UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação de Ações de $\mathbb{Z}_2^k$ Fixando Espaços Projetivos Relativos a Anéis Diferentes

Allan Edley Ramos de Andrade

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação de Ações de $\mathbb{Z}_2^k$ Fixando Espaços Projetivos Relativos a Anéis Diferentes

Allan Edley Ramos de Andrade

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

São Carlos - SP
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

A553ca

Andrade, Allan Edley Ramos de.
Classificação de ações de Z_2^k fixando espaços projetivos relativos a anéis diferentes / Allan Edley Ramos de Andrade. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
90 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Topologia. 2. Teoria de cobordismo. 3. $(Z_2)k$ - ações. 4. Espaços projetivos. I. Título.

CDD: 514 (20[a])

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM – UFSCar

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
IGCE/UNESP – Rio Claro

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
DM – UFSCar

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC – USP

Prof. Dr. Dirceu Penteado
DM – UFSCar

Aos meus pais

Adilson e Raquel ...

Agradecimentos

Ao professor Pergher, pela dedicação, paciência e seriedade profissional com que conduziu este trabalho.

Aos meus pais, Adilson e Raquel, que sempre me apoiaram e me deram força para que eu seguisse com meus estudos.

Aos meus amigos da turma de doutorado, pelo companheirismo, amizade e pelos momentos de confraternização que com certeza não vou esquecer. À minha namorada Andréa, por estar do meu lado durante todo esse tempo me dando força nos momentos bons e ruins. Aos professores do departamento da UNESP-RC por ajudarem na minha formação matemática, e pela amizade que sempre tiveram com os seus alunos. Também gostaria de agradecer aos professores do departamento da UFSCAR que também contribuíram para minha formação matemática e pelo tratamento diferenciado que tem com seus alunos.

À CAPES, que me garantiu suporte financeiro.

Em fim, a todos que colaboraram de alguma forma com este trabalho.

Resumo

Sejam M uma variedade fechada e suave e $T : M \to M$ uma involução C^∞ definida em M. É conhecido que se F é o conjunto de pontos fixos de T, então F é uma união finita de subvariedades fechadas de M. Dado F, um problema neste contexto é a classificação, a menos de cobordismo equivariante, de pares (M, T) para os quais o conjunto de pontos fixos é F.

Neste trabalho nós realizamos a classificação, a menos de cobordismo equivariante, das $\mathbb{Z}_2^k$-ações (M^n, Φ) fixando F, com F sendo um dos seguintes:

- $F = KP^{2n} \cup KP^{2m+1}$;
- $F = KP^{2n+1} \cup KP^{2m+1}$,

onde KP é o espaço projetivo real, complexo ou quaterniônico.

Além disso, realizamos a classificação, a menos de cobordismo equivariante, das $\mathbb{Z}_2^2$-ações cujo conjunto de pontos fixos é $K_dP^{2n} \cup K_eP^{2m+1}$ e $d < e$, onde K_jP, $j = 1, 2, 4$ são respectivamente os espaços projetivos real $\mathbb{R}P$, complexo $\mathbb{C}P$ e quaterniônico $\mathbb{H}P$.

Tendo em vista que neste caso apareceram ações exóticas, foi importante a melhora que obtivemos de um resultado de Pedro Pergher feita no Teorema 3.4.1 a qual permitiu obter tal classificação.

Abstract

Let M be a closed smooth manifold and $T : M \to M$ be an C^∞ involution defined on M. It is known that if F is the set of fixed points of T, then it is a finite union of closed submanifolds of M. Given F, a problem in this context is the classification, up to equivariant cobordism, of pairs (M, T) for which the fixed point set is F.

In this work we performe the classification, up to equivariant cobordism, of $\mathbb{Z}_2^k$-actions (M^n, Φ) fixing F with F being one of the following:

- $F = KP^{2n} \cup KP^{2m+1}$;
- $F = KP^{2n+1} \cup KP^{2m+1}$,

where KP is the real, complex or quaternionic projective space.

We also perform the classification, up to equivariant cobordism, of $\mathbb{Z}_2^2$-action whose fixed point set is $K_dP^{2n} \cup K_e^{2m+1}$ and $d < e$, where K_jP, $j = 1, 2, 4$ are respectively the real $\mathbb{R}P$, complex $\mathbb{C}P$ and quaternionic $\mathbb{H}P$ projective spaces.

Given that in this case appeared exotic actions, was important that the improvements that we made from the result of Pedro Pergher done in Theorem 3.4.1, which allowed us to obtain such classification.

Sumário

Capítulo

1

Introdução

Suponha M variedade fechada e $T : M \to M$ involução C^∞ definida em M, com conjunto de pontos fixos F. É conhecido que F é uma união finita de subvariedades fechadas de M.

Para uma certa F, um problema neste contexto é a classificação, a menos de cobordismo equivariante, de pares (M, T) para os quais o conjunto de pontos fixos é F. Alguns resultados sobre esta classificação podem ser encontrado em Royster [22], Hou and Torrence ([26];[27]), P.L.Q. Pergher [13], Stong ([23];[25]), P.L.Q. Pergher e Stong [15], Conner e Floyd ([2], Teorema 27.6), Kosniowski e Stong ([6], pag. 309) e Lü ([29];[30]).

Para $F = \mathbb{R}P^n$, a classificação foi obtida em [23] e [2]. Royster então estudou esse problema com F sendo a união disjunta de dois espaços projetivos reais, $F = RP^m \cup RP^n$.

A classificação estabelecida por Royster foi feita caso a caso, dependendo da paridade de m e n, com argumentos especiais quando uma das componentes era $\mathbb{R}P^0 = \{ponto\}$, no entanto seu método não foi suficiente para resolver o caso m e n pares positivos.

Posteriormente, em [21] o artigo de Royster foi estendido para F sendo a união disjunta de dois espaços projetivos complexo ou quaterniônico, além de conter a classificação para o caso $F = KP^{2^s} \cup KP^{2n}$, $s, n \geq 1$, com KP espaço projetivo real, complexo ou quaterniônico.

Outra questão natural no contexto de cobordismo equivariante é a classificação, a menos de cobordismo, de $\mathbb{Z}_2^k$-ações (M^n, Φ) fixando F, sendo M^n variedade fechada, n-dimensional e C^∞. Uma característica interessante nesta questão é que em alguns casos a classificação para $k = 1$ determina completamente a correspondente classificação para qualquer $k \geq 1$.

Por exemplo, isto ocorre quando $F = \mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{C}P^{2n}, \mathbb{H}P^{2n}$ ou $\mathbb{Q}P^2$, espaços projetivos real, complexo, quaterniônico ou o plano projetivo de Cayley (veja [4] e [19]); isto também acontece quando $F = V^n \cup \{p\}$, em que p é um ponto e V^n é uma variedade fechada com $n > 0$ (veja [17]) e F é a união de um ou dois espaços com propriedade $\mathcal{H}$, dentre os quais se encontram os espaços projetivos real, complexo e quaterniônico (para detalhes veja [20]).

Em todos estes casos, a classe de cobordismo equivariante de $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando F pode ser representada por um conjunto especial de $\mathbb{Z}_2^k$-ações obtidas de involuções fixando F.

A seguir descreveremos tal conjunto. Dados (W,T) involução fixando F e $1 \leq r \leq k$, nós podemos construir uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação especial no produto $W^{2^{r-1}} = W \times \cdots \times W (2^{r-1}\text{fatores})$, a qual denotaremos por $\Gamma_r^k(W,T)$, da seguinte maneira indutiva.

Primeiro defina $\Gamma_1^1(W,T) = (W,T)$. Tomando $k \geq 2$ e supondo por indução definido $\Gamma_{k-1}^{k-1}(W,T) = (W^{2^{k-2}}, T_1, \ldots, T_{k-1})$, defina

$$\Gamma_k^k(W,T) = (W^{2^{k-1}}, T_1', \ldots, T_k')$$

com $(W^{2^{k-1}}, T_1', \ldots, T_{k-1}') = (W^{2^{k-2}} \times W^{2^{k-2}}, T_1 \times T_1, \ldots, T_{k-1} \times T_{k-1})$ e T_k' atuando em $W^{2^{k-2}} \times W^{2^{k-2}}$ por $T_k'(x,y) = (y,x)$. Isto define $\Gamma_k^k(W,T)$ para todo $k \geq 1$.

A seguir, definimos $\Gamma_r^k(W,T) = (W^{2^{k-1}}, T_1, \ldots, T_k)$ com $\Gamma_r^r(W,T) = (W^{2^{r-1}}, T_1, \ldots, T_r)$ e $T_{r+1} = \cdots = T_k = Id$; estendemos esta definição para $r = 0$, colocando $\Gamma_0^k(W,T) = (W, Id, \ldots, Id)$.

Agora, dada uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(M,\Phi), \Phi = (T_1, T_2, \ldots, T_k)$, aqui consideraremos $\mathbb{Z}_2^k$ como o grupo gerado por k involuções comutantes e o fixed-data de Φ é $\eta = \oplus_\rho \epsilon_\rho \to F$, em que F é o conjunto de pontos fixos de Φ e $\rho \in \mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$.
Os fibrados ϵ_ρ são caracterizados como sendo o sub-fibrado em que cada $T \in \mathbb{Z}_2^k$ age nas fibras como $\rho(T)$ (para mais detalhes veja Capítulo 3).

Primeiramente, cada automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ determina uma nova ação $(M, \sigma(T_1), \sigma(T_2), \ldots, \sigma(T_k))$, que denotaremos por $\sigma(M,\Phi)$. Em [14] foi mostrado que se (M,Φ) tem fixed-data $\oplus_\rho \epsilon_\rho \to F$ e um dos fibrados ϵ_{ρ_0} é isomorfo a $\epsilon_{\rho_0}' \oplus R$, com $R \to F$ sendo o fibrado trivial, então existe uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (N,Ψ) com fixed-data $\oplus_\rho \mu_\rho \to F$ onde $\mu_\rho = \epsilon_\rho$ se $\rho \neq \rho_0$ e $\mu_{\rho_0} = \epsilon_{\rho_0}'$.

Portanto, dada uma involução (W,T) fixando F, aplicando as operações $\sigma\Gamma_r^k$ em (W,T) e removendo, se possível, secções dos sub-fibrados do fixed-data, obtemos uma coleção de $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando F.

Dada F, denotamos por $\mathcal{A}_k(F)$ a coleção de todas as classes de $\mathbb{Z}_2^k$-ações contendo um representante (M,Φ) fixando F e por $\mathcal{A}_k^m(F)$ o conjunto das classes m-dimensionais.

Denote por $\mathcal{B}_k(F) \subset \mathcal{A}_k(F)$ o subconjunto consistindo das classes obtidas de $\mathcal{A}_1(F)$ pelo processo citado acima e por $\mathcal{B}_k^m(F) \subset \mathcal{A}_k(F)$ o conjunto das classes m-dimensionais.

Para uma partição fixada $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\}$ $(p \geq 1)$ do conjunto de componentes de F, escrevemos $F = F_1 \cup \ldots \cup F_p$, em que F_i é a união dos membros de ω_i.

Se $[(M_i^m, \Phi_i)] \in \mathcal{B}_k^m$, $1 \leq i \leq p$, então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} [(M_i^m, \Phi_i)]$ representa uma classe de $\mathcal{A}_k^m(F)$;

denote por $\mathcal{P}^m_{k,\omega}(F) \subset \mathcal{A}^m_k(F)$ os subconjuntos obtidos desta forma, e por

$$\mathcal{P}_k(F) = \bigcup_m \bigcup_\omega \mathcal{P}^m_{k,\omega}(F) \subset \mathcal{A}_k(F).$$

Assim, para casos especiais de F acima mencionados temos $\mathcal{A}_k = \mathcal{P}_k$, ou seja, a classificação para $k = 1$ determina completamente a correspondente classificação para qualquer $k \geq 1$.

O Capítulo 2 apresenta as terminologias e conceitos básicos da teoria de cobordismo, com base no trabalho de Conner e Floyd desenvolvida em [2], com destaque para o teorema 2.6.4, onde é demonstrado a sequência exata de Conner e Floyd.

No Capítulo 3 é introduzida a noção de cobordismo simultâneo, e definidas algumas involuções especiais que serão importantes na classificação dos capítulos seguintes, com destaque para o Teorema 3.2.10, o qual diz que a classe de cobordismo de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação é completamente caracterizada pelo cobordismo simultâneo do seu fixed-data.

O Capítulo 4 deste trabalho mostra que $\mathcal{A}_k = \mathcal{P}_k$ quando $F = KP^{2n} \cup KP^{2m+1}$, em que KP é o espaço projetivo real, complexo ou quaterniônico.
Este resultado além de estender para $k > 1$ a classificação obtida por Royster em [22] para $k = 1$, obtém também as versões complexas e quaterniônicas dessas classificações.

No Capítulo 5 é mostrado que o mesmo é verdade para $F = KP^{2n+1} \cup KP^{2m+1}$; mais explicitamente é mostrado que qualquer $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando $F = KP^{2n+1} \cup KP^{2m+1}$ borda, sendo que isso tinha sido obtido por Royster em [22] para $k = 1$, considerando o caso de espaço projetivo real, e por Pergher e Adriana Ramos em [21] considerando o caso de espaço projetivo complexo e quaterniônico.

No Capítulo 6 obtivemos a classificação a menos de cobordismo de $\mathbb{Z}_2^2$-ações cujo conjunto de pontos fixos é $K_dP^{2n} \cup K_eP^{2m+1}$ e $d < e$, onde K_dP, $d = 1, 2, 4$ são respectivamente os espaços projetivos real $\mathbb{R}P$, complexo $\mathbb{C}P$ e quaterniônico $\mathbb{H}P$. Nesta classificação aparecem ações exóticas, as quais não são da forma $\Gamma_i^j(M, T)$, com (M, T) involução fixando $K_dP^{2n} \cup K_eP^{2m+1}$.

Todas as classificações foram obtidas devido à uma considerável melhora no resultado que pode ser encontrado em ([13] Teorema 1, pg.2145), com destaque para a classificação do capítulo 6, onde só foi possível garantir a existência de ações exóticas utilizando a referida melhora de resultado, tornando esta classificação a parte mais original e importante em relação à literatura existente.

O resultado de ([13] Teorema 1, pg.2145) diz que $(F; \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação se, e somente se, as seguintes listas bordam:

a) $(\lambda_1, \epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \to RP(\epsilon_1)$;

b) $\begin{array}{c} (\lambda_1, \lambda', 0) \\ \downarrow \\ RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \end{array} \cup \begin{array}{c} (\epsilon_1 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_2), \lambda_2, 0) \\ \downarrow \\ RP(\epsilon_2) \end{array}$;

c) $(\lambda_3, \epsilon_1 \oplus (\epsilon_2 \otimes \lambda_3)) \to RP(\epsilon_3)$.

Onde $\lambda_i \to RP(\epsilon_i)$ $i = 1, 2, 3$ são os respectivos fibrados linha.

A melhora em questão foi mostrar que

$$\begin{array}{c} (\lambda_1, \lambda', 0) \\ \downarrow \\ RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \end{array}$$

borda simultaneamente(veja definição 3.2.1).

Fazendo-se essa eliminação, foi computacionalmente possível analisar as possibilidades de fixed-data de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_d P^{2m+1} \cup K_e P^{2n}$.

Capítulo

2

Preliminares

2.1. Introdução

Neste capítulo, serão apresentadas algumas terminologias e introduzidos alguns conceitos básicos da teoria de cobordismo equivariante, com base na teoria desenvolvida por Conner e Floyd em [2].

As variedades, aplicações ou ações aqui abordadas serão consideradas como sendo C^∞. Além disso, uma variedade n-dimensional M^n terá um número finito de componentes conexas, não necessariamente de mesma dimensão.

Usamos $\sigma(M)$ para denotar a classe fundamental de homologia módulo 2 de M. Denotamos respectivamente por $H^n(M)$ e $H_n(M)$ os grupos de cohomologia e homologia de M com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Para cada $h \in H^n(M)$, denotamos por $\langle h, \sigma(M)\rangle \in \mathbb{Z}_2$ o valor de h evaluado em $\sigma(M)$.

Denotamos por $\xi^k \to X$ um fibrado vetorial k-dimensional sobre um espaço X e $R^k \to X$ o fibrado trivial k-dimensional.

Dados $\xi^k \to X$ com X paracompacto, denotamos a classe total de Stiefel- Whitney de ξ^k por

$$W(\xi^k) = 1 + w_1(\xi^k) + \cdots + w_k(\xi^k).$$

com $w_i(\xi^k) \in H^i(X)$ sendo a i-ésima classe de Stiefel- Whitney de ξ^k.

A classe de Stiefel- Whitney de uma variedade M^n é definida como sendo a classe de Stiefel- Whitney do fibrado tangente $\tau^n \to M$ e denotada por

$$W(M) = 1 + w_1(M) + \cdots + w_n(M).$$

Dados um fibrado $\xi \to M$ e uma aplicação $f : N \to M$, denotamos por $\overline{f}(\xi) \to N$ o pullback de ξ por f. Diremos que um fibrado $\xi \to M$ é nulo se a fibra sobre cada componente conexa de M for o espaço vetorial nulo $\{0\}$, e denotamos tal fibrado por

$0 \to M$.

Finalmente, denotaremos por K_dP^n, com $d = 1, 2, 4$, respectivamente, os espaços projetivos real $\mathbb{R}P^n$, complexo $\mathbb{C}P^n$ e quaterniônico $\mathbb{H}P^n$.

2.2. Cobordismo de Variedades

Definição 2.2.1. Dizemos que uma variedade M^n borda se, e somente se, existe uma variedade compacta W^{n+1} tal que $\partial W^{n+1} = M^n$. Dizemos que duas variedades M^n e N^n são cobordantes se $M^n \cup N^n$ borda.

A relação de cobordismo é uma relação de equivalência no conjunto das classes de difeomorfismo de variedades fechadas n-dimensionais. Denotamos por $[M^n]$ a classe de cobordismo de M^n e por $\mathcal{N}_n$ o conjunto das classes de cobordismo de variedades fechadas n-dimensionais.

Com a operação $[M^n] + [V^n] = [M^n \cup V^n]$, $\mathcal{N}_n$ tem estrutura de grupo abeliano, denominado grupo de cobordismo não orientado n-dimensional. Observe que o elemento neutro é a classe de cobordismo $[M^n] = 0$ onde M^n borda.

Se $\mathcal{N}_* = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j$, então $(\mathcal{N}_*, +, .)$ é um anel graduado comutativo com unidade com respeito às operações

$$[M^n] + [V^n] = [M^n \cup V^n] \quad \text{e} \quad [M^n].[V^n] = [M^n \times V^n].$$

Definição 2.2.2. Seja M^n variedade fechada com classe de Stiefel- Whitney

$$W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n).$$

Então para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_j = n$, temos associado o número

$$\langle w_{i_1}(M^n) w_{i_2}(M^n) \ldots w_{i_j}(M^n), \sigma(M^n) \rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

chamado de número característico ou número de Stiefel-Whitney de M^n em relação ao monômio $w_{i_1}(M^n) w_{i_2}(M^n) \ldots w_{i_j}(M^n)$.

Em 1954 René Thom em seu famoso trabalho *Quelques propriétés globales des variétés differentiables* [28], o qual lhe garantiu a Medalha Fields em 1958, mostrou que a classe de cobordismo de M^n é completamente determinada pelos números característicos de M^n. De maneira mais explícita, ele mostrou o seguinte teorema:

Teorema 2.2.3. *(Thom) Uma variedade fechada M^n borda se, e somente se, todos os números característicos de M^n são nulos.*

Corolário 2.2.4. *Duas variedades M^n e V^n são cobordantes se, e somente se, M^n e V^n possuem os mesmos números característicos, ou seja*

$$\left\langle w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\dots w_{i_j}(M^n), \sigma(M^n)\right\rangle = \left\langle w_{i_1}(V^n)w_{i_2}(V^n)\dots w_{i_j}(V^n), \sigma(V^n)\right\rangle.$$

para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_j = n$.

Exemplo 2.2.5. Usando o teorema acima, utilizando a estrutura multiplicativa de K_dP^n e que $W(K_dP^n) = (1 + \alpha_d)^{n+1}$, onde α_d é o gerador de $H^d(K_dP^n)$, mostra-se que K_dP^n borda se, e somente se, n é ímpar.

De [28] temos o seguinte teorema, o qual determina a estrutura de $\mathcal{N}_*$.

Teorema 2.2.6. *$\mathcal{N}_*$ é uma álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador em cada dimensão $n \neq 2^j - 1$ $(n \geq 0)$*

Explicitamente, em [28] foi mostrado que para n par os espaços projetivos RP^n são representantes de geradores, e para as dimensões restantes foi mostrado em [5] que as variedades do tipo

$$S^i \times \mathbb{C}P^j / \sim$$

onde $(z_1, z_2) \sim (-z_1, \overline{z_2})$, são representantes de geradores com i e j apropriados. Tais variedades são denominadas variedades de Dold $P(i, j)$.

Assim, o teorema acima diz que qualquer variedade M é cobordante à uma união disjunta de variedades, com cada uma delas sendo um produto cartesiano envolvendo espaços projetivos pares e variedades de Dold, conforme acima especificado.

2.3. Cobordismo Singular

Os conceitos abaixo podem ser encontrados em [2].

Definição 2.3.1. Seja X um espaço topológico. Uma variedade singular em X é um par (M^n, f) com M^n uma variedade fechada e $f : M^n \to X$ uma função contínua. Dizemos que (M^n, f) borda se existe (W^{n+1}, F), com W^{n+1} variedade fechada, $\partial W^{n+1} = M^n$ e $F : W^{n+1} \to X$ uma extensão de f.

Definição 2.3.2. Dizemos que duas variedades singulares (M^n, f) e (V^n, g) são cobordantes se $(M^n \cup V^n, f \cup g)$ borda.

Mostra-se que a relação é de equivalência no conjunto das variedades singulares n-dimensionais. Denotamos por $[M^n, f]$ a classe de equivalência de (M^n, f), e por $\mathcal{N}_n(X)$ o conjunto de tais classes de equivalência.

Se $\mathcal{N}_*(X) = \displaystyle\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(X)$, então $\mathcal{N}_*(X)$ possui uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado dada pelas operações

$$\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_*(X) \to \mathcal{N}_*(X), \text{ que associa } ([M^m], [V^n, f]) \to [M^m \times V^n, g] \ ,$$

com $g(x, y) = f(y)$.

$$\mathcal{N}_*(X) \times \mathcal{N}_*(X) \to \mathcal{N}_*(X), \text{ que associa } ([M^m, f], [V^n, g]) \to [M^m \cup V^n, f \cup g].$$

Definiremos a seguir os números característicos de uma variedade singular, os quais, assim como no caso de variedades, classificam a menos de cobordismo as variedades singulares para X sendo CW-complexo.

Seja (M^n, f) uma variedade singular em X. Para cada $h \in H^m(X)$ com $0 \leq m \leq n$, o inteiro módulo 2

$$\left\langle w_{i_1}(M^n) \dots w_{i_j} f^*(h), \sigma(M^n) \right\rangle$$

com $f^* : H^m(X) \to H^m(M^n)$ sendo o homomorfismo induzido de f em cohomologia e $i_1 + i_2 + \cdots + i_j = n - m$, é chamado de número característico de (M^n, f).

Teorema 2.3.3. *Seja X um CW-complexo finito. Então uma variedade singular, (M^n, f), borda se, e somente se, seus números característicos são nulos.*

Prova:. Veja ([2], pg:56, 17.3).

□

Corolário 2.3.4. *Seja X um CW-complexo finito. Então duas variedades singulares em X são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.*

Observação 2.3.5. Para $h = 1 \in H^0(X)$, os números característicos de f correspondentes à h, coincidem com os números característicos de M, em particular se $X = \{ponto\}$ então os números característicos de f coincidem com os números característicos de M.

2.4. Cobordismo de Fibrados

Definição 2.4.1. Dizemos que um fibrado vetorial k-dimensional $\xi^k \to M^n$ sobre uma variedade fechada M^n *borda* se existe um fibrado vetorial k-dimensional $\zeta^k \to W^{n+1}$ sobre uma variedade W^{n+1} compacta com bordo, tal que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\zeta^k|_{M^n} = \xi^k$. Dois fibrados vetoriais k-dimensionais $\xi^k \to M^n$ e $\eta^k \to V^n$ são cobordantes se a união disjunta $(\xi^k \to M^n) \cup (\eta^k \to V^n)$ borda.

Fixados k e n, existe uma bijeção natural entre o conjunto das classes de cobordismo de fibrados vetoriais k-dimensional, $\xi^k \to M^n$ e $\mathcal{N}_n(BO(k))$, onde $BO(k)$ é o espaço classificante para fibrados k-dimensionais.

A bijeção é dada por

$$[\xi^k \to M^n] \longrightarrow [M^n, f],$$

com f sendo uma função classificante para $\xi^k \to M^n$. A inversa é

$$[M^n, f] \longrightarrow [\overline{f}(v^k) \to M^n],$$

onde $v^k \to BO(k)$ é o fibrado universal k-dimensional.

Considerando as operações

$$\begin{aligned} [\xi^k \to M^n] + [\mu^k \to V^n] &= [\xi^k \cup \mu^k \to M^n \cup V^n]; \\ [V^n].[\xi^k \to M^n] &= [\overline{p_2}(\xi^k) \to V^n \times M^n], \end{aligned}$$

onde p_2 é a projeção na segunda coordenada, mostra-se que a bijeção acima é um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos.

Assim, podemos ver os elementos de $\mathcal{N}_*(BO(k))$ como classes de cobordismo de fibrados vetoriais k-dimensionais.

O elemento neutro $[\xi^k \to M^n] = 0 \in \mathcal{N}_n(BO(k))$ é a classe contendo os fibrados k-dimensionais triviais sobre variedades que bordam.

De acordo com o Teorema 2.3.3, um elemento $[\xi^k \to M^n]$ é determinado por seus números característicos. Assim, se f é uma função classificante para ξ^k, temos para cada $h \in H^m(BO(k))$ e partição $i_1 + \cdots + i_s = n - m$, o seguinte número característico:

$$\langle w_{i_1}(M^n) \dots w_{i_s}(M^n) f^*(h), \sigma(M^n) \rangle.$$

Sabe-se que $H^*(BO(k))$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[v_1, v_2, \dots, v_k]$ com v_i sendo a i-ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal k-dimensional, $\mu^k \to BO(k)$. Assim, h é da forma $\sum v_{j_1} \dots v_{j_l}$ e portanto

$$f^*(h) = \sum f^*(v_{j_1}) \dots f^*(v_{j_l}).$$

Sabemos que $f^*(v_i) = w_i(\xi^k)$ e para cada monômio básico $v_{j_1} \dots v_{j_l}$ temos

$$f^*(v_{j_1}) \dots f^*(v_{j_l}) = w_{j_1}(\xi^k) \dots w_{j_l}(\xi^k).$$

Segue que os números característicos da forma

$$\left\langle w_{i_1}(M^n) \dots w_{i_s}(M^n) w_{j_1}(\xi^k) \dots w_{j_l}(\xi^k), \sigma(M^n) \right\rangle$$

com $i_1 + \dots + i_s + j_1 + j_2 + \dots + j_l = n$, caracterizam a classe de cobordismo de ξ^k.

Definição 2.4.2. Os números característicos do fibrado ξ^k são dados por

$$\left\langle w_{i_1}(M^n) \dots w_{i_s}(M^n) w_{j_1}(\xi^k) \dots w_{j_l}(\xi^k), \sigma(M^n) \right\rangle \in \mathbb{Z}_2$$

com $i_1 + \dots + i_s + j_1 + j_2 + \dots + j_l = n$.

Das consideração acima temos o seguinte corolário do Teorema 2.3.3:

Corolário 2.4.3. *Um fibrado $\xi^k \to M^n$ é cobordante se todos os seus números característicos são nulos. Além disso, dois fibrados são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.*

□

Exemplo 2.4.4. Para cada $n \geq 1$, seja $\gamma^d \to K_d P^n$ o fibrado linha canônico sobre $K_d P^n$. Assim, $W(\gamma^d) = 1 + \alpha_d$ e temos o seguinte número característico

$$\left\langle w_d(\gamma^d)^n, \sigma(K_d P^n) \right\rangle = \langle \alpha_d^n, \sigma(K_d P^n) \rangle = 1 \in \mathbb{Z}_2.$$

Portanto, pelo corolário anterior, γ^d não borda, mesmo $K_d P^n$ sendo cobordante para n ímpar.

2.5. Cobordismo de Ações

Seja G um grupo de Lie compacto. Cada par da forma (Φ, M^n) denotará uma ação C^∞, $\Phi : G \times M^n \to M^n$ em uma variedade fechada M^n.

