UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Construção de Espaços Classificantes

Kelly R. Mazzutti Lübeck

Orientador: Prof. Dr. Tomas E. Barros

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP

Fevereiro de 2004

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

L926ce

Lübeck, Kelly Roberta Mazzutti.
Construção de espaços classificantes / Kelly Roberta Mazzutti Lübeck. -- São Carlos : UFSCar, 2004.
116 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Topologia algébrica. 2. Espaços classificantes. 3. Objetos simpliciais. 4. Realização geométrica. I. Título.

CDD: 514.2(20ª)

Orientador

Prof. Dr. Tomas Edson Barros

"Sem esqueceres uma justa disciplina, sê benigno para ti mesmo. Não és mais que uma criatura do universo, mas tens direito de estares aqui".

(Autor desconhecido)

Agradecimentos

À Deus, por ser fortaleza nos momentos difíceis e luz por guiar meus passos pelos caminhos menos tortuosos.

Ao meu orientador, professor Tomas E. Barros, por ter me dado a oportunidade de realizar este trabalho e por ser exemplo de profissional a ser seguido, sempre atencioso, bem humorado, dedicado e paciente, contribuindo muito com a sua experiência para o meu aprendizado.

Aos meus pais Roberto e Salete, e irmãos Fabiano, Cristiano e Ketty, que incentivaram e acompanharam a minha jornada, por todo amor e carinho que têm por mim e, que apesar da distância sempre estiveram presentes.

Aos professores do departamento da UFSCar, especialmente ao Dirceu, ao Ruidival, a Claudia e ao Cezar Kondo, os quais muito contribuíram para a minha formação.

A todos os amigos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho e, de maneira especial, a Mariza, Jacson, Marcelo, Fabiane, Elizandra, Claudete, Marilene, Cristhian, Luiza, Chico, Chiquinho, pela convivência, amizade e apoio em todos os momentos.

Aos colegas do PPG-M pelo companheirismo, pela amizade e o excelente ambiente de trabalho que proporcionaram.

À Célia, que sempre nos auxilia e dá um “jeitinho”em qualquer problema.

Agradeço, em especial ao meu marido Marcos, que sempre esteve presente, dando força, compreendendo as minhas ausências, tolerando minhas impaciências, acreditando em mim. Obrigada pelo teu apoio, pela tua atenção, pelo teu amor.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma construção de espaços classificantes de fibrados principais através do estudo de objetos simpliciais e co-simpliciais sobre uma categoria e como aplicação apresentamos a construção de espaços $K(G, n)$ de Eilenberg-MacLane, sendo G um grupo (abeliano se $n > 1$) e n um inteiro positivo.

Abstract

In this work we present a construction of classifying spaces for principal bundles by studying simplicial and co-simplicial objects over a category and as application we present the construction of Eilenberg-MacLane spaces $K(G, n)$, where G is a (abelian if $n > 1$) group and n is a positive integer.

Introdução

Este trabalho tem dentre os seus objetivos o estudo de fibrados, um campo da Matemática que teve seu reconhecimento no período de 1935-1940. Sua primeira definição geral foi dada por H. Whitney e seu trabalho, juntamente com os realizados por Heinz Hopf e E. Stiefel, demonstraram a importância do assunto com aplicações na Topologia e Geometria Diferencial, conforme as citações de [25].

Serão apresentados alguns pontos da teoria de objetos simpliciais e co-simpliciais que auxiliarão a construção do espaço classificante de uma categoria, o qual tem como um dos principais exemplos a construção do G-fibrado universal, $G \cdots EG \to BG$, sendo G a categoria que se identifica diretamente com o grupo G e, BG o seu espaço classificante.

O trabalho é organizado como segue. O capítulo 1 será dedicado aos conceitos preliminares, que envolvem noções de categoria, homotopia e grupo de homotopia, complexos-CW e complexos simpliciais, necessários para o bom entendimento desta dissertação. Os conceitos relacionados a fibrados encontram-se no capítulo 2 e, iniciamos o capítulo 3 com as definições de objetos simpliciais e co-simpliciais; introduzimos os funtores (adjuntos) singular e realização geométrica; demonstramos que a realização geométrica de qualquer conjunto simplicial é um complexo-CW e, estabelecemos uma relação entre espaços classificantes de pré-ordens e complexos simpliciais. Ao capítulo 4 ficou reservado, por fim, estabelecer a construção de G-fibrados universais e como a construção de BG pode ser usada com certa facilidade para se obter espaços do tipo $K(G, n)$.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como finalidade definir os conceitos básicos que serão usados no presente trabalho. Iniciaremos com a definição de categoria e funtor. Definiremos também homotopia e grupos de homotopia, com algumas de suas propriedades. A seção 3 será destinada a categoria de complexo-CW e características referentes a tais espaços, que abrangem um vasto e interessante campo da topologia algébrica. Finalizamos na seção 4, com a noção de complexos simpliciais.

Ao leitor familiarizado com tais definições fica a seu critério dispensar ou não a leitura deste primeiro capítulo, retornando ao mesmo conforme a necessidade.

Para maiores detalhes sobre os assuntos mencionados ver [3], [8], [10], [22] e [24].

1.1 Categorias

A teoria de categorias começa com a observação que muitas propriedades de sistemas matemáticos podem ser unificadas e simplificadas por meio de representações por diagramas de setas.

Os exemplos mais freqüentes de tais diagramas ocorrem com as setas representando funções entre conjuntos munidos com certa estrutura e preservando estas estruturas, todavia há também exemplos interessantes em que as setas não são funções, como no caso de pré-ordens, monóides e grupos, que serão vistos em detalhes mais adiante e terão grande importância no presente trabalho.

Definição 1.1 *Uma* ***categoria*** $\mathcal{C}$ *consiste de:*

(1) *uma classe de* ***objetos****,* $Obj(\mathcal{C})$;

(2) *para cada par de objetos* A *e* B *em* $Obj(\mathcal{C})$ *um conjunto de* ***morfismos****,* $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$;

(3) *para cada objeto* $A \in Obj(\mathcal{C})$ *associamos um* ***morfismo identidade****,* $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$;

(4) *para cada terna de objetos* A, B *e* C *temos uma* ***composição****:*

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

sujeitos aos seguintes axiomas:

A1) *Se* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *então* $f \circ id_A = id_B \circ f = f$;

A2) *Se* f, g *e* h *são morfismos e* $g \circ f$*,* $f \circ h$ *são definidas, então* $(g \circ f) \circ h$ *e* $g \circ (f \circ h)$ *também são definidas e coincidem.*

Exemplo 1.1 Categoria de Conjuntos: **Set.**

$Obj(\mathbf{Set})$ = todos os conjuntos que são elementos de um conjunto universo U.

$Hom_{\mathbf{Set}}(A, B) = \{f : A \to B \mid f$ é uma função$\}$.

$\circ =$ composição usual de funções.

Exemplo 1.2 Categoria de Espaços Topológicos: **Top.**

$Obj(\mathbf{Top}) =$ conjunto de todos os espaços topológicos em U.

$Hom_{\mathbf{Top}}(A, B) = \{f : A \to B \mid f$ é uma função contínua$\}$.

$\circ =$ composição usual de funções.

Exemplo 1.3 Categoria de Grupos: **Grp.**

$Obj(\mathbf{Grp}) =$ conjunto de todos os grupos em U.

$Hom_{\mathbf{Grp}}(A, B) = \{f : A \to B \mid f$ é um homomorfismo$\}$.

$\circ =$ composição usual.

Agora, apresentaremos monóides, pré-ordem e grupo sob a perspectiva de categorias.

Exemplo 1.4 Monóides.

Um **monóide** é uma categoria com um único objeto. Assim, cada monóide é determinado pelo conjunto de morfismos, o morfismo identidade e pela composição de morfismos. Desde que para quaisquer dois morfismos tem-se a composição, um monóide pode ser descrito como um conjunto M com uma operação binária $M \times M \to M$ que é associativa e tem uma identidade. Para qualquer categoria $\mathcal{C}$ e qualquer $a \in Obj(\mathcal{C})$ o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(a, a)$ é um monóide.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ então dizemos que $f \in Hom_{\mathcal{C}}(a, b)$ é um isomorfismo se f possui um inverso, ou seja, existe $g \in Hom_{\mathcal{C}}(b, a)$ tal que $f \circ g = id_b$ e $g \circ f = id_a$.

Exemplo 1.5 Grupos.

Um **grupo** é um monóide em que todo morfismo é um isomorfismo.

Exemplo 1.6 Pré-ordens.

Uma **pré-ordem** é uma categoria P na qual dados dois objetos p e p' em P, $Hom_P(p, p')$ possui um único elemento.

A relação é definida sobre o conjunto $X = \{x \mid x \in Obj(P)\}$ onde $x \leq y \Longleftrightarrow Hom_P(x, y)$ possui um único elemento.

Esta relação define uma pré-ordem:

· Reflexiva: $x \leq x$ pois $x \stackrel{id}{\to} x$;

· Transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \stackrel{f}{\to} y$ e $y \stackrel{g}{\to} z$, logo $x \stackrel{f \circ g}{\to} z$ e temos que $x \leq z$.

Apresentaremos, à seguir, uma definição essencial na teoria de categoria que permite com o auxílio de outras ferramentas deduzir importantes resultados.

Definição 1.2 *Dadas duas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$, um **funtor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é uma aplicação entre objetos e morfismos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$, ou seja, para cada objeto A em $Obj(\mathcal{A}), F(A)$ é um objeto em $Obj(\mathcal{C})$ e, para cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, $F(f) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(A), F(B))$ e, além disso, temos que:*

(i) $F(id_A) = id_{F(A)}, \forall A \in Obj(\mathcal{A})$;

(ii) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Neste caso diremos que F é um **funtor covariante**. Se, no entanto, tivermos para cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ um morfismo $F(f) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(B), F(A))$ satisfazendo:

(i) $F(id_A) = id_{F(A)}, \forall A \in Obj(\mathcal{A})$;

(ii) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

então diremos que F é um **funtor contravariante**.

Definição 1.3 *Considere as categorias $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ e os funtores $S, T : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. Uma* ***transformação natural*** *$\tau : S \to T$ é uma função que associa a cada objeto $a \in Obj(\mathcal{A})$ um morfismo $\tau_a = \tau(a) : S(a) \to T(a)$ de $\mathcal{C}$ de tal forma que para qualquer morfismo $f : a \to a'$ em $\mathcal{A}$, temos que o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} S(a) \arrow[r, "\tau(a)"] \arrow[d, "S(f)"] & T(a) \arrow[d, "T(f)"] \\ S(a') \arrow[r, "\tau(a')"] & T(a') \end{tikzcd}$$

Definição 1.4 *Uma transformação natural $\tau : S \to T$ é dita ser um* ***isomorfismo natural*** *(ou equivalência natural) se para cada $a \in Obj(\mathcal{A}), \tau(a)$ é inversível em $\mathcal{C}$, ou seja, existe $\sigma(a) : T(a) \to S(a)\ \forall\ a \in Obj(\mathcal{A})\ |\tau(a) \circ \sigma(a) = id_{T(a)}$ e $\sigma(a) \circ \tau(a) = id_{S(a)}$.*

Equivalentemente, podemos dizer que $\tau : S \to T$ é um isomorfismo natural se existe $\sigma : T \to S$ transformação natural tal que $\tau \circ \sigma = id_T$ e $\sigma \circ \tau = id_S$.

Definição 1.5 *Uma* ***equivalência entre categorias*** *$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é definida como um par de funtores $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $T : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ junto com isomorfismos naturais $id_{\mathcal{A}} \cong T \circ S$ e $id_{\mathcal{B}} \cong S \circ T$.*

Definição 1.6 *Considere os funtores* $S: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *e* $T: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. *Dizemos que* S *e* T *são* ***funtores adjuntos*** *se para cada* $a \in Obj(\mathcal{A})$ *e* $b \in Obj(\mathcal{B})$ *existe uma bijeção*

$$\tau : Hom_{\mathcal{B}}(S(a), b) \to Hom_{\mathcal{A}}(a, T(b))$$

que é natural em cada variável, isto é, para todas $f : a' \to a$ *em* $\mathcal{A}$ *e* $g : b \to b'$ *em* $\mathcal{B}$ *os diagramas abaixo são comutativos.*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(S(a), b) & \xrightarrow{(Sf)^*} & Hom_{\mathcal{B}}(S(a'), b) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ Hom_{\mathcal{A}}(a, T(b)) & \xrightarrow{f^*} & Hom_{\mathcal{A}}(a', T(b)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(S(a), b) & \xrightarrow{g_*} & Hom_{\mathcal{B}}(S(a), b') \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ Hom_{\mathcal{A}}(a, T(b)) & \xrightarrow{(Tg)_*} & Hom_{\mathcal{A}}(a, T(b')) \end{array}$$

onde:

$$\begin{aligned} f^* &= Hom(-, T(b)) \text{ e } (Sf)^* = Hom(-, b) \\ g_* &= Hom(S(a), -) \text{ e } (Tg)_* = Hom(a, -) \end{aligned}$$

Exemplo 1.7 Considere as categorias $\mathcal{A} = \mathcal{C} = Set$ e seja Y um conjunto fixado. Defina os funtores $F, G : Set \to Set$ por : $F = \_ \times Y$ e $G = Hom(Y, \_)$. Dados quaisquer conjuntos A e C, temos que as funções:

$$\tau : Hom_{Set}(A \times Y, C) \to Hom_{Set}(A, Hom(Y, C))$$

$$\beta : Hom_{Set}(A, Hom(Y, C)) \to Hom_{Set}(A \times Y, C)$$

dadas por :

$$\tau(f)(a) = f^{\#}(a) : Y \to C \mid f^{\#}(a)(y) = f(a, y).$$

$$\beta(g) = g_{\#} : A \times Y \to C \mid g_{\#}(a, y) = g(a)(y).$$

são bijeções naturais, ou seja, F e G são adjuntos.

Um **objeto inicial** (se existir) numa categoria $\mathcal{C}$ é um objeto i tal que para todo $b \in Obj(\mathcal{C})$ existe um único morfismo em $Hom_{\mathcal{C}}(i, b)$. Um **objeto terminal** (se existir) numa categoria $\mathcal{C}$ é um objeto t tal que para todo $a \in Obj(\mathcal{C})$ existe um único morfismo em $Hom_{\mathcal{C}}(a, t)$. Um objeto que é ambos inicial e terminal é chamado **objeto zero** ou objeto nulo.

1.2 Homotopia

Sejam X e Y espaços topológicos. Dadas as funções contínuas

$$f, g : X \to Y$$

dizemos que f **é homotópica à** g quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \to Y$ (onde I é o intervalo fechado $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$) tal que $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

A aplicação H é uma **homotopia** entre f e g e, é denotada por $H : f \simeq g$ ou simplesmente $f \simeq g$.

Exemplo 1.8 Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo então todas as aplicações contínuas de X em Y são homotópicas, pois sejam $f, g : X \to Y$ então basta definirmos $H : X \times I \to Y$ por

$$H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x).$$

Diremos que (X, A) é um par de espaços topológicos quando A for um subespaço de X.

Dados os pares (X, A) e (Y, B), uma aplicação contínua $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação contínua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Dadas as aplicações contínuas $f, g : (X, A) \to (Y, B)$, uma homotopia de pares entre f e g é uma aplicação contínua $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$.

Podemos encontrar o caso em que $B = \{y_0\}$, sendo y_0 o ponto base de Y assim , durante uma homotopia entre duas aplicações $f, g : (X, A) \to (Y, y_0)$, devemos ter $H(x, t) = y_0, \forall\ (x, t) \in A \times I$.

Dados $A \subseteq X$ e $f, g : X \to B$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ dizemos que f **é homotópica a** g **relativamente a** A, quando existe uma homotopia H tal que $H(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ e para todo $t \in I$, e será denotado por $f \simeq g(rel.A)$.

Observemos também que, a relação homotopia é compatível com composições de funções, ou seja, dadas as aplicações contínuas $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ tais que $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Indicamos a classe de homotopia de f por $[f]$ e o conjunto das classes de homotopias das aplicações contínuas de X em Y por $[X, Y]$.

Definição 1.7 *Dizemos que dois espaços topológicos possuem o* ***mesmo tipo de homotopia*** *se existem aplicações contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$.*

A aplicação f é chamada de **equivalência homotópica** e denotamos os espaços topológicos com mesmo tipo de homotopia por $X \simeq Y$.

Exemplo 1.9 Se X e Y são homeomorfos então possuem o mesmo tipo de homotopia.

Exemplo 1.10 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e S^{n-1} possuem o mesmo tipo de homotopia.

De fato, consideremos $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ a inclusão e $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Assim, $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$ e $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.

Definição 1.8 *Um espaço topológico X é* ***contrátil*** *se a aplicação identidade $id_X : X \longrightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante.*

Observação 1.1 Um espaço X tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto se e só se X é contrátil.

Definição 1.9 *Sejam A um subespaço de X e $i : A \longrightarrow X$ a inclusão. Uma* ***retração*** *de X em A é uma função contínua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r \circ i = id_A$. Além disso, dizemos que:*

i) A é um ***retrato*** *de X se existe uma retração de X em A.*

ii) A é um ***retrato por deformação*** *de X se A é retrato de X e $i \circ r \simeq id_X$.*

Segue da definição acima que:

Teorema 1.1 *Se A é um retrato por deformação de X então A e X tem o mesmo tipo de homotopia.*

1.3 Grupos de Homotopia

Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ um subconjunto, $x_0 \in A$ e $I = [0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\}$.

Se $n \geq 1$ considere

$I^n = I \times ... \times I = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, ..., n\}$ o n-cubo.

$I^{n-1}_{0k} = \{(t_1, ..., t_n) \in I^n \mid t_k = 0\}$ a k-ésima (n-1)-face inicial de I^n.

$I^{n-1}_{1k} = \{(t_1, ..., t_n) \in I^n \mid t_k = 1\}$ a k-ésima (n-1)-face final de I^n.

$\partial I^n = I^n - intI^n = \{(t_1, ..., t_n) \in I^n \mid t_i \in \{0,1\}$, para algum $i \in \{1, ..., n\}\}$ o bordo de I^n.

$J^{n-1} = \partial I^n - intI^{n-1}_{0n}$.

Seja $F_n(X, A, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0) \mid f$ é contínua$\}$.

Podemos definir uma operação $+$ para $n \geq 2$ (e se $A = \{x_0\}$ para $n \geq 1$) da seguinte forma: se $f, g \in F_n(X, A, x_0)$ então:

$$(f+g)(t_1, ..., t_n) := \begin{cases} f(2t_1, ..., t_n);\ 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, ..., t_n);\ 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Segue do lema da colagem que $f + g$ é contínua e portanto pertence a $F_n(X, A, x_0)$.

Dadas $f, g \in F_n(X, A, x_0)$ diremos que $f \simeq_{F_n} g$ se existir

$$H : ((I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (X, A, x_0)$$

tal que

$$\begin{aligned} H((t_1, ..., t_n), 0) &= f(t_1, ..., t_n) \\ H((t_1, ..., t_n), 1) &= g(t_1, ..., t_n) \end{aligned}$$

Observação 1.2 A relação de homotopia em $F_n(X, A, x_0)$ $(\simeq_{F_n})$ é uma relação de equivalência.

Observação 1.3 Se $f, f', g, g' \in F_n(X, A, x_0)$ são tais que $f \simeq_{F_n} f'$ e $g \simeq_{F_n} g'$ então $f + g \simeq_{F_n} f' + g'$.

Definimos $\pi_n(X, A, x_0)$ como sendo o conjunto das classes de homotopia $(\simeq_{F_n})$ das funções de $F_n(X, A, x_0)$.

Pelas observações acima podemos definir a seguinte soma $+$ em $\pi_n(X, A, x_0)$:

$$[f] + [g] := [f + g]$$

Teorema 1.2 $\pi_n(X, A, x_0)$ *com a operação soma +, definida acima, é um grupo se $n \geq 2$. (Se $A = \{x_0\}$ então $\pi_1(X, A, x_0)$ também é grupo.)*

Se $A = \{x_0\}$ denota-se $\pi_n(X, A, x_0)$ por $\pi_n(X, x_0)$.

Observação 1.4

(1) $\pi_n(X, A, x_0)$ é chamado o n-ésimo grupo de homotopia de X módulo A.

(2) $\pi_n(X, x_0)$ é chamado o n-ésimo grupo de homotopia (absoluta) de X.

(3) Se $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$ é chamado o grupo fundamental de X.

(4) $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo abeliano se $n > 2$ ou se $n > 1$ e $A = x_0$.

(5) O grupo $\pi_n(X, x_0)$ pode ser identificado com $[(S^n, *), (X, x_0)]$, sendo que $*$ denota um ponto base de S^n.

Para verificarmos (5) por exemplo, consideremos os seguintes resultados:

$\cdot$ sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $A \subseteq X$ um fechado em X, então temos que $[(X, A), (Y, y_0)] \equiv [(\frac{X}{A}, *), (Y, y_0)]$ (onde $\equiv$ significa bijeção).

$\cdot$ $X \simeq X'$ e $Y \simeq Y' \Longrightarrow [X, Y] \equiv [X', Y']$.

$\cdot$ $\frac{I^n}{\partial I^n} \approx (I^n - \partial I^n)^\infty \approx (\mathbb{R}^n)^\infty \approx S^n$. Sendo $X^\infty = X \cup \infty$, a compactificação por um ponto, onde X é um espaço localmente compacto de Hausdorff e ∞ um ponto que não pertence a X.

Assim,

$\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)] \equiv [(\frac{I^n}{\partial I^n}, *), (X, x_0)] \equiv [(S^n, *), (X, x_0)]$.

Definição 1.10 *Um espaço topológico X é dito **n-conexo** se $\pi_q(X, x) = 0$ para $0 \leq q \leq n$ e qualquer $x \in X$.*

Podemos equivalentemente dizer que um espaço X é n-conexo para $n \geq 0$ se toda aplicação contínua $f : S^k \to X$ para $k \leq n$ tem uma extensão contínua para $D^{k+1} = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : \|x\| \leq 1\}$.

Esta equivalência é justificada pelos resultados abaixo.

Teorema 1.3 *Sejam $p_0 \in S^n$ e $f : S^n \to X$ contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *f é homotópica a uma constante;*

b) *f possui uma extensão contínua sobre D^{n+1};*

c) *f é homotópica a uma aplicação constante relativamente a p_0.*

Corolário 1.1 *A aplicação $\alpha : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ representa o elemento trivial de $\pi_n(X, x_0)$ para $n \geq 1$ se e só se α pode ser continuamente estendida sobre D^{n+1}.*

Corolário 1.2 *Qualquer aplicação de S^n para um espaço contrátil possui uma extensão contínua sobre D^{n+1}.*

1.4 Complexo-CW

Iniciamos definindo Topologia Fraca.

Seja X um conjunto coberto por subconjuntos A_j ($j \in J$ um conjunto de índices), ou seja, $X = \bigcup_{j \in J} A_j$. Se:

· cada A_j é um espaço topológico;

· para todos A_j, A_k as topologias coincidem na intersecção $A_j \cap A_k, \forall\, j, k \in J$.

· para todos $j, k \in J$ a intersecção $A_j \cap A_k$ é um subconjunto fechado em A_j e em A_k.

então a **Topologia Fraca** determinada por $\mathcal{A} = \{A_j, j \in J\}$ é a topologia $\tau(\mathcal{A})$ cujos fechados são os subconjuntos $F \subseteq X$ tais que $F \cap A_j$ é fechado em $A_j, \forall j \in J$.

Observação 1.5

1) $U \subseteq (X, \tau(\mathcal{A}))$ é aberto $\Longleftrightarrow U \cap A_j$ é aberto em $A_j, \forall j \in J$.

2) Se Y é um subconjunto fechado de $(X, \tau(\mathcal{A}))$ então Y tem a topologia fraca determinada por $Y \cap \mathcal{A} = \{Y \cap A_j, j \in J\}$.

3) Cada A_j é fechado em $(X, \tau(\mathcal{A}))$.

4) A topologia de A_j coincide com a topologia de $\tau(\mathcal{A})$.

5) Se J é um conjunto finito então só há uma topologia em X tal que cada A_j é um subespaço de X, e portanto, em vista de 3 e 4 essa é a topologia fraca.

Lema 1.1 *Seja X um espaço com a topologia fraca determinada por uma família de subconjuntos $\{A_j, j \in J\}$. Para qualquer espaço topológico Y a função $f : X \to Y$ é contínua se e só se $f|_{A_j}$ é contínua para todo $j \in J$.*

Demonstração: Se f é contínua então cada uma das restrições é contínua.

Reciprocamente, se G é fechado em Y então $f^{-1}(G) \cap A_j = (f^{-1}|_{A_j})(G)$ é fechado em cada $A_j, \forall j \in J$, como X tem a topologia fraca então $f^{-1}(G)$ é fechado em X e, portanto, f é contínua. $\square$

Definição 1.11 *Uma **célula** de dimensão n, e^n ou simplesmente e, é um espaço topológico homeomorfo ao n-disco aberto $(D^n - S^{n-1})$. Seja X uma união disjunta de células, ou seja, $X = \cup\{e \mid e \in E\}$. Para cada $k \geq 0$ o **k-esqueleto** $X^{(k)}$ de X é definido por $X^{(k)} = \cup\{e \in E \mid \dim e \leq k\}$.*

Deste modo

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq ... \subseteq X^{(k)} \subseteq ... \subseteq X$$

Definição 1.12 *Um **complexo-CW** é uma terna (X, E, Φ), sendo X um espaço de Hausdorff, E uma família de células em X, $\Phi = \{\Phi_e \mid e \in E\}$ uma família de funções, satisfazendo:*

1) $X = \cup\{e \mid e \in E\}$ *(união disjunta).*

2) *Para cada* $e \in E$ *existe o homeomorfismo relativo* $\Phi_e : (D^n, S^{n-1}) \to (e \cup X^{(n-1)}, X^{(n-1)})$, *ou seja,* Φ_e *é uma aplicação contínua de pares e* $\Phi_e|_{D^n - S^{n-1}} : D^n - S^{n-1} \to e$ *é um homeomorfismo,* Φ_e *é chamada de **aplicação característica** de* e.

3) *Se* $e \in E$ *então seu fecho* $\overline{e}$ *está contido numa união finita de células de* E.

4) X *tem a topologia fraca determinada por* $\{\overline{e} \subseteq X \mid e \in E\}$.

Com isso um subconjunto F é fechado em um complexo-CW X se, e somente se, $F \cap \overline{e}$ é fechado em $\overline{e}, \forall\, e \in E$.

Temos também que para qualquer espaço Y uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f|_{\overline{e}}$ é contínua.

Denotaremos também um complexo-CW por (X, E) ou simplesmente X.

Definição 1.13 *Um complexo-CW* (X, E) *é finito quando o conjunto* E *é finito.*

Diremos que uma célula fechada de dimensão n é o fecho de uma n-célula .

Lema 1.2 *Se* (X, E) *é um complexo-CW e se* $e \in E$ *é uma célula de dimensão* n, $n > 0$, *com aplicação característica* Φ_e, *então* $\overline{e} = \Phi_e(D^n)$.

Demonstração: Desde que Φ_e é contínua

$$\Phi_e(D^n) = \Phi_e(\overline{(D^n - S^{n-1})}) \subseteq \overline{\Phi_e(D^n - S^{n-1})} = \overline{e}$$

Para a inclusão inversa, como D^n é compacto então $\Phi_e(D^n)$ é compacto em X, que é de Hausdorff, logo $\Phi_e(D^n)$ é fechado em X. Portanto , $\overline{e} \subseteq \Phi_e(D^n)$.

