{s} < s$ *ou* $\tilde{s} = s$ *e* $r \leq \tilde{r}$;

(b) $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^{s-d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}\right)}_{\tilde{p},r}(\mathbb{R}^d)$ *sempre que* $p \leq \tilde{p}$;

(v) *Propriedade de Fatou: se* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $B^s_{p,r}$ *que converge para* u *em* $\mathcal{S}'$*, então* $u \in B^s_{p,r}$ *e*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leq \liminf \|u_n\|_{B^s_{p,r}}.$$

Destacamos ainda o seguinte resultado envolvendo o comutador de operadores.

Lema 1.1.1 *Existe constante* C *tal que para toda* f *em* L^p*,* g *função lipschitz e* $p \in [1, \infty]$ *vale:*

$$\| [\Delta_q, g] f\|_{L^p} \leq C2^{-q}\|\nabla g\|_\infty \|f\|_{L^p}.$$

1.2 Decomposição de Bony

A decomposição de Bony é uma ferramenta importante e muito útil para estudar o produto de funções e de distribuições. Para duas distribuições temperadas u e v temos a seguinte decomposição:

$$uv = \sum_{q,q'\in\mathbb{Z}} \Delta_q u \Delta_{q'} v.$$

A próxima definição introduz a Decomposição de Bony que é uma boa abordagem ao produto de distribuições.

Definição 1.2.1 *Sejam* u *e* v *duas distribuições temperadas. Consideremos*

$$T_u v \doteq \sum_{q\in\mathbb{Z}} S_{q-1} u \Delta_q v$$

e

$$R(u, v) \doteq \sum_{\substack{|q-q'|\leq 1 \\ q,q'\in\mathbb{Z}}} \Delta_q u \Delta_{q'} v.$$

Pelo menos informalmente podemos escrever

$$uv = T_u v + T_v u + R(u, v) \quad \textit{(Decomposição de Bony).} \tag{1.2.1}$$

O termo $T_u v$ é designado paraproduto de u e v, e $R(u, v)$ é o resto de u e v. Ambos os operadores são bilineares e algumas informações a respeito deles são dadas nos:

Teorema 1.2.1 *Para qualquer $s \in \mathbb{R}$ existe uma constante C tal que, para quaisquer $(p,r) \in [1,+\infty]^2$, temos*

$$\|T_u v\|_{B^s_{p,r}} \leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,r}},\ \forall\,(u,v) \in L^\infty \times B^s_{p,r}.$$

Teorema 1.2.2 *Se $(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$ são tais que $s_1+s_2>0$. Então, existe uma constante C tal que para quaisquer $(p_1,p_2,r_1,r_2) \in [1,\infty]^4$ satisfazendo*

$$\frac{1}{p} \doteq \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leq 1 \quad e \quad \frac{1}{r} \doteq \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} \leq 1,$$

temos

$$\|R(u,v)\|_{B^{s_1+s_2}_{p,r}} \leq C\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}},\ \forall\,(u,v) \in B^{s_1}_{p_1,r_1} \times B^{s_2}_{p_2,r_2}.$$

Combinados, os dois teoremas acima implicam o:

Corolário 1.2.1 *Para qualquer real positivo s, o espaço $L^\infty \cap B^s_{p,r}$ é uma álgebra. Mais precisamente, existe uma constante C tal que*

$$\|uv\|_{B^s_{p,r}} \leq C(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,r}} + \|u\|_{B^s_{p,r}}\|v\|_{L^\infty}),\ \forall\,u,v \in L^\infty \cap B^s_{p,r}.$$

1.3 Alguns Resultados de Análise Matemática.

Apresentamos aqui alguns resultados que serão citados nos capítulos seguintes. Iniciamos com um resultado muito útil quando precisamos explicitar derivadas de ordem superior para composta de funções.

Teorema 1.3.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f: U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação i vezes diferenciável no ponto $x \in U$, com $f(U) \subset V$, e $g: V \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação i vezes diferenciável no ponto $y = f(x)$. Para cada partição $i = i_1 + \ldots + i_k$ (de i como soma de números naturais) existe um $n(i_1,\ldots,i_k) \in \mathbb{Q}$ tal que a i-ésima derivada da aplicação $g \circ f: U \to \mathbb{R}^p$ tem a expressão*

$$(g \circ f)^{(i)} = \sum_{k=1}^{i} n(i_1,\ldots,i_k) g^{(k)} \circ f \cdot \left(f^{(i_1)},\ldots,f^{(i_k)}\right).$$

O próximo resultado relaciona convergência de sequência de funções com a convergência da sequência das derivadas.

Teorema 1.3.2 (Derivação Termo a Termo) *Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ um aberto conexo. Se a sequência de aplicações diferenciáveis $f_k: U \to \mathbb{R}^n$ converge num ponto $c \in U$ e a sequência das derivadas $f'_k: U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$ converge de modo localmente uniforme para uma aplicação $g: U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$, então $(f_k)_k$ converge de modo localmente uniforme para uma aplicação $f: U \to \mathbb{R}^n$, a qual é diferenciável, com $f' = g$.*

Também relacionado a convergência de sequência de funções temos os:

Teorema 1.3.3 (Teorema de Arzelá) *Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua de funções $\varphi: X \to \mathbb{R}$. Se $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada, então toda sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}$ tem uma subsequência $(\varphi_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente em X.*

Teorema 1.3.4 *Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência equicontínua e uniformemente limitada de funções reais e contínuas num espaço métrico compacto X. Suponhamos que toda a subsequência uniformemente convergente desta sequência tem o mesmo limite φ, então $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente para φ.*

O próximo resultado apresenta uma desigualdade de interpolação que é um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.

Teorema 1.3.5 *Se $v \in C^k(\mathbb{R})$ tem todas as derivadas limitadas, então*

$$\|v^{(j)}\|_\infty \leq 2^{\frac{j(k-j)}{2}} \|v^{(k)}\|_\infty^{\frac{j}{k}} \|v\|_\infty^{\frac{k-j}{k}}$$

para todo $0 < j < k$.

Um resultado mais comum em livros que trata de equações diferencias mas que também colocamos aqui é:

Lema 1.3.1 (Lema de Gronwall) *Se u e v são funções contínuas não negativas em $[a,b]$ e tais que para algum $r \geq 0$ satisfazem*

$$u(t) \leq r + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad \forall\, t \in [a,b],$$

então

$$u(t) \leq r\exp(\int_a^t v(s)ds), \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Colocamos ainda aqui o:

Teorema 1.3.6 (Desigualdade de Young) *Suponha $1 \leq p,q,r \leq \infty$ e que $p^{-1}+q^{-1} = r^{-1}+1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$ e $\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.*

1.4 Hiperbolicidade para Sistemas Lineares de Equações Diferenciais do Plano

Definição 1.4.1 *Um sistema de primeira ordem é um operador da forma*

$$L = S(t,x)\partial_t + A(t,x)\partial_x + B(t,x),$$

onde S, A e B são matrizes C^∞, $N \times N$.

Definição 1.4.2 (Hiperbolicidade) *O sistema L é hiperbólico se todos os autovalores, λ_i, de $S^{-1}A$ são reais. Estes autovalores são chamados de velocidades características do operador L. Se todos os autovalores são reais e distintos o sistema é dito estritamente hiperbólico.*

Definição 1.4.3 *Para um sistema hiperbólico L, o campo $\partial_t + \partial_x\lambda_i$ é chamado campo i-característico e suas curvas integrais são chamadas i-características de L.*

Definição 1.4.4 *Um domínio fechado* $D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$ *com base*

$$\omega = D \cap \{t = 0\}$$

é um domínio de determinação de ω *para um operador* L *se para todo ponto* $m = (t_0, x_0) \in D$*, e todo* i*, a curva* i*-característica para trás (isto é* $t \leq t_0$*) que sai de* m*, permanece em* D *até encontrar* ω*.*

Teorema 1.4.1 *Seja* D *um domínio de determinação compacto com base* ω *no eixo* x *para um sistema de primeira ordem estritamente hiperbólico* L*. Seja* $\mathcal{D}_t = \{x : (t, x) \in D\}$*. Então existe constante* C *tal que, para qualquer* $U \in C(\bar{D})$*, vale*

$$\max_{0 \leq s \leq t} \|U(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{D}_s)} \leq C \left(\|U(0, \cdot)\|_{L^\infty(\omega)} + \int_0^t \|(LU)(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{D}_s)} ds \right).$$

O teorema acima implica, em particular, a unicidade de solução para o problema de Cauchy em D.

Capítulo 2

O problema de Cauchy quase-linear é bem posto em C^ρ

Vamos estudar o problema de Cauchy para o sistema

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = 0, \tag{2.0.1}$$

onde $u = (u_1, \ldots, u_N)$ e $a(u) = (a_{jk}(u))_{j,k=1}^N$ é uma matriz real $N \times N$ com entradas C^∞, tal que $a(0)$ tem todos os autovalores reais e distintos, ou seja, o sistema é estritamente hiperbólico. Deste modo para u em uma vizinhança do zero a matriz $a(u)$ tem autovalores reais e distintos denotados por

$$\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_N(u) \tag{2.0.2}$$

e os correspondentes autovetores $r_1(u), \ldots, r_N(u)$ formam uma base unitária dependendo suavemente de u.

Dado $\boldsymbol{u}_0 \in C^\rho(\mathbb{R})$ com $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ suficientemente pequeno, $\rho > 1$, vamos mostrar que existe única $u \in C^\rho([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t u + a(u)\partial_x u &= 0 \\ u(0,x) &= \boldsymbol{u}_0(x) \end{cases} \tag{2.0.3}$$

além disto, mostraremos que u satisfaz a estimativa $\|u\|_{C^\rho} \leq C\|u_0\|_{C^\rho}$.

Antes de passarmos a demonstração dos resultados, apresentamos três etapas baseadas em ideias utilizadas em [4] para demonstrar o Teorema 0.0.1.

Etapa 1. Processo Iterativo. Vamos supor que o dado inicial $\boldsymbol{u}_0$ é C^∞, tem todas as derivadas limitadas e $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ é suficientemente pequeno. Seja $(u_\nu)_{\nu \geq -1}$ a sequência definida da seguinte forma

$$u_{-1}(t,x) = u_0(t,x) = \boldsymbol{u}_0(x) \tag{2.0.4}$$

e para $\nu \geq 1$ definimos u_ν como sendo a solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x u_\nu &= 0 \\ u_\nu(0,x) &= \boldsymbol{u}_0(x). \end{cases} \tag{2.0.5}$$

Assumindo que $\|u_{\nu-1}\|_\infty$ é suficientemente pequeno escrevemos

$$u_\nu(t,x) = \sum_{i=1}^N u_{\nu i}(t,x) r_i(u_{\nu-1}(t,x)) \tag{2.0.6}$$

e

$$\partial_x^k u_\nu(t,x) = w_{\nu k}(t,x) = \sum_{i=1}^N w_{\nu k i}(t,x) r_i(u_{\nu-1}(t,x)). \tag{2.0.7}$$

A necessidade de supor $\|u_{\nu-1}\|_\infty$ suficientemente pequeno é para garantir a existência da base de autovetores $\{r_1(u_{\nu-1}),\dots,r_N(u_{\nu-1})\}$. Como $\|u_{-1}\|_\infty = \|u_0\|_\infty = \|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ é claro que se $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ é pequeno escrever (2.0.6) e (2.0.7) tem sentido para $\nu = 0,1$. Mais adiante, mostraremos, via indução em ν, que se a norma L^∞ do dado inicial é pequena, então restringindo t a um determinado intervalo $[0,T]$, a norma $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$ de todo o termo da sequência $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$ permanece pequena, de fato comparável a $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$. Assim é aceitável assumirmos que $\|u_{\nu-1}\|_\infty$ é suficientemente pequeno e escrever (2.0.6) e (2.0.7).

Usando a decomposição de u_ν dada em (2.0.6) e que $a(u_{\nu-1})r_j(u_{\nu-1}) = \lambda_j(u_{\nu-1})r_j(u_{\nu-1})$ obtemos,

$$a(u_{\nu-1})\partial_x u_\nu = \sum_{i=1}^N \partial_x u_{\nu i}\lambda_i(u_{\nu-1})r_i(u_{\nu-1}) + \sum_{i=1}^N u_{\nu i} a(u_{\nu-1})\partial_x(r_i(u_{\nu-1}))$$

e

$$\partial_t u_\nu = \sum_{i=1}^N \partial_t u_{\nu i} r_i(u_{\nu-1}) + \sum_{i=1}^N u_{\nu i}\partial_t(r_i(u_{\nu-1})).$$

Como $\partial_t u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x u_\nu = 0$, segue somando as igualdades acima que

$$\sum_{i=1}^N \left(\partial_t u_{\nu i} + \lambda_i(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu i}\right) r_i(u_{\nu-1}) + \sum_{i=1}^N u_{\nu i}\Big[a(u_{\nu-1})\partial_x(r_i(u_{\nu-1})) + \partial_t(r_i(u_{\nu-1}))\Big] = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N &\left(\partial_t u_{\nu i} + \lambda_i(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu i}\right) r_i(u_{\nu-1}) \\ &= -\sum_{i=1}^N u_{\nu i}\Big[a(u_{\nu-1})\partial_x(r_i(u_{\nu-1})) + \partial_t(r_i(u_{\nu-1}))\Big].\end{aligned} \tag{2.0.8}$$

Olhemos agora para o termo entre colchetes no lado direito da igualdade acima. Temos

$$\Big[a(u_{\nu-1})\partial_x(r_i(u_{\nu-1})) + \partial_t(r_i(u_{\nu-1}))\Big] = a(u_{\nu-1})\left(r_i'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\right) + r_i'(u_{\nu-1})\partial_t u_{\nu-1},$$

como $u_{\nu-1}$ satisfaz a equação em (2.0.5), segue que $\partial_t u_{\nu-1} = -a(u_{\nu-2})\partial_x u_{\nu-1}$, assim

$$\begin{aligned}\Big[a(u_{\nu-1})\partial_x(r_i(u_{\nu-1})) + \partial_t(r_i(u_{\nu-1}))\Big] &= a(u_{\nu-1})\left(r_i'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\right) \\ &\quad - r_i'(u_{\nu-1})\left(a(u_{\nu-2})\partial_x u_{\nu-1}\right),\end{aligned}$$

segue, agora, utilizando (2.0.7) que

$$\begin{aligned}&\Big[a(u_{\nu-1})\partial_x(r_i(u_{\nu-1})) + \partial_t(r_i(u_{\nu-1}))\Big] = \\ &\qquad \sum_{l=1}^N w_{(\nu-1)1l}\left\{a(u_{\nu-1})\left[r_i'(u_{\nu-1})r_l(u_{\nu-2})\right] - r_i'(u_{\nu-1})\left[a(u_{\nu-2})r_l(u_{\nu-2})\right]\right\},\end{aligned}$$

substituindo isto em (2.0.8) obtemos

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\partial_t u_{\nu i} + \lambda_i(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu i}\right) r_i(u_{\nu-1}) =$$
$$- \sum_{i,l=1}^{N} u_{\nu i} w_{(\nu-1)1l} \left\{ a(u_{\nu-1}) \left[r_i'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] - r_i'(u_{\nu-1}) \left[a(u_{\nu-2}) r_l(u_{\nu-2}) \right] \right\}.$$

No lado esquerdo da igualdade acima, aparece, explicitamente, as coordenadas do vetor escrito na base $\{r_1(u_{\nu-1}), \ldots, r_N(u_{\nu-1})\}$. Para tirarmos vantagem disto, vamos escrever também nesta base o lado direito da referida igualdade, mais precisamente, para cada $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ escrevemos

$$- \left\{ a(u_{\nu-1}) \left[r_i'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] - r_i'(u_{\nu-1}) \left[a(u_{\nu-2}) r_l(u_{\nu-2}) \right] \right\} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ilj}(u_{\nu-1}, u_{\nu-2}) r_j(u_{\nu-1}),$$

assim temos

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\partial_t u_{\nu i} + \lambda_i(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu i}\right) r_i(u_{\nu-1}) = \sum_{i,l,j=1}^{N} u_{\nu i} w_{(\nu-1)1l} \Phi_{ilj}(u_{\nu-1}, u_{\nu-2}) r_j(u_{\nu-1}),$$

de onde segue que

$$\partial_t u_{\nu j} + \lambda_j(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu j} = \sum_{i,l=1}^{N} u_{\nu i} w_{(\nu-1)1l} \Phi_{ilj}(u_{\nu-1}, u_{\nu-2}).$$

Considerando o operador de ordem um

$$L_j^{\nu-1} v \doteq \partial_t v + \lambda_j(u_{\nu-1})\partial_x v, \tag{2.0.9}$$

podemos reescrever a última igualdade como

$$L_j^{\nu-1} u_{\nu j} = \sum_{i,l=1}^{N} u_{\nu i} w_{(\nu-1)1l} \Phi_{ilj}(u_{\nu-1}, u_{\nu-2}). \tag{2.0.10}$$

Etapa 2. Processo iterativo para derivada de ordem um. Queremos agora obter uma igualdade similar a (2.0.10) a qual envolva as funções coordenadas $w_{\nu 1j}$ de $\partial_x u_\nu$. Para isto, iniciamos derivando em relação a x a primeira igualdade em (2.0.5), fazendo isto obtemos

$$\partial_t \partial_x u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x \partial_x u_\nu = - \left(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\right) \partial_x u_\nu,$$

isto é, utilizando a notação introduzida em (2.0.7),

$$\partial_t w_{\nu 1} + a(u_{\nu-1})\partial_x w_{\nu 1} = - \left(a'(u_{\nu-1}) w_{(\nu-1)1}\right) w_{\nu 1}. \tag{2.0.11}$$

Usando a decomposição de $w_{\nu 1}$ em termos dos autovetores, dada em (2.0.7), e que $a(u_{\nu-1}) r_j(u_{\nu-1}) = \lambda_j(u_{\nu-1}) r_j(u_{\nu-1})$, obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\partial_t w_{\nu 1} + a(u_{\nu-1})\partial_x w_{\nu 1} &= \partial_t \left(\sum_{i=1}^{N} w_{\nu 1 i} r_i(u_{\nu-1}) \right) + a(u_{\nu-1})\partial_x \left(\sum_{i=1}^{N} w_{\nu 1 i} r_i(u_{\nu-1}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \partial_t w_{\nu 1 i} r_i(u_{\nu-1}) + w_{\nu 1 i} r_i'(u_{\nu-1}) \left[-a(u_{\nu-2}) w_{(\nu-1)1} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \partial_x w_{\nu 1 i} a(u_{\nu-1}) r_i(u_{\nu-1}) + w_{\nu 1 i} a(u_{\nu-1}) \left[r_i'(u_{\nu-1}) w_{(\nu-1)1} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left[\partial_t w_{\nu 1 i} + \lambda_i(u_{\nu-1}) \partial_x w_{\nu 1 i} \right] r_i(u_{\nu-1}) \\
&+ \sum_{i,l=1}^{N} w_{\nu 1 i} w_{(\nu-1)1 l} \left\{ a(u_{\nu-1}) \left[r_i'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] - r_i'(u_{\nu-1}) \left[a(u_{\nu-2}) r_l(u_{\nu-2}) \right] \right\},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\partial_t w_{\nu 1} + a(u_{\nu-1})\partial_x w_{\nu 1} &= \sum_{i=1}^{N} \left[\partial_t w_{\nu 1 i} + \lambda_i(u_{\nu-1}) \partial_x w_{\nu 1 i} \right] r_i(u_{\nu-1}) \\
&+ \sum_{i,l=1}^{N} w_{\nu 1 i} w_{(\nu-1)1 l} \left\{ a(u_{\nu-1}) \left[r_i'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] - r_i'(u_{\nu-1}) \left[a(u_{\nu-2}) r_l(u_{\nu-2}) \right] \right\}. \qquad (2.0.12)
\end{aligned}$$

Temos também, usando as decomposições de $w_{(\nu-1)1}$ e $w_{\nu 1}$, que

$$\left(a'(u_{\nu-1}) w_{(\nu-1)1} \right) w_{\nu 1} = \sum_{i,l=1}^{N} w_{\nu 1 i} w_{(\nu-1)1 l} \left[a'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] r_i(u_{\nu-1}). \qquad (2.0.13)$$

De (2.0.11), (2.0.12) e (2.0.13) segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \left(\partial_t w_{\nu 1 i} + \lambda_i(u_{\nu-1}) w_{\nu 1 i} \right) r_i(u_{\nu-1}) = -\sum_{i,l=1}^{N} & w_{\nu 1 i} w_{(\nu-1)1 l} \left\{ a(u_{\nu-1}) \left[r_i'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] \right. \\
& \left. - r_i'(u_{\nu-1}) \left[a(u_{\nu-2}) r_l(u_{\nu-2}) \right] + \left[a'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] r_i(u_{\nu-1}) \right\}.
\end{aligned}$$

Decompondo agora cada vetor

$$-\left\{ a(u_{\nu-1}) \left[r_i'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] - r_i'(u_{\nu-1}) \left[a(u_{\nu-2}) r_l(u_{\nu-2}) \right] + \left[a'(u_{\nu-1}) r_l(u_{\nu-2}) \right] r_i(u_{\nu-1}) \right\}$$

em termos da base $\{r_1(u_{\nu-1}), \ldots, r_N(u_{\nu-1})\}$ obtemos o análogo a (2.0.10) desejado, mais precisamente,

$$L_j^{\nu-1} w_{\nu 1 j} = \sum_{i,l=1}^{N} w_{\nu 1 i} w_{(\nu-1)1 i} \tilde{\Phi}_{ilj}(u_{\nu-1}, u_{\nu-2}), \qquad (2.0.14)$$

onde $L_j^{\nu-1}$ é dado em (2.0.9).

Etapa 3. Desigualdades para as Normas. Vamos agora estabelecer mais algumas notações. Olhando para (2.0.6) e (2.0.7) é natural considerar

$$M_0^\nu(t) \doteq \sup_{i,x} |u_{\nu i}(t,x)|$$

e para $k \geq 1$

$$M_k^\nu(t) \doteq \sup_{i,x} |w_{\nu k i}(t,x)|.$$

Observação 2.0.1 *É válido aqui fazermos alguns comentários a respeito de M_k^ν. Abaixo, para um vetor $u \in \mathbb{R}$, $[u]_\beta$ denotará a matriz das coordenadas de u na base canônica $\beta = \{e_1, \ldots, e_N\}$ e $[u]_{\beta_v}$ a matriz das coordenadas de u na base $\beta_v = \{r_1(v), \ldots, r_N(v)\}$, constituída pelos autovetores de $a(v)$. Temos*

$$[u]_\beta = P(v)\,[u]_{\beta_v} \tag{2.0.15}$$

onde $P(v)$ é matriz mudança de base a qual tem como vetores coluna $r_1(v), \ldots, r_N(v)$. Se $|u|_\beta$ e $|u|_{\beta_v}$ denotam, respectivamente, o supremo das coordenadas de u na base β e na base β_v, então $|u|_\beta$ e $|u|_{\beta_v}$ são normas em $\mathbb{R}^N$. Escrevendo $\|P(v)\|$ para a norma da matriz $P(v)$ (supremo do módulo das entradas de $P(v)$) segue de (2.0.15) que

$$|u|_\beta \leq N\,\|P(v)\|\,|u|_{\beta_v}.$$

Como $P(v)$ é invertível, temos também

$$[u]_{\beta_v} = (P(v))^{-1}\,[u]_\beta\,,$$

de onde segue que

$$|u|_{\beta_v} \leq N\left\|(P(v))^{-1}\right\|\,|u|_\beta.$$

Se restringirmos v a uma vizinhança suficientemente pequena da origem, então existem constantes C_0 e C_1, independentes de v, de modo que

$$C_0|u|_{\beta_v} \leq |u|_\beta \leq C_1|u|_{\beta_v}.$$

Assim se garantirmos, para algum $T > 0$, que $\|u_\nu\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})}$ permanece suficientemente pequeno (independente de ν), então existem constantes C_0 e C_1 de modo que

$$C_0 \sup_{i=1,\ldots,N} \{|u_{\nu i}|\} \leq |u_\nu| \leq C_1 \sup_{i=1,\ldots,N} \{|u_{\nu i}|\}\,,$$

logo

$$C_0 M_0^\nu(t) \leq \|u_\nu(t,\cdot)\|_\infty \leq C_1 M_0^\nu(t), \tag{2.0.16}$$

e, claro que, para as mesmas constantes vale

$$C_0 M_k^\nu(t) \leq \left\|\partial_x^k u_\nu(t,\cdot)\right\|_\infty \leq C_1 M_k^\nu(t). \tag{2.0.17}$$

2.1 O Caso C_b^∞.

Nesta seção apresentamos alguns resultados supondo que o dado inicial está em C_b^∞, isto é, que o dado inicial está em C^∞ e tem todas as derivadas limitadas. Iniciamos pelo seguinte lema.

