UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Regularidade Global Gevrey das Soluções de Certas Classes de Operadores Parciais Lineares de Primeira Ordem

Laurencie Salles Coelho

Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP

Março de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Regularidade Global Gevrey das Soluções de Certas Classes de Operadores Parciais Lineares de Primeira Ordem

Laurencie Salles Coelho

São Carlos - SP

2004

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Coelho, Laurencie Salles.
C672rg	Regularidade global Gevrey das soluções de certas classes de operadores parciais lineares de primeira ordem / Laurencie Salles Coelho . -- São Carlos : UFSCar, 2004.
	56 p.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.
	1. Séries de Fourier. 2. Funções Gevrey Periódicas. 3. Ultradistribuições Gevrey Periódicas. 4. Regularidade Global Gevrey. I. Título.
	CDD: 515.353 (20ª)

Assim diz o Senhor: "Não se glorie o sábio em sua sabedoria nem o forte em sua força nem o rico em sua riqueza, mas quem se gloriar, glorie-se nisto: em compreender-me e conhecer-me, pois eu sou o Senhor e ajo com lealdade, com justiça e com retidão sobre a terra, pois é dessas coisas que me agrado", declara o Senhor.

(Jeremias 9:23)

Agradecimentos

• a Deus, que tem me abençoado a cada dia com sua graça e misericórdia.

• aos meus familiares, Valdir , Noemia e Loraine, que mesmo sem saberem exatamente o que estudo, deram apoio e compreensão durante minha caminhada acadêmica.

• ao meu orientador Gerson Petronilho pela paciência e excelente orientação.

• aos professores do DM-UFSCar que foram responsáveis pela minha formação, em especial ao Tomazella, Adalberto e Margarete.

• aos meus amigos do DM-UFSCar, em especial ao Gustavinho e Elisandra.

• aos meus amigos da Primeira Igreja Batista de São Carlos, em particular ao pastor Jarbas, a Lucy, ao Raimundo, a Carol, ao Marcão e ao Heraldo pelas orações e pelo incentivo.

• a minha família de São Carlos, ou seja, ao Jasão, a Glauce, a Maria Luisa e a Suzi pela amizade e carinho.

• a minha namorada Mary Lucy, pela companhia e pelo carinho infindável.

• a Capes pelo apoio financeiro.

Abstract

In this work we study global **Gevrey** hypoellipticity on the Euclidean 2-space $\mathbb{R}^2$ for a class of first order linear partial differential operators with coefficients in $C^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Necessary and sufficient conditions for global **Gevrey** hypoellipticity are proposed.

Resumo

Neste trabalho estudamos a Hipoeliticidade Global **Gevrey** em $\mathbb{R}^2$ para uma classe de operadores diferenciais parciais lineares de 1^a ordem, com coeficientes em $C^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Condições necessárias e suficientes para a Hipoeliticidade Global **Gevrey** são propostas.

Sumário

Introdução

Esta dissertação de mestrado tem como objetivo principal o estudo da G^s hipoeliticidade global em $\mathbb{R}^2$ do operador diferencial parcial linear de 1^a ordem:

$$P = \partial_x - c(x)\partial_y,$$

sendo $c \in \mathsf{C}^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Dizemos que o operador acima é globalmente G^s hipoelítico, (GG^sH), em $\mathbb{R}^2$ se as condições

$$u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \text{ e } Pu \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$$

$$\text{implicam } u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2),$$

onde $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é o espaço das ultradistribuições Gevrey 2π-periódicas em $\mathbb{R}^2$ e $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é o espaço das funções Gevrey 2π-periódicas em $\mathbb{R}^2$.

Este estudo da regularidade das soluções do operador P foi baseado no trabalho: **Global Properties in Spaces of Generalized Funtions on the Torus for Second Order Differential Operators with Variable Coefficients** (ver [GPY]).

A técnica das Séries de Fourier é a ferramenta central deste trabalho.

Assim o Capítulo 1 foi gerado pelas definições e propriedades das funções Gevrey 2π-periódicas e pelos estudos sobre as Séries de Fourier tanto em $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ quanto em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso enunciamos algumas propriedades dos Espaços Vetoriais Topológicos necessárias para a definição da topologia de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Já no Capítulo 2, encontra-se a análise de quando um operador com coeficientes constantes é (GG^sH) a qual nos dará uma caracterização de quando um operador da forma $Q = \partial_x - \alpha\partial_y$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ é (GG^sH) em $\mathbb{R}^2$ em termos de seu coeficiente α. Tal caracterização será utilizada na demonstração do resultado principal deste trabalho, que fornece condições necessárias e suficientes para que o operaror $P = \partial_x - c(x)\partial_y$, com $c \in \mathsf{C}^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$ seja (GG^sH) em $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado (ver Teorema 2.3.1):

"Sejam $c \in \mathsf{C}^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$ com $c(x) = a(x) + ib(x)$ e $P = \partial_x - c(x)\partial_y$.

(i) Se b é identicamente nula o operador P é (GG^sH) em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, o número
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s)ds$$
não é Liouville exponencial com expoente $s \geq 1$.

(ii) Se b não é identicamente nula o operador P é (GG^sH) em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, b não muda de sinal."

Capítulo 1

Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é apresentar definições, notações e resultados importantes que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Notações

Iniciamos recordando que estamos usando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como as variáveis no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n \geq 1$ e $\mathbb{Z}_+^n$ como o conjunto de todas as n-uplas $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ com $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, para cada $j = 1, \cdots, n$. Também estamos usando $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

sendo $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Usaremos o produto escalar usual

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \cdots x_n \xi_n$$

e a norma usual

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}\ .$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ então usaremos a seguinte relação de ordem

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_j \leq \alpha_j\ , \forall j = 1, \ldots, n\ .$$

Além disso

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e o coeficiente binomial é dado por

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\ ,\ \forall\ \beta \leq \alpha\ ,$$

onde a diferença de multi-índices é calculada coordenada a coordenada.

Os monômios em x de expoente α serão denotados por

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}\ .$$

Usaremos também a notação

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}\ ,$$

sendo $D_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vale a fórmula de Leibniz

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\varphi \cdot \partial^\beta \psi.$$

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, podemos considerar a expansão de Taylor

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha\ .$$

Denotaremos por $C_{2\pi}^\omega(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial das funções $\varphi \in \mathsf{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$ que são analíticas no sentido que para todo x_0 fixado em $\mathbb{R}^n$ existe uma vizinhança V de x_0 onde f é dada por sua expansão de Taylor.

Dado um operador linear diferencial parcial de ordem m

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha$$

com coeficientes $c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, chamamos de **símbolo** de P a função

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha$$

e de **símbolo principal** de P a função

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(x) \xi^\alpha\ .$$

Tanto o símbolo como o símbolo principal são funções definidas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, sendo esta última uma função homogênea de grau m em ξ.

1.2 Identidades e desigualdades para fatoriais

Coletamos nesta seção alguns resultados envolvendo multi-índices frequentemente usados no estudo das classes de Gevrey.

Um primeiro bloco de resultados decorre da fórmula de Newton generalizada para um inteiro positivo $N \geq 1$ e $t_1, \cdots, t_n$ números reais, a saber,

$$(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \cdot t^\alpha \ . \tag{1.2.1}$$

Particularmente, quando $t_1 = \cdots = t_n = 1$ segue a identidade

$$n^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \tag{1.2.2}$$

e isto implica em particular que

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!. \tag{1.2.3}$$

Um segundo bloco de resultados decorre da expansão em série de Taylor da função exponencial

$$e^t = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{t^N}{N!} \ . \tag{1.2.4}$$

Tal expansão, do ponto de vista de um inteiro N, implica

$$t^N \leq N!e^t, \quad \forall\ t > 0, \forall\ N = 1, 2, \dots \ . \tag{1.2.5}$$

Em particular, para $t = N$ obtemos

$$N^N \leq N!e^N, \quad \forall\ N = 1, 2, \dots \tag{1.2.6}$$

enquanto obviamente,

$$N! \leq N^N, \ \forall\ N = 1, 2, \dots \ . \tag{1.2.7}$$

Também serão úteis as seguintes desigualdades:

$$\alpha! \leq |\alpha|!, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ , \tag{1.2.8}$$

$$|\alpha|! \leq |\alpha|^{|\alpha|}, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ , \tag{1.2.9}$$

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}\,|\alpha|!, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ . \tag{1.2.10}$$

1.3 Funções C^∞ e distribuições periódicas

Definição 1.3.1 $\mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é o espaço das funções infinitamente diferenciavéis, definidas em* $\mathbb{R}^n$*, a valores complexos.*

Definição 1.3.2 $\mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é o subespaço de* $\mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *formado pelas funções* 2π*-periódicas em cada variável.*

Definição 1.3.3 *Uma sequência* $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}^n_+}$ *onde* $\varphi_k \in \mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{Z}_+$*, converge em* $\mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *se existir* $\varphi \in \mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $D^\alpha\varphi_k$ *converge uniformemente para* $D^\alpha\varphi$*, em* $\mathbb{R}^n$*, para cada* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_2) \in \mathbb{Z}^n_+$*.*

Esta definição de convergência coincide com a induzida pela métrica

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)}, \tag{1.3.11}$$

sendo p_k, $k = 0, 1, 2, ...$, a semi-norma definida em $\mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ por

$$p_k(\theta) = \sup_{\substack{x\in[0,2\pi]^n \\ |\alpha|\le k}} |D^\alpha\theta(x)|\,. \tag{1.3.12}$$

Observação 1.3.1 $\mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço vetorial completo com relação a métrica* d *definida em (1.3.11).*

1.3.1 Séries de Fourier em $\mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.3.4 *Seja* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência numérica em* $\mathbb{C}$*. Dizemos que a seqüência* $\{a_k\}$ *é* **rapidamente decrescente** *se para cada* $N \in \mathbb{N}$*, existe* $C = C(N) > 0$ *tal que*

$$|a_k| \le C|k|^{-N}, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Teorema 1.3.1 *Seja* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência rapidamente decrescente. Então*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot x}$$

converge em $\mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e se*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot x}$$

então

$$a_k(f) \doteq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx = a_k.$$

onde $a_k(f)$ *é o k-ésimo coeficiente de Fourier de* f *e usaremos a notação* $\widehat{f}(k) = a_k(f)$.

Teorema 1.3.2 *Seja* $f \in \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx$$

forma uma seqüência rapidamente decrescente e

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) e^{ik\cdot x}$$

com a convergência sendo em $\mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

1.3.2 Espaço das distribuições 2π-periódicas

Definição 1.3.5 *Um funcional linear* $u : \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *é dito* **contínuo** *(ou seqüencialmente contínuo) se para qualquer seqüência* $\{\varphi_j\}$ *convergindo para 0 em* $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *então* $u(\varphi_j)$ *converge para 0 em* $\mathbb{C}$.

Definição 1.3.6 *O espaço vetorial*

$$D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{u : \quad u \text{ é um funcional linear contínuo em } \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

é chamado de espaço das **distribuições** 2π**-periódicas**, *denominando* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *como distribuição* 2π*-periódica.*

Teorema 1.3.3 *Seja* $u : \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, *um funcional linear. São equivalentes:*

(i) u *é contínuo;*

(ii) Existem $C > 0$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$| < u, \varphi > | \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|D^\alpha \varphi(x)|\}, \quad \forall\ \varphi \in \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Exemplo 1.3.1 *Seja* $f \in \mathsf{C}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Então* f *define uma distribuição* 2π*-periódica por:*

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, ..., x_n)\varphi(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n,$$

para toda $\varphi \in \mathsf{C}_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.3.7 *Uma seqüência* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é* **convergente** *em* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *se existe* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *tal que, para toda* $\varphi \in \mathsf{C}_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *a seqüência* $< u_j, \varphi >$ *converge para* $< u, \varphi >$ *em* $\mathbb{C}$.

Definição 1.3.8 *Sejam* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathsf{C}_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. *Definimos as distribuições periódicas* $D^\alpha u$ *e* fu *como sendo:*

$$< D^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha \varphi >, \quad \forall\ \varphi \in \mathsf{C}_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n);$$

$$< fu, \varphi >=< u, f\varphi >, \quad \forall\ \varphi \in \mathsf{C}_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

1.3.3 Séries de Fourier em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.3.9 *Seja* $\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência em* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *A série* $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} u_m$ *é* **convergente** *em* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *se a seqüência das reduzidas* $S_l = \sum_{|m|\le l} u_m$ *for convergente em* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.3.4 *Se* $u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} u_m \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *então* $D^\alpha u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} D^\alpha u_m$.

Definição 1.3.10 *Uma seqüência numérica* $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ *é denominada de* **crescimento lento** *se existem constantes* $C > 0$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$|a_m| \le C|m|^k, \quad \forall\ m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Teorema 1.3.5 *Seja* $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência de crescimento lento. Então a série*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{ix\cdot m}$$

é convergente em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e se*

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{ix\cdot m},$$

então

$$a_m = \frac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix\cdot m} > .$$

Teorema 1.3.6 *Seja* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Se* $a_m = \dfrac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix\cdot m} >$, *então* $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ *é uma seqüência de crescimento lento e*

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{ix\cdot m} \quad \text{em } D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

1.3.4 Série parcial de Fourier em $\mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Sejam p, q e $n \in \mathbb{Z}_+, n \geq 2, p \geq 1, q \geq 1$ tais que $p + q = n$.

Teorema 1.3.7 *Seja* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^q}$ *uma seqüência de funções em* $\mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *tal que para cada* $\alpha \in \mathbb{Z}^p_+$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq C(1 + |k|)^{-N}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^q \text{ e } x \in \mathbb{R}^p.$$

Então, a função $\psi : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$\psi(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^q} \varphi_k(x) e^{iy\cdot k}$$

pertence a $\mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.3.8 *Seja* $\varphi \in \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\varphi(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^q} \varphi_k(x) e^{iy\cdot k},$$

na qual $\varphi_k \in \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *e*

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[-\pi,\pi]^q} \varphi(x, y) e^{-iy\cdot k}\, dy.$$

Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{Z}^p_+$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $C > 0$ *tais que*

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq C(1 + |k|)^{-N}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^q \text{ } e \text{ } x \in \mathbb{R}^p.$$

As funções $\varphi_k(x)$ são chamadas coeficientes parciais de Fourier de φ e usaremos a notação $\widehat{\varphi}(x, k) = \varphi_k(x)$. A série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^q} \widehat{\varphi}(x, k) e^{iy\cdot k}$ é chamada de série parcial de Fourier de φ em relação a y.

