UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Equações de Schrödinger com Expoente Supercrítico

Sandra Imaculada Moreira Neto

São Carlos
Junho/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Equações de Schrödinger com Expoente Supercrítico

Sandra Imaculada Moreira Neto

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutora em Matemática.

Orientação: Olimpio Hiroshi Miyagaki

São Carlos
Junho/2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

	Moreira Neto, Sandra Imaculada.
M838em	Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schrödinger com expoente supercrítico / Sandra Imaculada Moreira Neto. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
	113 f.
	Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.
	1. Matemática. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Existência de solução. I. Título.
	CDD: 510 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

UFJF

Profª. Drª. Claudia Butarello Gentile

UFSCar

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

UFSCar

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

UFG

Paulo Cesar

Prof. Dr. Paulo César Carrião

UFMG

À minha família.

Agradecimentos

Ao meu Senhor, Pai, Mestre e Santificador. A Ele não cabem palavras, apenas o silêncio de um coração feliz, sonhador e eternamente grato.

A minha Mãe, Maria Santíssima, que tantos cuidados dispensou a mim neste tempo.

Aos meus pais e irmãos, pessoas que eu me orgulho e admiro muito por tudo que são e representam para mim.

Ao Professor Olímpio, não apenas pela excelente orientação, mas pelo incentivo, paciência e por sempre acreditar em minhas capacidades.

Aos professores Rodrigo, Cláudia, Carrião e José Valdo, por aceitarem compor a banca examinadora e pelas correções e sugestões para a finalização deste trabalho.

A todos os meus amigos de fé, especialmente aos amigos do Ministério Universidades Renovadas, e Grupo de Profissionais do Reino, por me mostrarem que é possível unir fé e razão.

Aos amigos Jhone Caldeira e Alê Verri, por nunca duvidarem de minhas capacidades e sempre me apoiarem com palavras de consolo e ânimo.

Aos amigos espalhados pelo Brasil, que sempre me apoiaram nos momentos de dificuldade e se alegraram comigo nos momentos felizes.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar, que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho. Em especial ao professor Ruidival.

Aos colegas e amigos da UFSCar, pela troca de experiências e risos. De modo muito especial ao pessoal da minha turma: Alex, Daniel e Samuel. E ao Japa, por resolver as pendências técnicas e burocráticas.

Aos meus primos Elenita, Carlos, Lucas e Mateus, por serem minha família em Juiz de Fora.

Parte deste trabalho foi feito no Departamento de Matemática da UFJF. Agradeço a todo o pessoal do departamento e a toda a faculdade por sua hospitalidade e por propiciarem um agradável ambiente de estudo. Aos amigos que revi e aos que conheci em Juiz de Fora e que tanto me ajudaram com palavras de ânimo. Em particular, agradeço ao Rônei, à Sandra e ao Bruno, irmãos de orientação, pelo apoio e por nossas produtivas discussões.

Aos colegas e amigos do Departamento de Matemática e Infomática da UEMA pelo incentivo e apoio na obtenção da licença para capacitação.

A UEMA pela liberação para capacitação e pelo apoio financeiro.

“Devemos fazer as coisas
como se tudo dependesse de
nós, e esperar o resultado
como se tudo dependesse de
Deus.”
(Santo Inácio de Loyola)

Resumo

Neste trabalho, estabelecemos a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schrödinger quase lineares com não linearidades subcrítica ou supercrítica. A fim de utilizarmos métodos variacionais, aplicamos uma mudança de variável para reduzirmos as equações quase lineares a equações semilineares, cujos funcionais associados estão bem definidos em um espaço de Banach reflexivo, e em alguns casos, eles estão bem definidos em espaços de Sobolev clássicos. Nosso principal foco é tratar não linearidades supercríticas, e nossa principal dificuldade é a perda das imersões de Sobolev tanto contínuas quanto compactas. Para contornar isso, no primeiro problema, inspirados por [4], impomos condições de integrabilidade que relacionam as não linearidades, as quais podem mudar de sinal e necessitamos também, nesse caso, de provar a existência do primeiro autovalor para o operador $Lu = -\Delta u - \Delta(u^2)u$, usando para isso os métodos de bifurcação e sub e supersolução. No outro problema, nos baseamos num argumento de truncamento, introduzido por del Pino e Felmer em [27], assim o problema fica reduzido a um problema subcrítico. E seguimos com a prova dos resultados usando métodos variacionais combinados com a iteração de Moser. Estabelecemos também a existência de solução para um problema ressonante, cuja prova faremos usando uma variação do Teorema de Operadores Monótonos, encontrado em [29].

Palavras Chaves: Problema ressonante, métodos variacionais, iteração de Moser, truncamento, expoente supercrítico.

Lista de Símbolos

Neste trabalho, faremos uso das seguintes notações

- Ω denota um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado com fronteira suave;
- $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto de dualidade;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta centrada em x e com raio R;
- $p^* = \begin{cases} \dfrac{pN}{N-p}, \text{ se } N \geq p \\ \infty, \text{ se } 1 \leq N \leq p \end{cases}$ denota o expoente crítico de Sobolev;
- $(Ce)_c$ denota a condição de Cerami no nível c;
- $H^1(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com norma $\|\cdot\|$;
- E denota o espaço de Sobolev munido com norma $\|\cdot\|_E$;
- E_W denota o espaço de Sobolev munido com norma $\|\cdot\|_{E_W}$;
- W denota o espaço de Banach reflexivo munido com norma $\|\cdot\|_W$;
- $L^s(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço de Lebesgue $L^s(\mathbb{R}^N)$ com norma $\|\cdot\|_s$;
- X^* denota o espaço dual do espaço X;
- $u_n \to u$ denota a convergência forte (em norma), quando $n \to \infty$;
- $u_n \rightharpoonup u$ denota a convergência fraca, quando $n \to \infty$;
- $\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + u^2)dx\right]^{1/2}$ denota a norma do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$;
- $\|u\|_E = \left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx\right]^{1/2}$ denota a norma do espaço E;
- $\|u\|_W = \|\nabla u\|_2 + \inf\limits_{\xi>0} \dfrac{1}{\xi}\left\{1 + \left(\int_\Omega h(x)\,|f(\xi u)|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}$ denota a norma do espaço W;

Capítulo

1

Introdução

Nos últimos anos vários pesquisadores têm se dedicado às questões relacionadas com a existência de soluções para equações elípticas quase lineares da forma

$$-\epsilon^2\Delta u + V(x)u - k\epsilon^2\Delta(u^2)u = p(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

em que $N \geq 1$, $\epsilon > 0$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função chamada potencial, k é uma constante real e $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

As soluções de (1.1) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quase lineares da forma

$$i\epsilon\partial_t z = -\epsilon^2\Delta z + W(x)z - \eta(|z|^2)z - k\epsilon^2\Delta\left[g(|z|^2)\right]g'(|z|^2)z, \tag{1.2}$$

onde $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, é um potencial dado, $\epsilon > 0$, k é uma constante real e η, g são funções reais.

Equações quase lineares da forma (1.2) aparecem naturalmente como modelo para vários fenômenos físicos relacionados a vários tipos de g. Por exemplo, o caso $g(s) = s$ foi usado na obtenção da equação da membrana de superfluido em Física dos Plasmas em [40]. No caso em que $g(s) = (1+s)^{1/2}$, a equação (1.2) modela a canalização de laser ultra-curto de alta potência na matéria, veja [18] e [19]. A equação (1.2) aparece também em Teoria da Matéria condensada, veja [47].

O caso semilinear, correspondente a $k = 0$ tem sido largamente estudado nos últimos anos. Logo, existem muitos resultados sobre existência de soluções com expoente subcrítico, crítico e supercrítico (veja, por exemplo, [7, 14, 17, 27, 28, 54, 58] e suas referências).

Considerando $g(s) = s$ e $k > 0$, nosso especial interesse está na existência das ondas estacionárias, isto é, soluções da forma $\psi(t,x) = \exp(-iEt)u(x)$, onde $E \in \mathbb{R}$ e $u > 0$ é uma função real. Sabemos que ψ satisfaz (1.2) se, e somente se, $u(x)$ satisfaz a equação elíptica da forma (1.1), com $V(x) := W(x) - E$ sendo um novo potencial.

A fim de obter solução para a equação (1.1) com $k > 0$, dois métodos variacionais têm sido amplamente utilizados, principalmente na situação subcrítica e crítica. Isto é, para o caso $p(s) = |s|^{r-1} s$, quando $4 \leq r+1 \leq 2(2^*)$, lembrando que $r + 1 = 2(2^*) = \dfrac{4N}{N-2}$, com $N \geq 3$, comporta-se como um expoente crítico para a equação (1.1) [46, Remark 3.13].

Para o caso subcrítico $r + 1 < 2(2^*)$, a existência de uma solução positiva de energia mínima foi provada em [52] e estendida em [45], usando argumentos de minimização com vínculos, onde obteve-se uma solução de (1.1) com um multiplicador de Lagrange λ desconhecido na frente do termo não linear.

O segundo e mais geral método, que foi iniciado em [46], usa uma inovadora mudança de variável que permite reescrever o problema quase linear em um problema semilinear e também uma estrutura de espaço de Orlicz foi usada para provar a existência de uma solução positiva via Teorema do Passo da Montanha. Em [21], os autores também fizeram uso da mudança de variável para reduzir a equação (1.1) a uma semilinear, e utilizando espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Eles provaram a existência de soluções a partir dos resultados clássicos obtidos em [17] quando $N = 1$ ou $N \geq 3$, e em [16] quando $N = 2$.

Seguindo a mesma técnica de mudança de variável, em [30, 31, 32, 33, 36, 44, 49, 56, 57, 61, 62], desenvolveram outros trabalhos relacionados à existência, multiplicidade e comportamento de concentração de soluções para equações de Schrödinger quase lineares.

Vale ressalatar que esta mudança de variáveis não é necessária em R, uma vez que o funcional associado à equação está bem definido, para maiores detalhes veja [6] e [12].

Agora, voltando a atenção para o caso supercrítico do problema (1.1) com $k > 0$, vimos que existem poucos trabalhos nesta direção. Destacamos o trabalho [50], onde o autor obteve a existência de soluções positivas, assumindo, entre outras condições, que p é uma função não negativa, $N \geq 2$ e a função potencial V é radial e se anula em um subdomínio de $\mathbb{R}^N$.

Para o caso $k < 0$, os autores em [11] introduziram outra mudança de variável que permitiu mostrar a existência de soluções não triviais para uma classe de equações do tipo

(1.1).

Ao longo de todo nosso trabalho consideramos $\epsilon = k = 1$ e sempre que citarmos "mudança de variável", estaremos nos referindo à mudança que foi introduzida em [46]. E ainda, usamos Ω como um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com exceção feita ao Capítulo 5.

No Capítulo 2, estudamos o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u &= \lambda u \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

O seguinte teorema contém o principal resultado do Capítulo.

Teorema 1.1. *Existe um número Λ, com $\lambda_1 < \Lambda \leq +\infty$, tal que para todo $\lambda_1 \leq \lambda < \Lambda$ o problema* (1.3) *admite uma solução não negativa, onde λ_1 é o primeiro autovalor do laplaciano.*

Para provar o resultado acima nós inicialmente aplicamos uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo uma equação semilinear cujo funcional associado está bem definido no espaço de Sobolev usual. Nesse processo o novo operador torna-se não homogêneo. Em seguida, fazendo uso da teoria da bifurcação para garantir que $\lambda_1 < \Lambda$ e concluímos a prova usando um resultado de sub e supersolução.

Como consequência do Teorema acima nós garantimos a existência do "primeiro autovalor"para nosso operador não homogêneo, a saber:

Proposição 1.1. *Existe $0 \neq v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\Omega) = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |f(u)|^2} \tag{1.4}$$

é atingido em v_0, com f definida por

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2f^2(t)}}, \quad \textit{sobre} \quad [0, +\infty)$$

e (1.5)

$$f(t) = -f(-t), \quad \textit{sobre} \quad (-\infty, 0].$$

A prova desse resultado se dá fazendo uso do Teorema acima, bem como de propriedades da função f que aparecerão também neste capítulo.

Agora, conhecendo o "primeiro autovalor"nós estudaremos o problema ressonante, o qual foi inspirado pelo artigo [15]. Consideremos o seguinte problema ressonante para o operador não homogêneo:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u &= \overline{\lambda}u - g(x,u), \qquad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Sob as seguintes hipóteses:

(G_1) $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Caratheodóry $g(x,0) \neq 0$;

(G_2) $|g(x,s)| \leq \sigma(x) + \rho(x)\,|s|^r$, para quase todo $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$, onde $0 < r < 2(2^*) - 2$, $\sigma \in (L^{2^*}(\Omega))^*$ e $0 \leq \rho \in L^\infty(\Omega) \cap L^\mu(\Omega)$, com $\mu = \dfrac{2(2^*)}{2(2^*) - r - 2}$;

(G_3) $\inf\limits_{s \in \mathbb{R}^*} \dfrac{g(x,s)}{s} > \overline{\lambda}$.

Nós obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.2. *Sob as hipóteses (G_1), (G_2) e (G_3) o problema (1.6) tem ao menos uma solução não trivial.*

Vale ressaltar que o problema ressonante para o caso do operador de Laplace vem sendo estudado de forma extensiva desde o trabalho pioneiro de Landesman e Lazer [41]. Também gostaríamos de mencionar, entre outros, os trabalhos [13, 22, 25, 34, 37, 38] e suas referências.

Na prova da existência de solução fraca para o problema (1.6) usamos um resultado interessante [29, Theorem 5.3.23], evidentemente, após termos aplicado a mudança de variável que torna o referido problema bem posto no espaço de Sobolev.

No terceiro capítulo, desejamos estudar o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u = \lambda u + k(x)\,|u|^{q-1}\,u - h(x)\,|u|^{r-1}\,u \qquad \text{em } \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

com $3 \leq q < r < \infty$, h, k funções não negativas satisfazendo as seguintes hipóteses:

(H_1) $\operatorname{supp} k \subset \operatorname{supp} h$;

(H_2) $h, k \in L^1(\Omega)$ são funções não negativas e $\operatorname{supp} k$, $\operatorname{supp} h$ tem medidas positivas.

Teorema 1.3. *Sejam $3 \leq q < r < \infty$. Suponha que (H_1) e (H_2) valem e que*

$$\int_{\Omega_2} k(x) \left[\frac{k(x)}{h(x)}\right]^{\frac{q+1}{r-q}} < \infty. \tag{1.8}$$

Então, existe um número λ^* com $-\infty \leq \lambda^* < \overline{\lambda}(\Omega)$ tal que para todo $\lambda \in \left(\lambda^*, \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})\right)$ o problema (1.7) admite uma solução fraca não negativa, em que $\overline{\lambda}(\Omega)$ está definido em (1.4) e $\widetilde{\Omega} = \{x \in \Omega : h(x) = 0\}$.

Observemos que $\overline{\lambda}(\widetilde{\Omega}) \geq \overline{\lambda}(\Omega)$ e $\overline{\lambda}(\widetilde{\Omega}) = \infty$, quando $\widetilde{\Omega}$ tem medida nula ou é vazio.

No Capítulo 4 tratamos o mesmo problema (1.7), com a hipóstese (H_1) e alterando a hipótese (H_2), exigindo que:

(H_2') $h, k \in L^\infty(\Omega)$ são funções não negativas e $\operatorname{supp} k, \operatorname{supp} h$ tem medidas positivas.

E mudando a condição de integrabilidade do quociente $\dfrac{k(x)}{h(x)}$, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 1.4. *Seja $3 \leq q < r$. Suponha que (H_1) e (H_2') valem e que*

$$(*) \qquad \int_{\Omega_2} \left[\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\right]^{\frac{N}{2}} < +\infty.$$

Então existe um número λ^* com $-\infty < \lambda^* < \overline{\lambda}(\Omega)$ tal que

1. *Se $\lambda^* < \lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$ então o problema (1.7) admite uma solução não negativa.*

2. *Se $\lambda^* < \lambda < \overline{\lambda}(\Omega)$ o problema (1.7) admite duas soluções não negativas, $0 \leq w_\lambda < v_\lambda$.*

Observando o problema acima, percebemos que tecnicamente, existem duas grandes dificuldades para se demonstrar a existência de solução. Uma delas é a presença do termo $\Delta(u^2)u$, a outra, é o fato dos expoentes q e r poderem ser supercríticos, e com isso, o funcional associado ao problema não está bem definido no espaço de Sobolev usual.

Vale ressaltar que em [4], os autores estudaram a existência de solução para o problema acima para o operador Laplaciano, e assim como eles, nós também contornamos o problema da supercriticalidade, criando um espaço de Banach reflexivo e uma norma adequada e impondo a condição (1.8) ou $(*)$ de modo a relacionar a não linearidade e garantir a boa definição do problema. Mas no nosso caso, ficamos ainda com o problema no termo $\Delta(u^2)u$ e para superar essa limitação, novamente utilizamos a mudança de variável. Apesar disso facilitar em certo sentido os cálculos, ela traz outra dificuldade, a perda da homogeneidade. Depois disso, usamos minimização, juntamente com o método de sub e supersolução. Finalmente, mostramos que a partir da solução não negativa do problema modificado conseguimos um solução não negativa para o problema (1.7), comprovando o Teorema 1.3 e o item 1. do Teorema 1.4.

Para conseguirmos a segunda solução no Teorema 1.4 inicialmente provamos que a solução do item 1. é regular com essa nova condição de integrabilidade, além disso ela é um mínimo local. Em seguida, mostramos que o funcional modificado satisfaz a condição de Palais Smale sobre convexos e com isso fazendo uso de resultados conhecidos garantimos a segunda solução para o problema.

O Capítulo 5 tratará da existência de solução no espaço todo, para a seguinte classe de problema:

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + V(x)u = p(u) \qquad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad N \geq 3, \tag{1.9}$$

onde V é uma função contínua que satisfaz as seguintes hipóteses:

(V_0) existe $\beta > 0$ tal que $V(x) \geq \beta > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(V_1) $V(x) = V(x+y)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N, \;\; y \in \mathbb{Z}^N$;

(V_2) Existem $W_0 > 0$ e $W \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ tais que $\widetilde{V}(x) = V(x) - W(x) \geq W_0$, com $W(x) \geq 0$, com a desigualdade estrita em um conjunto de medida positiva.

A função $p \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pode ser escrita $p(s) = f_0(s) + \epsilon g(s)$, em que ϵ é um parâmetro real positivo, f_0 e g são funções localmente Hölder contínuas satisfazendo:

(F_1) $f_0(0) = g(0) = 0$ e $g(s) \geq 0$ para todo $s \neq 0$;

(F_2) $\displaystyle\lim_{|s|\to 0^+} \frac{f_0(s)}{s} = 0$ e $\displaystyle\lim_{|s|\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = 0$;

(F_3) Existe $q \in (4, 2(2^*))$ tal que $|f_0(s)| \leq C\,|s|^{q-1}$, para todo $s \in \mathbb{R}$;

(F_4) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{F_0(s)}{s^4} = \infty$, onde $F_0(s) = \int_0^s f_0(t)dt$;

(F_5) Existe uma sequência de números reais positivos, (M_n) convergindo para $+\infty$ tal que

$$\frac{g(s)}{s^{q-1}} \leq \frac{g(M_n)}{M_n^{q-1}} \text{ para todo } s \in [0, M_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(F_6) Para $\alpha > 0$ dado por (V_0) existem $l > 2$ e $\sigma \in (0, (\frac{l}{2} - 1)\alpha)$ tal que

$$\tfrac{1}{2} s f_0(s) - l F_0(s) \geq -\sigma s^2 \text{ e } \tfrac{1}{2} s g(s) - l G(s) \geq 0, \text{ para todo } s \neq 0,$$

onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt$.

Para garantir a existência de solução positiva consideramos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $(F_1) - (F_6)$ sobre $[0, +\infty)$ e definida como zero sobre $(-\infty, 0]$. Obtendo o seguinte resultado:

Teorema 1.5. *Suponhamos que* V *e* p *satisfaçam* $(V_0), (V_1)$ *e* $(F_1) - (F_6)$ *respectivamente. Então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que (1.9) tem uma solução positiva para todo* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Tratamos também o problema anterior sob as hipóteses $(F_1) - (F_5)$ juntamente com

(F_6') Para $W_0 > 0$ dada por (V_2) existem $l > 2$ e $\sigma \in (0, (\frac{l}{2} - 1)W_0)$ tal que

$$\frac{1}{2} s f_0(s) - l F_0(s) \geq -\sigma s^2 \text{ and } \frac{1}{2} s g(s) - l G(s) \geq 0 \text{ para todo } s \neq 0,$$

onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt$;

(F_7) A função $s \longmapsto \dfrac{p(s)}{s^3}$ é crescente sobre $(0, +\infty)$.

Provamos ainda o seguinte resultado:

Teorema 1.6. *Suponhamos que* V *satisfaça* $(V_0) - (V_2)$ *e em adição as hipóteses* $(F_1) - (F_5)$ *p também verifique* (F_6') *e* (F_7). *Então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que o problema (1.9) tem uma solução positiva para todo* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Antes de continuar, um exemplo de função que satisfaz as condições acima é dada por $f(t) = t^{q-1} + \epsilon t^{p-1}$, com $p > 2(2^*) > q$.

Notemos que, nesse problema temos a falta de compacidade tanto por estarmos tratando de problemas supercríticos quanto por envolver domínio ilimitado.

Vale ressaltar que quando V é periódica, encontramos uma extensa bibliografia para a classe de equações com o laplaciano como [23, 53, 64]. E se tratando de problemas com perturbações do potencial periódico, além do pioneiro trabalho de Montecchiari [51], citamos [5, 7], entre outros.

A ideia para provarmos os resultados deste capítulo é motivada pelos argumentos usados em [5, 8, 10, 42]. Primeiro, usamos a mudança de variável e reduzimos nosso problema a encontrar solução para uma equação semilinear, lembrando que com isso perdemos a homogenidade do problema. Depois disso, provamos que o problema periódico envolvendo expoente subcrítico possui uma solução positiva. Para isso consideramos o funcional associado ao problema modificado e usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, sem condição de compacidade (veja [57]), a fim de garantir a existência de uma sequência de Cerami limitada associada ao nível minimax. Em seguida, utilizamos esta sequência e um resultado técnico, devido a Lions (veja [23]), para obtermos um ponto crítico não trivial do funcional associado ao problema periódico modificado. Finalmente, construímos uma sequência de funções corte e modificamos a não linearidade, de modo a satisfazer o crescimento subcrítico, obtendo assim uma família de funcionais de classe C^1. Utilizando um argumento de iteração de Moser, fornecemos uma estimativa envolvendo a norma L^∞ para a solução relacionada ao problema subcrítico. Já o problema não periódico é tratado de maneira semelhante ao periódico, mudando apenas os argumentos que garantem a não trivialidade da solução para o problema subcrítico modificado.

Uma observação interessante no que diz respeito ao problema subcrítico, é que em certo sentido, melhoramos o resultado encontrado em [57], veja a hipótese (g_3) do referido artigo e nossa hipótese (F_6).

Reservamos o último capítulo para apresentarmos alguns resultados que utilizamos ao longo de texto.

Capítulo

2

Solução para problemas quase lineares ressonantes

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u & = & \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u & > & 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$.

O seguinte teorema contém nosso principal resultado.

Teorema 2.1. *Existe um número Λ, com $\lambda_1 < \Lambda \leq +\infty$, tal que para todo $\lambda_1 \leq \lambda < \Lambda$ o problema* (2.1) *admite uma solução não negativa, onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano.*

Note que o problema acima não está bem posto em $H_0^1(\Omega)$, devido ao termo $\Delta(u^2)u$. Para contornar isso, apresentaremos neste capítulo uma mudança de variável introduzida em [46] (veja também [21]) bem como algumas de suas propriedades. Feito essa mudança, obteremos uma equação semilinear cujo funcional associado está bem definido no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Em seguida, faremos uso da teoria da bifurcação para garantir que $\lambda_1 < \Lambda$ e concluiremos a prova usando um resultado de sub e supersolução.

Como consequência do resultado acima, obtemos:

Proposição 2.1. *Existe $0 \neq v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\Omega) = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |f(u)|^2}$$

é atingido, com f definida por

$$
\begin{aligned}
& f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2f^2(t)}}, \quad \textit{sobre} \quad [0,+\infty) \\
e \qquad & \\
& f(t) = -f(-t), \quad \textit{sobre} \quad (-\infty,0].
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Observação 2.1. *O número $\overline{\lambda}$ é o "primeiro autovalor"do operador não homogêneo $Lu = -\Delta u - \Delta(u^2)u$. Observemos também que $\overline{\lambda}(\widetilde{\Omega}) \geq \overline{\lambda}(\Omega)$ e $\overline{\lambda}(\widetilde{\Omega}) = \infty$, quando $\widetilde{\Omega}$ tem medida nula ou é vazio.*

A prova desse resultado foi feita usando o Teorema acima, bem como das propriedades da função mudança de variável, visto que, não conseguimos aplicar o método padrão quando no estudo de autovalor, já que o operador é não homogêneo.

Neste capítulo, estudaremos também um problema ressonante, o qual foi inspirado por [15]. Mais precisamente, desejamos estudar o seguinte problema:

$$
\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u &= \overline{\lambda}u - g(x,u), \qquad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}
$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$. Sob as seguintes hipóteses:

(G_1) $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e $g(x,0) \neq 0$;

(G_2) $|g(x,s)| \leq \sigma(x) + \rho(x)\,|s|^r$, com $0 < r < 2^* - 1$, $\sigma \in (L^{2^*}(\Omega))^*$, $0 \leq \rho \in L^\infty(\Omega) \cap L^\mu(\Omega)$ e $\mu = \dfrac{2^* - r}{2^* - r - 1}$;

(G_3) $\displaystyle\inf_{s \in \mathbb{R}^*} \frac{g(x,s)}{s} > \overline{\lambda}$.

Com tais hipóteses conseguimos o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Sob as hipóteses (G_1), (G_2) e (G_3), o problema (2.3) tem pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Novamente faremos a mesma mudança de variável usada no problema (2.1), desse modo, garantiremos que o funcional associado ao problema modificado estará bem definido em $H_0^1(\Omega)$ e faremos a prova do teorema acima usando um resultado interessante, veja o Teorema 6.11.

2.1 Prova dos resultados

Observemos que, formalmente (2.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia natural :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (1+2u^2)\,|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 .$$

Notemos que o funcional J_λ não está bem-definido no espaço de Sobolev usual. Para superar isso, utilizamos o método desenvolvido por Liu, Wang, Wang, em [46] (veja também [21]) considerando a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, onde f é definida como na Proposição 2.1. Depois desta mudança de variáveis, a partir de J_λ obtemos o funcional

$$I_\lambda(v) = J_\lambda(f(v)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 .$$

Veja que os pontos críticos não triviais de I_λ são soluções fracas de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v &=& \lambda f(v)f'(v) & \text{em } \Omega \\ v &=& 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

O próximo lema traz uma coletânea de propriedades da função mudança de variável, a saber:

Lema 2.1. *A função f goza das seguintes propriedades:*

(1) f é uma função C^∞, unicamente definida e invertível;

(2) $|f'(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(3) $|f(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(4) $\dfrac{f(t)}{t} \to 1$ quando $t \to 0$;

(5) $\dfrac{f(t)}{\sqrt{t}} \to 2^{\frac{1}{4}}$ quando $t \to \infty$;

(6) $\dfrac{f(t)}{2} \leq tf'(t) \leq f(t)$ para todo $t \geq 0$;

(7) $|f(t)| \leq 2^{\frac{1}{4}}\,|t|^{\frac{1}{2}}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(8) $f^2(t)$ é estritamente convexa;

(9) Existe constante C positiva tal que

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C\,|t|\,, & se \quad |t| \leq 1 \\ C\,|t|^{\frac{1}{2}}\,, & se \quad |t| \geq 1; \end{cases}$$

(10) Existem constantes positivas C_1, C_2 tais que $|t| \leq C_1\,|f(t)| + C_2\,|f(t)|^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(11) $|f(t)f'(t)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(12) Para cada $\lambda > 1$ temos $f^2(\lambda t) \leq \lambda^2 f^2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(13) Para cada $\lambda < 1$ temos $f^2(\lambda t) \geq \lambda^2 f^2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: As provas de (1)-(11) podem ser encontradas em [32, Lema 2.1] (veja também [21] e [46]) e (12) está provada em [36, Lemma 2.1]. A prova de (13) é análoga a (12), observando que neste caso $\lambda t < t$. De fato, segue de (6) do Lema 2.1 que

$$\frac{(f^2(t))'t}{f^2(t)} = \frac{2f(t)f'(t)t}{f^2(t)} \leq 2\frac{f^2(t)}{f^2(t)} = 2, \text{ para todo } t > 0.$$

Assim,

$$\ln\frac{f^2(t)}{f^2(\lambda t)} = \int_{\lambda t}^{t} \frac{(f^2(s))'}{f^2(s)}ds \leq \int_{\lambda t}^{t} \frac{2}{s}ds = 2\ln\frac{t}{\lambda t} = \ln(\frac{1}{\lambda})^2.$$

Portanto,

$$\frac{f^2(t)}{f^2(\lambda t)} \leq (\frac{1}{\lambda})^2,$$

ou seja,

$$\lambda^2 f^2(t) \leq f^2(\lambda t).$$

$\blacksquare$

Como consequência do lema acima temos

Corolário 2.1.

i) A função $\dfrac{f(t)f'(t)}{t}$ é decrescente para todo $t \geq 0$.

ii) A função $\dfrac{f^3(t)f'(t)}{t}$ é crescente para todo $t \geq 0$.

iii) A função $f^2(t) - f(t)f'(t)t$ é crescente para todo $t \geq 0$.