Lema 2.1.1 *Sejam $\boldsymbol{u}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ pertencente a C_b^∞ e $(u_\nu)_{\nu \geq -1}$ a sequência definida em (2.0.4) e (2.0.5). Se $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ é suficientemente pequeno, então existem constantes $T > 0$, C_0 e C_1, independentes de ν, para as quais valem:*

$$M_0^\nu(t) \leq M_0^\nu(0) \exp\left(\int_0^t C_0 M_1^{\nu-1}(s)\right) \leq 2M_0^0(0) \quad \forall\, \nu \geq 0, \quad \forall\, t \in [0,T] \tag{2.1.1}$$

e

$$M_1^\nu(t) \leq M_1^\nu(0) \exp\left(\int_0^t C_1 M_1^{\nu-1}(s)\right) \leq 2M_1^0(0) \quad \forall\, \nu \geq 0, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.1.2}$$

Demonstração. É imediato da definição de u_0 que as desigualdades em (2.1.1) e (2.1.2) valem para $\nu = 0$. Como estamos assumindo $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ suficientemente pequeno, fica claro que (2.0.6) e (2.0.7) fazem sentido para $\nu = 1$, sendo assim, tanto (2.0.10) como (2.0.14) são válidas. Integrando o lado esquerdo de (2.0.10) ao longo de uma curva integral, $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t))$, do campo L_j^0, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t L_j^0 u_{1j}(\gamma(s))ds &= \int_0^t (u_{1j} \circ \gamma)'(s)ds \\ &= u_{1j}(t, \gamma_2(t)) - u_{1j}(0, \gamma_2(0)).\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Já para o lado direito de (2.0.10) temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t \left(\sum_{i,l=1}^N u_{1i} w_{01l} \Phi_{ilj}(u_0, u_{-1})\right)(\gamma(s))\, ds\right| \\ &\qquad \leq \sum_{i,l=1}^N \int_0^t |u_{1i}(s,\gamma_2(s)) w_{01l}(s,\gamma_2(s))|\, |\Phi_{ilj}(u_0,u_{-1})\gamma(s)|\, ds,\end{aligned}$$

estimando $|\Phi_{ilj}(u_0, u_{-1})\gamma(s)|$ por uma constante C, de modo que para tal constante valha

$$\sup_{i,l,j} \sup_{\substack{v,\tilde{v} \in \mathbb{R}^N \\ |v|,|\tilde{v}| \leq 2M_0^0(0)}} |\Phi_{ilj}(v, \tilde{v})| \leq C, \tag{2.1.4}$$

podemos escrever

$$\left|\int_0^t \left(\sum_{i,l=1}^N u_{1i} w_{01l} \Phi_{ilj}(u_0, u_{-1})\right)(\gamma(s))\, ds\right| \leq C_0 \int_0^t M_1^0(s) M_0^1(s) ds, \tag{2.1.5}$$

pois, $|u_{1i}(s, \gamma_2(s))| \leq M_0^1(s)$ e $|w_{01l}(s, \gamma_2(s))| \leq M_1^1(s)$. De (2.1.3) e (2.1.5) segue que

$$u_{1j}(t, \gamma_2(t)) \leq M_0^1(0) + C_0 \int_0^t M_1^0(s) M_0^1(s) ds. \tag{2.1.6}$$

Analogamente, olhando para -(2.0.10), obtemos

$$-u_{1j}(t, \gamma_2(t)) \leq M_0^1(0) + C_0 \int_0^t M_1^0(s) M_0^1(s) ds.$$

De (2.1.6) e da desigualdade acima seque que

$$|u_{1j}(t,\gamma_2(t))| \leq M_0^1(0) + C_0 \int_0^t M_1^0(s)M_0^1(s)ds.$$

Como o lado direito da desigualdade acima é independente de j e da curva integral γ, obtemos tomando o supremo em γ e j que

$$M_0^1(t) \leq M_0^1(0) + C_0 \int_0^t M_1^0(s)M_0^1(s)ds,$$

do Lema de Gronwall, segue que

$$M_0^1(t) \leq M_0^1(0) \exp\left(\int_0^t C_0 M_1^0(s)ds\right). \tag{2.1.7}$$

Agora, usando (2.0.14) ao invés de (2.0.10), vamos obter, procedendo de modo inteiramente análogo ao usado para partir de (2.0.10) e obter (2.1.7), que

$$M_1^1(t) \leq M_1^1(0) \exp\left(\int_0^t C_1 M_1^0(s)ds\right). \tag{2.1.8}$$

É pertinente observar que a diferença entre C_0 e C_1 vem de que, para obter (2.1.7) usamos (2.1.4) e para obter (2.1.8) usamos o análogo a (2.1.4)

$$\sup_{i,l,j} \sup_{\substack{v,\tilde{v}\in\mathbb{R}^N \\ |v|,|\tilde{v}|\leq 2M_0^0(0)}} |\tilde{\Phi}_{ilj}(v,\tilde{v})| \leq C. \tag{2.1.9}$$

O final da demonstração consiste agora, basicamente, em escolher T. De fato, se fixarmos $T > 0$ de modo que

$$\exp(T \max\{C_0, C_1\} 2M_1^0(0)) < 2,$$

então as desigualdades em (2.1.1) e (2.1.2) seguem para $\nu = 1$ de (2.1.7) e (2.1.8), pois, $M_1^0(t) = M_1^0(0)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Agora se supormos as desigualdades em (2.1.1) e (2.1.2) válidas para todo $0 \leq \nu_0 \leq \nu$ e $t \in [0,T]$, teremos, em especial, que as notações em (2.0.6) e (2.0.7) fazem sentido para $\nu+1$, logo são válidas (2.0.10) e (2.0.14), para $\nu+1$. Assim, os cálculos acima rodam com ν e $\nu+1$ no lugar de 0 e 1. Efetuando tais cálculos, obtemos

$$M_0^{\nu+1}(t) \leq M_0^\nu(0) \exp\left(\int_0^t C_0 M_1^\nu(s)ds\right)$$

e

$$M_1^{\nu+1}(t) \leq M_1^\nu(0) \exp\left(\int_0^t C_1 M_1^\nu(s)ds\right).$$

Como para ν temos $M_1^\nu(s) \leq 2M_1^0(s)\ \forall\, s \in [0,T]$ (hipótese de indução), segue da escolha de T que

$$M_0^{\nu+1}(t) \leq 2M_0^\nu(0)$$

e

$$M_1^{\nu+1}(t) \leq 2M_1^\nu(0).$$

■

Observação 2.1.1 *Da demonstração do Lema 2.1.1 é claro que se* $\mathbf{u}_0$ *e* $\tilde{\mathbf{u}}_0$ *são tais que* $\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_\infty \leq \|\mathbf{u}_0\|_\infty$ *e* $\|\tilde{\mathbf{u}}_0'\|_\infty \leq \|\mathbf{u}_0'\|_\infty$, *então se o Lema 2.1.1 vale para* $\mathbf{u}_0$ *em um intervalo* $[0,T]$ *e constantes* C_0 *e* C_1 *ele, o lema, também valerá no mesmo intervalo e com as mesmas constantes para* $\tilde{\mathbf{u}}_0$. *Isto é, o intervalo* $[0,T]$ *e as constantes* C_0 *e* C_1 *dependem essencialmente da norma do dado inicial e da norma de sua derivada.*

O próximo resultado relaciona a norma das derivadas dos termos da sequência $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$, definida em (2.0.4) e (2.0.5), com a norma das derivadas em relação a variável x.

Proposição 2.1.1 *Seja* $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$ *a sequência definida em (2.0.4) e (2.0.5). Se a sequência* $(\|u_\nu\|_\infty)_{\nu\geq -1}$ *é limitada e existem constantes* $C_1,\dots,C_k$ *positivas, independentes de* ν, *de modo que*

$$\|\partial_x^l u_\nu\|_\infty \leq C_l \|\mathbf{u}_0^{(l)}\|_\infty \quad \forall \nu \geq 0,$$

então existem constantes $\tilde{C}_1,\dots,\tilde{C}_k$ *positivas, independentes de* ν, *para as quais valem*

$$\|\partial^\alpha u_\nu\|_\infty \leq \tilde{C}_{|\alpha|} \|\mathbf{u}_0^{(|\alpha|)}\|_\infty$$

para todo multi-índice α *tal que* $1 \leq |\alpha| \leq k$.

Demonstração. Este resultado segue utilizando o Teorema 1.3.5 e o fato de que cada u_ν é solução de (2.0.5).

∎

Proposição 2.1.2 *Se* $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$ *e* $\mathbf{u}_0$ *satisfazem as condições do Lema 2.1.1, então para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existem* T_k *e constantes positivas* C_k *e* $\tilde{C}_k$ *de modo que vale*

$$M_k^\nu(t) \leq C_k M_k^\nu(0) \exp(t\tilde{C}_k) \quad \forall \nu \geq 0 \quad e \quad t \in [0,T_k]. \tag{2.1.10}$$

Logo, pela Proposição 2.1.1, existem constantes $\tilde{\tilde{C}}_0,\dots,\tilde{\tilde{C}}_k$ *de modo que*

$$\|\partial^\alpha u_\nu\|_\infty \leq \tilde{\tilde{C}}_{|\alpha|} \|\mathbf{u}_0^{(|\alpha|)}\|_\infty$$

para todo multi-índice α *tal que* $1 \leq |\alpha| \leq k$.

Demonstração. O Lema 2.1.1 garante que a estimativa em (2.1.10) vale para $k = 0,1$. Suponhamos agora que a desigualdade em (2.1.10) vale para todo $0 \leq k_0 \leq k-1$, com $k \geq 2$. Precisamos mostrar que (2.1.10) vale para k. Pela definição da sequência $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$ temos para $\nu \geq 1$

$$\partial_t u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x u_\nu = 0.$$

Diferenciando tal igualdade k-vezes em relação a x, obtemos, via fórmula de Leibniz para derivada do produto, que

$$\begin{aligned}\partial_t\partial_x^k u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x\partial_x^k u_\nu &= -k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)\partial_x^k u_\nu - \partial_x^k\big(a(u_{\nu-1})\big)\partial_x u_\nu \\ &\quad - \sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\partial_x^m(a(u_{\nu-1}))\partial_x^{k+1-m}u_\nu,\end{aligned}$$

no caso $k = 2$ a última parcela do lado direito (o somatório) não aparece, estaremos portanto convencionando que $\sum_{m=2}^{1}(\cdots) = 0$. Utilizando agora o Teorema 1.3.1 temos

$$\begin{aligned}
\partial_t\partial_x^k u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x\partial_x^k u_\nu &= -k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)\partial_x^k u_\nu \\
&\quad - \Big[\sum_{l=1}^{k} n(i_1,\ldots,i_l)a^{(l)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\nu-1},\ldots,\partial_x^{i_l}u_{\nu-1}\Big)\Big]\partial_x u_\nu \\
&\quad - \sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\left[\sum_{\tau=1}^{m} n(j_1,\ldots,j_\tau)a^{(\tau)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{j_1}u_{\nu-1},\ldots,\partial_x^{j_\tau}u_{\nu-1}\Big)\right]\partial_x^{k+1-m}u_\nu
\end{aligned}$$

Notando que para $l = 1$ a única partição para $k = i_1$ é com $i_1 = k$ e que neste caso temos $n(i_1) = 1$, podemos escrevemos

$$\begin{aligned}
\partial_t\partial_x^k u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x\partial_x^k u_\nu &= -k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)\partial_x^k u_\nu - \big(a'(u_{\nu-1})\partial_x^k u_{\nu-1}\big)\partial_x u_\nu \\
&\quad - \Big[\sum_{l=2}^{k} n(i_1,\ldots,i_l)a^{(l)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\nu-1},\ldots,\partial_x^{i_l}u_{\nu-1}\Big)\Big]\partial_x u_\nu \\
&\quad - \sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\left[\sum_{\tau=1}^{m} n(j_1,\ldots,j_\tau)a^{(\tau)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{j_1}u_{\nu-1},\ldots,\partial_x^{j_\tau}u_{\nu-1}\Big)\right]\partial_x^{k+1-m}u_\nu.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a decomposição de $\partial_x^k u_{\nu-1}$ e $\partial_x^k u_\nu$ em termos dos autovetores dada em (2.0.7), obtemos da igualdade acima que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\big(\partial_t w_{\nu ki} + \lambda_i(u_{\nu-1})\partial_x w_{\nu ki}\big)r_i(u_{\nu-1}) = \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} w_{\nu ki}\Big[\partial_t\big(r_i(u_{\nu-1})\big) + a(u_{\nu-1})\partial_x\big(r_i(u_{\nu-1})\big) + k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)r_i(u_{\nu-1})\Big] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} w_{(\nu-1)ki}\big(a'(u_{\nu-1})r_i(u_{\nu-2})\big)\partial_x u_\nu \\
&\quad - \Big[\sum_{l=2}^{k} n(i_1,\ldots,i_l)a^{(l)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\nu-1},\ldots,\partial_x^{i_l}u_{\nu-1}\Big)\Big]\partial_x u_\nu \\
&\quad - \sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\left[\sum_{\tau=1}^{m} n(j_1,\ldots,j_\tau)a^{(\tau)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{j_1}u_{\nu-1},\ldots,\partial_x^{j_\tau}u_{\nu-1}\Big)\right]\partial_x^{k+1-m}u_\nu,
\end{aligned}$$

finalmente, escrevendo

$$\sum_{i=1}^{N} w_{(\nu-1)ki}\big(a'(u_{\nu-1})r_i(u_{\nu-2})\big)\partial_x u_\nu = \sum_{i,l=1}^{N} w_{(\nu-1)ki}w_{\nu 1l}\big(a'(u_{\nu-1})r_i(u_{\nu-2})\big)r_l(u_{\nu-1})$$

e substituindo tal termo na igualdade anterior obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\big(\partial_t w_{\nu k i}+\lambda_i(u_{\nu-1})\partial_x w_{\nu k i}\big)r_i(u_{\nu-1})=\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}w_{\nu k i}\Big[\partial_t\big(r_i(u_{\nu-1})\big)+a(u_{\nu-1})\partial_x\big(r_i(u_{\nu-1})\big)+k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)r_i(u_{\nu-1})\Big]\\
&\quad-\sum_{i,l=1}^{N}w_{(\nu-1)ki}w_{\nu 1 l}\big(a'(u_{\nu-1})r_i(u_{\nu-2})\big)r_l(u_{\nu-1})\\
&\quad-\Big[\sum_{l=2}^{k}n(i_1,\dots,i_l)a^{(l)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\nu-1},\dots,\partial_x^{i_l}u_{\nu-1}\Big)\Big]\partial_x u_\nu\\
&\quad-\sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\left[\sum_{\tau=1}^{m}n(j_1,\dots,j_\tau)a^{(\tau)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{j_1}u_{\nu-1},\dots,\partial_x^{j_\tau}u_{\nu-1}\Big)\right]\partial_x^{k+1-m}u_\nu. \qquad (2.1.11)
\end{aligned}
$$

Agora, a fim de tirar vantagem do fato que o lado esquerdo da igualdade acima está escrito no base $\{r_1(u_{\nu-1}),\dots,r_N(u_{\nu-1})\}$, escrevemos também nesta base os termos do lado direito de (2.1.11). Temos

$$
\begin{aligned}
-\Big[\partial_t\big(r_i(u_{\nu-1})\big)+a(u_{\nu-1})\partial_x\big(r_i(u_{\nu-1})\big)+k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)r_i(u_{\nu-1})\Big]&\\
=\sum_{j=1}^{N}\phi_{ij}(u_{\nu-1})r_j(u_{\nu-1}),&
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{N}w_{\nu k i}&\Big[\partial_t\big(r_i(u_{\nu-1})\big)+a(u_{\nu-1})\partial_x\big(r_i(u_{\nu-1})\big)k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)r_i(u_{\nu-1})\Big]\\
&=\sum_{i=1}^{N}w_{\nu k i}\left(\sum_{j=1}^{N}\phi_{ij}(u_{\nu-1})r_j(u_{\nu-1})\right)\\
&=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}w_{\nu k i}\phi_{ij}(u_{\nu-1})\right)r_j(u_{\nu-1}),
\end{aligned}
$$

analogamente,

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,l=1}^{N}w_{(\nu-1)ki}w_{\nu 1 l}&\big(a'(u_{\nu-1})r_i(u_{\nu-2})\big)r_l(u_{\nu-1})\\
&=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i,l=1}^{N}w_{(\nu-1)ki}w_{\nu 1 l}\phi_{ilj}(u_{\nu-2},u_{\nu-1})\right)r_j(u_{\nu-1})
\end{aligned}
$$

e por fim escrevemos

$$
\begin{aligned}
&-\Big[\sum_{l=2}^{k} n(i_1,\dots,i_l)a^{(l)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\nu-1},\dots,\partial_x^{i_l}u_{\nu-1}\Big)\Big]\partial_x u_\nu\\
&-\sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\left[\sum_{\tau=1}^{m} n(j_1,\dots,j_\tau)a^{(\tau)}(u_{\nu-1})\Big(\partial_x^{j_1}u_{\nu-1},\dots,\partial_x^{j_\tau}u_{\nu-1}\Big)\right]\partial_x^{k+1-m}u_\nu\\
&=\sum_{j=1}^{N}\phi_j(u_{\nu-1},u_\nu)r_j(u_{\nu-1}).
\end{aligned}
$$

De (2.1.11) e das decomposições apresentadas acima, para os termos do lado direito de (2.1.11), segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\big(\partial_t w_{\nu ki}+\lambda_i(u_{\nu-1})\partial_x w_{\nu ki}\big)r_i(u_{\nu-1}) &= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} w_{\nu ki}\phi_{ij}(u_{\nu-1})\right)r_j(u_{\nu-1})\\
&+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i,l=1}^{N} w_{(\nu-1)ki}w_{\nu 1l}\phi_{ilj}(u_{\nu-2},u_{\nu-1})\right)r_j(u_{\nu-1})\\
&+\sum_{j=1}^{N}\phi_j(u_{\nu-1},u_\nu)r_j(u_{\nu-1}),
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\partial_t w_{\nu kj}+\lambda_j(u_{\nu-1})\partial_x w_{\nu kj} &= \sum_{i=1}^{N} w_{\nu ki}\phi_{ij}(u_{\nu-1})+\sum_{i,l=1}^{N} w_{(\nu-1)ki}w_{\nu 1l}\phi_{ilj}(u_{\nu-2},u_{\nu-1})\\
&+\phi_j(u_{\nu-1},u_\nu),
\end{aligned}
$$

isto é, com a notação para $L_j^{\nu-1}$ dada em (2.0.9),

$$
L_j^{\nu-1}w_{\nu kj}=\sum_{i=1}^{N} w_{\nu ki}\phi_{ij}(u_{\nu-1})+\sum_{i,l=1}^{N} w_{(\nu-1)ki}w_{\nu 1l}\phi_{ilj}(u_{\nu-2},u_{\nu-1})+\phi_j(u_{\nu-1},u_\nu). \tag{2.1.12}
$$

As $\phi_{ij}(u_{\nu-1})$ são as funções coordenadas do vetor

$$
-\Big[\partial_t\big(r_i(u_{\nu-1})\big)+a(u_{\nu-1})\partial_x\big(r_i(u_{\nu-1})\big)+k\big(a'(u_{\nu-1})\partial_x u_{\nu-1}\big)r_i(u_{\nu-1})\Big]
$$

na base $\{r_1(u_{\nu-1}),\dots,r_N(u_{\nu-1})\}$, como a norma L^∞ das u_ν e de suas derivadas u'_ν são uniformemente limitadas, segue da Observação 2.0.1 que

$$
\sup_{i,j,\nu}\|\phi_{ij}(u_{\nu-1})\|_\infty < C \tag{2.1.13}
$$

para alguma constante C. Com o mesmos argumento concluímos, eventualmente para outra constante C, que

$$
\sup_{i,l,j,\nu}\|\phi_{ilj}(u_{\nu-2},u_{\nu-1})\|_\infty < C. \tag{2.1.14}
$$

Da Observação 2.0.1, temos ainda que para estimarmos o $\sup_{j,\nu} \|\phi_j(u_{\nu-1}, u_\nu)\|_\infty$ é suficiente estimarmos

$$\Bigg\| -\Big[\sum_{l=2}^{k} n(i_1,\dots,i_l) a^{(l)}(u_{\nu-1}) \Big(\partial_x^{i_1} u_{\nu-1}, \dots, \partial_x^{i_l} u_{\nu-1} \Big) \Big] \partial_x u_\nu \\ - \sum_{m=2}^{k-1} \binom{k}{m} \left[\sum_{\tau=1}^{m} n(j_1,\dots,j_\tau) a^{(\tau)}(u_{\nu-1}) \Big(\partial_x^{j_1} u_{\nu-1}, \dots, \partial_x^{j_\tau} u_{\nu-1} \Big) \right] \partial_x^{k+1-m} u_\nu \Bigg\|_\infty . \quad (2.1.15)$$

Restringindo t ao intervalo $[0, \min\{T_0, T_1, \dots, T_{k-1}\}]$, segue da hipótese de indução que

$$\| \Big[a^{(l)}(u_{\nu-1}) \Big(\partial_x^{i_1} u_{\nu-1}, \dots, \partial_x^{i_l} u_{\nu-1} \Big) \Big] \partial_x u_\nu \|_\infty \leq C \| \boldsymbol{u}_0^{(i_1)} \|_\infty \dots \| \boldsymbol{u}_0^{(i_l)} \|_\infty \| \boldsymbol{u}_0{}' \|_\infty \quad (2.1.16)$$

e

$$\| \Big[a^{(\tau)}(u_{\nu-1}) \Big(\partial_x^{j_1} u_{\nu-1}, \dots, \partial_x^{j_\tau} u_{\nu-1} \Big) \Big] \partial_x^{k+1-m} u_\nu \|_\infty \leq \\ C \| \boldsymbol{u}_0^{(j_1)} \|_\infty \dots \| \boldsymbol{u}_0^{(j_\tau)} \|_\infty \| \boldsymbol{u}_0^{(k+1-m)} \|_\infty . \quad (2.1.17)$$

Aplicando a desigualdade de interpolação, dado no Teorema 1.3.5, para $\boldsymbol{u}_0'$, temos

$$\| \boldsymbol{u}_0^{(j)} \|_\infty \leq 2^{\frac{(j-1)(k-j)}{2}} \| \boldsymbol{u}_0^{(k)} \|_\infty^{\frac{j-1}{k-1}} \| \boldsymbol{u}_0' \|_\infty^{\frac{k-j}{k-1}}$$

usando esta desigualdade, para cada $\| \boldsymbol{u}_0^{(i_l)} \|_\infty$, obtemos

$$\| \boldsymbol{u}_0^{(i_1)} \|_\infty \dots \| \boldsymbol{u}_0^{(i_l)} \|_\infty \| \boldsymbol{u}_0{}' \|_\infty \leq C \| \boldsymbol{u}_0^{(k)} \|_\infty^{\boldsymbol{b}} \| \boldsymbol{u}_0' \|_\infty^{\boldsymbol{a}}, \quad (2.1.18)$$

com $\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{l} \frac{i_j - 1}{k-1}$ e $\boldsymbol{a} = 1 + \sum_{j=1}^{l} \frac{k - i_j}{k-1}$. Como $\sum_{j=1}^{l} i_j = k$ temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} &= 1 + \sum_{j=1}^{l} \frac{k - i_j}{k-1} + k \sum_{j=1}^{l} \frac{i_j - 1}{k-1} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{l} \frac{k - i_j + k(i_j - 1)}{k-1} \\ &= 1 + k, \end{aligned}$$

isto é,

$$\boldsymbol{a} = 1 + k(1 - \boldsymbol{b}),$$

assim podemos escrever

$$\| \boldsymbol{u}_0^{(k)} \|_\infty^{\boldsymbol{b}} \| \boldsymbol{u}_0' \|_\infty^{\boldsymbol{a}} = \| \boldsymbol{u}_0^{(k)} \|_\infty^{\boldsymbol{b}} \| \boldsymbol{u}_0' \|_\infty^{k(1-\boldsymbol{b})} \| \boldsymbol{u}_0' \|_\infty,$$

e como do Teorema 1.3.5 segue que

$$\| \boldsymbol{u}_0' \|_\infty^k \leq 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \| \boldsymbol{u}_0^{(k)} \|_\infty \| \boldsymbol{u}_0 \|_\infty^{k-1},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty^{\boldsymbol{b}}\|\boldsymbol{u}_0'\|_\infty^{\boldsymbol{a}} &\leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty^{\boldsymbol{b}}\left(\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty^{(k-1)}\right)^{(1-\boldsymbol{b})}\|\boldsymbol{u}_0'\|_\infty \\
&\leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty^{(k-1)(1-\boldsymbol{b})}\|\boldsymbol{u}_0'\|_\infty \\
&\leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty.
\end{aligned}$$

De (2.1.18) segue agora que

$$\|\boldsymbol{u}_0^{(i_1)}\|_\infty \dots \|\boldsymbol{u}_0^{(i_l)}\|_\infty\|\boldsymbol{u}_0{}'\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty. \tag{2.1.19}$$

Analogamente temos

$$\|\boldsymbol{u}_0^{(j_1)}\|_\infty \dots \|\boldsymbol{u}_0^{(j_\tau)}\|_\infty\|\boldsymbol{u}_0^{(k+1-m)}\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty. \tag{2.1.20}$$

Juntando (2.1.16) e (2.1.19) segue que

$$\|\left[a^{(l)}(u_{\nu-1})\left(\partial_x^{i_1}u_{\nu-1},\dots,\partial_x^{i_l}u_{\nu-1}\right)\right]\partial_x u_\nu\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty$$

e com (2.1.17) e (2.1.20) obtemos

$$\|\left[a^{(\tau)}(u_{\nu-1})\left(\partial_x^{j_1}u_{\nu-1},\dots,\partial_x^{j_\tau}u_{\nu-1}\right)\right]\partial_x^{k+1-m}u_\nu\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty.$$

Estas últimas duas desigualdades permitem estimar (2.1.15) por $C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty$ e deste modo segue que

$$\sup_{j,\nu}\|\phi_j(u_{\nu-1},u_\nu)\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty. \tag{2.1.21}$$

