UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um Homomorfismo Índice Associado à Ações Livres de $\mathbb{Z}_p$

João da Mata Santos Filho

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP

Junho de 2003

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Santos Filho, João da Mata.
S237hi	Um homomorfismo índice associado à ações livres de Zp / João da Mata Santos Filho. -- São Carlos : UFSCar, 2003.
	72 p.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2003.
	1. Topologia algébrica. 2. Teorema de Borsuk - Ulam. 3. Homomorfismo índice. 4. Ações livres.
	CDD: 514.2 (20ª)

Agradecimentos

À Deus, que me permitiu a realização desse sonho.

Ao professor Pedro Pergher minha sincera gratidão pela orientação dispensada na confecção deste trabalho e pelo exemplo de pessoa e de profissional que mostrou ser durante o período de convivência.

Aos meus pais, João da Mata e Maria Cecília, e aos meus irmãos Juliana e Júlio César, de quem recebo muito amor e que, mesmo nos momentos mais difíceis, nunca deixaram de acreditar na minha capacidade.

Aos professores do Departamento de Matemática, em especial ao João Sampaio, Malagutti, Adalberto e Edson, que muito contribuíram para a minha formação acadêmica.

À Fernanda e a Taís, pela amizade solidificada ao longo desses anos e ao Rafael que muito me ajudou na realização deste trabalho.

A todos dos meus queridos Bloco L e Xikeirinho, em especial, a Jurema.

Aos amigos da Pós-graduação pelo excelente ambiente de trabalho que proporcionam e pela amizade.

Ao CNPq, pela concessão da bolsa de estudos.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

O objetivo deste trabalho é detalhar e analisar as consequências de um recente pré-print de Pedro Pergher, o qual trata da construção de um homomorfismo-índice associado a espaços equipados com ações livres do grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$. Este homomorfismo índice é definido no $\mathbb{Z}_p$-módulo de homologia equivariante do $\mathbb{Z}_p$-espaço em questão e assume valores em $\mathbb{Z}_p$, e o mesmo possibilita a obtenção de alguns resultados tipo Borsuk-Ulam, concernentes à existência de aplicações equivariantes conectando dois dados $\mathbb{Z}_p$-espaços.

Abstract

The objective of this work is to detail and to analyze consequences of a recent paper of P. Pergher, which deals with the construction of an index-homomorphism associated to spaces equipped with free actions of the cyclic group $\mathbb{Z}_p$. This index-homomorphism maps the equivariant homology $\mathbb{Z}_p$-module of a $\mathbb{Z}_p$-space into $\mathbb{Z}_p$, and it makes possible the obtention of some results of Borsuk-Ulam type, concerning the existence of equivariant maps connecting two given $\mathbb{Z}_p$-spaces.

Introdução

Na literatura matemática, o termo “índice” aparece em uma diversidade de contextos, com vários significados. Entre os contextos, o “índice” configura-se como sendo algo associado a pares (X, ϕ), onde X é um espaço topológico e ϕ é uma ação de um dado grupo G em X. Especificamente nesse caso, o “índice” de uma ação (X, ϕ) seria algum elemento obtido através de algum funtor algébrico associado a (X, ϕ), de tal sorte a ser, em algum sentido, invariante sob o efeito de aplicações G-equivariantes. Nessa direção, um dos mais antigos trabalhos a tratar de tal conceito é “On the theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani - Yamabe - Yujobô and Dyson, I.”- Annals of Math. - 1954, de C.T.Yang. Com o intuito de estudar certos teoremas tipo Borsuk-Ulam, Yang introduziu nesse trabalho uma ferramenta dada por um certo homomorfismo $\nu_{(X,T)} : H_n(X,T) \to \mathbb{Z}_2$, onde X é um espaço topológico equipado com involução livre $T : X \to X$, e $H_n(X,T)$ é a enésima homologia equivariante do par (X,T); o homomorfismo em questão é “invariante sob o efeito de aplicações equivariantes”, onde o significado disso, neste caso, é o fato de que, se (X,T) e (Y,S) são dois espaços com involuções livres e $f : (X,T) \to (Y,S)$ é uma aplicação equivariante, então $\nu_{(Y,S)}(f_*(\xi)) = \nu_{(X,T)}(\xi)$, para todo $\xi \in H_n(X,T)$, aqui f_* sendo a induzida por f na homologia equivariante. O “índice” do par (X,T) é definido, então, como sendo o maior natural n tal que

$\nu_{(X,T)}(H_n(X,T)) \neq 0$.

Recentemente, e inspirado no trabalho acima de C. T. Yang, P. Pergher estendeu a construção do homomorfismo $\nu_{(X,T)}$ acima mencionado para pares (X,T), onde X é um espaço topológico e $T : X \to X$ é um homeomorfismo de grau p (ou seja, $T^p = Id_X$) gerando uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em X. Especificamente, P. Pergher construiu um homomorfismo $J_{n_{(X,T)}} : H_n(X,T) \to \mathbb{Z}_p$, onde $H_n(X,T)$ é a enésima homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante do par (X,T), de tal maneira que, como no caso p=2, se $f : (X,T) \to (Y,S)$ é uma aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante, então $J_{n_{(Y,S)}}(f_*(\xi)) = J_{n_{(X,T)}}(\xi)$, para todo $\xi \in H_n(X,T)$; adicionalmente, J_n coincide com o homomorfismo de Yang quando p=2. No entanto, embora totalmente inspirada no caso p=2, a extensão da construção de $\nu_{(X,T)}$ para $p > 2$ não é tão automática a partir da correspondente construção para p=2.

