UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sergio Tsuyoshi Ura

Duas involuções comutantes fixando certas variedades de Dold e certas uniões de espaços projetivos relativos a anéis diferentes

São Carlos - SP
Abril de 2015

O presente trabalho teve suporte financeiro da FAPESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sergio Tsuyoshi Ura

Bolsista Fapesp
Processo 06/61800-0

Orientador: Prof Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Duas involuções comutantes fixando certas variedades de Dold e certas uniões de espaços projetivos relativos a anéis diferentes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Topologia Algébrica

São Carlos - SP
Abril de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

	Ura, Sergio Tsuyoshi.
U72di	Duas involuções comutantes fixando certas variedades de Dold e certas uniões de espaços projetivos relativos a anéis diferentes / Sergio Tsuyoshi Ura. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
	129 f.
	Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.
	1. Topologia algébrica. 2. Grupos abelianos. 3. Classificação. 4. Espaços projetivos. I. Título.
	CDD: 514.2 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Sérgio Tsuyoshi Ura, realizada em 01/04/2015:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
UFSCar

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
USP

Prof. Dr. Dirk Toben
UFSCar

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
UFSCar

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto
USP

A meus pais.

Agradecimentos

Aos meus pais, Makoto Ura e Kiyoka Ura, e à toda minha família que sempre me apoiaram.

A todos os meus professores, que forneceram as bases para que pudesse chegar até aqui. Ao Prof. Dr. Pedro Pergher, pela atenção e dedicação na confecção deste trabalho. Aos meus amigos que sempre me incentivaram.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para esta tese.

Resumo

Seja $(M;\Phi)$ uma ação C^∞ de $\mathbb{Z}_2^2$ em uma variedade C^∞, fechada e de dimensão m, com conjunto de pontos fixos $F = \bigcup_{j=0}^{m} F^j$, onde F^j representa a união das componentes de F de dimensão j. Dada uma certa F, podemos perguntar quais são todas as ações que possuem F como conjunto de pontos fixos (quanto existirem), a menos de cobordismo equivariante. Neste trabalho obtemos tais classificações quando quando F é uma variedade de Dold do tipo $P(1, 2n+1)$ ou quando F é união de dois espaços projetivos da forma $K_dP(m) \cup K_eP(2n+1)$, com $d, e \in \{1, 2, 4\}$ e $d < e$. Em particular, este últimos casos de uniões de projetivos referem-se a problemas que ficaram em aberto em [2]. O ponto crucial no que se refere a tais classificações foi uma melhoria por nós obtida referente ao resultado de Pedro Pergher ([22], Teorema 1), o qual estabelecia condições para que uma coleção de três fibrados pudesse ser realizado como o fixed data de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$. Especificamente, tornamos tais condições mais eficiente computacionalmente, ao eliminar uma das condições, que era computacionalmente a mais complicada. Isto possibilitou que nas classificações citadas fossem detectadas certas ações exóticas com os mencionados conjuntos de pontos fixos (vide definição 1.9.15).

Abstract

Let $(M;\Phi)$ be a smooth action of $\mathbb{Z}_2^2$ on a closed, smooth and m-dimensional manifold, with fixed point set $F = \bigcup_{j=0}^{m} F^j$, where F^j means the union of the components of F of dimension j. Given such a F, we can ask for the actions that have F as fixed point set, and in the positive case we have the question of the cobordism classification of such actions. In this work we obtain such classifications when F is a Dold manifold of the form $P(1, 2n+1)$, and when F is the disjoint union of two projectives spaces of the form $K_dP(m) \cup K_eP(2n+1)$, with $d, e \in \{1, 2, 4\}$ and $d < e$. In particular, this last case is concerning questions leaved open in [2]. The crucial point concerning such classifications was an improvement refering to the Pergher's result ([22], Theorem 1), which established conditions on a collection of three vector bundles in such a way it can be realized as the fixed data of some $\mathbb{Z}_2^2$-action. Specifically, we become such conditions more efficient in computational terms, by removing one of the conditions, specifically the more complicated. This possibilited to detect certain exotic actions (see the definition 1.9.15) in the mentioned classifications.

Sumário

Introdução

Sejam M^n uma variedade n-dimensional suave e fechada, isto é, compacta e sem bordo e $T : M^n \to M^n$ uma involução suave, ou seja, $T \circ T = Id$.

É conhecido que o conjunto de pontos fixos de T, $F = \{x \in M^n; T(x) = x\}$, é ou vazio ou uma união finita e disjunta de subvariedades fechadas de M^n, com a dimensão de cada uma dessas subvariedades podendo assumir qualquer valor entre 0 e n. Podemos então usar a notação $F = \bigcup_{i=1}^{n} F^i$, onde F^i denota a união das componentes de F de dimensão i. As componentes 0-dimensionais constituem um conjunto finito de pontos, enquanto as componentes n-dimensionais são componentes conexas de M^n em que T atua como a função identidade.

Escolhendo a priori uma coleção finita de variedades fechadas e suaves, com dimensões variando de 0 a n, e considerando sua união disjunta $F = \bigcup_{i=1}^{n} F^i$, uma questão neste contexto é se F pode ou não ser realizado como o conjunto de pontos fixos de alguma involução $(M^m; T)$, com $m \geq n$. Caso isso seja possível, outra questão seria a classificação dos pares $(M^m; T)$ com esta propriedade.

Como a classificação de variedades M^m a menos de difeomorfismo para $m \geq 3$ é um problema praticamente inacessível, isto também acontece com o problema da classificação, a menos de difeomorfismo equivariante, dos pares $(M^m; T)$ em pauta. Desta forma, a relação de equivalência mais branda introduzida por Conner e Floyd, dada pelo cobordismo equivariante, é uma abordagem mais plausível na busca de respostas para a questão atrás formulada e, de fato, mostrou-se bastante efetiva. Em outras palavras, a questão é referente à classificação, a menos de cobordismo equivariante dos pares $(M^m; T)$ com tal propriedade.

Nesta direção, alguns resultados sobre tal tipo de classificação podem ser encontrados nos trabalhos listados abaixo:

(i) Quando $F = \mathbb{RP}(2n+1)$, a classificação foi obtida por P. E. Conner e E. Floyd em ([8], 1964), e o caso $F = \mathbb{RP}(2n)$ foi obtido por R. E. Stong em ([30], 1966).

(ii) Em ([29], 1980) D. C. Royster estudou este problema quando F é a união de dois espaços projetivos reais. A classificação foi feita caso a caso, dependendo da paridade das dimensões dos espaços projetivos, com argumentos especiais quando uma das componentes era $\mathbb{RP}(0) = \{ponto\}$, e deixando o caso em que ambas as dimensões são pares em aberto.

(iii) Em ([31], 1993) Stong estudou o caso em que F é uma união de uma quantidade finita e arbitrária de produtos cartesianos finitos arbitrários da circunferência S^1.

(iv) D. Hou e B. Torrence estudaram o caso em que F é uma união de uma quantidade arbitrária de espaços projetivos reais de dimensão ímpar em ([12], 1994), e quando F é uma união arbitrária de espaços projetivos de dimensão par, todos com mesma dimensão em ([13], 1996).

(v) Em ([39], 2004) e ([38], 2002) Zhi Lu estudou o caso em que F é a união de um espaço projetivo real com uma variedade de Dold.

(vi) Em ([14], tese de doutorado, 2002) R. de Oliveira estudou o caso em que $F = \mathbb{RP}(2) \cup \mathbb{RP}(4j+2)$, e em ([15], 2007) R. de Oliveira, P. L. Q. Pergher e A. Ramos o caso $F = \mathbb{RP}(2) \cup \mathbb{RP}(2j)$.

(vii) Em ([28], tese de doutorado, 2007) e ([26], 2009) A. Ramos e P. L. Q. Pergher estudaram o caso em que $F = \mathbb{RP}(2^s) \cup \mathbb{RP}(2n)$ e estenderam o trabalho de Royster para o caso em que F é a união disjunta de dois espaços projetivos complexos ou quaterniônicos.

Outra questão no contexto de cobordismo equivariante é a classificação, a menos de cobordismo equivariante, de ações de $\mathbb{Z}_2^k$, $(M^n; \Phi)$, fixando F. No caso, uma tal ação é entendida como uma coleção ordenada $T_1, T_2, \ldots, T_k : M^n \to M^n$ de involuções suaves e comutantes duas a duas, e $F = \{x \in M^n; T_i(x) = x, \forall i = 1, \ldots, k\}$ é como no caso $k = 1$, uma união finita e disjunta de subvariedades fechadas de M^n.

Para certas F, a classificação para $k = 1$ determina completamente a classificação correspondente para todo $k \geq 1$. Especificamente, a partir de uma involução

$(M^n; T)$, é possível fabricar um conjunto de ações de $\mathbb{Z}_2^k$ com o mesmo conjunto de pontos fixos de T, usando algumas operações que serão descritas neste trabalho na seção 1.9. Para as F em pauta, ocorre que se $\mathcal{A}$ é o conjunto de classes de cobordismo de involuções fixando F, então o conjunto de classes de cobordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$ fixando F é obtido a partir de $\mathcal{A}$ usando operações mencionadas. Se, ao contrário, dada F, existe ação de $\mathbb{Z}_2^k$, $(M^m; \Phi)$, a qual não é obtida desta forma, costumamos chamá-la de *"exótica"*. Por exemplo, o fato de o caso $k = 1$ determinar completamente o caso $k \geq 1$ ocorre com $\mathbb{RP}(2n)$, $\mathbb{C}P(2n)$, $\mathbb{H}P(2n)$ e $\mathbb{Q}P(2)$, os espaços projetivos real, complexo, quaterniônico ou o plano projetivo de Cayley ([5], [24]); isto também é verdadeiro quando F é a união de um ponto e uma variedade fechada conexa de dimensão maior que zero ou quando F é a união de um ou dois espaços com propriedade $\mathcal{H}$ ([24] e [25]), entre os quais se encontram os espaços projetivos da forma $\mathbb{RP}(2n)$, $\mathbb{C}P(2n)$ e $\mathbb{H}P(2n)$. O conceito de propriedade $\mathcal{H}$ foi introduzido por P. Pergher e R. de Oliveira em [24]; uma variedade F^n conexa, suave e fechada satisfaz a propriedade $\mathcal{H}$ se ela pode somente ser realizada como conjunto de pontos fixos de involuções em codimensões 0 e n, e no caso isso sempre é possível considerando-se as involuções $(M^n; Id)$ e $(M^n \times M^n; twist)$.

Em ([2], tese de doutorado), A. E. R. de Andrade estende o trabalho de Royster e A. Ramos no sentido de classificar as ações de $\mathbb{Z}_2^k$ fixando a união de dois espaços projetivos reais, complexos ou quaterniônicos. Também neste trabalho, A. E. R. de Andrade classifica ações de $\mathbb{Z}_2^2$ considerando alguns casos onde F é a união de dois espaços projetivos relacionados a anéis distintos, isto é, F do tipo $\mathbb{RP}(m) \cup \mathbb{C}P(n)$, $\mathbb{C}P(m) \cup \mathbb{H}P(n)$ e $\mathbb{RP}(m) \cup \mathbb{H}P(n)$. Especificamente, F do tipo $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n)$ com $d < e$, onde $K_cP(j)$ representa o espaço projetivo real, complexo ou quaterniônico quando $c = 1, 2,$ ou 4, respectivamente.

Neste trabalho, completamos a classificação obtida por A. E. R. de Andrade, a menos de cobordismo equivariante, das ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando F do tipo $K_dP(m) \cup K_eP(n)$ com $d < e$, com exceção de quando m e n são simultaneamente pares, caso cuja classificação para involuções ainda se encontra em aberto, em geral. Ou seja, os casos não resolvidos por A. E. R. de Andrade, concernente a ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $K_dP(m) \cup K_eP(2n+1)$, m

par ou ímpar, sendo que $d < e$, foram completamente resolvidos. Ressaltamos que no caso em que m e n são pares, cujo caso $k = 1$ continua em aberto, nada resta a fazer a não ser resolver o caso $k = 1$, uma vez que para tal F o caso $k = 1$ determina completamente o caso $k \geq 1$. Não é o que ocorre com os casos por nós considerados (e também por A. E. R. de Andrade), uma vez que, como veremos, surgiram várias ações exóticas. Quando $F = K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$ surgem as ações $[(N_l', S', T')]$, e no caso $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, as ações $[\Lambda^1(\gamma)]$ e $[\Lambda^2(\gamma)]$. Também apresentamos a classificação, a menos de cobordismo, de involuções e ações de $\mathbb{Z}_2^2$ classificando variedades de Dold do tipo $P(1, 2n+1)$. Novamente aqui ocorreram ações exóticas, denotadas por $[(N_k, \Psi_k)]$. Ressaltamos que na literatura não existem ainda trabalhos envolvendo a classificação de involuções e ações de $\mathbb{Z}_2^k$ quando F consiste de uma única componente, a qual é uma variedade tipo Dold.

A classificação foi possível através da aplicação da sequência exata de bordismo de $(\mathbb{Z}_2^k, q)$-variedades de Stong [31], que diz que a classe de bordismo equivariante de uma ação é completamente determinada pela classe de cobordismo simultâneo de uma lista específica de fibrados, chamado de *fixed-data* da ação, e de um teorema de Pergher encontrado em ([22], Teorema 1), que nos diz quando uma lista de três fibrados é de fato o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$. Os dois resultados juntos formam um análogo para a conhecida sequência de Conner-Floyd [8] para ações de $\mathbb{Z}_2^2$. Também várias técnicas computacionais desenvolvidas nos diversos trabalhos da literatura de P. Pergher e seus colaboradores foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Mas, de fato, o ponto crucial foi o resultado obtido por P. Pergher, Sergio Ura e Allan E. R. de Andrade, o qual se trata de uma melhoria do resultado acima citado de P. Pergher ([22], Teorema 1). Conforme mencionado, este teorema de Pergher determina quatro condições em termos de números de Whitney para que uma coleção de três fibrados vetoriais seja o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$. Dentre tais quatro condições, uma é bem complicada em termos computacionais, enquanto as três restantes são mais simples. Nossa melhoria consistiu em mostrar que as três condições mais simples implicam na mais complicada, a qual pode então ser descartada no teorema de Pergher. Em termos computacionais, este fato foi crucial no que se refere a detectar os casos exóticos que surgiram, uma vez que com as ferramentas até então existentes a única opção possível seria tentar descartar a exoticidade, o que seria impossível porque os modelos exóticos existem concretamente, fazendo parte da classificação procurada.

Ressaltamos que, conforme visto na tese de doutorado de A. E. R. de Andrade, quando os dois espaços projetivos são relativos ao mesmo anel, ações exóticas não ocorrem. Essa simplificação propiciou a A. E. R. de Andrade obter a classificação para todo $k \geq 1$, e não só no caso $k = 2$. Para tanto, A. E. R. de Andrade usou de forma crucial alguns resultados de P. Pergher e R. de Oliveira de [24]. A ocorrência de ações exóticas impede o uso de tais ferramentas de P. Pergher e R. de Oliveira, o que nos limitou ao caso $k = 2$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Cobordismo de Variedades

Definição 1.1.1 (Bordismo e Cobordismo de Variedades). *Diremos que uma variedade fechada n-dimensional M^n* borda*, se existir uma variedade $(n+1)$-dimensional compacta com bordo, W^{n+1}, cujo bordo ∂W^{n+1} é difeomorfo a M^n. Diremos que duas variedades n-dimensionais M^n e N^n* cobordam *ou* são cobordantes *se sua união disjunta $M^n \sqcup N^n$ borda.*

A relação de cobordismo é uma relação de equivalência no conjunto das variedades fechadas. Denotamos por $[M^n]$ a classe de equivalência de M^n, denominada *classe de cobordismo de M^n*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{N}_n$ o conjunto das classes de cobordismo das variedades n-dimensionais.

A união disjunta entre variedades n-dimensionais induz uma operação bem-definida em $\mathcal{N}_n$, provendo uma estrutura de grupo abeliano cujo elemento neutro é $[S^n]$:

$$[M^n] + [N^n] = [M^n \sqcup N^n]$$

Denotaremos a soma direta $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n$ por $\mathcal{N}_*$.

Proposição 1.1.2. *O produto cartesiano de variedades induz uma operação de produto em $\mathcal{N}_*$, que nos elementos homogêneos é definida por $[M^n] \cdot [V^m] = [M^n \times V^m]$. Com esta operação, $\mathcal{N}_*$ tem estrutura de anel comutativo com unidade, conhecido como* o anel de bordismo não orientado de Thom*. A unidade é a classe de cobordismo das variedades 0-dimensionais não nula, $[\{*\}]$, especificamente a classe cujos representantes são quantidades ímpares de pontos.*

$\square$

Observação 1.1.3. *Fixada uma variedade fechada M^n, existe uma única classe de homologia não nula em $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$, chamada* classe fundamental de homologia módulo 2, *que denotaremos por $\sigma(M^n)$.*

Sejam $\tau \to M^n$ o fibrado tangente a M^n com classe de Stiefel-Whitney $W(\tau) = 1 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$.

Observação 1.1.4. *Tomando inteiros não negativos $r_1, r_2, \ldots, r_n$, com $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$, podemos formar o monômio $\omega_1(\tau)^{r_1} \cdot \omega_2(\tau)^{r_2} \cdots \omega_n(\tau)^{r_n}$, o qual é uma classe de cohomologia em $H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$.*

Definição 1.1.5. *O inteiro módulo 2 obtido pela evaluação*

$$\langle \omega_{i_1}(\tau) \cdot \omega_{i_2}(\tau) \cdots \omega_{i_r}(\tau),\ \sigma(M^n) \rangle$$

é chamado o número de Stiefel-Whitney *ou o* número característico *de M^n associado a $\omega_{i_1}(\tau) \cdot \omega_{i_2}(\tau) \cdots \omega_{i_r}(\tau)$.*

Associada a uma variedade fechada M^n, existe uma coleção de inteiros módulo 2, obtida ao considerarmos todos os possíveis monômios $\omega_{i_1}(\tau) \cdot \omega_{i_2}(\tau) \cdots \omega_{i_r}(\tau)$, com $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n$, conforme especificado acima.

Dizemos que duas variedades fechadas M^n e V^n possuem os mesmos números de Whitney se

$$\langle \omega_{i_1}(\tau_{M^n}) \cdot \omega_{i_2}(\tau_{M^n}) \cdots \omega_{i_r}(\tau_{M^n}), \sigma(M^n) \rangle = \langle \omega_{i_1}(\tau_{V^n}) \cdot \omega_{i_2}(\tau_{V^n}) \cdots \omega_{i_r}(\tau_{V^n}), \sigma(V^n) \rangle$$

para toda sequência $i_1, i_2, \ldots, i_r$, com $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n$.

Teorema 1.1.6 ([35])**.** *Seja M^n uma variedade fechada n-dimensional. A variedade M^n borda se, e somente se, todos os seus números de Stiefel-Whitney são nulos.*

□

Corolário 1.1.7. *Sejam M^n e V^n duas variedades fechadas de mesma dimensão. Então M^n e V^n são cobordantes se, e somente se, todos os números de Stiefel-Whitney correspondentes forem iguais.*

Teorema 1.1.8 ([35]). *$\mathcal{N}_*$ tem estrutura de álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$, com um gerador em cada dimensão $n \neq 2^j - 1$.*

□

1.2. Cobordismo Singular

Seja X um espaço topológico fixado. Uma variedade singular em X é um par (M^n, f), onde M^n é uma variedade fechada de dimensão n e f é uma função contínua $f : M^n \to X$.

Definição 1.2.1. *Diremos que uma variedade singular (M^n, f)* borda *se existir uma variedade W^{n+1} compacta com bordo $\partial W^{n+1} = M^n$ e uma função contínua $F : W^{n+1} \to X$ cuja restrição $F|_{M^n}$ é igual a f.*

Seja X um espaço topológico e sejam (M^n, f) e (N^n, g) variedades singulares em X. Denotamos por $f \sqcup g$ a função $f \sqcup g : M^n \sqcup N^n \to X$ definida por

$$f \sqcup g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in M^n, \\ g(x) & \text{se } x \in N^n. \end{cases}$$

Definição 1.2.2. *Seja X um espaço topológico e sejam (M^n, f) e (N^n, g) variedades singulares em X. Elas são ditas cobordantes se sua união disjunta $(M^n \sqcup N^n, f \sqcup g)$ borda.*

A relação de cobordismo é uma relação de equivalência entre variedades singulares de mesma dimensão. Denotaremos por $[(M^n, f)]$ a classe de equivalência de uma variedade singular (M^n, f) e por $\mathcal{N}_n(X)$ o conjunto das classes de equivalência das variedades singulares de dimensão n.

Definimos em $\mathcal{N}_n(X)$ uma operação de soma:

$$[(M^n, f)] + [(N^n, g)] = [(M^n \sqcup N^n, f \sqcup g)],$$

que o torna um grupo abeliano, chamado o *grupo de bordismo n-dimensional não orientado de X*. Um representante para o elemento neutro é uma variedade singular (M^n, f) onde M^n borda e f é constante.

Definição 1.2.3. *Denotamos a soma direta* $\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}_n(X)$ *por* $\mathcal{N}_*(X)$.

Proposição 1.2.4. *Munimos* $\mathcal{N}_*(X)$ *com uma operação tornando-o um* $\mathcal{N}_*$*-módulo graduado. Esta operação é definida nos elementos homogêneos da seguinte forma: Dados* $[M^m] \in \mathcal{N}_m$ *e* $[(N^n, g)] \in \mathcal{N}_n(X)$,

$$[M^m] \cdot [(N^n, g)] := [(M^m \times N^n, g \circ \pi_2)] \in \mathcal{N}_{m+n}(X),$$

onde π_2 *é a projeção na segunda coordenada.*

$\square$

Observação 1.2.5. *Quando* $X = \{ponto\}$, *existe um isomorfismo natural* $\mathcal{N}_*(X) \cong \mathcal{N}_*$ *definido por* $[(M^n, f)] \mapsto [M^n]$.

Seja (M^n, f) uma variedade singular em X. Associamos a (M^n, f) certos números módulo 2, de forma a estender o que já foi feito para os elementos de $\mathcal{N}_*$:

Para cada classe de cohomologia $h \in H^m(X, \mathbb{Z}_2)$ e partição $i_1+i_2+\cdots+i_r = n-m$, obtemos o inteiro, módulo 2,

$$\omega_{i_1}(\tau) \cdot \omega_{i_1}(\tau) \cdots \omega_{i_r}(\tau) \cdot f^*(h)[M^n]_2$$

ou, resumidamente,

$$\omega_{i_1} \cdot \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_r} \cdot f^*(h)[M^n].$$

Definição 1.2.6. *Tais números são denominados* números de Whitney*(ou* números característicos*)* de f, associados a h, *e são os números de* Stiefel-Whitney *de* M^n *usuais quando* $h = 1 \in H^0(M^n, \mathbb{Z}_2)$.

Teorema 1.2.7. *[8] Seja* X *um CW-complexo finito em cada dimensão. Uma variedade singular em* X, (M^n, f), *borda, se e somente se todos os seus números característicos são nulos.*

$\square$

Corolário 1.2.8. *Seja* X *um CW-complexo finito em cada dimensão. Duas variedades singulares em* X *são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.*

1.3. Cobordismo de Fibrados

Sejam M^n e V^n variedades fechadas n-dimensionais e $\xi^k \to M^n$ e $\eta^k \to V^n$ fibrados vetoriais k-dimensionais sobre M^n e V^n, respectivamente.

Definição 1.3.1. *Diremos que o fibrado $\xi^k \to M^n$* borda *se existir um fibrado vetorial k-dimensional $\nu^k \to W^{n+1}$ tal que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\nu^k|_{M^n} = \xi^k$. Os fibrados $\xi^k \to M^n$ e $\eta^k \to V^n$ são ditos* cobordantes *se sua união disjunta $(\xi^k \to M^n) \sqcup (\eta^k \to V^n)$ borda.*

A relação de cobordismo de fibrados é uma relação de equivalência na coleção de fibrados k-dimensionais sobre variedades fechadas n-dimensionais. Denotamos a classe de cobordismo de $\xi^k \to M^n$ por $[\xi^k \to M^n]$, ou simplesmente por $[\xi^k]$. A coleção formada por todas tais classes torna-se um grupo abeliano através da união disjunta, no qual todo elemento tem ordem 2, e torna-se um $\mathcal{N}_*$-módulo através da operação

$$[V^m] \cdot [\xi^k \to M^n] = [p_2^!(\xi^k) \to V^m \times M^n],$$

onde $p_2 : V^m \times M^n \to M^n$ é a projeção na segunda coordenada e $p_2^!(\xi^k)$ denota o *pullback* de ξ^k por p_2.

Associado a cada fibrado $\xi^k \to M^n$, temos uma função $f : M^n \to BO(k)$, com a propriedade de que o *pullback* $f^!\zeta^k \to M^n = \xi^k \to M^n$, onde $\zeta^k \to BO(k)$ é o fibrado universal k-dimensional e $BO(k)$ é o espaço classificante para fibrados k-dimensionais. A menos de homotopia, esta função é única com esta propriedade, e é chamada *função classificante* do fibrado.

Esta associação induz uma bijeção, a nível de classes de equivalência de cobordismo, $[\xi^k \to M^n] \leftrightarrow [M^n, f]$ com o grupo de cobordismo singular $\mathcal{N}_n(BO(k))$. Além disso, essa associação é um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos.

Desta forma, como $B0(k)$ é um CW-complexo finito em cada dimensão, um elemento $[\xi^k \to M^n]$ é completamente determinando por seus números característicos. Para ver como são tais números nesse caso específico, se f é uma função classificante para

ξ^k, para cada $h \in H^m(BO(k))$ e partição $i_1 + \cdots + i_s = n - m$, temos o número :

$$\langle \omega_{i_1}(M^n) \ldots \omega_{i_s}(M^n) f^*(h),\ \sigma(M^n) \rangle.$$

$H^*(BO(k))$ é uma álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[v_1, v_2, \ldots, v_k]$, onde v_i é a i-ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal k-dimensional $\nu^k \to BO(k)$. Assim, h é da forma $\sum v_{j_1} \cdots v_{j_l}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} f^*(h) &= \sum f^*(v_{j_1}) \cdots f^*(v_{j_l}) \\ &= \sum \omega_{j_1}(\xi^k) \cdots \omega_{j_l}(\xi^k). \end{aligned}$$

Logo, os números característicos da forma

$$\langle \omega_{i_1}(M^n) \ldots \omega_{i_s}(M^n) \omega_{j_1}(\xi^k) \cdots \omega_{j_l}(\xi^k), \sigma(M^n) \rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

com $i_1 + \cdots + i_s + j_1 + \cdots j_l = n$, caracterizam completamente a classe de cobordismo do fibrado $\xi^k \to M^n$. Em outras palavras, $\xi^k \to M^n$ borda se, e só se, todos tais números são nulos, e dois fibrados vetoriais são cobordantes se, e somente se, possuírem todos os números característicos correspondentes iguais.

1.4. Cobordismo Equivariante

Sejam G um grupo de Lie compacto fixado. Sejam M^n uma variedade n-dimensional compacta e $\Phi : G \times M^n \to M^n$ uma ação C^∞ de G em M^n.

Denotaremos uma tal ação por $(M^n; \Phi)$.

Definição 1.4.1. *Se M^n é suave e fechada, uma ação $(M^n; \phi)$* borda equivariantemente *se existe variedade suave compacta W^{n+1} tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e uma ação $(W^{n+1}; \Psi)$ que $\Psi_{|M^n} = \Phi$. Duas ações $(M^n; \Phi)$ e $(V^n; \Psi)$ são G-*cobordantes *ou* equivariantemente cobordantes *se sua união disjunta $(M^n \sqcup V^n; \Phi \sqcup \Psi)$ borda equivariantemente.*

A relação de cobordismo equivariante é uma relação de equivalência, e denotamos por $\mathcal{I}_n(G)$ a coleção das classes de cobordismo das G-ações em variedades fechadas n-dimensionais.

Definimos em $\mathcal{I}_n(G)$ uma operação induzida pela união disjunta, com a qual $\mathcal{I}_n(G)$ se torna um grupo, chamado de *grupo de G-cobordismo irrestrito n-dimensional*:

$$[M^n; \Phi] + [V^n; \Psi] = [M^n \sqcup V^n; \Phi \sqcup \Psi].$$

Quando exigimos que todas as ações em jogo sejam livres, o conjunto de tais classes é chamado de *grupo de G-cobordismo principal n-dimensional*, denotado por $\mathcal{N}_n(G)$.

Notação 1.4.2. *Denotamos a soma direta* $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_j(G)$ *por* $\mathcal{I}_*(G)$ *e a soma direta* $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j(G)$ *por* $\mathcal{N}_*(G)$.

Definição 1.4.3. *Definimos um produto por escalar em* $\mathcal{I}_*(G)$ *que o torna um* $\mathcal{N}_*$*-módulo:*

$$[M^n] \cdot [(V^m; \Phi)] = [(M^n \times V^m; \Psi)]$$

onde $\Psi : G \times (M^n \times V^m) \to M^n \times V^m$ *é definida por* $\Psi(g, (x, y)) = (x, \Phi(g, y))$.

A mesma operação torna $\mathcal{N}_*(G)$ *um* $\mathcal{N}_*$*-módulo.*

1.5. Sequência de Conner-Floyd

Durante esta seção, particularizaremos as considerações da seção anterior para $G = \mathbb{Z}_2$. Assim, $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$, o grupo de $\mathbb{Z}_2$-bordismo principal, é o grupo abeliano formado pelas classes $[M^n; \Phi]$, onde M^n é uma variedade fechada e $\Phi : \mathbb{Z}_2 \times M^n \to M^n$ é uma ação livre e suave. Tal ação equivale a existir uma involução sem pontos fixos $T : M^n \to M^n$, onde $T(x) = \Phi(-1, x)$.

Por conveniência, usaremos a notação $[(M^n; T)] \in \mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ ao invés de $[M^n; \Phi]$.

Seja $(M^n; T)$ uma involução sem pontos fixos, e considere o fibrado linha trivial $M^n \times \mathbb{R} \xrightarrow{p} M^n$. Definimos uma involução sem pontos fixos T' em $M^n \times \mathbb{R}$ por $T'(x, t) = (T(x), -t)$, que tem a propriedade de $p \circ T' = T \circ p$.

Definição 1.5.1. *Definimos o* fibrado linha canônico associado a T *como sendo o fibrado*

$$\begin{array}{c} \lambda = (M^n \times \mathbb{R})/T' \\ \downarrow^{p'} \\ M^n/T, \end{array}$$

onde p' é a projeção induzida por p nas classes de equivalência.

Teorema 1.5.2. *[8] A correspondência $[(M^n;T)] \mapsto [\lambda \to M^n/T]$ independe dos representantes das classes de equivalência e induz um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$.*

□

Observação 1.5.3. *Pelo teorema acima, a classe de cobordismo de uma involução sem pontos fixos $(M^n;T)$ é completamente caracterizada pelos números característicos do fibrado linha canônico associado a T, $\lambda \to M/T$.*

Definição 1.5.4. *Chamamos os números acima de* números característicos da involução $(M^n;T)$.

Sejam V^n uma variedade fechada e $\xi^k \to V^n$ um fibrado vetorial com fibra de dimensão k sobre V^n. Existe o fibrado em esferas $S(\xi^k) \to V^n$, com fibra S^{k-1} e espaço total uma variedade fechada de dimensão $n+k-1$. A aplicação antipodal $A : S^{k-1} \to S^{k-1}$ induz uma involução T em $S(\xi^k)$, atuando como a antípoda em cada fibra.

Definição 1.5.5. *O par $(S(\xi^k);T)$ é chamado de o* fibrado involução associado a ξ^k.

Proposição 1.5.6. *Sejam V^n uma variedade fechada e $\xi^k \xrightarrow{p} V^n$ um fibrado vetorial k-dimensional sobre V^n. A projeção p induz a projeção p' no quociente $\mathbb{RP}(\xi^k) = S(\xi^k)/T$ tal que $\mathbb{RP}(\xi^k) \xrightarrow{p'} V^n$ é um fibrado, com fibra $\mathbb{RP}^{k-1}$.*

□

Definição 1.5.7. *O fibrado descrito na proposição acima é chamado* fibrado projetivo associado a ξ^k.