$\square$

Lema 1.3 *Dados complexos-CW X e Y então $X \times Y$ também é um complexo-CW.*

Demonstração: Sejam E_X e E_Y o conjunto de todas as células de X e de Y respectivamente. Então para cada $e \in E_X$ e $f \in E_Y$ temos que $e \times f$ é uma célula de dimensão = dim$e$ + dim$f$, assim:

1) $X \times Y = \cup\{e \times f \mid e \in E_X \text{ e } f \in E_Y\}$.

2) Se Φ_e e Φ_f são as aplicações características das células $e \in E_X$ e $f \in E_Y$ respectivamente então: $\Phi_e \times \Phi_f : (D^p \times D^q, (S^{p-1} \times D^q) \cup (D^p \times S^{q-1})) \rightarrow ((e \times f) \cup (X \times Y)^{(p+q-1)}, (X \times Y)^{(p+q-1)})$ é a aplicação característica da célula $e \times f$ e $(X \times Y)^{(k)} := \cup\{e \times f \mid e \in E_X, f \in E_Y \text{ e } \dim e + \dim f \leq k\}$ é o k-esqueleto de $X \times Y$.

3) Obviamente as células $\overline{e \times f}$ tem a propriedade do fecho finito (em virtude de $\overline{e}$ e $\overline{f}$ terem esta propriedade).

4) Dotamos $X \times Y$ da topologia fraca gerada por $\overline{e \times f}$ onde e percorre E_X e f percorre E_Y.

$\square$

Observação 1.6 Dados $e \in E_X$ e $f \in E_Y$, então

$$\begin{aligned} \overline{e \times f} - e \times f &= \Phi_e \times \Phi_f((S^{p-1} \times D^q) \cup (D^p \times S^{q-1})) \\ &= \Phi_e(S^{p-1}) \times \Phi_f(D^q) \cup \Phi_e(D^p) \times \Phi_f(S^{q-1}) \\ &= ((\overline{e} - e) \times \overline{f}) \cup (\overline{e} \times (\overline{f} - f)) \end{aligned}$$

Observação 1.7 Nem sempre a topologia fraca gerada pelos $\overline{e \times f}$ coincide com a topologia produto, no entanto isto ocorre se (a) X ou Y é localmente finito ou (b) se ambos X e Y possuem uma quantidade enumerável de células (c. f. [28] ou [14].)

1.5 Complexo Simplicial

Definição 1.14 *Um conjunto ordenado de pontos* $\{p_0, p_1, ..., p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ *é dito* ***independente afim*** *se* $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, ..., p_m - p_0\}$ *é um conjunto linearmente independente do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.15 *Uma* ***combinação convexa*** *de pontos* $p_0, p_1, ..., p_m$ *em* $\mathbb{R}^n$ *é um ponto* x *com :*

$$x = t_0 p_0 + t_1 p_1 + ... + t_m p_m$$

onde $\sum\limits_{i=0}^{m} t_i = 1$ *e* $t_i \geq 0$ *para todo* $0 \leq i \leq m$.

Representamos todas as combinações convexas de $p_0, p_1, ..., p_m$ em $\mathbb{R}^n$ por $[p_0, p_1, ..., p_m]$. Observe que $[p_0, p_1, ..., p_m]$ é a envoltória convexa dos pontos $p_0, p_1, ..., p_m$.

Teorema 1.4 *As seguintes condições em um conjunto ordenado de pontos* $\{ p_0, p_1, ..., p_m\}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *são equivalentes.*

i) $\{ p_0, p_1, ..., p_m\}$ *é independente afim.*

ii) Se $\{s_0, s_1, .., s_m\} \subset \mathbb{R}$ *satisfaz* $\sum\limits_{i=0}^{m} s_i p_i = 0$ *e* $\sum\limits_{i=0}^{m} s_i = 0$, *então* $s_0 = s_1 = ... = s_m = 0$.

iii) Para cada $x \in [p_0, p_1, ..., p_m]$ *a combinação convexa de* x *em relação aos pontos* $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$ *é única.*

Definição 1.16 *Seja* $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$ *um conjunto afim independente em* $\mathbb{R}^n$ *e, seja* $[p_0, p_1, ..., p_m]$ *a sua envoltória convexa. Se* $x \in [p_0, p_1, ..., p_m]$ *então (pelo teorema anterior) existe uma única (m+1)-upla* $(t_0, ...t_m)$ *com* $\sum\limits_{i=0}^{m} t_i = 1$, $t_i \geq 0$ *e* $x = \sum\limits_{i=0}^{m} t_i p_i$. *A (m+1)-upla é a* ***coordenada baricêntrica*** *de* x *(relativa ao conjunto* $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$*).*

Definição 1.17 *Seja* $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$ *um subconjunto afim independente em* $\mathbb{R}^n$*. Então* $[p_0, p_1, ..., p_m]$ *é chamado de* ***m-simplexo*** *com vértices* $p_0, p_1, ..., p_m$*.*

Definição 1.18 *Se* $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$ *é afim independente, o* ***baricentro*** *de* $[p_0, p_1, ..., p_m]$ *é definido por* $\left(\frac{1}{m+1}\right).(p_0 + p_1 + ... + p_m)$*.*

Definição 1.19 *Seja* $[p_0, p_1, ..., p_m]$ *um m-simplexo. A* ***face oposta*** *a* p_i *é* $[p_0, ..., \widehat{p_i}, ...p_m] = \left\{ \sum_{j=0}^{m} t_j p_j \mid t_j \geq 0 \ e \ t_i = 0 \right\}$*. A* ***fronteira*** *de* $[p_0, p_1, ..., p_m]$ *é a união das faces.*

Claramente um m-simplexo tem (m+1)-faces e cada face pode ser vista como um (m-1)-simplexo.

Definição 1.20 *Seja* V *um conjunto não vazio.*

Um ***complexo simplicial*** *(abstrato)* K *é uma família não vazia de subconjuntos finitos de* V *tais que:*

1) *Se* $v \in V$ *então* $\{v\} \in K$*.*

2) *Se* $s \in K$ *e* $s' \subset s$ *então* $s' \in K$*.*

V é chamado de conjunto de vértices de K e é denotado por $vert(K)$ e, cada uma das famílias de subconjuntos não vazios de V tendo q+1 vértices distintos é chamado um q-simplexo.

Obtemos a **realização** de um complexo simplicial K, denotada por $\|K\|$, associando a cada elemento $s \in K$ um simplexo Δ_s que esta contido num espaço vetorial real com base $vert(K)$. Se $s = \{x_0, ...x_n\}$, $\Delta_s = [x_0, ...x_n]$. Assim, a realização de K é:

$$\|K\| = \bigcup_{s \in K} \Delta_s$$

com a topologia fraca induzida dos simplexos.

Portanto, A é aberto de $\|K\| \iff A \cap \Delta_s$ é aberto de $\Delta_s, \forall s \in K$.

Exemplo 1.11 Se X é um espaço topológico e $U = \{U_i\}_{i \in S}$ é uma cobertura aberta de X podemos definir um complexo simplicial tendo como vértices os conjuntos abertos de U e declarando que os conjuntos abertos $U_0, U_1, ..., U_q$ em U formam um simplexo se $\bigcap\limits_{i=0}^{q} U_i \neq \emptyset$.

Definição 1.21 *Seja K é um complexo simplicial. A* ***subdivisão baricêntrica****, $Sd(K)$, de K é o complexo simplicial dado por:*

$\cdot$ *$vert(Sd(K)) = \{$ simplexos $\sigma \mid \sigma \in K\}$*

$\cdot$ *Os simplexos de $Sd(K)$ são os conjuntos $\{\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_q\}$ com $\sigma_0 < \sigma_1 < ... < \sigma_q$, onde $\sigma_i < \sigma_j$ significa que $\sigma_i \subsetneq \sigma_j$.*

Observamos que $\|Sd(K)\| \approx \|K\|$ ($\approx$ significando homeomorfismo).

Capítulo 2

Fibrados

Este capítulo se destinará a apresentação de algumas definições e resultados com o objetivo de demonstrarmos, dentre outras coisas, que um G-fibrado principal é universal se o seu espaço total for contrátil. Além disso, constará uma seção com exemplos interessantes e pertinentes ao estudo de fibrados.

2.1 Definições

Como o próprio nome já diz, a seção trata de diversas definições úteis para compreensão do capítulo, dentre as quais destaca-se a definição de fibrado, definição esta que pode ser encarada como a generalização de espaços de recobrimento, ou seja, localmente como o produto do espaço base por sua fibra.

Definição 2.1 *Sejam X, B e F espaços (de Hausdorff) e $p : X \to B$ uma aplicação contínua. Dizemos que p é uma* ***projeção fibrada*** *com fibra F se para cada ponto de B existir uma vizinhança U e um homeomorfismo $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$ tal que $p(\phi(b, y)) = b$, para todo $b \in U$ e $y \in F$.*

Pode-se observar que em $p^{-1}(U), p$ corresponde a projeção $U \times F \to U$. Assim, a aplicação ϕ é chamada de **trivialização local**. Observamos também que se $b \in U$ então $\phi|\{b\} \times F \to p^{-1}(b)$ é um homeomorfismo, ou seja, se $p : X \to B$ é aplicação fibrada com fibra F, então $F \approx p^{-1}(b)\ \forall\ b \in B$.

Definição 2.2 *Um **grupo topológico** é um conjunto G junto com uma estrutura de grupo e uma topologia tal que a função $f : G \times G \to G$ dada por $(s, t) \mapsto st^{-1}$ é contínua.*

Definição 2.3 *Dizemos que um grupo topológico G atua em um espaço X à direita ou, equivalentemente, que X é um **G-espaço** à direita, se existe uma função $X \times G \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, que satisfaz os seguintes axiomas:*

(i) *Para cada $x \in X, s, t \in G$, tem-se $x(st) = (xs)t$;*

(ii) *Para cada $x \in X$, tem-se $xe = x$, onde e é o elemento neutro de G.*

Analogamente, podemos definir G-espaço à esquerda.

Definição 2.4 *Um grupo topológico **atua efetivamente** em X se $xs = x\ \forall\ x \in X$ implica $s = e$, onde e é o elemento neutro de G.*

Exibiremos, agora, a definição de fibrado a qual está em concordância com a referência [3].

Definição 2.5 *Seja G um grupo topológico atuando efetivamente à esquerda num espaço (de Hausdorff) F como um grupo de homeomorfismos. Sejam X e B espaços (de Hausdorff). Um **fibrado** ξ sobre um espaço base B, com espaço total X, fibra F e grupo estrutural G, consiste numa projeção fibrada $p : X \to B$ junto com uma coleção Φ de trivializações locais $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$, chamadas cartas sobre U, tais que:*

(1) *cada ponto de B possui uma vizinhança sobre a qual existe uma carta em Φ;*

(2) *se $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$ está em Φ e $V \subset U$, então a restrição de ϕ à $V \times F$ está em Φ;*

(3) *se $\psi, \phi \in \Phi$ são cartas sobre U, então existe uma aplicação $\theta : U \to G$ tal que $\psi(u, y) = \phi(u, \theta(u)(y))$;*

(4) *o conjunto Φ é maximal satisfazendo (1), (2) e (3).*

Denotamos o fibrado acima por $\xi = (X, p, B)$. Algumas vezes, o espaço total de um fibrado ξ é denotado por $E(\xi)$ e o espaço base por $B(\xi)$.

Observação 2.1 Dadas as cartas ϕ e ψ sobre U, temos que $\phi^{-1}\psi : U \times F \to U \times F$ é um homeomorfismo que comuta com a projeção $\pi : U \times F \to U$.

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p"] & U \times F \arrow[l, "\phi^{-1}"'] \arrow[dl, "\pi"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Assim, segue que $\phi^{-1}\psi(u, y) = (u, \mu(u, y))$, onde $\mu : U \times F \to F$ é a aplicação contínua dada por $\mu = \pi_F \phi^{-1}\psi$, com $\pi_F : U \times F \to F$ a projeção em F. Definindo $\theta : U \to G$ por $\theta(u)(y) = \mu(u, y)$, temos que θ do item (3) da definição acima é completamente determinado pelas cartas ϕ e ψ.

Definição 2.6 *Uma* ***secção*** *de um fibrado $\xi = (X, p, B)$ é uma função contínua $s : B \to X$ tal que $ps = id_B$. Em outras palavras, a secção é uma função $s : B \to X$ tal que $s(b) \in p^{-1}(b)$ para cada $b \in B$.*

A próxima definição trata de morfismo de fibrados que grosseiramente falando é uma aplicação que preserva fibras.

Definição 2.7 *Sejam* $\xi = (X, p, B)$ *e* $\xi' = (X', p', B')$ *dois fibrados. Um* ***morfismo de fibrados*** $(u, f) : \xi \to \xi'$ *é um par de funções* $u : X \to X'$, $f : B \to B'$ *tais que* $p'u = fp$.

A relação $p'u = fp$ indica que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"] & X' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

Com as definições acima podemos naturalmente introduzir a categoria de fibrados, denotada por **Bun**, onde:

$Obj(Bun)$ = conjunto de todos os fibrados ξ sobre o espaço B.

$Hom_{Bun}(\xi, \xi')$ = conjunto de todos os morfismos $(u, f) : \xi \to \xi'$.

$\circ$: Para quaisquer $(u, f) : \xi \to \xi'$ e $(u', f') : \xi' \to \xi''$ define-se $(u', f') \circ (u, f) = (u'u, f'f)$.

Definição 2.8 *Um fibrado* $\xi = (X, p, B)$ *é dito* ***fibrado trivial*** *se* ξ *é isomorfo ao fibrado produto* $(B \times F, p, B)$,*ou seja, existem* $(u, f) : \xi \to (B \times F, p, B)$ *e* $(u', f') : (B \times F, p, B) \to \xi$ *morfismos de fibrados tais que* $uu' = id_{B\times F}$, $u'u = id_X$ *e* $f = f' = id_B$.

Definição 2.9 *Seja* $\xi = (X, p, B)$ *um fibrado sobre* B *e* A *um subconjunto de* B. *Então a restrição de* ξ *a* A, *denotada* $\xi|A$, *é o fibrado* (X', p', A), *onde* $X' = p^{-1}(A)$ *e* $p' = p|A$.

Definição 2.10 *Consideremos $\xi = (X, p, B)$ um fibrado e $f : B_1 \to B$ uma função contínua. O **fibrado induzido** de ξ sobre f, denotado por $f^*(\xi) = (X_1, p_1, B_1)$, é o fibrado cujo espaço base é B_1, o espaço total X_1 é o subespaço de todos os pares $(b_1, x) \in B_1 \times X$ tais que $f(b_1) = p(x)$ e a projeção fibrada p_1 é definida por $(b_1, x) \mapsto b_1$.*

Se $f^*(\xi)$ é o fibrado induzido de ξ sobre $f : B_1 \to B$, então $f_\xi : E(f^*(\xi)) \to E(\xi)$ dada por $f_\xi(b_1, x) = x$ juntamente com f definem um morfismo $(f_\xi, f) : f^*(\xi) \to \xi$. Este morfismo é chamado de **morfismo canônico** de um fibrado induzido.

Introduzimos agora o fibrado principal, relacionando de maneira especial espaço base, espaço total e grupo estrutural.

Definição 2.11 *Um fibrado $\xi = (X, p, B)$ em que sua fibra é o grupo estrutural G atuando em si mesmo por multiplicação é dito **fibrado principal** ou, equivalentemente, **G-fibrado principal**.*

Observação 2.2 Notemos que se $\xi = (X, p, B)$ é um G-fibrado principal, então a ação à esquerda $G \times G \to G$ é **livre**, ou seja, $g.x = x$ para algum $x \in G$ implica $g = e$ (e elemento neutro de G).

Observação 2.3 Para todo G-fibrado principal, $\xi = (X, p, B)$, temos que G atua naturalmente em X através da ação livre

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \to & X \\ (x, g) & \mapsto & \theta_x(\theta_x^{-1}(x).g) \end{array}$$

sendo $\theta_x : G \to p^{-1}(p(x))$ um homeomorfismo (mais precisamente $\theta_x = \phi_{j,p(x)} : G \to p^{-1}(p(x))$ conforme definido no item (9) pg. 7 de [25]).

Além disso, $\frac{X}{G} \approx B$. Para tanto basta considerarmos $h : \frac{X}{G} \to B$ definida por $h(xG) = p(x)$ e $h'(b) = xG$, $x \in p^{-1}(b)$. Estas aplicações são inversas uma da outra e estão bem definidas pois:

$$
\begin{aligned}
\cdot h((xs)G) &= p(x.s) \\
&= p(\theta_x(\theta_x^{-1}(x)s)) \\
&= (p \circ \theta_x)(\theta_x^{-1}(x)s) \\
&= \pi((p(x), \theta_x^{-1}(x)s)) \\
&= p(x) \\
&= h(xG)
\end{aligned}
$$

$\cdot$ Sejam $b \in B$ e $x, x' \in p^{-1}(b)$ distintos. Mostraremos que $x' = x.g$, para algum $g \in G$, logo $h'(b) = x'G = (x.g)G = xG$.

Se $b \in B$ então existe $\theta : G \to p^{-1}(b)$ homeomorfismo. Logo, dados $x, x' \in X$ existem $g_0, g_1 \in G$ tais que $\theta(g_0) = x$ e $\theta(g_1) = x'$. Portanto, para $g = g_0^{-1}g_1$ temos:

$$x.g = x.(g_0^{-1}g_1) = \theta(\theta^{-1}(x)g_0^{-1}g_1) = \theta(\theta^{-1}(\theta(g_0))g_0^{-1}g_1) = \theta(g_1) = x'$$

Um morfismo entre G-fibrados principais $(u, f) : \xi \to \xi'$ que satisfaz $u(xs) = u(x)s, \forall x \in E(\xi)$ e $\forall s \in G$, é definido como sendo um **G-morfismo**.

Sejam $\xi = (X, p, B)$ um G-fibrado principal e F um G-espaço à esquerda. A relação $(X \times F) \times G \to (X \times F)$ dada por $(x, y)s = (xs, s^{-1}y)$ define uma ação à direita em $X \times F$. Considere X_F o espaço quociente $\frac{X \times F}{G}$ e $p_F : X_F \to B$ a projeção definida por $p_F((x, y)G) = p(x)$ para qualquer $(x, y) \in X \times F$.

Definição 2.12 *Com a notação acima, o fibrado (X_F, p_F, B), denotado por $\xi[F]$, é chamado de **fibrado associado** sobre B com fibra F, onde G é o grupo estrutural do fibrado associado.*

As definições seguintes são necessárias para caracterizarmos um G-fibrado universal.

Definição 2.13 *Uma cobertura aberta* $\{U_i\}_{i\in S}$ *de um espaço topológico é* ***numerável*** *contanto que exista uma partição da unidade (localmente finita)* $\{u_i\}_{i\in S}$ *tal que* $u_i^{-1}(0,1] \subset U_i$ *para cada* $i \in S$.

Definição 2.14 *Um G-fibrado principal* ξ *sobre um espaço* B *é numerável contanto que exista uma cobertura numerável* $\{U_i\}_{i\in S}$ *de* B *tal que* $\xi|U_i$ *é trivial para cada* $i \in S$.

Observação 2.4 Um espaço de Hausdorff B é paracompacto se e só se cada cobertura aberta é numerável. (cf. [4] Theorem 4.2 pg. 170)

Agora, para cada espaço B denotemos por $K_G(B)$ o conjunto das classes de isomorfismos de G-fibrados principais numeráveis sobre B e, por $\{\xi\}$ a classe de isomorfismos do G-fibrado principal ξ sobre B. Para a classe de homotopia de $f : X \to Y$ definimos a função $K_G([f]) : K_G(Y) \to K_G(X)$ pela relação $K_G([f])\{\xi\} = \{f^*(\xi)\}$. Como o elemento $\{f^*(\xi)\}$ independe do representante de $\{\xi\}$, $(\xi \cong \eta \Rightarrow f^*(\xi) \cong f^*(\eta))$ e, como $[f]$ independe do representante da classe,$(f \simeq g \Rightarrow f^*(\xi) \cong g^*(\xi))$ conforme [6], facilmente verificamos que K_G é um funtor contravariante da categoria dos espaços e classes de homotopia sobre a categoria de conjuntos e funções.

Seja $\omega = (E_o, p_o, B_o)$ um G-fibrado principal numerável fixado. Para cada espaço B definimos a função $\phi_\omega(B) : [B, B_o] \to K_G(B)$ pela relação $\phi_\omega(B)[u] = \{u^*(\omega)\}$.

Proposição 2.1 *O conjunto das funções* $\phi_\omega(-) : [-, B_o] \to K_G(-)$ *é uma transformação natural (um morfismo de funtores).*

Demonstração: Verificar que ϕ_ω é uma transformação natural é verificar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[X, B_0]} \arrow[r, "\phi_\omega(X)"] & K_G(X) \\
{[Y, B_0]} \arrow[u, "{[f, B_0]}"] \arrow[r, "\phi_\omega(Y)"] & K_G(Y) \arrow[u, "K_G(f)"']
\end{tikzcd}$$

para qualquer função contínua $f : X \to Y$.

Seja $[u]$ um elemento de $[Y, B_0]$, logo

$$\begin{aligned}
(\phi_\omega(X) \circ [f, B_0])([u]) &= \phi_\omega(X)([f, B_0])([u]) \\
&= \phi_\omega(X)([u \circ f]) \\
&= \{(uf)^*(\omega)\} \\
&= \{f^*(u^*(\omega))\} \\
&= K_G([f])(\{u^*(\omega)\}) \\
&= K_G([f])(\phi_\omega(Y)([u])) \\
&= (K_G([f]) \circ \phi_\omega(Y))([u])
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ_ω é uma transformação natural. □

Por fim, temos a seguinte definição de G-fibrado universal.

Definição 2.15 *Um G-fibrado principal $\omega = (E_o, p_o, B_o)$ é **universal** contanto que ω seja numerável e $\phi_\omega(-) : [-, B_o] \to K_G(-)$ seja um isomorfismo. O espaço B_o é chamado de **espaço classificante** de G.*

2.2 Proposições e Teoremas

A presente seção traz alguns teoremas e proposições que serão necessários para se estabelecer um critério sobre a universalidade de fibrados. Este critério é significativo pois identifica aqueles fibrados ω que podem ser considerados como geradores da categoria de G-fibrados principais no sentido de que qualquer G-fibrado é isomorfo ao fibrado induzido de ω por alguma aplicação entre os seus espaços bases.

Proposição 2.2 *Um G-fibrado principal $\omega = (E_o, p_o, B_o)$ é universal se e só se as seguintes condições são verdadeiras:*

(1) *Para cada G-fibrado principal numerável ξ sobre X existe uma função $f : X \to B_o$ tal que ξ e $f^*(\omega)$ são isomorfos sobre X;*

(2) *Se $f, g : X \to B_o$ são duas funções tais que $f^*(\omega)$ e $g^*(\omega)$ são isomorfos então f e g são homotópicas.*

Demonstração: Basta observarmos que a condição (1) diz que $\phi_\omega(X)$ é sobrejetiva e que a condição (2) diz que $\phi_\omega(X)$ é injetiva. □

Lema 2.1 *Sejam $\xi = (E, p, B)$ um fibrado, $f : B_1 \to B$ uma função contínua e $(f_\xi, f) : f^*(\xi) \to \xi$ o morfismo canônico do fibrado induzido. Se s é uma secção de ξ, então $\sigma : B_1 \to E(f^*(\xi))$ dada por $\sigma(b_1) = (b_1, sf(b_1))$ é uma secção de $f^*(\xi)$ com $f_\xi \sigma = sf$. Se f é uma aplicação quociente e se σ é uma secção de $f^*(\xi)$ tal que $f_\xi \sigma$ é constante em todos os conjuntos $f^{-1}(b)$, para cada $b \in B$, então existe uma secção s de ξ tal que $sf = f_\xi \sigma$.*

Demonstração: Para a primeira consideração, observemos que σ é contínua pois cada uma das suas coordenadas o é e que $p_1\sigma(b_1) = p_1(b_1, sf(b_1)) = b_1$, onde p_1 é a projeção fibrada de $f^*(\xi)$. Portanto, σ é uma secção de $f^*(\xi)$ satisfazendo $f_\xi \sigma(b_1) = f_\xi(b_1, sf(b_1)) = sf(b_1)$.

No segundo caso, para cada $b \in B$ seja $s(b) = f_\xi \circ \sigma(b_1)$ sendo b_1 qualquer elemento em $f^{-1}(b)$. Como σ é constante sobre $f^{-1}(b)$ e f é sobre

(f é aplicação quociente) segue que s é bem definida. Além disso, verifica-se diretamente da definição de s dada acima que $s \circ f = f_\xi \circ \sigma$. Finalmente notamos que s é contínua pois, se $U \subseteq E$ é aberto então como f é aplicação quociente temos que $s^{-1}(U)$ será aberto em B se, e somente se, $f^{-1}(s^{-1}(U))$ for aberto em B_1, mas como $f^{-1}(s^{-1}(U)) = (s \circ f)^{-1}(U) = (f_\xi \circ \sigma)^{-1}(U)$, e f_ξ e σ são contínuas segue o resultado. $\square$

O próximo lema é fundamental na teoria de classificação de fibrados sobre complexos-CW.

Lema 2.2 *Sejam $\xi = (E, p, B)$ um fibrado com fibra F, B um complexo-CW e $A = vert(B)$. Se o espaço F é (m-1)-conexo para cada $m \leq dimB$, então toda secção s de $\xi|A$ é prolongada a uma secção s^* de ξ, ou seja, $s^*|A = s$.*

Demonstração: A prova será dada por indução em n, onde $n = dimB$.

Se $n = 0$ temos $B = A$ e, portanto, $s^* = s$.

Assuma que o teorema seja válido para todo espaço B com $dimB < n$.

Considere B um complexo-CW de dimensão n.

Pela hipótese de indução existe uma secção s' de $\xi|B_{n-1}$ com $s'|A = s$, onde B_{n-1} é o (n-1)-esqueleto de B.

Considere, agora, C uma n-célula de B com aplicação característica $u_c : I^n \to B$. O fibrado induzido $u_c^*(\xi)$ sobre I^n é localmente trivial, isto é, para qualquer ponto $t \in I^n$ existe uma vizinhança aberta V de t em I^n tal que $u_c^*(\xi)|V$ é trivial. Como I^n é compacto é possível decompor I^n em uma quantidade finita de cubos iguais K de tal forma que $u_c^*(\xi)|K$ é trivial.

Pelo lema 2.1 a secção s' define uma secção σ' de $u_c^*(\xi)|\partial I^n$. Aplicando a hipótese de indução a σ' e assumindo que σ' é definida sobre (n-1)-esqueleto de I^n decomposto sobre os cubos K, a secção σ' definida sobre ∂K é dada por uma função $\partial K \to F$ (toda secção de um fibrado produto $(B \times F, p, B)$ tem a forma $s(b) = (b, f(b))$ onde $f : B \to F$ é uma aplicação contínua) que pela hipótese de conexidade de F estende-se à K. (cf. teorema 1.3)

Assim, prolongando cada célula K obtemos uma secção σ de $u_c^*(\xi)$ de tal forma que $u_c^*(\xi)|\partial I^n = \sigma'$.

Usando o morfismo natural $u_c^*(\xi) \to \xi$ sobre u_c, o lema 2.1 e mais o fato de que uma aplicação de um complexo-CW em outro complexo-CW que aplica células em células é uma aplicação quociente, temos uma secção s_c de $\xi|C$ tal que $s_c|(C \cap B_{n-1}) = s'|(C \cap B_{n-1})$.

Defina, portanto, uma secção s^* de ξ por $s^*|B_{n-1} = s'$ e $s^*|C = s_c$. Observe que s^* é contínua pela propriedade da topologia fraca do complexo-CW B, pois se F é fechado em $E, (s^*)^{-1}(F)$ é fechado em B se, e somente se, $(s^*)^{-1}(F) \cap B_i$ é fechado em B_i, para $i \leq n$.