A construção do referido $\mathbb{Z}_p$-índice possibilitou algumas aplicações. Uma delas refere-se a mostrar que, sob certas circunstâncias, a $\mathbb{Z}_p$-homologia singular do espaço de órbitas $\frac{X}{T}$ é não nula. Especificamente, é conhecido o fato de que a $\mathbb{Z}_2$-homologia singular dos espaços projetivos reais RP(n) é não nula até a dimensão n. Com o $\mathbb{Z}_p$-índice acima, é possível mostrar que, se p=2q, com q ímpar, e se X tem $\mathbb{Z}_p$-homologia singular nula até a dimensão n-1, então $\frac{X}{T}$ tem $\mathbb{Z}_p$-homologia singular não nula até a dimensão n. Outra aplicação tem a ver com uma generalização do tradicional teorema de Borsuk-Ulam. Uma das formulações deste é a seguinte: se $f : S^m \to S^n$ é uma aplicação contínua e equivariante com respeito às antipodais, então $m \leq n$. Por outro lado, quando m é ímpar, é conhecido o fato de que a esfera m-dimensional S^m pode ser equipada com um homeomorfismo standard de grau p, $T : S^m \to S^m$, o qual gera uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em S^m. Neste contexto, surgem naturalmente as seguintes questões: é possível estender o teorema de Borsuk-Ulam para $p > 2$?

Até que ponto a geometria das esferas equipadas com as aplicações acima é ou não fundamental para o resultado? (no sentido de substituir-se esferas por espaços topológicos mais gerais equipados com ações livres de $\mathbb{Z}_p$).

Na linha acima, o $\mathbb{Z}_p$-índice possibilitou a obtenção de um teorema tipo Borsuk-Ulam, concernente à existência de aplicações equivariantes entre espaços topológicos X e Y, equipados com ações livres de $\mathbb{Z}_p$, com p=2q, q ímpar, e sob certas hipóteses topológicas e homológicas sobre X e Y, as quais situam o resultado como uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam.

O material acima deu origem ao pré-print "A $\mathbb{Z}_p$-index homomorphism for $\mathbb{Z}_p$-spaces", e o objetivo desta dissertação é explicar todos os detalhes subjacentes aos argumentos utilizados. A escolha do tema repousou em dois fatos: i) por um lado, constitui-se em mais uma ilustração de como alguns resultados interessantes de topologia (no caso, teoremas tipo Borsuk-Ulam) podem ser obtidos via topologia algébrica; ii) por outro lado, as ferramentas de topologia algébrica necessárias são, nesse caso, mínimas, a saber, os conceitos básicos da homologia singular. Baseados nesses dois fatos, consideramos útil tornar acessíveis os detalhes do pré-print em questão.

A redação desta dissertação está organizada em 3 capítulos. No Capítulo 1, juntamos o que julgamos ser todos os pré-requisitos necessários para a compreensão do texto, essencialmente os conceitos básicos de homologia, alguns rudimentos de ações e teorema do levantamento (lifting theorem).

No Capítulo 2, detalhamos a construção do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice atrás mencionado e a prova da invariância do mesmo sob o efeito de induzidas de aplicações equivariantes.

O Capítulo 3 é dedicado às aplicações do $\mathbb{Z}_p$-índice como acima mencionado. Um dado técnico fundamental para a obtenção de tais aplicações é o resultado segundo o qual, quando X é um espaço topológico satisfazendo determinadas propriedades topológicas e equipado com ação livre de $\mathbb{Z}_p$ gerada por $T : X \to X$, então a homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante $H_*(X,T)$ é isomorfa (no contexto de $\mathbb{Z}_p$-módulos) à homologia singular com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ do espaço de órbitas $H_*(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$. Esse resultado é também provado em detalhes no Capítulo 3.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos definições, notações e alguns resultados necessários ao desenvolvimento deste trabalho, referentes aos conceitos de ações de grupos em conjuntos, homologia com coeficientes em um anel comutativo e com unidade. Para finalizar, apresentaremos o Teorema Fundamental do Levantamento.

1.2 Ações de Grupos em Conjuntos

O objetivo desta seção é definir a ação de um grupo G sobre um conjunto X e apresentar algumas propriedades importantes a esse respeito.

Definição 1.2.1 *Sejam $(G, *)$ um grupo com elemento neutro $e \in G$ e X um conjunto qualquer. Uma ação de G em X é uma função $\phi : G \times X \to X$, que a cada par $(g, x) \in G \times X$ associa o elemento $\phi(g, x) \in X$ satisfazendo, para qualquer $x \in X$ e $g, h \in G$:*

i) $\phi(e, x) = x$;

ii) $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(g * h, x)$.

Denotaremos $\phi(g, x)$ simplesmente por $g \cdot x$. Deste modo, podemos reescrever i) e ii) da seguinte forma:

i) $e \cdot x = x$, para todo $x \in X$;

ii) $g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x$, para todo $g, h \in G$, para todo $x \in X$.