1.3.5 Série parcial de Fourier em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e $n \in \mathbb{Z}_+, n \geq 2, p \geq 1, q \geq 1$ tais que $p+q=n$.

Teorema 1.3.9 *Se $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m(x) e^{iy \cdot m},$$

sendo que $u_m \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$, dada por

$$< u_m, \varphi(x) > = \frac{1}{(2\pi)^q} < u, \varphi(x) e^{-iy \cdot m} >,$$

com $\varphi \in \mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$. Além disso, para cada $\varphi \in \mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$, $\Big\{ < u_m, \varphi(x) > \Big\}_{m \in \mathbb{Z}^q}$ é uma seqüência de crescimento lento.

Teorema 1.3.10 *Seja $\{u_m\}_{m \in \mathbb{Z}^q}$ uma seqüência em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$, satisfazendo a seguinte condição:*

Existe $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$| < u_m, \varphi > | \leq C \rho_k(\varphi)(1 + |m|)^k,$$

para toda $\varphi \in \mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$ e $m \in \mathbb{Z}^q$, sendo ρ_k a semi-norma definida em (1.3.12).

Então $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m(x) e^{iy \cdot m} \quad \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

1.4 Funções Gevrey de ordem $s \geq 1$

Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $s \geq$1 um número real fixado.

Definiremos a classe de funções Gevrey de ordem $s \geq 1$ em Ω, denotada por $G^s(\Omega)$.

Definição 1.4.1 *Uma função φ está em $G^s(\Omega)$ se $\varphi \in \mathsf{C}^\infty(\Omega)$ e para todo K subconjunto compacto de Ω existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s, \ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+, \ \forall\ x \in K.$$

1.5 Funções Gevrey Periódicas de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$

Definição 1.5.1 *Dizemos que $\varphi \in \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é uma função Gevrey periódica de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$ quando existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$|\partial^{\alpha}\varphi(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot (\alpha!)^s \ : \ \forall \ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \ , \forall \ x \in [0, 2\pi]^n \ . \tag{1.5.13}$$

O conjunto de todas as funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$ será denotado por $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e denominado classe das funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$.

Exemplo 1.5.1 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função analítica e 2π-periódica em cada variável então existe $h > 0$ tal que $f \in G^{1,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Observação 1.5.1 *Vê-se facilmente que $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset G^{s',h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $s < s'$ e $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset G^{s,h'}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $h < h'$.*

Consequência: Se $f \in \mathsf{C}^{w}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então então existe $h > 0$ tal que $f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \geq 1$.

As operações usuais de soma e de multiplicação por escalar em funções são claramente fechadas nas classes $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, tornando-o um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, a aplicação

$$\|\varphi\|_{s,h} = \sup\left\{|\partial^{\alpha}\varphi(x)|\, h^{-|\alpha|}\alpha!^{-s} : \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, x \in [0, 2\pi]^n\right\} \tag{1.5.14}$$

define uma norma em $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Notemos que segue de (1.5.13) que $\|\varphi\|_{s,h}$ está bem definida.

Teorema 1.5.1 *A classe $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ das funções Gevrey de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$ é um espaço de Banach com relação à norma $\|\cdot\|_{s,h}$.*

1.6 Funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$

Definição 1.6.1 *Dizemos que $\varphi \in \mathsf{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é uma função* **Gevrey 2π-periódica de ordem** $s \geq 1$ *quando φ é uma função Gevrey periódica de ordem $s \geq 1$*

em alguma amplitude $h > 0$, isto é, quando existir uma amplitude $h > 0$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ , \forall \ x \in [0, 2\pi]^n \ .$$

O conjunto de todas as funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ será denotado por $G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^n)$ e denominado classe das funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$.

Observação 1.6.1 $G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^n) = \bigcup\limits_{h>0} G_{2\pi}^{s,h}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.6.1 *$G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial e um anel com relação ao produto de funções; além disso é fechado com relação a diferenciação.*

1.7 Espaços vetoriais topológicos e a topologia limite indutivo

Definição 1.7.1 *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que uma topologia definida sobre E é* **compatível** *com a estrutura de espaço vetorial de E se as aplicações*

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$$

$$(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E \mapsto \lambda x \in E$$

são contínuas. Um espaço vetorial munido com uma topologia compatível com sua estrutura de espaço vetorial é dito ser um ***espaço vetorial topológico*** *(EVT).*

Observação 1.7.1 *A topologia de um EVT pode ser descrita em termos de um sistema fundamental de vizinhanças do zero. Em um espaço topológico uma coleção de conjuntos é dita ser um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto se todo conjunto da coleção contém o ponto, a intersecção de dois conjuntos quaisquer da coleção contém um conjunto da coleção e toda vizinhança do ponto contém um conjunto da coleção. Lembremos que em um espaço topológico uma vizinhança de um ponto x é qualquer conjunto aberto que contém o ponto.*

Definição 1.7.2 *Seja E um EVT e $A \subset E$. Dizemos que A é* **convexo** *se dados dois pontos quaisquer em A, então o segmento que os liga está também em A, isto é, se $x, y \in A$ então $\lambda x + (1-\lambda)y \in A, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$.*

Definição 1.7.3 *Um EVT é dito ser* **localmente convexo** *se existir um sistema fundamental de vizinhanças do zero formado por conjuntos convexos.*

Definição 1.7.4 *Seja E um EVT. Um subconjunto B de E é dito ser* **limitado** *se para toda vizinhança V de 0 temos $B \subset tV$ para todo t suficientemente grande.*

Introduziremos agora a topologia limite indutivo a qual será útil para definirmos a topologia de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Suponhamos que E seja a união de uma seqüência crescente de subespaços $E_n, n \in \mathbb{Z}_+$, localmente convexos tais que as aplicações inclusões $i_{n,n+1} : E_n \mapsto E_{n+1}$ são contínuas, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ (portanto a topologia induzida em E_n pela topologia de E_{n+1} é menos fina do que a topologia original de E_n). Definimos sobre E a topologia localmente convexa mais fina que torna as inclusões $i_n : E_n \mapsto E$ contínuas (ou seja, torna a topologia induzida em E_n, por essa topologia, menos fina que a topologia original de E_n). Diremos, neste caso, que **E é o limite indutivo dos E_n.**

Definição 1.7.5 *Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação linear $u : X \mapsto Y$ é dita ser* **compacta** *se para todo conjunto $B \subset X$, limitado, temos que $u(B)$ é relativamente compacto em Y, isto é, $\overline{u(B)}$ é compacto em Y. Equivalentemente, u é compacta se toda seqüência limitada $\{x_n\}$ em X contém uma subseqüência $\{x_{n_i}\}$ tal que $\{u(x_{n_i})\}$ converge para um ponto de Y.*

Definição 1.7.6 *Diremos que uma seqüência, $\{E_n\}$, de espaços normados é* ***regular****, se as seguintes condições são satisfeitas:*
i) $E_n \subset E_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ e a topologia de E_{n+1} induz em E_n uma topologia menos fina que a topologia original de E_n.
ii) $i_{n,n+1} : E_n \mapsto E_{n+1}$ é uma aplicação linear compacta, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$.

Teorema 1.7.1 *Seja E o limite indutivo de uma seqüência regular de espaços normados $\{E_n\}$. Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto F seja fechado em E é que a interseção $F \cap E_n$ seja fechada em E_n, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$.*

Corolário 1.7.1 *Seja E o limite indutivo de uma seqüência regular de espaços normados, $\{E_n\}$, e seja F um espaço topológico qualquer. Para que uma aplicação $f : E \mapsto F$ seja contínua é necessário e suficiente que a restrição de f em E_n seja contínua, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$.*

Teorema 1.7.2 *Seja E o limite indutivo de uma seqüência regular de espaços normados $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Para que $B \subset E$ seja limitado em E é necessário e suficiente que exista $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $B \subset E_{n_0}$ e que B seja limitado com relação a topologia de E_{n_0}.*

Corolário 1.7.2 *Seja E o limite indutivo de uma seqüência regular de espaços normados, $\{E_n\}$, e seja $\{x_n\}$ uma seqüência de E. Para que $x_n \to 0$ em E é necessário e suficiente que exista $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_n \in E_{n_0}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ e $x_n \to 0$ em E_{n_0}.*

1.7.1 Topologia em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Agora vamos definir, de modo natural, uma topologia sobre o espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Mas antes disso, enunciaremos um teorema muito importante para que a topologia em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ seja bem definida.

Teorema 1.7.3 *Para todo $h < h'$ a inclusão*

$$i : G^{s,h}_{2\pi}\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow G^{s,h'}_{2\pi}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

é contínua e compacta.

Seja h_j é uma seqüência de números reais positivos estritamente crescente e $h_j \to \infty$. Então podemos escrever

$$G^s_{2\pi}\left(\mathbb{R}^n\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} G^{s,h_j}_{2\pi}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Munimos $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ com a topologia limite indutivo definida anteriormente (ver pag.13).

Mostra-se que a topologia limite indutivo definida sobre $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ independe da escolha da seqüência h_j escolhida. Assim, daqui para frente vamos fixar uma seqüência h_j de números reais positivos estritamente crescente e $h_j \to \infty$ e vamos trabalhar com a topologia limite indutivo definida sobre $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ pela seqüência $G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Assim segue do corolário 1.7.2 que vale o seguinte critério de convergência em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$:

- $\varphi_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ converge para $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existe algum h_p tal que $\varphi_j, \varphi \in G^{s,h_p}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\|\varphi_j - \varphi\|_{s,h_p} \to 0$.

1.8 Ultradistribuições Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$

O espaço $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ das ultradistribuições de ordem $s \geq 1$, 2π-periódicas, é definido como o dual topológico do espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Mais explicitamente,

Definição 1.8.1 *Dizemos que $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é uma* **ultradistribuição Gevrey 2π-periódica de ordem** $s \geq 1$ *quando u é um funcional linear contínuo. O conjunto de todas as ultradistribuições periódicas de ordem $s \geq 1$ será denotado por $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e denominado classe das ultradistribuições Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$.*

Teorema 1.8.1 *Seja $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que

$$| < u, \varphi > | \leq C_\epsilon \sup_{x \in [0,2\pi]^n} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+} |\partial^\alpha \varphi(x)| \, \epsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s}; \forall \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Se $\varphi_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, ...$ converge para 0 em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então a seqüência $< u, \varphi_j >$ converge para zero em $\mathbb{C}$.

Lema 1.8.1 *Seja $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição 2π-periódica em $\mathbb{R}^n$. Então a restrição de u ao espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, define um elemento em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 1.8.2 *$G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo $s \geq 1$.*

Já sabemos, pelo Lema 1.8.1, que se $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então a restrição de u a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, define um elemento em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Segue do Lema anterior que se essa restrição é uma distribuição nula em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então $u \equiv 0$ também em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Assim, podemos identificar $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ com um subespaço de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$; que explica a palavra " ultradistribuição periódica" para elementos de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.8.1 *Seja $f \in \mathsf{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então f define uma ultradistribuição 2π-periódica por:*

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, ..., x_n)\varphi(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ...\, dx_n,$$

para toda $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.8.2 *Se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ definimos*

$$< \partial^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi >, \forall\ \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \tag{1.8.15}$$

e

$$< fu, \varphi >=< u, f\varphi >, \forall\ \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n). \tag{1.8.16}$$

Teorema 1.8.2 *Se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então $\partial^\alpha u$ e fu pertencem a $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 1.8.2 *Seja $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+} a_\alpha \delta^{(\alpha)}$, com $a_\alpha \in \mathbb{C}$, definida por:*

$$< u, \varphi >= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0), \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Se para cada $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|a_\alpha| \leq C_\epsilon \epsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s},$$

então $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

1.9 Séries de Fourier para funções Gevrey periódicas

Definição 1.9.1 *Seja* $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Então para cada* $\xi \in \mathbb{Z}^n$ *definimos o coeficiente de Fourier* $\widehat{\varphi}(\xi)$ *por*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Teorema 1.9.1 *Se* $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\varphi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix\cdot\xi}$$

sendo a convergência em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e existem constantes* $C > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *tais que*

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq Ce^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.9.17}$$

Teorema 1.9.2 *Seja* $\{C_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$ *uma seqüência de números complexos e suponhamos que existem* $C > 0$ *e* $\varepsilon > 0$ *tais que*

$$|C_\xi| \leq Ce^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.9.18}$$

Então, existe $\psi(x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} C_\xi e^{ix\cdot\xi},$$

onde a convergência é em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Além disso,* $\hat{\psi}(\xi) = C_\xi$.

1.10 Séries de Fourier para ultradistribuições Gevrey periódicas

Definição 1.10.1 *Seja* $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Definimos o* **coeficiente de Fourier** $\widehat{u}(\xi)$ *de* u *por*

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix\cdot\xi} >, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Observação 1.10.1 *Como* $e^{ia\cdot\xi} \in C^w_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}^n$ *então* $e^{ia\cdot\xi} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e portanto* $\hat{u}(\xi)$ *está bem definido.*

Teorema 1.10.1 *Se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Definição 1.10.2 *Seja u_j uma seqüência em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que u_j converge para u em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $< u_j, \varphi >$ converge para $< u, \varphi >$ para toda $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 1.10.2 *Seja $\{C_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$ uma seqüência em $\mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|C_\xi| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.10.19}$$

Então existe $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = \displaystyle\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} C_\xi e^{ix\cdot\xi}$, isto é,

$$< u, \varphi >= \lim_{j \longrightarrow \infty} < S_j, \varphi > \doteq \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_{[0,2\pi]^n} S_j(x)\varphi(x)dx, \text{ com } S_j(x) = \sum_{|\xi| \leq j} C_\xi e^{ix\cdot\xi}.$$

Além disso, $\hat{u}(\xi) = C_\xi$.

