

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GRUPO DE TRANÇAS E ESPAÇOS DE CONFIGURAÇÕES

Fernanda Palhares Maringolo

SÃO CARLOS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Grupo de Tranças e Espaços de Configurações

Fernanda Palhares Maringolo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tomas Edson Barros.

SÃO CARLOS

2007

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M337gt

Maringolo, Fernanda Palhares.

Grupo de Tranças e Espaços de Configurações /  
Fernanda Palhares Maringolo. -- São Carlos : UFSCar,  
2007.

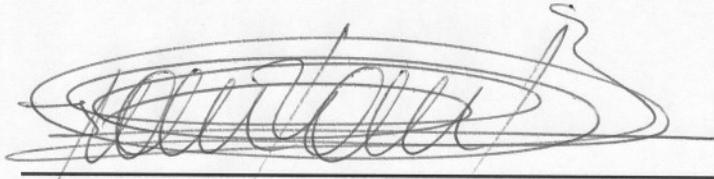
82 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2007.

1. Topologia algébrica. 2. Teorema de Borsuk-Ulam. 3.  
Trança. 4. Espaço de configurações. 5. Recobrimento. I.  
Título.

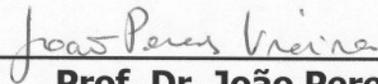
CDD: 514.2 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



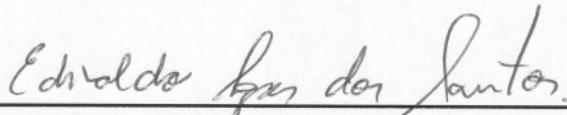
---

**Prof. Dr. Tomas Edson Barros**  
**DM - UFSCar**



---

**Prof. Dr. João Peres Vieira**  
**UNESP – Rio Claro**



---

**Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos**  
**DM - UFSCar**

*A meus pais, Domingos e Lia,  
e aos amigos e mestres que  
participaram desta jornada.*

*"Comece fazendo o necessário,  
depois faça o possível,  
logo estará fazendo o impossível."  
(São Francisco de Assis)*

# Abstract

In this work, we study the Artin braid group,  $B(n)$ , and the configuration spaces (ordered and unordered) of a path connected manifold of dimension  $\geq 2$ . The fundamental group of configuration space (unordered) of  $\mathbb{R}^2$  is identified with the Artin braid group. This identification is used to conclude that the configuration space of  $\mathbb{R}^2$  is an Eilenberg-MacLane space of type  $K(B(n), 1)$ . Therefore, it can be proved that the braid group  $B(n)$  contains no nontrivial element of the finite order. We use this fact to prove a generalization of a 2-dimensional version of the Borsuk-Ulam theorem presented by Connett [3].

**Keywords:** Braids, Borsuk-Ulam Theorem, Configuration spaces, Group actions, Homotopy, Covering spaces, Eilenberg-MacLane spaces.

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos o grupo de tranças de Artin,  $B(n)$ , e os espaços de configurações (ordenado e não ordenado) de uma variedade conexa por caminhos de dimensão  $\geq 2$ , a fim de identificar o grupo fundamental do espaço de configurações (não ordenado) de  $\mathbb{R}^2$  com o grupo de tranças de Artin. Usamos este fato para concluir que o espaço de configurações de  $\mathbb{R}^2$  é um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo  $K(B(n), 1)$ . Deste modo pode ser provado que o grupo de tranças  $B(n)$  não possui elementos não triviais de ordem finita, e usamos este fato na demonstração de uma generalização da versão bi-dimensional do teorema de Borsuk-Ulam apresentado por Connett [3].

**Palavras-chave:** Tranças, Teorema de Borsuk-Ulam, Espaço de Configurações, Ação de Grupos, Homotopia, Recobrimento, Espaços de Eilenberg-MacLane.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Espaços de recobrimento e Homotopia . . . . .	8
1.2 Grupos de Homotopia e Fibrações . . . . .	18
1.3 Variedades e equações diferenciais . . . . .	23
1.4 Ação de Grupos . . . . .	30
<b>2 Complexos CW</b>	<b>34</b>
2.1 Definições e resultados . . . . .	34
2.2 Espaços de Eilenberg-MacLane . . . . .	42
<b>3 Grupo de tranças e Espaços de configurações</b>	<b>45</b>
3.1 Tranças . . . . .	45
3.2 Espaços de configurações $F_n(M)$ . . . . .	54
3.3 O grupo fundamental de $C_n(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	59
3.4 Apresentação do grupo de tranças $B(n)$ . . . . .	65
<b>4 Aplicação</b>	<b>73</b>
4.1 Uma generalização do teorema de Borsuk-Ulam . . . . .	73
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>

# Introdução

Tranças estão entre as mais velhas invenções da humanidade. Elas são usadas com vários propósitos como fazer corda, decoração, penteados, etc.

Como objetivo matemático elas foram introduzidas pelo alemão Emil Artin em 1925 com o propósito de usá-las no estudo de nós e elos (links). Hoje existem aplicações de tranças em várias áreas da Matemática, como por exemplo: topologia, geometria, teoria de singularidades, sistemas dinâmicos, etc.

Neste trabalho, nosso objetivo principal é apresentar o grupo de tranças de Artin e identificá-lo com o grupo fundamental do espaço de configurações de  $n$  pontos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $C_n(\mathbb{R}^2)$ .

No capítulo 1, estudamos os requisitos fundamentais para o seguimento do trabalho, que são: espaços de recobrimento; fibrações; equações diferenciais; e ação de um grupo sobre um espaço topológico.

No capítulo 2, apresentamos os espaços com estrutura de complexo CW e as principais propriedades desses espaços a fim de demonstrar que todo espaço de recobrimento de um complexo CW finito dimensional possui uma decomposição CW. Ainda neste capítulo, definimos espaços de Eilenberg-MacLane e apresentamos os espaços lenticulares,  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ .

No capítulo 3 desenvolvemos nosso objetivo principal e também introduzimos a apresentação do grupo de tranças.

O capítulo 4 encerra nosso trabalho com uma generalização dos teoremas de Borsuk-Ulam e Ljusternik-Schnirelmann.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais para o que será desenvolvido nos capítulos seguintes. Primeiramente, introduzimos o conceito de espaços de recobrimento, levantamento de caminhos e de homotopias e demonstramos o Lema Geral do Levantamento. Ainda nesta seção é demonstrado que todo subgrupo do grupo fundamental de um espaço  $X$  conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente 1-conexo, pode ser realizado como grupo fundamental de um espaço de recobrimento de  $X$ , Teorema 1.1.20. Em seguida, apresentamos grupos de homotopia, algumas propriedades de fibrações, e a sequência de homotopia de uma fibração. Discutimos brevemente sobre variedades e equações diferenciais onde vários lemas irão garantir muitas afirmações no capítulo 3. Finalmente definimos ação de grupos e apresentamos alguns resultados que serão citados ao longo do trabalho.

### 1.1 Espaços de recobrimento e Homotopia

**Definição 1.1.1** *Sejam  $E$  e  $B$  espaços topológicos e  $p : E \rightarrow B$  uma função contínua e sobrejetiva. Um subconjunto aberto  $U$  de  $B$  é dito **igualmente recoberto** por  $p$  se a imagem inversa  $p^{-1}(U)$  pode ser escrita como união disjunta de subconjuntos abertos  $V_\alpha$  de  $E$  tais que para cada  $\alpha$ , a restrição de  $p$  a  $V_\alpha$  é um homeomorfismo de  $V_\alpha$  em  $U$ . A coleção  $\{V_\alpha\}_\alpha$  é dita **partição** de  $p^{-1}(U)$  em "folhas".*

**Definição 1.1.2** *Seja  $p : E \rightarrow B$  contínua e sobrejetiva. Se todo ponto  $b \in B$  possui uma vizinhança  $U$  que é igualmente recoberta por  $p$ , então  $p$  é chamada função de **recobrimento**, ou simplesmente **recobrimento**, e  $(E, p)$  é dito **espaço de recobrimento** de  $B$ .*

**Exemplo 1.1.3**  $(\mathbb{R}, \exp)$ ,  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ;  $\exp(t) = e^{2\pi it}$ , é um espaço de recobrimento de  $S^1$ .

**Exemplo 1.1.4** *Se  $p : E \rightarrow B$  é um homeomorfismo, então  $(E, p)$  é um espaço de recobrimento de  $B$ .*

**Exemplo 1.1.5** *Para qualquer inteiro positivo  $n$  a função  $p : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $p(z) = z^n$  é um recobrimento.*

**Definição 1.1.6** *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma função. Se  $f$  é uma função contínua de  $X$  em  $B$ , um **levantamento** de  $f$  é uma função contínua  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  tal que  $p \circ \tilde{f} = f$ .*

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

*Ou seja, um levantamento é uma função  $\tilde{f}$  que faz o diagrama acima comutar como indicado.*

No que segue  $I$  denotará o intervalo fechado  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ .

**Lema 1.1.7** *Seja  $p : E \rightarrow B$  um recobrimento com  $p(e_0) = b_0$ . Qualquer caminho  $f : I \rightarrow B$  começando em  $b_0$  (ou seja,  $f(0) = b_0$ ) tem um único levantamento  $\tilde{f} : I \rightarrow E$  começando em  $e_0$ .*

**Dem.:** [13]

**Lema 1.1.8** *Seja  $p : E \rightarrow B$  um recobrimento com  $p(e_0) = b_0$ . Se  $F : I \times I \rightarrow B$  é uma função contínua tal que  $F(0, 0) = b_0$ , então existe um único levantamento  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$  de  $F$  tal que  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ .*

Além disso, se  $F$  é homotopia de caminhos então  $\tilde{F}$  é homotopia de caminhos, ou seja, se  $F(\{0\} \times I) = \{b_0\}$  e  $F(\{1\} \times I) = \{b_1\}$  então  $\tilde{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$  e  $\tilde{F}(\{1\} \times I) = \{e_1\}$  com  $p(e_1) = b_1$ .

**Dem.:** [13]

**Corolário 1.1.9** *Seja  $p : E \rightarrow B$  um recobrimento com  $p(e_0) = b_0$ . Sejam  $f$  e  $g$  dois caminhos em  $B$  de  $b_0$  a  $b_1$ . Sejam  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  seus respectivos levantamentos começando em  $e_0$ . Se  $f$  e  $g$  são caminhos homotópicos então  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  são caminhos homotópicos e terminam no mesmo ponto.*

**Dem.:** Seja  $F : I \times I \rightarrow B$  a homotopia entre os caminhos  $f$  e  $g$ . Então  $F(0, 0) = b_0$ .

Seja  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$  o levantamento de  $F$  começando em  $e_0$  com  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ .

Pelo lema anterior  $\tilde{F}$  é homotopia de caminhos; assim  $\tilde{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$  e  $\tilde{F}(\{1\} \times I) = \{e_1\}$  com  $p(e_1) = b_1$ .

A restrição  $\tilde{F}|_{I \times \{0\}}$  de  $\tilde{F}$  é um caminho começando em  $e_0$  que é o levantamento de  $F|_{I \times \{0\}}$ . Pela unicidade do levantamento de caminhos temos  $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$ .

Analogamente  $\tilde{F}|_{I \times \{1\}}$  é um caminho em  $E$  que levanta  $F|_{I \times \{1\}}$  e começa em  $e_0$  pois  $F(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ . Pela unicidade temos  $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$ .

Conseqüentemente  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  terminam em  $e_1$  e  $\tilde{F}$  é a homotopia entre eles. ■

Relembremos que dado um espaço topológico  $X$  com ponto base  $x_0$ , o conjunto dos laços em  $X$  baseados em  $x_0$  é definido por

$$F_1(X, x_0) = \{f : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0) : f \text{ é contínua}\}$$

sendo  $\partial I = \{0, 1\}$  o bordo do intervalo unitário  $I = [0, 1]$ .

Se  $\simeq$  denota a relação homotopia de laços em  $X$  baseados em  $x_0$  temos o **grupo fundamental** de  $(X, x_0)$  definido por

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{F_1(X, x_0)}{\simeq}$$

ou seja,  $\pi_1(X, x_0)$  é o conjunto das classes de homotopia de caminhos dos laços de  $F_1(X, x_0)$ .

Se denotarmos  $[f]$  a classe de  $f \in F_1(X, x_0)$  em  $\pi_1(X, x_0)$ , temos que a operação  $[f].[g] = [f * g]$  é bem definida, sendo

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, 1/2] \\ g(2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Tal operação torna  $\pi_1(X, x_0)$  um grupo, com elemento neutro dado pelo laço constante igual a  $x_0$  e para cada  $f \in F_1(X, x_0)$ ,  $\bar{f} \in F_1(X, x_0)$  definida por  $\bar{f}(t) = f(1-t)$  representa o laço inverso de  $f$  e  $[\bar{f}] \in \pi_1(X, x_0)$  representa o inverso de  $[f]$  em  $\pi_1(X, x_0)$ , ou seja,  $[f].[f] = [\bar{f}].[f] = [x_0]$ .

No que segue, listaremos algumas propriedades de espaços de recobrimento e grupo fundamental, os quais serão usados posteriormente neste trabalho.

**Teorema 1.1.10** *Seja  $p : E \rightarrow B$  um recobrimento,  $E$  um espaço conexo por caminhos e  $p(e_0) = b_0$ . Então  $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  é monomorfismo.*

**Dem.:** Seja  $[h] \in \pi_1(E, e_0)$  tal que  $p_*([h]) = 0$ . Então  $[p \circ h] = 0$  e assim  $p \circ h$  é homotópico ao laço constante  $b_0$ .

Seja  $F : I \times I \rightarrow B$  a homotopia entre  $p \circ h$  e  $b_0$ .

Tome  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$  o levantamento de  $F$  a partir de  $e_0$  ou seja,  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ .

Como  $h$  é levantamento de  $p \circ h$  e o laço constante  $e_0$  é levantamento do laço constante  $b_0$ , temos pelo teorema anterior que  $\tilde{F}$  é homotopia entre  $h$  e  $e_0$ ; logo  $[h] = 0$ .

Portanto  $p_*$  é injetora. ■

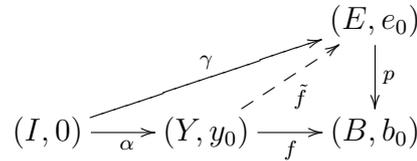
Os espaços de recobrimento constituem ferramenta extremamente útil para o cálculo dos grupos fundamentais de certos espaços. O resultado seguinte nos diz que o grupo fundamental é ferramenta muito útil para caracterizar levantamentos.

**Lema 1.1.11 (Lema Geral do Levantamento)** *Seja  $p : E \rightarrow B$  um recobrimento com  $p(e_0) = b_0$ . Seja  $f : Y \rightarrow B$  uma função contínua com  $f(y_0) = b_0$ . Suponhamos que  $Y$  seja conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. A função  $f$  tem um levantamento  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  tal que  $\tilde{f}(y_0) = e_0$  se, e somente se,  $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$ . Mais ainda, se  $\tilde{f}$  existe ele é único.*

**Dem.:** ( $\Rightarrow$ ) Se  $\tilde{f}$  existe, então  $p \circ \tilde{f} = f \Rightarrow p_* \circ \tilde{f}_* = f_* \Rightarrow f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$ .

( $\Leftarrow$ ) Primeiro provemos que se  $\tilde{f}$  existe ele é único.

Dado  $y_1 \in Y$ , escolhemos um caminho  $\alpha$  em  $Y$  de  $y_0$  a  $y_1$ . Tome o caminho  $f \circ \alpha$  em  $B$  e seu levantamento  $\gamma$  em  $E$  começando em  $e_0$ . Se o levantamento  $\tilde{f}$  existe, então  $\tilde{f}(y_1)$  é igual ao ponto final  $\gamma(1)$  do caminho  $\gamma$ , pois  $\tilde{f} \circ \alpha$  é o levantamento de  $f \circ \alpha$  que começa em  $e_0$ , e o levantamento de caminhos é único.



A prova da unicidade de  $\tilde{f}$  sugere uma definição para ele:

Dado  $y_1 \in Y$  escolha um caminho  $\alpha$  em  $Y$  de  $y_0$  a  $y_1$ . Seja  $\gamma$  o caminho em  $E$  começando em  $e_0$  que é levantamento de  $f \circ \alpha$ , então defina  $\tilde{f}(y_1) = \gamma(1)$ .

Mostremos agora que  $\tilde{f}$  é contínuo. Dado  $N$  vizinhança de  $\tilde{f}(y_1)$  encontraremos uma vizinhança  $W$  de  $y_1$  tal que  $\tilde{f}(W) \subset N$ . Primeiro escolha uma vizinhança  $U$  de  $f(y_1)$  que é igualmente recoberta por  $p$ , ou seja,  $p^{-1}(U) = \cup_i V_i$ ,  $V_i$  abertos disjuntos de  $E$  e  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  homeomorfismo para cada  $i$ .

Seja  $V_0$  o aberto que contém  $\tilde{f}(y_1)$  e denotemos  $p|_{V_0} = p_0$ . Passando a uma vizinhança menor se necessário, podemos assumir que  $V_0 \subset N$ . Agora escolhemos uma vizinhança  $W$  de  $y_1$  que é conexa por caminhos e está em  $f^{-1}(U)$  (isso é possível pois  $f$  é contínua e  $Y$  é localmente conexo por caminhos). Afirmamos que  $\tilde{f}(W) \subset V_0$ .

De fato, dado  $y \in W$  tome  $\beta$  um caminho em  $W$  de  $y_1$  a  $y$ . Considere o caminho  $f \circ \beta$  e seu levantamento, começando em  $\tilde{f}(y_1)$ , que é o caminho  $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$  em  $E$ . Então  $\gamma * \delta$  está definido e é o levantamento do caminho  $f \circ (\alpha * \beta)$  que começa em  $e_0$ . Pela definição,  $\tilde{f}(y)$  é igual ao ponto final do caminho  $\gamma * \delta$ , que está em  $V_0$ .

Finalmente veremos que  $\tilde{f}$  está bem definida.

Dados dois caminhos  $\alpha$  e  $\beta$  em  $Y$  de  $y_0$  a  $y_1$ , suas imagens  $f \circ \alpha$  e  $f \circ \beta$  são caminhos em  $B$ . Sejam  $\gamma$  e  $\delta$  seus respectivos levantamentos começando em  $e_0$ . Temos

que mostrar que  $\gamma(1) = \delta(1)$ .

Seja  $\epsilon$  o levantamento do caminho  $f \circ \bar{\beta}$  (onde  $\bar{\beta}(t) = \beta(1 - t)$ ), em  $E$  que começa em  $\gamma(1)$ . Então  $\gamma * \epsilon$  está definido e é o levantamento do laço  $(f \circ \alpha) * (f \circ \bar{\beta}) = f \circ (\alpha * \bar{\beta})$  em  $B$ .

A classe de homotopia desse laço é  $f_*([\alpha * \bar{\beta}])$  que por hipótese está em  $p_*(\pi_1(E, e_0))$ . Então existe  $\Phi$  laço em  $E$  começando em  $e_0$  tal que

$$p_*([\Phi]) = f_*([\alpha * \bar{\beta}]) \Rightarrow [p \circ \Phi] = [f \circ (\alpha * \bar{\beta})].$$

Assim o caminho  $p \circ \Phi$  é homotópico ao caminho  $f \circ (\alpha * \bar{\beta})$  e então seus levantamentos  $\Phi$  e  $\gamma * \epsilon$ , respectivamente, a partir de  $e_0$ , são caminhos homotópicos e terminam no mesmo ponto. Logo  $\gamma * \epsilon(1) = \epsilon(1) = \Phi(1) = e_0$ . Mas  $\epsilon$  é o levantamento de  $f \circ \bar{\beta}$  que começa em  $\gamma(1)$  e termina em  $e_0$ , então  $\bar{\epsilon}$  é o levantamento de  $f \circ \beta$  que começa em  $e_0$  e termina em  $\gamma(1)$ . Pela unicidade do levantamento de caminhos temos  $\bar{\epsilon} = \delta \Rightarrow \bar{\epsilon}(1) = \gamma(1) = \delta(1)$ . ■

Agora queremos responder a seguinte questão: dado um espaço  $X$  com  $x_0 \in X$  e  $G$  um subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$ , quando existe um espaço de recobrimento  $(\tilde{X}, p)$  de  $X$  (e um ponto  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ) com  $G = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ?

Em outras palavras, para quais espaços  $X$  tem-se que todo subgrupo  $G$  do grupo fundamental de  $X$  pode ser realizado como grupo fundamental de um espaço de recobrimento de  $X$ ?

Para responder esta questão começamos com a seguinte definição:

**Definição 1.1.12** *Seja  $G$  um subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$  e seja  $P(X, x_0)$  a família de todos os caminhos  $f$  em  $X$  com  $f(0) = x_0$ . Definimos  $f_1 \sim f_2$  ( $f_1 \sim f_2 \text{ mod } G$ ) se:*

$$i) f_1(1) = f_2(1)$$

$$ii) [f_1 * \bar{f}_2] \in G, \text{ onde } \bar{f}_2(t) = f_2(1 - t).$$

Verifica-se sem maiores dificuldades que esta relação define uma relação de equivalência em  $P(X, x_0)$ .

**Definição 1.1.13** *Seja  $(X, x_0)$  espaço com ponto base  $x_0$  e  $G$  um subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$ . Denotamos as classes de equivalência de  $f \in P(X, x_0)$  por  $\langle f \rangle_G$  e definimos  $\tilde{X}_G$  como o conjunto de todas essas classes de equivalência. Se  $e_0$  é o caminho constante igual a  $x_0$ , definimos  $\tilde{x}_0 = \langle e_0 \rangle_G \in \tilde{X}_G$ . Finalmente definimos a função  $p : \tilde{X}_G \rightarrow X$  por  $p(\langle f \rangle_G) = f(1)$ .*

É claro que  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Mostraremos que, com algumas condições sobre  $X$ , o conjunto  $\tilde{X}_G$  pode ser topologizado para que  $(\tilde{X}_G, p)$  seja um espaço de recobrimento de  $X$  com  $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) = G$

**Definição 1.1.14** *Se  $f \in P(X, x_0)$  e  $U$  é uma vizinhança de  $f(1)$ , então uma continuação de  $f$  em  $U$  é um caminho  $F \in P(X, x_0)$  da forma  $F = f * \lambda$ , onde  $\lambda(0) = f(1)$  e  $\lambda(I) \subset U$ .*

**Definição 1.1.15** *Seja  $\tilde{x} = \langle f \rangle_G$  e seja  $U$  uma vizinhança de  $f(1)$  em  $X$ . Então*

$$(U, \tilde{x}) = (U, \langle f \rangle_G) = \left\{ \langle F \rangle_G \in \tilde{X}_G : F \text{ é continuação de } f \text{ em } U \right\}$$

**Lema 1.1.16** *Seja  $(X, x_0)$  espaço com ponto base  $x_0$  e  $G$  um subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$ . Então os subconjuntos  $(U, \tilde{x})$  formam uma base para uma topologia de  $\tilde{X}_G$  de forma que  $p : \tilde{X}_G \rightarrow X$  seja contínua. Além disso, se  $X$  é conexo por caminhos então  $p$  é sobrejetora.*

**Dem.:** Seja  $\tilde{x} = \langle f \rangle_G \in \tilde{X}_G$  e seja  $e$  o caminho constante em  $X$  igual a  $f(1)$ . Para toda vizinhança  $U$  de  $f(1)$ , a função  $F = f * e$  é uma continuação de  $f$  em  $U$ . Assim  $\tilde{x} = \langle f \rangle_G = \langle F \rangle_G \in (U, \tilde{x})$ .

Mostremos que se  $\tilde{y} \in (U, \tilde{x})$  então  $(U, \tilde{x}) = (U, \tilde{y})$ .

Tomemos então  $\tilde{y} \in (U, \tilde{x})$ ; assim temos que:

$$\tilde{y} = \langle F \rangle_G = \langle f * \lambda \rangle_G$$

para alguma curva  $\lambda$  tal que  $\lambda(0) = f(1)$  e  $\lambda(I) \subset U$ . Se  $\tilde{z} \in (U, \tilde{x})$  então

$$\tilde{z} = \langle F' \rangle_G = \langle f * \mu \rangle_G$$

onde  $\mu(0) = f(1)$  e  $\mu(I) \subset U$ .

Assim

$$F' \sim f * \mu \sim (f * \lambda) * (\bar{\lambda} * \mu) \sim F * (\bar{\lambda} * \mu)$$

e como  $(\bar{\lambda} * \mu)(0) = \bar{\lambda}(0) = \lambda(1) = F(1)$  e  $(\bar{\lambda} * \mu)(I) \subset U$ , temos

$$\tilde{z} = \langle F' \rangle_G = \langle F * (\bar{\lambda} * \mu) \rangle_G \in (U, \tilde{y})$$

e assim  $(U, \tilde{x}) \subset (U, \tilde{y})$ .