Seja $(M^n;T)$ uma involução com conjunto de pontos fixados F. Cada parte conexa de F é uma subvariedade fechada de M^n, e podemos escrever $F = \bigsqcup_{k=0}^{n} F^k$, onde cada F^k denota a união disjunta das componentes k-dimensionais de F.

Definição 1.5.8. *Denotamos por η^{n-k} o fibrado normal de F^k em M^n e por $\eta \to F$ a união $\bigcup_{k=0}^{n}(\eta^{n-k} \to F^k)$.*

Definição 1.5.9. *Definimos $\mathcal{M}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{N}_n(BO(n-k))$ e $\mathcal{M}_* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k$.*

Para cada k, a classe $[\eta^{n-k} \to F^k]$ pode ser interpretada como um elemento de $\mathcal{N}_n(BO(n-k))$.

Assim, denotando $[\eta \to F] = \bigcup_{k=0}^{n}[\eta^{n-k} \to F^k]$, segue que $[\eta \to F] \in \mathcal{M}_*$.

Proposição 1.5.10. *A associação $(M^n;T) \mapsto (\eta \to F)$ induz um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos $j_* : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{M}_*$*

□

Associado a cada fibrado $\xi \to M^n$, temos a involução sem pontos fixos $(S(\xi);A)$, onde $S(\xi)$ é o espaço total do fibrado em esferas de $\xi \to M^n$ e A é a involução antipodal em cada fibra.

Isto induz um homomorfismo $\partial : \mathcal{M}_* \to \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$

Proposição 1.5.11. ***(Sequência de Conner-Floyd, [8])*** *A sequência*

$$0 \to \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \mathcal{M}_* \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2) \to 0$$

é exata.

Dem.: Vide [8] p. 88

□

Dada uma involução $(M^n;T)$ com conjunto de pontos fixos F, a proposição acima nos diz que j_* é injetor, o que implica que a classe de cobordismo do fibrado normal $\eta \to F$ determina completamente a classe de cobordismo de $(M^n;T)$.

Definição 1.5.12. *Chamamos $\eta \to F$ de* fixed-data da involução $(M^n;T)$.

Corolário 1.5.13. *Um fibrado $\eta \to F$ é* fixed-data *de uma involução $(M^n;T)$ se, e somente se, $\partial[\eta \to F] = 0$.*

Corolário 1.5.14. *Um conjunto de fibrados do tipo $(\eta \to F) = \bigcup_{k=0}^{n}(\eta^{n-k} \to F^k)$ é o* fixed-data *de uma involução se, e somente se, todos os números de Stiefel-Whitney do fibrado linha $\gamma \to \mathbb{RP}(\eta)$ são nulos.*

Corolário 1.5.15. *Duas involuções $(M^n;T)$ e $(V^n;S)$ são cobordantes se, e somente se, seus respectivos* fixed-data, *$\eta \to F_T$ e $\eta' \to F_S$, são cobordantes. Ou seja, duas involuções são cobordantes se, e somente se, seus* fixed-data *possuem os números característicos correspondentes iguais.*

Observação 1.5.16. *Suponha que $\eta \to F = (\eta^{n-i} \to F^i) \cup (\eta^{n-j} \to F^j)$ seja* fixed-data *de uma involução.*

(a) *Se $\eta^{n-i} \to F^i$ é* fixed-data *de uma involução, então $\eta^{n-j} \to F^j$ também o é.*

(b) *Se $(\eta^{n-i} \to F^i) \cup (R^n \to \{pto\})$ é* fixed-data *de uma involução, então $(\eta^{n-j} \to F^j) \cup (R^n \to \{pto\})$ também o é, onde R^n denota a soma de Whitney de n cópias de n cópias do fibrado trivial 1-dimensional.*

1.6. Estrutura de $H^*(\mathbb{RP}(\nu^k),\mathbb{Z}_2)$, Teorema de Borel-Hirzebruch e Fórmula de Conner

Seja $\eta^k \to F^n$ um fibrado vetorial k-dimensional, com $k \geq 1$, sobre uma variedade fechada conexa n-dimensional e com classe de Stiefel-Whitney igual a

$$W(\eta^k) = 1 + v_1 + \cdots + v_k.$$

Tome o fibrado em esferas $S(\eta^k) \to F^n$ com fibra S^{k-1} e considere a involução T no espaço total $S(\eta^k)$ induzida pela involução antipodal em cada fibra.

Associados a esta involução temos o espaço quociente $\mathbb{RP}(\eta^k)$, o fibrado quociente $\mathbb{RP}(\eta^k) \to F^n$ com fibra $\mathbb{RP}(k-1)$ e o fibrado linha $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta^k)$.

O fibrado linha $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta^k)$ tem classe de Stiefel-Whitney $W(\lambda) = 1+\omega_1(\lambda)$ e a propriedade de que a restrição a cada fibra $\mathbb{RP}(k-1)$ é igual ao fibrado linha canônico. Por simplicidade, denotamos $\omega_1(\lambda) = c$.

Se $\mathbb{RP}(k-1) \subset \mathbb{RP}(\eta^k)$ representa uma fibra, o fibrado linha $\ell \to \mathbb{RP}(k-1)$ é o *pullback* de $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta^k)$ pela função inclusão e, pela naturalidade das classes de Whitney, a imagem de $c \in H^1(\mathbb{RP}(\eta^k); \mathbb{Z}_2)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{RP}(k-1); \mathbb{Z}_2)$. Pelo homomorfismo induzido pela projeção, $p^* : H^*(F^n; \mathbb{Z}_2) \to H^*(\mathbb{RP}(\eta^k); \mathbb{Z}_2)$, podemos considerar $H^*(\mathbb{RP}(\eta^k); \mathbb{Z}_2)$ como um módulo graduado sobre o anel $H^*(F^n; \mathbb{Z}_2)$. Aplicando o Teorema de Leray-Hirsch, [3] pg 129, $H^*(\mathbb{RP}(\eta^k); \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F^n; \mathbb{Z}_2)$-módulo livre graduado com base $1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}$.

Considere agora o fibrado tangente $\tau \to \mathbb{RP}(\eta^k)$. A projeção $p : \mathbb{RP}(\eta^k) \to F^n$ divide o fibrado tangente em uma soma de Whitney $\tau = \tau_1 \oplus \tau_2$ ([4], pg. 482), onde τ_1 é o *pullback* do fibrado tangente de F^n pela projeção p. A classe de Whitney de τ_1 é igual a $1 + p^*(\omega_1) + \cdots + p^*(\omega_n)$, onde ω_i representa a i-ésima classe de Stiefel-Whitney de F^n. A classe de Whitney de τ_2 foi calculada por Borel-Hirzebruch em [4], pg. 517.

Teorema 1.6.1 (Borel-Hirzebruch [4])**.** *A classe total do fibrado $\tau_2 \to \mathbb{RP}(\eta^k)$ é dado por*

$$(1+c)^m + (1+c)^{m-1}p^*(v_1) + \cdots + p^*(v_k).$$

Como τ_2 é um fibrado vetorial de dimensão $k-1$, temos também que

$$c^k + c^{k-1}p^*(v_1) + c^{k-2}p^*(v_2) + \cdots + p^*(v^k) = 0.$$

□

Corolário 1.6.2. *A classe de Stiefel-Whitney do fibrado tangente a $\mathbb{RP}(\eta^k)$ é expresso da seguinte forma:*

$$(1 + p^*(\omega_1) + \cdots + p^*(\omega_n))\left((1+c)^m + (1+c)^{m-1}p^*(\nu_1) + \cdots p^*(v_k)\right)$$

Por simplicidade, escreveremos a_j no lugar de $p^*(a_j)$, onde $a_j \in H^j(F^n;\mathbb{Z}_2)$. Assim, $H^*(\mathbb{RP}(\eta^k);\mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F^n;\mathbb{Z}_2)$-módulo gerado por $\{1, c, \ldots, c^{k-1}\}$, com relação $c^k = c^{k-1}v_1 + \cdots + v_k$. Logo, se $a_n \in H^n(F^n;\mathbb{Z}_2)$ é tal que $a_n c^{k-1} = 0$, então $a_n = 0$. Em particular, $\langle a_n, \sigma(F^n)\rangle = \langle a_n c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle$.

Seja $\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = 1 + \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \cdots + \overline{v}_n$ a classe dual de $W(\eta^k)$, onde cada $\overline{v}_i$ é um termo homogêneo de grau i. Da equação $\overline{W}(\eta^k) \cdot W(\eta^k) = 1$ obtemos uma fórmula recursiva para $\overline{v}_i$, fixando $\overline{v}_0 = 1$, dada por

$$\overline{v}_i = \sum_{j=1}^{i} v_j \overline{v}_{i-j}.$$

Da relação $c^k = c^{k-1}v_1 + \cdots + v_k$ e da coleção de expressões acima, obtemos as seguintes equações:

$$c^{k+j-1} = \overline{v}_j c^{k-1} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{j,t} c^{k-1-t},$$

para específicos $b_{j,t} \in H^{j+t}(F^n)$.

Em particular,

$$a_s c^{n-s+k-1} = a_s \left(\overline{v}_{n-s} c^{k-1} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{n-s,t} c^{k-1-t} \right) = a_s \overline{v}_{n-s} c^{k-1}.$$

Definição 1.6.3. *Obtemos assim a seguinte fórmula:*

$$\langle a_s c^{n-s+k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = \langle a_s \overline{v}_{n-s}, \sigma(F^n)\rangle,$$

que denominamos Fórmula de Conner

Vide [6] para mais detalhes.

1.7. Bordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$

1.7.1. Bordismo simultâneo de uma lista de fibrados

Denotamos por $(\nu_1, \ldots, \nu_s) \to M$ uma lista ordenada de s fibrados vetoriais sobre uma variedade M.

Definição 1.7.1. *Dizemos que a lista* $(\nu_1, \ldots, \nu_s) \to M$ borda simultaneamente *ou que* borda como lista *se existe uma variedade com bordo W e uma lista de fibrados vetoriais* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_s)$ *sobre* W *tais que* $\partial W = M$ *(ou seja, M borda) e* $\zeta_{i|_M} = \nu_i$ *para cada* $1 \leq i \leq s$.

Definição 1.7.2. *Dadas duas listas* $(\nu_1, \ldots, \nu_s) \to M$ *e* $(\chi_1, \ldots \chi_s) \to N$*, dizemos que elas são* simultaneamente cobordantes *se, e somente se,* $(\nu_1 \sqcup \chi_1, \ldots, \nu_s \sqcup \chi_s) \to M \sqcup N$ *(união disjunta) borda simultaneamente.*

Lema 1.7.3. *O cobordismo simultâneo de fibrados é uma relação de equivalência.*

□

Notação 1.7.4. *Adotaremos as seguintes notações:*

- $[(M; \nu_1, \ldots, \nu_s)]$ a classe de cobordismo simultâneo do elemento $(\nu_1, \ldots, \nu_s) \to M$;
- $\mathcal{N}_{n;r_1,\ldots,r_s}$ o conjunto das classes de equivalência de bordismo simultâneo de listas de s fibrados ordenados, com dimensões $r_1, \ldots, r_s$ sobre variedades n-dimensionais;
- $\mathcal{N}_{*;r_1,\ldots,r_s}$ o conjunto das classes de equivalência de bordismo simultâneo de listas de s fibrados ordenados com dimensões $r_1, \ldots, r_s$, sobre qualquer variedade.

Listas $(\nu_1, \ldots, \nu_s) \to M^n$ estão em correspondência, a menos de cobordismo, com elementos de $\mathcal{N}_n(BO(r_1) \times \cdots \times BO(r_s))$, onde n é a dimensão da base e r_i é a dimensão da fibra de ν_i:

$$[(M^n; \nu_1, \ldots, \nu_s)] \leftrightarrow [(M^n; (f_1, \ldots, f_s))],$$

onde cada função coordenada $f_i : M^n \to BO(r_i)$ é uma função classificante para o fibrado $\nu_i \to M^n$. Esta associação induz uma bijeção

$$\rho : \mathcal{N}_{*;r_1,\ldots,r_s} \to \mathcal{N}_*(BO(r_1) \times \cdots \times BO(r_s)).$$

Teorema 1.7.5. *A aplicação bijetora ρ que associa a cada classe de $\mathcal{N}_{*;r_1,\ldots,r_s}$ um elemento de $\mathcal{N}_*(BO(r_1) \times \cdots \times BO(r_s))$ possibilita induzirmos uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo* *em $\mathcal{N}_{*;r_1,\ldots,r_s}$. Com esta estrutura, $\mathcal{N}_{*;r_1,\ldots,r_s}$, que chamaremos de grupo de bordismo simultâneo, torna-se um $\mathcal{N}_*$-módulo isomorfo a $\mathcal{N}_*(BO(r_1) \times \cdots \times BO(r_s))$ (sendo ρ o isomorfismo).*

$\square$

Observação 1.7.6. *Já vimos em 1.2.8 que a classe $[(M^n; (f_1, \ldots, f_s))]$ é completamente determinada por seus números característicos, e portanto $[(M^n; \nu_1, \ldots, \nu_s)]$ também. Neste caso, as classes usadas para calcular números característicos são produtos que são combinações de classes de Whitney dos fibrados ν_i e da classe de Stiefel-Whitney de M^n.*

Observação 1.7.7. *Note que a definição de cobordismo simultâneo implica que se as listas $(\nu_1, \ldots, \nu_s) \to M$ e $(\chi_1, \ldots \chi_s) \to N$ são simultaneamente cobordantes, então cada fibrado $\nu_i \to M$ é cobordante a $\chi_i \to N$, e em particular, $\dim(\nu_i) = \dim(\chi_i)$. Mas a recíproca não é necessariamente verdadeira, como será visto no exemplo abaixo.*

Exemplo 1.7.8. *Seja $\xi_1^1 \to S^1$ o fibrado linha canônico e consideremos os seguintes fibrados:*

$$\eta = p_1^!(\xi_1^1) \to S^1 \times S^1,$$

$$\chi = p_2^!(\xi_1^1) \to S^1 \times S^1,$$

onde p_1 e p_2 são as projeções. Mostraremos que η e χ bordam, mas a lista $(\eta, \chi) \to M$ não borda simultaneamente.

Denotamos por $\beta_1 \times 1$ e $1 \times \beta_2$ os geradores de $H^1(S^1 \times S^1)$, associados à primeira e segunda cópia de S^1, respectivamente. Sabemos que $W(\xi_1^1) = 1 + \alpha$, $\alpha \in H^1(S^1)$, e que $p_1^*(\alpha) = \beta_1 \times 1$ e $p_2^*(\alpha) = 1 \times \beta_2$. Como $W(\eta) = 1 + p_1^*(\alpha) = 1 + \beta_1 \times 1$ e $W(S^1 \times S^1) = 1$, os números de Whitney de $[\eta; S^1 \times S^1]$ serão todos nulos. (porque a única possibilidade é $(\beta_1 \times 1)^2 = \beta_1^2 \times 1 = 0$)

Analogamente, todos os números de Whitney de $[\chi; S^1 \times S^1]$ serão nulos.

Assim, os fibrados η e χ bordam. Mas temos o número de Whitney de $[(\eta, \chi); S^1 \times S^1]$ dado por

$$\langle \omega_1(\eta)\omega_1(\chi), \sigma(S^1 \times S^1)\rangle \quad = \quad \langle (\beta_1 \times \beta_2), \sigma(S^1 \times S^1)\rangle$$

é não nulo, e portanto $(\eta, \chi) \to S^1 \times S^1$ não borda simultaneamente.

Observação 1.7.9. *Observe também que o cobordismo da definição acima implica que as somas de Whitney $\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_s \to M$ e $\chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_s \to N$ são cobordantes, ou seja, cobordismo simultâneo implica em cobordismo dos fibrados resultantes da soma de Whitney. Mas a recíproca não é necessariamente verdadeira, como pode ser visto no exemplo abaixo.*

Exemplo 1.7.10. *Seja $\xi_1^1 \to S^1$ o fibrado linha canônico. Então $\xi_1^1 \oplus \xi_1^1 \to S^1$ é cobordante a $R \oplus R \to S^1$, como pode ser constatado via cálculo de números característicos, mas $\xi_1^1 \to S^1$ não é cobordante a $R \to S^1$. e portanto a lista $(\xi_1^1, \xi_1^1) \to S^1$ não é simultaneamente cobordante a $(R, R) \to S^1$.*

1.7.2. *Fixed-data* de ações de $\mathbb{Z}_2^k$

Lema 1.7.11. *Seja $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma involução linear isométrica. Os subconjuntos $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^n; S(u) = u\}$ e $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^n; S(u) = -u\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, com $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$.*

□

Sejam $S_1, \ldots, S_k$ involuções lineares comutantes e isométricas em $\mathbb{R}^n$. Para cada inteiro $0 \leq j \leq 2^k - 1$ seja $B_j = b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k$ a representação binária de j com k algarismos. Considere a coleção de sequências $A_j = (a_1, \ldots, a_k)$, sendo $a_i = (-1)^{b_i}$.

Lema 1.7.12. *$\varepsilon_{A_j} = \{v \in \mathbb{R}^n; S_i(v) = a_i v,\ 1 \leq i \leq k\}$, para cada $0 \leq j \leq 2^k - 1$, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, com $\mathbb{R}^n = \oplus_{0 \leq j \leq 2^k - 1} \varepsilon_{A_j}$.*

□

Observação 1.7.13. *Considerando as involuções $S_1, S_2, \ldots, S_k$ como uma ação linear de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{R}^n$, teremos que*

$$\varepsilon_{A_0} = \{v \in \mathbb{R}^n; S_i(v) = v,\ 1 \leq i \leq k\}$$

é o conjunto de pontos fixos desta ação, enquanto

$$\oplus_{1 \leq j \leq 2^k - 1} \varepsilon_{A_j}$$

é o fibrado normal de ε_{A_0} em $\mathbb{R}^n$.

Notação 1.7.14. *Denotamos por*

- $(M;\Phi) = (M;T_1,\ldots,T_k)$ *uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, ou seja, os elementos básicos T_i são involuções sobre M que comutam ;*
- $F_{M;T_i}$ *o conjunto de pontos fixos da involução T_i (usaremos F_{T_i} quando a variedade estiver subentendida);*
- F_Φ *o conjunto de pontos fixos da ação Φ, ou seja, $F_\Phi = \bigcap_{i=1}^{k} F_{T_i}$;*
- $(\tau_M)_x$ *o espaço tangente a M em x;*
- τ_M *o fibrado tangente a M, ou seja, $\tau_M = \bigcup_{x\in M} (\tau_M)_x$.*

Observação 1.7.15. *Seja $G = \langle\{T_1,\ldots,T_k\}; T_i^2 = 1, T_iT_j = T_jT_i\rangle \equiv \mathbb{Z}_2^k$. Se um automorfismo $\sigma : G \to G$ não é trivial, então as ações $(M;\Phi) = (M;T_1,T_2,\ldots,T_k)$ e $(M;\Psi) = (M;\sigma T_1,\sigma T_2,\ldots,\sigma T_k)$ são em geral ações distintas. Assim, quando damos uma ação $(M;T_1,\ldots,T_k)$ estamos fixando uma base ordenada $(T_1,\ldots,T_k)$ para G. Quando tivermos duas ações nesta situação diremos que* diferem por uma mudança de base de *G.*

Seja $(M;\Phi) = (M;T_1,\ldots,T_k)$ uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$. Para cada $1 \leq j \leq 2^k - 1$ temos uma sequência $A_j = (a_1,\ldots,a_k)$, com $a_i = \pm 1$, e um homomorfismo associado $\rho_j : G \to \mathbb{Z}_2$, definido na base como $\rho_j(T_i) = a_i$. Seja $H_j = \ker(\rho_j)$ e tome $T \in G\backslash H_j$, de modo que $G = H_j \oplus \langle T\rangle$. A restrição de T a $F_{\Phi|_H}$ é uma involução, cujo conjunto de pontos fixos é F_Φ.

Definimos $\varepsilon_{A_j} \to F_\Phi$ como sendo o fibrado normal de F_Φ em $F_{\Phi|_{H_j}}$.

Definição 1.7.16 (Fixed-data)**.** *Associado a $(M;T_1,T_2,\ldots,T_k)$, temos o* fixed-data

$$(\varepsilon_{A_1},\varepsilon_{A_2},\ldots,\varepsilon_{A_{2^k-1}}) \to F_\Phi$$

que são objetos já considerados anteriormente, ou seja, listas de fibrados sobre variedades fechadas.

Observação 1.7.17. *Note que aplicar um automorfismo não trivial na ação resulta numa permutação da lista de fibrados do* fixed-data, *mas a recíproca não é verdade para $k > 2$.*

Observação 1.7.18. *Ao longo deste trabalho, para maior clareza, usaremos algumas vezes a representação*

$$\begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \\ F \end{array}$$

no lugar da notação usual $\eta \to V$. Isto se dará principalmente ao tratarmos de uma lista de fibrados de um fixed-data

$$\begin{array}{c} (\eta_1, \dots, \eta_r) \\ \downarrow \\ F \end{array}$$

ou quando F é composto de mais de uma parte conexa

$$\begin{array}{ccc} (\eta_1, \dots, \eta_r) & & (\xi_1, \dots, \xi_r) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ F_1 & & F_2 \end{array}.$$

1.8. Teorema de Lucas

Nos cálculos envolvendo números característicos, é de grande importância técnica determinar a paridade dos coeficientes binomiais $\binom{a}{b}$. Nesse contexto o *Teorema de Lucas* é muito útil.

Definição 1.8.1. *Seja p um número primo. Dado um inteiro positivo n, definimos a* expansão p-ádica *de n como sendo*

$$n = (n_k, n_{k-1}, \dots, n_2, n_1, n_0), \qquad (0 \leq n_i \leq p - 1)$$

onde

$$n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_2 p^2 + n_1 p^1 + n_0 p^0 = n$$

Observação 1.8.2. *Quando $p = 2$, temos a* expansão diádica *(2-ádica) de n dada por*

$$n = (n_k, n_{k-1}, \ldots n_2, n_1, n_0) = n_k 2^k + n_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0 2^0, \ (0 \le n_i \le 1)$$

que é equivalente a representar n na base 2 (forma binária). Como cada n_i é igual a 0 ou 1, temos que n é dado por um soma de potências distintas de 2.

Teorema 1.8.3 (Teorema de Lucas [17])**.** *Seja p um número primo e tomemos r e c com expansões p-ádicas:*

$$r = (r_k, r_{k-1}, \ldots, r_2, r_1, r_0) = r_k p^k + r_{k-1} p^{k-1} + \cdots r_2 p^2 + r_1 p + r_0,$$

$$c = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_2, c_1, c_0) = c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \cdots c_2 p^2 + c_1 p + c_0.$$

Então

$$\binom{r}{c} \equiv \binom{r_0}{c_0}\binom{r_1}{c_1}\binom{r_2}{c_2} \cdots \binom{r_k}{c_k} \ (mod\ p),$$

convencionando-se que $\binom{a}{b} = 0$ se $a < b$.

□

Corolário 1.8.4. *Sejam r e c com expansões diádicas:*

$$r = r_k 2^k + r_{k-1} 2^{k-1} + \cdots r_2 2^2 + r_1 2 + r_0, \ r_i = 0 \ ou \ 1$$

$$c = c_k 2^k + c_{k-1} 2^{k-1} + \cdots c_2 2^2 + c_1 2 + c_0, \ c_i = 0 \ ou \ 1.$$

Sejam $R = \{i;\ r_i = 1\}$ e $C = \{i;\ c_i = 1\}$. Então

$$\binom{r}{c} \equiv 1 \ (mod\ 2) \ se,\ e\ somente\ se,\ C \subset R.$$

Corolário 1.8.5. *Sejam a e b naturais quaisquer com $\binom{a}{b} \equiv 1(mod\ 2)$. Se 2^t é uma potência que aparece na expansão diádica de b, então $\binom{a}{b-2^t} \equiv 1(mod\ 2)$.*

Corolário 1.8.6. $\binom{a+c}{c} \equiv 1(mod\ 2)$ *se, e somente se, a e c possuem expansões diádicas disjuntas.*

Corolário 1.8.7. *Se b e c são naturais positivos que possuem expansões diádicas disjuntas, então para todo inteiro positivo a, temos*

$$\binom{a}{b+c} \equiv \binom{a}{b}\binom{a}{c}(mod\ 2).$$

Observação 1.8.8. *Sejam a e b inteiros positivos ímpares tais que $a + b = 2^{r+1}$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Para cada $1 \leq t \leq r$, ou 2^t aparece na expansão diádica de a ou na de b. Logo, por 1.8.4,*

$$\binom{a}{2^t} + \binom{b}{2^t} \equiv 1(mod\ 2).$$

1.9. Duas ações especiais

Definição 1.9.1 (Ação *twist* ou $\mathbb{Z}_2$-*twist*)**.** *Dada uma variedade M, definimos uma involução em $M \times M$ por $T_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.*

$(M \times M; T_1)$ é uma ação de $\mathbb{Z}_2$ que será chamada de twist *(ou $\mathbb{Z}_2$-*twist*).*

Teorema 1.9.2. *O* fixed-data *da ação* twist *é $\tau_M \to F_{twist}$, onde F_{twist} é a diagonal de $(M \times M)$, $\Delta(M \times M) \cong M$.*

$\square$

Definição 1.9.3 (Ação $\mathbb{Z}_2^k$-*twist* para $k \geq 1$)**.** *Definiremos uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre $(M)^{2^k}$ (produto cartesiano de 2^k cópias de M), que chamaremos de $\mathbb{Z}_2^k$-*twist*, indutivamente. Para $k = 1$ já definimos em 1.9.1. Suponha conhecido a ação $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-*twist*, ou seja, suponha já definido $((M)^{2^{k-1}}; T_1, \ldots, T_{k-1})$. Observando que $(M)^{2^k} = (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$, sejam $T_i' : (M)^{2^k-1} \times (M)^{2^{k-1}} \to (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$, $1 \leq i \leq k-1$, dadas por $T_i' = T_i \times T_i$ e $T_k' : (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}} \to (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$ dada por $T_k'(x, y) = (y, x)$. A ação $\mathbb{Z}_2^k$-*twist* será a $\mathbb{Z}_2^k$-ação $((M)^{2^k}; T_1', \ldots, T_k')$.*

Lema 1.9.4. $F_{\mathbb{Z}_2^k-\text{twist}} = \Delta(M)^{2^k} = \{(m, m, \ldots, m)|\ m \in M\}$.

$\square$

Lema 1.9.5. *Sejam $(M; \Phi)$ e $(N; \Psi)$ duas ações de $\mathbb{Z}_2^k$ com* fixed-data *$(F_\Phi; \{\nu_{\rho_i}\}_i)$ e $(F_\Psi; \{\mu_{\rho_i}\}_i)$, respectivamente. Então o* fixed-data *da ação produto $(M \times N; \Phi \times \Psi)$ é $(\{\nu_{\rho_i} \times \mu_{\rho_i}\}_i; F_\Phi \times F_\Psi) = (\{p_1!(\nu_{\rho_i}) \oplus p_2!(\mu_{\rho_i})\}; F_\Phi \times F_\Psi)$, onde $p_1 : F_\Phi \times F_\Psi \to F_\Phi$ e $p_2 : F_\Phi \times F_\Psi \to F_\Psi$ são as projeções.*

$\square$

Teorema 1.9.6. *O* fixed-data *da ação* $\mathbb{Z}_2^k$-twist *é* $(M;(\tau_M,\tau_M,\ldots,\tau_M))$ *(* 2^k-1 *cópias de* τ_M *), ou seja, para todo* $1\le j\le 2^k-1$*,* ε_{A_j} *é o fibrado tangente* τ_M*.*

$\square$

Introduziremos agora outra ação especial de $\mathbb{Z}_2^k$, a qual é construída a partir de uma involução $(M;T)$.

Definição 1.9.7. *Dada uma involução* (M,T) *com* fixed-data $\eta\to F$*, definimos uma* $\mathbb{Z}_2^k$*-ação sobre* $(M)^{2^{k-1}}$ *a partir de* $(M;T)$*, a qual denotaremos por* $\Gamma_k^k(M;T)$*, indutivamente:*

1. $\Gamma_1^1(M;T)=(M;T)$*;*
2. *Para* $k>1$*, suponha definida* $\Gamma_{k-1}^{k-1}(M;T)=((M)^{2^{k-2}};T_1,\ldots T_{k-1})$*;*
3. *Observando que* $(M)^{2^{k-1}}=(M)^{2^{k-2}}\times(M)^{2^{k-2}}$*, sejam* $T_i':(M)^{2^{k-2}}\times(M)^{2^{k-2}}\to(M)^{2^{k-2}}\times(M)^{2^{k-2}}$ *dadas por* $T_i'=T_i\times T_i$*, para* $1\le i\le k-1$ *e* $T_k':(M)^{2^{k-2}}\times(M)^{2^{k-2}}\to(M)^{2^{k-2}}\times(M)^{2^{k-2}}$ *dada por* $T_k'(x,y)=(y,x)$*. Definimos* $\Gamma_k^k(M;T)=((M)^{2^{k-1}};T_1',\ldots,T_{k-1}',T_k')$*.*

Observação 1.9.8. *Note que a ação* $\Gamma_k^k(M;T)=((M)^{2^{k-1}};T_1',\ldots,T_k')$*, onde* $T_1'=T\times\cdots\times T$ *(*2^{k-1}*-vezes) e* $(T_2',\ldots,T_k')$ *é a ação* $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-twist *em* $(M)^{2^{k-1}}$*.*

Teorema 1.9.9. *O conjunto de pontos fixos da ação* $\Gamma_k^k(M;T)$ *é* F*, enquanto os fibrados do* fixed-data *de* $\Gamma_k^k(M;T)$ *possui a seguinte descrição: para cada representação* $A=(a_1,a_2,\ldots,a_k)\in\mathbb{Z}_2^k$*,*

1. *se* $a_1=-1$*, então* $\xi_A=\eta$*, onde* $\eta\to F$ *é o* fixed-data *de* $(M;T)$*;*
2. *se* $a_1=1$*, então* $\xi_A=\tau_F$*.*

$\square$

Em outras palavras, no *fixed-data* de $\Gamma_k^k(M;T)$ temos 2^{k-1} cópias de $\eta\to F$ e $2^{k-1}-1$ cópias de $\tau_F\to F$

Teorema 1.9.10. *Seja* $(M;\Phi) = (M;T_1,\ldots,T_k)$ *uma ação de* $\mathbb{Z}_2^k$ *cujo* fixed-data *é igual a* $(\xi_{A_1},\ldots,\xi_{A_{2^k-1}}) \to F_\Phi$. *Então o* fixed-data *da ação de* $\mathbb{Z}_2^{k+1}$, $(M;\Psi)$ *dada por* $(M;\Psi) = (M;T_1,\ldots T_k, Id)$, *onde* Id *é a função identidade, é dado em termos de representação por:*

Seja $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ *uma representação não trivial de* $\mathbb{Z}_2^{k+1}$. *Então*

1. *se* $a_{k+1} = -1$, *então* $\varepsilon_A = 0$;

2. *se* $a_{k+1} = 1$, *então* $\varepsilon_A = \xi_{A'}$, *onde* $A' = (a_1,\ldots,a_k)$.

□

Aplicando o teorema repetidas vezes, obtemos

Corolário 1.9.11. *Seja* $(M^n;\Phi) = (M;T_1,\ldots,T_k)$ *uma ação de* $\mathbb{Z}_2^k$ *com* fixed-data $(\xi_{A_1},\ldots,\xi_{A_{2^k-1}}) \to F_\Phi$. *Então acrescentando* s *identidades, o* fixed-data *da ação de* $\mathbb{Z}_2^{k+s}$, $(M;\Psi) = (M;T_1,\ldots,T_k, Id,\ldots,Id)$, *é dado em termos de representação por:*

Seja $A = (a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+s})$ *uma representação não trivial de* $\mathbb{Z}_2^{k+s}$. *Então*

1. *se* $a_j = -1$, $k+1 \leq j \leq k+s$, *então* $\varepsilon_A = 0$

2. *se* $a_j = 1$, $\forall k+1 \leq j \leq k+s$, *então* $\varepsilon_A = \xi_{A'}$, *onde* $A' = (a_1,\ldots,a_k)$.

