UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARACTERIZAÇÕES DA COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ DE CAMPOS POLINOMIAIS DO PLANO

Roberta Camelucci Carrocine

SÃO CARLOS
2007

CARACTERIZAÇÕES DA COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ DE CAMPOS POLINOMIAIS DO PLANO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARACTERIZAÇÕES DA COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ DE CAMPOS POLINOMIAIS DO PLANO

Roberta Camelucci Carrocine

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho.

SÃO CARLOS
2007

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

C319cc

Carrocine, Roberta Camelucci.
Caracterizações da compactificação de Poincaré de campos polinomiais do plano / Roberta Camelucci Carrocine. -- São Carlos : UFSCar, 2007.
65 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.

1. Campos vetoriais. 2. Análise matemática. 3. Campos polinomiais. I. Título.

CDD: 515.73 (20^a)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
DM - UFSCar

Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues
ICMC - USP

Para meus pais José Roberto e Isabel

"Os pontos não têm partes nem dimensões.
Como podem combinar-se para formar uma linha? "
(J. A. Lindon)

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela Vida, pela Força e por Seu Amor ;

à minha Família - José Roberto, Isabel, Priscilla e Sara - por ser o meu refúgio, meu porto seguro;

ao Eduardo pelo companheirismo, compreensão e carinho;

ao Professor Ruidival pela paciência, carinho e dedicação com que sempre me orientou desde a graduação;

aos amigos (de infância, de república, de faculdade e da pós) e familiares que sempre me incentivaram e ajudaram;

à Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, descrevemos a Compactificação de Poincaré de campos vetoriais polinomiais e apresentamos duas caracterizações dela.

Palavras-chave: Análise Matemática. Campos vetoriais. Campos polinomiais.

Abstract

In this work, we describe the Poincaré Compactification of polinomial vector fields and present two characterization of it.

Keywords: Mathematical Analysis. Vector fields. Polinomial vector fields.

Sumário

Referências Bibliográficas **65**

Capítulo 0

Introdução

O estudo local de campos vetoriais em espaços euclidianos genericamente é abordado por uma gama grande de resultados, tais como os teoremas de Poincaré-Bendixon (no caso bidimensional) e o de Grobman-Hartman no caso geral, por exemplo.

A Compactificação de Poincaré de Campos Polinomiais, em contrapartida, é uma técnica que possibilita estudar o comportamento de campos vetoriais polinomiais no infinito e portanto se aplica ao estudo global destes campos. Em particular, tendo em vista Santos Filho ([4]), objetiva-se aplicá-la para caracterizar de uma forma mais concreta quando um campo de vetores polinomial real no $\mathbb{R}^n$ que nunca se anula é globalmente resolúvel.

Pelo Teorema do Fluxo Tubular (ver [5], página 222, Teorema 8), temos que o campo vetorial constante $\mathrm{Y}(x) = (1, 0, ..., 0)$ em $\mathbb{R}^n$ é um modelo para campos que não se anulam uma vez que, pelo já citado resultado, localmente tais campos são conjugados ao campo Y. Tal modelo, porém, não é o único. De fato, se considerarmos a função $f(x, y) = e^x \ \cos y$, observamos que o campo $\mathrm{X}_f(x, y) = (-e^x \ \cos y, -e^x \ \mathrm{sen} y)$ é tal que suas trajetórias são as curvas de nível de f e tal campo não se anula em $\mathbb{R}^2$, porém não existe um difeomorfismo que o linearize globalmente. Neste sentido, os estudos que podemos fazer sobre campos vetoriais polinomiais por meio da Compactificação de Poincaré faz com que tais campos constituam um outro modelo, diferente de Y.

Usaremos aqui o termo compactificação de campos vetoriais para representar campos obtidos por meio da compactificação do espaço. No caso da Compactificação de Poincaré, tomaremos a compactificação de $\mathbb{R}^n$ dada pela projeção central, isto é: identificamos $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano $\Pi = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \ y_{n+1} = 1\}$, tangente a $\mathbf{S^n}$ no pólo norte. Restringindo-nos ao hemisfério norte $\mathbf{H}^+$ $(= \{y \in \mathbf{S^n} | \ y_{n+1} > 0\})$ de $\mathbf{S^n}$, tomamos a projeção central dos pontos do hemisfério norte sobre Π. Tal aplicação é um difeomorfismo. Podemos considerar sua inversa ϕ^+ com valores em $\overline{\mathbf{H}^+}$. Assim, temos que o hemisfério norte aberto unido com o equador da esfera é uma compactificação de $\mathbb{R}^n$ (ver figura 0.0.1).

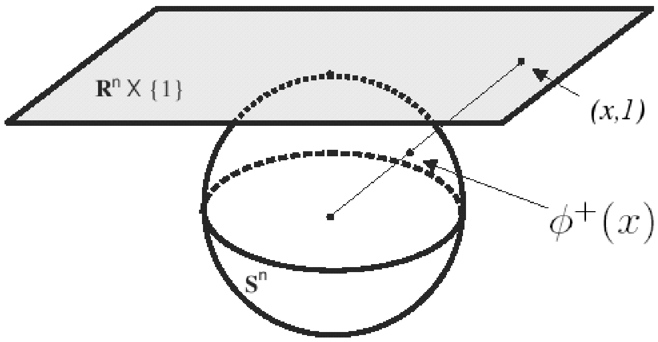

FIGURA 0.0.1: Projeção central.

Com o mesmo procedimento no caso do hemisfério sul, temos que $\overline{\mathbf{H}^-}$ é uma compactificação de $\mathbb{R}^n$. Nestas compactificações (que de fato são homeomorfas), observamos que o infinito de $\mathbb{R}^n$ é identificado com o equador da esfera $\mathbf{S^n}$.

Porém, mesmo que nos restrinjamos a campos polinomiais X de $\mathbb{R}^n$, em geral o campo sobre $\mathbf{H}^+$ induzido por ϕ^+, $(\mathrm{D}\phi^+)$X, não admite extensão $\mathcal{C}^\infty$ em $\overline{\mathbf{H}^+}$ (o mesmo ocorrendo com o campo $(\mathrm{D}\phi^-)$X induzido por ϕ^- sobre $\mathbf{H}^-$). Então, para o estudo qualitativo das trajetórias do campo induzido, consideramos um novo campo tal que as trajetórias sejam as mesmas. Isto é conseguido multiplicando o campo por uma função $\mathcal{C}^\infty$ que não se anula no hemisfério norte (sul). Obtemos então um campo real analítico definido em toda a esfera $\mathbf{S^n}$ que será denominado a *Compactificação de Poincaré de* X e denotado por $\widetilde{X}$.

O Capítulo 1 é dedicado às preliminares, que incluem a introdução do conceito de variedades diferenciáveis e o estudo de suas propriedades e ainda uma breve introdução sobre a teoria de compactificação de espaços topológicos. As referências utilizadas são Lima ([2] e [3]), Sotomayor ([5]) e Warner ([6]).

No Capítulo 2 descreveremos com detalhes a Compactificação de Poincaré de campos vetoriais polinomiais gerais, determinando suas expressões em coordenadas locais e observando algumas de suas propriedades. Mostraremos que se X $= (P_1, ..., P_n)$ é um campo polinomial de grau m em $\mathbb{R}^n$, sua compactificação de Poincaré é o campo em $\mathbf{S^n}$

$$\widetilde{X}(y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1\ y_2 & \dots & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & 1-y_2^2 & \dots & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & \dots & 1-y_n^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & \dots & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1(y) \\ \widetilde{P}_2(y) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_n(y) \end{pmatrix},$$

com $\widetilde{P}_i(y_1, ..., y_{n+1}) = y_{n+1}^m\ P_i(y_1/y_{n+1}, ..., y_n/y_{n+1})$. A fonte utilizada foi o artigo *Poincaré compactification of hamiltonian polynomial vector fields*, de J. Delgado; E.A. Lacomba; J. Llibre; E. Pérez, em Hamiltonian Dynamical Systems,IMA Vol. Math. Appl., 63, (Cincinnati, OH., 1992), Springer, New York, 1995, p. 99-114.

Neste trabalho, caracterizaremos a Compactificação de Poincaré, isto é, estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que a restrição à esfera $\mathbf{S^n}$ de campos vetoriais polinomiais gerais de $\mathbb{R}^{n+1}$ sejam a Compactificação de Poincaré de campos polinomiais de $\mathbb{R}^n$. Uma caracterização encontrada por nós será descrita também no Capítulo 2 pelos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2, com ela se obtém campos polinomiais não necessariamente homogêneos.

Como para $(y_1, ..., y_n, y_{n+1}) \in \mathbf{S^n}$ temos, para $i = 1, ..., n+1$, $1-y_i^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} y_j^2$, observamos que em $\mathbf{S^n}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n\ y_i^2 & -y_1\ y_2 & \dots & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^n\ y_i^2 & \dots & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & \dots & \sum_{i=1}^{n-1}\ y_i^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & \dots & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{B}$$

Temos então que $\widetilde{X}(y) = B.\ \widetilde{P}(y)$, com $\widetilde{P}(y) = (\widetilde{P}_1(y), \widetilde{P}_2(y), \cdots, \widetilde{P}_n(y))$. Sendo assim, buscamos uma outra caracterização para esta nova expressão da Compactificação de Poincaré, agora homogênea. Neste trabalho tal caracterização, obtida no caso $n = 3$, será descrita no Teorema 2.3.1 do Capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre variedades diferenciáveis. Algumas definições e alguns teoremas clássicos de cálculo avançado terão aqui uma versão para variedades. Dentre eles, a noção de diferenciabilidade de funções, os Teoremas da Função Inversa e Função Implícita e o conceito de campos vetoriais. Na última seção apresentaremos algumas definições e resultados relacionados à teoria de compactificação de espaços topológicos.

As referências básicas para este capítulo são [3] e [6].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Antes de iniciarmos o estudo sobre variedades diferenciáveis, faremos a seguir algumas observações a respeito da notação que será usada.

Observações:

1. π_i denotará a projeção canônica $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi_i(x) = x_i$, com $x = (x_1, ..., x_n)$. Ainda, se e_i é o i-ésimo vetor da base canônica e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ então $\partial^{e_i} f(x)$ denotará a derivada parcial de f com relação à i-ésima coordenada calculada no ponto $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

2. Se φ é uma função real contínua definida num espaço topológico X, o suporte de φ é um subconjunto de X definido por

$$S(\varphi) = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$$

3. Usaremos o índice de Kronecker dado por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

4. Se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é uma n-upla de inteiros não negativos, diremos que α é um n-multi-índice e definiremos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n! \qquad \text{e} \qquad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$$

5. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f é diferenciável de classe $\mathcal{C}^k$ sobre U (ou simplesmente que f é $\mathcal{C}^k$), para k inteiro não negativo, se as derivadas parciais $\partial^\alpha f$ existirem e forem contínuas em U, para $|\alpha| \leq k$. Em particular, f é $\mathcal{C}^0$ se f for contínua. Se tivermos $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com $U \subset \mathbb{R}^n$, então f será diferenciável de classe $\mathcal{C}^k$ se cada uma das suas componentes $f_i = \pi_i \circ f$, $i = 1, ..., m$, for $\mathcal{C}^k$. Diremos que $f \in \mathcal{C}^\infty$ se $f \in \mathcal{C}^k$ para todo $k \geq 0$.

Definição 1.1.1 *Seja M um espaço topológico de Hausdorff. Diremos que M é um espaço localmente euclidiano de dimensão n se cada ponto de M tiver uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Se φ é um homeomorfismo de um aberto conexo $U \subset M$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, φ é chamada de aplicação coordenada, e as funções $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ são chamadas de funções coordenadas. O par (U, φ) (algumas vezes denotado por $(U, \varphi_1, ..., \varphi_n)$) será então chamado de sistema de coordenadas.

Um sistema de coordenadas (U, φ) é dito sistema de coordenadas cúbicas se $\varphi(U)$ for um cubo aberto em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$. Se $x \in U$ e $\varphi(x) = 0$, então diremos que o sistema de coordenadas é centrado em x.

Observação: Se M é um espaço euclidiano de dimensão n, então sua dimensão é única.

Definição 1.1.2 *Uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ sobre um espaço localmente euclidiano M é uma coleção de sistemas de coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \ \alpha \in A\}$ (com A um conjunto de índices), satisfazendo:*

(a) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$;

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \in \mathcal{C}^k$, $\forall \alpha, \beta \in A$;

(c) A coleção $\mathcal{F}$ é maximal em relação a (b), isto é, se (U, φ) é um sistema de coordenadas tal que $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são $\mathcal{C}^k$, para todo $\alpha \in A$, então $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Observe que em (b) temos $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_\beta : U_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$, e portanto tomando $U = U_\alpha \cap U_\beta$ temos $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U) \longrightarrow \varphi_\alpha(U)$, com $\varphi_\beta(U), \varphi_\alpha(U) \subset \mathbb{R}^n$. Logo, em (b), temos que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \in \mathcal{C}^k$ no sentido usual.

Se $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) |\ \alpha \in A\}$ é qualquer coleção de sistemas de coordenadas satisfazendo (a) e (b) da Definição 1.1.2, então existe uma única estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ contendo $\mathcal{F}_0$.

Definição 1.1.3 *Uma variedade diferenciável n-dimensional de classe $\mathcal{C}^k$ é um par $(M, \mathcal{F})$ consistindo de um espaço localmente euclidiano M de dimensão n, que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade (isto é, possui uma base enumerável para sua topologia), junto com uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de classe $\mathcal{C}^k$.*

Em geral, denotaremos a variedade diferenciável $(M, \mathcal{F})$ apenas por M. Logo, quando dissermos a variedade diferenciável M estaremos considerando o espaço localmente euclidiano M com alguma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ dada.

Exemplos: (1) Sejam $\mathbf{S^n} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$, e $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1)$ e $-e_{n+1} = (0, .., 0, -1)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. A estrutura diferenciável padrão sobre $\mathbf{S^n}$ é obtida tomando $\mathcal{F}$ como a coleção maximal contendo $(\mathbf{S^n} \setminus \{e_{n+1}\}, p_{e_{n+1}})$ e $(\mathbf{S^n} \setminus \{-e_{n+1}\}, p_{-e_{n+1}})$, com $p_{e_{n+1}}$ e $p_{-e_{n+1}}$ as projeções estereográficas sobre e_{n+1} e $-e_{n+1}$ respectivamente.

(2) Um subconjunto aberto U de uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{F}_M)$ é ele próprio uma variedade diferenciável com a estrutura diferenciável

$$\mathcal{F}_U = \{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha\big|_{(U_\alpha \cap U)}) \mid (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_M\}$$

(3) Sejam $(M_1, \mathcal{F}_1)$ e $(M_2, \mathcal{F}_2)$ variedades diferenciáveis de dimensões n_1 e n_2 respectivamente. Então $(M_1 \times M_2, \mathcal{F})$ torna-se uma variedade diferenciável de dimensão $n_1 + n_2$, sendo a estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ a coleção maximal contendo

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi_\beta) \mid (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_1 \text{ e } (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}_2\},$$

com $\varphi_\alpha \times \varphi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$.

A partir de agora trataremos de variedades diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^\infty$ e as denominaremos apenas por variedades diferenciáveis.

Definição 1.1.4 *Seja $U \subset M$ aberto, com M uma variedade diferenciável. Diremos que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ (e denotaremos $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$) se $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$ para toda aplicação coordenada φ em M.*

Uma função contínua $\psi : M \longrightarrow N$ (com M e N variedades diferenciáveis) é diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$ (e denota-se $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ ou apenas $\psi \in \mathcal{C}^\infty$) se para toda função $g \in \mathcal{C}^\infty$, real, definida em um aberto de N, tivermos que $g \circ \psi$ é $\mathcal{C}^\infty$ em ψ^{-1}(domínio de g). Ou equivalentemente, $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ se, e somente se, $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ for $\mathcal{C}^\infty$ para toda aplicação coordenada τ em M e φ em N.

Observemos que, de acordo com a definição anterior, uma função $\psi : M \longrightarrow N$ é $\mathcal{C}^\infty$ se, e somente se, para cada $m \in M$ existe uma vizinhança aberta U de m tal que $\psi|_U \in \mathcal{C}^\infty$. Observemos ainda que a composta de duas aplicações diferenciáveis é também diferenciável.

Como vimos, uma variedade é antes de tudo um espaço de Hausdorff que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Isso garante que toda variedade é também um espaço métrico. Além disso, como $\mathbb{R}^n$ é um espaço localmente compacto e toda variedade é um espaço localmente euclidiano, temos que toda variedade é um espaço localmente compacto e portanto é também um espaço regular. Novamente, o fato de satisfazer o segundo axioma de enumerabilidade implica que, sendo regular, toda variedade é normal.

Após as definições a seguir, enunciaremos outros resultados sobre variedades que seguem como consequência desse axioma.

Definição 1.1.5 *Uma coleção $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M é uma cobertura de um conjunto $W \subset M$ se $W \subset \bigcup U_\alpha$. Se U_α for aberto para todo α dizemos que $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta. Uma subcoleção de $\{U_\alpha\}$ que ainda cobre W é dita uma subcobertura de W. Uma cobertura $\{V_\beta\}$ é um refinamento de uma cobertura $\{U_\alpha\}$ se para cada β existe um α tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.*

Uma coleção $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de M é dita localmente finita se para cada $m \in M$ existir uma vizinhança W_m de m tal que $W_m \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para um número finito de índices α.

Um espaço topológico é dito paracompacto se toda cobertura aberta possui um refinamento localmente finito.

Definição 1.1.6 *Uma partição da unidade sobre M é uma coleção $\{\varphi_i\ ; i \in I\}$ de funções $\mathcal{C}^\infty$ definidas em M tais que*
(a) a coleção de suportes $\{S(\varphi_i)\ ; i \in I\}$ é localmente finita;
(b) $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$ e $\varphi_i(x) \geq 0$, $\forall\ x \in M$ e $i \in I$.
Dizemos que uma partição da unidade $\{\varphi_i\ ; i \in I\}$ é subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ se para cada i existe um α tal que $S(\varphi_i) \subset U_\alpha$.

Lema 1.1.1 *Seja X um espaço topológico localmente compacto, de Hausdorff e que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Então X é paracompacto. De fato, toda cobertura aberta possui um refinamento enumerável, localmente finito consistindo de abertos com fecho compacto.*

Demonstração: Ver [6].

Lema 1.1.2 *Existe uma função $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, não-negativa, definida em $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi \equiv 1$ no cubo fechado de raio 1, $\overline{C(1)}$, e $\varphi \equiv 0$ no complementar do cubo aberto de raio 2, $C(2)^c$.*

Demonstração: Ver [6].

Teorema 1.1.3 Existência de Partições da Unidade *Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha\ ; \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição enumerável da unidade $\{\varphi_i\ ; i \in \mathbb{N}\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$, com $S(\varphi_i)$ compacto para todo i. Se não requerermos suporte compacto, então existe uma partição da unidade $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ com no máximo uma quantidade enumerável dos φ_α's não identicamente nulos.*

Demonstração: Ver [6].

Corolário 1.1.4 *Sejam G aberto em M e A fechado em M, com $A \subset G$. Então existe uma função $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que é $\mathcal{C}^\infty$ e tal que*
(a) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\forall\ x \in M$;
(b) $\varphi \equiv 1$ em A;
(c) $S(\varphi_i) \subset G$.

Demonstração: Ver [6].

1.2 Vetores Tangentes e Diferenciais

Um vetor $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser pensado como um operador sobre funções diferenciáveis da seguinte forma: se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ for diferenciável numa vizinhança de $p \in \mathbb{R}^n$, então v associa a f o número real $v(f)$ que é a derivada direcional de f na direção de v, calculada no ponto p. Mais especificamente temos $v : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

O operador assim definido satisfaz

$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$ e

$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$,

sempre que f e g forem diferenciáveis perto de p, e λ for real. Notemos que a primeira propriedade caracteriza v como um operador linear e a segunda define v como uma derivação.

Esta forma de pensar um vetor nos motiva a definir vetores tangentes em variedades. Tais vetores serão derivações lineares sobre funções. Note porém que tal operação depende somente de propriedades locais das funções, ou seja, propriedades em vizinhanças arbitrariamente pequenas do ponto no qual a derivada está sendo tomada. Assim, torna-se necessário introduzirmos a noção de germe de funções.