Agora, como  $\tilde{y} = \langle F \rangle_G$ ,  $F \sim f * \lambda$  temos

$$F * \bar{\lambda} \sim f \Rightarrow \tilde{x} = \langle f \rangle_G = \langle F * \bar{\lambda} \rangle_G \in (U, \tilde{y})$$

logo,  $(U, \tilde{y}) \subset (U, \tilde{x})$ .

Se  $\tilde{z} \in (U, \tilde{x}) \cap (V, \tilde{y})$  então

$$(U, \tilde{x}) = (U, \tilde{z}) \text{ e } (V, \tilde{y}) = (V, \tilde{z}) \Rightarrow \tilde{z} \in (U \cap V, \tilde{z}) \subset ((U, \tilde{z}) \cap (V, \tilde{z})).$$

Assim  $\mathcal{B} = \{(U, \tilde{x}) = (U, \langle f \rangle_G)\}$  é uma base para a topologia de  $\tilde{X}_G$ .

Mostremos agora que  $p : \tilde{X}_G \rightarrow X$  é contínua.

Se  $\tilde{x} \in \tilde{X}_G$  e  $U$  é uma vizinhança de  $p(\tilde{x})$  em  $X$ , temos que:

$$z \in p((U, \tilde{x})) \Rightarrow \exists \tilde{y} \in (U, \tilde{x}) \text{ tal que } p(\tilde{y}) = z \Rightarrow \tilde{y} = \langle F \rangle_G$$

onde  $F \sim f * \lambda$  com  $\lambda(0) = f(1)$  e  $\lambda(I) \subset U$  e  $p(\tilde{y}) = F(1) = z$ . Agora  $F(1) = \lambda(1) \in U \Rightarrow z \in U$  logo  $p((U, \tilde{x})) \subset U \Rightarrow (U, \tilde{x}) \subset p^{-1}(U) \Rightarrow p^{-1}(U)$  é aberto em  $\tilde{X}_G$ .

Finalmente, se  $X$  é conexo por caminhos,  $\forall x \in X$  existe um caminho  $f$  em  $X$  de  $x_0$  até  $x$ , então  $\langle f \rangle_G \in \tilde{X}_G$  e  $p(\langle f \rangle_G) = f(1) = x$ . Logo  $p$  é sobrejetora. ■

**Lema 1.1.17** *Seja  $(X, x_0)$  espaço com ponto base  $x_0$  e  $G$  um subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$ . Todo caminho  $f$  em  $X$  começando em  $x_0$  pode ser levantado a um caminho  $\tilde{f}$  em  $\tilde{X}_G$  começando em  $\tilde{x}_0$  e terminando em  $\langle f \rangle_G$ .*

**Dem.:** Para  $t \in I$  defina  $f_t : I \rightarrow X$  por  $f_t(s) = f(ts)$ . Cada  $f_t$  é um caminho em  $X$  começando em  $x_0$ , assim,  $f_t \in P(X, x_0)$ ,  $f_0 = e_0$  (caminho constante igual a  $x_0$ ) e  $f_1 = f$ . Defina  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}_G$  por  $\tilde{f}(t) = \langle f_t \rangle_G$ .

Observe que  $\tilde{f}(0) = \langle f_0 \rangle_G = \langle e_0 \rangle_G = \tilde{x}_0$  e que  $\tilde{f}(1) = \langle f_1 \rangle_G = \langle f \rangle_G$ . Além disso, para cada  $t \in I$ ,  $p \circ \tilde{f}(t) = p(\langle f_t \rangle_G) = f_t(1) = f(t)$ , logo  $p \circ \tilde{f} = f$  e só resta provar que  $\tilde{f}$  é contínua.

Seja  $t_0 \in I$  e  $(U, \tilde{f}(t_0))$  um aberto básico que contém  $\tilde{f}(t_0)$ . Desde que  $f$  é contínua existe um intervalo aberto  $V$  vizinhança de  $t_0$  em  $I$  tal que  $f(V) \subset U$ , e teremos  $\tilde{f}(V) \subset (U, \tilde{f}(t_0))$ ; de fato:

se  $t \in V$  então  $\tilde{f}(t) = \langle f_t \rangle_G$  e  $f_t$  é uma continuação de  $f_{t_0}$  em  $U$ . É simples mostrar que  $f_t = f_{t_0} * \lambda$  para algum caminho  $\lambda$  com  $\lambda(0) = f_{t_0}(1) = f(t_0)$  e  $\lambda(1) \in U$ : se  $t > t_0$  então  $\lambda = f \circ h$  onde  $h : I \rightarrow [t_0, t]$  é o homeomorfismo definido por  $h(s) = (1-s)t_0 + st$ ; se  $t < t_0$  então  $\lambda = f \circ h'$  sendo  $h' : I \rightarrow [t, t_0]$  o homeomorfismo definido por  $h'(s) = (t-t_0)s + t_0$ . ■

**Corolário 1.1.18** *Se  $(X, x_0)$  é um espaço com ponto base  $x_0$  e  $G$  é subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$  então  $\tilde{X}_G$  é conexo por caminhos.*

**Dem.:** Acima mostramos que  $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}_G$ ,  $\tilde{x} = \langle f \rangle_G$ , existe  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}_G$  dada por  $\tilde{f}(t) = \langle f_t \rangle_G$  tal que  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$  e  $\tilde{f}(1) = \tilde{x}$ . ■

**Definição 1.1.19** *Um espaço  $X$  é **semilocalmente 1-conexo** se cada  $x \in X$  tem uma vizinhança  $U$  tal que  $i_* : \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  é a função nula, onde  $i_*$  é a induzida da inclusão de  $U$  em  $X$ .*

Equivalentemente temos que um espaço  $X$  é semilocalmente 1-conexo se cada  $x \in X$  tem uma vizinhança  $U$  com a propriedade: todo caminho fechado em  $U$  baseado em  $x$  é homotópico ao caminho constante  $c_x : I \rightarrow X$  ( $c_x(t) = x, \forall t \in I$ ), ou seja, dado  $\gamma : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (U, x)$ , existe  $H : (I \times I, \{0, 1\} \times I) \rightarrow (U, x)$  contínua, tal que  $H(s, 0) = \gamma(s)$  e  $H(s, 1) = x \forall s \in I$ .

**Teorema 1.1.20** *Seja  $(X, x_0)$  espaço com ponto base  $x_0$  e  $G$  um subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$ . Se  $X$  é conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente 1-conexo, então  $(\tilde{X}_G, p)$  é um espaço de recobrimento de  $X$  com  $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) = G$ .*

**Dem.:** Seja  $x \in X$ . Como  $X$  é semilocalmente 1-conexo, existe uma vizinhança  $W$  de  $x$  tal que todo caminho fechado em  $W$  é homotópico ao caminho constante  $c_x : I \rightarrow X$ . Como  $X$  é localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança conexa por caminhos  $U$  de  $x$  tal que  $U \subset W$  e é claro que todo caminho fechado em  $U$  é homotópico ao caminho constante em  $X$ .

Mostraremos que  $U$  é igualmente recoberto por  $p$ , e isto mostrará que  $(\tilde{X}_G, p)$  é um espaço de recobrimento de  $X$  (já mostramos que  $\tilde{X}_G$  é conexo por caminhos e que  $p$  é contínua e sobrejetora).

Seja  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ , assim  $\tilde{x} = \langle f \rangle_G$  onde  $f$  é um caminho em  $X$  de  $x_0$  a  $x$ . Para provar que  $U$  é igualmente recoberto por  $p$  mostraremos que  $(U, \tilde{x})$  é a folha sobre  $U$  contendo  $\tilde{x}$ .

Primeiro,  $p|_{(U, \tilde{x})} : (U, \tilde{x}) \rightarrow U$  é sobrejetora. Se  $y \in U$ , existe um caminho  $\lambda$  em  $U$  de  $x$  a  $y$ . Então  $f * \lambda$  é uma continuação de  $f$  em  $U$ . Consequentemente  $\langle f * \lambda \rangle_G \in (U, \tilde{x})$ , e  $p|_{(U, \tilde{x})}(\langle f * \lambda \rangle_G) = (f * \lambda)(1) = \lambda(1) = y$ .

Segundo,  $p|_{(U, \tilde{x})}$  é injetora. Suponhamos que  $\tilde{y}, \tilde{z} \in (U, \tilde{x})$  e  $p(\tilde{y}) = p(\tilde{z})$ . Agora  $\tilde{z} = \langle f * \mu \rangle_G$  onde  $\mu(0) = f(1) = x$  e  $\mu(I) \subset U$ , da mesma forma  $\tilde{y} = \langle f * \lambda \rangle_G$  onde  $\lambda(0) = f(1) = x$  e  $\lambda(I) \subset U$ . Como  $p(\tilde{z}) = p(\tilde{y})$  temos  $\lambda(1) = \mu(1)$ , assim  $\lambda * \bar{\mu}$  é um caminho fechado em  $U$  baseado em  $x$ . Pela escolha de  $U$  temos  $\lambda * \bar{\mu}$  homotópico ao caminho constante  $x$  em  $X$ . Assim,  $f * \lambda * \bar{\mu} * \bar{f}$  é homotópico a constante em  $X$  e então  $[f * \lambda * \bar{\mu} * \bar{f}] = 1$  em  $\pi_1(X, x_0) \Rightarrow [f * \lambda * \bar{\mu} * \bar{f}] \in G \Rightarrow f * \lambda \sim f * \mu \text{ mod } G$ , e assim  $\langle f * \lambda \rangle_G = \langle f * \mu \rangle_G \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{z}$ .

Terceiro,  $p|_{(U, \tilde{x})}$  é uma função aberta. Toda vizinhança  $\tilde{W}$  de  $\tilde{x}$  em  $\tilde{X}_G$  contém um conjunto da forma  $(U, \tilde{x})$ , onde  $U$  é como o escolhido no primeiro parágrafo. Mas para tal  $U$  sabemos que  $p((U, \tilde{x})) = U$ . Agora  $(U, \tilde{x}) \subset \tilde{W} \Rightarrow p((U, \tilde{x})) \subset p(\tilde{W}) \Rightarrow U \subset p(\tilde{W}) \Rightarrow p(\tilde{W})$  é aberto em  $X$ . Segue então que  $p|_{(U, \tilde{x})}$  é homeomorfismo.

A seguir mostraremos que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} (U, \tilde{x})$ . Claramente  $p^{-1}(U)$  contém a união.

Seja  $\tilde{y} \in \tilde{X}_G / p(\tilde{y}) \in U \Rightarrow \tilde{y} = \langle f \rangle_G$  e  $f(1) \in U$ . Como  $U$  é conexo por caminhos, existe  $\lambda$  caminho em  $U$  de  $f(1)$  a  $x$ . Então  $f * \lambda$  é continuação de  $f$  em

$U$ ; assim  $\tilde{x}$  definido por  $\tilde{x} = \langle f * \lambda \rangle_G$  está na fibra sobre  $x$ . Agora  $(f * \lambda) * \bar{\lambda}$  é uma continuação de  $f * \lambda$  em  $U$ , assim  $\langle (f * \lambda) * \bar{\lambda} \rangle_G \in (U, \tilde{x})$ . Mas

$$\tilde{y} = \langle f \rangle_G = \langle (f * \lambda) * \bar{\lambda} \rangle_G$$

então  $\tilde{y} \in \cup_{\tilde{x}}(U, \tilde{x})$ .

Como cada  $(U, \tilde{x})$  é aberto em  $\tilde{X}_G$ , resta provar que as folhas são disjuntas duas a duas. Já vimos que se  $\tilde{y} \in (U, \tilde{x})$  então  $(U, \tilde{x}) = (U, \tilde{y})$ . Se  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$  e se  $\exists \tilde{y} \in (U, \tilde{x}_1) \cap (U, \tilde{x}_2) \Rightarrow (U, \tilde{x}_i) = (U, \tilde{y})$  para  $i = 1, 2 \Rightarrow (U, \tilde{x}_1) = (U, \tilde{x}_2)$ . Assim está provado que  $(\tilde{X}_G, p)$  é espaço de recobrimento de  $X$ .

Finalmente mostremos que  $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) = G$ . Seja  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ . Como  $(\tilde{X}_G, p)$  é recobrimento de  $X$ , existe um único levantamento  $\tilde{f}$  de  $f$ , com  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ . Pelo lema 1.1.17,  $\tilde{f}(t) = \langle f_t \rangle_G$ , onde  $f_t$  é um caminho de  $x_0$  a  $f(t)$ .

Agora,

$[f] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) \Leftrightarrow \tilde{f}$  é caminho fechado com  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = \tilde{x}_0$ . Mas  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) \Leftrightarrow f \sim e_0 \text{ mod } G \Leftrightarrow [f] = [f * e_0^{-1}] \in G$ , assim  $G = p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0))$ . ■

## 1.2 Grupos de Homotopia e Fibrações

O grupo fundamental pode ser generalizado naturalmente da seguinte forma:

Dados um espaço topológico  $X$  com ponto base  $x_0$  e um natural  $n \geq 1$ , considere o conjunto  $F_n(X, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0); f \text{ é contínua}\}$ , sendo  $\partial I^n$  o bordo do cubo  $n$ -dimensional  $I^n$ , definido por

$$\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n; t_i \in \{0, 1\} \text{ para algum } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Dizemos que  $f, g \in F_n(X, x_0)$  são homotópicas se existe

$$H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$$

contínua tal que

$$H(s, 0) = f(s) \text{ e } H(s, 1) = g(s) \forall s \in I^n$$

e denotamos  $f \simeq g$ .

Verifica-se (de maneira similar à homotopia de caminhos) que  $\simeq$  define uma relação de equivalência. Portanto podemos definir o  $n$ -ésimo grupo de homotopia de  $(X, x_0)$  por

$$\pi_n(X, x_0) = \frac{F_n(X, x_0)}{\simeq}$$

munido da operação  $[f] \cdot [g] = [f * g]$  sendo

$$f * g(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1/2] \times I^{n-1} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & (t_1, \dots, t_n) \in [1/2, 1] \times I^{n-1} \end{cases}.$$

De forma semelhante aos cálculos desenvolvidos no  $\pi_1(X, x_0)$ , verifica-se que a operação acima é bem definida e faz de  $\pi_n(X, x_0)$  um grupo (o qual é abeliano se  $n \geq 2$ ) com elemento neutro e inverso definidos respectivamente como as aplicações constante igual a  $x_0$  e  $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ , onde  $\bar{f}(t_1, \dots, t_n) = f(1 - t_1, \dots, t_n)$ .

Se o espaço  $X$  é conexo por caminhos então  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$  para qualquer  $n \geq 1$  e quaisquer  $x_0, x_1 \in X$ . Desta forma quando  $X$  é conexo por caminhos podemos denotar  $\pi_n(X, x_0)$  por  $\pi_n(X)$ , sem mencionar o ponto base  $x_0$ . Para um estudo mais detalhado desses grupos sugerimos as referências [14] e [17].

Espaços de recobrimento desempenham papel crucial no estudo do grupo fundamental. Para o estudo dos grupos de homotopia de ordem superior necessitamos de uma generalização dos espaços de recobrimento, que são as fibrações.

**Definição 1.2.1** *Uma aplicação contínua  $p : E \rightarrow B$  possui a **propriedade do levantamento de homotopia (PLH)** com respeito a um espaço  $X$  se o seguinte diagrama comutativo pode ser completado como indicado*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

ou seja, dada  $f : X \rightarrow E$  contínua e uma homotopia  $F : X \times I \rightarrow B$ ;  $F(x, 0) = p \circ f(x)$ ,  $\forall x \in X$ , então existe  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$  homotopia tal que  $\tilde{F}(x, 0) = f(x)$  e  $p \circ \tilde{F} = F$ .

**Definição 1.2.2** Dizemos que uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  é uma **fibração** se ela possui a PLH com respeito a qualquer espaço topológico  $X$ . O espaço  $E$  é chamado **espaço total** da fibração,  $B$  é chamado **espaço base** e  $p^{-1}(b_0)$ ,  $b_0 \in B$ , é a **fibra** sobre  $b_0$ .

**Exemplo 1.2.3** Sejam  $B$  e  $F$  espaços topológicos. Então a projeção  $\pi_1 : B \times F \rightarrow B$  é uma fibração.

**Exemplo 1.2.4** Se  $p : E \rightarrow B$  é recobrimento então  $p$  é fibração com fibra discreta. (cf. [14]).

**Lema 1.2.5** Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração e  $f, g : X \rightarrow B$  funções homotópicas. Se  $f$  possui levantamento  $\tilde{f}$  então  $g$  também possui um levantamento  $\tilde{g}$  e além disso  $\tilde{f}$  é homotópica a  $\tilde{g}$ .

**Dem.:** Por hipótese existe  $F : X \times I \rightarrow B$  homotopia tal que  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$ ,  $\forall x \in X$  e existe  $\tilde{f} : X \rightarrow E$ ;  $p \circ \tilde{f} = f$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Como  $p$  é fibração  $\Rightarrow \exists \tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ ;  $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}(x)$ ,  $\forall x \in X$  e  $p \circ \tilde{F} = F$ .

Tome  $\tilde{g} : X \rightarrow E$  dada por  $\tilde{g}(x) = \tilde{F}(x, 1)$ . Então

$$p \circ \tilde{g}(x) = p \circ \tilde{F}(x, 1) = F(x, 1) = g(x)$$

e portanto  $\tilde{g}$  é levantamento de  $g$  e  $\tilde{f}$  é homotópica a  $\tilde{g}$ . ■

**Corolário 1.2.6** Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração e  $f : X \rightarrow B$  homotópica à função constante  $b_0 = p(e_0)$ . Então  $f$  possui levantamento  $\tilde{f} : X \rightarrow E$ .

**Dem.:** A função constante possui levantamento  $\alpha : X \rightarrow E$ ;  $\alpha(x) = e_0$ ,  $\forall x \in X$ . Logo pelo lema anterior,  $f$  possui levantamento  $\tilde{f}$  que é homotópico a constante  $e_0$ . ■

**Definição 1.2.7** A função  $p : E \rightarrow B$  é chamada **fibração fraca** se  $p$  tem a PLH com respeito aos cubos  $\{I^n\}_{n \geq 0}$ .

**Definição 1.2.8** A função  $p : E \rightarrow B$  é chamada **fibração localmente trivial** com fibra  $F$ , se para todo  $b \in B$  existe um aberto  $U_b \subset B$  e um homeomorfismo  $h : U_b \times F \rightarrow p^{-1}(U_b)$  tal que  $p \circ h = \pi$  onde  $\pi : U_b \times F \rightarrow U_b$  é a projeção.

Observamos que se  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração localmente trivial então  $p$  é fibração fraca. (cf. [14] p.364).

Se  $(E, e_0)$  e  $(B, b_0)$  são espaços com ponto base  $e_0$  e  $b_0$  respectivamente,  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  é uma fibração (fraca) e  $F = p^{-1}(b_0)$ , então essa fibração é usualmente denotada por

$$F \longrightarrow E \longrightarrow B$$

Dada uma fibração  $p : E \rightarrow B$  tal que  $B$  é conexo por caminhos então  $p^{-1}(b)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $p^{-1}(a)$  para quaisquer  $a, b \in B$ , (cf. [14] ou [15]).

Uma das principais propriedades relacionando grupos de homotopia e fibrações pode ser resumida no seguinte teorema:

**Teorema 1.2.9** Dada uma fibração fraca  $F \longrightarrow E \longrightarrow B$  existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(F) \xrightarrow{j_*} \pi_0(E) \longrightarrow \pi_0(B)$$

sendo  $\pi_0(F)$ ,  $\pi_0(E)$  e  $\pi_0(B)$  os conjuntos das componentes conexas de  $F$ ,  $E$  e  $B$  respectivamente.

**Dem.:** [14] ou [17].

**Exemplo 1.2.10** Considere a fibração  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$ . Temos para tal fibração a seguinte sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\exp_*} \pi_n(S^1) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Como  $\mathbb{Z}$  é discreto e  $\mathbb{R}$  é contrátil, temos  $\pi_n(\mathbb{Z}) = \pi_n(\mathbb{R}) = 0$ ,  $\forall n \geq 1$ , logo  $\pi_n(S^1) = 0$ ,  $\forall n \geq 2$ .

**Exemplo 1.2.11** *Seja  $X$  o espaço formado pela união de dois círculos com um ponto  $x_0$  em comum. Chamaremos de  $a$  e  $b$  os caminhos fechados, baseados em  $x_0$ , que cobrem cada círculo homeomorficamente como indicado na figura 1.1. Introduziremos um espaço de recobrimento  $\tilde{X}$  para  $X$ , que é o subconjunto do plano esboçado abaixo. Para obter  $\tilde{X}$  tomamos sobre os eixos retangulares, a partir da origem, quatro segmentos de comprimento 1. A partir da extremidade livre de cada um dos quatro, tomamos três segmentos de comprimento  $1/2$ , paralelos aos eixos. A partir da extremidade livre desses doze segmentos, tomamos três segmentos de comprimento  $1/4$ , e assim por diante.  $\tilde{X}$  será a união desses segmentos (em número infinito) assim construídos. A aplicação de recobrimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  leva cada segmento horizontal sobre  $a$  e cada segmento vertical sobre  $b$  de modo que a ordem crescente da única coordenada que varia em cada um desses segmentos corresponda ao sentido do percurso de  $a$  e  $b$  respectivamente e que os extremos sejam aplicados sobre  $x_0$ .*

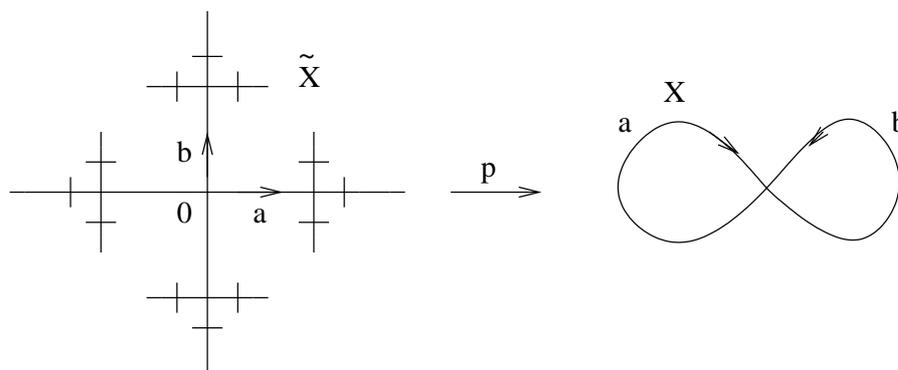


Figura 1.1:

*Sendo  $p$  uma aplicação de recobrimento, ela é uma fibração com fibra discreta, a qual denotaremos por  $F$ . Usaremos a sequência de homotopias para mostrar que  $\pi_i(X) = 0$  para  $i \geq 2$ .*

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\tilde{X}) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \dots$$

*Temos que  $\pi_i(F) = \pi_i(\tilde{X}) = 0$ ,  $\forall i \geq 1$  pois a fibra é discreta e o espaço  $\tilde{X}$  é contrátil (cf. [4]). Assim, concluímos que  $\pi_i(X) = 0$  para  $i \geq 2$ .*

Para o espaço  $X$  formado por  $n$  círculos unidos por um único ponto (o espaço  $X$  é conhecido como buquê de  $n$  círculos), temos uma construção semelhante para o espaço de recobrimento  $\tilde{X}$ , considerando agora  $n$  eixos ortogonais. Portanto temos também  $\pi_i(X) = 0$  para  $i \geq 2$ .

### 1.3 Variedades e equações diferenciais

Relembramos rapidamente aqui o Teorema de Picard sobre a existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial ordinária vetorial de primeira ordem e utilizaremos algumas consequências desse teorema para mostrar o Lema de Isotopia e garantir a existência de uma função especial que será usada no capítulo 3.

Seja  $\Omega$  um subconjunto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua e  $I$  um intervalo real não degenerado, isto é, um subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  não reduzido a um ponto.

**Definição 1.3.1** *Um problema com dados iniciais  $(t_0, x_0)$ , ou também conhecido como problema de Cauchy, é uma equação diferencial da forma*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

**Definição 1.3.2** *Uma solução para o problema de Cauchy (1.1) é uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\begin{aligned} (t, \varphi(t)) &\in \Omega, \quad \forall t \in I \\ \varphi'(t) &= f(t, \varphi(t)), \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Os seguintes resultados são consequência do famoso teorema de Picard sobre existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy, (cf. [16]).

**Teorema 1.3.3** *Seja  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua tal que todas as derivadas parciais com respeito às últimas  $n$  variáveis existam e sejam contínuas para todos os pontos de  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ . Então para todo  $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (1.1).*

**Corolário 1.3.4** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , então para todo  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  do problema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

**Dem.:** Seja  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $t_0 \in [-m, m]$  e seja

$$g_m : [-m, m] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por  $g_m(t, x) = f(x)$ . Segue do teorema anterior que existe uma única solução  $\varphi_m : [-m, m] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (1.2).