Utilizando (2.1.13), (2.1.14) e (2.1.21), obtemos de (2.1.12), integrando ao longo das curvas integrais do campo $L_j^{\nu-1}$ (seguindo as etapas apresentadas na demonstração do Lema 2.1.1), que

$$M_k^\nu(t) \leq M_k^\nu(0) + C\int_0^t M_k^\nu(s)ds + C\int_0^t M_k^{\nu-1}(s)M_1^\nu(s)ds + C\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty.$$

Como $\|\boldsymbol{u}_0^{(k)}\|_\infty$ é comparável a $M_k^\nu(0)$ e $M_1^\nu(s) \leq C_1\exp(s\tilde{C}_1)$ segue que

$$M_k^\nu(t) \leq C\left(M_k^\nu(0) + \int_0^t M_k^\nu(s)ds + \int_0^t M_k^{\nu-1}(s)\exp(s\tilde{C}_1)ds\right),$$

utilizando o Lema de Gronwall obtemos

$$M_k^\nu(t) \leq \left(CM_k^\nu(0) + C\int_0^t M_k^{\nu-1}(s)\exp(s\tilde{C}_1)ds\right)\exp(tC). \tag{2.1.22}$$

Vamos, agora, concluir a demonstração utilizando iteradamente (2.1.22). Para $\nu = 0$ a proposição é automaticamente válida e mais, $M_k^0(s) = M_k^0(0)$ para qualquer s, segue assim de (2.1.22) que

$$\begin{aligned}
M_k^1(t) &\leq \left(CM_k^1(0) + C\int_0^t M_k^0(0)\exp(s\tilde{C}_1)ds\right)\exp(tC) \\
&= \left(CM_k^1(0) + \frac{C}{\tilde{C}_1}M_k^1(0)\left(\exp(t\tilde{C}_1) - 1\right)\right)\exp(tC).
\end{aligned}$$

Para $A \geq \Big(\exp(t\tilde{C}_1) - 1\Big)$ e $\tilde{A} \doteq \dfrac{A}{\tilde{C}_1}$ podemos escrever

$$M_k^1(t) \leq CM_k^1(0)\left(1+\tilde{A}\right)\exp(tC).$$

Mais geral, se $B \geq \exp(tC)$, então

$$M_k^\nu(t) \leq CM_k^\nu(0)\left(\sum_{j=0}^{\nu-1}(CB\tilde{A})^j + (CB\tilde{A})^{\nu-1}\tilde{A}\right)\exp(tC).$$

De fato, já vimos que a desigualdade vale para $\nu = 1$, suponhamos agora que a desigualdade vale para ν, segue de (2.1.22) que

$$\begin{aligned}
M_k^{\nu+1}(t) &\leq \left\{CM_k^{\nu+1}(0) + C\left[CM_k^\nu(0)\left(\sum_{j=0}^{\nu-1}(CB\tilde{A})^j + (CB\tilde{A})^{\nu-1}\tilde{A}\right)B\right]\tilde{A}\right\}\exp(tC) \\
&= \left\{CM_k^{\nu+1}(0) + CM_k^{\nu+1}(0)\left[CB\tilde{A}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1}(CB\tilde{A})^j + (CB\tilde{A})^{\nu-1}\tilde{A}\right)\right]\right\}\exp(tC) \\
&= CM_k^{\nu+1}(0)\left(\sum_{j=0}^{\nu}(CB\tilde{A})^j + (CB\tilde{A})^{\nu}\tilde{A}\right)\exp(tC).
\end{aligned}$$

Se $CB\tilde{A} < 1$, então existe constante $\tilde{C}$ independente de ν para qual vale

$$\sum_{j=0}^{\nu}(CB\tilde{A})^j + (CB\tilde{A})^{\nu}\tilde{A} < \tilde{C} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

Como $(\exp(t\tilde{C}_1) - 1) \overset{t\to 0}{\to} 0$, para T_k suficientemente pequeno, podemos tomar A e B satisfazendo $CB\tilde{A} < 1$, assim concluímos que

$$M_k^\nu(t) \leq C_k M_k^\nu(0)\exp(t\tilde{C}_k) \quad \forall \nu \geq 0 \quad \text{e} \quad t \in [0, T_k].$$

■

Observação 2.1.2 *Vale aqui uma observação análoga à Observação 2.1.1. Sejam $\mathbf{u}_0$ e $\tilde{\mathbf{u}}_0$ tais que $\|\mathbf{u}_0\|_\infty \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_\infty$ e $\|\mathbf{u}_0'\|_\infty \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_0'\|_\infty$. Se a Proposição 2.1.2 vale para $\tilde{\mathbf{u}}_0$ no intervalo $[0, T_k]$ com constantes C_k e $\tilde{C}_k$ então ela também vale, no mesmo intervalo e com as mesmas constantes, para $\mathbf{u}_0$.*

O próximo resultado elimina, no caso C_b^∞, a hipótese adicional do Teorema 0.0.1 na primeira derivada do dado inicial.

Proposição 2.1.3 *Para toda $\mathbf{u}_0 \in C_b^\infty$ com $\|\mathbf{u}_0\|_\infty$ suficientemente pequeno o problema de Cauchy (2.0.3) admite única solução continuamente diferenciável e mais, dado $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $T > 0$ e constantes $C_0, \tilde{C}_0, C_1, \tilde{C}_1, \ldots, C_k, \tilde{C}_k$ para as quais a solução, u, satisfaz*

$$\|\partial_x^l u(t,\cdot)\|_\infty \leq C_l\|\mathbf{u}_0^{(l)}\|_\infty \exp(t\tilde{C}_l) \quad t \in [0, T]. \tag{2.1.23}$$

Logo (Proposição 2.1.1) existem constantes $\tilde{\tilde{C}}_0, \ldots, \tilde{\tilde{C}}_k$ de modo que

$$\|\partial^\alpha u\|_\infty \leq \tilde{\tilde{C}}_{|\alpha|}\|\mathbf{u}_0^{(|\alpha|)}\|_\infty$$

para todo multi-índice α tal que $1 \leq |\alpha| \leq k$.

Demonstração. A demonstração é obtida com o auxílio da sequência $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$ definida em (2.0.4) e (2.0.5), e está dividida nas etapas:

E1 Mostrar, para algum $T>0$, que a sequência $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$ é de Cauchy em $C^0([0,T]\times\mathbb{R})$. Deste modo, u_ν converge uniformemente em $[0,T]\times\mathbb{R}$ para alguma aplicação u;

E2 Concluir, para todo $1\leq l\leq k$, que a sequência das derivadas $(u_\nu^{(l)})_{\nu\geq -1}$ converge uniformemente para $u^{(l)}$ em cada compacto $K\subset[0,T]\times\mathbb{R}$. Disto segue que u é solução de (2.0.3) e, via Proposição 2.1.2, satisfaz (2.1.23);

E3 Demonstrar a unicidade.

E1. Consideremos para $\nu\geq 1$

$$v_\nu = u_\nu - u_{\nu-1} \quad \text{e} \quad V_\nu = u_{\nu+1} - u_\nu.$$

Temos $v_\nu(0,\cdot)\equiv V_\nu(0,\cdot)$, $\forall\,\nu\geq 1$ e das equações

$$\partial_t u_{\nu+1} + a(u_\nu)\partial_x u_{\nu+1} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_t u_\nu + a(u_{\nu-1})\partial_x u_\nu = 0,$$

segue, tomando a diferença, que

$$\partial_t V_\nu + a(u_\nu)\partial_x V_\nu = \big(a(u_{\nu-1}) - a(u_\nu)\big)\partial_x u_\nu.$$

Escrevendo $V_\nu = \sum_{i=1}^N V_{\nu i} r_i(u_\nu)$ e trabalhando com a igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \left(\partial_t V_{\nu i} + \lambda_i(u_\nu)\partial_x V_{\nu i}\right) r_i(u_\nu) = &-\sum_{i=1}^N V_{\nu i}\left[\partial_t(r_i(u_\nu)) + a(u_\nu)\partial_x(r_i(u_\nu))\right]\\ &+ \left[a(u_{\nu-1}) - a(u_\nu)\right]\partial_x u_\nu,\end{aligned}$$

escrevendo agora

$$-\left[\partial_t(r_i(u_\nu)) + a(u_\nu)\partial_x(r_i(u_\nu))\right] = \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(u_\nu) r_j(u_\nu)$$

e

$$\left[a(u_{\nu-1}) - a(u_\nu)\right]\partial_x u_\nu = \sum_{i=1}^N \phi_i(u_\nu) r_i(u_\nu),$$

segue que

$$\sum_{i=1}^N \left(\partial_t V_{\nu i} + \lambda_i(u_\nu)\partial_x V_{\nu i}\right) r_i(u_\nu) = \sum_{i,j=1}^N V_{\nu i}\phi_{ij}(u_\nu) r_j(u_\nu) + \sum_{i=1}^N \phi_i(u_\nu) r_i(u_\nu),$$

logo

$$\partial_t V_{\nu j} + \lambda_j(u_\nu)\partial_x V_{\nu j} = \left[\sum_{i=1}^N V_{\nu i}\phi_{ij}(u_\nu)\right] + \phi_j(u_\nu). \tag{2.1.24}$$

Estimando

$$\sup_{i,j=1}\|\phi_{ij}(u_\nu(t,\cdot))\|_\infty \leq C M_1^\nu(t),$$

$$\sup_{j=1} \|\phi_j(u_\nu(t,\cdot))\|_\infty \leq C\|v_\nu(t,\cdot)\|_\infty M_1^\nu(t)$$

e supondo que $|v_\nu(t,x)| \leq m(t)$, obtemos, de (2.1.24), procedendo como na demonstração do Lema 2.1.1, isto é, integrando ao longo das curvas integrais dos campos $\partial_t + \lambda(u_\nu)\partial_x$, que para

$$M_{V_\nu}(t) \doteq \sup_{i,x}\{|V_{\nu i}(t,x)|\}$$

vale

$$M_{V_\nu}(t) \leq \int_0^t \big(CM_{V_\nu}(s) + Cm(s)\big)M_1^\nu(s)ds \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Via Lema de Gronwall, obtemos agora que

$$M_{V_\nu}(t) \leq \int_0^t Cm(s)M_1^\nu(s)ds \exp\left(\int_0^t CM_1^\nu(s)ds\right) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Restringindo T de modo que, via Proposição 2.1.2, possamos limitar $M_1^\nu(t)$ para todo $t \in [0,T]$, segue que

$$M_{V_\nu}(t) \leq C\int_0^t m(s)ds \quad t \in [0,T]. \tag{2.1.25}$$

Para $\nu = 1$, tomando $m > 0$ de modo que $|v_1(t,x)| \leq m$ para todo $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$, obtemos de (2.1.25) que

$$M_{V_1}(t) \leq Cmt \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Como $\|V_\nu(t,\cdot)\|_\infty$ é comparável à $M_{V_\nu}(t)$, segue que

$$\|V_1(t,\cdot)\|_\infty \leq mC_1Ct \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Considerando agora $m(t) = mC_1Ct$ temos $|v_2(t,x)| \leq m(t)$, assim, aplicando novamente (2.1.25), obtemos

$$M_{V_2} \leq m\frac{C_1C^2t^2}{2} \quad \forall\, t \in [0,T],$$

logo

$$\|V_2(t,\cdot)\|_\infty \leq m\frac{(C_1C)^2t^2}{2} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Agora sabemos que $|v_3(t,x)| \leq m\dfrac{(C_1C)^2t^2}{2} \quad \forall\, t \in [0,T]$, isto permite utilizar novamente (2.1.25). Indutivamente obtemos que

$$\|V_\nu(t,\cdot)\|_\infty \leq m\frac{(C_1C)^\nu t^\nu}{\nu!} \quad \forall\, t \in [0,T],$$

deste modo temos

$$\|u_{\nu+1} - u_\nu\|_\infty \leq m\frac{(C_1C)^\nu T^\nu}{\nu!}.$$

Como a série $\displaystyle\sum_\nu \frac{(CT)^\nu}{\nu!}$ é convergente, segue que a sequência $(u_\nu)_{\nu\geq -1}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]\times\mathbb{R})$, logo u_ν converge uniformemente em $[0,T]\times\mathbb{R}$ para alguma aplicação u.

E2. Será feita via indução. Suponhamos, para todo $0 \leq l < \tau \leq k$, que

$$u_\nu^{(l)} \longrightarrow u^{(l)}$$

uniformemente em cada compacto $K \subset [0,T] \times \mathbb{R}$. Restringindo T, se necessário, segue, da Proposição 2.1.2, que existe constante C de modo que

$$\|u_\nu^{(\tau+1)}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})} \leq C \quad \forall\, \nu,$$

deste modo, a sequência $(u_\nu^{(\tau)})_{\nu \geq -1}$ é equicontínua, sendo assim, pelo Teorema de Arzelá , dado compacto $K \subset [0,T] \times \mathbb{R}$, existe subsequência de $(u_\nu^{(\tau)})_{\nu\geq -1}$ que converge uniformemente em K para uma aplicação v. Do Teorema 1.3.2, segue que $v = u^{(\tau)}$ e como toda subsequência de $(u_\nu^{(\tau)})_{\nu \geq -1}$ uniformemente convergente em K converge para $u^{(\tau)}$ (novamente Teorema 1.3.2), do Teorema 1.3.4 segue que

$$u_\nu^{(\tau)} \longrightarrow u^{(\tau)} \quad \text{uniformemente em } K.$$

E3. A unicidade segue de uma modificação do argumento da etapa **E1**. Seja u uma solução continuamente diferenciável do problema de Cauchy (2.0.3), definindo $V_\nu = u_{\nu+1} - u$ das equações

$$\partial_t u_{\nu+1} + a(u_\nu)\partial_x u_{\nu+1} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_t u + a(u)\partial_x u = 0,$$

segue que

$$\partial_t V_\nu + a(u_\nu)\partial_x V_\nu = \big(a(u) - a(u_\nu)\big)\partial_x u.$$

Escrevendo $V_\nu = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} V_{\nu i} r_i(u_\nu)$ obtemos da igualdade acima que

$$\partial_t V_{\nu j} + \lambda_j(u_\nu)\partial_x V_{\nu j} = \sum_{i=1}^{N} V_{\nu i}\phi_{ij}(u_\nu) + \phi_j(u_\nu),$$

onde $\phi_{ij}(u_\nu)$ e $\phi_j(u_\nu)$ satisfazem

$$-\left[\partial_t(r_i(u_\nu)) + a(u_\nu)\partial_x(r_i(u_\nu))\right] = \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij}(u_\nu) r_j(u_\nu)$$

e

$$\left[a(u) - a(u_\nu)\right]\partial_x u_\nu = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(u_\nu) r_i(u_\nu).$$

Se, agora, ao invés de trabalharmos na faixa $[0,T] \times \mathbb{R}$, como feito na etapa **E1**, considerarmos $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_N$ satisfazendo

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1(u_\nu(t,x)) \quad \forall\, \nu \text{ e } \forall \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$$

e

$$\tilde{\lambda}_N \geq \lambda_N(u_\nu(t,x)) \quad \forall\, \nu \text{ e } \forall \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$$

e trabalharmos no compacto D_L delimitado pelas retas $t = 0$, $t = T$, $X(t) = L + \tilde{\lambda}_1 t$ e $Y(t) = -L + \tilde{\lambda}_N t$, vamos obter o análogo a (2.1.25), a saber

$$M_{V_\nu}(t) \leq C \int_0^t m(s)ds \quad t \in [0, T], \tag{2.1.26}$$

onde, agora,

$$M_{V_\nu}(t) \doteq \sup_{\substack{i=1,\cdots,N \\ x:(t,x)\in D_L}} \{|V_{\nu i}(t, x)|\}.$$

Utilizando (2.1.26) do mesmo modo que usamos (2.1.25) obtemos

$$\|u_{\nu-1} - u\|_{L^\infty(D_L)} \leq m \frac{C^\nu T^\nu}{\nu!},$$

de onde segue que u_ν converge uniformemente para u em D_L, como L é qualquer, u_ν converge para u em $[0, T] \times \mathbb{R}$.

■

Observação 2.1.3 *É interessante notar que se* $\mathbf{u}_0, \tilde{\mathbf{u}}_0 \in C_b^\infty$ *são tais que* $\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_\infty \leq \|\mathbf{u}_0\|_\infty$, $\|(\tilde{\mathbf{u}}_0)'\|_\infty \leq \|(\mathbf{u}_0)'\|_\infty$ *e a Proposição 2.1.3 vale para* $\mathbf{u}_0$ *então ela vale para* $\tilde{\mathbf{u}}_0$ *com o mesmo intervalo* $[0, T]$ *e com as mesmas constantes* $C_0, \tilde{C}_0, C_1, \tilde{C}_1, \ldots, C_k, \tilde{C}_k$.

2.2 O Caso C^k

Nesta seção vamos enfraquecer as hipóteses da Proposição 2.1.3, mais precisamente apresentamos a:

Demonstração do Teorema 0.0.2. A demonstração está dividida nas seguintes etapas:

E1 consiste basicamente em criar, a partir do dado inicial, uma família $F = \{\mathbf{u}_{0,\lambda,n} : \lambda, n \in \mathbb{N}\}$ de novos dados iniciais, para os quais, a Proposição 2.1.3 garante existência e unicidade de soluções, $u_{\lambda,n}$, bem como algumas propriedades de tais soluções;

E2 mostrar, para λ fixo, que a sequência em n é de Cauchy, portanto, converge para alguma função u_λ;

E3 demonstrar, pensando $k = 1$, que u_λ é solução do problema de Cauchy (2.2.6). Fazemos isto fixando λ e olhando para a sequência das derivadas $(\partial_x u_{\lambda,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Esta etapa está subdividida em:

- **E3′** obter relações envolvendo alguns campos vetoriais, $L_{\lambda,n,j}$, e observar algumas propriedades dos fluxos de tais campos, que servirão de base para **E3″**;
- **E3″** deduzir a desigualdade (2.2.18);
- **E3‴** utilizando (2.2.18) mostrar que u_λ é solução do problema de Cauchy (2.2.6);

E4 verificar que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} u_\lambda$ satisfaz as condições do teorema para o caso $k = 1$;

E5 aplicar indução em k e concluir o teorema, seguindo, com os devidos ajustes, os passos da etapa **E3**.

E1. Seja $(\psi_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções C^∞ satisfazendo as seguintes condições: $\psi_n \geq 0$, $S(\psi_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \psi_n = 1$. Consideremos $\varphi \in C_c^\infty$ tal que $\varphi|_{[-1,1]} \equiv 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$ e $S(\varphi) \subset B(0,2)$. Para $\varphi_\lambda(x) \doteq \varphi(\frac{x}{\lambda})$ temos $\varphi_\lambda(x) = 1 \quad \forall x \in B(0,\lambda)$ e $S(\varphi_\lambda) \subset B(0, 2\lambda)$. Definindo $\boldsymbol{u}_{0,\lambda} \doteq \boldsymbol{u}_0\varphi_\lambda$ e $\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n} \doteq \psi_n * \boldsymbol{u}_{0,\lambda} = \psi_n * \boldsymbol{u}_0\varphi_\lambda$, segue que $\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n} \in C_b^\infty$ e $S(\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n}) \subset B(0, \frac{1}{n}) + B(0, 2\lambda)$.

Da Desigualdade de Young (Teorema 1.3.6), obtemos

$$\|\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$$

e

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n})'\|_\infty &\leq \|\psi_n\|_{L^1}\| \, (\boldsymbol{u}_{0,\lambda})' \, \|_\infty \\ &\leq \|\boldsymbol{u}_0'\varphi_\lambda\|_\infty + \|\boldsymbol{u}_0\varphi_\lambda'\|_\infty \\ &\leq \|\boldsymbol{u}_0'\|_\infty + \frac{1}{\lambda}\|\varphi'\|_\infty\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty.\end{aligned}$$

Como $\|\boldsymbol{u}_0'\|_\infty + \frac{1}{\lambda}\|\varphi'\|_\infty\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty \overset{\lambda\to\infty}{\to} \|\boldsymbol{u}_0'\|_\infty$, supondo $\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ suficientemente pequeno, segue, da Proposição 2.1.3 e da Observação 2.1.3, que existem $\lambda_0 > 0$ e $T > 0$, tais que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u_{\lambda,n} + a(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n} &= 0 \\ u_{\lambda,n}(0,x) &= \boldsymbol{u}_{0,\lambda,n}(x) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

tem única solução $u_{\lambda,n} \in C^{k+1}([0,T] \times \mathbb{R})$, satisfazendo

$$\|\partial^\alpha u_{\lambda,n}(t,\cdot)\|_\infty \leq C_{|\alpha|}\|(\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n})^{(|\alpha|)}\|_\infty \exp(\tilde{C}_{|\alpha|}t) \tag{2.2.2}$$

para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$, $t \in [0,T]$ e certas constantes $C_0, \tilde{C}_0, C_1, \tilde{C}_1, \ldots, C_k, \tilde{C}_k$ independentes de λ e n.

E2. Vamos agora, fixar λ e olhar para a sequência $(u_{\lambda,n})_{n\geq 1}$. A fim de mostrar que tal sequência é de Cauchy, olhemos para a diferença

$$V_{\lambda,n,l} \doteq u_{\lambda,n+l} - u_{\lambda,n},$$

como $u_{\lambda,n+l}$ e $u_{\lambda,n}$ satisfazem (2.2.1) (para os respectivos dados inicias) temos

$$\partial_t V_{\lambda,n,l} + a(u_{\lambda,n+l})\partial_x V_{\lambda,n,l} = -\left(a(u_{\lambda,n+l}) - a(u_{\lambda,n})\right)\partial_x u_{\lambda,n}. \tag{2.2.3}$$

Colocando $V_{\lambda,n,l} \doteq \sum_{i=1}^N V_{\lambda,n,l,i} r_i(u_{\lambda,n+l})$, segue, escrevendo $V_{n,l,i}$ no lugar de $V_{\lambda,n,l,i}$, que

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\sum_{i=1}^N V_{n,l,i}r_i(u_{\lambda,n+l})\right) + a(u_{\lambda,n+l})\partial_x\left(\sum_{i=1}^N V_{n,l,i}r_i(u_{\lambda,n+l})\right) = \\ \sum_{i=1}^N \left(\partial_t V_{n,l,i} + \lambda_i(u_{\lambda,n+l})\partial_x V_{n,l,i}\right) r_i(u_{\lambda,n+l}) \\ + \sum_{i=1}^N V_{n,l,i}\partial_t\left(r_i(u_{\lambda,n+l})\right) + V_{n,l,i}a(u_{\lambda,n+l})\partial_x\left(r_i(u_{\lambda,n+l})\right).\end{aligned}$$

Escrevendo $\tilde{L}_j^{n+l} \doteq \partial_t + \lambda_j(u_{\lambda,n+l})\partial_x$, obtemos da última igualdade e de (2.2.3) que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{L}_i^{n+l} V_{n,l,i}\right) r_i(u_{\lambda,n+l}) &= -\Big(a(u_{\lambda,n+l}) - a(u_{\lambda,n})\Big)\partial_x u_{\lambda,n} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} V_{n,l,i}\Big[\partial_t\left(r_i(u_{\lambda,n+l})\right) + a(u_{\lambda,n+l})\partial_x\big(r_i(u_{\lambda,n+l})\big)\Big] \\
&= -\left[\left(\int_0^1 a'(u_{\lambda,n} + \tau V_{\lambda,n,l})d\tau\right) V_{\lambda,n,l}\right] \partial_x u_{\lambda,n} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} V_{n,l,i}\Big[\partial_t\left(r_i(u_{\lambda,n+l})\right) + a(u_{\lambda,n+l})\partial_x\big(r_i(u_{\lambda,n+l})\big)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{N} V_{n,l,i}\Bigg\{-\Bigg[\left(\left(\int_0^1 a'\left(u_{\lambda,n} + \tau V_{\lambda,n,l}\right) d\tau\right) r_i(u_{\lambda,n+l})\right) \partial_x u_{\lambda,n} \\
&\quad + \partial_t\left(r_i(u_{\lambda,n+l})\right) + a(u_{\lambda,n+l})\partial_x\left(r_i(u_{\lambda,n+l})\right)\Bigg]\Bigg\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} V_{n,l,i}\phi_{ij}(u_{\lambda,n+l}, u_{\lambda,n}) r_j(u_{\lambda,n+l}),
\end{aligned}$$

onde, para cada i, $\phi_{ij}(u_{\lambda,n+l}, u_{\lambda,n})$ são as coordenadas do vetor entre chaves na base $\{r_1(u_{\lambda,n+l}), \ldots, r_N(u_{\lambda,n+l})\}$. Assim temos

$$\tilde{L}_j^{n+l} V_{n,l,j} = \sum_{i=1}^{N} V_{n,l,i}\phi_{ij}(u_{\lambda,n+l}, u_{\lambda,n}). \tag{2.2.4}$$

Se $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t))$ é uma curva integral do campo $\tilde{L}_j^{n+l}$, então

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\tilde{L}_j^{n+l} V_{n,l,j})\gamma(s)ds &= \int_0^t (V_{n,l,j}(\gamma))'(s)ds \\
&= V_{n,l,j}(\gamma(t)) - V_{n,l,j}(\gamma(0)),
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

por outro lado, tomando

$$\tilde{M}_{n+l}(t) \doteq \sup_{i,x} |V_{n,l,i}(t,x)|,$$

segue, integrando-se o lado direito de (2.2.4), que

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\tilde{L}_j^{n+l} V_{n,l,j})\gamma(s)ds &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_0^t |V_{n,l,i}(\gamma(s))\phi_{ij}(u_{\lambda,n+l}, u_{\lambda,n})(\gamma(s))|ds \\
&\leq C \int_0^t \tilde{M}_{n+l}(s)ds,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos além da definição de $\tilde{M}_{n+l}$, (2.2.2) e a Observação

2.0.1. De (2.2.5) e da desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} V_{n,l,j}(\gamma(t)) &\leq V_{n,l,j}(\gamma(0)) + C\int_0^t \tilde{M}_{n+l}(s)ds \\ &\leq \tilde{M}_{n+l}(0) + C\int_0^t \tilde{M}_{n+l}(s)ds. \end{aligned}$$

Trabalhando com $-(2.2.4)$ obtemos de modo análogo ao feito acima que

$$-V_{n,l,j}(\gamma(t)) \leq \tilde{M}_{n+l}(0) + C\int_0^t \tilde{M}_{n+l}(s)ds,$$

logo vale

$$|V_{n,l,j}(\gamma(t))| \leq \tilde{M}_{n+l}(0) + C\int_0^t \tilde{M}_{n+l}(s)ds.$$

Como na desigualdade acima o lado direito é independente de j e da curva integral γ, tomando o supremo sobre as curvas integrais e sobre j obtemos

$$\tilde{M}_{n+l}(t) \leq \tilde{M}_{n+l}(0) + C\int_0^t \tilde{M}_{n+l}(s)ds.$$

Da Desigualdade de Gronwall, segue agora que

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{n+l}(t) &\leq \tilde{M}_{n+l}(0)\exp\left(\int_0^t C d\tau\right) \\ &\leq C\|\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n+l} - \boldsymbol{u}_{0,\lambda,n}\|_\infty, \end{aligned}$$

logo vale

$$\|u_{\lambda,n+l} - u_{\lambda,n}\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n+l} - \boldsymbol{u}_{0,\lambda,n}\|_\infty.$$

Como $\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{u}_{0,\lambda}$ uniformemente segue da desigualdade acima que $(u_{\lambda,n})_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy (com a norma uniforme em $[0,T]\times\mathbb{R}$), sendo assim, existe u_λ tal que $u_{\lambda,n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_\lambda$.