Aplicando o Corolário às ações Γ_k^k previamente definidas, obtemos novas ações:

Definição 1.9.12 (Ação Γ_k^{k+t})**.** *Dada uma involução* $(M;T)$, *com* fixed-data $\eta \to F$ *e um inteiro positivo* t, *definimos uma ação de* $\mathbb{Z}_2^{k+t}$, $\Gamma_k^{k+t}(M;T)$ *sobre* $M^{2^{k-1}}$, *da seguinte forma: se* $\Gamma_k^k(M;T) = ((M)^{2^{k-1}};T_1,\ldots,T_k)$, *então*

$$\Gamma_k^{k+t}(M;T) = ((M)^{2^{k-1}};T_1,\ldots,T_k,Id,\ldots,Id).$$

Pelo Teorema 1.9.9 e pelo Corolário 1.9.11, obtemos

Teorema 1.9.13. *O* fixed-data *de* Γ_k^{k+t} *tem a seguinte descrição: para cada representação* $A = (a_1,\ldots,a_{k+t})$

1. *se* $a_j = 1$ *para* $j > k$ *e se* $a_1 = -1$*, então* $\xi_A = \eta$*;*

2. *se* $a_j = 1$ *para* $j > k$ *e se* $a_1 = 1$*, então* $\xi_A = \tau_F$*.*

3. *se* $a_j = -1$ *para algum* $j > k$*, então* $\xi_A = 0$*.*

$\square$

Observação 1.9.14. *As ações* Γ_k^{k+t} *descritas acima foram usadas por P. Pergher em [19, 21, 18, 23]. As informações pormenorizadas a respeito do* fixed-data *também foram utilizadas nestes trabalhos, embora nenhuma demonstração tenha sido apresentada nos mesmos. As demonstrações podem ser encontradas em [14].*

Definição 1.9.15. *Dada* F*, se existir uma ação de* $\mathbb{Z}_2^k$*,* $(M^m; \Phi)$ *fixando* F*, a qual não é obtida a partir das ações* Γ_k^{k+t}*, costumamos chamá-la de* "exótica".

1.10. Uma ação correspondente a uma lista de fibrados que borda simultaneamente

Exibiremos a seguir, sem demonstrações, uma forma de se obter uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ a partir de uma lista $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to M^n$ que borda simultaneamente, com a propriedade de que o *fixed-data* desta ação é a própria lista.

Seja $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to M^n$ uma lista de fibrados vetoriais que borda simultaneamente. Então existem uma variedade compacta W^{n+1} e uma lista de fibrados vetoriais $(R_1, R_2, R_3) \to W^{n+1}$ tais que $\partial W = M$ e $R_{i|_M} = \xi_i$.

No espaço total $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ podemos definir duas involuções comutantes T_1 e T_2, que em cada fibra agem como $T_1 = (Id, A, A)$ e $T_2 = (A, Id, A)$, onde A representa a aplicação antipodal e Id representa a aplicação identidade nas fibras correspondentes. Estas involuções determinam uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$, Φ, sobre $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$.

Considere agora os espaços totais N_1 e N_2 dos fibrados $S(R_1) \oplus S(R_2) \oplus S(R_3) \to W$ e $D(\xi_1) \oplus D(\xi_2) \oplus D(\xi_3) \to M$, respectivamente, e tome a união $N = N_1 \cup N_2$.

Salientamos que $S(R_i)$ representa o fibrado em esferas de R_i e $D(\xi_i)$ o fibrado em discos de ξ_i.

A restrição de Φ a N é uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando M com *fixed-data* igual a $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to M^n$.

Notação 1.10.1. *Denotaremos esta ação por* $\Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

1.11. Condição sobre o ***fixed-data*** de ações de $\mathbb{Z}_2^2$

Esta sessão trata de um teorema de grande importância neste trabalho, enunciado primeiramente em [22]. Ele sera usado exaustivamente nos capítulos seguintes na sua forma modificada, enunciada mais adiante:

Teorema 1.11.1. *([22], Teorema 1) Uma lista de fibrados vetoriais* $((\nu_1, \nu_2, \nu_3) \to F$ *é o* fixed-data *de uma ação de* $\mathbb{Z}_2^2$ *se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) $(\lambda_1, \nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1)) \to \mathbb{RP}(\nu_1)$ *borda simultaneamente, onde* $\mathbb{RP}(\nu_1)$ *é o espaço total de um fibrado sobre* F*;*

(b) $\{(\lambda_2, \nu_1 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_2)) \to \mathbb{RP}(\nu_2)\} \sqcup \{(\lambda_1, \lambda') \to \mathbb{RP}(\nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1))\}$ *borda simultaneamente, onde os espaços base são espaços totais de fibrados sobre* F *e* $\mathbb{RP}(\nu_1)$*, respectivamente.*

(c) $(\lambda_3, \nu_1 \oplus (\nu_2 \otimes \lambda_3)) \to \mathbb{RP}(\nu_3)$ *borda simultaneamente, onde* $\mathbb{RP}(\nu_3)$ *é o espaço total de um fibrado sobre* F*;*

□

Observação 1.11.2. *Analisando as dimensões dos grupos de cobordismo envolvidas, note que a condição* **(b)** *pode ser trocada pelas duas condições a seguir:*

(b1) $\{(\lambda_1, \lambda') \to \mathbb{RP}(\nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1))\} \cup \{\bigcup_{\dim(\nu_1)+\dim(\nu_3)=1} (\lambda_2, \nu_1 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_2)) \to \mathbb{RP}(\nu_2)\}$ *borda simultaneamente;*

(b2) $\displaystyle\bigcup_{\dim(\nu_1)+\dim(\nu_3)\neq 1} (\lambda_2, \nu_1 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_2)) \to \mathbb{RP}(\nu_2)$ *borda simultaneamente.*

As condições **(b1)** e **(b2)** do teorema provém de construções geométricas, e não é adequada para o nosso estudo de ações de $\mathbb{Z}_2^2$, e serão substituídos por uma forma mais simples, em termos computacionais, no processo de se determinar quando uma lista de três fibrados vetoriais é o *fixed-data* de uma ação.

Teorema 1.11.3. *Uma lista de fibrados vetoriais* $((\nu_1, \nu_2, \nu_3) \to F$ *é o* fixed-data *de uma ação de* $\mathbb{Z}_2^2$ *se, e somente se, as seguintes listas bordam simultaneamente:*

(a) $(\lambda_1, \nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1)) \to \mathbb{RP}(\nu_1)$*;*

(b') $(\lambda_2, \nu_1 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_2)) \to \mathbb{RP}(\nu_2)$*;*

(c) $(\lambda_3, \nu_1 \oplus (\nu_2 \otimes \lambda_3)) \to \mathbb{RP}(\nu_3)$*,*

onde os espaços base são os espaços totais de fibrados sobre F*.*

Dem.:

A demonstração se dará mostrando-se que estas três condições são equivalentes às condições do Teorema 1.11.1 ([22], Teorema 1). Isto se dará mostrando-se que a condição **(a)**, comum aos dois teoremas, implica no bordismo simultâneo da lista $\{(\lambda_1, \lambda') \to \mathbb{RP}(\nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1))\}$.

De fato, se a lista

$$\begin{array}{c}(\lambda_1, \nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1)) \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}(\nu_1)\end{array}$$

borda simultaneamente, existem uma variedade M e uma lista de fibrados

$$\begin{array}{c}(\lambda, \varepsilon) \\ \downarrow \\ M\end{array}$$

tais que $\partial M = \mathbb{RP}(\nu_1)$, $\lambda_{|\partial M} = \lambda_1$ e $\varepsilon_{|\partial M} = \nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1)$.

Considerando-se o fibrado em projetivos $\mathbb{RP}(\varepsilon) \to M$, denote também por λ o pullback de $\lambda \to M$ pela projeção.

$$\begin{tikzcd} \lambda \arrow[d] & \lambda \arrow[d] \\ \mathbb{RP}(\varepsilon) \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd}$$

Considere também o fibrado linha

$$\begin{array}{c} \lambda' \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}(\varepsilon) \end{array} .$$

Obtemos então a lista

$$\begin{array}{c} (\lambda', \lambda) \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}(\varepsilon) \end{array} ,$$

onde $\partial \mathbb{RP}(\varepsilon) = \mathbb{RP}(\nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1))$, $\lambda'_{|\partial \mathbb{RP}(\varepsilon)} = \lambda'$ e $\lambda_{|\partial \mathbb{RP}(\varepsilon)} = \lambda_1$. Logo, a lista

$$\begin{array}{c} (\lambda_1, \lambda') \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}(\nu_2 \oplus (\nu_3 \otimes \lambda_1)) \end{array}$$

borda simultaneamente.

$\square$

Capítulo 2

Ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando variedades de Dold do tipo $P(1, 2n+1)$

Este capítulo será dedicado ao estudo de involuções e de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando variedades Dold do tipo $P(1, 2n+1)$.

Observação 2.0.4. *No decorrer de toda a tese, ficará subentendido que as cohomologias em pauta são sempre com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.*

2.1. Definição de variedades Dold

Considere $S^m \times \mathbb{C}P^n$ o produto cartesiano da esfera m-dimensional S^m com o espaço projetivo complexo de dimensão complexa n, $\mathbb{C}P^n$.

Defina $T : S^m \times \mathbb{C}P^n \to S^m \times \mathbb{C}P^n$, por $T(x, [z]) = (-x, [\overline{z}])$, onde $x \in S^m$ e $[z] \in \mathbb{C}P^n$.

Definição 2.1.1. *Definimos como variedade Dold espaços do tipo $(S^m \times \mathbb{C}P^n)/T$, com $m, n \in \mathbb{N}$.*

A estrutura de anel de $H^*(P(m,n); \mathbb{Z}_2)$ é descrita como

$$H^*(P(m,n); \mathbb{Z}_2) = \left[\frac{\mathbb{Z}_2[c]}{c^{m+1} = 0}\right] \otimes \left[\frac{\mathbb{Z}_2[d]}{d^{n+1} = 0}\right],$$

e a classe de Stiefel-Whitney de $P(m,n)$ é dada por

$$W(P(m,n)) = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1},$$

onde c é o elemento não nulo de $H^1(P(m,n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ e d é um elemento não nulo conveniente de $H^2(P(m,n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (diferente de c^2).

2.2. Fibrados vetoriais sobre variedades Dold

O trabalho feito por Stong em ([33], 2001), em que ele classifica as possíveis classes de Stiefel-Whitney para fibrados sobre variedades Dold foi de vital importância para este capítulo, e será parcialmente transcrito nesta seção. Em fato, transcrevemos a introdução de [33], que contém o enunciado do resultado principal:

As variedades Dold

$$P(m,n) = \frac{S^m \times \mathbb{C}P^n}{-1 \times (\text{conjugação})}$$

foram introduzidas por Dold em [9] para encontrar geradores de dimensão ímpar para o anel de cobordismo não orientável. Elas são aproximações de dimensão finita do espaço classificante $BO(2) = P(\infty, \infty)$ de fibrados reais bidimensionais.

A cohomologia módulo-2 da variedade Dold é dado por

$$H^*(P(m,n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[c,d]/(c^{m+1} = 0, d^{n+1} = 0)$$

onde $c \in H^1(P(m,n); \mathbb{Z}_2)$ e $d \in H^2(P(m,n), \mathbb{Z}_2)$.

A ação da álgebra de Steenrod é completamente determinada sabendo-se que $\mathrm{Sq}^1 d = cd$.

Sobre $P(m,n)$, temos um fibrado linha ℓ com $\omega(\ell) = 1 + c$ e um fibrado bidimensional η com $\omega(\eta) = 1 + c + d$. Então existem fibrados vetoriais sobre $P(m,n)$ com classes de Stiefel-Whitney do tipo $(1+c)^a(1+c+d)^b$.

A KO-teoria de $P(m,n)$ foi determinado por Fujii e Yasui [10] e por Ucci [37]. A descrição de $KO(P(m,n))$ é um tanto complicado, e não descreve as classes de Stiefel-Whitney.

Proposição 2.2.1. *[33] Existem fibrados vetoriais sobre $P(m,n)$ com classe de Stiefel-Whitney*

1. $1 + c + (d + c^2)$, *para* $m = 2$, $n \geq 1$;
2. $(1 + c + (d + c^2))^2$, *para* $m = 4$ *ou* 5, $n \geq 2$;

3. $(1 + c + (d + c^2))^2(1 + c + d) + c^6$, *para* $m = 6,\ n \geq 1$, *e*

4. $1 + c^2d^3$, *para* $m = 2,\ n = 3$.

A classe de Stiefel-Whitney de todo fibrado vetorial sobre $P(m, n)$ *é um produto dessas classes e as classes* $(1 + c)$ *e* $(1 + c + d)$.

Observação 2.2.2.

1. *Os quadrados de cada uma dessas classes são da forma* $(1 + c + d)^b$, *e então no máximo um único fator de cada uma dessas classes são necessárias.*

2. *Para* $m = 2$ *e* $n = 3$, *existem duas classes nesta lista. Em todos os outros casos, existe uma única classe exótica.*

2.3. Involuções fixando variedades de Dold do tipo *P(1,2n+1)*

Sobre $S^1 \times \mathbb{C}P(2n + 2)$, podemos definir involuções S e $\overline{T}$, definidas por:

$$S(z, [(z_0, \ldots, z_{2n+1}, z_{2n+2})]) = (-z, [(\overline{z}_0, \ldots, \overline{z}_{2n+1}, \overline{z}_{2n+2})])$$
$$\overline{T}(z, [(z_0, \ldots, z_{2n+1}, z_{2n+2})]) = (z, [(z_0, \ldots, z_{2n+1}, -z_{2n+2})]).$$

Como S e $\overline{T}$ são involuções comutantes, $\overline{T}$ induz uma involução T em $P(1, 2n + 2) = S^1 \times \mathbb{C}P(2n + 2)/S$.

Como o conjunto de coincidências $\{x; S(x) = \overline{T}(x)\}$ é vazio, o conjunto de pontos fixados por T, $Fix(T)$, é imagem pela projeção ao quociente do conjunto de pontos fixados por $\overline{T}$, $Fix(\overline{T})$.

$$Fix(\overline{T}) = \{(z, [(z_0, \ldots, z_{2n+1}, 0)])\} \sqcup \{(z, [(0, \ldots, 0, 1)])\}.$$

Note que o primeiro subconjunto é a inclusão usual de $S^1 \times \mathbb{C}P(2n + 1)$ em $S^1 \times \mathbb{C}P(2n + 2)$, e o segundo é a inclusão de $S^1 \cong S^1 \times \mathbb{C}P(0)$.

Aplicando a projeção, ou seja, tomando o quociente por S, segue que $Fix(T)$ é a união disjunta de $P(1, 2n + 1)$ e $P(1, 0) \cong \mathbb{RP}(1)$.

Denotamos o *fixed-data* de $(P(1,2n+2);T)$ por

$$\begin{array}{ccc} \eta^2 & & \xi^{4n+4} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ P(1,2n+1) & & P(1,0) \end{array}$$

Denote por $\tau_{2n+2} \to P(1,2n+2)$, $\tau_{2n+1} \to P(1,2n+1)$ e $\tau_0 \to P(1,0)$ os fibrados tangente de $P(1,2n+2)$, $P(1,2n+1)$ e $P(1,0)$, respectivamente.

Lembramos que o *fixed-data* de uma involução é o fibrado normal do fibrado tangente do conjunto de pontos fixado, com relação ao fibrado tangente da variedade em que a involução é aplicada. Ou seja, é um fibrado cuja soma de Whitney com o fibrado tangente do conjunto de pontos fixados é a restrição do fibrado tangente da variedade original ([8]).

Dados $m' \leq m$, $n' \leq n$ e a inclusão canônica de $P(m',n') \subset P(m,n)$, o *pullback* pela inclusão dos geradores da cohomologia de $H^*(P(m,n))$ são os geradores da cohomologia de $H^*(P(m',n'))$ ([9]).

Portanto, calculando as classes características dos fibrados tangentes, obtemos:

$$\begin{aligned} & W(\tau_{2n+1} \oplus \eta^2) = W(\tau_{2n+2|_{P(1,0)}}) \\ \rightarrow \quad & W(\tau_{2n+1})W(\eta^2) = (1+c)(1+c+d)^{2n+3} \\ \rightarrow \quad & (1+c)(1+c+d)^{2n+2}W(\eta^2) = (1+c)(1+c+d)^{2n+3} \\ \rightarrow \quad & W(\eta^2) = (1+c+d) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & W(\tau_0 \oplus \xi^{4n+4}) = W(\tau_{2n+2|_{P(1,2n+1)}}) \\ \rightarrow \quad & W(\tau_0)W(\xi^{4n+4}) = (1+c)(1+c+d)^{2n+3} \\ \rightarrow \quad & (1+c)^2W(\xi^{4n+4}) = (1+c)(1+c)^{2n+3} \\ \rightarrow \quad & W(\xi^{4n+4}) = (1+c)^{2n+2} \\ \rightarrow \quad & W(\xi^{4n+4}) = 1 \end{aligned}$$

Como o fibrado normal da componente $\mathbb{RP}(1) \equiv S^1$ borda, a involução $(P(1,2n+2);T)$ é equivariantemente cobordante a uma involução $(V^{4n+5};T')$ que possui como *fixed-data*

$$\begin{array}{c} \eta^2 \\ \downarrow \\ P(1,2n+1) \end{array},$$

com classe de Stiefel-Whitney $W(\eta^2) = 1 + c + d$.

Teorema 2.3.1. *A menos de cobordismo equivariante, a involução* $(V^{4n+5}; T')$ *é a única involução que possui* $P(1, 2n + 1)$ *como conjunto de pontos fixados e que não borda equivariantemente.*

Dem.:

Sejam (N^{k+4n+3}, S) uma involução fixando $P(1, 2n + 1)$ e

$$\begin{array}{c} \nu^k \\ \downarrow \\ P(1,2n+1) \end{array}$$

seu *fixed-data*, com classe de Stiefel-Whitney $W(\nu^k) = (1 + c)^a(1 + c + d)^p$.

Se $p = 2b$, então

$$\begin{aligned} W(\nu^k) &= (1 + c)^a(1 + c + d)^{2b} \\ &= (1 + c)^a(1 + d^2)^b. \end{aligned}$$

Isto implica que em todas as classes características, a classe de cohomologia d é elevado a uma potência par. Como o único elemento não nulo de $H^{4n+3}(P(1, 2n + 1))$ é cd^{2n+1}, temos que todos os números característicos serão zeros. Portanto, se a involução não borda equivariantemente, ν^k não borda e tem classe de Whitney da forma

$$W(\nu^k) = (1 + c)^a(1 + c + d)^{2b+1},$$

sendo $a = 0$ ou 1.

Como $\omega_2(\nu^k) = d \neq 0$, sabemos que $k \geq 2$.

Lema 2.3.2. *Temos que* $a = 0$.

Dem.:

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\nu^k))$ é um $H^*(P(1,2n+1))$-módulo gerado por $e \in H^1(\mathbb{RP}(\nu^k))$ e com relação advinda do fato de que a classe de grau cohomológico k em $(1+c+e)^a((1+e)^2+(1+e)c+d)^{2b+1}$ é zero.

Como $\nu^k \to P(1,2n+1)$ é o *fixed-data* de uma involução, o fibrado linha $\lambda \to \mathbb{RP}(\nu^k)$ borda, com classes de Stiefel-Whitney

$$W(\lambda) = 1+e$$

e

$$\begin{aligned}
W(\mathbb{RP}(\nu^k)) &= (1+c)(1+c+d)^{n+1}\{(1+e)^k + (a+1)c(1+e)^{k-1} + d(1+e)^{k-2} + \cdots\} \\
&= \{1+c+ \text{ classes de grau } >2\}\Big\{1+[ke+(a+1)c]+ \\
&\qquad + \left[d + \binom{k}{2}e^2 + (k-1)(a+1)ce\right] + \text{ classes de grau } >2\Big\} \\
&= 1+\{ke+ac\} + \left\{d+\binom{k}{2}e^2 + [k+(k-1)(a+1)]ce\right\} + \\
&\qquad\qquad\qquad \text{classes de maior grau.}
\end{aligned}$$

Considere as classes características

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \omega_1(\nu^k) + ke \\
&= ac
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \left[\omega_2(\mathbb{RP}(\nu^k)) + \binom{k}{2}e^2 + [k+(k-1)(a+1)]e\theta_1\right] \\
&= d + (a+1)ce.
\end{aligned}$$

A partir delas podemos formar o número característico

$$\begin{aligned}
\langle \theta_1\theta_2^{2n+1}e^{k-1}; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle &= \langle ac[d+(a+1)ce]^{2n+1}e^{k-1}; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle \\
&= a\langle cd^{2n+1}e^{k-1}; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle \\
&= a
\end{aligned}$$

Como $\lambda \to \mathbb{RP}(\nu^k)$ borda, por hipótese, segue que $a = 0$

□

Observação 2.3.3. *A classe $\theta_2^2 = d^2$ é uma classe essencial para o próximo lema.*

Lema 2.3.4. *Se $\nu^k \to P(1,2n+1)$ é* fixed-data *de involução, então $\nu^k_{|_{P(1,1)}} \to P(1,1)$ é* fixed-data *de uma involução.*

Dem.:

Este resultado provém do fato de que a inclusão $i : \mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}}) \to \mathbb{RP}(\nu^k)$ induz um homomorfismo sobrejetor $i^* : H^*(\mathbb{RP}(\nu^k)) \to H^*(\mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}}))$ tal que toda classe característica $\overline{\omega}$ de $\lambda' \to \mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}})$ é imagem de uma classe característica correspondente ω de $\lambda \to \mathbb{RP}(\nu^k)$, isto é, $\overline{\omega} = i^*(\omega)$.

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}}))$ é um $H^*(P(1,1))$-módulo gerado por $e \in H^1(\mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}}))$ e com relação advinda do fato de que a classe de grau cohomológico k em $(1+c+e)^a((1+e)^2+(1+e)c+d)^{2b+1}$ é zero.

Dada uma classe $\overline{\theta} = \overline{\omega}_{i_1} \cdots \overline{\omega}_{i_j}$, com $i_1 + \cdots + i_j = k+2$, o número característico $\langle \overline{\theta}; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}}))\rangle$ é não nulo se, e somente se, $\overline{\theta} = cde^{k-1}$. A classe correspondente $\theta = \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_j}$ é então da forma $\theta = cde^{k-1} + d^2\alpha$, se $\overline{\theta} = cde^{k-1}$, e da forma $\theta = +d^2\alpha$, caso contrário.

Logo, $\theta(d^2)^n = \begin{cases} cd^{2n+1}e^{k-1} & , \text{ se } \overline{\theta} = cde^{k-1}; \\ 0 & , \text{ se } \overline{\theta} = 0. \end{cases}$

Portanto, temos que

$$\langle \overline{\omega}_{i_1} \cdots \overline{\omega}_{i_j}; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}}))\rangle = \langle \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_j}(d^2)^n; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle.$$

Como, por hipótese, $\lambda \to \mathbb{RP}(\nu^k)$ borda,

$$\langle \overline{\omega}_{i_1} \cdots \overline{\omega}_{i_j}; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k_{|_{P(1,1)}}))\rangle = 0.$$

□

Como $d^2 = 0$ em $P(1,1)$, temos que se $\nu^k \to P(1,2n+1)$ tem classe de Stiefel-Whitney $W(\nu^k) = (1+c+d)^{2b+1}$, então a sua restrição $\nu^k_{|_{P(1,1)}} \to P(1,1)$ tem classe de Stiefel-Whitney $W(\nu^k_{|_{P(1,1)}}) = 1+c+d$.

Logo, $\nu^k_{|_{P(1,1)}} \to P(1,1)$ não borda.

Note que $\dim(P(1,1)) = 3$, e toda involução fixando $P(1,1)$, com *fixed-data* $\xi^k \to P(1,1)$ borda equivariantemente se $k > 3$; e se $k = 3$, ξ^3 é equivariantemente cobordante a $(P(1,1) \times P(1,1); twist)$, que borda equivariantemente. (vide [34], p.309 ou [27] p.85, teo 5)

Logo, $k = 2$.

Isto é, ν^2 é cobordante a η e $(N^{2+4n+3}; S)$ é cobordante a $(V^{4n+5}; T')$.

■

2.4. Ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando *P(1,2n+1)*

Findado a classificação de involuções fixando $P(1, 2n+1)$, prosseguiremos com a classificação de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $P(1, 2n+1)$.

Observação 2.4.1. *Uma técnica que usaremos com frequência no decorrer deste trabalho é a seguinte:*

Sejam $W = 1+\omega_1+\cdots+\omega_n$ *e* $V = 1+\nu_1+\cdots+\nu_n$ *classes características. A partir delas, podemos tomar o produto de potências* $U(k,l) = W^kV^l = 1+\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n$*, onde* k *e* l *são inteiros positivos. A nova classe* $U(k,l)$ *tem a propriedade de que cada número característico calculado que envolva alguma das classes* μ_i *é uma soma de números característicos obtidos envolvendo* W *e* V*, já que* μ_i *é uma soma de produto de potências de classes* ω_s *e* ν_t*.*

O principal motivo de se usar classes do tipo $U(k,l)$ *é que, para específicos* k *e* l*,* $U(k,l)$ *possui uma expressão mais simples de se trabalhar, e tal que as classes características originais podem ser obtidas a partir das classes* μ_i*. Isto ficará mais claro no decorrer desta tese.*

2.4.1. Uma ação especial

Lema 2.4.2. *Se* $\nu^k \to P(1,2n+1)$ *é um fibrado vetorial com classe de Stiefel-Whitney* $W(\nu) = (1+c)(1+c+d)^{2b}$*, então a lista* $(\lambda, \eta\oplus(\lambda\otimes\nu^k)) \to \mathbb{RP}(\eta)$ *borda simultaneamente.*

Dem.:

Sabemos que $H^*(\mathbb{RP}(\eta))$ é um $H^*(P(1,2n+1))$-módulo gerado por $e \in H^1(\mathbb{RP}(\eta))$ e relação $e^2 + ce + d = 0$.

Temos ainda as classes características

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= 1 + e, \\ W(\mathbb{RP}(\eta)) &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}\{(1+e)^2 + c(1+e) + d\} \\ &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}\{1+c+e^2+ce+d\} \\ &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}(1+c) \\ &= (1+c)^2(1+c+d)^{2n+2} \\ &= (1+c+d)^{2n+2} \\ &= (1+d)^{2n+2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W(\eta \oplus (\lambda \otimes \nu)) &= (1+c+d)(1+e+c)((1+e)^2 + (1+e)c + d)^{2b}(1+e)^{k-1-4b} \\ &= (1+c+d)(1+e+c)(1+c+e^2+ec+d)^{2b}(1+e)^{k-1-4b} \\ &= (1+c+d)(1+e+c)(1+c)^{2b}(1+e)^{k-1-4b} \\ &= (1+c+d)(1+e+c)(1+e)^{k-1-4b}. \end{aligned}$$

Definindo $\overline{W} = W(\eta \oplus (\lambda \otimes \nu))W(\lambda)^{4b+1-k}$, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{W} &= (1+c+d)(1+e+c) \\ &= 1 + e + (ce+d) + d(e+c) \\ &= 1 + e + e^2 + e^3. \end{aligned}$$

Portanto, se $2n+2 = 2^p(2q+1)$, um número característico do par em pauta é uma soma de números da forma

$$\langle e^x d^{2^p t}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta))\rangle,$$

com $x + 2^{p+1}t = 4n + 3 + 2 - 1 = 4n + 4$.

Pela fórmula de Conner, (1.6.3), esse valor é o coeficiente de cd^{2n+1} em

$$\frac{d^{2^p t}}{(1+c+d)} = (1+c+d)(1+d)^{par} d^{2^p t},$$

que é igual a zero.

$\square$

Seja $\ell \to P(1,2n+1)$ o fibrado 1-dimensional com classe de Stiefel-Whitney $W(\ell) = 1 + c$.

Teorema 2.4.3. *Se* $2n+2 = 2^p(2q+1)$*, então para todo* $1 \leq k < 2^{p+1}$ *existe uma ação de* $\mathbb{Z}_2^2$*, cujo* fixed-data *é* $(\eta, \eta, \ell \oplus \mathbb{R}^{k-1}) \to P(1, 2n+1)$.

Dem.:

Considere inicialmente $\nu_1 = \ell \oplus R^{k-1} = \ell$ (isto é, $k = 1$).

Considere a lista de fibrados $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) \to \mathbb{RP}(\ell)$.

Note que $\mathbb{RP}(\ell) = P(1, 2n+1)$ e $\lambda = \ell$; e portanto $e = c$.

Calculando $W(\eta \oplus (\lambda \otimes \eta))$ e usando a relação $e = c$, obtemos

$$\begin{aligned} W(\eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) &= (1+c+d)((1+e)^2 + (1+e)c + d) \\ &= (1+c+d)^2 \\ &= 1 + d^2. \end{aligned}$$

Portanto, todo número característico é soma de termos da forma

$$\langle c^x d^{2y}; \sigma(P(1, 2n+1)) \rangle = 0,$$

onde $x + 4y = 4n + 3$.

Isto implica que $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) \to P(1, 2n+1)$ borda simultaneamente.

Portanto, pelo Lema 2.4.2 e o Teorema 1.11.3 , (ℓ, η, η) é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $P(1, 2n+1)$.

O objetivo a seguir é mostrar que existe um limitante k_0 tal que a lista $(\eta, \eta, \ell \oplus (k-1)\mathbb{R}) \to P(1, 2n+1)$ é *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ se, e somente se, $1 \leq k \leq k_0$, e determinar esse k_0.

Computações:

Sejam p e q tais que $2n+2 = 2^p(2q+1)$, isto é, $2n+1 = 2^p(2q) + 2^p - 1$.

Seja também $\nu^k = \ell \oplus (k-1)R$, $k \in \mathbb{N}$

Lema 2.4.4. *A lista* $(\eta, \eta, \nu^k) \to P(1,n)$ *é um* fixed-data *de uma* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação se, e somente se,* $1 \leq k \leq 2^{p+1} - 1$.

Dem.:

Por 2.4.2, basta calcularmos a classe de cobordismo simultâneo da lista de fibrados $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) \to \mathbb{RP}(\nu^k)$.

$H^*(\mathbb{RP}(\nu^k))$ é um $H^*(P(1,2n+1))$-módulo gerado por $e \in H^1(\mathbb{RP}(\nu^k))$ e com relação $e^k = ce^{k-1}$. Temos

$$\begin{aligned} W(\mathbb{RP}(\nu^k)) &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}(1+e+c)(1+e)^{k-1} \\ &= (1+c+ce)(1+d)^{2n+2}(1+e)^{k-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W(\eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) &= (1+c+d)((1+e)^2 + (1+e)c + d) \\ &= 1 + (e^2 + ce) + e^2 c + d(e^2 + ce + d). \end{aligned}$$

Tomando $\widetilde{W}(\mathbb{RP}(\nu^k)) = 1 + \omega_1(\mathbb{RP}(\nu^k)) + (\omega_2(\mathbb{RP}(\nu^k)) + \binom{k-1}{2}e^2)$, formamos a classe

$$\begin{aligned} \overline{W}(\mathbb{RP}(\nu^k)) &= \frac{W(\mathbb{RP}(\nu^k))}{\widetilde{W}(\mathbb{RP}(\nu^k))W(\lambda)^{k-1}} \\ &= (1+d)^{2n+2} \end{aligned}$$

Assim, todo número característico da lista $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) \to \mathbb{RP}(\nu^k)$ é soma de números da forma

$$\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k)) \rangle,$$

onde $\theta = e^x (ce)^y [d(e^2 + ce + d)]^z d^{2^p t}$, com $x + 2y + 4z + 2^{p+1}t = 4n + 3 + k - 1$.