Pela unicidade das soluções segue que se  $k > m$  então  $\varphi_k|_{[-m, m]} = \varphi_m$ . Logo podemos definir

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

por  $\varphi(t) = \varphi_k(t)$  para  $t \in [-k, k]$ , e  $\varphi$  será a solução procurada. ■

**Observação 1.3.5** *Temos que, se  $\bar{V} = \overline{B(0, r)} \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^1$  tal que  $f(x) = 0$  se  $x \in \partial\bar{V}$ , então podemos estender  $f$  em todo  $\mathbb{R}^n$  fazendo  $f(x) = 0$  se  $x \notin \bar{V}$  e temos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Então, pelo corolário acima, para cada  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  do problema (1.2).*

Além disso,

- Se  $\|x_0\| > r$  temos que  $\varphi(t) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$  é a solução do problema tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ .
- Se  $\|x_0\| \leq r$  temos que  $\|\varphi(t)\| \leq r, \forall t \in \mathbb{R}$  pois se existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\|\varphi(s_0)\| > r$  então  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\psi(t) = \varphi(s_0), \forall t \in \mathbb{R}$  é solução de

$$(*) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(t_0) = \varphi(s_0) \end{cases}$$

Mas como  $\varphi$  também é solução de (\*) temos pela unicidade da solução que  $\varphi = \psi$ , ou seja,  $\varphi(t) = \varphi(s_0)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , e como  $\varphi(t_0) = x_0$  temos que  $x_0 = \varphi(s_0)$  o que é absurdo pois  $r < \|\varphi(s_0)\| = \|x_0\| \leq r$ .

Portanto para  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \bar{V}$  temos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \bar{V}$ .

O próximo teorema mostra a dependência contínua entre a solução e os dados iniciais.

**Teorema 1.3.6** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , então a função  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que associa cada  $(t, s, y)$  à única solução  $\psi$  de*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(s) = y \end{cases} . \quad (1.3)$$

*avaliada em  $t$ , ou seja,  $\psi(t) = \varphi(t, s, y)$ , é de classe  $C^1$  (e portanto contínua).*

**Dem.:** (cf. [16])

No que segue precisaremos das seguintes definições.

**Definição 1.3.7** *Uma **variedade**  $n$ -dimensional  $M$  é um espaço topológico Hausdorff tal que  $\forall p \in M$ , existe  $U \subset M$  aberto que contém  $p$  e  $U$  é homeomorfo a  $\text{int}(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ .*

**Definição 1.3.8** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades  $n$ -dimensionais. Uma **isotopia** entre  $X$  e  $Y$  é uma homotopia  $F : I \times X \rightarrow Y$ ,  $I$  intervalo real qualquer, tal que  $F_t : X \rightarrow Y$  é homeomorfismo para cada  $t \in I$ .*

*Dizemos que dois pontos são isotópicos se existe uma isotopia que leva um no outro.*

*Se  $x$  é isotópico a  $y$  usamos a notação  $x \sim y$ , e esta é uma relação de equivalência.*

**Lema 1.3.9 (Lema de Isotopia)** *Sejam  $y$  e  $z$  pontos arbitrários de uma variedade conexa  $N$ . Então existe um homeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  que leva  $y$  em  $z$ .*

**Dem.:** Seja  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$  tal que:

$$\psi(x) > 0 \text{ para } \|x\| < 2$$

$$\psi(x) = 1 \text{ para } \|x\| \leq 1 \text{ e}$$

$$\psi(x) = 0 \text{ para } \|x\| \geq 2.$$

Uma tal função pode ser construída através dos seguintes passos:

a) Tome  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$   
 $f$  é uma função de classe  $C^\infty$ .

b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = f(x-a) \cdot f(b-x)$  é uma função de classe  $C^\infty$ , positiva em  $(a, b)$  e zero em  $\mathbb{R} - (a, b)$ ,  $(0 < a < b)$ . Então

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^x g(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt}$$

é de classe  $C^\infty$ ,  $h(x) = 0$  se  $x \leq a$ ,  $h(x) = 1$  se  $x \geq b$  e  $0 < h(x) < 1$  se  $x \in (a, b)$ .

c) Considere  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\alpha(x) = \begin{cases} h(x+b+a) & \text{se } x < 0 \\ h(-x+b+a) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ ,  $\alpha$  é de classe  $C^\infty$ .

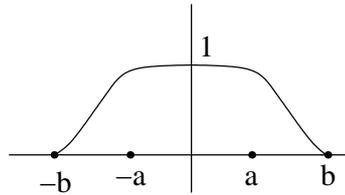


Figura 1.2: gráfico de  $\alpha$

d) Agora tomamos  $\psi_{a,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\psi_{a,b}(x) = \alpha(\|x\|)$  onde  $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ .

Temos que  $\psi_{a,b}$  é constante na bola de centro 0 e raio  $a$ , então a não diferenciabilidade da raiz quadrada em zero não impede que  $\psi_{a,b} \in C^\infty$ .

e) Basta tomar agora  $\psi = \psi_{a,b}$  com  $a = 1$  e  $b = 2$ .

Dado um vetor  $c = (c_1, \dots, c_n) \in S^{n-1}$ , consideremos a equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x) \cdot c \tag{1.4}$$

Segue do corolário 1.3.4 que para cada  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  existe uma única solução  $x(t)$  da equação 1.4 que satisfaz a condição inicial  $x(0) = \bar{x}$ . Além disso, segue do teorema 1.3.6 que a função  $\varphi$  dada por  $\varphi(t, 0, \bar{x}) = x(t)$  é contínua. Usaremos a notação  $\varphi(t, 0, \bar{x}) = F_t^c(\bar{x})$  para esta solução.

Então temos:

- 1)  $F_t^c(\bar{x})$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e depende continuamente de  $t$  e  $\bar{x}$ ,
- 2)  $F_0^c(\bar{x}) = \bar{x}$  e
- 3)  $F_{t+s}^c(\bar{x}) = F_t^c \circ F_s^c(\bar{x})$ .

Assim  $F_t^c$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  para cada  $t$ , pois temos que  $F_t^c = \varphi(t, 0, -)|_{\{t\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^n}$  e sua inversa é  $(F_t^c)^{-1} = F_{-t}^c$ .

Como  $F_0^c$  é a identidade em  $\mathbb{R}^n$  então fazendo  $t$  variar temos que cada  $F_t^c$  é isotópica a identidade. Com uma escolha apropriada de  $t$  e  $c$ , o homeomorfismo  $F_t^c$  levará a origem em um ponto qualquer da bola unitária, de fato; considere o problema de Cauchy:

$$(*) \begin{cases} x'(t) = \psi(x(t)).c \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Então para  $t \in (-1, 1)$ ,  $x_c(t) = t.c$  é solução de (\*), assim  $F_1^c(0) = c$ . Com isso, dado  $x_0 \in B(0, 1) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| < 1\}$  temos que existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $x_0 = \lambda.d$  para algum  $d \in S^{n-1}$ . Logo  $x_0 = \lambda.d = x_d(\lambda) = F_\lambda^d(0)$ .

Agora considere a variedade conexa  $N$ . Se  $y \in N$ , então ele possui uma vizinhança que é homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , e o argumento acima mostra que todo ponto suficientemente próximo de  $y$  é isotópico a  $y$ . Em outras palavras, particionamos  $N$  em classes de isotopia abertas e disjuntas; mas  $N$  é conexo e portanto existe somente uma classe. Logo quaisquer dois pontos de  $N$  são isotópicos.

De fato; sejam  $y \in N$  e  $A = \{z \in N : z \sim y(\text{ isotópico})\}$ . Mostremos que  $A$  é aberto.

Tome  $z \in A$ . Como  $z \in N$  temos que existe vizinhança  $V_z$  de  $z$  e existe um homeomorfismo  $f : V_z \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(z) = 0$ .

Seja  $x \in V_z$  tal que  $f(x) \in B(0,1)$  (bola aberta de centro zero e raio 1). Assim existem  $t \in \mathbb{R}$  e  $c \in S^{n-1}$  tais que  $F_t^c(0) = f(x) \Rightarrow f(x) \sim 0$ .

Agora  $G_t = f^{-1} \circ F_t^c \circ f : V_z \rightarrow V_z$  é homeomorfismo e

$$G_t(z) = f^{-1} \circ F_t^c \circ f(z) = f^{-1} \circ F_t^c(0) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Portanto  $z \sim x$ , como  $z \sim y$  segue que  $x \sim y$ , ou seja,  $x \in A$ . Assim  $f^{-1}(B(0,1)) \cap V_z \subset A$  donde  $A$  é aberto. ■

**Corolário 1.3.10** *Sejam  $x_1, \dots, x_m$  e  $y_1, \dots, y_m$  pontos distintos de uma variedade conexa  $N$  de dimensão  $\geq 2$ . Então existe um homeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  que leva  $x_i$  em  $y_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$*

**Dem.:** (cf. [9])

O próximo lema será usado na demonstração de um teorema no capítulo 3 (teorema 3.2.2).

**Lema 1.3.11** *Seja  $N$  uma variedade  $n$ -dimensional, conexa por caminhos com  $n \geq 2$ , e seja  $x_0 \in N$ . Dado um aberto  $U \subset N$  contendo  $x_0$  e tal que  $\bar{U}$  é homeomorfo a uma bola fechada  $\bar{B}(a,r) \subset \mathbb{R}^n$  por um homeomorfismo que leva  $x_0$  em  $a$ , então, para cada  $x \in U$  temos que existe uma função contínua  $\theta : U \times \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  tal que:*

i)  $\theta_x : \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  definida por  $\theta_x(y) = \theta(x,y)$  é um homeomorfismo que fixa a fronteira  $\partial\bar{U}$ ,

ii)  $\theta_x(x) = x_0$ .

**Dem.:** Primeiro mostremos que a existência de  $\theta$  se reduz à existência de uma função contínua  $\alpha : V \times \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  tal que para todo  $x \in V$ :

i)  $\alpha_x : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  definida por  $\alpha_x(y) = \alpha(x,y)$  é homeomorfismo que fixa  $\partial\bar{V}$

ii)  $\alpha_x(x) = 0$

onde  $V = B(0, 1)$ .

Seja  $h_1 : \bar{U} \rightarrow \overline{B(a, r)}$  um homeomorfismo tal que  $h_1(x_0) = a$  e tome  $h_2 : \overline{B(a, r)} \rightarrow \bar{V}$  o homeomorfismo dado por  $h_2(x) = \frac{1}{r}(x - a)$ .

Se  $h : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$  é definida por  $h = h_2 \circ h_1$  definimos  $\theta : U \times \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  por  $\theta(x, y) = h^{-1} \circ \alpha \circ (h \times h)(x, y)$ .

$$\begin{array}{ccc} U \times \bar{U} & \xrightarrow{\theta} & \bar{U} \\ (h \times h) \downarrow & & \downarrow h \\ V \times \bar{V} & \xrightarrow{\alpha} & \bar{V} \end{array}$$

Logo para cada  $x \in U$ ,  $\theta_x(y) = \theta(x, y) = h^{-1} \circ \alpha \circ (h \times h)(x, y) = h^{-1} \circ \alpha \circ (h(x), h(y)) = h^{-1} \circ \alpha_{h(x)}(h(y))$  é homeomorfismo pois  $h^{-1}$  e  $\alpha_{h(x)}$  são.

$$\theta_x(x) = h^{-1} \circ \alpha \circ (h \times h)(x, x) = h^{-1} \circ \alpha_{h(x)}(h(x)) = h^{-1}(0) = x_0.$$

$$y \in \partial \bar{U} \Rightarrow h(y) \in \partial \bar{V} \Rightarrow \theta_x(y) = h^{-1} \circ \alpha_{h(x)}(h(y)) = h^{-1}(h(y)) = y.$$

Mostremos agora que existe  $\alpha : V \times \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ .

Primeiramente, definimos  $\lambda : V \times \bar{V} \rightarrow [0, 1]$  por  $\lambda(x, y) = \lambda_x(y) = \psi_{a,b}(y)$ , com  $a = \|x\| + \frac{1}{3}(1 - \|x\|)$  e  $b = \|x\| + \frac{2}{3}(1 - \|x\|)$ , sendo  $\psi_{a,b}$  a função  $C^\infty$  definida na demonstração do Lema de Isotopia. Assim temos que para cada  $x \in V$ ,  $\lambda_x$  é uma função de classe  $C^\infty$ , e

$$\lambda(x, y) = \lambda_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \|y\| \leq \|x\| + \frac{1}{3}(1 - \|x\|) \\ 0 & \text{se } \|x\| + \frac{2}{3}(1 - \|x\|) \leq \|y\| \leq 1 \end{cases}$$

Para cada  $x \in V$  seja

$$v_x(y) = \lambda_x(y) \cdot (-x).$$

Temos que  $v_x$  é uma função nas condições da função  $f$  da observação 1.3.5. Assim, considerando o problema de Cauchy, com  $y \in \bar{V}$ ,

$$(*) \begin{cases} \varphi'(t) = v_x(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = y \end{cases}$$

temos que existe uma única  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \bar{V}$  que é de classe  $C^\infty$  e satisfaz (\*). Denotaremos  $\theta_x^t(y) = \varphi(t)$ .

Assim temos, analogamente ao que foi feito no Lema de Isotopia, que

(i)  $\theta_x^t$  está definida e é uma função contínua  $\theta_x^t : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in V$

(ii)  $\theta_x^0(y) = \varphi(0) = y$  e

(iii)  $\theta_x^{t+s}(y) = \theta_x^t \circ \theta_x^s(y)$ .

Logo  $\theta_x^{-t}$  é a inversa de  $\theta_x^t$  que também é contínua. Portanto  $\theta_x^t$  é homeomorfismo de  $\bar{V}$  em  $\bar{V}$  para cada  $t$ .

Ainda temos para  $y \in \partial\bar{V}$ ,  $\lambda_x(y) = 0 \Rightarrow v_x(y) = 0$  logo  $\varphi(t) = y$  é solução de

$$\begin{cases} \varphi'(t) = v_x(\varphi(t)) = 0 \\ \varphi(0) = y \end{cases}$$

e portanto  $\theta_x^t(y) = y$  se  $y \in \partial\bar{V}$ .

Agora para  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $|1-t| \cdot \|x\| \leq \|x\| + \frac{1}{3}(1-\|x\|)$  temos que  $\varphi(t) = -tx + x$  é solução de

$$\begin{cases} \varphi'(t) = v_x(\varphi(t)) = -x \\ \varphi(0) = x \end{cases}$$

pois  $\lambda_x(\varphi(t)) = 1$ , e assim  $\theta_x^1(x) = 0$ .

Logo  $\theta_x^1$  é o homeomorfismo  $\alpha_x$  procurado. ■

## 1.4 Ação de Grupos

Introduziremos agora o conceito de ação de um grupo  $G$  sobre um espaço topológico  $X$  para mostrarmos que a projeção

$$p : X \rightarrow \frac{X}{G}$$

é um recobrimento, e este recobrimento será muito utilizado ao longo do trabalho.

**Definição 1.4.1** *Um grupo topológico é um grupo  $G$  que pode ser equipado com uma topologia tal que:*

i) a função multiplicação  $\mu : G \times G \rightarrow G$ , dada por  $\mu(x, y) = x.y$ , é contínua se  $G \times G$  tem a topologia produto;

ii) a função inversão  $i : G \rightarrow G$ , dada por  $i(x) = x^{-1}$ , é contínua.

**Definição 1.4.2** Dado um grupo topológico  $(G, *)$  e um espaço topológico  $X$ , uma **ação** (à direita) de  $G$  sobre  $X$  é uma função contínua

$$h : X \times G \rightarrow X$$

que associa a cada par  $(x, g)$  o elemento  $x.g$  e tal que,

i) Se  $e$  é o elemento neutro de  $G$  então  $x.e = x$ ,  $\forall x \in X$ .

ii)  $(x.g_1).g_2 = x.(g_1 * g_2)$ ,  $\forall x \in X$ ,  $\forall g_1, g_2 \in G$ .

**Definição 1.4.3** Dada uma ação  $h$  de  $G$  sobre  $X$  definimos o espaço das **órbitas** de  $X$  pela ação  $h$ , denotado  $X/G$ , como sendo o espaço quociente de  $X$  determinado pela seguinte relação de equivalência:  $x \sim x'$  se  $x' = x.g$  para algum  $g \in G$ .

**Definição 1.4.4** Uma ação de  $G$  sobre  $X$  é dita **livre** se ela possui a seguinte propriedade:

$$\exists x \in X \text{ tal que } x.g = x \Rightarrow g = e \text{ (elemento neutro de } G).$$

**Teorema 1.4.5** Sejam  $G$  um grupo finito e  $X$  um espaço topológico de Hausdorff. Se  $G$  atua livremente sobre  $X$  então

$$p : X \rightarrow \frac{X}{G}$$

é um recobrimento.

**Dem.:** Suponhamos que  $G = \{1_G, g_1, \dots, g_n\}$  sendo  $1_G$  o elemento neutro, e  $G$  munido da topologia discreta.

Como  $G$  atua sobre  $X$  temos que para cada  $g \in G$  a aplicação  $f_g : X \rightarrow X$  dada por  $f_g(x) = x.g$  é um homeomorfismo e  $f_g^{-1} = f_{g^{-1}}$ . Como a ação é livre segue que para cada  $x \in X$  sua órbita  $p(x) = \{x.g : g \in G\}$  possui exatamente  $n + 1$  elementos. Assim, dado  $x \in X$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$  temos pela hipótese de  $X$  ser Hausdorff que existem

abertos  $\tilde{U}_j$  e  $V_j$  tais que  $x \in \tilde{U}_j$  e  $x.g_j \in V_j$  e  $\tilde{U}_j \cap V_j = \emptyset$ . Seja  $U_j = \tilde{U}_j \cap V_j g_j^{-1}$ . Temos que  $U_j$  é aberto e contém  $x$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Seja  $U_x = \bigcap_{j=1}^n U_j$ . Então, para cada  $p(x) \in X/G$  temos que  $p^{-1}(p(U_x)) = U_x \cup \bigcup_{j=1}^n U_x.g_j$  (união disjunta) e  $p|_{U_x.g_j} : U_x.g_j \rightarrow p(U_x)$  é um homeomorfismo, donde  $p : X \rightarrow X/G$  é um recobrimento cujo número de folhas é igual à ordem de  $G$ . ■

**Teorema 1.4.6** *Seja  $G$  um grupo finito que atua livremente sobre um espaço topológico  $X$ .*

*i) Se  $X$  é um espaço de Hausdorff simplesmente conexo então  $\pi_1(X/G, [x_0])$  é finito e possui o mesmo número de elementos que  $G$ .*

*ii) Se  $X$  é uma variedade então  $X/G$  também é variedade e  $\dim X = \dim X/G$ .*

**Dem.:**

i) Observe o seguinte trecho da sequência exata dos grupos de homotopia da fibração  $p : X \rightarrow X/G$ :

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X/G, [x_0]) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(G) \longrightarrow \pi_0(X, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Como  $G$  é discreto temos  $\pi_0(G) = G$ ; além disso temos  $\pi_0(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) = 0$  pois  $X$  é simplesmente conexo. Logo  $\Delta$  é bijetora.

ii) Se  $G$  atua livremente sobre  $X$  temos que  $p : X \rightarrow X/G$  é um recobrimento. Assim se  $\bar{x} \in X/G$  então existe  $U$  vizinhança de  $\bar{x}$  em  $X/G$  tal que  $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$  e

$$p : V_\alpha \rightarrow U$$

é homeomorfismo para cada  $\alpha \in I$ .

Como  $X$  é variedade, digamos  $n$ -dimensional, e  $p^{-1}(\bar{x}) \in X$  temos que existe  $A \subset X$  aberto que contém  $p^{-1}(\bar{x})$  e homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Assim  $V_\alpha \cap A$  é aberto em  $V_\alpha$  e como  $p$  é aberta  $p(V_\alpha \cap A) \subset U$  é aberto em  $U$ . Logo  $p(V_\alpha \cap A)$  é aberto em  $X/G$  e  $\bar{x} \in p(V_\alpha \cap A)$ . Ainda, desde que  $V_\alpha \cap A$  é

homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , temos então  $p(V_\alpha \cap A)$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Portanto  $X/G$  é variedade  $n$ -dimensional. ■

**Observação 1.4.7** *No item i) temos que de fato  $\pi_1(X/G, [x_0])$  é isomorfo a  $G$  (cf. [17], p.88).*

# Capítulo 2

## Complexos CW

O principal objetivo deste capítulo é apresentar os espaços com estrutura de complexos CW, e introduzir os principais resultados desses espaços, que serão usados no decorrer do trabalho. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [14].

### 2.1 Definições e resultados

**Definição 2.1.1** *Seja  $X$  um espaço recoberto por subconjuntos  $A_j$ ,  $j$  pertencente a algum conjunto de índices  $J$ , isto é,  $X = \bigcup_{j \in J} A_j$ . Suponha que:*

- i) cada  $A_j$  é um espaço topológico;*
- ii) para cada  $j, k \in J$  as topologias de  $A_j$  e  $A_k$  coincidem com a de  $A_j \cap A_k$ ;*
- iii) para cada  $j, k \in J$ ,  $A_j \cap A_k$  é fechado em  $A_j$  e em  $A_k$ .*

*Então a **topologia fraca** sobre  $X$  determinada por  $\{A_j; j \in J\}$  é a topologia cujos conjuntos fechados são aqueles subconjuntos  $F$  tais que  $F \cap A_j$  é fechado em  $A_j$  para todo  $j \in J$ .*

**Lema 2.1.2** *Seja  $X$  um espaço tendo a topologia fraca determinada por uma família de subconjuntos  $\{A_j; j \in J\}$ . Para qualquer espaço  $Y$  a função  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se, e somente se,  $f|_{A_j}$  é contínua para todo  $j \in J$ .*

**Definição 2.1.3** Uma  $n$ -*célula*  $e^n$  (ou simplesmente  $e$ ) é uma cópia homeomorfa do  $n$ -disco aberto  $D^n - S^{n-1}$ . Denotaremos a dimensão da célula  $e$  por  $n(e)$ .

**Definição 2.1.4** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $A, B$  subconjuntos de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Uma função contínua  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um **homeomorfismo relativo** se  $g|_{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$  é um homeomorfismo.

**Definição 2.1.5** Seja  $X$  um espaço formado por uma união disjunta de células,  $X = \bigcup \{e : e \in E\}$ . Para cada  $k \geq 0$ , o  $k$ -**esqueleto**  $X^{(k)}$  de  $X$  é definido por:

$$X^{(k)} = \bigcup \{e \in E : \dim(e) \leq k\}.$$

É claro que,  $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(2)} \subset \dots$  e  $X = \bigcup_{k \geq 0} X^{(k)}$

**Definição 2.1.6** Um **complexo CW** é uma tripla ordenada  $(X, E, \phi)$ , onde  $X$  é um espaço Hausdorff,  $E$  é uma família de células em  $X$  e  $\phi = \{\phi_e : e \in E\}$  é uma família de funções tais que;

1.  $X = \bigcup \{e : e \in E\}$  (união disjunta)
2. para cada  $k$ -célula  $e \in E$ , a função  $\phi_e : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (e \cup X^{(k-1)}, X^{(k-1)})$  é um homeomorfismo relativo,
3. se  $e \in E$ , então seu fecho  $\bar{e}$  está contido em uma união finita de células de  $E$ ,
4.  $X$  tem a topologia fraca determinada por  $\{\bar{e} : e \in E\}$ .

Se  $(X, E, \phi)$  é um complexo CW, então chamamos  $X$  de espaço CW,  $(E, \phi)$  é chamada decomposição CW e  $\phi_e \in \phi$  é chamada função característica de  $e$ .

**Definição 2.1.7** Um complexo CW  $(X, E, \phi)$  é dito **finito** se  $E$  é um conjunto finito.

**Exemplo 2.1.8** Podemos considerar em  $\mathbb{R}$  uma estrutura de complexo CW, tomando as 0-células e 1-células como sendo, respectivamente,  $e_m^0 = \{m\}$  e  $e_m^1 = (m, m+1)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Do mesmo modo podemos decompor qualquer intervalo  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , com duas 0-células  $e_1^0 = a$ ,  $e_2^0 = b$  e uma 1-célula  $e_1^1 = (a, b)$ .