E3. Nosso objetivo é demonstrar que u_λ é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u_\lambda + a(u_\lambda)\partial_x u_\lambda &=& 0 \\ u_\lambda(0,x) &=& \boldsymbol{u}_{0,\lambda}(x). \end{array} \right. \tag{2.2.6}$$

E3′. Derivando em relação a x a primeira igualdade de (2.2.1), obtemos

$$\partial_t\partial_x u_{\lambda,n} + a(u_{\lambda,n})\partial_x\partial_x u_{\lambda,n} = -\left(a'(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n}\right)\partial_x u_{\lambda,n}. \tag{2.2.7}$$

Escrevendo

$$\partial_x u_{\lambda,n} = \sum_{i=1}^N w_{\lambda,n,i} r_i(u_{\lambda,n}),$$

segue de (2.2.7) que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\left(\partial_t w_{\lambda,n,i}+\lambda_i(u_{\lambda,n})\partial_x w_{\lambda,n,i}\right) r_i(u_{\lambda,n}) &= -\left(a'(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n}\right)\sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,i} r_i(u_{\lambda,n}) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,i}\left[\partial_t\left(r_i(u_{\lambda,n})\right)+a(u_{\lambda,n})\partial_x\left(r_i(u_{\lambda,n})\right)\right] \\
&= -\sum_{i,l=1}^{N} w_{\lambda,n,i}w_{\lambda,n,l}\left[a'(u_{\lambda,n})r_l(u_{\lambda,n})\right] r_i(u_{\lambda,n}) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,i}\left[-r_i'(u_{\lambda,n})\left(a(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n}\right)+a(u_{\lambda,n})\left(r_i'(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n}\right)\right] \\
&= \sum_{i,l=1}^{N} w_{\lambda,n,i}w_{\lambda,n,l}\Big\{-\left[\left(a'(u_{\lambda,n})r_l(u_{\lambda,n})\right) r_i(u_{\lambda,n})\right. \\
&\quad \left.-r_i'(u_{\lambda,n})\left(a(u_{\lambda,n})r_l(u_{\lambda,n})\right)+a(u_{\lambda,n})\left(r_i'(u_{\lambda,n})r_l(u_{\lambda,n})\right)\right]\Big\} \\
&= \sum_{i,l,j=1}^{N} w_{\lambda,n,i}w_{\lambda,n,l}\phi_{ilj}(u_{\lambda,n})r_j(u_{\lambda,n}),
\end{aligned}$$

onde, para cada i,l, $\phi_{ilj}(u_{\lambda,n})$ são as coordenadas do vetor entre chaves na base $\{r_1(u_{\lambda,n}),\ldots,r_N(u_{\lambda,n})\}$. Para o operador $L_{\lambda,n,j}v \doteq \partial_t v+\lambda_j(u_{\lambda,n})\partial_x v$, segue agora que

$$L_{\lambda,n,j}w_{\lambda,n,j}=\sum_{i,l=1}^{N} w_{\lambda,n,i}w_{\lambda,n,l}\phi_{ilj}(u_{\lambda,n}). \tag{2.2.8}$$

Seja $\Phi_{\lambda,n,j}$ o fluxo do campo $L_{\lambda,n,j}$. Temos

$$\partial_t\Phi_{\lambda,n,j}(t,(s,x))=L_{\lambda,n,j}(\Phi_{\lambda,n,j}(t,(s,x))) \quad \text{e} \quad \Phi_{\lambda,n,j}(0,(s,x))=(s,x).$$

Observando que $\Phi_{\lambda,n,j}(-s,(s,x))\in\{0\}\times\mathbb{R}$ e $\Phi_{\lambda,n,j}(s'-s,(s,x))\in\{s'\}\times\mathbb{R}$, obtemos, integrando (2.2.8) de 0 a s ao longo da curva $\Phi_{\lambda,n,j}(\cdot-s,(s,x))$, que

$$\begin{aligned}
w_{\lambda,n,j}(s,x) &= w_{\lambda,n,j}\Big(\Phi_{\lambda,n,j}\big(-s,(s,x)\big)\Big) \\
&\quad +\int_0^s\sum_{i,l=1}^{N} w_{\lambda,n,i}w_{\lambda,n,l}\Big(\Phi_{\lambda,n,j}\big(s'-s,(t,x)\big)\Big)\phi_{ilj}(u_{\lambda,n})\Big(\Phi_{\lambda,n,j}\big(s'-s,(t,x)\big)\Big)ds'.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Notemos ainda, que existem constantes positivas A e A_1 para as quais valem:

$$|\Phi_{\lambda,n,j}(t,(s,y))-\Phi_{\lambda,n,j}(t,(s,x))|\leq \exp(At)|(s,x)-(s,y)| \tag{2.2.10}$$

e

$$|(s,y)-\Phi_{\lambda,n,j}(s-\tau,(\tau,x))|\leq A_1|(\tau,x)-(s,y)|. \tag{2.2.11}$$

E3″. Para os cálculos que seguem, vamos simplificar as notações removendo os índices λ e n, assim, por exemplo, escreveremos w_j no lugar de $w_{\lambda,n,j}$ e $r_i(u)$ representará $r_i(u_{\lambda,n})$.

Olhemos agora para dois pontos (t,x), $(\tau,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$ arbitrários porém fixos. Como veremos, podemos supor sem perda de generalidade que $t\geq\tau$. Nosso objetivo agora é obter uma estimativa, para $\max\limits_{j=1,\ldots,N}\{|w_j(\tau,y)-w_j(t,x)|\}$, que possa ser usada para mostrarmos que a sequência $(\partial_x u_{\lambda,n})_{n\geq 1}$ é equicontínua. O primeiro passo que damos para obter tal estimativa, é escolher um ponto apropriado e aplicar a desigualdade triangular, isto é,

$$|w_j(\tau,y)-w_j(t,x)| \leq |w_j(\tau,y)-w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)|+|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)|. \quad (2.2.12)$$

Olhemos primeiro para $|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)|$. Obtemos, integrando de τ a t ambos os lados de (2.2.8) ao longo da curva $\Phi_j(\cdot-t,(t,x))$ que

$$w_j(t,x)-w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big) = \sum_{i,l=1}^{N}\int_\tau^t w_i w_l\Big(\Phi_j\big(s-t,(t,x)\big)\Big)\phi_{ilj}(u)\Big(\Phi_j\big(s-t,(t,x)\big)\Big)ds,$$

assim segue de (2.2.2) que

$$\begin{aligned}|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)| &\leq C\max_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_\infty\}|t-\tau|\\ &\leq C\max_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)|,\end{aligned}$$

tomando o máximo em j obtemos

$$\max_{j=1,\ldots,N}\{|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)|\} \leq C\max_{j=1,\ldots,N}\{\|w_j\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)|. \quad (2.2.13)$$

Para estimar $|w_j(\tau,y)-w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)|$, vamos olhar para três casos distintos. Se $\pi_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ denota a projeção na segunda variável, então $\pi_2\Big(\Phi_N\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)<\ldots<\pi_2\Big(\Phi_1\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)$ e uma das seguintes situações ocorre:

I. $y\leq\pi_2(\Phi_N(\tau-t,(t,x)))$;

II. $y\geq\pi_2(\Phi_1(\tau-t,(t,x)))$;

III. $\pi_2(\Phi_N(\tau-t,(t,x)))\leq y\leq\pi_2(\Phi_1(\tau-t,(t,x)))$.

Para o caso **I.** consideremos, para todo $0\leq s\leq\tau$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathbf{I}s}\doteq\Big\{I\subset[\Phi_N(s-\tau,(\tau,y)),\Phi_1\Big(s-\tau,\Phi_1\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)] : I \text{ é conexo e}\\ |I|\leq\exp(A(\tau-s))|(\tau,y)-\Phi_1(\tau-t,(t,x))|\Big\}\end{aligned}$$

e

$$M_{\mathbf{I}}(s)\doteq\sup_{I\in\Lambda_{\mathbf{I}s}}\left\{\max_{j=1,\ldots,N}\left\{\sup_{(s,a),(s,b)\in I}\{|w_j(s,a)-w_j(s,b)|\}\right\}\right\}.$$

Sejam $I\in\Lambda_{\mathbf{I}s}$, (s,a) e (s,b) pontos em I. Segue aplicando (2.2.9) aos pontos (s,a) e (s,b) e tomando a diferença que

$$
\begin{aligned}
|w_j(s,a)-w_j(s,b)| &\le |w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,a)\big)\Big)-w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,b)\big)\Big)| \\
&\quad+\sum_{i,l=1}^{N}\int_0^s \Big|w_iw_l\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)\phi_{ilj}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big) \\
&\quad-w_iw_l\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\phi_{ilj}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\Big|\,ds' \\
&\le |w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,a)\big)\Big)-w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,b)\big)\Big)| \\
&\quad+\sum_{i,l=1}^{N}\int_0^s |w_iw_l\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_iw_l\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)||\phi_{ilj}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)|ds' \\
&\quad+\sum_{i,l=1}^{N}\int_0^s |w_iw_l\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)||\phi_{ilj}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-\phi_{ilj}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)|ds'
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdades de (2.2.2) obtemos

$$
\begin{aligned}
|w_j(s,a)-w_j(s,b)| &\le |w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,a)\big)\Big)-w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,b)\big)\Big)| \\
&\quad+\int_0^s C\max_{i=1,\dots,N}\Big\{|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)|\Big\}ds' \\
&\quad+\int_0^s C\max_{i=1,\dots,N}\Big\{\,\|w_i\|_\infty\Big\}|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)|ds'. \qquad (2.2.14)
\end{aligned}
$$

Notemos agora que (2.2.10) e o fato de que $(s,a),(s,b)\in I$ garantem as estimativas

$$
\begin{aligned}
|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)| &\le \exp\big(A(s-s')\big)|(s,a)-(s,b)| \\
&\le \exp\big(A(s-s')\big)\exp\big(A(\tau-s)\big)|(\tau,y)-\Phi_1(\tau-t,(t,x))|,
\end{aligned}
$$

assim temos

$$
|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)| \le \exp\big(A(\tau-s')\big)|(\tau,y)-\Phi_1(\tau-t,(t,x))|, \qquad (2.2.15)
$$

isto é, o segmento de reta $[\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big),\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)]\in\Lambda_{\mathbf{I}s'}$, logo, vale que

$$
\max_{i=1,\dots,N}\Big\{|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)|\Big\}\le M_{\mathbf{I}}(s'). \qquad (2.2.16)
$$

Observemos ainda que de (2.2.15) segue, via (2.2.11), que

$$
|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)|\le C|(\tau,y)-(t,x)|.
$$

Utilizando esta última desigualdade e (2.2.16), obtemos de (2.2.14) que

$$
|w_j(s,a)-w_j(s,b)|\le M_{\mathbf{I}}(0)+C\max_{i=1,\dots,N}\|w_i\|_\infty|(t,x)-(\tau,y)|+\int_0^s CM_{\mathbf{I}}(s')ds'.
$$

Como a desigualdade acima é válida independente de j, do intervalo I e dos pontos (s,a) e $(s,b)\in I$, segue para qualquer $s\in[0,\tau]$ que

$$
M_{\mathbf{I}}(s)\le M_{\mathbf{I}}(0)+C\max_{i=1,\dots,N}\|w_i\|_\infty|(t,x)-(\tau,y)|+\int_0^s CM_{\mathbf{I}}(s')ds',
$$

de onde obtemos, utilizando o Lema de Gronwall, que

$$M_{\mathbf{I}}(s) \leq \Big(M_{\mathbf{I}}(0) + C \max_{i=1,\dots,N} \|w_i\|_\infty |(t,x) - (\tau,y)|\Big) \exp(sC).$$

Para o caso **II.** definindo

$$\Lambda_{\mathbf{II}s} \doteq \Big\{ I \subset [\Phi_1(s-\tau,(\tau,y)), \Phi_N\big(s-\tau, \Phi_N(\tau-t,(t,x))\big)] : I \text{ é conexo e}$$
$$|I| \leq \exp(A(\tau - s))|(\tau,y) - \Phi_N(\tau - t,(t,x))| \Big\}$$

e

$$M_{\mathbf{II}}(s) \doteq \sup_{I \in \Lambda_{\mathbf{II}s}} \left\{ \max_{j=1,\dots,N} \left\{ \sup_{(s,a),(s,b)\in I} \{|w_j(s,a) - w_j(s,b)|\} \right\} \right\},$$

obtemos, de modo análogo ao caso **I.**, que

$$M_{\mathbf{II}}(s) \leq \Big(M_{\mathbf{II}}(0) + C \max_{i=1,\dots,N} \|w_i\|_\infty |(t,x) - (\tau,y)|\Big) \exp(sC).$$

No caso **III.** definindo

$$\Lambda_{\mathbf{III}s} \doteq \Big\{ I \subset [\Phi_N\big(s-\tau, \Phi_N(\tau-t,(t,x))\big), \Phi_1\big(s-\tau, \Phi_1(\tau-t,(t,x))\big)] : I \text{ é conexo e}$$
$$|I| \leq \exp(A(\tau - s))|\Phi_1(\tau - t,(t,x)) - \Phi_N(\tau - t,(t,x))| \Big\}$$

e

$$M_{\mathbf{III}}(s) \doteq \sup_{I \in \Lambda_{\mathbf{III}s}} \left\{ \max_{j=1,\dots,N} \left\{ \sup_{(s,a),(s,b)\in I} \{|w_j(s,a) - w_j(s,b)|\} \right\} \right\},$$

obtemos

$$M_{\mathbf{III}}(s) \leq \Big(M_{\mathbf{III}}(0) + C \max_{i=1,\dots,N} \|w_i\|_\infty |(t,x) - (\tau,y)|\Big) \exp(sC).$$

Como $[(\tau,y), \Phi_j(\tau - t,(t,x))] \in \Lambda_{\mathbf{I}\tau} \cup \Lambda_{\mathbf{II}\tau} \cup \Lambda_{\mathbf{III}\tau}$ temos

$$\max_{j=1,\dots,N} \{|w_j(\tau,y) - w_j\big(\Phi_j(\tau-t,(t,x))\big)|\} \leq \max\{M_{\mathbf{I}}(\tau), M_{\mathbf{II}}(\tau), M_{\mathbf{III}}(\tau)\}.$$

Desta desigualdade, de (2.2.12), (2.2.13) e das estimativas obtidas para $M_{\mathbf{I}}(s)$, $M_{\mathbf{II}}(s)$ e $M_{\mathbf{III}}(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\max_{j=1,\dots,N} \{|w_j(\tau,y) - w_j(t,x)|\} \\
&\qquad \leq \max\{M_{\mathbf{I}}(\tau), M_{\mathbf{II}}(\tau), M_{\mathbf{III}}(\tau)\} + C \max_{j=1,\dots,N} \{\|w_j\|_\infty\} |(t,x) - (\tau,y)| \\
&\qquad \leq C \left(\max\{M_{\mathbf{I}}(0), M_{\mathbf{II}}(0), M_{\mathbf{III}}(0)\} + \max_{j=1,\dots,N} \{\|w_j\|_\infty\} |(t,x) - (\tau,y)| \right)
\end{aligned}$$

e como para todo $\mathbf{I} \in \Lambda_{\mathbf{I}0} \cup \Lambda_{\mathbf{II}0} \cup \Lambda_{\mathbf{III}0}$ temos $|I| \leq 2A_1 \exp(AT)|(t,x) - (\tau,y)|$, segue que

$$\begin{aligned}
\max_{j=1,\dots,N} \{|w_j(\tau,y) - w_j(t,x)|\} \leq C \Bigg(& \sup_{I\in\Lambda} \left\{ \max_{j=1,\dots,N} \left\{ \sup_{(0,a),(0,b)\in I} \{|w_j(0,a) - w_j(0,b)|\} \right\} \right\} \\
& + \max_{j=1,\dots,N} \{\|w_j\|_\infty\} |(t,x) - (\tau,y)| \Bigg),
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

onde Λ é o conjunto de todos os $I \subset \{0\}\times\mathbb{R}$ tal que, I é conexo e $|I| \leq 2A_1\exp(AT)|(t,x)-(\tau,y)|$.

Os cálculos feitos acima são independentes dos pontos (t,x) e (τ,y), assim definindo

$$\Lambda_{(t,x),(\tau,y)} \doteq \Big\{ I \subset \mathbb{R} : I \text{ é intervalo e } |I| \leq 2A_1\exp(AT)|(t,x)-(\tau,y)| \Big\}$$

e

$$M\big((t,x),(\tau,y)\big) \doteq \sup_{I\in\Lambda_{(t,x),(\tau,y)}} \Big\{ \max_{j=1,\ldots,N} \Big\{ \sup_{a,b\in I} \{|w_j(0,a)-w_j(0,b)|\} \Big\} \Big\},$$

podemos escrever, para alguma constante B,

$$\max_{j=1,\ldots,N}\{|w_j(\tau,y)-w_j(t,x)|\} \leq B\Big(M\big((t,x),(\tau,y)\big) + \max_{j=1,\ldots,N}\{\|w_j\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)| \Big)$$

para quaisquer (t,x) e (τ,y) em $[0,T]\times\mathbb{R}$. Para ressaltar a dependência em λ, n, vamos reescrever as últimas informações. Definindo

$$M_{\lambda,n}\big((t,x),(\tau,y)\big) \doteq \sup_{I\in\Lambda_{(t,x),(\tau,y)}} \Big\{ \max_{j=1,\ldots,N} \Big\{ \sup_{a,b\in I} \{|w_{\lambda,n,j}(0,a)-w_{\lambda,n,j}(0,b)|\} \Big\} \Big\}$$

temos, para alguma constante B, que

$$\begin{aligned} &\max_{j=1,\ldots,N}\{|w_{\lambda,n,j}(\tau,y)-w_{\lambda,n,j}(t,x)|\} \\ &\qquad \leq B\Big(M_{\lambda,n}\big((t,x),(\tau,y)\big) + \max_{j=1,\ldots,N}\{\|w_{\lambda,n,j}\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)| \Big) \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

para todo (t,x) e (τ,y) em $[0,T]\times\mathbb{R}$.

E3‴. Iniciamos demonstrando, com auxílio de (2.2.18), que a família $\mathcal{F} \doteq \{\partial_x u_{\lambda,n} : n\in\mathbb{N}\}$ é equicontínua. De fato, dado $\epsilon > 0$ como $\mathcal{F}_0 \doteq \{\partial_x u_{\lambda,n}(0,\cdot) : n\in\mathbb{N}\}$ é equicontínua, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $|a-b| < \delta_0$, então

$$\max_{j=1,\ldots,N}\{|w_{\lambda,n,j}(0,a)-w_{\lambda,n,j}(0,b)|\} < \frac{\epsilon}{2B}.$$

Se $\delta > 0$ é tal que $|(t,x)-(\tau,y)| < \delta$ implica

$$2A_1\exp(AT)|(t,x)-(\tau,y)| < \delta_0$$

e

$$B\max_{j=1,\ldots,N}\{\|w_{\lambda,n,j}\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)| < \frac{\epsilon}{2},$$

então de (2.2.18) segue que

$$\max_{j=1,\ldots,N}\{|w_{\lambda,n,j}(\tau,y)-w_{\lambda,n,j}(t,x)|\} < \epsilon$$

sempre que $|(t,x)-(\tau,y)| < \delta$, portanto, $\mathcal{F}$ é equicontínua.

Como o $S(\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n}) \subset B(0,1)+B(0,2\lambda)$ segue que existe compacto, K_λ independente de n, tal que $S(u_{\lambda,n}) \subset K_\lambda$, assim restringindo o domínio de $\partial_x u_{\lambda,n}$ ao conjunto K_λ obtemos, via Teorema de Arzelá, que existe subsequência $(\partial_x u_{\lambda,n_l})_{n_l}$ tal que $\partial_x u_{\lambda,n_l}$ converge uniformemente.

Sabemos que u_{λ,n_l} satisfaz (2.2.1), assim $\partial_t u_{\lambda,n_l}$ também converge uniformemente, deste modo, $\left((u_{\lambda,n_l})'\right)_{n_l}$ converge uniformemente. Pelo teorema derivação termo a termo, segue agora que $(u_{\lambda,n_l})' \stackrel{n_l\to\infty}{\longrightarrow} (u_\lambda)'$ uniformemente em K_λ. Utilizando o Teorema 1.3.4 concluímos que $(u_{\lambda,n})' \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_\lambda)'$ uniformemente, logo

$$\partial_x u_{\lambda,n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_x u_\lambda \quad \text{e} \quad \partial_t u_{\lambda,n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_t u_\lambda$$

uniformemente em K_λ de onde segue que u_λ é solução de (2.2.6).

E4. Olhemos para as sequências $\left((u_{\lambda,n})_\nu\right)_{\nu\geq -1}$ definidas como em (2.0.4) e (2.0.5), isto é, fixado λ e n associamos o dado inicial $\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n}$ a sequência $\left((u_{\lambda,n})_\nu\right)_{\nu\geq -1}$. Queremos mostrar, com o auxílio destas sequências, que dado $K \subset [0,T]\times\mathbb{R}$ compacto existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$u_\lambda(t,x) = u_{\lambda_0}(t,x) \quad \forall\,(t,x)\in K \quad \text{e} \quad \forall\,\lambda \geq \lambda_0. \tag{2.2.19}$$

Para isto é suficiente que exista $\lambda_0 > 0$ tal que

$$u_{\lambda,n}(t,x) = u_{\lambda_0,n}(t,x) \quad \forall\,(t,x)\in K \quad \text{e} \quad \forall\,\lambda \geq \lambda_0. \tag{2.2.20}$$

Consideremos $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_N$ para os quais valem

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1(v) \quad \forall\, v \in B\left(0, \tilde{C}_0\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty\right)$$

e

$$\tilde{\lambda}_N \geq \lambda_N(v) \quad \forall\, v \in B\left(0, \tilde{C}_0\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty\right).$$

Dado $K \subset [0,T]\times\mathbb{R}$, tome $a > 0$ tal que $K \subset D_a$, onde $D_a \subset [0,T]\times\mathbb{R}$ é o conjunto delimitado pelas retas $t = 0$, $t = T$, $X(t) = a + \tilde{\lambda}_1 t$ e $Y(t) = -a + \tilde{\lambda}_N t$. Para todo $\lambda \geq \lambda_0 = a + 1$ temos

$$\boldsymbol{u}_0\varphi_\lambda \big|_{[-(a+1),a+1]} \equiv \boldsymbol{u}_0\varphi_{\lambda_0} \big|_{[-(a+1),a+1]},$$

logo

$$\boldsymbol{u}_{0,\lambda,n} \big|_{[-a,a]} \equiv \boldsymbol{u}_{0,\lambda_0,n} \big|_{[-a,a]} \quad \forall\,\lambda \geq \lambda_0,$$

deste modo

$$(u_{\lambda,n})_0\,|_{D_a} \equiv (u_{\lambda_0,n})_0\,|_{D_a} \quad \forall\,\lambda \geq \lambda_0.$$

Do Teorema 1.4.1 obtemos

$$(u_{\lambda,n})_1\,|_{D_a} \equiv (u_{\lambda_0,n})_1\,|_{D_a} \quad \forall\,\lambda \geq \lambda_0,$$

agora, com uma nova aplicação do referido teorema, segue que $(u_{\lambda,n})_2\,|_{D_a} \equiv (u_{\lambda_0,n})_2\,|_{D_a}$ $\forall\,\lambda \geq \lambda_0$, mais geralmente, segue, via indução, que

$$(u_{\lambda,n})_\nu\,|_{D_a} \equiv (u_{\lambda_0,n})_\nu\,|_{D_a} \quad \forall\,\lambda \geq \lambda_0,$$

assim

$$u_{\lambda,n}(t,x) = \lim_{\nu\to\infty}(u_{\lambda,n})_\nu(t,x) = \lim_{\nu\to\infty}(u_{\lambda_0,n})_\nu(t,x) = u_{\lambda_0,n}(t,x)\ \forall\,(t,x)\in K \text{ e } \forall\,\lambda \geq \lambda_0,$$

logo vale (2.2.20) e portanto (2.2.19). Segue, de (2.2.19), que $u : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ dada por

$$u(t,x) \doteq \lim_{\lambda\to\infty} u_\lambda(t,x), \tag{2.2.21}$$

fica bem definida e é solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t u + a(u)\partial_x u &= 0 \\ u(0,x) &= \mathbf{u}_0(x). \end{cases}$$

Isto conclui a demonstração do teorema para o caso $k = 1$.