Definição 2.5.1. Dizemos que uma ação (Φ, M^n) borda equivariantemente, se existem uma variedade compacta W^{n+1} com bordo $\partial W^{n+1} = M^n$ e uma ação $\Psi : G \times W^{n+1} \to W^{n+1}$ com restrição $\Psi|_{M^n} = \Phi$. Dizemos que duas ações (Φ, M^n) e (Ψ, V^n) são $G-$cobordantes, se a união disjunta $(\Phi \cup \Psi, M^n \cup V^n)$ borda.

A relação de G-cobordismo de ações assim definida é uma relação de equivalência. Denotamos por $[\Phi, M^n]$ a classe de cobordismo de (Φ, M^n) e por $\mathcal{I}_n(G)$ a coleção das classes de cobordismo das G-ações nas variedades fechadas n-dimensionais.

Considere a seguinte operação

$$[\Phi, M^n] + [\Psi, V^n] = [\Phi \cup \Psi, M^n \cup V^n]$$

onde $(\Phi \cup \Psi)_{/M^n} = \Phi$ e $(\Phi \cup \Psi)_{/V^n} = \Psi$.

Com tal operação verifica-se que $\mathcal{I}_n(G)$ tem estrutura de grupo, o qual é denominado *grupo de G-cobordismo irrestrito n-dimensional*; quando restringimos à ações livres, o conjunto das classes de G-ações nas variedades fechadas n-dimensionais ainda possui estrutura de grupo, denominado *grupo de G-cobordismo principal n-dimensional*, denotado por $\mathcal{N}_n(G)$.

Se $\mathcal{I}_*(G) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_j(G)$, então $\mathcal{I}_*(G)$ possui uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo dada por

$$[M^n].[\Phi, V^n] = [\Psi, M^n \times V^n],$$

onde $\Psi(x, y) = (x, \Phi(y))$. Analogamente, $\mathcal{N}_*(G) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j(G)$ também possui uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo.

2.6. Sequência de Conner e Floyd

Se $G = \mathbb{Z}_2$, o elemento $[M, \Phi] \in \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ também será denotado por $[M, T]$, onde $T : M \to M$ é a involução correspondente ao gerador de $\mathbb{Z}_2$.

Definição 2.6.1. Seja (M^n, T) uma involução sem pontos fixos e considere o quociente $\frac{M}{T}$, o qual também é uma variedade fechada. Definimos o fibrado linha canônico associado a T como sendo $\lambda \xrightarrow{p} \frac{M}{T}$, onde o espaço total é $\frac{M^n \times \mathbb{R}}{(x,r) \sim (T(x), -r)}$ e $p([x, r]) = [x]$.

Teorema 2.6.2. *A associação $[M^n, T] \to [\lambda \to \frac{M^n}{T}]$ define um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$.*

Prova:. Vide ([2], pg 71).

□

Pelo teorema acima e Corolário 2.4.3, a classe de cobordismo da involução livre (M^n, T) em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ é caracterizada pelos números característicos do fibrado linha canônico $\gamma \to \frac{M}{T}$. Tais números são chamados de *números de involução de* (M^n, T).

Consideremos $\xi^k \to V^n$ um fibrado vetorial k-dimensional sobre uma variedade fechada V^n, com grupo $O(k)$ (grupo ortogonal), $k \geq 1$. Existe, então, o fibrado em esferas $S(\xi^k) \xrightarrow{p} V^n$, com fibra S^{k-1} e cujo espaço total $S(\xi^k)$ é uma variedade fechada $(n+k-1)$-dimensional.

A aplicação antipodal $A : S^{k-1} \to S^{k-1}$ comuta com todos os elementos de $O(k)$, portanto, podemos introduzir em $S(\xi^k)$ uma involução T, bem definida, sem pontos fixos, a qual restrita a cada fibra é a antipodal.

Referimo-nos ao par $(S(\xi^k), T)$ como sendo o *fibrado involução associado à* ξ^k.

Definição 2.6.3. Se $(S(\xi^k), T)$ é o fibrado involução associado a $\xi^k \xrightarrow{p} V^n$, então o *fibrado projetivo associado à* ξ^k, é dado por $RP(\xi^k) \xrightarrow{\bar{p}} V^n$, com fibra RP^{k-1}, espaço total $RP(\xi^k) = \frac{S(\xi^k)}{T}$ e projeção $\bar{p}([x]) = p(x)$.

Dada uma involução (M^n, T), com fibrado normal $\eta \to M^n$, então η pode ser escrito como $\eta = \cup \eta^{n-k} \to F^k$ com $\eta^{n-k} \to F^k$ sendo o fibrado normal restrito à F^k, onde F^k denota a união das componentes de F de dimensão k, $0 \leq k \leq n$.

Observe que $[\eta^{n-k} \to F^k]$ pode ser visto como um elemento de $\mathcal{N}_k(BO(n-k))$ e portanto $[\eta \to F] \in \mathcal{M}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{N}_{n-k}(BO(k))$.

Denotemos por $\mathcal{M}_* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{M}_i$. Assim, se (M, T) é uma involução com fibrado normal $\eta \to F$, então $[\eta \to F] \in \mathcal{M}_*$.

Temos então a função $j_* : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{M}_*$ dada por

$$j_*[M^n, T] = [\eta \to F] = \sum_{k=0}^{n} [\eta^{n-k} \to F^k].$$

Se $\eta \to F$ é um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada F, define-se

$$\partial : \mathcal{M}_* \to \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2),$$

por $\partial[\eta \to F] = 0$, se η é nulo, e $\partial[\eta \to F] = [S(\eta), A]$, se η não é o fibrado nulo.

Além de verificar que j_* e ∂ estão bem definidos, Conner e Floyd mostraram em [2] que j_* e ∂ são homomorfismos de $\mathcal{N}_*$-módulos e compõem uma sequência exata curta.

Teorema 2.6.4. *A sequência*

$$0 \to \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \mathcal{M}_* \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2) \to 0$$

é exata.

Prova:. Vide ([2], pg: 88, 25.2).

□

Definição 2.6.5. Se (M, T) é uma involução fixando F, então o fibrado normal $\eta \to F$ é chamado *Fixed-data* de (M, T).

A sequência acima fornece informações sobre a existência de involuções cujo fixed-data é um determinado fibrado $\eta \to F$.

De fato, se $\eta \to F$ é o fibrado normal de uma involução (M, T) fixando F, temos pela sequência de Conner e Floyd que $[\eta] = j_*[M, T]$.
Assim,

$$\partial([\eta \to F]) = (\partial \circ j_*)[M, T] = 0.$$

Portanto, se $\partial([\eta \to F]) \neq 0$, então não existe involução (M, T) com fibrado normal $\eta \to F$.

Na demonstração do Teorema 2.6.4 é provado que, se $\partial([\eta \to F]) = 0$, então η é realizado como o fixed-data de uma involução (M, T), e não apenas cobordante à um fibrado que é realizado como fixed-data. Em particular, temos que um fibrado cobordante à um fixed-data também é um fixed-data.
Dessa forma obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.6.6. *Um fibrado $\eta \to F$ é o fixed-data de uma involução (M, T) se, e somente se, $\partial[\eta \to F] = 0$.*

□

Observação 2.6.7. Segue do corolário anterior e Teorema 2.6.2 que $\eta \to F = \cup_{k=0}^{n} \eta^{n-k} \to F^k$ é um fixed-data se, e somente se, todos os números de involução de $\gamma \to RP(\eta)$ são nulos.

Corolário 2.6.8. *Seja $\eta \to F = (\eta^{n-i} \to F^i) \cup (\eta^{n-j} \to F^j)$, fibrado normal de uma involução. Se η^{n-i} é um fixed-data, então η^{n-j} é um fixed-data.*

Prova:. $0 = \partial([\eta \to F]) = \partial([\eta^{n-i} \to F]) + \partial([\eta^{n-j} \to F]) = \partial([\eta^{n-j} \to F])$. □

Como vimos acima, informações sobre $\gamma \to RP(\eta)$ resultam em informações sobre a existência de involuções com fibrado normal η. Observe que para termos informações sobre os números de $\gamma \to RP(\eta)$ precisamos conhecer a estrutura de cohomologia e as classes de Stiefel-Whitney de $RP(\eta)$.

Para obter tais informações lançamos mão do seguinte teorema:

Teorema 2.6.9. *(Borel-Hirzebruch) Sejam $\eta^k \to F$ um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada, e c é a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado linha $\lambda \to RP(\eta^k)$. Então $H^*(RP(\eta))$ é um $H^*(F)$-módulo livre graduado com base $1, c, \ldots, c^{k-1}$ e a classe total de Stiefel-Whitney de $RP(\eta^k)$ é dada por*

$$W(RP(\eta^k)) = W(F).[(1+c)^k + w_1(\eta^k)(1+c)^{k-1} + \cdots + w_k(\eta^k)].$$

Além disso, temos a seguinte relação

$$c^k + c^{k-1}w_1(\eta^k) + \cdots + w_k(\eta^k) = 0.$$

2.7. Fórmula de Conner

Seja $\eta^k \to F^n$ um fibrado vetorial k-dimensional ($k \geq 1$) sobre uma variedade fechada e conexa, com

$$W(\eta^k) = 1 + v_1 + \cdots + v_k.$$

Vimos que $H^*(RP(\eta^k))$ é um $H^*(F^n)$-módulo livre gerado por $\{1, c, \ldots, c^{k-1}\}$, com a relação $c^k = c^{k-1}v_1 + \cdots + v_k$. Assim, se $a_n \in H^n(M^n)$ é tal que $a_n c^{k-1} = 0$, então $a_n = 0$. Além disso, como $H^n(M^n)$ e $H^{n+k-1}(RP(\eta^k))$ são isomorfos à $\mathbb{Z}_2$ temos

$$\langle a_n, \sigma(M^n) \rangle = \left\langle a_n c^{k-1}, \sigma(RP(\eta^k)) \right\rangle.$$

Se $a_s \in H^s(M^n)$ com $n < s < n+k-1$ então $\left\langle a_s c^{n+k-s-1}, \sigma(RP(\eta^k)) \right\rangle = 0$ pois $a_s = 0$.

Vejamos agora como calcular $\left\langle a_s c^{n+k-s-1}, \sigma(RP(\eta^k)) \right\rangle$, para $0 \leq s < n$.

Seja $\overline{v}_i$ o termo homogêneo de grau de i de $\overline{W}(\eta^k)$ onde

$$\overline{W}(\eta^k) = \tfrac{1}{W(\eta^k)} = 1 + \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_n \text{ é a classe dual.}$$

Temos que os $\overline{v}_i$ são obtidos da equação $W(\eta^k).\overline{W}(\eta^k) = 1$, ou seja,

$$\overline{v}_j = \sum_{i=1}^{j} v_i \overline{v}_{j-i} \quad \text{e} \quad \overline{v}_0 = 1.$$

Utilizando essa expressão e usando iteradamente a relação $c^k = c^{k-1}v_1 + \cdots + v_k$, obtemos

$$c^{j+k-1} = \overline{v}_j c^{k-1} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{j+t} c^{k-1-t},$$

para certos $b_{j+t} \in H^{j+t}(F^n)$.
Em particular, temos

$$a_s c^{n-s+k-1} = a_s \left(\overline{v}_{n-s} c^{k-1} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{n-s+t} c^{k-1-t} \right) = a_s \overline{v}_{n-s} c^{k-1},$$

pois, para $t \geq 1$, $a_s b_{n-s+t} \in H^{n+t}(F^n)$ se anula. Portanto, para $0 \leq s \leq n$, temos a seguinte fórmula:

$$\left\langle a_s c^{n-s+k-1}, \sigma(RP(\eta^k)) \right\rangle = \langle a_s \overline{v}_{n-s}, \sigma(F^n) \rangle,$$

denominada *Fórmula de Conner* (vide [3]).

2.8. Involuções fixando $K_dP^m \cup K_dP^n$, $K_dP^m \cup K_eP^n$

Nesta seção, apresentaremos alguns lemas que serão importantes para a análise dos possíveis fixed-data de involuções fixando uma união de espaços projetivos, e apresentaremos alguns resultados conhecidos a respeito da correspondente classificação.

Além disso, exibiremos modelos de involuções fixando $K_dP^m \cup K_dP^n$ e $K_dP^m \cup K_eP^n$, onde K_jP, $j = 1, 2, 4$ são respectivamente os espaços projetivos real $\mathbb{R}P$, complexo $\mathbb{C}P$ e quaterniônico $\mathbb{H}P$.

Essas involuções serão fundamentais no que se refere à classificação de $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $K_dP^m \cup K_dP^n$, apresentada nos Capítulos 4,5 e a classificação de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^m \cup K_eP^n$, feita no Capítulo 6.

Observe que, se (M^r, T) e (V^r, S) são involuções fixando respectivamente K_dP^m e K_dP^n, então $(M^r, T) \cup (V^r, S)$ é uma involução fixando $K_dP^m \cup K_dP^n$.

Além disso, se (M^r, T) e (V^r, S) são involuções fixando respectivamente $K_dP^m \cup \{ponto\}$ e $K_eP^n \cup \{ponto\}$, então $(M^r \cup V^r, T \cup S) = (M^r, T) \cup (V^r, S)$ é equivariantemente cobordante à uma involução (N^r, U) fixando $K_dP^m \cup K_eP^n$.
Defina a seguinte involução

$$\tau_n^m : K_dP^{n+m+1} \to K_dP^{n+m+1},$$

onde $\tau_n^m[x_0, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_n] = [-x_0, \ldots, -x_m, y_0, \ldots, y_n]$.
Observe que $F_{\tau_n^m} = K_dP^m \cup K_dP^n$.
Além disso, τ_n^m possui fibrado normal

$$\big((n+1)\gamma^d \to K_dP^m\big) \cup \big((m+1)\gamma^d \to K_dP^n\big),$$

onde γ^d é o fibrado linha canônico (vide [2]).

Os lemas a seguir serão importantes para estudar possíveis fixed-datas de involuções fixando uma união de espaços projetivos.

Lema 2.8.1. *Se $\eta \to K_dP^{2n}$ e $\mu \to K_dP^{2n}$ são fibrados cobordantes, então $W(\eta) = W(\mu)$.*
Prova:. *Se $n = 0$ então os fibrados são triviais e portanto $W(\eta) = W(\mu) = 1$.*
Logo podemos supor $n > 0$. Como $W(K_dP^{2n}) = (1+\beta_d)^{2n+1}$, temos $w_d(K_dP^{2n}) = \alpha_d$.
Além disso, como η e μ são cobordantes, eles possuem os mesmos números,
ou seja,

$$\left\langle \alpha_d^{2n-j} w_{jd}(\eta), \sigma(K_dP^{2n}) \right\rangle = \left\langle \alpha_d^{2n-j} w_{jd}(\mu), \sigma(K_dP^{2n}) \right\rangle.$$

Assim, $w_{jd}(\eta) = 0$ se, e somente se, $w_{jd}(\mu) = 0$, para todo $0 \leq j \leq 2n$, de onde seque que $W(\eta) = W(\mu)$.

□

Observação 2.8.2. Da estrutura do anel de Grothendieck dos espaços projetivos real, complexo e quaterniônico, sabe-se que se $\eta \to K_dP^n$ é qualquer fibrado vetorial, então sua classe de Stiefel-Whitney é da forma $W(\eta) = (1+\alpha_d)^p$, para algum $p \geq 0$, onde α_d é o gerador de $H^d(K_dP^n)$.

Lema 2.8.3. *Um k-fibrado vetorial $\eta^k \to K_dP^{2n+1}$ borda se, e somente se, $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p$, com p par.*

Prova:. Suponha que $\eta^k \to K_dP^{2n+1}$ borda. Então todos os números característicos de η^k são nulos.

Assim, p é par, caso contrário, teríamos o número característico não nulo proveniente de $w_d^{2n+1}(\eta^k) = \alpha_d^{2n+1}$.

Por outro lado, se p é par então

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Além disso,

$$W(K_dP^{2n+1}) = (1+\alpha_d)^{2n+2} = (1+\alpha_d^2)^{n+1}.$$

Em ambas as classes, todas as potências de α_d são pares.

Observe que todo número característico de $\eta^k \to K_dP^{2n+1}$ provém de um produto de classes onde ao menos uma tal classe envolve potência ímpar de α_d, e pelo cálculo anterior tais classes são nulas. Portanto, todos os números de η^k são nulos.

Segue do Corolário 2.4.3 que $\eta^k \to K_dP^{2n+1}$ borda.

□

Recordemos o operador

$$\Gamma : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$$

apresentado por Conner e Floyd em [2].

Dado $[M^n, T] \in \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$, considere as seguintes involuções comutantes definidas em $S^1 \times M^n$:

$$T_1 : S^1 \times M^n \to S^1 \times M^n \;\; e \;\; T_2 : S^1 \times M^n \to S^1 \times M^n,$$

com $T_1(z, x) = (-z, T(x))$ e $T_2(z, x) = (\overline{z}, x)$.

Como T_1 é livre de pontos fixos, $V^{n+1} = (S^1 \times M^n/T_1)$ ainda é uma variedade fechada. Além disso, como T_1 e T_2 são comutantes, T_2 induz uma involução $\overline{T}_2$ em V^{n+1}. Definimos então $\Gamma[M^n, T] = [V^{n+1}, \overline{T}_2]$.

Se (M^n, T) é uma involução com fibrado normal $\eta \to F$ e M^n borda, então Γ pode ser usado para obter uma involução cujo fixed data é $\eta \oplus R \to F$, com a variedade subjacente tendo portanto dimensão $n + 1$.

Este resultado segue do seguinte teorema, encontrado em ([2], pg.90, 25.3).

Teorema 2.8.4. *Se $\eta \to F$ é fixed-data de uma involução (M^n, T), então o fixed-data de $\Gamma(M^n, T) = (V^{n+1}, \overline{T}_2)$ é $(\eta \oplus R \to F) \cup (R \to M^n)$.*

□

Se M^n borda, $R \to M^n$ borda como fibrado, e então $\Gamma(M^n, T)$ é equivariantemente cobordante à uma involução (W^{n+1}, S) com fixed-data $\eta \oplus R \to F$.

De fato,

$$[\eta \oplus R \to F] = [\eta \oplus R \to F] + [R \to F] = [(\eta \oplus R \to F) \cup (R \to F)],$$

além disso, pelo teorema anterior, $(\eta \oplus R \to F) \cup (R \to F)$ é fixed-data de $\Gamma(M^n, T)$, então lembrando que um fibrado cobordante a um fixed-data também pode ser realizado como fixed-data, concluímos que existe uma involução (W^{n+1}, S) tendo $\eta \oplus R \to F$ como fixed-data.

Neste caso, como $j_*([W^{n+1}, S]) = j_*(\Gamma\,[M, T])$ e j_* é um monomorfismo, então

$$\Gamma\,[M^n,T]=[W^{n+1},S].$$

Mais ainda, temos o seguinte corolário

Corolário 2.8.5. *Se (M^n,T) é uma involução com fibrado normal $\eta\to F$, então $\eta\oplus R\to F$ é fixed-data de uma involução (W^{n+1},S) se, e somente se, M^n borda. Neste caso, $\Gamma\,[M^n,T]=[W^{n+1},S]$.*

Prova:. Se $\eta\oplus R\to F$ é o fixed-data de (W^{n+1},S), então

$$j_*([W^{n+1},S]+\Gamma\,[M^n,T])=[\eta\oplus R\to F]+[\eta\oplus R\to F]+[R\to M^n]=[R\to M^n]=0.$$

Portanto, M^n borda.

□

Outro importante resultado é o teorema de estabilidade para involuções enunciado abaixo, o qual foi mostrado em ([2], pg.85, 24.3).

Teorema 2.8.6. *Se $\eta\oplus R\to F$ é fixed-data de uma involução, então $\eta\to F$ também é realizado como fixed-data de uma involução.*

□

Pelos resultados acima, podemos dizer que $\Gamma^j([K_dP^{2n+1},\tau^0_{2n}])$ possui um representante com fixed-data

$$\left(\gamma^d\oplus R^j\to K_dP^{2n}\right)\cup\left(R^{(2n+1)d+j}\to\{ponto\}\right),$$

se, e somente se,

$$\epsilon\Gamma^i\,[K_dP^{2n+1},\tau^0_{2n}]=0,\;\;1\leq i\leq j,$$

onde $\epsilon\,[V^r,S]=[V^r]$.

Em [15], Pergher e Stong, exibiram um menor limitante $l(2n)$ para o qual

$$\epsilon\Gamma^{l(2n)}\,[RP^{2n+1},\tau^0_{2n}]\neq 0.$$

Posteriormente, em [21], esse limitante também foi calculado para o caso complexo e quaterniônico; explicitamente, tais resultados são abaixo descritos.

Teorema 2.8.7. ***(Stong-Pergher)*** *Se (M^{2n+k},T) é uma involução fixando $F=RP^{2n}\cup\{ponto\}$, então*

$$k \leq l(2n) = \begin{cases} 3, & t = 1, \\ 2^t, & t > 1, \end{cases}$$

onde $2n = 2^t(2j+1)$*. Além disso, existem involuções realizando cada tal* k*.*

□

Do teorema anterior, e das considerações acima, concluímos que

$$l(2n) = \begin{cases} 2 & ,t = 1 \\ 2^t - 1 & ,t > 1 \end{cases}$$

Teorema 2.8.8. ***(A. Ramos e P. Pergher)*** *Se* $2nd = 2^t(2j+1)$*, então*

$$l_d(2n) = \begin{cases} 2d & ,t = 1 \\ d(2^t - 1) & ,t > 1 \end{cases}$$

é o menor natural com a propriedade

$$\begin{cases} \epsilon\Gamma^i\left[K_dP^{2n+1}, \tau^0_{2n}\right] = 0 & ,0 \leq i \leq l_d(2n) - 1, \\ \epsilon\Gamma^{l_d(2n)}\left[K_dP^{2n+1}, \tau^0_{2n}\right] \neq 0. \end{cases}$$

□

Em [2], Conner e Floyd mostraram que, se (M^r, T) é uma involução fixando $F_T = RP^{2n+1}$, então (M^r, T) borda equivariantemente. Além disso, em [23] Stong mostrou que se (M^r, T) é uma involução fixando $F_T = RP^{2n}$, então (M^r, T) é equivariantemente cobordante à $(RP^{2n} \times RP^{2n}, twist)$. Posteriormente, em ([21], pg.46), A. Ramos e P. Pergher estenderam os resultados acima para a versões complexa e quaterniônica.

Explicitamente, os resultados obtidos foram

Teorema 2.8.9. *Se* (M^r, T) *é uma involução fixando* K_dP^{2m+1}*, então* (M^r, T) *borda equivariantemente.*

□

Teorema 2.8.10. *Se* (M^r, T) *é uma involução fixando* K_dP^{2n}*,* $d = 1, 2, 4$*,* $r > 2nd$ *e* $n > 0$*, então* (M^r, T) *é equivariantemente cobordante à*

$$(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist).$$

□

Outro resultado de ([21], pg.71) foi estender a classificação feita por Royster em [22], para as versões complexa e quaterniônica. Explicitamente, os resultados obtidos foram

Teorema 2.8.11. *Se* (M^r, T) *é uma involução fixando* $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$*, então as únicas possibilidades para a classe de cobordismo* (M^r, T) *são:*

(a) $[K_dP^{2n}, Id]$;

(b) $[K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, Twist]$;

(c) $\left[K_dP^{2n+2m+2}, \tau_{2n}^{2m+1}\right]$;

(d) $\left[K_dP^{2m+2}, \tau_{2m+1}^{0}\right] + \Gamma^{r-(2n+1)d}\left[K_dP^{2n+1}, \tau_{2n}^{0}\right]$*, com* $0 \leq r-(2n+1)d \leq l_d(2n)$*.*

□

A técnica para abordar tal classificação pode ser assim descrita:
Seja (M^r, T) involução com fixed-data

$$\eta = \begin{array}{ccc} \xi^k & & \mu^l \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_dP^{2n} & \cup & K_dP^{2m+1}. \end{array}$$

Da sequência de Conner e Floyd, temos $\partial(\eta) = \partial(\xi^k) + \partial(\mu^l) = 0$, assim

$$\begin{aligned} \xi^k \to K_dP^{2n} \text{é um fixed-data} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial(\xi^k \to K_dP^{2n}) = 0 \\ \Leftrightarrow \partial(\mu^l \to K_dP^{2m+1}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mu^l \to K_dP^{2m+1} \text{é um fixed-data.} \end{aligned}$$

Se $\xi^k \to K_dP^{2n}$ é um fixed-data de uma involução (N, S), temos pelo Teorema 2.8.10 que (N, S) é equivariantemente cobordante à $(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$.

Como veremos mais adiante no Teorema 3.3.2, $(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$ possui o fibrado tangente $\tau^{2nd} \to K_dP^{2n}$ como fixed-data, assim segue da sequência de Conner e Floyd que $\xi^k \to K_dP^{2n}$ é cobordante ao fibrado tangente $\tau^{2nd} \to K_dP^{2n}$.

Neste caso pelo lema 2.8.1 podemos afirmar que ξ^k tem a mesma classe de Stiefel-Whitney do fibrado tangente τ^{2nd}.

Além disso, se $\xi^k \to K_dP^{2n}$ é um fixed-data então $\mu^l \to K_dP^{2m+1}$ é um fixed-data, e pelo Teorema 2.8.9 temos que μ^k borda equivariantemente.

No caso de $\xi^k \to K_dP^{2n}$ não ser um fixed-data, então $\mu^l \to K_dP^{2m+1}$ não é um fixed-data, e neste caso, mostra-se que

$$W(\xi^k) = W((2m+2)\gamma^d) \quad \text{e} \quad W(\mu^l) = W((2n+1)\gamma^d),$$

onde $(2m+2)\gamma^d \to K_dP^{2n}$ e $(2n+1)\gamma^d \to K_dP^{2m+1}$ são somas de fibrados linhas canônicos.

Encerraremos essa seção, fazendo algumas observações que permitem mostrar que existe uma involução fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, cujo fixed-data é

$$\left(\gamma^d \to K_dP^{2m+1}\right) \cup \left(\gamma^e \to K_eP^{2n}\right).$$

Observe que os fibrados normais de $(K_dP^{2m+2}, \tau_0^{2m+1})$ e $(K_eP^{2n+1}, \tau_0^{2n})$ são respectivamente

$$\left(\gamma^d \to K_dP^{2m+1}\right) \cup \left(R^{(2m+2)d} \to \{ponto\}\right) \quad e \quad \left(\gamma^e \to K_eP^{2n}\right) \cup \left(R^{(2n+1)e} \to \{ponto\}\right).$$

Se $(2m+2)d = (2n+1)e$, então $(M^r, T) = (K_dP^{2m+2} \cup K_eP^{2n+1}, \tau_0^{2m+1} \cup \tau_0^{2n})$ é equivariantemente cobordante à uma involução (N^r, S) fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, cujo fibrado normal é $\gamma^d \to K_dP^{2m+1} \cup \gamma^e \to K_eP^{2n}$.
De fato,

$$\begin{aligned}
j_*\left[M^r, T\right] &= j_*\left[(K_dP^{2m+2}, \tau_0^{2m+1})\right] + j_*\left[(K_eP^{2n+1}, \tau_0^{2n})\right] \\
&= \begin{bmatrix} \gamma^d \\ \downarrow \\ K_dP^{2m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R^{(2m+2)d} \\ \downarrow \\ \{ponto\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^e \\ \downarrow \\ K_eP^{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R^{(2n+1)e} \\ \downarrow \\ \{ponto\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \gamma^d \\ \downarrow \\ K_dP^{2m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^e \\ \downarrow \\ K_eP^{2n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \gamma^d & & \gamma^e \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_dP^{2m+1} & \cup & K_eP^{2n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, pela sequência de Conner e Floyd existe uma involução (N^r, S) equivariantemente cobordante à $(K_dP^{2m+2} \cup K_eP^{2n+1}, \tau_0^{2m+1} \cup \tau_0^{2n})$ cujo fibrado normal é

$$\gamma^d \to K_dP^{2m+1} \cup \gamma^e \to K_eP^{2n}.$$

Capítulo

3

Cobordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-Ações

3.1. Introdução

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados importantes da teoria de Z_2^k-ações, com destaque para o Teorema 3.2.10 e a caracterização do fixed-data de uma Z_2^k-ação dada no Teorema 3.2.11. Também apresentaremos alguns modelos de Z_2^k-ações, que serão criadas de forma indutiva a partir de involuções (M, T), e denotadas por $\Gamma_t^k(M, T)$.

Veremos que o fixed-data dessas ações são dadas em termos do fixed-data de (M, T), e que essas ações serão fundamentais para as classificações feitas nos capítulos seguintes.

Para finalizar o capítulo, demonstraremos na última seção alguns resultados sobre classes características de fibrados sobre espaços projetivos pares e ímpares, além de demonstrar o Teorema 3.4.1, o qual foi a principal ferramenta do nosso trabalho.

3.2. Preliminares

Definição 3.2.1. Dizemos que uma lista de fibrados vetoriais $(M^n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ sobre M^n, borda simultaneamente se, e somente se, existe uma variedade W^{n+1} e uma lista de fibrados $(W^{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ sobre W^{n+1}, com $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e $\xi_{j_{|M^n}} = \eta_j$, $1 \leq j \leq s$.