Definição 1.2.1 *Sejam M uma variedade diferenciável e $m \in M$. Sejam ainda f e g funções definidas em abertos contendo m. Dizemos que f e g possuem o mesmo germe se elas coincidem em uma vizinhaça de m.*

Essa noção de germe gera uma relação de equivalência no conjunto das funções $\mathcal{C}^\infty$ definidas em uma vizinhança de m, sendo que duas funções serão equivalentes se, e somente se, possuirem o mesmo germe. As classes de equivalência serão chamadas germes, e denotaremos o conjunto dos germes por $\tilde{\mathcal{F}}_m$.

As operações de de adição, multiplicação por escalar e multiplicação de funções induzem em $\tilde{\mathcal{F}}_m$ a estrutura de uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{F}_m \subset \tilde{\mathcal{F}}_m$ o conjunto dos germes que se anulam em m. Então $\mathcal{F}_m$ é um ideal de $\tilde{\mathcal{F}}_m$. Denotaremos por $\mathcal{F}_m^k$ sua k-ésima potência (isto é, o conjunto de todas as somas finitas de produtos de k funções-elementos de $\mathcal{F}_m$). Tais potências formam uma sequência decrescente de ideais $\tilde{\mathcal{F}}_m \supset \mathcal{F}_m \supset \mathcal{F}_m^2 \supset ...$.

Definição 1.2.2 *Um vetor v é dito tangente a uma variedade M no ponto m se é uma derivação linear da álgebra $\tilde{\mathcal{F}}_m$, isto é, se para quaisquer $f, g \in \tilde{\mathcal{F}}_m$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tivermos*

(a) $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda\ v(g)$;

(b) $v(fg) = f(m)\ v(g) + g(m)\ v(f)$

M_m denotará o conjunto dos vetores tangentes a M em m e será chamado espaço tangente a M em m. Observe que se definirmos para $v, w \in M_m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(v + w)(f) \doteq v(f) + w(f) \quad e \quad (\lambda\ v)(f) \doteq \lambda\ v(f),$$

verificamos que $v + w$ e $\lambda\ v$ são também vetores tangentes em m. Logo, M_m com as operações acima definidas é um espaço vetorial real.

Os resultados enunciados a seguir ajudam-nos a concluir que a dimensão do espaço M_m é igual a dimensão de M (suas demonstrações encontram-se em [6]).

Proposição 1.2.1 *Se $\mathbf{c}$ é o germe de uma função com valor constante c em uma vizinhança de m e se $v \in M_m$, então $v(\mathbf{c}) = 0$.*

Lema 1.2.2 *M_m é isomorfo a $(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2)^*$ (aqui, $(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2)^*$ é o espaço vetorial dual a $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2$)*

Para demonstrar o próximo teorema usaremos o seguinte lema de cálculo avançado, cuja demonstração é encontrada em [7].

Lema 1.2.3 *Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Se g é uma função real de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ em um aberto convexo U contendo p, então para cada $q \in U$*

$$\begin{aligned} g(q) = g(p) &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)(\pi_i(q) - \pi_i(p)) + \\ &\sum_{i,j} (\pi_i(q) - \pi_i(p))\ (\pi_j(q) - \pi_j(p)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(q-p))dt \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Em particular, se $g \in \mathcal{C}^\infty$ então o segundo somatório acima determina um elemento de $\mathcal{F}_p^2$, pois a integral como uma função de q é $\mathcal{C}^\infty$ (uma vez que as derivadas de ordem dois de g são contínuas e integráveis e portanto podemos derivar dentro do sinal de integral).

Este lema nada mais é do que a fórmula de Taylor com resto integral e usa o fato de que se $g \in \mathcal{C}^k$, com $k \geq 2$, então em particular $g \in \mathcal{C}^2$.

Teorema 1.2.4 *Sejam M uma variedade diferenciável, $m \in M$ e $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2$ como definido anteriormente. Então a dimensão da variedade M é igual a dimensão do espaço $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2$.*

Demonstração: Seja (U, φ) um sistema de coordenadas, com U uma vizinhança de m. Suponha que dim$M = n$. Temos então $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$.

Observemos que a álgebra $\tilde{\mathcal{F}}_m$ foi construída para funções $\mathcal{C}^\infty$ e $\mathcal{F}_m \subset \tilde{\mathcal{F}}_m$. Seja, pois, $f \in \mathcal{F}_m$. Como $f \in \mathcal{C}^\infty$ temos que $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$, de acordo com a Definição 1.1.4, e está definida em uma vizinhança aberta de $\varphi(m)$ em $\mathbb{R}^n$. Como φ é homeomorfismo, para cada x numa vizinhança de m temos que $\varphi(x)$ está numa vizinhança de $\varphi(m)$.

Assim usando o lema anterior, com $g = f \circ \varphi^{-1}$ e $p = \varphi(m)$, segue que para todo x numa vizinhança de m

$$\begin{aligned} f(x) &= (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &= (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(m)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{(\varphi(m))} (\pi_i(\varphi(x)) - \pi_i(\varphi(m))) \\ &\quad + h \sum_{i,j} (\pi_i(\varphi(x)) - \pi_i(\varphi(m)))\ (\pi_j(\varphi(x)) - \pi_j(\varphi(m))), \end{aligned}$$

com $h \in \mathcal{C}^\infty$. Como $(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(m)) = 0$ (pois $f \in \mathcal{F}_m$) e $\pi_i(\varphi(x)) - \pi_i(\varphi(m)) = \varphi_i(x) - \varphi_i(m)$, segue que a igualdade acima pode ser simplificada em

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{(\varphi(m))} (\varphi_i - \varphi_i(m)) + h \sum_{i,j} (\varphi_i - \varphi_i(m))\ (\varphi_j - \varphi_j(m))$$

Notemos que o último somatório da expressão acima é um elemento de $\mathcal{F}_m^2$. Logo,

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{(\varphi(m))} (\varphi_i - \varphi_i(m)) \qquad \mod \mathcal{F}_m^2$$

Temos então que o conjunto

$$H = \Big\{ \{\varphi_i - \varphi_i(m)\}; i = 1, ..., n \Big\}$$

gera $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2$ e portanto $\dim(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2) \leq n$.

Afirmamos que H é linearmente independente. De fato, suponha que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi_i - \varphi_i(m)) \in \mathcal{F}_m^2$$

Então

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi_i - \varphi_i(m)) \right) \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \big(\pi_i - \pi_i(\varphi(m))\big),$$

e daí $\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\pi_i - \pi_i(\varphi(m))\big) \in \mathcal{F}^2_{\varphi(m)}$.
Note que se $h \in \mathcal{F}^2_{\varphi(m)}$ então $h = \sum_{j=1}^{n} f_j\ g_j$, com $f_j, g_j \in \mathcal{F}_{\varphi(m)}$. Daí, como $f_j(\varphi(m)) = g_j(\varphi(m)) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é uma derivação, temos que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_{\varphi(m)} &= \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial (f_j\ g_j)}{\partial x_i}\right|_{\varphi(m)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[f_j(\varphi(m)).\left.\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right|_{\varphi(m)} + g_j(\varphi(m)).\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{\varphi(m)} \right] = 0
\end{aligned}$$

Logo, para todo j, $1 \leq j \leq n$,

$$a_j = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\varphi(m)} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\pi_i - \pi_i(\varphi(m))\big) \right) = 0$$

e daí H é linearmente independente e portanto uma base para $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}^2_m$. Logo, concluímos que $\dim(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}^2_m) = n = \dim M$, como queríamos mostrar.■

Corolário 1.2.5 *$dim M_m = dim M$.*

Até agora consideramos vetores tangentes como operadores sobre germes de funções, porém podemos tratá-los como operadores sobre funções. De fato, se M é uma variedade diferenciável e f é uma função diferenciável definida em uma vizinhança de $m \in M$, para $v \in M_m$ definimos

$$v(f) = v(\mathbf{f}), \qquad \text{com } \ \mathbf{f} \in \tilde{\mathcal{F}}_m \ \text{ o germe de } f \ \text{ em } m.$$

Logo, $v(f) = v(g)$ sempre que f e g coincidirem em uma vizinhança de m (ou seja, sempre que possuirem o mesmo germe).

Definição 1.2.3 *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n, $m \in M$ e (U, φ) um sistema de coordenadas, com $m \in U$ e $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, definimos o vetor tangente $\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_m \in M_m$ por*

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_m (f) = \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\right|_{\varphi(m)},$$

para cada função f que seja $\mathcal{C}^\infty$ em uma vizinhança de m. Facilmente verificamos que o operador assim definido é uma derivação linear e portanto é, de fato, um elemento de M_m. Interpretamos tal vetor como a derivada direcional de f em m na direção da coordenada φ_i (observe que $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ depende de φ e não somente de φ_i).
Usamos ainda a notação $\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_m (f) = \left.\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\right|_m$.

Observação: O conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_m;\ i=1,...,n\right\}$ é uma base de M_m. De fato, é a base dual à base $\left\{\{\varphi_i-\varphi_i(m)\};i=1,...,n\right\}$ de $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2$, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_m(\varphi_j-\varphi_j(m)) &= \frac{\partial\big((\varphi_j-\varphi_j(m))\circ\varphi^{-1}\big)}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(m)}\\ &= \frac{\partial\big((\pi_j\circ\varphi-\pi_j\circ\varphi(m))\circ\varphi^{-1}\big)}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(m)}\\ &= \frac{\partial(\pi_j-\pi_j(\varphi(m)))}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(m)} = \delta_{ij}\end{aligned}$$

Daí, se $v\in M_m$ temos $v=\sum_{i=1}^n a_i\ \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_m$ e portanto

$$v(\varphi_j)=v(\varphi_j-\varphi_j(m))=\sum_{i=1}^n a_i\ \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_m(\varphi_j-\varphi_j(m))=a_j$$

Logo,

$$v=\sum_{i=1}^n\ v(\varphi_i)\ \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_m$$

Definição 1.2.4 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\psi: M\longrightarrow N$ uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$. Seja ainda $m\in M$. A diferencial de ψ em m é a aplicação linear*

$$d\psi: M_m\longrightarrow N_{\psi(m)}, \tag{1.2.2}$$

que a cada $v\in M_m$ associa o vetor $d\psi(v)\in N_{\psi(m)}$ tal que

$$d\psi(v)(g)=v(g\circ\psi),$$

para toda $g\in\mathcal{C}^\infty$, definida em uma vizinhança de $\psi(m)$ (note que $(g\circ\psi)\in\mathcal{C}^\infty$ e está definida na imagem inversa do domínio de g por ψ, de acordo com a Definição 1.1.4). A diferencial de ψ em m é também denotada por $d\psi_{M_m}$ ou $d\psi_m$.
A aplicação ψ é dita não-singular em m se $d\psi_m$ for não-singular, isto é, se Ker$(d\psi)$ *consistir apenas do vetor nulo.*

Notemos que se $f: M\longrightarrow\mathbb{R}$ for uma função $\mathcal{C}^\infty$, $v\in M_m$ e $f(m)=t_0$, então $df(v)=v(f)\ \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}$. Notemos ainda que a diferencial de f no ponto m é um elemento de M_m^*, pois o espaço tangente à $\mathbb{R}$ em qualquer ponto é a própria reta.

A aplicação dual $\delta\psi: N_{\psi(m)}^*\longrightarrow M_m^*$ associa a cada $\omega\in N_{\psi(m)}^*$ o funcional linear $\delta\psi(\omega)\in M_m^*$ tal que

$$\delta\psi(\omega)(v)=\omega(d\psi(v)),$$

para cada vetor $v \in M_m$. M_m^* é dito o espaço cotangente a M em m.

Observações:

1. Sejam $\psi : M \longrightarrow N$ e $(U, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ e $(V, \sigma_1, ..., \sigma_k)$ sistemas de coordenadas em m e $\psi(m)$ respectivamente. Então, como $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\big|_m \in M_m$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial \sigma_i}\big|_{\psi(m)};\ i = 1, ..., k\right\}$ é uma base para $N_{\psi(m)}$, temos que $d\psi\big(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\big|_m\big) \in N_{\psi(m)}$ e portanto
$$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right) = \sum_{i=1}^{k} d\psi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right)(\sigma_i)\ \frac{\partial}{\partial \sigma_i}\bigg|_{\psi(m)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial(\sigma_i \circ \psi)}{\partial \varphi_j}\bigg|_m \frac{\partial}{\partial \sigma_i}\bigg|_{\psi(m)}$$
A matriz $\big(\frac{\partial(\sigma_i \circ \psi)}{\partial \varphi_j}\big)_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,k}}$ é chamada o Jacobiano da aplicação ψ (em relação ao sistema de coordenadas dado).

2. Se $(U, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ é um sistema de coordenadas em M e $m \in U$, então $\{d\varphi_i|_m;\ i = 1, ..., n\}$ é uma base de M_m^*, dual à base $\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_m;\ i = 1, ..., n\right\}$ de M_m. De fato, vimos que se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^\infty$ e $v \in M_m$ então $df(v) = v(f)\ \frac{d}{dt}\big|_{f(m)}$. Daí, como $\varphi_i : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty$ e $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_m \in M_m$, temos que
$$d\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right)(\varphi_i)\ \frac{d}{dt}\bigg|_{\varphi_i(m)}$$
E, como pela Definição 1.2.3 temos
$$\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m (\varphi_i) = \frac{\partial(\varphi_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi(m)} = \frac{\partial((\pi_i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi(m)} = \frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi(m)} = \delta_{ij},$$
segue que
$$d\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right) = \delta_{ij}$$
Assim, se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^\infty$, temos $df_m \in M_m^*$ e daí
$$df_m\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ d\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right) = a_j \Rightarrow a_j = df_m\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\bigg|_m\right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}\bigg|_m$$
Logo, $df_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}|_m\ d\varphi_{i_m}$

3. Sejam $\psi : M \longrightarrow N$ e $\varphi : N \longrightarrow X$ funções $\mathcal{C}^\infty$. Então
$$d(\varphi \circ \psi)_m = d\varphi_{\psi(m)} \circ d\psi_m$$
De fato, temos $d(\varphi \circ \psi)_m : M_m \longrightarrow X_{\varphi(\psi(m))}$ e para todo $v \in M_m$ e para toda função $g \in \mathcal{C}^\infty$ definida em uma vizinhança de $(\varphi \circ \psi)(m)$ temos
$$d(\varphi \circ \psi)_m(v)(g) = v(g \circ (\varphi \circ \psi)) = v((g \circ \varphi) \circ \psi)$$

$$= d\psi_m(v)(g \circ \varphi) = d\varphi_{\psi(m)}(d\psi_m(v))(g)$$

Logo $d(\varphi \circ \psi)_m = d\varphi_{\psi(m)} \circ d\psi_m$

4. Se $\psi : M \longrightarrow N$ e $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ são $\mathcal{C}^\infty$ então $\delta\psi(df_{\psi(m)}) = d(f \circ \psi)_m$.

Teorema 1.2.6 *Seja $\psi : M \longrightarrow N \ \in \mathcal{C}^\infty$, com M e N variedades conexas. Suponha que $d\psi_m \equiv 0$, $\forall\ m \in M$. Então ψ é uma aplicação constante.*

Demonstração: Ver [6].

1.3 Subvariedades, Difeomorfismos e o Teorema da Função Inversa

Definição 1.3.1 *Seja $\psi : M \longrightarrow N$ uma função $\mathcal{C}^\infty$.*
(a) ψ é uma imersão se $d\psi_m$ é não-singular para todo $m \in M$.

(b) O par (M, ψ) é uma subvariedade de N se ψ for uma imersão injetora.

(c) ψ é um mergulho se ψ for uma imersão injetora e se $\psi : M \longrightarrow \psi(M)$ for um homeomorfismo considerando $\psi(M)$ com a topologia relativa (induzida de N).

(d) ψ é um difeomorfismo se ψ for bijetora e $\psi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$

Observemos que se (U, φ) é um sistema de coordenadas em M, então $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo. Observemos ainda que se $\psi : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo, então $d\psi_m$ é um isomorfismo, para todo m.

O Teorema da Função Inversa nos dará uma recíproca da afirmação acima no caso local, isto é, veremos que se $d\psi_m$ é um isomorfismo então ψ é um difeomorfismo em uma vizinhança de m. Antes porém de demonstrar este resultado, temos a seguinte definição

Definição 1.3.2 *Um conjunto $\{\varphi_1, ..., \varphi_j\}$ de funções reais $\mathcal{C}^\infty$ definidas em alguma vizinhança de $m \in M$ é dito um conjunto independente em m se as diferenciais $d\varphi_{1m}, ..., d\varphi_{jm}$ forem linearmente independentes em M_m^*.*

Observe que se M tem dimensão n e $\{\varphi_1, ..., \varphi_j\}$ é um conjunto independente em m, então $j \leq n$.

A seguir, enunciamos o Teorema da Função Inversa para funções definidas em abertos do espaço euclidiano (ver demonstração em [7]). Em seguida, demonstramos uma versão deste resultado para funções definidas em variedades.

Teorema 1.3.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função $\mathcal{C}^\infty$. Se a matriz jacobiana $\left[\frac{\partial(\pi_i \circ f)}{x_j}\right]_{i,j=1,\dots,n}$ for não-singular em $x \in U$, então existe um aberto $V \subset U$, com $x \in V$ tal que $f|_V : V \longrightarrow f(V)$ é um difeomorfismo.*

Corolário 1.3.2 (Teorema da Função Inversa para variedades) *Suponha que $\psi : M \longrightarrow N$ seja $\mathcal{C}^\infty$. Dado $m \in M$, se $d\psi : M_m \longrightarrow N_{\psi(m)}$ for um isomorfismo então existe uma vizinhança U de m tal que $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ é um difeomorfismo sobre o aberto $\psi(U) \subset N$.*

Demonstração: Como por hipótese $d\psi_m$ é um isomorfismo, temos pelo Corolário 1.2.5 que

$$\dim M = \dim M_m = \dim N_{\psi(m)} = \dim N$$

Seja $\dim M = n$. Tomemos sistemas de coordenadas (V, φ) em m e (W, σ) em $\psi(m)$, com $\psi(V) \subset W$. Se $\varphi(m) = p$ e $\sigma(\psi(m)) = q$, temos que a aplicação

$$(\sigma \circ \psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(V)} : \varphi(V) \longrightarrow \sigma(W)$$

tem diferencial

$$d(\sigma \circ \psi \circ \varphi^{-1})_p : \varphi(V)_p \longrightarrow \sigma(W)_q$$

não singular em p.

De fato, temos por hipótese que $d\psi_m$ é um isomorfismo. Além disso, como φ e σ são sistemas de coordenadas, temos que $\varphi : V \longrightarrow \varphi(V)$ e $\sigma : W \longrightarrow \sigma(W)$ são difeomorfismos e portanto $d\sigma_{\psi(m)}$ e $d\varphi^{-1}{}_p$ são isomorfismos. Logo, como

$$d(\sigma \circ \psi \circ \varphi^{-1})_p = d\sigma_{\psi(m)} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_p = d\sigma_{\psi(m)} \circ d\psi_m \circ (d\varphi^{-1})_p \ ,$$

segue que $d(\sigma \circ \psi \circ \varphi^{-1})_p$ é não singular.

Temos então uma função $h = \sigma \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ definida em um aberto $\varphi(V)$ de $\mathbb{R}^n$ e com valores em $\sigma(W) \subset \mathbb{R}^n$, que é $\mathcal{C}^\infty$ e tal que dh_p é não singular. Segue pelo Teorema 1.3.1 que existe uma vizinhança $\tilde{U} \subset \varphi(V)$ de p tal que $h : \tilde{U} \longrightarrow h(\tilde{U})$ é difeomorfismo.

Como φ e σ são difeomorfismos sobre $\varphi(V)$ e $\sigma(W)$ respectivamente, e como $\varphi^{-1}(\tilde{U}) \subset V$ (pois $\tilde{U} \subset \varphi(V)$), segue que

$$(\sigma^{-1} \circ h|_{\tilde{U}} \circ \varphi) : \varphi^{-1}(\tilde{U}) \longrightarrow \sigma^{-1}(h(\tilde{U}))$$

é um difeomorfismo (pois é a composta de difeomorfismos). Tomando $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$, temos que

$$\sigma^{-1} \circ h|_{\tilde{U}} \circ \varphi = (\sigma^{-1} \circ h \circ \varphi)\big|_{\varphi^{-1}(\tilde{U})} = (\sigma^{-1} \circ\ \sigma \circ\ \psi \circ\ \varphi^{-1} \circ\ \varphi)\big|_{U} = \psi|_U$$

Logo, como $\psi(U) = \sigma^{-1}(h(\tilde{U}))$, temos que $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ é difeomorfismo, o que conclui a demonstração do resultado.■

Corolário 1.3.3 *Suponha que* $dimM = n$ *e que* $\{\varphi_1, ...\varphi_n\}$ *seja um conjunto independente de funções em* $m_0 \in M$. *Então* $\{\varphi_1, ...\varphi_n\}$ *forma um sistema de coordenadas em uma vizinhança de* m_0.