Exemplo 1.2.1 *Seja S^n a esfera n-dimensional e consideremos a aplicação $A : S^n \to S^n$ definida por $A(x) = -x$, para todo $x \in S^n$. Seja $\phi : \mathbb{Z}_2 \times S^n \to S^n$ definida por $\phi(\overline{0}, x) = x$, $\phi(\overline{1}, x) = A(x)$, para todo $x \in S^n$. Temos que ϕ define uma ação de $\mathbb{Z}_2$ em S^n.*

Observação 1.2.1 *A aplicação $A : S^n \to S^n$ definida por $A(x) = -x$ é chamada de aplicação antípoda ou antipodal.*

Observação 1.2.2 *Podemos colocar o exemplo 1.2.1 em um contexto mais geral. Dado X um conjunto qualquer, consideremos uma aplicação $T : X \to X$ satisfazendo $T^p = Id_X$, onde p é um número natural qualquer. Temos então que T dá origem a uma ação de $\mathbb{Z}_p$ em X. De fato, consideremos a função $\phi : \mathbb{Z}_p \times X \to X$ definida por $\phi(\bar{i}, x) = T^i(x)$, $0 \leq i \leq p-1$, e convencionaremos $T^0 = Id$. Temos que ϕ satisfaz:*

i) $\phi(\overline{0}, x) = T^0(x) = Id(x) = x$, *para todo* $x \in X$;

ii) $\phi(\bar{i}, \phi(\bar{j}, x)) = \phi(\bar{i}, T^j(x)) = T^i(T^j(x)) = T^{i+j}(x) = \phi(\overline{i+j}, x) = \phi(\bar{i} + \bar{j}, x)$,

e, portanto, ϕ define uma ação de $\mathbb{Z}_p$ em X.

Exemplo 1.2.2 *Consideremos $X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} = \{x + iy = z, z \in \mathbb{C}\}$. Seja $w \in S^1$ o elemento correspondente ao ângulo $\frac{2\pi}{p}$, ou seja, $w = \cos \frac{2\pi}{p} + isen \frac{2\pi}{p}$. Podemos observar que w dá origem a uma função $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (ou $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) dada por $T(z) = wz$. Observe que*

$T^p(z) = (T \circ T \circ ... \circ T)(z) = w^p \cdot z = 1z = Id(z)$. *Como* $\|wz\| = \|w\|\|z\|$, *temos que* $T(S^1) \subset S^1$ *e* $T : S^1 \to S^1$ *é a rotação de* $\frac{2\pi}{p}$ *no sentido anti-horário. Segue então do exemplo anterior que* T *dá origem a uma ação de* $\mathbb{Z}_p$ *em* S^1.

Este exemplo se generaliza para $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, pondo-se

$$T(x_1, x_2, ..., x_{2n-1}, x_{2n}) = T(z_1, z_2, ..., z_n) = (wz_1, wz_2, ..., wz_n)$$

e é fácil ver que $T^p = Id$. Agora, se $z = (x_1, x_2, ..., x_{2n}) = (z_1, z_2, ..., z_n) \in S^{2n-1}$, então

$$\|T(x_1, x_2, ..., x_{2n})\| = \|(wz_1, wz_2, ..., wz_n)\| = \sqrt{\|wz_1\|^2 + ... + \|wz_n\|^2} =$$

$$\sqrt{\|w\|^2\|z_1\|^2 + ... + \|w\|^2\|z_n\|^2} = \sqrt{\|z_1\|^2 + ... + \|z_n\|^2} = 1$$

e, deste modo, temos a função $T : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ ainda com a propriedade de que $T^p = Id$.

Observação 1.2.3 *Se um grupo* $(G, *, e)$ *atua em um espaço topológico* X *e se* H *for um subgrupo de* G*, temos que a restrição de* $\cdot : G \times X \to X$ *a* $\cdot : H \times X \to X$ *define automaticamente uma ação de* H *em* X.

Observação 1.2.4 *Se* X *é um conjunto qualquer , seja* $Bi(X) = \{\rho : X \to X : \rho \text{ é bijeção}\}$. *Temos que* $(Bi(X), \circ)$ *é um grupo, sendo a operação* $\circ$ *a composição de funções. Existe uma ação natural de Bi(X) em X, a saber,* $Bi(X) \times X \to X$ *dada por* $(\rho, x) \longmapsto \rho(x)$. *De fato, o elemento neutro de Bi(X) é* Id_X, *e* $(Id_X, x) \longmapsto Id_X(x) = x$, *para todo* $x \in X$. *Também* $(\rho_1, (\rho_2, x)) \longmapsto \rho_1(\rho_2(x)) = (\rho_1 \circ \rho_2)(x) = (\rho_1 \circ \rho_2, x)$, *para quaisquer* $\rho_1, \rho_2 \in Bi(X)$ *e qualquer* $x \in X$. *Agora, se* $\rho \in Bi(X)$, *duas situações podem ocorrer:* ρ *tem ordem finita em Bi(X), ou seja,* $\rho^p = Id_X$ *para algum* $p > 0$ *e, nesse caso, o subgrupo* $[\rho]$

gerado por ρ *é isomorfo a* $\mathbb{Z}_p$; ρ *tem ordem infinita em Bi(X) e, nesse caso, o subgrupo* $[\rho]$ *gerado por* ρ *é isomorfo a* $\mathbb{Z}$. *Deste modo, de acordo com a observação 1.2.3, cada* $\phi \in Bi(X)$ *determina, por restrição, ou uma ação de* $\mathbb{Z}_p$ *ou uma ação de* $\mathbb{Z}$ *em X.*

Definição 1.2.2 *Uma ação* $\phi : G \times X \to X$ *é livre se para todo* $g \in G$, $g \neq e$, *e* $x \in X$, *ocorrer* $g \cdot x \neq x$.