Definição 3.2.2. Dizemos que duas listas $(M, \xi_1, \ldots, \xi_s)$ e $(N, \mu_1, \ldots, \mu_s)$ são simultaneamente cobordantes se, e somente se, a união disjunta $(M \cup N, \xi_1 \cup \mu_1, \ldots, \xi_s \cup \mu_s)$ borda simultaneamente.

Lema 3.2.3. *O cobordismo simultâneo de fibrados é uma relação de equivalência.*

Denotaremos por $[M, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s]$ a classe de cobordismo simultâneo de $(M, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s)$ e por $\mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\ldots,r_s}$ o conjunto de classes de equivalência de cobordismo simultâneo de listas de s-fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \ldots, r_s$ sobre variedades n-dimensionais.

Além disso, usaremos $\mathcal{N}_{*;r_1,r_2,...,r_s}$ para denotar o conjunto das classes de equivalência de cobordismo simultâneo de listas de s-fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \ldots, r_s$ sobre variedades de qualquer dimensão.

Teorema 3.2.4. *A aplicação* $I^n : \mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\ldots,r_s} \longrightarrow \mathcal{N}_n(BO(r_1) \times BO(r_1) \times \cdots \times BO(r_s))$ *que associa*

$$[M^n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s] \longrightarrow [M^n, f],$$

onde $f = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$*, com* $f_i : M^n \to BO(r_i)$ *a função classificante para* η_i*, é bijetora.*

Logo, podemos estender I^n *à uma aplicação bijetora*

$$I^* : \mathcal{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_s} \longrightarrow \mathcal{N}_*(BO(r_1) \times BO(r_1) \times \cdots \times BO(r_s)).$$

Utilizando I^* *podemos induzir uma estrutura de* $\mathcal{N}_*$*-módulo em* $\mathcal{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_s}$*, o qual é chamado grupo de bordismo simultâneo.*

Prova:. Mostraremos primeiramente que I^n é bem definida.

Sejam $\alpha_1 = [M^n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$, $\alpha_2 = [V^n, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s] \in \mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\ldots,r_s}$ com $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ e considere $f = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$, com f_i função classificante para η_i, e $g = (g_1, g_2, \ldots, g_s)$, com g_i função classificante para ν_i.

Como $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, então existe $(W^{n+1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ com

$$\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n \ , \ \ \xi_{i|_{M^n}} = \eta_i \ \text{ e } \ \xi_{i|_{V^n}} = \nu_i$$

Tomando $h = (h_1, h_2, \ldots, h_s)$ com $h_i : W^{n+1} \to BO(r_i)$ função classificante para ξ_i, temos pela definição, que $(M^n, h_{|_{M^n}})$ é cobordante à $(V^n, h_{|_{V^n}})$, assim

$$\begin{aligned} I^n\left[M^n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s\right] &= [M^n, f] = \left[M^n, h_{|_{M^n}}\right] \\ &= \left[V^n, h_{|_{V^n}}\right] = [V^n, g] \\ &= I^n\left[V^n, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\right]. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que I^n é injetora.

Sejam $\alpha_1 = [M^n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$, $\alpha_2 = [V^n, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s] \in \mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\ldots,r_s}$ com

$$I^n(\alpha_1) = I^n(\alpha_2).$$

Assim, $[M^n, f] = [V^n, g]$, ou seja, existem W^{n+1} e $h = (h_1, h_2, \ldots, h_s)$ tais que

$$\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n, \ h_{|_{M^n}} = f \ \text{ e } \ h_{|_{V^n}} = g.$$

Considere agora, $\xi_i = \overline{h}_i(\gamma^{r_i})$ onde γ^{r_i} é o fibrado universal sobre $BO(r_i)$. Segue que $(W^{n+1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ estabelece o cobordismo simultâneo e, portanto, $[\alpha_1] = [\alpha_2]$.

Para mostrar que I^n é sobrejetora, dado $[M^n, f] \in \mathcal{N}_*(BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s))$, considerando a lista de fibrados $\{\overline{f}_1(\gamma^{r_1}), \ldots, \overline{f}_s(\gamma^{r_s})\}$ sobre M^n, temos

$$I^n\left[M^n, \overline{f}_1(\gamma^{r_1}), \ldots, \overline{f}_s(\gamma^{r_s})\right] = [M^n, f].$$

$\square$

Pelo Teorema 2.3.3, $[M^n, f]$ é determinada pelos seus números característicos, assim pelo teorema anterior $[M^n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$ também será determinada pelos números característicos correspondentes pela aplicação I^n.

A seguir, estudaremos a forma como são obtidos os números característicos de

$$[M^n, \nu_1, \ldots, \nu_s] \in \mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\ldots,r_s},$$

e para isso precisaremos de alguns fatos conhecidos.

Pelo Teorema de Kunneth, se X, Y são espaços topológicos tais que

$$H^*(X) \text{ é a álgebra polinomial } \mathbb{Z}_2[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p] \text{ e}$$
$$H^*(Y) \text{ é a álgebra polinomial } \mathbb{Z}_2[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q],$$

então $H^*(X \times Y)$ é é a álgebra polinomial sobre $\mathbb{Z}_2$, gerada por

$$\alpha_i \times \beta_j, \;\; i = 1, 2, \ldots, p \;\text{ e }\; j = 1, 2, \ldots, q.$$

Sabe-se que $H^*(BO(k))$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ com v_i sendo a i-ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal k-dimensional, $\gamma^k \to BO(k)$.
Assim, um elemento básico h de $H^p(BO(r_1) \times BO(r_2) \cdots \times BO(r_s))$ é da forma

$$(v_{i_1})_1 \times \cdots \times (v_{i_t})_t$$

com $i_1 + i_2 + \cdots + i_t = p$.

Portanto, utilizando a aplicação I^n, obtemos os seguintes números característicos para a classe $[M^n, \eta_1, \ldots, \eta_s]$

$$\begin{aligned}
\langle w_{j_1}(M^n) \ldots w_{j_k}(M^n) f^* h, \sigma(M^n)\rangle &= \langle w.(f_1, f_2, \ldots, f_t)^* \left((v_{i_1})_1 \times \cdots \times (v_{i_t})_t\right), \sigma(M^n)\rangle \\
&= \langle w.f_1^*(v_{i_1})_1 \ldots f_t^*(v_{i_t})_t, \sigma(M^n)\rangle,
\end{aligned}$$

com $i_1 + i_2 + \cdots + i_t + j_1 + \cdots + j_k = n$.

Como $f_j^*(v_{i_j})_j$ é a i_j-ésima classe do fibrado $\eta_j \to M^n$, então um número característico para $[M^n, \eta_1, \ldots, \eta_s]$ é da forma

$$\langle w_{j_1}(M^n)\dots w_{j_k}(M^n)w_{i_1}(\eta_1)\dots w_{i_t}(\eta_t),\sigma(M^n)\rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

com $i_1+i_2+\cdots+i_t+j_1+\cdots+j_k=n$

Observação 3.2.5. Se $(M,\xi_1,\dots,\xi_s)$ e $(N,\mu_1,\dots,\mu_s)$ são simultaneamente cobordantes, então ξ_i e μ_i são cobordantes para cada $1\leq i\leq s$. Além disso, se tais listas são simultaneamente cobordantes podemos concluir que $(M,\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_s)$ é cobordante à $(N,\mu_1\oplus\cdots\oplus\mu_s)$.

No entanto, se para cada i, ξ_i é cobordante à μ_i, não implica que as listas são simultaneamente cobordantes, como pode ser comprovado no exemplo abaixo.

Exemplo 3.2.6. Seja $\xi\to S^1$ o fibrado linha canônico e considere os fibrados

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \overline{p_1}(\xi)\to S^1\times S^1,\\ \eta_2 &= \overline{p_2}(\xi)\to S^1\times S^1.\end{aligned}$$

onde p_i são as projeções.

Mostraremos que η_1 e η_2 são cobordantes mas $(S^1\times S^1,\eta_1,\eta_2)$ não borda simultaneamente.

Sejam $\alpha\times 1$ e $1\times\beta$ os geradores de $H^1(S^1\times S^1)$,

$$W(\xi)=1+c,\ \ c\in H^1(S^1)\quad \text{e}\quad W(\eta_1)=1+p_1^*(c)=1+\alpha\times 1.$$

Assim, os números de Stiefel Whitney de $[S^1\times S^1,\eta_1]$ são

$$\begin{aligned}\left\langle w_1^2(\eta_1),\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle &= \left\langle \alpha^2\times 1,\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle=0;\\ \left\langle w_1(\eta_1)w_1(S^1\times S^1),\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle &= \left\langle (\alpha\times 1).0,\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle=0;\\ \left\langle w_1^2(S^1\times S^1),\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle=0 &\quad , \quad \left\langle w_2(S^1\times S^1),\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle=0.\end{aligned}$$

Além disso, temos $W(\eta_2)=1+p_2^*(c)$.
Portanto os números de Whitney de $[S^1\times S^1,\eta_2]$ são

$$\begin{aligned}\left\langle w_1^2(\eta_2),\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle &= \left\langle 1\times\beta^2,\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle=0;\\ \left\langle w_1(\eta_2)w_1(S^1\times S^1),\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle &= \left\langle (1\times\beta).0,\sigma(S^1\times S^1)\right\rangle=0.\end{aligned}$$

Como tais números são nulos, então $[S^1\times S^1,\eta_1]$ e $[S^1\times S^1,\eta_2]$ bordam.
Porém, o número

$$\langle w_1(\eta_1)w(\eta_2), \sigma(S^1 \times S^1)\rangle = 1,$$

ou seja, $(S^1 \times S^1, \eta_1, \eta_2)$ não borda simultaneamente.

Lema 3.2.7. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma involução linear. Os conjuntos $F_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / T(x) = x\}$ e $F_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / T(x) = -x\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$.*

Prova:. Claramente F_1 e F_2 são subespaços de $\mathbb{R}^n$ e $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Além disso, dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos $x = y + z$ onde $y = \frac{x-T(x)}{2}$ e $z = \frac{x+T(x)}{2}$ com $T(y) = -y$ e $T(z) = z$.

□

Suponha agora que existam k involuções lineares $T_1, T_2, \ldots, T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que comutam entre si. Para cada inteiro $0 \leq j \leq 2^k - 1$ seja $B_j = b_1 \ldots b_{k-1}b_k$ a representação binária de j com k algarismos. Considerando a coleção $A_j = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com $a_i = (-1)^{b_i}$ temos o seguinte lema

Lema 3.2.8. *$\epsilon_{A_j} = \{v \in \mathbb{R}^n / T_i(v) = a_i v\}$, $1 \leq j \leq 2^k - 1$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{0 \leq j \leq 2^k-1} \epsilon_{A_j}$.*

Prova:. Prova feita em ([7], pg.34). □

Seja agora $(M, \Phi) = (M, T_1, T_2, \ldots, T_k)$ uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação.
Fixado $x \in F_\Phi$, temos as respectivas derivadas em x, $T_i'(x) : TM_x \to TM_x$.
Logo,

$$T_i \circ T_i = Id \Rightarrow (T_i \circ T_i)' = Id' = Id \Rightarrow T_i'(T_i(x)) \circ T_i'(x) = Id \Rightarrow T_i'(x) \circ T_i'(x) = Id.$$

Além disso, dados $T_i, T_j, i, j \in \{1, \ldots, k\}$

$$(T_i \circ T_j)'(x) = (T_j \circ T_i)'(x) = T_j'(T_i(x)) \circ T_i'(x) = T_j'(x) \circ T_i'(x) = (T_j \circ T_i)'(x).$$

Portanto, para cada $x \in F_\Phi$, temos a ação (TM_x, G') onde

$$G' = \{T_1'(x), \ldots, T_k'(x)\} \cong \mathbb{Z}_2^k.$$

Usando o lema 3.2.8, para cada $x \in F_\Phi$, concluímos que

$$\tau M_{|F_\Phi} \cong \bigoplus_{0 \leq j \leq 2^k-1} \epsilon_{A_j},$$

onde $A_j = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com $a_i = \pm 1$.

Por outro lado, sabemos que

$$\tau M_{|_{F_\Phi}} \cong \eta \oplus \tau F_\Phi,$$

com $\eta \to F_\Phi$ fibrado normal de F_Φ em M.

Além disso, por [2], para cada $x \in F_\Phi$, existe $D_r(0)$ (disco em torno de $0 \in \tau M_x$ e invariante sobre $G^{'}$), o qual é equivariantemente difeomorfo à

$$(B_r(x), T_1(x), T_2(x), \ldots, T_k(x)),$$

onde $B_r(x)$ é um disco em torno de x e invariante sobre G.

Seja *exp* o referido difeomorfismo(chamado de rebatimento exponencial).
Como

$$\epsilon_{(1,1,\ldots,1)_x} = \{v \in \tau M / T_i^{'}(v) = v, \forall\ i\ \},$$

então $(D_r(0) \cap \epsilon_{(1,1,\ldots,1)_x})$ é rebatido por *exp* em uma carta local de F_Φ em torno de x e $\epsilon_{(1,1,\ldots,1)_x} = (\tau F_\Phi)_x$.

Portanto, $\tau M_{|_{F_\Phi}} \cong \displaystyle\bigoplus_{0 \leq j \leq 2^k - 1} \epsilon_{A_j}$ e $\epsilon_{(1,1,\ldots,1)_x} = (\tau F_\Phi)_x$, de onde segue que

$$\eta \cong \bigoplus\nolimits_{0 \leq j \leq 2^k - 1} \epsilon_{A_j},$$

onde A_j percorre todas as sequências $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i = \pm 1$, com exceção de $(1, 1, \ldots, 1)$. Além disso, ϵ_{A_j} é caracterizado como sendo o sub-fibrado de η onde $T_i^{'}$ atua como a_i.

Pelo rebatimento exponencial acima mencionado, temos uma descrição local da ação de G em uma vizinhança tubular $\mathcal{V}$ de F_Φ, a qual é invariante sob G e com raio suficientemente pequeno de tal sorte que a exponencial seja um difeomorfismo equivariante $(D(\eta), G^{'}) \to (\mathcal{V}, G)$.

Assim, podemos identificar η com $\mathcal{V}$ e um elemento de $z \in \mathcal{V}$ pode ser visto como uma $2^k - 1$-upla $(x_{A_1}, x_{A_2}, \ldots, x_{A_{2^k-1}})$ onde cada $T_i \in G$ atua em x como

$$(x_{A_1}, x_{A_2}, \ldots, x_{A_{2^k-1}}) \to (a_i(A_1)x_{A_1}, a_i(A_2)x_{A_2}, \ldots, a_i(A_{2^k-1})x_{A_{2^k-1}})\ .$$

Definição 3.2.9. O fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(M, T_1, T_2, \ldots, T_k)$ é dado por

$$\eta \cong \bigoplus_{0 \leq j \leq 2^k - 1} \epsilon_{A_j},$$

onde A_j percorre todas as sequências $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i = \pm 1$, com exceção de $(1, 1, \ldots, 1)$.

A conexão entre o bordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-ações e o cobordismo simultâneo é devido à Stong, o qual em [24] mostrou o seguinte teorema :

Teorema 3.2.10. *Duas $\mathbb{Z}_2^k$-ações são cobordantes se, e somente se, seus fixed-data forem simultaneamente cobordantes.*

□

A seguir, mostraremos outra forma de indexar o fixed-data de $(M, T_1, \ldots, T_k)$, através de homomorfismos $\rho : Z_2^k \to Z_2$.

Para cada sequência $A = (a_1, \ldots, a_k)$, podemos criar o homomorfismo $\rho_A : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$, dado por $\rho(T_i) = a_i$.

Por outro lado, dado $\rho : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$ homomorfismo não nulo, e tomando a sequência $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ onde $a_i = \rho(T_i)$, temos $\rho = \rho_A$.

Assim, $A \to \rho_A$ é uma associação biunívoca entre a coleção de sequências não nulas e a coleção de homomorfismos não triviais.

Observe que se definirmos ϵ_{ρ_A} sendo o sub-fibrado onde cada T_i atua nas fibras como $\rho_A(T_i)$, temos $\epsilon_A = \epsilon_{\rho_A}$.

Dado $\rho \in \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$ homomorfismo não nulo, temos que $ker(\rho) \cong \mathbb{Z}_2^{k-1}$, assim faz sentido tomarmos a ação restrição $\Psi = \Phi_{|_{Ker(\rho)}}$ e temos o seguinte resultado, o qual fornece uma caracterização mais geométrica para ϵ_ρ

Teorema 3.2.11. *Seja ϵ o fibrado normal de F_Φ em F_Ψ. Então $\epsilon = \epsilon_\rho$.*

Prova:. Como ϵ_ρ é caracterizado como sendo o sub-fibrado onde cada $T \in \mathbb{Z}_2^k$ age nas fibras como $\rho(T)$, basta mostrarmos que cada tal T age nas fibras de ϵ como $\rho(T)$.

Como ϵ é o fibrado normal de F_Φ em F_Ψ, e $\Psi = \Phi_{|_H}$, então cada $T \in H = Ker(\rho)$ age nas fibras de ϵ como identidade.

Além disso, como $H = Ker(\rho)$, então $\rho(T) = 1$. Portanto, T age das fibras de ϵ como $\rho(T)$ para cada $T \in H$.

Por outro lado, se $T \notin H = Ker(\rho)$, então (F_Ψ, T) é uma involução fixando F_Φ e T age como a antipodal em uma vizinhança tubular apropriada de F_Φ em F_Ψ .

Como $T \notin H = Ker(\rho)$, então $\rho(T) = -1$, ou seja, T age nas fibras de ϵ como $\rho(T)$.

□

3.3. $\mathbb{Z}_2^k$-Ações Especiais

Nesta seção definiremos algumas $\mathbb{Z}_2^k$-ações em variedades e explicitaremos seus respectivos fixed-data. Tais ações serão obtidas indutivamente a partir de involuções e terão papel fundamental nas classificações obtidas nos capítulos seguintes.

Definição 3.3.1. Seja M variedade e $T : M \times M \to M \times M$ dada por $T(x, y) = (y, x)$; $(M \times M, T)$ é uma $\mathbb{Z}_2$-ação chamada "twist".

Teorema 3.3.2. *O fixed-data da ação "twist" é $(F_{twist}, \tau M)$ onde F_{twist} é a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in M \times M/x = y\}$ a qual é difeomorfa à M, e τM é o fibrado tangente à M.*

Prova:. Claramente $F_{twist} = \{(x, y) \in M \times M/x = y\} = \Delta \cong M$, assim basta mostrarmos que o fibrado normal $\eta \to F_{twist}$ é equivalente à τM.

Sabemos que $\tau(M \times M) \cong \tau M \oplus \tau M$ e que $\tau(M \times M)_{|\Delta} \cong \eta \oplus \tau\Delta$.
Como $\tau\Delta$ é o sub-fibrado de $\tau(M \times M)_{|\Delta}$ cuja fibra sobre (x, x) são os vetores da forma $(v, v) \in \tau(M \times M)_{(x,x)}$, então tomando $\theta \to \Delta$ sub-fibrado de $\tau(M \times M)_{(x,x)}$ tal que a fibra sobre (x, x) são os vetores da forma $(-w, w) \in \tau(M \times M)_{(x,x)}$, temos que $\tau(M \times M)_{(x,x)} \cong \theta \oplus \tau\Delta$.

Logo, η é equivalente à θ, o qual é equivalente ao fibrado tangente $\tau M \to M$ via a aplicação fibrada $(v, v) \to (-v, v)$.

□

Definiremos a seguir uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação a qual é uma generalização da $\mathbb{Z}_2$-ação "twist" e que chamaremos de $\mathbb{Z}_2^k$-twist.

Definição 3.3.3. Definiremos a ação $\mathbb{Z}_2^k$-twist de forma indutiva. Aqui $(M)^r$ denotará o produto cartesiano de r-cópias de M.
Para $k = 1$ defina como em 3.3.1.

Supondo definida a $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-twist, $((M)^{2^{k-1}}, T_1, \ldots, T_{k-1})$ defina

$$\Gamma_k^k(M, T) = ((M)^{2^k}, T_1', \ldots, T_k'),$$

onde

$$((M)^{2^k}, T_1', \ldots, T_{k-1}') = ((M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}, T_1 \times T_1, \ldots, T_{k-1} \times T_{k-1})$$

e T_k' atua em $(M)^{2^k} = (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$ como $T_k'(x, y) = (y, x)$.

É um exercício simples mostrar que T_i', $1 \leq i \leq k$, são involuções comutantes, definindo assim uma Z_2^k-ação em $(M)^{2^k}$.

As ações Γ_t^j descritas abaixo foram introduzidas por P. Pergher em [11], e também aparecem em [17].

Em sua tese de doutorado [7], R. de Oliveira detalhou didaticamente pormenores sobre as propriedades de tais ações.

Teorema 3.3.4. *O fixed-data da $\mathbb{Z}_2^k$-"twist" é $(M, \tau M, \ldots, \tau M)$($2^k - 1$ cópias de τM). Ou seja, para qualquer $\rho : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$, $\epsilon_\rho = \tau M$ com τM sendo o fibrado tangente de M.*

Prova:. Prova feita em [[7], pg 42].

□

A seguir descreveremos outra $\mathbb{Z}_2^k$-ação especial, a qual é obtida de uma involução (M, T).

Definição 3.3.5. Dada uma involução (M, T) com fixed-data $\eta \to F$, definiremos de forma indutiva uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre $(M)^{2^{k-1}}$ a partir de (M, T), a qual denotaremos por $\Gamma_k^k(M, T)$.

Para $k = 1$ definimos $\Gamma_1^1(M, T) = (M, T)$. Para $k > 1$, suponha definida $\Gamma_{k-1}^{k-1}(M, T) = (M^{2^{k-2}}, T_1, \ldots, T_{k-1})$. Defina então

$$\Gamma_k^k(M, T) = (M^{2^{k-1}}, T_1', \ldots, T_k'),$$

onde $(M^{2^{k-1}}, T_1', \ldots, T_{k-1}') = (M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}}, T_1 \times T_1, \ldots, T_{k-1} \times T_{k-1})$ e T_k' atua em $M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}}$ como $T_k(x, y) = (y, x)$.

Teorema 3.3.6. *Os fibrados do fixed-data de $\Gamma_k^k(M, T)$ tem a seguinte descrição: para cada $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$,*

- *Se $a_1 = -1$, então $\epsilon_A = \eta$, onde $\eta \to F$ é o fixed-data de (M, T);*
- *Se $a_1 = 1$, então $\epsilon_A = \tau$, onde $\tau \to F$ é o fibrado tangente.*

Prova:. Prova feita em [[7], pg 43]. □

Teorema 3.3.7. *Seja $(M, \Phi) = (M, T_1, \ldots, T_k)$ uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed data*

$$(F_\Phi; \epsilon_{A_1}, \ldots, \epsilon_{A_{2^k-1}}).$$

Então os fibrados do fixed-data de $\mathbb{Z}_2^{k+1}$-ação $(M, \Psi) = (M, T_1, T_2, \ldots, T_k, Id)$ tem a seguinte descrição: para cada $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{k+1})$

- *Se* $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) = A \neq (1, 1, \ldots, 1)$ *e* $b_{k+1} = 1$*, então* $\epsilon_B = \epsilon_A$*;*
- *Se* $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) = A \neq (1, 1, \ldots, 1)$ *e* $b_{k+1} = -1$*, então* $\epsilon_B = 0$*;*
- *Se* $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (1, 1, \ldots, 1)$ *e* $b_{k+1} = -1$*, então* $\epsilon_B = 0$.

Prova:. Prova feita em [[7], pg 44]. □

Aplicando o teorema anterior repetidas vezes, obtemos o seguinte corolário

Corolário 3.3.8. *Seja* $(M, \Phi) = (M, T_1, \ldots, T_k)$ *uma* $\mathbb{Z}_2^k$*-ação com fixed data*

$$(F_\Phi; \epsilon_{A_1}, \ldots, \epsilon_{A_{2^k-1}}).$$

Então os fibrados do fixed-data da $\mathbb{Z}_2^{k+s}$*-ação* $(M, \Psi) = (M, T_1, T_2, \ldots, T_k, Id, Id, \ldots, Id)$ *(acréscimo de* s *identidades) tem a seguinte descrição: para cada* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{k+1})$

- *Se* $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) = A \neq (1, 1, \ldots, 1)$ *e* $b_j = 1$ *para* $j > k$*, então* $\epsilon_B = \epsilon_A$*;*
- *Se* $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) = A \neq (1, 1, \ldots, 1)$ *e* $b_j = -1$ *para algum* $j > k$*, então* $\epsilon_B = 0$*;*
- *Se* $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (1, 1, \ldots, 1)$ *e* $b_j = -1$ *para algum* $j > k$*, então* $\epsilon_B = 0$.

□

Aplicando o Corolário 3.3.8 às ações $\Gamma_k^k(M, T)$, obtemos novas ações:

Definição 3.3.9. Seja (M, T) involução com fibrado normal $\eta \to F$ e $1 \leq t \leq k$ então definimos uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação da seguinte forma se $\Gamma_t^t(M, T) = ((M)^{2^t-1}, T_1, \ldots, T_t)$ então $\Gamma_t^k(M, T) = (T_1, \ldots, T_t, Id, \ldots, Id)$ (Acréscimo de $k - t$ identidades à Γ_t^t)

Pelo Teorema 3.3.6 e Corolário 3.3.8, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.10. *O fixed-data de* $\Gamma_t^k(M, T)$ *tem a seguinte descrição em termos dos* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$

- *Se* $a_j = 1$ *para* $j > t$ *e se* $a_1 = -1$*, então* $\epsilon_A = \eta$*, onde* $\eta \to F$ *é o fibrado normal de* (M, T)*;*
- *Se* $a_j = 1$ *para* $j > t$ *e se* $a_1 = 1$*, então* $\epsilon_A = \tau$*, onde* $\tau \to F$ *é o fibrado tangente;*

- *Se $a_j = -1$ para algum $j > t$, então $\epsilon_A = 0$.*

□

Encerraremos essa seção fazendo uma observação sobre $\mathbb{Z}_2^k$-ações que são equivariantemente cobordante à uma ação do tipo $\Gamma_t^k(M,T)$.

Observação 3.3.11. Sejam (M,T) involução cujo fibrado normal é $\eta \to F$ e $(W, S_1, \ldots, S_k)$ uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data

$$\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \epsilon_\rho \to F, \text{ com } \mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$$

com a seguinte descrição

- Se $\rho(T) = -1$ e $\rho(T_j) = 1$ para $j > t$, então $\epsilon_\rho = \eta$;
- Se $\rho(T) = 1$ e $\rho(T_j) = 1$ para $j > t$, então $\epsilon_\rho = \tau$;
- Se $\rho(T_i) = -1$ para algum $j > t$, então $\epsilon_\rho = 0$.

Pelo Teorema 3.3.10 e pela caracterização feita no Teorema 3.2.11, o fixed-data de $(W, S_1, \ldots, S_k)$ é simultaneamente cobordante ao fixed-data de $\Gamma_t^k(M,T)$.

Segue do Teorema 3.2.10 que $(W, S_1, \ldots, S_k)$ e $\Gamma_t^k(M,T)$ são equivariantemente cobordantes.

3.4. Fixed-Data de $\mathbb{Z}_2^k$-Ações

Nesta seção mostraremos algumas propriedades que o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação devem satisfazer (veja Teorema 3.4.1), além de mostrar que existem várias "cópias" de $\mathbb{Z}_2^2$-ações no fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ações, ou seja, informações sobre o fixed-data de $\mathbb{Z}_2^2$-ações podem fornecer importantes informações do fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (veja lema 3.4.6).

O Teorema 3.4.1 mostrado a seguir é fundamental para a realização deste trabalho, e foi obtido através de uma considerável melhora do resultado obtido em ([13] Teorema 1, pg.2145).

A melhora em questão foi a simplificação de uma das condições necessárias e suficientes para que uma determinada lista de fibrados $(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_3}) \to F$ seja um fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

As condições necessárias e suficientes dadas pelo teorema a seguir desempenha, no contexto de $\mathbb{Z}_2^2$-ações, o mesmo papel que o homomorfismo ∂ da sequência de Conner e

Floyd desempenha no estudo de involuções, pois possibilita afirmar, caso a lista satisfaça as condições, que existe uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data sendo a lista em questão.

Teorema 3.4.1. $(F;\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ *é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação se, e somente se, as seguintes listas bordam:*

(a) $(\lambda_1, \epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \to RP(\epsilon_1)$*;*

(b) $(\lambda_2, \epsilon_1 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_2)) \to RP(\epsilon_2)$*;*

(c) $(\lambda_3, \epsilon_1 \oplus (\epsilon_2 \otimes \lambda_3)) \to RP(\epsilon_3)$*;*

onde $\lambda_i \to RP(\epsilon_i)$*,* $i = 1,2,3$ *são os respectivos fibrados linhas.*

Prova:. Segue de ([13] Teorema 1, pg.2145), que $(F;\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação se, e somente se, valem os itens (a), (c) e a seguinte lista borda

$$\begin{array}{c} (\lambda', \lambda_1, 0) \\ \downarrow \\ RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \end{array} \quad \cup \quad \begin{array}{c} (\lambda_2, \epsilon_1 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_2), 0) \\ \downarrow \\ RP(\epsilon_2) \end{array} ,$$

onde λ' é o fibrado linha sobre $RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1))$ e $RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1))$ fibra sobre $RP(\epsilon_1)$.