Se $i < n$ então $(s^*)^{-1}(F) \cap B_i = (s')^{-1}(F) \cap B_i$, fechado em B_i.

Se $i = n$ então $(s^*)^{-1}(F) \cap B_i = (s_c)^{-1}(F) \cap B_i$, fechado em B_n.

Finalmente, se $dimB = \infty$ e F é n-conexo para cada n é possível construir por indução secções s_n de $\xi|B_n$ tais que $s_n|B_{n-1} = s_{n-1}$ e $s_{-1} = s$. Defina a secção s^* de ξ por $s^*|B_n = s_n$. $\square$

Observação 2.5 Uma demonstração análoga é obtida substituindo-se a hipótese de complexo-CW por complexo-CW relativo para um par (B, A).

Para maiores detalhes veja [6].

Teorema 2.1 *Todo G-morfismo entre G-fibrados principais sobre o mesmo espaço B é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja $(u, f) : (X, p, B) \to (X', p', B)$ um G-morfismo de G-fibrados principais.

$\cdot$ u é injetiva;

Suponhamos que $u(x_1) = u(x_2)$. Logo, $p(x_1) = p'u(x_1) = p'u(x_2) = p(x_2)$, ou seja, $p(x_1) = p(x_2)$. Como estamos trabalhando com G-fibrados principais $p(x_1) = p(x_2)$ implica que $x_1 = x_2 s$, para algum $s \in G$.

Assim,

$$u(x_1) = u(x_2) = u(x_1 s^{-1}) = u(x_1)s^{-1} \Longrightarrow s = e$$

onde e é o elemento neutro de G e, portanto, $x_1 = x_2$.

$\cdot$ u é sobrejetiva;

Seja $x' \in X'$, como $p'(x') = b = p(x)$ para algum $x \in X$, temos: $p'(x') = p(x) = p'(u(x)) \Longrightarrow u(x)s = x'$para algum $s \in G$, ou seja, $u(xs) = x'$.

$\cdot$ u^{-1} é contínua;

Sejam $u(a) = a' \in X'$ e V uma vizinhança aberta de a em X. Queremos determinar uma vizinhança W de a' em X' tal que $u^{-1}(W) \subset V$.

Pela continuidade da ação de G em X, existem vizinhanças abertas V_1 de a em X e N de e em G tal que $V_1 N \subset V$. Existe, também, uma vizinhança W de a' em X' tal que $\tau'((W \times W) \cap X'^*) \subset N$, onde τ' é a função determinada por $\tau'(x, y) = \theta(x)$, com θ explicitado na definição 2.5 e, $X'^* = \{(x, xs) \in X' \times X' \mid x \in X' \text{ e } s \in G\}$.

Usando a continuidade de u podemos trocar V_1 por $V_1 \cap u^{-1}(W)$ de forma que $u(V_1) \subset W$.

Seja $p(V_1) = U$. Como p é aplicação aberta (conforme observação abaixo) segue que U é uma vizinhança aberta de $b = p(a) = p'(a')$ pois $a' = u(a)$.

Trocando W por $W \cap (p')^{-1}(U)$ temos que $p'(W) \subseteq U = p(V_1)$.

Para $x' \in W$ escolha $x \in V_1$ tal que $p(x) = p'(x')$. Então temos $u(x), x' \in W$, $u(x)s = x'$ para algum $s \in N$ e $x' = u(x)s = u(xs)$, onde

$xs \in V_1N \subset V$. Dessa forma, para cada $x' \in W$, temos $u^{-1}(x') \in V$, onde $u^{-1}(W) \subset V$. Portanto, u^{-1} é contínua para cada $a' \in X'$. $\square$

Observação 2.6 Para todo G-fibrado principal (X, p, B), temos que p é uma aplicação aberta.

Considere o diagrama comutativo abaixo, onde π é a projeção natural.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "p"] \\
\frac{X}{G} \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

π é uma aplicação aberta pois $x \mapsto xs$ é homeomorfismo e, para W subconjunto aberto de X, $\pi(W)$ é aberto de $\frac{X}{G}$ se e só se $\pi^{-1}(\pi(W))$ é aberto de X. Mas, $\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup\limits_{s \in G} Ws$ é a união de subconjuntos abertos de X.

Como $B \approx \frac{X}{G}$ pela observação 2.3, segue que g é homeomorfismo e, portanto, p é aberta.

Teorema 2.2 *Considere o G- fibrado principal $\xi = (X, p, B)$.*

Para cada função $f : B_1 \to B$ o espaço total X_1 de $f^*(\xi) = (X_1, p_1, B_1)$ possui uma estrutura natural de G-espaço e, existe um homeomorfismo $g : \frac{X_1}{G} \to B_1$ fazendo o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "f_\xi"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d, "p"] \arrow[dr] & \\
\frac{X_1}{G} \arrow[r, "g"] & B_1 \arrow[r, "f"] & B & \frac{X}{B} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Além disso, $f^*(\xi) = (X_1, p_1, B_1)$ também é um G-fibrado principal.

Demonstração: Defina a ação em X_1 pela relação $(b_1, x)s = (b_1, xs)$, $s \in G$ e $(b_1, x) \in X_1$. Como $p(xs) = p(x)$ segue que $(b_1, xs) \in X_1$. Então, $f_\xi((b_1, x)s) = f_\xi(b_1, xs) = xs = f_\xi(b_1, x)s$, o que implica que f_ξ é um G-morfismo de G-fibrados principais.

Defina $g : \frac{X_1}{G} \rightarrow B_1$ por $g((b_1, x)G) = b_1$.

$\cdot$ g está bem definida;

$(b_1, x)G = (b_1', x')G \Longrightarrow b_1 = b_1'$ e, assim, $g((b_1, x)G) = g((b_1', x')G)$

$\cdot$ g é contínua;

Seja U aberto de B_1.

$g^{-1}(U)$ é aberto de $\frac{X_1}{G} \Leftrightarrow \pi^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto de X_1.

Como $\pi^{-1}(g^{-1}(U)) = p_1^{-1}(U)$ segue que g é contínua.

$\cdot$ g é sobrejetiva;

Seja qualquer $b_1 \in B_1$. Como p é sobrejetiva segue que existe $x \in X$ tal que $p(x) = f(b_1)$, logo $(b_1, x) \in X_1$ e $p_1(b_1, x) = b_1$. Portanto, p_1 é sobrejetiva.

$\cdot$ g é injetiva;

Basta observarmos que:

$$\begin{aligned} g((b_1, x)G) = g((b_1', x')G) &\Leftrightarrow g(\pi(b_1, x)) = g(\pi(b_1', x')) \\ &\Leftrightarrow p_1(b_1, x) = p_1(b_1', x') \\ &\Leftrightarrow b_1 = b_1' \text{ e } p(x) = p(x') = f(b_1) = f(b_1') \\ &\Leftrightarrow b_1 = b_1' \text{ e } x = x's, \text{para algum} s \in G \\ &\Leftrightarrow (b_1, x)G = (b_1', x')G. \end{aligned}$$

$\cdot$ g é uma aplicação aberta;

Começamos observando que se $\eta = (E, q, D)$ é um fibrado tal que a aplicação q é aberta e $f : D' \rightarrow D$ é contínua, então o fibrado induzido $f^*(\eta)$ possui sua projeção fibrada aberta. (cf. [6] prop. 5.9 pg. 19)

Como p é aberta (obs. 2.6) segue que p_1 também o é. Assim, dado W aberto de $\frac{X_1}{G}$ temos que $g(W) = g(\pi(\pi^{-1}(W))) = g \circ \pi(\pi^{-1}(W)) = p_1(\pi^{-1}(W))$

é aberto em B_1.

Portanto, g é um homeomorfismo.

ξ é um G-fibrado principal com função $\tau : X^* \to G$ dada por $\tau(x, x') = \theta(x)$ (vide definição 2.5) onde X^* é o subespaço dos elementos $(x, x') \in X \times X \mid x' = xs$, para algum $s \in G$. Definimos, então, $\tau_1 : X_1^* \to G$ por $\tau_1((b_1, x), (b_1, x')) = \tau(x, x')$. Observemos que, $((b_1, x), (b_1', x')) \in X_1^* \Leftrightarrow b_1 = b_1'$ e $(x, x') \in X^*$.

Obviamente τ_1 é contínua e, portanto, $f^*(\xi) = (X_1, p_1, B_1)$ é um G-fibrado principal. $\square$

Teorema 2.3 *Seja $(v, f) : \eta \to \xi$ um G-morfismo de G-fibrados principais e seja $\eta \xrightarrow{g} f^*(\xi) \xrightarrow{f_\xi} \xi$ a fatoração canônica dada por $f_\xi g = v$, conforme descrito abaixo.*

$$\begin{tikzcd}
E(\eta) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_\eta"] \arrow[rr, bend left, "v"] & E(f^*(\xi)) \arrow[r, "f_\xi"] \arrow[d, "\pi"] & E(\xi) \arrow[d, "p_\xi"] \\
B(\eta) \arrow[r, "id"] & B(\eta) \arrow[r, "f"] & B(\xi)
\end{tikzcd}$$

$E(f^*(\xi)) = \{(x, y) \in B(\eta) \times E(\xi) : f(x) = p_\xi(y)\}$

g é definida por $g(z) = (p_\eta(z), v(z))$. Observemos que $g(z) \in E(f^*(\xi))$ pois $f(p_\eta(z)) = p_\xi(v(z))$. Como (v, f) é morfismo de fibrados então (g, id) também é morfismo de fibrados.

Então g é um isomorfismo de fibrado principal sobre $B(\eta)$ e portanto η e $f^*(\xi)$ são G-fibrados principais isomorfos.

Demonstração: Queremos mostrar que $g : \eta \to f^*(\xi)$ dada por $x \mapsto (p_\eta(x), v(x))$ é um isomorfismo.

Pelo teorema 2.2 $f^*(\xi)$ é um G-fibrado principal e, pelo teorema 2.1 g é um $B(\eta)$-isomorfismo. $\square$

Proposição 2.3 *Sejam $\xi = (X, p, B)$ e $\xi' = (X', p', B')$ G-fibrados principais. Então todo G-morfismo de $\xi \to \xi'$ está em correspondência com uma secção de $\xi[X']$.*

Demonstração: Basta observarmos que cada função $\phi : X \to X' \mid \phi(xt) = t^{-1}\phi(x) = \phi(x)t$ está em correspondência bijetiva com as secções $s : B \to X_{X'}$ de $\xi[X']$ através das relações:

$\cdot \phi : X \to X' \Rightarrow \exists\ s_\phi : B \to X_{X'}$ dada por $s_\phi(xG) = (x, \phi(x))G$

$\cdot s : B \to X_{X'} \mid s(xG) = (x, \widetilde{\phi}(xG))G \Rightarrow \exists\ \phi_s : X \to X'$ determinada pela relação $\phi_s(x) = \widetilde{\phi}(xG)$.

Para maiores detalhes ver [6]. $\square$

Desde que todos os complexos-CW são paracompactos e que todas as coberturas abertas de espaços paracompactos são numeráveis, é possível determinarmos uma classificação homotópica de fibrados principais, com grupo estrutural G, sobre complexos-CW com o teorema abaixo.

Teorema 2.4 *Seja B uma complexo-CW e $\omega = (X_o, p_o, B_o)$ um G-fibrado principal tal que $\pi_i(X_o) = 0$ para $i \leq \dim B$. Então a função $\phi_\omega(B) : [B, B_o] \to K_G(B)$ definida anteriormente (vide prop. 2.1 pg. 27) é uma bijeção.*

Demonstração: Mostremos, primeiramente, que $\phi_\omega(B)$ é sobrejetiva.

Seja ξ um G-fibrado principal sobre B. Pelo lema 2.2 o fibrado $\xi[X_o]$ possui uma secção, pois a fibra de $\xi[X_o]$ é (m-1)-conexo com $m \leq \dim B$.

Pela proposição 2.3 segue que existe um morfismo $(u, f) : \xi \to \omega$ entre os fibrados principais ξ e ω. Pelo teorema 2.3 temos que $\{\xi\} = \{f^*(\omega)\} = \phi_\omega(B)([f])$.

Provaremos, agora, que $\phi_\omega(B)$ é injetiva.

Sejam $f, g : B \to B_o$ funções tais que $\{f^*(\omega)\} = \{g^*(\omega)\}$, então temos os morfismos de fibrados $(f^*(\omega) \times I)|B \times \{0\} \to f^*(\omega) \to \omega$ e $(f^*(\omega) \times I)|B \times \{1\} \to g^*(\omega) \to \omega$ e pela proposição 2.3 o fibrado $(f^*(\omega) \times I)[X_o]$ possui uma secção s sobre $B \times \{0, 1\}$. Pela observação 2.5, esta secção s pode ser prolongada a uma secção s^* de $(f^*(\omega) \times I)[X_o]$ sobre $B \times I$. Novamente pela proposição 2.3, temos um morfismo de fibrado principal $(u, h) : f^*(\omega) \times I \to \omega$ tal que $h(b, 0) = f(b)$ e $h(b, 1) = g(b)$ para cada $b \in B$, ou seja, $f \simeq g$. $\square$

Corolário 2.1 *Seja $\xi = (E_0, p_0, B_0)$ um G-fibrado principal. Se E_0 é contrátil então ξ é um G-fibrado universal.*

Observamos que a recíproca do corolário acima também é verdadeira (cf. [25], pg 102).

Finalizamos esta seção com o seguinte resultado que relaciona fibrados com grupos de homotopia, o qual evidencia a importância do estudo de fibrados para o cálculo de tais grupos.

Teorema 2.5 *Seja (E, p, B) um fibrado, e seja $x_0 \in p^{-1}(b_0) = F \overset{j}{\hookrightarrow} E$ ($b_0 \in B$). Então existe um homomorfismo de grupo $\partial : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0)$ tal que a seguinte seqüência de grupos e homomorfismos é exata.*

$$\cdots \to \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_{n-1}(E, x_0) \to \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_0(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0) \to 0$$

ou seja, em cada nível temos $Ker\ \partial = Im\ p_*$, $Ker\ j_* = Im\ \partial$ e $Ker\ p_* = Im\ j_*$, cuja demonstração pode ser encontrada em [5] ou [25].

2.3 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de fibrados e um teorema muito útil para identificá-los. Este, por sua vez, relaciona-se diretamente com grupos de Lie garantindo a existência de inúmeros fibrados.

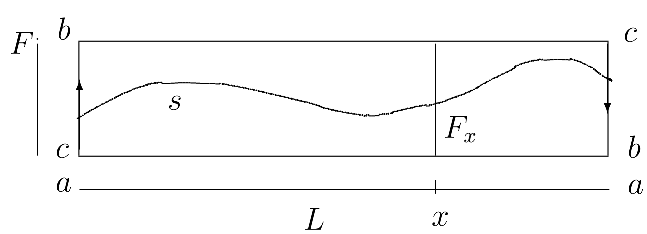
Exemplo 2.1 O Fibrado Produto $(B \times F, p, B)$.

Neste caso a aplicação fibrada é a projeção na primeira variável, $\phi = id$ e $U = B$. Observe que o grupo estrutural consiste apenas do elemento neutro $(id : F \to F)$.

Exemplo 2.2 A Faixa de Möbius (X, p, B).

O seu espaço base B é um círculo obtido de um segmento de reta $L = [0, 2\pi]$ pela identificação de seus elementos extremos. A fibra $F = [0, 1]$ é um segmento de reta. O espaço total X é obtido do produto $L \times F$ pela identificação dos pontos $(0, t)$ e $(2\pi, 1 - t)$, t percorrendo o intervalo $[0, 1]$. A projeção fibrada $p : X \to B$ é dada por $p([x, y]) = x$ onde [x,y] denota a classe do elemento (x,y) em X.

Além disso, dada qualquer curva contínua $s' : L \to F$ com seus pontos finais identificados, podemos definir uma secção $s : B \to X$ tal que $s(x) = [x, s'(x)]$, conforme observa-se na figura abaixo.



Observe que não existe um único homeomorfismo de $F_x = p^{-1}(x)$

com F. Existem dois homeomorfismos que se diferenciam por uma aplicação $\sigma : F \to F$ obtida pela reflexão no ponto médio de F, ou seja, pela reflexão em torno do zero. Neste caso, o grupo G é o grupo cíclico de ordem dois gerado por σ. Observe, também, que dado um ponto $x_o \in B$ e uma vizinhança $V = S^1 - \{-x_o\}$, onde $-x_o$ é o elemento oposto de x_o em S^1, é possível determinarmos as trivializações:

$$\phi : V \times F \to p^{-1}(V) \mid (x, y) \longmapsto [x, y]$$

$$\phi' : V \times F \to p^{-1}(V) \mid (x, y) \longmapsto [x, \sigma(y)]$$

Exemplo 2.3 Fibrados de Hopf.

Os fibrados de Hopf são

$$\begin{aligned} p &: S^n \to \mathbb{R}P^n \\ p &: S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n \\ p &: S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n \end{aligned}$$

onde $\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$ são os espaços projetivos real, complexo e quaterniônico, respectivamente. Mostraremos que $p : S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$ é um fibrado construindo suas trivializações locais.

Primeiramente, observamos que $\mathbb{H}P^n \approx \frac{S^{4n+3}}{\sim}$ onde $\sim$ é a relação de equivalência definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow y = \lambda x, \ \lambda \in S^3.$$

S^3 atua de maneira natural em S^{4n+3}, ou seja, para cada $u \in S^3$ e cada $w = (h_0, h_1, ..., h_n) \in S^{4n+3}$ temos $u.w = (u.h_0, u.h_1, ..., u.h_n) \in S^{4n+3}$ pois

$$\begin{aligned}|u.h_0|^2+|u.h_1|^2+...+|u.h_n|^2 &= |u|^2.|h_0|^2+|u|^2.|h_1|^2+...+|u|^2.|h_n|^2\\ &= 1.|h_0|^2+1.|h_1|^2+...+1.|h_n|^2\\ &= |h_0|^2+|h_1|^2+...+|h_n|^2\\ &= 1\end{aligned}$$

Observe que S^{4n+3}está sendo considerada como o conjunto das (n+1)-uplas de números quaterniônicos $w=(h_0,h_1,...,h_n)$ tais que $|h_0|^2+|h_1|^2+...+|h_n|^2=1$.

Consideremos, para $j=0,1,...,n$, os seguintes conjuntos abertos $V_j=\{w=(h_0,h_1,...,h_n)\in S^{4n+3}\mid h_j\neq 0\}$. Como p é uma aplicação aberta, segue que $p(V_j)=U_j$ é um aberto de $\mathbb{H}P^n$.

Os abertos U_j cobrem $\mathbb{H}P^n$ e além disso, $p^{-1}(U_j)=V_j$.

- $V_j\subseteq p^{-1}(U_j)$ pois $p(V_j)=U_j$.
- $p^{-1}(U_j)\subseteq V_j$ pois se $u\in p^{-1}(U_j)$ temos $p(u)\in U_j=p(V_j)\Longrightarrow p(u)=p(z), z\in V_j\Longrightarrow u=v.z, v\in S^3\Longrightarrow u_j=v.z_j$ como $z_j\neq 0$ e $v\in S^3$ temos que $u_j\neq 0$, ou seja, $u\in V_j$.

Consideremos a aplicação $\psi_j:V_j\to U_j\times S^3$ dada por $\psi_j(w)=(p(w),\frac{w_j}{|w_j|})$. Note que $\frac{w_j}{|w_j|}\in S^3$, pois $\left|\frac{w_j}{|w_j|}\right|=\frac{|w_j|}{|w_j|}=1$, e ψ_j é contínua pois é uma composição de contínuas. Uma aplicação inversa para ψ_j é definida como $\phi_j:U_j\times S^3\to V_j$ dada por $\phi_j(p(w),u)=\frac{u.\overline{w_j}}{|w_j|}.w$, onde $\overline{w_j}$ representa o conjugado de w_j.

· ϕ_j está bem definida.

$\phi_j(p(vw),u)=\frac{u.\overline{v_j}.\overline{w_j}}{|v_j||w_j|}.v.w=u.\frac{|v|^2}{|v|}.\frac{\overline{w_j}}{|w_j|}.w=u.\frac{\overline{w_j}}{|w_j|}.w=\frac{u.\overline{w_j}}{|w_j|}.w=\phi_j(p(w),u)$

· ϕ_j é contínua pois $\phi_j(p(w),u)=u.\sigma_j(w)$, onde $\sigma_j:U_j\to V_j$, dada por $\sigma_j(p(w))=\frac{\overline{w_j}}{|w_j|}.w$, é uma função bem definida e contínua.

Analogamente podemos mostrar que as demais aplicações são fibrados.

Observação 2.7

1) A faixa de Möbius (exemplo 2.2) é o fibrado associado do fibrado de Hopf $\mathbb{Z}_2 \cdots S^1 \to \mathbb{R}P^1 \equiv S^1$ com fibra $F = [0,1]$.

2) Uma vez que S^n é (n-1)-conexo segue do teorema 2.4 que os fibrados de Hopf são k-universais com $k = n-1,\ 2n,\ 4n+2$ respectivamente.

3) Fazendo $n = \infty$ nos fibrados de Hopf, ou seja, $S^\infty = \underset{n\geq 0}{\cup} S^n$, $\mathbb{R}P^\infty = \underset{n\geq 0}{\cup} \mathbb{R}P^n$, $\mathbb{H}P^\infty = \underset{n\geq 0}{\cup} \mathbb{H}P^n$ temos ainda os fibrados:

$$\mathbb{Z}_2 \cdots S^\infty \to \mathbb{R}P^\infty$$

$$S^1 \cdots S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$$

$$S^3 \cdots S^\infty \to \mathbb{H}P^\infty$$

os quais são universais, pois $\pi_n(S^\infty) = 0\ \forall n \geq 0$.

Consideremos, agora, o seguinte teorema.

Teorema 2.6 *Seja B um grupo topológico e G um subgrupo fechado atuando em B através da operação do grupo. Então $p : B \to \frac{B}{G}$ é um fibrado com fibra G, desde que exista uma secção local de G em $\frac{B}{G}$, ou seja, exista V vizinhança de G em $\frac{B}{G}$ tal que $f : V \subset \frac{B}{G} \to B$ é contínua e $p(f(x)) = x, \forall x \in V$.*

Demonstração: Queremos encontrar uma cobertura aberta $\{V_b\}_{b\in B}$ de $\frac{B}{G}$ de tal forma que $\phi_b : V_b \times G \to p^{-1}(V_b)$ é um homeomorfismo que satisfaz $(p \circ \phi_b)(x,g) = x, \forall\ (x,g) \in V_b \times G$.

A ação de G em B é dada por $(b,g) \mapsto bg$.

Primeiramente observamos que se U é aberto de $\frac{B}{G}$ então bU também é aberto de $\frac{B}{G}$, pois $p^{-1}(U)$ é aberto de B por p ser contínua, $bp^{-1}(U)$ é aberto de B pois $x \mapsto bx$ é homeomorfismo de $B \to B$ e, $p(bp^{-1}(U))$ é aberto de $\frac{B}{G}$ pois p é aberta. Como $bU = p(bp^{-1}(U))$ o resultado segue.

Agora, para cada $b \in B$ defina $V_b = bV$ vizinhança em $\frac{B}{G}$, onde V está definido por hipótese.

Consideremos a função:

$$f_b : V_b \to B \mid f_b(x) = bf(b^{-1}x)$$

com $b^{-1}x \in V$ pois se $x \in V_b \Longrightarrow x = by_o$, $y_o \in V$.

$\cdot$ f_b é contínua.

$f_b = g \circ f \circ h$, onde $h : \frac{B}{G} \to \frac{B}{G}$ dada por $x \mapsto b^{-1}x$ e $g : B \to B$ dada por $y \to by$ são contínuas e, f é definida contínua por hipótese.

$\cdot$ $p(f_b(x)) = x$.

Se $x \in V_b \Longrightarrow x = bx_o$, $x_o \in V$ e, se $f(x_o) = b' \Rightarrow p(f(x_o)) = p(b') \Rightarrow x_o = b'G$, logo temos:

$$\begin{aligned}
p(f_b(x)) &= p(bf(b^{-1}x)) \\
&= p(bf(x_o)) \\
&= p(bb') \\
&= (bb')G \\
&= b(b'G) \\
&= bx_o \\
&= x
\end{aligned}$$

Defina $\phi_b : V_b \times G \to p^{-1}(V_b)$ por $(x, y) \mapsto f_b(x)y$.

$\cdot$ $f_b(x)y \in p^{-1}(V_b)$

$p(f_b(x)y) = p(bf(b^{-1}x)y) = p(bf(b^{-1}x)) = p(f_b(x)) = x \in V_b$.

$\cdot$ ϕ_b é contínua pois é o produto de contínuas.

$(x, y) \mapsto (f_b(x), y) \mapsto f_b(x)y$

$\cdot\ (p \circ \phi_b)(x,y) = x$

$(p \circ \phi_b)(x,y) = p(\phi_b(x,y)) = p(f_b(x)y) = x.$

Construindo uma inversa para ϕ_b.

Defina $p_b : p^{-1}(V_b) \to G$ por $p_b(z) = (f_b(p(z))^{-1}z.$

$\cdot\ (p_b \circ \phi_b)(x,y) = y$

$$\begin{aligned}(p_b \circ \phi_b)(x,y) &= p_b(f_b(x)y)\\ &= f_b(p(f_b(x)y)))^{-1}.(f_b(x)y)\\ &= f_b(x)^{-1}.(f_b(x)y)\\ &= y\end{aligned}$$

$\cdot \phi_b(p(z), p_b(z)) = z$

$$\begin{aligned}\phi_b(p(z), p_b(z)) &= f_b(p(z)).p_b(z)\\ &= f_b(p(z)).(f_b(p(z)))^{-1}.z\\ &= z\end{aligned}$$

Logo, segue que (p, p_b) é a inversa de ϕ_b e vice-versa.

Seja, agora, $x \in V_b \cap V_c$, então

$$\begin{aligned}(\phi_c^{-1} \circ \phi_b)(x,y) = (x, \theta(x)(y)) &\Leftrightarrow \phi_b(x,y) = \phi_c(x, \theta(x)(y))\\ &\Leftrightarrow f_b(x)y = f_c(x)(\theta(x)(y))\\ &\Leftrightarrow f_c^{-1}(x).f_b(x)y = \theta(x)(y)\\ &\Leftrightarrow \theta(x) = f_c^{-1}(x).f_b(x)\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.4 Considere $B = \mathbb{Z}$ e $G = 5\mathbb{Z}$ onde a ação de $\mathbb{Z}\times 5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é dada por $(n, 5k) \mapsto n.5k := n + 5k$.

Queremos determinar uma secção local de $5\mathbb{Z}$ em $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$. Para isto, observe que :

$$V \text{ é aberto de } \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \Longleftrightarrow p^{-1}(V) \text{ é aberto de } \mathbb{Z}$$

Como a topologia de $\mathbb{Z}$ é a discreta considere $V = \{5\mathbb{Z}\} = \{\overline{0}\}$, isto implica que $p^{-1}(V) = \{5 + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Defina $f : \{\overline{0}\} \to \mathbb{Z}$ por $\overline{0} \mapsto 0$. Logo, temos que f está bem definida, é contínua e $p(f(\overline{0})) = \overline{0}$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $V_n = \{\overline{n}\}$ e $f_n : V_n \to \mathbb{Z}$ é dada por $f_n(\overline{n}) = n$, uma vez que:

$$f_n(\overline{n}) = n.f(\overline{n}^{-1}.\overline{n}) = n.f(\overline{0}) = n.0 = n + 0 = n$$

Além disso, f_n independe do representante da classe pois $\overline{n} = \overline{p} \Longleftrightarrow n - p = 5k$, e portanto, $f_n(\overline{p}) = n.f(\overline{n}^{-1}.\overline{p}) = n.f(\overline{-n+p}) = n.f(\overline{5k}) = n.f(\overline{0}) = n$.