Demonstração: A prova dos itens i) e ii) podem ser encontrada em [33, Corolário 2.3]. Para provarmos o item iii) basta observarmos que segue do item (6) do Lema 2.1 que para todo $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}(f^2(t) - f(t)f'(t)t)' = & \ f(t)f'(t) - (f'(t))^2 t + 2(f'(t))^4 (f(t))^2 t \\ \geq & \ 2(f'(t))^4 (f(t))^2 t \geq 0.\end{aligned}$$

■

A próxima proposição relaciona a solução do problema modificado com a solução do problema original.

Proposição 2.2.

(i) Se $v \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico de I_λ, então $u = f(v)$ é uma solução fraca para o problema (2.1).

(ii) Qualquer ponto crítico do funcional I_λ é de classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$.

(iii) Além disso, se $v \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico de I_λ, então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica de (2.1).

Demonstração: Prova de (i): Como $v \in H_0^1(\Omega)$, segue do Lema 2.1 que $|u| = |f(v)| \leq |v|$ e $\nabla u = f'(v)\,|\nabla v| \leq |\nabla v|$, ou seja, $u \in H_0^1(\Omega)$. Como $(f^{-1}(t))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1})(t)} = \sqrt{1 + 2f^2(f^{-1}(t))} = \sqrt{1 + 2t^2}$ segue que $(f^{-1})''(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{1 + 2t^2}}$ o que implica que

$$\nabla v = (f^{-1}(u))' \nabla u = \sqrt{1 + 2u^2} \nabla u.$$

Observemos que para cada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos $\phi := (f'(v))^{-1}\psi = (f^{-1})'(u)\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ com

$$\nabla \phi = \frac{2u\psi}{\sqrt{1 + 2u^2}} \nabla u + \sqrt{1 + 2u^2} \nabla \psi.$$

Já que v é ponto crítico de I_λ, ou seja solução fraca de

$$-\Delta v = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} \left[\lambda f(v)\right],$$

então

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi = \int_\Omega f'(v)[\lambda f(v)]\phi, \qquad \text{para toda} \quad \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo as substituições adequadas, encontramos

$$\int_\Omega [2\,|\nabla u|^2\, u\psi + (1+2u^2)\nabla u \nabla \psi] = \int_\Omega [\lambda u]\psi.$$

Portanto $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (2.1).

Prova de (ii): Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ um ponto crítico de I_λ. Então

$$-\Delta v = w \text{ em } \Omega,$$

no sentido fraco, onde $w(x) = \lambda f(v(x))f'(v(x))$. Assim, pelas propriedades (2) e (3) do Lema 2.1, temos que $|w| \le C\lambda\,|v| \le C(|v| + |v|^{\frac{r-2}{2}}) \le C_1 + C_2\,|v|^{\frac{r-2}{2}}$ com $4 < r < 2(2^*)$. Seja $p_0 = \dfrac{2(2^*)}{r-2} > 1$, como $v \in L^{2^*}(\Omega)$ segue que $w \in L^{p_0}(\Omega)$. Pela teoria de regularidade elíptica (veja [35]) temos que $w \in W^{2,p_0}(\Omega)$. Usando um argumento de "bootstrap"padrão podemos concluir que $v \in W^{2,p}(\Omega)$, para todo $p > 2$, (para mais detalhes, veja [39, Exemplo 11.6]). Assim, $v \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ e isto implica que w é localmente Hölder contínua. Consequentemente, $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,1)$.

Provemos o item (iii): Sabemos que

$$\Delta v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}[(f^{-1})'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}],$$

e derivando obtemos,

$$\Delta v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}[\frac{\partial u}{\partial x_i}](f^{-1})'(u) \quad + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}[(f^{-1})'(u)]\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Assim,

$$\Delta v = (1+2\,|u|^2)^{1/2}\Delta u + 2(1+2\,|u|^2)^{-1/2} u\,|\nabla u|^2\,.$$

Portanto, segue que

$$(1+2\,|u|^2)^{1/2}\Delta u + 2(1+2\,|u|^2)^{-1/2} u\,|\nabla u|^2 = -\frac{1}{(1+2\,|u|^2)^{1/2}} w,$$

isto é,

$$(1+2\,|u|^2)\Delta u + 2u\,|\nabla u|^2 = -w.$$

Porém,

$$2|u|^2\Delta u + 2u|\nabla u|^2 = \Delta(u^2)u$$

logo

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u = w.$$

■

2.2 Prova do Teorema 2.1

A fim de buscar solução para o problema (2.4) tentamos seguir os argumentos usados em [3]. Para demonstrarmos o teorema precisamos enunciar e demonstrar alguns resultados técnicos apresentados a seguir.

Definição 2.1. *Definamos* Λ *por*

$$\Lambda = \sup\left\{\lambda > \lambda_1 : (2.4) \textit{ tem uma solução não negativa}\right\}.$$

Lema 2.2. *Temos* $\Lambda > \lambda_1$*.*

Demonstração: Usaremos teoria da bifurcação para mostrarmos que (2.4) admite soluções positivas para $\lambda > \lambda_1$ próximo a λ_1. Para isso, definimos $\mathcal{F} : C_0^{2,\,\beta}(\Omega)\times\mathbb{R} \to C^{0,\,\beta}(\Omega)$ por $\mathcal{F}(u,\lambda) = -\Delta u - \lambda f(u)f'(u)$. Temos que $\mathcal{F}(0,\lambda) = 0$ para todo λ. Assim, usando (4) do Lema 2.1 e sabendo que $f'(0) = 1$, temos $\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)v = -\Delta v - \lambda_1 v$.

Logo

$$N(\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)) = \langle\phi_1\rangle,$$

$$codim R(\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)) = 1$$

e

$$\mathcal{F}_{\lambda,u}(0,\lambda_1)\phi_1 = -\phi_1 \notin R(\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)).$$

Portanto, $(0,\lambda_1)$ é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ (veja [24]).

Fazendo a decomposição

$$C_0^{2,\beta}(\Omega) = \langle\phi_1\rangle \oplus V,$$

onde $V = \langle\phi_1\rangle^{\perp}$ obtemos, pelo Teorema 6.9, uma vizinhança U de $(0,\lambda_1)$ em $C_0^{2,\beta}(\Omega)\times\mathbb{R}$, e funções contínuas $\phi : (-a,a) \to \mathbb{R},\ \psi : (-a,a) \to V$ com $\phi(0) = \lambda_1,\ \psi(0) = 0$ e

$$\mathcal{F}^{-1}\{0\} \cap U = \{(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha), \phi(\alpha)) : \alpha \in (-a,a)\} \cup \{(0,\lambda) : (0,\lambda) \in U\}.$$

Seja $u_\alpha = \alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)$. Note que em particular, $\psi(\alpha) \to 0$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ quando $\alpha \to 0$, e assim $u_\alpha > 0$ em Ω para α suficientemente pequeno. Vamos mostrar que $\phi(\alpha) > \lambda_1$ para todo α suficientemente pequeno.

Suponhamos, por contradição, que exista uma sequência $\alpha_n \to 0^+$ com $\phi(\alpha_n) \leq \lambda_1$. Seja u_n a solução positiva do problema (2.4) associada a $\lambda = \phi(\alpha_n)$. Assim,

$$\lambda_1 \int_\Omega u_n\phi_1 = \int_\Omega \phi(\alpha_n) f(u_n) f'(u_n)\phi_1.$$

Mas, lembrando que $u_n > 0$ segue pelas propriedades (2) e (3) do Lema 2.1, que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(\alpha_n) f(u_n) f'(u_n)\phi_1 &\leq \lambda_1 \int_\Omega f(u_n) f'(u_n)\phi_1 \\ &< \lambda_1 \int_\Omega u_n\phi_1,\end{aligned}$$

o que dá uma contradição. Portanto $\phi(\alpha) > \lambda_1$. ■

Lema 2.3. *Seja $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$. O problema (2.4) admite uma supersolução.*

Demonstração: Seja $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$ fixado. Segue da definição de Λ que existe um $\lambda_0 \in (\lambda,\ \Lambda)$ tal que o problema (2.4) admite uma solução não negativa u_+. Temos que u_+ é uma supersolução para (2.4). De fato, para qualquer função $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$ em Ω, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_+ \nabla\phi - \lambda \int_\Omega f(u_+) f'(u_+)\phi &\geq \lambda_0 \int_\Omega f(u_+) f'(u_+)\phi - \lambda \int_\Omega f(u_+) f'(u_+)\phi \\ &= (\lambda_0 - \lambda) \int_\Omega f(u_+) f'(u_+)\phi \geq 0,\end{aligned}$$

pois

$$f(u_+) f'(u_+) \geq 0.$$

■

Pelo lema anterior, existe uma supersolução positiva u_+ do problema (2.4). Sem perda de generalidade, existe R_0 tal que $u_+(x) \geq 0$ in $B_{R_0}(0)$. Escolhamos $R < R_0$, tal que $u_+(x) \geq C_o > 0$, para toda $B_R(0)$.

Defina

$$v(x) = \epsilon^\alpha u(\frac{x}{\epsilon}),\ \alpha > 2,$$

onde u é uma solução regular e positiva de

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 \quad \text{em} \quad B_R(0) \quad \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = 0 \qquad \text{sobre} \qquad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Então v satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v = \epsilon^{\alpha-2} \quad \text{em} \quad B_{\epsilon R}(0) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ v = 0 \qquad \text{sobre} \qquad \partial B_{\epsilon R}(0) \end{cases}$$

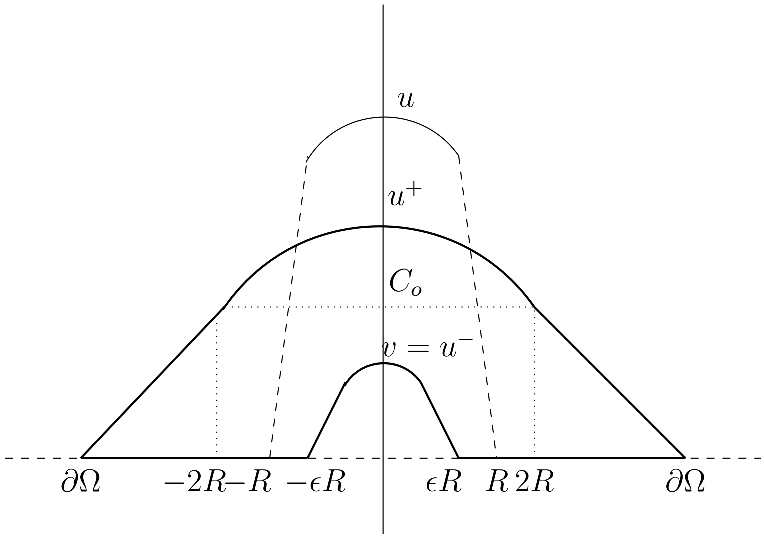
e, pelo Princípio do Máximo, $v > 0$.

Lema 2.4. *A função*

$$u_- = \begin{cases} v \quad em \quad B_{\epsilon R}(0) \\ 0 \quad em \quad \mathbb{R}^n \setminus B_{\epsilon R}(0) \end{cases}$$

é uma subsolução para o problema (2.4). E pela construção

$$u_- < u_+.$$



Demonstração: Seja $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\psi \geq 0$. Precisamos analisar dois casos:

1) *supp* $\psi \cap B_{\epsilon R}(0) = \emptyset$. Neste caso, temos que $\langle I'(u_-), \psi\rangle = 0$, logo u_- é solução, e portanto, subsolução do problema.

2) *supp* $\psi \cap B_{\epsilon R}(0) \neq \emptyset$. Neste caso temos pelas propriedades (6) e (9) do Lema 2.1 que

$$\begin{aligned}
\langle I'(u_-), \psi\rangle = \langle I'(v), \psi\rangle &= \int_{B_{\epsilon R}(0)} \nabla v \nabla \psi - \lambda \int_{B_{\epsilon R}(0)} f'(v) f(v)\psi \\
&= \int_{B_{\epsilon R}(0)} \nabla v \nabla \psi - \lambda \int_{B_{\epsilon R}(0)} f'(v) f(v)\psi \\
&= \epsilon^{\alpha-2} \int_{B_{\epsilon R}(0)} \psi - \lambda \int_{B_{\epsilon R}(0)} f'(v) f(v)\psi \\
&= \epsilon^{\alpha-2} \int_{B_{\epsilon R}(0)} \psi - \lambda \int_{B_{\epsilon R}(0)\cap\{v\geq 1\}} f'(v) f(v)\psi - \\
&\quad \lambda \int_{B_{\epsilon R}(0)\cap\{v\leq 1\}} f'(v) f(v)\psi \\
&\leq \epsilon^{\alpha-2} \int_{B_{\epsilon R}(0)} \psi - \frac{\lambda C}{2}\left(\int_{B_{\epsilon R}(0)\cap\{v\geq 1\}} \psi + \int_{B_{\epsilon R}(0)\cap\{v\leq 1\}} v\psi\right) \\
&\leq \epsilon^{\alpha-2+N} A - \frac{\lambda C}{2}\left(\int_{B_{\epsilon R}(0)\cap\{v\geq 1\}} \psi\right) \\
&\leq \epsilon^{\alpha-2+N} A - \lambda C_1 < 0,
\end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente e A, C, C_1 constantes independentes de ϵ. Notemos que C_1 de fato independe de ϵ, pois podemos tomar $\psi > 0$ em $D \subset B_{\epsilon R}(0) \cap \{v \geq 1\}$.

Observemos que pelo Teorema das Imersões e pelo Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg (Teorema 6.13) temos

$$\|u_-\|_\infty \leq \|u_-\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\epsilon^{\alpha-2} < C_o \leq \|u_+\|_\infty .$$

Para ver outra prova dessa comparação, veja a Observação 6.1. ■

2.2.1 Prova do Teorema 2.1

Para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$ temos pelo Lema 2.3, que o problema (2.4) admite uma supersolução u_+. Além disso, pelo Lema 2.4 existe uma subsolução, u_- de (2.4) satifazendo $u_- < u_+$ em Ω. Logo, pelo Teorema 6.8 existe u solução não negativa do problema (2.4) verificando $u_- \leq u \leq u_+$ e, pela Proposição 2.2 concluímos o Teorema neste caso.

Observação 2.2. *No caso $\lambda = \lambda_1$, temos que a primeira autofunção do Laplaciano* *funciona como supersolução. De fato, pelas propriedades (2) e (3) do Lema 2.1 temos*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\phi_1\nabla\phi - \lambda\int_\Omega f(\phi_1)f'(\phi_1)\phi &= \lambda_1\int_\Omega \phi_1\phi - \lambda_1\int_\Omega f(\phi_1)f'(\phi_1)\phi \\ &= \lambda_1\int_\Omega [1-\frac{f(\phi_1)}{\phi_1}f'(\phi_1)]\phi_1\phi \geq 0.\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4 existe uma subsolução u_- de (2.4) tal que $u_- < \phi_1$ em Ω, logo existe u solução positiva do problema também neste caso.

2.2.2 Prova da Proposição 2.1

Consideremos $\lambda_0 < \Lambda$. Pelo Teorema 2.1 existe u solução fraca não negativa do problema (2.4) e ela satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v = \lambda_0\int_\Omega f(u)f'(u)v, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $u = v$ obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda_0\int_\Omega f(u)f'(u)u.$$

Pela propriedade (6) do Lema 2.1 temos que

$$\int |\nabla u|^2 \leq \lambda_0\int f^2(u),$$

implicando que

$$\overline{\lambda} \leq \lambda_0 < \Lambda.$$

Por outro lado, pela propriedade (3) do Lema 2.1 nós obtemos

$$\overline{\lambda} \geq \lambda_1.$$

Considerando o problema (2.4) com $\lambda = \overline{\lambda}$, temos que $\int_\Omega |\nabla v_0|^2 \leq \overline{\lambda}\int_\Omega f^2(v_0)$, onde v_0 é a solução do problema em questão. Logo, $\dfrac{\int_\Omega |\nabla v_0|^2}{\int_\Omega f^2(v_0)} \leq \overline{\lambda}$ e assim, o ínfimo é atingido.

2.3 O problema ressonante

2.3.1 Reformulação do problema

Inicialmente observemos que o funcional associado ao problema (2.3) é dado por :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (1+2u^2)\,|\nabla u|^2 - \frac{\overline{\lambda}}{2}\int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega G(x,u).$$

Pela dificuldade em trabalhar com o termo $\int_\Omega u^2\,|\nabla u|^2$, utilizamos a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$ em que f é definida como na Proposição 2.1. Assim, a partir de J obtemos,

$$I(v) = J(f(v)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\overline{\lambda}}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 - \int_\Omega G(x,f(v)).$$

e observemos que os pontos críticos não triviais para I_λ são soluções fracas de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v &=& \lambda f(v)f'(v) - g(x,f(v))f'(v), & \text{em } \Omega \\ v &=& 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.5}$$

o que equivale a encontrar $v \in H_0^1(\Omega)$, com $v \neq 0$ tal que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u - \overline{\lambda}\int_\Omega f(v)f'(v)u + \int_\Omega g(x,f(v))f'(v)u = 0, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Como já foi dito, faremos a prova da existência da solução fraca de (2.5) usando o interessante Teorema 6.11. Para isso, defina os operadores, $J, H, F : H_0^1(\Omega) \to H_0^{-1}(\Omega)$, dados por:

$$\begin{array}{rcl} \langle J(v), u\rangle &=& \int_\Omega \nabla v \nabla u \\ \\ \langle H(v), u\rangle &=& \int_\Omega f(v)f'(v)u \\ \\ \langle F(v), u\rangle &=& \int_\Omega g(x,f(v))f'(v)u, \end{array}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e façamos

$$Tv = J - \overline{\lambda}H + F.$$

O lema abaixo contém um resultado bem técnico que será útil durante a prova do teorema.

Lema 2.5. *Seja* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $H_0^1(\Omega)$. *Então* $H(v_n) \to H(v)$ *e* $F(v_n) \to F(v)$ *em* $H_0^{-1}(\Omega)$, *quando* $n \to \infty$.

Demonstração: Para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, observemos que

$$\langle H(v_n) - H(v), u\rangle = \int_\Omega [f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)]u.$$

Visto que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, segue pelo Teorema de Imersão, passando à subsequência se necessário, que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$, $2 \leq p \leq 2^*$ e, assim, $v_n(x) \to v(x)$ qtp e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|v_n| \leq h$ qtp em Ω. Segue da propriedade (1) do Lema 2.1 que

$$f(v_n(x))f'(v_n(x)) \to f(v(x))f'(v(x)) \text{ qtp em } \Omega,$$

e usando a propriedade (11) do Lema 2.1 podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e concluir que

$$\int_\Omega f(v_n(x))f'(v_n(x)) \to \int_\Omega f(v(x))f'(v(x)).$$

Por outro lado,

$$\langle F(v_n) - F(v), u\rangle = \int_\Omega [g(x, f(v_n))f'(v_n) - g(x, f(v))f'(v)]u,$$

pelo que vimos acima e pelo fato de g ser Carathéodory, temos

$$g(x, f(v_n))f'(v_n) \to g(x, f(v))f(v).$$

Segue de (G_2) que

$$|g(x, f(v_n))f'(v_n)| \leq \sigma(x) + \rho(x)\,|f(v_n)|^r \leq \sigma(x) + \rho(x)\,|v_n|^r\,,$$

visto que $\rho \in L^\infty$ temos que $\sigma(x) + \rho h^r \in L^{(2^*)'}(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, $g(., f(v_n))f'(v_n) \to g(., f(v))f'(v)$ em $(L^{(2^*)}(\Omega))^*$. Como Ω é um domínio limitado, segue que

$$g(.,f(v_n))f'(v_n) \to g(.,f(v))f'(v) \text{ em } L^1(\Omega).$$

■

2.3.2 Prova do Teorema 2.2

Dividiremos a prova em quatro etapas.

1) T é limitado, isto é, leva conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$ em conjuntos limitados de $H_0^{-1}(\Omega)$.

Para isso, iremos mostrar que J, H, F são operadores limitados. Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq M$, para algum $M > 0$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega \nabla v \nabla u\right| \leq \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo $\sup\limits_{\|v\|=1} |\langle J(v), u\rangle| \leq M$.

Usando novamente a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\left|\int_\Omega f(v)f'(v)u\right| \leq \int_\Omega |f(v)f'(v)u| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\Omega |u| \leq C\|u\|.$$

Assim,

$$\sup_{\|u\|=1} |\langle H(v), u\rangle| \leq CM.$$

Finalmente observemos que, pela desigualdade de Hölder, (G_2) e (3) do Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} \left|\textstyle\int_\Omega g(x,f(v))f'(v)u\right| \leq & \textstyle\int_\Omega |g(x,f(v))u| \leq \int_\Omega \sigma u + \int_\Omega \rho\,|f(v)|^r u \\ \leq (\textstyle\int_\Omega |\sigma|^{(2^*)'})^{\frac{1}{(2^*)'}}(\int_\Omega |u|^{(2^*)})^{\frac{1}{(2^*)}} + & (\textstyle\int_\Omega |v|^{(2^*)})^{\frac{r}{(2^*)}}(\int_\Omega |\rho u|^{\frac{2^*}{2^*-r}})^{\frac{2^*-r}{(2^*)}} \\ \leq (\textstyle\int_\Omega |\sigma|^{(2^*)'})^{\frac{1}{(2^*)'}}(\int_\Omega |u|^{(2^*)})^{\frac{1}{(2^*)}} + & (\textstyle\int_\Omega |v|^{(2^*)})^{\frac{r}{(2^*)}}(\int_\Omega |\rho|^s)^{\frac{1}{s}}(\int_\Omega |u|^{2^*})^{\frac{1}{2^*}}. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema das Imersões ,

$$\left|\int_\Omega g(x,f(v))f'(v)u\right| \leq C\left(\int_\Omega |\sigma|^{(2^*)'}\right)^{\frac{1}{(2^*)'}} + \|v\|^r \left(\int_\Omega |\rho|^s\right)^{\frac{1}{s}} \|u\|,$$

consequentemente,

$$\sup_{\|u\|=1} |\langle F(v), u\rangle| \leq C\left(\int_\Omega |\sigma|^{(2^*)'}\right)^{\frac{1}{(2^*)'}} + M^r\left(\int_\Omega |\rho|^s\right)^{\frac{1}{s}} < \infty.$$

2) T é contínuo, isto é, se $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$ então $Tv_n \to Tv$ em $H_0^{-1}(\Omega)$. Pelo Lema 2.5 temos que H e F são contínuos. Vejamos a continuidade de J. Sejam $v_n, v \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|v_n - v\| \to 0$, pela desigualdade de Hölder temos

$$\|J(v_n) - J(v)\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle J(v_n) - J(v), u\rangle| \leq \sup_{\|u\|=1}\left(\int_\Omega |\nabla v_n - \nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_2 .$$

Logo

$$\|J(v_n) - J(v)\|_* \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

3) T é coercivo, isto é, $\langle Tv, v\rangle \to \infty$ quando $\|v\| \to \infty$. De (G_3) temos $\dfrac{g(x,s)}{s} > \overline{\lambda}$ e assim $\dfrac{g(x,f(v))}{f(v)} = \dfrac{g(x,f(v))f'(v)v}{f(v)f'(v)v}$, como $f(v)f'(v)v \geq 0$, para todo v, temos

$$g(x,f(v))f'(v)v - \overline{\lambda}f(v)f'(v)v \geq 0.$$

Assim,

$$\langle Tv, v\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega (g(x,f(v))f'(v)v - \overline{\lambda}f(v)f'(v)v) \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 .$$

Portanto, T é coercivo.

4) Definamos o operador $\phi : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to H_0^{-1}(\Omega)$ por

$$\langle \phi(v,w), u\rangle = \langle J(v), u\rangle + \left\langle (F - \overline{\lambda}H)(w), u\right\rangle .$$

Temos que $\phi(v,v) = T(v)$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Seja t_n uma sequência tal que $t_n \to 0$ e $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$. Então

$$\phi(v + t_n u, w) = J(v + t_n u) + (F - \overline{\lambda}H)(w).$$

Como J é um operador contínuo, então $\phi(v + t_n u, w) \to \phi(v, w)$. Observemos que para todo $v, w \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\langle \phi(v,v) - \phi(w,v), v - w \rangle = \langle J(v) - J(w), v - w \rangle .$$

Agora, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle J(v) - J(w), v - w \rangle = & \int_\Omega \nabla v \nabla (v - w) - \int_\Omega \nabla w \nabla (v - w) \\
= & \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega \nabla v \nabla w + \int_\Omega \nabla w^2 - \int_\Omega \nabla w \nabla v \\
\geq & \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |\nabla w|^2 - (\int_\Omega |\nabla v|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}} \\
& -(\int_\Omega |\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla v|^2)^{\frac{1}{2}} \\
= & \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \|v\| \|w\| = (\|v\| - \|w\|)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \phi(v,v) - \phi(w,v), v - w \rangle \geq 0.$$

Seja $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$ e

$$\lim_{n \to \infty} \langle \phi(v_n, v_n) - \phi(v, v_n), v_n - v \rangle = 0.$$

Logo, $\|v_n\| \to \|v\|$ quando $n \to \infty$. Segue da continuidade de $(F - \overline{\lambda} H)$ que $\phi(w, v_n) \to \phi(w, v)$, quando $n \to \infty$, para um arbitrário $w \in H_0^1(\Omega)$. Seja agora $w \in H_0^1(\Omega)$, $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\phi(w, v_n) \rightharpoonup z$ quando $n \to \infty$. Temos $\langle \phi(w, v_n), v_n \rangle = \langle \phi(w, v_n), v \rangle + \langle \phi(w, v_n), v_n - v \rangle$. Mas, por suposição $\langle \phi(w, v_n), v \rangle = \langle z, v \rangle$ e devemos mostrar que $\langle \phi(w, v_n), v_n - v \rangle \to 0$ quando $n \to \infty$. Agora, por definição, temos

$$\begin{aligned}
\langle \phi(w, v_n), v_n - v \rangle = & \langle J(w), v_n - v \rangle + \left\langle (F - \overline{\lambda} H) v_n, v_n - v \right\rangle \\
= & \left\langle J(w) + (F - \overline{\lambda} H) v, v_n - v \right\rangle + \left\langle (F - \overline{\lambda} H) v_n - (F - \overline{\lambda} H) v, v_n - v \right\rangle .
\end{aligned}$$

Observemos que $\left\langle J(w) + (F - \overline{\lambda} H) v, v_n - v \right\rangle \to 0$, quando $n \to \infty$, visto que $v_n \rightharpoonup v$ quando $n \to \infty$ e

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle (F - \overline{\lambda} H) v_n - (F - \overline{\lambda} H) v, v_n - v \right\rangle \right| \leq & \left\| (F - \overline{\lambda} H) v_n - (F - \overline{\lambda} H) v \right\|_* \|v_n - v\| \\
\leq & C \left\| (F - \overline{\lambda} H) v_n - F - \overline{\lambda} H) v \right\|_* ,
\end{aligned}$$

pois sendo v_n fracamente convergente, logo ela é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema 2.5 temos

$$\left\|\left\langle (F-\overline{\lambda}H)v_n - (F-\overline{\lambda}H)v, v_n - v\right\rangle\right\|_* \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim,

$$\langle \phi(w, v_n), v_n - v\rangle \to 0, \text{ quando } n \to \infty$$

e então,

$$\langle \phi(w, v_n), v_n\rangle \to \langle z, v\rangle\,, \text{ quando } n \to \infty.$$

Segue do Teorema 6.11 que a equação $Tv = 0$ tem uma solução em $H_0^1(\Omega)$. Observemos que tal solução fraca é não trivial, pois $T(0) \neq 0$, graças à hipótese (G_1). Para concluir a prova do teorema precisamos verificar a seguinte proposição:

Proposição 2.3. *Se $v \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico de I, então $u = f(v) \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema (2.3).*

Demonstração: Basta repetir os argumentos usados na Proposição 2.2. ∎

Capítulo

3

Existência de solução para equações quase lineares envolvendo expoente supercrítico

Neste capítulo, inspirados pelo artigo [4], desejamos estudar o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u = \lambda u + k(x)\,|u|^{q-1}\,u - h(x)\,|u|^{r-1}\,u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, é um conjunto aberto e limitado com fronteira suave, $3 \leq q < r < \infty$, e h, k funções não negativas satisfazendo as seguintes hipóteses:

(H_1) $\operatorname{supp} k \subset \operatorname{supp} h$.