Assim, para demonstrar o resultado basta mostrarmos que

$$(\lambda', \lambda_1, 0) \to RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1))$$

borda simultaneamente.

Pelo cobordismo simultâneo do item (a), existem $\gamma \to W$ e $\eta \to W$ tais que

$$\partial W = RP(\epsilon_1), \quad \gamma_{|_{RP(\epsilon_1)}} = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \eta_{|_{RP(\epsilon_1)}} = \epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1).$$

Considere agora $\widetilde{\lambda} \to RP(\eta)$ o fibrado linha associado à η, e $\overline{p}(\gamma) \to RP(\eta)$ o pullback do fibrado $\gamma \to W$ pelo fibrado projetivo $p : RP(\eta) \to W$.

Observe que

$$\partial RP(\eta) = RP(\eta_{|_{\partial W}}) = RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)),$$

e $\overline{p}(\gamma)$ restrito à $\partial RP(\eta) = RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1))$ é igual ao pullback do fibrado restrição $\gamma_{|_{\partial W}} = \lambda_1$ por $p_{|_{\partial RP(\eta)}} : \partial RP(\eta) \to \partial W$, ou seja,

$$\begin{array}{c} \overline{p}(\gamma)_{|_{\partial RP(\eta)}} \\ \downarrow \\ RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \end{array} = \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \downarrow \\ RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \end{array} .$$

Por fim, temos

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\lambda}_{|\partial RP(\eta)} & & \lambda' \\ \downarrow & = & \downarrow \\ RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) & & RP(\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \end{array}$$

□

Observação 3.4.2. Se $(\lambda_1, \epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1) \to RP(\epsilon_{\rho_1}))$ borda simultaneamente, então

$$(\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_1 \oplus (\epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1))) \to RP(\epsilon_{\rho_1})$$

deve bordar equivariantemente, pois todos os números característicos da lista anterior são em particular números característicos de $(\lambda_1, \epsilon_2 \oplus (\epsilon_3 \otimes \lambda_1)) \to RP(\epsilon_{\rho_1})$.

Para fazermos uso do teorema anterior, na classificação de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$, feita no capítulo 4, precisaremos de um lema que será útil nos cálculos de números característicos.

Lema 3.4.3. *Se $\eta^k \to K_dP^{2m+1}$ é um fibrado k-dimensional com classe $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^q$, então*

$$W(RP(\eta^k)) = (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^{k-qd}(1 + \alpha_d + c^d)^q.$$

Prova:. Como $W(\eta^k) = 1 + v_1 + \cdots + v_k = (1 + \alpha_d)^q$, segue de Borel-Hirsebruch que

$$W(RP(\eta^k)) = (1 + \alpha_d)^{2m+2}\left[(1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}v_1 + \cdots + v_k\right].$$

Se $d > k$, então $(1 + \alpha_d)^q$=1. Assim, podemos assumir que $q = 0$ e temos

$$\begin{aligned} W(RP(\eta^k)) &= (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^k = (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^{k-qd}(1 + \alpha_d + c^d)^q \\ &= (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^{k-qd}(1 + \alpha_d + c^d)^q. \end{aligned}$$

Se $d \leq k$ e $k \geq qd$, então

$$\begin{aligned} &(1 + \alpha_d)^{2m+2}\left[(1 + c)^k + (1 + c)^{k-1}v_1 + \cdots + v_k\right] \\ &= (1 + \alpha_d)^{2m+2}\left[(1 + c)^k + (1 + c)^{k-d}v_d + \cdots + v_{qd}(1 + c)^{k-qd}\right] \\ &= (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^{k-qd}\left[(1 + c)^{qd} + (1 + c)^{(q-1)d}v_d + \cdots + v_{qd}\right] \\ &= (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^{k-qd}(1 + \alpha_d + c^d)^q. \end{aligned}$$

Se $d \leq k$ e $k < qd$, então

$$(1+\alpha_d)^{2m+2}\left[(1+c)^k+(1+c)^{k-1}v_1+\cdots+v_k\right]$$
$$=(1+\alpha_d)^{2m+2}\left[(1+c)^k+(1+c)^{k-d}v_d+\cdots+v_k\right]$$
$$=(1+\alpha_d)^{2m+2}(1+c)^{k-qd}\left[(1+c)^{qd}+(1+c)^{(q-1)d}v_d+\cdots+v_k(1+c)^{qd-k}\right].$$

Como $v_i=0$ para $i>k$, segue que

$$(1+\alpha_d)^{2m+2}(1+c)^{k-qd}\left[(1+c)^{qd}+(1+c)^{(q-1)d}v_d+\cdots+v_k(1+c)^{qd-k}\right]$$
$$=(1+\alpha_d)^{2m+2}(1+c)^{k-qd}\left[(1+c)^{qd}+(1+c)^{(q-1)d}v_d+\cdots+v_k(1+c)^{qd-k}+\cdots+v_{qd}\right]$$
$$=(1+\alpha_d)^{2m+2}(1+c)^{k-qd}(1+\alpha_d+c^d)^q.$$

□

Se $(\epsilon_1,\epsilon_2,\eta^k)\to K_dP^{2m+1}$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então temos do Teorema 3.4.1 e da observação 3.4.2 que

$$(\lambda_3\oplus\cdots\oplus\lambda_3\oplus(\epsilon_1\oplus(\epsilon_2\otimes\lambda_3)))\to RP(\eta^k)$$

borda equivariantemente.

Tomando-se $2^S-(k-qd)$ somas de Whitney do fibrado λ_3, para 2^S suficientemente grande, temos

$$(1+c)^{2^S-(k-qd)}W(RP(\eta^k))=(1+\alpha_d)^{2m+2}(1+\alpha_d+c^d)^q.$$

Além disso, os termos de dimensão j de $(1+c)^{2^S-(k-qd)}W(RP(\eta^k))$ são somas e produtos de classes características de $W(RP(\eta^k))$ e λ_3.

Assim, se tomarmos um termo de dimensão j de $(1+c)^{2^S-(k-qd)}W(RP(\eta^k))$ e multiplicarmos com classes características de λ_3, $(\epsilon_1\oplus(\epsilon_2\otimes\lambda_3))$ e $W(RP(\eta^k))$ de tal forma que o produto tenha dimensão $(2m+1)d+k-1$, e avaliarmos em $\sigma(RP(\eta^k))$ obteremos uma soma de números característicos da lista

$$(\lambda_3,(\epsilon_1\oplus(\epsilon_2\otimes\lambda_3)))\to RP(\eta^k).$$

Portanto, pelo Teorema 3.4.1, este produto evaluado em $\sigma(RP(\eta^k))$ deve ser nulo.

Como faremos muitos cálculos com classes obtidas da forma acima, faremos uso da seguinte definição

Definição 3.4.4. Dizemos que x é um *termo característico* se ele é formado por somas e produtos de classes características de fibrados.

Lema 3.4.5. *Se $\{K_dP^{2m+1};\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\}$ é uma lista de fibrados, onde cada ϵ_i borda, então existe uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação que borda equivariantemente, cujo fixed-data é formado por $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)\to K_dP^{2m+1}$.*

Prova:. Como cada $\epsilon_i \to K_dP^{2m+1}$ borda, segue do lema 2.8.3 que

$$W(\epsilon_i) = (1+\alpha_d)^{p_i},\ p_i \text{ par.}$$

Além disso, temos

$$W(K_dP^{2m+1}) = (1+\alpha_d)^{2m+2} = (1+\alpha_d^2)^{m+1}.$$

Logo, todas as classes características não nulas da lista $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \to K_dP^{2m+1}$ são formadas por potências pares de α_d.

Mostraremos a seguir que todos os números característicos da lista acima são nulos. Considere $t_{1,1}, \dots, t_{1,l_1}, t_{2,1}, \dots, t_{2,l_2}, t_{3,1}, \dots, t_{3,l_3}$ com

$$t_{1,1} + \dots + t_{1,l_1} + t_{2,1} + \dots + t_{2,l_2} + t_{3,1} + \dots + t_{3,l_3} = 2m+1.$$

Assim, pelo menos um $t_{i,j}$ é ímpar, e pelas considerações acima podemos concluir que o correspondente $w_{t_{i,j}.d}$ é 0.
Segue que

$$w_{(t_{1,1}).d}(\epsilon_1).\dots.w_{(t_{1,l_1}).d}(\epsilon_1).w_{(t_{2,1}).d}(\epsilon_2).\dots.w_{(t_{2,l_2}).d}(\epsilon_2).w_{(t_{3,1}).d}(\epsilon_3).\dots.w_{(t_{3,l_3}).d}(\epsilon_3) = 0,$$

ou seja, todo número característico da lista acima é nulo.

Como $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \to K_dP^{2m+1}$ borda simultaneamente, existem uma variedade $W^{(2m+1)d+1}$ e uma lista de fibrados $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \to W^{(2m+1)d+1}$ tais que

$$\partial(W^{(2m+1)d+1}) = K_dP^{2m+1} \quad \text{e} \quad \mu_i|_{K_dP^{2m+1}} = \epsilon_i.$$

Seja $\overline{\nu} : D(\nu) \to K_dP^{2m+1}$ o fibrado em discos de $\nu = (\epsilon_1 \oplus \epsilon_2 \oplus \epsilon_3) \to K_dP^{2m+1}$ e considere as seguintes funções T_1 e T_2:

$T_1 : D(\nu) \to D(\nu)$ que leva $(a_1, a_2, a_3) \in \overline{\nu}^{-1}(p)$, $p \in K_dP^{2m+1}$, em $T_1(a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_2, -a_3)$.

Como T_1 preserva os vetores de norma menor ou igual à 1, então T_1 esta bem definida. Além disso, temos $T_1^2 = Id$.

$T_2 : D(\nu) \to D(\nu)$ que leva $(a_1, a_2, a_3) \in \overline{\nu}^{-1}(p)$, $p \in K_dP^{2m+1}$, em $T_1(a_1, a_2, a_3) = (a_1, -a_2, -a_3)$.
Da mesma maneira T_2 é bem definida e $T_2^2 = Id$.

Observe que $(D(\nu), T_1, T_2)$ é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com conjunto de pontos fixos

$$F_{T_1} \cap F_{T_2} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \overline{\nu}^{-1}(p), p \in K_dP^{2m+1} : a_1 = a_2 = a_3 = 0\} \cong K_dP^{2m+1}.$$

Considere agora o fibrado em esferas $S(\mu) \to W^{(2m+1)d+1}$ de $\mu = (\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \to W^{(2m+1)d+1}$ e $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2 : S(\mu) \to S(\mu)$ involuções definidas respectivamente da mesma forma que T_1 e T_2.

Observe que $(S(\mu), \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$ é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação livre de pontos fixos e $\partial(S(\mu)) = S(\nu)$. Além disso, $(D(\nu), T_1, T_2)$ e $(S(\mu), \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$ são $\mathbb{Z}_2^2$-ações com

$$\partial(S(\mu)) = S(\nu) = \partial(D(\nu)).$$

Como $(D(\nu), T_1, T_2)$ coincide com $(S(\mu), \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$ no bordo, efetuando um cancelamento de bordo, obtemos uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (W, S_1, S_2), com W variedade sem bordo e $S_{i|_{D(\nu)}} = T_i$.

Como $(S(\mu), \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$ é livre de pontos fixos, temos

$$F_{S_k} = F_{T_k} \subset D(\nu),\ k = 1, 2.$$

Seja $(\eta_{(1,0)}, \eta_{(0,1)}, \eta_{(1,1)}) \to K_d P^{2m+1}$ fixed-data de (W, S_1, S_2).
Sabemos pelo Teorema 3.2.11 que

$\eta_{(1,0)}$ é caracterizado como sendo o fibrado em que $T_1' = T_1$ e $T_2' = T_2$ agem nas fibras respectivamente como antipodal e identidade,

$\eta_{(0,1)}$ é caracterizado como sendo o fibrado em que $T_2' = T_2$ e $T_1' = T_1$ agem nas fibras respectivamente como antipodal e identidade,

$\eta_{(1,1)}$ é caracterizado como sendo o fibrado em que $T_1' = T_1$ e $T_2' = T_2$ agem como antipodal nas fibras.

Por construção temos que $T_1' = T_1$ e $T_2' = T_2$ agem nas fibras de ϵ_{ρ_1} respectivamente como antipodal e identidade, ou seja, $\eta_{(1,0)} = \epsilon_1$.
Da mesma forma temos $\eta_{(0,1)} = \epsilon_2$ e $\eta_{(1,1)} = \epsilon_3$.

Além disso, como a lista $\{\epsilon_{\rho_i} \to K_d P^{2m+1}\}$ borda simultaneamente, temos pelo Teorema 3.2.10 que a $\mathbb{Z}_2^2$-ação (W, S_1, S_2) borda equivariantemente.

□

O lema a seguir é exatamente o lema 3.1 de [[19], pg. 104] e por ser uma das principais ferramentas da classificação de $\mathbb{Z}_2^k$-ações, daremos a seguir uma prova mais detalhada.

Lema 3.4.6. *Se (M, Φ, G) é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data*

$$(F_\Phi, \{\epsilon_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}),\ \mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$$

e $\Omega = \{\rho_a / a \in A\}$ é um subgrupo de $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, então existem subgrupos G_1 e G_2 tais que $G = G_1 \oplus G_2$, onde

$$G_2^\perp = \{\rho : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2 : \rho \text{ é trivial em } G_2\} = \Omega$$

e o fixed-data de $(G_1, F_{G_2}, \Phi|_{G_1})$ *é* $(F_\Phi, \{\nu_{\rho'}\}_{\rho' \in P'})$, $P' = Hom(G_1, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, $\nu_{\rho'} = \epsilon_\rho$, $\rho \in \Omega$ *e* $\rho_{|G_1} = \rho'$.

Prova:. Considere $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_t, \xi_1, \ldots, \xi_{k-t}\}$ base de $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ tal que $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_t\}$ é base de Ω.

Temos um isomorfismo natural de $\Psi : \mathbb{Z}_2^k \to Hom(Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$ dado por $T \to \Phi_T$, onde $\Phi(T)(\rho) = \rho(T)$ para todo $\rho \in Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$.

Seja $\{T_1, \ldots, T_t, S_1, \ldots, S_{k-t}\}$ a base de $\mathbb{Z}_2^k$ correspondente à base dual $\{\Phi_1^*, \ldots, \Phi_t^*, \xi_1^*, \ldots, \xi_{k-t}^*\}$ de $Hom(Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$ pela aplicação Ψ, e considere

$$G_1 = \langle T_1, \ldots, T_t \rangle \quad \text{e} \quad G_2 = \langle S_1, \ldots, S_{k-t} \rangle.$$

Afirmação 1: $G_2^\perp = \{\rho : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2 : \rho \text{ é trivial em } G_2\} = \Omega$.

Seja $\rho : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$ com ρ trivial em G_2, ou seja, $\rho(S_i) = 1, i = 1, \ldots, k-t$.
Se $\rho \notin \Omega$, então $\rho = \Phi_{i_1} \ldots \Phi_{i_r} \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_s}$ com $s \geq 1$ e para $j_r, r \in \{1, \ldots, s\}$, temos

$$1 = \rho(S_{j_r}) = \Psi(S_{j_r})(\rho) = \xi_{j_r}^*(\rho) = \xi_{j_r}^*(\Phi_{i_1} \ldots \Phi_{i_r} \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_s}) = \xi_{j_r}^*(\xi_{j_r}) = -1.$$

Portanto, $G_2^\perp \subset \Omega$.

Por outro lado, se $\rho \in \Omega$ então ρ é da forma $\Phi_{i_1} \ldots, \Phi_{i_r}$.
Dado $j \in \{1, \ldots, k-t\}$ e $i \in \{1, \ldots, t\}$, temos

$$\Phi_i(S_j) = \Psi(S_j)(\Phi_i) = \xi_j^*(\Phi_i) = 1.$$

Portanto, $\rho(S_j) = 1$ para $j \in \{1, \ldots, k-t\}$ e ρ é trivial em G_2.

Observe que $(F_{G_2}, \Phi_{|G_1})$ possui F_Φ como conjunto de pontos fixos.
Considere

$$(F_\Phi, \{\nu_{\rho'}\}_{\rho' \in P'}), \quad P' = Hom(G_1, \mathbb{Z}_2) - \{1\},$$

fixed-data de $(F_{G_2}, \Phi_{|G_1})$.
Mostraremos que $\nu_{\rho'} = \epsilon_\rho$, para algum $\rho \in \mathcal{P}$ tal que $\rho_{|G_1} = \rho'$ e $\rho \in \Omega$.

Seja $\nu_{\rho'}$ no fixed-data de $(F_\Phi, \{\nu_{\rho'}\}_{\rho' \in P'})$ e considere $\rho \in \mathcal{P}$ com $\rho_{|G_1} = \rho'$ e ρ agindo trivialmente em G_2.

Como ρ age trivialmente em G_2, então pela afirmação 1, $\rho \in \Omega$. Como $\nu_{\rho'}$ é fibrado normal de F_Φ em F_{G_2} e cada T age nas fibras de $\nu_{\rho'}$ como $\rho'(T)$, temos para cada $T \in G_2$ que $\rho'(T) = 1$.
Portanto, $\rho'(T) = \rho(T) = 1$ para cada $T \in G_2$.

Como ϵ_ρ é caracterizado como sendo o sub-fibrado do fixed-data de (M, Φ), onde cada $T \in \Phi$ age nas fibras como $\rho(T)$, devemos ter $\nu_{\rho'} = \epsilon_\rho$. □

Capítulo

4

$\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$

4.1. Introdução

Neste capítulo classificaremos a menos de cobordismo equivariante, as $\mathbb{Z}_2^k$-ações (M, Φ) cujo conjunto de pontos fixos é $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$, onde K_dP para $d = 1, 2, 4$ é respectivamente o espaço projetivo real, complexo e quaterniônico.

A classificação será descrita em termos das classes de cobordismo de involuções (M, T) que fixam $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$.

Explicitamente mostraremos que toda $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M, Φ) é equivariantemente cobordante à uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação do tipo $\Gamma_j^k(W, T)$ onde (W, T) é uma involução fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$.

4.2. Classificação de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$

Lema 4.2.1. *Seja $(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_3}) \to K_dP^{2n} \cup (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}) \to K_dP^{2m+1}$ fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, (M, Φ), com M conexa. Se U_{ρ_i} e V_{ρ_i} são as componentes do conjunto de pontos fixos do $Ker(\rho_i)$ contendo K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} respectivamente, então existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $U_{\rho_i} \cap V_{\rho_i} = \emptyset$. Neste caso, dizemos que ϵ_{ρ_i} e μ_{ρ_i} fixam separado, caso contrário, dizemos que fixam junto.*

Prova:. Se $U_{\rho_i} \cap V_{\rho_i} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, então $U_{\rho_i} = V_{\rho_i}$ e

$$dim(\epsilon_{\rho_i}) + 2nd = (2m+1)d + dim(\mu_{\rho_i}),\ i \in \{1, 2, 3\}.$$

Além disso, como $(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_3}) \to K_dP^{2n} \cup (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}) \to K_dP^{2m+1}$ é fixed-data, temos

$$2nd + dim(\epsilon_{\rho_1}) + dim(\epsilon_{\rho_2}) + dim(\epsilon_{\rho_3}) \quad = \quad (2m+1)d + dim(\mu_{\rho_1}) + dim(\mu_{\rho_2}) + dim(\mu_{\rho_3}).$$

Segue que

$$(*)\quad dim(\epsilon_{\rho_2}) + dim(\epsilon_{\rho_3}) \;=\; dim(\mu_{\rho_2}) + dim(\mu_{\rho_3}).$$

Suponha sem perda de generalidade que $2n < 2m+1$.

Como $dim(\epsilon_{\rho_i}) + 2nd = (2m+1)d + dim(\mu_{\rho_i})$, temos

$$dim(\epsilon_{\rho_i}) > dim(\mu_{\rho_i}),\ i = 1, 2, 3,$$

gerando um absurdo em $(*)$.

Portanto, existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $U_{\rho_i} \cap V_{\rho_i} = \emptyset$.

□

Lema 4.2.2. *Seja (M, Φ) uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, com fixed-data*

$$(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_3}) \to K_d P^{2n} \cup (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}) \to K_d P^{2m+1}.$$

Então, as possibilidades para $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i})$ são

- $\eta_1 = (0 \to K_d P^{2n}) \cup (\xi \to K_d P^{2m+1})$, *onde ξ borda;*
- $\eta_2 = (\tau^{2n} \to K_d P^{2n}) \cup (\xi \to K_d P^{2m+1})$, *onde ξ borda;*
- $\eta_3 = \big((2m+2)\gamma^d \to K_d P^{2n}\big) \cup \big((2n+1)\gamma^d \to K_d P^{2m+1}\big)$;
- $\eta_4 = \big(\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d} \to K_d P^{2n}\big) \cup \big(\gamma^d \to K_d P^{2m+1}\big)$.

Aqui estamos considerando fibrados com classes características iguais e fibra de mesma dimensão sendo fibrados iguais.

Prova:. Suponha que $(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_3}) \to K_d P^{2n} \cup (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}) \to K_d P^{2m+1}$ seja fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (M, Φ).

Se $U_{\rho_i} = V_{\rho_i}$, então tomando $T \notin Ker(\rho_i)$ temos (U_{ρ_i}, T) involução com fibrado normal $\epsilon_{\rho_i} \to K_d P^{2n} \cup \mu_{\rho_i} \to K_d P^{2m+1}$.

Pelo Teorema 2.8.11 as possibilidades para $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i})$ são

(1) $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i}) = \big((2m+2)\gamma^d \to K_d P^{2n}\big) \cup \big((2n+1)\gamma^d \to K_d P^{2m+1}\big)$, com γ^d fibrado linha;

(2) $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i}) = \big(\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d} \to K_d P^{2n}\big) \cup \big(\gamma^d \to K_d P^{2m+1}\big)$, com γ^d fibrado linha.

Se $U_{\rho_i} \cap V_{\rho_i} = \emptyset$, então tomando $T \notin Ker(\rho_i)$, temos (U_{ρ_i}, T) e (U_{ρ_i}, T) sendo involuções fixando K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} com fibrados normais $\epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2n}$ e $\mu_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}$ respectivamente.

Pelo Teorema 2.8.10, ϵ_{ρ_i} é cobordante ao fibrado tangente $\tau^{2nd} \to K_dP^{2n}$ ou é o fibrado 0-dimensional $0 \to K_dP^{2n}$, e pelo Teorema 2.8.9 μ_{ρ_i} borda equivariantemente.

Sendo ϵ_{ρ_i} cobordante ao fibrado tangente $\tau^{2nd} \to K_dP^{2n}$, temos pelo lema 2.8.1 que ϵ_{ρ_i} pode ser tomado como sendo o fibrado tangente pois $W(\epsilon_{\rho_i}) = W(\tau^{2nd})$.

□

Observação 4.2.3. Se (M^r, Φ) é uma involução cujo fibrado normal é do Tipo η_4, então segue do Teorema 2.8.11 que

$$r = (2m+2)d \leq l_d(2n) + (2n+1)d.$$

Como $l_d(2n) < 2nd$ temos em particular que $(2m+1)d < 4nd$.

Observação 4.2.4. Como $\eta_1/_{K_dP^{2m+1}}$ e $\eta_2/_{K_dP^{2m+1}}$ bordam equivariantemente, temos pelo lema 2.8.3 que a classe de Stiefel-Whitney desses fibrados são da forma $(1+\alpha_d)^q$ com q par.

Considere agora (M, Φ_0) e (N, Ψ_0) involuções fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$ com fibrados normais sendo respectivamente

$$\left((2m+2)\gamma^d \to K_dP^{2n}\right) \cup \left((2n+1)\gamma^d \to K_dP^{2m+1}\right);$$
$$\left((\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}) \to K_dP^{2n}\right) \cup \left(\gamma^d \to K_dP^{2m+1}\right),$$

onde γ^d é o fibrado linha. Assim, temos as seguintes $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$:

- $\Gamma_2^2(M, \Phi_0)$ cujo fixed-data é

  $\left((2m+2)\gamma^d, (2m+2)\gamma^d, \tau^{2nd}\right) \to K_dP^{2n} \cup$
  $\left((2n+1)\gamma^d, (2n+1)\gamma^d, \tau^{(2m+1)d}\right) \to K_dP^{2m+1};$

- $\Gamma_1^2(M, \Phi_0)$ cujo fixed-data é

  $\left((2m+2)\gamma^d, 0, 0\right) \to K_dP^{2n} \cup \left((2n+1)\gamma^d, 0, 0\right) \to K_dP^{2m+1};$

- $\Gamma_2^2(N, \Psi_0)$ cujo fixed-data é
  $\big((\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}, \gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}, \tau^{2nd}) \to K_dP^{2n}\big) \cup \big((\gamma^d, \gamma^d, \tau^{(2m+1)d}) \to K_dP^{2m+1}\big);$

- $\Gamma_1^2(N, \Psi_0)$ cujo fixed-data é
  $\big((\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}, 0, 0) \to K_dP^{2n}\big) \cup \big((\gamma^d, 0, 0) \to K_dP^{2m+1}\big).$

Teorema 4.2.5. *Se (W, Ψ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$, então (W, Ψ) é cobordante à uma das ações abaixo*

$$\sigma\Gamma_j^2(M, \Phi_0), \quad \sigma\Gamma_j^2(N, \Psi_0)\ , \quad \sigma\Gamma_j^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist) \cup (W', \Psi'),$$
$$\sigma\Gamma_j^2(K_dP^{2n}, Id) \cup (W', \Psi'),\ j \in \{1, 2\}$$

onde (W', Ψ') é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando K_dP^{2m+1} que borda equivariantemente e $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ é um automorfismo.

Prova:. Analisaremos as possibilidades no fixed-data de (W, Ψ) na seguinte ordem, primeiramente consideraremos os fixed-datas contendo exatamente 1 fibrado do tipo η_1, depois com exatamente 2 do tipo η_1 e finalmente com exatamente 3 do tipo η_1.

A seguir analisaremos os fixed-datas não contendo fibrados do tipo η_1, na seguinte ordem, os que contém exatamente 1 do tipo η_2, exatamente 2 do tipo η_2 e exatamente 3 do tipo η_2. Finalmente analisaremos os fixed-datas contendo somente fibrados do tipo η_3 e η_4.

Fazendo uso de um automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ se necessário, não nos preocuparemos com a ordem dos fibrados no fixed-data.

Caso: (η_1, η_4, η_4)

Pela observação 4.2.4 temos $W(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}}) = (1 + \beta_d)^q$ com q par.

Se (η_1, η_4, η_4) seja fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$\begin{array}{ccc} (\lambda_4, \eta_4|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)) & & \big(\overline{\lambda_4}, \eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_4})\big) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}}) & & RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}}) \end{array}$$

borda simultaneamente. Como $\eta_1|_{K_dP^{2n}} = 0$, então

$$W(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_4)) = W(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}}) = W(\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}) = 1 + \alpha_d.$$

Por outro lado, temos

$$W(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda_4})) = (1+\beta_d)\left[(1+e_2)^l + (1+e_2)^{l-1}v_1 + \cdots + v_l\right],$$

onde $l = dim(\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}})$ e $W(\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}}) = (1+\beta_d)^q = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_l$.

Além disso, como η_4 fixa junto temos

$$2nd + 2dim(\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}) = (2m+1)d + l + 2dim(\gamma^d).$$

Segue que $l = (2m+1-2n)d$ e

$$\begin{aligned} w_d(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_4)) &= W(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}}) = \alpha_d; \\ w_d(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda_4})) &= \beta_d + \binom{l}{d} e_2^d \\ &= \beta_d + e_2^d. \end{aligned}$$

Como

$$w_d(RP(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}})) = 0 \quad \text{e} \quad w_d(RP(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}})) = e_2^d + \beta_d,$$

então podemos formar os seguintes termos característicos,

$$\begin{gathered} w_d(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_4)) + w_d(RP(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}})) = \alpha_d, \\ w_d(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{1|K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_4})) + w_d(RP(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}})) = 0. \end{gathered}$$

Como a lista acima borda, devemos ter

$$1 = \left\langle \alpha_d^{2n} e_1^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_{4|K_dP^{2n}})) \right\rangle = \left\langle 0.e_2^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}})) \right\rangle = 0.$$

Portanto, (η_1, η_4, η_4) não pode ser fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso: (η_1, η_3, η_3)

Se (η_1, η_3, η_3) é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$\begin{array}{ccc} (\lambda_3, \eta_{3|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_3)) & & \left(\overline{\lambda_3}, \eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda_3})\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}}) & & RP(\eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}}) \end{array}$$

borda simultaneamente. Como $\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} = 0$, então

$$W(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_3)) = W(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}}) = W((2m+2)\gamma^d) = (1+\alpha_d)^{2m+2}.$$

Por outro lado,

$$W(\eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda}_3)) = (1+\beta_d)^{2n+1}\left[\sum_i (1+e_2)^{l-di}\binom{q}{i}\beta_d^i\right].$$

Como (η_1, η_3, η_3) é fixed-data temos

$$2nd + 2dim((2m+2)\gamma^d) = (2m+1)d + l + 2dim((2n+1)\gamma^d).$$

Segue que $l = (2m+1-2n)d$ e

$$\begin{aligned} w_d(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_3)) &= 0, \\ w_d(\eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda}_3)) &= \beta_d + \binom{l}{d} e_2^d \\ &= \beta_d + e_2^d. \end{aligned}$$

Além disso, $w_d(RP(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}})) = \alpha_d$ e $w_d(RP(\eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}})) = e_2^d + \beta_d$.