Definição 1.2.3 *Seja* $\cdot : G \times X \to X$ *uma ação. Se* $x \in X$, *a órbita de* x *é o subconjunto* $orb(x) \subset X$, $orb(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$. *Indicaremos o conjunto orb(x) simplesmente por [x].*

Observação 1.2.5 *As órbitas dos pontos* $x \in X$ *determinam uma partição em X. Com efeito, definamos* $x \sim y$ *se, e somente se, existe* $g \in G$ *tal que* $y = g \cdot x$. *Esta relação é reflexiva, pois pela própria definição de ação temos, para todo* $x \in X$, *que* $x = e \cdot x$. *Supondo agora* $x \sim y$, *existe então* $g \in G$ *tal que* $y = g \cdot x$; *logo,* $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} * g) \cdot x = e \cdot x = x$, *ou seja,* $y \sim x$ *e, portanto,* $\sim$ *é uma relação simétrica. Finalmente,* $\sim$ *é uma relação transitiva pois supondo* $x \sim y$ *e* $y \sim z$, *existem então* $g_1, g_2 \in G$ *tais que* $y = g_1 \cdot x$ *e* $z = g_2 \cdot y$, *respectivamente; então* $z = g_2 \cdot y = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 * g_1) \cdot x$ *e, desta forma,* $x \sim z$. *Concluímos, então, que* $\sim$ *é uma relação de equivalência em X, sendo que as classes de equivalência segundo essa relação são as órbitas dos pontos de X*

Resulta da observação acima que duas órbitas ou são disjuntas ou são iguais.

Observação 1.2.6 *Consideremos X um espaço topológico e* $H(X) \subset Bi(X)$, *onde* $H(X) = \{f \in Bi(X) : f$ *é homeomorfismo*$\}$. *Temos que H(X) é um* *subgrupo de Bi(X). Observemos que H(X) é um subespaço do espaço topológico $C(X,X) = \{f : X \to X;\ f$ é contínua$\}$, com a topologia compacto-aberta. De acordo com a observação 1.2.3, temos, por restrição, uma ação de H(X) em X. Se X for um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff e se considerarmos em H(X) a topologia induzida como subespaço de C(X,X), com a topologia compacto -aberta, pode-se provar que tal ação é contínua.*

Observação 1.2.7 *Se $\cdot : G \times X \to X$ é uma ação e $x \in X$, defina o subconjunto $St(x) \subset G$ como sendo $St(x) = \{g \in G;\quad g \cdot x = x\}$, o qual será denominado o "estabilizador de x em G". É fácil provar que St(x) é um subgrupo de G. Considerando $\frac{G}{St(x)}$ a coleção de classes laterais de St(x), defina $\varphi : \frac{G}{St(x)} \to [x]$ por $\varphi[gSt(x)] = g \cdot x$. Pode-se provar que φ é bem definida e, na verdade, é uma bijeção. Segue que, se G é finito, então a cardinalidade de $[x]$ divide a ordem de G.*

Observação 1.2.8 *Vimos que se X é um conjunto e $T : X \to X$ é uma aplicação de grau p então T dá origem a uma ação de $\mathbb{Z}_p$ em X, a saber, $\phi : \mathbb{Z}_p \times X \to X$ dada por $\phi(\bar{i}, x) = T^i(x), \quad 0 \leq i \leq p-1$. Para a ação acima, $[x] = \{x, T(x), T^2(x), ..., T^{p-1}(x)\}$. Se a ação é livre, então cada órbita tem p pontos, o que equivale a dizer que $T^i(x) \neq T^j(x)$, para todo $i \neq j$ e $0 \leq i, j \leq p-1$.*

Exemplo 1.2.3 *Seja X um conjunto (com pelo menos dois elementos $a, b \in X, \quad a \neq b$) e seja $T : X^4 \to X^4$ definida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, x_3)$. Observe que $T^4 = Id_X$ e, deste modo, esta aplicação define uma ação de $\mathbb{Z}_4$ em X^4. Observemos ainda que, pelas últimas duas observações, cada órbita possui ou 1, ou 2 ou 4 pontos. De fato, se considerarmos pontos da forma (a,a,a,a), (a,b,a,b) e (a,b,b,b), teremos, respectivamente, órbitas com 1, 2 e 4 pontos. Sendo assim, podemos concluir que esta ação não é livre.*

Exemplo 1.2.4 *(Ação standard de $\mathbb{Z}_q$) Seja S^{2n+1} a esfera de dimensão 2n+1 no espaço vetorial complexo de dimensão complexa n+1, $\mathbb{C}^{n+1}$; para algum inteiro $q > 1$, seja $T : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ a transformação definida por:*

$$T(z_0, z_1, z_2, ..., z_n) = (e^{\frac{2\pi i}{q}} z_0, e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1, ..., e^{\frac{2\pi i}{q}} z_n)$$

onde $z_0, z_1, ..., z_n$ são números complexos com $\sum_{i=0}^{n} |z_i|^2 = 1$.