(H_2) $h, k \in L^1(\Omega)$ são funções não negativas e $\operatorname{supp} k, \operatorname{supp} h$ tem medidas positivas.

Observação 3.1. *Note que, neste caso, a não linearidade pode mudar de sinal.*

Observando o problema acima, percebemos que tecnicamente, existem duas grandes dificuldades para se demonstrar a existência de solução. Uma delas é a presença do termo $\Delta(u^2)u$, a qual será superada empregando a mesma mudança de variável do capítulo anterior. A outra, é o fato dos expoentes q e r poderem ser supercríticos, e com isso, o funcional associado ao problema não está bem definido no espaço de Sobolev usual. Para contornar isso impomos uma condição de integrabilidade sobre o quociente $\dfrac{k(x)}{h(x)}$ e construimos um espaço e uma norma adequada. Tal espaço, como pode ser visto no Apêndice, é um espaço de Banach reflexivo.

Superada essas dificuldades tratamos o problema usando minimização, juntamente com o método de sub e supersolução. Finalmente, mostramos que a partir da solução não negativa do problema modificado (após a mudança de variável) conseguimos uma solução não negativa para o problema (3.1).

Ao longo deste capítulo usamos algumas notações: $\Omega_1 = \operatorname{supp} h$; $\Omega_2 = \operatorname{supp} k$, $\widetilde{\Omega} = \{x \in \Omega : h(x) = 0\}$ e $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\Omega)$.

O principal resultado do capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Sejam $3 \leq q < r < \infty$. Suponha que $(H_1) - (H_2)$ valem e que*

$$\int_{\Omega_2} k(x) \left[\frac{k(x)}{h(x)}\right]^{\frac{q+1}{r-q}} < \infty. \tag{3.2}$$

Então, existe um número λ^* com $-\infty \leq \lambda^* < \overline{\lambda}$ tal que, para todo $\lambda \in \left(\lambda^*, \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})\right)$ o problema (3.1) admite uma solução fraca não negativa, onde $\overline{\lambda}$ está definido na Proposição 2.1.

3.1 Reformulação do problema

Observemos inicialmente que o funcional energia associado ao problema (3.1), é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (1+2u^2)\,|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|u|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|u|^{r+1}.$$

Todavia, devido à presença do termo $\int_\Omega u^2\,|\nabla u|^2$ utilizamos argumentos similares aos desenvolvidos em [46] considerando a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$ em que f está definida como na Proposição 2.1. Vale ressaltar que apesar disso facilitar em certo sentido os cálculos, ela trará um outro problema, a perda da homogeneidade.

Depois desta mudança de variável, a partir de J obtemos o funcional:

$$I_\lambda(v) = J(f(v)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}.$$

que está bem definido no espaço

$$W = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} < \infty\right\},$$

o qual é um espaço de Banach reflexivo quando munido da norma

$$\|u\|_W = \|\nabla u\|_2 + \inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left\{1 + \left(\int_\Omega h(x)\,|f(\xi u)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}$$

(veja as Proposições 6.1 e 6.2). Note que os pontos críticos não triviais de I_λ são soluções fracas de

$$(P_{f\lambda}) : \quad \begin{cases} -\Delta v = & \dfrac{1}{\sqrt{1+2f^2(v)}}g(\lambda, x, v), \quad em \;\; \Omega, \\ \quad v = & 0 \qquad\quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g(\lambda, x, v) = \lambda f(v) + k(x)\,|f(v)|^{q-1} f(v) - h(x)\,|f(v)|^{r-1} f(v)$.

O seguinte resultado será utilizado em vários momentos neste e no próximo capítulo.

Lema 3.1. *A seguinte desigualdade é válida para todo $u \in \mathbb{R}$, com $r > s > 0$, $\quad k \geq 0$ e $h > 0$,*

$$k\,|u|^s - h\,|u|^r \leq C_{r,s}\frac{k^{\frac{r}{r-s}}}{h^{\frac{s}{r-s}}} = C_{r,s}k\left[\frac{k}{h}\right]^{\frac{s}{r-s}}. \tag{3.3}$$

Demonstração: *Observemos que*

$$\begin{aligned} & k\,|u|^s - h\,|u|^r \\ & = \frac{k^{\frac{r}{r-s}}}{h^{\frac{s}{r-s}}}\left[\left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{s}{r-s}}|u|^s - \left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{r}{r-s}}|u|^r\right] \\ & = \frac{k^{\frac{r}{r-s}}}{h^{\frac{s}{r-s}}}\left[\left(\left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{r-s}}|u|\right)^s - \left(\left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{r-s}}|u|\right)^r\right] \\ & \leq C_{r,s}\frac{k^{\frac{r}{r-s}}}{h^{\frac{s}{r-s}}}, \end{aligned}$$

visto que, a função $f(t) = t^s - t^r$ é limitada superiormente por uma constante que depende somente de r e s. ■

O próximo lema é crucial para nosso trabalho.

Lema 3.2. *Suponha que (3.2) ocorra, então*

$$\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} < \infty, \qquad para\ todo \quad u \in W.$$

Mais especificamente,

$$A(u) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}$$

é finito para $u \in W$. Logo I_λ está bem definido em W.

Demonstração: *Usando a desigualdade de Hölder temos*

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} = \int_{\Omega_2}(k(x))^{\frac{r-q}{r+1}}(\dfrac{k(x)}{h(x)})^{\frac{q+1}{r+1}}(h(x))^{\frac{q+1}{r+1}}\,|f(v)|^{q+1}\\
&\leq \left(\textstyle\int_{\Omega_2}\left[(k(x))^{\frac{r-q}{r+1}}(\dfrac{k(x)}{h(x)})^{\frac{q+1}{r+1}}\right]^{\frac{r+1}{r-q}}\right)^{\frac{r-q}{r+1}}\left(\textstyle\int_{\Omega_2}\left[(h(x))^{\frac{q+1}{r+1}}\,|f(v)|^{q+1}\right]^{\frac{r+1}{q+1}}\right)^{\frac{q+1}{r+1}}\\
&= \left(\textstyle\int_{\Omega_2}k(x)\left[\dfrac{k(x)}{h(x)}\right]^{\frac{q+1}{r-q}}\right)^{\frac{r-q}{r+1}}\left(\textstyle\int_{\Omega_2}h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{q+1}{r+1}}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 6.3 e por (3.2) temos que $A(u)$ é finito para $u \in W$. Consequentemente I_λ está bem definido W. ■

Proposição 3.1. *O funcional I_λ é Gâteaux diferenciável em W e*

$$\langle I'_\lambda(v),\phi\rangle = \int_\Omega \nabla v\nabla\phi - \lambda\int_\Omega f(v)f'(v)\phi - \int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q-1}f(v)f'(v)\phi + \int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r-1}f(v)f'(v)\phi.$$

Demonstração: *Observemos que para $v, \phi \in W$ fixados temos pelo Teorema do Valor Médio*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{f^2(v+t\phi)-f^2(v)}{t} = \int_\Omega f(\xi)f'(\xi)\phi,$$

onde

$$\min\{v, v+t\phi\} \leq \xi \leq \max\{v, v+t\phi\}.$$

Note que para $|t| \leq 1,\ |\xi| \leq |v| + |\phi|$, usando (2), (10) e (11) do Lema 2.1 e o fato de f ser crescente, obtemos

$$\begin{aligned}
|f(\xi)f'(\xi)\phi| &= |f(\xi)f'(\xi)|\,|\phi|\\
&\leq C_1\,|f(\xi)f'(\xi)|\,|f(\phi)| + C_2\,|f(\xi)f'(\xi)|\,|f^2(\phi)|\\
&\leq C_1\,|f(\xi)f'(\xi)|\,|f(\phi)| + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\,|f^2(\phi)|\\
&\leq C_1\,|f(\xi)|\,|f(\phi)| + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\,|f^2(\phi)|\\
&\leq C_1\,|f(|v|+|\phi|)|\,|f(|v|+|\phi|)| + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\,|f^2(\phi)|\\
&\leq C_1\,|f(|v|+|\phi|)|^2 + C_2\,|f^2(\phi)|,
\end{aligned}$$

onde o lado direito pertence a $L^1(\Omega)$. Como $f(\xi)f'(\xi)\phi \to f(v)f'(v)\phi$, logo pelo Teorema *da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{f^2(v+t\phi)-f^2(v)}{t} = \int_\Omega f(v)f'(v)\phi.$$

Observemos que para $v,\phi \in E$ fixados temos pelo Teorema do Valor Médio

$$\frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\frac{f^{q+1}(v+t\phi)-f^{q+1}(v)}{t} = \int_\Omega k(x)f^q(\xi)f'(\xi)\phi,$$

onde

$$\min\{v, v+t\phi\} \le \xi \le \max\{v, v+t\phi\}.$$

Note que para $|t|\le 1$, $\quad |\xi| \le |v|+|\phi|$ usando (2), (10) e (11) do Lema 2.1 e o fato de f ser crescente, obtemos

$$\begin{aligned}
|f^q(\xi)f'(\xi)\phi| &= |f^q(\xi)f'(\xi)|\,|\phi| \\
&\le C_1\,|f^q(\xi)|\,|f(\phi)| + C_2\,|f^q(\xi)f'(\xi)|\,|f^2(\phi)| \\
&\le \frac{C_1}{\sqrt{2}}\,|f^q(\xi))|\,|f(\phi)| + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\,|f^{q-1}(\xi))|\,|f^2(\phi)| \\
&\le C_1\,|f^q(|v|+|\phi|)|\,|f(|v|+|\phi|)| + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\,|f^{q-1}(|v|+|\phi|)|\,|f^2(\phi)| \\
&\le C_3\,|f(|v|+|\phi|)|^{q+1}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2 temos que $\int_\Omega k(x)\,|f(|v|+|\phi|)|^{q+1} < \infty$, isto é, $k(x)\,|f(|v|+|\phi|)|^{q+1} \in L^1(\Omega)$. Como $f \in C^\infty$, e $f^{q+1}(\xi)f'(\xi)\phi \to f^{q+1}(v)f'(v)\phi$, logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\frac{f^{q+1}(v+t\phi)-f^{q+1}(v)}{t} = \int_\Omega k(x)f^q(v)f'(v)\phi.$$

De modo análogo provamos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\frac{f^{r+1}(v+t\phi)-f^{r+1}(v)}{t} = \int_\Omega h(x)f^r(v)f'(v)\phi.$$

∎

Como pode ser visto em [4], não é possível encontar uma solução clássica para o problema, pois não conseguimos aplicar o Teorema de Brezis-Kato (veja [59]), sendo assim seguimos os argumentos encontrados em [36, Proposição 2.4] para garantir o seguinte *resultado.*

Proposição 3.2. *Se $v \in W$ é ponto crítico do funcional I_λ, então $u = f(v)$ é solução fraca do problema (3.1).*

Demonstração: *Como $v \in W$, segue do Lema 2.1 que $|u| = |f(v)| \leq |v|$, e $|\nabla u| = |f'(v)\nabla v| \leq |\nabla v|$, ou seja, $u \in W$.*

Como $(f^{-1}(t))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))} = \sqrt{1 + 2f^2(f^{-1}(t))} = \sqrt{1+2t^2}$ segue que $(f^{-1}(t))'' = \dfrac{2t}{\sqrt{1+2t^2}}$ e assim,

$$\nabla v = (f^{-1}(u))'\nabla u = \sqrt{1+2u^2}\nabla u.$$

Observemos que para cada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos $\phi := (f'(v))^{-1}\psi = (f^{-1})'(u)\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ com

$$\nabla \phi = \frac{2u\psi}{\sqrt{1+2u^2}}\nabla u + \sqrt{1+2u^2}\nabla \psi.$$

Já que v é ponto crítico de I_λ, ou seja, solução fraca de

$$-\Delta v = \frac{1}{\sqrt{1+2f^2(v)}}\left[\lambda f(v) + k(x)\left|f(v)\right|^{q-1} f(v) - h(x)\left|f(v)\right|^{r-1} f(v)\right],$$

logo

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi = \int_\Omega f'(v)[\lambda f(v) + k(x)\left|f(v)\right|^{q-1}\left|f(v)\right| - h(x)\left|f(v)\right|^{r-1}\left|f(v)\right|]\phi,$$

para toda $\phi \in W$. Fazendo as substituições adequadas, encontramos

$$\int_\Omega [2\left|\nabla u\right|^2 u\psi + (1+2u^2)\nabla v \nabla \psi] = \int_\Omega [\lambda u + k(x)\left|u\right|^{q-1} u - h(x)\left|u\right|^{r-1} u]\psi.$$

Portanto $u \in W$ é solução fraca de (3.1). ∎

3.2 Busca pela solução

Com base no que discutimos anteriormente, estamos interessados em buscar solução fraca para o problema $(P_{f\lambda})$. Para tanto precisaremos de alguns resultados técnicos que serão apresentados a seguir.

Lema 3.3. *Supondo válido (3.2) temos que o funcional I_λ é coercivo e limitado inferiormente em W para todo $\lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$.*

Demonstração: *Inicialmente observemos que por (3.3) temos*

$$\frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} - \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}$$
$$\leq C\int_{\Omega_2} k\left[\frac{k}{h}\right]^{\frac{q+1}{r-q}} \leq C_1 < +\infty.$$

Agora podemos estimar I_λ,

$$\begin{aligned} I_\lambda(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} - C_1 \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v|^2 + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} - C_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para concluir nosso lema observemos que existe uma constante C_2 *tal que* $\|v\|_2 \leq C_2$ *sempre que* $I_\lambda(v) \leq C_1$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que exista uma sequência $\{u_n\} \subset W$ *com* $I_\lambda(u_n) \leq C_1$ *mas* $\|u_n\|_2 \to \infty$. *Fazendo* $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_2}$, *segue de (3.4) e propriedade (12) do Lema 2.1 que*

$$\begin{aligned} I_\lambda(\|u_n\|_2\, v_n) \geq\; & \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\,\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(\|u_n\|_2\, v_n)|^2 - C + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(\|u_n\|_2\, v_n)|^{r+1} \\ \geq\; & \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\,\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda\,\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |f(v_n)|^2 - C + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(\|u_n\|_2\, v_n)|^{r+1} \\ \geq\; & \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\,\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda\,\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |f(v_n)|^2 - C \\ \geq\; & \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\,\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda\,\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |v_n|^2 - C. \end{aligned}$$

Assim,

$$C \geq \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\,\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda\,\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |v_n|^2,$$

e dividindo tudo por $\|u_n\|_2^2$, *observando que* $\|v_n\|_2^2 = 1$ *obtemos*

$$\frac{1}{2}\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda}{2} \leq o(1)$$

e portanto, $v_n \rightharpoonup v_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$, *quando* $n \to \infty$, *com* $\|v_0\|_2 = 1$.

Segue também de (3.4) e da propriedade (9) do Lema 2.1 que

$$
\begin{aligned}
C \geq\ & \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |f(v_n)|^2 - C + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(\|u_n\|_2\, v_n)|^{r+1}\\
\geq\ & \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |f(v_n)|^2 - C + \frac{C\|u_n\|_2^{(r+1)/2}}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|v_n|^{(r+1)/2}\\
\geq\ & -\frac{\lambda\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |f(v_n)|^2 - C + \frac{C\|u_n\|_2^{(r+1)/2}}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|v_n|^{(r+1)/2}\\
\geq\ & -\frac{\lambda\|u_n\|_2^2}{2} - C + \frac{C\|u_n\|_2^{(r+1)/2}}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|v_n|^{(r+1)/2}.
\end{aligned}
$$

Dividindo tudo por $\|u_n\|_2^2$*, observando que* $\|v_n\|_2^2 = 1$*, e fazendo* $n \to \infty$*, temos*

$$\frac{\|u_n\|_2^{(r-3)/2}}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|v_n|^{(r+1)/2} \leq C,$$

logo

$$\int_\Omega h(x)\,|v_n|^{(r+1)/2} \to 0.$$

Além disso, segue do lema de Fatou que :

$$0 \leq \int_\Omega h(x)\,|v_0|^{\frac{r+1}{2}} \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega h(x)\,|v_n|^{\frac{r+1}{2}} = 0.$$

Se $h > 0 \quad$ *qtp em* Ω*, já temos a contradição desejada pois* $\|v_0\|_2 = 1$*. Por outro lado, se* $v_0 \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$ *e supondo* $v_0 \neq 0$ *em* $\widetilde{\Omega}$*. Segue que*

$$C \geq \frac{1}{2}\|u_n\|_2^2\|\nabla v_n\|_2^2 - \frac{\lambda\|u_n\|_2^2}{2}\int_\Omega |f(v_n)|^2,$$

dividindo tudo por $\|u_n\|_2^2$ *temos*

$$\|\nabla v_n\|_2^2 - \lambda\int_\Omega |f(v_n)|^2 \leq o(1),$$

e assim,

$$\|\nabla v_0\|_2^2 - \lambda\int_\Omega |f(v_0)|^2 \leq \liminf_{n\to\infty}\|\nabla v_n\|_2^2 - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f(v_n)|^2,$$

ou seja,

$$\|\nabla v_0\|_2^2 \leq \lambda\int_\Omega |f(v_0)|^2 < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})\int_\Omega |f(v_0)|^2.$$

O que contradiz a definição de $\overline{\lambda}$*.*

Agora estamos em condição de concluir o lema. Suponhamos por contradição que $\|v\|_W \to \infty$ mas $I_\lambda(v) < C$, logo por (3.4) temos uma contradição, visto que

$$\|v\|_W \leq \|\nabla v\|_2 + 1 + \left(\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}.$$

Portanto sempre que $\|v\|_W \to \infty$ temos $I_\lambda(v) \to \infty$. ■

O próximo lema estabelece um resultado de semicontinuidade para I_λ.

Lema 3.4. *Suponha que (3.2) é satisfeito. Se $\{u_n\}$ é uma sequência em W com $I_\lambda(u_n)$ limitado, então existe uma subsequência (também denotada por u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W, com $u_0 \in W$ e*

$$I_\lambda(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n).$$

Em particular, I_λ atinge um ínfimo sobre W.

Demonstração: *Segue de (3.4) que $\|\nabla u_n\|_2 \leq C$, $\int_\Omega h\,|f(u_n)|^{r+1} \leq C$. Daí, existe uma subsequência (u_n), que converge fraco para u_0 em W. Logo, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e forte em $L^p(\Omega)$, com $1 < p < 2^*$, além disso $u_n(x) \to u_0(x)$ qtp em Ω.*

Assim, temos que

$$\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_n)|^{r+1} \to \frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_0)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_0)|^{r+1}$$

quando $n \to \infty$. Da desigualdade (3.3) temos

$$\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_0)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_0)|^{r+1} \leq Ck\left[\frac{k}{h}\right]^{\frac{q+1}{r-q}}.$$

Observemos que $\Omega = A \cup B$, com

$$A = \left\{x \in \Omega : \frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_n)|^{r+1} \geq 0\right\}$$

e

$$B = \left\{x \in \Omega : \frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_n)|^{r+1} < 0\right\}.$$

Assim, pela condição (3.2) temos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_A \left[\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_n)|^{r+1}\right] \to \int_A \left[\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_0)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_0)|^{r+1}\right]$$

quando $n \to \infty$. *Agora, temos pelo Lema de Fatou que*

$$\int_B \left[-\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_0)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_0)|^{r+1}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \int_B \left[-\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_n)|^{r+1}\right].$$

Portanto, segue do que acabamos de discutir e da semicontinuidade da norma que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n)\\
&= \liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(u_n)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(u_n)|^{q+1}\right.\\
&\left.+\frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(u_n)|^{r+1}\right\}\\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(u_0)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(u_0)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(u_0)|^{r+1}\\
&= I_\lambda(u_0).
\end{aligned}$$

Vimos no lema anterior que I_λ *é coercivo e limitado inferiormente em* W, *e pelo que vimos acima, segue do Teorema 6.2 que* I_λ *atinge um ínfimo em* W. ■

Agora estamos preparados para estabelecer nosso primeiro resultado de existência.

Lema 3.5. *Suponha que (3.2) ocorra, então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que* $(P_{f\lambda})$ *admite solução não negativa* $v \in W \setminus \{0\}$ *para todo* λ *com* $\overline{\lambda} - \epsilon_0 \leq \lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$.

Demonstração: *Seja* $(v_n) \subset W \setminus \{0\}$ *uma sequência minimizante para* I_λ, *isto é,*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} I_\lambda(v_n).$$

Observando que $I_\lambda(|v_n|) = I_\lambda(v_n)$, *podemos considerar* (v_n) *não negativa. Devemos mostrar que* (v_n) *é limitada em* W. *Como* $I_\lambda(v_n)$ *é uma sequência numérica convergente, existe* $C > 0$ *tal que* $I_\lambda(v_n) \leq C$, *como* I_λ *é coercivo, temos que* $\|v_n\|_W \leq C$, *assim existe* $v \in W$, $v \geq 0$ *tal que* $v_n \rightharpoonup v$ *em* W. *Segue do fato de* I_λ *ser fracamente semicontínua inferiormente, que* $I_\lambda(v) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(v_n)$ *e assim,* $\alpha = I_\lambda(v)$. *Consequentemente* v *é* *mínimo de* I_λ *em* W*, e de modo particular ponto crítico de* I_λ*, ou seja,*

$$\langle I'_\lambda(v), u\rangle = 0,$$

para todo $v \in W$*. Resta mostrar que* $\inf_W I_\lambda < 0$*, no intervalo desejado, pois deste modo a solução encontrada é não nula. Consideremos* $\overline{\lambda} \leq \lambda$*. Segue da Proposição 2.1 que existe* $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\frac{\int_\Omega |\nabla v_0|^2}{\int_\Omega |f(v_0)|^2} = \overline{\lambda}. \tag{3.5}$$

Pela regularidade de v_0*, e* (H_2) *temos que* $v_0 \in W$*, pois segue da propriedade (3) do Lema 2.1 temos que* $\int_\Omega h(x)\,|f(v_0)|^{r+1} \leq \int_\Omega h(x)\,|v_0|^{r+1} \leq \sup_\Omega |v_0|^{r+1}\,\|h\|_1 < \infty$*. Segue que dado* $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ *satisfazendo (3.5), então todo* $u_0 = tv_0$ *com* $t \in \mathbb{R}, 0 < t < 1$ *satisfaz*

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u_0|^2}{\int_\Omega |f(u_0)|^2} \leq \overline{\lambda}. \tag{3.6}$$

De fato, é suficiente verificar que

$$\frac{t^2\int_\Omega |\nabla v_0|^2}{\int_\Omega |f(tv_0)|^2} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v_0|^2}{\int_\Omega |f(v_0)|^2}$$

o que equivale a mostrar que

$$t^2\int_\Omega |f(v_0)|^2 \leq \int_\Omega |f(tv_0)|^2,$$

fato este que é verdade pela propriedade (13) do Lema 2.1.

Agora, estamos em condições de estimar o funcional. Observemos que de (3.6) temos

$$\begin{aligned}
&I_\lambda(tv_0) = \\
&\frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(tv_0)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(tv_0)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(tv_0)|^{r+1} \leq \\
&\frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 - \frac{\overline{\lambda}}{2}\int_\Omega |f(tv_0)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(tv_0)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(tv_0)|^{r+1} \leq \\
&-\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|v_0|^{q+1} + \frac{t^{r+1}}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|v_0|^{r+1}.
\end{aligned}$$

Logo, $I_\lambda(tv_0) < 0^+$ *quando* $t \to 0$*, visto que* $q+1 < r+1$*. Por continuidade temos que existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que a desigualdade estrita continua válida para* $\lambda \geq \overline{\lambda} - \epsilon_0$*. Portanto*

$\inf_E I_\lambda < 0$ *quando* $\lambda \geq \overline{\lambda} - \epsilon_0$. ■

3.3 Prova do Teorema 3.1

Seja

$$\lambda^* = \inf\{\lambda : (P_{f\lambda}) \quad \textit{admite uma solução não negativa}\}.$$

Pelo Lema 3.5 temos $\lambda^* < \overline{\lambda}$. *Agora mostremos que o problema* $(P_{f\lambda})$ *tem solução para cada* $\lambda^* < \lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$. *Segue da definição de* λ^* *que, para cada* $\lambda > \lambda^*$ *existe* μ *com* $\lambda^* < \mu \leq \lambda$ *e uma solução não negativa* $\underline{u} \geq 0$ *de* $(P_{f\mu})$. *Observe que* $\underline{u}$ *é uma subsolução para* $(P_{f\lambda})$. *De fato, como* $\underline{u}$ *é solução para* $(P_{f\mu})$ *então para todo* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle I_\mu(\underline{u}), \phi\rangle \\
&= \int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\phi - \mu\int_\Omega f(\underline{u})f'(\underline{u})\phi - \int_\Omega k(x)\left|f(\underline{u})\right|^q f'(\underline{u})\phi + \int_\Omega h(x)\left|f(\underline{u})\right|^r f'(\underline{u})\phi \\
&\geq \int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\phi - \lambda\int_\Omega f(\underline{u})f'(\underline{u})\phi - \int_\Omega k(x)\left|f(\underline{u})\right|^q f'(\underline{u})\phi + \int_\Omega h(x)\left|f(\underline{u})\right|^r f'(\underline{u})\phi \\
&= \langle I_\lambda(\underline{u}), \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, para cada $\lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$, *considere o seguinte problema de minimização:*

$$\inf_M I_\lambda \quad \textit{onde} \quad M = \{u \in W : \underline{u} \leq u\}.$$

Graças aos Lemas 3.4 e 3.3, o problema atinge um ínfimo, digamos em $w \in M$, *isto é,* $w \in W$ *e* $w \geq \underline{u}$. *Além disso, segue da continuidade de* I_λ *e do fato de* w *ser o ínfimo que* $\langle I'_\lambda(w), \phi\rangle \geq 0$, *para todo* $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, *ou seja,* w *é uma supersolução para* $(P_{f\lambda})$. *Pela estrutura de* I_λ, *(Lemas 3.4 e 3.3) segue pelo Teorema 6.8 que existe* $v_\lambda \in W$ *solução não negativa de* $(P_{f\lambda})$ *satisfazendo* $\underline{u} \leq v_\lambda \leq w$.