Corolário 1.3.4 *Suponha que* $dimM = n$ *e que as funções* $\sigma_1, ..., \sigma_k$, *com* $k < n$ *formem um conjunto independente* m. *Então tais funções são parte de um sistema de coordenadas em uma vizinhança de* m.

Corolário 1.3.5 *Seja* $\psi : M \longrightarrow N$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty$, *e suponha que* $d\psi : M_m \longrightarrow N_{\psi(m)}$ *seja sobrejetora. Seja* $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ *um sistema de coordenadas em alguma vizinhança de* $\psi(m)$. *Então as funções* $(\sigma_1 \circ \psi), ..., (\sigma_k \circ \psi)$ *são parte de um sistema de coordenadas em alguma vizinhança de* m.

Corolário 1.3.6 *Suponha que* $\sigma_1, ..., \sigma_k$ *sejam funções* $\mathcal{C}^\infty$ *em uma vizinhança de* $m \in M$, *tais que suas diferenciais geram* M_m^*. *Então um subconjunto de* $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ *forma um sistema de coordenadas em uma vizinhança de* m.

Corolário 1.3.7 *Seja* $\psi : M \longrightarrow N$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty$, *e suponha que* $d\psi : M_m \longrightarrow N_{\psi(m)}$ *seja injetora. Seja* $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ *um sistema de coordenadas em alguma vizinhança de* $\psi(m)$. *Então um subconjunto de* $\{(\sigma_i \circ \psi); i = 1, ..., k\}$ *forma um sistema de coordenadas em uma vizinhança de* m. *Em particular,* ψ *é injetora em uma vizinhança de* m.

Definição 1.3.3 *Sejam* $\psi : N \longrightarrow M$ *uma função* $\mathcal{C}^\infty$ *e* (P, φ) *uma subvariedade de* M *(isto é,* $\varphi : P \longrightarrow M \in \mathcal{C}^\infty$ *e é uma imersão injetora). Dizemos que* ψ *se fatora por* (P, φ) *se* $\psi(N) \subset \varphi(P)$.

Neste caso, existe uma única função $\psi_0 : N \longrightarrow P$ tal que $\varphi \circ \psi_0 = \psi$. De fato, como (P, φ) é uma subvariedade de M, temos que $\varphi : P \longrightarrow \varphi(P)$ é bijeção e daí tomamos $\psi_0 = \varphi^{-1}\big|_{\varphi(P)} \circ \psi$ (e tal aplicação está bem definida, uma vez que $\psi(N) \subset \varphi(P)$).

O resultado a seguir nos fornece condições sob as quais a função ψ_0 da definição anterior é $\mathcal{C}^\infty$.

Teorema 1.3.8 *Sejam $\psi : N \longrightarrow M$ uma função $\mathcal{C}^\infty$ e (P, φ) uma subvariedade de M tal que ψ se fatora por (P, φ). Seja $\psi_0 : N \longrightarrow P$ a única aplicação tal que $\varphi \circ \psi_0 = \psi$. São verdadeiras as afirmações:*
(a) Se ψ_0 for contínua então $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty$.
(b) Se φ for um mergulho então ψ_0 é contínua.

Demonstração: (a) Suponhamos dim$M = n$ e dim$P = k$. Como (P, φ) é subvariedade, temos $\varphi : P \longrightarrow M$ injetora e $d\varphi_p$ não singular, para todo $p \in P$. Logo, $k = \text{dim}P = \text{dim}P_p \leq \text{dim}M_{\varphi(p)} = \text{dim}M = n$.

Para mostrar que $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty$, basta mostrar que $\tau \circ \psi_0 \in \mathcal{C}^\infty$ para toda aplicação coordenada τ em P. De fato, se $\tau \circ \psi_0 \in \mathcal{C}^\infty$ para toda τ em P então de acordo com a Definição 1.1.4 segue que $\tau \circ \psi_0 \circ \sigma^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$ para toda aplicação coordenada σ em N, o que significa (de acordo com a mesma definição) que $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

Assim, é suficiente mostrar que P pode ser coberto por sistemas de coordenadas (U, τ) tais que as plicações $\tau \circ \psi_0$ restritas aos abertos $\psi_0^{-1}(U)$ sejam $\mathcal{C}^\infty$.

Seja, pois, $p \in P$ e (V, γ), com $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança de $\varphi(p)$. Como $d\varphi_p$ é injetora, segue pelo Corolário 1.3.7 que um subconjunto de $\{\gamma_i \circ \varphi\,; i = 1, ..., n\}$, digamos $\{(\gamma_{i_1} \circ \varphi), \ldots, (\gamma_{i_k} \circ \varphi)\}$, forma um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de p.

Denotando por $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ a projeção nas k primeiras coordenadas e reordenando γ de forma que $\gamma = (\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}, \gamma_{i_{k+1}}, \ldots, \gamma_{i_n})$, segue que $\tau = \pi \circ \gamma \circ \varphi = (\gamma_{i_1} \circ \varphi, \ldots, \gamma_{i_k} \circ \varphi)$ é uma aplicação coordenada em U. Como $\varphi \circ \psi_0 = \psi$, temos que

$$(\tau \circ \psi_0)\big|_{\psi_0^{-1}(U)} = (\pi \circ \gamma \circ \varphi \circ \psi_0)\big|_{\psi_0^{-1}(U)} = (\pi \circ \gamma \circ \psi)\big|_{\psi_0^{-1}(U)},$$

e portanto $(\tau \circ \psi_0)\big|_{\psi_0^{-1}(U)} \in \mathcal{C}^\infty$ (pois π, γ e $\psi \in \mathcal{C}^\infty$).

Assim, dado $p \in P$, mostramos que existe um sistema de coordenadas (U, τ) em p tal que $(\tau \circ \psi_0)\big|_{\psi_0^{-1}(U)} \in \mathcal{C}^\infty$. Logo, P pode ser coberto por sistemas de coordenadas da forma (U, τ) tais que $\tau \circ \psi_0 \in \mathcal{C}^\infty$. Isso conclui a demonstração de (a).

(b) Suponhamos que φ seja um mergulho. Temos então que $\varphi : P \longrightarrow \varphi(P)$ é um homeomorfismo. Assim dado $U \subset P$ aberto, como $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ temos que $\psi^{-1}(\varphi(U))$ é aberto em N. E como

$$\psi^{-1}(\varphi(U)) = (\varphi \circ \psi_0)^{-1}(\varphi(U)) = \psi_0^{-1}(\varphi^{-1}(\varphi(U))) = \psi_0^{-1}(U),$$

temos que $\psi_0^{-1}(U)$ é aberto em N e portanto concluímos que ψ_0 é contínua.

Isto conclui a demonstração do resultado.■

Definição 1.3.4 *Duas subvariedades (N_1, φ_1) e (N_2, φ_2) de uma variedade M são ditas equivalentes se existir um difeomorfismo $\alpha : N_1 \longrightarrow N_2$ tal que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \alpha$.*

Isso define uma relação de equivalência no conjunto de todas as subvariedades de M. Cada classe de equivalência ξ tem um único representante da forma (A, i), com $A \subset M$ possuindo uma estrutura de variedade tal que a aplicação de inclusão $i : A \longrightarrow M$ é uma imersão $\mathcal{C}^\infty$. Mais especificamente, se (N, φ) é um representante qualquer de ξ, tomamos $A = \varphi(N)$ e induzimos uma estrutura de variedade em A de forma que $\varphi : N \longrightarrow A$ seja um difeomorfismo. Com esta estrutura, (A, i) será uma subvariedade de M equivalente a (N, φ), pois $\varphi = i \circ \varphi$ e sendo φ um difeomorfismo sobre sua imagem segue que i é uma imersão. A estrutura de variedade que induziremos em A é descrita a seguir.

Seja, pois, A com a topologia induzida por φ e seja $\dim N = n$. Consideremos a aplicação inversa $\varphi^{-1} : A \longrightarrow N$. Dado $a \in A$, tomemos um sistema de coordenadas (U, σ) em $\varphi^{-1}(a)$. Como $\varphi(U)$ é um aberto em A contendo a, σ é homeomorfismo de U em $\sigma(U)$ e φ^{-1} é difeomorfismo, segue que $\sigma \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \sigma(U)$ é um homeomorfismo. Logo, $(\varphi(U), \sigma \circ \varphi^{-1})$ é um sistema de coordenadas em a.

Seja $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) |\ \alpha \in J\}$ a estrutura diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$ de N. De acordo com a Definição 1.1.2, temos que $N = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$, $\forall\ \alpha, \beta \in J$ e a coleção $\mathcal{F}$ é maximal.

Tomemos $\mathcal{F}' = \{(\varphi(U_\alpha), \sigma_\alpha \circ \varphi^{-1}) |\ \alpha \in J\}$. Temos que

(a) $A = \varphi(N) = \varphi\left(\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in J} \varphi(U_\alpha)$.

(b) Se $\tau_\alpha = \sigma_\alpha \circ \varphi^{-1}$, temos $\forall\ \alpha, \beta \in J$ que

$$\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} = \sigma_\alpha \circ \varphi^{-1} \circ (\sigma_\beta \circ \varphi^{-1})^{-1} = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta^{-1}$$

E portanto $\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$.

(c) Se (V, τ) é um sistema de coordenadas de A tal que $\tau_\alpha \circ \tau^{-1}$ e $\tau \circ \tau_\alpha^{-1}$ são $\mathcal{C}^\infty$, $\forall\ \alpha \in J$, então $(V, \tau) \in \mathcal{F}'$.

De fato, temos que $(\varphi^{-1}(V), \tau \circ \varphi)$ é um sistema de coordenadas em N tal que $(\tau \circ \varphi) \circ \sigma_\alpha^{-1} = \tau \circ \tau_\alpha^{-1}$ e $\sigma_\alpha \circ (\tau \circ \varphi)^{-1} = \tau_\alpha \circ \tau^{-1}$ são $\mathcal{C}^\infty$, $\forall\ \alpha \in J$. Pela maximalidade de $\mathcal{F}$ segue que $(\varphi^{-1}(V), \tau \circ \varphi) \in \mathcal{F}$ e portanto temos que $(\varphi(\varphi^{-1}(V)), (\tau \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}) = (V, \tau) \in \mathcal{F}'$. Logo $\mathcal{F}'$ é maximal com relação a (b) e é portanto uma estrutura diferenciável em A.

Posteriormente, demonstraremos alguns resultados sobre existência e unicidade de subvariedades. Tal unicidade porém será determinada a menos de equivalências no sentido da Definição 1.3.4.

Teorema 1.3.9 *Sejam M uma variedade diferenciável e $A \subset M$. Fixada uma topologia em A, existe no máximo uma estrutura diferenciável em A tal que (A, i) é subvariedade de M.*

Demonstração: Seja, pois, $A \subset M$ e Ψ uma topologia fixada em A. Suponhamos que A com a topologia Ψ admita uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}_1$ com a qual (A, i) é subvariedade de M. Mostremos que tal estrutura diferenciável é única.

De fato suponhamos que $\mathcal{F}_2$ seja uma outra estrutura diferenciável tal que (A, i) é subvariedade de M. Temos então $\mathcal{F}_k = \{(U_{\alpha_k}, \varphi_{\alpha_k})|\ \alpha_k \in J_k\}$, $k = 1, 2$, satisfazendo (a), (b) e (c) da Definição 1.1.2. Mostremos que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Escrevamos $A_1 = (A, \Psi, \mathcal{F}_1)$ e $A_2 = (A, \Psi, \mathcal{F}_2)$. Temos então (A_1, i_1) e (A_2, i_2) subvariedades de M. Como A_1 e A_2 tem a mesma topologia, temos que a aplicação identidade $id : A_1 \longrightarrow A_2$ é um difeomorfismo. Logo, de acordo com a Definição 1.1.4 temos que $\varphi_{\alpha_2} \circ id \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1} = \varphi_{\alpha_2} \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1}$ e $\varphi_{\alpha_1} \circ id^{-1} \circ \varphi_{\alpha_2}^{-1} = \varphi_{\alpha_1} \circ \varphi_{\alpha_2}^{-1}$ são $\mathcal{C}^\infty$. Segue então pela maximalidade de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ que um está contido no outro, e portanto $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Logo, temos que A possui no máximo uma estrutura diferenciável tal que (A, i) é subvariedade de M, como queríamos mostrar.$\blacksquare$

Teorema 1.3.10 *Sejam M uma variedade diferenciável e $A \subset M$. Se com a topologia relativa A tem uma estrutura diferenciável tal que (A, i) é subvariedade de M, então A tem uma única estrutura de variedade tal que (A, i) é subvariedade de M, isto é, única* *topologia com base enumerável segundo a qual A é um espaço localmente euclidiano e única estrutura diferenciável.*

Para demonstrar este resultado, faremos uso do seguinte lema que decorre do Corolário 1.3.2:

Lema 1.3.11 *Suponha que $\psi : M \longrightarrow N$ seja $\mathcal{C}^\infty$, bijetora e tal que $d\psi_m$ seja não singular para todo $m \in M$. Então ψ é um difeomorfismo.*

Demonstração do Teorema 1.3.10: Seja Ψ_1 a topologia relativa em A e suponha que com esta topologia exista uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}_1$ tal que (A, i) seja subvariedade de M. Escrevamos $A_1 = (A, \Psi_1, \mathcal{F}_1)$.

Suponhamos que exista outra estrutura de variedade tal que (A, i) seja subvariedade de M. Sejam Ψ_2 a topologia e $\mathcal{F}_2$ a estrutura diferenciável que compõem esta estrutura. Escrevamos $A_2 = (A, \Psi_2, \mathcal{F}_2)$.

Temos então (A_1, i_1) e (A_2, i_2) subvariedades de M, com $i_1(A) = i_2(A) = A$ e $i_1, i_2 \in \mathcal{C}^\infty$. Observemos que i_1 e i_2 se fatoram (no sentido da Definição 1.3.3) e ainda $i_1 \circ id = i_2$, com id a função identidade $id : A_2 \longrightarrow A_1$. Como A_1 tem a topologia relativa, segue que i_1 é um mergulho e portanto, pelo Teorema 1.3.8 segue que $id \in \mathcal{C}^\infty$.

Como i_1 é um difeomorfismo sobre sua imagem e i_2 é imersão, temos que $d{i_1}^{-1}$ é um isomorfismo e di_2 é não-singular para todo $a \in A$. Daí, como $id = {i_1}^{-1} \circ i_2$, temos que $d(id) = d\ {i_1}^{-1} \circ d\ i_2$ é não-singular para todo $a \in A$. Segue pelo lema anterior que id é um difeomorfismo. Logo, as topologias Ψ_1 e Ψ_2 coincidem. O Teorema 1.3.9 nos garante então que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Logo, temos que se A com a topologia relativa possui estrutura diferenciável tal que (A, i) é subvariedade de M, então esta é a única estrutura de variedade com esta propriedade. Isto conclui a demonstração do resultado.■

Definição 1.3.5 *Seja (U, φ), com $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, um sistema de coordenadas em M e $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq k < n$. Seja $x \in \varphi(U)$. Definamos*

$$S = \{m \in U \mid \varphi_i(m) = \pi_i(x), i = k+1, ..., n\}$$

S como subespaço de M com o sistema de coordenadas $\{\varphi_j|_S\ ; j = 1, ..., k\}$ é uma variedade que é uma subvariedade de M chamada corte do sistema de coordenadas (U, φ) (note que $dimS = k$).

Proposição 1.3.12 *Seja $\psi : M \longrightarrow N$ uma imersão e $m \in M$. Então existe um sistema de coordenadas cúbicas (V, φ) centrado em $\psi(m)$ e uma vizinhança U de m tal que $\psi|_U$ é injetora e $\psi(U)$ é um corte de (V, φ).*

Demonstração: Ver [6].

Observemos que se (M, ψ) é uma subvariedade de N e $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ então $f \circ \psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. A proposição a seguir nos dá condições suficientes para que a recíproca deste resultado seja verdadeira.

Proposição 1.3.13 *Seja $\psi : M \longrightarrow N$ um mergulho tal que $\psi(M)$ é fechado em N. Se $g \circ \psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ então existe $f \circ \psi \in \mathcal{C}^\infty(N)$ tal que $f \circ \psi = g$.*

Demonstração: Ver [6].

A seguir, apresentaremos dois resultados que decorrem do Corolário 1.3.2. Com tais resultados, estabeleceremos quando certos subconjuntos de variedades são ainda variedades. Antes porém, enunciaremos o Teorema da Função Implícita na sua forma clássica, para depois demonstrá-lo no caso de variedades (para uma demostração deste resultado, ver [7]).

Teorema 1.3.14 *Seja $U \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma função $\mathcal{C}^\infty$. Denotemos por $(x, y) = (x_1, ..., x_{n-k}, y_1, ..., y_k)$ os elementos de $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$. Se para $(x^0, y^0) \in U$ tivermos $f(x^0, y^0) = 0$ e a matriz*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\Big|_{(x^0,y^0)}\right]_{i,j=1,...,k}$$

for não singular, então existem vizinhanças abertas V de x^0 em $\mathbb{R}^{n-k}$ e W de y^0 em $\mathbb{R}^k$ tais que $V \times W \subset U$ e existe uma função $g : V \longrightarrow W \in \mathcal{C}^\infty$ tal que para cada $(x, y) \in V \times W$

$$f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = y$$

Teorema 1.3.15 *Sejam M e N variedades de dimensões n e k respectivamente. Seja ainda $\psi : M \longrightarrow N \in \mathcal{C}^\infty$ e $x \in N$. Se $P = \psi^{-1}(x)$ for não vazio e $d\psi : M_m \longrightarrow N_{\psi(m)}$ for sobrejetora para todo $m \in M$, então P tem uma única estrutura de variedade tal que (P, i) (com i a operação de inclusão) é uma subva-riedade de m. Mais ainda, i é um mergulho e $dimP = n - k$.*

Demonstração: Para demostrar o teorema, basta mostrar que P com a topologia relativa admite uma estrutura diferenciável tal que (P, i) é subvariedade de M com dim$P = n-k$, e daí pelo Teorema 1.3.10 segue que essa estrutura de variedade é única.

Consideremos então P com a topologia relativa. Mostraremos que para cada $m \in P$ existe um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de m tal que $P \cap U$ é um corte desse sistema de coordenadas com dimensão $n-k$.

Seja $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ um sistema de coordenadas centrado em $x \in N$ e $m \in P = \psi^{-1}(x)$. Como $d\psi_m$ é sobrejetora por hipótese, temos pelo Corolário 1.3.5 que a coleção $\{\sigma_i = (\varphi_i \circ \psi); i = 1, ..., k\}$ é parte de um sistema de coordenadas, digamos $\{\sigma_1, ..., \sigma_k, \sigma_{k+1}, ..., \sigma_n\}$ em uma vizinhança, digamos U de m.

Assim se $p \in P \cap U$, temos para $i = 1, ..., k$ que $\sigma_i(p) = \varphi_i(\psi(p)) = \varphi_i(x) = 0$, pois $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ é centrado em x. Segue então que $P \cap U = \{p \in U \mid \sigma_i(p) = 0; i = 1, ..., k\}$ e portanto $P \cap U$ é um corte do sistema de coordenadas $(U, \sigma_1, ..., \sigma_k, \sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$. Logo (P, i) é subvariedade de M de dimensão $n-k$.■

O resultado anterior afirma que a imagem inversa de um ponto por uma função $\mathcal{C}^\infty$ é uma subvariedade desde que a diferencial dessa função seja sobrejetora em cada ponto da imagem inversa. Assim, podemos considerar os subconjuntos unitários de uma variedade como subvariedades de dimensão 0 (pois a função identidade definida na variedade satisfaz as condições requeridas). O resultado a seguir generaliza o anterior estabelecendo condições para que a imagem inversa de subvariedades de dimensões maiores sejam também subvariedades.