Temos que T é uma função de grau q; de fato,

$$\begin{aligned} T^q(z_0, z_1, ..., z_n) &= T \circ T \circ ... \circ T(z_0, z_1, ..., z_n) \\ &= T \circ T \circ ... \circ T(e^{\frac{2\pi i}{q}} z_0, e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1, ..., e^{\frac{2\pi i}{q}} z_n) \\ &= ... \\ &= (e^{\frac{2\pi i}{q}})^q (z_0, z_1, ..., z_n) \\ &= (z_0, z_1, ..., z_n). \end{aligned}$$

Portanto, T define uma ação de $\mathbb{Z}_q$ em S^{2n+1}. Nosso próximo objetivo é mostrar que tal ação é livre. De fato, seja $0 \leq r \leq q-1$ e $x = (z_0, z_1, ..., z_n) \in S^{2n+1}$ tal que $\overline{r}.x = T^r(x) = x$. Então,

$$e^{\frac{2\pi i r}{q}}(z_0, z_1, ..., z_n) = (z_0, z_1, ..., z_n).$$

Como $\sum_{i=0}^{n} |z_i|^2 = 1$, temos que existe $z_j \in \mathbb{C}$ tal que $z_j \neq 0$. Assim, sendo $e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_j = z_j$, segue-se então que $e^{\frac{2\pi i r}{q}} = 1$ e, portanto, r=nq, com $n \in \mathbb{Z}$. Como $0 \leq r \leq q-1$, a única possibilidade é n=0 e, consequentemente, r=0, donde concluímos que a ação em questão é livre.

Observação 1.2.9 *A ação acima será sempre referida como a "ação standard" de $\mathbb{Z}_q$ em S^{2n+1}. Enfatizamos que, caso $q > 2$, é conhecido o fato de que não existe livre de $\mathbb{Z}_q$ em S^n quando n é par.*

Definição 1.2.4 *Se G atua em X, dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é G-invariante se $g \cdot a \in A$, para todo $g \in G$ e $a \in A$.*

Definição 1.2.5 *Sejam G um grupo e X, Y conjuntos equipados com as ações $\cdot : G \times X \to X$ e $\diamond : G \times Y \to Y$, respectivamente. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é equivariante com respeito a tais ações se $f(g \cdot x) = g \diamond f(x)$, para todo $x \in X$ e $g \in G$.*

Observação 1.2.10 *Fixados espaços topológicos X e Y, ambos dotados de uma ação de um grupo G, temos o problema da existência de aplicações equivariantes $f : X \to Y$. O Teorema de Borsuk-Ulam é apenas um exemplo desse tipo de problema, sendo,nesse caso, os dados particularizados por $X = S^m$, $Y = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2$, e a ação $\mathbb{Z}_2$ sendo a antipodal.*

1.3 Álgebra Homológica

Sejam R um anel comutativo com unidade, X um conjunto qualquer e F(X) a coleção de "combinações lineares formais de elementos de X com coeficientes em R". Um elemento típico de F(X) será da forma $\sum_{x \in X} \alpha_x x$, onde $\alpha_x \in R$ é de tal forma que apenas um número finito de $\alpha_x's$ é diferente de zero. Esse elemento pode ser considerado rigorosamente como uma função $X \to R$, que é nula, com exceção de um número finito de x's. Observe que podemos introduzir em F(X) uma estrutura de R-módulo, com as seguintes operações:

$$\sum_{x \in X} \alpha_x x + \sum_{x \in X} \beta_x x = \left(\sum_{x \in X} \alpha_x + \beta_x \right) x;$$

$$r \sum_{x \in X} \alpha_x x = \sum_{x \in X} (r \alpha_x) x.$$

O elemento neutro de (F(X),+,$\cdot$) é dado por $\sum_{x \in X} 0.x$ e será denotado simplesmente por 0. Dado $y = \sum_{x \in X} \alpha_x x \in F(X)$, o elemento oposto de y é $\sum_{x \in X} (-1.\alpha_x) x$, onde 1 representa o elemento unidade de R. F(X) é denominado "R-módulo livre gerado por X".

Identificando $x \in X$ com 1.x, X pode ser então considerado como um subconjunto de F(X). Nesse caso, X será um conjunto de geradores do módulo F(X), lembrando que um subconjunto $S \subset M$ (M é um módulo) é um conjunto de geradores de M se qualquer elemento de M pode ser obtido como combinação linear de elementos de S. No nosso caso, esse conjunto de geradores satisfaz adicionalmente que se $\sum_{x \in X} \alpha_x x = 0$, então devemos ter necessariamente que $\alpha_x = 0$, para todo $x \in X$. Por isso, X é chamado uma base de F(X).

Definição 1.3.1 *Um complexo de cadeias de R-módulos é uma família* $C = \{C_n, \partial_n\}$, *onde cada* C_n *é um R-módulo e* $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ *é um R-homomorfismo e tal que* $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, *em cada nível n.*

$$\cdots \longrightarrow \quad C_{n+1} \quad \xrightarrow{\partial_{n+1}} \quad C_n \quad \xrightarrow{\partial_n} \quad C_{n-1} \quad \longrightarrow \cdots$$

Definição 1.3.2 *Dado um complexo de cadeias* $C = \{C_n, \partial_n\}$, *definimos, para cada n, os conjuntos* $Z_n(C) = \{x \in C_n : \partial_n(x) = 0\}$, *denominado submódulo dos n-ciclos, e* $B_n(C) = \{x \in C_n : x = \partial_{n+1}(y), \text{ para algum } y \in C_{n+1}\}$, *denominado submódulo dos n-bordos.*

Observemos que a condição $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ implica que $B_n(C) \subset Z_n(C)$, para cada n. Desta forma, $B_n(C)$ é um submódulo do R-módulo $Z_n(C)$ e, assim, existe o R-módulo quociente $\frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$, que será denotado por $H_n(C)$.