Teorema 1.10.3 *Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi},$$

com a convergência sendo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.10.1 *Usando os resultados desta seção exibiremos agora um exemplo de ultradistribuição Gevrey $2\pi-$periódica em $\mathbb{R}$ que não é uma distribuição $2\pi-$periódica em $\mathbb{R}$, ou seja mostraremos que*

$$D'_{2\pi}(\mathbb{R}) \subsetneqq D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Para isto consideremos a seqüência

$$a_n = e^{n^{\frac{1}{2s}}} = e^{\sqrt{n^{\frac{1}{s}}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n^{\frac{1}{s}}}} n^{\frac{1}{s}}}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{Z}_+$ tal que se $n \geq n_0$ então $e^{\sqrt{n^{\frac{1}{s}}}} \leq e^{\epsilon n^{\frac{1}{s}}}$. Seja $C_\epsilon = max\{1, e^{\left(\frac{1}{\sqrt{n^{\frac{1}{s}}}} - \epsilon\right) n^{\frac{1}{s}}}, n = 1, \cdots, n_0 - 1\}$. Então

$$a_n = e^{n^{\frac{1}{2s}}} \leq C_\epsilon e^{\epsilon n^{\frac{1}{s}}}, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Assim,

$$u = \sum_{n\geq 1} e^{n^{\frac{1}{2s}}} e^{inx} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Notemos que $u = \sum_{n\geq 1} e^{n^{\frac{1}{2s}}} e^{inx} \notin D'_{2\pi}(\mathbb{R})$, pois se existisse $C > 0$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $\ell \neq 0$ tal que $e^{n^{\frac{1}{2s}}} \leq Cn^{\ell}$ então deveríamos ter $n^{\frac{1}{2s}} \leq \log C + \ell \log n$ e portanto

$$1 \leq \frac{\log C}{n^{\frac{1}{2s}}} + \ell \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2s}}} \to 0$$

quando $n \to \infty$, o que nos daria uma contradição. Logo não existe $C > 0$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+$ tais que $a_n \leq Cn^{\ell}$, $\forall\ n \neq 0$, ou seja, $u \notin D'_{2\pi}(\mathbb{R})$. $\square$

1.11 Série parcial de Fourier para funções Gevrey periódicas

Sejam p, q e $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ tais que $p + q = n$ e escrevemos $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ para indicar que $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Seja $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos para cada $x \in \mathbb{R}^p$ a função

$$\varphi_x : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$.

É fácil ver que $\varphi_x \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q)$ para cada x fixado em $\mathbb{R}^p$.

Assim, podemos escrever

$$\varphi(x, y) = \varphi_x(y) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} \widehat{\varphi}(x, \eta) e^{iy.\eta},$$

onde

$$\widehat{\varphi}(x, \eta) \doteq \widehat{\varphi}_x(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[0,2\pi]^q} e^{-iy.\eta} \varphi_x(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[0,2\pi]^q} e^{-iy.\eta} \varphi(x, y) dy.$$

Como $\varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ segue que para cada $\eta \in \mathbb{Z}^q$, fixado, $\widehat{\varphi}(\cdot, \eta) \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$.

Seja $\alpha \in \mathbb{Z}^p_+$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, fixado. Como $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ existe $C > 0$ e h_{j_0} tais que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha_x \widehat{\varphi}(x, \eta)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[0,2\pi]^q} |\partial^\alpha_x \varphi(x, y)| dy \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[0,2\pi]^q} C h^{|\alpha|}_{j_0} (\alpha!)^s dy \\
&= C h^{|\alpha|}_{j_0} (\alpha!)^s,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}^p_+,\ \forall x \in [0, 2\pi]^p.
\end{aligned}$$

Assim podemos concluir que $\widehat{\varphi}(\cdot,\eta) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$.

Teorema 1.11.1 *Seja* $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Então existem constantes* $h_p = h_p(\varphi), C > 0$, *e* $\epsilon > 0$ *tais que*

$$|\partial^\alpha_x \widehat{\varphi}(x,\eta)| \leq C h_p^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}},\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^p_+,\ \forall\, \eta \in \mathbb{Z}^q,\ \forall\, x \in [0,2\pi]^p.$$

Teorema 1.11.2 *Seja* $\varphi_\eta, \eta \in \mathbb{Z}^q$, *uma seqüência de funções em* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *tal que existem* $C > 0$, $h_p > 0$ *e* $\varepsilon > 0$ *tais que*

$$|\partial^\alpha_x \varphi_\eta(x)| \leq C h_p^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{1/s}},$$

$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^p_+,\ \forall\, \eta \in \mathbb{Z}^q,\ \forall\, x \in [0,2\pi]^p$. *Então, a função* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \varphi_\eta(x) e^{iy.\eta}$$

está bem definida e $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

1.12 Série parcial de Fourier para ultradistribuições Gevrey periódicas

Sejam p, q e $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ tais que $n = p + q$ e escrevemos $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ para indicar que $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\psi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ definimos

$$u_\psi : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathbb{C}$$

por

$$< u_\psi, \varphi >=< u, \psi(x) \otimes \varphi(y) >,\ \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q), \tag{1.12.20}$$

onde $\psi \otimes \varphi : \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{C}$ é definida por $(\psi \otimes \varphi)(x,y) = \psi(x).\varphi(y)$.

Observação 1.12.1 $u_\psi \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q)$.

Observação 1.12.2 *Segue do Teorema (1.10.3) que podemos escrever*

$$u_\psi(y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u_\psi}(\eta) e^{iy.\eta} \tag{1.12.21}$$

onde

$$\widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q} < u_\psi, e^{-iy.\eta} >= \frac{1}{(2\pi)^q} < u, \psi(x)e^{-iy.\eta} > .$$

Para cada $\eta \in \mathbb{Z}^q$ *fixado definimos o seguinte funcional linear sobre* $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$*:*

$$u_\eta : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$< u_\eta, \psi >= \widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q} < u, \psi(x)e^{-iy.\eta} > . \tag{1.12.22}$$

Observação 1.12.3 $u_\eta(x) \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$, $\forall \eta \in \mathbb{Z}^q$.

Teorema 1.12.1 *Se* $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} u_\eta(x) e^{iy\cdot\eta}$$

onde $u_\eta(x) \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *é dada por*

$$< u_\eta(x), \psi(x) >= \widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q} < u, \psi(x)e^{-iy\cdot\eta} >, \forall\, \psi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Além disso, dados $\epsilon > 0$ *e* $h_\ell > 0$ *existe uma constante* $C_{\epsilon,h_\ell} > 0$ *tal que*

$$| < u_\eta(x), \psi(x) > | \le C_{\epsilon,h_\ell} \|\psi\|_{s,h_\ell} e^{\epsilon|\eta|^{1/s}}, \quad \forall\, \eta \in \mathbb{Z}^q,\ \forall\, \psi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Teorema 1.12.2 *Seja* $u_\eta, \eta \in \mathbb{Z}^q$*, uma seqüência em* $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *que satisfaz a seguinte condição: Dados* $\epsilon > 0$ *e* $h_\ell > 0$ *existe uma constante* $C_{\epsilon,h_\ell} > 0$ *tal que*

$$| < u_\eta(x), \psi(x) > | \le C_{\epsilon,h_\ell} \|\psi\|_{s,h_\ell} e^{\epsilon|\eta|^{1/s}}, \quad \forall\, \eta \in \mathbb{Z}^q,\ \forall\, \psi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Então

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} u_\eta(x) e^{iy.\eta} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Capítulo 2

Análise da G^s hipoeliticidade global de alguns operadores

2.1 Aplicação

Seja $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ um operador diferencial parcial linear com $x \in \mathbb{R}^n$ e $a_\alpha(x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 1$.

Definição 2.1.1 *Seja $s \geq 1$. Dizemos que P é* **globalmente** G^s **hipoelítico em** $\mathbb{R}^n$, *(GG^sH), se as condições $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $Pu \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ implicam que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Em $\mathbb{R}^n$ consideremos o operador com coeficientes constantes P dado por

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \ a_\alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.1.1}$$

Como uma primeira aplicação provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1 *Seja $s \geq 1$. O operador P dado por (2.1.1) é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que o símbolo $\hat{P}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$, satisfaz*

$$|\hat{P}(\xi)| \geq e^{-\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}}, \ \textit{para } |\xi| \geq C_\varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Demonstração: **Suficiência:** Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Pu = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n). \tag{2.1.3}$$

Tomando a série de Fourier em (2.1.3) obtemos

$$\hat{P}(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.1.4}$$

Segue de (2.1.4) e do fato de $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ que existem $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\hat{P}(\xi)||\hat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.1.5}$$

Tomando $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, segue da hipótese, que existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que

$$|\hat{P}(\xi)| \geq e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ \text{para } |\xi| \geq C_{\varepsilon_1}. \tag{2.1.6}$$

Segue de (2.1.5) e (2.1.6) que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ \ |\xi| \geq C_{\varepsilon_1}. \tag{2.1.7}$$

Podemos decompor u da seguinte forma

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi} \\ &= \sum_{|\xi| < C_{\varepsilon_1}} \hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi} + \sum_{|\xi| \geq C_{\varepsilon_1}} \hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi} \\ &\doteq u_1(x) + u_2(x). \end{aligned}$$

Como $e^{ix\cdot\xi}$ é analítica real, para cada ξ fixado, então $u_1 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Como existem $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ e $C_{\varepsilon'} > 0$ tais que $|\hat{u}(\xi)| \leq C_{\varepsilon'} e^{-\varepsilon'\xi|^{\frac{1}{s}}}$, $\forall\ |\xi| \geq C_{\varepsilon_1}$ então podemos concluir que $u_2 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Portanto temos $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. □

Necessidade: Suponhamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $C > 0$ existe $\xi \in \mathbb{Z}^n$ tal que $|\xi| \geq C$ e $|\hat{P}(\xi)| < e^{-\varepsilon_0|\xi|^{\frac{1}{s}}}$. Assim existe uma seqüência $\{\xi^j\} \in \mathbb{Z}^n$ com $|\xi^j| \geq j$ e $|\hat{P}(\xi^j)| < e^{-\varepsilon_0|\xi^j|^{\frac{1}{s}}}$.

Definindo

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{ix\cdot\xi^j}$$

temos

$$\hat{u}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \neq \xi^j; \\ 1, & \text{se } \xi = \xi^j. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Assim, $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ (logo $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$) e também temos que $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{ix \cdot \xi^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{P}(\xi^j) e^{ix \cdot \xi^j} = f(x).$$

Assim

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \neq \xi^j; \\ \hat{P}(\xi^j), & \text{se } \xi = \xi^j. \end{cases}$$

Como existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|\hat{f}(\xi)| \leq e^{-\varepsilon_0 |\xi|^{\frac{1}{s}}}$ então podemos concluir que $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Assim construímos $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n) \backslash G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ (ver 2.1.8) tal $Pu = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e portanto P não é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exemplo 2.1.1 *Consideremos o operador $L = \dfrac{d}{dx} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Afirmamos que o operador L é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}$, para $s \geq 1$.*

Mostraremos que L satisfaz (2.1.2)

De fato,

$$\begin{aligned} |\hat{L}(\xi)| &= |i\xi + \lambda| = |i\xi + \Re(\lambda) + i\Im(\lambda)| = |\Re(\lambda) + i(\xi + \Im(\lambda))| \\ &\geq |\xi + \Im(\lambda)| \geq |\xi| - |\Im(\lambda)| \geq 1 \end{aligned}$$

se $|\xi| \geq |\Im(\lambda)| + 1$. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $C = |\Im(\lambda)| + 1$ e temos

$$|\hat{L}(\xi)| \geq 1 \geq e^{-\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \text{se} \quad |\xi| \geq C.$$

Portanto pelo Teorema 2.1.1 L é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}$. $\square$

Analisemos o Teorema 2.1.1 no caso particular em que $n = 2$.

Precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.1.2 *Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$* **não é um número Liouville exponencial com expoente** *$s \geq 1$ se para qualquer $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$|p - \alpha q| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon |q|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall \ (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\}). \tag{2.1.9}$$

Assim temos o seguinte resultado

Teorema 2.1.2 *Seja $s \geq 1$. O campo vetorial $L = D_1 - \alpha D_2$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, α não é um número Liouville exponencial com expoente s.*

Demonstração: **Necessidade:** A prova será feita pela contrapositiva. Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Então podemos escrever $\alpha = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Assim, se $p = \ell m$ e $q = \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$ então temos

$$\hat{L}(\ell m, \ell n) = \ell m - \alpha \ell n = 0, \ \forall \ \ell \in \mathbb{Z}.$$

Logo L não é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$, pois segue do Teorema 2.1.1 que o símbolo de um operador globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$ não pode ter uma infinidade de zeros em $\mathbb{Z}^2$.

Suponhamos agora que α é um número Liouville exponencial com expoente s, isto é, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para qualquer constante $C > 0$ existem $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ tais que

$$|p - \alpha q| < C e^{-\epsilon_0 |q|^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.1.10}$$

Assim, tomando $C = \frac{1}{j}$ existe uma seqüência $(p_j, q_j) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ satisfazendo

$$|p_j - \alpha q_j| < \frac{1}{j} e^{-\epsilon_0 |q_j|^{\frac{1}{s}}} \leq e^{-\epsilon_0 |q_j|^{\frac{1}{s}}} \tag{2.1.11}$$

e além disso podemos escolher $|q_j| \geq 2$ e $|q_j| \to \infty$.

Segue de (2.1.11) que

$$|p_j| - |\alpha||q_j| \leq |p_j - \alpha q_j| < e^{-\epsilon_0 |q_j|^{\frac{1}{s}}} \leq 1 \leq |q_j|$$

e portanto

$$|p_j| \leq (1 + |\alpha|)|q_j|.$$

Assim temos

$$p_j^2 + q_j^2 \leq [1 + (1 + |\alpha|)^2] q_j^2. \tag{2.1.12}$$

Segue de (2.1.11) e de (2.1.12) que

$$|\hat{L}(p_j, q_j)| = |p_j - \alpha q_j| < e^{-\epsilon_0 |q_j|^{\frac{1}{s}}} \leq e^{-\epsilon_0 \frac{1}{C^{\frac{1}{s}}} |(p_j, q_j)|^{\frac{1}{s}}}, \ j = 1, 2, \cdots$$

com $C = \{[1 + (1 + |\alpha|)^2]\}^{\frac{1}{2}}$ e $|q_j| \to \infty$.

Logo, L nao é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$.

Suficiência: Suponhamos agora que α não é um número Liouville exponencial com expoente s, isto é, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|p - \alpha q| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon |q|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall \ (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\}). \tag{2.1.13}$$

Segue de (2.1.13) que

$$|\hat{L}(p, q)| = |p - \alpha q| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon |q|^{\frac{1}{s}}} \geq C_\epsilon e^{-\epsilon |(p,q)|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall \ (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\}). \tag{2.1.14}$$

Notemos que

$$\left| \hat{L}(p, 0) \right| = |p| \geq 1 \geq e^{-\epsilon |(p,0)|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall \ p \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}. \tag{2.1.15}$$

Assim segue de (2.1.14) e (2.1.15) e do Teorema 2.1.1 que L é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$. $\square$

2.2 Uma condição suficiente para a G^s Hipoeliticidade Global em $\mathbb{R}^2$ do operador $Q = \partial_x - c(x)\partial_y$

Iniciaremos esta seção provando um resultado sobre G^s hipoeliticidade global o qual será utilizado na prova do resultado principal deste trabalho, mais precisamente:

Teorema 2.2.1 *Seja $s \geq 1$. Seja $Q = \partial_x - c(x)\partial_y$, onde $c \in \mathsf{C}^\omega_{2\pi}(\mathbb{R})$ com $c(x) = a(x) + ib(x)$. Se b não muda de sinal e b não é identicamente nula, então Q é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração: Vamos analisar o caso $b(x) \geq 0$ pois se $b(x) \leq 0,\ \forall\ x$, a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

transforma o operador Q no operador $\tilde{Q} = \partial_{x'} - (-c(x'))\partial_{y'}$ e, portanto, $\Im(-c(x')) = -b(x') \geq 0$.

Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Qu = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Precisamos mostrar que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e isso será feito através da análise de seus coeficientes parciais de Fourier.

Como $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ consideremos suas expansões em séries parciais de Fourier em relação a variável y:

$$u(x, y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{u}_j(x)e^{ijy},$$

$$f(x, y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(x)e^{ijy}.$$

Assim, usando Lema 3.0.5 do apêndice temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(x)e^{ijy} &= f(x, y) = Qu = Q\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{|j|\leq n} \hat{u}_j(x)e^{ijy}\right) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} Q\left(\sum_{|j|\leq n} \hat{u}_j(x)e^{ijy}\right) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{|j|\leq n} \left(\frac{d}{dx}\hat{u}_j(x) - ijc(x)\hat{u}_j(x)\right) e^{ijy} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{d}{dx}\hat{u}_j(x) - ijc(x)\hat{u}_j(x)\right) e^{ijy}.
\end{aligned}$$

Pela unicidade dos coeficientes parciais de Fourier de f, temos que para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\hat{u}_j$ é solução de

$$\frac{d}{dx}\hat{u}_j(x) - ijc(x)\hat{u}_j(x) = \hat{f}_j(x). \tag{2.2.16}$$

Pelo Lema 3.0.7 estudar as soluções em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$ de (2.2.16), é equivalente a estudar as soluções em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$ de

$$\left(\frac{d}{dx} - ijc_0\right)(e^{-ij\tilde{c}(x)}\hat{u}_j(x)) = e^{-ij\tilde{c}(x)}\hat{f}_j(x) \text{ para cada } j \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.17}$$

sendo

$$\tilde{c}(x) = \int_0^x c(t)dt - c_0 x \quad \text{e} \quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(t)dt.$$

Observação 2.2.1 *Como $\hat{f}_j(x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ segue do exemplo 2.1.1 e de (2.2.17) que $\hat{u}_j(x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ para cada j.*

Estudaremos as soluções de (2.2.17) utilizando o Lema 3.0.10 do Apêndice, com $\lambda = -ijc_0$, portanto, precisaremos de informações sobre o número $-ijc_0$, que passaremos a analisar.

Se escrevermos $c_0 = a_0 + ib_0$ teremos $\lambda = -ij(a_0 + ib_0) = j(b_0 - ia_0)$. Notemos que a hipótese sobre $b(x)$ não mudar de sinal e não ser identicamente nula, implica que

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(t)dt \neq 0.$$

Concluímos assim que $\lambda \in i\mathbb{Z}$ se, e somente se, $j = 0$. Então pelo Lema 3.0.10, com $\lambda = j(b_0 - ia_0)$ e $g(x) = e^{-ij\tilde{c}(x)}\hat{f}_j(x)$ e $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ temos

$$e^{-ij\tilde{c}(x)}\hat{u}_j(x) = \frac{1}{1 - e^{ijc_0 2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{ijc_0 s}e^{-ij\tilde{c}(x-s)}\hat{f}_j(x-s)ds$$

ou equivalentemente

$$e^{-ij\tilde{c}(x)}\hat{u}_j(x) = \frac{1}{e^{-ijc_0 2\pi} - 1}\int_0^{2\pi} e^{-ijc_0 s}e^{-ij\tilde{c}(x+s)}\hat{f}_j(x+s)ds.$$

Portanto,

$$\hat{u}_j(x) = \frac{1}{1 - e^{ijc_0 2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{ij(c_0 s - \tilde{c}(x-s) + \tilde{c}(x))}\hat{f}_j(x-s)ds \tag{2.2.18}$$

ou equivalentemente

$$\hat{u}_j(x) = \frac{1}{e^{-ijc_0 2\pi} - 1}\int_0^{2\pi} e^{-ij(c_0 s + \tilde{c}(x+s) - \tilde{c}(x))}\hat{f}_j(x+s)ds. \tag{2.2.19}$$

Segue de (2.2.16) que para $j = 0$, $\hat{u}_0(x)$ é solução da equação

$$\frac{d}{dx}\hat{u}_0(x) = \hat{f}_0(x). \tag{2.2.20}$$

Assim,

$$\hat{u}_0(x) = \int_0^x \hat{f}_0(s)ds + C. \tag{2.2.21}$$

Observemos que como $\hat{u}_0(x)$ é 2π-periódica devemos ter

$$\hat{u}_0(0) = C = \hat{u}_0(2\pi) = \int_0^{2\pi} \hat{f}_0(s)ds + C,$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}_0(s)ds = 0. \tag{2.2.22}$$

Vamos provar que a sequência $(\hat{u}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ satisfaz o seguinte: existem $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{u}_j(x)\right| \leq C^{k+1}(k!)^s e^{-\varepsilon|j|^{\frac{1}{s}}}, \forall\ j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \forall\ x \in [0,2\pi], \forall\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.2.23}$$

Assim pelo Teorema 1.11.2 concluiremos que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Necessitaremos de alguns resultados que se seguem:

Como $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, existem $C_f > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{f}_j(x)\right| \leq C_f^{k+1}(k!)^s e^{-\varepsilon|j|^{1/s}}, \forall\ k \in \mathbb{Z}_+, \forall\ j \in \mathbb{Z}, \forall\ x \in [0,2\pi]. \tag{2.2.24}$$

Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, analítica real e $H(t,\cdot)$ 2π-periódica. Como $[0,2\pi]^2$ é compacto existe $r > 0$ e uma vizinhança complexa de $\tilde{U}$ de $[0,2\pi]^2$, que contém todos os polidiscos $\triangle(t,x,r)$ de raio r, independente de (t,x), centrado em $(t,x) \in [0,2\pi]^2$, isto é,

$$\triangle(t,x,r) = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 - t| \leq r, |z_2 - x| \leq r\} \subset \tilde{U}, \forall\ (t,x) \in [0,2\pi]^2,$$

onde H tem uma extensão holomorfa, $\tilde{H}$. Lembremos que

$$\partial^l_{z_2}\tilde{H}(z_1,z_2)\Big|_{\substack{z_1=t\\ z_2=x}} = \partial^l_x H(t,x), \text{ para } l = 0,1,2,....$$

Lema 2.2.1 *Seja $\varphi_j(z) = e^{ijz}, z \in \mathbb{C}, j = 1,2,....$ Para x e t fixos definimos para cada $k = 0,1,2,...$ e para cada $j = 1,2,...$ uma função $F_{j,k} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por*

$$F_{j,k}(w) = \sum_{p=0}^{k} e^{ijH(t,x)}\frac{(ij)^p}{p!}[w - H(t,x)]^p.$$

Então

$$\partial^l_x(\varphi_j o H)(t,x) = \partial^l_{z_2}(F_{j,k} o \tilde{H})(z_1,z_2)\Big|_{\substack{z_1=t\\ z_2=x}},\ l = 0,1,2,...,k. \tag{2.2.25}$$

Demonstração: Iniciamos observando que

$$\partial^l_{z_2}(F_{j,k}o\tilde{H})(z_1,z_2)_{\big|\substack{z_1=t\\ z_2=x}} = \partial^l_{z_2}(F_{j,k}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x}.$$

Assim basta provar que

$$\partial^l_x(\varphi_j oH)(t,x) = \partial^l_{z_2}(F_{j,k}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x}, \text{ para } l=0,1,...,k. \tag{2.2.26}$$

A prova será feita por indução em k. Para $k=1$ temos

$$(F_{j,1}o\tilde{H})(t,z_2) = e^{ijH(t,x)} + e^{ijH(t,x)}ij[\tilde{H}(t,z_2) - H(t,x)].$$

Notemos que para $l=0$ vale (2.2.26), pois

$$(F_{j,1}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x} = e^{ijH(t,x)} = (\varphi_j oH)(t,x).$$

Observemos que

$$\partial_{z_2}(F_{j,1}o\tilde{H})(t,z_2) = e^{ijH(t,x)}ij\partial_{z_2}\tilde{H}(t,z_2)$$

e portanto,

$$\partial_{z_2}(F_{j,1}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x} = e^{ijH(t,x)}ij\partial_x H(t,x).$$

Por outro lado, temos

$$\partial_x(\varphi_j oH)(t,x) = \frac{d}{dz}\varphi_j(H(t,x))\partial_x H(t,x) = ije^{ijH(t,x)}\partial_x H(t,x).$$

Logo,

$$\partial_{z_2}(F_{j,1}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x} = \partial_x(\varphi_j oH)(t,x),$$

o que prova (2.2.26) para o caso $k=1$.

Suponhamos que (2.2.26) seja válido para k e mostremos que (2.2.26) também é válido para $k+1$.

Para $l=0$ claramente (2.2.26) se verifica. Seja $l \in \{1,...,k+1\}$. Notemos que

$$(F_{j,k+1}o\tilde{H})(t,z_2) = \sum_{p=0}^{k+1} e^{ijH(t,x)}\frac{(ij)^p}{p!}[\tilde{H}(t,z_2) - H(t,x)]^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\partial_{z_2}(F_{j,k+1}o\tilde{H})(t,z_2) &= \sum_{p=1}^{k+1} e^{ijH(t,x)}\frac{(ij)^p}{(p-1)!}[\tilde{H}(t,z_2)-H(t,x)]^{p-1}\partial_{z_2}\tilde{H}(t,z_2)\\
&= ij\partial_{z_2}\tilde{H}(t,z_2)\sum_{p=0}^{k} e^{ijH(t,x)}\frac{(ij)^p}{p!}[\tilde{H}(t,z_2)-H(t,x)]^{p}\\
&= ij\partial_{z_2}\tilde{H}(t,z_2)(F_{j,k}o\tilde{H})(t,z_2). \qquad (2.2.27)
\end{aligned}$$

Logo, por (2.2.27) e pela hipótese de indução temos

$$\begin{aligned}
&\partial^l_{z_2}(F_{j,k+1}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x} = \partial^{l-1}_{z_2}\partial_{z_2}(F_{j,k+1}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x}\\
&= ij\partial^{l-1}_{z_2}[\partial_{z_2}\tilde{H}(t,z_2)(F_{j,k}o\tilde{H})(t,z_2)]_{|z_2=x}\\
&= ij\sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial^m_{z_2}(F_{j,k}o\tilde{H})(t,z_2)_{|z_2=x}\partial^{l-1-m}_{z_2}(\partial_{z_2}\tilde{H}(t,z_2))_{|z_2=x}\\
&= ij\sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial^m_{x}(\varphi_j oH)(t,x)\partial^{l-1-m}_{x}(\partial_x H(t,x))\\
&= \sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial^m_{x}(ij(\varphi_j oH))(t,x)\partial^{l-1-m}_{x}(\partial_x H(t,x))\\
&= \sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial^m_{x}\left[\left(\frac{d}{dz}\varphi_j\right)oH\right](t,x)\partial^{l-1-m}_{x}(\partial_x H(t,x))\\
&= \partial^{l-1}_x\left\{\left[\left(\frac{d}{dz}\varphi_j\right)oH\right](t,x)\partial_x H(t,x)\right\}\\
&= \partial^{l-1}_x\partial_x(\varphi_j(H(t,x))) = \partial^l_x\varphi_j(H(t,x)) = \partial^l_x(\varphi_j oH)(t,x). \qquad \square
\end{aligned}$$

Lema 2.2.2 *Sejam $F_{j,k}$, H e $\tilde{H}$ como no Lema anterior e $\tilde{U}$ a vizinhança complexa de $[0,2\pi]^2$ onde H é estendida holomorficamente. Se $\Im(H(t,x)) \geq 0$ em $[0,2\pi]^2$ então existem $\tilde{C}>0$ e $r>0$, independentes de $(t,x)\in[0,2\pi]^2$, tais que*

$$|\partial^k_{z_2}(F_{j,k}o\tilde{H})(t,x)| \leq \frac{k!}{r^k}\sum_{p=0}^{k}\frac{j^p}{p!}(\tilde{C}r)^p,\ \forall\ (t,x)\in[0,2\pi]^2\ j=1,2,...,\ k=0,1,....$$

Demonstração: Segue da definição de $F_{j,k}$ e do fato de $\tilde{H}$ ser holomorfa em $\tilde{U}$ que $F_{j,k}o\tilde{H}$ também é holomorfa em $\tilde{U}$. Assim para cada $(t,x)\in[0,2\pi]^2$ podemos aplicar fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
|\partial^k_{z_2}(F_{j,k}o\tilde{H})(t,x)| &= \left| \frac{k!}{(2\pi i)^2} \int_{|z_2-x|=r} \int_{|z_1-t|=r} \frac{(F_{j,k}o\tilde{H})(z_1,z_2)}{(z_1-t)(z_2-x)^{k+1}} dz_1 dz_2 \right| \\
&\leq \frac{k!}{(2\pi)^2} \int_{|z_2-x|=r} \int_{|z_1-t|=r} \frac{|(F_{j,k}o\tilde{H})(z_1,z_2)|}{|z_1-t||z_2-x|^{k+1}} |dz_1||dz_2| \\
&\leq \frac{k!}{(2\pi)^2} \frac{1}{r^{k+2}} \sup_{\substack{|z_1-t|=r \\ |z_2-x|=r}} \{|(F_{j,k}o\tilde{H})(z_1,z_2)|\}(2\pi r)^2 \\
&= \frac{k!}{r^k} \sup_{\substack{|z_1-t|=r \\ |z_2-x|=r}} \{|(F_{j,k}o\tilde{H})(z_1,z_2)|\}. \qquad (2.2.28)
\end{aligned}$$

Como $\Im(H(t,x)) \geq 0, \ \forall \ (t,x) \in [0,2\pi]^2$, então se $j = 1,2,...$ temos

$$|e^{ijH(t,x)}| = e^{-j\Im(H(t,x))} \leq 1, \ \forall \ (t,x) \in [0,2\pi]^2. \qquad (2.2.29)$$

Além disso, para cada $(t,x) \in [0,2\pi]^2$, existe $C > 0$ independente de (t,x), tal que

$$|\tilde{H}(z_1,z_2) - \tilde{H}(t,x)| \leq C|(z_1,z_2) - (t,x)|, \ \forall \ (t,x) \in [0,2\pi]^2, \forall \ (z_1,z_2) \in \triangle(t,x,r),$$

sendo C a constante uniforme de Lipschitz em K, onde K é um compacto satisfazendo: $[0,2\pi]^2 \subset K \subset \tilde{U}$.