Teorema 1.3.16 *Sejam $\psi : M \longrightarrow N \in \mathcal{C}^\infty$ e (O, φ) subvariedade de N. Se $P = \psi^{-1}(\varphi(O))$ for não vazio e se para cada $m \in \psi^{-1}(\varphi(O))$ tivermos*

$$N_{\psi(m)} = d\psi(M_m) + d\varphi(O_{\varphi^{-1}(\psi(m))}), \tag{1.3.1}$$

então P admite uma estrutura de variedade tal que (P, i) é subvariedade de M com

$$dimP = dimM - dimN + dimO.$$

Mais ainda, se (O, φ) for uma subvariedade mergulhada então (P, i) também o é e neste caso existe uma única estrutura de variedade em P tal que (P, i) é subvariedade de M.

Demonstração: Ver [6].

1.4 Campos Vetoriais

Definição 1.4.1 *Sejam (a,b) um intervalo da reta real e M uma variedade. Uma curva suave em M é uma função $\sigma : (a,b) \longrightarrow M \in \mathcal{C}^\infty$. Se $t_0 \in (a,b)$, o vetor*

$$d\sigma\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) \in M_{\sigma(t_0)}$$

é dito vetor tangente à curva σ em t_0. Denotaremos tal vetor por $\dot{\sigma}(t_0)$.

Se $v \neq 0$ é um elemento qualquer de M_m, podemos escolher um sistema de coordenadas (U,φ) centrado em m para o qual $v = d\varphi^{-1}\left(\frac{\partial}{dx_1}\Big|_0\right)$. Neste caso, temos que v é o vetor tangente à curva $t \longmapsto \varphi^{-1}(t,0,...,0)$ no ponto 0.

Definição 1.4.2 *Dizemos que uma aplicação $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ é uma curva suave em M se σ pode ser estendida a uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ de $(a-\epsilon, b+\epsilon)$ em M, para algum $\epsilon > 0$.*
A curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ é suave por partes se existe uma partição $a = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n = b$ tal que $\sigma\big|_{[\alpha_i,\alpha_{i+1}]}$ é suave para $i = 0,...,n-1$.
Se $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ é uma curva suave em M, seu vetor tangente $\dot{\sigma}(t_0) = d\sigma\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) \in M_{\sigma(t_0)}$ é bem definido para todo $t_0 \in [a,b]$.

Definição 1.4.3 *Seja M uma variedade diferenciável. Definimos o fibrado tangente e o fibrado cotangente de M respectivamente como*

$$T(M) = \bigcup_{m\in M} M_m \qquad \text{e} \qquad T^*(M) = \bigcup_{m\in M} M_m^*$$

Sejam $\pi : T(M) \longrightarrow M$ e $\pi^* : T^*(M) \longrightarrow M$ as projeções dadas por

$$\pi(v) = m, \text{ se } \quad v \in M_m \quad \text{e} \quad \pi^*(\omega) = m, \text{ se } \quad \omega \in M_m^*$$

Seja ainda (U,φ), com $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_n)$, um sistema de coordenadas de M. Definamos $\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ e $\widetilde{\varphi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\widetilde{\varphi}(v) = \Big(\varphi_1(\pi(v)),\ldots,\varphi_n(\pi(v)), d\varphi_1(v),\ldots,d\varphi_n(v)\Big) \quad \text{e}$$

$$\widetilde{\varphi}^*(\omega) = \Big(\varphi_1(\pi^*(\omega)),\ldots,\varphi_n(\pi^*(\omega)), \omega(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}),\ldots,\omega(\frac{\partial}{\partial\varphi_n})\Big)$$

Denotemos por $\mathcal{F}$ a estrutura diferenciável de M. Mostra-se que $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\varphi}^*$ são injetoras e que se (U,φ) e $(V,\psi) \in \mathcal{F}$ então $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ e $\widetilde{\psi}^* \circ (\widetilde{\varphi}^*)^{-1}$ são $\mathcal{C}^\infty$.

Construamos em $T(M)$ e $T^*(M)$ topologias que tenham como bases as coleções $\{\widetilde{\varphi}^{-1}(W) \mid W \text{ é aberto em } \mathbb{R}^{2n}, (U,\varphi) \in \mathcal{F}\}$ e $\{(\widetilde{\varphi}^*)^{-1}(W) \mid W \text{ é aberto em } \mathbb{R}^{2n}, (U,\varphi) \in \mathcal{F}\}$ respectivamente. Com tais topologias $T(M)$ e $T^*(M)$ são espaços topológicos localmente euclidianos de dimensão $2n$, que satisfazem o segundo axioma de enumerabilidade.

Sejam $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^*$ as coleções maximais (no sentido da Definição 1.1.2 (c)) contendo $\{(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \mid (U,\varphi) \in \mathcal{F}\}$ e $\{((\pi^*)^{-1}(U), \widetilde{\varphi}^*) \mid (U,\varphi) \in \mathcal{F}\}$ respectivamente. Temos então que $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^*$ são estruturas diferenciáveis em $T(M)$ e $T^*(M)$ e portanto tais conjuntos são também variedades.

Definição 1.4.4 *Um campo vetorial* X *ao longo da curva* $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ *é uma aplicação* $\mathrm{X} : [\mathrm{a},\mathrm{b}] \longrightarrow \mathrm{T(M)}$ *que suspende* σ*, isto é, tal que* $\pi \circ \mathrm{X} = \sigma$ *(logo* $\mathrm{X(t)} \in \mathrm{M}_{\sigma(\mathrm{t})}$*). O campo é dito suave se* $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty$.
Um campo vetorial X *definido em um aberto* $U \subset M$ *é uma suspensão de* U *em* $T(M)$*, isto é, uma aplicação* $\mathrm{X} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T(M)}$ *tal que* $\pi \circ \mathrm{X} = \mathrm{id}_\mathrm{U}$ *(e neste caso tem-se* $\mathrm{X(m)} \in \mathrm{M}_\mathrm{m}$*). Analogamente,* X *é suave se* $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathrm{T(M)})$*. Denotaremos* $\mathrm{X(m)} = \mathrm{X}_\mathrm{m}$.

Se X *é um campo vetorial sobre* U *e* $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$*, definimos a função* $\mathrm{X(f)} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $\mathrm{X(f)(m)} = \mathrm{X_m(f)}$.

Observação: Seja $\mathcal{A} = \{\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathrm{T(M)}) \mid \mathrm{X} \text{ é campo vetorial}\}$. Temos que $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial real e um módulo sobre o anel R das funções reais $\mathcal{C}^\infty(U)$. De fato, basta tomar a ação de $R \times \mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ tal que $(f, \mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{fX}$, com $f\mathrm{X} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T(M)}$ dada por $(f\mathrm{X})(\mathrm{m}) = \mathrm{f(m)X(m)}$.

Proposição 1.4.1 *Seja* X *um campo vetorial em* M*. São equivalentes*
(a) $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty$
(b) Se (U,φ)*, com* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$*, é um sistema de coordenadas em* M *e se* $\{a_i ; i = 1, ..., n\}$ *é uma coleção de funções reais definidas em* U *e tais que*

$$\mathrm{X}\big|_\mathrm{U} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_\mathrm{i}},$$

então $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$
(c) Se V *é aberto em* M *e* $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$*, então* $\mathrm{X(f)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{V})$

Demonstração: Mostremos que (a)$\Rightarrow$ (b):

Sejam $(U,\varphi) = (U,\varphi_1,...,\varphi_n)$ um sistema de coordenadas em M, X um campo vetorial $\mathcal{C}^\infty$, e $\{a_i; i = 1,...,n\}$ uma coleção de funções reais definidas em U tais que

$$\mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i} \frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathrm{i}}}$$

Temos que $\mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^\infty$ e $(\pi^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$ é um sistema de coordenadas em $T(M)$. Logo, como $d\varphi_i : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$ (uma vez que $d\varphi_i$ é função coordenada de $\widetilde{\varphi}$), segue que $d\varphi_i \circ \mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^\infty$. Mas $d\varphi_i \circ \mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}} = \mathrm{a_i}$ e portanto temos que $a_i \in \mathcal{C}^\infty$.

Mostremos que (b)$\Rightarrow$ (c):

Seja $V \subset M$ aberto e $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Para mostrar que $\mathrm{X(f)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{V})$, basta mostrar que para todo sistema de coordenadas $(U,\varphi_1,...,\varphi_n)$ em M tal que $U \subset V$, temos $\mathrm{X(f)}\big|_U \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Seja pois $(U,\varphi_1,...,\varphi_n)$ tal sistema de coordenadas. Para cada $m \in U$, temos $\mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}}(\mathrm{m}) = (\mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}})_{\mathrm{m}} \in \mathrm{M_m}$. Logo, de acordo com a Definição 1.4.4 temos em U

$$\mathrm{X(f)}(m) = \mathrm{X_m(f)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_m}(\varphi_{\mathrm{i}}) \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\varphi_{\mathrm{i}}}\Big|_{\mathrm{m}}$$

Como $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, temos $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ e portanto $\frac{\partial f}{\partial\varphi_i} \in \mathcal{C}^\infty$. Ainda, se $a_i = (\mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}})(\varphi_{\mathrm{i}})$ temos por (b) que $a_i \in \mathcal{C}^\infty$ e então segue que $\mathrm{X(f)}\big|_U \in \mathcal{C}^\infty$ (pois é a soma de funções $\mathcal{C}^\infty$). Como isso é verdade para todo sistema de coordenadas $(U,\varphi_1,...,\varphi_n)$ em M tal que $U \subset V$, segue que $\mathrm{X(f)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{V})$.

Mostremos que (c)$\Rightarrow$ (a):

Para mostrar que $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty$, basta mostrar que para todo sistema de coordenadas $(U,\varphi) = (U,\varphi_1,...,\varphi_n)$ em M tem-se $\widetilde{\varphi} \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^\infty$, com $\widetilde{\varphi}$ a aplicação coordenada de $(\pi^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$. Pois de acordo com a Definição 1.1.4, $\widetilde{\varphi} \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^\infty$ se $\widetilde{\varphi} \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}} \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$, o que pela mesma definição significa que $\mathrm{X}|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^\infty$. E se para todo sistema de coordenadas (U,φ) tivermos $\mathrm{X}|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^\infty$, teremos $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty$.

Como $\widetilde{\varphi} = \Big((\varphi_1 \circ \pi),\ldots,(\varphi_n \circ \pi), d\varphi_1,\ldots,d\varphi_n\Big)$, temos

$$\widetilde{\varphi} \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}} = \Big((\varphi_1 \circ \pi \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}}),...,(\varphi_{\mathrm{n}} \circ \pi \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}}),(\mathrm{d}\varphi_1 \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}}),...,(\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{n}} \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}})\Big)$$

Mas $\pi \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}} = \mathrm{id_U}$, pois X é campo vetorial. Logo $\varphi_i \circ \pi \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}} = \varphi_{\mathrm{i}} \in \mathcal{C}^\infty$.

Dado $m \in U$, temos $\mathrm{X(m)} = \mathrm{X_m} \in \mathrm{M_m}$ e portanto podemos escrever

$$\mathrm{X_m} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_m}(\varphi_{\mathrm{i}}) \frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathrm{i}}}\Big|_{\mathrm{m}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}(\varphi_{\mathrm{i}})(\mathrm{m}) \frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathrm{i}}}\Big|_{\mathrm{m}}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(d\varphi_j \circ \mathrm{X}|_{\mathrm{U}})(\mathrm{m}) &= d\varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}(\varphi_\mathrm{i})(\mathrm{m}) \frac{\partial}{\partial\varphi_\mathrm{i}}\Big|_\mathrm{m}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}(\varphi_\mathrm{i})(\mathrm{m})\, \mathrm{d}\varphi_\mathrm{j}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_\mathrm{i}}\Big|_\mathrm{m}\right)\\
&= \mathrm{X}(\varphi_\mathrm{j})(\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

Daí, como $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$, temos por (c) que $\mathrm{X}(\varphi_\mathrm{j}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{U})$ e portanto $d\varphi_j \circ \mathrm{X}|_\mathrm{U} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{U})$.

Logo, como $\varphi_j \circ \pi \circ \mathrm{X}|_\mathrm{U}$ e $d\varphi_j \circ \mathrm{X}|_\mathrm{U} \in \mathcal{C}^\infty$, segue que $\tilde{\varphi} \circ \mathrm{X}|_\mathrm{U} \in \mathcal{C}^\infty$ e portanto (c)$\Rightarrow$ (a).

Concluímos assim a demonstração do resultado.■

Definição 1.4.5 *Sejam* X *e* Y *campos vetoriais suaves em M. Definimos um campo vetorial* $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ *em M que a cada $m \in M$ associa o vetor* $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m} \in \mathrm{M}_\mathrm{m}$ *tal que*

$$[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m}(\mathrm{f}) = \mathrm{X}_\mathrm{m}(\mathrm{Yf}) - \mathrm{Y}_\mathrm{m}(\mathrm{Xf}),$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty$ definida em uma vizinhança de m. O campo vetorial $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ *é chamado Colchete de Lie de* X *e* Y

De fato, temos que $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m}(\mathrm{f}+\lambda\mathrm{g}) = [\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m}(\mathrm{f}) + \lambda\ [\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m}(\mathrm{g})$ e $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m}(\mathrm{fg}) = \mathrm{f}(\mathrm{m})\ [\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m}(\mathrm{g}) + \mathrm{g}(\mathrm{m})\ [\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m}(\mathrm{f})$. Logo, $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_\mathrm{m} \in \mathrm{M}_\mathrm{m}$ e de fato $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ é um campo vetorial.

Proposição 1.4.2 *Sejam* X, Y *e* Z *campos vetoriais suaves em M e $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Então*

(a) $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ *é campo vetorial suave em M.*

(b) $[f\mathrm{X},\mathrm{gY}] = \mathrm{fg}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] + \mathrm{f}(\mathrm{Xg})\mathrm{Y} - \mathrm{g}(\mathrm{Yf})\mathrm{X}$

(c) $[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = -[\mathrm{Y},\mathrm{X}]$

*(d) (***Identidade de Jacobi***)* $[[\mathrm{X},\mathrm{Y}],\mathrm{Z}] + [[\mathrm{Y},\mathrm{Z}],\mathrm{X}] + [[\mathrm{Z},\mathrm{X}],\mathrm{Y}] = 0$

Demonstração: Ver [6].

Decorre da Definição 1.4.5 que $[\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{Z}] = [\mathrm{X},\mathrm{Z}] + [\mathrm{Y},\mathrm{Z}]$ e $[\mathrm{X},\mathrm{Y}+\mathrm{Z}] = [\mathrm{X},\mathrm{Y}] + [\mathrm{X},\mathrm{Z}]$. Logo, o colchete de Lie é uma aplicação bilinear. Um espaço vetorial com uma operação bilinear satisfazendo (c) e (d) da Proposição 1.4.2 é chamado uma álgebra de Lie. Assim, temos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Lie.

Definição 1.4.6 *Seja* X *um campo vetorial suave em M. Uma curva suave σ em M é uma curva integral de* X *se*

$$\dot{\sigma}(t) = \mathrm{X}(\sigma(\mathrm{t}))$$

para todo t no domínio de σ.

Se X é um campo vetorial suave e $m \in M$, queremos determinar se existe uma curva integral de X por m e, caso exista, se ela é única. De fato, uma curva $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$ é integral de X se e somente se

$$\dot{\gamma}(t) = d\gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = \mathrm{X}(\gamma(\mathrm{t})), \quad \mathrm{t} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \tag{1.4.1}$$

Suponhamos $0 \in (a,b)$ e $\gamma(0) = m$. Escolhamos (U, φ), com $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ sistema de coordenadas em m. Temos

$$\mathrm{X}\big|_{\mathrm{U}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{f_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathrm{i}}},$$

com $f_i = \mathrm{X}(\varphi_\mathrm{i})$. Logo, como $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty$ temos pela Proposição 1.4.1 que $f_i \in \mathcal{C}^\infty$.

Ainda, para todo t tal que $\gamma(t) \in U$ temos

$$d\gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(\varphi_i \circ \gamma)}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{\gamma(t)}$$

Assim, por (1.4.1) γ é curva integral de X se e somente se

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(\varphi_i \circ \gamma)}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{\gamma(t)}$$

Logo tomando $\gamma_i = \varphi_i \circ \gamma$ temos que γ é uma curva integral de X em $\gamma^{-1}(U)$ se e somente se

$$\frac{d\gamma_i}{dt}\Big|_t = f_i \circ \varphi^{-1}(\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)) \quad (i = 1, ..., n \quad \text{e} \quad t \in \gamma^{-1}(U)) \tag{1.4.2}$$

As equações acima para $i = 1, ..., n$ constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para o qual existem teoremas fundamentais de existência e unicidade de soluções (ver [5]). O teorema a seguir aborda esta questão no caso das variedades.

Teorema 1.4.3 *Seja* X *um campo vetorial suave em uma variedade diferenciável* M*. Para cada* $m \in M$ *existem* $a(m), b(m) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *e uma curva suave*

$$\gamma_m : (a(m), b(m)) \longrightarrow M$$

tal que

(a) $0 \in (a(m), b(m))$ *e* $\gamma_m(0) = m$

(b) γ_m *é curva integral de* X

(c) Se $\mu : (c,d) \longrightarrow M$ *é curva suave integral de* X *satisfazendo (a) e (b), então* $(c,d) \subset (a(m), b(m))$ *e* $\mu = \gamma_m\big|_{(c,d)}$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ *definamos* $\mathcal{D}_t = \{m \in M \mid t \in (a(m), b(m))\}$ *e a transformação* $\mathrm{Y_t} : \mathcal{D}_\mathrm{t} \longrightarrow \mathrm{M}$ *dada por* $\mathrm{Y_t(m)} = \gamma_\mathrm{m}(\mathrm{t})$. *Então*

(d) Para cada $m \in M$ *existem uma vizinhança aberta* V *de* m *e um* $\epsilon > 0$ *tais que* $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \times V \longrightarrow M$ *dada por* $\sigma(t, x) = \mathrm{Y_t(x)}$ *é bem definida e* $\mathcal{C}^\infty$

(e) $\mathcal{D}_t$ *é aberto para todo* $t \in \mathbb{R}$

(f) $\bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$

(g) $\mathrm{Y_t} : \mathcal{D}_\mathrm{t} \longrightarrow: \mathcal{D}_{-\mathrm{t}}$ *é um difeomorfismo com inversa* $\mathrm{Y_{-t}}$

(h) Se $s, t \in \mathbb{R}$, *então* $\mathrm{domínio}(\mathrm{Y_s} \circ \mathrm{Y_t}) \subset \mathcal{D}_{\mathrm{s+t}}$, *e se* t *e* s *têm o mesmo sinal então* $\mathrm{domínio}(\mathrm{Y_s} \circ \mathrm{Y_t}) = \mathcal{D}_{\mathrm{s+t}}$. *Mais ainda,* $\mathrm{Y_s} \circ \mathrm{Y_t} = \mathrm{Y_{s+t}}$ *em* $\mathrm{domínio}(\mathrm{Y_s} \circ \mathrm{Y_t})$

Demonstração: Ver [6].

Definição 1.4.7 *Um campo vetorial suave* X *em* M *é dito completo se* $\mathcal{D}_t = M$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Isto significa que para todo* $m \in M$, γ_m *tem domínio* $(-\infty, +\infty)$.

Neste caso, as transformações $\mathrm{Y_t}$ *formam um grupo de transformações em* M *parametrizadas pelos números reais, chamado grupo a 1-parâmetro de* X.

Definição 1.4.8 *Seja* $\psi : M \longrightarrow N \in \mathcal{C}^\infty$. *Dizemos que* $\mathrm{X : M \longrightarrow T(N)}$ *é um campo vetorial suave ao longo de* ψ *se* $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M, T(N)})$ *e* $\pi \circ \mathrm{X} = \psi$. *Neste caso, dizemos que* X *tem extensão local* $\mathcal{C}^\infty$ *em* N *se dado* $m \in M$ *existirem vizinhanças* U *de* m *e* V *de* $\psi(m)$, *com* $\psi(U) \subset V$, *e um campo vetorial* $\widetilde{\mathrm{X}} : V \longrightarrow T(N)$ *tal que*

$$\widetilde{\mathrm{X}} \circ \psi|_U = \mathrm{X}|_\mathrm{U}$$

Proposição 1.4.4 *Sejam* M *uma variedade de dimensão* n, $m \in M$ *e* X *um campo vetorial suave em* M *tal que* $\mathrm{X(m)} \neq 0$ *(aqui,* 0 *representa o vetor nulo). Então existe um sistema de coordenadas* (U, φ), $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, *em* m *tal que em* U

$$\mathrm{X} = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$$

Demonstração: Ver [6].