Note que quando $y > 1$, $\theta = 0 \in H^{4n+2+k}(\mathbb{RP}(\nu^k))$ e $\langle\theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle = 0$.

Se $k \geq 2^{p+1}$, tome a classe

$$\begin{aligned}
\theta &= e^{k-2^{p+1}}(ce)\{d(ce+e^2+d)\}^{2^p-1}d^{2^{p+1}q} \\
&= e^{k-2^{p+1}+1}c(ce+e^2+d)^{2^p-1}d^{2^p(2q+1)-1} \\
&= e^{k-2^{p+1}+1}c(e^2+d)^{2^p-1}d^{2n+1} \\
&= e^{k-2^{p+1}+1}ce^{2(2^p-1)}d^{2n+1} \\
&= e^{k-1}cd^{2n+1},
\end{aligned}$$

obtendo

$$\langle\theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle = 1.$$

Portanto, $(\eta, \eta, \nu^k) \to P(1, 2n+1)$ não é *fixed-data* para $k \geq 2^{p+1}$.

Mostraremos agora que se $k = 2^{p+1} - 1$, então $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) \to \mathbb{RP}(\nu^k)$ borda simultaneamente, ou seja, que $(\eta, \eta, \nu^k) \to P(1, 2n+1)$ é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Seja $\theta = e^x(ce)^y[d(e^2+ce+d)]^z d^{2^p t}$, com $x + 2y + 4z + 2^{p+1}t = 4n + k + 2$. Usando o algoritmo da divisão, temos que $z = 2^p s + r$, com $0 \leq r < 2^p$ e $s \in \mathbb{N}$. O número característico $\langle\theta, \mathbb{RP}(\nu_1)\rangle$ é dado pelo coeficiente de $cd^{2n+1} = cd^{2^{p+1}q+2^p-1}$ em

$$\begin{aligned}
\frac{c^y d^z(1+c+d)^z d^{2^p t}}{(1+c)} &= \frac{c^y d^{2^p s+r}(1+c+d)^{2^p s}d^{2^p t}}{(1+c)} \\
&= \frac{c^y d^r d^{2^p(s+t)}(1+c+d)^r(1+d^{2^p})^s}{(1+c)} \\
&= \sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\frac{c^y d^r(1+c+d)^r d^{2^p(t+s+l)}}{(1+c)} \\
&= \sum_{l=0}^{s}\sum_{r'=0}^{r}\binom{s}{l}\binom{r}{r'}\frac{c^y(1+c)^{r-r'}d^{2^p(t+s+l)+r+r'}}{(1+c)}.
\end{aligned}$$

Se $2n + 1 = 2^p(t + s + l) + r + r'$, então

$$\begin{aligned}
& 2^p(2q+1) - 1 = 2^p(t+s+l) + r + r' \\
\to\ & 2^p(2q-t-s-l) = r + r' - 2^p + 1
\end{aligned}$$

Como $0 \leq r' \leq r \leq 2^p - 1$, $r + r' - 2^p + 1 < 2^p$ e segue que $2q = t + s + l$ e $r + r' = 2^p - 1$.

$r + r'$ ímpar implica que $\frac{c^y(1+c)^{r-r'}}{(1+c)} = c^y$, e então

$$\theta = \sum_{l=0}^{s}\sum_{r'=0}^{r}\binom{s}{l}\binom{r}{r'}c^y d^{2^p(t+s+l)+r+r'}.$$

Se $y = 0$, então $\theta = 0$ e $\langle\theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle = 0$.

Se $y = 1$, note que

$$\begin{aligned}
& k = 2y + 4z + 2^{p+1}t - 2n + x \\
\rightarrow \quad & 2^{p+1} > 2y + 4z + 2^{p+1}t - 2n \\
\rightarrow \quad & 2^{p+1} > 2 + 4(2^p s + r) + 2^{p+1}t - 2(2^p(2q+1) - 1) \\
\rightarrow \quad & 2^{p+1} > 4 + 2^{p+1}(2s + t - 2q) + 4r - 2^{p+1} \\
\rightarrow \quad & 2^{p+2} > 4r + 4 \\
\rightarrow \ & 2^p - 1 > r
\end{aligned}$$

e isto implica que

$$\binom{r}{r'} = \binom{r}{2^p - 1 - r} = 0.$$

Portanto para qualquer escolha de θ, temos

$$\langle\theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu^k))\rangle = 0.$$

Logo $(\lambda, \eta\oplus(\lambda\otimes\eta)) \rightarrow \mathbb{RP}(\nu^k)$ borda simultaneamente e consequentemente, $(\eta, \eta, \nu^k) \rightarrow P(1, 2n+1)$ é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

■

Notação 2.4.5. *Denotaremos a ação descrita no teorema acima por* $(N_k; \Psi_k)$.

2.4.2. Classificação das ações

Usando as notações das seções anteriores, podemos enunciar o teorema principal deste capítulo:

Teorema 2.4.6. *Se $(M;\Phi)$ é uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $F = P(1,2n+1)$, então ou $[(M;\Phi)] = [\Gamma_1^2(V^{4n+5};T')]$, ou $[(M;\Phi)] = [\Gamma_2^2(V^{4n+5};T')]$, ou $[(M;\Phi)] = [(N_k;\Psi_k)]$ (onde $1 \leq k < 2^{p+1}$ e $2n+2 = 2^p(2q+1)$), ou $[(M;\Phi)] = [\Lambda(\xi_1,\xi_2,\xi_3)]$, onde ξ_1, ξ_2 e ξ_3 são fibrados sobre $P(1,2n+1)$ que bordam e $\Lambda(-,-,-)$ é a ação descrita em 1.10.*

Dem.:

Seja $(M;\Phi)$ uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $F = P(1,2n+1)$ e com *fixed-data* igual a $(\nu_1,\nu_2,\nu_3) \to F$.

Da classificação dada para involuções fixando $P(1,2n+1)$, existem duas possibilidades para os fibrados ν_i: ou $\nu_i = \eta^2$ ou ν_i é um fibrado que borda, com $\omega(\nu_i) = (1+c)^{a_i}(1+c+d)^{2b_i}$.

Se os fibrados ν_1, ν_2 e ν_3 bordam, então $[(M;\Phi)] = [\Lambda(\nu_1,\nu_2,\nu_3)]$, caso este já classificado em 1.10

Consideremos então as possibilidades oriundas de se impor $\nu_1 = \eta$.

A ideia aqui é usar uma forma o Teorema 1.11.3 para mostrar que não existe outras possibilidades para o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $P(1,2n+1)$ a não ser o das ações já classificadas. Isto será obtido por uma sucessão de resultados técnicos.

Observação 2.4.7. *Em relação ao fibrado linha $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta)$, sabemos que $H^*(\mathbb{RP}(\eta))$ é um $H^*(P(1,2n+1))$-módulo gerado por $e \in H^1(\mathbb{RP}(\eta))$ e relação $e^2+ce+d=0$. Temos ainda as classes características*

$$W(\lambda) = 1+e$$

e

$$\begin{aligned} W(\mathbb{RP}(\eta)) &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}\{(1+e)^2+c(1+e)+d\} \\ &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}\{1+e^2+c+ce+d\} \\ &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}(1+c) \\ &= (1+c)^2(1+c+d)^{2n+2} \\ &= (1+c+d)^{2n+2} \\ &= (1+d)^{2n+2}. \end{aligned}$$

Lema 2.4.8. *Não existe ação de $\mathbb{Z}_2^2$ em uma variedade fechada M fixando $P(1, 2n+1)$ com* fixed-data (η, η, η).

Dem.:

$$W(\eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) = (1+c+d)((1+e)^2 + (1+e)c + d) \tag{2.1}$$

$$= (1+c+d)(1+c) = 1 + d + dc \tag{2.2}$$

Logo, tomando $\theta = \omega_1(\lambda)\omega_3(\omega_2)^{2n} = ced^{2n+1}$ obtemos o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\eta)) \rangle = 1$. Isto implica que o par $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \eta))$ não borda simultaneamente. Logo, $(\eta, \eta, \eta) \to P(1, 2n+1)$ não é *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

□

Lema 2.4.9. *Se $(\eta, \nu_2, \nu_3) \to P(1, 2n+1)$ é o* fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$, onde ν_2 e ν_3 bordam, então* $\dim(\nu_2) = \dim(\nu_3) = 0$.

Dem.:

Lembre que $H^*(\mathbb{RP}(\eta))$ é um $H^*(P(1, 2n+1))$-módulo gerado pela classe de homologia $e \in H^1(\mathbb{RP}(\eta))$ com relação $e^2 + ce + d = 0$. Temos ainda as classes características

$$W(\lambda) = 1 + e,$$

$$\begin{aligned} W(\mathbb{RP}(\eta)) &= (1+c)(1+c+d)^{2n+2}\{(1+e)^2 + c(1+e) + d\} \\ &= (1+d)^{2n+2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W(\nu_2 \oplus (\lambda \otimes \nu_3)) &= (1+c)^{a_2}(1+d)^{b_2}(1+c+e)^{a_3}[(1+e)^2 + d]^{2b_3}(1+e)^{k_3 - a_3 - 4b_3} \\ &= (1+c)^{a_2}(1+d)^{b_2}(1+c+e)^{a_3}(1+e)^{k_3 - a_3 - 4b_3} \end{aligned}$$

Tomando $\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = W(\nu_2 \oplus (\lambda \otimes \nu_3))W(\lambda)^{4b_3 + a_2 - k_3}$,

$$\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1+c)^{a_2}(1+c+d)^{b_2} \begin{cases} (1+c+e) & ; \ a_3 = 1 \\ 1 & ; \ a_3 = 0. \end{cases}$$

Lema 2.4.10. $a_2 = a_3 = 0$

Dem.:

Se $a_2 + a_3 = 1$, então $\overline{\omega}_1 = (a_2 + a_3)c + a_3 e = c + e$ e podemos considerar as classes $\theta_1 = \overline{\omega}_1 + e = c$, $\theta_2 = e^2 + c\theta_1 = d$ e $\theta = \theta_1\theta_2^{2n+1}e^{k-1} = cd^{2n+1}e^{k-1}$. Podemos então formar o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\eta))\rangle = 1$, contrariando a hipótese de $(\lambda, \nu_2 \oplus (\lambda \otimes \nu_3)) \to \mathbb{RP}(\eta)$ bordar simultaneamente.

Logo, $a_2 = a_3$.

Se $a_2 = a_3 = 1$, então

$$\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1 + e + ce)(1 + d)^{2b_3}.$$

Podemos então tomar as classes $\overline{\omega}_2 = ce$ e $\theta_2 = e^2 + \overline{\omega}_2 = d$ para formar a classe $\theta = \overline{\omega}_2 e^{k-2}\theta^{2n+1} = cd^{2n+1}e^{k-1}$, que providencia o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\eta))\rangle = 1$, contrariando a hipótese de $(\lambda, \nu_2 \oplus (\lambda \otimes \nu_3)) \to \mathbb{RP}(\eta)$ bordar simultaneamente.

$\therefore a_2 = a_3 = 0$ □

Estamos então na situação em que

$$W(\nu_i) = (1 + d)^{2b_i}, \quad i = 2, 3.$$

Suponha, por absurdo, que $\dim(\nu_2) = k_2 > 0$.

Podemos então calcular a classe de cobordismo simultâneo da lista $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \nu_3)) \to \mathbb{RP}(\nu_2)$. Temos

$$W(\eta \oplus (\lambda \otimes \nu_3)) = (1 + c + d)(1 + e^2 + d)^{2b_3}(1 + e)^{k_3 - 4b_3}$$

Tomando $\overline{W}(\mathbb{RP}(\nu_2)) = W(\eta \oplus (\lambda \otimes \nu_3))W(\lambda)^{4b_3 - k_3} = (1 + c + d)(1 + e^2 + d)^{2b_3}$, podemos formar a classe $\theta = \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2^{2n+1}e^{k_2-1} = cd^{2n+1}e^{k_2-1}$ e obter o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu_2))\rangle = 1$, contrariando a hipótese de $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \nu_3)) \to \mathbb{RP}(\nu_2)$ bordar simultaneamente.

Portanto, $k_2 = 0$. Com cálculos idênticos, mostra-se que $\dim(\nu_3) = k_3 = 0$. Logo, $(\eta, \nu_2, \nu_3) = (\eta, 0, 0)$, que é o *fixed-data* de $(V, T', Id) = \Gamma_1^1(V, T')$.

$\square$

Lema 2.4.11. *Se $\nu \to P(1, 2n+1)$ borda e $(\eta, \eta, \nu) \to P(1, 2n+1)$ é o* fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $P(1, 2n+1)$, então ν é como descrito no Teorema 2.4.3 ou é obtido do fibrado tangente de $P(1, 2n+1)$ por remoção de secções ([22], Teorema 2).*

Dem.:

Como ν borda, $W(\nu) = (1+c)^a(1+c+d)^{2b}$.

Lema 2.4.12. *A classe de Stiefel-Whitney de ν é $W(\nu) = (1+c)(1+c+d)^{2b}$.*

Dem.:

Se $a = 0$, então

$$\begin{aligned} W(\eta \oplus (\lambda \otimes \nu)) &= (1+c+d)((1+e)^2 + (1+e)c + d)^{2b}(1+e)^{k-4b} \\ &= (1+c+d)(1+c+e^2+ec+d)^{2b}(1+e)^{k-4b} \\ &= (1+c+d)(1+c)^{2b}(1+e)^{k-4b} \\ &= (1+c+d)(1+e)^{k-4b}. \end{aligned}$$

Tomando $\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = W(\eta \oplus (\lambda \otimes \nu))W(\lambda)^{4b-k}$, obtemos as classes $\overline{\omega}_1 = c$ e $\overline{\omega}_2 = d$, e podemos formar a classe $\theta = \overline{\omega}_1 {\overline{\omega}_2}^{2n+1}$, que nos fornece o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\eta)) \rangle = 1$, contrariando a hipótese de $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \nu_3)) \to \mathbb{RP}(\nu_2)$ bordar simultaneamente.

$\square$

Pelos Lemas 2.4.12 e 2.4.2, basta analisarmos a classe de cobordismo simultâneo da lista $(\lambda, \eta \oplus (\lambda \otimes \eta)) \to \mathbb{RP}(\nu)$.

Considere as classes

$$W(\mathbb{RP}(\nu)) = (1+c)(1+c+d)^{2n+2}(1+e+c)[(1+e)^2+(1+e)c+d]^{2b}(1+e)^{k-4b-1}$$
$$= (1+e+ec)(1+d)^{2n+2}[(1+e)^2+(1+e)c+d]^{2b}(1+e)^{k-4b-1}$$

e

$$W(\eta\oplus(\lambda\otimes\eta)) = (1+c+d)((1+e)^2+(1+e)c+d).$$

Defina

$$\breve{W}(\mathbb{RP}(\nu)) = W(\mathbb{RP}(\nu))W(\lambda)^{4b-k}$$
$$= (1+e+ec)(1+c+d)^{2n+2}[(1+e)^2+(1+e)c+d]^{2b}$$
$$= (1+e+ec)(1+d)^{2n+2-2b}[(1+c+d)((1+e)^2+(1+e)c+d)]^{2b}$$

e

$$\widetilde{W}(\mathbb{RP}(\nu)) = 1+e+\breve{\omega}_2$$
$$= 1+e+ce$$

Podemos então definir

$$\overline{W} = \breve{W}\widetilde{W}^{-1}W(\eta\oplus(\lambda\otimes\eta))^{-1}$$
$$= (1+d)^{2n+2-2b}.$$

Se $2n+2-2b = 2^p(2k+1)$, então todo número característico da lista $(\lambda, \eta\oplus(\lambda\otimes\eta)) \to \mathbb{RP}(\nu)$ é soma de números da forma

$$\langle\theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu))\rangle$$

onde $\theta = e^x(ec)^y[d(e^2+ce+d)]^z d^{2^p t}$ com $x+2y+4z+2^{p+1}t = k+4n+2$.

Lema 2.4.13. *Temos que* $\dim(\nu) = k < 4n+4$.

Dem.:

De fato, se $k \geq 4n+4$, podemos formar a classe

$$\begin{aligned}
\theta &= e^{k-4n-4}(ec)d^{2n+1}(e^2+ec+d)^{2n+1} \\
&= e^{k-4n-4}d^{2n+1}(ec)(e^2+ec)^{2n+1} \\
&= e^{k-4n-4}d^{2n+1}(ec)e^{4n+2} \\
&= cd^{2n+1}e^{k-1}
\end{aligned}$$

e obter o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu))\rangle = 1$.

$\square$

Lema 2.4.14. *Se $0 < 2b < 2n+2$, então $(\eta, \eta, \nu) \to P(1, 2n+1)$ não é o* fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.*

Dem.:

Se $0 < 2b < 2n+2$, então de $W(\nu) = (1+c)(1+c+d)^{2b}$ concluímos que $\omega_{4b+1} = cd^{2b} \neq 0$, e isto implica que $k \geq 4b+1$.

Podemos então tomar $\theta = e^{k-4b+4n+4-4b}(ec)\{d(e^2+ce+d)\}^{2b-1}$ e obter o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu_3))\rangle$, que é o coeficiente de cd^{2n+1} em

$$\begin{aligned}
\frac{cd^{2b-1}(1+c+d)^{2b-1}}{(1+c)(1+c+d)^{2b}} &= \frac{cd^{2b-1}}{(1+c)(1+c+d)} \\
&= \frac{cd^{2b-1}}{(1+d)} \\
&= cd^{2b-1}(1+d+d^2+\cdots)
\end{aligned}$$

que é não nulo.

$\square$

Lema 2.4.15. *Se $2b > 2n+2$, então $(\eta, \eta, \nu) \to P(1, 2n+1)$ não é o* fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.*

Dem.:

Observação 2.4.16. *Existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $2^s < 2n+1 < 2n+2 \leq 2^{s+1}$, e se $2b \geq 2^{s+1}$, pelo algoritmo da divisão, $2b = 2^{s+1}t + r$ e*

$$(1+d)^{2b} = (1+d)^{2^{s+1}t}(1+d)^r = (1+d^{2^{s+1}})^t(1+d)^r = (1+d)^r.$$

Portanto, podemos sempre considerar $0 \leq 2b < 2^{s+1}$.

Portanto, o caso $2b > 2n+2$ se aplica quando $2^s < 2n+1 < 2n+2 < 2b < 2^{s+1}$.

Existem naturais p e q tais que $2b - (2n+2) = 2^p(2q+1)$, com $2^p < 2^s$.

Como $2^s < 2b < 2^{s+1}$, podemos escrever $2b = 2^s + r$, com $r < 2^s$.

Assim,

$$\begin{aligned} W(\nu_1) &= (1+c)(1+c+d)^{2b} \\ &= (1+c)(1+d)^{2b} \\ &= (1+c)(1+d)^{2^s+r} \\ &= (1+c)(1+d^{2^s})(1+d)^r \end{aligned}$$

ou seja, $\omega_{2^{s+1}+1} = cd^{2^s} \neq 0$ e $k \geq 2^{s+1}+1$.

Considerando $\overrightarrow{W} = \overline{W}^{(-1)} = (1+d)^{2b-2n-2} = (1+d)^{2^p(2q+1)}$, obtemos a classe $\overrightarrow{\omega}_{2^{p+1}} = d^{2^p}$.

Usando o algoritmo da divisão, obtemos que $2n+1 = 2^p t_0 + r$ e $2b = 2^p t_1 + r + 1$, com $r < 2^p < 2^{s+1}$.

Tomando a classe

$$\begin{aligned} \theta &= e^{k-2r-2}(ce)\{d(e^2+ce+d)\}^r d^{2^p t_0} \\ &= e^{k-2r-1}c(e^2+c+d)^r d^{2^p t_0 + r} \\ &= e^{k-2r-1}c(e^2+d)^r d^{2n+1} \\ &= e^{k-2r-1}ce^{2r}d^{2n+1} \\ &= cd^{2n+1}e^{k-1} \end{aligned}$$

obtemos o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(\nu)) \rangle = 1$. □

Pela análise de todos os possíveis casos de candidatos a *fixed-data* de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $P(1, 2n+1)$, o teorema segue.

■

Capítulo 3

Ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$

3.1. Involuções fixando $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$

Antes de estudarmos a classificação de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando um conjunto de pontos específico, é necessário, embora não suficiente, conhecer a classificação das involuções fixando esse conjunto de pontos. No caso das involuções fixando $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$, isto foi feito por A. Ramos e P. Pergher em um artigo em fase de redação, e optamos, para facilitar o trabalho da banca, por colocar as demonstrações de Adriana Ramos e Pedro Pergher ao final do trabalho, como apêndice.

Notação 3.1.1. *Durante este todo este capítulo e o seguinte, dados inteiros positivos m e n, denotaremos o gerador do anel de cohomologia $H^*(K_dP(m))$ por $\alpha_d \in H^d(K_dP(m))$, e o gerador do anel de cohomologia $H^*(K_eP(n))$ por $\beta_e \in H^e(K_eP(n))$.*

Definição 3.1.2. *Dado $m \in \mathbb{N}$, podemos definir em $K_dP(2m+2)$ uma involução τ^0_{2m+1} por:*

$$\tau^0_{2m+1}([z_0, z_1, \ldots, z_{2m+1}, z_{2m+2}]) = [z_0, z_1, \ldots, z_{2m+1}, -z_{2m+2}]$$

O conjunto de pontos fixados é $K_dP(2n+1) \cup \{[(0, \ldots, 0, 1)]\}$, com fibrado normal

$$\begin{array}{ccc} \gamma^d & & R^{(2m+2)d-1} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2n+1) & & pto \end{array},$$

onde o γ^d é o fibrado linha d-dimensional canônico e $R(2m+2)d-1$ é o fibrado vetorial $(2m+2)d-1$-dimensional trivial.

O teorema a seguir providencia a classificação, a menos de cobordismo equivariante, das involuções fixando $F = K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$.

Teorema 3.1.3. *(A.1) Se $(M;T)$ é uma involução fixando $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$, então ou $[(M;T)] = 0$ ou $[(M;T)] = [(K_dP(2m+2);\tau^0_{2m+1})] + [(K_eP(2n+2);\tau^0_{2n+1})]$, com $(2m+2)d = (2n+2)e$.*

□

Em termos dos possíveis *fixed-data*, a classificação em questão dá origem ao:

Corolário 3.1.4. *Se (M,T) é uma involução fixando $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$, então seu* fixed-data *é da forma*

(a)

$$\begin{array}{ccc} \eta^k & & \xi^l \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

onde η^k e ξ^l bordam individualmente;

ou

(b)

$$\begin{array}{ccc} \gamma^d & & \gamma^e \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

onde γ^d e γ^e são os respectivos fibrados linha canônicos (sob os respectivos corpos), com $(2m+2)d = (2n+2)e$.

3.2. Ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $F = K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$

O teorema a seguir providencia algumas ações de $\mathbb{Z}_2^2$ (exóticas) fixando $F = K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$.

Teorema 3.2.1. *Sejam m e n tais que $(2m+2)d = (2n+2)e$ e tais que $2m+2$ não seja potência de 2. Sejam $t, j \geq 0$ tais que $2n+2 = 2^t(2j+1)$ e tome inteiros k e l satisfazendo $k = l + e - d$. Então $\big((R^k, \gamma_d, \gamma_d) \to K_dP(2m+1)\big) \cup \big((R^l, \gamma_e, \gamma_e) \to K_eP(2n+1)\big)$ é o* fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $F = K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$ se, e somente se, $l \leq (2^t - 1)e$.*

Dem.:

passo 1: $l \leq (2^t - 1)e$

De fato, suponha $l > (2^t - 1)e$. Como

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbb{RP}(R^k)) &= (2m+1)d + k - 1 \\
&= (2m+2)d - d + l + e - d - 1 \\
&= (2n+2)e + l + e - 2d - 1 \\
&= (2n+1)e + l - 1 + 2e - 2d \\
&> (2n+1)e + l - 1 \\
&= \dim(\mathbb{RP}(R^l)),
\end{aligned}$$

ao usarmos o teorema 1.11.3, olhamos as classes de cobordismo simultâneo das listas $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to \mathbb{RP}(R^k)$ e de $(\lambda, \gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \to \mathbb{RP}(R^l)$ em separado. De fato, nos concentraremos na classe de cobordismo simultâneo de $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to \mathbb{RP}(R^k)$.

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(R^k))$ é um $H^*(K_dP(2m+1))$-módulo gerado por $c \in H^1((\mathbb{RP}(R^k)))$ e com relação $c^k = 0$.

Observação 3.2.2. *Fixado $2m+2$, sejam s e j inteiros não negativos tais que $2m+2 = 2^s(2j+1)$. Assim, $(2m+2)d = (2n+2)e = 2^t(2j+1)e$ implica em $2m+2 = 2^t(2j+1)e/d$, isto é, $2^s d = 2^t e$.*

A partir da classes de Stiefel-Whitney do fibrado linha e do fibrado tangente,

$$W(\lambda) = 1 + c$$

e

$$W(\mathbb{RP}(R^k)) = (1 + \alpha_d)^{2m+2}(1 + c)^k,$$

obtemos a classe

$$\begin{aligned}
\overline{W}(\mathbb{RP}(R^k)) &= W(\mathbb{RP}(R^k))W(\lambda)^{-k} \\
&= (1+\alpha_d)^{2m+2} \\
&= (1+\alpha_d)^{2^s(2j+1)} \\
&= 1 + \alpha_d^{2^s} + \text{elementos com graus cohomológicos maiores.}
\end{aligned}$$

Temos também a classe

$$\begin{aligned}
W(\gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) &= (1+\alpha_d)(1+\alpha_d + c^d) \\
&= 1 + c^d + \alpha_d(\alpha_d + c^d).
\end{aligned}$$

Se $l > (2^t-1)e$, então $k > (2^s-1)d$:

$l > (2^t-1)e$ implica em $k > (2^t-1)e + e - d = 2^te - d = 2^sd - d = (2^s-1)d$

Tomemos então a classe

$$\theta = \overline{\omega}_{2^sd}^{2j}\omega_{2d}(\gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d))^{2^s-1}\omega_1(\lambda)^{k-1-(2^s-1)d} = \alpha_d^{2m+1}c^{k-1},$$

que nos fornece o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(R^k))\rangle = 1$.

Logo, $\big((R^k, \gamma_d, \gamma_d) \to K_dP(2m+1)\big) \cup \big((R^l, \gamma_e, \gamma_e) \to K_eP(2n+1)\big)$ não é *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ quando $l > (2^t-1)e$.

passo 2: caso $l = (2^t-1)e$

Note que se o lema é verdadeiro para $l = (2^t-1)e$, então pelo Teorema de remoção de secções triviais ([22], Teorema 2), o lema vale para todo $l \leq (2^t-1)e$.

Usaremos o Teorema 1.11.3 para mostrar que a lista

$$\begin{array}{ccc}
(R^k, \gamma_d, \gamma_d) & & (R^l, \gamma_e, \gamma_e) \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1)
\end{array}$$

é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ quando $l = (2^t-1)e$.

(a) Ao testar a primeira condição do Teorema 1.11.3, como $\dim(\mathbb{RP}(R^k)) > \dim(\mathbb{RP}(R^l))$, olhamos as classes de cobordismo simultâneo das listas $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to \mathbb{RP}(R^k)$ e de $(\lambda, \gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \to \mathbb{RP}(R^l)$ em separado.

Uma classe característica da lista de fibrados $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to \mathbb{RP}(R^k)$ de dimensão $(2m+1)d + k - 1$ é uma soma de termos da forma

$$\theta = \alpha_d^{2^s z}[\alpha_d(\alpha_d + c^d)]^y c^x,$$

com $2^s zd + 2dy + x = (2m+1)d + k - 1$.

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\theta &= \alpha_d^{2^s z}[\alpha_d(\alpha_d + c^d)]^y c^x \\ &= \sum_{i=0}^{y} \binom{y}{i} \alpha_d^{[2^s z + 2y - i]} c^{x+id},\end{aligned}$$

onde $k = (2^s - 1)d$ e $2m + 2 = 2^s(2j+1)$.

Note que $2^s z + 2y - i > 2m+1$ implica em $\alpha_d^{2^s z + 2y - i} = 0$ e $2^s + 2y - i < 2m+1$ implica em $x + id > k - 1$ e, consequentemente, $c^{x+id} = 0$. Portanto,

$$\theta = \binom{y}{i} \alpha_d^{2m+1} c^{k-1},$$

se existir $0 \leq i \leq y$ tal que $x + id = k - 1$, e caso contrário,

$$\theta = 0.$$

Mostraremos a seguir que se existe i tal que $x + id = k - 1$, então $\binom{y}{i} = 0$.

Observe que, neste caso, $2^s z + 2y - i = 2m + 1 = 2^{s+1}j + 2^s - 1$, e portanto $\binom{2y-i}{2^s-1} = 1$. Note também que $x + id = k - 1 = (2^s - 1)d - 1$ implica em $i < 2^s - 1$.

Lema 3.2.3. *Se* $\binom{2y-i}{2^s-1} = 1$ *e* $\binom{y}{i} = 1$, *então i é da forma $i = 2^s u + 2^2 - 1$. Em particular, $i \geq 2^s - 1$.*

Dem.:

Suponha que $\binom{2y-i}{2^s-1} = 1$ e $\binom{y}{i} = 1$.

Se $\binom{2y-i}{2^s-1} = 1$, então i é ímpar. Supondo, por absurdo, que $i \neq 2^s u + 2^2 - 1$ para todo inteiro u, então existe um menor $a < a + 1 < s$ tal que 2^a está na partição diádica de i, mas 2^{a+1} não está na partição diádica de i.

Como $\binom{y}{i} = 1$, temos que $1, 2, \ldots, 2^a$ estão na partição diádica de y. Logo, calculando $2y - i$, $1, 2, \ldots, 2^a$ são elementos da partição diádica de $2y - i$, mas 2^{a+1} não, contrariando $\binom{2y-i}{2^s-1} = 1$.

□

Como $\binom{2y-i}{2^s-1} = 1$ e $i < 2^s - 1$, segue que $\binom{y}{i} = 0$.

Portanto, o número característico $\langle \theta; \sigma(\mathbb{RP}(R^k)) \rangle$ é zero para todo θ.

Logo, a lista $(\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to \mathbb{RP}(R^k)$ borda simultaneamente.

Por cálculos iguais, a lista $(\lambda, \gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \to \mathbb{RP}(R^l)$ também borda simultaneamente.

(b) Prosseguimos testando a segunda e terceira condição do Teorema 1.11.3, que neste caso são iguais. Isto é, calcularemos o cobordismo simultâneo de

$$\begin{array}{ccc} \big(\lambda, R^k \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)\big) & & \big(\lambda, R^l \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\big) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\gamma^d) & & \mathbb{RP}(\gamma^e) \end{array} .$$

Como $\dim(\mathbb{RP}(\gamma^d)) = (2m+2)d = (2n+2)e = \dim(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ e $k + d = l + e$, precisamos comparar os valores característicos correspondentes das listas de fibrados $\big(\lambda, R^k \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)\big) \to \mathbb{RP}(\gamma^d)$ e $\big(\lambda, R^l \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\big) \to \mathbb{RP}(\gamma^e)$.

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^d))$ é um $H^*(K_dP(2m+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^d))$ e relação $c^d = \alpha_d$, e o anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^d))$ e relação $c^e = \beta_e$.

Temos as classes de Stiefel-Whitney

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}^k \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) &= (1 + \alpha_d + c^d) \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W(\xi \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) &= (1 + \beta_e + c^e) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo os candidatos a números característicos correspondentes diferentes são números característicos provindos de $\big(\lambda \to \mathbb{RP}(\gamma^d)\big) \cup (\lambda \to \mathbb{RP}(\gamma^e))$, os quais já sabemos serem todos iguais, pois $\big(\gamma^d \to K_dP(2m+1)\big) \cup (\gamma^e \to K_eP(2n+1))$ é o *fixed-data* de uma involução.

Portanto, pelo Teorema 1.11.3, existe uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ cujo *fixed-data* é $\big((R^k, \gamma_d, \gamma_d) \to K_dP(2m+1)\big) \cup \big((R^l, \gamma_e, \gamma_e) \to K_eP(2n+1)\big)$ quando $l \leq (2^t - 1)e$.