Assim, podemos formar os seguintes termos característicos

$$\begin{gathered} w_d(RP(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}})) + w_d(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_3)) = \alpha_d; \\ w_d(RP(\eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}})) + w_d(\eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \lambda_3)) = 0. \end{gathered}$$

Como a lista acima borda devemos ter

$$1 = \left\langle \alpha_d^{2n} e_1^{(2m+2)d-1}, \sigma(RP(\eta_{3|_{K_dP^{2n}}}))\right\rangle = \left\langle 0.e_2^{(2m+2)d-1}, \sigma(RP(\eta_{3|_{K_dP^{2m+1}}}))\right\rangle = 0.$$

Portanto, (η_1, η_3, η_3) não pode ser fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso: (η_1, η_2, η_4).

Neste caso $2m+1 > 2n$ e pela observação 4.2.4 temos

$$W(\eta_{2|_{K_dP^{2m+1}}}) = (1+\beta_d)^{q_2} \text{ com } q_2 \text{ par.}$$

Se (η_1, η_2, η_4) é fixed-data de $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$\begin{matrix} \left(\lambda_4, \eta_{1|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{2|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_4)\right) & & \left(\overline{\lambda_4}, (\eta_{1|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{2|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda_4}))\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_{4|_{K_dP^{2n}}}) & & RP(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}}) \end{matrix}$$

borda simultaneamente. Como $\eta_{1|K_dP^{2n}} = 0$, então

$$W(\eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)) = W(\eta_2|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4) = \sum_{i=0}^{2n} (1+e_2)^{2nd-di} \binom{2n+1}{i} \alpha_d^i.$$

Por outro lado, temos

$$W(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda}_4)) = (1+\beta_d)^q \left[\sum_i (1+e_2)^{l_2-di} \binom{q_2}{i} \beta_d^i \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} w_d(\eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)) &= \alpha_d; \\ w_d(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_2|_{dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda}_4)) &= \begin{cases} 0 & , d > l_2 \\ \begin{pmatrix} l_2 \\ d \end{pmatrix} e_2^d & , d \leq l_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Se $d > l_2$ ou $\begin{pmatrix} l_2 \\ d \end{pmatrix} = 0$, então usando o fato da lista acima bordar temos

$$1 = \left\langle \alpha_d^{2n} e_1^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}})) \right\rangle = \left\langle 0.e_2^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}})) \right\rangle = 0.$$

Caso contrário, como

$$w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}})) = 0 \text{ e } w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}})) = e_2^d + \beta_d,$$

podemos formar os seguintes termos característicos:

$$\begin{gathered} w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}})) + w_d(\eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)) = \alpha_d; \\ w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}})) + w_d(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda}_4)) = \beta_d. \end{gathered}$$

Como $2m+1 > 2n$ e a lista acima borda segue que

$$0 = \left\langle \alpha_d^{2m+1} e_1^{d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}})) \right\rangle = \left\langle \beta_d^{2m+1} e_2^{d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}})) \right\rangle = 1.$$

Portanto, (η_1, η_2, η_4) não pode ser fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso: (η_1, η_2, η_3).

Se (η_1, η_2, η_3) é fixed-data de $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$\begin{array}{ccc} \left(\lambda_4, \eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)\right) & & \left(\overline{\lambda_3}, (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3}))\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}}) & & RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}}) \end{array}$$

borda simultaneamente.

Se $d > l_2$ ou $\begin{pmatrix} l_2 \\ d \end{pmatrix} = 0$ temos uma contradição da mesma forma que no caso (η_1, η_2, η_4). Assim, podemos supor $d \leq l_2$ e $\begin{pmatrix} l_2 \\ d \end{pmatrix} = 1$.
Segue que

$$w_d(\eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)) = \alpha_d;$$
$$w_d(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}})) + w_d(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda}_3)) = e_2^d.$$

Como

$$w_d(RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}})) = \alpha_d \quad \text{e} \quad w_d(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}})) = e_2^d + \beta_d,$$

então podemos formar os seguintes termos característicos

$$w_d(RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}})) + w_d(\eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)) = 0;$$
$$w_d(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}})) + w_d(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda}_3)) = \beta_d.$$

Como a lista acima borda, devemos ter

$$0 = \left\langle 0.e_1^{(2n+1)d-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}})) \right\rangle = \left\langle \beta_d^{2m+1} e_2^{(2n+1)d-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}})) \right\rangle = 1.$$

Portanto, (η_1, η_2, η_3) não pode ser fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso: (η_1, η_3, η_4)

Como ocorre η_4, então pela observação 4.2.3 temos $2n < 2m+1 < 4n$.

Se (η_1, η_3, η_4) é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então pelo Teorema 3.4.1 a lista a seguir borda:

$$\begin{array}{ccc} \left(\lambda_3, \eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_4|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)\right) & & \left(\overline{\lambda}_3, \eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda}_3)\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}}) & & RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}}) \end{array}.$$

Como $\eta_1|_{K_dP^{2n}} = 0$, temos

$$W(\eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_4|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)) = W(\eta_4|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)) = (1+e_1^d)^{2m+2-2n} + (1+e_1^d)^{2m+1-2n}\alpha_d.$$

Além disso, temos

$$W(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})) = (1+\beta_d)^q \left[1+e_2^d+\beta_d\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} w_{2d}(\eta_1|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_4|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)) &= \binom{2m+2-2n}{2} e_1^{2d} + \alpha_d e_1^d; \\ w_{2d}(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})) &= \binom{q}{2}\beta_d^2. \end{aligned}$$

Se $\begin{pmatrix} 2m+2-2n \\ 2 \end{pmatrix} = 0$, então usando o fato da lista acima bordar temos

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle (\alpha_d e_1^d)^{2n} e_1^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}}))\right\rangle \\ &= \left\langle \binom{q}{2}({\beta_d}^2)^{2n} {e_2}^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}}))\right\rangle \\ &= \left\langle \binom{q}{2}\beta_d^{4n} {e_2}^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}}))\right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos supor $\begin{pmatrix} 2m+2-2n \\ 2 \end{pmatrix} = 1$.
Segue novamente do Teorema 3.4.1 que a lista a seguir borda:

$$\begin{array}{ccc} \left(\lambda_3, \eta_4|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)\right) & & \left(\overline{\lambda_3}, \eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}}) & & RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}}) \end{array} .$$

Como $\eta_1|_{K_dP^{2n}} = 0$, temos

$$W(\eta_4|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)) = 1+\alpha_d.$$

Como supomos (η_1, η_3, η_4) fixed-data, se $l = dim(\eta_1|_{K_dP^{2m+1}})$ então

$$2nd + (2m+2)d + (2m+2-2n)d = (2m+1)d + l + (2n+1)d + d.$$

Assim, $l = (2m+1-2n)d$.
Como

$$W(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})) = (1+\beta_d)\left[(1+e_2)^l + (1+e_2)^{l-d}\tbinom{q}{1}\beta_d + \cdots\right],$$

então

$$\begin{aligned} w_d(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})) &= \beta_d + \binom{l}{d} e_2^d, \\ w_{2d}(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})) &= \beta_d \binom{l}{d} e_2^d + \binom{l}{2d} e_2^{2d} + \binom{q}{2} \beta_d^2. \end{aligned}$$

Da igualdade $\begin{pmatrix} 2m+2-2n \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ podemos concluir que 2 não esta na partição diática de $2m-2n+1$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} l \\ 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2m+1-2n)d \\ 2d \end{pmatrix} = 0.$$

Além disso, como d esta na partição diática de $l = (2m+1-2n)d$ temos $\begin{pmatrix} l \\ d \end{pmatrix} = 1.$

Logo,

$$\begin{aligned} w_{2d}(\eta_4|_{K_dP^{2m}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})) &= \beta_d e_2^d + \binom{q}{2} \beta_d^2; \\ w_{2d}(\eta_4|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2n}} \otimes \overline{\lambda_3})) &= 0, \end{aligned}$$

são classes características correspondentes.

Observe que

$$\begin{aligned} w_d(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_3})) + e_2^d &= \beta_d; \\ w_d(\eta_4|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_1|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_3)) + e_1^d &= \alpha_d + e_1^d. \end{aligned}$$

são termos característicos correspondentes, assim usando o fato da lista acima bordar obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle {\beta_d}^{2m+1} e_2^{(2n+1)d-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}})) \right\rangle \\ &= \left\langle {\beta_d}^{2m} \left(\beta_d e_2^d + \binom{q}{2} \beta_d^2 \right) e_2^{2nd-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}})) \right\rangle \\ &= \left\langle (\alpha_d + e_1^d)^{2m}.0.{e_1}^{2nd-1}, \sigma(RP(\eta_3|_{K_dP^{2n}})) \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, (η_1, η_3, η_4) não pode ser fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Casos: $(\eta_1, \eta_2, \eta_2')$, $(\eta_1', \eta_1'', \eta_1''')$ e $(\eta_2, \eta_1, \eta_1')$.

Mostraremos primeiramente que $(\eta_1, \eta_2, \eta_2')$ não pode ser fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Suponha por absurdo que exista uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (W, Ψ) com fixed-data $(\eta_1, \eta_2, \eta_2')$. Pelo lema 3.4.5 temos que a lista $\{\eta_1|_{K_dP^{2m+1}}, \eta_2|_{K_dP^{2m+1}}, \eta_2'|_{K_dP^{2m+1}}\}$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (W', Φ').

Segue que $(W, \Psi) \cup (W', \Phi')$ é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação equivariantemente cobordante à uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando K_dP^{2n}.

Como K_dP^{2n} tem a propriedade $\mathcal{H}$, então temos por [19] que $(W, \Psi) \cup (W', \Phi')$ é equivariantemente cobordante à $\sigma\Gamma_i^2(M, T)$ com (M, T) involução fixando K_dP^{2n} e $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ automorfismo.

Pelo Teorema 2.8.10 temos (M, T) equivariantemente cobordante à $(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$ ou $(M, T) = (K_dP^{2n}, Id)$. Segue do Teorema 3.2.10 que as possibilidades para $[(W, \Psi) \cup (W', \Phi')]$ são:

$$\begin{aligned}
[(W, \Psi) \cup (W', \Phi')] &= \left[\sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n}, Id)\right] = \left[\sigma\Gamma_2^2(K_dP^{2n}, Id)\right]; \\
[(W, \Psi) \cup (W', \Phi')] &= \left[\sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)\right]; \\
[(W, \Psi) \cup (W', \Phi')] &= \left[\sigma\Gamma_2^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)\right].
\end{aligned}$$

Logo, a menos de ordem, $(\eta_1|_{K_dP^{2n}}, \eta_2|_{K_dP^{2n}}, \eta_2'|_{K_dP^{2n}})$ é simultaneamente cobordante à

$$(0, 0, 0), (\tau^{2nd}, \tau^{2nd}, \tau^{2nd}) \text{ ou } (\tau^{2nd}, 0, 0).$$

Como $(\eta_1|_{K_dP^{2n}}, \eta_2|_{K_dP^{2n}}, \eta_2'|_{K_dP^{2n}}) = (0, \tau^{2nd}, \tau^{2nd})$ temos um absurdo.

Suponha agora que $(\eta_1', \eta_1'', \eta_1''')$ e $(\eta_2, \eta_1, \eta_1')$ são fixed-datas de $\mathbb{Z}_2^2$-ações. Pelo lema 3.4.5 temos que existem $\mathbb{Z}_2^2$-ações (W_1, Ψ_1) e (W_2, Ψ_2) com fixed-datas

$$\{\eta_1'|_{K_dP^{2m+1}}, \eta_1''|_{K_dP^{2m+1}}, \eta_1'''|_{K_dP^{2m+1}}\} \quad \text{e} \quad \{\eta_2|_{K_dP^{2m+1}}, \eta_1|_{K_dP^{2m+1}}, \eta_1'|_{K_dP^{2m+1}}\}.$$

Portanto, se (W, Ψ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data $(\eta_1', \eta_1'', \eta_1''')$, então $(W, \Psi) \cup (W_1, \Psi_1)$ é equivariantemente cobordante à uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando K_dP^{2n}.

Assim, por [19] e pelo Teorema 2.8.10 podemos concluir que $(W, \Psi) \cup (W_1, \Psi_1)$ é equivariantemente cobordante à $\sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n}, Id), \sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$ ou $\sigma\Gamma_2^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$, onde $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ é um automorfismo.

Portanto, as possibilidades para $[W, \Psi]$ são

$$\begin{aligned}
[W, \Psi] &= \left[\sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n}, Id)\right] \cup [(W_1, \Psi_1)]\,; \\
[W, \Psi] &= \left[\sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)\right] \cup [(W_1, \Psi_1)]\,; \\
[W, \Psi] &= \left[\sigma\Gamma_2^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)\right] \cup [(W_1, \Psi_1)]\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, se (W, Ψ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data $(\eta_2, \eta_1, \eta_1')$ então as possibilidades para $[W, \Psi]$ são

$$\begin{aligned}
[W, \Psi] &= \left[\sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n}, Id\right] \cup [(W_2, \Psi_2)]\,; \\
[W, \Psi] &= \left[\sigma\Gamma_1^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}), twist\right] \cup [(W_2, \Psi_2)]\,; \\
[W, \Psi] &= \left[\sigma\Gamma_2^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)\right] \cup [(W_2, \Psi_2)]\,.
\end{aligned}$$

Além disso, como os fibrados do fixed-data de (W_i, Ψ_i) são fibrados que bordam equivariantemente, temos pelo lema 3.4.5 que cada (W_i, Ψ_i) borda equivariantemente.

Analisaremos agora as possibilidades com exatamente 2 fibrados do tipo η_1, com exceção de $(\eta_2, \eta_1, \eta_1')$, o qual já foi analisado.

Casos: $(\eta_1, \eta_1', \eta_3)$ e $(\eta_1, \eta_1', \eta_4)$.
Considere $\eta_1|_{K_dP^{2m+1}} = \xi^l$ e $\eta_1'|_{K_dP^{2m+1}} = \xi^{l'}$.

Afirmação 1: Se $(\eta_1, \eta_1', \eta_3)$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (W, Ψ) então ξ^l e $\xi^{l'}$ são nulos.
De fato, se $(\eta_1, \eta_1', \eta_3)$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então

$$2nd + 0 + 0 + (2m+2)d = (2m+1)d + dim(\xi^l) + dim(\xi^{l'}) + (2n+1)d.$$

Da igualdade acima temos $l + l' = 0$, ou seja, $l = l' = 0$.

Afirmação 2: Se $(\eta_1, \eta_1', \eta_4)$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (W, Ψ) então ξ^l e $\xi^{l'}$ são nulos.
De fato, se $(\eta_1, \eta_1', \eta_4)$ é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então

$$2nd + 0 + 0 + (2m+2-2n)d = (2m+1)d + dim(\xi^l) + dim(\xi^{l'}) + d.$$

Segue que $l + l' = 0$, ou seja, $l = l' = 0$.

Assim, concluímos que em ambos os casos $\eta_1 = \eta_1' = 0$.
Logo, $(\eta_4, \eta_1, \eta_1')$ é simultaneamente cobordante à

$$\begin{array}{ccc} \left(\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}, 0, 0\right) & & \left(\gamma^d, 0, 0\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP^{2n} & & K_dP^{2m+1} \end{array},$$

e $(\eta_3, \eta_1, \eta_1')$ é simultaneamente cobordante à

$$\begin{array}{ccc} \left((2m+2)\gamma^d, 0, 0\right) & & \left((2n+1)\gamma^d, 0, 0\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP^{2n} & & K_dP^{2m+1} \end{array}.$$

Segue que do Teorema 3.2.10 que as possibilidades nesses casos são respectivamente $[W, \Psi] = [\Gamma_1^2(N, \Psi_0)]$ e $[W, \Psi] = [\Gamma_1^2(M, \Phi_0)]$.

Analisaremos agora os fixed-datas sem fibrados do tipo η_1 e com exatamente 1 fibrado do tipo η_2.

Observe que nesta análise, $\Gamma_2^2(N, \Psi_0)$ e $\Gamma_2^2(M, \Phi_0)$ são exemplos de $\mathbb{Z}_2^2$-ações cujo fixed-data são respectivamente da forma (η_2, η_3, η_3) e (η_2, η_4, η_4), para η_2 sendo o fibrado tangente $\tau^{2nd} \to K_dP^{2n} \cup \tau^{(2m+1)d} \to K_dP^{2m+1}$.

Caso: (η_2, η_3, η_4). Neste caso temos $2m + 1 > 2n$.
Se (η_2, η_3, η_4) é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, então pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$\begin{array}{ccc} \left(\lambda_4, \eta_2|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)\right) & & \left(\overline{\lambda_4}, (\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_4}))\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}}) & & RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}}) \end{array}$$

borda lista.
Como

$$W(\eta_2|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)) = (1+\alpha_d)^{2n+1} \left[\sum_i (1+e_2)^{2m+2-di} \binom{2m+2}{i} \alpha_d^i \right],$$

então $w_d(\eta_2|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)) = \alpha_d$.
Por outro lado,

$$W((\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_4}))) = (1+\beta_d)^{q_2}\left[\sum_i (1+e_2)^{2n+1-di}\binom{2n+1}{i}\beta_d^i\right].$$

Assim,

$$w_d(\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_4})) = \begin{cases} e_2^d + \beta_d & ,d \leq 2n+1; \\ \beta_d & ,d > 2n+1. \end{cases}$$

Se $d > 2n+1$, usando o fato da lista acima bordar temos

$$0 = \left\langle \alpha_d^{2m+1}e_1^{d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}}))\right\rangle = \left\langle \beta_d^{2m+1}e_2^{d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}}))\right\rangle = 1.$$

Caso contrário, observe que

$$w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}})) = 0 \quad \text{e} \quad w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}})) = e_2^d + \beta_d.$$

Assim, podemos formar os seguintes termos característicos:

$$\begin{aligned} w_d(\eta_2|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_4)) + w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}})) &= \alpha_d \\ w_d(\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_4})) + w_d(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}})) &= 0. \end{aligned}$$

Como a lista acima borda devemos ter

$$1 = \left\langle {\alpha_d}^{2n}e_1^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2n}}))\right\rangle = \left\langle 0.e_2^{(2m+2-2n)d-1}, \sigma(RP(\eta_4|_{K_dP^{2m+1}}))\right\rangle = 0.$$

Portanto, (η_2, η_3, η_4) não pode ser fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Analisaremos agora os casos (η_2, η_3, η_3),(η_2, η_4, η_4). Observe que o lema 4.2.1 aplicado aos casos (η_2, η_3, η_3) e (η_2, η_4, η_4) diz que o fibrado η_2 fixa separado.

Caso: (η_2, η_3, η_3)

Suponha que (M, Φ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação cujo fixed-data é (η_2, η_3, η_3).

Pela observação 4.2.4 temos $W(\eta_2|_{K_dP^{2m+1}}) = (1+\beta_d)^{q_2}$ com q_2 par. Denotando $\eta_2|_{K_dP^{2m+1}} = \xi^{l_2}$, mostraremos a seguir que

$$l_2 = (2m+1)d \;\text{ e }\; W(\xi^{l_2}) = (1+\beta_d)^{q_2} = (1+\beta_d)^{2m+2}.$$

Como (η_2, η_3, η_3) é fixed-data então

$$2nd + 2dim((2m+2)\gamma^d) + dim(\tau^{2nd}) = (2m+1)d + 2dim((2n+1)\gamma) + l_2,$$

assim, $l_2 = (2m+1)d$.
Mostraremos agora que $W(\xi^{l_2}) = (1+\beta_d)^{q_2} = (1+\beta_d)^{2m+2}$.

Pelo lema 3.4.3 temos

$$W(RP(\eta_2|_{K_dP^{2m+1}})) = (1+\beta_d)^{2m+2}(1+e_2)^{l_2-q_2d}(1+\beta_d+e_2^d)^{q_2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(*)\ \ W(RP(\eta_2|_{K_dP^{2m+1}})) &= (1+\beta_d)^{2m+2-q_2}(1+e_2)^{l_2-q_2d}\left[(1+\beta_d+e_2^d)(1+\beta_d)\right]^{q_2} \\ &= (1+\beta_d)^{2m+2-q_2}(1+e_2)^{l_2-q_2d}\left[1+{\beta_d}^2+\beta_d e_2^d\right].\end{aligned}$$

Como (η_2, η_3, η_3) é fixed-data, segue do Teorema 3.4.1 que

$$\begin{array}{ccc}\left(\lambda_2, \eta_3|_{K_dP^{2n}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2n}} \otimes \lambda_2)\right) & & \left(\overline{\lambda_2}, \eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_2})\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\eta_2|_{K_dP^{2n}}) & & RP(\eta_2|_{K_dP^{2m+1}})\end{array}$$

borda simultaneamente.

Como η_2 fixa separado as listas devem bordar separadamente. Em particular, todos os números da lista

$$\left(\overline{\lambda_2}, (\eta_{3/K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_2}))\right) \to RP(\eta_2|_{K_dP^{2m+1}})$$

devem ser nulos.

Afirmação: ${\beta_d}^2 + \beta_d e_2^d$ e $(1+\beta_d)^{2m+2-q_2}$ são termos característicos.
De fato,

$$\begin{aligned}W(\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \oplus (\eta_3|_{K_dP^{2m+1}} \otimes \overline{\lambda_2})) &= (1+\beta_d)^{2n+1}\left[1+e_2^d+\beta_d\right]^{2n+1} \\ &= (1+e_2^d+\beta_d^2+\beta_d e_2)^{2n+1} \\ &= 1+e_2^d+\beta_d^2+\beta_d e_2^d+\binom{2n+1}{2}e_2^{2d} + \text{potências} > \text{2d}.\end{aligned}$$

Assim, $w_{2d} + \binom{2n+1}{2}e_2^{2d} = {\beta_d}^2 + \beta_d e_2^d$ é um termo característico.

Multiplicando ambos os lados de $(*)$ por $(1+e_2)^{2^s-(l_2-q_2d)}$ para 2^S suficientemente grande, concluímos que $(1+\beta_d)^{2m+2-q_2}$ também é um termo característico.

Caso 1: $0 < q_2 < 2m+2$.
Como $(1+\beta_d)^{2m+2-q_2}$ é um termo característico, então $\beta_d^{2m+2-q_2}$ também é um termo

característico, pois é a parcela na dimensão $(2m+2-q_2)d$.
Assim, podemos formar o seguinte número

$$\begin{aligned}\left\langle \beta_d^{2m+2-q_2}\left[{\beta_d}^2+\beta_d e_2^d\right]^{q_2-1} e_2^{(2m+1-q_2)d-1}, \sigma(RP(\eta_{2|_{K_dP^{2m+1}}}))\right\rangle &= \\ \left\langle \beta_d^{2m+q_2} e_2^{(2m+1-q_2)d-1} + \beta_d^{2m+1} e_2^{2md-1}, \sigma(RP(\eta_{2|_{K_dP^{2m+1}}}))\right\rangle &= 1\end{aligned}$$

Contrariando o fato da lista acima bordar.

Portanto, se $0 < q_2 < 2m+2$, então (η_2, η_3, η_3) não é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso 2: $q_2 > 2m+2$.
Considere $2^t < 2m+1 < 2^{t+1}$. Observe que podemos supor $q_2 \leq 2^{t+1}$, pois se $q_2 > 2^{t+1}$, então

$$q_2 = q2^{t+1} + r, \quad q \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq r < 2^{t+1},$$

com

$$W(\eta_{2|_{RP^{2m+1}}}) = (1+\beta_d)^{q_2} = (1+\beta_d)^r.$$

Considere agora

$$q_2 - (2m+2) = 2^s(2k+1), \text{ com } k \geq 0 \text{ e } s \geq 1.$$

Observe que $2^t > 2^s$, caso contrário, teríamos $2^s \geq 2^{t+1} \geq q_2$.

Como $2^s < 2^t < 2m+1$, existem $t_0 > 0$ e $0 \leq r_2 < 2^s$ ímpar, tais que

$$2m+1 = 2^s t_0 + r_2.$$

Além disso, como $(1+\beta_d)^{q_2-(2m+2)}$ é um termo característico, então $\beta_d^{2^s}$ também é um termo característico, pois é a parcela na dimensão $2^s d$.

Assim, podemos formar o seguinte número não nulo:

$$\begin{aligned}\left\langle \beta_d^{2^s t_0}(\beta_d^2+\beta_d e_2^d)^{r_2} e_2^{(2m-r_2)d-1}, \sigma(RP(\eta_{2|_{K_dP^{2m+1}}}))\right\rangle &= \\ \left\langle \beta^{2m+1}(\beta_d+e_2^d)^{r_2} e_2^{(2m-r_2)d-1}, \sigma(RP(\eta_{2|_{RP^{2m+1}}}))\right\rangle &= \\ \left\langle \beta^{2m+1} e_2^{2md-1}, \sigma(RP(\eta_{2/RP^{2m+1}}))\right\rangle &= 1.\end{aligned}$$

Contrariando o fato da lista acima bordar.

Portanto, se $q_2 > 2m+2$, então (η_2, η_3, η_3) não é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso 3: $q_2 = 0$.
Se $2m+2 = 2^j$ para algum $j > 0$, é imediato que

$$W(\eta_{2|_{RP^{2m+1}}}) = (1+\beta_d)^{q_2} = (1+\beta_d)^{2m+2}.$$

Logo, podemos supor $2m+2 = 2^s(2k+1)$, $k \geq 1$.

Se $2^t < 2m+1 < 2^{t+1}$, então como anteriormente podemos supor $2m+2 < 2^{t+1}$. Observe que $2^s < 2^t$, caso contrário,

$$2^s \geq 2^{t+1} > 2m+1 \Rightarrow 2m+2 = 2^s \Rightarrow k = 0.$$

Procedendo como no caso anterior temos um número característico não nulo. Assim, a única possibilidade é $q_2 = 2m+2$.

Segue que $l_2 = (2m+1)d$ e

$$W(\xi^{l_2}) = (1+\beta_d)^{q_2} = (1+\beta_d)^{2m+2}.$$

Portanto, (η_3, η_3, η_2) é simultaneamente cobordante à

$$\begin{array}{ccc} \big((2m+2)\gamma^d, (2m+2)\gamma^d, \tau^{2nd}\big) & & \big((2n+1)\gamma^d, (2n+1)\gamma^d, \tau^{(2m+1)d}\big) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP^{2n} & & K_dP^{2m+1}. \end{array}$$

e pelo Teorema 3.2.10 temos $[M, \Phi] = [\Gamma_2^2(N, \Phi_0)]$.

Caso: (η_4, η_4, η_2)

Se (η_4, η_4, η_2) é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (M, Φ), então como anteriormente devemos ter que todos os números característicos da lista

$$\Big(\overline{\lambda_2}, (\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda_2})\Big) \to RP(\eta_{2|_{K_dP^{2m+1}}})$$

são nulos.
Como

$$W(\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \overline{\lambda_2})) = (1+\beta_d)\left[1 + e_2^d + \beta_d\right] = 1 + e_2^d + \beta_d^2 + \beta_d e_2^d,$$

então $\beta_d^2 + \beta_d e_2^d$ é classe característica.

Utilizando essa classe e procedendo como no caso anterior, se $W(\eta_{2/_{K_dP^{2m+1}}}) \neq W(\tau^{(2m+1)d})$, onde $\tau^{(2m+1)d} \to K_dP^{2m+1}$ é o fibrado tangente, então teremos um absurdo.

Assim, (η_4, η_4, η_2) é simultaneamente cobordante à

$$\begin{array}{ccc} \left(\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}, \gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d}, \tau^{2nd}\right) & & \left(\gamma^d, \gamma^d, \tau^{(2m+1)d}\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP^{2n} & & K_dP^{2m+1}. \end{array}$$

Portanto, pelo Teorema 3.2.10 temos $[M, \Phi] = [\Gamma_2^2(M, \Psi_0)]$.

Agora, analisaremos as possibilidades sem fibrados do tipo η_1 e exatamente dois fibrados do tipo η_2.