Como $H(t,x) = \tilde{H}(t,x)$ temos

$$\begin{aligned}
|\tilde{H}(z_1,z_2) - H(t,x)| &= |\tilde{H}(z_1,z_2) - \tilde{H}(t,x)| \\
&\leq C|(z_1,z_2) - (t,x)| \\
&= C|(z_1 - t, z_2 - x)| \qquad (2.2.30) \\
&\leq Cr\sqrt{2} = \tilde{C}r,
\end{aligned}$$

$\forall \ (t,x) \in [0,2\pi]^2, \ \forall \ (z_1,z_2) \in \triangle(t,x,r)$. Assim, para cada $(t,x) \in [0,2\pi]^2$ e $j = 1,2,...$ temos

$$\begin{aligned}
|(F_{j,k}o\tilde{H})(z_1,z_2)| &\leq \sum_{p=0}^{k} |e^{ijH(t,x)}| \frac{|ij|^p}{p!} |\tilde{H}(z_1,z_2) - H(t,x)|^p \\
&\leq \sum_{p=0}^{k} \frac{j^p}{p!} (\tilde{C}r)^p, \ \forall \ (z_1,z_2) \in \triangle(t,x,r), \qquad (2.2.31)
\end{aligned}$$

com $\tilde{C}$ independente de (t,x).

Segue de (2.2.28) e (2.2.31) que

$$|\partial_{z_2}^k (F_{j,k} o \tilde{H})(t,x)| \leq \frac{k!}{r^k} \sum_{p=0}^{k} \frac{j^p}{p!} (\tilde{C} r)^p, \ \forall\ (t,x) \in [0, 2\pi]^2. \quad \square$$

Consequência: $e^{ijH(t,.)} \in G_{2\pi}^{1,h_j}(\mathbb{R})$, com $h_j = 2\tilde{C} j$, onde $\tilde{C}$ é a constante do Lema 2.2.2.

De fato, segue do Lema 2.2.1 e do Lema 2.2.2 que

$$\begin{aligned}
|\partial_x^k e^{ijH(t,x)}| &= |\partial_{z_2}^k (F_{j,k} o \tilde{H})(t, z_2)_{|z_2 = x}| \\
&\leq \frac{k!}{r^k} \sum_{p=0}^{k} \frac{j^p}{p!} (\tilde{C} r)^p \\
&\leq \frac{k!}{r^k} j^k (\tilde{C} r)^k 2^k = k! (2 \tilde{C} j)^k,
\end{aligned}$$

$\forall\ (t,x) \in [0,2\pi]^2, \forall\ k \in \mathbb{Z}_+$, onde na última desigualdade estamos supondo, sem perda de generalidade, que $\tilde{C} r > 1$. $\square$

Lema 2.2.3 *Sejam φ_j e H como no Lema 2.2.1. Então dado $\epsilon' > 0$ existe uma constante $C = C(\epsilon') > 0$ tal que*

$$(\varphi_j o H)(t,.) e^{-\frac{\epsilon'}{2} j^{1/s}} \in G_{2\pi}^{s,C}(\mathbb{R}), \ \textit{isto é},$$

$$|\partial_x^k (\varphi_j o H)(t,x)| e^{-\frac{\epsilon'}{2} j^{1/s}} \leq C^{k+1} (k!)^s, \ \forall\ (t,x) \in [0, 2\pi]^2,$$

$\forall\ j = 1, 2, ..., \ \forall\ k = 0, 1, 2, ...$

Demonstração: Pelo Lema 2.2.1 temos que

$$\partial_x^k (\varphi_j o H)(t,x) = \partial_{z_2}^k (F_{j,k} o \tilde{H})(t,x).$$

Seja $\epsilon' > 0$ dado. Logo, pelo Lema 2.2.2 temos:

$$\begin{aligned}
|\partial_x^k (\varphi_j o H)(t,x)| e^{-\frac{\epsilon'}{2} j^{1/s}} &\leq \frac{k!}{r^k} \sum_{p=0}^{k} \frac{j^p}{p!} (\tilde{C} r)^p e^{-\frac{\epsilon'}{2} j^{1/s}} \\
&\leq \frac{k!}{r^k} (\tilde{C} r)^k \sum_{p=0}^{k} \frac{j^p}{p!} e^{-\frac{\epsilon'}{2} j^{1/s}}.
\end{aligned}$$

Isso é verdadeiro pois, podemos tomar $\tilde{C} > 1$ de forma que $\tilde{C} r > 1$. Para o ϵ' dado acima existe $C_{\epsilon'} > 0$ tal que $j^p e^{-\frac{\epsilon'}{2} j^{1/s}} \leq {C_{\epsilon'}}^p (p!)^s$ para todo $j = 1, 2, ...,$

(ver Lema 3.0.12). Sem perda de generalidade podemos supor $C_{\epsilon'} > 1$. Assim

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^k(\varphi_j o H)(t,x)|e^{-\frac{\epsilon'}{2}j^{1/s}} &\leq k!\tilde{C}^k \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} C_{\epsilon'}^p (p!)^s = k!\tilde{C}^k \sum_{p=0}^{k} C_{\epsilon'}^p (p!)^{s-1} \\
&\leq k!\tilde{C}^k \sum_{p=0}^{k} C_{\epsilon'}^p (k!)^{s-1} = (k!)^s \tilde{C}^k \sum_{p=0}^{k} C_{\epsilon'}^p \\
&\leq (k!)^s \tilde{C}^k C_{\epsilon'}^k \sum_{p=0}^{k} 1 \\
&\leq (k!)^s \tilde{C}^k C_{\epsilon'}^k 2^k = C^k (k!)^s \leq C^{k+1}(k!)^s,
\end{aligned}
$$

onde $C = 2\tilde{C}C_{\epsilon'}$ □

Um outro resultado que precisaremos é dado por:

Existe $C_1 > 0$ tal que

$$
|1 - e^{ijc_0 2\pi}|^{-1} \leq C_1 < +\infty, \; j = 1, 2, ..., \tag{2.2.32}
$$

(ver Lema 3.0.11).

Estamos, agora, prontos para provar a estimativa (2.2.23).

Para $0 \leq t, x \leq 2\pi$ e $j \in \mathbb{Z}_+^*$, utilizando (2.2.18), (2.2.24), (2.2.32) e o Lema 2.2.3 temos para $H(t,x) = c_0 t - \tilde{c}(x-t) + \tilde{c}(x)$, que existem $\varepsilon > 0$ e $C_3 > 0$ tais que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{u}_j(x)\right| &= \left|(1 - e^{ijc_0 2\pi})^{-1} \int_0^{2\pi} \partial_x^k [e^{ijH(t,x)} \hat{f}_j(x-t)] dt\right| \\
&\leq C_1 \int_0^{2\pi} |\partial_x^k (e^{ijH(t,x)} \hat{f}_j(x-t))| dt \\
&= C_1 \int_0^{2\pi} \left|\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (\partial_x^m e^{ijH(t,x)})(\partial_x^{k-m} \hat{f}_j(x-t))\right| dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} |\partial_x^m e^{ijH(t,x)}| C_f^{k-m+1} [(k-m)!]^s e^{-\varepsilon |j|^{\frac{1}{s}}} dt \\
&= C_1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} |\partial_x^m e^{ijH(t,x)}| e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} C_f^{k-m+1} [(k-m)!]^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} dt \\
&\leq 2\pi C_1 \sum_{m=0}^{k} \frac{(k!)^s}{(m!)^s [(k-m)!]^s} C^{m+1} (m!)^s C_f^{k-m+1} [(k-m)!]^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}}
\end{aligned}
$$

Seja $C_2 = \max\{C, C_f\}$ assim

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{u}_j(x)\right| &\leq 2\pi C_1 (k!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} \sum_{m=0}^{k} C_2^{m+1} C_2^{k-m+1} \leq 2\pi C_1 (k!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} C_2^{k+2} 2^k \\ &= 2\pi C_1 (k!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} (2C_2)^k C_2^2 \\ &\leq C_3^{k+1} (k!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}},\end{aligned}$$

sendo $C_3 = \max\{2\pi C_1 C_2^2, 2C_2\}$. Note que C_3 depende de ε.

Para $j \in \mathbb{Z}_-^*$ de modo análogo ao feito acima, (2.2.19) permite-nos provar que existem constantes $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{u}_j(x)\right| \leq C^{k+1}(k!)^s e^{-\varepsilon|j|^{1/s}}, \forall\ k \in \mathbb{Z}_+, \forall\ j \in \mathbb{Z}_-^*, \forall x \in [0, 2\pi]. \tag{2.2.33}$$

Concluímos assim que

$$v(x,y) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq 0}} \hat{u}_j(x) e^{ijy} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Como $\hat{u}_0(x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ podemos concluir que $u(x,y) = \hat{u}_0(x) + v(x,y) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.■

2.3 Condições Necessárias e Suficientes para que $P = \partial_x - c(x)\partial_y$ seja Globalmente G^s Hipoelítico em $\mathbb{R}^2$

Nesta seção provaremos o resultado principal desta capítulo, o qual apresenta uma condição necessária e suficiente para que o operador $P = \partial_x - c(x)\partial_y$, com $c \in \mathsf{C}^\omega_{2\pi}(\mathbb{R})$, seja globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.3.1 *Sejam $c \in \mathsf{C}^\omega_{2\pi}(\mathbb{R})$ com $c(x) = a(x) + ib(x)$ e $P = \partial_x - c(x)\partial_y$.*

(i) Seja $s \geq 1$. Se b é identicamente nula o operador P é (GG^sH) em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, o número

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s)ds$$

não é Liouville exponencial com expoente $s \geq 1$.

(ii) Seja $s > 1$. Se b não é identicamente nula o operador P é (GG^sH) em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, b não muda de sinal.

Demonstração:

Prova de (i):

Como $b \equiv 0$, temos $P = \partial_x - a(x)\partial_y$.

O objetivo agora é utilizarmos o automorfismo S definido no Lema abaixo no estudo da G^s hipoeliticidade global de P, ou seja, através de uma conjugação reduziremos tal estudo para o da G^s hipoeliticidade global de um operador com coeficientes constantes.

Lema 2.3.1 *Seja*

$$\begin{aligned} S: \ D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \\ u \quad &\longmapsto Su = v \end{aligned}$$

sendo

$$v(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{v}_j(x)e^{ijy} \quad com \quad \hat{v}_j(x) = \hat{u}_j(x)e^{-ij\tilde{A}(x)}$$

$$e \quad \tilde{A}(x) = \int_0^x a(s)ds - a_0x, \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s)ds$$

e $\hat{u}_j$ é o j-ésimo coeficiente parcial de Fourier de u. Então S é um automorfismo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Segue do Lema 2.2.3, com $H(t,x) = -\tilde{A}(x)$, que dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}e^{-ij\tilde{A}(x)}\right| e^{-\frac{\varepsilon}{4}|j|^{1/s}} \leq C_\varepsilon^k(k!)^s, \tag{2.3.34}$$

$\forall\ x \in [0, 2\pi]$, $j \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, 2....$

Notemos que dados $h_l > 0, \varepsilon > 0$ e $\varphi \in G^{s,h_l}_{2\pi}(\mathbb{R})$, temos para $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-ij\tilde{A}(x)}e^{-\frac{\varepsilon}{4}|j|^{\frac{1}{s}}}\varphi(x)\right)\right| \leq \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\left|\frac{d^m}{dx^m}e^{-ij\tilde{A}(x)}e^{-\frac{\varepsilon}{4}|j|^{\frac{1}{s}}}\right|\left|\frac{d^{k-m}}{dx^{k-m}}\varphi(x)\right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}^s C_\varepsilon{}^m(m!)^s||\varphi||_{s,h_l}(h_l)^{k-m}[(k-m)!]^s \qquad (2.3.35) \\ &\leq (k!)^s||\varphi||_{s,h_l}\tilde{C}^k_{\varepsilon,h_l}, \end{aligned}$$

onde $C_{\varepsilon,h_l} = \max\{C_\varepsilon, h_l, 1\}$ e $\tilde{C}_{\varepsilon,h_l} = 2C_{\varepsilon,h_l}$. Na penúltima desigualdade usamos (2.3.34) e o fato de $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Lembremos também que existe $\bar{C}_\varepsilon > 0$ tal que

$$|j|^p e^{-\frac{\varepsilon}{4}|j|^{\frac{1}{s}}} \leq (\bar{C}_\varepsilon)^p (p!)^s, \ \forall\, j \in \mathbb{Z}, \ \forall\, p \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.3.36}$$

Definimos $\delta = \left(\max\{\tilde{C}_{\varepsilon,h_l}, \bar{C}_\varepsilon\}\right)^{-1} > 0$.