Definição 1.4.9 *Sejam* $\varphi : M \longrightarrow N \in \mathcal{C}^\infty$ *e* X *e* Y *campos vetoriais suaves em* M *e* N *respectivamente. Dizemos que* X *e* Y *são* φ*-relacionados se*

$$d\varphi \circ \mathrm{X} = \mathrm{Y} \circ \varphi$$

Proposição 1.4.5 *Seja $\varphi : M \longrightarrow N \in \mathcal{C}^\infty$. Sejam ainda* X *e* X_1 *campos vetoriais suaves em M e* Y *e* Y_1 *campos vetoriais suaves em N. Se* X *é φ-relacionado com* Y *e* X_1 *é φ-relacionado com* Y_1*, então os colchetes de Lie* $[\mathrm{X}, \mathrm{X}_1]$ *e* $[\mathrm{Y}, \mathrm{Y}_1]$ *são φ-relacionados.*

Demonstração: O resultado decorre das Definições (1.2.4), (1.4.4) e (1.4.5).

Definição 1.4.10 *Seja M uma variedade de dimensão n e seja $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $1 \leq k \leq n$. Uma distribuição k-dimensional $\mathcal{D}$ sobre M é uma escolha de um subespaço k-dimensional $\mathcal{D}(m)$ de M_m para cada $m \in M$.*

$\mathcal{D}$ é suave se para cada $m \in M$ existir uma vizinhança U de m e k campos vetoriais $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_\mathrm{k}$ *de classe $\mathcal{C}^\infty$ definidos em U que geram $\mathcal{D}$ em cada ponto de U. Isto é, para todo $x \in U$ o espaço $\mathcal{D}(x)$ é aquele gerado por* $\mathrm{X}_1(\mathrm{x}), ..., \mathrm{X}_\mathrm{k}(\mathrm{x})$.

Um campo vetorial X *em M pertence à distribuição $\mathcal{D}$ se* $\mathrm{X}(\mathrm{m}) = \mathrm{X}_\mathrm{m} \in \mathcal{D}(\mathrm{m})$ *para todo $m \in M$.*

Uma distribuição $\mathcal{D}$ é dita involutiva (ou completamente integrável) se para quaisquer campos vetoriais suaves $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{D}$ *tivermos* $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \in \mathcal{D}$.

Definição 1.4.11 *Sejam (N, ψ) uma subvariedade de M e $\mathcal{D}$ uma distribuição sobre M. Se*

$$d\psi(N_x) = \mathcal{D}(\psi(x)), \qquad \forall\ x \in N,$$

dizemos que (N, ψ) é uma variedade integral de $\mathcal{D}$.

Proposição 1.4.6 *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição suave sobre M tal que por cada ponto de M passa uma variedade integral de $\mathcal{D}$. Então $\mathcal{D}$ é involutiva.*

Demonstração: Sejam X e Y campos vetoriais suaves pertencentes a $\mathcal{D}$. Queremos mostrar que $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}](\mathrm{m}) \in \mathcal{D}(\mathrm{m})$ para todo $m \in M$.

Dado $m \in M$, seja (N, ψ) uma variedade integral de $\mathcal{D}$ passando por m. Suponhamos $\psi(x_0) = m$.

Como $d\psi(N_x) = \mathcal{D}(\psi(x))\ \forall\ x \in N$ e ψ é uma imersão injetora, temos que $d\psi : N_x \longrightarrow \mathcal{D}(\psi(x))$ é isomorfismo. Temos então que existem campos vetoriais $\widetilde{\mathrm{X}}$ e $\widetilde{\mathrm{Y}}$ em N tais que

$$d\psi \circ \widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \circ \psi \quad \text{ e } \quad \mathrm{d}\psi \circ \widetilde{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} \circ \psi$$

De fato, como $d\psi$ é isomorfismo basta tomar $\widetilde{\mathrm{X}} = d\psi^{-1} \circ \mathrm{X} \circ \psi$ e $\widetilde{\mathrm{Y}} = d\psi^{-1} \circ \mathrm{Y} \circ \psi$.

Pela Definição 1.4.9 temos então que $\widetilde{\mathrm{X}}$ e X são ψ-relacionados, bem como $\widetilde{\mathrm{Y}}$ e Y. Daí, pela Proposição 1.4.5 segue que $[\widetilde{\mathrm{X}},\widetilde{\mathrm{Y}}]$ e $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ são ψ-relacionados. Logo,

$$[\mathrm{X},\mathrm{Y}](\mathrm{m}) = [\mathrm{X},\mathrm{Y}](\psi(\mathrm{x}_0)) = \mathrm{d}\psi([\widetilde{\mathrm{X}},\widetilde{\mathrm{Y}}](\mathrm{x}_0)) \in \mathcal{D}(\mathrm{m})$$

Logo $[\mathrm{X},\mathrm{Y}](\mathrm{m}) \in \mathcal{D}(\mathrm{m})$ para todo m em M e portanto por definição concluímos que $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ pertence à distribuição $\mathcal{D}$, como queríamos mostrar.■

O resultado a seguir é uma versão do Teorema de Frobenius clássico para variedades e estabelece a existência de variedades integrais de distribuições suaves involutivas.

Teorema 1.4.7 *Seja $\mathcal{D}(m)$ uma distribuição suave, involutiva, k-dimensional sobre uma variedade M de dimensão $n \geq k$. Se $m \in M$ então existe uma variedade integral de $\mathcal{D}(m)$ passando por m. Mais ainda, existe um sistema de coordenadas cúbicas (U,φ) centrado em m, com $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, tal que os cortes da forma*

$$\{\varphi_i = \text{constante}\ ; i = k+1,...,n\}$$

são variedades integrais de $\mathcal{D}(m)$. Se (N,ψ) for uma variedade integral conexa de $\mathcal{D}(m)$ tal que $\psi(N) \subset U$, então $\psi(N)$ está contido em um desses cortes.

1.5 Compactificações

Introduziremos aqui o conceito de compactificação de espaços topológicos.

Definição 1.5.1 *Dado um espaço topológico E, definimos sua compactificação como uma aplicação contínua $\varphi : E \longrightarrow F$, tal que F é compacto, $\varphi(E)$ é denso em F e φ é um homeomorfismo de E sobre $\varphi(E)$.*

Muitas vezes, por simplicidade, dizemos que F é a compactificação de E, deixando subentendida a aplicação φ.

Uma compactificação muito conhecida é a compactificação por um ponto, a qual definiremos a seguir.

Definição 1.5.2 *Seja E um espaço topológico não-compacto. A compactificação por um ponto de E é a aplicação $\varphi : E \longrightarrow F$, tal que*

(a) F é um espaço de Hausdorff compacto;

(b) φ é um homeomorfismo de E sobre $\varphi(E)$;

(c) $F = \varphi(E) \cup \{\infty\}$, $\infty \notin \varphi(E)$.

Tal compactificação recebe este nome pois o espaço F é obtido acrescentando-se a uma cópia homeomorfa do espaço E apenas um ponto, frequentemente chamado *o ponto no infinito* (daí denotarmos este ponto com o símbolo ∞ na definição anterior)

A seguir, apresentamos uma condição necessária e suficiente para que um espaço topológico não-compacto possua uma compactificação por um ponto. Antes porém, definimos

Definição 1.5.3 *Um espaço topológico E diz-se localmente compacto se todo ponto $x \in E$ possui uma vizinhança compacta.*

Para que um espaço de Hausdorff E seja localmente compacto, é necessário e suficiente que todo ponto $x \in E$ esteja contido em um aberto V de E cujo fecho $\overline{V}$ é compacto. Esta afirmação está justificada em [3], onde encontra-se também a demonstração da proposição a seguir.

Proposição 1.5.1 *Um espaço topológico E possui uma compactificação por um ponto se e somente se E for um espaço de Hausdorff localmente compacto.*

Exemplo: Identificando $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano $\Pi_0 = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \ y_{n+1} = -1\}$, tangente à esfera $\mathbf{S^n} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1\}$ no pólo sul (denotado por $-e_{n+1} = (0, ..., 0, -1)$), tomamos a aplicação de $\mathbf{S^n} \backslash \{\mathbf{e_{n+1}}\}$ em $\mathbb{R}^n$, que a cada ponto p da superfície da esfera associa o ponto sobre Π_0 determinado pela interseção da reta passando pelo pólo norte (e_{n+1}) e p com Π_0. Com as topologias usuais, tal aplicação, chamada projeção estereográfica, é um homeomorfismo. Sua aplicação inversa é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbf{S^n} \setminus \{e_{n+1}\}$. Podemos mais geralmente considerar $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{S^n}$ tal que $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{S^n} \setminus \{e_{n+1}\}$ seja a inversa da projeção estereográfica. Assim, φ (ou mais simplesmente $\mathbf{S^n}$) é a compactificação de $\mathbb{R}^n$ por um ponto.

Mais geralmente, ao invés de só um ponto, para compactificar um espaço topológico poderíamos adicionar um conjunto não-unitário. Por exemplo, no caso do espaço $\mathbb{R}^n$ temos que este é difeomorfo a $B_1(0)$ (= bola aberta de $\mathbb{R}^n$ unitária centrada na origem), cujo fecho é $\overline{B_1(0)}$ (= bola fechada de $\mathbb{R}^n$ unitária centrada na origem). Assim, temos que $\overline{B_1(0)}$ é uma compactificação de $\mathbb{R}^n$ diferente da compactificação por um ponto. Neste caso, a compactificação foi obtida adicionando o conjunto $\mathbf{S^{n-1}}$ (= esfera de $\mathbb{R}^n$ unitária centrada na origem). Como $\overline{B_1(0)}$ é difeomorfo ao hemisfério norte (e/ou sul) fechado da esfera $\mathbf{S^n}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos modelar uma nova compactificação de $\mathbb{R}^n$, à saber:

Identifiquemos $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano $\Pi = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \; y_{n+1} = 1\}$, tangente a $\mathbf{S^n}$ no pólo norte. Restringindo-nos ao hemisfério norte $\mathbf{H}^+ = \{y \in \mathbf{S^n} | \; y_{n+1} > 0\}$ de $\mathbf{S^n}$, tomemos a projeção central dos pontos do hemisfério norte sobre Π. Tal aplicação é um difeomorfismo. Podemos considerar sua inversa com valores no fecho do hemisfério norte. Assim, temos que o hemisfério norte aberto unido com o equador da esfera é uma compactificação de $\mathbb{R}^n$. Esta será a compactificação que usaremos no Capítulo 2 para definir a compactificação de Poincaré de campos polinomiais.

Definição 1.5.4 *Um espaço topológico E é dito completamente regular quando, dados $x \in E$ e um aberto U de E com $x \in U$, existir uma função contínua $f : E \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(E \setminus U) = 0$*

Seja E um espaço topológico e $I = [0,1]$. Definamos os conjuntos $\mathcal{F} = \{f : E \longrightarrow I \mid f \;\; \text{é contínua}\}$ e $I^{\mathcal{F}} = \prod_{f \in \mathcal{F}} I$. Pelo Teorema de Tychonov, temos que $I^{\mathcal{F}}$ com a topologia produto é um espaço de Hausdorff compacto. Definamos $\varphi : E \longrightarrow I^{\mathcal{F}}$ tal que $\varphi(x) = \{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}}$. Temos assim que φ é contínua e ainda $\varphi : E \longrightarrow \varphi(E)$ é homeomorfismo se e somente se E for um espaço de Hausdorff completamente regular.

Se, pois, E for um espaço de Hausdorff completamente regular, tomemos $\beta(E) = \overline{\varphi(E)}$. Segue então que $\varphi : E \longrightarrow \beta(E)$ é uma compactificação de E.

Definição 1.5.5 *Diremos que $\varphi : E \longrightarrow \beta(E)$ acima construída é a compactificação de Stone-Čech de E.*

Uma propriedade desta compactificação é que para cada função real contínua limitada $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ temos que existe função contínua $\overline{f} : \beta(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\overline{f} \circ \varphi = f$.

Capítulo 2

A Compactificação de Poincaré

Este capítulo dedica-se ao estudo da compactificação de Poincaré de campos polinomiais. Na Seção 2.1 descreveremos detalhadamente esta técnica e expressaremos a compactificação de Poincaré em coordenadas locais. Na Seção 2.2 demonstraremos resultados que caracterizam quando campos polinomiais tangentes à esfera $\mathbf{S^n}$ são a Compactificação de Poincaré de campos polinomiais em $\mathbb{R}^n$. Na Seção 2.3 apresentamos uma outra caracterização para o caso de campos polinomiais do plano.

A referência para este capítulo é [1].

2.1 A Compactificação de Poincaré de Campos Polinomiais

A seguir, descreveremos a compactificação de Poincaré para campos polinomiais gerais. Com tal compactificação é possível fazer um estudo das órbitas do campo original perto do infinito.

Seja $\mathrm{X} = (\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P_n})$ um campo vetorial polinomial em $\mathbb{R}^n$. Identificaremos $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano $\Pi = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \ y_{n+1} = 1\}$, tangente à esfera $\mathbf{S^n} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1\}$ no pólo norte (isto é, em $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$). Denotaremos os hemisférios norte ($\{y \in \mathbf{S^n} | \ y_{n+1} > 0\}$) e sul ($\{y \in \mathbf{S^n} | \ y_{n+1} < 0\}$) de $\mathbf{S^n}$ por $\mathbf{H}^+$ e $\mathbf{H}^-$ respectivamente.

A compactificação de Poincaré de X consiste em fazer duas cópias do fluxo de X, uma sobre $\mathbf{H}^+$ e outra sobre $\mathbf{H}^-$, pela projeção central dos pontos de Π. Mais especificamente, para $x \in \mathbb{R}^n$, definimos $\Delta(x) = (1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ e os difeomorfismos $\phi^+ : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{H}^+$ e

$\phi^- : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{H}^-$, dados por

$$\phi^+(x) = \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, ..., x_n, 1) \qquad \text{e} \qquad \phi^-(x) = -\frac{1}{\Delta(x)}(x_1, ..., x_n, 1)$$

Assim, o campo vetorial $\widehat{X}$ em $\mathbf{H}^+ \cup \mathbf{H}^-$, induzido por X através de tais difeomorfismos, é dado por

$$\widehat{X}(y) = \begin{cases} (\mathrm{D}\phi^+)_x \mathrm{X}(x), \text{ se } y = \phi^+(x) \\ (\mathrm{D}\phi^-)_x \mathrm{X}(x), \text{ se } y = \phi^-(x) \end{cases}$$

Como $\phi^+(x) = (f_1(x), ..., f_n(x), f_{n+1}(x))$, com $f_i(x) = \frac{x_i}{\Delta(x)}$ para $i = 1, ..., n$ e $f_{n+1}(x) = \frac{1}{\Delta(x)}$, temos que se $y = \phi^+(x)$ então $(y_1, ..., y_n, y_{n+1}) = (\frac{x_1}{\Delta(x)}, ..., \frac{x_n}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)})$. Logo $(\mathrm{D}\phi^+)_x = [\partial^{e_j} f_i(x)]_{\substack{i=1,...,n+1 \\ j=1,...,n}}$, com

$$\partial^{e_i} f_i(x) = \partial^{e_i}(\frac{x_i}{\Delta(x)}) = \frac{1}{\Delta(x)} - \frac{x_i^2}{\Delta^3(x)} = y_{n+1} - y_{n+1}\ y_i^2,$$

para $1 \leq i \leq n$ e

$$\partial^{e_j} f_i(x) = \partial^{e_j}(\frac{x_i}{\Delta(x)}) = -\frac{x_i\ x_j}{\Delta^3(x)} = -y_{n+1}\ y_i\ y_j,$$

para $i \neq j$.

Além disso, $\partial^{e_j} f_{n+1}(x) = \partial^{e_j}(\frac{1}{\Delta(x)}) = -\frac{x_j}{\Delta^3(x)} = -y_{n+1}^2\ y_j,\ \ j = 1, ..., n.$

Como $(y_1, ..., y_n, y_{n+1}) = (-\frac{x_1}{\Delta(x)}, ..., -\frac{x_n}{\Delta(x)}, -\frac{1}{\Delta(x)})$ se $y = \phi^-(x)$, segue que $(\mathrm{D}\phi^+)_x = (\mathrm{D}\phi^-)_x$. Logo, a expressão para $\widehat{X}(y)$ sobre $\mathbf{H}^+ \cup \mathbf{H}^-$ é

$$\widehat{X}(y) = y_{n+1} \begin{pmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1\ y_2 & ... & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & 1 - y_2^2 & ... & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & ... & 1 - y_n^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & ... & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{P}_1(y) \\ \widehat{P}_2(y) \\ \vdots \\ \widehat{P}_n(y) \end{pmatrix},$$

com $\widehat{P}_i(y_1, ..., y_{n+1}) = P_i(y_1/y_{n+1}, ..., y_n/y_{n+1})$.

Pelos difeomorfismos ϕ^+ e ϕ^-, temos que o equador da esfera $\mathbf{S^n}$, isto é, $\mathbf{S^{n-1}} = \{y \in \mathbf{S^n} |\ y_{n+1} = 0\}$, corresponde ao infinito de $\mathbb{R}^n$. Definindo grau(X) $= \max\{\text{grau}(P_1), ..., \text{grau}(P_n)\} = m$, estenderemos o fluxo dado por $\widehat{X}$ sobre $\mathbf{S^n} \setminus \mathbf{S^{n-1}}$

$(= \mathbf{H}^+ \cup \mathbf{H}^-)$ tomando $\widetilde{X}$ em $\mathbf{S^n}$ dado por

$$\widetilde{X}(y) = y_{n+1}^{m-1}\widehat{X}(y) = \begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1\ y_2 & \dots & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & 1-y_2^2 & \dots & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & \dots & 1-y_n^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & \dots & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1(y) \\ \widetilde{P}_2(y) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_n(y) \end{pmatrix},$$

com $\widetilde{P}_i(y_1, ..., y_{n+1}) = y_{n+1}^m\ P_i(y_1/y_{n+1}, ..., y_n/y_{n+1})$ (e portanto homogêneo de grau m).

O campo vetorial $\widetilde{X}$ assim obtido é denominado a Compactificação de Poincaré do campo X.

Observação: O campo $\widetilde{X}$ é polinomial em $\mathbf{S^n}$ e as trajetórias de $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ são as mesmas em $\mathbf{S^n} \setminus \mathbf{S^{n-1}}$, uma vez que multiplicamos $\widehat{X}$ pela função y_{n+1}^{m-1}, que é sempre positiva em $\mathbf{H}^+$ e sempre positiva ou sempre negativa em $\mathbf{H}^-$, conforme m seja ímpar ou par respectivamente.

Observação: Como $\widetilde{P}_i(-y) = (-1)^m \widetilde{P}_i(y)$, observamos ainda que se m é ímpar então o campo $\widetilde{X}$ é simétrico com relação à origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, pois $\widetilde{X}(-y) = (-1)^m \widetilde{X}(y) = -\widetilde{X}(y)$. Ainda, como o campo $\widehat{X}$ e suas trajetórias sempre são simétricos com relação à origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos pela definição de $\widetilde{X}$ e pela observação anteior que as trajetórias de $\widetilde{X}$ são sempre simétricas com relação à origem e se m for ímpar elas têm o mesmo sentido e sentidos contrários se m for par.

Para obter uma expressão analítica para $\widetilde{X}$, consideraremos $\mathbf{S^n}$ como uma variedade diferenciável e a cobriremos com $2(n+1)$ sistemas de coordenadas da forma (U_i, ϕ_i^+) e (V_i, ϕ_i^-), $i = 1, ..., n+1$, com

$$U_i = \{y \in \mathbf{S}^n |\ y_i > 0\}, \quad V_i = \{y \in \mathbf{S}^n |\ y_i < 0\}$$

e $\phi_i^+ : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_i^- : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ associando, respectivamente, cada $(n+1)$-upla em U_i ou V_i à n-upla $(\frac{y_1}{y_i}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, ..., \frac{y_{n+1}}{y_i})$, que denotaremos por $(z_1, ..., z_n)$, embora essa n-upla seja diferente em cada sistema de coordenadas.