Caso: $(\eta_2, \eta_2', \eta_3)$

Suponha que $(\eta_2, \eta_2', \eta_3)$ seja fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação. Pelo lema 4.2.1 temos que η_2 ou η_2' fixam separado. Suponha sem perda de generalidade que η_2 fixa separado.

Pelo Teorema 3.4.1 a lista a seguir borda

$$\left(\lambda_2, (\eta'_{2|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{3|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_2))\right) \to RP(\eta_{2|_{K_dP^{2n}}}).$$

Como

$$W(\eta'_{2|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{3|_{K_dP^{2n}}} \otimes \lambda_2)) = (1+\alpha_d)^{2n+1}[1 + e_1^d + \alpha_d]^{2m+2},$$

então $w_d(\eta'_{2|_{K_dP^{2n}}} \oplus (\eta_{3/K_dP^{2n}} \otimes \lambda_2)) = \alpha_d$.
Assim, podemos formar o seguinte número característico não nulo:

$$\left\langle \alpha_d^{2n} e_1^{(2n-1)d}, \sigma(RP(\eta_{2|_{RP^{2m+1}}})) \right\rangle = 1.$$

Contrariando o fato da lista acima bordar.

Portanto, $(\eta_2, \eta_2', \eta_3)$ não é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso: $(\eta_2, \eta_2', \eta_4)$

Supondo que $(\eta_2, \eta_2', \eta_4)$ seja fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação, temos pelo Teorema 3.4.1 que

$$\left(\lambda_2, (\eta'_{2|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \lambda_2))\right) \to RP(\eta_{2/K_dP^{2m+1}})$$

borda simultaneamente.
Como

$$W((\eta'_{2|_{K_dP^{2m+1}}} \oplus (\eta_{4|_{K_dP^{2m+1}}} \otimes \lambda_2))) = (1+\beta_q)^{q_2}[1 + e_2^d + \beta_d],$$

então $w_d = e_d + \beta_d$. Segue que β_d é um termo característico.
Assim, podemos formar o seguinte número não nulo:

$$\left\langle \beta_d^{2m+1} e_1^{l_2'-1}, \sigma(RP(\eta_{2/RP^{2m+1}})) \right\rangle = 1.$$

Contrariando o fato da lista acima bordar.

Portanto, $(\eta_2, \eta_2', \eta_4)$ não é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação.

Caso: $(\eta_2, \eta_2', \eta_2'')$
Se (W, Ψ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação cujo fixed-data é do tipo

$$\begin{array}{ccc} \left(\tau^{2nd}, \tau^{2nd}, \tau^{2nd}\right) & & (\xi, \xi', \xi'') \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP^{2n} & & K_dP^{2m+1} \end{array},$$

onde ξ,ξ' e ξ'' bordam, então $(W, \Psi) \cup \Gamma_2^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$ é equivariantemente cobordante à uma ação (W', Ψ') cujo fixed-data é $(\xi, \xi', \xi'') \to K_dP^{2m+1}$.

Como os fibrados ξ,ξ' e ξ'' bordam, então pelo lema 2.8.3 temos

$$W(\xi) = (1 + \alpha_d)^p, \quad W(\xi') = (1 + \alpha_d)^{p'} \quad e \quad W(\xi') = (1 + \alpha_d)^{p''},$$

com p, p' e p'' pares.

Observe que para se formar um número característico não nulo da lista $(\xi, \xi', \xi'') \to K_dP^{2m+1}$ é preciso ter pelo menos uma classe característica com potência ímpar de α_d.

Como $W(K_dP^{2m+1}) = (1 + \alpha_d)^{2m+2}$, então as classes características não nulas são formadas por potências pares de α_d. Além disso, pelas considerações anteriores todas as classes características de ξ, ξ', ξ'' com potência ímpar de α_d são nulas.
Portanto, ao se tomar classes para calcular um número característico da lista $(\xi, \xi', \xi'') \to K_dP^{2m+1}$ sempre terá uma classe nula, e consequentemente todos os números característicos da lista são nulos.
Segue do Teorema 3.2.10 que (W', Ψ') borda equivariantemente.

Para finalizarmos falta apenas os casos onde aparecem somente fibrados do tipo η_3 e η_4. Essa análise no entanto não é necessária, pois pelo lema 4.2.1 um dos fibrados do fixed-data deve fixar separado e nestes casos isso não ocorre.

Portanto, não é possível ocorrer fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com apenas fibrados do tipo η_3 e η_4 e o teorema esta provado. $\square$

4.3. Classificação de $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$

Lema 4.3.1. *Se (M, Φ) é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data*

$$(\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \epsilon_\rho \to K_dP^{2n}) \cup (\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \mu_\rho \to K_dP^{2m+1}),$$

com $(\epsilon_{\rho_1}, \mu_{\rho_1}) = (\tau^{2nd}, \xi^j) \neq (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})$ ou $(\epsilon_{\rho_1}, \mu_{\rho_1}) = (0, \xi^j) \neq (0, 0)$, para algum $\rho_1 \in \mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, onde ξ^j borda equivariantemente, então para cada $\rho \in \mathcal{P}$, vale uma das seguintes igualdades:

(1) $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \xi)$, onde ξ borda equivariantemente;

(2) $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, \xi)$, onde ξ borda equivariantemente.

Prova:. Suponha $(\epsilon_{\rho_1}, \mu_{\rho_1}) = (\tau^{2nd}, \xi^j) \neq (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})$, onde ξ^j borda equivariantemente.

Se $\rho \in \mathcal{P} - \{\rho_1\}$, então $\{1, \rho, \rho_1, \rho\rho_1\}$ é um subgrupo de $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ e pelo lema 3.4.6 existem G, H tais que $\mathbb{Z}_2^k = G \oplus H$, com G isomorfo à $\mathbb{Z}_2^2$ e o fixed-data de $(F_H, \Phi/_G)$ sendo

$$(\epsilon_\rho, \epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho\rho_1}) \to K_dP^{2n} \cup (\mu_\rho, \mu_{\rho_1}, \mu_{\rho\rho_1}) \to K_dP^{2m+1}.$$

Temos duas possibilidades a considerar:

1) K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} estão em componentes diferentes de F_H.

Neste caso, sendo F_{2n} e F_{2m+1} as componentes de F_H contendo K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} respectivamente, temos $(F_{2n}, \Phi/_G)$ e $(F_{2m+1}, \Phi/_G)$ sendo $\mathbb{Z}_2^2$-ações com fixed-datas respectivamente

$$(\epsilon_\rho, \epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho\rho_1}) \to K_dP^{2n} \quad e \quad (\mu_\rho, \mu_{\rho_1}, \mu_{\rho\rho_1}) \to K_dP^{2m+1}.$$

Como K_dP^{2n} tem a propriedade $\mathcal{H}$, então por [19] $(F_{2n}, \Phi/_G)$ é equivariantemente cobordante à $\sigma(\Gamma_i^2(M, T))$ com (M, T) involução fixando K_dP^{2n}.

Pelo Teorema 2.8.10 temos (M, T) equivariantemente cobordante à $(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$, assim pelo Teorema 3.2.10 podemos concluir que as possibilidade para $(\epsilon_\rho, \epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho\rho_1})$ são:

- $(0, \tau^{2nd}, 0)$;
- $(\tau^{2nd}, \tau^{2nd}, \tau^{2nd})$.

Por outro lado, fazendo uso do Teorema 2.8.9 e do Teorema 3.2.11, podemos concluir que μ_ρ e $\mu_{\rho\rho_1}$ bordam equivariantemente.

Logo, neste caso temos $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \xi)$ ou $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, \xi)$, onde ξ borda.

2) K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} estão na mesma componente de F_H.

Neste caso, pelo Teorema 4.2.5 as únicas possibilidades são :

- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \xi^j)$ e $(\epsilon_{\rho\rho_1}, \mu_{\rho\rho_1}) = (\tau^{2nd}, \xi^l)$;
- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, \xi^j)$ e $(\epsilon_{\rho\rho_1}, \mu_{\rho\rho_1}) = (0, \xi^l)$,

onde ξ^j e ξ^l bordam equivariantemente.

Analogamente se supormos $(\epsilon_{\rho_1}, \mu_{\rho_1}) = (0, \xi^j) \neq (0,0)$, onde ξ^j borda equivariantemente, então as possibilidades são :

- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \xi^j)$ e $(\epsilon_{\rho\rho_1}, \mu_{\rho\rho_1}) = (0, \xi^l)$;
- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, \xi^j)$ e $(\epsilon_{\rho\rho_1}, \mu_{\rho\rho_1}) = (\tau^{2nd}, \xi^l)$;
- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, \xi^j)$ e $(\epsilon_{\rho\rho_1}, \mu_{\rho\rho_1}) = (0, \xi^l)$,

onde ξ^j e ξ^l bordam equivariantemente. $\square$

Teorema 4.3.2. *Se (M, Φ), $\Phi = (T_1, T_2, \dots T_k)$, é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data nas condições do lema anterior, então (M, Φ) é equivariantemente cobordante à*

$$\sigma\Gamma_j^k(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist) \cup (W, \Psi),$$

onde (W, Ψ) é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando K_dP^{2m+1} que borda equivariantemente.

Prova:. Pelo lema anterior as possibilidades para o fixed-data são

$$(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \xi^j) \quad \text{e} \quad (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, \xi^l),$$

onde ξ^j e ξ^l bordam equivariantemente.

Considere agora $\Omega = \{1\} \cup \{\rho \in \mathcal{P} / \epsilon_\rho = \tau^{2nd}\}$.

Afirmação 1: Ω é um subgrupo de $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$.

De fato, se $\rho_1, \rho_2 \in \Omega$, então $\{1, \rho_1, \rho_2, \rho_1\rho_2\}$ é um subgrupo de $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, e pelo lema 3.4.6 existem subgrupos $G', H' \subset \mathbb{Z}_2^k$ com G' isomorfo à $\mathbb{Z}_2^2$ e $\mathbb{Z}_2^k = G' \oplus H'$, tais que o fixed-data de $(F_{H'}, \Phi/_{G'})$ é

$$(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_1\rho_2}) \to K_dP^{2n} \cup (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_1\rho_2}) \to K_dP^{2m+1}.$$

Como vimos anteriormente devemos considerar duas possibilidades:

1) K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} estão em componentes diferentes de $F_{H'}$;

2) K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} estão na mesma componente de $F_{H'}$.

No primeiro caso, sendo F'_{2n} e F'_{2m+1} as componentes de $F_{H'}$ contendo respectivamente K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1}, temos $(F'_{2n}, \Phi/_{G'})$ e $(F'_{2m+1}, \Phi/_{G'})$ sendo $\mathbb{Z}_2^2$-ações com fixed-datas

$$(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_1\rho_2}) \to K_dP^{2n}, \quad (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_1\rho_2}) \to K_dP^{2m+1}.$$

Como K_dP^{2n} tem a propriedade $\mathcal{H}$, então por [19] $(F'_{2n}, \Phi/_{G'})$ é equivariantemente cobordante à $\sigma(\Gamma_i^2(M,T))$ com (M,T) involução fixando K_dP^{2n}.

Pelo Teorema 2.8.10 temos (M,T) equivariantemente cobordante à $(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$, assim utilizando o Teorema 3.2.10 podemos concluir que $(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_1\rho_2})$ é simultaneamente cobordante à $(\tau^{2nd}, \tau^{2nd}, \tau^{2nd})$.

Em particular, $\epsilon_{\rho_1\rho_2}$ é cobordante à τ^{2nd} e pelo lema 2.8.1 temos

$$W(\epsilon_{\rho_1\rho_2}) = W(\tau^{2nd}).$$

Logo, podemos considerar $\epsilon_{\rho_1\rho_2} = \tau^{2nd}$.

No segundo caso, temos pelo Teorema 4.2.5 que $(F'_{2n}, \Phi/_G)$ é equivariantemente cobordante à uma das seguintes $\mathbb{Z}_2^2$-ações:

$$\sigma\Gamma_j^2(M, \Phi_0), \quad \sigma\Gamma_j^2(N, \Psi_0)\ , \sigma\Gamma_j^2(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)] \cup [W', \Psi'],\ j \in \{1,2\},$$

onde (W', Ψ') é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando K_dP^{2m+1} que borda equivariantemente.

Assim, olhando para os fixed-datas das $\mathbb{Z}_2^2$-ações acima e fazendo uso do Teorema 3.2.10 podemos concluir que $(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_1\rho_2}) = (\tau^{2nd}, \tau^{2nd}, \tau^{2nd})$.

Logo, Ω é um subgrupo, implicando em particular, que existe $1 \le r \le k$, tal que a quantidade de fibrados $\epsilon_\rho = \tau^{2nd}$ é $2^r - 1$.

Se aplicarmos novamente o lema 3.4.6 ao subgrupo Ω, encontramos subgrupos $G, H \subset \mathbb{Z}_2^k$ com G isomorfo a $\mathbb{Z}_2^r$, $\mathbb{Z}_2^k = G \oplus H$ e $H^\perp = \Omega$, tais que o fixed-data de $(F_H, \Phi/_G)$ é

$$(K_dP^{2n}; \{\epsilon_\rho\}_{\rho\in\Omega-\{1\}}) \cup (K_dP^{2m+1}, \{\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega-\{1\}}).$$

Sejam F_{2n} e F_{2m+1} as componentes do conjunto de pontos fixos F_H de H, contendo respectivamente K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1}.

Como $(F_H - (F_{2n} \cup F_{2m+1}), \Phi)$ é uma ação sem pontos fixos, temos por [24] que a ação borda equivariantemente; assim, podemos supor $F_H = F_{2n} \cup F_{2m+1}$.

Escolha agora uma base $(T_1^{'}, \ldots, T_r^{'}, T_{r+1}^{''}, \ldots, T_k^{''})$ para $\mathbb{Z}_2^k$ onde $(T_1^{'}, \ldots, T_r^{'})$ é uma base para G e $(T_{r+1}^{''}, \ldots, T_k^{''})$ é uma base para H.

Considere o automorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ dado por

$$\varphi(T_i) = \begin{cases} T_i^{'} & 1 \leq i \leq r; \\ T_i^{''} & r < i \leq k. \end{cases}$$

Observe que a parte do fixed-data de $\varphi(M, \Phi)$ sobre K_dP^{2n} é simultaneamente cobordante à lista $\{\epsilon_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}$, com a seguinte descrição: $\epsilon_\rho = \tau^{2nd}$, se ρ é o homomorfismo trivial em H e $\epsilon_\rho = 0$ caso contrário.

Segue que o fixed-data de $\varphi(M, \Phi)$ é simultaneamente cobordante ao fixed-data de

$$\Gamma_j^k(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist),$$

e pelo Teorema 3.2.10, $\varphi(M, \Phi)$ é equivariantemente cobordante à $\Gamma_j^k(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$.

Tomando $\sigma = \varphi^{-1}$, temos

$$(W, \Psi) = (M, \Phi) \cup \sigma\Gamma_j^k(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist)$$

equivariantemente cobordante à uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando K_dP^{2m+1}.

Como o fixed-data de (W, Ψ) é formado apenas por fibrados que bordam equivariantemente sobre K_dP^{2m+1}, seguindo o mesmo argumento do lema 3.4.5, temos que (W, Ψ) borda equivariantemente e o resultado segue.

$\square$

Seja (M, Φ) uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data $\eta = \oplus_\rho \eta_\rho$, onde $\rho \in \mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$. Para cada $\rho \in \mathcal{P}$ denotemos por U_ρ e V_ρ as componentes de $F_{Ker(\rho)}$ contendo K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} respectivamente.

Teorema 4.3.3. *Seja (M, Φ) uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data*

$$(\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \epsilon_\rho \to K_dP^{2n}) \cup (\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \mu_\rho \to K_dP^{2m+1}).$$

Se $U_\rho \cap V_\rho = \emptyset$ para cada $\rho \in \mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, então (M, Φ) é equivariantemente cobordante à

$$\sigma\Gamma_j^k(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, twist) \cup (W, \Psi),$$

onde (W, Ψ) é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando K_dP^{2m+1} que borda equivariantemente.

Prova:. Sejam $M(2n)$ e $M(2m+1)$ as componentes de M contendo K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} respectivamente.

Como $(M-(M(2n)\cup M(2m+1)),\Phi)$ é uma ação sem pontos fixos, então segue de [24] que $(M-(M(2n)\cup M(2m+1)),\Phi)$ borda equivariantemente.
Portanto, podemos supor $M = M(2n)\cup M(2m+1)$.

Se $M(2n)\cap M(2m+1)=\emptyset$, então $(M(2n),\Phi)$ e $(M(2m+1),\Phi)$ são $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} respectivamente.

Como K_dP^{2n} possui propriedade $\mathcal{H}$, temos por [19] que

$$[M(2n),\Phi] = [\sigma\Gamma_j^k(K_dP^{2n}\times K_dP^{2n}, twist)]$$

para algum automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$. Além disso, pelos Teoremas 3.2.11 e 2.8.9 todos os fibrados do fixed-data de $(M(2m+1),\Phi)$ bordam equivariantemente.

De fato, se μ_ρ pertence ao fixed-data de $(M(2m+1),\Phi)$, então pelo Teorema 3.2.11 $\mu_\rho \to K_dP^{2m+1}$ é o fibrado normal de (V_ρ, T) com $T \notin Ker(\rho)$.

Como (V_ρ, T) é uma involução fixando K_dP^{2m+1}, então pelo Teorema 2.8.9 (V_ρ,T) borda equivariantemente. Logo, pela sequência de Conner e Floyd segue que μ_ρ borda equivariantemente.

Pelo lema 2.8.3

$$W(\mu_\rho) = (1+\alpha_d)^{q_\rho},\ q_\rho \text{ par.}$$

Assim, as classes características não nulas de μ_ρ possuem apenas potências pares de α_d. Segue que não é possível obter um número característico não nulo para a lista $\{\mu_\rho\}_{\rho\in\mathcal{P}}$(veja prova do lema 3.4.5).

Logo, a lista $\{\mu_\rho\}_{\rho\in\mathcal{P}}$ borda simultaneamente e pelo Teorema 3.2.10 $(M(2m+1),\Phi)$ borda equivariantemente.

Portanto, se $M(2n)\cap M(2m+1)=\emptyset$, então (M,Φ) é equivariantemente cobordante à

$$\sigma\Gamma_j^k(K_dP^{2n}\times K_dP^{2n}, twist)\cup(M(2m+1),\Phi),$$

onde $(M(2m+1),\Phi)$ borda equivariantemente.

Suponhamos agora, $M = M(2n) = M(2m+1)$ conexa.
Como por hipótese, $U_\rho \cap V_\rho = \emptyset$ para cada $\rho\in\mathcal{P}$, então pode ocorrer a priori as seguintes possibilidades no fixed-data de (M,Φ),

- $(\epsilon_\rho,\mu_\rho) = (\tau^{2nd},\tau^{(2m+1)d})$, para cada $\rho\in\mathcal{P}$;

- $(\epsilon_\rho,\mu_\rho) = (0,0)$, para cada $\rho\in\mathcal{P}$;

- $\exists \rho \in \mathcal{P}/(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \xi^j) \neq (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})$ ou

  $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, \xi^j) \neq (0,0)$, onde ξ^j borda equivariantemente.

Se $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})$, para cada $\rho \in \mathcal{P}$, então

$$2nd + (2^k - 1)2nd = (2m+1)d + (2^k - 1)(2m+1)d,$$

de onde segue que $2n = 2m+1$, gerando assim um absurdo.

Se $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0,0)$, para cada $\rho \in \mathcal{P}$, então chegaríamos novamente no absurdo $2n = 2m+1$.

Assim, podemos supor que $\exists\ \rho \in \mathcal{P}$ tal que

$$(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, R^j) \neq (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d}) \quad \text{ou} \quad (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, R^j) \neq (0,0)$$

e o resultado segue do Teorema 4.3.2. □

Suponha de agora em diante que existe ρ_0 tal que $U_{\rho_0} = V_{\rho_0}$, com $(\epsilon_{\rho_0}, \mu_{\rho_0}) = (\eta_j, \eta_j)$, $j = 3,4$ e que no fixed-data da $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M, Φ) as possibilidades são

$$(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\eta_j, \eta_j), j = 3,4\ ;\ \ (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d});\ \ (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0,0),$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_3 &= \left((2m+2)\gamma^d \to K_dP^{2n}\right) \cup \left((2n+1)\gamma^d \to K_dP^{2m+1}\right); \\ \eta_4 &= \left(\gamma^d \oplus R^{(2m+1-2n)d} \to K_dP^{2n}\right) \cup \left(\gamma^d \to K_dP^{2m+1}\right). \end{aligned}$$

Como $U_{\rho_0} = V_{\rho_0} \subset M(2n) \cap M(2m+1)$, temos $M = M(2n) = M(2m+1)$ conexa.

Lema 4.3.4. *Seja (M, Φ) uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data*

$$\Big(\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \epsilon_\rho \to K_dP^{2n}\Big) \cup \Big(\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \mu_\rho \to K_dP^{2m+1}\Big).$$

Se $(\epsilon_{\rho_0}, \mu_{\rho_0}) = (\eta_j, \eta_j)$, $j \in \{3,4\}$ então no fixed-data não pode ocorrer (η_i, η_i), $i \neq j$.

Prova:. Seja $\rho \in \mathcal{P}$, com $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\eta_i, \eta_i), i \in \{3,4\}$.

Aplicando o lema 3.4.6 ao subgrupo $\{1, \rho, \rho_0, \rho\rho_0\} \subset Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, temos subgrupos $G_1, G_2 \subset \mathbb{Z}_2^k$ com $\mathbb{Z}_2^k = G_1 \oplus G_2$, tais que o fixed-data de $(F_{G_2}, \Phi/_{G_1})$ é

$$((\epsilon_{\rho_0} \oplus \epsilon_\rho \oplus \epsilon_{\rho\rho_0}) \to K_dP^{2n}) \cup ((\mu_{\rho_0} \oplus \mu_\rho \oplus \mu_{\rho\rho_0}) \to K_dP^{2m+1}).$$

Observe que K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} estão na mesma componente de F_{G_2}, pois ρ_0 fixa junto.

Pelo Teorema 4.2.5 as únicas possibilidades para a lista acima ser fixed-data são:

$$\begin{aligned}(\epsilon_\rho, \mu_\rho) &= (\eta_j, \eta_j), \quad (\epsilon_{\rho\rho_0}, \mu_{\rho\rho_0}) = (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d});\\ (\epsilon_\rho, \mu_\rho) &= (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d}), \quad (\epsilon_{\rho\rho_0}, \mu_{\rho\rho_0}) = (\eta_j, \eta_j).\end{aligned}$$

Como $(\eta_i, \eta_i) \neq (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})$ segue que $(\eta_i, \eta_i) = (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\eta_j, \eta_j)$ e $i = j$.

□

Teorema 4.3.5. *Seja (M, Φ) uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data*

$$(\bigoplus_{\rho\in\mathcal{P}} \epsilon_\rho \to K_dP^{2n}) \cup (\bigoplus_{\rho\in\mathcal{P}} \mu_\rho \to K_dP^{2m+1}).$$

Se

$$\begin{aligned}&P_1 = \{\rho \in \mathcal{P} | (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\eta, \eta)\}, \quad P_2 = \{\rho \in \mathcal{P} | (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})\}\\ &P_3 = \{\rho \in \mathcal{P} | (\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0, 0)\},\end{aligned}$$

então $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, P_1 tem 2^{r-1} elementos e P_2 tem $2^{r-1} - 1$ elementos para algum $1 \leq r \leq k$, (consequentemente P_3 tem $2^k - 2^r$ elementos).

Além disso, existe um automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ tal que, (M, Φ) é equivariantemente cobordante à $\sigma\Gamma_r^k(W, T)$, onde (W, T) é uma involução fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$, com fibrado normal (η, η).

Prova:. Seja ρ_0 tal que $U_{\rho_0} = V_{\rho_0}$ e $(\epsilon_{\rho_0}, \mu_{\rho_0}) = (\eta, \eta)$.

Dado $\rho \in \mathcal{P} - \{\rho_0\}$, o lema 3.4.6 aplicado ao subgrupo $\{1, \rho_0, \rho, \rho_0\rho\} \subset Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ diz que existem subgrupos $G, H \subset \mathbb{Z}_2^k$ com $H^\perp = \{1, \rho, \rho_0, \rho_0\rho\}$ e $\mathbb{Z}_2^k = G \oplus H$, tais que o fixed-data de $(G, F_H, \Phi/_G)$ é

$$(\epsilon_{\rho_0}, \epsilon_\rho, \epsilon_{\rho_0\rho}) \to K_dP^{2n} \cup (\mu_{\rho_0}, \mu_\rho, \mu_{\rho_0\rho}) \to K_dP^{2m+1}.$$

Temos $H \subset Ker(\rho_0)$ e pelo mesmo argumento feito anteriormente sendo $F(2n)$ e $F(2m+1)$ as componentes do conjunto de pontos fixos de H, F_H, contendo K_dP^{2n} e K_dP^{2m+1} respectivamente, podemos considerar $F_H = F(2n) \cup F(2m+1)$.

Como $U_{\rho_0} = V_{\rho_0} \subset F_H$ segue que $F(2n) \cap F(2m+1) \neq \emptyset$, ou seja, $F_H = F(2n) = F(2m+1)$ é conexo. Pelo Teorema 4.2.5, temos as seguintes possibilidades:

- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (0,0)$ e $(\epsilon_{\rho_0\rho}, \mu_{\rho_0\rho}) = (0,0)$;
- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\eta, \eta)$ e $(\epsilon_{\rho_0\rho}, \mu_{\rho_0\rho}) = (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})$;
- $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\tau^{2nd}, \tau^{(2m+1)d})$ e $(\epsilon_{\rho_0\rho}, \mu_{\rho_0\rho}) = (\eta, \eta)$.

Assim $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ e a aplicação $\rho \to \rho_0\rho$ é uma bijeção entre P_1 e $P_2 \cup \{1\}$.

Afirmação 1): $P_1 \cup P_2 \cup \{1\}$ é um subgrupo de $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$.
De fato, se $\rho_1, \rho_2 \in P_1$, então $\rho_0\rho_1, \rho_0\rho_2 \in P_2 \cup \{1\}$, logo

$$\rho_1\rho_2 = (\rho_0\rho_1)(\rho_0\rho_2) \in P_2 \cup \{1\}.$$

Se $\rho_1 \in P_1$ e $\rho_2 \in P_2$, então $\rho_0\rho_2 \in P_1$ e pelo argumento anterior $\rho_1(\rho_0\rho_2) \in P_2 \cup \{1\}$, assim $\rho_1\rho_2 = \rho_0(\rho_1\rho_0\rho_2) \in P_1$.

Pelo lema 3.4.6, existe uma decomposição $\mathbb{Z}_2^k = G' \oplus H'$ com G' isomorfo a $\mathbb{Z}_2^r$, $H'^{\perp} = P_1 \cup P_2 \cup \{1\}$, com a ação $(F_{H'}, \Phi/_{G'})$ tendo fixed-data

$$(\bigoplus_{\rho \in P_1 \cup P_2} \epsilon_\rho \to K_dP^{2n}) \cup (\bigoplus_{\rho \in P_1 \cup P_2} \mu_\rho \to K_dP^{2m+1}).$$

Assim, se ρ é um homomorfismo trivial em H', então $\rho \in P_1 \cup P_2$, caso contrário $\rho \notin P_1 \cup P_2$, e $\epsilon_\rho = 0$.

Afirmação 2): $P_2 \cup \{1\}$ é um subgrupo de $P_1 \cup P_2 \cup \{1\}$.
Esta afirmação segue da afirmação 1 do Teorema 4.3.2.
Segue que P_2 tem $2^{r-1} - 1$ elementos (consequentemente P_1 tem 2^r elementos) para algum $1 \leq r \leq k$.

Aplicando novamente o lema 3.4.6 para a ação $(M, \Phi/_{G'})$ e o subgrupo $P_2 \cup \{1\}$, obtemos uma decomposição $G' = G_1 \oplus G_2$, com $G_2^{\perp} = P_2 \cup \{1\}$, onde a ação $(F_{G_2}, \Phi/_{G_1})$ possui fixed-data

$$(\bigoplus_{\rho \in P_2} \epsilon_\rho \to K_dP^{2n}) \cup (\bigoplus_{\rho \in P_2} \mu_\rho \to K_dP^{2m+1}).$$

Observe que sendo G_1 isomorfo a $\mathbb{Z}_2^{r-1}$, então G_2 é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Se S é um gerador de G_2, como $G_2^{\perp} = P_2 \cup \{1\}$ temos que S atua como -1 nas fibras de ϵ_ρ, μ_ρ para cada $\rho \in P_1$ e S atua como identidade nas fibras de ϵ_ρ, μ_ρ para cada $\rho \in P_2$.