Mostremos agora que a aplicação S do Lema 2.3.1 está bem definida, ou seja,

$$v(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{v}_j(x) e^{ijy} \quad \text{com} \quad \hat{v}_j(x) = e^{-ij\tilde{A}(x)} \hat{u}_j(x)$$

pertence a $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Pelo Teorema 1.12.2 basta mostrarmos que: dados $\varepsilon > 0$ e $h_l > 0$ existe $C_{\varepsilon,h_l} > 0$ tal que

$$| < \hat{v}_j(x), \varphi(x) > | \leq C_{\varepsilon,h_l} ||\varphi||_{s,h_l} e^{\varepsilon|j|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall\, j \in \mathbb{Z}, \ \forall\, \varphi \in G^{s,h_l}_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

Para isto sejam $\varepsilon > 0$ e $h_l > 0$ dados e seja $\varphi \in G^{s,h_l}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Como $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ para o δ dado acima, existe $C_\delta > 0$ tal que (ver Teo 1.8.1)

$$\begin{aligned}
& | < \hat{v}_j(x), \varphi(x) > | = | < e^{-ij\tilde{A}(x)} \hat{u}_j(x), \varphi(x) > | \\
= \ & | < \hat{u}_j(x), e^{-ij\tilde{A}(x)} \varphi(x) > | \\
= \ & \frac{1}{2\pi} | < u(x,y), \varphi(x) e^{-ij\tilde{A}(x)} e^{-ijy} > | \\
\leq \ & \frac{1}{2\pi} C_\delta \sup_{(x,y)\in[0,2\pi]^2} \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^2_+} \left| \partial^\alpha \left(\varphi(x) e^{-ij\tilde{A}(x)} e^{-ijy} \right) \right| \delta^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s} \\
= \ & \frac{1}{2\pi} C_\delta \sup_{(x,y)\in[0,2\pi]^2} \sup_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+ \\ m\in\mathbb{Z}_+}} \left| \partial^k_x \left(\varphi(x) e^{-ij\tilde{A}(x)} \right) \partial^m_y e^{-ijy} \right| \delta^{k+m} (k!)^{-s} (m!)^{-s}.
\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

Para $(x,y) \in [0,2\pi]^2$ e $(k,m) \in \mathbb{Z}^2_+$ arbitrários, temos por (2.3.35) e (2.3.36)

$$\begin{aligned}
& \left| \partial^k_x \left(\varphi(x) e^{-ij\tilde{A}(x)} \right) \right| \left| \partial^m_y e^{-ijy} \right| \delta^{k+m} (k!)^{-s} (m!)^{-s} \\
\leq \ & |j|^m \left| \partial^k_x \left(\varphi(x) e^{-ij\tilde{A}(x)} \right) \right| \delta^{k+m} (k!)^{-s} (m!)^{-s} \\
= \ & |j|^m e^{-\frac{\varepsilon}{4}|j|^{\frac{1}{s}}} \left| \partial^k_x \left(\varphi(x) e^{-ij\tilde{A}(x)} e^{-\frac{\varepsilon}{4}|j|^{\frac{1}{s}}} \right) \right| \delta^{k+m} (k!)^{-s} (m!)^{-s} e^{\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} \\
\leq \ & \bar{C}^m_\varepsilon (m!)^s (k!)^s ||\varphi||_{s,h_l} \tilde{C}^k_{\varepsilon,h_l} \delta^{k+m} (k!)^{-s} (m!)^{-s} e^{\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} \\
\leq \ & \left(\max\{\bar{C}_\varepsilon, \tilde{C}_{\varepsilon,h_l}\} \right)^{k+m} \delta^{k+m} ||\varphi||_{s,h_l} e^{\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}} \\
= \ & ||\varphi||_{s,h_l} e^{\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}}.
\end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Logo,

$$\sup_{(x,y)\in[0,2\pi]^2} \sup_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+\\ m\in\mathbb{Z}_+}} \left\{ \left| \partial_x^k \left(\varphi(x) e^{-ij\tilde{A}(x)} \right) \partial_y^m e^{-ijy} \right| \delta^{k+m} (k!)^{-s} (m!)^{-s} \right\}$$
$$\leq \quad ||\varphi||_{s,h_l} e^{\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.3.39}$$

Assim, segue de (2.3.37) e (2.3.39) que

$$| < \hat{v}_j(x), \varphi(x) > | \leq \frac{1}{2\pi} C_\delta ||\varphi||_{s,h_l} e^{\frac{\varepsilon}{2}|j|^{\frac{1}{s}}},$$

com $C_\delta = C_\delta(\varepsilon, h_l) > 0$. Isto completa a prova que $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Mostremos que S é bijeção. Para isto definimos

$$\begin{aligned} H: \quad D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \\ v \qquad &\longmapsto Hv = u \end{aligned}$$

onde

$$u(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{u}_j(x) e^{ijy}$$

com

$$\hat{u}_j(x) = \hat{v}_j(x) e^{ij\tilde{A}(x)}.$$

De modo análogo ao feito para S temos que H está bem definido.

Facilmente verifica-se que: $HoS = I$ e $SoH = I$. Portanto S é automorfismo. $\square$

Lema 2.3.2 *Seja S como no Lema anterior. Então S restrito a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é automorfismo.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} S: \quad G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \\ u \qquad &\longmapsto Su = v \end{aligned}$$

sendo

$$v(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{v}_j(x) e^{ijy} \quad \text{com} \quad \hat{v}_j(x) = \hat{u}_j(x) e^{-ij\tilde{A}(x)},$$

e $\hat{u}_j(x)$ é o j-ésimo coeficiente parcial de Fourier de u. Para mostrar que S está bem definido precisamos mostrar, (ver Teorema 1.11.2), que existem $C > 0$ e $\varepsilon' > 0$ tais que

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{v}_j(x)\right| \leq C^{k+1}(k!)^s e^{-\varepsilon'|j|^{1/s}},\ \forall\ k = 0, 1, 2, ...,\ \forall\ x \in [0, 2\pi], \forall\ j \in \mathbb{Z}.$$

Usando Leibniz obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{v}_j(x)\right| &= \left|\frac{d^k}{dx^k}\left(\hat{u}_j(x)e^{-ij\tilde{A}(x)}\right)\right| = \left|\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\frac{d^m}{dx^m}\hat{u}_j(x)\frac{d^{k-m}}{dx^{k-m}}e^{-ij\tilde{A}(x)}\right| \\
&\leq \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\left|\frac{d^m}{dx^m}\hat{u}_j(x)\right|\left|\frac{d^{k-m}}{dx^{k-m}}e^{-ij\tilde{A}(x)}\right|. \qquad (2.3.40)
\end{aligned}$$

Como $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ segue do Teorema 1.11.1 que existem $\varepsilon > 0$ e uma constante $C_u = C(u) > 0$ tais que

$$\left|\frac{d^m}{dx^m}\hat{u}_j(x)\right| \leq {C_u}^{m+1}(m!)^s e^{-\varepsilon|j|^{\frac{1}{s}}}, \forall\ m \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\ j \in \mathbb{Z}, \forall\ x \in [0, 2\pi].$$

Segue disto, de (2.3.40) e de (2.3.34) que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^k}{dx^k}\hat{v}_j(x)\right| &\leq \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}C_u^{m+1}(m!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}}\left|\frac{d^{k-m}}{dx^{k-m}}e^{-ij\tilde{A}(x)}\right| e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}} \\
&\leq \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}C_u^{m+1}(m!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}}C_\varepsilon^{k-m}[(k-m)!]^s \\
&\leq \sum_{m=0}^{k}\frac{(k!)^s}{(m!)^s[(k-m)!]^s}C_u{C_u}^m{C_\varepsilon}^{k-m}(m!)^s[(k-m)!]^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}} \\
&\leq (k!)^s C_u C^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}}\sum_{m=0}^{k}1 \\
&\leq (k!)^s C_u C^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}}2^k \\
&= (k!)^s C_u (2C)^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}} \\
&\leq \tilde{C}^{k+1}(k!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|j|^{1/s}},
\end{aligned}$$

onde $C = \max\{C_u, C_\varepsilon, 1\}$ e $\tilde{C} = \max\{C_u, 2C\}$.

Logo $S_{|_{G^s_{2\pi(\mathbb{R}^2)}}}$ está bem definida. E, obviamente, continua sendo bijetora. Portanto $S_{|_{G^s_{2\pi(\mathbb{R}^2)}}}$ é automorfismo. □

Lema 2.3.3 *Vale a seguinte conjugação*

$$SPS^{-1} = \tilde{P}$$

onde

$$\tilde{P} = \partial_x - a_0 \partial_y.$$

Demonstração: Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, com $S^{-1}u = v$, então

$$\begin{aligned} PS^{-1}u &= \partial_x v - a(x)\partial_y v \\ &= \partial_x \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{v}_j(x) e^{ijy} \right) - a(x)\partial_y \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{v}_j(x) e^{ijy} \right). \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.0.5 do Apêndice, temos então que

$$\begin{aligned} PS^{-1}u &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\partial_x \hat{v}_j(x) - ija(x)\hat{v}_j(x)) e^{ijy} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[\partial_x (\hat{u}_j(x) e^{ij\tilde{A}(x)}) - ija(x)\hat{u}_j(x) e^{ij\tilde{A}(x)} \right] e^{ijy} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[\partial_x \hat{u}_j(x) - ija_0 \hat{u}_j(x) \right] e^{ij\tilde{A}(x)} e^{ijy} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{(\tilde{P}u)}_j(x) e^{ij\tilde{A}(x)} e^{ijy} \\ &= S^{-1}(\tilde{P}u), \end{aligned}$$

ou seja, $SPS^{-1} = \tilde{P}$. □

Lema 2.3.4 *Se $P = \partial_x - a(x)\partial_y$, com a real, então P é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $\tilde{P}$ o é.*

Demonstração: Suponhamos que P é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$.

Seja $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\tilde{P}v = f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Pelo Lema 2.3.3, temos

$$f = \tilde{P}v = (SPS^{-1})v = SPu, \quad \text{com} \quad u = S^{-1}v.$$

Assim,

$$Pu = S^{-1}f = g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2),$$

pois S é um automorfismo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Como P é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$, temos que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Como $v = Su$, então $v \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, ou seja, $\tilde{P}$ é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$.

De modo análogo mostra-se a outra implicação. □

Para finalizar a demonstração da parte (i) do Teorema 2.3.1 basta observarmos que o Lema 2.3.4 e o Teorema 2.1.2 implicam o desejado. □

Prova de (ii):

Necessidade: A prova será feita pela contrapositiva.

Suponhamos que $b(x)$ muda de sinal.

Vamos mostrar que P não é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$ exibindo $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Como $c \in \mathsf{C}^\omega_{2\pi}(\mathbb{R})$, fazendo a mudança de variáveis $x' = x$ e $y' = -y$, se necessária, podemos supor que existe $p \in (0, 2\pi)$ e $\delta > 0$ tal que $b(p) = 0$, $b(x) < 0$, para $x \in (p-\delta, p)$, $b(x) > 0$ para $x \in (p, p+\delta)$ e além disso $(p-\delta, p+\delta) \subset (0, 2\pi)$.

Assim, se

$$C(x) = \int_p^x c(s)ds,$$

temos

$$\Im(C(x)) = \int_p^x b(s)ds > 0 \quad \text{em} \quad 0 < |x - p| < \delta.$$

Seja $v(x, y) = e^{i(C(x)+y)}$ definida em $W = (p - \delta, p + \delta) \times \mathbb{R}$. Observemos que $v \in \mathsf{C}^\omega(W)$ e é 2π-periódica na variável y; além disso temos:

$$Pv = 0 \ \text{ em } \ W \ \text{ e } \ |v(x, y)| = e^{-\Im(C(x))} \leq 1, \forall \ (x, y) \in W.$$

Então definimos $v^\sharp(x, y) = \sqrt{1 - v(x, y)}$, onde o ramo da função $\xi \longmapsto \sqrt{1 - \xi}$ está definido no plano complexo após a remoção do raio $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$. Como $v(x, y) = 1$ para $x = p$ e $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a função $v^\sharp$ é apenas contínua em W.

Seja $\theta \in G^s_c((0, 2\pi))$, onde $\theta \equiv 1$ em $\left[p - \frac{\delta}{3}, p + \frac{\delta}{3}\right]$ e $\theta \equiv 0$ em $(0, p - \frac{2\delta}{3}) \cup (p + \frac{2\delta}{3}, 2\pi)$. Notemos que o $supp(\theta) \subset \left[p - \frac{2\delta}{3}, p + \frac{2\delta}{3}\right]$. Como exemplo considere a seguinte função:

$$g_s(t) = \begin{cases} e^{-1/t^{\frac{1}{s-1}}} & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

para $s > 1$.

Temos que existe $C > 0$ tal que $|g_s^{(k)}(t)| \leq C^k(k!)^s$, $\forall \ t \in \mathbb{R}$, $\forall \ k \in \mathbb{Z}_+$, ou seja, $g_s \in G^s(\mathbb{R})$. $(\star)$

Seja

$$h_s(t) = g_s\left(p - \frac{\delta}{3} - t\right) \cdot g_s\left(t - \left(p - \frac{2}{3}\delta\right)\right)$$

Segue de $(\star)$ que $h_s \in G^s(\mathbb{R})$. Seja $A = \displaystyle\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\frac{\delta}{3}} h_s(t)dt$, observemos que $A < +\infty$.

Sejam

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{x} h_s(t)dt \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = \varphi_1(2p - x).$$

Temos que $\varphi_i \in G^s(\mathbb{R}), i = 1, 2$.

Seja

$$\theta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x).$$

Afirmamos que $supp(\theta) \subset [p - \frac{2}{3}\delta, p + \frac{2}{3}\delta]$ e $\theta \equiv 1$ em $[p - \frac{\delta}{3}, p + \frac{\delta}{3}]$, além disso, $\theta \in G^s(\mathbb{R})$.

Assim, definindo

$$\begin{cases} \chi(x) = \theta(x), & \text{para} \quad 0 \leq x < 2\pi \\ \chi(x + 2\pi) = \chi(x), & \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

temos $\chi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Seja $u^\sharp(x, y) = \chi(x)v^\sharp(x, y)$ para $(x, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

Como $v^\sharp$ é 2π-periódica na variável y temos que $u^\sharp$ também o é.

Definindo

$$\begin{cases} u(x, y) = u^\sharp(x, y), & \text{se } (x, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}; \\ u(x + 2\pi, y) = u(x, y), & \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

temos u 2π-periódica em $\mathbb{R}^2$.

Como numa vizinhança dos pontos da forma $(p, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, $u^\sharp$ é igual a $v^\sharp$ temos que $u \in \mathsf{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus \mathsf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, logo $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Assim, $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. (Aqui estamos identificando u com a distribuição T_u associada a função u, ver Exemplo 1.8.1).

Mostremos agora que $Pu \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Para $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\begin{aligned}
&\langle Pu(x,y), \varphi(x,y)\rangle =< u, -P\varphi > \\
= \; & -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)P\varphi(x,y)dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u^\sharp(x,y)P\varphi(x,y)dxdy \\
= \; & -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(x)v^\sharp(x,y)P\varphi(x,y)dxdy \\
= \; & -\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p+\frac{2}{3}\delta}\int_0^{2\pi} v^\sharp(x,y)\left(P(\chi(x)\varphi(x,y)) - \chi'(x)\varphi(x,y)\right)dydx \\
= \; & -\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p+\frac{2}{3}\delta}\int_0^{2\pi} v^\sharp(x,y)P(\chi(x)\varphi(x,y))dydx \\
& +\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p+\frac{2}{3}\delta}\int_0^{2\pi} v^\sharp(x,y)\chi'(x)\varphi(x,y)dydx \\
= \; & -\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p+\frac{2}{3}\delta}\int_0^{2\pi} v^\sharp(x,y)P(\chi(x)\varphi(x,y))dydx \\
& +\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v^\sharp(x,y)\chi'(x)\varphi(x,y)dydx \\
= \; & -I + \left\langle \chi'(x)v^\sharp(x,y), \varphi(x,y)\right\rangle, \qquad (2.3.41)
\end{aligned}$$

onde

$$I = \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p+\frac{2}{3}\delta}\int_0^{2\pi} v^\sharp(x,y)P(\chi(x)\varphi(x,y))dydx$$

Vamos agora analisar I.