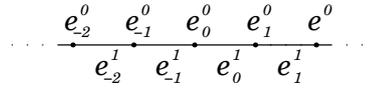


Figura 2.1: decomposição CW de  $\mathbb{R}$

**Exemplo 2.1.9** Seja  $S^1 = \{e^{2\pi ix} \in \mathbb{C} / 0 \leq x \leq 1\}$  o círculo de centro zero e raio 1. Para  $n \in \mathbb{N}^*$ , podemos considerar uma estrutura de complexo CW em  $S^1$ , tomando como 0-células  $e_k^0 = \{e^{\frac{2\pi ki}{n}}\}$ ,  $1 \leq k \leq n$  (as raízes  $n$ -ésimas da unidade) e como 1-células  $e_k^1 = \{e^{2\pi ix}, \frac{k-1}{n} < x < \frac{k}{n}\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

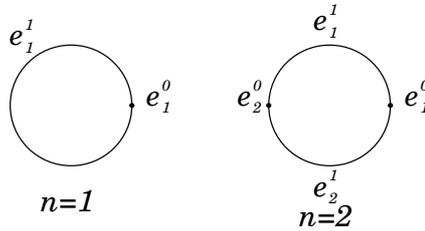


Figura 2.2: decomposição CW de  $S^1$

**Lema 2.1.10** Se  $(X, E, \phi)$  é um complexo CW e se  $e \in E$  é uma  $k$ -célula ( $k > 0$ ) com função característica  $\phi_e$ , então  $\bar{e} = im\phi_e = \phi_e(D^k)$ .

**Dem.:** Como  $\phi_e$  é contínua,  $\phi_e(D^k) = \phi_e(\overline{D^k - S^{k-1}}) \subset \overline{\phi_e(D^k - S^{k-1})} = \bar{e}$ .

$D^k$  é compacto  $\Rightarrow \phi_e(D^k)$  é compacto. Como  $X$  é Hausdorff  $\Rightarrow \phi_e(D^k)$  é fechado em  $X$ .

Assim  $e = \phi_e(D^k - S^{k-1}) \subset \phi_e(D^k)$  e portanto  $\bar{e} \subset \phi_e(D^k)$ . ■

**Definição 2.1.11** Seja  $(X, E, \phi)$  um complexo CW. Se  $E' \subset E$ , definimos

$$|E'| = \cup \{e : e \in E'\} \subset X \text{ e } \phi' = \{\phi_e : e \in E'\}.$$

Chamamos  $(|E'|, E', \phi')$  um **subcomplexo CW** se  $im \phi_e \subset |E'|, \forall e \in E'$

**Exemplo 2.1.12** Se  $(X, E, \phi)$  é um complexo CW e  $E' \subset E$ , então  $|E'|$  é um subcomplexo CW se, e somente se,  $\bar{e} \subset |E'|$  para todo  $e \in E'$ . Consequentemente se  $E'$  é uma família de  $k$ -células em  $E$ , para algum  $k > 0$  fixado, então  $|E'| \cup X^{(k-1)}$  é um subcomplexo CW.

**Definição 2.1.13** Uma sobrejeção contínua  $f : X \rightarrow Y$  é uma **identificação** se um subconjunto  $U$  de  $Y$  é aberto se, e somente se,  $f^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ .

**Lema 2.1.14** Seja  $(X, E, \phi)$  uma tripla ordenada satisfazendo os axiomas (1) e (2) da definição de complexo CW, e seja  $\varphi : \coprod_{e \in E} D^{n(e)} \rightarrow X$  a função  $\varphi = \coprod_{e \in E} \phi_e$ . Então  $X$  tem a topologia fraca determinada por  $\{\bar{e} : e \in E\}$  se, e somente se,  $\varphi$  é uma identificação.

**Dem.:** Suponha que  $X$  tem a topologia fraca determinada por  $\{\bar{e} : e \in E\}$ .

Como  $\phi$  é sobrejetora e contínua é suficiente mostrar que se  $C \subset X$  e  $\varphi^{-1}(C)$  é fechado em  $\coprod_e D^{n(e)}$ , então  $C$  é fechado em  $X$ . Agora  $\varphi^{-1}(C) \cap D^{n(e)}$  é compacto, pois é subconjunto de  $D^{n(e)}$ . Por outro lado :

$$\varphi^{-1}(C) \cap D^{n(e)} = \phi_e^{-1}(C) \cap D^{n(e)} = \phi_e^{-1}(C) \cap \phi_e^{-1}(\bar{e}) = \phi_e^{-1}(C \cap \bar{e}).$$

Como  $\phi_e$  é contínua então  $\phi_e(\phi_e^{-1}(C \cap \bar{e})) = C \cap \bar{e}$  é compacto e portanto  $C \cap \bar{e}$  é fechado em  $\bar{e}$ . Como  $X$  tem a topologia fraca então  $C$  é fechado em  $X$ .

Agora suponha que  $\varphi$  é uma identificação. Seja  $C \subset X$  tal que  $C \cap \bar{e}$  é fechado em  $\bar{e}$  para todo  $e \in E$ . Então  $\varphi^{-1}(C) \cap D^{n(e)}$  é fechado em  $D^{n(e)}$  para todo  $e \in E$ . Como  $\coprod D^{n(e)}$  tem a topologia fraca determinada por  $\{D^{n(e)} : e \in E\}$ ,  $\varphi^{-1}(C)$  é fechado em  $\coprod D^{n(e)}$ , mas  $\varphi$  é identificação então  $C$  é fechado em  $X$ . Assim  $X$  tem a topologia fraca. ■

**Lema 2.1.15** Seja  $(X, E, \phi)$  um complexo CW e  $E'$  um subconjunto finito de  $E$ . Então  $|E'|$  é um subcomplexo CW se, e somente se,  $|E'|$  é fechado.

**Dem.:** Se  $|E'|$  é um subcomplexo CW, então  $\bar{e} \subset |E'|$  para todo  $e \in E'$ . Consequentemente  $|E'| = \cup \{e : e \in E'\} = \cup \{\bar{e} : e \in E'\}$  é fechado, pois é uma união finita de fechados.

Agora se  $|E'|$  é fechado e  $e \in E'$ , então  $e \subset |E'|$  e  $\bar{e} \subset |E'|$ , assim  $|E'|$  é um subcomplexo CW. ■

**Observação 2.1.16** Temos que o resultado acima vale também para um subconjunto arbitrário  $E'$ , não necessariamente finito de  $E$ , (cf. [14], p.202).

**Corolário 2.1.17** *Seja  $(X, E, \Phi)$  um complexo CW e para algum  $n > 0$  fixado, seja  $E'$  uma família de  $n$ -células em  $E$ . Assim:*

*i)  $X' = |E'| \cup X^{(n-1)}$  é fechado em  $X$ .*

*ii) toda  $n$ -célula  $e$  é um conjunto aberto em  $X^{(n)}$ .*

**Dem.:** *i)* Sabemos que  $X'$  é um subcomplexo CW, exemplo 2.1.12, conseqüentemente ele é fechado.

*ii)* Este é um caso especial de (i) em que  $E'$  consiste de toda  $n$ -célula em  $E$  exceto  $e$ . ■

**Lema 2.1.18** *Se  $(X, E, \phi)$  é um complexo CW e  $e \in E$ , então  $\bar{e}$  está contido em um subcomplexo CW finito.*

**Dem.:** Procederemos por indução sobre  $n = \dim(e)$ . O lema é obviamente verdade se  $n = 0$ . Se  $n > 0$ , então o lema 2.1.10 nos dá

$$\bar{e} - e = \phi_e(D^n) - e \subset (e \cup X^{(n-1)}) - e \subset X^{(n-1)}.$$

Pelo axioma (3),  $\bar{e}$  intersecta somente um número finito de células diferentes de  $e$ , digamos  $e_1, e_2, \dots, e_m$  e  $\dim(e_i) \leq n - 1, \forall i = 1, \dots, m$ . Por indução, existe um subcomplexo CW finito  $X_i$  contendo  $\bar{e}_i$  para  $i = 1, \dots, m$  e cada  $X_i$  é fechado pelo lema 2.1.15. Mas  $\bar{e} \subset e \cup X_1 \cup \dots \cup X_m$ , donde

$$\overline{e \cup X_1 \cup \dots \cup X_m} = \bar{e} \cup \bar{X}_1 \cup \dots \cup \bar{X}_m = \bar{e} \cup X_1 \cup \dots \cup X_m \subset e \cup X_1 \cup \dots \cup X_m.$$

Logo  $e \cup X_1 \cup \dots \cup X_m$  é fechado e é uma união finita de células. Conseqüentemente concluímos do lema 2.1.15 que  $e \cup X_1 \cup \dots \cup X_m$  é um subcomplexo CW finito. ■

**Lema 2.1.19** *Se  $(X, E, \Phi)$  é um complexo CW, então todo subconjunto compacto  $K$  de  $X$  está contido em um subcomplexo CW finito. Além disso, um espaço CW,  $X$ , é compacto se, e somente se,  $(X, E, \Phi)$  é um complexo CW finito para toda decomposição CW,  $E$ .*

**Dem.:** Para cada  $e \in E$  com  $e \cap K \neq \emptyset$ , escolha um ponto  $a_e \in K \cap e$ , e seja  $A$  o conjunto formado por todos esses  $a_e$ . Para cada  $e \in E$  o lema 2.1.18 diz que existe um subcomplexo

CW finito  $X_e$  contendo  $\bar{e}$ . Além disso,  $A \cap \bar{e} \subset A \cap X_e$  é um conjunto finito e então fechado em  $\bar{e}$ . Assim  $A$  é fechado em  $X$ . O mesmo argumento mostra que todo subconjunto de  $A$  é fechado em  $X$  e conseqüentemente  $A$  é discreto. Mas  $A$  também é compacto, pois  $A \subset K$  é fechado. Assim  $A$  é finito e então  $K$  intersecta somente um número finito de células  $e \in E$ , digamos  $e_1, \dots, e_m$ . Pelo lema 2.1.18 existem subcomplexos CW finitos  $X_i$  com  $\bar{e}_i \subset X_i$  para  $i = 1, \dots, m$ . Segue que  $K$  está contido no subcomplexo CW finito  $\bigcup_{i=1}^m X_i$ . ■

**Teorema 2.1.20** *Todo espaço de recobrimento  $(\tilde{X}, p)$  de um complexo CW  $(X, E, \Phi)$  finito dimensional e conexo pode ser equipado com uma decomposição CW tal que  $\tilde{X}$  é um complexo CW com  $\dim(\tilde{X}) = \dim(X)$ .*

**Dem.:** Seja  $I$  um conjunto que indexa os pontos da fibra, ou seja, se  $x \in X$ , então  $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_i : i \in I \text{ e } p(\tilde{x}_i) = x\}$ . Para cada  $e \in E$  seja  $x_e = \Phi_e(0) \in e$ . Como  $D^n$  é simplesmente conexo, o teorema geral do levantamento, teorema 1.1.11, garante que existem funções contínuas  $\tilde{\Phi}_{ei} : (D^n, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_i)$  para todo  $e \in E$  e  $i \in I$  com  $p \circ \tilde{\Phi}_{ei} = \Phi_e$  e  $p(\tilde{x}_i) = x_e$ .

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_i) \\ & \nearrow \tilde{\Phi}_{ei} & \downarrow p \\ (D^n, 0) & \xrightarrow{\Phi_e} & (X, x_e) \end{array}$$

Denotemos  $\tilde{\Phi}_{ei}(D^n - S^{n-1})$  por  $\tilde{e}_i$ . Definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \left\{ \tilde{\Phi}_{ei} : D^n \rightarrow \tilde{X}; e \in E, i \in I, n = n(e) \right\} \\ \tilde{E} &= \{ \tilde{e}_i : e \in E, i \in I \} \text{ e} \\ \tilde{X}^{(n)} &= \cup \left\{ \tilde{e}_i \in \tilde{E} : \dim(\tilde{e}_i) \leq n \right\}. \end{aligned}$$

Se  $(\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\Phi})$  é um complexo CW então  $\dim \tilde{X} = \dim X$ .

Mostremos por indução sobre  $n$  que  $\tilde{X}^{(n)}$  é um complexo CW para todo  $n \leq \dim(X)$ . A indução começa porque  $\tilde{X}^{(0)}$  é discreto ( $(\tilde{X}, p)$  é espaço de recobrimento).

Suponha que  $n > 0$  e verifiquemos então os axiomas da definição de complexo CW.

(1) Se  $\tilde{y} \in \tilde{X}$ , tome  $y = p(\tilde{y})$ . Seja  $e$  a célula em  $X$  contendo  $y$  e  $f$  um caminho em  $e$  de  $y$  a  $x_e$ . Para cada  $\tilde{y}_i \in p^{-1}(y)$ , existe um levantamento  $\tilde{f}_i$  de  $f$  que é um caminho em  $\tilde{e}_i$  de  $\tilde{y}_i$  a  $\tilde{x}_i$ . Mas  $\tilde{y} = \tilde{y}_i$  para algum  $i$ , assim  $\tilde{y} \in \tilde{e}_i \subset \tilde{X}$ . Consequentemente  $\tilde{X} = \bigcup_{n \geq 0} \tilde{X}^{(n)}$ .

Para ver que esta é uma união disjunta de células, considere células  $e, a \in X^{(n)}$  e suponha que  $\tilde{e}_i \cap \tilde{a}_j \neq \emptyset$  para algum  $i$  e algum  $j$ . Por indução podemos assumir que  $\tilde{e}_i$  é uma  $n$ -célula e consequentemente é aberto em  $\tilde{X}^{(n)}$  (cf. corolário 2.1.17). Se  $e \neq a$  então  $p(\tilde{e}_i \cap \tilde{a}_j) \subset p(\tilde{e}_i) \cap p(\tilde{a}_j) = e \cap a = \emptyset$ . Logo  $\tilde{e}_i \cap \tilde{a}_j = \emptyset$ ; se  $e = a$  então  $\tilde{e}_i \cap \tilde{e}_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  pois  $e$  é igualmente recoberto por  $p$  [[14], p.299].

(2) Se  $\dim(e) = n$ , então  $\Phi_e(S^{n-1}) \subset X^{(n-1)}$ . Como  $p \circ \tilde{\Phi}_{ei} = \Phi_e$ , segue que  $\tilde{\Phi}_{ei}(S^{n-1}) \subset \tilde{X}^{(n-1)}$ , assim  $\tilde{\Phi}_{ei}$  é uma função dos pares  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\tilde{e}_i \cup \tilde{X}^{(n-1)}, \tilde{X}^{(n-1)})$ . Além disso, cada  $\tilde{\Phi}_{ei}$  é um homeomorfismo relativo pois  $\Phi_e$  o é.

(3) Se  $\dim(\tilde{e}_i) = n$  então o fecho de  $\tilde{e}_i$  está contido em  $\tilde{e}_i \cup \tilde{\Phi}_{ei}(S^{n-1})$ . Como  $\tilde{\Phi}_{ei}(S^{n-1})$  é compacto então ele está contido em um subcomplexo CW finito de  $\tilde{X}^{(n-1)}$  (lema 2.1.19), e segue que  $\overline{\tilde{e}_i}$  intersecta somente um número finito de células.

(4) Usaremos o seguinte diagrama comutativo para verificar que  $\tilde{X}^{(n)}$  tem a topologia fraca determinada pelos fechos de suas células.

$$\begin{array}{ccc} \coprod D^{n(\tilde{e}_i)} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X}^{(n)} \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ \coprod D^{n(e)} & \xrightarrow{\varphi} & X^{(n)} \end{array}$$

Aqui  $\tilde{\varphi} = \coprod_e \tilde{\Phi}_e$  e  $q = \coprod q_{ei}$ , onde  $q_{ei} : D^{n(\tilde{e}_i)} \rightarrow D^{n(e)}$  age como a identidade. Pelo lema 2.1.14,  $\tilde{X}$  tem a topologia fraca se e somente se  $\tilde{\varphi}$  é uma identificação. Suponha que  $\tilde{B}$  é um subconjunto de  $\tilde{X}$  com  $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B})$  aberto. Como  $\tilde{\varphi}$  é uma sobrejeção contínua ela será uma identificação se cada  $\tilde{B}$  é aberto em  $\tilde{X}$ .

Seja  $\tilde{x} \in \tilde{B}$ ,  $x = p(\tilde{x})$  e  $U$  vizinhança aberta de  $x$ ,  $\tilde{U}$  a folha sobre  $U$  contendo  $\tilde{x}$ . Então  $\tilde{B}$  é aberto se e só se  $\tilde{B} \cap \tilde{U}$  é aberto em  $\tilde{X}$ . Mudando a notação se necessário podemos assumir que  $\tilde{B} \subset \tilde{U}$ , onde  $p|_{\tilde{U}}$  é um homeomorfismo. Agora  $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B})$  é aberto, e como  $q$  é uma função aberta temos  $q \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B})$  aberto.

Temos que,  $q(\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B})) = \varphi^{-1}(p(\tilde{B}))$ , pois assumindo que  $\tilde{\varphi}(z) \in \tilde{B}$ , pela comutatividade do diagrama temos que  $\varphi(q(z)) = p(\tilde{\varphi}(z)) \in p(\tilde{B})$  e consequentemente

$q(\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B})) \subset \varphi^{-1}(p(\tilde{B}))$ .

Por outro lado se  $z \in \varphi^{-1}(p(\tilde{B}))$  então  $\varphi(z) \in p(\tilde{B})$ . Agora, como  $z \in D^{n(e)}$  para algum  $e \in E$ , escolha um caminho  $f$  em  $D^{n(e)}$  de  $z$  até 0. Assim  $\varphi \circ f$  é um caminho em  $e$  de  $\varphi(z)$  até  $x_e$ .

Seja  $g$  o levantamento de  $\varphi \circ f$ , com respeito ao recobrimento  $p$ , que começa em  $g(0) \in \tilde{B}$ . É claro que  $g(1) = \tilde{x}_i$  para algum  $i \in I$ . Mas  $\tilde{\varphi} \circ q_{ei}^{-1} \circ f$  é levantamento de  $\varphi \circ f$  que termina em  $\tilde{x}_i$ , pois

$$p \circ \tilde{\varphi} \circ q_{ei}^{-1} \circ f = \varphi \circ q \circ q_{ei}^{-1} \circ f = \varphi \circ f.$$

Pela unicidade do levantamento de caminhos temos que  $\tilde{\varphi} \circ q_{ei}^{-1} \circ f = g$  e então  $\tilde{\varphi} \circ q_{ei}^{-1} \circ f(0) = g(0) \in \tilde{B}$ . Assim,  $\tilde{\varphi} \circ q_{ei}^{-1} \circ f(0) = \tilde{\varphi} \circ q_{ei}^{-1}(z) \in \tilde{B}$  então  $z \in (\tilde{\varphi} \circ q^{-1})^{-1}(\tilde{B}) = q(\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B}))$ .

Com isso temos,  $q(\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B})) = \varphi^{-1}(p(\tilde{B}))$  é aberto, então  $p(\tilde{B})$  é aberto pois  $\varphi$  é identificação. Segue então,  $(p|_{\tilde{U}})^{-1}(p(\tilde{B})) = \tilde{B}$  é aberto em  $\tilde{X}$  pois  $p|_{\tilde{U}}$  é homeomorfismo. ■

**Observação 2.1.21** *O teorema acima é válido para um complexo CW arbitrário  $X$  não necessariamente finito dimensional (cf. [14]).*

Finalizamos este capítulo listando dois resultados técnicos, cujas demonstrações podem ser encontradas, respectivamente, em [14] e [11].

**Teorema 2.1.22** *Se  $X$  é um complexo CW, então:*

- i)  $X$  é localmente conexo por caminhos.*
- ii)  $X$  é semilocalmente 1-conexo.*

**Teorema 2.1.23** *Se  $X$  é um complexo CW, então o  $i$ -ésimo grupo de homologia  $H_i(X^{(n)})$  é zero se  $i > n$  e é isomorfo a  $H_i(X)$  se  $i < n$ .*

## 2.2 Espaços de Eilenberg-MacLane

Nesta seção definiremos um tipo especial de espaço topológico, o qual têm todos os grupos de homotopia triviais exceto em uma única dimensão.

**Definição 2.2.1** *Dado um inteiro  $n \geq 1$  e um grupo  $G$ , um espaço  $X$  é chamado espaço de **Eilenberg-MacLane** do tipo  $K(G, n)$  se*

$$\begin{cases} \pi_n(X) = G & e \\ \pi_q(X) = 0 & \text{se } q \neq n. \end{cases}$$

**Teorema 2.2.2** *Dado um inteiro  $n \geq 1$  e um grupo  $G$  (abeliano se  $n \geq 2$ ), existe um complexo CW conexo  $X$  com  $\pi_n(X) = G$  e  $\pi_q(X) = 0$  se  $q \neq n$ .*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [18].

**Exemplo 2.2.3** *Sendo  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  temos então pelo exemplo 1.2.10 que  $S^1$  é um espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(\mathbb{Z}, 1)$ .*

A seguir daremos um exemplo de espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  para todo  $m > 1$  e exibiremos os grupos de homologia desses espaços.

**Exemplo 2.2.4** *Dado um inteiro  $m > 1$  e inteiros  $l_1, \dots, l_n$  relativamente primos com  $m$ , definimos o espaço de **Lens**, ou espaço **lenticular**,  $L = L_m(l_1, \dots, l_n)$  como sendo o espaço das órbitas,  $\frac{S^{2n-1}}{\mathbb{Z}_m}$ , da esfera unitária  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  pela ação de  $\mathbb{Z}_m$  gerada pela aplicação  $\rho(z_1, \dots, z_n) = (e^{2\pi i l_1/m} z_1, \dots, e^{2\pi i l_n/m} z_n)$ . Em particular quando  $m = 2$ ,  $\rho$  é a função antipodal, e neste caso  $L = \mathbb{R}P^{2n-1}$ . No caso geral, a projeção  $S^{2n-1} \rightarrow L$  é um recobrimento uma vez que a ação gerada por  $\rho$  de  $\mathbb{Z}_m$  é livre.*

É possível construir uma estrutura CW sobre o espaço lenticular, com uma célula  $e^k$  para cada  $k \leq 2n - 1$  e mostrar que

$$H_k(L_m(l_1, \dots, l_n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } k = 0, 2n - 1 \\ \mathbb{Z}_m & \text{para } k \text{ ímpar}, 0 < k < 2n - 1 \\ 0 & \text{para os outros casos} \end{cases}$$

resultado visto em ([7], p.144).

Do mesmo modo definimos o espaço lenticular infinito-dimensional,

$$L_m^\infty = L_m(l_1, l_2, \dots) = \frac{S^\infty}{\mathbb{Z}_m}$$

partindo de uma sequência de inteiros  $l_1, l_2, \dots$  relativamente primos com  $m$  e considerando a esfera infinita  $S^\infty = \{(z_i) \in \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C} : \sum_{i=1}^\infty |z_i|^2 = 1\}$ . O espaço  $L_m^\infty$  é a união de espaços lenticulares finito-dimensionais  $L_m(l_1, \dots, l_n)$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Assim  $L_m^\infty$  é um complexo CW. Temos também que  $L_m^\infty$  é um espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ . De fato, usando a sequência exata dos grupos de homotopia da fibração  $S^\infty \rightarrow \frac{S^\infty}{\mathbb{Z}_m}$ ,

$$\dots \longrightarrow \pi_j(\mathbb{Z}_m) \longrightarrow \pi_j(S^\infty) \longrightarrow \pi_j(L_m^\infty) \longrightarrow \pi_{j-1}(\mathbb{Z}_m) \longrightarrow \dots$$

temos que  $\pi_j(L_m^\infty) = 0$  para  $j > 1$  já que  $\pi_j(S^\infty) = 0$  para  $j \geq 1$ , pois  $S^\infty$  é contrátil, e  $\pi_j(\mathbb{Z}_m) = 0$  para  $j \geq 1$ , pois  $\mathbb{Z}_m$  é discreto. Ainda temos que  $\pi_1(L_m^\infty) = \mathbb{Z}_m$  pois  $\pi_1(L_m^\infty)$  é isomorfo a  $\pi_0(\mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_m$  (cf. observação 1.4.7).

Concluimos então, a partir do teorema 2.1.23, que

$$H_k(L_m^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } k = 0 \\ \mathbb{Z}_m & \text{para } k \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } k \text{ par} \end{cases}$$

De todos os resultados obtidos neste e no capítulo anterior podemos concluir o seguinte:

**Teorema 2.2.5** *Seja  $X$  um complexo CW finito dimensional e  $G$  um grupo. Se  $X$  é um espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(G, 1)$  então  $G$  não possui elementos não triviais de ordem finita.*

**Dem.:** Por hipótese  $X$  é um complexo CW de dimensão finita, digamos  $\dim X = n$ .

Suponhamos por absurdo que  $G$  possui um elemento de ordem finita  $g \in G$  e  $o(g) = m > 1$ .  $H = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_m$  é subgrupo de  $G = \pi_1(X, x_0)$ . Então temos por 1.1.20 e 2.1.20 que existe espaço de recobrimento  $(E, e_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$  que é um complexo

CW com  $\dim E = n$  e  $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$  e como a aplicação de recobrimento induz um monomorfismo temos  $\pi_1(E, e_0) \cong H$ .