Capítulo

4

Multiplicidade de solução para equação de Schrödinger quase linear

Inspirados pelo artigo [4] desejamos estudar o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u = \lambda u + k(x)\,|u|^{q-1}\,u - h(x)\,|u|^{r-1}\,u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

com $3 \leq q < r < \infty$, h, k *funções não negativas satisfazendo as seguintes hipóteses:*

(H_1) *supp* $k \subset$ *supp* h;

(H_2') $h, k \in L^\infty(\Omega)$ *são funções não negativas e supp* k, *supp* h; *tem medidas positivas.*

Ao longo deste capítulo usamos as seguintes notações : $\Omega_1 =$ *supp* h, $\Omega_2 =$ *supp* k;, $\widetilde{\Omega} = \{x \in \Omega : h(x) = 0\}$ *e* $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\Omega)$. *O principal resultado deste capítulo está compilado abaixo.*

Teorema 4.1. *Seja* $3 \leq q < r$. *Suponha que* $(H_1) - (H_2')$ *valem e que*

$$(*) \qquad \int_{\Omega_2} \left[\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\right]^{\frac{N}{2}} < +\infty.$$

Então existe um número λ^* *com* $-\infty < \lambda^* < \overline{\lambda}$ *tal que*

1. *Se* $\lambda^* < \lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$ *então o problema (4.1) admite uma solução não negativa.*

2. *Se* $\lambda^* < \lambda < \overline{\lambda}$ *o problema (4.1) admite duas soluções não negativas,* $0 \leq w_\lambda < v_\lambda$.

Observemos que $\overline{\lambda}(\widetilde{\Omega}) \geq \overline{\lambda}(\Omega)$ *e* $\overline{\lambda}(\widetilde{\Omega}) = \infty$, *quando* $\widetilde{\Omega}$ *tem medida nula ou é vazio.*

4.1 Reformulação do problema e preliminares

Procedemos como de costume procurando pontos críticos para o funcional energia associado ao problema, a saber :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (1+2u^2)\,|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|u|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|u|^{r+1}.$$

Pela dificuldade em trabalhar com o termo $\int_\Omega u^2\,|\nabla u|^2$*, novamente utilizamos o método desenvolvido em [46] considerando a mudança de variável* $v = f^{-1}(u)$ *em que* f *está definida como na Proposição 2.1. Apesar disso facilitar em certo sentido os cálculos, ela trouxe um outro problema, a perda da homogeneidade. Após a mudança de variável, obtemos a partir de* J*, um novo funcional:*

$$\begin{aligned} I_\lambda(v) = J(f(v)) = \ & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} \\ & + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}, \end{aligned}$$

que está bem definido no espaço:

$$W = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega h(x)\,|f(u)|^{r+1} < \infty \right\}$$

o qual é um espaço de Banach reflexivo quando munido da norma

$$\|u\|_W = \|\nabla u\|_2 + \inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left\{ 1 + \left(\int_\Omega h(x)\,|f(\xi u)|^{r+1} \right)^{\frac{2}{r+1}} \right\}$$

(veja as Proposições 6.1 e 6.2). Note que os pontos críticos não triviais de I_λ *são soluções fracas de*

$$(\widetilde{P}_{f\lambda}) : \quad \begin{cases} -\Delta v = \dfrac{1}{\sqrt{1+2f^2(v)}}\, g(\lambda, x, v), & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g(\lambda, x, v) = \lambda f(v) + k(x)\,|f(v)|^{q-1} f(v) - h(x)\,|f(v)|^{r-1} f(v)$.

O próximo lema é crucial para o nosso trabalho.

Lema 4.1. *Suponha que* $(*)$ *ocorra, então :*

$$\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} < \infty, \qquad \textit{para todo} \quad u \in W.$$

Mais especificamente,

$$A(v) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}$$

é finito para $u \in W$*. Logo* I_λ *está bem definido em* W*.*

Demonstração: *Usando a desigualdade (3.3), a propriedade (3) do Lema 2.1, e as desigualdades de Hölder e Poincaré obtemos,*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q+1}\textstyle\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} - \frac{1}{2(r+1)}\textstyle\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}\\
&\leq C_{q,r}\textstyle\int_{\Omega_2} \frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\,|f(v)|^2\\
&\leq C_{q,r}\textstyle\int_{\Omega_2} \frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\,|v|^2\\
&\leq C\,\|v\|_{2^*}^2 \leq C\,\|\nabla v\|_2^2\,.
\end{aligned}$$

Logo $A(v)$ *é finito para* $v \in W$ *e consequentemente* I_λ *está bem definido* W*.* ∎

A próxima proposição traz algumas propriedades do funcional I_λ*.*

Proposição 4.1. *O funcional* I_λ *satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) I_λ *é contínua em* W*.*

(2) I_λ *é Gâteaux-diferenciável em* W *e*

$$\begin{aligned}
\langle I'(v), \phi\rangle = &\int_\Omega \nabla v \nabla \phi - \lambda \int_\Omega f(v)f'(v)\phi - \int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q-1} f(v)f'(v)\phi\\
&+ \int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r-1} f(v)f'(v)\phi.
\end{aligned}$$

(3) I'_λ *é contínuo em* W*.*

Demonstração: *Provemos (1). Seja* $v_n \to v$ *em* W*, logo* $v_n \to v$ *em* $H_0^1(\Omega)$ *e pelo teorema das Imersões temos* $v_n \to v$ *em* $L^t(\Omega)$ *para* $1 \leq t \leq 2^*$*, assim passando a subsequência, se necessário,* $v_n(x) \to v(x)$ *qtp em* Ω*, e existe* $h_t \in L^t(\Omega)$ *tal que* $|v_n| \leq h_t$*.*

Pela continuidade de f temos $f^2(v_n(x)) \to f^2(v(x))$ e como $|f^2(v_n(x))| \leq |v_n|^2 \leq h_t^2$, logo pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\int_\Omega f^2(v_n) \to \int_\Omega f^2(v).$$

A convergência da outra parte do funcional está provada na Proposição 6.3.

A prova de (2) é análoga a da Proposição 3.1.

*Prova de (3): Observemos que, $I_\lambda : W \to \mathbb{R}$, $I'_\lambda : W \to W^*, v \mapsto I'_\lambda(v)$ com $I'_\lambda(v) : W \to \mathbb{R}$, e que é suficiente mostrar que $\langle I'_\lambda(v_n) - I'_\lambda(v), u\rangle \to 0$, para todo $u \in W$, ou seja, se $v_n \to v$ em W então $I'_\lambda(v_n) \to I'_\lambda(v)$ na topologia fraca * de W^*. Pois assim, verificamos*

$$\|I'_\lambda(v_n) - I'_\lambda(v)\|_* = \sup_{\|u\| \neq 0} \left| \left\langle \frac{I'(v_n) - I(v)}{\|v_n - v\|}, u \right\rangle \right| \to 0.$$

Seja $v_n \to v$ em W, assim $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo $v_n \to v$ em L^s, com $2 \leq s \leq 2^*$ e, passando a subsequência, se necessário, temos $v_n(x) \to v(x)$ quase sempre em Ω e existe $h \in L^2(\Omega)$ tal $|v_n(x)| < h$. Assim, segue de (1) do Lema 2.1 que $f(v_n)f'(v_n) \to f(v)f'(v)$ e pelas propriedades (2) e (3) do Lema 2.1 temos que $|f(v_n)f'(v_n)u| \leq |v_n|\,|u| \leq h_t\,|u|$. Pela desiguladade de Hölder, temos $h_t\,|u| \in L^1(\Omega)$, logo segue do Teorema da Convergencia Dominada que

$$\int_\Omega f(v_n)f'(v_n)u \to \int_\Omega f(v)f'(v)u.$$

O restante da prova segue como na Proposição 6.3. ■

4.2 Resultados de existência

Nesta seção enunciamos e provamos alguns resultados técnicos que serão utilizados na prova do teorema principal.

Lema 4.2. *Supondo válido $(*)$ temos que o funcional I_λ é coercivo e limitado inferiormente em W para todo $\lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$.*

Demonstração: *Iniciamos fixando $0 < \epsilon$ tal que $\lambda < (1-\epsilon)\overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$. Para $\delta > 0$ e $M > 0$ podemos decompor $\Omega_1 = X \cup Y \cup Z$, com X, Y e Z conjuntos mensuráveis* *definidos como segue:*

$$\begin{cases} X &= \{x \in \Omega_1 : k(x) < M \quad e \quad h(x) > \delta\} \\ Y &= \{x \in \Omega_1 : k(x) < M \quad e \quad h(x) \leq \delta\} \\ Z &= \{x \in \Omega_1 : k(x) \geq M\}\,. \end{cases}$$

Novamente usaremos (3.3) para obter estimativas que serão usadas adiante:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q+1}\int_X k(x)\,|f(v)|^{q+1} - \frac{1}{2(r+1)}\int_X h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\ &\leq C_1 \int_X \frac{k(x)^{\frac{r+1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q+1}{r-q}}} \leq C_2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

e usando a propriedade (3) do Lema 2.1 e a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q+1}\int_{Y\cup Z} k(x)\,|f(v)|^{q+1} - \frac{1}{2(r+1)}\int_{Y\cup Z} h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\ &= \frac{1}{q+1}\int_{Y\cup Z} k(x)\,|f(v)|^{q-1}\,|f(v)|^2 - \frac{1}{2(r+1)}\int_{Y\cup Z} h(x)\,|f(v)|^{r-1}\,|f(v)|^2 \\ &\leq C_{q,r}\int_{Y\cup Z} \frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\,|f(v)|^2 \\ &\leq C_{q,r}\int_{Y\cup Z} \frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\,|v|^2 \\ &\leq C_1 \left(\int_{Y\cup Z} \left[\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\right]^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}} \|v\|_{2^*}^2\,. \end{aligned}$$

Graças a (H_2') *temos* $|Z| \to 0$ *quando* $M \to \infty$ *e para fixado* M, $|Y| \to 0$ *quando* $\delta \to 0$. *De* $(*)$ *nós podemos escolher* M *suficientemente grande e* $\delta > 0$ *suficientemente pequeno tal que*

$$C_1 \left(\int_{Y\cup Z} \left[\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\right]^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{2}{N}} < S_N \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.3}$$

onde S_N *denota a constante de Sobolev, ou seja,* $S_N = \inf\left\{\|\nabla u\|_2^2 : \|u\|_{2N/(N-2)} = 1\right\}$.

Agora podemos estimar I_λ, usando (4.2), (4.3) e a propriedade (3) do Lema 2.1. De fato,

$$
\begin{aligned}
I_\lambda &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 - S_N\frac{\epsilon}{2}\|v\|_{2^*}^2 - C_\epsilon + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\|f(v)\|_2^2 - S_N\frac{\epsilon}{2}\|v\|_{2^*}^2 - C_\epsilon + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\
&\geq \frac{1}{2}(1-\epsilon)\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\|f(v)\|_2^2 - C_\epsilon + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\
&\geq \frac{1}{2}(1-\epsilon)\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2 - C_\epsilon + \frac{1}{2(r+1)}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}.
\end{aligned}
$$

Para concluir nosso lema observemos que existe uma constante C_2 tal que $\|u\|_2 \leq C_2$ sempre que $I(u) \leq C_1$ e procedemos como no Lema 3.3 ■

O próximo lema trata da semicontinuidade do funcional I_λ. Vejamos.

Lema 4.3. *Suponha que $(*)$ é satisfeito. Se $\{u_n\}$ é uma sequência em W com $I(u_n)$ limitado então existe uma subsequência (também denotada por u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W, e*

$$I_\lambda(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n).$$

Demonstração: *Segue da coercividade do funcional (Lema 4.2) que $\|\nabla u_n\|_2 \leq C$, $\int_\Omega h\,|f(u_n)|^{r+1} \leq C$. Daí, existe uma subsequência u_n, que converge fraco para u_0 em W. Logo, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e forte em $L^p(\Omega)$, com $1 < p < 2^*$, além disso, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u_0(x)$ qtp em Ω e existe $h_t \in L^t$, com $1 \leq t < 2^*$, tal que $|u_n| \leq h_t$.*

Assim, temos que

$$\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_n)|^{r+1} \to \frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_0)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_0)|^{r+1},$$

qtp em Ω quando $n \to \infty$. Se, $\frac{1}{q+1}k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(u_n)|^{r+1} \geq 0$, então pela desigualdade (3.3) e pela propriedade (7) do Lema 2.1 temos

$$
\begin{aligned}
\left|k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - h(x)\,|f(u_n)|^{r+1}\right| &= k(x)\,|f(u_n)|^{q+1} - h(x)\,|f(u_n)|^{r+1} \\
&= (k(x)\,|f(u_n)|^{q-1} - h(x)\,|f(u_n)|^{r-1})f^2(u_n) \\
&\leq C\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}\,|u_n| \\
&\leq C\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}h_t.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Hölder e condição $(*)$ *temos que* $C\dfrac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}h_t \in L^1(\Omega)$. *Logo pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos que*

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_n)\right|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1}\right] \to \int_\Omega \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_0)\right|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_0)\right|^{r+1}\right],$$

quando $n \to \infty$.

Caso $\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_0)\right|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_0)\right|^{r+1} \leq 0$, *temos pelo Lema de Fatou que*

$$\int_\Omega \left[-\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_0)\right|^{q+1} + \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_0)\right|^{r+1}\right] \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \left[-\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_n)\right|^{q+1} + \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1}\right].$$

Portanto, segue do que acabamos de discutir e da semicontinuidade da norma que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) &= \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(u_n)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\left|f(u_n)\right|^{q+1}\right.\\ &\quad \left.+\frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1}\right\}\\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(u_0)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\left|f(u_0)\right|^{q+1}\\ &\quad +\frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\left|f(u_0)\right|^{r+1}\\ &= I_\lambda(u_0).\end{aligned}$$

■ *Vimos no lema anterior que* I_λ *é coercivo e limitado inferiormente em* W, *e pelo que vimos acima, segue do Teorema 6.2 que* I_λ *atinge um ínfimo em* W.

Lema 4.4. *Suponha que* $(*)$ *ocorra, então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que o problema* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$ *admite solução não negativa* $u \in W$ *para todo* λ *com* $\overline{\lambda} - \epsilon_0 \leq \lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$.

Demonstração: *Idêntica a prova do Lema 3.5.* ■

Prova do Teorema 4.1 item 1. *A prova é análoga a demonstração do Teorema 3.1.*

O lema seguinte fornece uma regularidade para a solução do problema modificado.

Lema 4.5. *Suponha que* $(*)$ *ocorra. Então cada solução de* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$ *pertence a* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *com* $0 < \alpha < 1$.

Demonstração: *Seja $u \in W$ uma solução fraca não negativa de $(\widetilde{P}_{f\lambda})$. Assim, u satisfaz*

$$-\Delta u = a(x;\lambda)(1+|u|) \quad em \quad H_0^1(\Omega),$$

com

$$\begin{aligned} a(x,u) &= \frac{\lambda f(u)f'(u) + k\,|f(u)|^{q-1} f(u)f'(u) - h\,|f(u)|^{r-1} f(u)f'(u)}{1+|u|} \\ &= \frac{\lambda f(u)f'(u) + (k\,|f(u)|^{q-1} - h\,|f(u)|^{r-1})f'(u)f(u)}{1+|u|} \\ &\leq \lambda + \begin{cases} Ck(x)\left[\dfrac{k(x)}{h(x)}\right]^{\frac{q-1}{r-q}}, & se \quad x \in \Omega_1, \\ 0, & se \quad x \notin \Omega_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Como Ω é um domínio limitado, segue por $(*)$ que $a^+ = \max\{a,0\} \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, e pelo teorema de Brezis-Kato (veja [59, Lema B.3]), $u \in L^t(\Omega)$ para todo $1 < t < \infty$. Assim, segue da propriedade (6) do Lema 2.1, da limitação do domínio e do fato de $h,k \in L^\infty(\Omega)$ que $g(\lambda,x,f(u))f'(u) \in L^t(\Omega)$, para todo $2 \leq t < \infty$, onde

$$g(\lambda,x,f(u))f'(u) = \lambda f(u)f'(u) + k\,|f(u)|^{q-1} f(u)f'(u) - h\,|f(u)|^{r-1} f(u)f'(u)$$

e pela desigualdade de Calderón-Zygmund (veja [59, Teorema B.2]) temos que $u \in W^{2,t}(\Omega)$. Finalmente, pelo teorema das Imersões de Sobolev, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $0 < \alpha < 1$.

■

O seguinte resultado tem grande importância para garantir a existência da segunda solução para o nosso problema.

Lema 4.6. *Suponha que (*) é satisfeito e $\lambda < \overline{\lambda}$ então a solução trivial é mínimo local para I_λ na topologia de W. Além disso, para cada $\epsilon > 0$ existe uma constante $C > 0$ tal que cada solução não negativa do problema com $\lambda \leq \overline{\lambda} - \epsilon$ satisfaz:*

$$\|\nabla u\|_2^{s-2} \geq C\left(\overline{\lambda} - \lambda\right),$$

com $s = \min\{q+1, 2^*\}$.

Demonstração: *De fato, devemos mostrar que $0 = I(0) \leq I(v)$, para todo $v \in W$ com $\|v\|_W \leq \alpha$, logo, $\|\nabla v\|_2^2 \leq \alpha$. Consideremos os conjuntos X, Y, Z definidos anteriormente. Suponhamos válido (*), assim como no Lema 4.2, para um dado $\tau > 0$,* *existe $M > 0$ e um correspondente valor para δ tais que*

$$\int_{Y\cup Z} (k\,|f(v)|^{q+1} - h\,|f(v)|^{r+1}) \leq \tau\,\|\nabla v\|_2^2$$

e pela propriedade (3) do Lema 2.1 e teorema das Imersões segue que,

$$\begin{aligned}
&\int_X (k\,|f(v)|^{q+1} - h\,|f(v)|^{r+1}) \\
&= \int_X |f(v)|^s\,(k\,|f(v)|^{q+1-s} - h\,|f(v)|^{r+1-s}) \\
&\leq \int_X |f(v)|^s\,[k\,|f(v)|^{q+1-s} - h\,|f(v)|^{r+1-s}] \\
&\leq M^{\frac{r+1-s}{r-q}} \int_X \frac{|f(v)|^s}{h^{\frac{q+1-s}{r-q}}} \leq M^{\frac{r+1-s}{r-q}} \int_X \frac{|v|^s}{h^{\frac{q+1-s}{r-q}}} \\
&\leq C\,\|v\|_s^s \leq C\,\|\nabla v\|_2^s.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I(v) &= \frac{1}{2}\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |f(v)|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\
&\geq \frac{1}{2}\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2\overline{\lambda}}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega k(x)\,|f(v)|^{q+1} + \frac{1}{r+1}\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1} \\
&\geq (\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\overline{\lambda}})\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 - \tau\,\|\nabla v\|_2^2 - C\,\|\nabla v\|_2^s \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\overline{\lambda}} - \tau)\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 - C\,\|\nabla v\|_2^s \\
&\geq (\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\overline{\lambda}})\,\|\nabla v\|_2^2 - C\,\|\nabla v\|_2^s \\
&\geq 0 = I(0),
\end{aligned}$$

desde que $\|v\|_W < \alpha$, com α suficientemente pequeno e $\tau < (\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\overline{\lambda}})$.

Para provar a segunda parte, basta observarmos que, como u é solução não negativa de $(\widetilde{P}_{f\lambda})$, isto é, $\langle I'(u), u\rangle = 0$, e usando a propriedade (6) do Lema 2.1 obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \nabla u \nabla u - \lambda \int_\Omega f(u)f'(u)u - \int_\Omega k(x)\,|f(u)|^q\,f'(u)u + \int_\Omega h(x)\,|f(u)|^r\,f'(u)u \\
&\geq \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda\int_\Omega |f(u)|^2 - \int_\Omega k(x)\,|f(u)|^{q+1} + \int_\Omega h(x)\,|f(u)|^{r+1} \\
&\geq \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \tau\,\|\nabla u\|_2^2 - C\,\|\nabla u\|_2^s \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}}\right)\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - C\,\|\nabla u\|_2^s \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}}\right)\|\nabla u\|_2^2 - C\,\|\nabla u\|_2^s,
\end{aligned}$$

para $\tau < (\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\overline{\lambda}})$. ■

Para garantir que a solução encontrada é mínimo local para o nosso funcional, usamos os mesmos passo encontrados em [26, Proposição 1].

Proposição 4.2. *Suponha que (*) ocorra então para todo* $\lambda \in \left(\lambda^*, \overline{\lambda}\right)$, *o problema* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$ *admite uma solução* v_λ *a qual é um mínimo local para* I_λ *em* W.

Demonstração: *Consideremos* $\lambda^* < \mu \leq \lambda \leq \widetilde{\lambda} < \overline{\lambda}$. *Seja* $\underline{u}$ *a solução de* $(\widetilde{P}_{f\mu})$ *encontrada no item i. Graças ao Lema 4.5 temos que* $\underline{u} \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, *em particular que ela define uma estrita subsolução para* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$ *para todo* $\lambda > \mu$. *Seja* $\overline{u} \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ *a solução do problema* $(\widetilde{P}_{f\widetilde{\lambda}})$, *a qual é uma supersolução para* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$ *com* $\lambda \leq \widetilde{\lambda}$. *Sejam*

$$M = \{u \in E, \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$$

e v_λ *uma solução para* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$ *que está em* M. *Mostraremos que* v_λ *é mínimo local de* I_λ *em* W.

Suponha que existe $u_n \in W$ *com* $\|u_n - v_\lambda\|_W \to 0$ *e* $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(v_\lambda)$. *Sejam*

$$v_n = \max\{\underline{u}, \min\{\overline{u}, u_n\}\} \qquad w_n = (u_n - \overline{u})^+ \qquad z_n = (\underline{u} - u_n)^+,$$

assim, $u_n = v_n - z_n + w_n$, *e* $v_n \in M$, w_n *e* z_n *tem suportes disjuntos. Defina*

$$R_n = \{x \in \Omega : \underline{u} \leq u_n \leq \overline{u}\}, \qquad S_n = supp\,(w_n) \quad e \quad T_n = supp\,(z_n).$$

e considere a função:

$$G(x,t) = \frac{\lambda}{2} f^2(t) + \frac{1}{q+1} k(x) \left|f(t)\right|^{q+1} - \frac{1}{r+1} h(x) \left|f(t)\right|^{r+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) = \; & \frac{1}{2} \int_{S_n} |\nabla u_n|^2 - \int_{S_n} G(x,u_n) + \\ & \frac{1}{2} \int_{T_n} |\nabla u_n|^2 - \int_{T_n} G(x,u_n) + \\ & \frac{1}{2} \int_{R_n} |\nabla u_n|^2 - \int_{R_n} G(x,u_n). \end{aligned}$$

Observemos que $v_n = \overline{u}$ *em* S_n*, assim*

$$\begin{aligned}\int_{S_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u_n\right|^2 - G(x,u_n)\right) &= \int_{S_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla(v_n+w_n)\right|^2 - G(x,v_n+w_n)\right)\\ &= \int_{S_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla(\overline{u}+w_n)\right|^2 - G(x,\overline{u}+w_n)\right)\end{aligned}$$

e $v_n = \underline{u}$ *em* T_n*, logo*

$$\begin{aligned}\int_{T_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u_n\right|^2 - G(x,u_n)\right) &= \int_{T_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla(v_n-z_n)\right|^2 - G(x,v_n-z_n)\right)\\ &= \int_{T_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla(\underline{u}-z_n)\right|^2 - G(x,\underline{u}-z_n)\right).\end{aligned}$$

Como $v_n = u_n$ *em* R_n *temos que*

$$\int_{R_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u_n\right|^2 - G(x,u_n)\right) = \int_{R_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla v_n\right|^2 - G(x,v_n)\right) =$$

$$I_\lambda(v_n) - \int_{S_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla\overline{u}\right|^2 - G(x,\overline{u})\right) - \int_{T_n}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla\underline{u}\right|^2 - G(x,\underline{u})\right).$$

Desse modo, conseguimos

$$\begin{aligned}I_\lambda(u_n) = \;& I_\lambda(v_n) + \int_{S_n}\left(\frac{\left|\nabla(\overline{u}+w_n)\right|^2 - \left|\nabla\overline{u}\right|^2}{2}\right) - \int_{S_n}\left(G(x,\overline{u}+w_n) - G(x,\overline{u})\right)\\ + \;& \int_{T_n}\left(\frac{\left|\nabla(\underline{u}-z_n)\right|^2 - \left|\nabla\underline{u}\right|^2}{2}\right) - \int_{T_n}\left(G(x,\underline{u}-z_n) - G(x,\underline{u})\right).\end{aligned}$$

Como $\underline{u}$ *é subsolução do problema* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$ *então,*

$$-\Delta\underline{u} \le f'(\underline{u})[\lambda f(\underline{u}) + k(x)\left|f(\underline{u})\right|^{q-1} f(\underline{u}) - h(x)\left|f(\underline{u})\right|^{r-1} f(\underline{u}) = G_u(x,\underline{u}),$$

e sendo $\overline{u}$ *uma supersolução para o problema* $(P_{f\lambda})$ *logo*

$$-\Delta\overline{u} \ge G_u(x,\overline{u}).$$

Notemos que :

$$\frac{|\nabla(\overline{u}+w_n)|^2-|\nabla\overline{u}|^2}{2}=\nabla\overline{u}\nabla w_n+\frac{|\nabla w_n|^2}{2}$$

e,

$$\frac{|\nabla(\underline{u}-z_n)|^2-|\nabla\underline{u}|^2}{2}=\nabla\underline{u}\nabla(-z_n)+\frac{|\nabla z_n|^2}{2}.$$

Assim,

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla(-z_n)\geq\int_\Omega G_u(x,\underline{u})(-z_n)$$

e

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla w_n\geq\int_\Omega G_u(x,\overline{u})w_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n)\geq\ & I_\lambda(v_n)+\frac{1}{2}\textstyle\int_\Omega|\nabla w_n|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla z_n|^2\\
-\ & \textstyle\int_{S_n}\left(G(x,\overline{u}+w_n)-G(x,\overline{u})-G_u(x,\overline{u})w_n\right)\\
-\ & \textstyle\int_{T_n}\left(G(x,\underline{u}-z_n)-G(x,\underline{u})-G_u(x,\underline{u})(-z_n)\right).
\end{aligned}$$

Afirmamos que

(1) $\int_{S_n}\left(G(x,\overline{u}+w_n)-G(x,\overline{u})-G_u(x,\overline{u})w_n\right)\leq o(1)\left\|w_n\right\|^2$*;*

(2) $\int_{T_n}\left(G(x,\underline{u}-z_n)-G(x,\underline{u})-G_u(x,\underline{u})(-z_n)\right)\leq o(1)\left\|z_n\right\|^2$.

Supondo válida as afirmações temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\textstyle\int_\Omega|\nabla w_n|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla z_n|^2\leq\ & I_\lambda(u_n)-I_\lambda(v_n)\\
& +\textstyle\int_{S_n}\left(G(x,\overline{u}+w_n)-G(x,\overline{u})-G_u(x,\overline{u})w_n\right)\\
& +\textstyle\int_{T_n}\left(G(x,\underline{u}-z_n)-G(x,\underline{u})-G_u(x,\underline{u})(-z_n)\right)\\
<\ & \textstyle\int_{S_n}\left(G(x,\overline{u}+w_n)-G(x,\overline{u})-G_u(x,\overline{u})w_n\right)\\
& +\textstyle\int_{T_n}\left(G(x,\underline{u}-z_n)-G(x,\underline{u})-G_u(x,\underline{u})(-z_n)\right)\\
\leq\ & o(1)\left\|w_n\right\|^2+o(1)\left\|z_n\right\|^2,
\end{aligned}$$

visto que, $I_\lambda(u_n)<I_\lambda(v_n)$*, pois se* $v_n\in M$ *e sendo* v_λ *o mínimo em* M*, logo* $I_\lambda(v_\lambda)\leq I_\lambda(v_n)$*, assim,* $I_\lambda(u_n)<I_\lambda(v_\lambda)\leq I_\lambda(v_n)$.