Defina $\phi_n : \{\overline{n}\} \times 5\mathbb{Z} \to p^{-1}(V_n)$ por $(\overline{n}, 5k) \mapsto f_n(\overline{n}).5k = n + 5k$. Obviamente ϕ_n é um homeomorfismo já que $p^{-1}(V_n) = \{n + 5z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Observe que $p : \mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ é uma aplicação de recobrimento, ou seja, para cada $\overline{n} \in \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$, $V_n = \{\overline{n}\}$ é uma vizinhança distinguida de $\overline{n}$ e $p^{-1}(V_n) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \{n + 5k\}$, com $U_k = \{n + 5k\}$ aberto de $\mathbb{Z}$ tal que $p|U_{k_o} : \{n + 5k_o\} \to \{\overline{n}\}$ é um homeomorfismo (trivial).

Observação 2.8 Como todo quociente de um grupo de Lie G por um subgrupo fechado de Lie H possui secção local (cf. [27], pg. 120) segue que $(G, p, \frac{G}{H})$ é um fibrado com fibra H, onde $p : G \to \frac{G}{H}$ é a projeção natural.

Exemplo 2.5 Considere o grupo de Lie $O(n)$, onde $O(n)$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ ortogonais, ou seja, conjunto das aplicações $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preservam norma $(\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, com $\langle , \rangle$ sendo o produto interno usual) e,

$O(n-1)$ o subgrupo das matrizes de $O(n)$ da forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \widetilde{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\widetilde{\sigma}$ são matrizes $(n-1) \times (n-1)$ ortogonais.

$O(n-1)$ é fechado em $O(n)$ pois a aplicação $f : O(n) \to \mathbb{R}^{n^2}$ dada por $f(\sigma) = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, ..., \sigma_{1n}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, ..., \sigma_{2n}, \sigma_{31}, ..., \sigma_{nn})$ é contínua e $O(n-1) = f^{-1}(V)$, onde V é um fechado de $\mathbb{R}^{n^2}$ definido de tal forma que $x \in V \Leftrightarrow x = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, ..., \sigma_{1(n-1)}, 0, \sigma_{21}, ..., \sigma_{2(n-1)}, 0, \sigma_{31}, ..., \sigma_{(n-1)(n-1)}, 0, 0, ..., 0, 1)$.

Pela observação anterior temos que $p_o : O(n) \to \frac{O(n)}{O(n-1)}$ é uma aplicação fibrada, com fibra $O(n-1)$.

Note que $O(n)$ atua em S^{n-1} por:

$$\begin{array}{ccc} O(n) \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ (\sigma, v) & \longmapsto & \sigma(v) \end{array}$$

Além disso, definindo $h : O(n) \to S^{n-1}$ por $h(\sigma) = \sigma(e_n)$ segue que $h(\sigma\rho) = h(\sigma)$ para $\rho \in O(n-1)$. Isto significa que a aplicação h fatora o espaço quociente $\frac{O(n)}{O(n-1)}$. Assim, a função $\widetilde{h} : \frac{O(n)}{O(n-1)} \to S^{n-1}$ dada por $\widetilde{h}(\sigma O(n-1)) = h(\sigma)$ é um homeomorfismo. Dessa forma, temos o fibrado:

$$\begin{array}{cccc} p: & O(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma(e_n) \end{array}$$

com fibra $O(n-1)$.

Observação 2.9 Considerando $U(n)$ o grupo unitário, ou seja, o conjunto das matrizes σ, $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$, tais que $\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall\, x, y \in$

$\mathbb{C}$, onde $\langle , \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{C}^n$ e, $U(n-1)$ o subgrupo fechado de $U(n)$ da forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \widetilde{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \\ ... \\ \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & ... & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\widetilde{\sigma}$ são matrizes $(n-1) \times (n-1)$ unitárias, segue que $p_o : U(n) \to \frac{U(n)}{U(n-1)}$ é aplicação fibrada com fibra $U(n)$.

Como $U(n)$ atua em S^{2n-1} por

$$\begin{array}{ccc} U(n) \times S^{2n-1} & \longrightarrow & S^{2n-1} \\ (\rho, v) & \longmapsto & \rho(v) \end{array}$$

por argumentos análogos, mostramos que $\frac{U(n)}{U(n-1)} \cong S^{2n-1}$ e, portanto, $p : U(n) \to S^{2n-1}$ é aplicação fibrada com fibra $U(n-1)$.

Observação 2.10 Analogamente, mostra-se que $SO(n)$, o conjunto das matrizes $n \times n$ ortogonais cujo determinante é 1, atua em S^{n-1} de tal forma que $p : SO(n) \to S^{n-1}$ é uma aplicação fibrada com fibra $SO(n-1)$. Outras ações podem ser definidas sobre outros "grupos classicos de Lie" conforme referências [3] ou [27].

Daremos, agora, algumas aplicações do teorema 2.5, calculando grupos de homotopia através da seqüência exata longa

$$\cdots \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \pi_{n-1}(E, x_0) \to \cdots$$

determinada à partir da aplicação fibrada $F \cdots E \to B$.

Considere as aplicações:

- $p : \mathbb{R} \to S^1$ tal que $p(t) = exp(2\pi i t)$ com fibra $\mathbb{Z}$.

$$\cdots \to \pi_k(\mathbb{Z}) \to \pi_k(\mathbb{R}) \to \pi_k(S^1) \to \cdots$$

Como $\mathbb{R}$ é contrátil $\Rightarrow \pi_k(\mathbb{R}) = 0$ para $k \geq 1$.

Para $k = 1$, temos:

$$\cdots \to 0 \to \pi_1(S^1) \to \pi_0(\mathbb{Z}) \to 0 \Rightarrow \pi_1(S^1) \cong \pi_0(\mathbb{Z})$$

Como $\mathbb{Z}$ é discreto segue que $\pi_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e, assim, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Para $k > 1$, temos:

$$0 \to \pi_k(S^1) \to 0 \Rightarrow \pi_k(S^1) \cong 0.$$

Portanto, $\pi_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } k = 1 \\ 0 \text{ se } k > 1 \end{cases}$

- $\cdot p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ tal que $p(x)$ associa a reta complexa junto a x, com fibra S^1.

$$\cdots \to \pi_k(S^1) \to \pi_k(S^{2n+1}) \to \pi_k(\mathbb{C}P^n) \to \pi_{k-1}(S^1) \to \cdots$$

Se $k = 1$ e $n \geq 1$ temos

$$\cdots \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^{2n+1}) \to \pi_1(\mathbb{C}P^n) \to \pi_0(S^1) \to \cdots$$

ou seja

$$\cdots \to \mathbb{Z} \to 0 \to \pi_1(\mathbb{C}P^n) \to 0 \to \cdots$$

donde $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$.

Se $k = 2$ e $n \geq 1$ então

$$\cdots \to \pi_2(S^{2n+1}) \to \pi_2(\mathbb{C}P^n) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^{2n+1}) \to \cdots$$

ou seja

$$\cdots \to 0 \to \pi_2(\mathbb{C}P^n) \to \pi_1(S^1) \to 0 \to \cdots$$

donde $\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z},\ n \geq 1$.

Se $k > 2$ e $n \geq 1$ temos

$$\cdots \to 0 \to \pi_k(S^{2n+1}) \to \pi_k(\mathbb{C}P^n) \to 0 \to \cdots$$

e portanto $\pi_k(S^{2n+1}) \cong \pi_k(\mathbb{C}P^n)$.

No caso particular em que $n = 1$ temos que $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ e o fibrado $S^1 \cdots S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ torna-se o fibrado de Hopf $S^1 \cdots S^3 \to S^2$ e pelos resultados acima temos que:

$$\pi_3(S^2) \approx \mathbb{Z}$$

Capítulo 3

Objetos Simpliciais e Co-Simpliciais

Serão apresentados as noções de objetos simpliciais e co-simpliciais, que são conceitos centrais de topologia algébrica e teoria de homotopia, não somente pelo fato de que a categoria de espaços topológicos pode ser substituída pela categoria de conjuntos simpliciais, mas também pelo fato de que métodos simpliciais são usados em várias construções algébricas e topológicas. Também serão apresentados os funtores singular e realização geométrica.

3.1 Definições e Exemplos

A presente seção dispõe as definições de objetos simpliciais e co-simpliciais, bem como alguns exemplos significativos destas definições.

Começamos por definir:

Definição 3.1 *Um **objeto simplicial** numa categoria $\mathcal{C}$ consiste de :*

i) *uma coleção $X_n \in Obj(\mathcal{C})$ para todo $n \geq 0$.*

ii) *uma coleção de morfismos* $d_i : X_n \to X_{n-1}$ *e* $s_i : X_n \to X_{n+1}$ *para todo* $0 \leq i \leq n$, *satisfazendo:*

$$\begin{aligned}
d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i \quad se\ i < j \\
d_i \circ s_j &= \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & se\ i < j \\ id & se\ i = j, j+1 \\ s_j \circ d_{i-1} & se\ i > j+1 \end{cases} \\
s_i \circ s_j &= s_j \circ s_{i-1} \quad se\ i > j
\end{aligned}$$

Os morfismos d_i e s_i são chamados de operadores **faces** e **degenerações**, respectivamente, e os elementos de X_n são chamados de **n-simplexos**.

Definição 3.2 *Um objeto co-simplicial numa categoria* $\mathcal{C}$ *consiste de:*

i) *Uma coleção* $X^n \in Obj(\mathcal{C})$ *(**n-cosimplexos**) para todo* $n \geq 0$.

ii) *Uma coleção de morfismos* $\delta_i : X^{n-1} \to X^n$ *(**co-faces**) e* $\sigma_i : X^{n+1} \to X^n$ *(**co-degenerações**) para todo* $0 \leq i \leq n$ *, satisfazendo:*

$$\begin{aligned}
\delta_j \circ \delta_i &= \delta_i \circ \delta_{j-1} \quad se\ i < j \\
\sigma_j \circ \delta_i &= \begin{cases} \delta_i \circ \sigma_{j-1} & se\ i < j \\ id & se\ i = j, j+1 \\ \delta_{i-1} \circ \sigma_j & se\ i > j+1 \end{cases} \\
\sigma_j \circ \sigma_i &= \sigma_{i-1} \circ \sigma_j \quad se\ i > j
\end{aligned}$$

Dados os complexos simpliciais (K, d_i, s_i) e (L, d'_i, s'_i) definimos uma aplicação simplicial entre eles como segue:

Definição 3.3 *Sejam* K *e* L *objetos simpliciais. Uma **aplicação simplicial*** $f : K \to L$ *é uma coleção de morfismos* $\{f_n\}_{n\geq 0}$, $f_n : K_n \to L_n$ *, que comutam com as operações faces e degenerações, ou seja,* $f_{n-1}d_i = d'_i f_n$ *e* $f_{n+1}s_i = s'_i f_n$.

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_i"] & L_n \arrow[d, "d'_i"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & L_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "s_i"] & L_n \arrow[d, "s'_i"] \\ K_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & L_{n+1} \end{tikzcd}$$

Quando a categoria envolvida na definição de objeto simplicial é Top, Set, Grp, ..., identificamos objeto simplicial com espaço simplicial, conjunto simplicial, grupo simplicial, ..., respectivamente.

Considere Δ^* como sendo a seguinte categoria:

$Obj(\Delta^*) = \{\ [n] = \{0 < 1 < 2 < ... < n\} : n \in \mathbb{N}\ \}$, ou seja, os objetos de Δ^* são os ordinais finitos.

$Hom_{\Delta^*}([n],[m]) = \{f : [n] \to [m] \mid f$ é uma função não decrescente$\}$

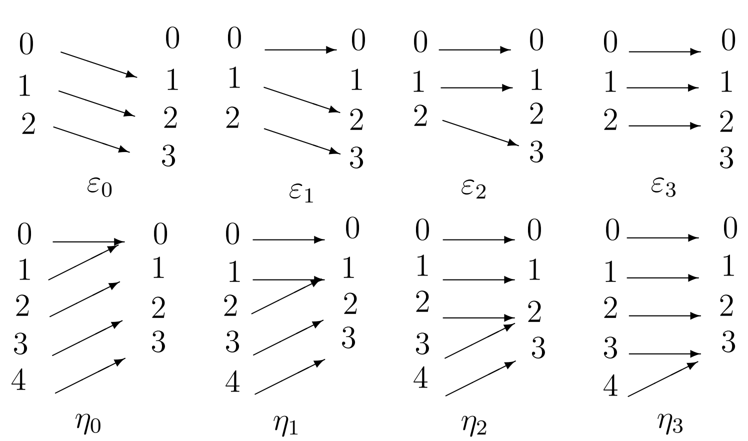
$\circ$: composição usual de funções.

Observe que as funções não decrescentes injetivas e sobrejetivas definidas de $[n-1]$ em $[n]$ e de $[n+1]$ sobre $[n]$, respectivamente, são da forma:

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j & \text{se } 0 \leq j < i \\ j+1 & \text{se } i \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad \text{e } \eta_i(j) = \begin{cases} j & \text{se } 0 \leq j \leq i \\ j-1 & \text{se } i < j \leq n+1 \end{cases}$$

para $0 \leq i \leq n$.

Veja o caso particular em que $n = 3$.



As aplicações ε_i, η_i são muito significativas na categoria Δ^*, pois qualquer morfismo pode ser definido à partir delas conforme o próximo resultado está explicitando.

Lema 3.1 *Cada $f \in Hom_{\Delta^*}([n],[m])$ possui uma única representação*

$$f = \varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}...\varepsilon_{i_k}\eta_{j_1}\eta_{j_2}...\eta_{j_h}$$

sendo que $n-h = m-k$ com $m \geq i_1 > i_2 > ... > i_k \geq 0$ e $0 \leq j_1 < j_2 < ... < j_h \leq n-1$.

Demonstração: Ver [10] ou [12].

Exemplo 3.1 A representação da função $f : [5] \to [6]$ definida por:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longmapsto & 2 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 5 \\ 4 & \longmapsto & 5 \\ 5 & \longmapsto & 6 \end{array}$$

é da forma $f = \varepsilon_4\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_0\eta_0\eta_1\eta_3$.

O lema acima nos ajuda a estabelecer uma importante relação entre funtores contravariantes e objetos simpliciais da seguinte maneira:

Todo funtor contravariante $X : \Delta^* \to \mathcal{C}$ define um objeto simplicial em $\mathcal{C}$ com :

i) $X_n = X([n]) \in Obj(\mathcal{C}), \forall n \geq 0$;

ii) Uma coleção de morfismos faces, $d_i = X(\varepsilon_i)$, e degenerações, $s_i = X(\eta_i)$, que satisfazem:

$$\begin{array}{rcl} d_i \circ d_j & = & d_{j-1} \circ d_i \quad \text{se } i < j \\ d_i \circ s_j & = & \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & \text{se } i < j \\ id & \text{se } i = j, j+1 \\ s_j \circ d_{i-1} & \text{se } i > j+1 \end{cases} \\ s_i \circ s_j & = & s_j \circ s_{i-1} \quad \text{se } i > j \end{array}$$

pelas propriedades funtoriais, uma vez que temos:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_j \circ \varepsilon_i & = & \varepsilon_i \circ \varepsilon_{j-1} \quad \text{se } i < j \\ \eta_j \circ \varepsilon_i & = & \begin{cases} \varepsilon_i \circ \eta_{j-1} & \text{se } i < j \\ id & \text{se } i = j, j+1 \\ \varepsilon_{i-1} \circ \eta_j & \text{se } i > j+1 \end{cases} \\ \eta_j \circ \eta_i & = & \eta_{i-1} \circ \eta_j \quad \text{se } i > j \end{array}$$

Reciprocamente, qualquer objeto simplicial K sobre uma categoria $\mathcal{C}$ determina um funtor contravariante $F : \Delta^* \to \mathcal{C}$ definindo-se: $F([n]) = K_n$ e $F(\mu) = s_{j_h}...s_{j_1}d_{i_k}...d_{i_1}$ onde μ é um morfismo de Δ^* expresso de forma única como combinação de ε_i e η_i conforme o lema 3.1.

Analogamente, objetos co-simpliciais sobre uma categoria $\mathcal{C}$ estão em correspondência bijetora com funtores covariantes $F : \Delta^* \to \mathcal{C}$.

Exemplo 3.2 O objeto co-simplicial Δ.

Os co-simplexos de Δ são definidos por:

$\Delta_n = \left\{ (t_o, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$

As operações faces e degenerações são definidas por:

$\cdot\ \delta_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n \mid \delta_i(t_o, t_1, ..., t_{n-1}) = (t_o, t_1, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1})$

$\cdot\ \sigma_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n \mid \sigma_i(t_o, t_1, ..., t_{n+1}) = (t_o, t_1, ..., t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, ..., t_{n+1})$.

Observe que, com as definições acima, teremos $0 \leq i \leq n$ e, naturalmente, verifica-se que $(\Delta, \delta_i, \sigma_i)$ é um objeto co-simplicial sobre a categoria Top, ou seja, $(\Delta, \delta_i, \sigma_i)$ é um espaço co-simplicial.

Exemplo 3.3 Nervo de uma Categoria.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O **nervo da categoria** $\mathcal{C}$, denotado por $Nervo(\mathcal{C})$, é o seguinte conjunto simplicial:

$Nervo(\mathcal{C})_0 = Obj(\mathcal{C})$

$Nervo(\mathcal{C})_1 = \{A_0 \xrightarrow{f_1} A_1\}$, ou seja, todos os possíveis morfismos entre quaisquer dois objetos de $\mathcal{C}$.

$Nervo(\mathcal{C})_2 = \{A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2\}$, ou seja, todos os pares de morfismos componíveis.

...

$Nervo(\mathcal{C})_n = \{A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n\}$, ou seja, todas as n-uplas de morfismos componíveis.

As operações são dadas por:

Faces: $d_i : Nervo(\mathcal{C})_n \rightarrow Nervo(\mathcal{C})_{n-1}$ tal que

$$d_i(A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n) = \begin{cases} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n \quad \text{se } i = 0 \\ A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \overset{f_{i+1} \circ f_i}{\longrightarrow} A_{i+1} \\ \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n \text{ se } 0 < i < n \\ A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \quad \text{se } i = n \end{cases}$$

Degenerações: $s_i : Nervo(\mathcal{C})_n \rightarrow Nervo(\mathcal{C})_{n+1}$ tal que

$s_i(A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n) = A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{id} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n$ se $0 \leq i \leq n$.

3.2 Funtores Singular e Realização Geométrica

Considere $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer fixada. A categoria $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, também representada por $\mathcal{S}$, é definida como:

$Obj(\mathcal{S})$ = objetos simpliciais em $\mathcal{C}$.

$Hom_{\mathcal{S}}(X,Y)$ = transformações naturais de X em Y, onde $X : \Delta^* \to \mathcal{C}$ e $Y : \Delta^* \to \mathcal{C}$ são funtores contravariantes (os quais estão em correspondência bijetiva com objetos simpliciais).

$\circ$ = composição de transformações naturais.

No caso em que $\mathcal{C}$ é a categoria Set, as categorias $\mathcal{S}$(Set) e Top estão relacionadas através de dois funtores, o funtor singular $S_* : Top \to \mathcal{S}(\text{Set})$ e o funtor realização geométrica $|| : \mathcal{S}(\text{Set}) \to Top$, os quais são adjuntos um do outro. Com isto, o estudo de espaços topológicos, do ponto de vista homotópico, pode ser reduzido ao estudo de conjuntos simpliciais (cf. [12]). Analisamos abaixo em detalhes algumas propriedades de S_* e $||$.

O **funtor singular** $S_* : Top \to \mathcal{S}(\text{Set})$ é definido da seguinte maneira, se X é um espaço topológico então o conjunto dos n-simplexos de $S_*(X)$ são dados por:

· $S_n(X) = \{f : \Delta_n \to X \mid f \text{ é contínua.}\}$

· Faces: $d_i^X : S_n(X) \to S_{n-1}(X) \mid d_i^X(f) = f \circ \delta_i$, $0 \leq i \leq n$.

· Degenerações: $s_i^X : S_n(X) \to S_{n+1}(X) \mid s_i^X(f) = f \circ \sigma_i$, $0 \leq i \leq n$

onde os morfismos δ_i e σ_i são definidos no exemplo 3.2.

Para qualquer morfismo $f : X \to Y$ defina $S_*(f) : S_*(X) \to S_*(Y)$ por $S_n(f) : S_n(X) \to S_n(Y) \mid S_n(f)(\alpha) = f \circ \alpha$. Assim, $S_*(f) \in Hom_{\mathcal{S}}(S_*(X), S_*(Y))$ pois os diagramas abaixo são comutativos.

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "S_n(f)"] \arrow[d, "d_i^X"] & S_n(Y) \arrow[d, "d_i^Y"] \\ S_{n-1}(X) \arrow[r, "S_{n-1}(f)"] & S_{n-1}(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "S_n(f)"] \arrow[d, "s_i^X"] & S_n(Y) \arrow[d, "s_i^Y"] \\ S_{n+1}(X) \arrow[r, "S_{n+1}(f)"] & S_{n+1}(Y) \end{tikzcd}$$

Além disso:

i) $S_*(id_X) = id_{S_*(X)}$ pois,

$\forall \alpha \in S_n(X)$ temos $S_n(id_X)(\alpha) = id_X \circ \alpha = \alpha = id_{S_n(X)}(\alpha)$.

ii) $S_*(f \circ g) = S_*(f) \circ S_*(g)$ pois,

$\forall \alpha \in S_n(X)$ temos $S_n(f \circ g)(\alpha) = (f \circ g) \circ \alpha = f \circ (g \circ \alpha) = S_n(f)(g \circ \alpha) = (S_n(f) \circ S_n(g))(\alpha)$.

Portanto, S_* é um funtor.

O **funtor realização geométrica** $||$: $\mathcal{S}$(Set)$\rightarrow$ Top é construído como segue:

Para cada conjunto simplicial (K, d_i, s_i) seja $\overline{K} = \bigsqcup_{n \geq 0} K_n \times \Delta_n$ a soma topológica dos espaços $K_i \times \Delta_i$, onde K_i está munido com a topologia discreta, então $|K|$ é definido como sendo o quociente de $\overline{K}$ por $\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência gerada por:

$(d_i(x), y) \sim (x, \delta_i(y))$, $x \in K_n$, $y \in \Delta_{n-1}$

$(s_i(x), y) \sim (x, \sigma_i(y))$, $x \in K_n$, $y \in \Delta_{n+1}$

A classe de (x, y) em $|K|$ é denotada por $[x, y]$.

Se $f : K \rightarrow L$ é uma aplicação simplicial, então f induz uma aplicação contínua $|f| : |K| \rightarrow |L|$ dada por $|f|\,[x, y] = [f(x), y]$, a qual é bem definida.

Para verificarmos que $|f| : |K| \rightarrow |L|$ é contínua basta observarmos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_{n\geq 0} K_n \times \Delta_n \arrow[r, "f \times id"] \arrow[d, "\pi_K"] & \coprod_{n\geq 0} L_n \times \Delta_n \arrow[d, "\pi_L"] \\ |K| \arrow[r, "|f|"] & |L| \end{tikzcd}$$

é comutativo, uma vez que $\forall (x,t) \in K_n \times \Delta_n$ temos:

$$\pi_L \circ (f \times id)(x,t) = \pi_L(f(x),t) = [f(x),t]$$

$$|f| \circ \pi_K(x,t) = |f| \, [x,t] = [f(x),t]$$

e, além disso, se U é aberto de $|L|$, então $|f|^{-1}(U)$ é aberto de $|K|$ se, e só se, $\pi_K^{-1}(|f|^{-1}(U))$ é aberto de $\coprod_{n\geq 0} K_n \times \Delta_n$.

Mas,

$$\begin{aligned} \pi_K^{-1}(|f|^{-1}(U)) &= (|f| \circ \pi_K)^{-1}(U) \\ &= (\pi_L \circ (f \times id))^{-1}(U) \\ &= (f \times id)^{-1}(\pi_L^{-1}(U)) \end{aligned}$$

Como $\pi_L^{-1}(U)$ é aberto de $\coprod_{n\geq 0} L_n \times \Delta_n$ (já que U é aberto de $|L|$) e $(f \times id)$ é contínua, temos que $(f \times id)^{-1}(\pi_L^{-1}(U))$ é aberto de $\coprod_{n\geq 0} K_n \times \Delta_n$, o que nos dá que $|f|$ é contínua.

Verifica-se sem dificuldades que $|id_X| = id_{|X|}$ e se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ então $|g \circ f| = |g| \circ |f|$.

Observação 3.1 Em vista do lema 3.1 temos que dados $(x,y) \in K_n \times \Delta_n$ e $(x',y') \in K_m \times \Delta_m$ então $(x,y) \sim (x',y')$ se, e somente se, existe uma função não decrescente $f : [n] \to [m]$ tal que $x = f^*(x')$ e $y' = f_*(y)$ ou existe uma função não decrescente $g : [m] \to [n]$ tal que $x' = g^*(x)$ e $y = g_*(y')$, sendo f^*, g^* imagens de f e g pelo funtor contravariante $K : \Delta^* \to \mathbf{Set}$ e f_*, g_* imagens do funtor covariante $\Delta : \Delta^* \to Set$.

Proposição 3.1 *O funtor realização geométrica e o funtor singular são adjuntos.*

Demonstração: Primeiramente, verificamos que dados quaisquer objetos $K \in Obj(\mathcal{S}(\text{Set}))$ e $X \in Obj(Top)$ existe uma bijeção entre $Hom_{Top}(|K|, X)$ e $Hom_{\mathcal{S}}(K, S_*(X))$.

Para isto, considere as funções:

$$\psi : Hom_{Top}(|K|, X) \to Hom_{\mathcal{S}}(K, S_*(X))$$

$$\phi : Hom_{\mathcal{S}}(K, S_*(X)) \to Hom_{Top}(|K|, X)$$

definidas por: $\psi(g)(x)(t) = g\,[x,t]$ e $\phi(f)\,[x,t] = f(x)(t)$.

$\cdot\phi(f)$ está bem definida.

Para cada aplicação simplicial $f : K \to S_*(X)$, temos que $\phi(f)[x,t] = \phi(f)[x',t']$ se $[x,t] = [x',t']$.

De fato, observamos que os diagramas abaixo são comutativos pois $f : K \to S_*(X)$ é uma aplicação simplicial.

$$\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_i"] & S_n(X) \arrow[d, "d_i^X"] \\
K_{n-1} \arrow[r, "f"] & S_{n-1}(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_i"] & S_n(X) \arrow[d, "s_i^X"] \\
K_{n+1} \arrow[r, "f"] & S_{n+1}(X)
\end{tikzcd}$$

Diagrama (1) Diagrama (2)

Da relação $[x,t] = [x',t'] \iff (x,t) \sim (x',t')$ temos que $x = h^*(x')$ e $t' = h_*(t)$ ou $x' = g^*(x)$ e $t = g_*(t')$ sendo que h^*, g^* são composição de faces e degenerações e h_*, g_* são composição de co-faces e co-degenerações (cf. observação 3.1). Assim, basta verificarmos os casos em que $h^* = d_i$ e $h_* = \delta_i$ ou $h^* = s_i$ e $h_* = \sigma_i$ (analogamente para g^* e g_*).