E5. A demonstração para o caso geral será feita por indução em k. Nossa hipótese de indução é (para a sequência $(u_{\lambda,n})_{n\geq 1}$ tomada no início da demonstração)

$$u_{\lambda,n}^{(l)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_\lambda^{(l)}$$

uniformemente sobre cada compacto $K \subset [0,T]\times\mathbb{R}$, para todo $0 \leq l \leq k-1$. Precisamos mostrar que

$$u_{\lambda,n}^{(k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_\lambda^{(k)}$$

uniformemente sobre cada compacto. Uma vez feito isto, seguirá, de (2.2.19), que a u definida em (2.2.21) satisfaz o teorema.

Como T foi tomado de modo que as soluções $u_{\lambda,n}$ de (2.2.1) são $k{+}1$ vezes diferenciáveis em $[0,T]\times\mathbb{R}$, temos o direito de diferenciarmos a primeira igualdade de (2.2.1) k-vezes em relação a x. Lembrando da regra de Leibniz, vemos que tal operação conduz a

$$\partial_t\partial_x^k u_{\lambda,n} + a(u_{\lambda,n})\partial_x\partial_x^k u_{\lambda,n} = -\sum_{m=1}^{k}\binom{k}{m}\partial_x^m\big(a(u_{\lambda,n})\big)\partial_x^{k+1-m}u_{\lambda,n}.$$

Destacaremos, no lado direito da igualdade acima, os termos onde figuram derivadas de ordem k. Para isto, primeiramente, reescrevemos a igualdade do seguinte modo

$$\begin{aligned}\partial_t\partial_x^k u_{\lambda,n} + a(u_{\lambda,n})\partial_x\partial_x^k u_{\lambda,n} = {}& -k\big(a'(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n}\big)\partial_x^k u_{\lambda,n} - \partial_x^k\big(a(u_{\lambda,n})\big)\partial_x u_{\lambda,n} \\ & -\sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\partial_x^m(a(u_{\lambda,n}))\partial_x^{k+1-m}u_{\lambda,n},\end{aligned}$$

utilizando agora o Teorema 1.3.1 temos

$$\begin{aligned}\partial_t\partial_x^k u_{\lambda,n} + a(u_{\lambda,n})\partial_x\partial_x^k u_{\lambda,n} = {}& -k\big(a'(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n}\big)\partial_x^k u_{\lambda,n} \\ & -\Big[\sum_{l=1}^{k} n(i_1,\dots,i_l)a^{(l)}(u_{\lambda,n})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\lambda,n},\dots,\partial_x^{i_l}u_{\lambda,n}\Big)\Big]\partial_x u_{\lambda,n} \\ & -\sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\partial_x^m(a(u_{\lambda,n}))\partial_x^{k+1-m}u_{\lambda,n}.\end{aligned}$$

Para $l = 1$ a única partição para $k = i_1$ é $i_1 = k$ e neste caso temos $n(i_1) = 1$, assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\partial_t\partial_x^k u_{\lambda,n} + a(u_{\lambda,n})\partial_x\partial_x^k u_{\lambda,n} = {}& -k\big(a'(u_{\lambda,n})\partial_x u_{\lambda,n}\big)\partial_x^k u_{\lambda,n} - \big(a'(u_{\lambda,n})\partial_x^k u_{\lambda,n}\big)\partial_x u_{\lambda,n} \\ & -\Big[\sum_{l=2}^{k} n(i_1,\dots,i_l)a^{(l)}(u_{\lambda,n})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\lambda,n},\dots,\partial_x^{i_l}u_{\lambda,n}\Big)\Big]\partial_x u_{\lambda,n} \\ & -\sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\partial_x^m(a(u_{\lambda,n}))\partial_x^{k+1-m}u_{\lambda,n}. \qquad (2.2.22)\end{aligned}$$

Agora, analogamente ao caso $k = 1$, escrevemos

$$\partial_x^k u_{\lambda,n} = \sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,k,i} r_i(u_{\lambda,n}),$$

assim, como

$$\begin{aligned}\partial_t \partial_x^k u_{\lambda,n} &= \partial_t \left(\sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,k,i} r_i(u_{\lambda,n}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[\big(\partial_t w_{\lambda,n,k,i}\big) r_i(u_{\lambda,n}) + w_{\lambda,n,k,i} \partial_t \big(r_i(u_{\lambda,n}) \big) \right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a(u_{\lambda,n}) \partial_x \partial_x^k u_{\lambda,n} &= a(u_{\lambda,n}) \partial_x \left(\sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,k,i} r(u_{\lambda,n}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[(\partial_x w_{\lambda,n,k,i}) a(u_{\lambda,n}) r_i(u_{\lambda,n}) + w_{\lambda,n,k,i} a(u_{\lambda,n}) \partial_x \big(r_i(u_{\lambda,n}) \big) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[(\partial_x w_{\lambda,n,k,i}) \lambda_i(u_{\lambda,n}) r_i(u_{\lambda,n}) + w_{\lambda,n,k,i} a(u_{\lambda,n}) \partial_x \big(r_i(u_{\lambda,n}) \big) \right],\end{aligned}$$

obtemos de (2.2.22) que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N} \big(\partial_t w_{\lambda,n,k,i} + \lambda_i(u_{\lambda,n}) \partial_x w_{\lambda,n,k,i} \big) r_i(u_{\lambda,n}) \\ &\qquad = - \sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,k,i} \Big(\partial_t \big(r_i(u_{\lambda,n}) \big) + a(u_{\lambda,n}) \partial_x \big(r_i(u_{\lambda,n}) \big) \Big) \\ &\qquad\quad - \sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,k,i} \Big(k \big(a'(u_{\lambda,n}) \partial_x u_{\lambda,n} \big) r_i(u_{\lambda,n}) + \big(a'(u_{\lambda,n}) r_i(u_{\lambda,n}) \big) \partial_x u_{\lambda,n} \Big) \\ &\qquad\quad - \Big[\sum_{l=2}^{k} n(i_1, \ldots, i_l) a^{(l)}(u_{\lambda,n}) \Big(\partial_x^{i_1} u_{\lambda,n}, \ldots, \partial_x^{i_l} u_{\lambda,n} \Big) \Big] \partial_x u_{\lambda,n} \\ &\qquad\quad - \sum_{m=2}^{k-1} \binom{k}{m} \partial_x^m (a(u_{\lambda,n})) \partial_x^{k+1-m} u_{\lambda,n}. \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}-\Big(\partial_t \big(r_i(u_{\lambda,n}) \big) + a(u_{\lambda,n}) \partial_x \big(r_i(u_{\lambda,n}) \big) + k \big(a'(u_{\lambda,n}) \partial_x u_{\lambda,n} \big) r_i(u_{\lambda,n}) + \big(a'(u_{\lambda,n}) r_i(u_{\lambda,n}) \big) \partial_x u_{\lambda,n} \Big) \\ = \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij}(u_{\lambda,n}) r_j(u_{\lambda,n})\end{aligned}$$

e

$$-\Bigg\{\Big[\sum_{l=2}^{k} n(i_1,\dots,i_l)a^{(l)}(u_{\lambda,n})\Big(\partial_x^{i_1}u_{\lambda,n},\dots,\partial_x^{i_l}u_{\lambda,n}\Big)\Big]\partial_x u_{\lambda,n}$$
$$+\sum_{m=2}^{k-1}\binom{k}{m}\partial_x^m(a(u_{\lambda,n}))\partial_x^{k+1-m}u_{\lambda,n}\Bigg\} = \sum_{j=1}^{N} R_j(u_{\lambda,n})r_j(u_{\lambda,n}),$$

segue de (2.2.23) que

$$L_{\lambda,n,j}w_{\lambda,n,k,j} = \left(\sum_{i=1}^{N} w_{\lambda,n,k,i}\phi_{ij}(u_{\lambda,n})\right) + R_j(u_{\lambda,n}), \tag{2.2.24}$$

onde $L_{\lambda,n,j}$ é o mesmo operador que aparece no caso $k=1$.

Antes de prosseguirmos a demonstração, vamos simplificar um pouco as notações. Como estamos pensando λ e k fixos (ver hipótese de indução) e os cálculos que seguem devem valer para todo n, mas estaremos trabalhando com cada n individualmente, vamos manter em mente e até mesmo, as vezes, escrever tais índices, mas em geral eliminaremos estes índices escrevendo, por exemplo, Φ_j no lugar de $\Phi_{\lambda,n,j}$ (fluxo associado ao campo $L_{\lambda,n,j}$).

Integrando (2.2.24) de 0 a s ao longo da curva $\Phi_j(\cdot - s,(s,x))$ obtemos

$$w_j(s,x) = w_j\big(\Phi_j(-s,(s,x))\big) + \sum_{i=1}^{N}\int_0^s w_i\big(\Phi_j(s'-s,(s,x))\big)\phi_{ij}(u)\big(\Phi_j(s'-s,(s,x))\big)ds'$$
$$+\int_0^s R_j(u)\big(\Phi_j(s'-s,(s,x))\big)ds'. \tag{2.2.25}$$

A igualdade em (2.2.25) faz, aqui no caso geral, o papel de (2.2.9) no caso $k=1$. Analogamente ao feito para o caso $k=1$, vamos agora fixar dois pontos $(t,x),(\tau,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, como veremos, podemos supor sem perda de generalidade que $t\geq\tau$. O objetivo agora é obter uma estimativa para $\max\limits_{j=1,\dots,N}\{|w_j(\tau,y)-w_j(t,x)|\}$ de modo que com tal estimativa possamos mostrar que $\left(\partial_x^k u_{\lambda,n}\right)_{n\geq 1}$ é equicontínua. Iniciamos a busca por esta estimativa escrevendo

$$|w_j(\tau,y)-w_j(t,x)| \leq |w_j(\tau,y)-w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)| + |w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)|. \tag{2.2.26}$$

Para a parcela $|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)|$, obtemos integrando (2.2.24) de τ a t ao longo da curva $\Phi_j(\cdot - t,(s,x))$ que

$$|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)| \leq \sum_{i=1}^{N}\int_\tau^t \left|w_i\Big(\Phi_j\big(s-t,(t,x)\big)\Big)\phi_{ij}(u)\Big(\Phi_j\big(s-t,(t,x)\big)\Big)\right|ds$$
$$+\int_\tau^t\left|R_j(u)\Big(\Phi_j\big(s-t,(t,x)\big)\Big)\right|ds,$$

segue assim, utilizando (2.2.2), que

$$|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)| \leq C\max_{i=1,\dots,N}\{\|w_i\|_\infty\}|t-\tau| + \max_{i=1,\dots,N}\{\|R_i(u_{\lambda,n})\|_\infty\}|t-\tau|$$
$$\leq C\max_{i=1,\dots,N}\{\|w_i\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)| + \max_{i=1,\dots,N}\{\|R_i(u)\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)|.$$

Como o lado direito da desigualdade anterior não depende de j, podemos escrever

$$\max_{j=1,\ldots,N}\Big\{|w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)-w_j(t,x)|\Big\}\leq C\max_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_\infty\}|(t,x)-(\tau,y)|$$
$$+\max_{i=1,\ldots,N}\{\|R_i(u)\|_\infty\}\,|(t,x)-(\tau,y)|. \tag{2.2.27}$$

Seguindo os passos do caso $k=1$, para estimarmos $\max_{j=1,\ldots,N}\Big\{|w_j(\tau,y)-w_j\Big(\Phi_j\big(\tau-t,(t,x)\big)\Big)|\Big\}$, vamos olhar separadamente as trêz possíveis situações:

I. $y\leq\pi_2(\phi_N(\tau-t,(t,x)))$;

II. $y\geq\pi_2(\phi_1(\tau-t,(t,x)))$;

III. $\pi_2(\phi_N(\tau-t,(t,x)))\leq y\leq\pi_2(\phi_1(\tau-t,(t,x)))$.

Para o caso **I.** utilizando os mesmos conjuntos $\Lambda_{\mathbf{I}s}$ (definidos quando trabalhamos o caso $k=1$) definimos

$$\tilde{M}_{\mathbf{I}}(s)\doteq\sup_{I\in\Lambda_{\mathbf{I}s}}\Bigg\{\max_{j=1,\ldots,N}\Bigg\{\sup_{(s,a),(s,b)\in I}\{|w_{\lambda,n,k,j}(s,a)-w_{\lambda,n,k,j}(s,b)|\}\Bigg\}\Bigg\}.$$

Consideremos agora $I\in\Lambda_{\mathbf{I}s}$ e $(s,a),(s,b)$ pontos em I. Aplicando (2.2.25) aos pontos (s,a) e (s,b) e trabalhando com a diferença, obtemos

$$|w_j(s,a)-w_j(s,b)|\leq|w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,a)\big)\Big)-w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,b)\big)\Big)|$$
$$+\sum_{i=1}^N\int_0^s\Big|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)\phi_{ij}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\phi_{ij}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\Big|ds'$$
$$+\int_0^s\Big|R_j(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-R_j(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\Big|\,ds'$$
$$\leq\Big|w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,a)\big)\Big)-w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,b)\big)\Big)\Big|$$
$$+\sum_{i=1}^N\int_0^s\Big|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)|\phi_{ij}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)\Big|\,ds'$$
$$+\sum_{i=1}^N\int_0^s\Big|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\Big|\,\Big|\phi_{ij}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-\phi_{ij}(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\Big|\,ds'$$
$$+\int_0^s\Big|R_j(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-R_j(u)\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)\Big|\,ds'$$
$$\leq\Big|w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,a)\big)\Big)-w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,b)\big)\Big)\Big|$$
$$+C\int_0^s\max_{i=1,\ldots,N}\Big\{|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)|\Big\}\,ds'$$
$$+C\int_0^s\max_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_\infty\}\,|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)|ds'$$
$$+\int_0^s\max_{i=1,\ldots,N}\Big\{\|\big(R_i(u)\big)'\|_\infty\Big\}\,|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)|ds',$$

isto é,

$$\begin{aligned}|w_j(s,a)-w_j(s,b)| &\leq |w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,a)\big)\Big)-w_j\Big(\Phi_j\big(-s,(s,b)\big)\Big)| \\ &+C\int_0^s \max_{i=1,\dots,N}\Big\{|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)|\Big\}\,ds' \\ &+C\int_0^s \max_{i=1,\dots,N}\{\|w_i\|_\infty\}\,|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)|ds' \\ &+\int_0^s \max_{i=1,\dots,N}\Big\{\|\big(R_i(u)\big)'\|_\infty\Big\}\,|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)|ds'. \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Sabemos (visto no caso $k=1$) que $[\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big),\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)]\in\Lambda_{\mathbf{I}s'}$, logo

$$\max_{i=1,\dots,N}\Big\{|w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)\Big)-w_i\Big(\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)\Big)|\Big\}\leq \tilde{M}_{\mathbf{I}}(s')$$

e como, temos também $|\Phi_j\big(s'-s,(s,a)\big)-\Phi_j\big(s'-s,(s,b)\big)|\leq C|(\tau,y)-(t,x)|$ segue de (2.2.28) que

$$\begin{aligned}|w_j(s,a)-w_j(s,b)| &\leq \tilde{M}_{\mathbf{I}}(0)+\int_0^s C\tilde{M}_{\mathbf{I}}(s')ds' \\ &\quad +C\left(\max_{i=1,\dots,N}\{\|w_i\|_\infty\}+\max_{i=1,\dots,N}\Big\{\|\big(R_i(u)\big)'\|_\infty\Big\}\right)|(t,x)-(\tau,y)|,\end{aligned}$$

de onde obtemos (analogamente ao caso $k=1$)

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{\mathbf{I}}(s) &\leq \tilde{M}_{\mathbf{I}}(0)\exp(sC) \\ &+C\left(\max_{i=1,\dots,N}\{\|w_i\|_\infty\}+\max_{i=1,\dots,N}\Big\{\|\big(R_i(u)\big)'\|_\infty\Big\}\right)|(t,x)-(\tau,y)|\exp(sC).\end{aligned}$$

Para **II.** definindo

$$\tilde{M}_{\mathbf{II}}(s)\doteq\sup_{I\in\Lambda_{\mathbf{II}s}}\left\{\max_{j=1,\dots,N}\left\{\sup_{(s,a),(s,b)\in I}\{|w_{\lambda,n,k,j}(s,a)-w_{\lambda,n,k,j}(s,b)|\}\right\}\right\}$$

($\Lambda_{\mathbf{II}s}$ definido no caso $k=1$), obtemos, de modo análogo ao caso **I.**, que

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{\mathbf{II}}(s) &\leq \tilde{M}_{\mathbf{II}}(0)\exp(sC) \\ &+C\left(\max_{i=1,\dots,N}\{\|w_i\|_\infty\}+\max_{i=1,\dots,N}\Big\{\|\big(R_i(u)\big)'\|_\infty\Big\}\right)|(t,x)-(\tau,y)|\exp(sC).\end{aligned}$$

No caso **III.** trabalhando com

$$\tilde{M}_{\mathbf{III}}(s)\doteq\sup_{I\in\Lambda_{\mathbf{III}s}}\left\{\max_{j=1,\dots,N}\left\{\sup_{a,b\in I}\{|w_j(s,a)-w_j(s,b)|\}\right\}\right\}$$

segue que

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{\mathbf{III}}(s) &\leq \tilde{M}_{\mathbf{III}}(0)\exp(sC) \\ &+\left(\max_{i=1,\dots,N}\{\|w_i\|_\infty\}+\max_{i=1,\dots,N}\Big\{\|\big(R_i(u_{\lambda,n})\big)'\|_\infty\Big\}\right)|(t,x)-(\tau,y)|\exp(sC).\end{aligned}$$

Utilizando (2.2.26), (2.2.27) e as estimativas para $\tilde{M}_{\mathbf{I}}(s)$, $\tilde{M}_{\mathbf{II}}(s)$ e $\tilde{M}_{\mathbf{III}}(s)$ de modo inteiramente análogo ao feito com (2.2.12), (2.2.13) e as estimativas para $M_{\mathbf{I}}(s)$, $M_{\mathbf{II}}(s)$ e $M_{\mathbf{III}}(s)$, obtemos que existe constante B para qual vale

$$\max_{j=1,\dots,N}\{|w_{\lambda,n,k,j}(\tau,y)-w_{\lambda,n,k,j}(t,x)|\} \le B\Bigg[M_{\lambda,n,k}\big((t,x),(\tau,y)\big) + \left(\max_{j=1,\dots,N}\{\|w_{\lambda,n,k,j}\|_\infty\} + \max_{j=1,\dots,N}\Big\{\|\big(R_j(u_{\lambda,n})\big)'\|_\infty\Big\}\right)|(t,x)-(\tau,y)|\Bigg], \tag{2.2.29}$$

com

$$M_{\lambda,n,k}\big((t,x),(\tau,y)\big) \doteq \sup_{I\in\Lambda_{(t,x),(\tau,y)}}\left\{\max_{j=1,\dots,N}\left\{\sup_{a,b\in I}\{|w_{\lambda,n,k,j}(0,a)-w_{\lambda,n,k,j}(0,b)|\}\right\}\right\}$$

e

$$\Lambda_{(t,x),(\tau,y)} \doteq \Big\{I\subset\mathbb{R} : I \text{ é intervalo e } |I|\le 2A_1\exp(AT)|(t,x)-(\tau,y)|\Big\}.$$

Mostremos agora, com auxílio de (2.2.29), que a família $\mathcal{F}_k \doteq \{\partial_x^k u_{\lambda,n} : n\in\mathbb{N}\}$ é equicontínua. De fato, dado $\epsilon>0$ como $\mathcal{F}_{0,k}\doteq\{\partial_x^k u_{\lambda,n}(0,\cdot) : n\in\mathbb{N}\}$ é equicontínua, existe $\delta_0>0$ tal que se $|a-b|<\delta_0$, então

$$\max_{j=1,\dots,N}\{|w_{\lambda,n,k,j}(0,a)-w_{\lambda,n,k,j}(0,b)|\} < \frac{\epsilon}{2B}.$$

Se $\delta>0$ é tal que $|(t,x)-(\tau,y)|<\delta$ implica

$$2A_1\exp(AT)|(t,x)-(\tau,y)|<\delta_0$$

e

$$B\left(\max_{j=1,\dots,N}\{\|w_{\lambda,n,k,j}\|_\infty\}+\max_{j=1,\dots,N}\Big\{\|\big(R_j(u_{\lambda,n})\big)'\|_\infty\Big\}\right)|(t,x)-(\tau,y)|<\frac{\epsilon}{2},$$

então

$$\max_{j=1,\dots,N}\{|w_{\lambda,n,k,j}(\tau,y)-w_{\lambda,n,k,j}(t,x)|\}<\epsilon$$

sempre que $|(t,x)-(\tau,y)|<\delta$, portanto, $\mathcal{F}_k$ é equicontínua.

Como $\mathcal{F}_k\doteq\{\partial_x^k u_{\lambda,n} : n\in\mathbb{N}\}$ é equicontínua e $S(u_{\lambda,n})\subset K_\lambda$, K_λ compacto, segue do Teorema de Arzelá que existe subsequência $(\partial_x^k u_{\lambda,n_l})_{n_l}$ tal que $\partial_x^k u_{\lambda,n_l}$ converge uniformemente para uma aplicação g (quando $n_l\to\infty$). Precisamos mostrar que $g=\partial_x^k u_\lambda$, isto será uma consequência do teorema da derivação termo a termo se mostrarmos que $u^{(k)}_{\lambda,n_l}$ é uniformemente convergente. Para isto, é suficiente demonstrar que $\partial^\alpha u_{\lambda,n_l}$ converge uniformemente (quando $n_l\to\infty$) para todo o α tal que $0\le\alpha\le k$.

Pela hipótese de indução, já temos que $\partial^\alpha u_{\lambda,n_l}$ converge uniformemente para todo α tal que $0\le\alpha\le k-1$ e acima acabamos de ver que $\partial^\alpha u_{\lambda,n_l}$ converge uniformemente, para $\alpha=(0,k)$, portanto, nosso trabalho é verificar que $\partial^\alpha u_{\lambda,n_l}$ converge uniformemente para todo α tal que $|\alpha|=k$ e $\alpha\neq(0,k)$.

Para $\alpha=(1,k-1)$, obtemos, derivando em relação a x $(k-1)$-vezes a primeira igualdade de (2.2.1), que

$$\partial_x^{k-1}\partial_t u_{\lambda,n_l} = -\partial_x^{k-1}\big(a(u_{\lambda,n_l})\partial_x u_{\lambda,n_l}\big).$$

O lado esquerdo desta igualdade é justamente $\partial^\alpha u_{\lambda,n_l}$ (para α tomado acima, $\alpha = (1, k-1)$), já, o lado direito pode ser escrito como uma soma de termos, sendo que, em um deles, figura uma derivada de ordem k, a saber, $\partial_x^k u_{\lambda,n_l}$, e nos outros termos aparecem apenas derivadas de ordem menor ou igual a $k-1$, deste modo, o lado direito converge uniformemente e assim $\partial^\alpha u_{\lambda,n_l}$ é uniformemente convergente.

Agora que temos a convergência uniforme para $\alpha = (0,k)$ e $\alpha = (1,k)$, podemos, utilizando a mesma ideia, concluir a convergência uniforme para $\alpha = (2, k-2)$. De fato, derivando a primeira igualdade de (2.2.1) $(k-2)$-vezes em relação x e uma vez em relação a t obtemos

$$\partial_x^{k-2}\partial_t^2 u_{\lambda,n_l} = -\partial_x^{k-2}\partial_t\big(a(u_{\lambda,n_l})\partial_x u_{\lambda,n_l}\big),$$

isto é,

$$\partial^\alpha u_{\lambda,n_l} = -\partial_x^{k-2}\partial_t\big(a(u_{\lambda,n_l})\partial_x u_{\lambda,n_l}\big),$$

com $\alpha = (2, k-2)$. Como o lado direito da igualdade acima é uniformemente convergente, segue a convergência uniforme para $\alpha = (2, k-2)$. Aplicando esta ideia tantas vezes quanto forem necessárias, concluiremos que $\partial^\alpha u_{\lambda,n_l}$ é uniformemente convergente para todo α tal que $0 \leq |\alpha| \leq k$.