Usando a sequência de homotopia para a fibração  $p$  temos:

$$\dots \longrightarrow \pi_j(F) \longrightarrow \pi_j(E) \longrightarrow \pi_j(X) \longrightarrow \pi_{j-1}(F) \longrightarrow \dots$$

onde  $F$  é a fibra do recobrimento  $p$  e para  $j > 1$ ,  $\pi_j(F) = 0$  pois a fibra é discreta. Como  $\pi_j(X) = 0$  se  $j > 1$  temos  $\pi_j(E) = 0$  se  $j > 1$ , logo  $E$  é espaço de Eilenberg-MacLane do tipo  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ .

Assim por 2.1.23 temos  $H_i(E; \mathbb{Z}) = 0$  se  $i > n$ , então  $H_{2n+1}(E; \mathbb{Z}) = 0$ .

Mas, pelo exemplo acima, vimos que  $H_{2n+1}(E, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$  e portanto temos um absurdo. Logo  $G$  não possui elementos não triviais de ordem finita. ■

## Capítulo 3

# Grupo de tranças e Espaços de configurações

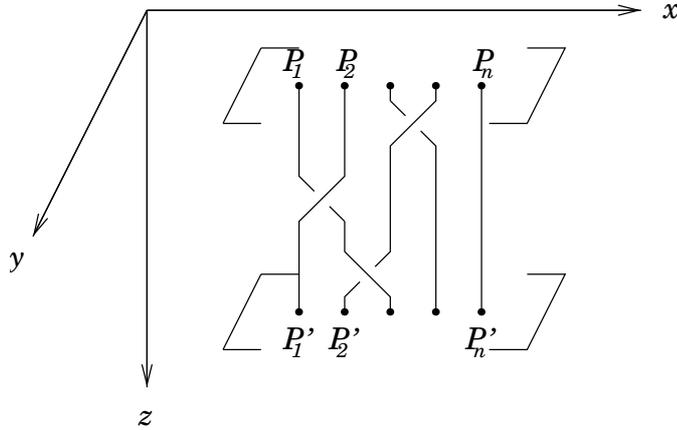
O objetivo deste capítulo é apresentar o grupo de tranças com  $n$  cordas,  $B(n)$ , e identificá-lo com o grupo fundamental do espaço de configurações de  $\mathbb{R}^2$ ,  $C_n(\mathbb{R}^2)$ . Teremos então que o espaço de configurações  $C_n(\mathbb{R}^2)$  é um espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(B(n), 1)$ , o que pelo teorema 2.2.5 nos dará um resultado sobre a ordem dos elementos do grupo de tranças,  $B(n)$ , corolário 3.3.3, que será usado na demonstração da generalização do teorema de Borsuk-Ulam que apresentaremos no próximo capítulo.

### 3.1 Tranças

Nesta seção daremos a definição de tranças com  $n$  cordas e mostraremos que suas classes de equivalência formam um grupo, que denotaremos  $B(n)$ . Introduziremos também a apresentação deste grupo, e será dada uma idéia da demonstração somente na seção 3.4.

Seja  $\mathbb{E}^3$  um espaço euclidiano tridimensional. Identificamos  $\mathbb{E}^3$  com  $\mathbb{R}^3$  escolhendo o sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  com o eixo  $z$  como indicado na figura 3.1 abaixo.

Considere dois planos paralelos em  $\mathbb{E}^3$  com coordenada  $z$  constante em  $z_0$

Figura 3.1:  $n$ -trança

e  $z_1$ , com  $z_0 < z_1$ . Chamamos  $z = z_0$  de plano superior e  $z = z_1$  de plano inferior. Marque no plano superior  $n$  diferentes pontos alinhados  $P_1, \dots, P_n$  e  $P'_1, \dots, P'_n$  suas projeções ortogonais no plano inferior.

**Definição 3.1.1** *Uma trança com  $n$  cordas, ou  $n$ -trança,  $\beta$ , é um sistema formado por  $n$  arcos  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$  mergulhados em  $\mathbb{E}^3$  e uma permutação  $\tau \in \Sigma_n$ , com  $\Sigma_n = \{f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} : f \text{ é bijeção}\}$ , onde o  $i$ -ésimo arco  $\mathcal{A}_i$  liga o ponto  $P_i$  do plano superior ao ponto  $P'_{\tau(i)}$  do plano inferior, tal que:*

- i) cada arco  $\mathcal{A}_i$  intercepta cada plano paralelo entre os planos superior e inferior exatamente uma vez;*
- ii) os arcos  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  interceptam cada plano paralelo entre os planos superior e inferior em exatamente  $n$  diferentes pontos.*

$\tau$  é chamada permutação da trança e o arco  $\mathcal{A}_i$  é chamado a  $i$ -ésima corda da trança. Denotaremos uma trança  $\beta$  com sistema de arcos  $\mathcal{A}$  e permutação  $\tau$  por  $(\mathcal{A}, \tau)$ .

Podemos pensar no  $i$ -ésimo arco em  $\mathbb{E}^3$  como a imagem de um mergulho  $\mathcal{A}_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ , ou seja, de um caminho contínuo e injetor.

Definiremos agora uma relação entre as tranças.

**Definição 3.1.2** Duas  $n$ -tranças com sistemas de arcos  $\mathcal{A}^0 = \{\mathcal{A}_1^0, \dots, \mathcal{A}_n^0\}$  e  $\mathcal{A}^1 = \{\mathcal{A}_1^1, \dots, \mathcal{A}_n^1\}$  ambas com a mesma permutação  $\tau$ , são chamadas equivalentes (ou **homotópicas**) se existe uma homotopia de caminhos de  $\mathcal{A}^0$  a  $\mathcal{A}^1$ , em outras palavras, se existem  $n$  funções contínuas

$$F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad 1 \leq i \leq n$$

tais que;

$$\left. \begin{aligned} F_i(t, 0) &= \mathcal{A}_i^0(t) \\ F_i(t, 1) &= \mathcal{A}_i^1(t) \end{aligned} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\left. \begin{aligned} F_i(0, s) &= P_i \\ F_i(1, s) &= P'_{\tau(i)} \end{aligned} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq s \leq 1$$

e tal que se definirmos  $\mathcal{A}_i^s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$  por  $\mathcal{A}_i^s(t) = F_i(t, s)$  então  $\mathcal{A}^s = \{\mathcal{A}_1^s, \dots, \mathcal{A}_n^s\}$  é uma  $n$ -trança (com permutação  $\tau$ ) para cada  $0 \leq s \leq 1$ .

$$\text{Notação: } (\mathcal{A}^0, \tau) \sim (\mathcal{A}^1, \tau).$$

A relação descrita acima é uma relação de equivalência. De fato:

(reflexiva)  $(\mathcal{A}, \tau) \sim (\mathcal{A}, \tau)$  pois;  $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$  tal que  $F_i(t, s) = \mathcal{A}_i(t)$ ,  $\forall s \in [0, 1]$  é uma função contínua e

$$\left\{ \begin{aligned} F_i(t, 0) &= \mathcal{A}_i(t) \\ F_i(t, 1) &= \mathcal{A}_i(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{aligned} F_i(0, s) &= \mathcal{A}_i(0) = P_i \\ F_i(1, s) &= \mathcal{A}_i(1) = P'_{\tau(i)} \end{aligned} \right\}.$$

(simétrica) Se  $(\mathcal{A}^0, \tau) \sim (\mathcal{A}^1, \tau)$  sejam  $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ ,  $1 \leq i \leq n$  tais que

$$\left\{ \begin{aligned} F_i(t, 0) &= \mathcal{A}_i^0(t), \\ F_i(t, 1) &= \mathcal{A}_i^1(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{aligned} F_i(0, s) &= P_i, \\ F_i(1, s) &= P'_{\tau(i)} \end{aligned} \right\}$$

e considere  $G_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$  tais que  $G_i(t, s) = F_i(t, 1 - s)$ ,  $1 \leq i \leq n$  então

$$\left\{ \begin{aligned} G_i(t, 0) &= F_i(t, 1) = \mathcal{A}_i^1(t), \\ G_i(t, 1) &= F_i(t, 0) = \mathcal{A}_i^0(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{com} \quad \left\{ \begin{aligned} G_i(0, s) &= F_i(0, 1 - s) = P_i, \\ G_i(1, s) &= F_i(1, 1 - s) = P'_{\tau(i)} \end{aligned} \right\}.$$

Logo  $(\mathcal{A}^1, \tau) \sim (\mathcal{A}^0, \tau)$

(transitiva) Se  $(\mathcal{A}^0, \tau) \sim (\mathcal{A}^1, \tau)$  e  $(\mathcal{A}^1, \tau) \sim (\mathcal{A}^2, \tau)$  sejam  $F$  a homotopia entre  $(\mathcal{A}^0, \tau)$

e  $(\mathcal{A}^1, \tau)$  e  $G$  a homotopia entre  $(\mathcal{A}^1, \tau)$  e  $(\mathcal{A}^2, \tau)$ .

Tome  $H_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$  dada por

$$H_i(t, s) = \begin{cases} F_i(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G_i(t, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Temos que  $H_i$  é contínua pelo lema da colagem (veja [13]) e

$$\begin{cases} H_i(t, 0) = F_i(t, 0) = \mathcal{A}_i^0(t), \\ H_i(t, 1) = G_i(t, 1) = \mathcal{A}_i^2(t) \end{cases} \text{ com } \begin{cases} H_i(0, s) = P_i, \\ H_i(1, s) = P'_{\tau(i)}. \end{cases}$$

Portanto  $H$  é homotopia entre  $\mathcal{A}^0$  e  $\mathcal{A}^2$ .

Daqui para frente não distinguiremos o conceito entre a classe de equivalência da trança e a própria trança, ou seja, não usaremos uma notação para a classe, continuaremos denotando  $(\mathcal{A}, \tau)$  a classe de equivalência da  $n$ -trança  $\beta$  com sistema de arcos  $\mathcal{A}$  e permutação  $\tau$ . E assim podemos assumir que os cruzamentos das cordas ocorrem em diferentes níveis, e a passagem das cordas por cima e por baixo devem ser indicadas.

Obtemos os cruzamentos transversais dos arcos se projetarmos a trança ortogonalmente sobre o plano em  $\mathbb{E}^3$  contendo os pontos  $P_1, \dots, P_n, P'_1, \dots, P'_n$ . Por esta projeção obtemos uma figura padrão da trança  $\beta$  como mostra a figura 3.2.

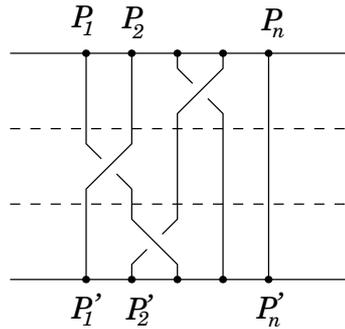


Figura 3.2: projeção padrão

Seja  $B(n)$  o conjunto das classes de equivalência das  $n$ -tranças. Este conjunto pode ser equipado com uma estrutura natural de grupo, que definiremos agora.

Sejam  $\beta_1$  e  $\beta_2$  duas  $n$ -tranças. Então definiremos o produto de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , denotado por  $\beta_1 \cdot \beta_2$  como segue:

Primeiro suspenda a trança  $\beta_1$  sobre a trança  $\beta_2$  ligando o plano inferior de  $\beta_1$  ao plano superior de  $\beta_2$ . Então remova o plano onde as tranças estão ligadas uma com a outra. Agora comprima o sistema resultante de arcos entre os planos  $z = z_0$  e  $z = z_1$ , e temos a trança  $\beta_1 \cdot \beta_2$ . Veja figura 3.3.

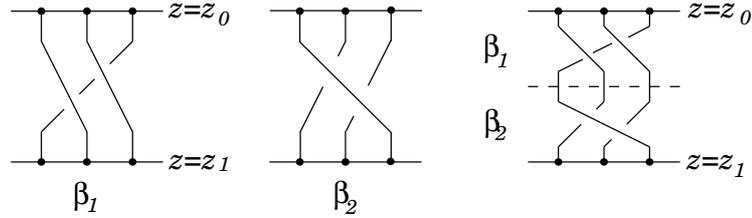


Figura 3.3: produto de tranças

Note que se  $\beta_1$  tem sistema de arcos  $\mathcal{A}^1$  e permutação  $\tau$ , e  $\beta_2$  tem sistema de arcos  $\mathcal{A}^2$  e permutação  $\gamma$  então o produto  $\beta_1 \cdot \beta_2$  é representado por  $(\mathcal{A}, \gamma \circ \tau)$  onde o  $i$ -ésimo arco é dado por,

$$\mathcal{A}_i(t) = \begin{cases} \mathcal{A}_i^1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se substituirmos  $\beta_1$  e  $\beta_2$  por tranças homotópicas  $\beta'_1$  e  $\beta'_2$  respectivamente, então o produto  $\beta_1 \cdot \beta_2$  é homotópico a  $\beta'_1 \cdot \beta'_2$ . De fato:

Seja  $\mathcal{A}^j$  o sistema de cordas de  $\beta_j$  para  $j = 1, 2$ .  $\beta_1, \beta'_1$  com permutação  $\tau$  e  $\beta_2, \beta'_2$  com permutação  $\gamma$ .

O sistema de cordas de  $\beta_1 \cdot \beta_2$  é  $\mathcal{A}^1 \cdot \mathcal{A}^2$  onde  $\mathcal{A}_i(t) = \begin{cases} \mathcal{A}_i^1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

e o sistema de cordas de  $\beta'_1 \cdot \beta'_2$  é  $\mathcal{A}^{1'} \cdot \mathcal{A}^{2'}$  onde  $\mathcal{A}'_i(t) = \begin{cases} \mathcal{A}_i^{1'}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^{2'}(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

Seja  $F$  a homotopia entre  $\beta_1$  e  $\beta'_1$  e  $G$  a homotopia entre  $\beta_2$  e  $\beta'_2$ .

Tome  $H_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$  como  $H_i(t, s) = \begin{cases} F_i(2t, s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G_{\tau(i)}(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

então

$$H_i(t, 0) = \begin{cases} F_i(2t, 0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G_{\tau(i)}(2t - 1, 0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{A}_i^1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \mathcal{A}_i(t)$$

e

$$H_i(t, 1) = \begin{cases} F_i(2t, 1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G_{\tau(i)}(2t - 1, 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{A}_i^{1'}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^{2'}(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \mathcal{A}_i'(t)$$

com

$$\begin{cases} H_i(0, s) = F_i(0, s) = P_i \\ H_i(1, s) = G_{\tau(i)}(1, s) = P'_{\gamma(\tau(i))}. \end{cases}$$

Portanto  $H$  é homotopia entre  $\beta_1 \cdot \beta_2$  e  $\beta'_1 \cdot \beta'_2$ .

Assim o produto está bem definido nas classes de equivalência das  $n$ -tranças e induz o produto em  $B(n)$  o qual é associativo;

Seja  $\beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$ ,  $n$ -tranças em  $B(n)$  com permutações  $\tau, \sigma, \gamma$  e sistemas de cordas  $\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2$  e  $\mathcal{A}^3$  respectivamente. Denotemos  $\mathcal{A}'$  e  $\mathcal{A}$  os sistemas resultantes dos produtos  $(\mathcal{A}^1 \cdot \mathcal{A}^2) \cdot \mathcal{A}^3$  e  $\mathcal{A}^1 \cdot (\mathcal{A}^2 \cdot \mathcal{A}^3)$  nessa ordem.

Considere  $H_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$  definida por

$$H_i(t, s) = \begin{cases} \mathcal{A}_i^1(4t/(s+1)), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^2(4t - s - 1), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \mathcal{A}_{\gamma(\tau(i))}^3((4t - s - 2)/(2 - s)), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Pelo Lema da Colagem  $H_i$  é contínua para cada  $i = 1, \dots, n$ , e ainda

$$H_i(t, 0) = \begin{cases} \mathcal{A}_i^1(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^2(4t - 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathcal{A}_{\gamma(\tau(i))}^3(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = ((\mathcal{A}^1 \cdot \mathcal{A}^2) \cdot \mathcal{A}^3)_i(t) = \mathcal{A}'_i(t)$$

$$H_i(t, 1) = \begin{cases} \mathcal{A}_i^1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathcal{A}_{\tau(i)}^2(4t - 2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \mathcal{A}_{\gamma(\tau(i))}^3(4t - 3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\mathcal{A}^1 \cdot (\mathcal{A}^2 \cdot \mathcal{A}^3))_i(t) = \mathcal{A}_i(t).$$

Portanto  $\mathcal{A}'$  e  $\mathcal{A}$  são homotópicos.

Na figura 3.2 está indicado que a trança pode ser decomposta em tranças elementares, as quais todas as cordas, exceto um par vizinho, são arcos verticais ligando  $P_i$  a  $P'_i$  e o par vizinho  $\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_{j+1}$  permuta os pontos iniciais e finais, ou seja,  $\mathcal{A}_j$  é o arco que liga  $P_j$  a  $P'_{j+1}$  e  $\mathcal{A}_{j+1}$  é o arco que liga  $P_{j+1}$  a  $P'_j$ .

Para  $1 \leq i \leq n - 1$  denotemos  $\sigma_i$  a  $n$ -trança elementar, em que a  $i$ -ésima corda passa "por cima" da  $(i + 1)$ -ésima corda e as demais cordas são arcos verticais ligando  $P_j$  a  $P'_j$ , e  $\bar{\sigma}_i$  a  $n$ -trança elementar, em que a  $i$ -ésima corda passa "por baixo" da  $(i + 1)$ -ésima corda e as demais cordas são arcos verticais ligando  $P_j$  a  $P'_j$  (veja figura

3.4).

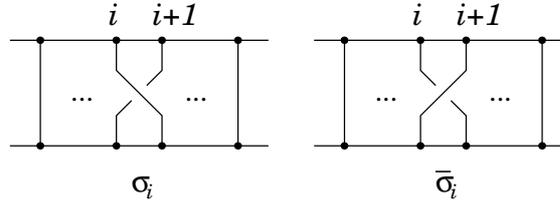


Figura 3.4: tranças elementares

Assim temos que  $B(n)$  é gerado pelas  $n$ -tranças elementares  $\sigma_i$  e  $\bar{\sigma}_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Demonstraremos este fato por indução sobre o número de cruzamentos da  $n$ -trança.

Começamos com a seguinte afirmação: *Seja  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , o primeiro cruzamento da  $j$ -ésima corda (se houver), então existe  $1 \leq i < n$  tal que  $c_i = c_{i+1}$ .*

**Dem.:** Usaremos indução sobre o número de cordas  $n$  da trança.

Para  $n = 1$  não há cruzamentos.

Para  $n = 2$  se existe, o cruzamento só poderá ocorrer entre as duas cordas consecutivas, logo  $c_1 = c_2$ .

Suponhamos que para  $k = n - 1$  existe  $1 \leq i < k$  tal que  $c_i = c_{i+1}$ .

Para  $k = n$ , se a  $n$ -ésima corda não cruzar com a  $(n - 1)$ -ésima corda, desprezamos tal corda e a hipótese de indução garante que existe  $1 \leq i < n - 2$  tal que  $c_i = c_{i+1}$ .

Agora vejamos que: *Qualquer  $n$ -trança pode ser escrita como produto de tranças elementares.*

**Dem.:** Seja  $m$  o número de cruzamentos da  $n$ -trança  $\beta$ .

Para  $m = 0$  temos que a trança é formada por arcos verticais que ligam os pontos  $P_i$  a  $P'_i$ . Assim podemos escrever  $\beta = \sigma_i \bar{\sigma}_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n - 1$ .

Para  $m = 1$  temos que existe um único  $i$ ,  $1 \leq i < n$  tal que  $c_i = c_{i+1}$ , então podemos escrever  $\beta = \sigma_i$  ou  $\beta = \bar{\sigma}_i$ .

Suponhamos que para  $m = k - 1$  a  $n$ -trança  $\beta$  pode ser escrita como produto de tranças elementares.

Agora para  $m = k$  sabemos que existe  $1 \leq i < n$  tal que  $c_i = c_{i+1}$ . "Esticamos" então as cordas da trança de modo que os outros  $k - 1$  cruzamentos fiquem nos níveis abaixo do

cruzamento  $c_i = c_{i+1}$ . Assim temos no primeiro nível uma  $n$ -trança elementar  $\sigma_i$  ou  $\bar{\sigma}_i$  e temos abaixo deste nível uma  $n$ -trança, com  $k - 1$  cruzamentos, que por hipótese de indução pode ser escrita como produto de tranças elementares. ■

Definimos a  $n$ -trança trivial  $e$  como a  $n$ -trança em que todas as cordas são arcos verticais ligando  $P_i$  a  $P'_i$ . A projeção de  $e$  é mostrada na figura 3.5.

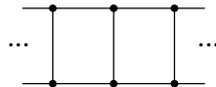


Figura 3.5:  $n$ -trança trivial

A classe de equivalência da  $n$ -trança  $e$  é o elemento neutro do produto em  $B(n)$ . Observe que para qualquer trança  $\beta$  temos  $e \cdot \beta = \beta$ .

A trança inversa  $\beta^{-1}$  da trança  $\beta$  é definida como a imagem refletida de  $\beta$  com respeito ao plano horizontal entre os planos superior e inferior. Veja figura 3.6.

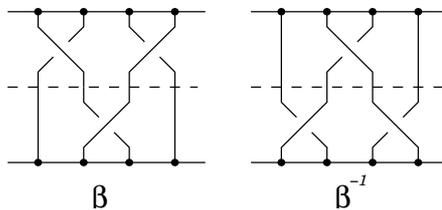


Figura 3.6: trança inversa

Pensando no sistema de cordas  $\mathcal{A}$  de  $\beta$  definimos o sistema de cordas  $\mathcal{A}^{-1}$  de  $\beta^{-1}$  por  $\mathcal{A}^{-1}(t) = \mathcal{A}(1 - t)$ .

Observe que  $\bar{\sigma}_i$  é a inversa de  $\sigma_i$  (veja figura 3.4). Assim se  $\beta = \psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_k$ , onde  $\psi_j$  é uma trança elementar para cada  $j = 1, \dots, k$ , temos que  $\beta^{-1} = \bar{\psi}_k \bar{\psi}_{k-1} \dots \bar{\psi}_1$ .

A classe de equivalência  $\beta^{-1}$  da trança  $\beta$  está bem definida e os produtos  $\beta^{-1} \cdot \beta$  e  $\beta \cdot \beta^{-1}$  são homotópicos à trança trivial  $e$ , conseqüentemente a classe  $\beta^{-1}$  é o elemento inverso em  $B(n)$  da classe de  $\beta$ .

Assim temos que com o produto, elemento neutro e inverso descritos acima  $B(n)$  é de fato um grupo. Este grupo é chamado Grupo de tranças de Artin com  $n$  cordas.

Agora olharemos para as relações entre os elementos de  $B(n)$ . Primeiro notamos que se  $|i - j| \geq 2$  e  $1 \leq i, j \leq n - 1$  então - desde que o par formado pelas cordas  $i$  e  $i + 1$  não interfira no par de cordas  $j$  e  $j + 1$ - obtemos a seguinte relação:

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i \text{ se } |i - j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n - 1 \quad (1).$$

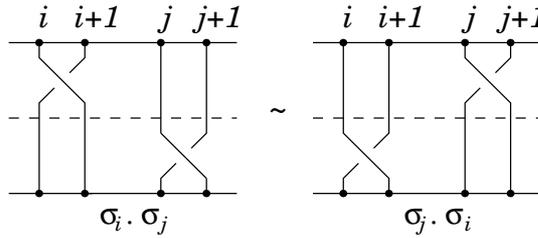


Figura 3.7:

A figura 3.7 ilustra a relação (1).

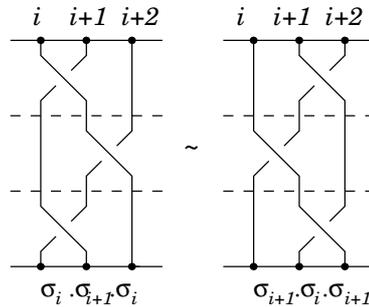


Figura 3.8:

Como ilustrado na figura 3.8, temos também a seguinte relação em  $B(n)$

$$\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \text{ se } 1 \leq i \leq n - 2 \quad (2).$$

Como resultado temos o seguinte teorema, o qual será dado uma idéia de sua demonstração adiante, seção 3.4.

**Teorema 3.1.3** *O grupo  $B(n)$  das tranças com  $n$  cordas admite representação com geradores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , e as seguintes relações:*

- (1)  $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i$  se  $|i - j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n - 1$ .
- (2)  $\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}$  se  $1 \leq i \leq n - 2$ .