Logo:

$\phi(f)[x,t] = f(x)(t) = f(d_i(x'))(t) = (f \circ d_i)(x')(t) \stackrel{diag.(1)}{=} (d_i^X \circ f)(x')(t) = d_i^X(f(x'))(t) \stackrel{def.}{=} (f(x') \circ \delta_i)(t) = f(x')(\delta_i(t)) = f(x')(t') = \phi(f)[x',t']$

ou

$\phi(f)[x,t] = f(x)(t) = f(s_i(x'))(t) = (f \circ s_i)(x')(t) \stackrel{diag.(2)}{=} (s_i^X \circ f)(x')(t) = s_i^X(f(x'))(t) \stackrel{def.}{=} (f(x') \circ \sigma_i)(t) = f(x')(\sigma_i(t)) = f(x')(t') = \phi(f)[x',t']$

$\cdot\psi(f)$ é aplicação simplicial.

Para cada aplicação contínua $f : |K| \to Y$ os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "\psi(f)_n"] \arrow[d, "d_i"] & S_n(Y) \arrow[d, "d_i^Y"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "\psi(f)_{n-1}"] & S_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Diagrama (3)

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "\psi(f)_n"] \arrow[d, "s_i"] & S_n(Y) \arrow[d, "s_i^Y"] \\ K_{n+1} \arrow[r, "\psi(f)_{n+1}"] & S_{n+1}(Y) \end{tikzcd}$$

Diagrama (4)

Observe que dizer que o diagrama (3) comuta é verificar que $d_i^Y \circ \psi(f)_n = \psi(f)_{n-1} \circ d_i^Y$, mas isto ocorre se e só se $\forall u \in K_n$ tivermos $(d_i^Y \circ \psi(f)_n)(u) = (\psi(f)_{n-1} \circ d_i^Y)(u)$.

Assim, para qualquer $t \in \Delta_{n-1}$ temos:

$(d_i^Y \circ \psi(f)_n)(u)(t) = d_i^Y(\psi(f)_n(u))(t) \stackrel{def.}{=} (\psi(f)_n(u) \circ \delta_i)(t) = \psi(f)_n(u)(\delta_i(t)) = f[u, \delta_i(t)] = f[d_i(u), t] = \psi(f)_{n-1} d_i(u)(t) = (\psi(f)_{n-1} \circ d_i)(u)(t)$

Analogamente verificamos que o diagrama (4) comuta.

$\cdot\phi \circ \psi = id$

$$(\phi \circ \psi)(g)(x)(t) = \phi(\psi(g)(x)(t)) = \phi(g[x,t]) = g(x)(t)$$

$\cdot \psi \circ \phi = id$

$$(\psi \circ \phi)(f)[x,t] = \psi(\phi(f)[x,t]) = \psi(f(x)(t)) = f[x,t]$$

Basta mostrarmos que a bijeção descrita acima é natural, isto é, que os diagramas abaixo são comutativos

$$\begin{array}{ccc} Hom_{Top}(|K|, X) & \xrightarrow{(|f|)^*} & Hom_{Top}(|L|, X) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ Hom_{\mathcal{S}}(K, S_*(X)) & \xrightarrow{f^*} & Hom_{\mathcal{S}}(L, S_*(X)) \end{array}$$

Diagrama (5)

$$\begin{array}{ccc} Hom_{Top}(|K|, X) & \xrightarrow{g_*} & Hom_{Top}(|K|, Y) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ Hom_{\mathcal{S}}(K, S_*(X)) & \xrightarrow{(S_*(g))_*} & Hom_{\mathcal{S}}(K, S_*(Y)) \end{array}$$

Diagrama (6)

onde $f : L \to K$ é um morfismo em $\mathcal{S}$ e $g : X \to Y$ é um morfismo em Top.

Seja $h : |K| \to X$.

$$(\psi \circ |f|^*)(h) = \psi((|f|)^*(h)) = \psi(h \circ |f|)$$

$$(f^* \circ \psi)(h) = f^*(\psi(h)) = \psi(h) \circ f$$

Para $x \in L$ e $t \in \Delta_n$ temos $\psi(h \circ |f|)(x)(t) = (h \circ |f|)[x,t] = h(|f|[x,t]) = h[f(x),t]$ e $(\psi(h) \circ f)(x)(t) = \psi(h)(f(x)(t)) = h[f(x),t]$.

Logo, o diagrama (5) comuta.

Seja $h : |K| \to X$.

$$(\psi \circ (g)_*)(h) = \psi((g)_*(h)) = \psi(g \circ h)$$

$$((S_*(g))_* \circ \psi)(h) = (S_*(g))_*(\psi(h)) = S_*(g) \circ \psi(h)$$

Para $x \in K$ e $t \in \Delta_n$, temos: $\psi(g \circ h)(x)(t) = g \circ h[x,t] = g(h[x,t])$ e $(S_*(g) \circ \psi(h))\,(x)\,(t) = S_*(g)(h[x,t]) = g \circ h[x,t] = g(h[x,t])$.

Logo, o diagrama (6)comuta.

Portanto, temos que os funtores S e $||$ são adjuntos. $\square$

Observação 3.2 Notamos que, se X é um espaço topológico e $f : |S_*(X)| \to X$ é a aplicação correspondente à identidade $S_*(X) \to S_*(X)$ na bijeção $Hom_{Top}(|S_*(X)|, X) \to Hom_S(S_*(X), S_*(X))$ então F é uma equivalência fraca de homotopia, ou seja, $f_* : \pi_n(|S_*(X)|) \to \pi_n(X)$ é isomorfismo para todo $n \geq 0$. (cf. [2])

3.3 Realização Geométrica de um Conjunto Simplicial

Nesta seção temos como objetivo mostrar que toda realização geométrica de um conjunto simplicial é um complexo-CW. Para tanto, começamos por enunciar alguns lemas e definições.

Definição 3.4 *Seja X um objeto simplicial sobre uma categoria $\mathcal{C}$. Um n-simplexo $x \in X_n$ é dito* ***não degenerado*** *se x não é imagem de $s_i : X_{n-1} \to X_n$ para nenhum i com $0 \leq i \leq n-1$.*

Definição 3.5 *Um ponto $t = (t_0, t_1, ..., t_n) \in \Delta_n$ é dito* ***ponto interior*** *se $t_i \neq 0$ para todo $i = 0, 1, ..., n$.*

Lema 3.2 *Seja (K, d_i, s_i) um objeto simplicial em uma categoria $\mathcal{C}$.*

Todo simplexo degenerado $x \in K_n$ pode ser expresso de um único modo como

$$x = s_{j_p} s_{j_{p-1}} ... s_{j_1}(x')$$

onde $x' \in K_{n-p}$ *é não degenerado e* $0 \leq j_1 < j_2 < ... < j_p < n$.

Demonstração: Sejam $x \in K_n$ degenerado e $J(x) = \{j \in \{0, 1, ..., n-1\} \mid x \in s_j(K_{n-1})\} = \{j_1, j_2, ..., j_p\}$ e suponhamos que $0 \leq j_1 < ... < j_p \leq n-1$.

Provaremos o lema por indução sobre $\#J(x) = p$.

Se $p = 1$, existe $x' \in K_{n-1}$ tal que $x = s_{j_1}(x')$. Se existe outro $x'' \in K_{n-1}$ tal que $x = s_{j_1}(x'')$ então

$$x' = d_{j_1} \circ s_{j_1}(x') = d_{j_1} \circ s_{j_1}(x'') = x''$$

Logo, a representação de x como degeneração é única, além disso, $x' \in K_{n-1}$ é não degenerado, pois caso contrário existiriam $y \in K_{n-2}$ e $0 \leq j \leq n-2$ tais que $x' = s_j(y)$, donde

$$x = s_{j_1} \circ s_j(y).$$

Se $j_1 \leq j$ temos que:

$$\begin{aligned} x &= s_{j_1} \circ s_j(y) \\ &= s_{j_1} \circ s_{(j+1)-1}(y) \\ &= s_{j+1} \circ s_{j_1}(y) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow j+1 \in J(x) = \{j_1\}$ mas por hipótese $j+1 > j_1$, o que é uma contradição.

Se $j_1 > j$ temos que:

$$\begin{aligned} x &= s_{j_1} \circ s_j(y) \\ &= s_j \circ s_{j_1 - 1}(y) \end{aligned}$$

e, novamente ocorre uma contradição já que com isso $j \neq j_1$ e $j \in J(x) = \{j_1\}$.

Portanto, x' é não degenerado.

Suponhamos agora que para todo $z \in K_n$ tal que $\#J(z) < p$ tenhamos uma única representação

$$z = s_{j_k} s_{j_{k-1}} ... s_{j_1}(z')$$

tal que $z' \in K_{n-k}$ é não degenerado, $0 \leq j_1 < ... < j_k \leq n-1$ e $J(z) = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$.

Seja $x \in K_n$ com $J(x) = \{j_1, j_2, ..., j_p\}$ e $0 \leq j_1 < ... < j_p \leq n-1$. Então existem $x_p, x_{p-1} \in K_{n-1}$ tais que $x = s_{j_p}(x_p) = s_{j_{p-1}}(x_{p-1})$ isto implica que:

$$d_{j_p}(x) = x_p = d_{j_p} \circ s_{j_{p-1}}(x_{p-1}) = \begin{cases} x_{p-1} \text{ se } j_p = j_{p-1} + 1 \\ s_{j_{p-1}} \circ d_{j_p - 1}(x_{p-1}) \text{ se } j_p > j_{p-1} + 1 \end{cases}$$

Se $j_p = j_{p-1} + 1$ então $x_p = x_{p-1}$ e $d_{j_{p-1}}(x) = d_{j_{p-1}} \circ s_{j_p}(x_p) = d_{j_{p-1}} \circ s_{j_{p-1}}(x_{p-1}) = x_{p-1} = x_p$.

Temos assim que em qualquer dos casos $j_{p-1} \in J(d_{j_p}(x))$.

De forma análoga, para qualquer outro $j \in J(x), j < j_{p-1}$, temos $s_{j_p}(x_p) = s_j(y)$ para algum $y \in K_{n-1}$, donde $x_p = d_{j_p} \circ s_{j_p}(x_p) = d_{j_p} \circ s_j(y) = s_j \circ d_{j_p - 1}(y)$ o que implica que $j \in J(x_p)$. Com isso $\{j_1, j_2, ..., j_{p-1}\} \subseteq J(x_p)$.

Se existe $j \in J(x_p)$ tal que $j \notin \{j_1, j_2, ..., j_{p-1}\}$ então $j \geq j_p$ ou $j < j_p$.

No primeiro caso temos $x = s_{j_p}(x_p) = s_{j_p}(s_j(y'))$ para algum $y' \in K_{n-2}$, ou seja

$$\begin{aligned} x &= s_{j_p} \circ s_j(y') \\ &= s_{j_p} \circ s_{(j+1)-1}(y') \\ &= s_{j+1} \circ s_{j_p}(y') \end{aligned}$$

$\Longrightarrow j + 1 \in J(x)$ e $j + 1 > j_p$, o que é uma contradição,pois j_p é o maior elemento de $J(x)$.

Se $j < j_p$ então

$$\begin{aligned} x &= s_{j_p}(x_p) \\ &= s_{j_p} \circ s_j(y') \\ &= s_j \circ s_{j_p - 1}(y') \end{aligned}$$

donde $j \in J(x)$, o que é uma contradição.

Logo, $\{j_1, j_2, ..., j_{p-1}\} = J(x_p)$.

Por hipótese de indução x_p se representa de forma única como

$$x_p = s_{j_{p-1}} s_{j_{p-2}} ... s_{j_1}(x')$$

com $x' \in K_{(n-1)-(p-1)} = K_{n-p}$ não degenerado e $0 \leq j_1 < ... < j_{p-1} \leq n-1$, logo

$$x = s_{j_p}(x_p) = s_{j_p} \circ s_{j_{p-1}} \circ ... \circ s_{j_1}(x')$$

Se x possuisse outra representação

$$x = s_{i_q} \circ s_{i_{q-1}} \circ ... \circ s_{i_1}(x'') \qquad (1)$$

com $x'' \in K_{n-q}$ não degenerado e $0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_q \leq n-1$ então $i_t \in J(x)$ $\forall$ $t = 1, 2, ..., q$ pois

$$\begin{aligned} x &= s_{i_q} \circ ... \circ s_{i_{t+1}} \circ s_{i_t} \circ s_{i_{t-1}} \circ ... \circ s_{i_1}(x'') \\ &= s_{i_q} \circ ... \circ s_{i_t} \circ s_{i_{t+1}-1} \circ s_{i_{t-1}} \circ ... \circ s_{i_1}(x'') \\ &= s_{i_q} \circ ... \circ s_{i_t} \circ s_{i_{t+2}-1} \circ s_{i_{t+1}-1} \circ s_{i_{t-1}} \circ ... \circ s_{i_1}(x'') \qquad (2) \\ &... \\ &= s_{i_t} \circ s_{i_q-1} \circ ... \circ s_{i_{t+1}-1} \circ s_{i_{t-1}} \circ ... \circ s_{i_1}(x'') \end{aligned}$$

Assim, para mostrarmos a unicidade da representação de x basta mostrarmos que $p = q$. Para tanto, observe que, se $j_k \in J(x), k < p$ então:

$$\begin{aligned} d_{j_k}(x) &= d_{j_k} \circ s_{j_p} \circ ... \circ s_{j_{k+1}} \circ s_{j_k} \circ s_{j_{k-1}} \circ ... \circ s_{j_1}(x') \\ &= s_{j_p-1} \circ d_{j_k} \circ s_{j_{p-1}} \circ ... \circ s_{j_{k+1}} \circ s_{j_k} \circ s_{j_{k-1}} \circ ... \circ s_{j_1}(x') \\ &= s_{j_p-1} \circ s_{j_{p-1}-1} \circ d_{j_k} \circ s_{j_{p-2}} \circ ... \circ s_{j_{k+1}} \circ s_{j_k} \circ ... \circ s_{j_1}(x') \\ &... \\ &= s_{j_p-1} \circ ... \circ s_{j_{k+1}-1} \circ d_{j_k} \circ s_{j_k} \circ s_{j_{k-1}} \circ ... \circ s_{j_1}(x') \\ &= s_{j_p-1} \circ ... \circ s_{j_{k+1}-1} \circ s_{j_{k-1}} \circ ... \circ s_{j_1}(x') \end{aligned}$$

e como $j_1 < j_2 < ... < j_{k-1} < j_{k+1} - 1 < j_{k+2} - 1 < ... < j_p - 1$ segue de forma análoga a (2) que

$$A = \{j_1, j_2, ..., j_{k-1}, j_{k+1} - 1, j_{k+2} - 1, ..., j_p - 1\} \subseteq J(d_{j_k}(x))$$

Considere $j \in J(d_{j_k}(x))$, então existe $w \in K_{n-2}$ tal que $d_{j_k}(x) = s_j(w)$.

Se $j_k \leq j$ então

$$\begin{aligned} x &= s_{j_k} \circ d_{j_k}(x) \\ &= s_{j_k} \circ s_j(w) \\ &= s_{j_k} \circ s_{(j+1)-1}(w) \\ &= s_{j+1} \circ s_{j_k}(w) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow j+1 \in J(x)$ e $j_k < j+1 \Longrightarrow (j+1)-1 \in A$, ou seja, $j \in A$.

Se $j_k > j$ então

$$\begin{aligned} x &= s_{j_k} \circ d_{j_k}(x) \\ &= s_{j_k} \circ s_j(w) \\ &= s_j \circ s_{j_k-1}(w) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow j \in J(x)$ e $j < j_k \Longrightarrow j \in A$.

Portanto, $J(d_{j_k}(x)) = A$.

Desta forma, $\#J(d_{j_k}(x)) = p-1, \ \forall \ k = 1, 2, .., p$.

De (1) temos que $d_{i_q}(x) = d_{i_q} \circ s_{i_q} \circ s_{i_{q-1}} \circ ... \circ s_{i_1}(x'') = s_{i_{q-1}} \circ ... \circ s_{i_1}(x'')$ mas como $\#J(d_{j_q}(x)) = p-1$ segue da hipótese de indução que $p = q$ donde $i_t = j_t, 1 \leq t \leq p$ e $x'' = x'$. $\square$

Lema 3.3 *Todo $t \in \Delta_n - \overset{\circ}{\Delta}_n$, onde $\overset{\circ}{\Delta}_n$é o conjunto dos pontos interiores de Δ_n, pode ser escrito de modo único como*

$$t = \delta_{i_q}\delta_{i_{q-1}}...\delta_{i_1}(t')$$

onde t' é um ponto interior de Δ_{n-q} e $0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_q \leq n$.

A prova deste lema é análoga à anterior, no entanto, deve-se observar que o objeto em questão é co-simplicial.

Seja (K, d_i, s_i) um conjunto simplicial. Um ponto $(x,t) \in \overline{K} = \coprod_{n \geq 0} K_n \times \Delta_n$ é dito **não degenerado** se x é um simplexo não degenerado de K_n e t é ponto interior de Δ_n.

Lema 3.4 *Cada $(x,t) \in \overline{K}$ é equivalente a um único ponto não degenerado de $\overline{K}$.*

Demonstração: Considere as funções $\rho : \overline{K} \to \overline{K}$ e $\lambda : \overline{K} \to \overline{K}$ definidas por:

- $\rho(x,t) = (d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x), t')$, onde $i_1, ..., i_q, t'$ são escolhidos à partir de t como no lema 3.3.

- $\lambda(x,t) = (x', \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_p}(t))$, onde $j_1, ..., j_p, x'$ são escolhidos à partir de x como no lema 3.2.

A função composta $\lambda\rho : \overline{K} \to \overline{K}$ leva cada ponto em um equivalente não degenerado. De fato, seja $(x,t) \in K_n \times \Delta_n$.

$$\begin{aligned}
\lambda\rho(x,t) &= \lambda(d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x), t') \\
&= \lambda(z,t'), \text{ sendo } z = d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x) \in K_{n-q} \\
&= (z', \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_p}(t'))
\end{aligned}$$

com z' simplexo não degenerado de K_{n-q-p} e $\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_p}(t')$ ponto interior de Δ_{n-q-p}, uma vez que t' é ponto interior de Δ_{n-q}.

Como $\lambda\rho(x,t) = (z', \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_p}(t')) \sim (s_{j_p}s_{j_{p-1}}...s_{j_1}(z'), t') = (z,t') = (d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x), t') \sim (x, \delta_{i_q}\delta_{i_{q-1}}...\delta_{i_1}(t')) = (x,t)$ temos que todo ponto (x,t) é equivalente a um ponto não degenerado $\lambda\rho(x,t)$.

Suponhamos que $(x,t) \sim (y,s)$, com (y,s) não degenerado de $\overline{K}$, e que $(x,t) \sim (z,r)$, com (z,r)não degenerado de $\overline{K}$. Logo, $(y,s) \sim (z,r)$, ou seja, existe $f = \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k}\eta_{j_1} \cdots \eta_{j_h} \in Hom_{\Delta^*}([n],[m]) \mid f^*(y) = z$ e $f_*(r) = s$.

Como z é não degenerado segue que $f^* = d_{i_k} \cdots d_{i_1}$, ou seja, $f = \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k}$. Assim, $f_* = \delta_{i_1} \cdots \delta_{i_k}$ o que é uma contradição pois s é ponto interior de Δ_n.

Portanto, todo ponto de $\overline{K}$ é equivalente a um único não degenerado.

□

O próximo teorema caracteriza a projeção natural $\pi : \overline{K} \to |K|$ e os espaços $\overline{K}$ e $|K|$. Esta caracterização é um importante passo para se demonstrar que a realização geométrica de todo conjunto simplicial K é um complexo-CW, resultado este que se apresenta em diversas bibliografias, as quais omitem sua demonstração.

Teorema 3.1 *Seja K um conjunto simplicial e $\pi : \overline{K} \to |K|$ a projeção natural sobre a sua realização geométrica, então temos que:*

i) Se $x \in K_n$ e $F \subseteq \Delta_n$ é fechado então $\pi(\{x\} \times F)$ é fechado em $|K|$.

ii) π é uma aplicação fechada;

iii) $\overline{K}$ é normal;

iv) $|K|$ é um espaço de Hausdorff.

Demonstração: Observamos que por construção $\overline{K}$ tem a topologia fraca gerada pelas parcelas $K_n \times \Delta_n$, mas como cada K_n é considerado com a topologia discreta segue que $\overline{K}$ tem a topologia fraca gerada por $\{y\} \times \Delta_n$ $\forall\, y \in K_n$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) $\pi(\{x\} \times F)$ é fechado em $|K|$.

$\pi(\{x\} \times F)$ é fechado em $|K|$ se e só se $\pi^{-1}(\pi(\{x\} \times F))$ é fechado de $\overline{K}$, ou seja, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $y \in K_m,\ \pi^{-1}(\pi(\{x\} \times F)) \cap (\{y\} \times \Delta_m)$ é fechado de $\{y\} \times \Delta_m$.

Seja $(a, q) \in \pi^{-1}(\pi(\{x\} \times F)) \bigcap (\{y\} \times \Delta_m)$ então $(a, q) \in \pi^{-1}(\pi(\{x\} \times F))$ e $(a, q) \in \{y\} \times \Delta_m \Rightarrow a = y$ e $[y, q] = \pi(y, q) \in \pi(\{x\} \times F) \Rightarrow (y, q) \sim (x, t)$ para algum $t \in F \subseteq \Delta_n \Rightarrow\ \exists\ f \in Hom_{\Delta^*}([n], [m]) \mid f^*(y) = x$ e $f_*(t) = q$ ou $\exists\ g \in Hom_{\Delta_*}([m], [n]) \mid g^*(x) = y$ e $g_*(q) = t \Rightarrow (a, q) \in B$ onde

$$B = \{y\} \times \left(\left(\bigcup_{\substack{f \in Hom_{\Delta^*}([n],[m]) \\ f^*(y)=x}} f_*(F) \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{g \in Hom_{\Delta^*}([m],[n]) \\ g^*(x)=y}} g_*^{-1}(F) \right) \right)$$

Reciprocamente, se $(a,q) \in B$ então $a = y$ e $\exists\ f \in Hom_{\Delta^*}([n],[m])$ com $f^*(y) = x$ tal que $f_*(t) = q$ para algum $t \in F$ ou $\exists\ g \in Hom_{\Delta_*}([m],[n])$ com $g^*(x) = y$ tal que $g_*(q) = t$ para algum $t \in F$, ou seja, $(a,q) = (a, f_*(t)) \sim (f^*(a), t) = (f^*(y), t) = (x,t)$ ou $(a,q) = (g^*(x), q) \sim (x, g_*(q)) = (x,t)$.

Em qualquer dos casos $\pi(a,q) \in \pi(\{x\}\times F)$, isto é, $(a,q) \in \pi^{-1}(\pi(\{x\}\times F))$ e, além disso, $a = y$ e $(a,q) \in \{y\} \times \Delta_m$, logo

$$B = \pi^{-1}(\pi(\{x\} \times F)) \cap (\{y\} \times \Delta_m)$$

Como B é uma união finita de subespaços fechados em $\{y\} \times \Delta_m$, pois f_* e g_* são aplicações contínuas e fechadas de $\Delta_n \to \Delta_m$ e $\Delta_m \to \Delta_n$ respectivamente, (todo fechado F em Δ_n é limitado, logo F é compacto e $f_*(F)$ é compacto em Δ_m, que é de Hausdorff e, portanto, $f_*(F)$ é fechado em Δ_m) temos que $\pi(\{x\} \times F)$ é fechado em $|K|$.

ii) π é aplicação fechada.

Sabemos que a topologia de $|K|$ coincide com a topologia fraca gerada por $\pi(\{y\} \times \Delta_m) = \overline{e_y}$, $e_y = \pi(\{y\} \times \overset{\circ}{\Delta}_m)$, onde $y \in K_m$ é um elemento não degenerado, conforme se verifica na página 84, item (4). (Este fato não depende da π ser fechada.)

Seja $F \subseteq \Delta_n$ fechado. Logo, $F = \bigcup_{n \geq 0,\ x' \in K_n} \{x'\} \times F'_{x'n}$ com $F'_{x'n}$ fechado em Δ_n, donde:

$$\pi(F) = \pi\Big(\bigcup_{n\geq 0,\ x' \in K_n} \{x'\} \times F'_{x'n}\Big) = \bigcup_{\substack{n \geq 0,\ x \in K_n \\ x \text{ não degenerado}}} \pi(\{x\} \times F_{xn})$$

pois todo elemento x' degenerado de K_n é representado por $x' = f^*(x) = s_{j_p}...s_{j_1}(x)$, com x não degenerado de K_{n-p}, logo $\{x'\}\times F'_{x'n} = \{f^*(x)\}\times F'_{x'n} \sim \{x\} \times f_*(F'_{x'n}) = \{x\} \times F_{xn}$ com $F_{x(n-p)} = f_*(F'_{x'n})$ fechado em Δ_{n-p} (pois f_* é uma aplicação fechada).

Assim, $\pi(F)$ será fechado se, e só se, $\pi(F) \bigcap \pi(\{y\} \times \Delta_m)$ for fechado em $\pi(\{y\} \times \Delta_m)$, com y não degenerado. Mas

$$\pi(F) \bigcap \pi(\{y\} \times \Delta_m) = \left(\bigcup_{\substack{n \geq 0,\ x \in K_n \\ x \text{ não degenerado}}} \pi(\{x\} \times F_{xn}) \right) \bigcap (\pi(\{y\} \times \Delta_m))$$

Como $\pi(\{x\} \times F_{xn}) \subseteq \pi(\{x\} \times \Delta_n)$ com x não degenerado, segue que

$$\pi(F) \bigcap \pi(\{y\} \times \Delta_m) = \pi(\{y\} \times F_{ny})$$

o qual é fechado em $\overline{K}$ e portanto fechado em $\pi(\{y\} \times \Delta_n)$.

Logo, π é fechada.

iii) $\overline{K}$ é um espaço normal.

Sejam F, G fechados disjuntos em $\overline{K}$. Para quaisquer $x \in K_n, n \geq 0$, considere os conjuntos:

- $G_{x,n} = G \cap (\{x\} \times \Delta_n)$
- $F_{x,n} = F \cap (\{x\} \times \Delta_n)$

ambos fechados em $\{x\} \times \Delta_n$ $\forall x, \forall n \geq 0$.

Como $\{x\} \times \Delta_n$ é normal, temos que existem $U_{x,n}$ e $V_{x,n}$ abertos de Δ_n tais que $F_{x,n} \subset \{x\} \times U_{x,n}$, $G_{x,n} \subset \{x\} \times V_{x,n}$ e $(\{x\} \times U_{x,n}) \cap (\{x\} \times V_{x,n}) = \emptyset$.

Tome $U = \bigcup_{x \in K_n, n \geq 0} \{x\} \times U_{x,n}$ e $V = \bigcup_{x \in K_n, n \geq 0} \{x\} \times V_{x,n}$.

U e V são abertos de $\overline{K}$ (pois $\{x\} \times U_{x,n}$ e $\{x\} \times V_{x,n}$ o são) contendo F e G, respectivamente.

De fato:

$$\begin{aligned}
F &= F \cap \overline{K} \\
&= F \cap (\bigcup_{n\geq 0} K_n \times \Delta_n) \\
&= \bigcup_{n\geq 0} (F \cap (K_n \times \Delta_n)) \\
&= \bigcup_{n\geq 0} (F \cap (\bigcup_{x\in K_n} \{x\} \times \Delta_n)) \\
&= \bigcup_{n\geq 0, x\in K_n} F \cap (\{x\} \times \Delta_n) \\
&= \bigcup_{n\geq 0, x\in K_n} F_{x,n} \\
&\subset \bigcup_{n\geq 0, x\in K_n} (\{x\} \times U_{x,n}) \\
&= U
\end{aligned}$$

Analogamente, $G \subset V$.