Portanto,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla w_n|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla z_n|^2<o(1)\left\|w_n\right\|^2+o(1)\left\|z_n\right\|^2,$$

consequentemente, como os suportes são disjuntos temos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 < o(1)\,\|w_n\|^2$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 < o(1)\,\|z_n\|^2 .$$

Daí, $(1 - o(1))\,\|z_n\|^2 < 0$, $\|z_n\|^2 = 0$, $z_n = 0$. *Analogamente,* $w_n = 0$. *E podemos então concluir que* $u_n = v_n \in M$, *logo* $I_\lambda(v_\lambda) \geq I_\lambda(u_n)$, *mas em* M *o mínimo é atingido em* v_λ, *o que é uma contradição.* ***Prova da afirmação****: Defina,*

$$G_n(x) = G(x, \overline{u} + w_n) - G(x, \overline{u}) - G_u(x, \overline{u})w_n$$

e façamos a seguinte decomposição $G_n = G_{0n} + G_{1n}$, *onde*

$$G_{0n}(x) = \frac{\lambda}{2}\left[f^2(\overline{u} + w_n) - f^2(\overline{u})\right] - \lambda f(\overline{u})f'(\overline{u})w_n$$

e

$$\begin{aligned}
G_{1n}(x) = {} & \frac{1}{q+1}k(x)\,|f(\overline{u} + w_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(\overline{u} + w_n)|^{r+1} \\
- {} & \frac{1}{q+1}k(x)\,|f(\overline{u})|^{q+1} + \frac{1}{r+1}h(x)\,|f(\overline{u})|^{r+1} \\
- {} & k(x)\,|f(\overline{u})|^{q-1} f(\overline{u})f'(\overline{u})w_n + h(x)\,|f(\overline{u})|^{r-1} f(\overline{u})f'(\overline{u})w_n.
\end{aligned}$$

Observemos que aplicando o Teorema do Valor Médio duas vezes temos $t(x), s(x) \in (0,1)$ *tais que*

$$\begin{aligned}
G_{0n} = {} & \lambda\left[f'(\overline{u} + s(x)w_n)f(\overline{u} + s(x)w_n) - f(\overline{u})f'(\overline{u})\right] w_n \\
= {} & \lambda g_1'(\overline{u} + t(x)s(x)w_n)w_n w_n \\
= {} & \lambda\left[g_1'(\overline{u} + t(x)s(x)w_n)\right] w_n^2
\end{aligned}$$

onde $g_1(t) = f(t)f'(t)$. *Agora,*

$$g_1'(t) = (f'(t))^2 \leq 1.$$

Logo, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré temos

$$\begin{aligned}\int_{S_n} G_{0n}(x) \leq \ & \int_{S_n} |G_{0n}(x)| \leq \lambda \int_{S_n} w_n^2 \\ \leq \ & \lambda |S_n|^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Omega} (w_n^2)^{\frac{N}{N-2}} \right)^{\frac{N-2}{N}} \\ = \ & \lambda |S_n|^{\frac{2}{N}} \|w_n\|_{2^*}^2 \leq \lambda |S_n|^{\frac{2}{N}} \|w_n\|^2 .\end{aligned}$$

Note que $|S_n| = o(1)$. *De fato, dado* $\epsilon \geq 0$ *escolha* $\delta > 0$ *tal que* $|\{\overline{u} \leq v_\lambda + \delta\}| < \epsilon$ *desde que* $v_\lambda < \overline{u}$ *em* Ω. *Logo,*

$$S_n \subset \{\overline{u} \leq v_\lambda + \delta\} \cup \{u_n > \overline{u} > v_\lambda + \delta\} .$$

Como $u_n \to v_\lambda$ *em* L^2, *quando* $n \to \infty$, *existe* n_0 *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\epsilon\delta^2 \geq \int_{\Omega} (u_n - v_\lambda)^2 \geq \int_{\{u_n > v_\lambda + \delta\}} (u_n - v_\lambda)^2 \\ \geq \int_{\{u_n > v_\lambda + \delta\}} \delta^2 = \delta^2 |\{u_n > v_\lambda + \delta\}| .\end{aligned}$$

Portanto, $|S_n| \leq |\{\overline{u} \leq v_\lambda + \delta\}| + |\{u_n > \overline{u} > v_\lambda + \delta\}| \leq 2\epsilon$. *Logo,*

$$\int_{S_n} G_{0n}(x) \leq o(1) \|w_n\|_{H^1}^2 .$$

De maneira análoga seja $s(x), t(x) \in (0,1)$, *segue do Teorema do Valor Médio que*

$$\begin{aligned}G_{1n}(x) = \ & [g_2(x, \overline{u} + s(x)w_n) - g_2(x, \overline{u})] w_n \\ = \ & g_2'(x, \overline{u} + s(x)t(x)w_n) w_n^2\end{aligned}$$

onde $g_2(x,t) = \widetilde{G}_t(x,t)$, *e* $\widetilde{G}(x,t) = \dfrac{1}{q+1} k(x) |f(t)|^{q+1} - \dfrac{1}{r+1} h(x) |f(t)|^{r+1}$, *assim,*

$$g_2(t) = k(x) |f(t)|^{q-1} f(t) f'(t) - h(x) |f(t)|^{r-1} f(t) f'(t)$$

e

$$\begin{aligned}g_2'(t) = \ & qk(x) |f|^{q-1} (t) (f'(t))^2 + k(x) |f(t)|^{q-1} (t) (f(t)f'(t))' \\ & -rh(x) r |f|^{r-1} (t) (f'(t))^2 - h(x) |f(t)|^{r-1} (t) (f(t)f'(t))' \\ = \ & \left[qk(x) |f|^{q-1} (t) - rh(x) r |f|^{r-1} (t) \right] (f'(t))^2 \\ & + \left[k(x) |f(t)|^{q-1} (t) - h(x) |f(t)|^{r-1} (t) \right] (f(t)f'(t))',\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. *Observemos que* $(f(t)f'(t))' = \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f^2(t)}{2} = \dfrac{1}{2(1+2f^2(t))^2}$, *logo* $0 < (f(t)f'(t))' \leq 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Usando a desigualdade (3.3) temos*

$$\begin{aligned} g_2'(t) \leq\ & C\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}(f'(t))^2 + C_1\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}(f(t)f'(t))' \\ \leq\ & C_2\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$G_{1n}(x) \leq C_2\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}w_n^2,$$

e como $|S_n| = o(1)$, *temos pela desiguladade de Hölder , por* $(*)$ *e pelo Teorema 6.14 que*

$$\int_{S_n} G_{1n}(x) \leq o(1)\left\|w_n\right\|^2.$$

A segunda parte da afirmação é análoga a que acabamos de fazer. ∎

Seja

$$M = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : 0 \leq u(x) \leq v_\lambda\right\}$$

um conjunto convexo, onde v_λ *é uma solução para o problema* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$. *Sabemos que* $u \equiv 0$ *e* v_λ *são soluções para* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$, *logo são pontos críticos de* I_λ *em* W *no sentido usual. Observemos também que eles são pontos críticos de* I_λ *em* M , *no sentido da Definição 6.1. Assim, os pontos críticos de* I_λ *em* M *são as soluções fracas de* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$.

Vejamos agora uma condição tipo Palais- Smale satisfeita por I_λ *sobre um convexo* M*:*

Lema 4.7. *Suponha que (*) ocorra. Se* $\{u_n\} \subset M$ *são tais que* $I_\lambda(u_n) \to c$ *e* $g(u_n) \to 0$, *então* $\{u_n\}$ *admite uma subsequência que converge forte em* W, *em que* g *é dada pela Definição 6.1.*

Demonstração: *Como* $0 \leq u_n(x) \leq v_\lambda(x)$ *com* $v_\lambda(x) \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, *e* $I_\lambda(u_n)$ *é limitado, pelo Lema 4.2 temos* $\left\|\nabla u_n\right\|_2 \leq C$ *e* $\left\|u_n\right\|_\infty \leq C$ *para todo* n. *Assim, existe uma subsequência* $u_n \rightharpoonup u_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$, *e pelo teorema das Imersões* $u_n \to u_0$ *em* $L^p(\Omega)$, *com* $2 \leq p < 2^*$ *quando* $n \to \infty$ *e* $u_n \to u_0$ *quase sempre quando* $n \to \infty$. *Assim,* $u_0 \in M$.

Agora observemos que

$$\langle I'_\lambda(u_n), u_n - u_0\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u_0) - \lambda \int_\Omega f(u_n)f'(u_n)(u_n - u_0)$$
$$- \int_\Omega k(x) \left|f(u_n)\right|^{q-1} f(u_n)f'(u_n)(u_n - u_0) + \int_\Omega h(x) \left|f(u_n)\right|^{r-1} f(u_n)f'(u_n)(u_n - u_0).$$

Procedendo como na Proposição 6.3 temos que

$$\int_\Omega k(x) \left|f(u_n)\right|^{q-1} f(u_n)f'(u_n)(u_n - u_0) - \int_\Omega h(x) \left|f(u_n)\right|^{r-1} f(u_n)f'(u_n)(u_n - u_0) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. *Já sabemos que*

$$\int_\Omega f(u_n)f'(u_n)(u_n - u_0) \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

No caso em que $\|u_n - u_0\|_W = 0$ *nada temos a fazer. Agora, no caso em que* $\|u_n - u_0\|_W > 0$ *temos*

$$\langle I'_\lambda(u_n), u_n - u_0\rangle = \|u_n - u_0\|_W \left\langle I'_\lambda(u_n), \frac{u_n - u_0}{\|u_n - u_0\|_W} \right\rangle \leq \|u_n - u_0\|_W \, g(u_n),$$

logo,

$$\begin{aligned} g(u_n)\,\|u_n - u_0\|_W &\geq \langle I'_\lambda(u_n), (u_n - u_0)\rangle \\ &= \textstyle\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u_0) + o(1) \\ &= \textstyle\int_\Omega \left|\nabla u_n - u_0\right|^2 + o(1) \\ &= \|u_n - u_0\|_W^2 + o(1), \end{aligned}$$

mas por hipótese temos, $g(u_n) \to 0$, *quando* $n \to \infty$, *logo* $u_n \to u_0$ *forte em* W *quando* $n \to \infty$. ■

Prova do Teorema 4.1 item ii. *Para fazer a prova nós aplicamos o Teorema 6.3, para obter a seguinte dicotomia:*

- $I_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(0)$ *e* u_λ *e* 0 *podem ser conectados em qualquer vizinhança do conjunto de mínimo relativo de* I_λ *em* M, *ou*
- *existe um ponto crítico* $\widetilde{u}$ *de* I_λ *em* M *o qual não é um mínimo relativo de* I_λ.

Mas, observando o Lema 4.6, o qual garante que zero é uma solução isolada para $\lambda < \overline{\lambda}$, *podemos eliminar a primeira possibilidade do teorema acima. Obtendo assim, uma* *segunda solução para o problema* $(\widetilde{P}_{f\lambda})$*, visto que a solução encontrada no item i. é mínimo local para* I_λ*, para todo* $\lambda \in (\lambda^*, \overline{\lambda})$*. Fazendo uso da Proposição 3.2 conseguimos nosso resultado.*

Capítulo

5

Pertubação não linear das equações de Schrödinger quase lineares com crescimento supercrítico

Neste capítulo estudamos a existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos quase lineares:

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + V(x)u = p(u) \quad x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad N \geq 3, \tag{5.1}$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua que satisfaz as seguintes hipóteses:*

(V_0) *Existe* $\beta > 0$ *tal que* $V(x) \geq \beta > 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*;*

(V_1) $V(x) = V(x+y)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad y \in \mathbb{Z}^N$*;*

(V_2) *Existe* $W_0 > 0$ *e* $W \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \cap L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\widetilde{V}(x) = V(x) - W(x) \geq W_0$*, com* $W(x) \geq 0$*, e com a desigualdade estrita em um conjunto de medida positiva.*

A função $p \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *pode ser escrita como* $p(s) = f_0(s) + \epsilon g(s)$*, onde* ϵ *é um parâmetro real positivo,* f_0, g *são funções localmente Hölder contínuas satisfazendo:*

(F_1) $f_0(0) = g(0) = 0$ *e* $g(s) \geq 0$ *para todo* $s \neq 0$*.*

(F_2) $\displaystyle\lim_{|s|\to 0^+} \frac{f_0(s)}{s} = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{|s|\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = 0$*;*

(F_3) *Existe* $q \in (4, 2(2^*))$ *tal que* $|f_0(s)| \leq C\,|s|^{q-1}$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$*;*

(F_4) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{F_0(s)}{s^4} = \infty$ *onde* $F_0(s) = \int_0^s f_0(t)dt$*;*

(F_5) *Existe uma sequência de números reais positivos,* (M_n) *convergindo para* $+\infty$ *tal que*

$$\frac{g(s)}{s^{q-1}} \leq \frac{g(M_n)}{M_n^{q-1}} \text{ para todo } s \in [0, M_n], \quad n \in \mathbb{N};$$

(F_6) *Para* $\beta > 0$ *dado por* (V_0) *existem* $l > 2$ *e* $\sigma \in (0, (\frac{l}{2} - 1)\beta)$ *tal que*

$$\frac{1}{2} s f_0(s) - l F_0(s) \geq -\sigma s^2 \text{ e } \frac{1}{2} s g(s) - l G(s) \geq 0 \text{ para todo } s \neq 0$$

onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt;$

ou

(F_6') *Para* $W_0 > 0$ *dado por* (V_2) *existem* $l > 2$ *e* $\sigma \in (0, (\frac{l}{2} - 1)W_0)$ *tal que*

$$\frac{1}{2} s f_0(s) - l F_0(s) \geq -\sigma s^2 \text{ e } \frac{1}{2} s g(s) - l G(s) \geq 0 \text{ para todo } s \neq 0$$

onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt;$

(F_7) $s \rightarrow \dfrac{p(s)}{s^3}$ *é crescente.*

Para garantir a existência de solução positiva consideramos $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *satisfazendo* $(F_1) - (F_7)$ *sobre* $[0, +\infty)$ *e definida como zero sobre* $(-\infty, 0]$.

Um exemplo de função que satisfaz as condições acima é dada por $f(t) = t^{q-1} + \epsilon t^{p-1}$, *com* $p > 2(2^*) > q$.

Nossos principais resultados são:

Teorema 5.1. *Suponhamos que* V *satisfaça* (V_0),(V_1) *e que* $(F_1) - (F_6)$ *ocorra. Então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que (5.1) tem uma solução positiva para todo* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Teorema 5.2. *Suponhamos que* $\widetilde{V}$ *satisfaça* $(V_0) - (V_2)$ *e em adição a* $(F_1) - (F_5)$, p *também satisfaça* (F_6') *e* (F_7). *Então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que (5.1) tem uma solução positiva para todo* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Novamente usamos a mudança de variável de modo a contornar o problema causado pela existência do termo $\Delta(u^2)u$. *Feito isso, seguimos as ideias encontradas em [5, 8, 10, 42]. Outras referências que nos foram muito úteis são os artigos [56, 57], bem como a Tese de Doutorado [60] que nos permitiram perceber que, diferente dos Capítulos*

2 e 3, podemos trabalhar com o espaço de Sobolev usual. Ao longo deste capítulo veremos que foi necessário resolver um problema auxiliar modificado com crescimento subcrítico, tal ideia foi adaptada do método de truncamento introduzido por Del Pino e Felmer em [27]. Para resolver o problema usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, sem condição de compacidade (veja [57]), e um resultado técnico, devido a Lions [43] (veja também [23]), para obtermos um ponto crítico não trivial do funcional associado ao problema periódico modificado. Depois construímos uma sequência de funções corte e modificamos a não linearidade, de modo a satisfazer o crescimento subcrítico. Utilizando um argumento de iteração de Moser, fornecemos uma estimativa envolvendo a norma L^∞ *para a solução relacionada ao problema subcrítico e com isso obtemos a prova do Teorema 5.1. A prova do Teorema 5.2 é feita de maneira semelhante a prova do teorema anterior, mudando apenas a forma de garantirmos que no caso subcrítico modificado temos uma solução não trivial, para isso usamos a condição* (V_2), *juntamente com um resultado devido a Brezis-Lieb (veja Lema 6.5 e Corolário 6.1).*

5.1 Resultado preliminar

O próximo resultado fornece uma estimativa envolvendo a norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *de uma solução para um problema subcrítico.*

Proposição 5.1. *Seja* $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *uma solução fraca não negativa do problema*

$$-\Delta u + b(x)f(u)f'(u) = h(x, f(u))f'(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

em que $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *é uma função contínua verificando, para* $4 < q < 2(2^*)$, $|h(x,s)| \leq C\,|s|^{q-1}$, *para todo* $s > 0$ *e* b *é uma função não negativa e limitada em* $\mathbb{R}^N$ *e* f *é definida como na Proposição 2.1. Então, para todo* $C > 0$, *existe uma constante* $k = k(q, C) > 0$ *tal que se* $\|v\| \leq C$ *então* $\|v\|_\infty \leq k$.

Demonstração: *Seja* v_0 *uma solução fraca não negativa de (5.2), isto é,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \phi + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)f(v_0)f'(v_0)\phi - \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_0))f'(v_0)\phi = 0, \tag{5.3}$$

para toda $\phi \in E$. *Para cada* $k > 0$ *definamos*

$$v_k = \begin{cases} v_0 & se\ v_0 \le k, \\ k, & se\ v_0 \ge k, \end{cases}$$

$\widetilde{v}_k = v_k^{2(\beta-1)} v_0$ *e* $w_k = v_0 v_k^{\beta-1}$ *com* $\beta > 1$ *a ser determinado. Tomando* $\widetilde{v}_k$ *como função teste em (5.3) obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 + 2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} v_0 v_k^{2(\beta-1)-1} \nabla v_0 \nabla v_k + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) f(v_0) f'(v_0) \widetilde{v}_k$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_0)) f'(v_0) \widetilde{v}_k.$$

Segue de $b(x) \ge 0$ *e de* v_0 *ser não negativa que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 + 2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} v_0 v_k^{2(\beta-1)-1} \nabla v_0 \nabla v_k$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_0)) f'(v_0) \widetilde{v}_k.$$

Observando que a segunda parcela no lado esquerdo da desigualdade acima é não negativa temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 \le \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_0)) f'(v_0) \widetilde{v}_k.$$

A partir das propriedades da (6) e (7) do Lema 2.1 e usando a limitação de h *temos*

$$\begin{aligned} \left| h(x, f(v_0)) f'(v_0) v_0 v_k^{2(\beta-1)} \right| &\le \left| \frac{h(x, f(v_0)) f(v_0)}{v_0} v_0 v_k^{2(\beta-1)} \right| \\ &\le C \frac{|f(v_0)|^q}{v_0} v_0 v_k^{2(\beta-1)} \le C \frac{|v_0|^{\frac{q}{2}}}{v_0} v_0 v_k^{2(\beta-1)} \\ &= C |v_0|^{\frac{q}{2}-1} v_0 v_k^{2(\beta-1)} = C |v_0|^{\frac{q}{2}-2} w_k^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 \le C \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{\frac{q}{2}-2} w_k^2. \tag{5.4}$$

Pela desiguladade de Gagliardo-Nirenberg e (5.4) temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} w_k^{2^*}\right)^{2/2^*} &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2 \\
&\leq C_2\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)}|\nabla v_0|^2 + C_3(\beta-1)^2\int_{\mathbb{R}^N} v_0^2 v_k^{2(\beta-2)}|\nabla v_k|^2 \\
&\leq C_4\beta^2\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)}|\nabla v_0|^2 \leq C_5\beta^2\int_{\mathbb{R}^N}|v_0|^{\frac{q}{2}-2} w_k^2,
\end{aligned}$$

em que usamos $1 \leq \beta^2$ *e* $(\beta-1)^2 \leq \beta^2$ *e* $v_k \leq v_0$. *Pela desigualdade de Hölder, obtemos*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} w_k^{2^*}\right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_5\,\|v_0\|_{2^*}^{\frac{q-4}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|w_k|^{2q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

onde $q_1 = \frac{22^*}{22^*-q+4}$. *Como,* $|w_k| \leq |v_0|^\beta$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e* $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ *de maneira contínua, temos*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}(v_0 v_k^{\beta-1})^{2^*}\right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_6\,\|v_0\|^{\frac{q-4}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v_0|^{2\beta q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Seja $r = q/2$ *e escolhendo* $\beta = 1 + (2^*-r)/2$, *temos* $2\beta q_1 = 2^*$. *Logo,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}(v_0 v_k^{\beta-1})^{2^*}\right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_6\,\|v_0\|^{r-2}\,\|v_0\|_{\beta\alpha^*}^{2\beta},$$

onde $\alpha^* = \dfrac{22^*}{2^*-r+2}$. *Aplicando o lema de Fatou em* k, *temos*

$$\|v_0\|_{\beta 2^*} \leq \beta^{1/\beta}(C_6\,\|v_0\|^{r-2})^{\frac{1}{2\beta}}\,\|v_0\|_{\beta\alpha^*}. \tag{5.5}$$

Para cada $m = 0, 1, 2...$ *definamos* $\beta_{m+1}\alpha^* = 2^*\beta_m$ *com* $\beta_0 = \beta$ *e usando o argumento anterior para* β_1, *por (5.5) obtemos*

$$\begin{aligned}
\|v_0\|_{\beta_1 2^*} &\leq (\beta_1^2 C_6\,\|v_0\|^{r-2})^{1/2\beta_1}\,\|v_0\|_{\beta_1\alpha^*} \\
&\leq (\beta_1^2 C_6\,\|v_0\|^{r-2})^{1/2\beta_1}(\beta^2 C_6\,\|v_0\|^{r-2})^{1/2\beta}\,\|v_0\|_{\beta\alpha^*} \\
&\leq (C_6\,\|v_0\|^{r-2})^{1/2\beta_1+1/2\beta}\beta^{1/\beta}(\beta_1)^{1/\beta_1}\,\|v_0\|_{2^*}.
\end{aligned}$$

Observando que $\beta_m = \beta^m \beta$, *por iteração obtemos*

$$\|v_0\|_{\beta_m 2^*} \leq (C_6 \|v_0\|^{r-2})^{1/2\beta \sum_{i=0}^{m} \beta^{-i}} \beta^{1/\beta \sum_{i=0}^{m} \beta^{-i}} \beta^{1/\beta \sum_{i=0}^{m} i\beta^{-i}} \|v_0\|_{2^*}$$

Como $\beta > 1$, *as séries* $\sum_{i=0}^{\infty} \beta^{-i}$ *e* $\sum_{i=0}^{\infty} i\beta^{-i}$ *são convergentes, pois*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta^{-i} = \frac{1}{\beta - 1} \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{\infty} i\beta^{-i} = \frac{\beta}{(\beta-1)^2}.$$

Logo podemos tomar o limite quando $m \to \infty$ *e novamente usando a imersão contínua* $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ *concluímos que*

$$\|v_0\|_{\infty} \leq C_7 \|v_0\|^{\frac{2^*-2}{2^*-r}}.$$

$\blacksquare$

5.2 O caso periódico

5.2.1 Problema auxiliar

Esta seção trata da existência de solução para um problema com crescimento subcrítico. Este resultado será útil para obtenção deos nossos resultados. Mais precisamente, estudamos a seguinte classe de problema:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u + V(x)u = h(u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{5.6}$$

em que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e que satisfaz* $(V_0) - (V_2)$ *e a função* $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ *satisfaz as seguintes condições:*

(H_1) $h(0) = 0$;

(H_2) $\displaystyle\lim_{s \to 0^+} \frac{h(s)}{s} = 0$;

(H_3) *Existe* $C > 0$ *e* $q \in (4, 2(2^*))$ *tal que* $|h(s)| \leq C(|s| + |s|^{q-1})$ *para todo* $s \in \mathbb{R}^+$;

(H_4) $\displaystyle\lim_{|s| \to \infty} \frac{H(s)}{s^4} = \infty$ *onde* $H(s) = \int_0^s h(t)dt$;

(H_5) *Para* $\beta > 0$ *dado por* (V_0) *existem* $l > 2$ *e* $\sigma \in (0, (\frac{l}{2} - 1)\beta)$ *tal que* $\frac{1}{2}sh(s) - lH(s) \geq -\sigma s^2$ *para todo* $s \neq 0$.

Observemos que o funcional energia associado a (5.6) é dado por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1 + 2u^2)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H(u).$$

Pela dificuldade em trabalhar com o termo $\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2$, *utilizamos o método desenvolvido em [46], considerando a mudança de variável* $v = f^{-1}(u)$ *em que* f *é definida como na Proposição 2.1. Após tal mudança obtemos a partir de* J, *o seguinte funcional*

$$I(v) = J(f(v)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v)),$$

o qual está bem definido no espaço E, *graças a propriedade (3) do Lema 2.1, e é de classe* C^1 *sob as hipóteses acima, em que* $E = H^1(\mathbb{R}^N)$ *e está munido com uma norma equivalente a norma usual, dada por*

$$\|u\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2).$$

Notemos que os pontos críticos positivos para I *são soluções fracas para o problema*

$$-\Delta v + V(x)f(v)f'(v) = h(f(v))f'(v), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{5.7}$$

Para garantirmos que as soluções são não negativas tomamos $h(s) = 0$ *para todo* $s < 0$. *De fato, seja* u *um ponto crítico de* I, *isto é,* $\langle I'(u), \phi\rangle = 0$, *para toda* $\phi \in E$, *ou seja,*

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \int \nabla u \nabla \phi + \int V(x)f(u)f'(u)\phi - \int h(f(u))f'(u)\phi = 0.$$

Tomando $\phi = u^-$, *onde* $u^- = \min\{u, 0\}$, *obtemos*

$$\int |\nabla u^-|^2 + \int V(x)f(u)f'(u)u^- = 0.$$

E como $f(u)u^- \geq 0$, *temos*

$$\int |\nabla u^-|^2 = 0 \ \text{e} \ \int V(x)f(u)f'(u)u^- = 0.$$

Logo, podemos concluir que $u^- = 0$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^N$ *e, portanto,* $u = u^+ \geq 0$.

Proposição 5.2. *(i) Se* $v \in E$ *é um ponto crítico de* I*, então* $u = f(v)$ *é uma solução fraca para o problema (5.6).*

(ii) Qualquer ponto crítico do funcional I *é de classe* $C^{2,\alpha}(\Omega)$.

(iii) Além disso, se $v \in C^2(\Omega) \cap E$ *é um ponto crítico de* I*, então a função* $u = f(v)$ *é uma solução clássica de (5.6).*

Demonstração: *Os itens (i) e (iii) seguem os mesmos passos da Proposição 2.2. Prova do item (ii): Seja* $v \in E$ *um ponto crítico de* I*. Assim,*

$$-\Delta v = w \ \text{em} \ \Omega,$$

no sentido fraco, onde $w(x) = f'(v(x))[h(f(v)) - V(x)f(v(x))]$*. Devido ao comportamento da função* V*, e às hipóteses* $(H_1) - (H_3)$ *temos,*

$$|w| \leq f'(v)[C\,|f(v)| + C_1\,|f(v)|^{q-1}] \leq C_1 + C_2\,|v|^{\frac{q-2}{2}}$$

com $4 < q < 2(2^*)$ *em qualquer bola* B_R*, onde usamos as propriedades (6), (7) e (11) do Lema 2.1. Seja* $p_0 = \dfrac{2(2^*)}{q-2} > 1$*, como* $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ *segue que* $w \in L^{p_0}(\mathbb{R}^N)$*. Pela teoria de regularidade elíptica (veja [35]) temos que* $w \in W^{2,p_0}(\Omega)$*. Usando um argumento de "bootstrap" padrão podemos concluir que* $v \in W^{2,p}(\Omega)$*, para todo* $p > 2$*, (para mais detalhes, veja [39, Exemplo 11.6]). Assim,* $v \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ *e isto implica que* w *é localmente Hölder contínua. Consequentemente,* $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$. ∎

Lema 5.1. *O funcional energia* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Demonstração: *Veja [60, Proposição 1.9].* ∎

5.2.2 Geometria do Passo da Montanha

Um resultado muito útil para este Capítulo é o Teorema do Passo da Montanha.