Isto completa a demonstração do Teorema.

$\blacksquare$

Notação 3.2.4. *A classe* $[(K_dP(2m+2); \tau^0_{2m+1})] + [(K_eP(2n+2); \tau^0_{2n+1})]$ *possui um representante cujo* fixed-data *é* $(\gamma^d \to K_d(2m+1)) \cup (\gamma^e \to K_eP(2n+1))$, *que denotaremos por* $(N; S)$.

Notação 3.2.5. *Sejam* m *e* n *tais que* $(2m+2)d = (2n+2)e$ *e* $2n+2 = 2^t(2j+1)$, *com* $j \neq 0$. *Denote por* $(N'_l; S', T')$ *uma ação (exótica) de* $\mathbb{Z}_2^2$, *dada pelo Teorema 3.2.1, que fixa* $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$, *cujo* fixed-data *é*

$$\begin{array}{ccc} (R^k, \gamma_d, \gamma_d) & & (R^l, \gamma_e, \gamma_e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

onde $0 \leq l \leq (2^t - 1)e$ *e* $k = l + e - d$.

Sejam m e n tais que $(2m+2)d = (2n+2)e = 2^t$ para algum inteiro positivo t. Então o fibrado tangente a $K_dP(2m+1)$ possui mesma dimensão e mesma classe de Stiefel-Whitney que o fibrado trivial $R^{(2m+1)d} \to K_dP(2m+1)$. O mesmo ocorre em relação ao fibrado tangente a $K_eP(2n+1)$ e o fibrado trivial $R^{(2n+1)e} \to K_eP(2n+2)$. De fato, $W(\tau_{K_dP(2m+1)}) = (1+\alpha_d)^{2^t} = 1 + \alpha_d^{2^t} = 1$, e analogamente para $\tau_{K_eP(2n+1)}$.

Então

$$\begin{array}{ccc} (R^{(2m+1)d}, \gamma^d, \gamma^d) & & (R^{(2n+1)e}, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

é simultaneamente cobordante a

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{(2m+1)d}, \gamma^d, \gamma^d) & & (\tau^{(2n+1)e}, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

que é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$. A saber, a ação $\Gamma_2^2(N;S)$ composta com um automorfismo de $\mathbb{Z}_2^2$.

Logo,

$$\begin{array}{ccc} (R^{(2m+1)d}, \gamma^d, \gamma^d) & & (R^{(2n+1)e}, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

também é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$. Por [22], Teorema 2,

$$\begin{array}{ccc} (R^k, \gamma^d, \gamma^d) & & (R^l, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

é *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$, para todo $0 \leq l \leq (2n+1)e$ e $k = l + e - d$.

Notação 3.2.6. *Denote por* $(\overline{N}_l, \Phi)$ *a ação de* $\mathbb{Z}_2^2$ *cujo* fixed-data *é*

$$\begin{array}{ccc} (R^k, \gamma^d, \gamma^d) & & (R^l, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array}.$$

Teorema 3.2.7. *Se* $(M; T_1, T_2)$ *é uma ação de* $\mathbb{Z}_2^2$ *fixando* $F = K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$, *então a menos de um automorfismo de* $\mathbb{Z}_2^2$, $[(M; T_1, T_2)]$ *é igual a:*

(i) 0 *, isto é, a ação borda equivariantemente.*

ou

(ii) $[\Gamma_2^2(N;S)]$

ou

(iii) $[\Gamma_1^2(N;S)]$

ou

(iv) $[(N_l'; S', T')]$, *com* $(2m+2)d = (2n+2)e$, $2n+2 = 2^t(2j+1)$ *não é potência de* 2 *e* $0 \leq l \leq (2^t-1)e$;

ou

(v) $[(\overline{N}_l; \Phi)]$, *com* $(2m+2)d = (2n+2)e$, $2n+2 = 2^t$ *e* $0 \leq l \leq (2n+1)e$.

Dem.:

Seja $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \to F$ o *fixed-data* de $(M; T_1, T_2)$. Sabemos então que cada $\nu_i \to F$ é o *fixed-data* de uma involução fixando F. Segue da classificação de involuções fixando $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$ que temos duas possibilidades para cada fibrado normal ν_i:

(a)

$$\begin{array}{ccccc} \nu_i & & \eta^{k_i} & & \xi^{l_i} \\ \downarrow & = & \downarrow & \cup & \downarrow \\ F & & K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

onde η^{k_i} e ξ^{l_i} são fibrados vetoriais bordantes de dimensão k_i e l_i, respectivamente, e classes de Stiefel-Whitney dadas por $W(\eta^{k_i}) = (1+\alpha_d)^{2p_i}$ e $W(\xi^{l_i}) = (1+\beta_e)^{q_i}$;

ou

(b)

$$\begin{array}{ccccc} \nu_i & & \gamma^d & & \gamma^e \\ \downarrow & = & \downarrow & \cup & \downarrow \\ F & & K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

onde γ^d e γ^e são os fibrados linha respectivos, com a condição adicional $(2m+2)d = (2n+2)e$.

Logo, a menos de permutação, temos 4 possibilidades, para o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando F:

1.

$$\begin{array}{ccc} (\eta^{k_1}, \eta^{k_2}, \eta^{k_3}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array} ;$$

2.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^{d}, \gamma^{d}, \gamma^{d}) & & (\gamma^{e}, \gamma^{e}, \gamma^{e}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array} ;$$

3.

$$\begin{array}{ccc} (\eta^{k_1}, \eta^{k_2}, \gamma^{d}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \gamma^{e}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array} ;$$

4.

$$\begin{array}{ccc} (\eta^{k_1}, \gamma^{d}, \gamma^{d}) & & (\xi^{l_1}, \gamma^{e}, \gamma^{e}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array} .$$

Lema 3.2.8. *Para uma lista de fibrados correspondente ao caso 1, existe uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ que borda equivariantemente com este* fixed-data*, exibido em 1.10, pertencente à classe* $[\Lambda(\eta^{k_1}, \eta^{k_2}, \eta^{k_3})] + [\Lambda(\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3})]$.

□

Lema 3.2.9. *Não existe ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $K_dP(2m+1) \cup K_eP(2n+1)$ com* fixed-data *correspondente ao caso 2.*

Dem.:

Como $d < e$, este caso não ocorre por um problema dimensional:

$$(2m+4)d = (2m+2)d + 2d = (2n+2)e + 2d < (2n+4)e.$$

Ou seja, as dimensões totais diferem.

□

Lema 3.2.10. *Se ν_3 é o fibrado linha respectivo sobre cada componente conexa e ν_1 e ν_2 são fibrados bordantes sobre cada componente conexa (caso 3), então ν_1 e ν_2 são os fibrados nulos. Isto é, $[(M; T_1, T_2)]$ e $[\Gamma_1^2(N; S)] = [(N; S, Id)]$ diferem por automorfismo de $\mathbb{Z}_2^2$.*

Dem.:

Por hipótese, sabemos que $(2m+2)d = (2n+2)e$ e que $k_1 + k_2 = l_1 + l_2$.

Observe que para $i = 1$ ou 2, temos que $k_i + (2m+1)d \neq l_i + (2n+1)e$, pois caso contrário, $(2m+1)d > (2n+1)e$ implica em $k_1 < l_1$ e $k_2 < l_2$, contrariando a hipótese de $k_1 + k_2 = l_1 + l_2$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $k_1 + (2m+1)d \neq l_1 + (2n+1)e$. Isto implica que as classes de cobordismo simultâneo das listas $(\lambda, \eta_2 \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) \to \mathbb{RP}(\eta_1)$ e $(\lambda, \xi_2 \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \to \mathbb{RP}(\xi_1)$ devem ser estudadas em separado. Sendo assim:

Se $k_1 > 0$, então $\mathbb{RP}(\eta_1) \neq \emptyset$ e podemos calcular números característicos.

Agora, $W(\eta_2 \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) = (1+\alpha_d)^{2p_2}(1+\alpha_d+c^d)$, com $\omega_d(\eta_2 \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) = \alpha_d + c^d$. Podemos então formar a classe característica $\widetilde{\omega}_d = \omega_d(\eta_2 \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) + \omega_1(\lambda)^d = \alpha_d$. Isto nos permite obter a classe $\alpha_d^{2m+1}c^{k-1}$, com a qual obtemos um número característico não nulo.

Logo, se

$$\begin{array}{ccc} (\eta^{k_1}, \eta^{k_2}, \gamma^d) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ então $k_1 = 0$.

Obtemos $l_1 = 0$ por cálculos iguais.

Como $k_1 = l_1 = 0$, temos que $k_2 = l_2$, e portanto, $k_2 + (2m+1)d \neq l_2 + (2n+1)e$. Por cálculos iguais aos anteriores, temos $k_2 = l_2 = 0$.

Por outro lado,

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d, 0, 0) & & (\gamma^e, 0, 0) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

é o *fixed-data* da ação $(N; S, Id_N)$.

Aplicando um automorfismo de $\mathbb{Z}_2^2$ conveniente, conclui-se a demonstração do Lema.

□

Lema 3.2.11. *Se ν_1 borda sobre cada componente e $\nu_2 = \nu_3$ são os fibrados-linha em cada componente (caso 4), então ou ν_1 é obtido do fibrado tangente através de remoção de secções triviais, ou ν_1 é da forma $(\mathbb{R}^k \to K_dP(2m+1)) \cup (\mathbb{R}^l \to K_eP(2n+1))$, com $k \leq (2^s-1)d$ e $l \leq (2^t-1)e$, respectivamente, onde $2m+2 = 2^s(2i+1)$ e $2n+2 = 2^t(2j+1)$.*

Dem.:

Novamente, faremos uso do Teorema 1.11.3 para o estudo de quando uma lista de fibrados é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Note que $(2m+2)d = (2n+2)e$ e que $k + d = l + e$.

Consideremos primeiramente a classe de cobordismo de

$$\begin{array}{ccc} (\lambda, \eta^k \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) & & (\lambda, \xi^l \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\gamma^d) & & \mathbb{RP}(\gamma^e) \end{array} .$$

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^d))$ é um $H^*(K_dP(2m+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^d))$ com relação $c^d = \alpha_d$, e o anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ com relação $c^e = \beta_e$.

Temos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} W(\mathbb{RP}(\gamma^d)) & = & (1+\alpha_d)^{2m+2}(1+\alpha_d+c^d), \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & (1+\beta_e)^{2n+2}(1+\beta_e+c^e), \end{array} \right.$$

$$\to \left\{ \begin{array}{rcl} W(\mathbb{RP}(\gamma^d)) & = & (1+c)^{(2m+2)d}, \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & (1+c)^{(2n+2)e}. \end{array} \right.$$

Temos também

$$\left\{ \begin{array}{l} W(\eta \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) = (1+\alpha_d)^{2p}(1+\alpha_d+c^d), \\ W(\xi \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) = (1+\beta_e)^{2q}(1+\beta_e+c^e), \end{array} \right.$$

$$\to \begin{cases} W(\eta \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) = (1+c)^{2pd}, \\ W(\xi \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) = (1+c)^{2qe}. \end{cases}$$

Como $W(\lambda) = 1+c$ e todas as classes de cohomologia do espaço base são potências de c, todos os números característicos correspondentes das listas serão coincidentes se, e somente se, $pd = qe$. Esta peça de informação será importante logo adiante.

(Passo 1) Informações gerais antes das análises dos casos:

1. $(1+\alpha_d)^{2m+2-2p}$ e $(1+\alpha_d)^{2p-(2m+2)}$ são classes características
2. $(1+\beta_e)^{2n+2-2q}$ e $(1+\beta_e)^{2q-(2n+2)}$ são classes características.

Olhamos agora para as outras duas condições do Teorema 1.11.3, que neste caso são idênticas.

Consideremos primeiramente a classe de cobordismo de

$$\begin{array}{ccc} (\lambda, \gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) & & (\lambda, \gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\eta^k) & & \mathbb{RP}(\xi^l) \end{array} .$$

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\eta^k))$ é um $H^*(K_dP(2m+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\eta^k))$ com relação provinda do fato de que o elemento de grau cohomológico k em $(1+\alpha_d+c^d)^{2p}(1+c)^{k-2pd}$ é nulo, e o anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\xi^l))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\xi^l))$ com relação de provinda do fato de que o elemento de grau cohomológico l em $(1+\beta_e+c^e)^{2q}(1+c)^{l-2qe}$ é nulo.

Temos

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\eta)) = (1+\alpha_d)^{2m+2}(1+\alpha_d+c^d)^{2p}(1+c)^{k-2pd}, \\ W(\mathbb{RP}(\xi)) = (1+\beta_e)^{2n+2}(1+\beta_e+c^e)^{2q}(1+c)^{l-2qe}, \end{cases}$$

e temos também

$$\begin{cases} W(\gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) = (1+\alpha_d)(1+\alpha_d+c^d), \\ W(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) = (1+\beta_e)(1+\beta_e+c^e). \end{cases}$$

Reserve em mente as seguintes classes características, que serão usadas no decorrer da demonstração sem mais comentários:

$$\begin{cases} \omega_{2d}(\gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d)) = \alpha_d(\alpha_d + c^d), \\ \omega_{2e}(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) = \beta_e(\beta_e + c^e). \end{cases}$$

Como $k + (2m+1)d \neq l + (2n+1)e$, olhamos os números característicos das listas em separado.

(Passo 2)

Lema 3.2.12. *Se a lista do lema principal é o* fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$, então $k \leq (2m+1)d$ e $l \leq (2n+1)e$.*

Dem.:

Como $k + (2m+1)d \neq l + (2n+1)e$, olhamos os números característicos das listas em separado.

Se $k > (2m+1)d$, podemos formar a classe $\theta = [\alpha_d(\alpha_d + c^d)]^{2m+1}c^{k-1-(2m+1)d}$. Usando a relação $\alpha_d^{2m+2} = 0$, temos que $\theta = \alpha_d^{2m+1}c^{k-1}$, isto é, podemos obter o número característico $\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\eta)) \rangle = 1$.

Logo, $k \leq (2m+1)d$. Por cálculos idênticos, temos também $l \leq (2n+1)e$.

$\square$

(Passo 3) Divisão em casos:

Temos 4 possibilidades para p:

1. $2p = 2m+2$;
2. $2^s < 2m+2 < 2p < 2^{s+1}$;
3. $0 < 2p < 2m+2$;
4. $p = 0$.

1. Se $2p = 2m+2$, então $2q = 2n+2$ e (ν_1, ν_2, ν_3) é o *fixed-data* de uma ação já citada anteriormente.

2. Se $2^s < 2m+2 < 2p < 2^{s+1}$, então (ν_1, ν_2, ν_3) não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Observe que $2^s < 2p < 2^{s+1}$ implica que $\binom{2p}{2^s} = 1$, e que $2^s < 2m+1$ implica em $\alpha_d^{2^s} \neq 0$.

Logo, $\omega_{2^s}(\eta) = \binom{2p}{2^s}\alpha_d^{2^s} \neq 0$, e portanto $k \geq 2^s d$.

Considere a classe $\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = W(\mathbb{RP}(\eta))^{-1}W(\gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d))^{2p}W(\lambda)^{k-2pd}$. Temos

$$\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1+\alpha_d)^{2p-2m+2}.$$

Sejam t e r tais que $2^t(2r+1) = 2p-(2m+2)$. Logo, $\overline{\omega}_{2^t d}(\mathbb{RP}(\eta)) = \alpha_d^{2^t}$ é uma classe característica, factível de participar de um número característico.

Sejam u e v tais que $2m+1 = 2^t u + v$, com $v < 2^t < 2^s$ (algoritmo da divisão). Como $vd < 2^s d \leq k$, podemos formar a classe característica

$$\theta = \alpha_d^{2^t u}[\alpha_d(\alpha_d + c^d)]^v c^{k-1-vd} = \alpha_d^{2m+1}c^{k-1}$$

que providencia o número característico $\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\eta)) \rangle = 1$.

3. Se $0 < 2p < 2m+2$, então (ν_1, ν_2, ν_3) não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Como $2p \leq 2m+1$, $\alpha_d^{2p} \neq 0$, implicando em $2pd \leq k$.

Tome a classe característica $\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = W(\mathbb{RP}(\eta))W(\gamma^d \oplus (\lambda \otimes \gamma^d))^{-2p}W(\lambda)^{2pd-k}$, com

$$\overline{W}(\mathbb{RP}(\eta)) = (1+\alpha_d)^{2m+2-2p}.$$

Temos também que $2m+1 \geq 2m+2-2p$. Logo, $\overline{\omega}_{(2m+2-2p)d} = \alpha_d^{2m+2-2p} \neq 0$.

Podemos então formar a classe

$$\theta = \alpha_d^{2m+2-2p}[\alpha_d(\alpha_d + c^d)]^{2p-1}c^{k-1-(2p-1)d} = \alpha_d^{2m+1}c^{k-1}$$

que nos fornece o número característico $\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\eta)) \rangle = 1$.

4. Se $p = 0$, então (ν_1, ν_2, ν_3) é simultaneamente cobordante a

$$\begin{array}{ccc} (R^{k_1}, \gamma^d, \gamma^d) & & (R^{l_1}, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m+1) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

caso este já estudado.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$

Este capítulo será dedicado ao estudo de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, com $d = 1$ ou 2, $e = 2$ ou 4 e $d < e$.

Antes enunciaremos uma série de resultados conhecidos sobre involuções fixando $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$ obtidos por Adriana Ramos e Pedro Pergher, em um paper em fase de redação, e optamos, para facilitar o trabalho da banca, por colocar as demonstrações de Adriana Ramos e Pedro Pergher ao final do trabalho, como apêndice.

4.1. Classificação de involuções fixando $K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$

Observação 4.1.1.

(I) *se $(M^r; T)$ e $(V^r; S)$ são involuções tais que $F_T = K_dP(m)$ e $F_S = K_eP(n)$, respectivamente, então $(M^r \sqcup V^r; T \sqcup S)$ é uma involução com $F_{T\sqcup S} = K_dP(m) \cup K_eP(n)$;*

(II) *se $(M^r; T)$ e $(V^r; S)$ são involuções tais que $F_T = * \cup K_dP(m)$ e $F_S = * \cup K_eP(n)$, então existe uma involução $(N^r; U) \in [(M^r \sqcup V^r; T \sqcup S)]$ cujo conjunto de pontos fixos é $F_U = K_d(m) \cup K_eP(n)$.*

Tendo em mente a classificação das classes de cobordismo equivariante de involuções fixando $K_dP(n)$ e $K_dP(n) \cup *$ (com $d = 1, 2$ ou 4 e $n > 1$), encontrados em ([28], capítulos 2 e 3), e denotando por $\mathcal{A}(F)$ o conjunto de todas classes de cobordismo de involuções fixando F, temos que:

(a)
$$\mathcal{A}(K_dP(2n+1)) = \{0 \in \mathcal{I}_r(\mathbb{Z}_2) : r \geq d(2n+1)\};$$

$$\mathcal{A}(K_dP(2n+1) \cup *) = \{[(K_dP(2n+2); \tau^0_{2n+1})]\}.$$

(b)
$$\mathcal{A}(K_dP(2m)) = \{[K_dP(2m); Id], [K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist]\};$$

$$\mathcal{A}(K_dP(2m) \cup *) = \{\Gamma^j[K_dP(2m+1); \tau^0_{2m}] : \ 0 \leq j \leq h_d(0, 2m)\}.$$

Onde h_d é um limitante definido em [28] e $\tau^0_m : K_dP(m+1) \to K_dP(m+1)$ é uma involução definida por $\tau^0_m([x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}]) = [x_1, \ldots, x_m, -x_{m+1}]$, também definido em [28].

Teorema 4.1.2. *(A.2) Seja F uma união disjunta $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, com $d < e$. Se $(M^r; T)$ é uma involução com $F_T = F$, então:*

(i) ou $[(M^r; T)] = [(K_dP(2m); Id) \cup (V; S)]$;

(ii) ou $[(M^r; T)] = [(K_dP(2m) \times K_dP(m); twist) \cup (V; S)]$;

(iii) ou $[(M^r; T)] = \Gamma^j[(K_dP(m+1); \tau^0_m)] + [(K_eP(n+1); \tau^0_n)]$,

com $d(m+1) + j = e(n+1)$ e $0 \leq j \leq h_d(0, m)$.

($(V; S)$ representa uma involução fixando $K_eP(n)$ que borda equivariantemente)

□

Notação 4.1.3. *Fixe uma involução $(N_1; S_1) \in \Gamma^j[(K_dP(m+1); \tau^0_m)] + [(K_eP(n+1); \tau^0_n)]$, que é uma involução desta classe de cobordismo equivariante cujo conjunto de pontos fixos é $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, com $d(m+1) = e(n+1)$.*

Notação 4.1.4. *Denotaremos por γ^d e γ^e os fibrados linha canônicos sobre $K_dP(2m)$ e $K_eP(2n+1)$, respectivamente.*

Notação 4.1.5. *$\xi^l \to K_eP(2n+1)$ denotará um fibrado vetorial sobre $K_eP(2n+1)$ que borda, com dimensão da fibra l e classe de Stiefel-Whitney $W(\xi^l) = (1+\beta_e)^{2q}$ para algum $q \geq 0$.*

Notação 4.1.6. *Dado uma variedade n-dimensional M^n, $\tau^n_{M^n} \to M^n$ denotará o fibrado tangente de M^n. Quando não houver possibilidade de ambiguidade, denotaremos o fibrado tangente simplesmente como τ^n.*

4.1.1. *Fixed-data* de involuções fixando $K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$

Conforme atrás visto, em termos de possíveis *fixed-data*, temos o

Teorema 4.1.7. *(A.2) Se $(M;T)$ é uma involução fixando $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, então temos três possibilidades para seu* fixed-data*:*

(A)
$$\begin{array}{ccc} 0 & & \xi^l \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

onde $(M;T) \in [(K_dP(2m); Id)]$ e ξ^l borda;

(B)
$$\begin{array}{ccc} \tau^{2md} & & \xi^{l'} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

onde $(M;T) \in [(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist)]$ e $\xi^{l'}$ borda;

(C)
$$\begin{array}{ccc} \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} & & \gamma^e \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $(M;T) \in [(N_1; S_1)]$, onde $k = (2n+2)e - 2md$.

Conforme já citado, os fibrados ξ^l e $\xi^{l'}$ acima são fibrados sobre $K_eP(2n+1)$ que bordam. Obs: exige-se também que $0 \leq k-d \leq h_d(2m)$, onde h_d é o limitante definido em [28].

4.2. Ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$

Conhecidas, a menos de cobordismo equivariante, as involuções fixando $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, temos, a partir das mesmas, uma coleção de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando F, dadas pelo ferramental da Seção 1.9, listadas no lema a seguir:

Lema 4.2.1. *Temos a seguinte lista de classes de cobordismo equivariante de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$:*

(i) $\Gamma_1^2[(K_dP(2m); Id) \cup (V; S)]$;

(ii) $\Gamma_1^2[(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist) \cup (V; S)]$;

(iii) $\Gamma_1^2[(N_1; S_1)]$;

(iv) $\Gamma_2^2[(K_dP(2m); Id) \cup (V; S)]$;

(v) $\Gamma_2^2[(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist) \cup (V; S)]$;

(vi) $\Gamma_2^2[(N_1; S_1)]$.

Onde $(V; S)$ denota uma involução fixando $K_eP(2n+1)$ que borda.

□

Teorema 4.2.2. *Sejam m e n números naturais tais que $2md = (2n+1)e$. Existe uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ em uma variedade $M^{(2n+4)e}$, que denotaremos por $\Lambda^1(\gamma)$, tal que o seu* fixed-data *é*

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus R^{e-d}, \gamma^d \oplus R^{e-d}, \gamma^d \oplus R^{e-d}) & & (\gamma^e, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array}.$$

Dem.:

Para provarmos este teorema, novamente faremos uso do Teorema 1.11.3 . Note que, pela natureza dos fibrados envolvidos, as três condições do Teorema 1.11.3 a serem satisfeitas são iguais (porque os três fibrados sobre cada componente são iguais).

É suficiente então demonstrar que a lista

$$\begin{array}{ccc} \big(\lambda, (\gamma^d \oplus R^{e-d}) \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus R^{e-d}))\big) & & (\lambda, (\gamma^e \oplus (\lambda \otimes (\gamma^e)))) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}) & & \mathbb{RP}((\gamma^e)) \end{array}$$

borda simultaneamente, que é o que faremos a seguir.

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))$ é um $H^*(K_dP(2m))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))$ com relação $c^e = \alpha_d c^{e-d}$, e o anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ com relação $c^e = \beta_e$.

As classes de Stiefel-Whitney são

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &=& (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &=& (1+\beta_e)^{2n+2}(1+\beta_e+c^e). \end{cases}$$

Reescrevendo, temos:

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &=& (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &=& (1+c^e)^{2n+2}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &=& (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}. \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &=& (1+c)^{2md+e}. \end{cases}$$

A fim de simplificar a notação, definimos

$$\begin{cases} \breve{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &=& W(\gamma^d \oplus R^{e-d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus R^{e-d}))), \\ \breve{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &=& W(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma e)). \end{cases}$$

Então

$$\begin{cases} \breve{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &=& (1+\alpha_d)(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ \breve{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &=& (1+\beta_e)(1+\beta_e+c^e), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \breve{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &=& (1+\alpha_d)(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ \breve{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &=& (1+c)^e. \end{cases}$$

Coloque $\overline{W} = \breve{W} \cdot W(\lambda)^{d-e}$. Temos

$$\begin{cases} \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &= (1+\alpha_d)(1+\alpha_d+c^d), \\ \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &= (1+c)^d, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &= 1+c^d+\alpha_d(\alpha_d+c^d), \\ \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &= 1+c^d. \end{cases}$$

Tomando $\widetilde{W} = \dfrac{W}{\breve{W}}$, obtemos:

$$\begin{cases} \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &= (1+\alpha_d)^{2m}, \\ \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &= (1+\beta_e)^{2n+1}, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &= (1+\alpha_d)^{2m}, \\ \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &= (1+c)^{(2n+1)e}, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})) &= (1+\alpha_d^{e/d})^{2n+1}, \\ \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) &= (1+c^e)^{2n+1}. \end{cases}$$

Como $W = \widetilde{W}\breve{W}$ e $\breve{W} = \overline{W} \cdot W(\lambda)^{e-d}$, temos que toda classe característica da lista

$$\begin{array}{ccc} \big(\lambda, \gamma^d \oplus R^{e-d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus R^{e-d}))\big) & & (\lambda, \gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \\ \downarrow & \sqcup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}) & & \mathbb{RP}(\gamma^e) \end{array}$$

é uma soma de produtos dos termos $\omega_1(\lambda)$, $\widetilde{\omega}_e$ e $\overline{\omega}_{2d}$.

Assim, uma classe θ de dimensão $(2n+1)e+e-1$ é uma soma de termos do tipo $u_{(z,y,x)} = \widetilde{\omega}_e^z \overline{\omega}_{2d}^y c^x$, com $ez+2dy+x = (2n+1)e+e-1$.

Nosso objetivo agora será mostrar que para qualquer terna (z,y,x) satisfazendo $ez+2dy+x = (2n+1)e+e-1$, os números característicos correspondentes $\langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle$ e $\langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle$ são iguais. Consequentemente, todo elemento θ de dimensão $2md+e-1$ do anel característico também satisfaz

$$\langle \theta(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle = \langle \theta(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle,$$

implicando que a lista

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus R^{e-d}, \gamma^d \oplus R^{e-d}, \gamma^d \oplus R^{e-d}) & & (\gamma^e, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array} .$$

é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Se $y = 0$, então

$$\begin{aligned} \langle u_{(z,0,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle &= \langle (c^e)^z c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle \\ &= \langle c^{(2n+1)e+e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle \\ &= \langle \beta_e^{2n+1} c^{e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle u_{(z,0,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle &= \langle (\alpha_d^{e/d})^z c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle \\ &= \langle \alpha_d^{ez/d} c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle. \end{aligned}$$

Como $ze + x = 2md + e - 1$, temos que x é da forma $x = 2jd + e - 1$ para algum $j \in \mathbb{N}$, com $2jd + ze = 2md$. Aplicando $2j$ vezes a relação $c^e = \alpha_d c^{e-d}$, segue que $c^x = c^{2jd+e-1} = \alpha_d^{2j} c^{e-1}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle u_{(z,0,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle &= \langle (\alpha_d^{e/d})^z c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle \\ &= \langle \alpha_d^{ze/d} c^{2jd+e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle \\ &= \langle \alpha_d^{ze/d} \alpha_d^{2j} c^{e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle \\ &= \langle \alpha_d^{2m} c^{e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle u_{(z,0,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle = \langle u_{(z,0,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle.$$

Se $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}\langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle &= \langle (c^e)^z \cdot 0 \cdot c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle \\ &= \langle 0, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para mostrarmos a igualdade, necessitamos estudar os dois casos separadamente:

Caso e=2d

Se $e = 2d$, então $u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{2d-d})) = \alpha_d^{2z+y}(\alpha_d + c^d)^y c^x$.

Como $2dz + 2dy + x = 2md + 2d - 1$, segue que $x = 2jd + 2d - 1$ com $j \geq 0$, e $2dz + 2dy + 2jd = 2md$. Usando $2j$ vezes a relação $c^{2d} = \alpha_d c^d$, obtemos $c^x = c^{2jd+2d-1} = \alpha_d^{2j} c^{2d-1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d))\rangle &= \langle \alpha_d^{2z+y}(\alpha_d + c^d)^y c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d))\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{y} \overline{\binom{y}{i}} \langle \alpha_d^{2z+y}\alpha_d^i c^{y-i} c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d))\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{y} \overline{\binom{y}{i}} \langle \alpha_d^{2z+y+i} c^{y-i+x}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d))\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{y} \overline{\binom{y}{i}} \langle \alpha_d^{2m} c^{2d-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d))\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{y} \overline{\binom{y}{i}} \\ &= 0 \\ &= \langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle.\end{aligned}$$

Caso e=4, d=1

Quando $e = 4$ e $d = 1$, $u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3)) = \alpha_1^{4z}\alpha_1^y(\alpha_1 + c)^y c^x$, com $4z + 2y + x = 2m + 3$.

Como $4z + 2y + x = 2m + 3$, x é ímpar.

Se $x \geq 3$, a relação $c^3(\alpha_1 + c) = 0$ implica que $(\alpha_1 + c)^y c^x = 0$ e

$$\begin{aligned}\langle u(z,y,x), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^{4-1}))\rangle &= \langle \alpha_1^{2z+y}(\alpha_1 + c)^y c^x, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= \langle \alpha_1^{2z+y} \cdot 0, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Se $x = 1$, então $4z + 2y + 1 = 2m + 3 = 4(2n+1) + 3$, ou seja, $2z + y = 2(2n+1) + 1$ e y é ímpar. Existe então $j \geq 0$ tal que $y = 2j + 1$. A relação $c^3(\alpha_1 + c) = 0$ implica que $(\alpha_1 + c)^3 c = (\alpha_1 + c)(\alpha_1^2 + c^2)c = (\alpha_1 + c)\alpha_1^2 c$. Usando esta nova relação j vezes, segue que $(\alpha_1 + c)^y c = (\alpha_1 + c)^{2j+1} c = (\alpha_1 + c)\alpha_1^{2j} c$.

Assim,

$$\begin{aligned}\langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle &= \langle \alpha_1^{4z+y}(\alpha_1 + c)^y c^1, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= \langle \alpha_1^{4z+y}(\alpha_1 + c)\alpha_1^{2j} c, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= \langle \alpha_1^{4z+y+2j}(\alpha_1 + c)c, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= \langle \alpha_1^{4z+2y-1}(\alpha_1 + c)c, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= \langle \alpha_1^{2m+1}(\alpha_1 + c)c, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= \langle 0 \cdot (\alpha_1 + c)c, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, em ambos os casos $e = 2d$ e $e = 4d$,

$$\langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d})), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle = \langle u_{(z,y,x)}(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle$$

quando $y \geq 1$.