### 3.2 Espaços de configurações $F_n(M)$

Aqui definiremos espaços de configurações e daremos alguns resultados de fundamental importância ao nosso trabalho, começando com o teorema 3.2.2 que nos dá uma fibração localmente trivial entre espaços de configurações  $F_n(M)$ , onde  $M$  é uma variedade, obtendo assim informações sobre os grupos de homotopia de  $F_n(\mathbb{R}^2)$  em dimensões maiores do que 1.

**Definição 3.2.1** *Seja  $M$  uma variedade conexa por caminhos de dimensão  $\geq 2$ . Para algum inteiro  $n \geq 1$ , considere o subconjunto  $F_n(M)$  de  $M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_n$  consistindo das  $n$ -uplas com coordenadas distintas duas a duas, isto é,*

$$F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n / x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$$

$F_n(M)$  é chamado Espaço de configurações de um conjunto de  $n$  pontos (ordenados) de  $M$ .

$F_n(M)$  é um espaço topológico com a topologia induzida da topologia produto de  $M \times \dots \times M$ , é aberto em  $M \times \dots \times M$  e portanto  $F_n(M)$  é também uma variedade.

De fato;

$$M^n \setminus F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i = x_j \text{ para algum } i, j\} = \bigcup_{i,j=1, i \neq j}^n \Delta_{ij}$$

onde  $\Delta_{ij} = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n; x_i = x_j\}$  é fechado, pois se  $i < j$  e  $x \in M^n \setminus \Delta_{ij} \Rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$  com  $x_i \neq x_j \Rightarrow$  existem abertos  $U_i, V_i$  com  $x_i \in U_i$  e  $x_j \in V_j$  e  $U_i \cap V_j = \emptyset$ .

Tome  $U = M \times \dots \times U_i \times \dots \times V_j \times \dots \times M$  que é aberto em  $M^n$ , então  $y \in U \Rightarrow y_i \in U_i$  e  $y_j \in V_j \Rightarrow y_i \neq y_j \Rightarrow y \notin \Delta_{ij} \Rightarrow U \subset M^n \setminus \Delta_{ij}$  e portanto este é aberto, logo  $\Delta_{ij}$  é fechado. Assim  $F_n(M)$  é aberto em  $M^n$  e portanto é uma variedade.

$F_n(M)$  é conexo por caminhos: de fato,

sejam  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in F_n(M)$ ,  $x \neq y$ . Tome  $i_1$  o primeiro índice tal que  $x_{i_1} \neq y_{i_1}$  e

$$\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow M \setminus \{x_i, y_i \mid i = 1, \dots, n \text{ } i \neq i_1\}$$

caminho que liga  $x_{i_1}$  a  $y_{i_1}$ , isto é possível pois a dimensão de  $M$  é  $\geq 2$ .

Então  $\alpha_{i_1}(t) = (y_1, \dots, y_{i_1-1}, \alpha_1(t), x_{i_1+1}, \dots, x_n)$  é um caminho em  $F_n(M)$  que liga  $x$  a

$(y_1, \dots, y_{i_1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n)$ .

Agora tome  $i_2$  o próximo índice tal que  $x_{i_2} \neq y_{i_2}$  e

$$\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow M \setminus \{x_i, y_i \mid i = 1, \dots, n, i \neq i_2\}$$

caminho que liga  $x_{i_2}$  a  $y_{i_2}$ .

Então  $\alpha_{i_2}(t) = (y_1, \dots, y_{i_2-1}, \alpha_2(t), x_{i_2+1}, \dots, x_n)$  é um caminho em  $F_n(M)$  que liga  $(y_1, \dots, y_{i_2-1}, x_{i_2}, \dots, x_n) = \alpha_{i_1}(1)$  a  $(y_1, \dots, y_{i_2}, x_{i_2+1}, \dots, x_n)$ , e realizando um número finito desses passos teremos,

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow F_n(M)$$

dado por

$$\alpha(t) = (\alpha_{i_k} * \alpha_{i_{k-1}} * \dots * \alpha_{i_1})(t)$$

um caminho que liga  $x$  a  $y$ .

Assim os grupos de homotopia de  $F_n(M)$  são independentes do ponto base.

Seja  $m \geq 0$  um inteiro não negativo e  $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\}$  um subconjunto arbitrário fixado de  $M$  consistindo de  $m$  pontos distintos dois a dois. Para  $m = 0$  consideramos  $Q_0$  o conjunto vazio. Seguindo nosso estudo é interessante considerarmos espaços de configurações do tipo

$$F_{m,n}(M) = F_n(M \setminus Q_m).$$

Se  $Q'_m = \{q'_1, \dots, q'_m\}$  é outro subconjunto de  $M$  constituído de  $m$  pontos distintos dois a dois, então sabemos que existe um homeomorfismo sobre  $M$  que leva  $Q_m$  em  $Q'_m$  (corolário 1.3.10). Assim os complementares  $M \setminus Q_m$  e  $M \setminus Q'_m$  são abertos homeomorfos, e portanto os espaços  $F_n(M \setminus Q_m)$  e  $F_n(M \setminus Q'_m)$  são homeomorfos. Consequentemente o espaço de configurações  $F_{m,n}(M)$  é independente da escolha do subconjunto  $Q_m \subset M$ .

Notemos que  $F_{0,n}(M) = F_n(M)$  e  $F_{m,1}(M) = M \setminus Q_m$ .

O seguinte teorema fundamental foi provado por Fadell e Neuwirth em 1962.

**Teorema 3.2.2** *Seja  $M$  uma variedade conexa por caminhos de dimensão  $\geq 2$ . Suponhamos  $n \geq 2$  e  $1 \leq r < n$ . Então a função*

$$\pi : F_{m,n}(M) \rightarrow F_{m,r}(M) / \pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$$

é uma fibração localmente trivial com fibra  $F_{m+r,n-r}(M)$ .

**Dem.:** Considere o ponto  $(x_1^0, \dots, x_r^0) \in F_{m,r}(M)$ . Primeiro descreveremos a imagem inversa por  $\pi$  deste ponto,  $\pi^{-1}(x_1^0, \dots, x_r^0)$ , a qual será a fibra da fibração localmente trivial  $\pi$ . Claramente,

$$\pi^{-1}(x_1^0, \dots, x_r^0) = \{(x_1^0, \dots, x_r^0, y_1, \dots, y_{n-r}) \mid \text{todas as coordenadas são diferentes e pertencem a } M \setminus Q_m\}.$$

Se fizermos  $Q_{m+r} = Q_m \cup \{x_1^0, \dots, x_r^0\}$ , então:

$F_{m+r,n-r}(M) = \{(y_1, \dots, y_{n-r}) \mid y_i \neq y_j \text{ se } i \neq j \text{ e } y_i \in M \setminus Q_{m+r} \forall i\}$  e existe um homeomorfismo óbvio,

$$\begin{aligned} h : F_{m+r,n-r}(M) &\rightarrow \pi^{-1}(x_1^0, \dots, x_r^0) \\ h(y_1, \dots, y_{n-r}) &= (x_1^0, \dots, x_r^0, y_1, \dots, y_{n-r}). \end{aligned}$$

Primeiramente a prova da trivialidade local de  $\pi$  será dada para  $r = 1$ . Consideremos então,

$$\pi : F_{m,n}(M) \rightarrow F_{m,1}(M) \mid \pi(x_1, \dots, x_n) = x_1.$$

Seja  $x_0 \in F_{m,1}(M) = M \setminus Q_m$  e  $Q_{m+1} = Q_m \cup \{x_0\}$ .

Tomemos  $U$  uma vizinhança de  $x_0$  no conjunto aberto  $M \setminus Q_m$  de  $M$ , que seja homeomorfo a uma bola aberta, e seja  $\bar{U}$  o fecho de  $U$ . Defina uma função (contínua)  $\theta : U \times \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  com as seguintes propriedades. Fazendo  $\theta_x(y) = \theta(x, y)$  queremos:

- i)  $\theta_x : \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  homeomorfismo que fixa a fronteira  $\partial\bar{U}$  de  $\bar{U}$ ,
- ii)  $\theta_x(x) = x_0$ .

Mostramos a existência dessa função no Lema 1.3.11.

Pela propriedade i),  $\theta$  pode ser estendida continuamente a uma função  $\theta : U \times M \rightarrow M$  fazendo  $\theta(x, y) = y$  se  $y \notin U$ .

O homeomorfismo  $\theta_x : M \rightarrow M$  leva  $(n-1)$  pontos distintos em  $(n-1)$  pontos distintos, ou seja, se  $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in F_{m+1,n-1}(M)$  então  $(\theta_x(y_1), \dots, \theta_x(y_{n-1})) \in F_{m+1,n-1}(M)$ .

Assim definimos  $\phi : U \times F_{m+1, n-1}(M) \rightarrow \pi^{-1}(U)$  por:

$$\phi(x, y_1, \dots, y_{n-1}) = (x, \theta_x^{-1}(y_1), \dots, \theta_x^{-1}(y_{n-1}))$$

a qual é homeomorfismo cujo homeomorfismo inverso é dado por

$$\phi^{-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) = (x, \theta_x(y_1), \dots, \theta_x(y_{n-1}))$$

Ainda

$$\pi \circ \phi(x, y_1, \dots, y_{n-1}) = \pi(x, \theta_x^{-1}(y_1), \dots, \theta_x^{-1}(y_{n-1})) = x$$

e portanto  $\pi$  é fibração localmente trivial.

Tomemos agora  $1 < r < n$  e  $(x_1^0, \dots, x_r^0) \in F_{m,r}(M) \Rightarrow x_i^0 \neq x_j^0$  se  $i \neq j$  e  $x_i^0 \notin Q_m, \forall i = 1, \dots, r$ .

Logo existem vizinhanças  $U_i$  de  $x_i^0$  em  $M \setminus Q_m, \forall i = 1, \dots, r, / \bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \emptyset$  se  $i \neq j$  pois  $M \setminus Q_m$  é Hausdorff.

Para cada  $U_i$  temos a função  $\theta^i : U_i \times \bar{U}_i \rightarrow \bar{U}_i$  como descrita acima; assim para cada  $t \in U_i$   $\theta_t^i : \bar{U}_i \rightarrow \bar{U}_i$  homeomorfismo que fixa  $\partial \bar{U}_i$  e  $\theta_t^i(t) = x_i^0$  e estendemos  $\theta_t^i : M \rightarrow M$  da mesma forma, fazendo  $\theta_t^i(y) = y$  se  $y \notin U_i$ .

Considere  $U = U_1 \times \dots \times U_r$  e  $V = \bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_r$ . Tome  $\theta : U \times V \rightarrow V$  como  $\theta(x, y) = \theta_{x_i}^i(y)$  se  $y \in \bar{U}_i$ .

Temos então:

i)  $\theta(x, x_i) = \theta_{x_i}^i(x_i) = x_i^0$

ii) para cada  $x \in U, \theta_x : V \rightarrow V$  dada por  $\theta_x(y) = \theta(x, y)$  é homeomorfismo que fixa  $\partial V$ .

De fato,  $\theta_x^{-1}(y) = (\theta_{x_i}^i)^{-1}(y)$  se  $y \in \bar{U}_i$  é a inversa de  $\theta_x$ . Portanto  $\theta_x$  é homeomorfismo para cada  $x$ .

Seja  $y \in \partial V \Rightarrow y \in \partial \bar{U}_i$  para algum  $i = 1, \dots, r \Rightarrow \theta_x(y) = \theta_{x_i}^i(y) = y$ .

Podemos com isso estender  $\theta_x$  continuamente fazendo  $\theta_x(y) = y$  se  $y \notin V$ , obtendo um homeomorfismo  $\theta_x : M \rightarrow M$ .

Consideremos agora  $\varphi : U \times F_{m+r,n-r}(M) \rightarrow \pi^{-1}(U)$  definida por

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_{n-r}) = (x, \theta_x^{-1}(y_1), \dots, \theta_x^{-1}(y_{n-r}))$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_r)$ . Temos que  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$  e  $y_i \neq y_j$  se  $i \neq j$ , então  $\theta_x^{-1}(y_i) \neq \theta_x^{-1}(y_j)$  se  $i \neq j$  pois  $\theta_x$  é homeomorfismo e se  $\theta_x^{-1}(y_i) = x_j \Rightarrow y_i = \theta_x(x_j) = x_j^0 \in Q_{m+r}$  contradição, logo  $\theta_x(y_i) \neq x_j, \forall i, j$ .

Assim  $\varphi$  está bem definida e é homeomorfismo cuja inversa é dada por

$$\varphi^{-1}(x, y_1, \dots, y_{n-r}) = (x, \theta_x(y_1), \dots, \theta_x(y_{n-r}))$$

Temos também

$$\pi \circ \varphi(x, y_1, \dots, y_{n-r}) = \pi(x_1, \dots, x_r, \theta_x^{-1}(y_1), \dots, \theta_x^{-1}(y_{n-r})) = (x_1, \dots, x_r) = x.$$

Portanto  $\pi$  é fibração localmente trivial com fibra  $F_{m+r,n-r}(M)$ ,  $1 \leq r < n$ . ■

Agora consideremos um caso especial onde a variedade  $M$  é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$ .

Sabemos que  $\mathbb{R}^2 \setminus Q_m$  para  $m \geq 1$  tem o mesmo tipo de homotopia do espaço formado por  $m$  cópias da esfera  $S^1$  unidas por um único ponto (buquê de  $m$  círculos) o qual tem grupos de homotopia triviais em dimensões  $\geq 2$  como mostramos no exemplo 1.2.11.

Logo os grupos de homotopia de  $\mathbb{R}^2 \setminus Q_m$ ,  $\pi_i(\mathbb{R}^2 \setminus Q_m)$ , são triviais para  $i \geq 2$ .

Do teorema 3.2.2 obtemos:

**Corolário 3.2.3** *Para o espaço  $F_n(\mathbb{R}^2)$  temos  $\pi_i(F_n(\mathbb{R}^2)) = 0$  se  $i \geq 2$ .*

*Mais geralmente; para todo  $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$  temos  $\pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) = 0$  se  $i \geq 2$ .*

**Dem.:** Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_{2,n-2}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & F_{1,n-1}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & F_n(\mathbb{R}^2) \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & F_{n-2,1}(\mathbb{R}^2) & & & & F_{2,1}(\mathbb{R}^2) & & F_{1,1}(\mathbb{R}^2) & & F_{0,1}(\mathbb{R}^2) \end{array}$$

em que as funções na vertical são as fibrações do teorema 3.2.2 e as funções na horizontal são as inclusões das fibras no correspondente espaço total das fibrações.

Para o espaço  $F_{m,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus Q_m$  todos os grupos de homotopia com dimensão  $i \geq 2$  são triviais.

Trabalhando com a sequência exata dos grupos de homotopia dessas fibrações, concluímos que  $\pi_i(F_n(\mathbb{R}^2)) = \pi_i(F_{0,n}(\mathbb{R}^2)) = 0$  se  $i \geq 2$ .

De fato:

para a fibração  $\pi : F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{n-2,1}(\mathbb{R}^2)$  com fibra  $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$  temos a seguinte sequência exata;

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} \pi_i(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_i(F_{n-2,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \cdots$$

e para  $i \geq 2$ ,  $\pi_i(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2)) = 0$ .

Agora para a fibração  $\pi : F_{n-3,3}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{n-3,1}(\mathbb{R}^2)$  com fibra  $F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2)$  temos;

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} \pi_i(F_{n-3,3}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_i(F_{n-3,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \cdots$$

e para  $i \geq 2$ ,  $\pi_i(F_{n-3,3}(\mathbb{R}^2)) = 0$ .

Seguindo para o fim do diagrama temos para a fibração  $\pi : F_{0,n}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{0,1}(\mathbb{R}^2)$  com fibra  $F_{1,n-1}(\mathbb{R}^2)$  a sequência exata;

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(F_{1,n-1}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} \pi_i(F_{0,n}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_i(F_{0,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \cdots$$

e para  $i \geq 2$ ,  $\pi_i(F_{0,n}(\mathbb{R}^2)) = \pi_i(F_n(\mathbb{R}^2)) = 0$ .

Temos ainda  $\pi : F_{0,n+m}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{0,m}(\mathbb{R}^2)$  fibração com fibra  $F_{m,n}(\mathbb{R}^2)$  e a seguinte sequência exata;

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(F_{0,m}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} \pi_i(F_{0,n+m}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_i(F_{0,m}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \cdots$$

e para  $i \geq 2$   $\pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) = 0$ . ■

### 3.3 O grupo fundamental de $C_n(\mathbb{R}^2)$

Nesta seção identificaremos o grupo de tranças com o grupo fundamental do espaço de configurações (não ordenado) de  $\mathbb{R}^2$ ,  $C_n(\mathbb{R}^2)$ . Também mostraremos que

$C_n(\mathbb{R}^2)$  é do tipo  $K(B(n), 1)$ , o que nos possibilitará uma importante conclusão do trabalho, " $B(n)$  não tem elementos não triviais de ordem finita".

Sejam  $M$  uma variedade conexa de dimensão  $\geq 2$  e  $\Sigma_n$  o grupo das simetrias de  $n$  elementos, isto é, o grupo das permutações do conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Existe uma ação natural de  $\Sigma_n$  no espaço de configurações  $F_n(M)$ ,

$$\mu : F_n(M) \times \Sigma_n \rightarrow F_n(M)$$

definida pela permutação das coordenadas, isto é,  $(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . De fato  $\mu$  é ação livre à direita, pois dados  $x = (x_1, \dots, x_n) \in F_n(M)$  e  $id, \sigma, \gamma \in \Sigma_n$  temos:

$$x \cdot id = (x_{id(1)}, \dots, x_{id(n)}) = x$$

$$(x\sigma) \cdot \gamma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \cdot \gamma = (y_1, \dots, y_n) \cdot \gamma = (y_{\gamma(1)}, \dots, y_{\gamma(n)}) = (x_{\sigma(\gamma(1))}, \dots, x_{\sigma(\gamma(n))}) = (x_{\sigma \circ \gamma(1)}, \dots, x_{\sigma \circ \gamma(n)}) = x \cdot (\sigma \circ \gamma) \text{ onde } y_i = x_{\sigma(i)}$$

$$(x_1, \dots, x_n)\sigma = (x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \sigma(i) = i = id(i) \forall i = 1, \dots, n \text{ pois } x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j.$$

Denotemos o espaço das órbitas de  $F_n(M)$  pela ação livre  $\mu$  por  $C_n(M)$ .

Assim

$$C_n(M) = \frac{F_n(M)}{\Sigma_n}.$$

Os elementos da órbita de  $F_n(M)$  pela ação livre  $\mu$  consiste das  $n$ -uplas  $(x_1, \dots, x_n)$  de pontos  $x_i \in M$  diferentes dois a dois, onde duas  $n$ -uplas estão na mesma órbita se elas diferem apenas por uma permutação de suas coordenadas. Assim podemos pensar em  $C_n(M)$  como o espaço de configurações de um conjunto não ordenado de pontos de  $M$  distintos dois a dois. Portanto  $C_n(M)$  é chamado espaço de configurações de  $n$  pontos (não ordenados) de  $M$ .

A projeção de  $F_n(M)$  sobre o espaço das órbitas  $C_n(M)$  define um recobrimento (teorema 1.4.5), o qual é uma fibração com fibra  $\Sigma_n$ ,

$$p_n : F_n(M) \rightarrow C_n(M).$$

Como  $F_n(M)$  é uma variedade teremos que  $C_n(M)$  também é uma variedade (teorema 1.4.6).

Preparamos agora o caminho que nos conduzirá à identificação do grupo de tranças  $B(n)$  com o grupo fundamental de  $C_n(\mathbb{R}^2)$ .

Escolhamos um ponto  $\bar{c}_0 \in F_n(M)$  e seja  $c_0 = p_n(\bar{c}_0)$  o ponto base de  $C_n(M)$ . Considere  $\beta \in \pi_1(C_n(M), c_0)$  um elemento arbitrário representado pelo laço

$$f : [0, 1] \rightarrow C_n(M)$$

tal que  $f(0) = f(1) = c_0$ . Existe um único levantamento  $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow F_n(M)$  de  $f$  com respeito ao recobrimento  $p_n$ , tal que  $\tilde{f}(0) = \bar{c}_0$ .

Podemos pensar em  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$  como  $n$  caminhos  $\tilde{f}_i : [0, 1] \rightarrow M$ , em  $M$ , tais que  $\tilde{f}_j(t) \neq \tilde{f}_i(t) \forall i \neq j$  e todo  $t \in [0, 1]$ .

Note que a  $n$ -upla  $(\tilde{f}_1(1), \dots, \tilde{f}_n(1))$  é apenas uma permutação  $\sigma$  da  $n$ -upla  $(\tilde{f}_1(0), \dots, \tilde{f}_n(0))$  em  $M$ , pois  $p_n(\tilde{f}(0)) = p_n(\tilde{f}(1)) = c_0$ .

Definimos os mergulhos  $\mathcal{A}_i^f : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , por  $\mathcal{A}_i^f(t) = (\tilde{f}_i(t), t)$ .

O sistema  $\mathcal{A}^f = \{\mathcal{A}_1^f, \dots, \mathcal{A}_n^f\}$  é então um sistema de  $n$  cordas no espaço produto  $M \times [0, 1]$  satisfazendo as mesmas condições que definem as tranças na definição 3.1.1.

Em particular, o sistema de cordas  $(\mathcal{A}^f, \sigma)$  em  $M \times [0, 1]$  conecta os pontos  $P_1, \dots, P_n$  em  $M \times \{0\}$ , os quais são as coordenadas de  $\bar{c}_0 \in F_n(M)$ , ao correspondente conjunto de pontos  $P'_1, \dots, P'_n$  em  $M \times \{1\}$ , de acordo com a permutação  $\sigma$  que leva  $\tilde{f}(0)$  em  $\tilde{f}(1)$ .

Assim temos:

- i) cada  $\mathcal{A}_i^f$  intercepta cada variedade intermediária,  $M \times \{t\}$ , exatamente uma vez, pois  $\mathcal{A}_i^f(t) = (\tilde{f}_i(t), t)$  e para cada  $t$ ,  $\mathcal{A}_i^f(t)$  está em um plano diferente,
- ii) os arcos  $\mathcal{A}_1^f, \dots, \mathcal{A}_n^f$  interceptam as variedades intermediárias,  $M \times \{t\}$ , em exatamente  $n$  pontos diferentes, pois  $\mathcal{A}_i^f(t) \neq \mathcal{A}_j^f(t)$  se  $i \neq j$ .

Ainda

$$\mathcal{A}_i^f(0) = (\tilde{f}_i(0), 0) = P_i \in M \times \{0\}$$

$$\mathcal{A}_i^f(1) = (\tilde{f}_i(1), 1) = (\tilde{f}_{\sigma(i)}(0), 1) = P'_{\sigma(i)} \in M \times \{1\}$$

**Teorema 3.3.1** *Com as notações acima temos que*

$$\varphi : \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0) \rightarrow B(n)$$

dada por  $\varphi([f]) = \mathcal{A}^f$ , é um isomorfismo.

**Dem.:** Primeiramente mostremos que  $\varphi$  está bem definida.

Sejam  $f, g : [0, 1] \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2)$  com  $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = c_0$  representantes de  $\beta \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$ . Então os levantamentos  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  de  $f$  e  $g$  respectivamente a partir de  $\bar{c}_0$  são homotópicos e terminam no mesmo ponto. Logo existe

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow F_n(\mathbb{R}^2) / & H(t, 0) &= \tilde{f}(t) \\ & & H(t, 1) &= \tilde{g}(t) \end{aligned}$$

e  $H(0, s) = \bar{c}_0$ ,  $H(1, s) = \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ .

Agora, denotando  $\mathcal{A}^f$  e  $\mathcal{A}^g$  os sistemas resultantes de  $f$  e  $g$  respectivamente, considere  $\pi_i \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\pi_i$  é a projeção sobre a  $i$ -ésima coordenada e portanto contínua. Assim  $\pi_i \circ H$  é contínua.

Tome então  $\tilde{H}_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  dada por  $\tilde{H}_i(t, s) = (\pi_i \circ H(t, s), t)$ .

Logo  $\tilde{H}_i$  é contínua para todo  $1 \leq i \leq n$  e ainda

$$\tilde{H}_i(t, 0) = (\pi_i \circ H(t, 0), t) = (\pi_i(\tilde{f}(t)), t) = (\tilde{f}_i(t), t) = \mathcal{A}_i^f(t)$$

$$\tilde{H}_i(t, 1) = (\pi_i \circ H(t, 1), t) = (\pi_i(\tilde{g}(t)), t) = (\tilde{g}_i(t), t) = \mathcal{A}_i^g(t)$$

$$\tilde{H}_i(0, s) = (\pi_i \circ H(0, s), 0) = (\pi_i(\tilde{f}(0)), 0) = (\tilde{f}_i(0), 0) = P_i$$

$$\tilde{H}_i(1, s) = (\pi_i \circ H(1, s), 1) = (\pi_i(\tilde{f}(1)), 1) = (\tilde{f}_i(1), 1) = P'_{\sigma(i)}$$

Assim  $\tilde{H}$  é homotopia entre  $\mathcal{A}^f$  e  $\mathcal{A}^g$ .