Lembramos que um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *satisfaz a condição de Cerami no nível* $c \in \mathbb{R}$*, denotada por* $(Ce)_c$*, se toda sequência* $(u_n) \subset W$ *satisfazendo:*

(i) $I(u_n) \to 0$,

(ii) $\|I'(u_n)\|_{E^*}(1+\|u_n\|_E) \to 0$,

quando $n \to \infty$*, possui uma subsequência convergente. O funcional* I *satisfaz a condição de Cerami, denotada por* (Ce)*, se ele satisfaz* $(Ce)_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$*. Dizemos que* $(u_n) \subset W$ *é uma sequência* $(Ce)_c$ *se satisfaz* $(i)-(ii)$ *acima.*

Teorema 5.3. *[57, Teorema 2.1] Seja* X *um espaço de Banach e* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *um funcional de classe* C^1*. Seja* S *um subconjunto fechado de* X *que o desconecta em componentes distintas* E_1 *e* E_2*. Suponha ainda que* $\Phi(0) = 0$ *e*

(I_1) $0 \in E_1$ *e existe* $\tau > 0$ *tal que* $\Phi|_S \geq \tau > 0$*;*

(I_2) *existe* $e \in E_2$ *tal que* $\Phi(e) \leq 0$*.*

Então Φ *possui uma sequência* $(Ce)_c$*, com* $c \geq \tau > 0$ *dado por*

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)), \tag{5.8}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) \in E_2 \text{ e } \Phi(\gamma(1)) \leq 0\}.$$

Ao longo desta subseção mostraremos que I *satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha (veja [57]), para facilitar a leitura do presente trabalho, o citamos no Apêndice. Vale ressaltar que ao longo desta seção usamos que* V *satisfaz* $(V_0)-(V_1)$ *apenas para garantirmos que* $\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) < \infty$*.*

Lema 5.2. *Suponha que* V *satisfaça* $(V_0), (V_1)$*, e que* $(H_1)-(H_4)$ *ocorra. Existe um subconjunto fechado* S *de* E *que desconecta* E *em componentes conexas disjuntas* E_1 *e* E_2*. Então o funcional* I *satisfaz* $I(0) = 0$ *e as seguintes condições*

- $0 \in E_1$ *e existe* $\tau > 0$ *tal que* $I|_S \geq \tau > 0$*.*
- *Existe* $e \in E_2$ *tal que* $I(e) \leq 0$*.*

Demonstração: *Veja [57, Lemma 3.1].* ■

Corolário 5.1. *Assuma que* V *satisfaz* $(V_0), (V_1)$ *e* h *satisfaz* $(H_1)-(H_5)$*. Então o funcional* I *possui uma sequência* $(Ce)_c$*, em que* $c \geq \alpha > 0$ *é dado por* (5.8)*.*

Demonstração: *Consequência do Lema 5.2 e do Teorema do Passo da Montanha (veja [57]).* ∎

O próximo resultado garante a limitação para sequência de Cerami.

Lema 5.3. *Suponhamos que V e h satisfaçam $(V_0)-(V_1)$ e $(H_1)-(H_5)$, respectivamente. Então, qualquer sequência de Cerami $\{u_n\}$ associada ao funcional I é limitada em E.*

Demonstração: *Seja v_n um sequência $(Ce)_c$ para I, isto é,*

$$I(v_n) = c + o_n(1) \tag{5.9}$$

e

$$(1 + \|v_n\|) \|I(v_n)\|_{E^*} = o_n(1). \tag{5.10}$$

Podemos assumir que (v_n) é não negativa. Assim, pela propriedade (6) do Lema 2.1 e por (H_5) temos

$$\begin{aligned} lI(v_n) - \langle I'(v_n), v_n\rangle = \ & (\frac{l}{2} - 1)[\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n)] \\ & -l \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) + \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n) f'(v_n) v_n \\ \geq \ & (\frac{l}{2} - 1) \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \\ & -l \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n) f(v_n) \\ \geq \ & (\frac{l}{2} - 1)[\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n)] - \sigma \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n). \end{aligned}$$

Agora, usando (V_0) temos

$$lI(v_n) - \langle I'(v_n), v_n\rangle \geq (\frac{l}{2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + ((\frac{l}{2} - 1) - \frac{\sigma}{\beta}) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n).$$

Logo,

$$(\frac{l}{2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + ((\frac{l}{2} - 1) - \frac{\sigma}{\beta}) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq lc + o_n(1),$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq C_2,$$

para alguma constante $C_2 > 0$. *Para mostrarmos que* v_n *é limitada em* $H^1(\mathbb{R}^N)$, *falta apenas provar que* $\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2$ *é limitada. Observemos que*

$$\int_{\{|v_n(x)|\leq 1\}} v_n^2 \leq \frac{1}{C^2}\int_{\{|v_n|\leq 1\}} f^2(v_n(x)) \leq \frac{1}{C^2\beta}\int_{\{|v_n|\leq 1\}} V(x)f^2(v_n(x)) \leq \frac{C_2}{\beta C^2}$$

e

$$\int_{\{|v_n(x)|\geq 1\}} v_n^2 \leq \int_{\{|v_n|\geq 1\}} |v_n|^{2^*} \leq C_0\left(\int_{\{|v_n|\geq 1\}} |\nabla v_n(x)|^2\right)^{2^*/2} \leq C_0 C_2^{2^*/2}.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 = \int_{\{|v_n(x)|\leq 1\}} v_n^2 + \int_{\{|v_n(x)|\geq 1\}} v_n^2 \leq \frac{C_2}{\beta C^2} + C_0 C_2^{2^*/2}.$$

■

Vejamos um resultado de compacidade.

Lema 5.4. *Suponha que* V *satisfaça* (V_0) *e* (V_1) *e* h *satisfaça* $(H_2)-(H_3)$. *Seja* $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência* $(Ce)_c$, *com* c *dado por* (5.8), *tal que* $v_n \rightharpoonup 0$ *fracamente em* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Então existe sequência* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e números* $r, \eta > 0$ *tais que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0.$$

Demonstração: *Veja [57, Lemma 3.4].* ■

O próximo resultado garante a existência de solução para o problema subcrítico modificado (5.7).

Proposição 5.3. *Assuma que* V *e* h *satisfaçam* $(V_0)-(V_1)$ *e* $(H_1)-(H_5)$, *respectivamente. Então* (5.7) *possui uma solução positiva* u *tal que*

$$\|u\|_E \leq C_1,$$

em que C_1 *depende de* β *e* σ *dados por* (V_0) *e* (H_5), *e do nível minimax associado a* (5.7).

Demonstração: *Como* I *satisfaz a geometria do Passo da Montanha, pelo Corolário 5.1 existe* $(v_n) \subset E$ *uma sequência* $(Ce)_c$, *com* c *dado por ((5.8)). Aplicando o Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade, que* $v_n \rightharpoonup v$ *em* E. *Deste fato e de* $(H_2)-(H_3)$ *temos que* $v \in E$ *é um ponto crítico de* I, *isto é* $\langle I'(v), \phi\rangle = 0$, *para todo* $\phi \in E$. *Com efeito, pelo fato de* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *ser denso em* E, *podemos considerar* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observemos que:

$$\begin{aligned}\langle I'(v_n)-I'(v),\psi\rangle = & \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v_n-\nabla v)\nabla\psi+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)[f(v_n)f'(v_n)-f(v)f'(v)]\psi\\ & +\int_{\mathbb{R}^N}[h(f(v))f'(v)-h(f(v_n))f'(v_n)]\psi.\end{aligned}$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ *em* E, *temos que* $v_n \to v$ *em* $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *para* $r \in [1,2^*)$, *a menos de subsequência temos*

$$v_n(x) \longrightarrow v(x) \text{ qtp sobre } \mathbb{F} := supp \ \ \psi, \text{ quando } n \to \infty,$$
$$|v_n(x)| \leq |z_r(x)| \text{ qtp sobre } \mathbb{F} \text{ com } z_r \in L^r(\mathbb{F}).$$

Logo,

$$f(v_n)f'(v_n) \to f(v)f'(v) \text{ qtp sobre } \mathbb{F}, \text{ quando } n \to \infty$$
$$h(f(v_n))f'(v_n) \to h(f(v))f'(v) \text{ qtp sobre } \mathbb{F}, \text{ quando } n \to \infty.$$

De $(H_2)-(H_3)$ *temos*

$$|h(f(u))f'(u)| \leq \epsilon\,|f(u)|\,|f'(u)| + C\,|f(u)|^{q-1}\,|f'(u)|\,.$$

Logo, das propriedades (6) e (7) do Lema 2.1 temos

$$|h(f(v_n))f'(v_n)\psi| \leq \epsilon\,|z_2|\,|\psi| + C\left|z_{\frac{q}{2}-1}\right|^{\frac{q}{2}-1}|\psi|\,,$$

para todo $x \in \mathbb{F}$. *Pelo teorema da Convergência Dominada, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n)f'(v_n)\psi \to \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v)f'(v)\psi.$$

Pelas propriedade de V *temos que* V *é limitado assim,*

$$V(x)f(v_n)f'(v_n)\psi \to V(x)f(v)f'(v)\psi$$

e

$$|V(x)f(v_n)f'(v_n)\psi| \leq \|V\|_\infty\,|v_n|\,|\psi| \leq \|V\|_\infty\,|z_2|\,|\psi|\,,$$

novamente pelo teorema da Convergência Dominada temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(x)f(v_n)f'(v_n)\psi \to \int_{\mathbb{R}^n} V(x)f(v)f'(v)\psi.$$

Assim, $\langle I'(v_n) - I'(v), \psi\rangle \to 0$*, como* $I'(v_n) \to 0$*, logo* $I'(v) = 0$*, isto é,* v *é solução fraca de (5.7). Falta mostrar que* $v \not\equiv 0$*. Para provar isso, suponhamos por contradição que* $v = 0$*. Pelo Lema 5.4, existem uma sequência* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e* $r, \eta > 0$ *tais que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 > \eta > 0. \tag{5.11}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $y_n \in \mathbb{Z}^N$*. De fato, se* $y_n = \left(y_n^1, y_n^2, ..., y_n^N\right) \in \mathbb{R}^N$*, existe* $z_n^i \in \mathbb{Z}$*,* $1 \le i \le N$*, tal que* $|y_n^i - z_n^i| \le 1/2$*. Agora, considerando* $z_n = \left(z_n^1, z_n^2, ..., z_n^N\right) \in \mathbb{Z}$*, temos que* $|z_n - y_n| \le \sqrt{\sum_{i=1}^N |z_n^i - y_n^i|^2} \le \sqrt{N}/2$*. Logo,* $B_r(y_n) \subset B_{r+\sqrt{N}/2}(z_n)$*, pois se* $x \in B_r(y_n)$ *temos*

$$|z_n - x| \le |z_n - y_n| + |y_n - x| < \sqrt{N}/2 + r.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_{r+\sqrt{N}/2}(z_n)} |v_n|^2 \ge \limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 > \eta > 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Supondo $y_n \in \mathbb{Z}^N$*, definindo*

$$\widetilde{u}_n(x) = v_n(x + y_n)$$

e observando que $\widetilde{u}_n(x)$ *é limitada em* E*, pois* $\|\nabla v_n\|_2 = \|\nabla \widetilde{u}_n\|_2$ *e por* (V_1)*, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\widetilde{u}_n(x)) = \int_{\mathbb{R}^N} V(z - y_n) f^2(v(z))dz = \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n(z))dz,$$

ou seja,

$$\|\widetilde{u}_n\|_E = \|v_n\|_E, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Notemos também que, pela periodicidade de V*, obtemos*

$$\begin{aligned} I(\widetilde{u}_n) = &\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\widetilde{u}_n(x))|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\widetilde{u}_n(x)) - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(\widetilde{u}_n(x))) \\ = &\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_n)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) \\ = &\ I(v_n) \end{aligned}$$

e de forma análoga $\langle I'(v_n), v_n\rangle = \langle I'(\widetilde{u}_n), \widetilde{u}_n\rangle$.

Lembrando que $\widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u}$ *em* E*, a menos de subsequência temos* $\widetilde{u}_n \to \widetilde{u}$ *em* $L^2_{Loc}(\mathbb{R}^N)$ *e* $\widetilde{u}_n(x) \to \widetilde{u}(x)$ *qtp em* $\mathbb{R}^N$*. Por (5.11), temos que* $\widetilde{u} \neq 0$*. Procedendo de maneira análoga aos cálculos acima temos* $\langle I'(\widetilde{u}), \psi\rangle = 0$ *para toda* $\psi \in E$*, logo* $\widetilde{u}$ *é uma solução não negativa para (5.7).*

Falta mostrar a positividade da solução. Sabemos que $\widetilde{u} \geq 0$*. Além disso, pela Proposição 5.2, temos que* $\widetilde{u} \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, para algum* $\alpha \in (0,1)$*. Agora, argumentando por contradição, suponhamos que existe* $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *tal que* $\widetilde{u}(x_0) = 0$ *e observando que a equação (5.7) pode ser reescrita como*

$$-\Delta\widetilde{u} + c(x)\widetilde{u} = V(x)f'(\widetilde{u})(\widetilde{u} - f(\widetilde{u})) + h(f(\widetilde{u}))f'(\widetilde{u}), \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{5.12}$$

onde $c(x) = V(x)f'(\widetilde{u}(x)) > 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*, é uma função contínua e limitada. Pela propriedade (3) do Lema 2.1 temos que* $\widetilde{u} - f(\widetilde{u}) \geq 0$*. Assim, aplicando o Princípio do Máximo Forte para soluções fracas (veja [35]) em uma bola arbitrária centrada em* x_0*, obtemos* $\widetilde{u} \equiv 0$*. Isto contradiz o fato de que* $\widetilde{u}$ *é não nula.*

Devemos verificar ainda que $\widetilde{u}$ *é limitada por uma constante que depende do nível minimax,* β *e* σ *dados por* (V_0)*. Procedendo como na limitação da sequência de Cerami, por* (H_5) *temos*

$$\begin{aligned} lI(\widetilde{u}_n) - \langle I'(\widetilde{u}_n), \widetilde{u}_n\rangle \geq\ & (\frac{l}{2} - 1)[\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widetilde{u}_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\widetilde{u}_n)] \\ & -l\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} H(f(\widetilde{u}_n)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(f(\widetilde{u}_n)f(\widetilde{u}_n) \\ \geq\ & (\frac{l}{2} - 1)[\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widetilde{u}_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\widetilde{u}_n) - \sigma\int_{\mathbb{R}^N} f^2(\widetilde{u}_n)]. \end{aligned}$$

Agora, usando (V_0) *temos*

$$lI(\widetilde{u}_n) - \langle I'(\widetilde{u}_n), \widetilde{u}_n\rangle \geq (\frac{l}{2} - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widetilde{u}_n|^2 + ((\frac{l}{2} - 1) - \frac{\sigma}{\beta})\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\widetilde{u}_n),$$

desse modo segue que,

$$((\frac{l}{2} - 1) - \frac{\sigma}{\beta})\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widetilde{u}_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\widetilde{u}_n)\right] \leq lI(\widetilde{u}_n) - \langle I'(\widetilde{u}_n), \widetilde{u}_n\rangle.$$

Aplicando o Lema de Fatou encontramos

$$\frac{2lc\beta}{l\beta - 2\beta - 2\sigma} \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{u}|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\widetilde{u})$$

e argumentando como no Lema 5.3, temos

$$\|\widetilde{u}\|_E \leq M,$$

em que M depende de $\beta, l,\ \sigma$ dados por (V_0), (H_5), e do nível minimax associado. ∎

5.3 Prova do Teorema 5.1

Faremos alguns considerações antes da prova do Teorema. Primeiramente, usamos novamente a mudança de variável, encontrada em [46], e buscamos soluções para a seguinte classe de problemas:

$$-\Delta v + V(x) f(v) f'(v) = p(f(v)) f'(v), \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{5.13}$$

Para garantirmos a existência de solução para (5.13), exploramos um argumento de truncamento, pioneiramente introduzido por Del Pino e Felmer em [27]. Isto é, consideramos a sequência de funções g_n, dada por

$$g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{g(M_n)}{M_n^{q-1}} t^{q-1}, & se\ t \geq M_n, \\ g(t), & se\ 0 \leq t \leq M_n, \\ 0, & se\ t \leq 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Por (F_5) temos $|g_n(t)| \leq \dfrac{g(M_n)}{M_n^{q-1}} |t|^{q-1}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Denote $f_{\epsilon,n}(t) = f_0(t) + \epsilon g_n(t)$. De (F_2) e (F_3), nós temos

$$|f_{\epsilon,n}(t)| \leq (1 + \epsilon g(M_n) M_n) |t|^{q-1}$$

e, pelas propriedades (6) e (7) do Lema 2.1, temos que

$$|f_{\epsilon,n}(f(v)) f'(v)| \leq (1 + \epsilon g(M_n) M_n) |v|^{\frac{q}{2}-1}. \tag{5.15}$$

Como $\frac{q}{2} - 1 \leq 2^* - 1$ *o problema*

$$-\Delta v + V(x)f(v)f'(v) = f_{\epsilon,n}(f(v))f'(v), \qquad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{5.16}$$

é variacional para cada $\epsilon > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Cujo funcional correspondente a (5.16) é denotado por* $I_{\epsilon,n} : E \to \mathbb{R}$ *e dado por*

$$I_{\epsilon,n}(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) - \int_{\mathbb{R}^N} F_{\epsilon,n}(f(v)),$$

onde $F_{\epsilon,n}(t) = \int_0^t f_{\epsilon,n}(s)ds$*.*

Notemos que por (5.15), o funcional $I_{\epsilon,n}$ *pertence a* $C^1(E,\mathbb{R})$ *e possui derivada de Gâteaux dada por*

$$\left\langle I'_{\epsilon,n}(v), u\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla u + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)u - \int_{\mathbb{R}^N} f_{\epsilon,n}(f(v))f'(v)u,$$

para todo $u, v \in E$ *(Veja [57]).*

Seja F_0 *dado por* (F_4) *e consideremos agora um funcional de Euler-Lagrange auxiliar* $J_0 : E \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$J_0(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) - \int_{\mathbb{R}^N} F_0(f(v)).$$

Observemos que por $(F_1) - (F_4)$ *segue que* J_0 *possui a geometria do passo da Montanha (veja Lema 5.2), assim, pelo Teorema do Passo da Montanha existe* $c_0 \in \mathbb{R}^N$ *dado como em* (5.8)*. Como* $f_{\epsilon,n}$ *satisfaz* $(H_1) - (H_5)$ *da Proposição 5.3, para cada* $\epsilon > 0$*,* $\ n \in \mathbb{N}$ *e* V *satisfaz* $(V_0) - (V_1)$*, o problema (5.16) tem uma solução positiva tal que* $\|u_{\epsilon,n}\|_E \leq C_1$*, com* C_1 *dependendo de* $c_{\epsilon,n}$*, o nível minimax do problema. Mas, observemos que,* $g(t) \geq 0$ *para todo* $t > 0$ *assim,* $F_{\epsilon,n} = F_0 + \epsilon G_n(t) \geq F_0$ *e logo* $I_{\epsilon,,n}(v) \leq J_0(v)$ *para todo* $v \in E$*. Com isso, existe uma constante* C_2 *independe de* ϵ *e* n*, tal que* $\|u_{\epsilon,n}\|_E \leq C_2$*.*

Agora estamos em condição de provar o Teorema 5.1. Nossa prova consiste em encontrar n, ϵ *e uma solução positiva tal que* $u(x) \leq M_n$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*. Para todo* C *dado pela Proposição 5.1, fixamos* n *tal que* $M_n^2 > C$*. Seja* $\epsilon_0 > 0$ *tal que* $\epsilon_0 g(M_n)M_n \leq 1$*. Observe que assim temos* $|f_{\epsilon,n}(t)| \leq C\,|t|^{q-1}$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $4 < q < 2(2^*)$*. Pela Proposição 5.3 existe uma solução* $u = u_{\epsilon,n}$ *de (5.7) tal que* $\|u\|_E \leq C_1$ *e pela Proposição*

5.1, com $b(x) = V(x)$ obtemos

$$\|u\|_\infty \leq M$$

para $M = M(q, c_0)$.

A fim de completarmos a prova do Teorema 5.1 observamos que os argumentos da prova da proposição encontrada em [36, Proposição 2.4] podem ser repetidos para provar que se $u \in E \cap L^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ é uma solução fraca de (5.13) então $v = f(u) \in E \cap L^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ é uma solução fraca de (5.1).

5.4 O problema não periódico

Inicialmente, investigamos a existência de solução para a equação com crescimento subcrítico. Este resultado será útil para obtermos o resultado desejado. Mais precisamente, estudamos a seguinte equação:

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + \widetilde{V}(x)u = h(u) \qquad \text{em } \mathbb{R}^\mathbb{N}, \quad N \geq 3, \tag{5.17}$$

em que $\widetilde{V} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo $(V_0) - (V_2)$ e a função $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ satisfaz $(H_1) - (H_4)$ do problema (5.6) juntamente com

(H_5') *Para $W_0 > 0$ dado por (V_2) existem $l > 2$ e $\sigma \in (0, (\frac{l}{2} - 1)W_0)$ tais que*

$$\frac{1}{2}sh(s) - lH(s) \geq -\sigma s^2 \text{ para todo } s \neq 0;$$

(H_6) *A função $s \longmapsto \dfrac{h(s)}{s^3}$ é crescente sobre $(0, +\infty)$.*

Consideremos o funcional de Euler-Lagrange $J_W : E_W \to \mathbb{R}^N$ associado ao problema (5.17) *definido por,*

$$J_W(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H(u),$$

onde $E_W = H^1(\mathbb{R}^N)$ é munido com uma norma equivalente a norma usual, dada por

$$\|u\|_W^2 = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} W(x)u^2.$$

Como podemos observar existem algumas dificuldades técnicas na aplicação de métodos variacionais diretamente ao funcional acima. A principal dificuldade está relacionada *com o fato de que* J_W *não está bem definido em* E_W*. Para superar esta dificuldade, novamente empregamos um argumento encontrado em [46] (veja também [21]). Nós fazemos a mudança de variável* $v = f^{-1}(u)$*, em que* f *está definida como na Proposição 2.1. Então, a partir de* J_W *nós obtemos,*

$$I_W(v) = J_W(f(v)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x) f^2(v) - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v)),$$

e observamos que os pontos críticos não triviais para I_W *são soluções fracas para o seguinte problema*

$$-\Delta v + \widetilde{V}(x) f(v) f'(v) = h(f(v)) f'(v), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{5.18}$$

Pela teoria de regularidade elíptica (veja [35]) temos que todo ponto crítico v *de* I_W *pertence a* $C^2(\mathbb{R}^N)$*, conforme Proposição 5.2.*

A partir de agora denotamos por

$$J_0 = J, I_0 = I, \|.\|_0 = \|.\|, E_0 = E \ \textit{para}\ W = 0.$$

O próximo resultado garante a existência de solução para o problema não periódico subcrítico modificado.

Proposição 5.4. *Assuma que* $\widetilde{V}$ *e* h *satisfaçam* $(V_0)-(V_1)$ *e* $(H_1)-(H_5')$*, respectivamente. Então* (5.18) *tem uma solução positiva* u *tal que*

$$\|u\|_W \le C_1,$$

em que C_1 *depende de* W_0 *e* σ *dados por* (V_2) *e* (H_5')*, e do nível minimax associado a* (5.18)*.*

Antes de fazermos a prova da proposição vejamos um importante lema. Consideremos a Variedade de Nehari associada a I*, isto é,*

$$M = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \langle I'(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Consideremos também os seguintes números

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

$$\widetilde{c} = \inf_{M} I$$

e

$$\overline{c} = \inf_{v\in E\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I(tu),$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \quad I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Lema 5.5. *Assumamos que $\widetilde{V}$ verifique $(V_1) - (V_2)$ e h satisfaça $(H_1) - (H_6)$. Então, para cada $v \in E \setminus \{0\}$, existe um único $t_v > 0$ tal que $t_v v \in M$ e $I(t_v v) = \max_{t\geq 0} I(tv)$. Além disso, $\widetilde{c} = \overline{c} = c$.*

Demonstração: *Seja $v \in E \setminus \{0\}$ fixado e defina a função $\eta(t) = I(tv)$, para $t \geq 0$. Observe que se $tv \in M$ então $n'(t) = 0$. Agora note que se $\eta'(t) = 0$ então $tv \in M$, pois, graças ao Lema 5.2, existe t_v tal que $\eta(t_v) = \max\limits_{t\geq 0} \eta(t) = \max\limits_{t\geq 0} I(t_v v)$. Assim,*

$$\eta'(t_v) = t_v \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(t_v v) f'(t_v v) v - \int_{\mathbb{R}^N} h(f(t_v v)) f'(t_v v) v = 0,$$

implicando que $t_v v \in M$.

Agora mostremos a unicidade. Suponhamos que exista $s > 0$, tal que $sv \in M$, com $\eta'(s) = 0$. Já sabemos que $\eta'(t_v) = 0$. Assim temos que

$$0 = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{h(f(t_v v)) f'(t_v v)}{t_v v} - \frac{V(x) f(t_v v) f'(t_v v)}{t_v v} \right] v^2 \right\}$$

e

$$0 = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{h(f(sv)) f'(sv)}{sv} - \frac{V(x) f(sv) f'(sv)}{sv} \right] v^2 \right\}$$

Subtraindo as duas últimas equações obtemos,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{V(x) f(sv) f'(sv)}{sv} - \frac{V(x) f(t_v v) f'(t_v v)}{t_v v} \right] v^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{h(f(sv)) f'(sv)}{sv} - \frac{h(f(t_v v)) f'(t_v v)}{t_v v} \right] v^2 \end{aligned}$$

Segue do Corolário 2.1 e de (H_6) que $g(s) = \dfrac{h(f(s))f'(s)}{s} - \dfrac{V(x)f(s)f'(s)}{s}$ *é crescente, de modo que* $s = t_v$. *Agora, a prova segue utilizando argumentos similares encontrados no [33, Lema 3.8]. Vimos anteriormente que* $\max_{t\geq 0} I(tv) = I(t_v v) \geq \widetilde{c}$ *para cada* $v \in E \setminus \{0\}$, *pois* $t_v v \in M$. *Assim,* $\overline{c} \geq \widetilde{c}$. *Agora pela definição de* $\overline{c}$ *temos, em particular, que* $\overline{c} \leq \max_{t\geq 0} I(tv) = I(t_v v)$ *para todo* $v \in M$. *Mas, para* $v \in M$, *temos* $t_v = 1$ *em* M. *Logo, pela geometria do passo da montanha, temos que* $\overline{c} \leq I(v)$ *para todo* $v \in M$ *e, portanto,* $\overline{c} \leq \widetilde{c}$. *Assim,* $\overline{c} = \widetilde{c}$.

Desde que $I(t_0 v) < 0$ *para* $v \in E \setminus \{0\}$ *e* t_0 *grande, definindo* $\gamma : [0,1] \to E$ *por* $\gamma(t) = tt_0 v$, *segue que* $\gamma \in \Gamma$ *e, consequentemente,* $c \leq \overline{c}$. *Agora, mostremos que* $\widetilde{c} \leq c$.

A variedade M *separa* E *em duas componentes. A ideia é mostrar que para toda curva* $\gamma \in \Gamma$, $0 = \gamma(0)$ *e* $\gamma(1)$ *estão em componentes distintas. Procedendo de maneira análoga à prova da geometria do Passo da Montanha, segue que*

$$\begin{aligned}\langle I'(v), v\rangle = \; & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)v - \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v))f'(v)v \\ & \geq (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\epsilon}{\beta})[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)] - C_1[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v))]^{\frac{2N+2p}{N+2}}.\end{aligned}$$

Tomando $2\epsilon < \beta$ *e* $\|v\|_E$ *pequena, e lembrando que* $\frac{2N+2p}{N+2} > 2$ *temos que existe* $\delta > 0$ *tal que* $\langle I'(v), v\rangle > 0$ *quando* $0 \leq \|v\|_E \leq \delta$. *Isso mostra que a componente contendo a origem também contém uma pequena bola em torno da origem. Além disso,* $I(v) \geq 0$ *para todo* v *nesta componente, pois* $\langle I'(tv), v\rangle \geq 0$ *para todo* $0 \leq t \leq t_v$. *Logo* $\gamma(0)$ *e* $\gamma(1)$ *estão em componentes distintas, ou seja, toda curva* $\gamma \in \Gamma$ *tem que cruzar* M. *Portanto, devemos ter* $\widetilde{c} \leq c$. *Assim,* $\overline{c} \leq c$ *e o lema está provado.* ■

Prova da Proposição 5.4. *Pelas hipóteses temos que* I_W *satisfaz a geometria do Passo da Montanha (veja Lema 5.2), e assim existe uma sequência de Cerami* $(u_n) \subset E_W$ *tal que*

$$I_W(u_n) \to c_w > 0 \text{ e } \|I'_W(u_n)\|_{W^*}(1 + \|u_n\|) \to 0$$

quando $n \to \infty$, *sendo*

$$c_W = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \quad I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Procedendo como no Lema 5.3 temos que u_n é limitada. Passando a subsequência, se necessário, temos $u_n \rightharpoonup u$ em E_W. Além disso, seguindo os mesmos passos da Proposição 5.3 temos que u é solução fraca de (5.18). Como $h(s) = 0$, para $s \leq 0$, logo $u \geq 0$. Precisamos mostrar que $u \neq 0$.