Definição 1.3.3 *Seja* $C = \{C_n, \partial_n\}$ *um complexo de cadeias. A homologia associada ao complexo de cadeias C é a coleção de R-módulos quocientes* $H_*(C) = \{H_n(C)\} = \left\{\frac{Z_n(C)}{B_n(C)}\right\}$.

Definição 1.3.4 *Sejam* $C = \{C_n, \partial_n\}$ *e* $D = \{D_n, \partial'_n\}$ *complexos de cadeias de R-módulos. Uma aplicação de cadeias* $f : C \to D$ *é uma coleção de homo-*

morfismos de R-módulos $\{f_n\}$, $f_n : C_n \to D_n$, *tal que no diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \stackrel{\partial_{n+1}}{\longrightarrow} & C_n & \stackrel{\partial_n}{\longrightarrow} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \stackrel{\partial'_{n+1}}{\longrightarrow} & D_n & \stackrel{\partial'_n}{\longrightarrow} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

cada quadrado é comutativo, ou seja, para todo $n \in \mathbb{Z}$, *vale* $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$.

A definição de aplicação de cadeias implica que, para todo n, $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$ e $f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$. Deste modo, para cada n, f_n pode ser passada ao quociente, determinando um homomorfismo de R-módulos $\frac{Z_n(C)}{B_n(C)} \to \frac{Z_n(D)}{B_n(D)}$ bem definido, o qual denotaremos por f_*. Em outras palavras, f induz um homomorfismo de R-módulos $f_* : H_n(C) \to H_n(D)$, para todo n.

Observação 1.3.1 *Se* $C = \{C_n, \partial\}$ *e* $D = \{D_n, \delta\}$ *são complexos de cadeias de R-módulos e R-homomorfismos, com R anel comutativo com unidade, e* $f_1, f_2, ..., f_r : C \to D$ *são aplicações de cadeias, temos então que a aplicação* $k_1f_1 + k_2f_2 + ... + k_rf_r : C_n \to D_n$, *onde* $k_1, k_2, ..., k_r \in R$, *definida por* $(k_1f_1 + k_2f_2 + ... + k_rf_r)(c) = k_1f_1(c) + k_2f_2(c) + ... + k_rf_r(c)$, *é ainda uma aplicação de cadeias.*

1.4 Homologia singular com coeficientes em R

Fixado X um espaço topológico qualquer e anel R comutativo e com unidade, vamos definir, para cada natural $n \geq 0$, o enésimo "R-módulo de homologia de X" ou "enésima homologia de X com coeficientes em R", e denotado por $H_n(X, R)$. Isto será a homologia algébrica de um determinado complexo de cadeias, construído a partir de X e R, chamado $S_*(X, R) = \{S_n(X, R)\}$.

Definição 1.4.1 *Seja X um espaço topológico arbitrário. Um n-simplexo singular em X é uma função contínua* $\phi : \triangle_n \to X$, *onde* $\triangle_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é o n-*

simplexo padrão, ou seja, $\triangle_n = \{t_0e_0 + t_1e_1 + ... + t_ne_n, \ \ 0 \leq t_i \leq 1, \ \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \ \ \textit{sendo } \{e_0, e_1, ..., e_n\} \textit{ a base canônica de } \mathbb{R}^{n+1}\}$*, munido da topologia induzida de* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

Denotaremos o conjunto de todos os n-simplexos singulares de X por $C_n(X)$. Observemos que 0-simplexos singulares e 1-simplexos singulares nada mais são que pontos de X e caminhos de X, respectivamente.

Definição 1.4.2 *Seja* $\phi : \triangle_n \rightarrow X$ *um n-simplexo singular. Para cada i=0,1,2,...,n, definimos a i-ésima face de* ϕ *como sendo o* $n-1$*-simplexo singular em X* $\partial_i \circ \phi : \triangle_{n-1} \rightarrow X$*, onde* $\partial_i\phi(t_0, t_1, ..., t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, ..., t_{n-1}) = \phi(t_0, t_1, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1})$*.*

Observemos que $\partial_i \circ \phi$ é contínua, pois é a composta da aplicação ϕ com uma inclusão. Especificamente, $\partial_i \circ \phi$ é obtida incluindo-se $\triangle_{n-1}$ na face oposta ao i-ésimo vértice de $\triangle_n$ e, a seguir, aplicando-se ϕ.

Definição 1.4.3 *Seja X um espaço topológico. Definimos* $S_n(X, R)$ *como sendo o R-módulo livre gerado por* $C_n(X)$*. Um elemento de* $S_n(X, R)$ *é chamado uma n-cadeia singular de X e tem a forma* $\displaystyle\sum_{\phi \in C_n(X)} \alpha_\phi \phi$*, com* $a_\phi \in R$*, sendo que apenas um número finito de* α_ϕ *é não nulo.*

Identificando $\phi \in C_n(X)$ com $1.\phi \in S_n(X, R)$ como antes, teremos então que $C_n(X) \subset S_n(X, R)$. Logo, $C_0(X)$ pode ser identificado com os pontos de X e, desta forma, $S_0(X, R)$ é o R-módulo livre gerado por X, e $S_1(X, R)$ é o R-módulo livre gerado pelos caminhos de X.