Notemos que qualquer sistema de coordenadas, à exceção de (U_{n+1}, ϕ_{n+1}^+) e (V_{n+1}, ϕ_{n+1}^-), contém pontos do equador, os quais têm coordenada z_n nula. Notemos ainda que $U_{n+1} = \mathbf{H}^+$, $V_{n+1} = \mathbf{H}^-$, $\phi_{n+1}^+ = (\phi^+)^{-1}$ e $\phi_{n+1}^- = (\phi^-)^{-1}$

Os cálculos a seguir nos ajudarão a obter a expressão analítica de $\widetilde{X}$ em cada sistema de coordenadas.

Sejam $1 \leq i \leq n$ e $y \in U_i \cap \mathbf{H}^+$. Como a diferencial $(\mathrm{D}\phi_i^+)_y$ é função de $\mathrm{T}_y U_i$ em $\mathrm{T}_{\phi_i^+(y)}\mathbb{R}^n$, temos

$$(\mathrm{D}\phi_i^+)_y(\widetilde{X}(y)) = (\mathrm{D}\phi_i^+)_y(y_{n+1}^{m-1}\widehat{X}(y)) = y_{n+1}^{m-1}(\mathrm{D}\phi_i^+)_y(\widehat{X}(y)) =$$

$$y_{n+1}^{m-1}(\mathrm{D}\phi_i^+)_y((\mathrm{D}\phi^+)_x\mathrm{X}(x)) = y_{n+1}^{m-1}(\mathrm{D}(\phi_i^+ \circ \ \phi^+))_x\mathrm{X}(x),$$

com $y = \phi^+(x)$.

Como $(\phi_i^+ \circ \ \phi^+)(x) = \phi_i^+(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \ldots, \frac{x_n}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)}) = (\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}, \frac{1}{x_i})$, calculando a matriz jacobiana $(\mathrm{D}(\phi_i^+ \circ \ \phi^+))_x$ da função $(\phi_i^+ \circ \ \phi^+)(x)$, obtemos que

$$(\mathrm{D}(\phi_i^+ \circ \ \phi^+))_x\mathrm{X}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_i} & \ldots & 0 & -\frac{x_1}{x_i^2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \ldots & \frac{1}{x_i} & -\frac{x_{i-1}}{x_i^2} & \ldots & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{x_{i+1}}{x_i^2} & \frac{1}{x_i} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{x_n}{x_i^2} & 0 & \ldots & \frac{1}{x_i} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{x_i^2} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{x_i^2}\big(x_iP_1 - x_1P_i,\ x_iP_2 - x_2P_i, \cdots,\ x_iP_{i-1} - x_{i-1}P_i,\ x_iP_{i+1} - x_{i+1}P_i, \cdots,\ x_iP_n - x_nP_i,\ -P_i\big)$$

Como $y = \phi^+(x)$, temos em U_i

$$(z_1, ..., z_n) = (\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}, \frac{1}{x_i}) = \phi_i^+(\phi^+(x)) =$$

$$\phi_i^+(y_1, ..., y_{n+1}) = (\frac{y_1}{y_i}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, ... \frac{y_{n+1}}{y_i})$$

Logo,

$$\mathrm{D}(\phi_i^+ \circ \ \phi^+))_x\mathrm{X}(x) = z_n\big(P_1 - z_1P_i, \cdots, P_{i-1} - z_{i-1}P_i, P_{i+1} - z_iP_i, \cdots, P_n - z_{n-1}P_i,\ -z_nP_i\big),$$

com $P_j = P_j(\frac{z_1}{z_n}, ..., \frac{z_{i-1}}{z_n}, \frac{1}{z_n}, \frac{z_i}{z_n}, ..., \frac{z_{n-1}}{z_n})$.

Fazendo os cálculos obtemos que $\Delta(z) = \frac{1}{|y_i|}$, e como $y \in U_i$ (e portanto $y_i > 0$), temos $\Delta(z) = \frac{1}{y_i}$. Ainda, como $z_n = \frac{y_{n+1}}{y_i}$ segue que $y_{n+1} = \frac{z_n}{\Delta(z)}$ e

$$(\mathrm{D}\phi_i^+)_y(\widetilde{X}(y)) = y_{n+1}^{m-1}(\mathrm{D}(\phi_i^+ \circ \ \phi^+))_x\mathrm{X}(x) =$$

$$\frac{z_n^m}{(\Delta(z))^{m-1}}\big(P_1 - z_1P_i, \cdots, P_{i+1} - z_iP_i, \cdots, P_n - z_{n-1}P_i,\ -z_nP_i\big) =$$

$$\frac{1}{(\Delta(z))^{m-1}}\big(\widetilde{P}_1 - z_1\widetilde{P}_i, \cdots, \widetilde{P}_{i+1} - z_i\widetilde{P}_i, \cdots, \widetilde{P}_n - z_{n-1}\widetilde{P}_i,\ -z_n\widetilde{P}_i\big),$$

aqui $\widetilde{P}_j = \widetilde{P}_j(z_1, ..., z_{i-1}, 1, z_i, ..., z_n)$, com $\widetilde{P}_j$ como definido anteriormente.

Se tomarmos agora $y \in U_i \cap \mathbf{H}^-$, $1 \leq i \leq n$, basta refazermos os cálculos anteriores com ϕ^- em lugar de ϕ^+ para obter que $(\mathrm{D}\phi_i^+)_y(\widetilde{X}(y))$ tem a mesma expressão acima.

Notemos que se $y \in U_{n+1} = \mathbf{H}^+$, então $(\mathrm{D}\phi_{n+1}^+)_y(\widetilde{X}(y)) = y_{n+1}^{m-1}(\mathrm{D}(\phi_{n+1}^+ \circ\ \phi^+))_x \mathrm{X}(x)$, com $y = \phi^+(x)$. Como $\phi_{n+1}^+ = (\phi^+)^{-1}$, obtemos que $(\mathrm{D}(\phi_{n+1}^+ \circ\ \phi^+))_x$ é a matriz identidade. Logo $(z_1, ..., z_n) = \phi_{n+1}^+(y_1, ..., y_{n+1}) = \phi_{n+1}^+(\phi^+(x)) = (x_1, ..., x_n)$, e como $y_{n+1} = \frac{1}{\Delta(x)} = \frac{1}{\Delta(z)}$, temos que

$$(\mathrm{D}\phi_i^+)_y(\widetilde{X}(y)) = y_{n+1}^{m-1}(P_1, ..., P_n) = \frac{1}{(\Delta(z))^{m-1}}(P_1, ..., P_n)$$

com $P_j = P_j(z_1, ..., z_n)$.

Multiplicando as expressões de $\widetilde{X}$ em cada sistema de coordenadas por $(\Delta(z))^{m-1} > 0$, obtemos, em suma, as seguintes expressões para $\widetilde{X}$:

Em U_1: $\big(\widetilde{P}_2 - z_1\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_3 - z_2\widetilde{P}_1, \cdots, \widetilde{P}_n - z_{n-1}\widetilde{P}_1,\ -z_n\widetilde{P}_1\big)$, com $\widetilde{P}_j = \widetilde{P}_j(1, z_1, ..., z_n)$.

Em U_2: $\big(\widetilde{P}_1 - z_1\widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3 - z_2\widetilde{P}_2, \cdots, \widetilde{P}_n - z_{n-1}\widetilde{P}_2,\ -z_n\widetilde{P}_2\big)$, com $\widetilde{P}_j = \widetilde{P}_j(z_1, 1, z_2, ..., z_n)$.

$\vdots$

Em U_n: $\big(\widetilde{P}_1 - z_1\widetilde{P}_n, \widetilde{P}_2 - z_2\widetilde{P}_n, \cdots, \widetilde{P}_{n-1} - z_{n-1}\widetilde{P}_n,\ -z_n\widetilde{P}_n\big)$, com $\widetilde{P}_j = \widetilde{P}_j(z_1, ..., z_n, 1)$.

Em U_{n+1}: $\big(P_1, P_2, ..., P_n\big)$, com $P_j = P_j(z_1, z_2, ..., z_n)$.

Para encontrar a expressão de $\widetilde{X}$ no caso em que $y \in V_i$, basta refazer os cálculos substituindo ϕ_i^+ por ϕ_i^-. A expressão será a mesma que obtivemos em U_i, porém multiplicada por $(-1)^{m-1}$, pois sendo $(z_1, ..., z_n) = \phi_i^-(y_1, ..., y_n)$ temos que $\Delta(z) = \frac{1}{|y_i|} = -\frac{1}{y_i}$, uma vez que $y_i < 0$ em V_i.

Temos que o infinito $\mathbf{S^{n-1}}$ de $\mathbf{S^n}$ é invariante pelo fluxo de $\widetilde{X}$, isto é, se φ é um fluxo de $\widetilde{X}$ com $\varphi(t_0) \in \mathbf{S^{n-1}}$, então $\varphi(t) \in \mathbf{S^{n-1}}$ para todo t no intervalo máximo de definição de φ. De fato, se $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ é um fluxo de $\widetilde{X}$ (em coordenadas locais) com $\varphi(t_0) \in \mathbf{S^{n-1}}$, temos que φ satisfaz o sistema determinado por $\widetilde{X}$ e portanto em vizinhanças de U_i, $i = 1, ..., n$ temos

$$\varphi_n'(t) = \varphi_n(t)\widetilde{P}_i(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \quad \text{com} \quad \varphi(t_0) = 0$$

Tais equações diferenciais têm solução $\varphi_n(t) = 0$ e portanto $\varphi(t) \in \mathbf{S^{n-1}}$ para todo t no intervalo máximo de definição de φ. De forma análoga chegamos à mesma conclusão nas vizinhanças de V_i, $i = 1, ..., n$.

O resultado a seguir, conhecido como "Teorema da Esfera Cabeluda", nos permitirá concluir uma importante propriedade da Compactificação de Poincaré (ver demonstração em [2]).

Teorema 2.1.1 $\mathbf{S^n}$ *admite um campo vetorial que não se anula em nenhum ponto se e somente se n é ímpar. Em particular, se n é par então todo campo vetorial em $\mathbf{S^n}$ se anula em algum ponto.*

Teorema 2.1.2 *Se* X *é um campo polinomial em $\mathbb{R}^n$ que não se anula em nenhum de seus pontos, então existe $y \in \mathbf{S^{n-1}}$ tal que $\widetilde{X}(y) = 0$.*

Demonstração: Como X não se anula por hipótese, segue que $\widetilde{X}(y) \neq 0$ para todo $y \in \mathbf{H}^+ \bigcup \mathbf{H}^- = \mathbf{S^n} \setminus \mathbf{S^{n-1}}$. Assim, se n é par temos pelo Teorema 2.1.1 que $\widetilde{X}$ se anula em algum ponto de $\mathbf{S^n}$ e portanto $\widetilde{X}$ se anula em algum ponto de $\mathbf{S^{n-1}}$. Se n é ímpar, temos que $n-1$ é par e daí, como $\widetilde{X}|_{\mathbf{S^{n-1}}}$ é ainda um campo polinomial, segue que $\widetilde{X}$ se anula em algum ponto de $\mathbf{S^{n-1}}$.$\blacksquare$

2.2 Caracterização da Compactificação de Poincaré - Parte I

Nesta seção caracterizaremos quando um campo polinomial em $\mathbb{R}^{n+1}$ restrito à esfera $\mathbf{S^n}$, é a compactificação de Poincaré de um campo polinomial em $\mathbb{R}^n$. Tal caracterização é descrita pelos teoremas abaixo:

Teorema 2.2.1 *Seja* $\mathrm{Z} = (\mathrm{S_1}, ..., \mathrm{S_n}, \mathrm{S_{n+1}})$ *um campo polinomial em $\mathbb{R}^{n+1}$,tal que $\mathrm{Z}|_{\mathbf{S^n}}$ seja tangente a $\mathbf{S^n}$. Suponha que exista $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

1. *$\partial^\alpha S_i(0) = 0$, se $|\alpha| \neq m$ ou $m+2$, para $i = 1, ..., n$, e $\partial^\alpha S_{n+1}(0) = 0$, se $|\alpha| \neq m+2$*

2. *$\partial^\alpha S_i(0) = 0$, se $|\alpha| = m+2$ com $\alpha_i = 0$, ou $\alpha_i = 1$ e $\alpha_{n+1} = m+1$, para $i = 1, ..., n$*

3. $$\frac{\partial^{e_i}\partial^\alpha S_i(0)}{(\alpha_i + 1)} = \frac{\partial^{e_j}\partial^\alpha S_j(0)}{(\alpha_j + 1)} ,$$
se $|\alpha| = m+1$, para $i, j = 1, ..., n$

4.
$$\frac{\partial^{e_i}\partial^{\alpha}S_i(0)}{(\alpha_i+1)} = -\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n}} \alpha_j\ \partial^{\beta^j(\alpha)}S_j(0),$$

se $|\alpha| = m+1$, *para* $i = 1, ..., n$.

Aqui $\beta^j(\alpha) = \alpha - e_j$ *(note que* $|\beta^j(\alpha)| = m$*).*

Então o campo Z *pode ser escrito como*

$$\mathrm{Z}(y) = \begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1\ y_2 & \dots & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & 1-y_2^2 & \dots & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & \dots & 1-y_n^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & \dots & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1(y) \\ R_2(y) \\ \vdots \\ R_n(y) \end{pmatrix},$$

com
$$R_i(y) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^{\alpha}S_i(0)}{\alpha!}\ y^{\alpha}, \quad 1\leq i\leq n \tag{2.2.1}$$

(aqui, estamos considerando $y = (y_1, ..., y_n, y_{n+1})$*, e além disso estamos denotando por* 0 *a origem em* $\mathbb{R}^{n+1}$*).*

Demonstração: Note que se $\partial^{\alpha}S_i(0) = 0$ para $|\alpha| = m$ e para todo i, $1\leq i\leq n$, então por (1), (2) e (4) e pelo fato de $\mathrm{Z}|_{\mathbf{S^n}}$ ser tangente a $\mathbf{S^n}$, temos que $S_i \equiv 0$, $i = 1, ...n, n+1$ e portanto $\mathrm{Z}\equiv 0$. Suporemos, no entanto, $\mathrm{Z}\not\equiv 0$ e daí segue que algum polinômio de (2.2.1) é não nulo.

Seja α um $(n+1)$-multi-índice. Fixado i, $1\leq i\leq n$, tomemos $\alpha' = \alpha + e_i$.

Se α é tal que $|\alpha| = m+1$, com $\alpha_i \geq 1$ para o i fixado e $\beta^j = \beta^j(\alpha)$ como definido anteriormente, temos por (3) e (4) que

$$\frac{\partial^{\alpha'}S_i(0)}{\alpha'!} = \frac{\partial^{e_i}\partial^{\alpha}S_i(0)}{\alpha'!} = \frac{-(\alpha_i+1)}{\alpha'!}\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n}} \alpha_j\ \partial^{\beta^j}S_j(0) = -\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n}} \frac{\partial^{\beta^j}S_j(0)}{(\beta^j)!}, \tag{2.2.2}$$

pois $\dfrac{(\alpha_i+1)}{\alpha'!} = \dfrac{1}{\alpha!}$, e $\dfrac{\alpha_j}{\alpha!} = (\beta^j)!$, se $\alpha_j \geq 1$.

Ainda, para $|\alpha| = m+1$ com $\alpha_i = 0$ e $\alpha_{n+1} \neq m+1$, temos $\alpha'! = \alpha!$ e por (2), (3) e (4) segue que

$$\frac{\partial^{\alpha'}S_i(0)}{\alpha'} = \frac{\partial^{e_i}\partial^{\alpha}S_i(0)}{\alpha!} = -\frac{1}{\alpha!}\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \alpha_j\ \partial^{\beta^j}S_j(0) = -\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \frac{\partial^{\beta^j}S_j(0)}{(\beta^j)!} \tag{2.2.3}$$

Pela hipótese (1) temos que cada polinômio S_i é a soma de uma parte homogênea de grau m e uma parte homogênea de grau $m+2$, para cada i tal que $1 \leq i \leq n$. Assim, podemos escrever

$$S_i(y) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\, y^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+2} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\, y^\alpha$$

Denotemos por $S_i^{m+2}(y)$ a parte homogênea de grau $m+2$ de S_i.

Por (2), temos que

$$S_i^{m+2}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i\geq 1}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\, y^\alpha = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i\geq 2}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\, y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i=1\\ \alpha_{n+1}\neq m+1}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\, y^\alpha$$

Logo, como em $S_i^{m+2}(y)$ temos $\alpha_i \geq 1$, podemos escrever

$$S_i^{m+2}(y) = y_i \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i\geq 1}} \frac{\partial^{\alpha'} S_i(0)}{\alpha'!}\, y^\alpha + y_i \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i=0\\ \alpha_{n+1}\neq m+1}} \frac{\partial^{\alpha'} S_i(0)}{\alpha'!}\, y^\alpha,$$

com $\alpha' = \alpha + e_i$.

Pelas estimativas feitas em (2.2.2) e (2.2.3) e observando que

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i\geq 1}} \left(\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n}} \frac{\partial^{\beta^j} S_j(0)}{(\beta^j)!} \right) y^\alpha = \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i\geq 1}} \left(\frac{\partial^{\beta^i} S_i(0)}{(\beta^i)!} \right) y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i\geq 1}} \left(\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \frac{\partial^{\beta^j} S_j(0)}{(\beta^j)!} \right) y^\alpha,$$

segue que

$$\begin{aligned} S_i^{m+2}(y) &= y_i \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i\geq 1}} \left(-\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n}} \frac{\partial^{\beta^j} S_j(0)}{(\beta^j)!} \right) y^\alpha + y_i \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i=0\\ \alpha_{n+1}\neq m+1}} \left(-\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \frac{\partial^{\beta^j} S_j(0)}{(\beta^j)!} \right) y^\alpha \\ &= -y_i \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i\geq 1}} \frac{\partial^{\beta^i} S_i(0)}{(\beta^i)!}\, y^\alpha - y_i \sum_{|\alpha|=m+1} \left(\sum_{\substack{\alpha_j\geq 1\\ 1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \frac{\partial^{\beta^j} S_j(0)}{(\beta^j)!} \right) y^\alpha \\ &= -y_i \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_i\geq 1}} \frac{\partial^{\beta^i} S_i(0)}{(\beta^i)!}\, y^\alpha - y_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\ \alpha_j\geq 1}} \frac{\partial^{\beta^j} S_j(0)}{(\beta^j)!}\, y^\alpha \right) \end{aligned}$$

Como $y_i \geq 1$ na primeira parcela de somatórios acima e $y_j \geq 1$ na segunda parcela de somatórios, e ainda como $\beta^k(\alpha) + e_k = \alpha$, $k = 1, ..., n$, obtemos que

$$S_i^{m+2}(y) = -y_i^2 \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\, y^\alpha - y_i\; y_j \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha S_j(0)}{\alpha!}\, y^\alpha \right)$$

Assim, sendo $R_k(y)$ a parte homogênea de grau m de $S_k(y)$, $k = 1, ..., n$, temos então que

$$S_i(y) = (1 - y_i^2) \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\ y^\alpha - y_i\ y_j \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \Bigg(\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha S_j(0)}{\alpha!}\ y^\alpha \Bigg)$$

$$= (1 - y_i^2) R_i(y) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_i\ y_j\ R_j(y)\ ,$$

Como por hipótese o campo $Z|_{\mathbf{S^n}}$ é tangente a $\mathbf{S^n}$, temos, para $(y_1, ..., y_n, y_{n+1}) \in \mathbf{S^n}$, que $\sum_{i=1}^{n+1} y_i S_i(y) = 0$. E substituindo S_i por sua expressão em termos dos R_k's, temos

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i S_i(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \big[(1 - y_i^2) R_i(y) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_i\ y_j\ R_j(y) \big] + y_{n+1} S_{n+1}(y) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (1 - y_i^2) R_i(y) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_i^2\ y_j\ R_j(y) + y_{n+1} S_{n+1}(y)$$

E como em $\mathbf{S^n}$ temos que $(1 - y_i^2) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} y_j^2$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (1 - y_i^2) R_i(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} y_i\ y_j^2 R_i(y) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} y_i\ y_j^2 R_i(y) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} y_i\ y_j^2 R_i(y) + \sum_{i=1}^{n} y_i\ y_{n+1}^2 R_i(y)$$