Escolha uma base $(T'_{r+1}, \ldots, T'_k)$ para H' e $(T'_2, \ldots, T'_r)$ para G_1.
Definimos o automorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ por

$$\varphi(T_1) = S, \quad \varphi(T_i) = (T_i^{'}) \text{ para } 2 \leq i \leq k.$$

Observe que o fixed-data de $\varphi(M, \Phi)$ é simultaneamente cobordante ao fixed-data de $\Gamma_r^k(W, T)$, onde (W, T) é uma involução fixando $K_dP^{2n} \cup K_dP^{2m+1}$, cujo fibrado normal é (η, η).

Segue do Teorema 3.2.10 que $\varphi(M, \Phi)$ é equivariantemente cobordante à $\Gamma_r^k(W, T)$. Tomando $\sigma = \varphi^{-1}$ temos o resultado. $\square$

Capítulo

5

$\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$

5.1. Introdução

Neste capítulo classificaremos a menos de cobordismo equivariante, as $\mathbb{Z}_2^2$-ações (M, Φ) cujo conjunto de pontos fixos é $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$. Na classificação de involuções fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$, feita em ([21],pg.67), Adriana Ramos e Pedro Pergher provaram que qualquer involução fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$ borda equivariantemente.

Estenderemos esse resultado para $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$, ou seja, mostraremos que toda $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$ borda equivariantemente.

Em tal classificação foi provado que se $\eta^k \cup \xi^l \to K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$ é fibrado normal de uma involução fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$, então $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{p_i}$ e $W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{q_i}$ com p_i e q_i pares, ou p_i e q_i ímpares com $dim(\eta^k) = dim(\xi^l)$, $p_i = q_i$ e $2n+1 = 2m+1$.

5.2. Classificação de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$

Lema 5.2.1. *Se (M, Φ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data*

$$(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_3}) \to K_dP^{2n+1} \cup (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}) \to K_dP^{2m+1},$$

então $W(\epsilon_{\rho_i}) = (1+\alpha_d)^{p_i}$ e $W(\mu_{\rho_i}) = (1+\beta_d)^{q_i}$ com p_i e q_i pares ou p_i e q_i são ímpares com $dim(\epsilon_{\rho_i}) = dim(\mu_{\rho_i})$, $p_i = q_i$ e $2n+1 = 2m+1$.

Prova:. Suponha que $(\epsilon_{\rho_1}, \epsilon_{\rho_2}, \epsilon_{\rho_3}) \to K_dP^{2n} \cup (\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}) \to K_dP^{2m+1}$ seja fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (M, Φ).

Sejam U_{ρ_i} e V_{ρ_i} as componentes do $Ker(\rho_i)$ contendo K_dP^{2n+1} e K_dP^{2m+1} respectivamente.

Dado $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i})$ no fixed-data temos duas possibilidades

1) $U_{\rho_i} \cap V_{\rho_i} = \emptyset$, neste caso tomando $T \notin Ker(\rho_i)$, temos pelo Teorema 3.2.11 que (U_{ρ_i}, T) e (V_{ρ_i}, T) são involuções fixando K_dP^{2n+1} e K_dP^{2m+1}, com fibrados normais

$$\epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2n+1} \quad e \quad \mu_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}.$$

2) $U_{\rho_i} = V_{\rho_i}$, neste caso tomando $T \notin Ker(\rho_i)$, (U_{ρ_i}, T) é uma involução fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$ com fibrado normal

$$(\epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2n+1}) \cup (\mu_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}).$$

Se ocorre 1), então pelo Teorema 2.8.9, (U_{ρ_i}, T) e (V_{ρ_i}, T) bordam equivariantemente e pela sequência de *Conner e Floyd* segue que ϵ_{ρ_i} e μ_{ρ_i} bordam equivariantemente.
Logo, temos pelo lema 2.8.3 que

$$W(\epsilon_{\rho_i}) = (1+\alpha_d)^{p_i} \quad \text{e} \quad W(\mu_{\rho_i}) = (1+\beta_d)^{q_i},$$

com p_i e q_i pares.

Se ocorre 2), então pela classificação feita em [21] temos

$$W(\epsilon_{\rho_i}) = (1+\alpha_d)^{p_i} \;\; \text{e} \;\; W(\mu_{\rho_i}) = (1+\beta_d)^{q_i},$$

com p_i e q_i pares ou p_i e q_i são ímpares com

$$dim(\epsilon_{\rho_i}) = dim(\mu_{\rho_i}), \quad p_i = q_i \quad \text{e} \quad 2n+1 = 2m+1.$$

□

Teorema 5.2.2. *Se (M, Φ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$, então (M, Φ) borda equivariantemente.*

Prova:. Seja (M, Φ) uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$ com fixed-data

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \to K_dP^{2n+1} \cup (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \to K_dP^{2m+1},$$

e $W(\epsilon_i) = (1+\alpha_d)^{p_i}$, $W(\mu_i) = (1+\beta_d)^{q_i}$.
Se p_1, p_2 e p_3 são pares, então pelo lema 5.2.1 temos q_1, q_2 e q_3 pares .

Neste caso, temos pelo lema 3.4.5 que $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ e $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ são fixed-datas de $\mathbb{Z}_2^2$-ações (W_1, Φ_1) e (W_2, Φ_2), as quais bordam equivariantemente.

Segue que (M, Φ) é equivariantemente cobordante à ação $(W_1, \Phi_1) \cup (W_2, \Phi_2)$, a qual borda equivariantemente, e o resultado segue.

Assim, podemos supor sem perda de generalidade que p_1 é ímpar.
Denote por

$$k_i = dim(\epsilon_i) \quad \text{e} \quad l_i = dim(\mu_i).$$

Mostraremos a seguir que $k_i = l_i$, $i = 1, 2, 3$.

Como p_1 é ímpar, então pelo lema 5.2.1 $p_1 = q_1$, $k_1 = l_1$ e $2n + 1 = 2m + 1$.
Sendo $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \cup (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ fixed-data temos

$$d(2n + 1) + k_1 + k_2 + k_3 = d(2m + 1) + l_1 + l_2 + l_3.$$

Da igualdade acima e usando que $2n + 1 = 2m + 1$, $k_1 = l_1$, segue que

$$k_2 = l_2 \Leftrightarrow k_3 = l_3. \tag{5.1}$$

Se p_2 ou p_3 é ímpar, então pelo lema 5.2.1 e por (5.1) temos $k_2 = l_2$ e $k_3 = l_3$.
Logo, podemos considerar p_2 e p_3 pares.

Se $k_2 \neq l_2$, então pelo lema 5.2.1 temos ϵ_2 fixando separado.
Assim, pelo Teorema 3.4.1 segue que $(\lambda_2, \epsilon_3 \oplus (\epsilon_1 \otimes \lambda_2)) \to RP(\epsilon_2)$ borda como lista.
Como

$$W(\epsilon_3 \oplus (\epsilon_1 \otimes \lambda_2)) = (1 + \alpha_d)^{p_3}(1 + \alpha_d + e_1^d)^{p_1}(1 + e_1^d)^{k_1 - p_1 d},$$

com e_1 sendo a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado linha $\lambda \to RP(\epsilon_2)$, então multiplicando a igualdade com a classe $(1 + e_1^d)^{2^S - (k_1 - p_1 d)}$ para 2^S suficientemente grande, concluímos que

$$(1 + \alpha_d)^{p_3}(1 + \alpha_d + e_1^d)^{p_1}$$

é um termo característico.
Além disso, como p_3 par, então o termo característico correspondente à dimensão d é $\alpha_d + e_1^d$.

Segue que α_d é um termo característico e podemos formar o seguinte número

$$\left\langle \alpha_d^{2n+1} e_1^{p_2 - 1}, \sigma(RP(\epsilon_2)) \right\rangle = 1.$$

Contrariando o fato da lista acima bordar.

Portanto, não podemos ter $k_2 \neq l_2$, ou seja, $k_2 = l_2$ e $k_3 = l_3$.
Mostraremos agora que $W(\epsilon_i) = W(\mu_i)$, $i = 2, 3$.

Se p_2 e p_3 são ímpares, então pelo lema 5.2.1 temos $p_2 = q_2$ e $p_3 = q_3$, ou seja, $W(\epsilon_i) = W(\mu_i)$, $i = 2, 3$.
Assim, podemos supor p_2 ou p_3 par.

Consideraremos à seguir p_3 par, sendo que o caso p_2 par é análogo.
Temos

$$\begin{aligned} W(\epsilon_3 \oplus (\epsilon_1 \otimes \lambda_2)) &= (1+\alpha_d)^{p_3}(1+\alpha_d+e_1^d)^{p_1}(1+e_1^d)^{k_1-p_1}; \quad (5.2)\\ W(\mu_3 \oplus (\mu_1 \otimes \overline{\lambda}_2)) &= (1+\beta_d)^{q_3}(1+\beta_d+e_2^d)^{q_1}(1+e_2^d)^{l_1-q_1}, \quad (5.3)\end{aligned}$$

com e_1 e e_2 sendo respectivamente a primeira classe de Stiefel-Whitney dos fibrados linhas $\lambda \to RP(\epsilon_2)$ e $\lambda \to RP(\mu_2)$.

Como $l_1 - q_1 = k_1 - p_1$, multiplicando (5.2) e (5.3) com as respectivas classes inversas de $(1+e_1^d)^{k_1-p_1}$ e $(1+e_2^d)^{l_1-q_1}$, obtemos os seguintes termos característicos

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_1 &= (1+\alpha_d)^{p_3}(1+\alpha_d+e_1^d)^{p_1}; \quad (5.4)\\ \widetilde{w}_2 &= (1+\beta_d)^{q_3}(1+\beta_d+e_2^d)^{q_1}. \quad (5.5)\end{aligned}$$

Além disso, como p_3 é par então q_3 é par. Logo, $\alpha_d + e_1^d$ e $\beta_d + e_2^d$ são os respectivos termos característicos na dimensão d.

Afirmação: ϵ_2 fixa junto.

Das considerações anteriores temos que α_d é um termo característico. Assim, podemos formar o seguinte número não nulo:

$$\left\langle \alpha_d^{2n+1} e_1^{k_2-1}, \sigma(RP(\epsilon_2)) \right\rangle = 1.$$

Segue que $(\lambda_2, \epsilon_3 \oplus (\epsilon_1 \otimes \lambda_2)) \to RP(\epsilon_2)$ não borda simultaneamente e consequentemente ϵ_2 deve fixar junto, caso contrário, teríamos um absurdo pelo Teorema 3.4.1.

Como ϵ_2 fixa junto então pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$\begin{array}{ccc} (\lambda_2, \epsilon_3 \oplus (\epsilon_1 \otimes \lambda_2)) & & \left(\overline{\lambda_2}, \mu_3 \oplus (\mu_1 \otimes \overline{\lambda_2})\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ RP(\epsilon_2) & & RP(\mu_2) \end{array}$$

borda simultaneamente.

Usando o fato de que $p_1 = q_1$ e multiplicando as equações 5.4 e 5.5 com as respectivas classes inversas de $(1+\alpha_d+e_1^d)^{p_1}$, $(1+\beta_d+e_2^d)^{q_1}$ obtemos que

$$(1+\alpha_d)^{p_3} \quad \text{e} \quad (1+\beta_d)^{q_3}$$

são termos característicos correspondentes.

Afirmação: Se $1 \leq i \leq 2m+1$, então

$$\overline{\binom{p_3}{i}} = \overline{\binom{q_3}{i}},$$

convencionando as combinatórias nulas caso $i > p_3$ ou $i > q_3$.

De fato, se existe algum $1 \leq i \leq 2m+1$ com

$$\overline{\binom{p_3}{i}} = 0 \quad e \quad \overline{\binom{q_3}{i}} = 1,$$

então 0 e β_d^i são termos característicos correspondentes e usando os fatos de α_d e β_d serem termos característicos correspondentes e a lista acima bordar temos

$$0 = \left\langle e_1^{k_2-1}.\alpha_d^{2m+1-i}.0, \sigma(RP(\epsilon_2))\right\rangle = \left\langle e_2^{l_2-1}\beta_d^{2m+1-i}\beta_d^i, \sigma(RP(\mu_2))\right\rangle = 1.$$

Da mesma forma não pode existir $1 \leq i \leq 2m+1$ com

$$\overline{\binom{p_3}{i}} = 1 \quad e \quad \overline{\binom{q_3}{i}} = 0.$$

Além disso, para $j > 2m+1$ temos $\alpha_d^j = \beta_d^j = 0$, logo podemos concluir que

$$W(\epsilon_3) = (1+\alpha_d)^{p_3} = (1+\alpha_d)^{q_3} = W(\mu_3).$$

De maneira análoga obtemos $W(\epsilon_2) = W(\mu_2)$.

Portanto, $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ é simultaneamente cobordante à (μ_1, μ_2, μ_3) e pelo Teorema 3.2.10 (M, Φ) borda equivariantemente. □

5.3. Classificação de $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $K_dP^{2n+1} \cup K_dP^{2m+1}$

Lema 5.3.1. *Seja $(M, \Phi) = (M, T_1, \ldots, T_k)$, uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data*

$$(\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \epsilon_\rho \to K_dP^{2n+1}) \cup (\bigoplus_{\rho \in \mathcal{P}} \mu_\rho \to K_dP^{2m+1}).$$

Se $W(\epsilon_{\rho_0}) = (1+\alpha)^p$ com p ímpar, para algum $\rho_0 \in \mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, então

$$dim(\epsilon_\rho) = dim(\mu_\rho) \quad e \quad W(\epsilon_\rho) = W(\mu_\rho),$$

para todo $\rho \in \mathcal{P}$ *e* $2n+1 = 2m+1$.

Prova:. Se $\rho \in \mathcal{P} - \{\rho_0\}$, então $\{1, \rho, \rho_0, \rho\rho_0\}$ é um subgrupo de $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$.

Pelo lema 3.4.6, existem subgrupos G, H tais que $\mathbb{Z}_2^k = G \oplus H$ e $(F_H, \Phi_{/G})$ é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data

$$((\epsilon_\rho, \epsilon_{\rho_0}, \epsilon_{\rho\rho_0}) \to K_d P^{2n+1}) \cup ((\mu_\rho, \mu_{\rho_0}, \mu_{\rho\rho_0}) \to K_d P^{2m+1}).$$

Como $W(\epsilon_\rho) = (1 + \alpha_d)^p$, p ímpar, segue do lema 5.2.1 que ϵ_ρ fixa junto, ou seja, $K_d P^{2n+1}$ e $K_d P^{2m+1}$ estão na mesma componente de F_H.

Logo, estamos nas mesmas condições que a segunda parte da demonstração do Teorema 5.2.2(caso p_1 ímpar).

Considerando $k_\rho = dim(\epsilon_\rho)$, $l_\rho = dim(\mu_\rho)$ e seguindo a mesma demonstração do Teorema 5.2.2, mostra-se que

$$W(\epsilon_\rho) = W(\mu_\rho), \quad 2n+1 = 2m+1 \quad e \quad k_\rho = l_\rho.$$

□

Teorema 5.3.2. *Se* (M, Φ) *é uma* $\mathbb{Z}_2^k$*-ação fixando* $K_d P^{2n+1} \cup K_d P^{2m+1}$*, então* (M, Φ) *borda equivariantemente.*

Prova:. Pelo lema anterior, se existe algum ρ_0 tal que $W(\epsilon_\rho) = (1 + \alpha_d)^p$ com p ímpar, então $2n+1 = 2m+1$ e $W(\epsilon_\rho) = W(\mu_\rho)$ para todo $\rho \in \mathcal{P}$.

Neste caso, $\{\epsilon_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}$ é simultaneamente cobordante à $\{\mu_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}$ e pelo Teorema 3.2.10 segue que (M, Φ) borda equivariantemente.

Suponha então,

$$W(\epsilon_\rho) = (1 + \alpha_d)^p, \ p \text{ par }, \ \forall \rho \in \mathcal{P}.$$

Assim, não é possível gerar número característico não nulo para as listas $\{\epsilon_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}$ e $\{\mu_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}$ (veja lema 3.4.5) .

Em particular, $\{\epsilon_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}$ é simultaneamente cobordante à $\{\mu_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}}$ e pelo Teorema 3.2.10 (M, Φ) borda equivariantemente. □

Capítulo

6

$\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$

6.1. Introdução

Neste capítulo classificaremos a menos de cobordismo equivariante, as $\mathbb{Z}_2^2$-ações (M, Φ) cujo conjunto de pontos fixos é $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, onde $d < e$, ou seja, faremos uma classificação de $\mathbb{Z}_2^2$-ações (M, Φ) onde F_Φ é um dos seguintes: $\mathbb{R}P^{2m+1} \cup \mathbb{C}P^{2n}$, $\mathbb{R}P^{2m+1} \cup \mathbb{Q}P^{2n}$ e $\mathbb{C}P^{2m+1} \cup \mathbb{Q}P^{2n}$.

Nesta análise, aparecerão ações exóticas, ou seja, que não são equivariantemente cobordantes à uma ação do tipo $\Gamma_j^k(M, T)$.

Observe que se fosse considerado separadamente K_dP^{2m+1} e K_eP^{2n} como conjuntos de pontos fixos, então as ações seriam do tipo $\Gamma_j^k(M, T)$. Este fato no entanto não ocorre se considerarmos $F_\Phi = K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, o qual torna a classificação para este caso, um dos resultados mais originais deste trabalho.

Ao mesmo tempo, a ocorrência de casos exóticos se mostrou um empecilho para a classificação a menos de cobordismo equivariante de $\mathbb{Z}_2^k$-ações, $k > 2$, fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, $d < e$.

6.2. Classificação de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$

Lema 6.2.1. *Seja $R^k \to K_dP^{2m+1}$ fibrado trivial k-dimensional, então a lista $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to RP(R^k)$ borda se, e somente se, $k \leq d(2^t - 1)$ onde $2m + 2 = 2^t(2j + 1)$.*

Prova:. Suponha que $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to RP(R^k)$ borda simultaneamente.
Como

$$\begin{aligned} W(RP(R^k)) &= (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^k, && (6.1) \\ W(\gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) &= (1 + \alpha_d)(1 + c^d + \alpha_d) = 1 + c^d + \alpha_d(\alpha_d + c^d), && (6.2) \end{aligned}$$

segue de 6.2 que $\alpha_d(\alpha_d + c^d)$ é classe característica.

Além disso, multiplicando a igualdade de 6.1 por $(1+c)^{2^S-k}$, para S suficientemente grande, concluímos que $(1+\alpha_d)^{2m+2}$ é um termo característico.

Se $2m+2 = 2^t(2q+1)$, então $\alpha_d^{2^t}$ é um termo característico, pois é a parcela na dimensão $2^t d$ de $(1+\alpha_d)^{2m+2}$.

Se supormos que $k > d(2^t-1)$, podemos formar o seguinte número

$$\left\langle \alpha_d^{2^t 2q}[\alpha_d(\alpha_d + c^d)]^{2^t-1} c^{k-d(2^t-1)-1}, \sigma(RP(R^k)) \right\rangle = \left\langle \alpha_d^{2m+1} c^{k-1}, \sigma(RP(R^k)) \right\rangle = 1,$$

e como estamos supondo que a lista borda simultaneamente, chegamos em um absurdo. Portanto $k \leq d(2^t-1)$.

Suponha agora que $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to RP(R^k)$ não borda simultaneamente, ou seja, existe algum número característico não nulo.

Observe que todo número da lista acima é gerado pelas classes $c, \alpha_d^{2^t}, \alpha_d(\alpha_d + c^d)$, além disso, temos da relação de Borel-Hirzebruch que $c^k = 0$.

Assim, um número não nulo é da forma

$$\alpha_d^{2s+1}(\alpha_d + c^d)^{2s+1} \alpha_d^{2^t z} c^y,$$

com $d(2s+1+2s+1+2^t z) + y = d(2m+1) + k - 1$.

Segue que existe r tal que

$$\begin{pmatrix} 2s+1 \\ r \end{pmatrix} \alpha_d^{2s+1} \alpha_d^{2s+1-r} \alpha_d^{2^t z} c^{rd} c^y \text{ é não nulo.}$$

Da Fórmula de Conner e do fato de $c^k = 0$ e $\alpha_d^i = 0$ para $i > 2m+1$, para tal número ser não nulo e $d(2s+1+2s+1+2^t z) + y = d(2m+1) + k - 1$, devemos ter

$$\begin{array}{c} y + rd = k-1, rd < k, \quad \begin{pmatrix} 2s+1 \\ r \end{pmatrix} = 1 \quad com \\ 2s+1+2s+1-r+2^t z = 2m+1 = 2^t(2q) + 2^t - 1 \end{array} .$$

Afirmação: Toda potência de 2, na partição diádica de $2^t - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{t-1}$ esta na partição diádica de r.

Para demonstrarmos essa afirmação faremos uso da seguinte propriedade:

Dados a e b inteiros positivos, então $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1(mod\ 2)$ se, e somente se, a partição diádica de b esta contido na partição diádica de a.

Suponha que exista alguma potência de 2 da partição diádica de $2^t - 1$ que não esteja em r e seja 2^j a menor dessas potências.
Segue que

$$r = 1 + 2 + \cdots + 2^{j-1} + (\text{potências de 2 maiores que } j).$$

Como $\begin{pmatrix} 2s+1 \\ r \end{pmatrix} = 1$, então todas as potências de 2 na partição diádica de r estão na partição diádica de $2s+1$ e temos

$$2s + 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{j-1} + (\text{potências de 2 maiores ou iguais a } j).$$

Das considerações anteriores temos

$$\begin{aligned} 2^t(2q - z) + 2^t - 1 &= 2s + 1 + 2s + 1 - r \\ &= 2s + 1 + (\text{potências de 2 em } 2s + 1 \text{ maiores ou iguais a } j). \end{aligned}$$

Se 2^j esta na partição diádica de $2s+1$, então não esta na partição de

$$2s + 1 + 2s + 1 - r = 2s + 1 + (\text{potências de 2 em } 2s + 1 \text{ maiores ou iguais a } j),$$

e o mesmo ocorre se 2^j não esta na partição de $2s+1$.
Logo, 2^j não esta na partição de $2s + 1 + 2s + 1 - r$.

Como 2^j esta na partição diádica de $2^t(2q - z) + 2^t - 1$ e

$$2^t(2q - z) + 2^t - 1 = 2s + 1 + 2s + 1 - r,$$

temos um absurdo.

Portanto, $k > rd \geq (2^t - 1)d$. □

Teorema 6.2.2. *Existe uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (E, Ψ_0) fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$ cujo fixed-data é*

$$(\gamma^d, \gamma^d, R^{(2m+1)d-2ne}) \to K_dP^{2m+1} \cup (\gamma^e, \gamma^e, 0) \to K_eP^{2n},$$

onde $(2m + 2)d = (2n + 1)e$.

Além disso, ela é única no seguinte sentido: se (M, Φ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$ cujo fixed-data

$$(\gamma^d, \gamma^d, \eta^k) \to K_dP^{2m+1} \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e}, 0) \to K_eP^{2n},$$

onde η^k *borda equivariantemente, então* $W(\eta^k) = 1$, $l = e$ *e* $k = (2m+1)d - 2ne = e - d$.

Prova:. Provemos inicialmente, que

$$\big(\lambda, R^{(2m+1)d-2ne} \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)\big) \to RP(\gamma^d) \quad \text{e} \quad (\lambda, 0 \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \to RP(\gamma^e)$$

são listas simultaneamente cobordantes.
Por Borel-Hirzebruch temos

$$\begin{gathered} W(RP(\gamma^d)) = (1+\alpha_d)^{2m+2}[(1+c)^d + \alpha_d] = (1+\alpha_d)^{2m+2}[1 + c^d + \alpha_d] \\ W(RP(\gamma^e)) = (1+\beta_e)^{2n+1}[(1+c)^e + \beta_e] = (1+\beta_e)^{2n+1}[1 + c^e + \beta_e], \end{gathered}$$

com as relações $c^e = \beta_e$ e $c^d = \alpha_d$, ou seja,

$$W(RP(\gamma^e)) = (1+\beta_e)^{2n+1} \text{ e } W(RP(\gamma^d)) = (1+\alpha_d)^{2m+2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} W(R^{(2m+1)d-2ne} \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) &= (1+c)^d + \alpha_d = 1 + c^d + \alpha_d = 1, \\ W(\lambda \otimes \gamma^e) &= (1+c)^e + \beta_e = 1 + c^e + \beta_e = 1. \end{aligned}$$

logo, os possíveis números característicos não nulos de

$$\big(\lambda, R^{(2m+1)d-2ne} \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)\big) \to RP(\gamma^d) \ \ e \ \ (\lambda, 0 \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \to RP(\gamma^e) \tag{6.3}$$

são respectivos números de involução de $\lambda \to RP(\gamma^d)$ e $\lambda \to RP(\gamma^e)$.

Pelas considerações do final do Capítulo2 (seção 2.8), sabemos que existe uma involução cujo fibrado normal é

$$\gamma^d \to K_dP^{2m+1} \cup \gamma^e \to K_eP^{2n}$$

e pelo Teorema 2.6.2, os números de involuções de $\lambda \to RP(\gamma^d)$ e $\lambda \to RP(\gamma^e)$ devem ser iguais.

Portanto, os números característicos das listas em 6.3 são iguais e as listas são simultaneamente cobordantes.

Observe que $2m + 2 = (2n+1)\frac{e}{d}$, onde

$$(2m+1)d - 2ne = e - d \leq \tfrac{e}{d},$$

logo, pelo lema 6.2.1 a lista $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to RP(R^{(2m+1)d-2ne})$ borda simultaneamente.

Segue do Teorema 3.4.1, que existe uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (E, Ψ_0) fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, cujo fixed-data é

$$(\gamma^d, \gamma^d, R^{(2m+1)d-2ne}) \to K_dP^{2m+1} \cup (\gamma^e, \gamma^e, 0) \to K_eP^{2n},$$

onde $(2m+2)d = (2n+1)e$.

Suponha agora que $(\gamma^d, \gamma^d, \eta^k) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e}, 0)$ é fixed-data. Assim,

$$(2m+1)d + 2d + k = 2ne + 2l.$$

Além disso, como $(\gamma^d, \gamma^e \oplus R^{l-e})$ fixa junto, ou seja, é fixed-data de uma involução fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, temos

$$(2m+1)d + d = 2ne + l.$$

Segue que $k = l - d = (2m+1)d - 2ne$.

Pelo lema 3.4.3 se $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p$, então

$$W(RP(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2m+2}(1+c)^{k-pd}(1+\alpha_d+c^d)^p,$$

logo,

$$\begin{aligned} W(RP(\eta^k)) &= (1+\alpha_d)^p(1+\alpha_d)^{2m+2-p}(1+c)^{k-pd}(1+\alpha_d+c^d)^p && (6.4)\\ &= [(1+\alpha_d)(1+c^d+\alpha_d)]^p(1+\alpha_d)^{2m+2-p}(1+c)^{k-pd}. && (6.5) \end{aligned}$$

Além disso,

$$W(\gamma^d \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = (1+\alpha_d)((1+c)^d + \alpha_d) = (1+\alpha_d)(1+c^d+\alpha_d).$$

Segue que $w_{2d} = \alpha_d(\alpha_d + c^d)$ é classe característica.

Multiplicando 6.5 por $(1+c)^{2^S-(k-pd)}$ e $[(1+\alpha_d)(1+c^d+\alpha_d)]^{2^{S'}-p}$ para S e S' suficientemente grande, concluímos que $(1+\alpha_d)^{2m+2-p}$ é um termo característico.

Caso: $0 < p < 2m+2$

Temos $w_{pd}(\eta^k) = \alpha_d^p \neq 0$, assim $k \geq pd > (p-1)d$.
Além disso, como $(1+\alpha_d)^{2m+2-p}$ é um termo característico, se

$$2m+2-p = 2^t(2j+1), \quad t \geq 1 \ \text{ e } \ j \geq 0,$$

então $\alpha_d^{2^t}$ é um termo característico, pois é a parcela de $(1+\alpha_d)^{2m+2-p}$ na dimensão $2^t d$. Logo, podemos formar o seguinte número

$$\left\langle \alpha^{2^t(2j+1)}\alpha_d^{p-1}(\alpha_d + c^d)^{p-1}c^{k-(p-1)d-1}, \sigma(RP(\eta^k))\right\rangle = \left\langle \alpha^{2m+1}c^{k-1}, \sigma(RP(\eta^k))\right\rangle = 1.$$

Segue que a lista $(\lambda, \gamma^d \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) \to RP(\eta^k)$ não borda, contrariando o Teorema 3.4.1. Portanto devemos ter $p = 0$ ou $p \geq 2m+1$.

Caso: $p > 2m+2$

Como $(1+\alpha_d)^{2m+2-p}$ é um termo característico, então sua inversa $(1+\alpha_d)^{p-(2m+2)}$ também é um termo característico.

Se $p-(2m+2) = 2^s(2i+1)$, então $\alpha_d^{2^s}$ é um termo característico pois é a parcela de $(1+\alpha_d)^{p-(2m+2)}$ na dimensão $2^s d$.