Assim, encerramos a demonstração de que

$$\langle u(z,y,x), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle = \langle u(z,y,x), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle$$

para toda terna (z, y, x) de inteiros não negativos satisfazendo $ez + 2dy + x = (2n+1)e + e - 1$, e, consequentemente, todo elemento θ de dimensão $2md + e - 1$ do anel característico também satisfaz

$$\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{e-d}))\rangle = \langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\rangle.$$

Portanto, pelo Teorema 1.11.3, a lista

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus R^{e-d}, \gamma^d \oplus R^{e-d}, \gamma^d \oplus R^{e-d}) & & (\gamma^e, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array} .$$

é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$. (como tal ação não é provinda de uma involução através do ferramental descrito na seção 1.9 , consideramos a mesma uma ação "exótica".)

■

Teorema 4.2.3. *Existe uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ cujo* fixed-data *é*

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{e-d}) & & (R^e, R^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(1) \end{array} ,$$

onde $2md = e$. Denotaremos esta ação por $\Lambda^2(\gamma)$.

Dem.:

A demonstração se dará mostrando-se que as listas de fibrados em questão satisfazem as condições do Teorema 1.11.3. Note que as duas primeiras condições são iguais, bastando portanto examinarmos a primeira e a terceira condições.

Por questões técnicas, dividiremos a demonstração em duas partes, uma quando $e = 2d$ e outra quando $e = 4d$.

Caso e=2d

Note que neste caso, $2md = (2n+1)e$ implica $m = 2n+1$.

1

Mostrar que a primeira e segunda condição do Teorema 1.11.3 são satisfeitas é, neste caso, mostrar que a lista

$$\begin{array}{ccc} \left(\lambda, \tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus R^d))\right) & & \left(\lambda, R^{2d} \oplus (\lambda \otimes \gamma^{2d})\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\tau^{2d}) & & \mathbb{RP}(R^{2d}) \end{array}$$

borda simultaneamente.

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\tau^{2d}))$ é um $H^*(K_dP(2))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\tau^{2d}))$ e com relação $c^{2d} = \alpha_d(\alpha_d + c^d)$. O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(R^{2d}))$ é um $H^*(K_eP(1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(R^{2d}))$ e com relação $c^{2d} = 0$.

Assim,

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^{2d})) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+c^d)^3(1+c)^{-d}, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & (1+\beta_e)^2(1+c)^{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^{2d})) & = & (1+c^d+\alpha_d(\alpha_d+c^d))^3(1+c)^{-d}, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & (1+c)^{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^{2d})) & = & (1+c^d+c^{2d})^3(1+c)^{-d}, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & 1+c^{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^{2d})) & = & (1+c^d+c^{3d}+c^{4d}+c^{6d})(1+c)^{-d}, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & 1. \end{cases}$$

Usando a relação $\alpha_d^3 = 0$, obtemos que $c^{3d} = \alpha_d(\alpha_d + c^d)c^d = 0$.

Portanto,

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^{2d})) & = & (1+c^d)(1+c^d)^{-1}, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & 1, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^{2d})) & = & 1, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & 1. \end{cases}$$

Temos também as classes dos fibrados correspondentes

$$\begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^d))) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{2d-d}, \\ W(R^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) & = & 1+\beta_e+c^e, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^d))) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^d, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes \gamma^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}+c^{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^d))) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+\alpha_d c^d+c^{2d}), \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes \gamma^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^d))) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+\alpha_d^2), \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes \gamma^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^d))) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d)^3, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes \gamma^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^d))) & = & (1+\alpha_d)^6, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes \gamma^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^d))) & = & 1+\alpha_d^2, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes \gamma^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}. \end{cases}$$

Lembrando que $W(\lambda) = 1 + c$ sobre ambas ass componentes, temos que todos os números característicos correspondentes das listas são iguais. Logo, as listas são simultaneamente cobordantes e a primeira e segunda condições do Teorema 1.11.3 são satisfeitas.

2

Resta mostrarmos que a lista

$$\begin{array}{ccc} (\lambda, \tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes \tau^{2d})) & & (\lambda, R^{2d} \oplus (\lambda \otimes R^{2d})) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d) & & \mathbb{RP}(\gamma^{2d}) \end{array}$$

borda simultaneamente.

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d))$ é um $H^*(K_dP(2))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d))$ e com relação $c^{2d} = \alpha_d c^d$. O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(R^{2d}))$ é um $H^*(K_{2d}P(1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(R^{2d}))$ e com relação $c^{2d} = \beta_{2d}$.

Calculando as classes características, obtemos:

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d)) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{2d-d}, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & (1+\beta_{2d})^2(1+\beta_{2d}+c^{2d}), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d)) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+\alpha_d c^d+c^{2d}), \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & 1, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d)) & = & (1+\alpha_d)^4, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & 1, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^d)) & = & 1, \\ W(\mathbb{RP}(R^{2d})) & = & 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes \tau^{2d})) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+c^d)^3(1+c)^{-d}, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes R^{2d})) & = & (1+c)^{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes \tau^{2d})) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d+c^d)^3(1+c)^{3d}, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes R^{2d})) & = & 1+c^{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes \tau^{2d})) & = & (1+\alpha_d)^3[(1+\alpha_d+c^d)(1+c^d)]^3, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes R^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes \tau^{2d})) & = & (1+\alpha_d)^3(1+\alpha_d)^3, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes R^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes \tau^{2d})) & = & 1+\alpha_d^2, \\ W(R^{2d} \oplus (\lambda \otimes R^{2d})) & = & 1+\beta_{2d}, \end{cases}$$

Lembrando que $W(\lambda) = 1 + c$ sobre ambas ass componentes, temos que todos os números característicos correspondentes das listas são iguais. Logo, as listas são simultaneamente cobordantes e a terceira condição do Teorema 1.11.3 é satisfeita.

Caso d=1, e=4

1

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\tau^4))$ é um $H^*(K_1P(4))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\tau^4))$ e com relação $c^4 = \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3$. O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\xi_1^4))$ é um $H^*(K_4P(1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\xi_1^4))$ e com relação $c^4 = 0$.

Assim,

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^4)) & = & (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+c)^5(1+c)^{-1}, \\ W(\mathbb{RP}(\xi_1^4)) & = & (1+\beta_4)^2(1+\beta_4+c^4)^0(1+c)^{4-0}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^4)) &= (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+c)^5(1+c)^{-1}, \\ W(\mathbb{RP}(\xi_1^4)) &= (1+\beta_4)^2(1+c)^{4-0}, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^4)) &= (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+c)^5(1+c)^{7}, \\ W(\mathbb{RP}(\xi_1^4)) &= 1, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^4)) &= (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+\alpha_1 c+\alpha_1 c^2), \\ W(\mathbb{RP}(\xi_1^4)) &= 1, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^4)) &= 1+\alpha_1(\alpha_1+c)+c\alpha_1(\alpha_1+c)+[\alpha_1(\alpha_1+c)]^2, \\ W(\mathbb{RP}(\xi_1^4)) &= 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes (\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3))) &= (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+c)(1+c)^3, \\ W(\xi_2^4 \oplus (\lambda \otimes \gamma^4)) &= (1+\beta_4+c^4), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes (\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3))) &= (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+\alpha_1 c+\alpha_1 c^2+\alpha_1 c^3+c^4), \\ W(\xi_2^4 \oplus (\lambda \otimes \gamma^4)) &= (1+\beta_4), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes (\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3))) &= (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+\alpha_1 c+\alpha_1 c^2+\alpha_1^4), \\ W(\xi_2^4 \oplus (\lambda \otimes \gamma^4)) &= (1+\beta_4), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes (\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3))) &= 1+\alpha_1(\alpha_1+c)+c\alpha_1(\alpha_1+c)+\alpha_1^2 c^2, \\ W(\xi_2^4 \oplus (\lambda \otimes \gamma^4)) &= (1+\beta_4), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes (\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3))) &= W(\mathbb{RP}(\tau^4))+\alpha^4, \\ W(\xi_2^4 \oplus (\lambda \otimes \gamma^4)) &= W(\mathbb{RP}(\xi_1^e))+\beta_4. \end{cases}$$

Lembrando que $2m = 4(2n+1)$ e $W(\lambda) = 1+c$, temos que todos os números característicos correspondentes das listas são iguais. Logo, as listas são simultaneamente cobordantes e a terceira condição do Teorema 1.11.3 é satisfeita.

2

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus R^3))$ é um $H^*(K_1P(4))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^2))$ e com relação $c^4 = \alpha_1 c^3$. O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^4))$ é um $H^*(K_4P(1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^4))$ e com relação $c^4 = \beta_4$.

Temos então

$$\left\{\begin{array}{ccc} W(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3)) & = & (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+c)(1+c)^{4-1}, \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^4)) & = & (1+\beta_4)^2(1+\beta_4+c^4), \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} W(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3)) & = & (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+\alpha_1 c+\alpha_1 c^2), \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^4)) & = & 1, \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} W(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3)) & = & 1+\alpha_1(\alpha_1+c)+c\alpha_1(\alpha_1+c)+[\alpha_1(\alpha_1+c)]^2, \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^4)) & = & 1, \end{array}\right.$$

e

$$\left\{\begin{array}{ccc} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes \tau^4)) & = & (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+c)^5(1+c)^{-1}, \\ W(\xi_1^4 \oplus (\lambda \otimes \xi_2^4)) & = & (1+c)^4, \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes \tau^4)) & = & (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+c)^5(1+c)^7, \\ W(\xi_1^4 \oplus (\lambda \otimes \xi_2^4)) & = & 1+c^4, \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes \tau^4)) & = & (1+\alpha_1)^5(1+\alpha_1+\alpha_1 c+\alpha_1 c^2+\alpha_1^4), \\ W(\xi_1^4 \oplus (\lambda \otimes \xi_2^4)) & = & 1+\beta_4, \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes \tau^4)) & = & 1+\alpha_1(\alpha_1+c)+c\alpha_1(\alpha_1+c)+[\alpha_1(\alpha_1+c)]^2+\alpha_1^4, \\ W(\xi_1^4 \oplus (\lambda \otimes \xi_2^4)) & = & 1+\beta_4, \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} W(\tau^4 \oplus (\lambda \otimes \tau^4)) & = & W(\mathbb{RP}(\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^3))+\alpha_1^4, \\ W(\xi_1^4 \oplus (\lambda \otimes \xi_2^4)) & = & W(\mathbb{RP}(\gamma^4))+\beta_4. \end{array}\right.$$

Lembrando que $2m = 4(2n+1)$ e $W(\lambda) = 1+c$ sobre ambas as componentes, temos que todos os números característicos correspondentes das listas são iguais. Logo, as listas são simultaneamente cobordantes e a terceira condição do Teorema 1.11.3 é satisfeita.

Portanto, pelo Teorema 1.11.3 a lista

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{e-d}) & & (R^e, R^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(1) \end{array}$$

é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

■

Dadas uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ em uma variedade M com conjunto de pontos fixados $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, o *fixed-data* desta ação é uma lista

$$\begin{array}{c} (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \\ \downarrow \\ F \end{array},$$

onde cada fibrado $\eta_i \to F$ é *fixed-data* de uma involução, cujas possibilidades estão listadas no Teorema 4.1.7.

Teorema 4.2.4. *Se $(M;\Phi)$ é uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ sobre a variedade fechada M, cujo conjunto de pontos fixos é $F = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, então $(M;\Phi)$ pertence a uma das classes da coleção $\mathcal{A}$ abaixo:*

$$\mathcal{A} = \{[\Gamma_1^2(K_dP(2m); Id)], [\Gamma_1^2(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist)], [\Gamma_1^2(N_1; S_1)],$$
$$[\Gamma_2^2(K_dP(2m); Id)], [\Gamma_2^2(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist)], [\Gamma_2^2(N_1; S_1)], [\Lambda^1(\gamma)], [\Lambda^2(\gamma)]\}.$$

Dem.:

Os *fixed-data* das ações listadas são listados a seguir:

1.

$$\begin{array}{ccc} (0,0,0) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md = l_1 + l_2 + l_3 + (2n+1)e$;

2.

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, \tau^{2md}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $8md = l_1 + l_2 + l_3 + (2n+1)e$;

3.

$$\begin{array}{ccc} (0,0,\tau^{2md}) & & (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $4md = l_1 + l_2 + l_3 + (2n+1)e$;

4.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d},\tau^{2md},\tau^{2md}) & & (\gamma^e,\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $n = 0$, $2md = e$, $k = e$ e ξ^{l_i} bordante a R^e;

5.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d},\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d},\tau^{2md}) & & (\gamma^e,\gamma^e,\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $k = (2n+2)e - 2md \geq d$ e $\xi^{l_3} = \tau^{(2n+1)e}$;

6.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d},\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d},\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}) & & (\gamma^e,\gamma^e,\gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md = (2n+1)e$;

7.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d},0,0) & & (\gamma^e,0,0) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $k = (2n+2)e - 2md \geq d$.

Pelo Teorema 4.1.7, salvo permutações na ordem em que os fibrados se apresentam na lista, temos 10 classes de candidatos a ser *fixed-data* de $(M;\Phi)$:

1.

$$\begin{array}{ccc} (0,0,0) & & (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md = l_1 + l_2 + l_3 + (2n+1)e$;

2.

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md},\tau^{2md},\tau^{2md}) & & (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $(2n+1)e + l_1 + l_2 + l_3 = 8md$;

3.

$$\begin{array}{ccc} (0,0,\tau^{2md}) & & (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $4md = l_1 + l_2 + l_3 + (2n+1)e$;

4.

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md},\tau^{2md},0) & & (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $6md = (2n+1)e + l_1 + l_2 + l_3$;

5.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d},\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d},\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}) & & (\gamma^e,\gamma^e,\gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md = (2n+1)e$;

6.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus R^{k-d},0,0) & & (\gamma^e,\xi_2^{l_2},\xi_1^{l_1}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $k + 2md = l_1 + l_2 + e + (2n+1)e$ e $2md + k = (2n+2)e$;

7.

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}) & & (\xi^l, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md + 2k + 2md = l + 2e + (2n+1)e$ e $2md + k = (2n+2)e$;

8.

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, 0) & & (\gamma^e, \gamma^e, \xi^l) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md + k = (2n+2)e$ e $2md + 2k = (2n+3)e + l$;

9.

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{k-d}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

satisfazendo $k + 2md = (2n+2)e$ e $3(2md) + k + l_1 + l_2$;

10.

$$\begin{array}{ccc} (0, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{k-d}) & & (\xi_1^{l_1}, \xi_2^{l_2}, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md + k = (2n+2)e$ e $2md = l_1 + l_2$.

Analisaremos a possibilidade de ocorrência de cada caso em separado.

A estratégia de demonstração deste teorema será uma sucessão de lemas, os quais mostrarão que qualquer lista que não seja simultaneamente cobordante aos *fixed-data* das ações descritas no enunciado do teorema não satisfaz ao menos uma das três condições do Teorema 1.11.3, e portanto não será o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$. Isto completará a classificação, uma vez que as listas não eliminadas realizam o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ com o conjunto de pontos fixos em pauta.

Lema 4.2.5. *A lista*

$$\begin{array}{ccc} (0,0,0) & & (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md = l_1 + l_2 + l_3 + (2n+1)e$, *é o* fixed-data *de uma ação de* $\mathbb{Z}_2^2$ *pertencente à classe* $\Gamma_1^2[K_dP(2m); Id]$.

Dem.:

Isto se deve ao fato de a lista

$$\begin{array}{c} (0,0,0) \\ \downarrow \\ K_eP(2m) \end{array}$$

ser o *fixed-data* da ação $\Gamma_1^2(K_dP(2m); Id) = (K_dP(2m); Id, Id)$ e a lista

$$\begin{array}{c} (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1) \end{array}$$

bordar simultaneamente.

$\square$

Lema 4.2.6. *A lista*

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md},\tau^{2md},\tau^{2md}) & & (\xi^{l_1},\xi^{l_2},\xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $(2n+1)e + l_1 + l_2 + l_3 = 8md$, *é o* fixed-data *de uma ação de* $\mathbb{Z}_2^2$, *pertencente à classe* $[\Gamma_2^2(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist)]$.

Dem.:

Como no lema anterior, isto se deve ao fato de

$$\begin{array}{c} (\tau^{2md},\tau^{2md},\tau^{2md}) \\ \downarrow \\ K_dP(2m) \end{array}$$

ser o *fixed-data* da ação $\Gamma_2^2(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist)$ e da lista

$$\begin{array}{c} (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1) \end{array}$$

bordar simultaneamente.

□

Lema 4.2.7. *A lista*

$$\begin{array}{ccc} (0, 0, \tau^{2md}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $4md = l_1 + l_2 + l_3 + (2n+1)e$*, é o* fixed-data *de uma ação de* $\mathbb{Z}_2^2$ *pertencente à classe* $[\Gamma_1^2(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist)]$.

Dem.:

Como no Lema anterior, isto se deve ao fato de

$$\begin{array}{c} (0, 0, \tau^{2md}) \\ \downarrow \\ K_dP(2m) \end{array}$$

ser o *fixed-data* da ação $\Gamma_1^2(K_dP(2m) \times K_dP(2m); twist)$ e da lista

$$\begin{array}{c} (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1) \end{array}$$

bordar simultaneamente.

□

Lema 4.2.8. *Não existe ação de* $\mathbb{Z}_2^2$ *cujo* fixed-data *é*

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, 0) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $6md = (2n+1)e + l_1 + l_2 + l_3$.

Dem.:

Como a lista

$$\begin{array}{c}(\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1)\end{array}$$

borda simultaneamente, basta mostrarmos que a lista

$$\begin{array}{c}(\tau^{2md}, \tau^{2md}, 0) \\ \downarrow \\ K_dP(2m)\end{array}$$

não satisfaz as condições do Teorema 1.11.3.

De fato, considere a lista

$$\begin{array}{c}(\lambda, \tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes 0)) \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}(\tau^{2md})\end{array} .$$

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))$ é um $H^*(K_dP(2m))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))$ e com relação dada pelo fato de que a classe de grau cohomológico $2md$ em $(1 + c^d + \alpha_d)^{2m+1}(1 + c^d)^{-1}$ é igual a 0.

Temos as classes características

$$W(\lambda) = 1 + c$$

e

$$W(\tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes 0)) = (1 + \alpha_d)^{2m+1},$$

com $\omega_{2md}(\tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes 0)) = \alpha_d^{2m}$ e $\omega_1(\lambda) = c$. Tomando a classe $\theta = \alpha_d^{2m} c^{2md-1}$, obtemos o número característico

$$\left\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) \right\rangle = 1.$$

Portanto, a lista

$$\begin{array}{c}(\tau^{2md}, \tau^{2md}, 0) \\ \downarrow \\ K_dP(2m)\end{array}$$

não satisfaz as condições do Teorema 1.11.3, e portanto

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, 0) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \xi^{l_3}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Lema 4.2.9. *Considere a lista*

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}) & & (\xi^{l}, \gamma^{e}, \gamma^{e}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $2md + 2k + 2md = l + 2e + (2n+1)e$ e $2md + k = (2n+2)e + l$. Se a classe de Stiefel-Whitney do fibrado ξ^l, $W(\xi^l) = (1+\beta_e)^{2q}$, é diferente da classe de Stiefel-Whitney do fibrado tangente $W(\tau^{(2n+1)e}) = (1+\beta_e)^{2n+2}$, isto é, $2n+2 \neq 2q$, então não existe ação de $\mathbb{Z}_2^2$ cuja lista é o fixed-data *em questão.*

Dem.:

Note que $2md + 2k + 2md = l + 2e + (2n+1)e$ e $2md + k = (2n+2)e + l$ implicam que $l = (2n+1)e$, e portanto a lista tem a forma

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}) & & (\xi^{(2n+1)e}, \gamma^{e}, \gamma^{e}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

Por questões técnicas, dividiremos a demonstração em dois casos:

Caso 1: $2md \neq (2n+1)e$

Se $2md \neq (2n+1)e$, então

$$\dim(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) = 2(2md) - 1 \neq 2(2n+1)e - 1 = \dim(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})).$$

Isto implica que ao checarmos a primeira condição do Teorema 1.11.3, basta mostrarmos que um número característico da lista $\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e) \to \mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})$ não é 0, uma vez que a diferença de dimensões evita a ocorrência do número correspondente sobre a outra componente.

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$- módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}))$ e relação advinda do fato de que a classe de grau cohomológico $2(2n+1)e$ em $(1+\beta_e+c^e)^{2n+2}(1+c)^{-e}$ é zero.

Temos as classes

$$W(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) = (1+\beta_e)^{2n+2}(1+\beta_e+c^e)^{2q}W(\lambda)^{(2n+1-2q)e}$$

e

$$W(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) = (1+\beta_e)(1+\beta_e+c^e).$$

Tome então

$$\overline{W}(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) = \frac{W(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})(1+c)^{q-(2n+1)}}{W(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e))} = (1+\beta_e)^{2n+2-q}.$$

Se $2n+2-2q > 0$, tomando $\theta = \overline{\omega}_{2n+2-q}\omega_{2e}(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e))^{q-1}c^{(2n+2-q)e-1}$ teremos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) \right\rangle &= \left\langle \beta_e^{2n+2-2q}[\beta_e(\beta_e+c^e)]^{2q-1}c^{(2n+2-2q)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2n+2-2q}\beta_e^{2q-1}(\beta_e+c^e)^{2q-1}c^{(2n+2-q)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2n+1}(\beta_e+c^e)^{2q-1}c^{(2n+2-2q)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2n+1}c^{e(2q-1)}c^{(2n+2-2q)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2n+1}c^{(2n+1)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e}) \right\rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

obtendo assim um número não nulo. Isto implica que se $q < 2n+2$, então a lista

$$\begin{array}{ccc}
(\tau^{2md}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}) & & (\xi^{(2n+1)e}, \gamma^e, \gamma^e) \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
K_dP(2m) & & K_eP(2n+1)
\end{array}$$

não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Se $2q > 2n+2$, tome $\widetilde{W} = \dfrac{1}{\overline{W}}$.

Existe $s \geq 0$ tal que $2^s < 2n+1 < 2^{s+1}$, e $0 \leq 2q < 2^{s+1}$. Disto, temos que $0 < 2q-2n+2 \leq 2n+1$. Tomando $\theta = \widetilde{\omega}_{2q-2n-2}\omega_{2e}(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \gamma^e))^{2(2n+2)-2q-1}c^{(2q-2n-2)e-1}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \right\rangle &= \left\langle \beta_e^{2q-2n-2}[\beta_e(\beta_e + c^e)]^{2(2n+2)-2q-1}c^{(2q-2n-2)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2q-2n-2}\beta_e^{2(2n+2)-2q-1}(\beta_e + c^e)^{2(2n+2)-2q-1}c^{(2q-2n-2)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2n+1}(\beta_e + c^e)^{2(2n+2)-2q-1}c^{(2q-2n-2)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2n+1}c^{(2(2n+2)-2q-1)e}c^{(2q-2n-2)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})) \right\rangle \\
&= \left\langle \beta_e^{2n+1}c^{(2n+1)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{(2n+1)e})) \right\rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

Assim, a lista

$$\begin{array}{ccc}
(\tau^{2md}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}) & & (\xi^{(2n+1)e}, \gamma^e, \gamma^e) \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
K_dP(2m) & & K_eP(2n+1)
\end{array}$$

não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ se $2q > 2n+2$.

Portanto, temos que se $2md \neq (2n+1)e$ e $2q \neq 2n+2$, então a lista em questão não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Caso 2: $2md = (2n+1)e$

A igualdade $2md = (2n+1)e$ implica que $k = e$ e a lista tem a forma

$$\begin{array}{ccc}
(\tau^{2md}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}) & & (\xi^{(2n+1)e}, \gamma^e, \gamma^e) \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
K_dP(2m) & & K_eP(2n+1)
\end{array} .$$

Para mostrarmos que esta lista não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$ se $2n+2 \neq 2q$, mostraremos que ela não satisfaz a segunda condição do Teorema 1.11.3, exibindo números característicos correspondentes diferentes das listas

$$\begin{array}{c}
(\lambda, \tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))) \\
\downarrow \\
\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d})
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{c} (\lambda, \xi^{(2n+1)e} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}(\gamma^e) \end{array}.$$

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))$ é um $H^*(K_dP(2m))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))$ e relação $c^e = \alpha_d c^{e-d}$. O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ e relação $c^e = \beta_e$.

Temos as classes

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d})) & = & (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & (1+\beta_e)^{2n+2}(1+\beta_e+c^e), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} W(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d})) & = & (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ W(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & (1+\beta_e)^{2n+2}. \end{cases}$$

Coloquemos

$$\begin{cases} \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d})) & = & W(\tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))), \\ \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & W(\xi^l \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)). \end{cases}$$

Então

$$\begin{cases} \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d})) & = & (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & (1+\beta_e)^q(1+\beta_e+c^e), \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d})) & = & (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ \overline{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & (1+\beta_e)^q. \end{cases}$$

Defina $\widetilde{W}(-) = \dfrac{W(-)}{\overline{W}(-)}$. Assim,

$$\begin{cases} \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d})) & = & 1, \\ \widetilde{W}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) & = & (1+\beta_e)^{2n+2-q}. \end{cases}$$

Se $2n+2 \neq q$, então existe $2n+1 \geq j \neq 0$ tal que $\widetilde{\omega}_{je}(\mathbb{RP}(\gamma^e)) = \beta_e^j \neq 0$.

Isto implica que

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{\omega}_{je}(\mathbb{RP}(\gamma^e))c^{(2n+2-j)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\right\rangle &= \left\langle \beta_e^j c^{(2n+2-j)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\right\rangle \\ &= \left\langle \beta_e^j \beta_e^{(2n+1-j)e} c^{e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\right\rangle \\ &= \left\langle \beta_e^{(2n+1)e} c^{e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e))\right\rangle \\ &= 1,\end{aligned}$$

ou seja, tal número característico é não nulo.

Por outro lado, o número característico correspondente sobre a outra componente é

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{\omega}_{je}(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))c^{(2n+2-j)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))\right\rangle &= \left\langle 0 \cdot c^{(2n+2-j)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))\right\rangle \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Portanto, a lista

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}) & & (\xi^{(2n+1)e}, \gamma^e, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

não é o *fixed-data* de uma ação se $2n+2 \neq 2q$.

Dos casos 1 e 2, segue o resultado.

$\square$

Lema 4.2.10. *Considere a lista*

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, 0) & & (\gamma^e, \gamma^e, \xi^l) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array} ,$$

com $2md+k = (2n+2)e$ e $2md+2k = (2n+3)e+l$. Não existe ação de $\mathbb{Z}_2^2$ cujo fixed-data *é a lista acima.*

Dem.:

Note que $l = k-e$ e $k = (2n+2)e-2md$, implicam que $l = (2n+1)e-2md$.

Mostraremos que esta lista não satisfaz a primeira condição do Teorema 1.11.3, o que equivale a mostrar que

$$\begin{array}{ccc} (\lambda, \gamma^d \oplus R^{k-d} \oplus (\lambda \otimes 0)) & & (\lambda, \gamma^e \oplus (\lambda \otimes \xi^{(2n+1)e-2md})) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\gamma^d \oplus R^{k-d}) & & \mathbb{RP}(\gamma^e) \end{array}$$

não borda simultaneamente.

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}))$ é um $H^*(K_dP(2m))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}))$ e relação $c^k = \alpha_d c^{k-d}$. O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\gamma^e))$ e relação $c^e = \beta_e$.

Temos as classes características

$$\begin{cases} W(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \oplus (\lambda \otimes 0)) & = & (1+\alpha_d), \\ W(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \xi^{(2n+1)e-2md})) & = & (1+\beta_e)(1+\beta_e+c^e)^{2q}(1+c)^{(2n+1)e-2md-2qe}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \omega_d(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \oplus (\lambda \otimes 0)) & = & \alpha_d, \\ \omega_d(\gamma^e \oplus (\lambda \otimes \xi^{(2n+1)e-2md})) & = & 0. \end{cases}$$

Tomando $\theta = \omega_d^{2m} c^{k-1}$, obtemos os números característicos

$$\begin{aligned} \left\langle \theta(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d})), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d})) \right\rangle &= \left\langle \alpha_d^{2m} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d})) \right\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \theta(\mathbb{RP}(\gamma^e)), \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e)) \right\rangle &= \left\langle 0^{2m} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\gamma^e)) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a lista

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d}, 0) & & (\gamma^e, \gamma^e, \xi^l) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array}$$

não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

$\square$

Considere a lista

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{k-d}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

satisfazendo $k + 2md = (2n+2)e$ e $3(2md) + k + l_1 + l_2$. Note que as duas condições implicam que $2md = l_1 + l_2$.

Lema 4.2.11. *Se $2(2md) \neq l_i + (2n+1)e$, com $i = 1$ ou 2, então a lista acima não é o* fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.*

Dem.:

Se $2(2md) \neq l_i + (2n+1)e$, então $\dim(\mathbb{RP}(\tau^{2d})) \neq \dim(\mathbb{RP}(\xi^{l_i}))$. Portanto, ao testarmos as condições do Teorema 1.11.3, podemos olhar os números característicos separadamente em cada uma das duas partes da lista.

$$\begin{array}{ccc} \big(\lambda, \tau^{2d} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus R^{k-d}))\big) & & \big(\lambda, \xi^{l_j} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\big) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\tau^{2d}) & & \mathbb{RP}(\xi^{l_i}) \end{array}.$$

No nosso caso, mostraremos que a lista $\big(\lambda, \xi^{l_j} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\big) \to \mathbb{RP}(\xi^{l_i})$ não borda simultaneamente, o que provará a afirmação do lema.

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\xi^{l_i}))$ é um $H^*(K_dP(2m))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\xi^{l_i}))$ e relação advinda do fato de que a classe de grau cohomológico l_i em $(1 + \beta_e + c^e)^{2q_i}(1+c)^{l_i - 2q_i e}$ é igual a 0.

Temos que

$$W\left(\xi_2^{l_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\right) = (1+\beta_e)^{q_2}(1 + c^e + \beta_e).$$

Assim, $\omega_e\left(\xi_2^{l_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\right) = \beta_e + c^e$.

Podemos então formar a classe

$$\begin{aligned}\theta &= \left(\omega_e\left(\xi_2^{l_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\right) + \omega_1(\lambda)^e\right)^{2n+1} \omega_1(\lambda)^{l_i-1} \\ &= \beta_e^{2n+1} c^{l_i-1}\end{aligned}$$

e obter o número característico $\left\langle \theta, \sigma\left(\mathbb{RP}(\xi^{l_i})\right)\right\rangle = 1$.

$\square$

Observação 4.2.12. *Se $4md = l_1 + (2n+1)e$ e $4md = l_2 + (2n+1)e$, então $l_1 = l_2$. Como $4md = l_1 + l_2$, segue que $l_1 = l_2 = 2md$. Isto implica que $2md = (2n+1)e$ e que $k = (2n+2)e - 2md = e$.*

Lema 4.2.13. *Se $2md = (2n+1)e$ e $n \neq 0$, então não existe ação de $\mathbb{Z}_2^2$ cujo* fixed-data *é*

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{2md}, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{k-d}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array}.$$

Dem.:

Para demonstrarmos o lema, usaremos novamente o Teorema 1.11.3, mostrando que a lista

$$\begin{array}{ccc} \left(\lambda, \tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus R^{k-d}))\right) & & \left(\lambda, \xi^{l_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\right) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{RP}(\tau^{2md}) & & \mathbb{RP}(\xi^{l_1}) \end{array}$$

não borda simultaneamente.

O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))$ é um $H^*(K_dP(2m))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))$ e com relação advinda do fato de que a classe de grau $2md$ é igual a 0 em $(1 + \alpha_d + c^d)^{2m+1}(1 + c^d)^{-1}$. O anel de cobordismo $H^*(\mathbb{RP}(\xi^{l_1}))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\xi^{l_1}))$ e com relação advinda do fato de que a classe de grau $(2n+1)e$ é igual a 0 em $(1 + \beta_e + c^e)^{2n+2}(1 + c^e)^{-1}$.