■

2.3 O Caso C^ρ.

Aqui estenderemos o resultado da seção anterior para classes de Hölder. Algumas informações sobre os espaços de Hölder seguem juntando o Teorema 1.1.2 e a Proposição 1.1.3. Antes de enunciar o próximo resultado fazemos as seguintes observações:

Observação 2.3.1 *Se $f \in C^\rho$ e $(\psi_n)_n$ é uma sequência funções suaves e limitada em L^1, então cada termo da sequência $(f * \psi_n)_n$ pertence ao espaço C^ρ e*

$$\|f * \psi_n\|_{C^\rho} \leq C\,\|f\|_{C^\rho}$$

para qualquer $C \geq \sup_n\{\|\psi_n\|_{L^1}\}$.

Observação 2.3.2 *Seja $\rho > 0$ não-inteiro. Do Teorema 1.1.2 e do Corolário 1.2.1 segue que*

$$\|fg\|_{C^\rho} \leq C_\rho\,\|f\|_{C^\rho}\,\|g\|_{C^\rho}\ \forall f, g \in C^\rho.$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty$ satisfazendo $\varphi|_{[-1,1]} \equiv 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad e \quad S(\varphi) \subset B(0,2)$. Se $\varphi_\lambda(x) \doteq \varphi(\frac{x}{\lambda})$, então existe constante $C > 0$ tal que para todo $\lambda > 1$ vale

$$\|f\varphi_\lambda\|_{C^\rho} \leq C\,\|f\|_{C^\rho} \quad \forall\, f \in C^\rho.$$

O próximo teorema estende o Teorema 0.0.2 para o caso C^ρ, com ρ não-inteiro.

Teorema 2.3.1 *Seja $\rho > 1$ um número real não-inteiro. Se $\mathbf{u}_0 \in C^\rho$ e $\|\mathbf{u}_0\|_\infty$ é suficientemente pequeno, então o problema*

$$\begin{cases} \partial_t u + a(u)\partial_x u &= 0 \\ u(0,x) &= \mathbf{u}_0(x) \end{cases}$$

admite solução $u \in C^{[\rho]}([0,T] \times \mathbb{R})$ e mais, $u(t,\cdot) \in C^\rho(\mathbb{R})$ e existe constante C, independente de t, de modo que

$$\|u(t,\cdot)\|_{C^\rho} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Demonstração. Como $\boldsymbol{u}_0 \in C^\rho(\mathbb{R})$ implica que $\boldsymbol{u}_0 \in C^{[\rho]}(\mathbb{R})$, já sabemos, Teorema 0.0.2, que o problema tem uma solução $u \in C^{[\rho]}([0,T] \times \mathbb{R})$. Para finalizar a demonstração, lembremos que a solução u foi obtida tomando "limites sucessivos", isto é, para cada $\lambda \in \mathbb{N}$, criamos uma sequência $u_{\lambda,n}$ tal que

$$u_{\lambda,n} \to u_\lambda \text{ quando } n \to \infty$$

e $u = \lim\limits_{\lambda\to\infty} u_\lambda$. Se mostrarmos que existe C independente de t, λ e n de modo que

$$\|u_{\lambda,n}(t,\cdot)\|_{C^\rho} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho}\,, \tag{2.3.1}$$

então segue, do item **(v)** da Proposição 1.1.3 (nota: $C^\rho = B^\rho_{\infty,\infty}$), que $u_\lambda(t,\cdot) \in C^\rho$ e

$$\|u_\lambda(t,\cdot)\|_{C^\rho} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [0,T],$$

aplicando novamente a Proposição 1.1.3 concluímos que

$$\|u(t,\cdot)\|_{C^\rho} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho} \quad \forall t \in [0,T],$$

daí o teorema. Nosso objetivo é, portanto, demonstrar (2.3.1). Sabemos, pelo Teorema 0.0.2, que existe C de modo que

$$\|\partial_x^l u_\lambda(t,\cdot)\|_\infty \leq C \|\boldsymbol{u}_0^{(l)}\|_\infty \quad \forall\, t \in [0,T],\, \forall\, 0 \leq l \leq [\rho].$$

Com isto, para obter (2.3.1), basta verificar para $k = [\rho]$ que

$$\sup_{0<|x-y|<1} \left\{ \frac{|\partial_x^k(t,x) - \partial_x^k(t,y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}} \right\} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho}\,,$$

ou ainda, usando as notações utilizadas na demonstração do Teorema 0.0.2, mostrar que

$$\sup_{0<|x-y|<1} \max_{j=1,\ldots,N} \left\{ \frac{|w_{\lambda,n,k,j}(t,x) - w_{\lambda,n,k,j}(t,y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}} \right\} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^\rho} \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.3.2}$$

onde, no caso $k = 1$ para a desigualdade acima ter sentido, com a notação do Teorema 0.0.2, estamos considerando $w_{\lambda,n,1,j} \doteq w_{\lambda,n,j}$.

Para $k > 1$, segue de (2.2.29) (nota: se $k = 1$ basta usar (2.2.18) no lugar de (2.2.29) e proceder de modo análogo) que

$$\begin{aligned} \max_{j=1,\ldots,N} \left\{ \frac{|w_{\lambda,n,k,j}(t,x) - w_{\lambda,n,k,j}(t,y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}} \right\} &\leq B \frac{1}{|x-y|^{\rho-[\rho]}} M_{\lambda,n,k}\big((t,x),(t,y)\big) \\ + B \left(\max_{j=1,\ldots,N} \{\|w_{\lambda,n,k,j}\|_\infty\} + \max_{j=1,\ldots,N} \left\{ \|\big(R_j(u_{\lambda,n})\big)'\|_\infty \right\} \right) &\frac{|(t,x)-(t,y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Temos

$$\begin{aligned}\sup_{0<|x-y|<1}&\left\{B\left(\max_{j=1,\dots,N}\{\|w_{\lambda,n,k,j}\|_\infty\}+\max_{j=1,\dots,N}\left\{\|\big(R_j(u_{\lambda,n})\big)'\|_\infty\right\}\right)\frac{|(t,x)-(t,y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}\right\}\\ &\le B\left(\max_{j=1,\dots,N}\|w_{\lambda,n,k,j}\|_\infty+\max_{j=1,\dots,N}\left\{\|\big(R_j(u_{\lambda,n})\big)'\|_\infty\right\}\right)\\ &\le C\,\|\mathbf{u}_{0,\lambda,n}\|_{C^\rho}\,. \qquad (2.3.4)\end{aligned}$$

Como para quaisquer x e y tais que $0<|x-y|<1$, temos, para todo $I\in\Lambda_{(t,x),(t,y)}$,

$$\begin{aligned}\sup_{a,b\in I}&\left\{\frac{|w_{\lambda,n,k,j}(0,a)-w_{\lambda,n,k,j}(0,b)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}\right\}\\ &\le \sup_{a,b\in I}\left\{\frac{|w_{\lambda,n,k,j}(0,a)-w_{\lambda,n,k,j}(0,b)|}{|a-b|^{\rho-[\rho]}}\frac{|a-b|^{\rho-[\rho]}}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}\right\}\\ &\le \sup_{a,b\in I}\left\{\frac{|w_{\lambda,n,k,j}(0,a)-w_{\lambda,n,k,j}(0,b)|}{|a-b|^{\rho-[\rho]}}\big(2A_1\exp(AT)\big)^\rho\frac{|(t,x)-(t,y)|^{\rho-[\rho]}}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}\right\}\\ &\le C\big(2A_1\exp(AT)\big)^\rho\,\|\mathbf{u}_{0,\lambda,n}\|_{C^\rho}\,,\end{aligned}$$

segue que

$$\sup_{0<|x-y|<1}\left\{\frac{1}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}M_{\lambda,n,k}\big((t,x),(t,y)\big)\right\}\le C\big(2A_1\exp(AT)\big)^\rho\,\|\mathbf{u}_{0,\lambda,n}\|_{C^\rho}\,. \qquad (2.3.5)$$

De (2.3.3), (2.3.4) e (2.3.5) obtemos

$$\sup_{0<|x-y|<1}\left\{\max_{j=1,\dots,N}\left\{\frac{|w_{\lambda,n,k,j}(t,x)-w_{\lambda,n,k,j}(t,y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}\right\}\right\}\le C\,\|\mathbf{u}_{0,\lambda,n}\|_{C^\rho}\quad \forall t\in[0,T].$$

A desigualdade em (2.3.2) segue agora das observações 2.3.1 e 2.3.2.

■

A próxima proposição é uma versão um pouco mais geral do Teorema 2.3.1.

Proposição 2.3.1 *Seja $\rho>1$ um número real não-inteiro. Se $\mathbf{u}_0\in C^\rho$ e $\|\mathbf{u}_0\|_\infty$ é suficientemente pequeno, então o problema*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t u+a(u)\partial_x u &=& 0\\ u(0,x)&=&\mathbf{u}_0(x)\end{array}\right.$$

admite solução $u\in C^{[\rho]}([0,T]\times\mathbb{R})$ e mais $\partial_x^k u\in C^{\rho-[\rho]}([0,T]\times\mathbb{R})$, e

$$\left\|\partial_x^k u\right\|_{C^{\rho-[\rho]}}\le C\,\|\mathbf{u}_0\|_{C^\rho}\,.$$

Demonstração. É "basicamente" a mesma do Teorema 2.3.1. Do mesmo modo que obtemos (2.3.2) verifica-se que

$$\sup_{0<|(t,x)-(\tau,y)|<1}\max_{j=1,\dots,N}\frac{|w_{\lambda,n,k,j}(t,x)-w_{\lambda,n,k,j}(\tau,y)|}{|(t,x)-(\tau,y)|^{\rho-[\rho]}}\le C\,\|\mathbf{u}_0\|_{C^\rho}\,.$$

A demonstração segue agora do item **(v)** da Proposição 1.1.3 (utilizado do mesmo modo que no Teorema 2.3.1), pois

$$\partial_x^k u_{\lambda,n} \to \partial_x^k u_\lambda \text{ quando } n \to \infty$$

e $\partial_x^k u = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \partial_x^k u_\lambda$.

■

Agora segue a:

Demonstração do Teorema 0.0.3. A demonstração segue da Proposição 2.3.1 e do fato de u satistazer a equação

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = 0.$$

■

Este último teorema apresenta duas vantagens claras quando comparado ao Teorema 0.0.1: não exige que a norma da derivada do dado inicial seja suficientemente pequena e vale para os espaços C^ρ, $\rho > 1$ real não-inteiro. No entanto, ele tem a desvantagem de não relacionar a norma da derivada do dado inicial com T. Podemos obter isto, mesmo no caso C^ρ, se também exigirmos a pequenez na norma da derivada do dado inicial. Mais precisamente temos:

Demonstração do Teorema 0.0.4. Basta notar que a perda no controle do intervalo $[0, T]$, ocorre quando, na etapa **E1** da demonstração do Teorema 0.0.2, usamos a Proposição 2.1.3 para obter (2.2.2). No entanto, já que agora também exigimos a pequenez na norma da derivada do dado inicial, podemos usar o Teorema 0.0.1 para obter (2.2.2) e aí, a relação entre T e a norma da derivada do dado inicial é dada pelo próprio Teorema 0.0.1. Como isto não altera em nada todas as outras contas a partir de (2.2.2) até o Teorema 0.0.3 concluímos a demonstração.

■

Capítulo 3

O problema de Cauchy (0.0.1) é bem posto em $B^{\rho}_{\infty,r}$

Como observado antes, Teorema 1.1.2, o espaço C^{ρ} pode ser visto como um espaço de Besov, neste capítulo, de certo modo, estenderemos o Teorema 0.0.4 para outros espaços de Besov.

O lema abaixo é uma versão para os espaços de Besov de um resultado aproximação bem conhecido para funções C^k.

Lema 3.0.1 *Se uma sequência de aplicações suaves* $\psi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *é tal que* $\psi_n \geq 0$, $\|\psi_n\|_{L^1} = 1$ *e* $S(\psi_n) \subset B\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ $\forall\, n$, *então para toda* $u \in B^{\rho}_{p,r}$, $1 \leq \rho < \infty$ *e* $1 \leq p, r \leq \infty$, *a sequência* $(\psi_n * u)_n$ *está contida em* $B^{\rho}_{p,r}$ *e*

$$\|\psi_n * u\|_{B^{\rho}_{p,r}} \leq \|u\|_{B^{\rho}_{p,r}}.$$

Demonstração. Segue usando propriedades da convolução e a Desigualdade de Young (Teorema 1.3.6), que

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q(\psi_n * u)\|_p &= \|\psi_n * \Delta_q u\|_p \\
&\leq \|\psi_n\|_{L^1} \|\Delta_q u\|_p \\
&= \|\Delta_q u\|_p,
\end{aligned}$$

assim para $1 \leq r < \infty$ temos

$$\begin{aligned}
\|\psi_n * u\|^r_{B^{\rho}_{p,r}} &= \sum_{q \geq -1} \left(2^{q\rho} \|\Delta_q(\psi_n * u)\|_p\right)^r \\
&\leq \sum_{q \geq -1} \left(2^{q\rho} \|\Delta_q u\|_p\right)^r \\
&= \|u\|^r_{B^{\rho}_{p,r}}
\end{aligned}$$

e para $r = \infty$,

$$\begin{aligned}
\|\psi_n * u\|_{B^{\rho}_{p,\infty}} &= \sup_{q \geq -1} \left\{2^{q\rho} \|\Delta_q(\psi_n * u)\|_p\right\} \\
&\leq \sup_{q \geq -1} \left\{2^{q\rho} \|\Delta_q u\|_p\right\} \\
&= \|u\|_{B^{\rho}_{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3.1 Uma Versão Paradiferencial do Teorema 0.0.4

A proposição que segue é de fato um pouco mais fraca que o Teorema 0.0.4, mas, sua demonstração é feita usando o Cálculo Paradiferencial. Isto traz consigo vantagens pois possibilita mais adiante (nos dá a ideia) generalizar o resultado para outros espaços de Besov.

Proposição 3.1.1 *Seja $\boldsymbol{u}_0 \in C^{\rho} = B^{\rho}_{\infty,\infty}$, $\rho > 2$ não-inteiro. Se $\boldsymbol{u}_0$ tem as derivadas de ordem $\leq [\rho]$ limitadas e de ordem ≤ 1 suficientemente pequenas, então o problema de Cauchy (0.0.1) tem uma única solução $u \in C^{[\rho]}([0,T] \times \mathbb{R})$ desde que*

$$T \sup |\boldsymbol{u}_0'| \leq c,$$

onde c é uma constante dependendo apenas de a. Mais ainda, para cada $t \in [0,T], u(t,\cdot) \in B^{\rho}_{\infty,\infty}$ e satisfaz

$$\|u(t,\cdot)\|_{B^{\rho}_{\infty,\infty}} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{B^{\rho}_{\infty,\infty}} \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{3.1.1}$$

com C constante independente de t.

Demonstração. Pelo Lema 3.0.1 e o item **(v)** da Proposição 1.1.3, podemos tomar $(\boldsymbol{u}_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções suaves convergindo em C^{ρ} para $\boldsymbol{u}_0$ e satisfazendo ainda:

$$\|\boldsymbol{u}_{0n}\|_{C^{\rho}} \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^{\rho}}$$

e

$$\|\boldsymbol{u}_{0n}\|_{C^k} \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^k} \quad \forall\, k = 1, \ldots, [\rho]. \tag{3.1.2}$$

Do Teorema 0.0.1 segue que existe sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada u_n é solução do problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u_n + a(u_n)\partial_x u_n & = & 0 \\ u_n(0,x) & = & \boldsymbol{u}_{0n}(x), \end{array} \right. \tag{3.1.3}$$

está definida em $[0,T] \times \mathbb{R}$ (T independente de n) e satisfaz, para certas constantes $C_0, C_1, \ldots, C_{[\rho]}$ independentes de n,

$$\|u_n\|_{C^k([0,T]\times\mathbb{R})} \leq C_k \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^k} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \quad . \tag{3.1.4}$$

Para demonstrar (3.1.1), vamos fixar um n e trabalhar com a solução u_n de (3.1.3). Como n estará fixado, nos próximos cálculos, vamos remover o índice n. Derivando a equação de (3.1.3) em relação a x segue que

$$\partial_t \partial_x u + a(u)\partial_x^2 u = -\left(a'(u)\partial_x u\right)\partial_x u,$$

denotando $w = \partial_x u$ a igualdade acima nos dá

$$\partial_t w + a(u)\partial_x w = \left(a'(u) w\right) w. \tag{3.1.5}$$

Escrevendo agora w em termos da base de autovetores $\{r_1(u), \ldots, r_N(u)\}$ associada aos autovalores $\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u)$, isto é,

$$w = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i(u),$$

segue de (3.1.5) que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\left[(\partial_t+\lambda_i(u)\partial_x)w_i\right]r_i(u) &= -\sum_{i,l=1}^{N} w_iw_l\left[a'(u)r_i(u)\right]r_l(u)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{N} w_i\left\{r_i'(u)\partial_t u + a(u)[r_i'(u)\partial_x u]\right\}\\ &= -\sum_{i,l=1}^{N} w_iw_l\left[a'(u)r_i(u)\right]r_l(u)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{N} w_i\left\{-r_i'(u)[a(u)w] + a(u)[r_i'(u)w]\right\},\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\left[(\partial_t+\lambda_i(u)\partial_x)w_i\right]r_i(u) = -\sum_{i,l=1}^{N} w_iw_l\Big\{&\left[a'(u)r_i(u)\right]r_l(u)\\ &- r_i'(u)[a(u)r_l(u)] + a(u)[r_i'(u)r_l(u)]\Big\}.\end{aligned}$$

Escrevendo agora

$$-\Big\{\left[a'(u)r_i(u)\right]r_l(u) - r_i'(u)[a(u)r_l(u)] + a(u)[r_i'(u)r_l(u)]\Big\} = \sum_{j=1}^{N}\phi_{ilj}(u)r_j(u),$$

segue que

$$(\partial_t+\lambda_j(u)\partial_x)w_j = \sum_{i,l=1}^{N}\phi_{ilj}(u)w_iw_l. \tag{3.1.6}$$

Vamos agora aplicar o operador Δ_q em ambos os lados da igualdade (3.1.6). Para isto, iniciamos escrevendo

$$\lambda_j(u)\partial_x w_j = T_{\lambda_j(u)}\partial_x w_j + T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u) + R(\lambda_j(u),\partial_x w_j), \tag{3.1.7}$$

isto é, escrevendo a Decomposição de Bony, (1.2.1), para o produto $\lambda_j(u)\partial_x w_j$. Temos, utilizando a definição dos operadores e as propriedades dadas na Proposição 1.1.2,

$$\begin{aligned}\Delta_q(T_{\lambda_j(u)}\partial_x w_j) &= \Delta_q\left(\sum_{q'} S_{q'-1}\lambda_j(u)\Delta_{q'}\partial_x w_j\right)\\ &= \Delta_q\left(\sum_{|q-q'|\le 4} S_{q'-1}\lambda_j(u)\Delta_{q'}\partial_x w_j\right)\\ &= R_q^1(\lambda_j(u),\partial_x w_j) + \sum_{|q-q'|\le 2} S_{q'-1}\lambda_j(u)\Delta_q\Delta_{q'}\partial_x w_j\\ &= R_q^1(\lambda_j(u),\partial_x w_j) + R_q^2(\lambda_j(u),\partial_x w_j) + S_{q-1}\lambda_j(u)\Delta_q\partial_x w_j,\end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta_q(T_{\lambda_j(u)}\partial_x w_j) = R_q^1(\lambda_j(u),\partial_x w_j) + R_q^2(\lambda_j(u),\partial_x w_j) + S_{q-1}\lambda_j(u)\Delta_q\partial_x w_j, \tag{3.1.8}$$

onde

$$R^1_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j) = \sum_{|q-q'|\leq 4} [\Delta_q, S_{q'-1}\lambda_j(u)]\Delta_{q'}\partial_x w_j$$

e

$$R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j) = \sum_{|q-q'|\leq 2} \left(S_{q'-1}\lambda_j(u) - S_{q-1}\lambda_j(u)\right)\Delta_{q'}\Delta_q\partial_x w_j.$$

De (3.1.6), (3.1.7) e (3.1.8) segue que

$$\begin{aligned}(\partial_t + S_{q-1}\lambda(u)\partial_x)\Delta_q w_j &= -\Delta_q\left(T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u)\right) - \Delta_q\left(R(\lambda_j(u), \partial_x w_j)\right)\\ &- R^1_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j) - R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j) + \sum_{i,l=1}^{N}\Delta_q\left(\phi_{ilj}(u)w_i w_l\right). \qquad (3.1.9)\end{aligned}$$

Agora vamos estimar de modo apropriado os termos do lado direito de (3.1.9). Olhemos primeiramente para $\Delta_q\left(\phi_{ilj}(u)w_i w_l\right)$. Usando a Decomposição de Bony segue que

$$\Delta_q\left(\phi_{ilj}(u)w_i w_l\right) = \Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right) + \Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right) + \Delta_q R\left(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l\right). \quad (3.1.10)$$

Temos $(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l) \in L^\infty \times C^{\rho-1}$, assim o Teorema 1.2.1 garante que $T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l \in C^{\rho-1}$ temos ainda pelo referido teorema que

$$\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}C\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_\infty\|w_l\|_{C^{\rho-1}}.$$

Sabemos por (3.1.4) que $\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_\infty$ é uniformemente limitado, isto é, existe constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_\infty \leq C \quad \forall\, i, j, l \text{ e } \forall n = 1, 2, \ldots,$$

logo vale

$$\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}C \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\} \quad (3.1.11)$$

para quaisquer índices n, i, l e j (lembrando $u = u_n$).
Para o termo $\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)$ podemos proceder de modo análogo. Primeiramente, notemos que o Teorema 1.2.1 garante que

$$\begin{aligned}\|\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)\|_\infty &\leq 2^{-q(\rho-1)}C\|w_l\|_\infty\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_{C^{\rho-1}}\\ &\leq 2^{-q(\rho-1)}C\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_{C^{\rho-1}}, \qquad (3.1.12)\end{aligned}$$

em seguida, usando o Corolário 1.2.1, escrevemos

$$\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_{C^{\rho-1}} \leq C\left(\|\phi_{ilj}(u)\|_\infty\|w_i\|_{C^{\rho-1}} + \|w_i\|_\infty\|\phi_{ilj}(u)\|_{C^{\rho-1}}\right),$$

notando que os termos $\|\phi_{ilj}(u)\|_\infty$ e $\|\phi_{ilj}(u)\|_{C^{\rho-1}}$ são uniformemente limitados (pois vale (3.1.4)) e que $\|w_i\|_\infty \leq \|w_i\|_{C^{\rho-1}}$ obtemos que

$$\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_{C^{\rho-1}} \leq C \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \quad (3.1.13)$$

De (3.1.12) e (3.1.13) segue que

$$\|\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}C \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \quad (3.1.14)$$

Temos uma desigualdade deste mesmo tipo para o termo $\Delta_q R\left(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l\right)$, pois $(w_l, \phi_{ilj}(u)w_i) \in B^0_{\infty,\infty} \times C^{(\rho-1)}$ (L^∞ mergulha em $B^0_{\infty,\infty}$), daí, segue, do Teorema 1.2.2, que

$$\|\Delta_q R\left(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C \|\phi_{ilj}(u)w_i\|_\infty \|w_l\|_{C^{\rho-1}},$$

logo, para alguma constante $C > 0$ independente de i, l, j e n, vale

$$\|\Delta_q R\left(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \tag{3.1.15}$$

De (3.1.10), (3.1.11), (3.1.14) e (3.1.15) segue que

$$\|\Delta_q\left(\phi_{ilj}(u)w_i w_l\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \tag{3.1.16}$$

Como $(\partial_x w_j, \lambda_j(u)) \in L^\infty \times C^{\rho-1}$ e $\|\lambda_j(u)\|_{C^{\rho-1}}$ é limitado, independentemente de n, segue do Teorema 1.2.1, que

$$\begin{aligned} \|\Delta_q\left(T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u)\right)\|_\infty &\leq 2^{-q(\rho-1)} C \|\partial_x w_j\|_\infty \|\lambda_j(u)\|_{C^{\rho-1}} \\ &\leq 2^{-q(\rho-1)} C \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Analogamente, usando o Teorema 1.2.2, segue que

$$\|\Delta_q R\left(\lambda_j(u), \partial_x w_j\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \tag{3.1.18}$$

Vamos trabalhar agora com o termo $R^1_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)$. Pelo Lema 1.1.1, existe constante $C > 0$ de modo que

$$\|\left[\Delta_q, S_{q'-1}\lambda_j(u)\right]\partial_x \Delta_{q'} w_j\|_\infty \leq 2^{-q} C \|\nabla\left(S_{q'-1}\lambda_j(u)\right)\|_\infty \|\Delta_{q'}\partial_x w_j\|_\infty,$$

como $\|\Delta_{q'}\partial_x w_j\|_\infty \leq 2^{q'} C \|\Delta_{q'} w_j\|_\infty$ (Teorema 1.1.1) e $\|\Delta_{q'} w_j\|_\infty \leq 2^{-q'(\rho-1)}\|w_j\|_{C^{\rho-1}}$, segue que

$$\begin{aligned} \|\left[\Delta_q, S_{q'-1}\lambda_j(u)\right]\partial_x \Delta_{q'} w_j\|_\infty &\leq 2^{-q} 2^{q'} C \|\nabla\left(S_{q'-1}\lambda_j(u)\right)\|_\infty \|\Delta_{q'} w_j\|_\infty \\ &\leq 2^{-q} 2^{q'} 2^{-q'(\rho-1)} C \|\nabla\left(S_{q'-1}\lambda_j(u)\right)\|_\infty \|w_j\|_{C^{\rho-1}}. \end{aligned}$$