Para $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta}{3}$, temos

$$\begin{aligned}
I &= \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx + \int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx \\
&+ \int_{p+\varepsilon}^{p+\frac{2}{3}\delta}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx, \\
I_2 &= \int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx, \\
I_3 &= \int_{p+\varepsilon}^{p+\frac{2}{3}\delta}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini e integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx \\
&= \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp \partial_x(\chi\varphi)dydx - \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp c(x)\partial_y(\chi\varphi)dydx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\left(\left[v^\sharp\chi\varphi\right]\Big|_{x=p-\frac{2}{3}\delta}^{x=p-\varepsilon} - \chi\varphi\partial_x v^\sharp dx\right)dy \\
&\quad - \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\left(\left[v^\sharp c(x)\chi\varphi\right]\Big|_{y=0}^{y=2\pi} - \int_0^{2\pi}\chi\varphi c(x)\partial_y v^\sharp dy\right)dx \\
&= \int_0^{2\pi} v^\sharp(p-\varepsilon,y)\varphi(p-\varepsilon,y)dy - \int_0^{2\pi}\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\chi\varphi\partial_x v^\sharp dxdy \\
&\quad + \int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi}\chi\varphi c(x)\partial_y v^\sharp dydx \\
&= \int_0^{2\pi} v^\sharp(p-\varepsilon,y)\varphi(p-\varepsilon,y)dy - \int_0^{2\pi}\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\chi\varphi\left(\partial_x - c(x)\partial_y\right)v^\sharp dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} v^\sharp(p-\varepsilon,y)\varphi(p-\varepsilon,y)dy - \int_0^{2\pi}\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\chi\varphi\left(Pv^\sharp\right)dxdy.
\end{aligned}$$

De modo análogo temos

$$I_3 = -\int_0^{2\pi} v^\sharp(p+\varepsilon,y)\varphi(p+\varepsilon,y)dy - \int_0^{2\pi}\int_{p+\varepsilon}^{p+\frac{2}{3}\delta}\chi\varphi\left(Pv^\sharp\right)dxdy.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_1 + I_3 &= \int_0^{2\pi} v^\sharp(p-\varepsilon,y)\varphi(p-\varepsilon,y)dy - \int_0^{2\pi}\int_{p-\frac{2}{3}\delta}^{p-\varepsilon}\chi\varphi\left(Pv^\sharp\right)dxdy \\
&\quad - \int_0^{2\pi} v^\sharp(p+\varepsilon,y)\varphi(p+\varepsilon,y)dy - \int_0^{2\pi}\int_{p+\varepsilon}^{p+\frac{2}{3}\delta}\chi\varphi\left(Pv^\sharp\right)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\left(v^\sharp(p-\varepsilon,y)\varphi(p-\varepsilon,y) - v^\sharp(p+\varepsilon,y)\varphi(p+\varepsilon,y)\right)dy \doteq g(\varepsilon),
\end{aligned}$$

pois em $[p-\frac{2}{3}\delta, p-\varepsilon]\times[0,2\pi]\cup[p+\varepsilon,p+\frac{2}{3}\delta]\times[0,2\pi]$ $v^\sharp$ é C^∞ e $Pv^\sharp = 0$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} v^\sharp(p-\varepsilon,y)\varphi(p-\varepsilon,y) - v^\sharp(p+\varepsilon,y)\varphi(p+\varepsilon,y)dy \\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0} v^\sharp(p-\varepsilon,y)\varphi(p-\varepsilon,y) - \lim_{\varepsilon\to 0} v^\sharp(p+\varepsilon,y)\varphi(p+\varepsilon,y)dy \\
&= \int_0^{2\pi} v^\sharp(p,y)\varphi(p,y) - v^\sharp(p,y)\varphi(p,y)dy = 0.
\end{aligned}$$

Analisemos agora I_2.

Como $v^\sharp P(\chi\varphi)$ é limitada em $[p-\varepsilon,p+\varepsilon]\times[0,2\pi]$, temos

$$|I_2| = \left|\int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon}\int_0^{2\pi} v^\sharp P(\chi\varphi)dydx\right| \le \int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon}\int_0^{2\pi}\left|v^\sharp P(\chi\varphi)\right|dydx \le \varepsilon C.$$

Como

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = g(\varepsilon) + I_2,$$

temos

$$|I| = |g(\varepsilon) + I_2| \leq |g(\varepsilon)| + |I_2| \leq |g(\varepsilon)| + \varepsilon C, \ \forall \ \varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{3}\right).$$

Logo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |I| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} |g(\varepsilon)| + \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon C = 0.$$

Então,

$$|I| \leq 0 \ \text{ e portanto } \ I = 0. \tag{2.3.42}$$

Segue de (2.3.41) e (2.3.42) que

$$< Pu, \varphi > = < \chi' v^\sharp, \varphi >, \ \forall \ \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Para finalizarmos a demonstração resta mostrar que $\chi' v^\sharp \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Observemos que $\chi'(x) v^\sharp(x, y) \equiv 0$ em $\left[0, p - \frac{2\delta}{3}\right) \times [0, 2\pi] \cup (p - \frac{\delta}{3}, p + \frac{\delta}{3}) \times [0, 2\pi] \cup \left(p + \frac{2\delta}{3}, 2\pi\right] \times [0, 2\pi]$.

Seja K o seguinte compacto contido em $[0, 2\pi]^2$:

$$K = \left[p - \frac{5\delta}{6}, p - \frac{\delta}{6}\right] \times [0, 2\pi] \cup \left[p + \frac{\delta}{6}, p + \frac{5\delta}{6}\right] \times [0, 2\pi].$$

Assim, para obtermos as estimativas para provar que $\chi'(x) v^\sharp(x, y) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ basta obter estas estimativas para $(x, y) \in K$.

Notando que $v^\sharp$ é analítica num aberto que contém K e que χ pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ podemos concluir o desejado.

Em resumo construímos $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Pu \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, ou seja, mostramos que P não é globalmente G^s hipoelítico no $\mathbb{R}^2$. $\square$

Suficiência: Suponhamos agora que $b(x)$ não muda de sinal e não é identicamente nula. Precisamos mostrar que P é globalmente G^s hipoelítico em $\mathbb{R}^2$. Porém isso é o Teorema 2.2.1 que já foi demonstrado. $\blacksquare$

Capítulo 3

Apêndice

Lema 3.0.5 *Seja* $Q = \partial_x - c(x)\partial_y$, $c \in \mathsf{C}^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$. *Então* $Q : D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ *é contínuo.*

Demonstração: Seja $T_n \longrightarrow 0$ em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, $T_n \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2), n = 1, 2, ...,$ ou seja, $< T_n, \psi > \longrightarrow 0, \forall\ \psi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Então para $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ arbitrária, temos:

$$< Q(T_n), \varphi > = < T_n, {}^tQ\varphi > = < T_n, -Q\varphi >$$

Como $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é um anel em relação ao produto e fechado para diferenciação concluímos que $-Q\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Assim $< T_n, -Q\varphi > \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$. $\therefore Q$ é contínuo. $\square$

Lema 3.0.6 *A regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções se mantém quando um dos fatores é uma ultradistribuição Gevrey.*

Demonstração: Sejam $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ arbitrárias.

$$< \frac{\partial}{\partial x_j}(fu), \phi > = - < fu, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} > = - < u, f\frac{\partial \phi}{\partial x_j} > .$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_j}(f\phi) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\phi + f\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$, então $f\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(f\phi) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\phi$. Assim

$$\begin{aligned}
- < u, f\frac{\partial \phi}{\partial x_j} > &= - < u, \frac{\partial}{\partial x_j}(f\phi) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\phi > \\
&= - < u, \frac{\partial}{\partial x_j}(f\phi) > + < u, \frac{\partial f}{\partial x_j}\phi > \\
&= < \frac{\partial u}{\partial x_j}, f\phi > + < \frac{\partial f}{\partial x_j}u, \phi > \\
&= < f\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}u, \phi > .
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{\partial}{\partial x_j}(fu) = f\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}u$ $\square$

Lema 3.0.7 *Consideremos as equações*

$$\frac{d}{dx}u(x) - b(x)u(x) = g(x) \tag{3.0.1}$$

$$\left(\frac{d}{dx} - b_0\right)(e^{-B(x)}u(x)) = e^{-B(x)}g(x) \tag{3.0.2}$$

sendo $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$, $b \in \mathsf{C}^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ *e*

$$B(x) = \int_0^x b(t)dt - b_0 x, \qquad b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(t)dt$$

Então (3.0.1) e (3.0.2) são equivalentes.

Demonstração: Temos que $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence $\mathsf{C}^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R})$, e $e^z, z \in \mathbb{C}$ é analítica para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Logo $e^{B(x)} \in \mathsf{C}^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Assim $e^{-B(x)}u(x)$ está bem definido.

Mostremos, agora, que (3.0.1) é equivalente a (3.0.2).

Para $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ arbitrária, temos

$$< \left(\frac{d}{dx} - b_0\right)(e^{-B(x)}u(x)), \varphi > = < \frac{d}{dx}(e^{-B(x)}u(x)) - b_0 e^{-B(x)}u(x), \varphi > =$$

$$< (-b(x) + b_0)e^{-B(x)}u(x) + e^{-B(x)}\frac{d}{dx}u(x), \varphi > - < b_0 e^{-B(x)}u(x), \varphi > =$$

$$< -b(x)e^{-B(x)}u(x) + e^{-B(x)}\frac{d}{dx}u(x), \varphi > = < e^{-B(x)}\left(\frac{d}{dx}u(x) - b(x)u(x)\right), \varphi > =$$

$$< e^{-B(x)}\left(\frac{d}{dx} - b(x)\right)u(x), \varphi > \tag{3.0.3}$$

Suponhamos que u seja solução de (3.0.1). Então por (3.0.3) temos;

$$< \left(\frac{d}{dx} - b_0\right)(e^{-B(x)}u(x)), \varphi > = < e^{-B(x)}g(x), \varphi >,$$

ou seja, $e^{-B(x)}u(x)$ é solução de (3.0.2).

Agora suponhamos que $w \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$ seja solução de (3.0.2), utilizando (3.0.3) obtemos:

$$\begin{aligned} < e^{-B(x)}g(x), \varphi > &= < \left(\frac{d}{dx} - b_0\right)w(x), \varphi > \\ &= < \left(\frac{d}{dx} - b_0\right)\left(e^{-B(x)}\left(e^{B(x)}w(x)\right)\right), \varphi > . \end{aligned}$$

Seja $v(x) = e^{B(x)}w(x) \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$. Assim por (3.0.3)

$$\begin{aligned} < \left(\frac{d}{dx} - b_0\right)(e^{-B(x)}v(x)), \varphi > &= < e^{-B(x)}\left(\frac{d}{dx} - b(x)\right)v(x), \varphi > \\ &= < e^{-B(x)}\left(\frac{d}{dx} - b(x)\right)e^{B(x)}w(x), \varphi > . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{d}{dx} - b(x)\right)e^{B(x)}w(x) = g(x),$$

ou seja, $e^{B(x)}w(x)$ é solução de (3.0.1). $\square$

A partir de agora faremos estudos de equações do tipo $\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)u(x) = g(x)$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$ e $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. No entanto, pelo Exemplo 2.1.1 temos que $L = \frac{d}{dx} + \lambda$ é globalmente G^s hipoelítico na reta. E assim, temos que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Logo, consideraremos $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Lema 3.0.8

(i) Se $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $u' = 0$. Então $u = cte$.

(ii) Sejam u e $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ com $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$ tal que

$$u' = g \tag{3.0.4}$$

então

$$u = c + \int_0^x g(t)dt, \tag{3.0.5}$$

sendo c uma constante.

Demonstração (i): De fato, como $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ podemos expressar u através de sua série de Fourier:

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}. \tag{3.0.6}$$

Assim

$$\frac{d}{dx}u(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}\right) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)i\xi e^{ix\xi} = 0$$

Pela unicidade dos coeficientes de Fourier de u temos $\hat{u}(\xi)i\xi = 0, \forall\ \xi \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\hat{u}(\xi) = 0, \forall\ \xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Desta forma

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi} = \hat{u}(0)e^{ix0} = \hat{u}(0) = cte.$$

Demonstração (ii): Sejam u_1 e u_2 pertencentes a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ soluções de (3.0.4) e seja $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ arbitrária. Então

$$(u_1 - u_2)' \;=\; u_1' - u_2' = g - g = 0.$$

Assim concluímos que

$$u_1 = c + u_2, \tag{3.0.7}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Seja $u_0(x) = \int_0^x g(t)dt$. Afirmamos que $u_0 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Clamente notamos que $u_0 \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R})$. Mostremos, agora, que u_0 é 2π-periódica. Seja $f(x) = \int_x^{x+2\pi} g(t)dt$. Temos que

$$f'(x) = g(x+2\pi) - g(x) = 0, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente $f \equiv cte$. Só que $f(0) = \int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$, portanto $f \equiv 0$. Logo

$$u_0(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} g(t)dt = \int_0^x g(t)dt + \int_x^{x+2\pi} g(t)dt = u_0(x) + 0 = u_0(x).$$

Resta mostrarmos que existem constantes positivas C e h tais que $|{u_0}^{(m)}(x)| \leq Ch^m(m!)^s, \forall\ m \in \mathbb{Z}_+, \forall\ x \in [0, 2\pi]$. Ora, como $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ então existem C_1 e h positivos tais que $|g^m(x)| \leq C_1 h^m (m!)^s$, $\forall\ x \in [0, 2\pi], \forall\ m \in \mathbb{Z}_+$. Usando o fato que u_0 é 2π-periódica temos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$|u_0(x)| \leq C_2, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Já para $m \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} |u_0^m(x)| &= |g^{m-1}(x)| \leq C_1 h^{m-1}[(m-1)!]^s \\ &\leq C(h_1)^m(m!)^s, \forall\ x \in [0, 2\pi], \forall\ m \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

onde $h_1 = \max\{h, 1\}$ e $C = \max\{C_1, C_2\}$. Logo $u_0 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Temos que $u_0'(x) = g(x)$. Se u é uma solução arbitrária de (3.0.4) então por (3.0.7)

$$u = c + u_0 = c + \int_0^x g(t)dt.$$

$\square$

Lema 3.0.9 *Se $m \in \mathbb{Z}$ então a equação*

$$\frac{d}{dx}u(x) + imu(x) = 0 \tag{3.0.8}$$

tem uma única solução no espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ dada por:

$$u(x) = Ce^{-imx}, C \in \mathbb{C}. \tag{3.0.9}$$

Demonstração: Com efeito, queremos encontrar $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ tal que (3.0.8) seja satisfeito. Se $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ então $u(x) = \displaystyle\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}$. Assim

$$\left(\frac{d}{dx} + im\right) u(x) = \left(\frac{d}{dx} + im\right) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (\xi + m)i\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}. \tag{3.0.10}$$