Das classes

$$\begin{cases} W(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) &=& (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)^{2m+1}(1+c)^{-d}, \\ W(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})) &=& (1+\beta_e)^{2n+2}(1+\beta_e+c^e)^{2q_1}(1+c)^{2md-2q_1e}, \end{cases}$$

obtemos:

$$\begin{cases} \omega_{2d}(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) &=& \alpha_d^2 + c^d(\alpha_d+c^d) + \binom{2m+1}{2}c^{2d} + c^{2d}, \\ \omega_{2d}(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})) &=& \binom{2md}{2d}c^{2d}, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_{2d}(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) &=& \alpha_d^2(\alpha_d+c^d) + \binom{2m}{2}c^{2d}, \\ \omega_{2d}(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})) &=& \binom{2m}{2}c^{2d}. \end{cases}$$

Definimos $\widetilde{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(-)) = \omega_{2d}(-) + \binom{2m}{2}\omega_1(\lambda)^{2d}$, obtendo as classes

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) &=& \alpha_d(\alpha_d+c^d), \\ \widetilde{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})) &=& 0. \end{cases}$$

Temos também as classes

$$(*) \begin{cases} W\left(\tau^{2md} \oplus (\lambda \otimes (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{e-d}))\right) &=& (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+\alpha_d+c^d)(1+c)^{e-d}, \\ W\left(\xi_2^{2md} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)\right) &=& (1+\beta_e)^{2q_2}(1+\beta_e+c^e). \end{cases}$$

Definimos então a classe $\overline{W}(\mathbb{RP}(-)) = \frac{W(\mathbb{RP}(-))}{(*)}$:

$$\begin{cases} \overline{W}(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) &=& (1+\alpha_d+c^e)^{2m}(1+c^e)^{-2}, \\ \overline{W}(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})) &=& (1+\beta_e)^{2n+2-2q_2}(1+\beta_e+c^e)^{2q_1-1}(1+c)^{(2n+1)e2-2q_1e}. \end{cases}$$

Lembrando que $2m = (2n+1)e/d$, calculamos $\overline{\omega}_e$:

$$\begin{cases} \overline{\omega}_e(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) &=& (\alpha_d+c^d)^{e/d} + c^e, \\ \overline{\omega}_e(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})) &=& \beta_e + c^e + c^e, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{\omega}_e(\mathbb{RP}(\tau^{2md})) &=& \alpha_d^{e/d}, \\ \overline{\omega}_e(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})) &=& \beta_e. \end{cases}$$

Tomando a classe $\theta = \overline{\omega}_e^{2n}\widetilde{\omega}_{2d}^{e/d}c^{2ne-1}$ e calcuando os números característicos associados, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \theta(\mathbb{RP}(\tau^{2md})), \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle &= \left\langle \alpha_d^{2ne/d}\left(\alpha_d(\alpha_d + c^d)\right)^{e/d} c^{2ne-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_d^{(2n+1)e/d}\left(\alpha_d + c^d\right)^{e/d} c^{2ne-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_d^{2md/d}\left(\alpha_d + c^d\right)^{e/d} c^{2ne-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_d^{2m}\left(\alpha_d + c^d\right)^{e/d} c^{2ne-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_d^{2m} c^{de/d} c^{2ne-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_d^{2m} c^{(2n+1)e-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

enquanto

$$
\begin{aligned}
\left\langle \theta(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})), \sigma(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md}))\right\rangle &= \left\langle \beta_e^{2n} \cdot 0^{e/d} \cdot c^{2ne-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md}))\right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Isto é, $\left\langle \theta(\mathbb{RP}(\tau^{2md})), \sigma(\mathbb{RP}(\tau^{2md}))\right\rangle \neq \left\langle \theta(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md})), \sigma(\mathbb{RP}(\xi_1^{2md}))\right\rangle$. Isto implica que a lista

$$
\begin{array}{ccc}
(\tau^{2md}, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{k-d}) & & (\xi^{l_1}, \xi^{l_2}, \gamma^e) \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
K_dP(2m) & & K_eP(2n+1)
\end{array} .
$$

não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

Observe que a abordagem acima foi possível porque supomos $2ne - 1 > 0$ $(n \neq 0)$.

□

Lema 4.2.14. *A lista*

$$
\begin{array}{ccc}
(0, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{k-d}) & & (\xi_1^{l_1}, \xi_2^{l_2}, \gamma^e) \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
K_dP(2m) & & K_eP(2n+1)
\end{array} ,
$$

com $2md + k = (2n+2)e$ e $2md = l_1 + l_2$, não é o fixed-data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.*

Dem.:

Usando a primeira condição do Teorema 1.11.3 e o fato de que o primeiro fibrado da lista a esquerda é o fibrado 0-dimensional, basta exibirmos um número característico não nulo da lista

$$\begin{array}{c} (\lambda, \gamma^e \oplus (\lambda \otimes \xi^{l_2})) \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}(\xi^{l_1}) \end{array} .$$

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}(\xi^{l_1}))$ é um $H^*(K_eP(2n+1))$-módulo gerado por $c \in H^1(\mathbb{RP}(\xi^{l_1}))$ e com relação advinda do fato de que a classe de grau cohomológico igual a l_1 em $(1+\beta_e+c^e)^{2q_1}(1+c)^{l_1-2q_1e}$ é nula.

Temos as classes características

$$W(\mathbb{RP}(\xi^{l_1})) = (1+\beta_e)^{2n+2}(1+\beta_e+c^e)^{2q_1}(1+c)^{l_1-2q_1e}$$

e

$$W(\xi^{l_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) = (1+\beta_e)^{2q_2}(1+\beta_e+c^e).$$

Logo, $\omega_e(\xi^{l_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) = \beta_e + c^e$.

Definindo $\breve{\omega}_e(\mathbb{RP}(\xi^{l_1})) = \omega_e(\xi^{l_2} \oplus (\lambda \otimes \gamma^e)) + \omega_1(\lambda)^e = \beta_e$, obtemos a classe característica $\theta = \breve{\omega}_e(\mathbb{RP}(\xi^{l_1}))^{2n+1}\omega_1(\lambda)^{l_1-1} = \beta^{2n+1}c^{l_1-1}$, que providencia o número característico

$$\begin{aligned} \left\langle \theta, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{l_1}))\right\rangle &= \left\langle (\beta_e)^{2n+1}\, c^{l_1-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^{l_1}))\right\rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, a lista

$$\begin{array}{ccc} (0, \tau^{2md}, \gamma^d \oplus R^{k-d}) & & (\xi_1^{l_1}, \xi_2^{l_2}, \gamma^e) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array} .$$

não é o *fixed-data* de uma ação de $\mathbb{Z}_2^2$.

□

Observação 4.2.15. *Quando consideramos a lista*

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus R^{k-d}, 0, 0) & & (\gamma^e, \xi_2^{l_2}, \xi_1^{l_1}) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

com $k+2md = l_1+l_2+e+(2n+1)e$, também estamos exigindo que $k+2md = (2n+2)e$. Isto implica que $l_1 = l_2 = 0$, isto é, estamos considerando a lista

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^d \oplus R^{k-d}, 0, 0) & & (\gamma^e, 0, 0) \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ K_dP(2m) & & K_eP(2n+1) \end{array},$$

que já sabemos ser o fixed-data *da ação $\gamma_1^2(N_1, S_1)$.*

Com esta observação, concluímos a demonstração do Teorema 4.2.4

■

Referências Bibliográficas

[1] ALEXANDER, J. C. *On the bordism ring of manifolds with involution.* Proc. Amer. Math. Soc. vol 31 (1972), p.536-542

[2] ANDRADE, A. E. R. *Classificação de ações de $\mathbb{Z}_2^2$ fixando espaços projetivos relativos a diferentes anéis.* Tese (Doutorado) - DM/UFSCar, São Carlos, (2013).

[3] BOREL, A. *Sur la cohomologie des espaces fibreés principauxs et des espaces homogénes des groupes de Lie compacts.* Ann. of Math. (2) vol. 57 (1953) p. 115-207

[4] BOREL, A. ; HIRZEBRUCH, F. *On characteristic classes of homogeneous spaces.* I, Am. J. Math., vol. 80 (1958), p. 458-538; II, Am. J. Math., vol. 81 (1959), p. 315-382

[5] CAPOBIANCO, F. L. *Startionary points of $\mathbb{Z}_2^k$-actions*, Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), p. 337-380

[6] CONNER, P. E. *Diffeomorphisms of period two.* Michigan Math. Journal, (1963), n.10, p. 341-352

[7] CONNER, P. E. *Differentiable periodic maps.* second edition. Springer-Verlag, 1979

[8] CONNER, P. E. ; FLOYD, E. E. *Differentiable periodic maps.* Springer-Verlag, 1964

[9] DOLD, A. *Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}_*$.* (German) Math. Z., 65 (1956), p. 25-35 MR0079269 (18,60c)

[10] FUJII, M. ; YASUI, T. *K_0-cohomologies of the Dold manifolds.* Math. J. Okayama Univ. 16 (1973), p. 55-84.

[11] HU, S. T. *Introduction to Homological Algebra*. Holden-Day, Inc. (1968)

[12] HOU, D. ; TORRENCE, B. *Involutions fixing the union of odd-dimensional projective space.* Canad. Math. Bull **37** (1994), pp. 66-74

[13] HOU, D. ; TORRENCE, B. *Involutions fixing the disjoint union of copies of even projective space.* Acta Math. Sinica **12** (1996), p. 156.

[14] OLIVEIRA, R. de *Involuções comutantes fixando dois espaços projetivos pares.* Tese (Doutorado) - DM/UFSCar (2002)

[15] OLIVEIRA, R. de ; PERGHER, P. L. Q. ; RAMOS, A. $\mathbb{Z}_2^2$*-actions fixing* $\mathbb{RP}^2 \cup \mathbb{RP}^{even}$. Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), p. 29-35

[16] OSBORN, H. - *Vector bundles*, Academic Press, Inc, 1982

[17] LUCAS, E. *Théorie des nombres.* 1878; reprint, Librarie Blanchard, Paris(1967)

[18] PERGHER, P. L. Q. *An equivariant construction.* Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), p. 319-320.

[19] PERGHER, P. L. Q. $(\mathbb{Z}_2)^k$*-Actions Fixing a Product of Spheres and a Point.* Canad. Math. Bull., 38 (1995), p. 366-372.

[20] PERGHER, P. L. Q. *Involutions fixing an arbitrary product of spheres and a point.* Manuscripta Math. 89 (1996), p. 471-474.

[21] PERGHER, P. L. Q. *The union of a Connected Manifold and a Point as Fixed Set of Commuting Involutions.* Topology Appl. 69 (1996), p. 71-81.

[22] PERGHER, P. L. Q. *Bordism of two commuting involutions.* Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), p. 191-195.

[23] PERGHER, P. L. Q. $(\mathbb{Z}_2)^k$*-Actions Whose Fixed Data Has a Section.* Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), p. 175-189.

[24] PERGHER, P. L. Q. ; OLIVEIRA, R. de $\mathbb{Z}_2^k$*-actions with a special fixed set.* Fund. Math. 186 (2005), p. 97-109.

[25] PERGHER, P. L. Q. ; OLIVEIRA, R. de *Commuting involutions whose fixed point set consists of two special components*, Fundamenta Mathematicae (2008), p. 241-259.

[26] PERGHER, P. L. Q. ; RAMOS, A. *$\mathbb{Z}_2^k$-actions fixing $K_dP^{2^s} \cup K_dP^{even}$*, Topology Appl. 156 (2009), n. 3, p. 629-642 MR2492311

[27] PERGHER, P. L. Q. ; STONG, R. E. *Involutions Fixing (point) $\smile F^n$*. Transformation Groups, Vol. 6. No. 1, 2001, p. 79-86, Birkhäuser Boston

[28] RAMOS, A. *Involuções fixando espaços projetivos*. Tese (Doutorado) DM/UFSCar, (2007)

[29] ROYSTER, D. C. *Involutions fixing the disjoint union of two projective spaces*, Indiana University Mathematics Journal 29 (1980), n 2, p. 267-276.

[30] STONG, R. E. - *Involutions fixong projective spaces*, Michigan Math. Journal **13** (1966), p. 445-447

[31] STONG, R. E. - *Equivariant bordism and $\mathbb{Z}_2^k$-actions*, Duke Math. Journal 37 (1970), p. 779-785.

[32] STONG, R. E. - *Involutions fixing products of circles* Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993) p. 1005-1008.

[33] STONG, R. E. *Vector bundles over Dold manifolds*, Fundamenta Mathematicae 169 (2001) 2000 MSC: Primary 55R40

[34] STONG, R. E. ; Kosniowski, C. - *Involutions and characteristic numbers*, Topology, Vol.17, p. 309-330, Pergamon Press Ltd., 1978.

[35] THOM, R. - *Quelques propriétés globales des variétés differentiables*, Comm. Math. Helv. 28 (1954), p. 18-88.

[36] TORRENCE, B. - *Bordism classes of vector bundles over projective spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), p. 963-969.

[37] UCCI, J. J. *Immersions and embeddings of Dold manifolds*. Topology 4 (1965), p. 283-293.

[38] ZHI LU - *Involutions fixing* $\mathbb{RP}^{odd} \cup P(h,i)$, *I*, Transactions Amer. Math. Soc. 354 (2002), p. 4539-4570.

[39] ZHI LU - *Involutions fixing* $\mathbb{RP}^{odd} \cup P(h,i)$, *II*, Transactions Amer. Math. Soc. 356 (2004), 1291-1314.

Apêndice A

Os resultados a seguir são de autoria de Adriana Ramos e Pedro Pergher, cujo artigo está em fase de redação. Optamos, para facilitar o trabalho da banca, por colocar as demonstrações de Adriana ramos e Pedro Pergher ao final do trabalho, como apêndice.

A.1. Involuções fixando $K_dP(\mathbf{2m{+}1}) \cup K_eP(n)$

Teorema A.1.1. *Seja F uma dada união disjunta $F = K_dP(m) \cup K_eP(n)$, com m e n ímpares, e $d < e$. Se $(M^r;T)$ é uma involução com $F_T = F$, então:*

$$\textit{ou } [(M^r;T)] = 0, \ \ \textit{ou } [(M^r;T)] = [(K_dP(m+1);\tau_m^0)] + [(K_eP(n+1);\tau_n^0)].$$

Teorema A.1.2. *Seja F uma dada união disjunta $F = K_dP(m) \cup K_eP(n)$, com m ímpar, $n > 0$ par, e $d < e$. Se $(M^r;T)$ é uma involução com $F_T = F$, então:*

$$[(M^r;T)] = [(K_eP(n);Id)], \ \ \textit{ou } [(M^r;T)] = [(K_eP(n) \times K_eP(n);twist)],$$

$$\textit{ou } [(M^r;T)] = \Gamma^j[(K_e(n+1);\tau_n^0)] + [(K_dP(m+1);\tau_m^0)] \ (\textit{com } 0 \leq j \leq h_e(0,n))$$

Provaremos os teoremas A.1.1 e A.1.2 simultaneamente.

Dem.:

Seja $(M^r;T)$ uma involução fixando $F_T = K_dP(m) \cup K_eP(n)$, com $d < e$, m ímpar e n um inteiro positivo qualquer. Denotaremos o *fixed-data* de $(M^r;T)$ por

$$\nu^k \to K_dP(m) \ \cup \ \xi^l \to K_eP(n),$$

com $dm + k = r = en + l$. Como $d < e$ e m é ímpar, vemos que d aparece na expansão diádica de dm e não aparece na de en. Assim, da igualdade $dm + k = en + l$ segue, pelo Teorema de *Lucas*, que $\overline{\binom{k}{d}} + \overline{\binom{l}{d}} = 1$.

Denotaremos por α_d e β_e os geradores de $H^d(K_dP(m))$ e $H^e(K_dP(n))$, respectivamente. Por K-teoria, consideramos naturais p e q tais que

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \ \text{ e } \ W(\xi^l) = (1+\beta_e)^q.$$

Inicialmente, assumimos que o k-fibrado $\eta^k \to K_dP(m)$ é o *fixed-data* de uma involução. Então $\xi^l \to K_eP(n)$ também é um *fixed-data*. Logo, pela classificação descrita em $\mathcal{A}(K_dP(m))$ e $\mathcal{A}(K_eP(n))$, temos que:

(a) se n é ímpar, então

$$j_*[(M^r;T)] = [\eta^k \to K_dP(m)] + [\xi^l(K_eP(n))] = 0 + 0$$

e portanto $[(M^r;T)] = 0$;

(b) se n é par, então

$$j_*[(M^r;T)] = [\eta^k \to K_dP(m)] + [\xi^l \to K_eP(m)] = 0 + [0 \to K_eP(n)]$$

ou

$$j_*[(M^r;T)] = [\eta^k \to K_dP(m)] + [\xi^l \to K_eP(m)] = 0 + [\tau \to K_eP(n)]$$

e portanto $[(M^r;T)] = [(K_eP(n);Id)]$ ou $[(M^r;T)] = [(K_eP(n) \times K_eP(n);twist)]$.

Assim, resta assumirmos que $\eta^k \to K_dP(m)$ não é um *fixed-data*, ou seja, $\eta^k \to K_dP(m)$ não borda. Isso significa que p é ímpar. Em particular, $\omega_d(\eta^k) = p\alpha_d = \alpha_d \neq 0$, implicando $k \geq d$. Obviamente, temos $l > 0$ (pois $l = 0$ implicaria $\eta^k \to K_dP(m)$ ser um *fixed-data*).

Calculamos:

$$W(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{m+1}((1+c)^k + (1+c)^{k-d}\alpha_d + (1+c)^{k-2d}\binom{p}{2}\alpha_d^2 + \cdots),$$

$$W(\mathbb{RP}(\xi^l)) = (1+\beta_e)^{n+1}((1+c)^l + (1+c)^{l-e}\beta_e + (1+c)^{l-2e}\binom{q}{2}\beta_e^2 + \cdots).$$

Logo, lembrando que m é ímpar e $d < e$, obtemos:

$$\omega_d(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \overline{\binom{k}{d}}c^d + \alpha_d$$

e

$$\omega_d(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \overline{\binom{l}{d}}c^d.$$

Agora definimos $\widehat{\omega_d}(\mathbb{RP}(-)) = \omega_d(\mathbb{RP}(-)) + \overline{\binom{k}{d}}c^d$. Assim, como $\overline{\binom{k}{d}} + \overline{\binom{l}{d}} = 1$, temos que

$$\widehat{\omega_d}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_d \ \text{ e } \ \widehat{\omega_d}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = c^d$$

são classes características correspondentes, na igualdade entre os números característicos dos fibrados *splitting* $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{RP}(\xi^l)$.

Com tais classes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle c^{md+k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle &= \langle (c^d)^m c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega_d}^m c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega_d}^m c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \alpha_d^m c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\langle c^{md+k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle = 1$.

Com a igualdade acima, mostraremos agora que $k = d$. Faremos isso por redução ao absurdo. Suponha então $k > d$. Daí, podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{\omega_d}^{m+1}c^{k-1-d}$. Desse modo, teremos:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle c^{md+k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle (c^d)^{m+1} c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega_d}^{m+1} c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega_d}^{m+1} c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \alpha_d^{m+1} c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle.
\end{aligned}$$

Ou seja, supondo $k > d$, obtivemos $\langle \alpha^{m+1}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = 1$, contrariando o fato de que $\alpha^{m+1} = 0$.

Assim, provamos que $k = d$ com $W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)$. Logo, $\eta^k \to K_dP(m)$ é um d-fibrado bordante ao d-fibrado canônico $\gamma^d \to K_dP(m)$. Isso nos diz que $r = (m+1)d$

com

$$j_*[(K_dP(m);\tau_m^0)] = \begin{bmatrix} \gamma^d \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix}.$$

Em particular, $(\eta^k \to K_dP(m)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ é um *fixed-data*. Daí, segue que $(\xi^l \to K_eP(n)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ também é o *fixed-data* de uma involução. Pela classificação dada por $\mathcal{A}(K_eP(n) \cup *)$, concluímos então que:

(a) se n é ímpar, então $l = e$, ou seja $r = (m+1)d = (n+1)e$, e

$$\begin{aligned} j_*[(M^r;T)] &= \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_eP(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_eP(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} \\ &= j_*[(K_dP(m+1);\tau_m^0)] + j_*[(K_eP(n+1);\tau_n^0)] \end{aligned}$$

e portanto $[(M^r;T)] = [(K_dP(m+1);\tau_m^0)] + [(K_eP(n+1);\tau_n^0)]$, o que encerra a demonstração do Teorema A.1.1;

(b) se n é par, então $e \le l \le h_e(0,n) + e$, ou seja $(n+1)e \le r = (m+1)d \le (n+1)e + h_e(0,n)$, e

$$\begin{aligned} j_*[(M^r;T)] &= \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_eP(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_eP(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} \\ &= j_*[(K_dP(m+1);\tau_m^0)] + j_*\Gamma^{l-e}[(K_eP(n+1);\tau_n^0)] \end{aligned}$$

e portanto $[(M^r;T)] = [(K_dP(m+1);\tau_m^0)] + \Gamma^j[(K_eP(n+1);\tau_n^0)]$ com $0 \leq j \leq h_e(0,n)$. Desse modo concluímos a demonstração do Teorema A.1.2.

■

A.2. Involuções fixando $K_dP(\mathbf{2m}) \cup K_eP(\mathbf{2n{+}1})$

Teorema A.2.1. *Seja F uma dada união disjunta $F = K_dP(m) \cup K_eP(n)$, com $m > 0$ par, n ímpar, e $d < e$. Se $(M^r;T)$ é uma involução com $F_T = F$, então:*

$$[(M^r;T)] = [(K_dP(m);Id)], \ \ ou \ [(M^r;T)] = [(K_dP(m) \times K_dP(m), twist)],$$

$$ou \ [(M^r;T)] = \Gamma^j[(K_d(m+1);\tau_m^0)] + [(K_eP(n+1);\tau_n^0)](\ com \ 0 \leq j \leq h_d(0,m)).$$

Lema A.2.2. *Seja $(\eta^k \to K_dP(2m)) \cup (\xi^l \to K_eP(2n{+}1))$ o* fixed-data *de uma involução, com k,l,m,n inteiros positivos tais que $k + 2md = l + (2n+1)e$. Então $\omega_d(\eta^k) \neq 0$*

Demonstração: Denotaremos por α_d e β_e os elementos não nulos de $H^d(K_dP(2m))$ e $H^e(K_eP(2n+1))$, respectivamente. Tome p e q tais que $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p$ e $W(\xi^l) = (1+\beta_e)^q$.

Assim, temos:

$$W(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2m+1}\left((1+c)^k + (1+c)^{k-d}p\alpha_d + (1+c)^{k-2d}\binom{p}{2}\alpha_d^2 + \cdots\right),$$

$$W(\mathbb{RP}(\xi^l)) = (1+\beta_e)^{2n+2}\left((1+c)^l + (1+c)^{l-e}q\beta_e + (1+c)^{l-2e}\binom{q}{2}\beta_e^2 + \cdots\right).$$

E então calculamos:

$$\omega_d(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (p+1)\alpha_d + \binom{k}{d}c^d, \quad \omega_d(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \binom{l}{d}c^d,$$

lembrando que $d < e$. Observe que d não aparece na expansão diádica de $2md$ e nem na de $(2n+1)e$; logo, pela igualdade $k + 2md = l + (2n+1)e$, vemos que $\overline{\binom{k}{d}} = \overline{\binom{l}{d}}$. Ou seja, definindo $\widetilde{\omega}_d(\mathbb{RP}(-)) = \omega_d(\mathbb{RP}(-)) + \binom{k}{d}c^d$, temos que

$$\widetilde{\omega}_d(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (p+1)\alpha_d \ \text{ e } \ \widetilde{\omega}_d(\mathbb{RP}(\xi^l)) = 0$$

são classes características correspondentes (nas igualdades entre os números característicos de $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{RP}(\xi^l)$).

Em particular, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{p+1} &= \langle (p+1)\alpha_d^{2m}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\ &= \langle \widetilde{\omega}_d^{2m}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\ &= \langle \widetilde{\omega}_d^{2m}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

e portanto, p é ímpar. Desse modo mostramos que $\omega_d(\eta^k) = p\alpha_d \neq 0$, como queríamos.

□

Iniciamos agora a demonstração do Teorema A.2.1.

Seja $(M^r;T)$ uma involução fixando $F_T = K_dP(2m) \cup K_eP(2n+1)$, onde $m > 0$, $n \geq 0$ e $d < e$. O *fixed-data* de $(M^r;T)$ será denotado por

$$\eta^k \to K_dP(2m) \ \cup \ \xi^l \to K_eP(2n+1)$$

com $k+2md = r = l+(2n+1)e$. Denotaremos por α_d e β_e os geradores de $H^d(K_dP(2m))$ e $H^e(K_eP(2n+1))$, respectivamente. Consideramos naturais p e q tais que

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \ \text{ e } \ W(\xi^l) = (1+be_e)^q.$$

Primeiramente assumimos que o l-fibrado $\xi^l \to K_eP(2n{+}1)$ é o *fixed-data* de uma involução. Então $\eta^k \to K_dP(2m)$ também é um *fixed-data*. Logo, pela classificação descrita em $\mathcal{A}(K_dP(2m))$ e $\mathcal{A}(K_eP(2n+1))$, temos que:

$$j_*[(M^r;T)] = [\eta^k \to K_dP(2m)] + [\xi^l \to K_eP(2n+1)] = [0 \to K_dP(2m)] + 0$$

ou

$$j_*[(M^r;T)] = [\eta^k \to K_dP(2m)] + [\xi^l \to K_eP(2n+1)] = [\tau \to K_dP(2m)] + 0$$

e portanto $[(M^r;T)] = [(K_dP(2m);Id)]$ ou $[(M^r;T)] = [(K_dP(2m) \times K_dP(2m;twist)]$.

Assim, resta assumirmos que $\xi^l \to K_eP(2n+1)$ não é um *fixed-data*, ou seja, $\xi^l \to K_eP(2n+1)$ não borda. Isso significa que q é ímpar. Em particular, $\omega_e(\xi^l) =$

$q\beta_e = \beta_e \neq 0$, implicando $l \geq e$. Observe que $k > 0$ e, pelo Lema A.2.2, p é ímpar. Daí, $w_d(\eta^k) = p\alpha_d = \alpha_d \neq 0$ e portanto $k \geq d$.

Se mostramos que $l = e$, teremos então $W(xi^e) = 1 + \beta_e$ e portanto o e-fibrado $\xi^e \to K_eP(2n+1)$ será bordante ao e-fibrado canônico $\gamma^e \to K_eP(2n+1)$. Logo, teremos $r = (2n+2)e$ com

$$\begin{aligned} j_*[(K_eP(2n+2); \tau^0_{2n+1})] &= \begin{bmatrix} \gamma^e \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, $(\xi^l \to K_eP(2n+1)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ será um *fixed-data* e, daí, $(\eta^k \to K_dP(2m)) \cup (R^r \to *)$ também o será. Pela classificação dada por $\mathcal{A}(K_dP(2m) \cup *)$, concluiremos então que: $d \leq k \leq h_d(0, 2m) + d$, ou seja, $(2m+1)d \leq r = (2n+2)e \leq (2m+1)d + h_d(0, 2m)$, e

$$\begin{aligned} j_*[(M^r; T)] &= \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(2m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(2m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_eP(2n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} \\ &= j_*\Gamma^{k-d}[(K_dP(2m+1); \tau^0_{2m})] + j_*[(K_eP(2n+2); \tau^0_{2n+1})] \end{aligned}$$

e portanto obteremos $[(M^r; T)] = \Gamma^j[(K_dP(2m+1); \tau^0_{2m})] + [(K_eP(2n+2); \tau^0_{2n+1})]$ com $0 \leq j \leq h_d(0, 2m)$, como queremos.

Ou seja, para encerrar a demonstração do Teorema A.2.1, temos:

$$\overline{\chi(M^r)} = \overline{\chi(K_dP(2m))} + \overline{\chi(K_eP(2n+1))} = 1 + 0 = 1$$

e portanto r é par. Logo, das igualdades $k + 2md = r = l + (2n + 1)$. Assim definindo $p' = 2^u - p$ e $q' = 2^u - q$, temos que p' e q' são ímpares,

$$\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = (1 + \alpha_d)^{p'} \text{ e } \overline{W}(\xi^l) = \frac{1}{W(\xi^l)} = (1 + \beta_e)^{q'}.$$

Temos:

$$W(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (1 + \alpha_d)^{2m+1}(\sum_i (1 + c)^{k-id} \binom{p}{i} \alpha_d^i),$$

$$W(\mathbb{RP}(\xi^l)) = (1 + \beta_e)^{2n+2}(\sum_i (1 + c)^{l-ie} \binom{q}{i} \beta_e^i).$$

Defina

$$\widehat{W}(\mathbb{RP}(-)) = \frac{(1 + c)^{2md} W(\mathbb{RP}(-))}{(1 + c)^{l-3d}}$$

e denote por $\widehat{w}_i(\mathbb{RP}(-))$ o termo homogêneo de grau i em $\widehat{W}(\mathbb{RP}(-))$.

Assim, obtemos

$$\begin{cases} \widehat{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (1 + \alpha_d)^{2m+1}(1 + c^e)^{2n+1}(\sum_i (1 + c^d)^{3-i} \binom{p}{i} \alpha_d^i), \\ \widehat{W}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = (1 + \beta_e)^{2n+2}(1 + c^d)^{2m}(\sum_i (1 + c)^{3d-ie} \binom{q}{i} \beta_e^i). \end{cases} \tag{A.1}$$

Conforme já anunciamos, nosso objetivo é mostrar que $l = e$.

Para isso, analisaremos os casos $\{d, e\} = \{d, 2d\}$ (ou seja, $F_T = \mathbb{RP}(2m) \cup \mathbb{C}P(2n + 1)$ ou $F_T = \mathbb{C}P(2m) \cup \mathbb{H}P(2n| + 1))$ e $\{d, e\} = \{1, 4\}$ (ou seja, $F_T = \mathbb{RP}(2m) \cup \mathbb{H}P_(2n + 1))$, separadamente.

Caso e=2d. Assumimos $e = 2d$ e então, por A.1, temos:

$$\widehat{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (1 + \alpha_d)^{2m+1}(1 + c^{2d})^{2n+1} \left((1 + c^d)^3 + (1 + c^d)^2 \alpha_d (1 + c^d) \binom{p}{2} \alpha_d^2 + \cdots \right),$$

$$\widehat{W}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = (1 + \beta_{2d})^{2n+2}(1 + c^d)^{2m} \left((1 + c^d)^3 + (1 + c^d)\beta_{2d} + \cdots \right).$$

Então, calculamos:

$$\widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \overline{\binom{2m+1}{2}} \alpha_d^2 + c^{2d} + c^{2d} + \overline{\binom{p}{2}} \alpha_d^2 + \alpha_d(\alpha_d + c^d) = \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{p}{2}} + 1 \right) \alpha_d^2 + \alpha_d c^d,$$

$$\widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \overline{\binom{2m}{2}}c^{2d} + c^{2d} + \beta_{2d} = \left(\overline{\binom{2m}{2}} + 1\right) c^{2d}\beta_{2d}.$$

Ou seja, temos que

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{p}{2}} + 1\right) \alpha_d^2 + \alpha_d c^d, \\ \widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \left(\overline{\binom{2m}{2}} + 1\right) c^{2d}\beta_{2d}. \end{cases} \tag{A.2}$$

são classes características correspondentes (nas igualdades entre os números característicos dos fibrados *splitting* $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{RP}(\xi^l)$).

Dependendo dos valores de $\overline{\binom{2m}{2}}$ e $\overline{\binom{p}{2}}$ temos quatro possibilidades para A.2:

(a) $\widehat{\omega}_{2d} = \begin{cases} \alpha_d c^d, \\ \beta_{2d}. \end{cases}$

(b) $\widehat{\omega}_{2d} = \begin{cases} \alpha_d^2 + \alpha_d c^d, \\ \beta_{2d}. \end{cases}$

(c) $\widehat{\omega}_{2d} = \begin{cases} \alpha_d c^d, \\ c^{2d} + \beta_{2d}. \end{cases}$

(d) $\widehat{\omega}_{2d} = \begin{cases} \alpha_d^2 + \alpha_d c^d, \\ c^{2d} + \beta_{2d}. \end{cases}$

Mostraremos que, em qualquer uma de tais possibilidades, devemos ter $l = 2d (= e)$.