Suponhamos, por contradição que $u \equiv 0$, ou seja, $u_n \rightharpoonup 0$ em E_W, quando $n \to \infty$. Como $W \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, obtemos pela propriedade (3) do Lema 2.1 e por um resultado de Brezis-Lieb (veja Lema 6.5 e Corolário 6.1) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(x) f^2(u_n) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Note que, quando $n \to \infty$,

$$|I(u_n) - I_W(u_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} W(x) f^2(u_n) \right| = o_n(1),$$

e assim,

$$I(u_n) \to c_W.$$

Sabendo que $W \geq 0$, para $\phi \in E_W$, com $\|\phi\| \leq 1$, obtemos graças a propriedade (2) do Lema 2.1 e a desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned}
|\langle I'(u_n) - I'_W(u_n)), \phi \rangle| = & \; \left| \int_{\mathbb{R}^N} W(x) f(u_n) f'(u_n) \phi \right| \\
\leq & \; \left| \int_{\mathbb{R}^N} W^{1/2}(x) f(u_n) W^{1/2}(x) \phi \right| \\
\leq & \; (\int_{\mathbb{R}^N} W(x) f^2(u_n))^{1/2} (\int_{\mathbb{R}^N} W(x) \phi^2)^{1/2} \\
\leq & \; (\int_{\mathbb{R}^N} W(x) f^2(u_n))^{1/2} (\int_{\mathbb{R}^N} W^{N/2}(x))^{1/N} (\int_{\mathbb{R}^N} \phi^{2N/N-2})^{N-2/2N} \\
\leq & \; C(\int_{\mathbb{R}^N} W(x) f(u_n)^2)^{1/2},
\end{aligned}$$

logo, $I'(u_n) = o_n(1)$ quando $n \to \infty$.

Seja $N = \{u \in E_W \setminus \{0\} : \langle I'_W(u), u\rangle = 0\}$ *a variedade de Nehari associada a* I_W *e de maneira análoga ao Lema 5.5, temos que* $c_W = \inf_{v \in E_W \setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_W(tu) = \inf_N I_W$.

Lema 5.6. *Os níveis* c_W *e* c *verificam a seguinte desigualdade* $c_W < c$.

Demonstração: *Segue do Lema 5.5 que existe* $u \in M$ *tal que* $I(u) = c$ *e* $\langle I'(u), \phi\rangle = 0$*, para toda* $\phi \in E$*. Então, escolhendo* $t^* \in \mathbb{R}$ *tal que* $t^*u \in N$*, temos*

$$0 < c_w \leq \sup_{t\geq 0} I_W(tu) = I_W(t^*u),$$

e usando (V_2) *concluímos que*

$$0 < c_w \leq I_W(t^*u) < I(t^*u) \leq \sup_{t\geq 0} I(tu) = c.$$

■

Para chegarmos a uma contradição com o lema acima, e daí concluirmos a proposição precisamos de alguns lemas, os quais foram adaptados de [9].

Lema 5.7. *A função* $G(s) = \dfrac{1}{2}h(f(s))f'(s)s - H(f(s))$ *é não decrescente para* $s \geq 0$.

Demonstração: *Inicialmente observemos que* $\dfrac{h(f(s))f'(s)}{s}$ *é crescente para* $s > 0$*, pois* $\dfrac{h(f(s))f'(s)}{s} = \dfrac{h(f(s))}{f^3(s)}\dfrac{f^3(s)f'(s)}{s}$ *é crescente (e positiva) para* $s > 0$*. Agora, por* (F_7) *e item ii) do Corolário 2.1 temos*

$$0 \leq \left(\frac{h(f(s))f'(s)}{s}\right)' = \frac{h'(f(s))(f'(s))^2 s + h(s)f''(s).s - h(f(s))f'(s)}{s^2},$$

logo,

$$h'(f(s))(f'(s))^2 s + h(s)f''(s)s \geq h(f(s))f'(s). \tag{5.19}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} G'(t) = &\ \frac{1}{2}h'(f(s))(f'(s))^2 s + \frac{1}{2}h(f(s))f''(s)s + \frac{1}{2}h(f(s))f'(s) - h(f(s))f'(s) \\ \geq &\ \frac{1}{2}h(f(s))f'(s) - \frac{1}{2}h(f(s))f'(s) = 0. \end{aligned}$$

■

Lema 5.8. *Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I_W no nível c_W com $v_n \rightharpoonup 0$ em E_W. Então uma das alternativas ocorrem:*

i) $Q(v_n) \to 0$, *onde* $Q(v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x) f^2(v_n)$;

ii) Existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e constantes positivas* R, S *tais que*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 \geq S.$$

Demonstração: *Suponhamos que ii) não ocorra. Assim, para todo* $R > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 = 0$$

e; como (v_n) *é limitada em* E_W, *temos (veja [43, Lemma I.1]) que* $v_n \to 0$ *em* $L^s(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $s \in (2, 2^*)$. *Observemos que por* $(H_2) - (H_3)$ *obtemos:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n))f'(v_n)v_n \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \left|f^2(v_n)\right| + C \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q-1} |f'(v_n)v_n|$$

e pelas propriedades (3), (6) e (7) do Lema 2.1 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n))f'(v_n)v_n \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 + C \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\frac{q}{2}}.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n))f'(v_n)v_n = 0.$$

Desse limite e do fato de que $\langle I'_W(v_n), v_n\rangle = o_n(1)$ *temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x) f(v_n) f'(v_n) v_n\right) = 0$$

e pela propriedade (6) do Lema 2.1 *obtemos*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x) f^2(v_n)\right) = 0.$$

■

Lema 5.9. *Seja (v_n) uma sequência $(Ce)_{c_W}$ para I_W em E_W com $v_n \rightharpoonup 0$ em E_W. Se $Q(v_n) \not\to 0$ em $\mathbb{R}^N$ então $c \leq c_W$.*

Demonstração: *Seja* $t_n > 0$ *uma sequência real tal que* $t_n v_n \subset M$.

Afirmação: *A sequência* t_n *satisfaz* $\limsup t_n \leq 1$. *Suponhamos o contrário, isto é, existe* $\delta > 0$, $t_n > 1+\delta$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Já sabemos que* v_n *é limitada e* $\langle I'_W(v_n), v_n\rangle = o_n(1)$, *isto é,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 = -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x) f(v_n) f'(v_n) v_n + \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n)) f'(v_n) v_n + o_n(1) \tag{5.20}$$

Por outro lado, $\langle I'(t_n v_n), t_n v_n\rangle = 0$, *ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 = -\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{f(t_n v_n) f'(t_n v_n)}{t_n} v_n + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(f(t_n v_n)) f'(t_n v_n)}{t_n} v_n. \tag{5.21}$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(x) f(v_n) f'(v_n) v_n = o_n(1),$$

visto que $W \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ *e* $v_n \rightharpoonup 0$, *assim, pela propriedade (6) do Lema 2.1 e Brezis-Lieb (veja Lema 6.5 e Corolário 6.1), obtemos* $\int_{\mathbb{R}^N} W(x) f(v_n) f'(v_n) v_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Logo, subtraindo (5.20) e (5.21), encontramos*

$$\begin{aligned} o_n(1) + \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{f(t_n v_n) f'(t_n v_n)}{t_n} \widetilde{v}_n - \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v_n) f'(v_n) v_n \\ = \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(f(t_n v_n)) f'(t_n v_n)}{t_n} v_n - \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n)) f'(v_n) v_n \end{aligned} \tag{5.22}$$

Como $Q(v_n) \not\to 0$ *em* $\mathbb{R}$ *segue pelo Lema 5.8 que existem* $(y_n) \subset \mathbb{R}$ *e constantes positivas* R *e* S *tais que*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 \geq S. \tag{5.23}$$

Definamos $\widetilde{v}_n(x) = v_n(x+y_n)$, *e passando a subseqência se necessário, temos que* $\widetilde{v}_n \rightharpoonup \widetilde{v}$ *em* E_W. *Além disso, em vista de (5.23), existe um subconjunto* $T \subset \mathbb{R}^N$ *com medida positiva tal que* $\widetilde{v} > 0$ *em* T. *Observemos que, pelo Corolário 2.1, temos que* $\dfrac{f(t)f'(t)}{t}$ *é decrescente para* $t > 0$ *de modo que,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{f(t_n \widetilde{v}_n) f'(t_n \widetilde{v}_n)}{t_n} \widetilde{v}_n - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(\widetilde{v}_n) f'(\widetilde{v}_n) \widetilde{v}_n \leq 0,$$

para $t_n \geq 1+\delta$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Logo de (5.22) e periodicidade de* V *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(f(t_n\widetilde{v}_n))f'(t_n\widetilde{v}_n)}{t_n} v_n - \int_{\mathbb{R}^N} h(f(\widetilde{v}_n))f'(\widetilde{v}_n)\widetilde{v}_n \leq o_n(1),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\frac{h(f(t_n\widetilde{v}_n))}{f^3(t_n\widetilde{v}_n)} \frac{f'(t_n\widetilde{v}_n)f^3(t_n\widetilde{v}_n)}{t_n\widetilde{v}_n} - \frac{h(f(\widetilde{v}_n))}{f^3(\widetilde{v}_n)} \frac{f'(\widetilde{v}_n)f^3(\widetilde{v}_n)}{\widetilde{v}_n}]\widetilde{v}_n^2 \leq o_n(1).$$

Assim, segue do item ii) do Corolário 2.1, de (H_6) *e lembrando que* $t_n > 1+\delta$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\frac{h(f((1+\delta)\widetilde{v}_n))}{f^3((1+\delta)\widetilde{v}_n)} \frac{f'((1+\delta)\widetilde{v}_n)f^3((1+\delta)\widetilde{v}_n)}{(1+\delta)\widetilde{v}_n} - \frac{h(f(\widetilde{v}_n))}{f^3(\widetilde{v}_n)} \frac{f'(\widetilde{v}_n)f^3(\widetilde{v}_n)}{\widetilde{v}_n}]\widetilde{v}_n^2 \leq o_n(1).$$

Fazendo $n \to \infty$ *e aplicando o Lema de Fatou na última inequação, obtemos*

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{h(f((1+\delta)\widetilde{v}))}{f^3((1+\delta)\widetilde{v})} \frac{f'((1+\delta)\widetilde{v})f^3((1+\delta)\widetilde{v})}{(1+\delta)\widetilde{v}} - \frac{h(f(\widetilde{v}))}{f^3(\widetilde{v})} \frac{f'(\widetilde{v})f^3(\widetilde{v})}{\widetilde{v}}]\widetilde{v}^2 \leq 0$$

o que é um absurdo.

Agora, consideraremos dois casos:

Caso 1: $\limsup t_n = t_0 < 1$*. Neste caso, nós podemos supor que existe uma subsequência, ainda denotada por* t_n *satisfazendo*

$$t_n \to t_0 \ e \ t_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que $I(t_nv_n) - \frac{1}{2}\langle I'(t_nv_n), t_nv_n\rangle \leq I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle + o_n(1)$*. De fato, observemos que:*

$$
\begin{aligned}
I(t_nv_n) - \frac{1}{2}\langle I'(t_nv_n), t_nv_n\rangle = \ & \frac{1}{2}t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(t_nv_n) \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(t_nv_n)) - \frac{1}{2}t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \\
& - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(t_nv_n) f'(t_nv_n) t_nv_n \\
& - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(f(t_nv_n)) f'(t_nv_n) t_nv_n \\
= \ & \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(t_nv_n) - f(t_nv_n) f'(t_nv_n) t_nv_n] \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(t_nv_n)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(f(t_nv_n)) f'(t_nv_n) t_nv_n.
\end{aligned}
$$

Pelo item iii) do Corolário 2.1 temos que $f^2(t) - f(t)f'(t)t$ *é crescente para todo* $t \geq 0$ *e pelo Lema 5.7, temos que* $\frac{1}{2}h(f(s))f'(s)s - H(f(s))$ *é não decrescente, logo para* $t_n < 1$, *temos* $I(t_nv_n) - \frac{1}{2}\langle I'(t_nv_n), t_nv_n\rangle \leq I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle + o_n(1)$.

Assim,

$$
c + o_n(1) \leq I(t_nv_n) - \frac{1}{2}\langle I'(t_nv_n), t_nv_n\rangle \leq I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle + o_n(1) = c_W + o_n(1).
$$

Caso 2 $\limsup t_n = 1$. *Neste caso, existe uma subsequência, também denotada por* t_n *tal que* $t_n \to 1$. *Vejamos*

$$
\begin{aligned}
I(t_nv_n) - I(v_n) = \ & \frac{1}{2}t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(t_nv_n) \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(t_nv_n)) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) \\
= \ & \frac{1}{2}(t_n^2 - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(t_nv_n) - f^2(v_n)] \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} [H(f(t_nv_n)) - H(f(v_n))].
\end{aligned}
$$

Agora observe que, pelo Teorema do Valor Médio, obtemos para $t \in (0,1)$ *que*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}[H(f(t_n v_n)) - H(f(v_n))]\\&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n + t(t_n-1)v_n))f'(v_n + t(t_n-1)v_n)(t_n-1)v_n\\&= o_n(1),\end{aligned}$$

similarmente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(t_n v_n) - f^2(v_n)] = o_n(1).$$

Portanto,

$$I(t_n v_n) - I(v_n) = o_n(1).$$

Logo,

$$c \leq I(t_n v_n) = I(v_n) + o_n(1) = c_w + o_n(1).$$

■

Retomando a prova da Proposição 5.4: Segue dos Lemas 5.6 e 5.9 que a solução fraca encontrada para o problema (5.18) *é não trivial e o resto da demonstração segue como na prova da Proposição 5.3.*

5.5 Prova do Teorema 5.2

A prova é análoga ao Teorema 5.1. Apresentamos aqui uma ideia da prova ressaltando os pontos diferentes na demonstração. Para obter a existência de uma solução para (5.1) novamente exploramos um argumento de truncamento introduzido por Del Pino e Felmer em [27]. Utilizando uma sequência de funções g_n *definida em* (5.14), *e por* (F_5) *obtemos* $|g_n(t)| \leq \dfrac{g((M_n))}{M_n^{q-1}} |t|^{q-1}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Denotemos por* $f_{\epsilon,n}(t) = f_0(t) + \epsilon g_n(t)$. *Observemos que de* (F_2) *e* (F_3), *temos*

$$|f_{\epsilon,n}(t)| \leq (1 + \epsilon g(M_n)M_n) |t|^{q-1}, \tag{5.24}$$

e por (5.24), temos que o problema

$$-\Delta v + \widetilde{V}(x) f(v) f'(v) = f_{\epsilon,n}(f(v))f'(v), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{5.25}$$

é variacional para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, cujo funcional de Euler-Lagrange $I_{\epsilon,n}$ pertence a $C^1(E_W, \mathbb{R})$ e possui derivada de Gâteaux dada por

$$\langle I'(v), u\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla u + \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x) f(v) f'(v) u - \int_{\mathbb{R}^N} f_{\epsilon,n}(f(v)) f'(v) u,$$

para todo $u, v \in E_W$.

Para F_0 dado por (F_4), introduzimos um funcional de Euler-Lagrange auxiliar, $J_0 : E_W \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_0(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}(x) f^2(u) - \int_{\mathbb{R}^N} F_0(f(v)).$$

Graças as hipóteses $(F_1) - (F_4)$, temos que J_0 satisfaz a geometria do passo da Montanha (veja Lema 5.2). Então existe $c_0 \in \mathbb{R}^N$ dado por (5.8) Como $f_{\epsilon,n}$ satisfaz as condições $(H_1) - (H_4)$ e (H_5') da Proposição 5.4 para cada $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $\widetilde{V}$ verifica $(V_0) - (V_2)$, então o problema (5.25) possui uma solução positiva $\|u_{\epsilon,n}\|_E \leq C_1$. Notemos que $g(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Assim temos que $F_{\epsilon,n} = F_0 + \epsilon G_n(t) \geq F_0$. Logo $I_{\epsilon,n}(v) \leq J_0(v)$ para todo $v \in E$. Portanto, existe C_2 que independente de $c_{\epsilon,n}$, tal que $\|u_{\epsilon,n}\|_E \leq C_2$.

Agora, estamos em condições de provar o teorema. Para isso precisamos encontrar n, ϵ e uma solução positiva $u(x) \leq M_n$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Observemos que para C dado pela Proposição 5.1, fixamos n tal que $M_n^2 > C$.

Seja $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon_0 g(M_n) M_n \leq 1$. Segue de (5.24) que $|f_{\epsilon,n}(t)| \leq C\,|t|^{q-1}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $4 < q < 2(2^*)$. Pela Proposição 5.4, existe uma solução positiva u tal que $\|u\| \leq C_2$. Usando a Proposição 5.1 com $b(x) = \widetilde{V}(x)$ obtemos

$$\|u\|_\infty \leq M.$$

Para completar a prova do Teorema 5.2 usamos os mesmos argumentos usados na prova da proposição encontrada em [36, Proposição 2.4].

Capítulo

6

Apêndice

6.1 Propriedades do espaço W

Nosso objetivo é mostrar que o espaço

$$W = \left\{ u \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega h(x)\left|f(u)\right|^{r+1} dx < \infty \right\}$$

é um espaço de Banach reflexivo quando equipado com a norma

$$\|u\|_W = \|\nabla u\|_2 + \inf_{\nu>0} \frac{1}{\nu} \left\{ 1 + \left(\int_\Omega h(x)\left|f(\nu u)\right|^{r+1} dx \right)^{\frac{2}{r+1}} \right\}$$

em que f é a mudança de variável definida em (2.2) e h é uma função não negativa tal que $h \in L^1(\Omega)$, com suporte de medida positiva. Antes, vejamos alguns resultados, muitos deles foram adaptados de [55].

Lema 6.1. $\|.\|_W$ *é uma norma.*

Demonstração: *Seja $u \in W$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Observemos que*

$$\|\lambda u\|_W = \|\nabla \lambda u\|_2 + \inf_{\nu>0} \frac{1}{\nu} \left\{ 1 + \left(\int_\Omega h(x)\left|f(\lambda\nu u)\right|^{r+1} dx \right)^{\frac{2}{r+1}} \right\}.$$

Fazendo $s = \nu\,|\lambda|$, *temos*

$$\begin{aligned}
&\inf_{\nu>0}\frac{1}{\nu}\left\{1+\left(\int_\Omega h(x)\,|f(\lambda\nu u)|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}\\
&=\inf_{\frac{s}{|\lambda|}>0}\frac{|\lambda|}{s}\left\{1+\left(\int_\Omega h(x)\,|f(su)|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}\\
&=|\lambda|\inf_{s>0}\frac{1}{s}\left\{1+\left(\int_\Omega h(x)\,|f(su)|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}.
\end{aligned}$$

Logo $\|\lambda u\|_W = |\lambda|\,\|u\|_W$.

Agora a desigualdade triangular: Sejam $u, v \in W$,

$$\|u+v\|_W = \|\nabla(u+v)\|_2 + \inf_{\nu>0}\frac{1}{\nu}\left\{1+\left(\int_\Omega h(x)\,|f(\nu(u+v))|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}.$$

Pela convexidade de f^2 *e pela desigualdade de Minkovski temos*

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega h(x)\,|f(\nu(u+v))|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}} = \left(\int_\Omega h(x)\,|f^2(\nu u+\nu v))|^{\frac{r+1}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&\le \left(\int_\Omega h(x)\left|\tfrac{1}{2}f^2(2\nu u)+\tfrac{1}{2}f^2(2\nu v))\right|^{\frac{r+1}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&= \left(\int_\Omega \left|(h(x))^{\frac{2}{r+1}}\tfrac{1}{2}f^2(2\nu u)+(h(x))^{\frac{2}{r+1}}\tfrac{1}{2}f^2(2\nu v))\right|^{\frac{r+1}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&= \left\|(h(x))^{\frac{2}{r+1}}f^2(2\nu u)+(h(x))^{\frac{2}{r+1}}f^2(2\nu v))\right\|_{\frac{r+1}{2}}\\
&\le \left\|(h(x))^{\frac{2}{r+1}}\tfrac{1}{2}f^2(2\nu u)\right\|_{\frac{r+1}{2}} + \left\|(h(x))^{\frac{2}{r+1}}\tfrac{1}{2}f^2(2\nu v))\right\|_{\frac{r+1}{2}}\\
&= \left(\int_\Omega \left[(h(x))^{\frac{2}{r+1}}\tfrac{1}{2}f^2(2\nu u)\right]^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}} + \left(\int_\Omega \left[(h(x))^{\frac{2}{r+1}}\tfrac{1}{2}f^2(2\nu v)\right]^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\int_\Omega h(x)\,|f(2\nu u)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} + \tfrac{1}{2}\left(\int_\Omega h(x)\,|f(2\nu v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\inf_{\nu>0}\frac{1}{\nu}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\left(\int_\Omega h(x)\,|f(2\nu u)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}+\frac{1}{2}\left(\int_\Omega h(x)\,|f(2\nu v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\right)\right\}\\
&\le \inf_{s>0}\frac{1}{s}\left\{2+\left(\left(\int_\Omega h(x)\,|f(su)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}+\left(\int_\Omega h(x)\,|f(sv)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\right)\right\}\\
&\le \inf_{s>0}\frac{1}{s}\left\{1+\left(\int_\Omega h(x)\,|f(su)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}+\inf_{s>0}\frac{1}{s}\left\{1+\left(\int_\Omega h(x)\,|f(sv)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|.\|_W$ *é norma.* ∎

Lema 6.2. *$W = \left\{u \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega h(x)\,|f(u)|^{r+1}\,dx < \infty\right\}$ é um espaço vetorial linear normado com a norma $\|.\|_W$.*

Demonstração: *Temos que $0 \in W$. Seja $v \in W$, e $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{|\alpha|}{2^k} \in (0,1)$. Pelas propriedades (12) e (8) do Lema 2.1 temos*

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega h(x)\,|f(\alpha v)|^{r+1} = \int_\Omega h(x)(f^2(\alpha v))^{\frac{r+1}{2}} = \int_\Omega h(x)(f^2(2^k \tfrac{|\alpha|}{2^k} v))^{\frac{r+1}{2}}\\
&\leq C_1 \int_\Omega h(x)(f^2(\tfrac{|\alpha|}{2^k} v))^{\frac{r+1}{2}} \leq C_1 \int_\Omega h(x)(\tfrac{|\alpha|}{2^k} f^2(v))^{\frac{r+1}{2}}\\
&\leq C_2 \int_\Omega h(x)(f^2(v))^{\frac{r+1}{2}} = C_2 \int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}
\end{aligned}
$$

logo, $\alpha v \in W$. Agora se $u, v \in W$ usando novamente a propriedade (8) do Lema 2.1 e a desigualdade de Minkowski, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega h(x)\,|f(u+v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} = \left(\int_\Omega h(x)\,|f^2(u+v)|^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq \left(\int_\Omega h(x)\left|\tfrac{1}{2}f^2(2u) + \tfrac{1}{2}f^2(2v)\right|^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq \left(\int_\Omega h(x)\left|\tfrac{1}{2}f^2(2u)\right|^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}} + \left(\int_\Omega h(x)\left|\tfrac{1}{2}f^2(2v)\right|^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}} \quad ,
\end{aligned}
$$

assim, pela primeira parte para todo $u, v \in W$, temos $u + v \in W$. Logo W é um espaço vetorial linear. ■

Lema 6.3. *Existe uma constante positiva C tal que para todo $v \in W$,*

$$
\frac{\left(\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}}{\left(1 + (\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{r+1}}\right)} \leq C\,\|v\|_W\,. \tag{6.1}
$$

Demonstração: *Para $v \in W$ e $\nu > 0$, definamos $A_\nu = \{x \in \Omega; \nu\,|v(x)| \leq 1\}$. Das propriedades (3) e (7) do Lema 2.1 encontramos*

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} &= \left(\int_{A_\nu} h(x)\,|f(v)|^{r+1} + \int_{A_\nu^c} h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq \left(\int_{A_\nu} h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} + \left(\int_{A_\nu^c} h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq \left(\int_{A_\nu} h(x)\,|f(v)|^{\frac{r+1}{2}}\,|v|^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}} + \left(C\int_{A_\nu^c} h(x)\,|v|^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}}.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder e a propriedade (9) do Lema 2.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{A_\nu} h(x)\,|f(v)|^{\frac{r+1}{2}}\,|v|^{\frac{r+1}{2}} &= \int_{A_\nu}(h(x)\,|v|^{r+1})^{\frac{1}{2}}(h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{2}}\\
&\leq (\int_{A_\nu} h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{2}}(\int_{A_\nu} h(x)\,|v|^{r+1})^{\frac{1}{2}}\\
&\leq (\int_{\Omega} h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{2}}(\int_{A_\nu} h(x)\,|v|^{r+1})^{\frac{1}{2}}\\
&\leq (\int_{\Omega} h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{2}}(\tfrac{C}{\nu})^{\frac{r+1}{2}}(\int_{A_\nu} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1})^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora, usando a propriedade $s^{\frac{1}{2}} \leq s+1$ válida para todo $s \geq 0$, encontramos

$$\begin{aligned}
&(\int_{A_\nu} h(x)\,|f(v)|^{\frac{r+1}{2}}\,|v|^{\frac{r+1}{2}})^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq (\int_{\Omega} h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{r+1}}(\tfrac{C}{\nu})(1+(\int_{A_\nu} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1})^{\frac{2}{r+1}}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando novamente a propriedade (9) do Lema 2.1 temos que

$$\begin{aligned}
\int_{A_\nu^c} h(x)\,|v|^{\frac{r+1}{2}} &= \int_{A_\nu^c} h(x)\left|\tfrac{\nu}{\nu}v\right|^{\frac{r+1}{2}} = (\tfrac{1}{\nu})^{\frac{r+1}{2}}\int_{A_\nu^c} h(x)\,|\nu v|^{\frac{r+1}{2}}\\
&\leq (\tfrac{C}{\nu})^{\frac{r+1}{2}}\int_{A_\nu^c} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\int_{A_\nu^c} h(x)\,|v|^{\frac{r+1}{2}})^{\frac{2}{r+1}} &\leq ((\tfrac{C}{\nu})^{\frac{r+1}{2}}\int_{A_\nu^c} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1})^{\frac{2}{r+1}}\\
&= \tfrac{C}{\nu}(\int_{A_\nu^c} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1})^{\frac{2}{r+1}}\\
&\leq \tfrac{C}{\nu}(1+\left(\int_{A_\nu^c} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}).
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que para todo $\nu > 0$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} h(x)\,|f(v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} &\leq (\int_{\Omega} h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{r+1}}(\tfrac{C}{\nu})(1+\left(\int_{\Omega} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}})\\
&\quad +\tfrac{C}{\nu}(1+\left(\int_{\Omega} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}})\\
&= \tfrac{C}{\nu}(1+\left(\int_{\Omega} h(x)\,|f(\nu v)|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}})\left(1+(\int_{\Omega} h(x)\,|f(v)|^{r+1})^{\frac{1}{r+1}}\right).
\end{aligned}$$

■

Agora estamos em condição de provar o seguinte resultado.