Suponhamos que u é solução de (3.0.8). Então $\left(\frac{d}{dx} + im\right) u(x) = 0$, ou seja, $\displaystyle\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (\xi + m)i\hat{u}(\xi)e^{ix\xi} = 0$. Isso implica que

$$(\xi + m)i\hat{u}(\xi) = 0, \forall\ \xi \in \mathbb{Z}. \tag{3.0.11}$$

Se $\xi \neq -m$, então $\xi + m \neq 0$ e por (3.0.11) temos que $\hat{u}(\xi) = 0$, isto é, para $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{-m\}$, $\hat{u}(\xi) = 0$. Assim, u se reduz:

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi} = \hat{u}(-m)e^{-imx},$$

ou seja, $u(x) = Ce^{-imx}$. $\square$

Observação 3.0.1 *Se substituirmos $im, m \in \mathbb{Z}$ por $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, então a única solução de (3.0.8) em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ será a função nula.*

De fato, se u é solução de (3.0.8) então

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) u(x) = \left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (i\xi + \lambda)\hat{u}(\xi)e^{ix\xi} = 0.$$

Assim $(i\xi + \lambda)\hat{u}(\xi) = 0, \forall\ \xi \in \mathbb{Z}$. Mas, como $\lambda \notin i\mathbb{Z}$, então $i\xi + \lambda \neq 0, \forall\ \xi$, consequentemente $\hat{u}(\xi) = 0, \forall\ \xi$ e u se reduz

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi} = 0, \forall\ x.$$

Lema 3.0.10 *Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e consideremos a equação*

$$\frac{d}{dx}u(x) + \lambda u(x) = g(x), \tag{3.0.12}$$

sendo $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Se $\lambda \notin i\mathbb{Z}$ então (3.0.12) admite uma única solução em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ a qual pode ser escrita como:

$$u(x) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\lambda}} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} g(x - s) ds, \tag{3.0.13}$$

ou equivalentemente

$$u(x) = \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\lambda s} g(x + s) ds. \tag{3.0.14}$$

Se $\lambda \in i\mathbb{Z}$ e se $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\lambda s} g(s) ds = 0$, então uma solução de (3.0.12) em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ é dada por

$$u(x) = e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda s} g(s) ds. \tag{3.0.15}$$

Demonstração: Suponhamos que $\lambda \notin i\mathbb{Z}$. Então multiplicando a (3.0.12) por $e^{\lambda x}$, obtemos

$$(e^{\lambda x} u(x))' = e^{\lambda x} g(x).$$

Assim pelo Lema (3.0.8(ii))

$$e^{\lambda x} u(x) = C + \int_0^x e^{\lambda t} g(t) dt$$

e, portanto

$$u(x) = Ce^{-\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda(t-x)} g(t) dt.$$

Obviamente $u \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R})$, para qualquer C constante. Note que $u(0) = C$. Agora, determinaremos C de forma que $u(0) = u(2\pi)$.

Temos que $u(2\pi) = Ce^{-\lambda 2\pi} + e^{-\lambda 2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\lambda t} g(t) dt$. E $u(2\pi)$ é igual a C se, e somente se, $C = \frac{e^{-\lambda 2\pi}}{1 - e^{-\lambda 2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{\lambda t} g(t) dt$. Note que $1 - e^{-\lambda 2\pi} \neq 0$, pois $\lambda \notin i\mathbb{Z}$. Assim

$$C = \frac{e^{-\lambda 2\pi}}{e^{-\lambda 2\pi}(e^{\lambda 2\pi} - 1)} \int_0^{2\pi} e^{\lambda t} g(t) dt = \frac{1}{e^{\lambda 2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\lambda t} g(t) dt.$$

E, portanto

$$u(x) = \frac{1}{e^{\lambda 2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\lambda(t-x)} g(t) dt + \int_0^x e^{\lambda(t-x)} g(t) dt,$$

e $u(0) = u(2\pi)$. Fazendo a mudança de variável $s = t - x$ obtemos

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\int_{-x}^{2\pi-x} e^{\lambda s} g(x+s)ds + \int_{-x}^{0} e^{\lambda s} g(x+s)ds \\
&= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\left[\int_{-x}^{2\pi-x} e^{\lambda s} g(x+s)ds + (e^{2\pi\lambda}-1)\int_{-x}^{0} e^{\lambda s} g(x+s)ds\right] \\
&= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\left[\int_{-x}^{0} e^{\lambda s} g(x+s)ds + \int_{0}^{2\pi-x} e^{\lambda s} g(x+s)ds\right] \\
&+ \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\left[e^{2\pi\lambda}\int_{-x}^{0} e^{\lambda s} g(x+s)ds - \int_{-x}^{0} e^{\lambda s} g(x+s)ds\right].
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $r = s + 2\pi$ temos

$$\begin{aligned}
e^{2\pi\lambda}\int_{-x}^{0} e^{\lambda s} g(x+s)ds &= e^{2\pi\lambda}\int_{2\pi-x}^{2\pi} e^{\lambda(r-2\pi)} g(r-2\pi+x)dr \\
&= \int_{2\pi-x}^{2\pi} e^{\lambda r} g(x+r)dr.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\left[\int_{0}^{2\pi-x} e^{\lambda s} g(x+s)ds + \int_{2\pi-x}^{2\pi} e^{\lambda s} g(x+s)ds\right] \\
&= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\int_{0}^{2\pi} e^{\lambda s} g(x+s)ds.
\end{aligned}$$

Observemos que o fato de g ser 2π-periódica implica que u também é.

Mostremos agora que

$$\frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\int_{0}^{2\pi} e^{\lambda s} g(x+s)ds = \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda}}\int_{0}^{2\pi} e^{-\lambda s} g(x-s)ds.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\int_{0}^{2\pi} e^{\lambda s} g(x+s)ds = -\frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\int_{0}^{-2\pi} e^{-\lambda r} g(x-r)dr \\
&= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\int_{-2\pi}^{0} e^{-\lambda r} g(x-r)dr \\
&= \frac{1}{e^{2\pi\lambda}-1}\int_{0}^{2\pi} e^{-\lambda(v-2\pi)} g(x-v+2\pi)dv \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda}}\int_{0}^{2\pi} e^{-\lambda v} g(x-v)dv.
\end{aligned}$$

Verificaremos agora a unicidade de solução de (3.0.12).

Suponhamos que u_1 e $u_2 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ são soluções de (3.0.12), então $u_1 - u_2$ é solução de $u'(x) + \lambda u(x) = 0$. Então pela observação(3.0.1) concluímos que $u_1 - u_2 \equiv 0$ e isso implica que $u_1 \equiv u_2$.

Agora, suponhamos que $\lambda \in i\mathbb{Z}$.

Se u é solução de (3.0.12), temos:

$$(e^{\lambda x}u(x))' = e^{\lambda x}g(x).$$

Assim, pelo Lema(3.0.8(ii))

$$u(x) = Ce^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}g(t)dt.$$

Claramente notamos que $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. Mostremos que u é 2π-periódica. Temos que $u(0) = C = u(2\pi)$.

Resta, agora, verificarmos que $u(x) = u(x+2\pi), \forall\ x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} u(x+2\pi) &= e^{\lambda(x+2\pi)}\int_0^{x+2\pi} e^{\lambda t}g(t)dt + Ce^{-\lambda(x+2\pi)} \\ &= e^{-\lambda x}\left[\int_0^x e^{\lambda t}g(t)dt + \int_x^{x+2\pi} e^{\lambda t}g(t)dt + C\right] \\ &= e^{-\lambda x}\left[\int_0^x e^{\lambda t}g(t)dt + C\right] = u(x), \forall\ x \in \mathbb{R}. \qquad (3.0.16) \end{aligned}$$

E assim concluímos que u é 2π-periódica. Tomando $C = 0$, obtemos

$$u(x) = e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}g(t)dt.$$

□

Lema 3.0.11 *Sejam c_0, $\gamma \in \mathbb{C}$, onde $c_0 = a_0 + ib_0$ com $b_0 > 0$ e $\gamma = a_1 + ib_1$.*

Para $j = 1, 2, ...$ e $\tilde{\lambda} = (a_1 - jb_0) + i(b_1 + ja_0) \notin i\mathbb{Z}$ temos

$$\left|1 - e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}\right|^{-1} \leq C < \infty, \qquad (3.0.17)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração: Dividiremos a análise em 3 casos:

Primeiro caso: $j = 0$ e $a_1 \neq 0$ ou $j = 0$ e $b_1 \notin \mathbb{Z}$.

Observemos que em qualquer situação acima

$$|1 - e^{\gamma 2\pi}| = C_0 > 0.$$

Segundo caso: $a_1 < b_0$ e $j = 1, 2, ...$

Como $j = 1, 2, ...$ temos

$$jb_0 \geq b_0 \Rightarrow (a_1 - jb_0)2\pi \leq (a_1 - b_0)2\pi.$$

Assim,

$$e^{(a_1 - jb_0)2\pi} \leq e^{(a_1 - b_0)2\pi}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |1 - e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}| &\geq 1 - |e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}| \\ &= 1 - |e^{(a_1 - jb_0)2\pi} e^{i(b_1 + ja_0)}| = 1 - e^{(a_1 - jb_0)2\pi} \\ &\geq 1 - e^{(a_1 - b_0)2\pi} = C_1 > 0. \end{aligned}$$

Terceiro caso: $a_1 \geq b_0 > 0$ e $j = 1, 2, ...$

Seja $j_0 = \left[\frac{a_1}{b_0}\right]$. Para $j \geq j_0 + 1$, temos $b_0\ j2\pi \geq b_0(j_0 + 1)2\pi$ e isso implica que $a_1 - b_0 j2\pi \leq [a_1 - b_0(j_0 + 1)]2\pi$. Assim,

$$e^{a_1 - b_0 j2\pi} \leq e^{[a_1 - b_0(j_0 + 1)]2\pi}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |1 - e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}| &\geq 1 - e^{(a_1 - jb_0)2\pi} \\ &\geq 1 - e^{[a_1 - b_0(j_0 + 1)]2\pi} = C_2 > 0. \end{aligned}$$

Se $j = j_0$ e $j_0 = \frac{a_1}{b_0}$ então $\tilde{\lambda} \notin i\mathbb{Z}$ se, e somente se, $b_1 + j_0 b_0 \notin \mathbb{Z}$. Logo

$$\begin{aligned} |1 - e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}| &= |1 - e^{i(b_1 + ja_0)2\pi}| \\ &\geq |1 - \cos[(b_1 + j_0 a_0)2\pi] - \operatorname{sen}[(b_1 + j_0 a_0)2\pi]| \\ &\geq |1 - \cos[(b_1 + j_0 a_0)2\pi]| = C_3 > 0. \end{aligned}$$

Se $j = j_0$ e $j_0 > \frac{a_1}{b_0}$ temos $\tilde{\lambda} \notin i\mathbb{Z}$. Assim

$$|1 - e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}| \geq 1 - e^{(a_1 - j_0 b_0)2\pi} = C_4 > 0.$$

Para $j \leq j_0 - 1$, temos que $1 - e^{(\gamma + ijc_0)} \neq 0$. Logo,

$$|1 - e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}| \geq \min\{|1 - e^{(\gamma + ijc_0)2\pi}|; j = 1, ..., j_0 - 1\} = C_5 > 0.$$

Assim, tomando $C^{-1} = \min\{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ temos

$$|1 - e^{(\gamma} + ijc_0)2\pi|^{-1} \leq C, \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad \square$$

Lema 3.0.12 *Dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^n,\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Demonstração: Usaremos (1.2.3), (1.2.10).

Seja $\varepsilon > 0$. Consideremos a função $f(t) = t^{|\alpha|}e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^{\frac{1}{s}}}$ definida em $\mathbb{R}_+$. Temos que $t_0 = \left(\frac{2s}{\varepsilon}|\alpha|\right)^s$ é o ponto de máximo da função f. Assim $f(t) \leq f(t_0), \forall\, t \in \mathbb{R}_+$, ou seja,

$$\begin{aligned} f(t) &= t^{|\alpha|}e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^{\frac{1}{s}}} \leq \left[\left(\frac{2s}{\varepsilon}|\alpha|\right)^s\right]^{|\alpha|} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2s|\alpha|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}} \leq \left[\left(\frac{2s}{\varepsilon}\right)^s\right]^{|\alpha|}\left(|\alpha|^{|\alpha|}\right)^s \\ &\leq \left[\left(\frac{2s}{\varepsilon}\right)^s\right]^{|\alpha|}\left(e^{|\alpha|}|\alpha|!\right)^s \leq \left[\left(\frac{2s}{\varepsilon}\right)^s\right]^{|\alpha|}\left(e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\alpha!\right)^s \\ &= \left[\left(\frac{2s}{\varepsilon}\right)^s e^s n^s\right]^{|\alpha|}(\alpha!)^s = \left[\left(\frac{2sen}{\varepsilon}\right)^s\right]^{|\alpha|}(\alpha!)^s \\ &= C_\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \forall\ t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Tomando $t = |\xi|$, obtemos $|\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^s$, para $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, onde $C_\varepsilon = \left(\frac{2sen}{\varepsilon}\right)^s$. $\square$

Referências Bibliográficas

[A] Lins Neto, A., *Funções de uma variável complexa,* IMPA - Projeto Euclides, 1996.

[GPY] Gramchev, T.,Popivanov, P. e Yoshino, M., *Global Properties in Spaces of Generalized Funtions on the Torus for Second Order Differential Operators with Variable Coefficients,* Rend. Sem. Mat. Pol. Torino, 51: $n^{\underline{o}}$2, 145-172, 1992.

[GP] Petronilho, G., *Ultradistribuições Gevrey Periódicas em* $\mathbb{R}^n$, Apostila do curso apresentado na I EBED - UNICAMP - 2003.

[L] Takahashi, L. T., *Hipoeliticidade Global de Certas Classes de Operadores Diferenciais Parciais,* dissertação de mestrado, PPGM-UFSCar, 1995.

[R] Rodino, L., *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces,* World Scientific, 1992.

[Z] Zani, S. L., *Hipoeliticidade Global Para Operadores de Segunda Ordem*, dissertação de mestrado, ICMSC, 1988.