O operador i-ésima face, que a cada n-simplexo $\phi \in C_n(X)$ associa o $(n-1)$-simplexo $\partial_i \circ \phi \in C_{n-1}$, define uma função $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$. Essa função pode ser estendida, por linearidade, a um único homomorfismo entre os R-módulos $S_n(X,R)$ e $S_{n-1}(X,R)$, o qual ainda denotaremos por $\partial : S_n(X,R) \to S_{n-1}(X,R)$.

Sabendo-se que se M e N são R-módulos, $f_1, f_2, ..., f_t : M \to N$ são homomorfismos de R-módulos e $r_1, r_2, ..., r_t \in R$, então a aplicação

$r_1f_1{+}r_2f_2{+}...{+}r_tf_t : M \to N$ dada por $(r_1f_1{+}r_2f_2{+}...{+}r_tf_t)(x) = \sum_{i=1}^{t} r_if_i(x)$

ainda é um homomorfismo de R-módulos, podemos, então, considerar a seguinte

Definição 1.4.4 *Para $n > 0$, o homomorfismo $\partial : S_n(X,R) \to S_{n-1}(X,R)$ definido por*

$$\partial = 1\partial_0 + (-1)\partial_1 + 1\partial_2 + (-1)\partial_3 + ... + (-1)^n\partial_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\partial_i,$$

é chamado operador bordo. Convenciona-se que $S_{-1}(X,R) = 0$, o que resulta na convenção de que o operador bordo $\partial : S_0(X,R) \to S_{-1}(X,R)$ é o homomorfismo nulo.

Teorema 1.4.1 *Consideremos a seguinte sequência de R-módulos e homomorfismo entre R-módulos*

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X,R) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X,R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X,R) \longrightarrow \cdots$$

Então $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, para todo n.

Pelo Teorema 1.4.1, podemos concluir que $\{S_n(X,R), \partial_n\}$ é um complexo de cadeias.

Definição 1.4.5 *Denotaremos por $Z_n(X,R)$ o submódulo de $S_n(X,R)$ formado pelos n-ciclos, ou seja, $Z_n(X,R)$ é o núcleo do operador bordo.*

Definição 1.4.6 *Denotaremos por $B_n(X,R)$ o submódulo de $S_n(X,R)$ formado pelos n-bordos, ou seja, $B_n(X,R)$ é a imagem do operador bordo.*

Definição 1.4.7 *O n-ésimo módulo de homologia singular de X com coeficientes em R, $H_n(X,R)$ é, por definição, a n-ésima homologia do complexo de cadeias $\{S_n(X,R),\partial_n\}$; em outras palavras, $H_n(X,R) = \frac{Z_n(X,R)}{B_n(X,R)}$.*

1.5 O homomorfismo induzido por funções contínuas

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Tomando um n-simplexo singular $\phi \in C_n(X) \subset S_n(X)$, a composição $f \circ \phi : \triangle_n \to Y$ é um n-simplexo singular em Y. Desta forma, obtemos uma aplicação $\phi \longmapsto f \circ \phi$ entre $C_n(X) \subset S_n(X,R)$ e $C_n(Y) \subset S_n(Y,R)$, que se estende por linearidade a um único homomorfismo de R-módulos $f_\sharp : S_n(X,R) \to S_n(Y,R)$ definido por

$$f_\sharp\Bigg(\sum_{\phi\in C_n(X)} \alpha_\phi \phi\Bigg) = \sum_{\phi\in C_n(X)} \alpha_\phi f_\sharp(\phi) = \sum_{\phi\in C_n(X)} \alpha_\phi (f\circ\phi).$$

Teorema 1.5.1 *O homomorfismo $f_\sharp : S_n(X,R) \to S_n(Y,R)$ é uma aplicação de cadeias entre os complexos de cadeias $S_*(X,R)$ e $S_*(Y,R)$ e, portanto, satisfaz para todo $n \geq 0$, $\quad f_\sharp \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_\sharp$.*

Como vimos anteriormente, uma consequência do teorema acima é que $f_\sharp(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$ e $f_\sharp(B_n(X)) \subset B_n(Y)$, e que deste modo, $f_\sharp$ pode ser passada ao quociente, determinando um homomorfismo de R-módulos $f_* : H_n(X,R) \to H_n(Y,R)$, o qual é definido por

$$f_*(\alpha_n + B_n(X,R)) = f_\sharp(\alpha_n) + B_n(Y,R).$$

Tal homomorfismo de R-módulos será denominado o homomorfismo induzido em homologia por f.

Com relação a f_*, destacaremos as seguintes propriedades:

i) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções contínuas, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

ii) Se $Id_X : X \to X$ é a aplicação identidade, então $(Id_X)_* = Id_{H_n(X,R)}$.