Utilizando (3.1.4) para limitar $\|\nabla\left(S_{q'-1}\lambda_j(u)\right)\|_\infty$ e o fato de que $|q - q'| \leq 4$ segue que

$$\|R^1_q\left(\lambda_j(u), \partial_x w_j\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \tag{3.1.19}$$

Para $R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)$ primeiramente escrevemos

$$\begin{aligned} R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j) &= \left[S_{q-2}\lambda_j(u) - S_{q-1}\lambda_j(u)\right]\Delta_q \Delta_{q-1}\partial_x w_j \\ &\quad + \left[S_q\lambda_j(u) - S_{q-1}\lambda_j(u)\right]\Delta_q \Delta_{q+1}\partial_x w_j \\ &= -\Delta_{q-2}\lambda_j(u)\Delta_q\Delta_{q-1}\partial_x w_j + \Delta_{q-1}\lambda_j(u)\Delta_q\Delta_{q+1}\partial_x w_j, \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \|\Delta_{q-2}\lambda_j(u)\Delta_q\Delta_{q-1}\partial_x w_j\|_\infty &\leq \|\Delta_{q-2}\lambda_j(u)\|_\infty \|\Delta_q\Delta_{q-1}\partial_x w_j\|_\infty \\ &\leq 2^{-q(\rho-1)} C \|\lambda_j(u)\|_{C^{\rho-1}} \|\partial_x w_j\|_\infty \\ &\leq 2^{-q(\rho-1)} C \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\|\Delta_{q-1}\lambda_j(u)\Delta_q\Delta_{q+1}\partial_x w_j\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}C \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\},$$

segue que

$$\|R_q^2(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}C \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \tag{3.1.20}$$

Agora que temos as referidas estimativas apropriadas para os termos do lado direito de (3.1.9), consideremos $\gamma(t) = (t,\gamma_2(t))$, curva integral do campo $\partial_t + S_{q-1}\lambda_j(u)\partial_x$. De (3.1.9) obtemos, integrando ao longo de γ, que

$$\begin{aligned}\Delta_q w_j(t,\gamma_2(t)) - \Delta_q w_j(0,\gamma_2(0)) = &\int_0^t -\Delta_q\left(T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u)\right)(\gamma(s))\,ds\\ &- \int_0^t \Delta_q\left(R(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\right)(\gamma(s)) + R_q^1(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\,(\gamma(s))\,ds\\ &- \int_0^t R_q^2(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\,(\gamma(s)) - \sum_{i,l=1}^{N}\Delta_q\left(\phi_{ilj}(u)w_iw_l\right)(\gamma(s))\,ds,\end{aligned}$$

agora (olhando para -(3.1.9)), segue que

$$\begin{aligned}|\Delta_q w_j(t,\gamma_2(t))| \leq |\Delta_q w_j(0,\gamma_2(0))| + &\int_0^t |\Delta_q\left(T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u)\right)(\gamma(s))\,|ds\\ + &\int_0^t |\Delta_q\left(R(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\right)(\gamma(s))\,| + |R_q^1(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\,(\gamma(s))\,|ds\\ + &\int_0^t |R_q^2(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\,(\gamma(s))\,| + \sum_{i,l=1}^{N}|\Delta_q\left(\phi_{ilj}(u)w_iw_l\right)(\gamma(s))\,|ds.\end{aligned}$$

De (3.1.16), (3.1.17), (3.1.18), (3.1.19) e (3.1.20) segue agora que

$$|\Delta_q w_j(t,\gamma_2(t))| \leq |\Delta_q w_j(0,\gamma_2(0))| + 2^{-q(\rho-1)}C\int_0^t \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\}ds. \tag{3.1.21}$$

Escrevendo $\boldsymbol{u}_0' = \boldsymbol{w}_0 = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{w}_{0j}r_j(u(0,\cdot))$ segue que $w_j(0,x) = \boldsymbol{w}_{0j}(x)$, logo $\Delta_q w_j(0,x) = \Delta_q\boldsymbol{w}_{0j}(x)$ deste modo

$$|\Delta_q w_j(0,\gamma_2(0))| = |\Delta_q\boldsymbol{w}_{0j}(\gamma_2(0))| \leq \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|\Delta_q\boldsymbol{w}_{0i}\|_\infty\},$$

daí, segue de (3.1.21) que

$$|\Delta_q w_j(t,\gamma_2(t))| \leq \sup_{i=1,\ldots,N}\|\Delta_q\boldsymbol{w}_{0i}\|_\infty + 2^{-q(\rho-1)}C\int_0^t \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\}ds.$$

Como nos cálculos feitos para obtermos a desigualdade acima j e γ são quaisquer, segue que

$$\sup_{i=1,\ldots,N}\{\|\Delta_q w_i(t,\cdot)\|_\infty\} \leq \sup_{i=1,\ldots,N}\|\Delta_q\boldsymbol{w}_{0i}\|_\infty + 2^{-q(\rho-1)}C\int_0^t \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\}ds,$$

multiplicando ambos os lados da desigualdade por $2^{q(\rho-1)}$ obtemos

$$2^{q(\rho-1)} \sup_{i=1,\dots,N} \{\|\Delta_q w_i(t,\cdot)\|_\infty\} \leq 2^{q(\rho-1)} \sup_{i=1,\dots,N} \|\Delta_q \boldsymbol{w}_{0i}\|_\infty + C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\} ds,$$

de onde segue, tomando o supremo em $q \geq -1$, que

$$\begin{aligned}\sup_{i=1,\dots,N} \left\{ \sup_{q\geq -1} \{2^{q(\rho-1)} \|\Delta_q w_i(t,\cdot)\|_\infty\} \right\} &\leq 2^{q(\rho-1)} \sup_{i=1,\dots,N} \left\{ \sup_{q\geq -1} \{2^{q(\rho-1)} \|\Delta_q \boldsymbol{w}_{0i}\|_\infty\} \right\} \\ &\quad + C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\} ds,\end{aligned}$$

agora, do Teorema 1.1.2, segue

$$\sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(t,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\} \leq C \sup_{i=1,\dots,N} \{\|\boldsymbol{w}_{0i}\|_{C^{\rho-1}}\} + C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\} ds. \quad (3.1.22)$$

Observemos agora a relação que existe entre as coordenadas de $w = \partial_x u$ na base $\beta_r = \{r_1(u), \dots, r_N(u)\}$ e na base canônica β. Se $[w]_{\beta_r}$ e $[w]_\beta$ indicam respectivamente os vetores coordenadas de w nas bases β_r e β, então temos a seguinte relação

$$[w]_\beta = P(u)[w]_{\beta_r}, \quad (3.1.23)$$

onde $P(u)$ tem em suas colunas os vetores $r_1(u), \dots, r_N(u)$, isto é,

$$P(u) = \begin{pmatrix} r_1(u) & \dots & r_N(u) \end{pmatrix}_{N\times N} = \big(p_{ij}(u)\big)_{i,j=1}^N.$$

Temos também

$$[w]_{\beta_r} = \big[P(u)\big]^{-1}[w]_\beta. \quad (3.1.24)$$

Escrevendo

$$[w]_\beta = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_N \end{bmatrix}$$

segue de (3.1.23) que

$$\tilde{w}_i = \sum_{j=1}^N w_j p_{ij}(u).$$

Como u é uniformemente limitado em $C^{[\rho]}$, segue, em especial, que as aplicações $p_{ij}(u)$ são uniformemente limitadas em $C^{\rho-1}$, assim, do Corolário 1.2.1, segue que

$$\|\tilde{w}_j\|_{C^{\rho-1}} \leq C \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\},$$

ou ainda que

$$\sup_{i=1,\dots,N} \{\|\tilde{w}_i\|_{C^{\rho-1}}\} \leq C \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\} \quad (3.1.25)$$

e de (3.1.24) segue

$$\sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i\|_{C^{\rho-1}}\} \leq C \sup_{i=1,\dots,N} \{\|\tilde{w}_i\|_{C^{\rho-1}}\}. \quad (3.1.26)$$

Como
$$\|w\|_{C^{\rho-1}} \doteq \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|\tilde{w}_i\|_{C^{\rho-1}}\},$$
segue, de (3.1.25) e (3.1.26), que $\|w(t,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}$ é comparável à $\sup\limits_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i(t,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}\}$, assim obtemos de (3.1.22) que

$$\|w(t,\cdot)\|_{C^{\rho-1}} \leq C\|\boldsymbol{w}_0\|_{C^{\rho-1}} + C\int_0^t \|w(s,\cdot)\|_{C^{\rho-1}}ds.$$

Do Lema de Gronwall segue que

$$\|w(t,\cdot)\|_{C^{\rho-1}} \leq C\|\boldsymbol{w}_0\|_{C^{\rho-1}}\exp(tC),$$

logo
$$\|w(t,\cdot)\|_{C^{\rho-1}} \leq C\|\boldsymbol{w}_0\|_{C^{\rho-1}} \quad \forall t \in [0,T],$$
mais precisamente, lembrando da dependência em n de u, isto é, que $u = u_n$ e escrevendo w_n no lugar de w temos

$$\|w_n(t,\cdot)\|_{C^{\rho-1}} \leq C\|\boldsymbol{w}_0\|_{C^{\rho-1}} \quad \forall\, t \in [0,T] \text{ e } \forall\, n = 1, 2, \ldots. \tag{3.1.27}$$

A desigualdade acima garante que $(\partial_x u_n(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C^{\rho-1}(\mathbb{R})$. Como $\|u_n\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty$ segue que a sequência $(u_n(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em C^ρ. A proposição, segue agora, da Proposição 1.1.3.

■

3.2 O Caso $B^{\rho}_{\infty,r}$

Adaptando as ideias utilizadas na demonstração da Proposição 3.1.1 apresentaremos uma nova versão da referida proposição na qual o dado inicial $\boldsymbol{u}_0$ pertence a $B^{\rho}_{\infty,r}$.

Proposição 3.2.1 *Seja $\boldsymbol{u}_0 \in B^{\rho}_{\infty,r}$, com $\rho > 2$ não-inteiro e $1 \leq r < \infty$. Se $\boldsymbol{u}_0$ tem as derivadas de ordem ≤ 1 suficientemente pequenas, então o problema de Cauchy (0.0.1) tem uma única solução $u \in C^{[\rho]}([0,T]\times\mathbb{R})$ desde que*

$$T\sup|\boldsymbol{u}_0'| \leq c,$$

onde c é uma constante dependendo apenas de a. Mais ainda, para cada $t \in [0,T], u(t,\cdot) \in B^{\rho}_{\infty,r}$ e satisfaz
$$\|u(t,\cdot)\|_{B^{\rho}_{\infty,r}} \leq C\|\boldsymbol{u}_0\|_{B^{\rho}_{\infty,r}} \quad \forall\, t \in [0,T],$$
com C constante independente de t.

Demonstração. Pelo Lema 3.0.1 e o item **(v)** da Proposição 1.1.3, podemos considerar $(\boldsymbol{u}_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções suaves convergindo em $B^{\rho}_{\infty,r}$ para $\boldsymbol{u}_0$ e satisfazendo ainda:

$$\|\boldsymbol{u}_{0n}\|_{C^k} \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_{C^k} \quad \forall\, k = 1, \ldots, [\rho] \tag{3.2.1}$$

e

$$\|\boldsymbol{u}_{0n}\|_{B^{\rho}_{\infty,r}} \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_{B^{\rho}_{\infty,r}}.$$

Do Teorema 0.0.1 segue que existe sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada u_n é solução do problema de Cauchy (3.1.3), está definida em $[0,T]\times\mathbb{R}$ (T independente de n) e satisfaz (3.1.4). Com a mesma notação da Proposição 3.1.1, escrevendo $u_n = u$ obtemos (3.1.9). Analogamente, ao que foi feito na demonstração da Proposição 3.1.1, vamos agora estimar, de modo apropriado, os termos do lado direito de (3.1.9). Da Decomposição de Bony temos

$$\Delta_q\left(\phi_{ilj}(u)w_iw_l\right) = \Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right) + \Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right) + \Delta_q R\left(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l\right). \quad (3.2.2)$$

Como $(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l) \in L^\infty \times B^{\rho-1}_{\infty,r}$ segue, do Teorema 1.2.1, que $T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l \in B^{\rho-1}_{\infty,r}$ e

$$\|T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq C\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_\infty \|w_l\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}},$$

logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty &= 2^{-q(\rho-1)}2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty \\
&= 2^{-q(\rho-1)}\frac{2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty}{\|T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}}\|T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \\
&\leq 2^{-q(\rho-1)}C\frac{2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty}{\|T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}}\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_\infty\|w_l\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}.
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_\infty \leq C$ (C independente de n, i, l e j) e definindo

$$c_q \doteq \frac{2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty}{\|T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}},$$

segue que

$$\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}Cc_q \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}.$$

Aqui ressaltamos que a desigualdade acima tem uma dependência em t, isto é, em uma notação mais precisa temos

$$\|\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}Cc_q(t) \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}. \quad (3.2.3)$$

É importante destacar que $(c_q(t))_q \in l^r$ e

$$\|c_q(t)\|_{l^r} = 1 \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Para o termo $\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)$, do Corolário 1.2.1, segue que

$$\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq C\left(\|\phi_{ilj}(u)\|_\infty\|w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} + \|w_i\|_\infty\|\phi_{ilj}(u)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\right)$$

como os termos $\|\phi_{ilj}(u)\|_\infty$ e $\|\phi_{ilj}(u)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}$ são uniformemente limitados e $\|w_i\|_\infty \leq \|w_i\|_{C^{\rho-1}}$, temos

$$\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq C \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}.$$

Agora podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)\|_\infty &= 2^{-q(\rho-1)}\frac{2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}}{\|T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}}\|\phi_{ilj}(u)w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \\
&\leq 2^{-q(\rho-1)}C\frac{2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)\|_\infty}{\|T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}} \sup_{i=1,\ldots,N}\{\|w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\Delta_q \left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}Cc_q(t) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}, \tag{3.2.4}$$

onde

$$c_q \doteq \frac{2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q \left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)\|_\infty}{\|T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}},$$

logo $(c_q(t))_q \in l^r$ e $\|(c_q(t))_q\|_{l^r} = 1$.
Para o termo $\Delta_q R(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l)$, usando o Teorema 1.2.2, concluímos de modo análogo ao feito acima que

$$\|\Delta_q R(\phi_{ilj}(u)w_i, w_l)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}Cc_q(t) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}, \tag{3.2.5}$$

com $(c_q(t))_q \in l^r$ e satisfazendo $\|(c_q(t))_q\|_{l^r} = 1$.
De (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) e (3.2.5) segue que

$$\|\Delta_q(\phi_{ilj}(u)w_iw_l)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}Cc_q(t) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}, \tag{3.2.6}$$

com $(c_q(t))_q \in l^r$ e satisfazendo $\|(c_q(t))_q\|_{l^r} = 1$ $\forall t \in [0,T]$.

De modo análogo, ao feito para estimar $\Delta_q\left(T_{\phi_{ilj}(u)w_i}w_l\right)$ e $\Delta_q\left(T_{w_l}\phi_{ilj}(u)w_i\right)$, obtemos boas estimativas para os termos $\Delta_q\left(T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u)\right)$ e $\Delta_q\left(R(\lambda_j(u), \partial_x w_j)\right)$, isto é, utilizando o Teorema 1.2.1 obtemos

$$\|\Delta_q\left(T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u)\right)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}Cc_q(t) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} \tag{3.2.7}$$

para alguma $(c_q(t))_q \in l^r$ e satisfazendo $\|(c_q(t))_q\|_{l^r} = 1$ $\forall t \in [0,T]$ e utilizando o Teorema 1.2.2 obtemos

$$\|\Delta_q R(\lambda_j(u), \partial_x w_j)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)}Cc_q(t) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}, \tag{3.2.8}$$

onde, novamente, $(c_q(t))_q \in l^r$ e satisfaz $\|(c_q(t))_q\|_{l^r} = 1$ $\forall t \in [0,T]$.

Vamos trabalhar agora com o termo $R^1_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)$. Pelo Lema 1.1.1 existe constante C de modo que

$$\|\left[\Delta_q, S_{q'-1}\lambda_j(u)\right]\partial_x\Delta_{q'}w_j\|_\infty \leq 2^{-q}C\|\nabla\left(S_{q'-1}\lambda_j(u)\right)\|_\infty\|\partial_x\Delta_{q'}w_j\|_\infty,$$

usando que $\|\Delta_{q'}\partial_x w_j\|_\infty \leq 2^{q'}C\|\Delta_{q'}w_j\|_\infty$ (Teorema 1.1.1), obtemos

$$\|\left[\Delta_q, S_{q'-1}\lambda_j(u)\right]\partial_x\Delta_{q'}w_j\|_\infty \leq 2^{-q}2^{q'}C\|\nabla\left(S_{q'-1}\lambda_j(u)\right)\|_\infty\|\Delta_{q'}w_j\|_\infty.$$

Como $|q-q'| \leq 4$ e $\|\nabla\left(S_{q'-1}\lambda_j(u)\right)\|_\infty$ é uniformemente limitado em n, segue que

$$\begin{aligned}\|\left[\Delta_q, S_{q'-1}\lambda_j(u)\right]\partial_x\Delta_{q'}w_j\|_\infty &\leq C\|\Delta_{q'}w_j\|_\infty \\ &= C2^{-q'(\rho-1)}2^{q'(\rho-1)}\|\Delta_{q'}w_j\|_\infty \\ &= C2^{-q'(\rho-1)}\frac{2^{q'(\rho-1)}\|\Delta_{q'}w_j\|_\infty}{\|w_j\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}}\|w_j\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}},\end{aligned}$$

logo, existe $(c_q(t))_q \in l^r$ satisfazendo $\|(c_q(t))_q\|_{l^r} = 1\ \forall t \in [0,T]$ e

$$\|R^1_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C c_q(t) \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}. \tag{3.2.9}$$

Para $R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)$ primeiramente escrevemos

$$\begin{aligned} R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j) &= [S_{q-2}\lambda_j(u) - S_{q-1}\lambda_j(u)]\, \Delta_q \Delta_{q-1} \partial_x w_j \\ &\quad + [S_q\lambda_j(u) - S_{q-1}\lambda_j(u)]\, \Delta_q \Delta_{q+1} \partial_x w_j \\ &= -\Delta_{q-2}\lambda_j(u) \Delta_q \Delta_{q-1} \partial_x w_j + \Delta_{q-1}\lambda_j(u) \Delta_q \Delta_{q+1} \partial_x w_j, \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \|\Delta_{q-2}\lambda_j(u)\|_\infty &\leq 2^{-(q-2)(\rho-1)} \|\lambda_j(u)\|_{C^{\rho-1}} \\ &\leq 2^{-(q-2)(\rho-1)} \|\lambda_j(u)\|_{C^{[\rho]}} \\ &\leq 2^{-(q-2)(\rho-1)} C \end{aligned}$$

e, pelo Teorema 1.1.1 e a continuidade dos operadores Δ_q,

$$\begin{aligned} \|\Delta_q \Delta_{q+1} \partial_x w_j\|_\infty &\leq 2^{(q-1)} C \|\Delta_q \Delta_{q-1} w_j\|_\infty \\ &\leq 2^{(q-1)} C \|\Delta_q w_j\|_\infty, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\Delta_{q-2}\lambda_j(u) \Delta_q \Delta_{q-1} \partial_x w_j\|_\infty &\leq \|\Delta_{q-2}\lambda_j(u)\|_\infty \|\Delta_q \Delta_{q-1} \partial_x w_j\|_\infty \\ &\leq C \|\Delta_q w_j\|_\infty \\ &= 2^{-q(\rho-1)} C \frac{2^{q(\rho-1)} \|\Delta_q w_j\|_\infty}{\|w_j\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}} \|w_j\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}. \end{aligned}$$

Analogamente temos

$$\|\Delta_{q-1}\lambda_j(u) \Delta_q \Delta_{q+1} \partial_x w_j\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C \frac{2^{q(\rho-1)} \|\Delta_q w_j\|_\infty}{\|w_j\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}} \|w_j\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}},$$

deste modo,

$$\|R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{-q(\rho-1)} C c_q(t) \sup_{i=1,\ldots,N} \{\|w_i(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}, \tag{3.2.10}$$

com $(c_q(t))_q \in l^r$ e satisfazendo $\|(c_q(t))_q\|_{l^r} = 1\ \forall t \in [0,T]$. Isso conclui as estimativas, desejadas, para os termos do lado direito de (3.1.9).

Consideremos $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t))$ curva integral do campo $\partial_t + S_{q-1}\lambda_j(u)\partial_x$. De (3.1.9) obtemos, integrando ao longo de γ, que

$$\begin{aligned} \Delta_q w_j(t, \gamma_2(t)) - \Delta_q w_j(0, \gamma_2(0)) &= \int_0^t -\Delta_q \left(T_{\partial_x w_j} \lambda_j(u)\right) (\gamma(s))\, ds \\ &\quad - \int_0^t \Delta_q \left(R(\lambda_j(u), \partial_x w_j)\right) (\gamma(s)) + R^1_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)\, (\gamma(s))\, ds \\ &\quad - \int_0^t R^2_q(\lambda_j(u), \partial_x w_j)\, (\gamma(s)) - \sum_{i,l=1}^N \Delta_q \left(\phi_{ilj}(u) w_i w_l\right) (\gamma(s))\, ds, \end{aligned}$$

agora (olhando para -(3.1.9)) segue que

$$\begin{aligned}|\Delta_q w_j(t,\gamma_2(t))| &\leq |\Delta_q w_j(0,\gamma_2(0))| + \int_0^t |\Delta_q \left(T_{\partial_x w_j}\lambda_j(u)\right)(\gamma(s))\,|ds \\ &+ \int_0^t |\Delta_q \left(R(\lambda_j(u),\partial_x w_j)\right)(\gamma(s))\,| + |R_q^1(\lambda_j(u),\partial_x w_j)(\gamma(s))\,|ds \\ &+ \int_0^t |R_q^2(\lambda_j(u),\partial_x w_j)(\gamma(s))\,| + \sum_{i,l=1}^{N} |\Delta_q \left(\phi_{ilj}(u) w_i w_l\right)(\gamma(s))\,|ds.\end{aligned}$$

De (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9) e (3.2.10) obtemos

$$|\Delta_q w_j(t,\gamma_2(t))| \leq |\Delta_q w_j(0,\gamma_2(0))| + 2^{-q(\rho-1)} C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}ds \quad (3.2.11)$$

com $(c_q(s))_q \in l^r$ e satisfazendo $\|(c_q(s))_q\|_{l^r} = 1\ \forall s \in [0,T]$.
Escrevendo $\boldsymbol{u}_0' = \boldsymbol{w}_0 = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{w}_{0j} r_j(u(0,\cdot))$, temos $w_j(0,x) = \boldsymbol{w}_{0j}(x)$, logo $\Delta_q w_j(0,x) = \Delta_q \boldsymbol{w}_{0j}(x)$, deste modo

$$|\Delta_q w_j(0,\gamma_2(0))| = |\Delta_q \boldsymbol{w}_{0j}(\gamma_2(0))|,$$

assim, segue de (3.2.11) que

$$|\Delta_q w_j(t,\gamma_2(t))| \leq |\Delta_q \boldsymbol{w}_{0j}(\gamma_2(0))| + 2^{-q(\rho-1)} C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}ds.$$

Como a desigualdade acima é valida para qualquer curva integral γ temos

$$\|\Delta_q w_j(t,\cdot)\|_\infty \leq \|\Delta_q \boldsymbol{w}_{0j}\|_\infty + 2^{-q(\rho-1)} C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}ds,$$

agora, multiplicando ambos os lados desta última desigualdade por $2^{q(\rho-1)}$, obtemos

$$2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q w_j(t,\cdot)\|_\infty \leq 2^{q(\rho-1)}\|\Delta_q \boldsymbol{w}_{0j}\|_\infty + C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}ds,$$

logo, tomando a norma l^r,

$$\|w_j(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq \|\boldsymbol{w}_{0j}\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} + \left\| \left(C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N}\{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}ds \right)_q \right\|_{l^r}. \quad (3.2.12)$$

Utilizando que $\|(c_q(s))_q\|_{l^r} = 1$ segue, via Desigualdade de Minkowski para Integrais, que

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds \right)_q \right\|_{l^r} \\
&= \left[\sum_{q\geq -1} \left(C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \int_0^t \left[\sum_{q\geq -1} \left(C c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} ds \\
&= \int_0^t C \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} \left(\sum_{q\geq -1} (c_q(s))^r \right)^{\frac{1}{r}} ds \\
&= C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left\| \left(C \int_0^t c_q(s) \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds \right)_q \right\|_{l^r} \leq C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds.$$

De (3.2.12) segue agora que

$$\begin{aligned}
\|w_j(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} &\leq \|\boldsymbol{w}_{0j}\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} + C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds \\
&\leq \sup_{i=1,\dots,N} \{\|\boldsymbol{w}_{0i}\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} + C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds,
\end{aligned}$$

tomando o supremo em j temos

$$\sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_j(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} \leq \sup_{i=1,\dots,N} \{\|\boldsymbol{w}_{0i}\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} + C \int_0^t \sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\} ds$$

e como $\|w(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}$ é comparável ao $\sup_{i=1,\dots,N} \{\|w_i(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}}\}$, segue que

$$\|w(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq C \|\boldsymbol{w}_0\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} + C \int_0^t \|w(s,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} ds.$$

Do Lema de Gronwall, segue que

$$\|w(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq C \|\boldsymbol{w}_0\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \exp(tC),$$

mais precisamente (lembrando que, de fato, $u = u_n$, logo, $w = w_n$), temos

$$\|w_n(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq C \|\boldsymbol{w}_0\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \quad \forall\, t \in [0,T], n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$\|\partial_x u_n(t,\cdot)\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \leq C \|\boldsymbol{w}_0\|_{B^{\rho-1}_{\infty,r}} \quad \forall\, t \in [0,T], n \in \mathbb{N}.$$

Da definição de $B^{\rho-1}_{\infty,r}$ e do Teorema 1.1.1 segue agora que

$$\|u_n(t,\cdot)\|_{B^{\rho}_{\infty,r}} \leq C \|\boldsymbol{u}_0\|_{B^{\rho}_{\infty,r}} \quad \forall\, t \in [0,T], n \in \mathbb{N},$$

de onde, via item **(v)** da Proposição 1.1.3, segue a demonstração.