Consideremos a possibilidade (a), ou seja, assumamos

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_d c^d, \\ \widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \beta_{2d}. \end{cases}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \beta_{2d}^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle \alpha_d^{2n+1} c^{(2n+1)d} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle \alpha_d^{2n+1} c^{(2n+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \end{aligned}$$

e portanto $\langle \alpha_d^{2n+1} c^{(2n+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = 1$. Isto implica que $2n+1 < 2m$ e, por ([28], Lema 3.5.1), $\overline{\binom{p'}{2m-2n-1}} = 1$. Em particular, como p' é ímpar e $2m-2n-1$ também é ímpar, temos

$$\overline{\binom{p'}{2m-2n-2}} = 1.$$

Suponha agora $l > 2d$. Então podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{\omega}_{2d}^{2n+2} c^{l-1-2d}$, obtendo:

$$\begin{aligned}
1 &= \overline{\binom{p'}{2m-2n-2}} \\
&= \langle \alpha_d^{2n+2} c^{2nd+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+2} c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+2} c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \beta_{2d}^{2n+2} c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\beta^{2n+2} = 0 \in H^{(2n+2)2d}(K_{2d}P(2n+1))$. Como já tínhamos $l \geq 2d$ e supondo $l > 2$ chegamos ao absurdo $0 = 1$, provamos então que $l = 2d$, como queríamos.

Consderemos agoa a posssibilidade (b), ou seja, assumamos

$$\widehat{\omega}_{2d} = \begin{cases} \alpha_d^2 + \alpha_d c^d, \\ \beta_{2d}. \end{cases}$$

Daí teremos:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \beta_{2d}^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \alpha_d^{2n+1}(\alpha_d + c^d)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, $\langle \alpha_d^{2n+1}(\alpha_d + c^d)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = 1$, acarretando $2n+1 < 2m$ e, pelo ([28], Lema 3.5.1), $\overline{\binom{p'+2n+1}{2m-2n-1}} = 1$. No entanto, $p'+2n+1$ é par, que $2m-2n-1$ é ímpar e, assim, segue do Teorema de Lucas que $\overline{\binom{p'+2n+1}{2m-2n-1}}$ é nulo. Desse modo, concluímos que a possibilidade (b) de fato não pode ocorrer.

Consideremos agora a possibilidade (c), ou seja, assumamos

$$\widehat{\omega}_{2d} = \begin{cases} \alpha_d c^d, \\ c^{2d} + \beta_{2d}. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \beta_{2d}^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\widehat{\omega}_{2d} c^{2d})^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\widehat{\omega}_{2d} c^{2d})^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (c^{2d} + \alpha_d c^d)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (c^d + \alpha_d)^{2n+1} c^{(2n+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \overline{\binom{p'+2n+1}{2m}},
\end{aligned}$$

ou seja, temos $\overline{\binom{p'+2n+1}{2m}} = 1$. Daí, como $p'+2n+1$ é par, vemos (via Teorema de Lucas) que

$$\overline{\binom{p'+2n+2}{2m}} = 1$$

Agora suponha $l > 2d$. Então podemos considerar os números característicos associados a $(\widehat{\omega}_{2d} + c^{2d})^{2n+2} c^{l-1-2d}$, obtendo

$$\begin{aligned}
1 &= \overline{\binom{p'+2n+2}{2m}} \\
&= \langle (c^d + \alpha_d)^{2n+2} c^{2nd+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (\widehat{\omega}_{2d} + c^{2d})^{2n+2} c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (\widehat{\omega}_{2d} + c^{2d})^{2n+2} c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle \beta_{2d}^{2n+2} c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois $\beta_{2d}^{2n+2} = 0$.

Desse modo, como já tínhamos $l \geq 2d$ e supondo $l > 2d$ chagamos a um absurdo, $0 = 1$, mostramos que $l = 2d$, como queríamos.

Finalmente, resta considerarmos a possibilidade (d), ou seja, assumimos

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\eta^k)) &=& \alpha_d^2 + \alpha_d c^d, \\ \widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(\xi^l)) &=& c^{2d} + \beta_{2d}. \end{cases}$$

Por (5.2), tal possibilidade decorre de $\overline{\binom{2m}{2}} = 0 = \overline{\binom{p}{2}}$. Definimos a classe $\widetilde{\omega}_{3d}(\mathbb{RP}(-)) = Sq^d(\widehat{\omega}_{2d}(\mathbb{RP}(-)))$. Então, usamos as propriedades do quadrado de Steenrod para calcular:

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_{3d}(\mathbb{RP}(\eta^k)) &=& \alpha_d^2 c^d + \alpha_d c^{2d}, \\ \widetilde{\omega}_{3d}(\mathbb{RP}(\xi^l)) &=& 0, \end{cases}$$

uma vez que $H^{3d}(K_{2d}P(2n+1)) = 0$.

Observe que

$$\widehat{\omega}_{2d}c^d(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \widetilde{\omega}_{3d}(\mathbb{RP}(\eta^k)).$$

Assim, para cada i tal que $1 \leq i \leq 2n1$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\omega}_{2d}^i c^{(2n+1-i)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle &= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{i-1}(\widehat{\omega}_{2d}c^d)c^{(2n+1-i)2d+l-1-d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\ &= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{i-1}\widetilde{\omega}_{3d}c^{(2n+1-i)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\ &= \langle \widehat{\omega}_{2d}^{i-1}\widetilde{\omega}_{3d}c^{(2n+1-i)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi))\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\widetilde{\omega}_{3d}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = 0$.

Ou seja, para cada $1 \leq i \leq 2n+1$, temos:

$$\langle \widehat{\omega}_{2d}^i c^{(2n+1-i)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(xi^l))\rangle = \langle \widehat{\omega}_{2d}^i c^{(2n+1-i)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = 0. \tag{A.3}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \beta_{2d}^{2n+1}c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\ &= \langle (c^{2d} + \widehat{\omega}_{2d})^{2n+1}c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\ &= \langle (c^{2d} + \widehat{\omega}_{2d})^{2n+1}c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\ &= \langle c^{(2n+1)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle + \sum_{i=1}^{2n+1}\overline{\binom{2n+1}{i}}\langle \widehat{\omega}_{2d}^i c^{(2n+1-i)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\ &= \langle c^{(2n+1)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)).\rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{\binom{p'}{2m}} = \langle c^{2md+k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = \langle c^{(2n+1)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = 1 \qquad \text{(A.4)}$$

Suponha $l > 3d$. Então, considerando as classes $\widehat{\omega}_{2d}^{2n+1}\widetilde{\omega}_{3d}c^{l-1-3d}$ e $(c^{2d} + \widehat{\omega}_{2d})^{2n+2}c^{l-1-2d}$ e usando (5.3) e (5.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \beta_{2d}^{2n+2}c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle (c^{2d} + \widehat{\omega}_{2d})^{2n+2}c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle (c^{2d} + \widehat{\omega}_{2d})^{2n+2}c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle c^{(2n+1)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle + \sum_{i=1}^{2n+2}\overline{\binom{2n+2}{i}}\langle \widehat{\omega}_{2d}^{i}c^{(2n+2)2d+l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle c^{(2n+1)2d+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle + \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+2}c^{l-1-2d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= 1 + \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1}(\widehat{\omega}_{2d}c^{d})c^{l-1-3d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= 1 + \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1}\widetilde{\omega}_{3d}c^{l-1-3d}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= 1 + \langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1}\widetilde{\omega}_{3d}c^{l-1-3d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, obtivemos $\langle \widehat{\omega}_{2d}^{2n+1}\widetilde{\omega}_{3d}c^{l-1-3d}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle = 1$, contrariando o fato de que a classe $\widetilde{\omega}_{3d}(\mathbb{RP}(\xi^l))$ é nula.

Logo, a suposição $l > 3d$ implicou em uma contradição. Dessa forma, mostramos que $l \leq 3d$. Já sabemos também que l é par e $l \geq 2d$.

No caso $d = 1$ (ou seja, $F_T = \mathbb{RP}(2m) \cup \mathbb{C}P(2n+1)$), temos l par e $2 \leq l \leq 3$. Portanto, $l = 2$ $(= 2d)$, como queríamos.

Resta assumirmos então $d = 2$ (ou seja, $F_T = \mathbb{C}P(frm{-}em) \cup \mathbb{H}P(2n+1)$). Neste caso temos l par e $4 \leq l \leq 6$; portanto $l = 4$ ou $l = 6$.

Seja 2^v a maior potência de 2 que aparece na expansão diádica de $2m$, isto é, $2^v \leq 2m < 2^{v+1}$. Como p é ímpar e lembrando que $p' = 2^u - p$, com $2^{v+1} \leq 2^u$, temos $\overline{\binom{p}{2^v}} + \overline{\binom{p'}{2^v}} = 1$. Então, de $\overline{\binom{p'}{2m}} = 1$ (vide (5.4)) segue que $\overline{\binom{p'}{2^v}} = 1$ e, consequentemente, $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$. Logo, como podemos assumir $1 \leq p < 2^{v+1}$, temos $p < 2^v \leq 2m$. Em particular, $\omega_{2p}(\eta^k) = \overline{\binom{p}{p}}\alpha_2^p = \alpha_2^p \neq 0$, acarretando $k \geq 2p$. Assim,

$$4(2n+1) + l = r = 4m + k > 2p + 2p = 4p.$$

Daí, como $l = 4$ ou $l =$, obtemos $p \leq 2n+2$; ou seja, $p-1 \leq 2n+1$. Agora, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \omega_4^{p-1} c^{(2n-p+2)4+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle &= \langle \alpha_2^{p-1}(\alpha_2 + c^2)^{p-1} c^{(2n-p+2)4+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \overline{\binom{p' + p - 1}{2m - p + 1}} \\
&= \overline{\binom{2^u - 1}{2m - p + 1}} \\
&= \overline{\binom{\sum_{i=0}^{u-1} 2^i}{2m - p + 1}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, de (5.3) segue que $p - 1 = 0$. Então, $W(\eta^k) = (1+\alpha_2)^p = 1 + \alpha_2$ e, consequentemente, $\eta^k \to \mathbb{C}P(2m)$ é bordante ao k-fibrado $\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^{k-2} \to \mathbb{C}P(2m)$.

Se $k = 2$ então

$$\partial([\eta^k \to \mathbb{C}P(2m)] + [\mathbb{R}^r \to *]) = \partial([\gamma^2 \to \mathbb{C}P(2m)] + [\mathbb{R}^r \to *]) = 0.$$

Logo, $(\eta^k \to \mathbb{C}P(2m)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ é o *fixed-data* de uma involução. Daí, temos que $(\xi^l \to \mathbb{H}P(2n+1)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ também pode ser realizado como *fixed-data* de uma involução e então, pela classificação dada em $\mathcal{A}(\mathbb{H}P(2n+1) \cup *)$, devemos ter $l = 4$, como queríamos. Observe que $l = 4$ implica que $4m + k = r = (2n+1)4 + 4 = 4(2n+2)$ e, portanto, k é um múltiplo de 4. Logo, na verdade, não podemos ter $k = 2$.

Se $k > 2$, então $\omega_k(\eta^k) = 0$. Uma vez que $\overline{\chi(M^r)} = 1$, podemos fazer uso do

Lema A.2.3. *Se (S, V^s) é uma involução em uma variedade fechada V^s, com $\overline{\chi(V^s)} = 1$, e* fixed-data

$$\eta \to F = \cup_{i=1}^{s} (\eta^{s-i} \to F^i),$$

então existe i tal que $\omega_{s-i}(\eta^{s-i}) \neq 0$. ([6], p 100, 28.3) □

Assim, temos necessariamente $\omega_l(\xi^l) \neq 0$. Daí, como temos $l = 4$ ou 6 e $H^6(\mathbb{H}P(2n+1)) = 0$, concluímos que $l = 4$, como queríamos.

Desse modo, encerramos a demonstração do Teorema A.2.1 para o caos em que $e = 2d$.

Caso $d = 1$ e $e = 4$. Assumimos então $d = 1$ e $e = 4$. Por A.1, temos:

$$\widehat{W}(\mathbb{RP}(\eta^k)) = (1+\alpha_1)^{2m+1}(1+c^4)^{2n+1}\left((1+c)^3 + (1+c)^2\alpha_1 + (1+c)\binom{p}{2}\alpha_1^2 \right.$$
$$\left. + \binom{p}{3}\alpha_1^3 + (1+c)^{-1}\binom{p}{4}\alpha_1^4 + \cdots\right),$$

$$\widehat{W}(\mathbb{RP}(\xi^l)) = (1+\beta_4)^{2n+2}(1+c)^{2m}((1+c)^3 + (1+c)^{-1}\beta_4 + \cdots).$$

Daí, calculamos:

$$\widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \overline{\tbinom{2m+1}{2}}\alpha_1^2 + \overline{\tbinom{3}{2}}c^2 + \overline{\tbinom{p}{2}}\alpha_1^2 + \alpha_1(c+\alpha_1) = \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + \overline{\tbinom{p}{2}} + 1\right)\alpha_1^2 + \alpha_1 c + c^2,$$

$$\widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^4 + \overline{\tbinom{p}{4}}\alpha_1^4 + \alpha_1\left(c^3 + \alpha_1 c^2 + \overline{\tbinom{p}{2}}\alpha_1^2 c + \overline{\tbinom{p}{3}}\alpha_1^3\right)$$
$$+\overline{\tbinom{2m}{2}}\alpha_1^2\left(c^2 + \overline{\tbinom{p}{2}}\alpha_1^2\right) + \overline{\tbinom{2m+1}{3}}\alpha_1^3(c+\alpha_1) + \overline{\tbinom{2m+1}{4}}\alpha_1^4$$
$$= c^4 + \left(\overline{\tbinom{p}{4}} + \overline{\tbinom{p}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{2}\tbinom{p}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right)\alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + 1\right)\alpha_1^2 c^2 + \left(\overline{\tbinom{p}{2}\tbinom{2m}{2}}\right)\alpha_1^3 c,$$

$$\widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \overline{\tbinom{2m}{2}}c^2 + \overline{\tbinom{3}{2}}c^2 = \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + 1\right)c^2,$$

$$\widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \overline{\tbinom{2m}{2}}c^2 \cdot c^2 + \overline{\tbinom{2m}{4}}c^4 + \beta_4 = \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right)c^4 + \beta_4$$

Ou seja:

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) &= \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + \overline{\tbinom{p}{2}} + 1\right)\alpha_1^2 + \alpha_1 c + c^2, \\ \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) &= \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + 1\right)c^2, \end{cases} \tag{A.5}$$

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) &= c^4 + \left(\overline{\tbinom{p}{4}} + \overline{\tbinom{p}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{2}\tbinom{p}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right)\alpha_1^4 + \\ & \qquad \alpha_1 c^3 + \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + 1\right)\alpha_1^2 c^2 + \left(\overline{\tbinom{p}{2}\tbinom{2m}{2}}\right)\alpha_1^3 c, \\ \widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) &= \left(\overline{\tbinom{2m}{2}} + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right)c^4 + \beta_4 \end{cases} \tag{A.6}$$

E ainda, definindo o polinômio

$$\breve{\omega}_3 = \widehat{\omega}_2 c + Sq^1(\widehat{\omega}_2) + c^3,$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
\breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\eta^k)) &= \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{p}{2}} + 1\right)\alpha_1^2 c + \alpha_1 c^2 + c^3 \\
&\quad + Sq^1\left(\left(\left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{p}{2}} + 1\right)\alpha_1^2 + \alpha_1 c + c^2\right) + c^3\right) \\
&= \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{p}{2}} + 1\right)\alpha_1^2 c + \alpha_1 c^2 + c^3 + \alpha_1^2 c + \alpha_1 c^2 + c^3 \\
&= \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{p}{2}}\right)\alpha_1^2 c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\breve{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) &= \left(\overline{\binom{2m}{2}} + 1\right) c^2 + Sq^1(c^2) + c^3 \\
&= \overline{\binom{2m}{2}} c^3 + c^3 + 0 + c^3 \\
&= \overline{\binom{2m}{2}} c^3
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{cases}
\breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{p}{2}}\right)\alpha_1^2 c, \\
\breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \overline{\binom{2m}{2}} c^3.
\end{cases}
\tag{A.7}
$$

Já sabemos que l é par e $l \geq 4$. Dividiremos nosso estudo em dois casos, conforme a paridade de $\binom{2m}{2}$. Nossa estratégia será manipular números característicos associados a certos polinômios nas classes $\widehat{\omega}_2$, $\widehat{\omega}_4$, $\breve{\omega}_3$ e c.

Afirmação A.2.4. *Se $c^5 \in H^5(\mathbb{RP}(\eta^k))$ e $\beta_4 c \in H^5(\mathbb{RP}(\xi^l))$ são classes correspondentes (nas igualdades entre os números característicos de $\lambda \to \mathbb{RP}(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{RP}(\xi^l)$), então $l = 4$.*

Dem.:

Denotemos $\widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^5$ e $\widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \beta_4 c$. Assim, por hipótese, temos que:

$$
\langle p(c, \omega(\mathbb{RP}(\eta^k)), \widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k))), \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle = \langle p(c, \omega(\mathbb{RP}(\xi^l)), \widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l))), \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle,
$$

para cada polinômio homogêneo $p(c, \omega(\mathbb{RP}(-)), \widetilde{\omega}_5\omega(\mathbb{RP}(-)))$, de grau $2m+k-1 = 4(2n+1)+l-1$, nas classes $\omega_{i's}(\mathbb{RP}(-))$ e $\widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(-))$ e c.

Suponha $l > 4$. Então, como l é par, temos $l \geq 6$. Daí, considerando os números característicos associados a

$$\left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{2m}{4}}\right) c^4\right)^{2n+1} c^{l-1} \text{ e } \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{2m}{4}}\right) c^4\right)^{2n+1} \widetilde{\omega}_5 c^{l-6},$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \beta_4^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{2m}{4}}\right) c^4\right)^{2n+1} (c^5) c^{l-6}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{2m}{4}}\right) c^4\right)^{2n+1} (c^5) c^{l-6}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{2m}{4}}\right) c^4\right)^{2n+1} \widetilde{\omega}_5 c^{l-6}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + \overline{\binom{2m}{4}}\right) c^4\right)^{2n+1} \widetilde{\omega}_5 c^{l-6}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \langle \beta_4^{2n+1} (\beta_4 c) c^{l-6} \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle \beta_4^{2n+2} c^{l-5} \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, $\langle \beta_4^{2n+2} c^{l-5} \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle = 1$, contrariando o fato de que $\beta_4^{2n+2} = 0$. Dessa contradição, concluímos que $l = 4$, encerrando a prova da Afirmação A.2.4. □

Caso $\overline{\binom{2m}{2}} = 1$. Primeiro, assumimos $\overline{\binom{2m}{2}} = 1$.

Neste caso, por A.5, A.6 e A.7, temos:

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \overline{\binom{p}{2}} \alpha_1^2 + \alpha_1 c + c^2, \\ \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^4 + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \left(\overline{\binom{p}{2}} + 1\right) \alpha_1^3 c \\ \widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \left(\overline{\binom{p}{2m} 4} + 1\right) c^4 + \beta_4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{1 + \binom{p}{2}}\right) \alpha_1^3 c \\ \breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\xi^l)) = c^3. \end{cases}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + 1\right)\right)^{2n+1} \breve{\omega}_3 c^{l-4}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \right\rangle &= \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{2}} + 1\right)\right)^{2n+1} \breve{\omega}_3 c^{l-4}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \right\rangle \\ &= \langle \beta_4^{2n+1}(c^3)c^{l-4}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\ &= \langle \beta_4^{2n+1}c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\ &= 1\end{aligned}$$

Logo, $\breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(1 + \overline{\binom{p}{2}}\right)\alpha_1^2 c \neq 0$ e portanto

$$\overline{\binom{p}{2}} = 0.$$

Agora, defina os polinômios:

$$\breve{\omega}_5 = \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) Sq^2(\breve{\omega}_3)$$

e

$$\widetilde{\omega}_5 = \widehat{\omega}_4 c + \breve{\omega}_5 + (\widehat{\omega}_2 + c^2)c^3 + (\widehat{\omega}_2 + c^2)\breve{\omega}_3.$$

Como $\overline{\binom{p}{2}} = 0$, calculamos:

$$\begin{cases} \breve{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) Sq^2(\alpha_1^2 c) = \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)\alpha_1^4 c, \\ \breve{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) Sq^2(c^3) = \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) c^5 \end{cases}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(\mathbb{RP}(\eta^k)) &= \left[c^4 + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)\alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 \alpha_1^3 c\right] c + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)\alpha_1^4 c + \\ &\quad + ((\alpha_1 c + c^2) + c^2)c^3 + ((\alpha_1 c + c^2) + c^2)(\alpha_1^2 c) \\ &= \left[c^5 + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)\alpha_1^4 c + \alpha_1 c^4 \alpha_1^3 c\right] c^2 + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)\alpha_1^4 c + \alpha_1 c^4 + \alpha_3 c^2 \\ &= c^5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) &= \left[\left(\overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)c^4 + \beta_4\right] c + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) c^5 + (0 + c^2)c^3 + (0 + c^2)c^3 \\ &= \left(\overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)c^5 + \beta_4 c + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right)c^5 + c^5 + c^5 \\ &= \beta_4 c + \overline{\binom{p}{4}} c^5\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^5, \\ \widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \beta_4 c + \overline{\binom{p}{4}} c^5. \end{cases}$$

Agora, considerando o polinômio $\left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) c^4\right)^{2n} \left(\widetilde{\omega}_5 + \overline{\binom{p}{4}} c^5\right) c^{l-2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) c^4\right)^{2n} \left(\widetilde{\omega}_5 + \overline{\binom{p}{4}} c^5\right) c^{l-2}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \right\rangle = \\ &\qquad = \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \left(\overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) c^4\right)^{2n} \left(\widetilde{\omega}_5 + \overline{\binom{p}{4}} c^5\right) c^{l-2}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \right\rangle \\ &\qquad = \langle \beta_4^{2n} (\beta_4 c) c^{l-2}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &\qquad = \langle \beta_4^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &\qquad = 1; \end{aligned}$$

em particular, temos $\widetilde{\omega}_5 + \overline{\binom{p}{4}} c^5 = \left(1 + \overline{\binom{p}{4}}\right) c^5 \neq 0$, de onde segue que

$$\overline{\binom{p}{4}} = 0.$$

Assim temos que $\widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^5$ e $\widetilde{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \beta_4 c$ são classes correspondentes. Desse modo, pela Afirmação 1, concluímos que $l = 4$.

Caso $\overline{\binom{2m}{2}} = 0$. Agora assumimos $\overline{\binom{2m}{2}} = 0$.

Neste caso, por A.5, A.6 e A.7, temos:

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{\binom{p}{2}} + 1\right) \alpha_1^2 + \alpha_1 c + c^2, \\ \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) = c^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^4 \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{p}{2}} + \overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2 + \overline{\binom{p}{2}} \alpha_1^3 c, \\ \widehat{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \overline{\binom{2m}{4}} c^4 + \beta_4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \overline{\binom{p}{2}} \alpha_1^2 c, \\ \breve{\omega}_3(\mathbb{RP}(\xi^l)) = 0. \end{cases}$$

Se $\overline{\binom{p}{2}} = 1$, então temos

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_1 c + c^2, \\ \widehat{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) = c^2, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \breve{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_1^2 c, \\ \breve{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) = 0. \end{cases}$$

Considere agora o polinômio

$$\dot{\omega}_5 = \widehat{\omega}_4 c + \overline{\binom{2m}{4}} c^5 + \left(\overline{\binom{p}{4}} + 1 + \overline{\binom{2m}{4}}\right) Sq^2(\breve{\omega}_3) + (\widehat{\omega}_2 + c^2)c^3 + (\widehat{\omega}_2 + c^2)^2 c + \breve{\omega}_3(\widehat{\omega}_2 + c^2).$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) &= \left[c^4 + \left(\overline{\tbinom{p}{4}} + 1 + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right) \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2 + \alpha_1 c^3\right] c + \overline{\tbinom{2m}{4}} c^5 + \\
&\qquad + \left(\overline{\tbinom{p}{4}} + 1 + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right) Sq^2(\alpha_1^2 c) + (\alpha_1 c)c^3 + (\alpha_1 c)^2 c + (\alpha_1^2 c)(\alpha_1 c) \\
&= c^5 + \left(\overline{\tbinom{p}{4}} + 1 + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right) \alpha_1^4 c + \alpha_1 c^4 + \alpha_1^2 c^3 + \alpha_1^3 c^2 + \overline{\tbinom{2m}{3}} c^5 \\
&\qquad + \left(\overline{\tbinom{p}{4}} + 1 + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right) \alpha_1^4 c + \alpha + 1 c^4 + \alpha_1^2 c^3 + \alpha_1^3 c^2 \\
&= \left(\overline{\tbinom{2m}{4}} + 1\right) c^5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) &= \left[\overline{\tbinom{2m}{4}} c^4 + \beta_4\right] c + \overline{\tbinom{2m}{4}} c^5 + \left(\overline{\tbinom{p}{4}} + 1 + \overline{\tbinom{2m}{4}}\right) Sq^2(0) + 0 \cdot c^3 + (0)^2 c + 0 \cdot 0 \\
&= \beta_4 c,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases}
\dot{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{\tbinom{2m}{4}} + 1\right) c^5, \\
\dot{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \beta_4 c.
\end{cases}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \beta_4^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \left\langle \beta_4^{2n} (\beta_4 c) c^{l-2}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \overline{\binom{2m}{4}} c^4\right)^{2n} \dot{\omega}_5 c^{l-2}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{\omega}_4 + \overline{\binom{2m}{4}} c^4\right)^{2n} \dot{\omega}_5 c^{l-2}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \right\rangle,
\end{aligned}$$

temos que $\dot{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{\tbinom{2m}{4}} + 1\right) c^5 \neq 0$ e, portanto, $\overline{\tbinom{2m}{4}} = 0$. Daí, $\dot{\omega}_5(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^5$ e $\dot{\omega}_5(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \beta_4 c$ são classes correspondentes. Desse modo, pela Afirmação A.2.4, concluímos que $l = 4$, como queríamos.

Assumimos então $\overline{\tbinom{p}{2}} = 0$. Defina $\widetilde{\omega}_2 = \widehat{\omega}_2 + c^2$ e $\widetilde{\omega}_4 = \widehat{\omega}_4 + \overline{\tbinom{2m}{4}} c^4$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_1^2 + \alpha_1 c, \\ \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \left(\overline{\binom{2m}{4}} + 1\right) c^4 + \left(\overline{\binom{p}{4}} + \overline{\binom{2m}{4}}\right) \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2, \\ \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) = \beta_4. \end{cases}$$

Dependendo das paridades de $\binom{2m}{4}$ e $\binom{p}{4}$, temos quatro possibilidades para a classe de $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k))$:

(I) $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$;

(II) $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$;

(III) $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$;

(IV) $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^4 + \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$.

Observe que a possibilidade (I), $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$ não pode ocorrer. De fato, nesse caso, considerando o polinômio $\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2$, teríamos:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \beta_4^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle (\alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_1 c) c^2)^{2n+1} c^{l-1} \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle (0)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analisaremos, separadamente, cada uma das três possibilidades restantes a fim de mostrar que $l = 4$.

Primeiro, assumimo (II): $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$. Daí, temos

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k)) c^2 = c^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_1 c) c^2 = c^4, \\ \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l)) c^2 = \beta_4 + 0 \cdot c^4 = \beta_4. \end{cases}$$

Suponha $l > 4$. Então,

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \beta_4^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (c^4)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (c^4)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle,
\end{aligned}$$

o que contraria o fato de que $\beta_4^{2n+2} = 0$. De tal contradição segue que $l = 4$, como queríamos.

Agora, assumimos (III): $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$. Daí, temos:

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k))c^2 = \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_1 c)c^2 = \alpha_1^4, \\ \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l))c^2 = \beta_4 + 0 \cdot c^4 = \beta_4. \end{cases}$$

Como estamos no caso $\overline{\binom{2m}{2}} = 0$, podemos escrever $2m = 4a$, para certo inteiro $a \geq 1$. Considerando os números característicos associados a $(\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{-1}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \beta_4^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (\alpha_1^4)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \alpha_1^{4(2n+1)} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle
\end{aligned}$$

de onde segue que $\alpha_1^{4(2n+1)} \neq 0$ e, portanto, $4(2n+1) \leq 2m = 4a$. Ou seja, temos

$$2n + 1 \leq a.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \alpha_1^{2m} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle (\alpha_1^4)^a c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^a c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^a c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \langle \beta_4^a c^{k-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle, \end{aligned}$$

de onde segue que $\beta_4^a \neq 0$. Como já sabemos que $a \geq 2n+1$, concluímos então que $a = 2n+1$. Ou seja, temos

$$2m = 4(2n+1) = 8n+4.$$

Considere agora o polinômio $\widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2$. Então, temos:

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k))^2 + \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k))c^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_1 c)^2 + \alpha_1^4 = \alpha_1^2 c^2, \\ \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l))^2 + \widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l))c^2 = (0)^2 + \beta_4 = \beta_4. \end{cases}$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \beta_4^{2n+1} c^l - 1, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \langle (\widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \langle (\widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle (\alpha_1,^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle \alpha_1^{4n+2} c^{4n+2+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\ &= \overline{\binom{p'}{2m-(4n+2)}} \\ &= \overline{\binom{p'}{(8m+4)-(4n+2)}} \\ &= \overline{\binom{p'}{4n+2}} \end{aligned}$$

Ou seja, $\overline{\binom{p'}{4n+2}} = 1$; em particular, $\overline{\binom{p'}{4n}} = 1$.

Suponha $l > 4$. Então, considerando os números característicos associados ao polinômio $(\widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+2} c^{l-5}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
1 &= \overline{\binom{p'}{4n}} \\
&= \overline{\binom{p'}{(8m+4)-(4n+2)}} \\
&= \langle \alpha_1^{4n+4} c^{4n+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (\alpha_1,^2)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2 c^2)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle \beta_4^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle,
\end{aligned}$$

o que contraria o fato de que $\beta_4^{2n+2} = 0$. Desse modo, concluímos que $l = 4$, como queríamos.

Finalmente, assumimos (IV) : $\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) = c^4 + \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2$. Neste caso, considerando o polinômio $\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2^2$, obtemos:

$$\begin{cases}
\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\eta^k)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\eta^k))^2 = c^4 + \alpha_1^4 + \alpha_1 c^3 + \alpha_1^2 c^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_1 c)^2 = \alpha_1^2 c^2, \\
\widetilde{\omega}_4(\mathbb{RP}(\xi^l)) + \widetilde{\omega}_2(\mathbb{RP}(\xi^l))^2 = \beta_4 + (0)^2 = \beta_4.
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \beta_4^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l))\rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2^2)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (c^4 + \alpha_1 c^3)^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (c + \alpha_1)^{2n+1} c^{3(2n+1)+l-1}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k))\rangle \\
&= \overline{\binom{p'+2n+1}{2m}},
\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{\binom{p'+2n+1}{2m}} = 1$. Assim, como $p' + 2n + 1$ é um número par, temos (pelo Teorema de Lucas):

$$\overline{\binom{p'+2n+2}{2m}} = 1.$$

Suponha $l > 4$. Então, considerando os números característicos associados ao polinômio $(\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2^2)^{2n+2}c^{l-5}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
1 &= \overline{\binom{p' + 2n + 2}{2m}} \\
&= \langle (c + \alpha_1)^{2n+2} c^{3(2n+2)+l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (c^4 + \alpha_1 c^3)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2^2)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle (\widetilde{\omega}_4 + \widetilde{\omega}_2^2)^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle \beta_4^{2n+2} c^{l-5}, \sigma(\mathbb{RP}(\xi^l)) \rangle,
\end{aligned}$$

contrariando o fato de que $\beta_4^{2n+2} = 0$. Desse modo, concluímos que $l = 4$ e encerramos a demonstração do Teorema A.2.1.

$\blacksquare$