Além disso, $U \cap V = \emptyset$.

$$\begin{aligned}
U \cap V &= (\bigcup_{n\geq 0, x\in K_n} \{x\} \times U_{x,n}) \cap (\bigcup_{n\geq 0, x'\in K_m} \{x'\} \times V_{x,m}) \\
&= \bigcup_{n\geq 0, x\in K_n} ((\{x\} \times U_{x,n}) \cap (\bigcup_{n\geq 0, x'\in K_m} \{x'\} \times V_{x,m})) \\
&= \bigcup_{n\geq 0, x\in K_n} (\bigcup_{n\geq 0, x'\in K_m} (\{x\} \times U_{x,n}) \cap (\{x'\} \times V_{x,m})) \\
&= \bigcup_{n\geq 0, x\in K_n} (\bigcup_{n\geq 0, x'\in K_m} (\{x\} \cap \{x'\}) \times (U_{x,n} \cap V_{x',m}))
\end{aligned}$$

Se $x \neq x'$, obviamente $U \cap V = \emptyset$.

Se $x = x'$, então $(\{x\} \cap \{x'\}) \times (U_{x,n} \cap V_{x',m}) = \emptyset$, pois $U_{x,n} \cap V_{x,n} = \emptyset$ por hipótese.

Portanto, $\overline{K}$ é normal.

iv) $|K|$ é um espaço de Hausdorff.

Começamos por considerar um lema.

Lema 3.5 *Sejam $p : W \to Z$ uma aplicação fechada, S um subconjunto de Z e U um subconjunto aberto de W contendo $p^{-1}(S)$. Então existe um conjunto aberto V em Z com $S \subset V$ e $p^{-1}(V) \subset U$.*

Demonstração: Defina $V = p(U^c)^c$ onde ^{c} é o complementar.

Desde que U é aberto, U^c é fechado em W. Como p é fechada, $p(U^c)$ é fechado em Z e, portanto, $p(U^c)^c$ é aberto em Z. Além disso, $S \subset V$, pois $p^{-1}(S) \subset U$ o que implica que $S \cap p(U^c) = \emptyset$ e portanto $S \subset p(U^c)^c = V$.

Finalmente, como $V = p(U^c)^c = Z - p(U^c)$ temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(V) &= p^{-1}(Z - p(U^c)) \\ &= p^{-1}(Z - p(W - U)) \\ &= p^{-1}(Z) - p^{-1}(p(W - U)) \\ &\subset W - (W - U) \\ &= U \end{aligned}$$

□

Observemos que, como $p : \overline{K} \to |K|$ é fechada e $\overline{K}$ é um espaço normal e, portanto também um de Hausdorff, segue que os pontos de $|K|$ são fechados.

Sejam $[x,t], [y,s] \in |K|$ pontos distintos. Então, $p^{-1}([x,t])$ e $p^{-1}([y,s])$ são subconjuntos disjuntos de $\overline{K}$, pois se $(z,r) \in p^{-1}([x,t]) \cap p^{-1}([y,s])$ então, $p(z,r) = [x,t]$ e $p(z,r) = [y,t] \Longleftrightarrow (z,r) \sim (x,t)$ e $(z,r) \sim (y,s) \Longleftrightarrow (x,t) \sim (y,s)$ o que é uma contradição uma vez que $[x,t]$ e $[y,s]$ são disjuntos.

Como $\overline{K}$ é um espaço normal, segue que existem abertos disjuntos U_x, U_y contendo $p^{-1}([x,t])$ e $p^{-1}([y,s])$ respectivamente. Pelo lema acima, existem conjuntos abertos V_x e V_y em $|K|$ com $[x,t] \in V_x$, $[y,s] \in V_y$ e, $p^{-1}(V_x) \subset U_x$ e $p^{-1}(V_y) \subset U_y$, donde segue que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Portanto, $|K|$ é um espaço de Hausdorff. □

Por fim, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *$|K|$ é um complexo-CW tendo uma n-célula correspondendo a cada n-simplexo não degenerado de K.*

Demonstração: Para cada n-simplexo não degenerado $x \in K_n$ seja $e_{x,n} = \pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n)$. Provemos que $|K|$ é um complexo-CW tendo como células o conjunto $E = \{e_{x,n} \subseteq |K| : x$ é simplexo não degenerado de $K_n, n \geq 0\}$(Se $n = 0$ então $\overset{\circ}{\Delta}_0 = \Delta_0 = \{1\}$). Denotaremos $e_{x,n}$ por e_x.

(1) Pelo lema 3.4, temos que $|K| = \underset{e_x \in E}{\cup} e_x$.

(2) Para cada célula e_x existe um homeomorfismo relativo $(D^n, S^{n-1}) \to (e_x \cup |K|^{(n-1)}, |K|^{(n-1)})$, onde $|K|^{(n-1)} = \underset{x \in K_m, m \leq n-1}{\cup} e_{x,m}$ com x simplexo não degenerado de K_m.

Como $D^n \approx \Delta_n$ é suficiente verificarmos a existência do homeomorfismo relativo $(\Delta^n, \Delta_n - \overset{\circ}{\Delta}_n) \to (e_x \cup |K|^{(n-1)}, |K|^{(n-1)})$.

Consideremos $\phi_x : (\Delta^n, \Delta_n - \overset{\circ}{\Delta}_n) \to (e_x \cup |K|^{(n-1)}, |K|^{(n-1)})$ definida por $\phi_x(t) = [x, t]$.

Observe que:

$\cdot$ ϕ_x é contínua pois é composição das funções contínuas inclusão e projeção.

$\cdot$ ϕ_x é uma aplicação de pares.

Se $t \in \overset{\circ}{\Delta}_n$ então (x, t) é um ponto não degenerado de $\overline{K}$, logo $(x, t) \in \{x\} \times \overset{\circ}{\Delta}_n$ e assim $[x, t] \in e_x$.

Se $t \in (\Delta_n - \overset{\circ}{\Delta}_n)$ então $t = \delta_{i_q}\delta_{i_{q-1}}...\delta_{i_1}(s)$ para algum $s \in \overset{\circ}{\Delta}_{n-q}$e $0 \leq i_1 < ... < i_q \leq n$. Logo, $\phi_x(t) = [x, t] = [x, \delta_{i_q}\delta_{i_{q-1}}...\delta_{i_1}(s)] = [d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x), s] \in |K|^{(n-1)}$ pois $(d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x), s) \in K_{n-q} \times \Delta_{n-q}$ e pelo lema 3.4, $(d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x), s)$ é equivalente a o simplexo não degenerado $\lambda\rho(d_{i_1}d_{i_2}...d_{i_q}(x), s) \in K_{n-q-p} \times \Delta_{n-q-p}$.

$\cdot$ $\phi_x|e_x$ é um homeomorfismo.

Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathring{\Delta}_n \arrow[r, "\phi_x"] \arrow[dr, "f"'] & \pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n) \\ & \{x\} \times \mathring{\Delta}_n \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

onde $f(t) = (x,t)$ e $h(x,t) = [x,t]$. Obviamente$f$ é homeomorfismo e, como todo elemento de $\pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n)$ é representado por um único elemento não degenerado de $\overline{K}$ segue do lema 1.2 que h é homeomorfismo.

(3) O fecho de e_x está contido numa união finita de células.

$\overline{e_x} = \pi(\{x\} \times \Delta_n)$, pois por um lado, como π é contínua, $\overline{e_x} = \overline{\pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n)} \supseteq \pi(\overline{\{x\} \times \mathring{\Delta}_n}) = \pi(\{x\} \times \Delta_n)$ e, por outro como $\pi(\{x\} \times \Delta_n)$ é fechado de $|K|$, temos da inclusão $e_x \subseteq \pi(\{x\}\times\Delta_n) \subseteq \overline{e_x}$ que $\overline{e_x} = \pi(\{x\}\times\Delta_n)$. Daí:

$$\begin{aligned} \overline{e_x} &= \pi(\{x\} \times \Delta_n) \\ &= \pi(\{x\} \times (\mathring{\Delta}_n \cup \partial\Delta_n)) \\ &= \pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n) \bigcup \pi(\{x\} \times \partial\Delta_n) \end{aligned}$$

Desde que $\partial\Delta_n$ possui n+1 faces (n-1)-dimensionais, temos $\partial\Delta_n = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \Delta_{n-1}^i$. Então:

$$\begin{aligned} \overline{e_x} &= \pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n) \bigcup \pi(\{x\} \times \partial\Delta_n) \\ &= \pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n) \bigcup \pi(\{x\} \times (\bigcup_{i=0}^{n} \Delta_{n-1}^i)) \\ &= \pi(\{x\} \times \mathring{\Delta}_n) \bigcup \pi(\{x\} \times \Delta_{n-1}^0) \bigcup \pi(\{x\} \times \Delta_{n-1}^1) \bigcup ... \bigcup \pi(\{x\} \times \Delta_{n-1}^n) \\ &= \pi(\{x\}\times\mathring{\Delta}_n) \bigcup \pi(\{d_0x\}\times\Delta_{n-1}) \bigcup \pi(\{d_1x\}\times\Delta_{n-1}) \bigcup ... \bigcup \pi(\{d_nx\}\times \Delta_{n-1}) \end{aligned}$$

identificando Δ_{n-1}^i com Δ_{n-1}.

Por um processo análogo, temos que $\Delta_{n-1} = \overset{\circ}{\Delta}_{n-1} \cup \partial\Delta_{n-1} = \overset{\circ}{\Delta}_{n-1} \cup (\bigcup_{i=0}^{(n-1)} \Delta^i_{n-2})$ e, como esta construção decresce a dimensão das células e o número de faces, segue que:

$$\overline{e_x} = \pi(\{x\} \times \overset{\circ}{\Delta}_n) \bigcup \pi(\{x\} \times \overset{\circ}{\Delta}_{n-1}) \bigcup ... \bigcup \pi(\{x\} \times \Delta_0) \quad (*)$$

ou seja, $\overline{e_x}$ é uma união finita de células.

OBSERVAÇÃO: Na fórmula $(*)$ x à partir do segundo termo é equivalente a algum elemento não degenerado do conjunto K_j correspondente, $j = 0, 1, \cdots, n-1$.

(4) A topologia quociente de $|K|$ coincide com a topologia fraca determinada pelo conjunto $\{\overline{e_x} \mid e_x \in E\}$.

De fato:

Seja F um subconjunto fechado de $|K|$, na topologia quociente.

Queremos verificar que F é um fechado de $|K|$ com a topologia fraca determinada por E, isto é, que $F \cap \overline{e_x}$ é um fechado de $\overline{e_x}$ para qualquer $\overline{e_x} \in E$.

Como $F \cap \overline{e_x} = (\ F \cap \overline{e_x}) \cap\ \overline{e_x}$ e $F \cap \overline{e_x}$ é um fechado de $|K|$, segue que $F \cap \overline{e_x}$ é um fechado de $\overline{e_x}$ e, portanto, F é fechado na topologia fraca.

Reciprocamente, seja F um fechado de $|K|$ com a topologia fraca.

Sejam $m \geq 0$ e $y \in K_m$ então, pelo lema 3.2, existe uma única decomposição $y = s_{j_p} s_{j_{p-1}} ... s_{j_1}(x)$ com $0 \leq j_1 < ... < j_p \leq m$ onde x é um simplexo não degenerado de K_n com $n = m - p$.

Como F é fechado na topologia fraca, segue que $F \cap \overline{e_x}$ é fechado em $\overline{e_x}$ e, como $\overline{e_x}$ é fechado em $|K|$ na topologia quociente, segue que $F \cap \overline{e_x}$ é fechado em $|K|$ com a topologia quociente, donde $\pi^{-1}(F \cap \overline{e_x}) \cap (\{y\} \times \Delta_m)$ é fechado em $\{y\} \times \Delta_m$. Mas: $\pi^{-1}(F \cap \overline{e_x}) \cap (\{y\} \times \Delta_m) = \pi^{-1}(F) \cap \pi^{-1}(\overline{e_x}) \cap (\{y\} \times \Delta_m) = \pi^{-1}(F) \cap (\{y\} \times \Delta_m)$, pois $\pi^{-1}(\overline{e_x}) \supseteq \pi^{-1}(\pi(\{x\} \times \Delta_n)) \supseteq \{y\} \times \Delta_m$.

Logo, $\pi^{-1}(F) \cap (\{y\} \times \Delta_m)$ é fechado em $\{y\} \times \Delta_m$ para qualquer m e qualquer $y \in K_m$ e, portanto, $\pi^{-1}(F)$ é fechado de $\overline{K}$,pois a topologia de $\overline{K}$ é a fraca gerada por $\{\{y\} \times \Delta_m\}, y \in K_m, m \geq 0$. $\square$

Observação 3.3 Na seção anterior vimos que o funtor singular associa a cada espaço topológico X um conjunto simplicial $S_*(X)$. Portanto em vista do resultado acima temos que, para qualquer espaço topológico X, $|S_*(X)|$ é um complexo-CW e pela observação 3.2, podemos concluir que todo espaço topológico é fracamente homotópico a um complexo-CW. Além disso, se X é um complexo-CW então $|S_*(X)| \simeq X$.

Observação 3.4 O funtor realização geométrica definido na página 66 pode ser generalizado substituindo-se a categoria domínio $\mathcal{S}(Set)$ por $\mathcal{S}(Top)$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} || : \mathcal{S}(Top) & \longrightarrow & Top \\ (X, d_i, s_i) & \longmapsto & |X| = \bigsqcup\limits_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n \diagup \sim \end{array}$$

onde agora cada X_n é um espaço topológico, $X_n \times \Delta_n$ é o espaço produto, $\bigsqcup\limits_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n$ é a soma topológica e $\sim$ é a mesma relação de equivalência definida anteriormente. Note que todo conjunto simplicial pode ser olhado como um espaço simplicial onde cada conjunto de simplexos é munido com a topologia discreta.

No entanto a realização geométrica de um espaço simplicial não é em geral um complexo-CW, pois considerando X um espaço topológico que não possui o mesmo tipo de homotopia que um complexo-CW, defina o seguinte espaço simplicial:

$\cdot X_n = X, \forall\ n \geq 0.$

$\cdot d_i = id_X, \forall\ 0 \leq i \leq n.$

$\cdot s_i = id_X, \forall\ 0 \leq i \leq n.$

A realização geométrica de (X_*, d_i, s_i) é homeomorfa a X, isto é, $|X_*| \approx X$.

Basta observarmos que para qualquer $[x, (t_0, ..., t_n)] \in |X_*|$, temos:

$$
\begin{aligned}
[x, (t_0, ..., t_n)] &= [id_X(x), (t_0, ..., t_n)] \\
&= [s_0(x), (t_0, ..., t_n)] \\
&= [x, \sigma_0(t_0, ..., t_n)] \\
&= [x, (t_0 + t_1, t_2, ..., t_n)] \\
&= [s_0(x), (t_0 + t_1, t_2, ..., t_n)] \\
&= [x, \sigma_0(t_0 + t_1, t_2, ..., t_n)] \\
&= [x, (t_0 + t_1 + t_2, t_3, ..., t_n)] \\
&\dots \\
&= [x, 1]
\end{aligned}
$$

Portanto, $h : |X_*| \to X$ dada por $h([x, (t_0, ..., t_n)]) = x$ é um homeomorfismo.

Ainda assim o teorema 3.2 pode ser generalizado, substituindo-se o conjunto simplicial K por um espaço simplicial X em que cada conjunto de simplexos X_n é um complexo-CW e as faces e degenerações são aplicações celulares, então $|X|$ será um complexo-CW com uma (n+q)-célula para cada n-célula de $X_q - s(X_{q-1})$, sendo $s(X_{q-1}) = \bigcup_{j=0}^{q-1} s_j(X_{q-1}) \subseteq X_q$. (cf. prop. 11.4 de [13])

3.4 Espaços Classificantes

Estabeleceremos a definição de espaço classificante de uma categoria, algumas propriedades relacionadas a estes e a relação existente entre pré-ordens e complexos simpliciais.

Começamos pela seguinte definição.

Definição 3.6 *Dada uma categoria $\mathcal{C}$, o **espaço classificante** de $\mathcal{C}$, denotado por $B\mathcal{C}$, é definido como sendo a realização geométrica do nervo de $\mathcal{C}$ ou seja, $B\mathcal{C} = |Nervo(\mathcal{C})|$.*

Já observamos no capítulo 1, seção 1.1, que todo conjunto pré-ordenado pode ser encarado como uma categoria. Vamos agora calcular o espaço classificante da pré-ordem $\mathcal{P} = (\{1, 2, ..., n\}, \subseteq)$, determinada pela inclusão no conjunto das partes de $\{1, 2, ..., n\}$.

Para $n = 1$.

Os objetos de $\mathcal{P}$ são $\{\emptyset, \{1\}\}$, com morfismos $\emptyset \to \emptyset, \emptyset \to \{1\}, \{1\} \to \{1\}$.

O nervo de $\mathcal{P}$ é:

$Nervo(\mathcal{P})_0 = \{\emptyset, \{1\}\}$

$Nervo(\mathcal{P})_1 = \{\emptyset \to \emptyset, \emptyset \to \{1\}, \{1\} \to \{1\}\}$

$Nervo(\mathcal{P})_2 = \{\emptyset \to \emptyset \to \emptyset, \emptyset \to \emptyset \to \{1\}, \emptyset \to \{1\} \to \{1\}, \{1\} \to \{1\} \to \{1\}\}$

...

$Nervo(\mathcal{P})_n = \{\emptyset \to \emptyset \to ... \to \emptyset,\ \emptyset \to \emptyset \to ... \to \emptyset \to \{1\}, ...,\ \emptyset \to \emptyset \to ... \to \emptyset \to \{1\} \to ... \to \{1\} \to \{1\}, ...,\ \{1\} \to \{1\} \to ... \to \{1\}\}$

$$B\mathcal{P} = |Nervo(\mathcal{P})| = \Big(\bigsqcup_{n \geq 0} Nervo(\mathcal{P})_n \times \Delta_n\Big) \big/ \sim$$

Da relação $(s_i(x), y) \sim (x, \sigma_i(y))$ temos:

$$\begin{aligned}
\Big[\emptyset \xrightarrow{1} \emptyset \xrightarrow{2} ... \xrightarrow{n} \emptyset, (t_0, t_1, ..., t_n)\Big] &= \Big[s_0(\emptyset \xrightarrow{2} \emptyset \xrightarrow{3} ... \xrightarrow{n} \emptyset), (t_0, t_1, ..., t_n)\Big] \\
&= \Big[\emptyset \xrightarrow{2} \emptyset \xrightarrow{3} ... \xrightarrow{n} \emptyset, \sigma_0\,(t_0, t_1, ..., t_n)\Big] \\
&= \Big[\emptyset \xrightarrow{2} \emptyset \xrightarrow{3} ... \xrightarrow{n} \emptyset, (t_0 + t_1, t_2, ..., t_n)\Big] \\
&= \cdots \\
&= \Big[\emptyset, 1\Big]
\end{aligned}$$

$$\Big[\{1\} \xrightarrow{1} \{1\} \xrightarrow{2} ... \xrightarrow{n} \{1\}, (t_0, t_1, ..., t_n)\Big] = \Big[\{1\}, 1\Big]$$

$$\Big[\emptyset \xrightarrow{1} \emptyset \xrightarrow{2} ... \xrightarrow{k} \emptyset \xrightarrow{k+1} \{1\} \xrightarrow{k+2} \{1\} \xrightarrow{k+3} ... \xrightarrow{k+l} \{1\}, (t_0, t_1, ..., t_{k+l})\Big] =$$

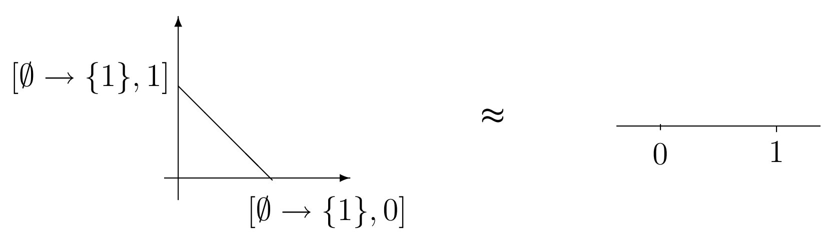
$$= \Big[\emptyset \to \{1\}, (t_0 + ... + t_k, t_{k+1} + ... + t_{k+l})\Big]$$

Da relação $(d_i(x), y) \sim (x, \delta_i(y))$ temos:

$$\begin{aligned}[\emptyset, 1] &= [d_1(\emptyset \to \{1\}), 1] \\ &= [\emptyset \to \{1\}, \delta_1(1)] \\ &= [\emptyset \to \{1\}, (1, 0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\{1\}, 1] &= [d_0(\emptyset \to \{1\}), 1] \\ &= [\emptyset \to \{1\}, \delta_0(1)] \\ &= [\emptyset \to \{1\}, (0, 1)]\end{aligned}$$

Logo, podemos construir o homeomorfismo $h : [0, 1] \to B\mathcal{P}$ por $h(t) = [\emptyset \to \{1\}, (1 - t, t)]$ e, além disso, podemos identificar $B\mathcal{P}$ com o espaço D^1,ou seja, $B\mathcal{P} \approx D^1$, conforme a figura abaixo.



Para $n = 2$.

Os objetos de $\mathcal{P}$ são $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, com morfismos $\emptyset \to \emptyset, \{1\} \to \{1\}, \{2\} \to \{2\}, \{1, 2\} \to \{1, 2\}, \emptyset \to \{1\}, \emptyset \to \{2\}, \emptyset \to \{1, 2\}, \{1\} \to \{1, 2\}, \{2\} \to \{1, 2\}$.

O nervo de $\mathcal{P}$ é:

$Nervo(\mathcal{P})_0 =$ objetos de $\mathcal{P}$.

$Nervo(\mathcal{P})_1 =$ morfismos de $\mathcal{P}$.

$Nervo(\mathcal{P})_2 = \{\emptyset \to \emptyset \to \emptyset, \emptyset \to \emptyset \to \{1\}, \emptyset \to \{1\} \to \{1\}, \{1\} \to \{1\} \to \{1\}, \emptyset \to \emptyset \to \{2\}, ..., \{1, 2\} \to \{1, 2\} \to \{1, 2\}\}$

...

Da relação $(s_i(x), y) \sim (x, \sigma_i(y))$ temos:

$$\left[\emptyset \xrightarrow{1} \emptyset \xrightarrow{2} ... \xrightarrow{n} \emptyset, (t_0, t_1, ..., t_n)\right] = \left[\emptyset, 1\right]$$
$$\left[\{1\} \xrightarrow{1} \{1\} \xrightarrow{2} ... \xrightarrow{n} \{1\}, (t_0, t_1, ..., t_n)\right] = \left[\{1\}, 1\right]$$
$$\left[\{2\} \xrightarrow{1} \{2\} \xrightarrow{2} ... \xrightarrow{n} \{2\}, (t_0, t_1, ..., t_n)\right] = \left[\{2\}, 1\right]$$
$$\left[\{1,2\} \xrightarrow{1} \{1,2\} \xrightarrow{2} ... \xrightarrow{n} \{1,2\}, (t_0, t_1, ..., t_n)\right] = \left[\{1,2\}, 1\right]$$

$$\Big[\emptyset \xrightarrow{1} ... \xrightarrow{k} \emptyset \xrightarrow{k+1} \{1\} \xrightarrow{k+2} ... \xrightarrow{k+l} \{1\} \xrightarrow{k+l+1} \{1,2\} \xrightarrow{k+l+2} ... \xrightarrow{k+l+r} \{1,2\}, (t_0, t_1, ..., t_{k+l+r})\Big] = \Big[\emptyset \to \{1\} \to \{1,2\}, (\sum_{i=1}^{k} t_i, \sum_{i=k+1}^{k+l} t_i, \sum_{i=k+l+1}^{k+l+r} t_i)\Big]$$

Usando a relação $(d_i(x), y) \sim (x, \delta_i(y))$ obtemos:

$$[\emptyset \to \{j\} \to \{1,2\}, (0, t_1, t_2)] = [\{j\} \to \{1,2\}, (t_1, t_2)]$$

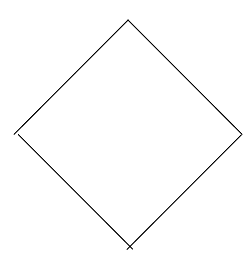
$$[\emptyset \to \{j\} \to \{1,2\}, (t_0, 0, t_2)] = [\emptyset \to \{1,2\}, (t_0, t_2)]$$

$$[\emptyset \to \{j\} \to \{1,2\}, (t_0, t_1, 0)] = [\emptyset \to \{j\}, (t_0, t_1)]$$

para $j = 1$ ou $j = 2$.

Logo, podemos construir um homeomorfismo entre $B\mathcal{P}$ e Q, sendo Q um quadrado, associando a cada elemento $[\emptyset \to \{1\} \to \{1,2\}, (t_0, t_1, t_2)]$ de $B\mathcal{P}$ o elemento $(t_0, t_1, t_2)_1$ no "triangulo superior de Q" e cada elemento $[\emptyset \to \{2\} \to \{1,2\}, (t_0, t_1, t_2)]$de $B\mathcal{P}$ o elemento $(t_0, t_1, t_2)_2$ no "triângulo inferior de Q", conforme a figura abaixo. Como $[\emptyset \to \{1\} \to \{1,2\}, (t_0, 0, t_2)] = [\emptyset \to \{2\} \to \{1,2\}, (t_0, 0, t_2)]$, o homeomorfismo acima está bem definido. Além disso, $B\mathcal{P} \approx Q \approx D^2$.

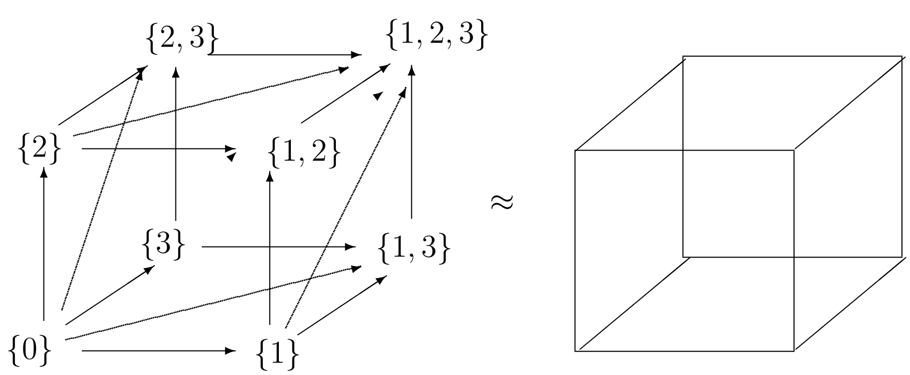
$$\begin{tikzcd}
 & \{1\} \arrow[dr] & \\
\emptyset \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \{1,2\} \\
 & \{2\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \qquad \approx$$



Para $n = 3$.

Os objetos de $\mathcal{P}$ são $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ e seus morfismos (não degenerados) estão representados pela figura abaixo, que por sua vez, nos indicam a existência de um homeomorfismo entre $B\mathcal{P}$ e um cubo. Como todo cubo é homeomorfo a D^3, segue que $B\mathcal{P} \approx D^3$.

(Foram omitidos alguns morfismos para que a figura esteja mais legível)



Em geral tem-se que o espaço classificante de uma pré-ordem $\mathcal{P} = (\{1, 2, ..., n\}, \subseteq)$ é homeomorfa a D^n.

Convém salientarmos também que a categoria definida acima possui um objeto inicial $\emptyset$, e um objeto terminal $\{1, 2, ..., n\}$ e, como veremos à seguir, a existência destes objetos atribui uma característica especial à categoria.

Descreveremos agora algumas propriedades dos espaços classificantes.

Começamos por observar que o produto cartesiano de dois conjuntos simpliciais $(K, d_i, s_i), (K', d_i', s_i')$ é definido por:

· Objetos de $K \times K'$: $(K \times K')_n = K_n \times K_n'$.