Segue portanto que

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i S_i(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i\ y_{n+1}^2 R_i(y) + y_{n+1} S_{n+1}(y)$$

E como tal polinômio é nulo para $(y_1, ..., y_n, y_{n+1}) \in \mathbf{S^n}$, segue pela sua homogeneidade (note que trata-se de um polinômio homogêneo de grau $m + 3$) que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\ y_{n+1}^2 R_i(y) + y_{n+1} S_{n+1}(y) = 0$$

em $\mathbb{R}^{n+1}$. Logo

$$S_{n+1}(y) = - \sum_{i=1}^{n} y_i\ y_{n+1} R_i(y)$$

E reescrevendo o campo Z com as expressões que encontramos para suas coordenadas, temos que

$$\mathrm{Z}(y)=\begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1\ y_2 & \dots & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & 1-y_2^2 & \dots & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & \dots & 1-y_n^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & \dots & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1(y) \\ R_2(y) \\ \vdots \\ R_n(y) \end{pmatrix},$$

o que conclui a demonstração do resultado.■

O resultado a seguir fornece condições suficientes para que um campo polinomial em $\mathbb{R}^{n+1}$ seja a compactificação de Poincaré de algum campo polinomial em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.2 *Seja* $\mathrm{Z}=(\mathrm{S_1},...,\mathrm{S_n},\mathrm{S_{n+1}})$ *um campo polinomial em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *satisfazendo as condições (1)-(4) do Teorema 2.2.1. Suponha ainda que*

$$\exists\ \ i, 1\leq i\leq n,\ \ e\ \alpha,\ \ com\ |\alpha|=m, \alpha_{n+1}=0\ \ tais\ que\ \partial^\alpha S_i(0)\neq 0. \tag{2.2.4}$$

Então o campo $\mathrm{Z}|_{\mathbf{S^n}}$ *é a compactificação de Poincaré do campo polinomial* $\mathrm{X}=(\mathrm{P_1},...,\mathrm{P_n})$ *em* $\mathbb{R}^n$*, com* $P_i(x)=\sum_{|\alpha|=m}\sum_{\alpha_{n+1}=0}^{m}\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\ x^{\Pi_n(\alpha)}$*,* $x=(x_1,...,x_n)$ *e* $\Pi_n(\alpha)=(\alpha_1,...,\alpha_n)$*.*

Demonstração: De fato, se $\mathrm{X}=(\mathrm{P_1},...,\mathrm{P_n})$ é o campo polinomial em $\mathbb{R}^n$ descrito acima, a hipótese (2.2.4) significa que $\mathrm{grau(X)}=\max\{\mathrm{grau(P_1)},...,\mathrm{grau(P_n)}\}=m$. Assim, sua compactificação de Poincaré de acordo com a Seção 2.1 é

$$\widetilde{X}(y)=y_{n+1}^{m-1}\widehat{X}(y)=\begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1\ y_2 & \dots & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & 1-y_2^2 & \dots & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & \dots & 1-y_n^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & \dots & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{P}_1(y) \\ \widetilde{P}_2(y) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_n(y) \end{pmatrix},$$

com $\widetilde{P}_i(y_1,...,y_{n+1})=y_{n+1}^m\ P_i(y_1/y_{n+1},...,y_n/y_{n+1})$.

Como $x^{\Pi_n(\alpha)}=x_1^{\alpha_1}.....x_n^{\alpha_n}$ temos, para $x=(x_1,...,x_n)=(y_1/y_{n+1},...,y_n/y_{n+1})$, que

$$x^{\Pi_n(\alpha)}=(\frac{y_1}{y_{n+1}})^{\alpha_1}...(\frac{y_n}{y_{n+1}})^{\alpha_n}=y_1^{\alpha_1}...y_n^{\alpha_n}\ y_{n+1}^{(-\sum_{j=1}^n\alpha_j)}=y_1^{\alpha_1}...y_n^{\alpha_n}\ y_{n+1}^{(-|\alpha|+\alpha_{n+1})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_i(y_1,...,y_{n+1}) &= y_{n+1}^m \; P_i(y_1/y_{n+1},...,y_n/y_{n+1})\\ &= y_{n+1}^m \sum_{|\alpha|=m}\sum_{\alpha_{n+1}=0}^{m} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\; y_1^{\alpha_1}...y_n^{\alpha_n}\; y_{n+1}^{(-m+\alpha_{n+1})}\\ &= \sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\; y^\alpha = R_i(y)\end{aligned}$$

Assim, como $\widetilde{P}_i(y) = R_i(y)$, temos que $\widetilde{X} = \mathrm{Z}|_{\mathbf{S^n}}$, e com isso concluímos a demonstração do resultado.■

Os exemplos a seguir ilustram a importância da condição (2.2.4) para garantir a afirmação do resultado anterior

Exemplo: Seja $\mathrm{Z} = (\mathrm{S_1}, \mathrm{S_2}, \mathrm{S_3})$ um campo polinomial em $\mathbb{R}^3$, com

$$\begin{aligned}S_1(y) &= y_1\; y_3 + y_2\; y_3 - y_1\; y_2\; y_3^2 - y_1^2\; y_2\; y_3 - y_1^3\; y_3,\\ S_2(y) &= y_3^2 - y_1^2\; y_2\; y_3 - y_1\; y_2^2\; y_3 - y_2^2\; y_3^2 \quad \text{e}\\ S_3(y) &= -y_1\; y_2\; y_3^2 - y_1^2\; y_3^2 - y_2\; y_3^3\end{aligned}$$

Notemos que Z satisfaz todas as condições (1)-(4) do Teorema 2.2.1 para $m = 2$ (e $n = 2$). Logo,

$$\mathrm{Z(y)} = \begin{pmatrix} 1-y_1^2 & -y_1\; y_2\\ -y_1\; y_2 & 1-y_2^2\\ -y_1\; y_3 & -y_2\; y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1(y)\\ R_2(y)\end{pmatrix},$$

com $R_1(y) = \sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial^\alpha S_1(0)}{\alpha!}\; y^\alpha = y_1\; y_3 + y_2\; y_3$, e $R_2(y) = \sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial^\alpha S_2(0)}{\alpha!}\; y^\alpha = y_3^2$.

Notemos porém que para $|\alpha| = 2$, com $\alpha_{n+1} = 0$, $\partial^\alpha S_i(0) = 0$, $i = 1,2$, isto é, Z não satisfaz a hipótese (2.2.4) do Teorema 2.2.2. Logo, Z não é a compactificação de Poincaré do campo $\mathrm{X} = (\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2})$ em $\mathbb{R}^2$, com $P_1(x) = \sum_{|\alpha|=2}\sum_{\alpha_{n+1}=0}^{2}\frac{\partial^\alpha S_1(0)}{\alpha!}\; x^{\pi_2(\alpha)} = x_1 + x_2$, e $P_2(x) = \sum_{|\alpha|=2}\sum_{\alpha_{n+1}=0}^{2}\frac{\partial^\alpha S_2(0)}{\alpha!}\; x^{\pi_2(\alpha)} = 1$.

Exemplo: Seja $\mathrm{Z} = (\mathrm{S_1}, \mathrm{S_2}, \mathrm{S_3})$ um campo polinomial em $\mathbb{R}^3$, com

$$\begin{aligned}S_1(y) &= y_1 + y_2 - y_1^3 - y_1^2\; y_2 - y_1\; y_2\; y_3,\\ S_2(y) &= y_3 - y_1^2\; y_2 - y_1\; y_2^2 - y_2^2\; y_3 \quad \text{e}\\ S_3(y) &= -y_1\; y_2\; y_3 - y_1^2\; y_3 - y_2\; y_3^2\end{aligned}$$

Notemos que Z satisfaz todas as condições (1)-(4) do Teorema 2.2.1 para $m = 1$ (e $n = 2$). Logo,

$$\mathrm{Z(y)} = \begin{pmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1\ y_2 \\ -y_1\ y_2 & 1 - y_2^2 \\ -y_1\ y_3 & -y_2\ y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1(y) \\ R_2(y) \end{pmatrix},$$

com $R_1(y) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha S_1(0)}{\alpha!}\ y^\alpha = y_1 + y_2$, e $R_2(y) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha S_2(0)}{\alpha!}\ y^\alpha = y_3$.

Notemos ainda que $\partial^\alpha S_1(0) = 1$ se $\alpha = (1,0,0)$ ou $(0,1,0)$ e portanto temos satisfeita a hipótese (2.2.4) do Teorema 2.2.2. Logo, Z é a compactificação de Poincaré do campo $\mathrm{X} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ em $\mathbb{R}^2$, com $P_1(x) = x_1 + x_2$, e $P_2(x) = 1$.

Observação: Vimos que as condições do Teorema 2.2.2 são suficientes para que um campo em $\mathbb{R}^{n+1}$ seja a compactificação de Poincaré de um campo X em $\mathbb{R}^n$. Observamos que tais condições são também necessárias.

De fato, se $\mathrm{X} = (\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_\mathrm{n})$ é um campo polinomial em $\mathbb{R}^n$ e grau(X) $= m$ então sua compactificação de Poincaré $\widetilde{X}$ em $\mathbf{S^n}$ é dada por $\widetilde{X} = (S_1, ..., S_n, S_{n+1})$, com

$$S_i(y) = (1 - y_i^2)\widetilde{P}_i(y) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_i\ y_j\ \widetilde{P}_j(y),$$

$$S_{n+1}(y) = -\sum_{i=1}^{n} y_i\ y_{n+1}\widetilde{P}_i(y)$$

e $\widetilde{P}_k$ como definido anteriormente. Neste caso, verificamos facilmente que as coordenadas de $\widetilde{X}$ satisfazem (1)-(4) do Teorema 2.2.1 e (2.2.4) do Teorema 2.2.2.

2.3 Caracterização da Compactificação de Poincaré - Parte II

Sebemos que se $y \in \mathbf{S^n}$ então suas coordenadas satisfazem a equação $(1 - y_i^2) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} y_j^2$. Assim dado um campo polinomial X em $\mathbb{R}^n$, temos que a sua compactificação de Poincaré $\widetilde{X}$ pode ser expressa equivalentemente como

$$\widetilde{X}(y) = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{n} y_i^2 & -y_1\ y_2 & \dots & -y_1\ y_n \\ -y_2\ y_1 & \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n} y_i^2 & \dots & -y_2\ y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -y_1\ y_n & -y_2\ y_n & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \\ -y_1\ y_{n+1} & -y_2\ y_{n+1} & \dots & -y_n\ y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1(y) \\ \widetilde{P}_2(y) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_n(y) \end{pmatrix},$$

com $\widetilde{P}_i(y_1, ..., y_{n+1}) = y_{n+1}^m\ P_i(y_1/y_{n+1}, ..., y_n/y_{n+1})$

Dessa forma, buscamos uma outra caracterização para a compactificação de Poincaré de campos polinomiais que leva em consideração a expressão acima. O teorema a seguir, de forma análoga ao Teorema 2.2.1, descreve esta caracterização para o caso particular de campos polinomiais em $\mathbb{R}^3$:

Teorema 2.3.1 *Seja* $\mathrm{Z} = (\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3)$ *um campo polinomial em* $\mathbb{R}^3$*,tal que* $\mathrm{Z}|_{\mathbf{S^2}}$ *seja tangente a* $\mathbf{S^2}$*. Suponha que exista* $m \in \mathbb{Z}_+^*$*, tal que*

1. $\partial^\alpha S_i(0) = 0$*, se* $|\alpha| \neq m+2$*, para* $i = 1, 2, 3$

2. $\partial^\alpha S_i(0) = 0$*, se* $|\alpha| = m+2$ *com* $\alpha_i = m+2$*, ou* $\alpha_i = m+1$ *e* $\alpha_3 = 1$*, para* $i = 1, 2$

3. $$\frac{\partial^{e_2}\partial^\alpha S_1(0)}{\alpha_2+1} = \frac{-\partial^{e_1}\partial^\alpha S_2(0)}{\alpha_1+1},$$
   se $|\alpha| = m+1$*, com* $\alpha_3 = 0$ *ou* 1

4. $$\frac{\partial^\alpha S_1(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_1}{2}]}\sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_2}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_j(k-1)\ \frac{\partial^{\beta(j,k)}S_1(0)}{\beta(j,k)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_1-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_2-1}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_j(k)\ \frac{\partial^{\gamma(j,k)}S_2(0)}{\gamma(j,k)!} = 0,$$
   se α *é tal que* $\alpha_3 = 0$ *ou* 1*,* $1 \leq \alpha_1 \leq m$ *e* $\alpha_2 \geq 2$*.*
   Aqui, $f_j(k)$ *é tal que* $f_j(0) = 1$ *para todo* j*,* $f_0(k) = 1$ *para todo* k *e para* $j, k \geq 1$ *tem-se* $f_j(k) = f_{j-1}(k) + f_j(k-1)$*.*
   Ainda,
   $$\beta(j,k) = \beta(j,k,\alpha) = \alpha - 2j\ e_1 - 2k\ e_2 + 2(j+k)\ e_3$$
   $$\gamma(j,k) = \gamma(j,k,\alpha) = \alpha - (2\ j+1)\ e_1 - (2\ k+1)\ e_2 + 2(j+k+1)\ e_3$$

5.

$$\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^k \quad \frac{\partial^{\beta(0,k)} S_i(0)}{\beta(0,k)!} = 0,$$

para $i = 1, 2$, $\ell \in \{1, 2\}$, $\ell \neq i$, α *tal que* $\alpha_i = 0$, $\alpha_\ell \geq 2$ *e* $\alpha_3 = 0$ *ou* 1, *e*

$$\beta(0,k) = \beta(0,k,\alpha) = \alpha - 2k\ e_\ell + 2k\ e_3$$

Então o campo Z *pode ser escrito como*

$$\mathrm{Z}(y) = \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1\ y_2 \\ -y_1\ y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_1\ y_3 & -y_2\ y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(y) \\ Q_2(y) \end{pmatrix},$$

com

$$Q_i(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_i=0}} \left(\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha'_\ell - 1}{2}]} (-1)^k \ \frac{\partial^{\gamma(0,k)} S_i(0)}{\gamma(0,k)!} \right) y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=0 \\ \alpha_i \geq 1}} \frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!}\ y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=1 \\ \alpha_i \geq 1}} \left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha'_i}{2}]} (-1)^{j+1} \ \frac{\partial^{\beta(j,1)} S_\ell(0)}{\beta(j,1)!} \right) y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_i \geq 1 \\ \alpha_\ell \geq 2}} \left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha'_i - 1}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha'_\ell - 1}{2}]} (-1)^{j+k} \ f_j(k-1) \ \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_i(0)}{\gamma(j,k)!} + \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha'_i}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha'_\ell}{2}]} (-1)^{j+k} \ f_{j-1}(k-1) \ \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_\ell(0)}{\beta(j,k)!} \right) y^\alpha$$

para $i, \ell \in \{1, 2\}$, $i \neq \ell$ *e*

$$\beta(j,k) = \beta(j,k,\alpha') = \alpha' - 2j\ e_i - 2k\ e_\ell + 2(j+k)\ e_3$$
$$\gamma(j,k) = \gamma(j,k,\alpha') = \alpha' - (2\ j+1)\ e_i - (2\ k+1)\ e_\ell + 2(j+k+1)\ e_3,$$

com $\alpha' = \alpha + e_i + e_\ell$

Observações: (1) O símbolo [ ] que aparece nos somatórios acima expressa a função que associa a cada número real o maior inteiro menor ou igual ao número, isto é, $[r] =$ *maior inteiro menor ou igual a* r. Uma propriedade desta função é que para $n \in \mathbb{Z}$, $[r] + n = [r+n]$.

(2) Temos pela hipótese (3) que se α tem comprimento $m+2$, $\alpha_3 = 0$ ou 1 e $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$, $\frac{\partial^\alpha S_1(0)}{\alpha!} = \frac{\partial^{\alpha'} S_2(0)}{\alpha'!}$, com $\alpha' = \alpha + e_1 - e_2$. Sendo assim, concluímos que

$$\frac{\partial^\alpha S_2(0)}{\alpha!} + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_2}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_{j-1}(k)\ \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_2(0)}{\beta(j,k)!} +$$

$$\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_1-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_2-1}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_j(k)\ \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_1(0)}{\gamma(j,k)!} = 0,$$

se α é tal que $\alpha_3 = 0$ ou 1, $1 \leq \alpha_2 \leq m$ e $\alpha_1 \geq 2$.

Logo, a hipótese (4) pode ser enunciada como

$$(4)' \qquad \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_j(k-1)\ \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!} +$$

$$\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_j(k)\ \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} = 0,$$

para $i, \ell \in \{1,2\}$, $i \neq \ell$ e α tal que $\alpha_3 = 0$ ou 1, $1 \leq \alpha_i \leq m$ e $\alpha_\ell \geq 2$, com

$\beta(j,k) = \beta(j,k,\alpha) = \alpha - 2j\ e_i - 2k\ e_\ell + 2(j+k)\ e_3$ e

$\gamma(j,k) = \gamma(j,k,\alpha) = \alpha - (2j+1)\ e_i - (2k+1)\ e_\ell + 2(j+k+1)\ e_3$

Antes de demonstrar o Teorema 2.3.1 vamos demonstrar a seguinte afirmação

Lema 2.3.2 *Para $j,k \in \mathbb{Z}_+$, tomemos $f_j(k)$ como no enunciado do Teorema 2.3.1, isto é, $f_j(0) = 1$ para todo j, $f_0(k) = 1$ para todo k e para $j,k \geq 1$, $f_j(k) = f_{j-1}(k) + f_j(k-1)$. Nestas condições, $f_j(k) = f_k(j)$.*

Demonstração: Demonstraremos este resultado usando indução sobre j e k.

Para $j = 0$ temos pela definição de $f_j(k)$ que $f_0(k) = f_k(0) = 1$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}_+$. Suponhamos $f_j(k) = f_k(j)$ $\forall\ k$ e mostremos que $f_{j+1}(k) = f_k(j+1)$, $\forall\ k$.

Para $k = 0$, temos por definição que $f_{j+1}(0) = f_0(j+1) = 1$. Suponhamos então $f_{j+1}(k) = f_k(j+1)$ e mostremos que $f_{j+1}(k+1) = f_{k+1}(j+1)$. De fato, temos $f_{j+1}(k+1) = f_{j+1}(k) + f_j(k+1)$ por definição. Mas, pelas hipóteses de indução sobre j e k temos que $f_j(k+1) = f_{k+1}(j)$ e $f_{j+1}(k) = f_k(j+1)$. Logo $f_{j+1}(k+1) = f_k(j+1) + f_{k+1}(j) = f_{k+1}(j+1)$.