■

Podemos agora apresentar a:

Demonstração do Teorema 0.0.5. Segue diretamente das proposições 3.1.1 e 3.2.1.

■

Capítulo 4

Observações Finais

No livro Para-Diferential Calculus and Applications to the Cauchy Problem For Non-linear Systems, no capítulo 7 de [6], para sistemas $N \times N$ quase-linear de primeira ordem da forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(u)\partial_{x_j} u & = & f + F(u) \\ u_{|t=0} & = & h, \end{array} \right. \tag{4.0.1}$$

Guy Métivier assumiu as seguintes hipóteses:
(H1) F e as matrizes A_j são aplicações C^∞ de $u \in \mathbb{R}^N$ e $F(0) = 0$;
(H2) Existe uma matriz $S(u, \xi)$, $N \times N$, homogênea da grau 0 em ξ, com entradas C^∞ em (u, ξ) quando $\xi \neq 0$ e tal que:

i) $S(u, \xi)$ é auto-adjunta e definida positiva;

ii) Para todo (u, ξ), $S(u, \xi)A(u, \xi)$ é auto-adjunta;

(H3) $s > \dfrac{d}{2} + 1$ (d dimensão do espaço);
e demonstrou:

Teorema 4.0.1 *Sob (H1)-(H3), se $f \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ e $h \in H^s(\mathbb{R}^d)$, então existe $T' > 0$ de modo que o problema de Cauchy (4.0.1) tem uma, e só uma solução, $u \in C^0([0, T']; H^s(\mathbb{R}^d))$.*

Este resultado tem suas origens no trabalho de K. Friedrichs, ver [6] para referências. A demonstração deste teorema, usa entre outras coisas a teoria de operadores pseudo-diferenciais, operadores para-diferenciais, cálculo simbólico e um método de suavização. Tal demonstração é bem interessante e está dividida em várias etapas. Aqui nos restringimos a comentar o primeiro passo dado na direção de demonstrar o Teorema 4.0.1, que é, "atacar" o problema Cauchy linear no caso L^2, isto é, olhar para o seguinte problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Lu & = & f \quad \text{em} \quad [0, T] \times \mathbb{R}^d \\ u_{|t=0} & = & h, \end{array} \right. \tag{4.0.2}$$

onde

$$Lu \doteq \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(t, x)\partial_{x_j} u \tag{4.0.3}$$

e as A_j são matrizes $N \times N$ com coeficientes em $W^{1,\infty}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, onde $W^{1,\infty}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ denota o espaço das funções de Lipschitz e limitadas. Mais geralmente, seguindo as notações de [6], neste capítulo adotaremos a:

i) Para $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^d)$ o espaço das funções $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tais que todas as suas derivadas $\partial^\alpha u$ de ordem $|\alpha| \leq m$ pertencem a $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

ii) Para $r > 0$ não-inteiro, $W^{r,\infty}(\mathbb{R}^d)$ é o espaço de Hölder $C^r(\mathbb{R}^d)$, isto é, $W^{r,\infty}(\mathbb{R}^d) \doteq C^r(\mathbb{R}^d)$.

Ainda, de acordo com as notações utilizadas em [6], o símbolo da equação em (4.0.2) é

$$A(t,x,\xi) \doteq \sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j(t,x). \tag{4.0.4}$$

Assume-se que A de (4.0.4) satisfaz a:
(H4)(simetrizabilidade microlocal) Existe uma matriz $S(t,x,\xi)$, $N \times N$, homogênea de grau 0 em ξ com coeficientes C^∞ em $\xi \neq 0$ e $W^{1,\infty}$ em $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ tal que:

- $S(t,x,\xi)$ é uma matriz auto-adjunta, definida positiva;
- existe $c > 0$ tal que para todo (t,x,ξ) vale $S(t,x,\xi) \geq cId$;
- para todo (t,x,ξ), $S(t,x,\xi)A(t,x,\xi)$ é auto-adjunta.

Tem-se:

Teorema 4.0.2 *Se (H4) vale, então para $f \in L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$ e $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ o problema de Cauchy (4.0.2) tem única solução $u \in C^0([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$. Além disto, existem constantes C e K tal que para toda f e h a solução u satisfaz:*

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq Ce^{Kt}\|u(0)\|_{L^2} + C\int_0^t e^{K(t-s)}\|Lu(s)\|_{L^2}ds. \tag{4.0.5}$$

Em [6], a demonstração deste resultado está dividida nas seguintes etapas:

Etapa 1. Exibir constantes C e K de modo que a estimativa em (4.0.5) seja satisfeita para toda $u \in H^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)$. Para esta etapa, a principal ideia é comparar o operador L com o operador paradiferencial $\partial_t + T_{iA}$;

Etapa 2. Se $u \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ é uma solução do problema de Cauchy (4.0.2), com $f \in L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$ e $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, então $u \in C^0([0,T];L^2)$ e satisfaz a estimativa de energia (4.0.5);

Etapa 3. Exibe $u \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ que é solução do problema de Cauchy.

Primeiramente comentaremos a **Etapa 1**. Para fazer isto consideraremos alguns conceitos e notações.

Definição 4.0.1 ***(Símbolos com suavidade espacial limitada)***

i) *Dado $m \in \mathbb{R}$, Γ_0^m denota o espaço das funções $a(x,\xi)$ localmente L^∞, C^∞ com respeito a variável ξ e tal que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$, existe constante C_α de modo que*

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \forall\,(x,\xi). \tag{4.0.6}$$

ii) *Mais geralmente, para* $r \geq 0$, Γ_r^m *denota o espaço dos símbolos* $a \in \Gamma_0^m$ *tal que, para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^d$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^d$, *a função* $x \to \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$ *pertence a* $W^{r,\infty}$ *e existe constante* C_α *de modo que*

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi)\|_{W^{r,\infty}} \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \forall \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{4.0.7}$$

Os espaços Γ_r^m são equipados com uma topologia natural, dada pelas semi-normas que são definidas pelas melhores constantes em (4.0.7) ou (4.0.6). Para $a \in \Gamma_r^m$ usamos a notação

$$M_r^m(a;n) = \sup_{|\alpha|\leq n}\{\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\{\|(1+|\xi|)^{|\alpha|-m}\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi)\|_{W^{r,\infty}}\}\}. \tag{4.0.8}$$

No caso homogêneo, considera-se:

Definição 4.0.2 *Para* $m \in \mathbb{R}$ *e* $r \geq 0$, $\dot{\Gamma}_r^m$ *denota o conjunto das funções* $a(x,\xi)$ *definidas em* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, *homogêneas de grau* m, C^∞ *com respeito a* $\xi \neq 0$ *e, satisfazendo ainda, para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^d$ *e* $\xi \neq 0$, $\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi) \in W^{r,\infty}(\mathbb{R}^d)$ *e*

$$\sup_{|\xi|=1}\|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi)\|_{W^{r,\infty}(\mathbb{R}^d)} < \infty. \tag{4.0.9}$$

Uma função auxiliar, importante na teoria de operador paradiferencial associado a um símbolo com suavidade limitada, é:

Definição 4.0.3 *Uma função corte admissível é uma função* $\psi(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *tal que:*

i) *existem* ϵ_1 *e* ϵ_2 *tais que* $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ *e*

$$\begin{cases} \psi(\eta,\xi) = 1 & \textit{para } |\eta| \leq \epsilon_1(1+|\xi|) \\ \psi(\eta,\xi) = 0 & \textit{para } |\eta| \geq \epsilon_2(1+|\xi|); \end{cases} \tag{4.0.10}$$

ii) *para todo* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$ *existe* $C_{\alpha,\beta}$ *tal que*

$$|\partial_\eta^\alpha\partial_\xi^\beta\psi(\eta,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|} \quad \forall(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{4.0.11}$$

Exemplo 4.0.1 *Consideremos* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *satisfazendo* $0 \leq \chi \leq 1$,

$$\chi(\xi) = 1 \quad \textit{para} \quad |\xi| \leq 1.1 \qquad \textit{e} \qquad \chi(\xi) = 0 \quad \textit{para} \quad |\xi| \geq 1.9. \tag{4.0.12}$$

Seja

$$\psi_N(\eta,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{k-N}(\eta)\varphi_k(\xi) \tag{4.0.13}$$

onde

$$\chi_k(\xi) = \chi(2^{-k}\xi) \quad \textit{para } k \in \mathbb{Z}, \tag{4.0.14}$$

$$\varphi_0 = \chi_0 \quad \textit{e} \quad \varphi_k = \chi_k - \chi_{k-1} \quad \textit{para} \quad k \geq 1. \tag{4.0.15}$$

Para $N \geq 3$, ψ_N *é uma função corte admissível.*

Seja ψ uma função corte admissível, denotaremos por $G^\psi(\cdot, \xi)$ a transformada de Fourier inversa de $\psi(\cdot, \xi)$. Para $a \in \Gamma_0^m$ definimos

$$\sigma_a^\psi(x, \xi) \doteq \int G^\psi(x - y, \xi) a(y, \xi) dy, \tag{4.0.16}$$

isto é,

$$\sigma_a^\psi(x, \xi) = G^\psi(\cdot, \xi) * a(\cdot, \xi)(x). \tag{4.0.17}$$

Os símbolos usuais são dados por:

Definição 4.0.4 *Para $m \in \mathbb{R}$, $S_{1,1}^m$ é o espaço das funções $p \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ tal que para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$ existe $C_{\alpha,\beta}$ de modo que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|} \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{4.0.18}$$

$S_{1,0}^m$ é o subespaço dos símbolos p tal que para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$ existe $C_{\alpha,\beta}$ de modo que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{4.0.19}$$

Uma importante subclasse de $S_{1,1}^m$ é dada na:

Definição 4.0.5 *Um símbolo $p(x, \xi) \in S_{1,1}^m$ satisfaz a condição espectral se existe $\epsilon < 1$ tal que*

$$\mathcal{F}_x p(\eta, \xi) = 0 \text{ para todo } |\eta| \geq \epsilon(|\xi| + 1). \tag{4.0.20}$$

O espaço de tais símbolos é denotado por Σ_0^m.

Observemos que se $p(x, \xi)$ satisfaz

$$|\partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_\beta(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

e também a condição espectral (4.0.20), então $p(x, \xi)$ satisfaz a condição em (4.0.18), isto é, $p \in S_{1,1}^m$. De fato, se p satisfaz a condição espectral, então $S(\mathcal{F}_x p(\eta, \xi)) \subset B(0, \epsilon(|\xi|+1))$, segue assim, das desigualdades de Bernstein (Teorema 1.1.1), que

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(\cdot, \xi)\|_\infty &\leq C_\alpha[\epsilon(|\xi| + 1)]^{|\alpha|} \|\partial_\xi^\beta p(\cdot, \xi)\|_\infty \\ &\leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|}. \end{aligned}$$

Notemos que as funções corte admissíveis são tomadas de modo que $\sigma_a^\psi(x, \xi)$ satisfaça a condição espectral (4.0.20), para toda $a \in \Gamma_0^m$. Assim associa-se a função de suavidade limitada $a \in \Gamma_0^m$ uma função $\sigma_a^\psi \in C^\infty$. Mais ainda temos:

Proposição 4.0.2 *Seja ψ uma função corte admissível. Para todo $m \in \mathbb{R}$ e $r \geq 0$, o operador $a \to \sigma_a^\psi$ é limitado de Γ_r^m em Σ_r^m, aqui Σ_r^m denota a subclasse dos símbolos $a \in \Gamma_r^m$ que satisfaz a condição espectral (4.0.20).*

A próxima definição introduz o conceito de operador paradiferencial associado a um símbolo de suavidade limitada.

Definição 4.0.6 *Seja ψ uma função corte admissível. Para $a \in \Gamma_0^m$ o operador paradiferencial T_a^ψ é definido por*

$$T_a^\psi u(x) \doteq \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\xi \cdot x} \sigma_a^\psi(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \tag{4.0.21}$$

Observemos que uma função $a(x) \in L^\infty$ pode ser vista como um símbolo em Γ_0^0, independente de ξ. Com ψ dada por (4.0.13) (com $N = 3$), somos conduzidos a

$$T_a u = S_{-3} a S_0 u + \sum_{k=1}^{\infty} S_{k-3} a \Delta_k u, \tag{4.0.22}$$

onde escrevemos T_a no lugar de T_a^ψ, $S_k \doteq \chi_k(D_x)$, isto é $S_k u \doteq \mathcal{F}^{-1}(\chi_k \mathcal{F} u)$, e $\Delta_k = S_k - S_{k-1}$. Que é essencialmente o paraproduto apresentado na Definição 1.2.1.

No capítulo 7 de [6], a função corte admissível ψ está fixada, por isso, usa-se T_a no lugar de T_a^ψ. Quando a e u são símbolos e funções em $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ denota-se, ainda, por $T_a u$ o operador paradiferencial espacial definido para todo $t \in [0,T]$ por

$$(T_a u)(t,\cdot) \doteq T_{a(t,\cdot)} u(t,\cdot).$$

Assim

$$T_{iA} v = \sum_{j=1}^{d} T_{A_j} \partial_{x_j} v. \tag{4.0.23}$$

Análogo as Definições 4.0.1 e 4.0.2 considera-se:

Definição 4.0.7 *$\Gamma_k^m([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ denota o espaço dos símbolos $a(t,x,\xi)$ tal que aplicação $t \to a(t,\cdot)$ é limitada de $[0,T]$ em $\Gamma_k^m(\mathbb{R}^d)$. Analogamente $\dot{\Gamma}_k^m([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ denota o espaço dos símbolos $a(t,x,\xi)$, homogêneos de grau m em $\xi \neq 0$, tal que a aplicação $t \to a(t,\cdot)$ é limitada de $[0,T]$ em $\dot{\Gamma}_k^m(\mathbb{R}^d)$.*

Observação 4.0.1 *Sob as hipóteses dos coeficientes da A de (4.0.2), e (H4) teremos que $A(t,x,\xi) \in \dot{\Gamma}_1^1([0,T] \times \mathbb{R}^d) \cap \Gamma_1^1([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, $S \in \dot{\Gamma}_1^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, e ainda que $\partial_t S \in \dot{\Gamma}_0^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$.*

Conhecer a dependência que as constantes C e K de (4.0.5) tem com os as matrizes A_j e S, é importante na demonstração do Teorema 4.0.1, para podermos escreve-las fixaremos algumas notações. Para $r \geq 0$, $P \in \Gamma_r^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ e $Q \in \dot{\Gamma}_r^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, temos

$$M_r(P;n) \doteq \sup_{|\alpha| \leq n} \{ \sup_{(t,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d} \{ (1+|\xi|)^{|\alpha|} \| \partial_\xi^\alpha P(t,\cdot,\xi) \|_{W^{r,\infty}(\mathbb{R}^d)} \} \} \tag{4.0.24}$$

e

$$\dot{M}_r(Q;n) \doteq \sup_{|\alpha| \leq n} \{ \sup_{(t,\xi) \in [0,T] \times S^{d-1}} \{ \| \partial_\xi^\alpha Q(t,\cdot,\xi) \|_{W^{r,\infty}(\mathbb{R}^d)} \} \} \tag{4.0.25}$$

Consideremos ainda,

$$M_0(A) = \sum_{j=1}^{d} \| A_j \|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)} \tag{4.0.26}$$

e

$$M_1(A) = \sum_{j=1}^{d} \sup_{t \in [0,T]} \| A_j(t,\cdot) \|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.0.27}$$

Proposição 4.0.3 *Existem constantes C e K tal que para toda $u \in L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d))$ com $\partial_t u \in L^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ temos*

$$\| u(t) \|_{L^2} \leq C e^{Kt} \| u(0) \|_{L^2} + C \int_0^t e^{K(t-t')} \| L u(t') \|_{L^2} dt'. \tag{4.0.28}$$

Além disto, existem funções $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ de modo que as constantes C e K são da forma

$$C = \mathcal{C}(\dot{M}_0(S^{-\frac{1}{2}}; n), \dot{M}_0(S^{\frac{1}{2}}; n)) \tag{4.0.29}$$

e

$$\begin{aligned} K &= \mathcal{K}\Big(\dot{M}_0(S; n), \dot{M}_0(S^{-\frac{1}{2}}; n), \dot{M}_0(S^{\frac{1}{2}}; n), \dot{M}_0(\partial_t S^{\frac{1}{2}}; n), \\ &\quad , \dot{M}_1(S^{-\frac{1}{2}}; n), \dot{M}_1(S^{\frac{1}{2}}; n), M_0(A), M_1(A)\Big), \end{aligned} \tag{4.0.30}$$

com $n = \left[\frac{d}{2}\right] + 2$.

Lema 4.0.1 *Existe constante γ tal que para toda $u \in C^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ vale:*

$$\|A(t,x,\partial_x)u(t) - T_{iA}u(t)\|_{L^2} \leq \gamma M_1(A)\|u(t)\|_{L^2}, \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.0.31}$$

Este lema permite demonstrar a Proposição 4.0.3 a partir de uma estimativa similar para a equação paradiferencial

$$\partial_t u + T_{iA}u = f, \tag{4.0.32}$$

tal estimativa é dada na:

Proposição 4.0.4 *Existem constantes C e K, como em (4.0.29) e (4.0.30), tais que para toda $u \in L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d))$ com $\partial_t u \in L^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ vale*

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq Ce^{Kt}\|u(0)\|_{L^2} + C\int_0^t e^{K(t-t')}\|\left(\partial_t u + T_{iA}u\right)(t')\|_{L^2}dt'. \tag{4.0.33}$$

Demonstração da Proposição 4.0.3. O Lema 4.0.1 e a estimativa (4.0.33) fornecem uma estimativa similar a (4.0.28) com o termo adicional

$$\gamma M_1(A)\int_0^t e^{KC_0(t-t')}\|u(t')\|_{L^2}dt' \tag{4.0.34}$$

no lado direito, isto é,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2} &\leq Ce^{Kt}\|u(0)\|_{L^2} + C\int_0^t e^{K(t-t')}\|Lu(t')\|_{L^2}dt' \\ &\quad + \gamma M_1(A)\int_0^t e^{K(t-t')}\|u(t')\|_{L^2}dt'. \end{aligned}$$

Considerando

$$\begin{aligned} w(t) &= Ce^{Kt}\|u(0)\|_{L^2} + C\int_0^t e^{K(t-t')}\|Lu(t')\|_{L^2}dt' \\ &\quad + \gamma M_1(A)\int_0^t e^{K(t-t')}\|u(t')\|_{L^2}dt', \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w(t) &= Kw(t) + C\|Lu(t)\|_{L^2} + \gamma M_1(A)\|u(t)\|_{L^2} \\ &\leq Kw(t) + C\|Lu(t)\|_{L^2} + \gamma M_1(A)w(t), \end{aligned}$$

desta forma vale

$$\frac{d}{dt}w(t) - \left(K + \gamma M_1(A)\right)w(t) \leq C\|Lu(t)\|_{L^2}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $e^{-t(K+\gamma M_1(A))}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(w(t)e^{-t(K+\gamma M_1(A))}\right) \leq C\|Lu(t)\|_{L^2}e^{-t(K+\gamma M_1(A))},$$

integrando vemos que

$$w(t) \leq Ce^{tK'}\|u(0)\|_{L^2} + C\int_0^t e^{K'(t-t')}\|Lu(t')\|_{L^2}dt'$$

com $K' = K + \gamma M_1(A)$. Como $\|u(t)\|_{L^2} \leq w(t)$ temos

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq Ce^{tK'}\|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + C\int_0^t e^{K'(t-t')}\|Lu(t')\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}dt',$$

que é a desigualdade (4.0.28).

■

Aqui por intermédio do Lema 4.0.1 e da equação paradiferencial $\partial_t + T_{iA} = f$, obtemos a estimativa a priori (4.0.28). Esta estimativa é o que sustenta, no sentido de ser o principal passo, a maioria das demonstrações apresentadas no capítulo 7 de [6], em especial, a demonstração do Teorema 4.0.1. Temos assim que o Lema 4.0.1 é um ponto chave para obtenção do Teorema 4.0.1. É também importante no capítulo 7 de [6] uma versão em H^s para o Lema 4.0.1. Para enuncia-la consideremos:
(H5) As matrizes A_j de (4.0.4) satisfazem $\partial_x A_j \in L^\infty([0,T]; H^{s-1(\mathbb{R}^d)})$.

Lema 4.0.2 *Se (H3) e (H5) valem, então existe constante γ tal que para toda $u \in C^0([0,T]; H^s)$ vale*

$$\|A(t,x,\partial_x)u(t) - T_{iA}u(t)\|_{H^s} \leq \gamma M_{H^s}(A)\|u(t)\|_{H^s}, \tag{4.0.35}$$

onde

$$M_{H^s}(A) = \sum_j \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla_x A_j(t,\cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.0.36}$$

Apresentamos agora, uma versão C^ρ do Lema 4.0.1. Consideremos
(H6) As matrizes A_j de (4.0.4) satisfazem $A_j \in L^\infty([0,T]; C^\rho(\mathbb{R}^d))$.
Fixemos ainda a notação

$$M_{C^\rho}(A) = \sum_j \sup_{t\in[0,T]} \|A_j(t,\cdot)\|_{C^\rho(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.0.37}$$

Temos o:

Lema 4.0.3 *Seja $\rho > 0$ e $\rho \notin \mathbb{Z}$. Existe constante γ tal que para toda $u \in C^0([0,T]; C^\rho(\mathbb{R}^d))$ vale*

$$\|A(t,x,\partial_x)u(t) - T_{iA}u(t)\|_{C^\rho} \leq \gamma M_{C^\rho}(A)\|u(t)\|_{C^\rho} \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.0.38}$$

Demonstração. Por definição $iA(t,x,\xi) = \sum_j A_j(t,x)(i\xi_j)$ e como

$$\begin{aligned}
T_{A_j}\partial_{x_j}u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\xi\cdot x}\sigma_{A_j}(x,\xi)\widehat{\partial_{x_j}u}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\xi\cdot x}\sigma_{A_j}(x,\xi)i\xi\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\xi\cdot x}\sigma_{iA_j\xi}(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= T_{iA_j\xi}u(x), \qquad (4.0.39)
\end{aligned}$$

temos

$$A(t,x,\partial_x)v - T_{iA}u = \sum_{j=1}^{d}(A_j - T_{A_j})\partial_{x_j}u. \qquad (4.0.40)$$

Assim, lembrando que $(A_j - T_{A_j})\partial_{x_j}u = T_{\partial_x u}A_j + R(A_j, \partial_{x_j}u)$, e que análogos aos teoremas 1.2.1 e 1.2.2 valem, segue que

$$\begin{aligned}
\|A(t,x,\partial_x)u(t) - T_{iA}u(t)\|_{C^\rho} &\leq \|\sum_{j=1}^{d}(A_j - T_{A_j})\partial_{x_j}u\|_{C^\rho} \\
&\leq \sum_{j=1}^{d}\|(A_j - T_{A_j})\partial_{x_j}u\|_{C^\rho} \\
&= \sum_{j=1}^{d}\|T_{\partial_x u}A_j + R(A_j,\partial_{x_j}u)\|_{C^\rho} \\
&\leq \gamma M_{C^\rho}(A)\|u(t)\|_{C^\rho} \qquad (4.0.41)
\end{aligned}$$

■

Este lema nos instiga buscar uma versão C^ρ para o Teorema 4.0.1, ou em um primeiro momento para o Teorema 4.0.2. Tal versão generalizaria, para dimensão espacial qualquer, resultados dos Capítulo 2 e 3, além, de eventualmente, podermos trocar a hipótese do problema ser estritamente hiperbólico pela hipótese mais fraca hiperbólico simetrizável.

Vemos assim que o Lema 4.0.3 abre a possibilidade de buscarmos algum tipo de estimativa a priori, olhando para a equação paradiferencial ao invés de olhar para equação. Esperamos em um futuro próximo perseguir esta ideia.

Referências Bibliográficas

[1] ALINHAC, Serge. *Hyperbolic Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 2009.

[2] BAHOURI, Hajer; CHEMIN, Jean-Yves; DANCHIN, Raphaël. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equation.* Springer-Verlag, 2011.

[3] FOLLAND, Gerald B. *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, 1984.

[4] HÖRMANDER, Lars. *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations.* Springer-Verlag, 1997.

[5] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* v.2, IMPA, 2000.

[6] MÉTIVIER, Guy. *Para-Differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Nonlinear Systems.* Edizioni della Normale, 2008.

[7] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* São Paulo: Gráfica Editora Hamburg Ltda, 1979.