Mostremos então que  $\varphi$  é um isomorfismo.

Sejam  $\beta, \alpha \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$ . Temos que  $\beta * \alpha$  é representado por

$$h(t) = (f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

onde  $f$  e  $g$  são os laços que representam  $\beta$  e  $\alpha$  respectivamente.

Seja  $\bar{c}_0 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in F_n(\mathbb{R}^2)$  um ponto de  $p_n^{-1}(c_0)$ .

Consideremos  $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  como sendo o único levantamento de  $f$  tal que  $\tilde{f}(0) = \bar{c}_0$ . Como  $\tilde{f}(1) \in p_n^{-1}(c_0)$ , segue que existe  $\sigma \in \Sigma_n$  tal que  $\tilde{f}(1) =$

$$(\bar{x}_{\sigma(1)}, \bar{x}_{\sigma(2)}, \dots, \bar{x}_{\sigma(n)}) = \bar{c}_0 \cdot \sigma.$$

Consideremos também  $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$ , como sendo o único levantamento de  $g$  tal que  $\tilde{g}(0) = \bar{c}_0 \cdot \sigma$ .

Temos então que  $\tilde{f} * \tilde{g}$  é o único levantamento de  $f * g$  tal que  $\tilde{f} * \tilde{g}(0) = \bar{c}_0$  e conseqüentemente  $\mathcal{A}^{f*g} = \left\{ \mathcal{A}_1^{f*g}, \dots, \mathcal{A}_n^{f*g} \right\}$ , sendo que

$$\mathcal{A}_j^{f*g}(t) = ((\tilde{f} * \tilde{g})_j(t), t) = \begin{cases} (\tilde{f}_j(2t), 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\tilde{g}_{\sigma(j)}(2t - 1), 2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{e } (\tilde{f} * \tilde{g})(t) = ((\tilde{f} * \tilde{g})_1(t), \dots, (\tilde{f} * \tilde{g})_n(t)).$$

Por outro lado, se  $\mathcal{A}^f \cdot \mathcal{A}^g = ((\mathcal{A}^f \cdot \mathcal{A}^g)_1, \dots, (\mathcal{A}^f \cdot \mathcal{A}^g)_n)$  então

$$(\mathcal{A}^f \cdot \mathcal{A}^g)_j(t) = \begin{cases} \mathcal{A}_j^f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \mathcal{A}_{\sigma(j)}^g(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$(\mathcal{A}^f \cdot \mathcal{A}^g)_j(t) = \begin{cases} (\tilde{f}_j(2t), 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\tilde{g}_{\sigma(j)}(2t - 1), 2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde  $\varphi(\beta * \alpha) = \mathcal{A}^{f*g} = \mathcal{A}^f \cdot \mathcal{A}^g = \varphi(\beta) \cdot \varphi(\alpha)$ .

Portanto  $\varphi$  é homomorfismo de grupos.

Seja  $\beta \in B(n)$  representado pelo sistema de cordas  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ . Então para cada  $\mathcal{A}_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  existem funções contínuas  $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tais que  $g_i(0) = 0$ ,  $g_i(1) = 1$  e  $\mathcal{A}_i(t) = (f_i(t), g_i(t))$ .

Fixemos um  $i \in \{1, \dots, n\}$  e sejam  $s, t \in [0, 1]$  tais que  $g_i(s) = g_i(t)$ . Segue da propriedade *i*) da definição 3.1.1, que  $f_i(s) = f_i(t)$  pois caso contrário o plano paralelo entre os planos superior e inferior situado na altura  $g_i(s) = g_i(t)$  interceptaria  $\mathcal{A}_i$  em dois pontos distintos,  $(f_i(t), g_i(t))$  e  $(f_i(s), g_i(s))$ . Assim, temos que  $\mathcal{A}_i(s) = \mathcal{A}_i(t)$ , e como  $\mathcal{A}_i$  é injetora segue que  $s = t$ . Provamos com isso que  $g_i$  é injetora.

Como  $g_i(0) = 0$  e  $g_i(1) = 1$  segue do teorema do valor intermediário que  $g_i$  é também sobrejetora e portanto inversível. Além disso, como  $[0, 1]$  é compacto temos que  $g_i^{-1}$  é contínua.

Com isso, temos que  $\mathcal{A}'_i = \mathcal{A}_i \circ g_i^{-1}$  é uma reparametrização de  $\mathcal{A}_i$  e representa portanto o mesmo arco representado por  $\mathcal{A}_i$ , pois as funções

$$F_i(t, s) = \mathcal{A}_i \circ g_i^{-1}((1 - s)g_i(t) + st), \quad i = 1, \dots, n$$

constituem uma homotopia de caminhos entre  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$  e  $\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n\}$ . Logo  $\beta$  é representado por  $\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n\}$  e

$$\mathcal{A}'_i(t) = \mathcal{A}_i \circ g_i^{-1}(t) = (f_i \circ g_i^{-1}(t), g_i \circ g_i^{-1}(t)) = (f_i \circ g_i^{-1}(t), t)$$

donde  $\beta$  é representado por  $\mathcal{A}^{p_n \circ h} = \varphi([p_n \circ h])$  sendo  $h$  dado por

$$h = (f_1 \circ g_1^{-1}, \dots, f_n \circ g_n^{-1}).$$

Então  $\varphi$  é sobrejetora.

Finalmente provemos que  $\varphi$  é injetora.

Seja  $[f] = \beta \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$  tal que  $\varphi([f]) = 0 \in B(n)$ . Isso implica que  $\mathcal{A}^f$  é representada pela trança trivial formada por  $n$  arcos verticais ligando  $\bar{c}_0 \times \{0\}$  a  $\bar{c}_0 \times \{1\}$ , ou seja,  $\mathcal{A}_i^f(t) = (\bar{x}_i, t)$  para todo  $t \in [0, 1]$  e para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Mas por definição  $\mathcal{A}_i^f(t) = (\tilde{f}_i(t), t)$ , sendo  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$  o único levantamento de  $f$  tal que  $\tilde{f}(0) = \bar{c}_0$ .

Logo cada  $\tilde{f}_i$  é um caminho homotópico ao caminho constante igual a  $\bar{x}_i$ , donde  $f = p_n \circ \tilde{f}$  é homotópico ao caminho constante igual a  $c_0 \in C_n(\mathbb{R}^2)$ , ou seja,  $\beta = [f] = 0 \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$ . ■

Temos então:

**Corolário 3.3.2** *O espaço de configurações  $C_n(\mathbb{R}^2)$  é um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo  $K(B(n), 1)$ , isto é,  $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0) = B(n)$  e  $\pi_i(C_n(\mathbb{R}^2), c_0) = 0 \forall i > 1$ .*

**Dem.:** Vimos pelo corolário 3.2.3 que os grupos de homotopia de  $F_n(\mathbb{R}^2)$  são triviais em dimensões  $\geq 2$ . Assim, pela sequência dos grupos de homotopia da fibração  $p_n$

$$\dots \longrightarrow \pi_i(F_n(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(C_n(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_{i-1}(\Sigma_n) \longrightarrow \dots$$

e como  $\pi_i(\Sigma_n) = 0$  para  $i \geq 1$ , pois  $\Sigma_n$  é discreto, concluímos que  $\pi_i(C_n(\mathbb{R}^2)) = 0$  para  $i \geq 2$ .

Portanto pelo teorema anterior  $C_n(\mathbb{R}^2)$  é um espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(B(n), 1)$ . ■

**Corolário 3.3.3** *O grupo de tranças  $B(n)$  não tem elementos não triviais de ordem finita.*

**Dem.:** Desde que  $C_n(\mathbb{R}^2)$  é uma variedade de dimensão finita, segue que  $C_n(\mathbb{R}^2)$  é um complexo CW finito dimensional (cf. [1]) e como  $C_n(\mathbb{R}^2)$  é um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo  $K(B(n), 1)$  segue do Teorema 2.2.5 que  $B(n)$  não possui elementos não triviais de ordem finita. ■

**Observação 3.3.4** *Se  $M$  é uma variedade conexa por caminhos de dimensão  $\geq 2$  é possível definir o conjunto das  $n$ -tranças em  $M$  como sendo um sistema de  $n$  arcos mergulhados em  $M \times [0, 1]$  satisfazendo condições semelhantes às condições da definição 3.1.1, substituindo planos superior, inferior e paralelo, respectivamente por  $M \times \{0\}$ ,  $M \times \{1\}$  e  $M \times \{t\}$ ,  $t \in (0, 1)$ .*

*Imitando o que foi feito no caso de  $\mathbb{R}^2$ , podemos equipar o conjunto dessas tranças com uma relação de homotopia cujo quociente,  $B_n(M)$ , possui uma estrutura de grupo definida de forma análoga à estrutura de  $B(n)$ . Temos também aqui que  $\pi_1(C_n(M)) \cong B_n(M)$ ; no entanto  $C_n(M)$  não é em geral um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo  $K(B_n(M), 1)$ .*

### 3.4 Apresentação do grupo de tranças $B(n)$

Na seção 3.1 vimos que o grupo das tranças com  $n$  cordas  $B(n)$  é gerado por tranças elementares  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , onde  $\sigma_i$  apenas permuta as cordas  $i$  e  $i+1$ . Também foram estabelecidas duas relações entre esses elementos. Nosso objetivo agora é dar uma idéia de como provar que de fato esta é a apresentação de  $B(n)$ .

Usaremos o conjunto de pontos  $P_1 = (1, 0), P_2 = (2, 0), \dots, P_n = (n, 0)$  como o conjunto de pontos inicial das cordas da  $n$ -trança. Então as  $n$ -tranças elementares  $\sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , podem ser descritas como os caminhos

$$\bar{g}_j : [0, 1] \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$$

definidos por,  $\bar{g}_j(t) = (P_1, \dots, P_{j-1}, \bar{f}_j(t), \bar{f}_{j+1}(t), P_{j+2}, \dots, P_n)$  onde

$$\begin{aligned}\bar{f}_j(t) &= (j + \text{sen} \frac{\pi}{2}t, \text{sen} \pi t) \\ \bar{f}_{j+1}(t) &= (j + \text{cos} \frac{\pi}{2}t, -\text{sen} \pi t).\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\bar{g}_j(0) &= (P_1, \dots, P_j, P_{j+1}, \dots, P_n) \\ \bar{g}_j(1) &= (P_1, \dots, P_{j+1}, P_j, \dots, P_n)\end{aligned}$$

o caminho  $\bar{g}_j : [0, 1] \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  projeta no laço  $g_j : [0, 1] \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2)$  com  $g_j(0) = g_j(1) = c_0$  e este laço representa  $\sigma_j \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$ .

Faremos agora um esboço da demonstração do teorema 3.1.3, o qual relembremos abaixo.

**Teorema 3.1.3** *O grupo  $B(n)$  das tranças com  $n$  cordas admite representação com geradores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , e as seguintes relações:*

- (1)  $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i$  se  $|i - j| \geq 2$ ,  $1 \leq i, j \leq n - 1$ .
- (2)  $\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}$  se  $1 \leq i \leq n - 2$ .

**Dem.:** Seja  $B_n$  um grupo abstrato com apresentação dada por geradores  $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}$  e relações

- (1)  $\tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \cdot \tilde{\sigma}_i$  se  $|i - j| \geq 2$ ,  $1 \leq i, j \leq n - 1$ .
- (2)  $\tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_{i+1}$  se  $1 \leq i \leq n - 2$ .

Existe um homomorfismo

$$\iota_n : B_n \rightarrow B(n)$$

que leva  $\tilde{\sigma}_i$  em  $\sigma_i$ . De fato,  $B_n$  tem apresentação  $(\tilde{X} | \tilde{Y})$  onde  $\tilde{X} = \{\tilde{\sigma}_i, 1 \leq i \leq n - 1\}$  e  $\tilde{Y} = \{\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\sigma}_j^{-1} \text{ se } |i - j| \geq 2 \text{ e } \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1}^{-1} \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\sigma}_{i+1}^{-1}, i = 1, \dots, n - 1\}$ .

Seja  $F(\tilde{X})$  o grupo livre sobre  $\tilde{X}$ , então  $B_n$  é isomorfo a  $\frac{F(\tilde{X})}{\langle \tilde{Y} \rangle}$ . Ainda, dada

$$f : \tilde{X} \rightarrow B(n)$$

que leva  $\tilde{\sigma}_i$  em  $\sigma_i$  temos que existe um único homomorfismo

$$\bar{f} : F(\tilde{X}) \rightarrow B(n)$$

que leva  $\tilde{\sigma}_i$  em  $\sigma_i$  e como  $\langle \tilde{Y} \rangle \subset Ker(\bar{f})$  temos, pelo teorema do isomorfismo, que existe um único homomorfismo

$$\iota_n : \frac{F(\tilde{X})}{\langle \tilde{Y} \rangle} \rightarrow B(n)$$

tal que  $Ker(\iota_n) = \frac{Ker(\bar{f})}{\langle \tilde{Y} \rangle}$  e  $Im(\iota_n) = Im(\bar{f})$ . Logo  $\iota_n$  leva  $\tilde{\sigma}_i$  em  $\sigma_i$ .

Provemos então que  $\iota_n$  é um isomorfismo.

A sequência de homotopia para a fibração  $p_n : F_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2)$  se reduz, pelo corolário 3.2.3, a seguinte sequência exata curta;

$$0 \longrightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2), \bar{c}_0) \xrightarrow{\rho_n} \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0) \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_n \longrightarrow 0$$

Usaremos a identificação

$$B(n) = \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$$

$$H(n) = \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2), \bar{c}_0)$$

Então os elementos de  $H(n)$  podem ser identificados com as tranças de  $n$  cordas com permutação trivial, chamadas tranças puras. O homomorfismo  $\tau_n$  na sequência exata curta é definido como sendo a permutação da trança  $\beta \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$ . E o homomorfismo  $\rho_n$  é o induzido da função  $p_n$ .

Com estas identificações temos então a seguinte sequência exata curta;

$$0 \longrightarrow H(n) \xrightarrow{\rho_n} B(n) \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_n \longrightarrow 0$$

A sequência exata acima é chamada sequência do grupo de tranças e  $\tau_n$  é chamado homomorfismo de permutação.

Para o grupo abstrato  $B_n$ , temos o epimorfismo

$$\tilde{\tau}_n : B_n \rightarrow \Sigma_n$$

definido por  $\tilde{\tau}_n(\tilde{\sigma}_i) = (i, i + 1)$ , ou seja,  $\tilde{\tau}_n(\tilde{\sigma}_i)$  é a transposição de  $\Sigma_n$  que permuta  $i$  com  $i + 1$ .

O homomorfismo  $\tilde{\tau}_n$  é obtido da mesma forma como obtemos  $\iota_n$ , pois as relações (1) e (2) também acontecem entre as transposições em  $\Sigma_n$ , e como as transposições  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  geram  $\Sigma_n$  temos que  $\tilde{\tau}_n$  é um epimorfismo.

Seja  $H_n = Ker\tilde{\tau}_n$  o núcleo de  $\tilde{\tau}_n$  e seja  $\tilde{\rho}_n : H_n \rightarrow B_n$  a inclusão. Assim para o grupo  $B_n$  temos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow H_n \xrightarrow{\tilde{\rho}_n} B_n \xrightarrow{\tilde{\tau}_n} \Sigma_n \longrightarrow 0$$

Como  $\tau_n(\sigma_i) = (i, i + 1)$  temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n & \xrightarrow{\tilde{\rho}_n} & B_n & \xrightarrow{\tilde{\tau}_n} & \Sigma_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota'_n & & \downarrow \iota_n & & \downarrow id \\ 0 & \longrightarrow & H(n) & \xrightarrow{\rho_n} & B(n) & \xrightarrow{\tau_n} & \Sigma_n \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde  $\iota'_n$  é a restrição de  $\iota_n$  ao subgrupo  $H_n$  de  $B_n$ .

Usando o Lema dos cinco temos:

**Lema 3.4.1** *Se  $\iota'_n : H_n \rightarrow H(n)$  é isomorfismo, então  $\iota_n : B_n \rightarrow B(n)$  também é isomorfismo.*

A idéia agora é provar que  $\iota'_n$  é isomorfismo.

Reduzir o problema do grupo de tranças para o grupo de tranças puras tem a vantagem de que podemos usar indução sobre o número de cordas pois as tranças puras não tem permutação das cordas.

Para provar que  $\iota'_n : H_n \rightarrow H(n)$  é isomorfismo precisaremos conhecer a apresentação de  $H_n$ .

**Lema 3.4.2** *O grupo  $H_n$  admite apresentação com geradores*

$$a_{ij} = \tilde{\sigma}_{j-1}\tilde{\sigma}_{j-2}\dots\tilde{\sigma}_{i+1}\tilde{\sigma}_i^2\tilde{\sigma}_{i+1}^{-1}\dots\tilde{\sigma}_{j-2}^{-1}\tilde{\sigma}_{j-1}^{-1} \text{ se } 1 \leq i < j \leq n$$

e relações:

$$a_{rs}^{-1}a_{ij}a_{rs} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i < r < s < j \text{ ou } r < s < i < j \\ a_{rj}a_{ij}a_{rj}^{-1} & \text{se } r < i = s < j \\ a_{rj}a_{sj}a_{ij}a_{sj}^{-1}a_{rj}^{-1} & \text{se } i = r < s < j \\ a_{rj}a_{sj}a_{rj}^{-1}a_{sj}^{-1}a_{ij}a_{sj}a_{rj}a_{sj}^{-1}a_{rj}^{-1} & \text{se } r < i < s < j \end{cases}$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [6], p153 – 170.

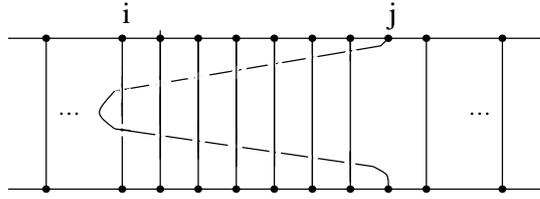


Figura 3.9:  $a_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$

A  $n$ -trança que corresponde a  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  apenas passa a corda  $j$  uma vez em torno da corda  $i$ , primeiro por baixo e depois por cima, e passa por baixo de cada corda intermediária duas vezes. Veja projeção padrão na figura 3.9.

A trança inversa correspondendo a  $a_{ij}^{-1}$  faz o mesmo que a trança  $a_{ij}$  apenas mudando que agora a corda  $j$  passa em sentido oposto pela corda  $i$ , primeiro por cima e depois por baixo.

As tranças puras podem ser escritas como produto de correspondentes tranças  $a_{ij}$  e suas inversas (veja figura 3.10). Em outras palavras o sistema de tranças  $\{a_{ij} / 1 \leq i < j \leq n\}$  é um sistema de geradores de  $H(n)$ .

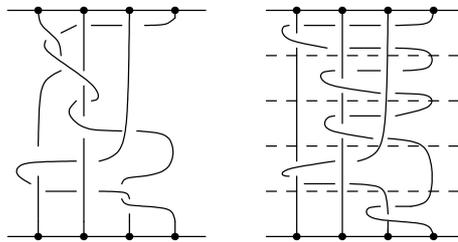


Figura 3.10:  $n$ -trança  $a_{14}a_{24}a_{24}^{-1}a_{13}^{-1}a_{34}$

O grupo  $H_{n-1}$  pode ser considerado como subgrupo de  $H_n$  que é gerado por  $\{a_{ij}, 1 \leq i < j \leq n-1\}$ . Existe um homomorfismo natural  $\eta : H_n \rightarrow H_{n-1}$  definido por  $\eta(a_{ij}) = a_{ij}$  se  $1 \leq i \leq j \leq n-1$  e  $\eta(a_{in}) = 1$  se  $1 \leq i < n$ , obtido por um procedimento análogo ao feito para se construir  $\iota_n$ .

O subgrupo  $U_n$  de  $H_n$  gerado pelos elementos  $a_{1n}, \dots, a_{(n-1)n}$  é normal em  $H_n$  uma vez que (de acordo com o lema 3.4.2)  $a_{rs}^{-1}a_{in}a_{rs} \in U_n$ , para todo conjunto de índices.

Temos que  $U_n = \langle a_{1n}, \dots, a_{(n-1)n} \rangle \subset Ker(\eta)$  pois  $a_{1n}, \dots, a_{(n-1)n} \in Ker(\eta)$ .

$Ker(\eta) \subset U_n$ . De fato, se  $\alpha \in Ker(\eta) \Rightarrow \alpha = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_k j_k}$ ,  $a_{i_m j_m} \in H_n$  e  $\eta(\alpha) = 1$ .

Se  $j_m \neq n$ ,  $\forall m = 2, \dots, k \Rightarrow \alpha = \eta(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \in U_n$ .

Se  $j_m = n$  para algum  $m$  então

$$1 = \eta(\alpha) = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_{m-1} j_{m-1}} a_{i_{m+1} j_{m+1}} \dots a_{i_k j_k} \Rightarrow \underbrace{a_{i_1 j_1} \dots a_{i_{m-1} j_{m-1}}}_{\beta} = a_{i_k j_k}^{-1} \dots a_{i_{m+1} j_{m+1}}^{-1}$$

então  $\alpha = \beta a_{i_m n} \beta^{-1} \in U_n$  pois  $U_n$  é normal em  $H_n$ .

Temos então que o núcleo de  $\eta$ ,  $Ker(\eta)$ , é o fêcho normal em  $H_n$  dos elementos  $a_{1n}, \dots, a_{(n-1)n}$ , isto é, ele é o menor subgrupo normal de  $H_n$  que contém os elementos  $a_{1n}, \dots, a_{(n-1)n}$ . Assim  $Ker(\eta) = U_n$ , e temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow U_n \xrightarrow{i} H_n \xrightarrow{\eta} H_{n-1} \longrightarrow 0$$

Agora definiremos a correspondente sequência exata curta para o grupo de tranças  $B(n)$ . Para isto considere a fibração:

$$\pi : F_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{n-1}(\mathbb{R}^2)$$

com fibra  $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus Q_{n-1}$  definida no teorema 3.2.2. Como os grupos de homotopia dos espaços da fibração  $\pi$  são triviais em dimensões  $\geq 2$ , corolário 3.2.3, a sequência de homotopias de  $\pi$  fica reduzida a sequência exata curta;

$$0 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 0$$

Para o grupo das tranças puras temos a identificação

$$H(n) = \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \text{ e } H(n-1) = \pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^2))$$

e desse modo a sequência fica:

$$0 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} H(n) \xrightarrow{\pi_*} H(n-1) \longrightarrow 0.$$

É claro que  $\pi_*$  opera sobre a trança removendo a corda de número  $n$  da  $n$ -trança. Também note que:

$$Ker \pi_* = \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus Q_{n-1})$$

é um grupo livre com  $n-1$  geradores pois  $\mathbb{R}^2 \setminus Q_{n-1}$  tem o mesmo tipo de homotopia do

espaço formado por  $n - 1$  cópias de  $S^1$  ligadas por um único ponto como mostramos na seção 3.2, e este é um grupo livre com  $n - 1$  geradores, (cf. [4] p.210).

A trança geométrica correspondente a  $a_{ij}$  comporta-se sob  $\pi_*$  do mesmo modo como  $a_{ij}$  comporta-se sob  $\eta$ . Assim temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & U_n & \xrightarrow{i} & H_n & \xrightarrow{\eta} & H_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \iota_n'' & & \downarrow \iota_n' & & \downarrow \iota_{n-1}' & & \\
 0 & \longrightarrow & \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{i_*} & H(n) & \xrightarrow{\pi_*} & H(n-1) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

onde  $\iota_n''$  é a restrição de  $\iota_n'$  ao subgrupo  $U_n$  de  $H_n$ .

Lembre que  $P_1 = (1, 0), P_2 = (2, 0), \dots, P_n = (n, 0)$  é o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$  usado como conjunto de pontos inicial das  $n$ -tranças geométricas. As  $n$ -tranças puras consideradas como laços em  $F_n(\mathbb{R}^2)$  são então baseadas no ponto  $\bar{c}_0 = (P_1, \dots, P_n) \in F_n(\mathbb{R}^2)$ . Em correspondência, as  $(n - 1)$ -tranças puras em  $H(n - 1)$  são descritas por laços em  $F_{n-1}(\mathbb{R}^2)$  baseados no ponto  $(P_1, \dots, P_{n-1}) \in F_{n-1}(\mathbb{R}^2)$ . O ponto base da fibra  $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$  da fibração  $\pi$  é então o ponto  $P_n \in F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}$ .