· Faces: $(d \times d')_i : (K \times K')_n \to (K \times K')_{n-1}$ dada por $(d \times d')_i(x, x') = (d_i(x), d_i'(x'))$.

$\cdot$ Degenerações: $(s \times s')_i : (K \times K')_n \to (K \times K')_{n+1}$ dada por $(s \times s')_i(x, x') = (s_i(x), s'_i(x'))$.

Considere as projeções $p : K \times K' \to K$ e $p' : K \times K' \to K'$. Como verificamos anteriormente, estas funções induzem aplicações contínuas $|p| : |K \times K'| \to |K|$ e $|p'| : |K \times K'| \to |K'|$ sobre as realizações geométricas.

Defina

$$\eta : |K \times K'| \to |K| \times |K'|$$

por $\eta = |p| \times |p'|$.

Teorema 3.3 *η é uma aplicação 1-1 de $|K \times K'|$ sobre $|K| \times |K'|$. Se (a) $|K|$ e $|K'|$ são enumeráveis, ou se (b) um dos dois complexos-CW $|K|, |K'|$ é localmente finito, então η é um homeomorfismo.*

Demonstração: Seja $z \in |K \times K'|, z = [(x_n, x'_n), t_n], x_n \in K_n, x'_n \in K'_n$ e $t_n \in \overset{\circ}{\Delta}_n$. Então, desde que $x_n = s_{j_p}...s_{j_1}(y_{n-p})$ e $x'_n = s_{j'_q}...s_{j'_1}(y'_{n-q})$, com y_{n-p} e y'_{n-q} elementos não degenerados de K_{n-p}, K'_{n-q} respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
\eta(z) = \eta[(x_n, x'_n), t_n] &= |p| \times |p'| [(x_n, x'_n), t_n)] \\
&= (|p| [(x_n, x'_n), t_n], |p'| [(x_n, x'_n), t_n]) \\
&= ([p(x_n, x'_n), t_n], [p'(x_n, x'_n), t_n]) \\
&= ([x_n, t_n], [x'_n, t_n]) \\
&= \left(\left[s_{j_p}...s_{j_1}(y_{n-p}), t_n\right], \left[s_{j'_q}...s_{j'_1}(y'_{n-q}), t_n\right]\right)
\end{aligned}$$

Como η é o produto de aplicações contínuas, segue que η é contínua.

Queremos determinar uma aplicação $\overline{\eta} : |K| \times |K'| \to |K \times K'|$ que seja inversa de η. Para isto, consideremos $(z, z') \in |K| \times |K'|$, onde z, z' possuem representações não degeneradas dadas por $z = [x_a, u_a], z' = [x_b, v_b]$.

Se $u_a = (t_0, t_1, ..., t_a)$ e $v_b = (t'_0, t'_1, ..., t'_b)$, defina:

$$u^m = \sum_{i=0}^{m} t_i \qquad\qquad v^n = \sum_{i=0}^{n} t'_i$$

Seja $0 < r_0 < r_1 < ... < r_c = 1$ a seqüência obtida arrumando-se os elementos distintos de $\{u^m\} \cup \{v^n\}$ em ordem de grandeza. Defina:

$$t_i^{''} = r_i - r_{i-1}, \quad 0 \leq i \leq c \text{ e } r_{-1} = 0$$

Claramente $\sum\limits_{i=0}^{c} t_i^{''} = 1$ e $t_i^{''} > 0$, donde $w_c = (t_0^{''}, t_1^{''}, ..., t_c^{''})$ é um ponto interior de Δ_c.

Seja $i_1 < i_2 < ... < i_{c-a}$ aqueles inteiros i tais que $r_i \notin \{u^m\}$ e $j_1 < j_2 < ... < j_{c-b}$ aqueles inteiros j tais que $r_j \notin \{v^n\}$. Então, $\{i_\alpha\}$ e $\{j_\beta\}$ são disjuntos e $u_a = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}...\sigma_{i_{c-a}}(w_c)$ e $v_b = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_{c-b}}(w_c)$.

Defina

$$\overline{\eta}(z, z') = \left[(s_{i_{c-a}}...s_{i_1}x_a) \times (s_{j_{c-b}}...s_{j_1}x_b), w_c\right]$$

Observemos que $((s_{i_{c-a}}...s_{i_1}x_a) \times (s_{j_{c-b}}...s_{j_1}x_b), w_c) \in (K \times K')_c$, pois $s_{i_{c-a}}...s_{i_1}x_a \in K_{a-(c-a)}$ e $s_{j_{c-b}}...s_{j_1}x_b \in K'_{b-(c-b)}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\eta\overline{\eta}(z, z') &= \eta(\left[(s_{i_{c-a}}...s_{i_1}x_a) \times (s_{j_{c-b}}...s_{j_1}x_b), w_c\right]) \\
&= \left[s_{i_{c-a}}...s_{i_1}x_a, w_c\right] \times \left[s_{j_{c-b}}...s_{j_1}x_b, w_c\right] \\
&= \left[x_a, \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}...\sigma_{i_{c-a}}w_c\right] \times \left[x_b, \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_{c-b}}w_c\right] \\
&= [x_a, u_a] \times [x_b, v_b] \\
&= (z, z')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}\eta(z) &= \overline{\eta}([x_n, t_n], [x'_n, t_n]) \\
&= \overline{\eta}(\left[y_{n-p}, \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}...\sigma_{i_p}t_n\right], \left[y'_{n-q}, \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_q}t_n\right]) \\
&= \left[(s_{j_p}...s_{j_1}y_{n-p}) \times (s_{j'_q}...s_{j'_1}y'_{n-q}), t_n\right] \\
&= [(x_n, x'_n), t_n] \\
&= z
\end{aligned}$$

Portanto, a relação é 1-1.

Para completar a prova, ou seja, para mostrar que η é homeomorfismo, é necessário mostrar que $\overline{\eta}$ é contínua.

Como $\overline{\eta}$ é contínua em cada célula do produto $|K| \times |K'|$, onde uma célula de $|K| \times |K'|$ é da forma $e_x \times e_y$, sendo e_x célula de $|K|$ e e_y célula de $|K'|$ e, desde que a topologia produto de $|K| \times |K'|$ coincide com a topologia fraca gerada por $\{e_x \times e_y\}$, o que ocorre se $|K|$ e $|K'|$ satisfazem (a) ou (b) (conforme Obs. 1.7), temos que $\overline{\eta}$ é contínua. $\square$

Exemplo 3.4 Sejam K e K' conjuntos simpliciais quaisquer. Considere $z \in |K|$ e $z' \in |K'|$ com representações não degeneradas dada por $z = [x, u_3]$ e $z' = [x', v_6]$, onde

$$\begin{aligned} u_3 &= (0,3;0,1;0,2;0,4) \\ v_6 &= (0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,2;0,3) \end{aligned}$$

Deste modo temos

$$\begin{aligned} \{u^m\} &= \{0,3;0,4;0,6;1\} \\ \{v^n\} &= \{0,1;0,2;0,3;0,4;0,5;0,7;1\} \end{aligned}$$

e a seqüência $0 < r_0 < r_1 < ... < r_c = 1$ dos elementos de $\{u^m\} \cup \{v^n\}$ é da forma:

$$0 < 0,1 < 0,2 < 0,3 < 0,4 < 0,5 < 0,6 < 0,7 < 1$$

ou seja, $c = 7$ e $w_c = (0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,3)$.

Os índices i tais que $r_i \notin \{u^m\}$ são $0,1,4,6$, ou seja, $i_1 = 0, i_2 = 1, i_3 = 4, i_{4=7-3} = 6$, e o índice j tal que $r_j \notin \{v^n\}$ é 5, ou seja, $j_{1=7-6} = 5$. Logo, podemos verificar que

$$\begin{aligned} \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}(w_c) &= \sigma_0\sigma_1\sigma_4\sigma_6(0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,3) \\ &= \sigma_0\sigma_1\sigma_4(0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1+0,3) \\ &= \sigma_0\sigma_1(0,1;0,1;0,1;0,1;0,1+0,1;0,1+0,3) \\ &= (0,1+0,1+0,1;0,1;0,1+0,1;0,1+0,3) \\ &= (0,3;0,1;0,2;0,4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{j_6}(w_c) &= \sigma_{j_6}(0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,3)\\ &= \sigma_5(0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,3)\\ &= (0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,1+0,1;0,3)\\ &= (0,1;0,1;0,1;0,1;0,1;0,2;0,3)\end{aligned}$$

Observe agora que $Nervo(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) \cong Nervo(\mathcal{A})\times Nervo(\mathcal{B})$. De fato, a todo elemento $(a_0\times b_0) \xrightarrow{f_1\times g_1} (a_1\times b_1) \xrightarrow{f_2\times g_2} ... \xrightarrow{f_n\times g_n} (a_n\times b_n)$ do $Nervo(\mathcal{A}\times\mathcal{B})_n$ associamos o elemento $(a_0 \xrightarrow{f_1} a_1 \xrightarrow{f_2} ... \xrightarrow{f_n} a_n) \times (b_0 \xrightarrow{g_1} b_1 \xrightarrow{g_2} ... \xrightarrow{g_n} b_n)$ do $Nervo(\mathcal{A})_n \times Nervo(\mathcal{B})_n$.

Pela comutatividade do nervo de categorias com o produto e pelo teorema acima, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4 *Toda transformação natural $F : F_0 \to F_1$ entre os funtores $F_0, F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ induz uma homotopia entre $BF_0, BF_1 : B\mathcal{C} \to B\mathcal{C}'$.*

Demonstração: Primeiramente observamos que a transformação natural $F : F_0 \to F_1$ pode ser encarada como um funtor $T : \mathcal{C}\times\mathcal{J} \to \mathcal{C}'$, onde $\mathcal{J}$ é a pré-ordem $\mathcal{P}(\{1\},\subseteq)$ da seguinte maneira:

Um objeto de $\mathcal{C}\times\mathcal{J}$ é da forma $(c,0)$, $c\in\mathcal{C}$ e $0\in\mathcal{J}$, ou é da forma $(c,1)$, $c\in\mathcal{C}$ e $1\in\mathcal{J}$. A $(c,0)$ associamos $F_0(c)$ e a $(c,1)$ associamos $F_1(c)$.

Os morfismos de $\mathcal{C}\times\mathcal{J}$ são da forma:

$\cdot f\times id_0 : c_1\times 0 \to c_2\times 0$, onde $f\in Hom_{\mathbf{C}}(c_1,c_2)$ e id_0 é o único morfismo de $Hom_{\mathbf{J}}(0,0)$;

$\cdot f\times id_1 : c_1\times 1 \to c_2\times 1$, onde $f\in Hom_{\mathbf{C}}(c_1,c_2)$ e id_1 é o único morfismo de $Hom_{\mathbf{J}}(1,1)$;

$\cdot f\times g : c_1\times 0 \to c_2\times 1$, onde $f\in Hom_{\mathbf{C}}(c_1,c_2)$ e g é o único morfismo de $Hom_{\mathbf{J}}(0,1)$.

Assim,

$\cdot f \times id_0 : c_1 \times 0 \to c_2 \times 0$, identificamos com $F_0(f) : F_0(c_1) \to F_0(c_2)$;

$\cdot f \times id_1 : c_1 \times 1 \to c_2 \times 1$, identificamos com $F_1(f) : F_1(c_1) \to F_1(c_2)$;

$\cdot f \times g : c_1 \times 0 \to c_2 \times 1$, identificamos com $F_1(f) \circ F(c_1) : F_0(c_1) \to F_1(c_2)$, ou seja, com diagonal do diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
F_0(c_1) \arrow[r, "F(c_1)"] \arrow[d, "F_0(f)"] \arrow[dr] & F_1(c_1) \arrow[d, "F_1(f)"] \\
F_0(c_2) \arrow[r, "F(c_2)"] & F_1(c_2)
\end{tikzcd}$$

Além disso, como mencionado anteriormente, temos o isomorfismo $h : [0,1] \to B\mathcal{J}$ dada por $h(t) = [0 \to 1, (1-t, t)]$.

Das aplicações

$$B\mathcal{C} \times [0,1] \xrightarrow{id \times h} B\mathcal{C} \times B\mathcal{J} \xrightarrow{\overline{\eta}} B(\mathcal{C} \times \mathbf{J}) \xrightarrow{BT} (B\mathcal{C}')$$

temos que

$$H = BT \circ \overline{\eta} \circ (id \times h) : B\mathcal{C} \times [0,1] \to (B\mathcal{C}')$$

é a homotopia entre BF_0 e BF_1.

De fato:

$H([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)], 0) =$

$= BT \circ \overline{\eta} \circ (id \times h)([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)], 0)$

$= BT \circ \overline{\eta}([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)], h(0))$

$= BT \circ \overline{\eta}([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)], [0 \to 1, (1, 0)])$

$= BT(\overline{\eta}([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)], [0, 1]))$, $w_c = (t_0, ..., t_n)$ e $1 = \sigma_0\sigma_1...\sigma_{n-1}w_c$

$= BT([(x_0 \to ... \to x_n) \times (s_{n-1}...s_0(0)), (t_0, ..., t_n)])$

$$= BT([(x_0 \to ... \to x_n) \times (0 \to ... \to 0), (t_0, ..., t_n)])$$

Pela comutatividade do nervo com o produto temos que :

$$\left[(x_0 \xrightarrow{f_1} ... \xrightarrow{f_n} x_n) \times (0 \xrightarrow{id} ... \xrightarrow{id} 0), (t_0, ..., t_n)\right] =$$

$$= \left[(x_0 \times 0 \xrightarrow{f_1 \times id} ... \xrightarrow{f_n \times id} x_n \times 0), (t_0, ..., t_n)\right]$$

Portanto,

$$BT([(x_0 \to ... \to x_n) \times (0 \to ... \to 0), (t_0, ..., t_n)]) =$$

$$= BT([x_0 \times 0 \to ... \to x_n \times 0, (t_0, ..., t_n)])$$

$$= [T(x_0 \times 0 \to ... \to x_n \times 0), (t_0, ..., t_n)]$$

$$= \left[F_0(x_0) \xrightarrow{F_0(f_1)} F_0(x_1) \xrightarrow{F_0(f_2)} ... \xrightarrow{F_0(f_n)} F_0(x_n), (t_0, ..., t_n)\right]$$

$$= BF_0([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)])$$

Analogamente, verificamos que $H([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)], 1) = BF_1([x_0 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)])$ e, portanto, H é a homotopia entre BF_0 e BF_1. □

Dizemos que um funtor é uma **equivalência homotópica** se induz uma equivalência homotópica entre espaços classificantes e, que uma **categoria é contrátil** se o seu espaço classificante o é.

Corolário 3.1 *Se um funtor f possui adjunto à esquerda ou à direita, então f é uma equivalência homotópica.*

Demonstração: Basta verificar que se f é um adjunto à direita de g, então existem transformações naturais $gf \to id$ e $id \to fg$, donde segue que Bg é o inverso homotópico de Bf. □

Corolário 3.2 *Uma categoria tendo um objeto terminal ou objeto inicial é contrátil.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria que possui um objeto inicial a e, $\mathcal{C}_a$ a categoria com $Obj(\mathcal{C}_a) = a$ e $Hom_{\mathcal{C}_a}(a,a) =$ identidade. Considere os funtores:

$$\begin{array}{ccccccc} F:\mathcal{C}_a & \longrightarrow & \mathcal{C} & & G:\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}_a \\ a & \longmapsto & a & \text{e} & x & \longmapsto & a \\ a \xrightarrow{id} a & \longmapsto & a \xrightarrow{id} a & & x \rightarrow y & \longmapsto & a \xrightarrow{id} a \end{array}$$

Observe que $Hom_{\mathcal{C}}(F(a),x) \equiv Hom_{\mathcal{C}_a}(a,G(x))$,pois $Hom_{\mathcal{C}}(F(a),x) = Hom_{\mathcal{C}}(a,x)$ e, como a é objeto inicial segue que existe um único morfismo em $Hom_{\mathcal{C}}(F(a),x)$. Da mesma forma, $Hom_{\mathcal{C}_a}(a,G(x)) = Hom_{\mathcal{C}_a}(a,a)$ que possui somente o morfismo identidade.

Assim, os funtores F e G são adjuntos e, pelo corolário acima, $B\mathcal{C} \equiv B\mathcal{C}_a$, mas $B\mathcal{C}_a$ tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto e, portanto, $B\mathcal{C}$ é contrátil.

Analogamente, é possível demonstrar que toda categoria que possui um objeto terminal é contrátil. □

Disto segue que todas as ordens totais finitas são contráteis, pois todas possuem objeto inicial, sendo que uma ordem total é uma pré-ordem em que para quaisquer dois objetos existe um único morfismo entre eles.

Os próximos resultados estabelecem uma estreita ligação entre conjuntos simpliciais e espaços classificantes de pré-ordem.

Teorema 3.5 *Seja $\mathcal{J}$ um conjunto parcialmente ordenado, considerado como categoria. Então $B\mathcal{J}$ é um complexo simplicial.*

Demonstração: Queremos mostrar que $B\mathcal{J} \approx \|K\|$, onde $\|\|$ representa a realização de um complexo simplicial.

Defina K como segue:

$\cdot vert(K) =$ elementos de $\mathcal{J}$.

$\cdot simplexo(K)$ = subconjuntos finitos não vazios totalmente ordenados de $\mathcal{J}$.

Conforme explícito no capítulo 1, seção 1.5, a realização do complexo simplicial de K é $\|K\| = \underset{s\in K}{\cup}\Delta_s$, onde s é um simplexo de K.

Seja $y \in \|K\|$, logo $y \in \Delta_s$ para algum $s \in K$, com $s = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Como todo elemento de Δ_s é escrito de modo único como $y = \sum\limits_{i=0}^{n} t_i x_i$, $\sum t_i = 1$ e $t_i \geq 0$, definimos:

$$h : \|K\| \to BJ$$

por $h(\sum\limits_{i=0}^{n} t_i x_i) = [x_0 \to x_1 \to ... \to x_n, (t_0, ..., t_n)]$, o qual é um homeomorfismo.

$\square$

Reciprocamente estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 3.6 *Seja K um complexo simplicial, então $BK \approx \|SdK\|$ sendo que K (em BK) é visto como uma ordem através da inclusão.*

Demonstração: Consideremos $K' = SdK$, então

$\cdot\ vert(K')$ = simplexos de K.

$\cdot\ simplexos(K')$ = subconjuntos finitos não vazios totalmente ordenados de elementos de K.

Pelo teorema anterior temos que $BK \approx \|K'\| = \|SdK\|$ $\square$

Dessa forma, desde que se tenha conhecimento de que qualquer complexo-CW é equivalente homotópico a um complexo simplicial, segue que qualquer tipo de homotopia interessante é realizada como o espaço classificante de um conjunto parcialmente ordenado.

Capítulo 4

Construção do BG

O nosso objetivo, agora, estará voltado para a construção do espaço classificante de um grupo G o qual, à partir de certas condições, estabelece a existência de um fibrado universal.

4.1 Considerações Gerais

Começamos por considerar espaços simpliciais sobre a categoria $G-Top$ dos G-espaços topológicos, onde:

$Obj(G - Top)$ = espaços topológicos X sobre os quais G atua pela esquerda.

$Hom_{G-Top}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f$ é uma função contínua e $f(gx) = gf(x), \forall g \in G$ e $x \in X\}$

$\circ$: composição usual.

Se $(X, d_i, s_i) \in Obj(\mathcal{S}(G-Top))$, ou seja, é um objeto simplicial sobre a categoria dos G-espaços, então os diagramas abaixo devem comutar.

$$\begin{array}{ccc} G \times X_n & \xrightarrow{id_G \times d_i} & G \times X_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} \\ X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times X_n & \xrightarrow{id_G \times s_i} & G \times X_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n+1}} \\ X_n & \xrightarrow{s_i} & X_{n+1} \end{array}$$

onde $\alpha_i : G \times X_i \to X_i$ é a ação de G sobre X_i, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Isto nos sugere uma questão natural sobre a realização geométrica de X : $|X|$ é um G-espaço?

Para responder a isto, definimos:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : G \times |X| & \longrightarrow & |X| \\ (g, [x_n, (t_0, ..., t_n)]) & \longmapsto & [gx_n, (t_0, ..., t_n)] \end{array}$$

$\cdot$ α está bem definida.

Seja $[x_n, (t_0, ..., t_n)] = [y_m, (s_0, ..., s_m)]$. Logo, existe $f \in Hom_{\Delta^*}([n], [m])$ tal que $x_n = f^*(y_m)$ e $(s_0, ..., s_m) = f_*(t_0, ..., t_n)$ ou existe $h \in Hom_{\Delta^*}([m], [n])$ tal que $y_m = h^*(x_n)$ e $(t_0, ..., t_n) = h_*(s_0, ..., s_m)$.

Pelo lema 3.1 $f = \varepsilon_{i_1}...\varepsilon_{i_k}\eta_{j_1}...\eta_{j_h} \Longrightarrow f^* = s_{j_h}...s_{j_1}d_{i_k}...d_{i_1}$ e, assim, f^* preserva a ação pois é composição de s_i, d_i que, por sua vez, são morfismos de G-Top.

Logo:

$$\begin{aligned} \alpha(g, [x_n, (t_0, ..., t_n)]) &= [gx_n, (t_0, ..., t_n)] \\ &= [gf^*(y_m), (t_0, ..., t_n)] \\ &= [f^*(gy_m), (t_0, ..., t_n)] \\ &\sim [gy_m, f_*(t_0, ..., t_n)] \\ &= [gy_m, (s_0, ..., s_m)] \\ &= \alpha(g, [y_m, (s_0, ..., s_m)] \end{aligned}$$

$\cdot$ Para qualquer $[x_n, (t_0, ..., t_n)] \in |X|$ e e elemento neutro de G, temos que:

$$\begin{aligned}\alpha(e,[x_n,(t_0,...,t_n)]) &= [ex_n,(t_0,...,t_n)]\\ &= [x_n,(t_0,...,t_n)]\end{aligned}$$

· Quaisquer que sejam $g_0, g_1 \in G$ e $[x_n,(t_0,...,t_n)] \in |X|$.

$$\begin{aligned}\alpha(g_0,\alpha(g_1,[x_n,(t_0,...,t_n)])) &= \alpha(g_0,[g_1x_n,(t_0,...,t_n)]))\\ &= [g_0(g_1x_n),(t_0,...,t_n)]\,,\ \text{pela ação de } G \text{ em } X_n\\ &= [(g_0g_1)x_n,(t_0,...,t_n)]\\ &= \alpha(g_0.g_1,[x_n,(t_0,...,t_n)])\end{aligned}$$

Portanto, α é ação.

Afirmação 4.1

$$\left|\frac{X}{G}\right| = \frac{|X|}{G}$$

onde $\frac{X}{G}$ *é o objeto simplicial definido por* $\left(\frac{X}{G}\right)_n = \frac{X_n}{G}$, *com :*

· *Faces:* $\overline{d_i} : \frac{X_n}{G} \to \frac{X_{n-1}}{G}$ *por* $Gx \mapsto G(d_i(x))$

· *Degenerações:* $\overline{s_i} : \frac{X_n}{G} \to \frac{X_{n+1}}{G}$ *por* $Gx \mapsto G(s_i(x))$

Demonstração: Começamos observando que :

$$\begin{aligned}x &\in \left|\frac{X}{G}\right| \Longleftrightarrow x = [Gx_n,(t_0,...t_n)]\\ x &\in \frac{|X|}{G} \Longleftrightarrow x = G\,[x_n,(t_0,...t_n)]\end{aligned}$$

Defina $h : \frac{|X|}{G} \to \left|\frac{X}{G}\right|$ por $h(G\,[x_n,(t_0,...t_n)]) = [Gx_n,(t_0,...t_n)]$.

· h está bem definida.

$G\,[x_n,(t_0,...t_n)] = G\,[y_m,(s_0,...s_m)] \Longleftrightarrow \exists g \in G \mid g\,[x_n,(t_0,...t_n)] = [y_m,(s_0,...s_m)] \Longleftrightarrow [gx_n,(t_0,...t_n)] = [y_m,(s_0,...s_m)]$. Logo:

$$\begin{aligned}h(G\,[x_n,(t_0,...t_n)]) &= [Gx_n,(t_0,...t_n)]\\ &= [G(gx_n),(t_0,...t_n)]\\ &= h(G\,[(gx_n),(t_0,...t_n)])\\ &= h(G\,[y_m,(s_0,...s_m)])\end{aligned}$$

e, dessa forma h está bem definida.

Pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} |X| \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "h_0"] & \\ \frac{|X|}{G} \arrow[r, "h"] & |\frac{X}{G}| \end{tikzcd}$$

temos que h é contínua se e só se h_0 o for, onde $h_0([x_n,(t_0,...t_n)]) = [Gx_n,(t_0,...t_n)]$ e π é a projeção natural.

Para verificar a continuidade de h_0 passamos a considerar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup\limits_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_0"] & \bigsqcup\limits_{n\geq 0} \frac{X_n}{G} \times \Delta_n \arrow[d, "\pi_1"] \\ |X| \arrow[r, "h_0"] & |\frac{X}{G}| \end{tikzcd}$$

onde $f(x_n,(t_0,...t_n)) = (Gx_n,(t_0,...t_n))$ e π_0, π_1 são as projeções sobre as realizações geométricas.

Observe que $\bigsqcup\limits_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n = (X_0\times\Delta_0)\cup(X_1\times\Delta_1)\cup...\cup(X_n\times\Delta_n)\cup... = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_n \cup ...$ sendo $A_i = X_i \times \Delta_i$ fechado em $\bigsqcup\limits_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n$.

Além disso, sejam $f_i : A_i \to \bigsqcup\limits_{n\geq 0} \frac{X}{G} \times \Delta_n$ dadas por $f_i(x_i,(t_0,...,t_n)) = (Gx_i,(t_0,...t_n))$. Estas aplicações são contínuas pois $f_i = pr_i \times id$, onde pr_i é a projeção de X_i em $\frac{X_i}{G}$.

Como $f(z) = f_i(z)$ se $z \in A_i$, e a topologia de $\bigsqcup\limits_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n$ é a fraca gerada por A_i, segue que f é contínua.

$\cdot$ h_0 é contínua.

Seja U aberto em $\left|\frac{X}{G}\right|$, ou seja, $\pi_1^{-1}(U)$ é aberto em $\bigsqcup_{n\geq 0} \frac{X}{G} \times \Delta_n$.

$h_0^{-1}(U)$ é aberto em $|X| \Longleftrightarrow \pi_0^{-1}(h_0^{-1}(U))$ é aberto em $\bigsqcup_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n$,

mas

$$\begin{aligned}
\pi_0^{-1}(h_0^{-1}(U)) &= (\pi_0^{-1} \circ h_0^{-1})(U) \\
&= (h_0 \circ \pi_0)^{-1}(U) \\
&= (\pi_1 \circ f)^{-1}(U) \\
&= (f^{-1} \circ \pi_1^{-1})(U) \\
&= f^{-1}(\pi_1^{-1}((U))
\end{aligned}$$

e $f^{-1}(\pi_1^{-1}((U))$ é aberto em $\bigsqcup_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n$ pois f é contínua e $\pi_1^{-1}(U)$ é aberto em $\bigsqcup_{n\geq 0} \frac{X}{G} \times \Delta_n$.

Vamos determinar uma inversa para h definindo:

$$h' : \left|\frac{X}{G}\right| \to \frac{|X|}{G}$$

por $h'([Gx_n, (t_0, ...t_n)]) = G\left[x_n, (t_0, ...t_n)\right].$

$\cdot$ h' está bem definida.