Considere agora $2^u \leq 2m+2 < 2^{u+1}$. Observe que podemos supor $p < 2^{u+1}$, caso contrário, tomando r_0 resto da divisão de p por 2^{u+1} temos

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d)^{r_0} \text{ com } 0 \leq r_0 < 2m+2,$$

recaindo na análise anterior para $r_0 \neq 0$(caso $r_0 = 0$ sera abordado quando analisarmos o caso $p = 0$).

Observe que 2^u esta na partição diádica de p, caso contrário, existiria somente potências de 2 menores ou iguais a $u-1$ na partição diádica de p e teríamos $2m+2 \geq 2^u > p$.
Como

$$w_{2^u d}(\eta^k) = \begin{pmatrix} p \\ 2^u \end{pmatrix} \alpha_d^{2^u} \neq 0,$$

então devemos ter $k \geq 2^u d$.
Além disso, temos $2^s < 2^u$, caso contrário teríamos $2^s \geq 2^{u+1} > p$.

Segue que $2^s < 2m+1$ e existem $0 \leq r < 2^s$, $t_0 \geq 1$ tais que $2m+1 = 2^s t_0 + r$.
Observe que, $k \geq 2^u d > 2^s d > rd$, assim podemos formar o seguinte número não nulo,

$$\left\langle \alpha_d^{t_0}\alpha_d^r(\alpha_d + c^d)^r c^{k-rd-1}, \sigma(RP(\eta^k))\right\rangle = \left\langle \alpha_d^{2m+1}c^{k-1}, \sigma(RP(\eta^k))\right\rangle = 1.$$

Portanto, não podemos ter $p > 2m+2$ e as únicas possibilidades são $p = 0$ e $p = 2m+2$. Mostraremos agora que p não pode ser $2m+2$.

Suponha por absurdo que $p = 2m+2$, assim

$$\begin{aligned} W(\eta^k \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) &= (1+\alpha_d)^{2m+2}[1 + c^d + \alpha_d], \\ W(0 \oplus ((\gamma^e \oplus R^{l-e}) \otimes \lambda)) &= (1+c)^l + (1+c)^{l-e}\beta_e. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{array}{rcl} w_e(\eta^k \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) & = & \binom{2m+2}{\frac{e}{d}}\alpha_d^{\frac{e}{d}}, \\ w_e(0 \oplus (\lambda \otimes (\gamma^e \oplus R^{l-e}))) & = & \binom{l}{e}c^e + \beta_e. \end{array}$$

Além disso,

$$\begin{array}{rcl} W(RP(\gamma^d)) & = & (1+\alpha_d)^{2m+2}[1+c^d+\alpha_d], \\ W(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e})) & = & (1+\beta_e)^{2n+1}[(1+c)^l+(1+c)^{l-e}\beta_e], \end{array}$$

com as relações $c^d = \alpha_d$ e $c^l = c^{l-e}\beta_e$.
Assim,

$$w_e(RP(\gamma^d)) = \left(\begin{array}{c} 2m+2 \\ \frac{e}{d} \end{array}\right)\alpha_d^{\frac{e}{d}} \quad \text{e} \quad w_e(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e})) = \left(\begin{array}{c} l \\ e \end{array}\right)c^e,$$

e podemos formar os seguintes termos característicos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{w_e} & = & w_e(RP(\gamma^d)) + w_e(\eta^k \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = 0, \\ \widehat{w_e} & = & w_e(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e})) + w_e(0 \oplus ((\gamma^e \oplus R^{l-e}) \otimes \lambda)) = \beta_e. \end{array}$$

Segue que

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \left\langle \beta_e^{2n}c^{l-1}, \sigma(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e}))\right\rangle \\ & = & \left\langle \widehat{w_e}^{2n}c^{l-1}, \sigma(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e}))\right\rangle \\ & = & \left\langle \widetilde{w_e}^{2n}c^{l-1}, \sigma(RP(\gamma^d))\right\rangle = 0. \end{array}$$

Portanto, p não pode ser $2m+2$.

Das considerações acima concluímos que a única possibilidade é $p = 0$. Portanto, $W(\eta^k) = 1$.
Mostraremos agora que $l = e$.

Como $W(\eta^k \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = 1$, então $w_e(\eta^k \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = 0$, além disso, temos

$$w_e(0 \oplus ((\gamma^e \oplus R^{l-e}) \otimes \lambda)) = \tbinom{l}{e}c^e + \beta_e.$$

Se $\left(\begin{array}{c} l \\ e \end{array}\right) = 0$, então 0 e β_e são classes características correspondentes, e como anteriormente podemos formar números característicos distintos. Suponha então $\begin{pmatrix} l \\ e \end{pmatrix} = 1$.

Como $l + 2ne = (2m+2)d$ e $\begin{pmatrix} l \\ e \end{pmatrix} = 1$ temos

$$\binom{2m+2}{\frac{e}{d}} = \binom{(2m+2)d}{e} = \binom{l+2ne}{e} = 1.$$

Portanto,

$$w_e(RP(\gamma^d)) = \alpha_d^{\frac{e}{d}}, \quad w_e(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e})) = c^e;$$
$$w_e(\eta^k \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = 0, \quad w_e(0 \oplus (\gamma^e \oplus R^{l-e}) \otimes \lambda) = c^e + \beta_e,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \widetilde{w_e} &= w_e(RP(\gamma^d)) + w_e(\eta^k \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = \alpha_d^{\frac{e}{d}}; \\ \widehat{w_e} &= w_e(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e})) + w_e(0 \oplus (\gamma^e \oplus R^{l-e}) \otimes \lambda) = \beta_e. \end{aligned}$$

Suponha por absurdo que $l > e$, assim

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \beta_e^{2n+1} c^{l-e-1}, \sigma(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e})) \right\rangle = \left\langle \widehat{w_e}^{2n+1} c^{l-e-1}, \sigma(RP(\gamma^e \oplus R^{l-e})) \right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{w_e}^{2n+1} c^{l-e-1}, \sigma(RP(\gamma^d)) \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_d^{\frac{e(2n+1)}{d}} c^{l-e-1}, \sigma(RP(\gamma^d)) \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_d^{\frac{e(2n+1)}{d}} c^{d-1+(2m+1)d-(2n+1)e}, \sigma(RP(\gamma^d)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, se

$$\frac{1}{W(\gamma^d)} = 1 + \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \cdots = (1+\alpha_d)^{2^t-1},$$

com $2^t > 2m+1$ e denotando $q = (2m+1)d - (2n+1)e$, temos pela fórmula de Conner que

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_d^{\frac{e(2n+1)}{d}} c^{d-1+(2m+1)d-(2n+1)e}, \sigma(RP(\gamma^d)) \right\rangle &= \left\langle \alpha_d^{\frac{e(2n+1)}{d}} \overline{v}_q, \sigma(K_dP^{2m+1}) \right\rangle \\ &= \left\langle \binom{2^t-1}{\frac{q}{d}} \alpha_d^{2m+1}, \sigma(K_dP^{2m+1}) \right\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, $l = e$ e o resultado esta provado.

□

Lema 6.2.3. *Se* $(\bigoplus_{i=1}^{3} \epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}) \cup (\bigoplus_{i=1}^{3} \mu_{\rho_i} \to K_eP^{2n})$ *é fixed-data de uma* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação* (M, Φ)*, então*

- $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i}) = (\gamma^d \to K_dP^{2m+1}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e} \to K_eP^{2n})$ *com* γ^d *e* γ^e *fibrados linhas;*
- $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i}) = (\eta^j \to K_dP^{2m+1}) \cup (\tau^{2ne} \to K_eP^{2n})$*, onde* η^j *borda;*
- $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i}) = (\eta^j \to K_dP^{2m+1}) \cup (0 \to K_eP^{2n})$*, onde* η^j *borda;*

Com $0 \leq l - e \leq h_e(0, 2n)$*,*

$$h_e(0, 2n) = \begin{cases} 2e & se\ t = 1; \\ e(2^t - 1) & se\ t \geq 1. \end{cases}$$

onde $2n = 2^t(2j + 1)$*.*

Aqui estamos considerando fibrados com mesma classe característica e com fibra de mesma dimensão como sendo fibrados iguais.

Prova:. Suponha que (M, Φ) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data

$$(\bigoplus_{i=1}^{3} \epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}) \cup (\bigoplus_{i=1}^{3} \mu_{\rho_i} \to K_eP^{2n}).$$

Para cada ρ_i denotamos por U_{ρ_i} e V_{ρ_i}, as componentes do conjunto de pontos fixos do $Ker(\rho_i)$ contendo K_dP^{2m+1} e K_eP^{2n} respectivamente.
Se $U_{\rho_i} = V_{\rho_i}$, dizemos que ρ_i fixa junto e neste caso tomando $T \notin Ker(\rho_i)$ temos que $\epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1} \cup \mu_{\rho_i} \to K_eP^{2n}$ é o fibrado normal de (U_{ρ_i}, T).

Utilizando um recente preprint de Pergher e Adriana Ramos intitulado "Involutions Fixing Projectives Spaces Relative To Different Rings", temos

- $(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i}) = (\gamma^d \to K_dP^{2m+1}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e} \to K_eP^{2n})$ com γ^d e γ^e fibrados linhas,

com $0 \leq l - e \leq h_e(0, 2n)$, $2n = 2^t(2j + 1)$ e

$$h_e(0, 2n) = \begin{cases} 2e & \text{se } t = 1; \\ e(2^t - 1) & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Se $U_{\rho_i} \cap V_{\rho_i} = \emptyset$, dizemos que ρ_i fixa separado, e neste caso tomando $T \notin Ker(\rho_i)$ temos que (U_{ρ_i}, T) e (V_{ρ_i}, T) são involuções fixando K_dP^{2m+1} e K_eP^{2n} respectivamente, com fibrados normais $\epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}$ e $\mu_{\rho_i} \to K_eP^{2n}$.

Segue dos Teoremas 2.8.10 e 2.8.9 que (U_{ρ_i}, T) borda equivariantemente e ocorre um dos casos seguintes:

(1) $dim(V_{\rho_i}) = 2nd$, e neste caso $(V_{\rho_i}, T) = (K_dP^{2n}, Id)$;

(2) (V_{ρ_i}, T) é cobordante à $(K_dP^{2n} \times K_dP^{2n}, Twist)$.

Em particular, pela sequência de Conner e Floyd podemos concluir que μ_{ρ_i} é cobordante ao fibrado tangente $\tau^{2nd} \to K_dP^{2n}$ ou é o fibrado nulo $0 \to KP^{2n}$, e ϵ_{ρ_i} borda equivariantemente.

Além disso, no caso em que μ_{ρ_i} é cobordante ao fibrado tangente temos pelo lema 2.8.1 que $W(\mu_\rho) = W(\tau^{2nd})$. Logo, podemos considerar $\mu_{\rho_i} = \tau^{2nd} \to K_dP^{2n}$ e o resultado segue.

□

Considere agora (M, Φ_0) involução fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$ cujo fibrado normal é $(\gamma^d \to K_dP^{2m+1}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e} \to K_eP^{2n})$.
Assim, temos as seguintes $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$:

- $\Gamma_2^2(M, \Phi_0)$ cujo fixed-data é

  $(\gamma^d, \gamma^d, \tau^{(2m+1)d} \to K_dP^{2m+1}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^d \oplus R^{l-e}, \tau^{2ne}) \to K_eP^{2n}$;

- $\Gamma_1^2(M, \Phi_0)$ cujo fixed-data é

  $(\gamma^d, 0, 0 \to K_dP^{2m+1}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, 0, 0 \to K_eP^{2n})$.

Teorema 6.2.4. *Se (N, Ψ) uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando $K_dP^{2m+1} \cup K_eP^{2n}$, então $[N, \Psi] = [\sigma(E, \Psi_0)]$, $[N, \Psi] = [\sigma\Gamma_j^2(M, \Phi_0)]$ ou $[N, \Psi] = [W, S] \cup [\sigma\Gamma_j^2(K_eP^{2n} \times K_eP^{2n}, twist)]$, onde (W, S) é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando K_dP^{2m+1} que borda equivariantemente e $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ é um automorfismo.*

Prova:. Suponha (N, Ψ) uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data

$$(\bigoplus_{i=1}^{3} \epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}) \cup (\bigoplus_{i=1}^{3} \mu_{\rho_i} \to K_eP^{2n}).$$

Denotemos por U_{ρ_i} e V_{ρ_i} as componentes do conjunto de pontos fixos do $Ker(\rho_i)$ contendo K_dP^{2m+1} e K_eP^{2n} respectivamente.

Se cada $\epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}$ borda, então pelo lema 3.4.5 existe uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (W, S) que borda equivariantemente e cujo fixed-data é $(\bigoplus_{i=1}^{3} \epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1})$.

Neste caso, $(N, \Psi) \cup (W, S)$ é equivariantemente cobordante à uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação fixando K_eP^{2n}.

Como K_eP^{2n} tem a propriedade $\mathcal{H}$, então por [19] temos que $(N, \Psi) \cup (W, S)$ é equivariantemente cobordante à $\sigma\Gamma_j^2(M, T)$ onde (M, T) é uma involução fixando K_eP^{2n} e $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ é um automorfismo.

Pelo Teorema 2.8.10 temos $[M, T] = [K_eP^{2n} \times K_eP^{2n}]$, assim

$$[(N, \Psi) \cup (W, S)] = [\sigma\Gamma_j^2(K_eP^{2n} \times K_eP^{2n}, twist)].$$

Portanto,

$$[N, \Psi] = [W, S] \cup [\sigma\Gamma_j^k(K_eP^{2n} \times K_eP^{2n}, twist)],$$

onde (W, S) é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando K_dP^{2m+1} que borda equivariantemente.

Observe que se cada ρ_i fixa separado, então pelo lema 6.2.3 cada $\epsilon_{\rho_i} \to K_dP^{2m+1}$ borda equivariantemente.

Logo, podemos supor de agora em diante que existe pelo menos um ρ que fixa junto, com $(\epsilon_\rho, \mu_\rho) = (\gamma^d, \gamma^e \oplus R^{l-e})$.

Se existe apenas um ρ nestas condições então utilizando um automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$, se necessário, podemos considerar pelo lema 6.2.3 que as possibilidades para o fixed-data são :

(1) $(\eta_1^{k_1}, \eta_2^{k_2}, \gamma^d) \cup (\tau^{2ne}, \tau^{2ne}, \gamma^e \oplus R^{l-e})$;

(2) $(\eta_1^{k_1}, \eta_2^{k_2}, \gamma^d) \cup (\tau^{2ne}, 0, \gamma^e \oplus R^{l-e})$;

(3) $(\gamma^d, \eta_1^{k_1}, \eta_2^{k_2}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, 0, 0)$;

onde $\eta_i^{k_i}$ borda equivariantemente.

Mostraremos a seguir que só pode ocorrer o caso (3) e neste caso $[N, \Psi] = [\Gamma_1^2(M, \Phi_0)]$. Por motivos dimensionais se ocorre o caso (3) então $k_1 = k_2 = 0$.

De fato, se $(\gamma^d, \eta_1^{k_1}, \eta_2^{k_2}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, 0, 0)$ é fixed-data de (N, Ψ), então

$$d + k_1 + k_2 + (2m+1)d = l + 0 + 0 + 2ne \quad \text{e} \quad 2ne + l = (2m+1)d + d,$$

ou seja, $k_1 + k_2 = 0$.
Portanto,

$$(\gamma^d, \eta_1^{k_1}, \eta_2^{k_2}) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, 0, 0) = (\gamma^d, 0, 0) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, 0, 0),$$

e pelo Teorema 3.2.10 temos $[N, \Psi] = [\Gamma_1^2(M, \Phi_0)]$.

Se ocorre o caso (1)

$$(2m+1)d + k_1 + k_2 + d = 2ne + 2ne + 2ne + l \text{ e } 2ne + l = (2m+1)d + d,$$

ou seja, $k_1 + k_2 = 4ne$.

Se ocorre o caso (2)

$$(2m+1)d + k_1 + k_2 + d = 2ne + 2ne + 0 + l \text{ e } 2ne + l = (2m+1)d + d,$$

ou seja, $k_1 + k_2 = 2ne$. Assim, em ambos os casos pelo menos um $\eta_i^{k_i}$ é não nulo.

Suponha sem perda de generalidade que $\eta_1^{k_1}$ é não nulo.
Como

$$W(\eta_2^{k_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) = (1 + \alpha_d)^{p_2}(1 + c^d + \alpha_d),$$

temos $w_d = c^d + \alpha_d$.

Segue que $\alpha_d = w_d + c^d$ é um termo característico e podemos formar o seguinte número não nulo da lista $\big(\lambda, \eta_2^{k_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)\big) \to RP(\eta_1^{k_1})$:

$$\big\langle \alpha_d^{2m+1} c^{k_1 - 1}, \sigma(RP(\eta_1^{k_1}))\big\rangle = 1.$$

Isto contradiz o Teorema 3.4.1 e portanto não pode ocorrer os casos 1) e 2).

Suponha agora que existam ρ_1 e ρ_2 tais que $U_{\rho_i} = V_{\rho_i}$, com

$$(\epsilon_{\rho_i}, \mu_{\rho_i}) = (\gamma^d, \gamma^e \oplus R^{l_i - e}),\ i = 1, 2.$$

Como ρ_1 e ρ_2 fixam junto, temos

$$(2m+1)d + d = 2ne + l_1 \quad e \quad (2m+1)d + d = 2ne + l_2,$$

de onde segue que $l_1 = l_2$.

Pelo lema 6.2.3 as possibilidades para o fixed-data a menos de ordem são:

(1) $(\gamma^d, \gamma^d, \eta^k) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e}, 0)$;

(2) $(\gamma^d, \gamma^d, \eta^k) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e}, \tau^{2ne})$;

(3) $(\gamma^d, \gamma^d, \gamma^d) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e})$,

onde η^k borda equivariantemente.

Como η^k borda equivariantemente, então pelo lema 2.8.3

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \text{ , } p \text{ par.}$$

Por motivos dimensionais, mostraremos que não ocorre o caso 3).

Se $(\gamma^d, \gamma^d, \gamma^d) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e})$ é fixed-data então

$$(2m+1)d + 3d = 2ne + 3l.$$

Além disso, como

$$(2m+1)d + d = 2ne + l,$$

segue que $2d = 2l \geq 2e$, contrariando a hipótese $d < e$.

Caso (2).

Suponha que $(\gamma^d, \gamma^d, \eta^k) \cup (\gamma^e \oplus R^{l-e}, \gamma^e \oplus R^{l-e}, \tau^{2ne})$ é fixed-data, então

$$(2m+1)d + 2d + k = 2ne + 2l + 2ne \quad \text{e} \quad (2m+1)d + d = 2ne + l,$$

logo, $k = (2m+1)d$.

Observe que neste caso, (η^k, τ^{2ne}) fixa separado, caso contrário teríamos

$$2ne + 2ne = (2m+1)d + (2m+1)d,$$

ou seja, $2ne = (2m+1)d$. Como $e = 2d$ ou $e = 4d$ temos um absurdo.

Pelo lema 3.4.3,

$$W(RP(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2m+2}(1+c)^{k-pd}(1+\alpha_d+c^d)^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (*) \quad W(RP(\eta^k)) &= (1+\alpha_d)^p(1+\alpha_d)^{2m+2-p}(1+c)^{k-pd}(1+\alpha_d+c^d)^p \\ &= [(1+\alpha_d)(1+c^d+\alpha_d)]^p(1+\alpha_d)^{2m+2-p}(1+c)^{k-pd}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$W(\gamma^d \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = (1+\alpha_d)((1+c)^d + \alpha_d) = (1+\alpha_d)(1+c^d+\alpha_d).$$

Assim,

$$w_{2d}(\gamma^d \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) = \alpha_d(\alpha_d + c^d).$$

Além disso, multiplicando (*) com as respectivas classes inversas de $[(1+\alpha_d)(1+c^d+\alpha_d)]^p$ e $(1+c)^{k-pd}$ concluímos que $(1+\alpha_d)^{2m+2-p}$ é um termo característico.

Caso: $0 < p < 2m+2$

Temos $w_{pd}(\eta^k) = \alpha_d^p \neq 0$, assim $k \geq pd > (p-1)d$.
Como $(1+\alpha_d)^{2m+2-p}$ é classe característica, se $2m+2-p = 2^t(2j+1)$, então α^{2^t} é classe característica.
Assim, podemos formar o seguinte número característico

$$\left\langle \alpha^{2^t(2j+1)} \alpha_d^{p-1}(\alpha_d + c^d)^{p-1} c^{k-(p-1)d-1}, \sigma(RP(\eta^k)) \right\rangle = \left\langle \alpha^{2m+1} c^{k-1}, \sigma(RP(\eta^k)) \right\rangle = 1.$$

Segue que a lista $(\lambda, \gamma^d \oplus (\gamma^d \otimes \lambda)) \to RP(\eta^k)$ não borda, contrariando o Teorema 3.4.1. Portanto, devemos ter $p = 0$ ou $p \geq 2m+1$.

Caso: $p > 2m+2$

Como $(1+\alpha_d)^{2m+2-p}$ é classe característica, então sua inversa $(1+\alpha_d)^{p-(2m+2)}$ também é classe característica.
Logo, se $p - (2m+2) = 2^s(2i+1)$, então $\alpha_d^{2^s}$ é classe característica.

Considere agora $2^l \leq 2m+2 < 2^{l+1}$.
Observe que, podemos supor $p < 2^{l+1}$, caso contrário, tomando r resto da divisão de 2^{l+1} por p temos

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d)^r \text{ com } 0 \leq r < 2m+2,$$

recaindo na análise anterior se $0 < r < 2m+2$ ou no próximo caso se $r = 0$.

Logo, $2^l \leq 2m+2 < p < 2^{l+1}$. Observe que 2^l esta na partição diádica de p, caso contrário existiria somente potências de 2 menores ou iguais a $l-1$ na partição diádica de p e teríamos $2m+2 \geq 2^l > p$.
Assim,

$$w_{2^l d}(\eta^k) = \begin{pmatrix} p \\ 2^l \end{pmatrix} \alpha_d^{2^l} \neq 0, \text{ ou seja , } k \geq 2^l d.$$

Além disso, temos que $2^s < 2^l$, caso contrário teríamos $2^s \geq 2^{l+1} > p$.

Segue que $2^s < 2m+1$ e existem $0\leq r<2^s$, $t_0\geq 1$ tais que $2m+1=2^st_0+r$. Observe que $k\geq 2^ld>2^sd>rd$, assim podemos formar o seguinte número característico não nulo,

$$\left\langle \alpha_d^{t_0}\alpha_d^r(\alpha_d+c^d)^r c^{k-rd-1},\sigma(RP(\eta^k))\right\rangle=\left\langle \alpha_d^{2m+1}c^{k-1},\sigma(RP(\eta^k))\right\rangle=1.$$

Portanto, não podemos ter $p>2m+2$ e as únicas possibilidades são $p=0$ e $p=2m+2$.

Caso: $p=0$

Se $p=0$, então

$$W(RP(\eta^k))=(1+\alpha_d)^{2m+2}(1+c)^k.$$

Multiplicando a igualdade por $(1+c)^{2^S-k}$ para S suficientemente grande temos

$$(1+\alpha_d)^{2m+2}=(1+c)^{2^S-k}W(RP(\eta^k)).$$

Se $2m+2=2^t(2j+1)$, então $\alpha_d^{2^t}$ é um termo característico, pois é a parcela na dimensão 2^td. Assim, podemos formar o seguinte número não nulo:

$$\left\langle \alpha_d^{2^t2j}\alpha_d^{2^t-1}(\alpha_d+c^d)^{2^t-1}c^{(2m+1)d-(2^t-1)d-1},\sigma(RP(\eta^k))\right\rangle=1.$$

Portanto, não podemos ter $p=0$.

Segue que $W(\eta^k)=(1+\alpha_d)^{2m+2}$ e $k=(2m+1)d$.

Logo, (N,Ψ) possui fixed-data simultaneamente cobordante à

$$(\gamma^d,\gamma^d,\tau^{(2m+1)d})\cup(\gamma^e\oplus R^{l-e},\gamma^e\oplus R^{l-e},\tau^{2ne}),$$

e pelo Teorema 3.2.10 temos $[N,\Psi]=[\Gamma_2^2(M,\Phi_0)]$.

Caso (1) Se $(\gamma^d,\gamma^d,\eta^k)\cup(\gamma^e\oplus R^{l-e},\gamma^e\oplus R^{l-e},0)$ é fixed-data de (N,Ψ), então pelo Teorema 6.2.2, $k=(2m+1)d-2ne$, $W(\eta^k)=1$ e $l=e$.

Portanto, o fixed-data de (N,Ψ) é simultaneamente cobordante à

$$(\gamma^d,\gamma^d,R^{(2m+1)d-2ne})\cup(\gamma^e,\gamma^e,0),$$

e pelo Teorema 3.2.10 temos $[N,\Psi]=[E,\Psi_0]$.

Referências Bibliográficas

[1] Conner, P.E. and Floyd, E. E. *Differentiable periodic maps*, Springer-Verlag (1964).

[2] Conner, P.E. *Differentiable periodic maps*, second edition, Springer-Verlag, New York (1979).

[3] Conner, P.E. *Diffeomorphism of period two*, Michigan Journal Math., 10, 341-352 (1963).

[4] Capobianco, F.L. *Stationary points of Z_2^k actions*, Proc. Amer. Math Soc. 61 (1976), 377-380.

[5] Dold, A. *Erzeugend der Thomshen algebra $\mathcal{N}$*, Math. Z.(1956), 25-35.

[6] Kosniowski, C. and Stong, R.E. *Involutions and characteristic numbers*, Topology 17 (1978) 309-330 MR516213.

[7] Oliveira, R. *Involuções Comutantes Fixando Dois Espaços Projetivos Pares*, Tese de Doutorado-DM-UFSCar (2002).

[8] Osborn, H. *Vector Bundles*, Academic Press, Inc, 1982.

[9] Pergher, P.L.Q. *An Equivariant Construction*, Proc. Amer. Math. Soc. 119(1993), 319-320.

[10] Pergher, P.L.Q. *Z_2^k-actions Fixing a Product of Spheres and a Point*, Canad. math. Bull., 38 (1995), 366-372.

[11] Pergher, P.L.Q. *The Union of a connected manifold an a point as Fixed Set of Commuting Involutions*, Topology Appl. 69 (1996), 71-81.

[12] Pergher, P.L.Q. *Involutions fixing an arbitrary product of spheres and a point*, Manuscripta Math. 89 (1996) 471-474 MR1383526.

[13] Pergher, P.L.Q. *Bordism Of two Commuting Involutions*, Proceedings of the Amer. Math. Society. 126 (1998), 2141-2149.

[14] Pergher, P.L.Q. *Z_2^k-action whose fixed data has a section*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 175-189.

[15] Pergher, P.L.Q. and Stong, R. E. *Involutions fixing $\{point\} \cup F^n$*, Transformations Groups 6 (2001) 78-85.

[16] Pergher, P.L.Q. *On Z_2^k actions*, Topology Appl. 117 (2002), 105-112.

[17] Pergher, P.L.Q. *Z_2^k-action fixing $\{point\} \cup V^n$*, Fund. Math. 171 (2002), 83-97.

[18] Pergher, P.L.Q. and Ramos, A., *Z_2^k-Actions fixing $K_dP(2^s) \cup K_dP(even)$*, Topology and its Applications (2009).

[19] Pergher, P.L.Q. and Oliveira, R. *Z_2^k-action with a special fixed point set*, Fundamenta Mathematicae (2005) 97-109, MR2162380.

[20] Pergher, P.L.Q and Oliveira, R. *Commuting involutions whose fixed point set consists of two special components*, Fundamenta Mathematicae (2008) 241-259.

[21] Ramos, A. *Involuções Fixando Espaços Projetivos*, Tese de Doutorado-DM-UFSCar(2007).

[22] Royster, D.C. *Involution Fixing the Disjoint Union of Two Projective Space*, Indiana Univ. math. J.29 (1980) 267-276.

[23] Stong, R. E. *Involutions fixing projective spaces*, Michigan Math. J. 13 (1966), 445-447 MR0206979.

[24] Stong, R. E. *Equivariant bordism and Z_2^k-action*, Duke Math. J. 17 (1970), 779-785.

[25] Stong, R. E. *Involutions fixing products of circles*, Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993) 1005-1008 MR1169050.

[26] Torrence, B. and Hou, D. *Involutions fixing the disjoint union of odd-dimensional projective spaces*, Canad. Math. Bull. 37 (1994) 66-74 MR1261559.

[27] Torrence, B. and Hou, D. *Involutions fixing the disjoint union of copies of even projective space*, Acta Math. Sinica .N.S./ 12 (1996) 162-166 MR1458687.

[28] Thom, R. *Quelques propriétés globales des variétés differentiables*, Comm. Math. Helv. 28(1954),18-88.

[29] Zhi Lu, *Involutions fixing* $RP^{odd} \cup P(h,i)$, I, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002) 4539-4570 MR1926888.

[30] Zhi Lu, *Involutions fixing* $RP^{odd} \cup P(h,i)$, II, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004) 1291-1314 MR2034310.