A análise da trança geométrica  $\iota_n'(a_{ij})$ ,  $a_{ij} \in H_n$ , mostra que ela envolve a corda  $j$  uma vez em torno da corda  $i$ . É então claro que  $\iota_n''(a_{jn})$  pertencente a  $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$ , para  $1 \leq j < n$ , é representado pelo laço em  $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$  baseado no ponto  $P_n$  que enlaça o ponto  $P_j$  e o separa dos pontos  $P_1, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_{n-1}$ . Veja figura 3.11.

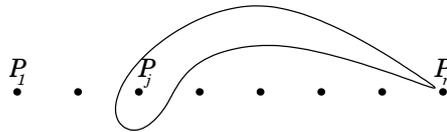


Figura 3.11:  $\iota_n''(a_{jn})$

Segue então que o conjunto dos elementos  $\{\iota_n''(a_{jn}) / 1 \leq j < n\}$  é uma base do grupo livre  $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$  de posto  $n - 1$ . O grupo  $U_n = \text{Ker} \eta$  é gerado pelos elementos  $\{a_{jn} / 1 \leq j < n\}$ , e vimos que este conjunto de geradores é levado na base do grupo livre  $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$  sob  $\iota_n''$ . Conseqüentemente não pode existir relações entre esses geradores. Em outras palavras o grupo  $U_n$  é um grupo livre de posto  $n - 1$  que é levado

isomorficamente em  $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$  por  $\iota_n''$ . Agora observe que  $H_1 = 0$  e  $\pi_1(F_{0,1}(\mathbb{R}^2)) = 0$ . Assim  $\iota_1'$  é isomorfismo. Assumindo indutivamente que  $\iota_{n-1}'$  é isomorfismo, como  $\iota_n''$  é isomorfismo para todo  $n$ , usando o Lema dos cinco temos que  $\iota_n'$  é isomorfismo.

E isto completa o esboço da demonstração da apresentação do grupo das tranças de Artin. ■

# Capítulo 4

## Aplicação

### 4.1 Uma generalização do teorema de Borsuk-Ulam

O teorema clássico de Borsuk-Ulam afirma que se  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é qualquer função contínua, então  $f(x) = f(-x)$  para algum  $x \in S^n$ .

Várias generalizações desse resultado tem sido provadas, por exemplo por Hopf [8], Yang [19], Conner e Floyd [2] e outros.

Apresentamos aqui uma generalização da versão bi-dimensional provada por J.E. Connet (cf. [3]), em que  $S^2$  é substituída por qualquer espaço  $X$  de Hausdorff, simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, e a função antipodal é substituída por um homeomorfismo  $\rho : X \rightarrow X$  com período finito, ou seja,  $\rho^n = id$  para algum  $n \in \mathbb{N}$  (sendo  $\rho^n = \underbrace{\rho \circ \rho \circ \dots \circ \rho}_n$ ).

Usando esse resultado, faremos também uma generalização da versão bi-dimensional do teorema de Ljusternik-Schnirelmann, o qual é equivalente ao Teorema de Borsuk-Ulam e diz que se  $S^2 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ , onde cada  $F_i$  é fechado, então algum  $F_i$  contém um par de pontos antipodais.

**Teorema 4.1.1** *Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff, localmente conexo por caminhos e  $r$ -conexo,  $r = 0$  ou  $r = 1$ , e seja  $\rho : X \rightarrow X$  uma função com período  $n > 1$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$  é qualquer função contínua, então existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(\rho^i(x))$  para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ .*

**Dem.:** Primeiro demonstraremos o teorema para  $r = 1$ , ou seja,  $X$  é 1-conexo e  $f$  é uma função de  $X$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Assumiremos sem perda de generalidade que  $x \neq \rho^i(x)$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Assim  $\rho$  gera uma  $\mathbb{Z}_n$ -ação livre sobre  $X$ , digamos  $\mu$ . Seja  $X/\mathbb{Z}_n$  o espaço das órbitas de  $X$  pela ação  $\mu$  e  $\pi : X \rightarrow X/\mathbb{Z}_n$  a projeção natural a qual é uma aplicação de recobrimento. Ainda temos que  $\pi_1(X/\mathbb{Z}_n)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$  (Observação 1.4.7).

Seja  $C_n(\mathbb{R}^2)$  o espaço de configurações de um conjunto não ordenado de  $n$  pontos de  $\mathbb{R}^2$  e  $F_n(\mathbb{R}^2)$  o espaço de configurações de um conjunto ordenado de  $n$  pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Tomemos  $p_n : F_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2)$  o recobrimento visto na seção 3.3.

Suponhamos que  $f(x) \neq f(\rho^i(x))$  para todo  $x \in X$  e  $1 \leq i \leq n - 1$ . Então podemos definir  $f' : X/\mathbb{Z}_n \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2)$  por  $f'(\pi(x)) = [(f(x), f(\rho(x)), \dots, f(\rho^{n-1}(x)))]$ .

Pelo teorema 3.3.1, temos que  $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2)) \cong B(n)$ . Logo segue do corolário 3.3.3 que  $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$  não contém elementos não triviais de ordem finita e, como  $\pi_1(X/\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_n$  concluímos que,

$$f'_* : \pi_1(X/\mathbb{Z}_n) \rightarrow \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$$

é a aplicação nula. Assim  $f'_*(\pi_1(X/\mathbb{Z}_n)) \subset (p_n)_*(\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)))$  e como  $X/\mathbb{Z}_n$  é localmente homeomorfo a  $X$  e  $X$  é localmente conexo por caminhos segue que  $X/\mathbb{Z}_n$  também é localmente conexo por caminhos e podemos então aplicar o teorema geral do levantamento (Teorema 1.1.11), para concluir que  $f'$  pode ser levantada a uma função contínua

$$f'' : X/\mathbb{Z}_n \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$$

com  $p_n \circ f'' = f'$ .

$$\begin{array}{ccc} & & F_n(\mathbb{R}^2) \\ & \nearrow f'' & \downarrow p_n \\ X & \xrightarrow{f'} & C_n(\mathbb{R}^2) \\ \mathbb{Z}_n & & \end{array}$$

Escolhendo um ponto base  $x_0 \in X$  podemos fazer

$$f''(\pi(x_0)) = (f(x_0), f(\rho(x_0)), \dots, f(\rho^{n-1}(x_0)))$$

o ponto base de  $F_n(\mathbb{R}^2)$ .

Mas agora se definirmos  $\Phi : X \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  por

$$\Phi(x) = (f(x), f(\rho(x)), \dots, f(\rho^{n-1}(x)))$$

temos que  $\Phi$  e  $f'' \circ \pi$  levantam  $f' \circ \pi$  a partir de  $x_0$ . Logo pela unicidade do levantamento  $\Phi = f'' \circ \pi$ .

Uma vez que  $\pi(x) = \pi(\rho(x))$ ,  $\forall x \in X$ , temos

$$\Phi(x) = f''(\pi(x)) = f''(\pi(\rho(x))) = \Phi(\rho(x)) \Rightarrow f(x) = f(\rho(x)), \forall x \in X$$

o que contradiz nossa suposição.

Finalmente, para  $r = 0$  temos uma demonstração análoga, apenas observando que  $\pi_1(C_n(\mathbb{R})) = 0$ . Para ver isto descreveremos agora o conjunto  $F_n(\mathbb{R}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$ .

Seja  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in F_n(\mathbb{R}) : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ . Para cada  $\sigma \in \Sigma_n$  consideremos o conjunto

$$F^\sigma = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in F_n(\mathbb{R}) : x \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in F\}.$$

Com as notações acima temos o seguinte:

**Lema 1:** Para todo  $x \in F_n(\mathbb{R})$  existe um único  $\sigma \in \Sigma_n$  tal que  $x \in F^\sigma$ .

**Dem.:** Dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in F_n(\mathbb{R})$ , como  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$  temos que existe um único  $j_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$x_{j_1} = \min \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Analogamente, existe um único  $j_2 \in \{1, 2, \dots, n\} - \{j_1\}$  tal que

$$x_{j_2} = \min \{x_1, \dots, x_n\} - \{x_{j_1}\}.$$

Prosseguindo dessa forma, podemos construir uma única  $n$ -upla  $(j_1, \dots, j_n)$  tal que

$$x_{j_1} = \min \{x_1, \dots, x_n\} \text{ e}$$

$$x_{j_k} = \min \{x_1, \dots, x_n\} - \{x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}\}, \quad 1 < k \leq n.$$

Definindo então  $\sigma \in \Sigma_n$  por  $\sigma(k) = j_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , temos que  $x.\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in F$ , ou seja,  $x \in F^\sigma$ .

Se  $\gamma \in \Sigma_n$  é outra permutação tal que  $x.\gamma \in F$ , então

$$x_{\gamma(1)} = \min \{x_1, \dots, x_n\} \text{ e}$$

$$x_{\gamma(k)} = \min \{x_1, \dots, x_n\} - \{x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(k-1)}\}, \quad 1 < k \leq n.$$

Pela unicidade de  $(j_1, \dots, j_n)$  concluímos que  $(\gamma(1), \dots, \gamma(n)) = (j_1, \dots, j_n)$ , ou seja,  $\gamma = \sigma$ . ■

Como consequência desse lema temos os seguintes resultados:

**Corolário 1:**  $F_n(\mathbb{R}) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} F^\sigma$  (união disjunta).

**Dem.:** Imediata. ■

**Corolário 2:** Para cada  $\sigma \in \Sigma_n$  temos que a aplicação  $f_\sigma : F^\sigma \rightarrow C_n(\mathbb{R})$  dada por  $f_\sigma(x) = [x]$  é um homeomorfismo.

**Dem.:**

- $f_\sigma$  é injetora.

Dados  $x, y \in F^\sigma$  tais que  $f_\sigma(x) = f_\sigma(y)$  temos que  $[x] = [y]$ . Segue então que existe  $\tau \in \Sigma_n$  tal que  $y = x.\tau$ . Como  $y \in F^\sigma$  temos que  $x.(\tau\sigma) = y.\sigma \in F$ , ou seja,  $x \in F^{\tau\sigma}$ . Mas como  $x \in F^\sigma$  segue do lema que  $\sigma = \tau\sigma$  donde  $\tau = id$  e  $x = y$ .

- $f_\sigma$  é sobrejetora.

Seja  $[x] \in C_n(\mathbb{R})$ . Pelo lema, existe  $\theta \in \Sigma_n$  tal que  $x.\theta \in F$ . Tomando  $y = x.(\theta\sigma^{-1})$  temos que  $y \in F^\sigma$  e  $f_\sigma(y) = [y] = [x] \in C_n(\mathbb{R})$ .

- $f_\sigma$  é contínua.

$f_\sigma$  é a restrição da aplicação quociente  $p_n : F_n(\mathbb{R}) \rightarrow C_n(\mathbb{R})$ .

- $f_\sigma^{-1}$  é contínua.

Temos que se  $U \subset F^\sigma$  é aberto então  $f_\sigma^{-1}(f_\sigma(U)) = U$  é aberto, donde  $f_\sigma(U)$  é aberto em  $C_n(\mathbb{R})$ . Logo  $f_\sigma$  é aplicação aberta e portanto  $f_\sigma^{-1}$  é contínua.

Observamos agora que para cada  $\sigma \in \Sigma_n$  e para cada  $1 \leq i < n$ , o conjunto

$$F_i^\sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\sigma(i)} < x_{\sigma(i+1)}\}$$

é um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ , pois dados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n) \in F_i^\sigma$  temos que  $x_{\sigma(i)} < x_{\sigma(i+1)}$  e  $y_{\sigma(i)} < y_{\sigma(i+1)}$ , logo para todo  $t \in (0, 1)$  tem-se  $(1-t)x_{\sigma(i)} < (1-t)x_{\sigma(i+1)}$  e  $ty_{\sigma(i)} < ty_{\sigma(i+1)}$ , donde

$$(1-t)x_{\sigma(i)} + ty_{\sigma(i)} < (1-t)x_{\sigma(i+1)} + ty_{\sigma(i+1)}$$

e portanto  $(1-t)x + ty \in F_i^\sigma$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

Temos então o seguinte:

**Lema 2:** Para cada  $\sigma \in \Sigma_n$ ,  $F^\sigma$  é um subconjunto convexo de  $F_n(\mathbb{R})$ .

**Dem.:** Basta notar que  $F^\sigma = \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i^\sigma$  ■

**Corolário 3:**  $C_n(\mathbb{R})$  é contrátil. ■

Temos por exemplo para  $n = 3$

$$F_3(\mathbb{R}) = F \cup F^{(12)} \cup F^{(13)} \cup F^{(23)} \cup F^{(123)} \cup F^{(132)}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in F \iff x_1 < x_2 < x_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in F^{(12)} \iff x_2 < x_1 < x_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in F^{(13)} \iff x_3 < x_2 < x_1$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in F^{(23)} \iff x_1 < x_3 < x_2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in F^{(123)} \iff x_2 < x_3 < x_1$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in F^{(132)} \iff x_3 < x_1 < x_2$$

Apresentamos agora algumas consequências do teorema 4.1.1 sendo que o espaço  $X$  considerado é sempre de Hausdorff e localmente conexo por caminhos.

**Corolário 4.1.2** Se  $X$  é 1-conexo e  $G$  é um grupo atuando sobre  $X$  tal que  $G \neq \{e\}$  é finito ou  $G$  é produto de círculos, então para cada função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  existe  $g \in G$ ,  $g \neq e$  e  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(g.x)$ .

**Dem.:**  $\{e\} \neq G$  é finito  $\Rightarrow \exists g \in G, g \neq e / o(g) = n < \infty \Rightarrow g^n = e$ .

Tome  $\rho : X \rightarrow X / \rho(x) = g.x$  (ação de  $g$  em  $x$ ), então  $\rho^n(x) = g^n.x = e.x = x \Rightarrow \rho$  tem período  $n > 1 \Rightarrow$  pelo teorema 4.1.1,  $\exists x \in X$  e  $1 \leq i \leq n - 1$  tal que  $f(x) = f(\rho^i(x)) = f(g^i.x)$  onde  $g^i \in G, g^i \neq e$  pois  $i < n$ .

Se  $G$  é produto de círculos,  $G = S^1 \times \dots \times S^1$ , temos que em  $S^1$  existem infinitos elementos de ordem finita, por exemplo as raízes  $n$ -ésimas da unidade e o elemento  $i$  identificado com  $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $i^4 = 1$ . Assim  $(i, \dots, i) \in G$  tem ordem  $4 > 1$  e a demonstração segue análoga à demonstração de quando  $G$  é finito. ■

**Corolário 4.1.3** *Se  $X$  é 1-conexo e  $\rho : X \rightarrow X$  é uma função com período  $n > 1$  sobre  $X$ , então não existe  $f : X \rightarrow S^1$  tal que  $f(\rho(x)) = r(f(x))$  para cada  $x \in X$  onde  $r : S^1 \rightarrow S^1$  é a rotação de período  $n$ .*

**Dem.:** Se  $f(\rho(x)) = r(f(x))$  para cada  $x \in X$ , então  $f(\rho^i(x)) = r^i(f(x))$  para todo  $1 \leq i \leq n - 1$ .

Considerando  $f$  como uma função de  $X$  em  $\mathbb{R}^2 \supset S^1$ , isto contradiz o teorema 4.1.1, pois  $f(\rho^i(x)) = r^i(f(x)) \neq f(x)$  pois  $i \leq n - 1$ . ■

**Corolário 4.1.4** *Suponha que  $X$  é conexo por caminhos,  $\pi_1(X)$  tem somente elementos de ordem finita e  $\rho : X \rightarrow X$  uma função com período  $n > 1$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  é qualquer função contínua, então existe  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = f(\rho^i(x_0))$ , para algum  $i, 1 \leq i \leq n - 1$ .*

**Dem.:** Suponhamos que  $\rho^i(x) \neq x, \forall x \in X$  e  $1 \leq i \leq n - 1$  então  $\rho$  define uma  $\mathbb{Z}_n$ -ação livre sobre  $X$ .

Seja  $\pi : X \rightarrow X/\mathbb{Z}_n$  a projeção de recobrimento. Temos a seguinte sequência exata,

$$0 \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(X/\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\mathbb{Z}_n) \longrightarrow 0$$

donde  $\frac{\pi_1(X/\mathbb{Z}_n)}{\pi_*(\pi_1(X))} \xrightarrow{\bar{\partial}} \pi_0(\mathbb{Z}_n)$  é uma bijeção.

Se  $[\alpha] \in \pi_1(X/\mathbb{Z}_n)$ , temos que  $[\alpha] + \pi_*(\pi_1(X)) \in \pi(X/\mathbb{Z}_n)/\pi_*(\pi_1(X))$ . Logo  $[\alpha] + \pi_*(\pi_1(X))$  tem ordem finita pois  $\frac{\pi_1(X/\mathbb{Z}_n)}{\pi_*(\pi_1(X))}$  é um grupo finito (contendo  $n$  elementos).

Então  $[\alpha]^k \in \pi_*(\pi_1(X))$  para algum  $k$ . Assim existe  $[\beta] \in \pi_1(X)$  tal que  $\pi_*([\beta]) = [\alpha]^k$ . Por hipótese  $[\beta]$  tem ordem finita  $m$ , assim,

$$[\beta]^m = e \Rightarrow \pi_*([\beta]^m) = \pi_*([\beta])^m = [\alpha]^{km} = e$$

Portanto  $[\alpha]$  tem ordem finita.

Assim  $\pi_1(X/\mathbb{Z}_n)$  tem somente elementos de ordem finita, e a demonstração segue análoga à do teorema 4.1.1. ■

O seguinte teorema generaliza a versão bi-dimensional do teorema de Ljusternik-Schnirelmann;

**Teorema 4.1.5** *Seja  $X$  um espaço normal e 1-conexo e  $\rho : X \rightarrow X$  uma função com período  $1 < n \leq 4$ . Se  $X$  é recoberto por conjuntos fechados  $A_1, A_2$  e  $A_3$  então  $A_i \cap \rho(A_i) \neq \emptyset$  para algum  $i = 1, 2$  ou  $3$ .*

**Dem.:** Existem três casos a analisar e em cada um assumiremos que  $A_i \cap \rho(A_i) = \emptyset$  para  $i = 1, 2$ .

- Caso1 :  $n = 2$ .

Para  $i = 1, 2$ , segue do Lema de Urysohn, (cf. [13]), que existem funções contínuas  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$  tais que  $f_i|_{A_i} = 0$  e  $f_i|_{\rho(A_i)} = 1$ .

Então  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  define uma função de  $X$  em  $\mathbb{R}^2$ . Pelo teorema 4.1.1 existe  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = f(\rho(x_0))$ .

Se  $x_0 \in A_1 \Rightarrow f(x_0) = (0, f_2(x_0)) = f(\rho(x_0)) = (1, f_2(\rho(x_0)))$  o que é um absurdo.

Se  $x_0 \in \rho(A_1) \Rightarrow f(x_0) = (1, f_2(x_0)) = f(\rho(x_0)) = (0, f_2(\rho(x_0)))$  o que é um absurdo.

O mesmo vale para  $i = 2$ . Portanto  $x_0 \in A_3 \cap \rho(A_3)$ .

- Caso2 :  $n = 3$

Para  $i = 1, 2$  temos que  $A_i, \rho(A_i)$  e  $\rho^2(A_i)$  são conjuntos fechados disjuntos dois a dois. Segue do Lema de Urysohn que existem  $f_i : X \rightarrow [0, 2]$  contínuas ( $i = 1, 2$ ) tais que  $f_i|_{A_i} = 0, f_i|_{\rho(A_i)} = 1$  e  $f_i|_{\rho^2(A_i)} = 2$ .

Definindo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  temos pelo teorema 4.1.1 que para  $j = 1$  ou  $2$  e algum  $x_0 \in X$ ,  $f(x_0) = f(\rho^j(x_0))$ .

Se  $x_0 \in A_i \cup \rho(A_i) \cup \rho^2(A_i)$  obteremos a mesma contradição do caso 1 para  $i = 1$  e  $2$ , então  $x_0 \in A_3 \cap \rho(A_3) \cap \rho^2(A_3)$ . Logo  $A_3 \cap \rho(A_3) \neq \emptyset$ .

• Caso 3 :  $n = 4$ .

Neste caso temos que  $\rho^2 : X \rightarrow X$  define uma  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre sobre  $X$ . Seja  $X/\mathbb{Z}_2$  o espaço das órbitas e  $\gamma : X \rightarrow X/\mathbb{Z}_2$  a função quociente.

A função  $\rho$  induz  $\hat{\rho} : X/\mathbb{Z}_2 \rightarrow X/\mathbb{Z}_2$  dada por  $\hat{\rho}(\gamma(x)) = \gamma(\rho(x))$ .

Note que, para  $i = 1, 2$ , se  $A_i \cap \rho(A_i) = \emptyset$  temos  $\gamma(A_i) \cap \hat{\rho}(\gamma(A_i)) = \emptyset$ , pois se existe  $x \in \gamma(A_i) \cap \hat{\rho}(\gamma(A_i))$  então existe  $a \in A_i$  tal que  $\gamma(a) = x$  e existe  $b \in A_i$  tal que  $x = \hat{\rho}(\gamma(b)) = \gamma(\rho(b))$ . Então  $x \in \{a, \rho^2(a)\}$  e  $x \in \{\rho(b), \rho^3(b)\}$ , assim,

$x \in A_i \cap \rho(A_i)$  ou

$x \in A_i \cap \rho^3(A_i)$  ou

$x \in \rho(A_i) \cap \rho^2(A_i)$  ou

$x \in \rho^2(A_i) \cap \rho^3(A_i)$

logo  $A_i \cap \rho(A_i) \neq \emptyset$ .

Como  $X/\mathbb{Z}_2$  não é simplesmente conexo mas  $\pi_1(X/\mathbb{Z}_2)$  tem somente elementos de ordem finita ( $\pi_1(X/\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ ) e  $\hat{\rho} : X/\mathbb{Z}_2 \rightarrow X/\mathbb{Z}_2$  é uma função de período 2, usamos o corolário 4.1.4 para concluir o caso 1. Assim existe  $x_0 \in X$  tal que  $\gamma(x_0) \in \gamma(A_3) \cap \hat{\rho}(\gamma(A_3))$ .

Se  $\gamma(x_0) \in \gamma(A_3) \cap \hat{\rho}(\gamma(A_3))$  então existe  $a \in A_3$  tal que  $\gamma(a) = \gamma(x_0)$  e existe  $b \in A_3$  tal que  $\hat{\rho}(\gamma(b)) = \gamma(x_0)$ , logo

$$\{x_0, \rho^2(x_0)\} = \{a, \rho^2(a)\} = \{\rho(b), \rho^3(b)\}$$

temos então que

$x_0 \in A_3 \cap \rho(A_3)$  e fim, ou

$x_0 \in A_3 \cap \rho^3(A_3) \Rightarrow \rho(x_0) \in A_3 \cap \rho(A_3)$  e fim, ou

$x_0 \in \rho^2(A_3) \cap \rho(A_3) \Rightarrow \rho^3(x_0) \in A_3 \cap \rho(A_3)$  e fim, ou

$x_0 \in \rho^2(A_3) \cap \rho^3(A_3) \Rightarrow \rho^2(x_0) \in A_3 \cap \rho(A_3)$  e fim. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] Cairns, S. S. *On the triangulation of regular loci*. Ann. of Math., 35 (1934), 579 – 587.
- [2] Conner, P. E. and Floyd, E. E. *Differentiable periodic maps*. Academic Press, Inc., New York, 1964.
- [3] Connett, J. E. *A Generalization of the Borsuk-Ulam Theorem*. J. London Math. Soc. (2), 7 (1973), 64 – 66.
- [4] Lima, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [5] Fadell, E. and Neuwirth, J. *Configuration spaces*. Math. Scand. 10 (1962), 111 – 118.
- [6] Hansen, V. L. *Braids and Coverings: selected topics*. Cambridge University Press 1989.
- [7] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] Hopf, H. *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs-und-Uberdeckungssatze*. Portugaliae Math., 4, 1944.
- [9] Guillemin, V. e Pollack, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [10] Lundell, A. T. and Weingram, S. *Topology of CW Complexes*. van Nostrand-Reinhold, New York, 1968.

- 
- [11] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D. *Characteristics class*. Princeton University Press, 1974.
- [12] Milnor, J. W. *Topology from the Differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, 1978.
- [13] Munkres, J. R. *Topology: A First Course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [14] Rotman, J. J. *An Introduction To Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [15] Selik, P. *Introduction to Homotopy Theory*. Fields Institute Monographs, AMS, Providence, 1997.
- [16] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [17] Spanier, E. H. *Algebraic Topology*. MacGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [18] Whitehead, G. W. *Elements of Homotopy Theory*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [19] Yang, C. *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô e Dyson, II*. Ann. of Math., 62 (1955).