$[Gx_n, (t_0, ...t_n)] = [Gy_m, (s_0, ..., s_m)] \Longleftrightarrow \exists f \in Hom_{\Delta^*}([n], [m]) \mid f^*(Gy_m) = Gx_n$ e $(s_0, ..., s_m) = f_*(t_0, ...t_n)$, mas $f = \varepsilon_{i_k}...\varepsilon_{i_1}...\eta_{j_1}...\eta_{j_h} \Longrightarrow f^* = \overline{s_{j_h}}...\overline{s_{j_1}}\overline{d_{i_k}}...\overline{d_{i_1}}$. Logo, $f^*(Gy_m) = Gx_n \Longleftrightarrow (\overline{s_{j_h}}...\overline{s_{j_1}}\overline{d_{i_k}}...\overline{d_{i_1}})(Gy_m) = Gx_n \Longleftrightarrow G(s_{j_h}...s_{j_1}d_{i_k}...d_{i_1}(y_m)) = Gx_n \Longleftrightarrow s_{j_h}...s_{j_1}d_{i_k}...d_{i_1}(y_m) = gx_n$ para algum $g \in G$.

Daí:

$$\begin{aligned}
h'([Gx_n,(t_0,...t_n)]) &= G\,[x_n,(t_0,...t_n)] \\
&= Gg\,[x_n,(t_0,...t_n)] \\
&= G\,[gx_n,(t_0,...t_n)] \\
&= G\,[s_{j_h}...s_{j_1}d_{i_k}...d_{i_1}(y_m),(t_0,...t_n)] \\
&= G\,[y_m, f_*(t_0,...t_n)] \\
&= G\,[y_m,(s_0,...,s_m)] \\
&= h'([Gy_m,(s_0,...,s_m)])
\end{aligned}$$

$\cdot$ h' é contínua.

Para verificarmos a continuidade de h' consideremos o diagrama (comutativo)

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{n\geq 0} \frac{X_n}{G}\times\Delta_n \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi_1"] & \frac{\bigsqcup_{n\geq 0} X_n\times\Delta_n}{G} \arrow[r, "q"] & \frac{|X|}{G} \\
\left|\frac{X}{G}\right| \arrow[urr, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

onde:

$\cdot\pi_1$ é a projeção sobre a realização geométrica.

$\cdot p((Gx_n,(t_0,..,t_n))) = G\,(x_n,(t_0,..,t_n))$

$\cdot q(G(x_n,(t_0,..,t_n))) = G[x_n,(t_0,..,t_n)]$

Considere $g = q\circ p$ e, seja U aberto em $\frac{|X|}{G}$.

$(h')^{-1}(U)$ é aberto em $\left|\frac{X}{G}\right|$ se e só se $\pi_1^{-1}((h')^{-1}(U))$ é aberto em $\bigsqcup_{n\geq 0}\frac{X}{G}\times\Delta_n$. Mas, $\pi_1^{-1}((h')^{-1}(U)) = (h'\circ\pi_1)^{-1}(U) = g^{-1}(U)$ que é aberto de $\bigsqcup_{n\geq 0}\frac{X}{G}\times\Delta_n$ se g é contínua. Para tanto, mostremos que p e q são contínuas.

$\cdot$ p é contínua.

Tome $p_i : \frac{X_i}{G} \times \Delta_i \to \coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n \diagup G$ tais que $p_i(Gx_i, (t_0, ..., t_i)) = G(x_i, (t_0, ..., t_i))$. Pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_i \times \Delta_i \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi \times id"] & \coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n \arrow[d, "\pi"] \\
\frac{X_i}{G} \times \Delta_i \arrow[r, "p_i"] & \frac{\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n}{G}
\end{tikzcd}$$

temos que p_i é contínua, $\forall i$. Pela topologia fraca de $\coprod_{n\geq 0} \frac{X}{G} \times \Delta_n$, segue que p é contínua.

$\cdot$ q é contínua.

Basta observarmos que as projeções do diagrama abaixo são contínuas e que este comuta.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n \arrow[r] \arrow[d] & {|X|} \arrow[d] \\
\frac{\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n}{G} \arrow[r, "q"] & \frac{|X|}{G}
\end{tikzcd}$$

Como $h \circ h' = id_{\left|\frac{X}{G}\right|}$ e $h' \circ h = id_{\frac{|X|}{G}}$ temos que $\left|\frac{X}{G}\right| \cong \frac{|X|}{G}$. $\square$

4.2 Espaços Classificantes de Grupos

Seja G um grupo topológico. Como vimos no capítulo 1, seção 1.1, G pode ser considerado como uma categoria com um único objeto em que todo morfismo possui um inverso sobre a composição, ou seja, $Obj(G) = *$ e $Hom_G(*, *) = G$. Deste modo o nervo da categoria G é dado por:

$Nervo(G)_0 = *$

$Nervo(G)_1 = \{* \xrightarrow{g_1} * : g_1 \in G\} \cong G$

$Nervo(G)_2 = \{* \xrightarrow{g_1} * \xrightarrow{g_2} * : g_1, g_2 \in G\} \cong G \times G$

...

$Nervo(G)_n = \{* \xrightarrow{g_1} * \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_n} * : g_1, g_2, ..., g_n \in G\} \cong G \times G \times ... \times G \cong G^n$

Considere agora a categoria $\overline{G}$ em que os seus objetos são os elementos de G e $Hom_{\overline{G}}(g_1, g_2)$ é constituído de um único isomorfismo para cada par (g_1, g_2). Assim, o nervo da categoria $\overline{G}$ é dado por:

$Nervo(\overline{G})_0 = G$

$Nervo(\overline{G})_1 = \{g_0 \to g_1 : g_0, g_1 \in G\}$

$\cong G \times G \cong G^2$

$Nervo(\overline{G})_2 = \{g_0 \to g_1 \to g_2 : g_0, g_1, g_2 \in G\}$

$\cong G \times G \times G \cong G^3$

...

$Nervo(\overline{G})_n = \{g_0 \to g_1 \to ... \to g_n : g_0, g_1, ..., g_n \in G\}$

$\cong G \times G \times ... \times G \cong G^{n+1}$

Denotaremos $B_*(G) = Nervo(G)$ e $E_*(G) = Nervo(\overline{G})$ e, obviamente, estamos trabalhando com objetos simpliciais cujas operações faces e degenerações são dadas, respectivamente, por :

· Faces: $d_i^B : B_n(G) \to B_{n-1}(G)$ tal que

$$d_i^B(g_1, ..., g_n) = \begin{cases} (g_2, ...g_n) \text{ se } i = 0 \\ (g_1, ..., g_{i-1}, g_{i+1}g_i, g_{i+2}, ..., g_n) \text{ se } 0 < i < n \\ (g_1, ..., g_{n-1}) \text{ se } i = n \end{cases}$$

· Degenerações: $s_i^B : B_n(G) \to B_{n+1}(G)$ tal que

$$s_i^B(g_1, ..., g_n) = (g_1, ..., g_{i-1}, e, g_i, ..., g_n) \text{ se } 0 \leq i \leq n$$

$\cdot$ Faces: $\quad d_i^E : E_n(G) \to E_{n-1}(G)$ tal que

$$d_i^E(g_0, g_1, ..., g_n) = \begin{cases} (g_1, ...g_n) & \text{se } i = 0 \\ (g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n) & \text{se } 0 < i < n \\ (g_0, ..., g_{n-1}) & \text{se } i = n \end{cases}$$

$\cdot$ Degenerações: $\quad s_i^E : E_n(G) \to E_{n+1}(G)$ tal que

$$s_i^E(g_0, ..., g_n) = (g_0, ..., g_{i-1}, g_i, g_i, g_{i+1}, ..., g_n) \quad \text{se } 0 \le i \le n$$

Podemos definir uma ação à esquerda de G no objeto $E_*(G)$ da seguinte forma, para cada $n \geq 0$:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_n : & G \times E_n(G) & \longrightarrow & E_n(G) \\ & (g, (g_0, ..., g_n)) & \longmapsto & (g_0 g^{-1}, g_1 g^{-1}, ..., g_n g^{-1}) \end{array}$$

Agora denotaremos a realização geométrica dos objetos simpliciais $(B_*(G), d_i^B, s_i^B)$ e $(E_*(G), d_i^E, s_i^E)$ por BG e EG, ou seja, $BG = |B_*(G)|$ e $EG = |E_*(G)|$. Como vimos anteriormente, G atua neste espaço através da ação:

$$\begin{array}{ccc} G \times EG & \longrightarrow & EG \\ (g, [(g_0, ..., g_n), (t_0, ..., t_n)] & \longmapsto & [(g_0 g^{-1}, g_1 g^{-1}, ..., g_n g^{-1}), (t_0, ...t_n)] \end{array}$$

Observação 4.1 Desde que G atue no nervo de $\overline{G}$ livremente, a ação "induzida"na realização geométrica do nervo é livre.

Teorema 4.1

$$BG \approx \frac{EG}{G}$$

Demonstração: Para verificarmos a afirmação, basta mostrarmos que os objetos simpliciais $B_*(G)$ e $\frac{E_*G}{G}$ são isomorfos, logo suas realizações geométricas também o são (pelas propriedades funtoriais) e, com isso, temos:

$$BG = |B_*(G)| \approx \left| \frac{E_*(G)}{G} \right| \overset{(*)}{\approx} \frac{|E_*(G)|}{G} = \frac{EG}{G}$$

(∗) Afirmação 4.1.

Defina, para cada $n \geq 0$, a função

$$f : B_*(G) \to \frac{E_*(G)}{G}$$

por $f_n(g_1, ..., g_n) = G(e, g_1, g_2g_1, g_3g_2g_1, ..., g_ng_{n-1}...g_1)$

· f é uma aplicação simplicial, pois os diagramas abaixo são comutativos:

$$\begin{tikzcd} B_n(G) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_i^B"] & \frac{E_n(G)}{G} \arrow[d, "\overline{d_i^E}"] \\ B_{n-1}(G) \arrow[r, "f_{n-1}"] & \frac{E_{n-1}(G)}{G} \end{tikzcd}$$

Diagrama (7)

$$\begin{tikzcd} B_n(G) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "s_i^B"] & \frac{E_n(G)}{G} \arrow[d, "\overline{s_i^E}"] \\ B_{n+1}(G) \arrow[r, "f_{n+1}"] & \frac{E_{n+1}(G)}{G} \end{tikzcd}$$

Diagrama (8)

De fato:

$$\begin{aligned} (\overline{d_i^E} \circ f_n)(g_1, ..., g_n) &= \overline{d_i^E}(f_n(g_1, ..., g_n)) \\ &= \overline{d_i^E}(G(e, g_1, g_2g_1, g_3g_2g_1, ..., g_ng_{n-1}...g_1)) \\ &= G(d_i^E(e, g_1, g_2g_1, g_3g_2g_1, ..., g_ng_{n-1}...g_1)) \\ &= G(e, ..., g_{i-1}g_{i-2}...g_1, g_{i+1}g_ig_{i-1}...g_1, ..., g_ng_{n-1}...g_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_{n-1} \circ d_i^B)(g_1, ..., g_n) &= f_{n-1}(d_i^B(g_1, ..., g_n)) \\ &= f_{n-1}(g_1, ..., g_{i-1}, g_{i+1}g_i, g_{i+2}, ..., g_n) \\ &= G(e, g_1, ..., g_{i-1}g_{i-2}...g_1, g_{i+1}g_ig_{i-1}...g_1, ..., g_ng_{n-1}...g_1) \end{aligned}$$

Analogamente verificamos a comutatividade do diagrama (8).

Defina para, cada $n \geq 0$, a função

$$h : \frac{E_*(G)}{G} \to B_*(G)$$

por $h_n(G(g_0, g_1, ..., g_n)) = (g_1g_0^{-1}, g_2g_1^{-1}, ..., g_ng_{n-1}^{-1})$.

· h_n está bem definida.

$(g_0, ..., g_n) \sim (z_0, ..., z_n) \iff (g_0, ..., g_n) = \lambda(z_0, ..., z_n), \lambda \in G \iff$ $(g_0, ..., g_n) = (z_0\lambda^{-1}, ..., z_n\lambda^{-1}) \iff g_i = z_i\lambda^{-1}, \forall i = 0, ..., n$

Logo:

$$\begin{aligned}
h_n(G(g_0, g_1, ..., g_n)) &= (g_1g_0^{-1}, g_2g_1^{-1}, ..., g_ng_{n-1}^{-1}) \\
&= ((z_1\lambda^{-1})(z_0\lambda^{-1})^{-1}, (z_2\lambda^{-1})(z_1\lambda^{-1})^{-1}, ..., \\
&\quad (z_n\lambda^{-1})(z_{n-1}\lambda^{-1})^{-1}) \\
&= (z_1\lambda^{-1}\lambda z_0^{-1}, z_2\lambda^{-1}\lambda z_1^{-1}, ..., z_n\lambda^{-1}\lambda z_{n-1}^{-1}) \\
&= (z_1z_0^{-1}, z_2z_1^{-1}, ..., z_nz_{n-1}^{-1}) \\
&= h_n(G(z_0, ..., z_n))
\end{aligned}$$

$\cdot$ h é uma aplicação simplicial pois os diagramas abaixo são comutativos.

$$\begin{tikzcd}
\frac{E_n(G)}{G} \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\overline{d_i^E}"] & B_n(G) \arrow[d, "d_i^B"] \\
\frac{E_{n-1}(G)}{G} \arrow[r, "h_{n-1}"] & B_{n-1}(G)
\end{tikzcd}$$

diagrama (9)

$$\begin{tikzcd}
\frac{E_n(G)}{G} \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\overline{s_i^E}"] & B_n(G) \arrow[d, "s_i^B"] \\
\frac{E_{n+1}(G)}{G} \arrow[r, "h_{n+1}"] & B_{n+1}(G)
\end{tikzcd}$$

Diagrama (10)

De fato:

$$\begin{aligned}
(d_i^B \circ h_n)(G(g_0, g_1, ..., g_n)) &= d_i^B(h_n(G(g_0, g_1, ..., g_n)) \\
&= d_i^B(g_1g_0^{-1}, g_2g_1^{-1}, ..., g_ng_{n-1}^{-1}) \\
&= (g_1g_0^{-1}, ..., g_{i-1}g_{i-2}^{-1}, (g_{i+1}g_i^{-1})(g_ig_{i-1}^{-1}), ..., \\
&\quad g_ng_{n-1}^{-1}) \\
&= (g_1g_0^{-1}, ..., g_{i-1}g_{i-2}^{-1}, g_{i+1}g_{i-1}^{-1}, ..., g_ng_{n-1}^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h_{n-1} \circ \overline{d_i^E})(G(g_0, g_1, ..., g_n)) &= h_{n-1}(\overline{d_i^E}(G(g_0, g_1, ..., g_n)) \\
&= h_{n-1}(G(d_i^E(g_0, g_1, ..., g_n))) \\
&= h_{n-1}(G(g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n)) \\
&= (g_1g_0^{-1}, ..., g_{i-1}g_{i-2}^{-1}, g_{i+1}g_{i-1}^{-1}, ..., g_ng_{n-1}^{-1})
\end{aligned}$$

Analogamente verificamos a comutatividade do diagrama (10).

Além disso, temos que:

$\cdot\ h \circ f = id_{B_*(G)}$

$$\begin{aligned}(h_n \circ f_n)(g_1, ..., g_n) &= h_n(G(e, g_1, g_2g_1, g_3g_2g_1, ..., g_ng_{n-1}...g_1)) \\ &= (g_1e^{-1}, (g_2g_1)g_1^{-1}, ..., (g_ng_{n-1}...g_1) \\ &\quad (g_{n-1}g_{n-2}...g_1)^{-1}) \\ &= (g_1, ..., g_n)\end{aligned}$$

$\cdot\ f \circ h = id_{\frac{E_*(G)}{G}}$

$$\begin{aligned}(f_n \circ h_n)(G(g_0, g_1, ..., g_n)) &= f_n(g_1g_0^{-1}, g_2g_1^{-1}, ..., g_ng_{n-1}^{-1}) \\ &= G(e, g_1g_0^{-1}, (g_2g_1^{-1})(g_1g_0^{-1}), ..., \\ &\quad (g_ng_{n-1}^{-1})(g_{n-1}g_{n-2}^{-1})...(g_1g_0^{-1})) \\ &= G(e, g_1g_0^{-1}, g_2g_0^{-1}, ..., g_ng_0^{-1}) \\ &= Gg_0^{-1}(e, g_1g_0^{-1}, g_2g_0^{-1}, ..., g_ng_0^{-1}) \\ &= G(g_0, g_1, ..., g_n)\end{aligned}$$

Portanto, $BG \cong \frac{EG}{G}$. □

4.3 Os Espaços $K(G, n)$

Podemos olhar intuitivamente $EG \to BG$ como uma aplicação fibrada com fibra G e, à partir de certas condições, verificarmos que $G \cdots EG \to BG$ é um G-fibrado universal. Segundo [11] quando o elemento neutro de G é um ponto base não degenerado, isto é, a inclusão $i : \{e\} \hookrightarrow G$ é uma cofibração ou, G é um espaço ANR (retrato de vizinhança absoluto) conforme [23], temos que a aplicação $EG \to BG$ é localmente trivial.

Logo, nas condições acima, $G \cdots EG \to BG$ é um fibrado localmente trivial e pelo corolário 3.2, como todo elemento de $\overline{G}$ é inicial e terminal, segue que $B\overline{G} = EG$ é contrátil. Além disso, (teorema 4.1) $BG \approx \frac{EG}{G}$ então

$G \cdots EG \to BG$ é um G-fibrado principal e, pelo corolário 2.1, o fibrado em questão é universal.

Como todos os grupos de Lie e grupos discretos possuem elemento neutro não degenerado (cf. [11]) é possível determinarmos diversos G-fibrados universais.

Daremos início, agora, a construção de espaços $K(G,n)$ de Eilenberg-MacLane, para os quais o espaço classificante possui um papel fundamental.

Pelo teorema 2.5 para todo fibrado $G \cdots EG \to BG$ é possível determinarmos a seqüência exata longa de grupos de homotopia

$\cdots \to \pi_{n+1}(EG) \to \pi_{n+1}(BG) \to \pi_n(G) \to \pi_n(EG) \to \cdots$

Como EG é contrátil, segue que $\pi_k(EG) = 0$ para todo $n \geq 0$, logo

$\cdots \to 0 \to \pi_{n+1}(BG) \to \pi_n(G) \to 0 \to \cdots$

e, portanto

$$\pi_{n+1}(BG) \cong \pi_n(G) \ \forall\ n \geq 0 \qquad (*)$$

Se considerarmos G um grupo abeliano (G satisfazendo as condições do teorema 3.3) temos que a multiplicação, $G \times G \to G$, e a aplicação inversa, $G \to G$, são homomorfismos e, com isso, é possível determinarmos uma multiplicação em BG por

$$BG \times BG \cong B(G \times G) \to BG$$

uma vez que $|G \times G| \cong |G| \times |G|$ e $Nervo(G \times G) \cong Nervo(G) \times Nervo(G) \Rightarrow B(G \times G) = |Nervo(G \times G)| \cong |Nervo(G) \times Nervo(G)| \cong |Nervo(G)| \times |Nervo(G)| = BG \times BG$.

Assim, BG também possui uma estrutura de grupo e, portanto, é possível construirmos iteradamente $B^n(G)$ colocando-se $B^0(G) = G$ e $B^n(G) = B(B^{n-1}(G))$.

Seja G um grupo abeliano discreto. Calculando os grupos de homotopia de BG, obtemos:

$\pi_1(BG) \overset{(*)}{\cong} \pi_0(G) = G$, pois G é discreto.

$\pi_2(BG) \overset{(*)}{\cong} \pi_1(G) = 0$, pois G é discreto.

$\pi_3(BG) \overset{(*)}{\cong} \pi_2(G) = 0$, pois G é discreto.

$\dots$

$\pi_k(BG) \overset{(*)}{\cong} \pi_{k-1}(G) = 0$, pois G é discreto.

Ou seja, $\pi_k(BG) = \begin{cases} G \text{ se } k = 1 \\ 0 \text{ se } k \neq 1 \end{cases}$

Calculando os grupos de homotopia de $B^2(G)$, obtemos:

$\pi_1(B^2(G)) = \pi_1(B(BG)) \overset{(*)}{\cong} \pi_0(BG) = 0$

$\pi_2(B^2(G)) = \pi_2(B(BG)) \overset{(*)}{\cong} \pi_1(BG) = G$

$\pi_3(B^2(G)) = \pi_3(B(BG)) \overset{(*)}{\cong} \pi_2(BG) = 0$

$\dots$

$\pi_k(B^2(G)) = \pi_k(B(BG)) \overset{(*)}{\cong} \pi_{k-1}(BG) = 0$

Ou seja, $\pi_k(B^2(G)) = \begin{cases} G \text{ se } k = 2 \\ 0 \text{ se } k \neq 2 \end{cases}$

Logo, para todo $n \geq 0$ teremos:

$$\pi_k(B^n(G)) = \begin{cases} G \text{ se } k = n \\ 0 \text{ se } k \neq n \end{cases}$$

De fato, já vimos acima que isto é válido para $n = 1$ e $n = 2$. Suponhamos que a afirmação seja válida para n, então para $n + 1$ temos:

$\pi_k(B^{n+1}(G)) = \pi_k(B(B^n(G))) = \pi_{k-1}(B^n(G)) = \begin{cases} G \text{ se } k - 1 = n \\ 0 \text{ se } k - 1 \neq n \end{cases}$

$\Rightarrow \pi_k(B^{n+1}(G)) = \begin{cases} G \text{ se } k = n + 1 \\ 0 \text{ se } k \neq n + 1 \end{cases}$

Portanto, $B^n(G) = K(G, n)$.

4.4 Considerações Finais

Encerramos esta dissertação citando alguns resultados interessantes encontrados na literatura concernentes a espaços classificantes de grupos e monóides.

Observamos inicialmente que o funtor espaço classificante $B : Cat \to Top$ da categoria Cat das categorias e funtores na categoria Top dos espaços topológicos e funções contínuas tem estreita ligação com o funtor $\Omega : hTop_* \to hTop_*$ da categoria $hTop_*$ cujos objetos são espaços topológicos com ponto base e cujos morfismos são classes de homotopia relativa (ao ponto base), em si mesma, que associa cada espaço com ponto base (X, x_0) ao espaço de laços $\Omega X = \{f : [0,1] \to X | f$ é contínua e $f(0) = f(1) = x_0)\}$ que tem a função constante igual a x_0 como ponto base. Sabemos que o funtor Ω possui um adjunto a esquerda, a saber, o funtor suspensão $\Sigma : hTop_* \to hTop_*$ (cf. [22]). Para perceber essa relação seja G um grupo topológico, temos então da seção anterior que existe um fibrado universal $G \cdots EG \to BG$ e conseqüentemente $\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)\ \forall\ n \geq 1$. Se denotarmos $Hom_{hTop_*}(X,Y)$ por $[X,Y]$ teremos para todo $n \geq 1$ $\pi_{n-1}(\Omega BG) = [S^{n-1}, \Omega BG] = [\Sigma S^{n-1}, BG] = [S^n, BG] = \pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)$, ou seja, G e ΩBG possuem todos os grupos de homotopia isomorfos. Na verdade pode-se provar que G e ΩBG são fracamente homotópicos, ou seja, existe uma função $f : G \to \Omega BG$ a qual induz isomorfismos $f_* : \pi_n(G) \to \pi_n(\Omega BG)\ \forall\ n \geq 1$.

Temos com isso que o funtor G funciona como "desenlaçamento"de grupos no sentido fraco, já que, se G é um grupo topológico então G é fracamente homotópico a um espaço de laços ΩX sendo $X = BG$.

Em [13] J.P. May construiu um funtor de 3 variáveis que generaliza o funtor B e que tem papel análogo ao de "desenlaçamento"para funtores iterados $\Omega^n,\ 1 \leq n \leq \infty$.

Outras questões relacionadas a B dizem respeito a topologia do grupo G ao qual se aplica B. Por exemplo em [26] é mostrado que se $G = Homeo(M)$ é o grupo topológico dos auto-homeomorfismos de uma variedade compacta e G^δ é o mesmo grupo munido da topologia discreta, então existe uma equivalência homológica $BG^\delta \to BG$. No mesmo espírito temos dois outros surpreendentes resultados (cf. [7] e [9]) que dizem o seguinte: dado qualquer complexo-CW X existe um grupo discreto G e uma equivalência homológica $BG \to X$ e um monóide discreto M e uma equivalência homotópica $BM \simeq X$.

Para finalizar, notemos que se G e H são grupos isomorfos então, como B é um funtor segue que BG e BH possuem mesmo tipo de homotopia. Se G e H forem grupos de Lie compactos então vale a recíproca, ou seja, $BG \simeq BH \Rightarrow G \cong H$ (cf. [17], [18], [19], e [20].)

Referências Bibliográficas

[1] BORSUK, K., *Theory of Retracts*, Polish Scientific, Warzawa, 1967.

[2] BOUSFIELD, A. K. and KAN, D. M., *Homotopy limits, completions and localitations*, Lecture Notes in Mathematics 304, Springer-Verlag, New York, 1972.

[3] BREDON, G. E., *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Verlag, New York, 1997.

[4] DUGUNDJI, J., *Topology*, Allyn $\mathcal{E}$ Bocon, Newton, MA, 1966.

[5] HU,S.T., *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, 1959.

[6] HUSEMOLLER, D., *Fibre Bundles*, 2^{nd} ed., GraduateTexts in Mathematics 20, Springer-Verlag, New York, 1975.

[7] KAN, D., and THURSTON, W., *Every connected space has the homology of a* $K(\pi, n)$, *Topology* 15 (1976), 253-258.

[8] LIMA,E.L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1998.

[9] MACDUFF, D., *On the classifying spaces of discrete monoids, Topology* 18 (1979), 313-320.

[10] MACLANE,S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[11] MAY, J. P., *A Concise Course in Algebraic Topology*, The University of Chicago Press, London, 1999.

[12] MAY, J. P., *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, D. Van Nostrad Company, Princeton, 1967.

[13] MAY, J. P., *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics 271, Springer-Verlag, New York, 1972.

[14] MILNOR, J., *Construction of universal bundles I*, Ann. of Math. 63 (1956), 272-284.

[15] MILNOR, J., *Construction of universal bundles II*, Ann. of Math. 63 (1956), 430-436.

[16] MILNOR, J., *The Geometric of a Semi-Simplicial Complex*, Ann. of Math. 65 (1957), 357-362.

[17] MOLLER, J. M., *Rational equivalences between classifying spaces*, Math. Z. 241 (2002), n^o4, 761-799.

[18] NOTBOHM,D., *Classifying spaces of compact Lie groups and finite loop spaces in handbook of algebraic topology*, North-Holland, Amsterdan, edited by I.M. James (1995), 1049-1099.

[19] NOTBOHM,D., *On the "classifying spaces"functor for compact Lie groups*, J. London Math. Soc (2) 52 (1995), n^o1, 185-198.

[20] OSSE, A., *Sur le classifiant d' un groupe de Lie compact connexe*, C.R. Acad. Sci. Paris 315 (1992), n^o7, 833-838.

[21] QUILLEN, D., *Higher algebraic K-theory I*, Lecture Notes Mathematics 341, Springer-Verlag, New York, 1973.

[22] ROTMAN, J.J., *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 119, Springer-Verlag, New York, 1998.

[23] SEGAL, G., *Classifying Spaces and Spectral Sequences*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 34 (1968), 105-112.

[24] SPANIER, E.H., *Algebraic Topology*, Mcgraw-Hill, New Delhi, 1981.

[25] STEENROD, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[26] THURSTON, W., *Foliations and groups of diffeomorphisms* , Bull. A.M.S. 80 (1974), 304-307.

[27] WARNER, F.W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag, New York, 1983.

[28] WHITEHEAD, J.H.C., *Combinatoril Homotopy I*, Bull. Amer. Soc. 55 (1949), 213-245.