Logo, $f_{j+1}(k) = f_k(j+1)$ $\forall\ k$ e portanto $f_j(k) = f_k(j)$, como queríamos mostrar.$\blacksquare$

Demonstração do Teorema 2.3.1: Seja $i \in \{1,2\}$ fixado. Temos por (2) que $\partial^\alpha S_i(0) = 0$, se $|\alpha| = m+2$ com $\alpha_i = m+2$, ou $\alpha_i = m+1$ e $\alpha_3 = 1$. Escrevamos então S_i como

$$S_i(y) = S_{(1,i)}(y) + S_{(2,i)}(y) + S_{(3,i)}(y),$$

com

$$S_{(1,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i=0\\ \alpha_\ell\geq 2}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\ y^\alpha,$$

$$S_{(2,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i=0\\ \alpha_\ell\leq 1,\alpha_3\geq 2}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\ y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\geq 2}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\ y^\alpha$$

e

$$S_{(3,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i,\alpha_\ell\geq 1\\ \alpha_3\leq 1}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\ y^\alpha$$

Definamos, para α um 3-multi-índice de comprimento $m+2$, e para $\ell \in \{1,2\}$, com $\ell \neq i$:

$\beta(j,k) = \beta(j,k,\alpha) = \alpha - 2j\ e_i - 2k\ e_\ell + 2(j+k)\ e_3$ e

$\gamma(j,k) = \gamma(j,k,\alpha) = \alpha - (2j+1)\ e_i - (2k+1)\ e_\ell + 2(j+k+1)\ e_3,$ se $\alpha_i, \alpha_\ell \geq 1$

Vamos somar e subtrair ao polinômio S_i os termos

$$(I) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i=0\\ \alpha_\ell,\alpha_3\geq 2}} \left(\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^k\ \frac{\partial^{\beta(0,k)} S_i(0)}{\beta(0,k)!} \right) y^\alpha$$

$$(II) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_\ell=0\\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\geq 2}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!}\ y^{\alpha+2(e_\ell-e_3)}$$

$$(III) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_\ell=1\\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} (-1)^j\ \frac{\partial^{\gamma(j,0)} S_\ell(0)}{\gamma(j,0)!} \right) y^{\alpha+2(e_\ell-e_3)}$$

$$(IV) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i\geq 1\\ \alpha_\ell,\alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_j(k-1)\ \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k}\ f_j(k)\ \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} \right) y^{\alpha+2(e_\ell-e_3)}$$

$$(V) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i=0\\ \alpha_\ell\geq 1,\alpha_3\geq 4}} \frac{\partial^\alpha S_\ell(0)}{\alpha!}\ y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)}$$

$$(VI) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=0 \\ \alpha_3\geq 4}} \left(\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} (-1)^j \; \frac{\partial^{\beta(j,0)} S_\ell(0)}{\beta(j,0)!} \right) \; y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)}$$

$$(VII) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i=1 \\ \alpha_\ell\geq 1, \alpha_3\geq 4}} \left(\frac{\partial^\alpha S_\ell(0)}{\alpha!} + \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^k \; \frac{\partial^{\gamma(0,k)} S_i(0)}{\gamma(0,k)!} \right) \; y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)}$$

$$(VIII) \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell\geq 1 \\ \alpha_i\geq 2, \alpha_3\geq 4}} \left(\frac{\partial^\alpha S_\ell(0)}{\alpha!} + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k} \; f_{j-1}(k) \; \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_\ell(0)}{\beta(j,k)!} \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k} \; f_j(k) \; \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_i(0)}{\gamma(j,k)!} \right) \; y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)}$$

Observamos que os termos acima serão somados e subtraídos na medida em que fizerem sentido dependendo do valor de m. Por exemplo, o termo (II) só aparece se $m \geq 1$, os termos (I), (III) e (VI) só aparecem se $m \geq 2$, os termos (IV) e (V) aparecem se $m \geq 3$ e os termos (VII) e (VIII) aparecem se $m \geq 4$ e $m \geq 5$, respectivamente.

Observando que: $\beta(j,k) + 2(e_3 - e_\ell) = \beta(j, k+1)$, $\quad \beta(j,k) + (2e_3 - e_i - e_\ell) = \gamma(j,k)$, $\gamma(j,k) + 2(e_3 - e_\ell) = \gamma(j, k+1)$, $\quad \gamma(j,k) + (2e_3 - e_i - e_\ell) = \beta(j+1, k+1)$, e ainda que $\alpha + 2(e_3 - e_\ell) = \beta(0,1)$ e $\alpha + (2e_3 - e_i - e_\ell) = \gamma(0,0)$, podemos reescrever os termos (II)-(VIII) respectivamente como

$$(II)' \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=2 \\ \alpha_i\geq 1}} \frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} \; y^\alpha$$

$$(III)' \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=3 \\ \alpha_i\geq 1}} \left(\frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} (-1)^j \; \frac{\partial^{\gamma(j,1)} S_\ell(0)}{\gamma(j,1)!} \right) \; y^\alpha$$

$$(IV)' \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell\geq 4 \\ \alpha_i\geq 1}} \left(\frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=2}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k+1} \; f_j(k-2) \; \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!} \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k+1} \; f_j(k-1) \; \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} \right) \; y^\alpha$$

$$(V)' \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i=1 \\ \alpha_\ell, \alpha_3\geq 2}} \frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!} \; y^\alpha$$

$$(VI)' \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=1 \\ \alpha_i\geq 1, \alpha_3\geq 2}} \left(\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} (-1)^j \ \frac{\partial^{\gamma(j,0)} S_\ell(0)}{\gamma(j,0)!} \right) y^\alpha$$

$$(VII)' \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i=2 \\ \alpha_\ell, \alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{k+1} \ \frac{\partial^{\beta(1,k)} S_i(0)}{\beta(1,k)!} \right) y^\alpha$$

$$(VIII)' \quad \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i\geq 3 \\ \alpha_\ell, \alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k} \ f_{j-1}(k) \ \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k+2} \ f_{j-1}(k-1) \ \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!} \right) y^\alpha$$

Denotemos por $(II)'', (III)''$ e $(IV)''$ os termos $(II)', (III)'$ e $(IV)'$ respectivamente tais que $\alpha_3 \geq 2$ (ou equivalentemente os termos $(II), (III)$ e (IV) tais que $\alpha_3 \geq 4$), e por $(II)''', (III)'''$ e $(IV)'''$ os termos $(II)', (III)'$ e $(IV)'$ tais que $\alpha_3 \leq 1$ (ou os termos $(II), (III)$ e (IV) tais que $\alpha_3 \leq 3$). Notemos que $(II)' = (II)'' + (II)'''$, $(III)' = (III)'' + (III)'''$ e $(IV)' = (IV)'' + (IV)'''$.
Assim, podemos escrever

$$S_i(y) = R_{(1,i)}(y) + R_{(2,i)}(y) + R_{(3,i)}(y),$$

com

$R_{(1,i)}(y) = S_{(1,i)}(y) - (I) + (II) + (III) + (IV),$

$R_{(2,i)}(y) = S_{(2,i)}(y) + (I) - (II)'' - (III)'' - (IV)'' + (V)' + (VI)' + (VII)' + (VIII)',$

$R_{(3,i)}(y) = S_{(3,i)}(y) - (II)''' - (III)''' - (IV)''' - (V) - (VI) - (VII) - (VIII).$

Temos então

$$R_{(1,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i=0 \\ \alpha_3\leq 1}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} \ y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i=0 \\ \alpha_\ell, \alpha_3\geq 2}} \left(\sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{k+1} \ \frac{\partial^{\beta(0,k)} S_i(0)}{\beta(0,k)!} \right) y^\alpha$$
$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=0 \\ \alpha_i\geq 1, \alpha_3\geq 2}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} \ y^{\alpha+2(e_\ell - e_3)}$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=1 \\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} (-1)^j \; \frac{\partial^{\gamma(j,0)} S_\ell(0)}{\gamma(j,0)!} \right) y^{\alpha+2(e_\ell-e_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i\geq 1 \\ \alpha_\ell,\alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k} \; f_j(k-1) \; \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k} \; f_j(k) \; \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} \right) \; y^{\alpha+2(e_\ell-e_3)}$$

$$R_{(2,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i=0 \\ \alpha_3\geq 2}} \left(\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^k \; \frac{\partial^{\beta(0,k)} S_i(0)}{\beta(0,k)!} \right) y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=0 \\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\geq 2}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} \; y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=1 \\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} (-1)^j \; \frac{\partial^{\gamma(j,0)} S_\ell(0)}{\gamma(j,0)!} \right) y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_i\geq 1 \\ \alpha_\ell,\alpha_3\geq 2}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k} \; f_j(k-1) \; \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k} \; f_j(k) \; \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} \right) \; y^\alpha$$

e

$$R_{(3,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=1 \\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\leq 1}} \frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} \; y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=2 \\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\leq 1}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} - \frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} \right) y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell=3 \\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\leq 1}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} - \frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} - \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} (-1)^j \; \frac{\partial^{\gamma(j,1)} S_\ell(0)}{\gamma(j,1)!} \right) y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m+2 \\ \alpha_\ell\geq 4 \\ \alpha_i\geq 1,\alpha_3\leq 1}} \left(\frac{\partial^\alpha S_i(0)}{\alpha!} - \frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} - \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=2}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k+1} \; f_j(k-2) \; \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!} \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k+1} \; f_j(k-1) \; \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} \right) \; y^\alpha$$

$$- \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i=0\\ \alpha_\ell\geq 1,\alpha_3\geq 4}} \frac{\partial^\alpha S_\ell(0)}{\alpha!}\, y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)} - \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_\ell=0\\ \alpha_3\geq 4}} \left(\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} (-1)^j \, \frac{\partial^{\beta(j,0)} S_\ell(0)}{\beta(j,0)!}\right) y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)}$$

$$- \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i=1\\ \alpha_\ell\geq 1,\alpha_3\geq 4}} \left(\frac{\partial^\alpha S_\ell(0)}{\alpha!} + \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^k \, \frac{\partial^{\gamma(0,k)} S_i(0)}{\gamma(0,k)!}\right) y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)}$$

$$- \sum_{\substack{|\alpha|=m+2\\ \alpha_i\geq 2\\ \alpha_\ell\geq 1,\alpha_3\geq 4}} \left(\frac{\partial^\alpha S_\ell(0)}{\alpha!} + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell}{2}]} (-1)^{j+k} \, f_{j-1}(k) \, \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_\ell(0)}{\beta(j,k)!} + \right.$$

$$\left. \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i-1}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k} \, f_j(k) \, \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_i(0)}{\gamma(j,k)!}\right) y^{\alpha+(e_i+e_\ell-2e_3)}$$

Notemos que em $R_{(1,i)}$ e $R_{(2,i)}$ respectivamente as variáveis y_ℓ e y_3 têm potências maiores ou iguais a 2, e em $R_{(3,i)}$ temos que y_1 e y_2 têm potências maiores ou iguais a 1.

Se α é tal que $|\alpha| = m$, tomemos $\alpha' = \alpha + e_i + e_\ell$. Observemos que: $\alpha + 2e_\ell = \alpha - e_i + e_\ell$, $\beta(0,k,\alpha) + 2e_\ell = \gamma(0,k-1,\alpha')$, $\alpha + 2e_3 = \gamma(0,0,\alpha')$, $\gamma(j,k,\alpha) + 2e_3 = \beta(j+1,k+1,\alpha')$ e $\beta(j,k,\alpha) + 2e_3 = \gamma(j,k,\alpha')$.

Com estas considerações, temos então que

$$\begin{aligned} R_{(1,i)}(y) &= y_\ell^2 \; Q_{(1,i)}(y), \\ R_{(2,i)}(y) &= y_3^2 \; Q_{(2,i)}(y) \quad \text{ e} \\ R_{(3,i)}(y) &= -y_1 \; y_2 \; Q_{(3,i)}(y), \end{aligned}$$

com

$$Q_{(1,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_i=0\\ \alpha_3\leq 1}} \frac{\partial^{\alpha'-e_i+e_\ell} S_i(0)}{(\alpha'-e_i+e_\ell)!}\, y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_i=0\\ \alpha_3\geq 2}} \left(\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha'_\ell-1}{2}]} (-1)^k \, \frac{\partial^{\gamma(0,k)} S_i(0)}{\gamma(0,k)!}\right) y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_\ell=0\\ \alpha_i\geq 1}} \frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!}\, y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_\ell=1\\ \alpha_i\geq 1}} \left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha'_i}{2}]} (-1)^{j+1} \, \frac{\partial^{\beta(j,1)} S_\ell(0)}{\beta(j,1)!}\right) y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_\ell\geq 2\\ \alpha_i\geq 1}} \left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha'_i-1}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha'_\ell-1}{2}]} (-1)^{j+k} \, f_j(k-1) \, \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_i(0)}{\gamma(j,k)!} + \right.$$

$$\sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i'}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'}{2}]} (-1)^{j+k} \, f_{j-1}(k-1) \, \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_\ell(0)}{\beta(j,k)!} \Bigg) \, y^\alpha$$

$$Q_{(2,i)}(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_i=0}} \Bigg(\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell'-1}{2}]} (-1)^k \, \frac{\partial^{\gamma(0,k)} S_i(0)}{\gamma(0,k)!} \Bigg) \, y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=0 \\ \alpha_i\geq 1}} \frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!} \, y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=1 \\ \alpha_i\geq 1}} \Bigg(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i'}{2}]} (-1)^{j+1} \, \frac{\partial^{\beta(j,1)} S_\ell(0)}{\beta(j,1)!} \Bigg) \, y^\alpha +$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell\geq 2 \\ \alpha_i\geq 1}} \Bigg(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_i(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i'-1}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'-1}{2}]} (-1)^{j+k} \, f_j(k-1) \, \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_i(0)}{\gamma(j,k)!} \, +$$

$$\sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i'}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'}{2}]} (-1)^{j+k} \, f_{j-1}(k-1) \, \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_\ell(0)}{\beta(j,k)!} \Bigg) \, y^\alpha$$

e

$$Q_{(3,i)}(y) = - \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=0 \\ \alpha_3\leq 1}} \frac{\partial^{\alpha'} S_i(0)}{\alpha'!} \, y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=1 \\ \alpha_3\leq 1}} \Bigg(-\frac{\partial^{\alpha'} S_i(0)}{\alpha'!} + \frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} \Bigg) \, y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=2 \\ \alpha_3\leq 1}} \Bigg(-\frac{\partial^{\alpha'} S_i(0)}{\alpha'!} + \frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i'-1}{2}]} (-1)^j \, \frac{\partial^{\gamma(j,1)} S_\ell(0)}{\gamma(j,1)!} \Bigg) \, y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell\geq 3 \\ \alpha_3\leq 1}} \Bigg(-\frac{\partial^{\alpha'} S_i(0)}{\alpha'!} + \frac{\partial^{\beta(0,1)} S_i(0)}{\beta(0,1)!} + \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i'}{2}]} \sum_{k=2}^{[\frac{\alpha_\ell'}{2}]} (-1)^{j+k+1} \, f_j(k-2) \, \frac{\partial^{\beta(j,k)} S_i(0)}{\beta(j,k)!}$$

$$+ \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i'-1}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'-1}{2}]} (-1)^{j+k+1} \, f_j(k-1) \, \frac{\partial^{\gamma(j,k)} S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!} \Bigg) \, y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_i=0 \\ \alpha_\ell\geq 1, \alpha_3\geq 2}} \frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!} \, y^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_\ell=0 \\ \alpha_3\geq 2}} \Bigg(\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i'-1}{2}]} (-1)^j \, \frac{\partial^{\gamma(j,0)} S_\ell(0)}{\gamma(j,0)!} \Bigg) \, y^\alpha$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_i=1 \\ \alpha_\ell\geq 1, \alpha_3\geq 2}} \Bigg(\frac{\partial^{\gamma(0,0)} S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!} + \sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'}{2}]} (-1)^{k+1} \, \frac{\partial^{\beta(1,k)} S_i(0)}{\beta(1,k)!} \Bigg) \, y^\alpha \, +$$

$$+\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_\ell\geq 1\\ \alpha_i,\alpha_3\geq 2}}\left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)}S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!}+\sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i'-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell'-1}{2}]}(-1)^{j+k}\ f_{j-1}(k)\ \frac{\partial^{\gamma(j,k)}S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i'}{2}]}\sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'}{2}]}(-1)^{j+k}\ f_{j-1}(k-1)\ \frac{\partial^{\beta(j,k)}S_i(0)}{\beta(j,k)!}\right)\ y^\alpha$$

com $\beta(j,k)=\beta(j,k,\alpha')$ e $\gamma(j,k)=\gamma(j,k,\alpha')$ em todos os termos de $Q_{(1,i)}$, $Q_{(2,i)}$ e $Q_{(3,i)}$.

Observando que $\gamma(0,k,\alpha')=\beta(0,k+1,\alpha'-e_i+e_\ell)$, segue pela hipótese (5) que $Q_{(1,i)}=Q_{(2,i)}$. E observando que

$$Q_{(2,\ell)}(y)=\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_\ell=0}}\left(\sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_i'-1}{2}]}(-1)^j\ \frac{\partial^{\gamma(j,0)}S_\ell(0)}{\gamma(j,0)!}\right)\ y^\alpha+\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_i=0\\ \alpha_\ell\geq 1}}\frac{\partial^{\gamma(0,0)}S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!}\ y^\alpha$$

$$+\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_i=1\\ \alpha_\ell\geq 1}}\left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)}S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!}+\sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'}{2}]}(-1)^{k+1}\ \frac{\partial^{\beta(1,k)}S_i(0)}{\beta(1,k)!}\right)\ y^\alpha$$

$$+\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_i\geq 2\\ \alpha_\ell\geq 1}}\left(\frac{\partial^{\gamma(0,0)}S_\ell(0)}{\gamma(0,0)!}+\sum_{k=0}^{[\frac{\alpha_\ell'-1}{2}]}\sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i'-1}{2}]}(-1)^{j+k}\ f_k(j-1)\ \frac{\partial^{\gamma(j,k)}S_\ell(0)}{\gamma(j,k)!}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{[\frac{\alpha_\ell'}{2}]}\sum_{j=1}^{[\frac{\alpha_i'}{2}]}(-1)^{j+k}\ f_{k-1}(j-1)\ \frac{\partial^{\beta(j,k)}S_i(0)}{\beta(j,k)!}\right)\ y^\alpha$$

segue pelas hipóteses (3) e (4) que $Q_{(3,i)}=Q_{(2,\ell)}=Q_{(1,\ell)}$ (e também que $Q_{(1,i)}=Q_{(2,i)}=Q_{(3,\ell)}$)

Temos então $Q_{(1,i)}=Q_{(2,i)}=Q_{(3,\ell)}=Q_i$ e $Q_{(1,\ell)}=Q_{(2,\ell)}=Q_{(3,i)}=Q_\ell$. Logo, para $i=1,2$ temos

$$S_i(y)=R_{(1,i)}(y)+R_{(2,i)}(y)+R_{(3,i)}(y)=(y_\ell^2+y_3^2)\ Q_i(y)-y_1\ y_2\ Q_\ell(y)$$

Como por hipótese o campo $\mathrm{Z}|_{\mathbf{S^2}}$ é tangente a $\mathbf{S^2}$, temos para $y\in\mathbf{S^2}$

$$y_1\ S_1+y_2\ S_2+y_3\ S_3=0$$

E substituindo na equação acima as expressões encontradas para S_1 e S_2, temos

$$y_1\ S_1+y_2\ S_2+y_3\ S_3=y_1\ y_3^2Q_1+y_2\ y_3^2Q_2+y_3\ S_3$$

Assim, como o polinômio acima é nulo para $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{S^2}$, segue pela sua homogeneidade (note que trata-se de um polinômio homogêneo de grau $m+3$) que

$$S_3(y) = -y_1\ y_3\ Q_1 - y_2\ y_3\ Q_2$$

em $\mathbb{R}^3$. Assim, reescrevendo o campo Z com as expressões que encontramos para suas coordenadas temos

$$\mathrm{Z}(y) = \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1\ y_2 \\ -y_1\ y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_1\ y_3 & -y_2\ y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(y) \\ Q_2(y) \end{pmatrix},$$

com Q_i como no enunciado do teorema.

Concluímos assim a demonstração deste resultado.■

Sejam Q_i, $i = 1, 2$, como no Teorema 2.3.1. Para simplificar a notação, escrevamos

$$Q_i(y) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha Q_i(0)}{\alpha!}\ y^\alpha$$

Observemos que se para um dos polinômios Q_1 ou Q_2 algum termo independente de y_3 for diferente de 0, então o campo Z será a compactificação de Poincaré do campo $\mathrm{X} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$, com $P_i(x) = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{\alpha_3=0}^{m} \frac{\partial^\alpha Q_i(0)}{\alpha!}\ x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2}$. Este fato é justificado de forma análoga ao Teorema 2.2.2.

Referências Bibliográficas

[1] DELGADO, J.; LACOMBA, E. A.; LLIBRE, J.; PÉREZ, E. *Poincaré compactification of Hamiltonian polynomial vector fields.* In: Hamiltonian Dynamical Systems,IMA Vol. Math. Appl., 63, (Cincinnati, OH., 1992), Springer, New York, 1995, p. 99-114.

[2] LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 2**. Sexta Edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 2000.

[3] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1970.

[4] DOS SANTOS FILHO, J. R. S. *Injective mappings and solvable vector fields of Euclidian spaces.* **Topology and its Applications**, v. 136, n. 1-3, 2004, p. 261-274.

[5] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Sexta Edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 1979.

[6] WARNER, F. W. **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups**. Glenview, Ill.: Scott, Foresman, 1971. (Graduate Texts in Mathematics, vol.94, Springer-Verlag, New York, 1983.

[7] WOLL, J. W.,Jr. **Functions of Several Variables**. New York: Harcourt, Brace & World, Inc., 1966.