Proposição 6.1. *W é um espaço de Banach.*

Demonstração: *Seja (v_n) uma sequência de Cauchy em W, isto é, dado ϵ existe $N > 0$ tal que $n, m \geq N$ temos $\|v_n - v_m\|_W \leq \epsilon$. Segue da definição da norma que se v_n é de Cauchy em W então v_n é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$, então existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo pelo teorema das imersões de Sobolev, $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$ existe uma subsequência, também denotada por (v_n) tal que $v_n \to v$ qtp em Ω.*

Usando o Lema 6.3 e $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s}{1+s^{\frac{1}{2}}} = \infty$ *nós obtemos* $\int_\Omega h(x)\left|f(v_n)\right|^{r+1} \leq C$. *Pelo lema de Fatou*

$$\int_\Omega h(x)\left|f(v)\right|^{r+1} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h(x)\left|f(v_n)\right|^{r+1} \leq C,$$

logo $v \in W$. *Como* v_n *é de Cauchy, segue novamente do limite acima que existe* $\delta(\epsilon)$ *tal que* $\delta(\epsilon) \to 0$, *sempre que* $\epsilon \to 0$ *e assim do Lema 6.3 temos que*

$$\int_\Omega h(x)\left|f(v_n - v_m)\right|^{r+1} < \delta(\epsilon), \text{ para } m, n \geq N.$$

Fixando $m > N$ *e aplicando novamente o Lema de Fatou, encontramos*

$$\int_\Omega h(x)\left|f(v_n - v)\right|^{r+1} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h(x)\left|f(v_n - v_m)\right|^{r+1} \leq \delta(\epsilon)$$

e assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega h(x)\left|f(v_n - v)\right|^{r+1} = 0$. *Observemos que se* $\lambda > 1$, *temos pela propriedade (12) do Lema 2.1 que*

$$\left(\int_\Omega h(x)\left|f(\lambda(v_n - v))\right|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} \leq \left(\int_\Omega h(x)\left|\lambda^2 f^2(v_n - v)\right|^{\frac{r+1}{2}}\right)^{\frac{2}{r+1}} =$$
$$\left(\int_\Omega h(x)\lambda^{r+1}\left|f(v_n - v)\right|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} = \lambda^2 \left(\int_\Omega h(x)\left|f(v_n - v)\right|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}$$

Como $\left(\int_\Omega h(x)\left|f(v_n - v)\right|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} \to 0$, *então dado* $\lambda > 1$ *existe* N_1 *tal que* $n \geq N_1$ *temos* $\left(\int_\Omega h(x)\left|f(\lambda(v_n - v))\right|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}} \leq 1$, *assim,*

$$\frac{1}{\lambda}\left\{1 + \left(\int_\Omega h(x)\left|f(\lambda(v_n - v))\right|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\} \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Concluindo que

$$\inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left\{1 + \left(\int_\Omega h(x)\left|f(\lambda(v_n - v))\right|^{r+1}\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\} \to 0.$$

■

Proposição 6.2. *O espaço* $(W, \|.\|_W)$ *é reflexivo.*

Demonstração: *Inicialmente observemos que* $H = (H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_W)$ *é Banach. Vale ressaltar que a prova é análoga a demonstração da proposição anterior. Assim, graças a desigualdade de Poincaré, e Teorema da Aplicação Aberta temos a equivalência das* *normas $\|\nabla .\|_2$ e $\|.\|_W$ e pelo Teorema Eberlein - Šmulian [20, Theorem 3.19] deduzimos que o espaço $(H_0^1(\Omega), \|.\|_W)$ é reflexivo.*

Afirmamos que W é fechado em $H_0^1(\Omega)$. De fato, seja $v_n \in W$, tal que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $\|v_n - v\|_W < \epsilon$ para todo $n > N$. Segue da definição de ínfimo que existe $\nu_0 >$ tal que

$$\frac{1}{\nu_0}\left\{1+\left(\int_\Omega h(x)\left|f(\nu_0(v_n-v))\right|^{r+1}dx\right)^{\frac{2}{r+1}}\right\}\leq\epsilon,$$

assim $\left(\int_\Omega h(x)\left|f(\nu_0(v_n-v))\right|^{r+1}dx\right)^{\frac{2}{r+1}} \leq \nu_0\epsilon$ logo $\nu_0(v_n - v) \in W$, mas como W é um espaço normado linear, e $v_n \in W$ logo $v \in W$. Então, pela [20, Proposição 3.20] concluímos que W é um espaço reflexivo. ∎

6.1.1 Comparação entre a sub e supersolução

Lema 6.4. *[48, Teorema 45] A única solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & em \;\; B_R(0) \;\; \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = 0 & sobre \;\; \partial B_R(0). \end{cases}$$

com f radial, isto é, $f(x) = f(r)$ em que $|x| = r$, e $B_R(0)$ denota a bola centrada na origem e de raio R é dada por

$$u(r)=\int_r^R\Big(\int_0^\theta\Big(\frac{s}{\theta}\Big)^{N-1}f(s)ds\Big)d\theta.$$

Teorema 6.1. *[48, Teorema 43] O problema anterior possui uma única soluçao fraca $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Além disso, se $f \in L^\infty(\Omega)$ então $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ para algum $0 < \alpha < 1$.*

Observação 6.1. *Diante dos dois últimos resultados temos que*

$$|u(r)|\leq\|f\|_\infty\int_r^R\Big(\int_0^\theta\Big(\frac{s}{\theta}\Big)^{N-1}ds\Big)d\theta=\|f\|_\infty\frac{R^2}{2N}$$

e assim,

$$\|u\|_\infty\leq\|f\|_\infty\frac{R^2}{2N}.$$

6.1.2 Algumas convergências

Proposição 6.3. *Se $u_n \to u$ em W e (*) ocorre, então*

(i) $\int [k(x) |f(u_n)|^{q+1} - h(x) |f(u_n)|^{r+1}] \to \int [k(x) |f(u)|^{q+1} - h(x) |f(u)|^{r+1}]$

(ii) $\int [k(x) |f(u_n)|^{q-1} f(u_n) f'(u_n) v - h(x) |f(u_n)|^{r-1} f(u_n) f'(u_n) v] \to$
$\int [k(x) |f(u)|^{q-1} f(u) f'(u) v - h(x) |f(u)|^{r-1} f(u) f'(u) v]$, *para todo* $v \in W$.

Demonstração: *Seja $u_n \to u$ em W e como $H_0^1(\Omega)$ está imerso em $L^t(\Omega)$ para $1 \leq t \leq 2^*$, assim passando a subsequência, se necessário, $u_n(x) \to u(x)$, qtp em Ω e existe $h_t \in L^t(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq h_t$.*

Prova de (i): Temos que

$$\frac{1}{q+1} k(x) |f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1} h(x) |f(u_n)|^{r+1} \to \frac{1}{q+1} k(x) |f(u)|^{q+1} - \frac{1}{r+1} h(x) |f(u)|^{r+1},$$

quando $n \to \infty$.

Observemos que $\Omega = A \cup B$, com

$$A = \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{q+1} k(x) |f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1} h(x) |f(u_n)|^{r+1} \geq 0 \right\}$$

e

$$B = \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{q+1} k(x) |f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1} h(x) |f(u_n)|^{r+1} < 0 \right\}.$$

No conjunto A temos pela desigualdade (3.3) e propriedade (3) do Lema 2.1

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{q+1} k(x) |f(u_n)|^{q+1} - \frac{1}{r+1} h(x) |f(u_n)|^{r+1} \right| \\
&= \left[\frac{1}{q+1} k(x) |f(u_n)|^{q-1} - \frac{1}{r+1} h(x) |f(u_n)|^{r-1} \right] f^2(u_n) \\
&\leq C \frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}} |u_n|^2 \leq C \frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}} h_t^2
\end{aligned}$$

e pela condição $(*)$ temos que $C \dfrac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}} h_t^2 \in L^1(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Convergência

Dominada temos

$$\int_A \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_n)\right|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1}\right] \to$$
$$\int_A \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u)\right|^{q+1} - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u)\right|^{r+1}\right],$$

quando $n \to \infty$.

No conjunto B *temos* $\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_n)\right|^{q+1} \leq \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1}$.

Como $u_n \to u$ *em* W, *usando o Lema 6.3 e* $\lim_{s\to\infty} \frac{s}{1+s^{\frac{1}{2}}} = \infty$ *obtemos* $\int_\Omega h(x)\left|f(u_n - u)\right|^{r+1} \to 0$, *logo a menos de subsequência existe* $h_1 \in L^1(\Omega)$ *tal que*

$$h(x)\left|f(u_n - u)\right|^{r+1} \leq h_1 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Além disso, a propriedade (12) do Lema 2.1 juntamente com a convexidade de f^2 *implica que*

$$\begin{aligned} h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1} = h(x)\left|f^2(u_n - u + u)\right|^{\frac{r+1}{2}} &\leq Ch(x)\left|f^2(u_n - u) + f^2(u)\right|^{\frac{r+1}{2}} \\ &\leq C_1 h(x)\left|f(u_n - u)\right|^{r+1} + C_1 h(x)\left|f(u)\right|^{r+1} \\ &\leq C_1 h_1(x) + C_1 h(x)\left|f(u)\right|^{r+1}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

e como $C_1 h_1(x) + C_1 h(x)\left|f(u)\right|^{r+1} \in L^1(\Omega)$, *segue pelo Teorema da Convergência Dominada que*

$$\int_B h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1} \to \int_B h(x)\left|f(u)\right|^{r+1}$$

e

$$\int_B k(x)\left|f(u_n)\right|^{q+1} \to \int_B k(x)\left|f(u)\right|^{q+1}.$$

Prova de (ii): Temos que

$$k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} f(u_n)f'(u_n)v - h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1} f(u_n)f'(u_n)v \to$$
$$k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} f(u)f'(u)v - h(x)\left|f(u)\right|^{r-1} f(u)f'(u)v,$$

qtp em Ω *quando* $n \to \infty$. *Observemos que*

$$\begin{aligned}
& k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} f(u_n)f'(u_n)v - h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1} f(u_n)f'(u_n)v \\
& \leq \left|k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} f(u_n)f'(u_n)v - h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1} f(u_n)f'(u_n)v\right| \\
& = \left|k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} - h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}\right| \left|f(u_n)f'(u_n)\right| |v|.
\end{aligned}$$

No conjunto A temos pela propriedade (11) do Lema 2.1 que

$$\begin{aligned}
& \left|k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} - h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}\right| \left|f(u_n)f'(u_n)\right| |v| \\
& \leq C\left|k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}\right| |v| \\
& \leq C\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}} |v|
\end{aligned}$$

e pela condição $(*)$ *temos que* $C\dfrac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}}v \in L^1(\Omega)$, *para todo* $v \in W$. *Pelo Teorema da Convergência Dominada temos*

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} f(u_n)f'(u_n)v - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1} f(u_n)f'(u_n)v\right] \to \\
& \qquad \int_A \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u)\right|^{q-1} f(u)f'(u)v - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u)\right|^{r-1} f(u)f'(u)v\right],
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

Já no conjunto B temos pela propriedade (2) de Lema 2.1 que

$$\begin{aligned}
& \left|k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} - h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}\right| \left|f(u_n)f'(u_n)\right| |v| \\
& = \left[-k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1} + h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}\right] \left|f(u_n)f'(u_n)\right| |v| \\
& \leq h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1} \left|f(u_n)f'(u_n)\right| |v|
\end{aligned}$$

Agora, observe que usando (2), (10) e (11) do Lema 2.1 temos

$$h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1} \left|f(u_n)f'(u_n)\right| |v| \leq C_1h(x)\left|f(u_n)\right|^{r} |f(v)| + C_2h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1} |f(v)|^2$$

e usando a desigualdade $a.b \leq \dfrac{1}{s}a^s + \dfrac{1}{s'}b^{s'}$, *válida para* $a, b \geq 0$ *e* $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, *obtemos*

$$C_1h(x)\left|f(u_n)\right|^{r} |f(v)| \leq C_3[h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1} + h(x)\left|f(v)\right|^{r+1}]$$

e

$$C_2h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}\left|f(v)\right|^2 \leq C_4[h(x)\left|f(u_n)\right|^{r+1} + h(x)\left|f(v)\right|^{r+1}].$$

Assim, por (6.2) temos que $h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}\left|f(u_n)f'(u_n)\right|\left|v\right|$ *é dominada por uma função em* $L^1(\Omega)$*, logo pelo Teorema da convergência Dominada temos*

$$\int_B \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u_n)\right|^{q-1}f(u_n)f'(u_n)v - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u_n)\right|^{r-1}f(u_n)f'(u_n)v\right] \rightarrow \int_B \left[\frac{1}{q+1}k(x)\left|f(u)\right|^{q-1}f(u)f'(u)v - \frac{1}{r+1}h(x)\left|f(u)\right|^{r-1}f(u)f'(u)v\right]$$

■

6.2 Resultados técnicos

Apresentamos aqui alguns resultados que usamos ao longo do texto, bem como as referências de suas provas.

Teorema 6.2. *[59, Teorema 1.1.2] Suponha que* V *é um espaço de Banach reflexivo com norma* $\|\cdot\|$ *e seja* $M \subset V$ *um subconjunto fracamente fechado em* V*. Suponha* $E : M \rightarrow \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ *coercivo em* M *com respeito a* V*, isto é,* $E(u) \rightarrow \infty$ *quando* $\|u\| \rightarrow \infty$*,* $u \in M$*, e fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente, isto é, para qualquer* $u \in M$ *e qualquer sequência* $(u_m) \in M$ *tal que* $u_m \rightharpoonup u$ *verifica-se*

$$E(u) \leq \liminf_{m\rightarrow\infty} E(u_m).$$

Então W *é limitado inferiormente sobre* M *e o ínfimo é atingido em* M*.*

Definição 6.1. *[59, Definição II.11.2] Seja* $M \subset V$ *um conjunto fechado e convexo, e* V *um espaço de Banach. Dizemos que* $u \in M$ *é um ponto crítico de* I *em* M *se*

$$g(u) = \sup\left\{\langle I'(u), u - v\rangle : \quad v \in M, \quad \|v-u\|_V \leq 1\right\} = 0.$$

Definição 6.2. *[59, Definição II.11.3] O funcional* E *satisfaz a condição Palais-Smale sobre* M*, denotada por* $(PS)_M$*, se qualquer sequência* (u_n) *em* M *tal que* $|E(u_n)| \leq C$ *uniformemente, e* $g(u_m) \rightarrow 0$ *quando* $m \rightarrow \infty$*, é relativamente compacto.*

Teorema 6.3. *[59, Teorema II.11.8] Suponha M um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach V, $E \in C^1(V)$ um funcional satisfazendo $(PS)_M$ sobre M, e admite dois mínimos relativos distintos u_1 e u_2 em M. Então, uma das condições abaixo ocorre:*

- *$E(u_1) = E(u_2) = \beta$ e u_1, u_2 podem ser conectados em qualquer vizinhança do conjunto de mínimo relativo $u \in M$ de E com $E(u) = \beta$,*
- *existe um ponto crítico $\overline{u}$ de E em M o qual não é um mínimo relativo de E.*

Teorema 6.4. *[20, Corolário 9.10] Seja $1 \leq p < N$. Então $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [p, p^*]$, com imersão contínua.*

Teorema 6.5. *[20, Teorema 9.16] Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado de classe C^1. Então temos*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para todo } q \in [1, 2^*)$$

com injeção compacta, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $N \geq 3$.

Teorema 6.6. *[20, Teorema 4.9] Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$. Então existe uma subsequência f_{n_k} de (f_n), e uma função $h \in L^p(\Omega)$, tal que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \text{ qtp em } \Omega$$

e

$$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \text{ qtp em } \Omega.$$

Teorema 6.7. *[20, Corollary 9.13] Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\begin{array}{llll} \text{Se} & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0, & \text{temos} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), & \text{onde } \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}; \\ \text{se} & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0, & \text{temos} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), & \text{para todo } q \in [p, \infty); \\ \text{se} & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0, & \text{temos} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N), & \end{array}$$

com injeções contínuas.

Teorema 6.8. *[59, Teorema 1.2.4] Suponha que $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma subsolução e*

$\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ *uma supersolução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(.,u) \qquad em\ \Omega \\ u &= u_0 \qquad sobre\ \partial\Omega \end{cases}$$

em que g *é uma função Carathéodory. Suponha ainda que existem constantes* $M_1,\ M_2 \in \mathbb{R}$ *que satisfazem*

$$-\infty < M_1 \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq M_2 < \infty$$

quase sempre em Ω*. Então existe uma solução fraca* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *do problema acima satisfazendo a condição* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *quase sempre em* Ω*.*

Observação 6.2. *Como pode ser visto em, [59], na prova do Teorema acima usamos a limitação da sub e supersolução apenas para garantir que o funcional associado ao problema é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente, não exercendo mais nenhuma influência em sua prova.*

Teorema 6.9. *[24, Lema 1.1] Sejam* $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto,* $X,\ Y$ *espaços de Banach,* V *uma vizinhança de 0 e* $F : I \times V \to Y$ *uma função duas vezes difenciáveis no sentido de Fréchet. Suponha que* $\lambda_0 \in I$ *e*

(i) $F(\lambda,\ 0) = 0$ *para* $\lambda \in I$*,*

(ii) dim $N(F_x(\lambda_0,\ 0)) =$ *codim* $R(F_x(\lambda_0,\ 0)) = 1$*,*

(iii) $F_{\lambda x}(\lambda_0,\ 0)x_0 \notin R(F_x(\lambda_0,\ 0))$ *onde* $x_0 \in X$ *gera* $N(F_x(\lambda_0,\ 0))$*.*

Seja Z *algum complemento topológico linear de span* $\{x_0\}$ *em* X*, ou seja, espaço gerado por* x_0*. Então existe um intervalo aberto* $\widetilde{I}$ *contendo 0 e funções continuamente diferenciáveis* $\lambda : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ *e* $\psi : \widetilde{I} \to Z$ *tais que* $\lambda(0) = 0,\ \psi(0) = 0$*, e, se* $x(s) = s\ x_0 + s\ \psi(s)$*, então* $F(\lambda(s), x(s)) = 0$*. Além disso,* $F^{-1}(\{0\})$ *próximo a* $(\lambda_0, 0)$ *consiste precisamente das curvas* $x = 0$ *e* $(\lambda(s), x(s)),\ s \in \widetilde{I}$*.*

Teorema 6.10. *[1, Teorema 6.2] Suponha* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1 *e sejam* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$*. Então para qualquer* $j \geq 0$ *a imersão*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

onde $0 < \alpha < 1 - \dfrac{N}{p}$ *é compacta se* $m - 1 < \dfrac{N}{p} < m$*.*

Teorema 6.11. *[29, Teorema 5.3.23] Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $T : X \to X^*$ um operador satisfazendo as seguintes condições:*

i.) *T é limitado;*

ii.) *T é demicontínuo, isto é, T leva sequências fortemente convergentes em sequências fracamente convergentes ;*

iii.) *T é coercivo.*

Além disso, existe uma aplicação limitada $\phi : X \times X \to X^*$ tal que

iv.) *$\phi(u, u) = T(u)$ para cada $u \in X$;*

v.) *para todo $u, w, h \in X$ e cada sequência $\{t_n\}$ de números reais tal que $t_n \to 0$, nós temos $\phi(u + t_n h, w) \rightharpoonup \phi(u, w)$;*

vi.) *para todo $u, w \in X$ nós temos $\langle \phi(u, u) - \phi(w, u), u - w\rangle \geq 0$;*

vii.) *se $u_n \rightharpoonup u$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \phi(u_n, u_n) - \phi(u, u_n), u_n - u\rangle = 0$ então nós temos $\phi(w, u_n) \rightharpoonup \phi(w, u)$ para $w \in X$;*

viii.) *se $w \in X$, $u_n \rightharpoonup u$, $\phi(w, u_n) \rightharpoonup z$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \phi(w, u_n), u_n\rangle = \langle z, u\rangle$.*

Então a equação $T(u) = f^*$ tem ao menos uma solução $u \in X$ para cada $f^* \in X$.

Proposição 6.4. *[20, Proposição 3.20] Assuma que E é um espaço de Banach reflexivo, e seja $M \subset E$ um subespaço linear fechado de E. Então M é reflexivo.*

Teorema 6.12. *[20, Teorema 3.19 (Eberlein-Šmulian)] Assuma que E é espaço de Banach tal que cada sequência limitada em E admite subsequência fracamente convergente. Então E é reflexivo.*

Teorema 6.13. *[2, Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg] Sejam Ω um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^r(\Omega)$, $r > 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_r\,.$$

Teorema 6.14. *[63, Teorema 5.9] Seja f uma função não negativa sobre Ω. Se $|\Omega| = 0$, então $\int_\Omega f = 0$.*

Lema 6.5. *[39, Lema 4.6] Sejam $1 \leq p < \infty$, e (f_n) uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ que converge para f qtp em Ω. Então $f \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p \right).$$

Corolário 6.1. *[39, Corolário 4.7] Sejam $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ e (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$. Suponhamos que $f_n \to f$ qtp em Ω e $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$. Então $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.*

Referências Bibliográficas

[1] *R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.*

[2] *S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.*

[3] *S. Alama, G. Tarantello, On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities, Calc. Var. Partial Dif. Equations 1 (1993), 439-475.*

[4] *S. Alama, G. Tarantello, Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign, J. Funct. Anal. 141 (1996), 159-215.*

[5] *C. O. Alves, P.C. Carrião, O.H. Miyagaki, Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth, J. Math. Anal. Appl. 260 (2001), 133-146.*

[6] *M. J. Alves, P.C. Carrião, O.H. Miyagaki, Soliton solutions to a class of quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}$*, Adv. Nonlinear Stud. 7 (2007), 579-597.*

[7] *C.O. Alves, J.M. do Ó, O.H. Miyagaki, On nonlinear perturbations of a periodic in* $\mathbb{R}^2$ *involving critical growth, Nonlinear Anal. 56 (2004), 781-791.*

[8] *C. O. Alves, G. M. Figueiredo, Nonlinear perturbations of a periodic Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^N$*, Nonlinear Anal. 75 (2012), 2750-2759.*

[9] *C. O. Alves, G. M. Figueiredo, U.B. Severo, Multiplicity of positive solutions for a class of quasilinear problems, Adv. Differential Equations 14 (2009), 911-942.*

[10] *C. O. Alves, S.H.M. Soares, M.A.S. Souto, Schrödinger-Poisson equations with supercritical growth, Eletronic J. Differential Equations (2011), 1-11.*

[11] *C. O. Alves, Y. Wang, Y. Shen, Soliton solutions for class of quasilinear Schrödinger equations with a parameter, arXiv:1309.4606 [math.AP].*

[12] A. Ambrosetti, Z. Q. Wang, Positive solutions to a class of quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}$, Discrete and Continuous Dynamical Systems 9 (2003), 55-68.

[13] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato, Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong"resonance at infinity, Nonlinear Anal. 7 (1983), 981-1012.

[14] A. K. Ben-Naoum, C. Troestler, M. Willem, Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains, Nonlinear Anal. 26 (1996), 823-833.

[15] N. Benouhiba, Z. Belyacine, On the solutions of the (p,q)-Laplacian problem at resonance, Nonlinear Anal. 77 (2013), 74-81.

[16] H. Berestycki, T. Gallouët, O. Kavian, Équations de champs scailares euclidiens non linéaires dans le plan, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 297 (1983), 307-310

[17] H. Berestycki,P.L. Lions, Nonlinear scalar field equations, I: Existence of a ground state, Arch. Ration. Mech. Anal. 82 (1982), 313-346.

[18] A. Borovskii, A. Galkin, Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter, J. Exp. Theor. Phys. 77 (1983), 562-573.

[19] H. Brandi, C. Manus, G. Mainfray, T. Lehner, G. Bonnaud, Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma, Phys. Fluids B 5 (1993), 3539-3550.

[20] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, New York, 2010.

[21] M. Colin, L. Jeanjean, Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach, Nonlinear Anal. 56 (2004), 213-226.

[22] D. G. Costa and E. A. B. Silva, Existence of solutions for a class of resonant elliptic problems, J. Math. Anal. Appl. 175 (1993), 411-424.

[23] V. Coti Zelati, P.H. Rabinowtiz, Homoclinic type solutions for a semilinear Elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$, Commun. Pure Appl. Math. 45 (1992), 1217-1269.

[24] *M. Crandall, P. H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, Arch. Ration. Mech. Anal. 52 (1973), 161-180.*

[25] *D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, Nonlinear pertubations of a linear elliptic problem near its first eigenvalue, J. Differential Equations 30 (1978), 1-19.*

[26] *F. O. de Paiva, Nonnegative solutions for indefinite sublinear elliptic problems, Commun. Contemp. Math. 14 (2012) no 3, 1250021-1 - 1250021-20.*

[27] *M. Del Pino, P.L. Felmer, Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Calc. Var. Partial Dif. Equations 4 (1996), 121-137.*

[28] *W.Y. Ding, W.M. Ni, On the existence of positive entire solution of a semilinear elliptic equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 91 (1986), 283-308.*

[29] *P. Drábek, J. Milota, Methods of nonlinear analysis in: Applications to Differential Equations, Birkhäuser Verlag AG, Boston, Berlin, 2007.*

[30] *J.M. do Ó, O. H. Miyagaki, S.H.M. Soares, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations with critical growth, J. Differential Equation 248 (2010), 722-744.*

[31] *J.M. do Ó, A. Moameni, Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations arising in plasma physics, Adv. Nonlinear Stud. 9 (2009), 479-497.*

[32] *J.M. do Ó, U. Severo, Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities, Commun. Pure Appl. Anal. 8 (2009), 621-644.*

[33] *J.M. do Ó, U. Severo, Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations in dimension two, Calc. Var. Partial Dif. Equations 38 (2010), 275-315.*

[34] *M. T. Fu, A note on the existence of two nontrivial solutions of a resonant problem, Portugal. Math. 51 (1994), 517-523.*

[35] *D. Gilbard, N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, Berlin, 1983.*

[36] *E. Gloss, Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear equation in $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 371 (2010), 465-484.*

[37] J. V. Gonçalves, On nonresonant sublinear elliptic problems. Nonlinear Anal 15 (1990), 915-920.

[38] J. V. Gonçalves, O. H. Miyagaki, Three solutions for a strongly resonannt elliptic problem, Nonlinear Anal. 24 (1995), 265-272.

[39] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problems elliptiques, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1994.

[40] S. Kurihura, Large-amplitude quasi-solitons in superfluids films, J. Phys. Soc. Japan 50 (1981), 3262-3267.

[41] E. Landesman, A. C. Lazer, Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech.19 (1969/1970), 609-623.

[42] G. Li, C. Wang, The existence of a nontrivial solution to p-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with supercritical growth, Math. Methods Appl. Sci. 36 (2013), 69-79.

[43] P. L. Lions, The concentration-compacteness principle in the calculus of variations.The locally compact case, Part II, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéare 1 (1984), 223-283.

[44] X. Liu, J.-Q.Liu, Z.-Q. Wang, Ground states for quasilinear Schrödinger equations with critical growth, Calc. Var. Partial Dif. Equations 46 (2013), 641-669.

[45] J. Liu, Z.-Q. Wang, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, I, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 441-448.

[46] J. Liu, Y. Wang, Z.-Q. Wang, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II, J. Differential Equations 187 (2003), 473-493.

[47] V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin, Nonlinear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory, Phys. Rep. 104 (1984), 1-86.

[48] E. M. Martins, Obtenção do primeiro autovalor para o p-Laplaciano via método das potências inverso, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.

[49] A. Moameni, Existence of soliton solutions for a quasilinear Schrödinger equation involving critical exponent in R^N, J. Differential Equations 229 (2006), 570-587.

[50] A. Moameni, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations involving supercritical exponent in $\mathbb{R}^N$, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), 89-105.*

[51] P. Montecchiari, *Multiplicity results for a class of semilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$, Rend. Sem. Mat. Unit. Padova 95 (1996), 217-252.*

[52] M. Poppenberg, K. Schmitt, Z.-Q Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations, Calc. Var. Partial Dif. Equations 14 (2002), 329-344.*

[53] P.H. Rabinowitz, *A note on a semilinear elliptic equation on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear analysis, 307-317, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni, Scuola Norm. Sup., Pisa, 1991.*

[54] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Conf. Ser. in Math. 65 Amer. Math. Soc., Miami, 1986.*

[55] U.B. Severo, *Estudo de uma classe de equações de Schrödinger quase-lineares, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2007.*

[56] E.A.B. Silva, G.F. Vieira, *Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth, Calc. Var. Partial Dif. Equations 39 (2010), 1-33.*

[57] E.A.B. Silva, G.F. Vieira, *Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth, Nonlinear Anal. 72 (2010), 2935-2949.*

[58] W.A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. 55 (1977), 149-162.*

[59] M. Struwe, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems, Springer-Verlag, Berlin, 1990.*

[60] G.F. Vieira, *Métodos variacionais aplicados a uma classe de equaçõees de Schrödinger quasilineares, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2010.*

[61] Y. Wang, *Multiple solutions for quasilinear elliptic equations with critical growth, J. Korean Math. Soc. 48 (2011), 1269-1283.*

[62] Y.J. Wang, Y.M. Zhang, Y.T. Shen, Multiple solutions for quasilinear Schrödinger equations involving critical exponent, Appl. Math. Comp. 216 (2010), 849-856.

[63] R. L. Wheeden, A. Zygmund, Measure and integral: An introduction to real analysis, CRC Press, New York, 1977.

[64] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhäuser, Basel, 1996.