Tais propriedades significam que $H_n(X, R)$ é um funtor covariante da categoria dos espaços topológicos e funções contínuas na categoria dos R-módulos e R-homomorfismos. Uma consequência disso é o seguinte

Teorema 1.5.2 *Se $f : X \to Y$ é homeomorfismo então a induzida em homologia $f_* : H_n(X, R) \to H_n(Y, R)$ é um isomorfismo de R-módulos.*

1.6 O Teorema Fundamental do Levantamento

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de Grupo Fundamental de um espaço topológico X e de aplicações de recobrimento, e enunciaremos o Teorema Fundamental do Levantamento, o qual será utilizado na prova do Teorema 3.2.3, Capítulo 3.

Seja $p : E \to X$ uma aplicação contínua. O par (E,p) é chamado um espaço de recobrimento de X se, para todo $x \in X$, existe um aberto U contendo x tal que $p^{-1}(U)$ é uma reunião de abertos V_α de E, dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre U. Um tal aberto U é chamado uma vizinhança recoberta, os abertos V_α são chamados folhas sobre U e para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ é chamado fibra sobre x; X é chamado espaço base e p aplicação de recobrimento. Se a cardinalidade da fibra for finita, digamos igual a n, dizemos, então, que p é um recobrimento a n-folhas.

Um exemplo importante de aplicação de recobrimento é a aplicação

$e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por e(t)=$e^{2\pi it}$.

Definição 1.6.1 *Dada uma aplicação de recobrimento $p : E \rightarrow X$, seja $g : Z \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Um levantamento de g é uma aplicação contínua $h : Z \rightarrow E$ tal que $p \circ h = g$.*

Podemos observar que nem toda aplicação contínua possui um levantamento. Como exemplo dessa situação, seja $I = [0, 4\pi)$ e consideremos a aplicação de recobrimento $p : I \rightarrow S^1$ dada por $p(t) = e^{\frac{it}{2}}, \quad com \quad t \in I$, e a aplicação identidade $Id : S^1 \rightarrow S^1$. Afirmamos que não existe aplicação contínua $\psi : S^1 \rightarrow I$ satisfazendo $p \circ \psi = Id$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que exista tal aplicação ψ satisfazendo $p \circ \psi = Id$. Tomando as respectivas induzidas em homologia no nível 1 com coeficientes no anel $\mathbb{Z}_2$, obtemos $(p \circ \psi)_* = Id_*$, ou seja, $p_* \circ \psi_* = Id_*$, onde $p_* : H_1(I, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Z}_2)$, $\psi_* : H_1(S^1, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(I, \mathbb{Z}_2)$ e $Id_* : H_1(S^1, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Z}_2)$. Sendo I um espaço contrátil, segue então que $H_1(I, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}$ e, desta forma, ψ_* é a aplicação nula. Tomando o elemento $\overline{1} \in \mathbb{Z}_2 \cong H_1(S^1, \mathbb{Z}_2)$, temos então que $(p_* \circ \psi_*)(\overline{1}) = p_*(\psi_*(\overline{1})) = p_*(\overline{0}) = \overline{0}$, enquanto que $Id(\overline{1}) = \overline{1}$. Logo, $(p \circ \psi)_* \neq Id_*$, obtendo assim uma contradição.

Introduziremos agora o conceito de Grupo Fundamental de um espaço topológico X. A todo espaço topológico X e a todo ponto $x_0 \in X$ está associado um grupo, chamado o Grupo Fundamental de X. Para a definição desse grupo, serão usados caminhos fechados em X, de acordo com a seguinte

Definição 1.6.2 *Dados dois pontos x e y em X, um caminho ligando x a y é uma função contínua $\sigma : I = [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x$ e $\sigma(1) = y$.*

Observação 1.6.1 *Quando $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, dizemos que σ é um laço com ponto base x_0, ou ainda, que σ é um caminho fechado em X.*

Consideremos o conjunto $\Omega(X, x_0)$ de todos laços em X com ponto base x_0 e definamos em $\Omega(X, x_0)$ a seguinte relação de equivalência: $\sigma_1 \sim_{x_o} \sigma_2$ (σ_1 é homotópico a σ_2), se σ_1 pode ser deformado continuamente em σ_2, de modo que em cada estágio a deformação seja um laço com ponto base x_0. Em outras palavras, se existir uma aplicação contínua $F : I \times I \to X$ tal que para todo $t, s \in I$, $F(t, 0) = \sigma_1(t), F(t, 1) = \sigma_2(t)$ e, além disso, $F(0, s) = F(1, s) = x_0$. A aplicação F chama-se uma homotopia entre σ_1 e σ_2 relativa a $\{x_o\}$. Dessa forma, obtemos o conjunto quociente $\frac{\Omega(X,x_0)}{\sim_{x_o}}$, cujos elementos são as classes de homotopia $[\sigma]$ de caminhos fechados com ponto base x_0. Define-se o produto de duas classes como sendo: $[\sigma_1][\sigma_2] = [\sigma_1 * \sigma_2]$, onde $*$ denota o caminho justaposto, ou seja,

$$(\sigma_1 * \sigma_2)(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_2(2t-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que $\sigma_1 * \sigma_2$ ainda é um laço com ponto base x_0. Se σ for um laço com ponto base x_0, o laço inverso $\sigma^{-1} : I \to X$ é, por definição, o laço dado por $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$, para todo $0 \leq t \leq 1$. A classe do caminho inverso $[\sigma^{-1}]$ será denotada por $[\sigma]^{-1}$. Indicaremos por $\varepsilon_{x_o} : I \to X$ o caminho constante tal que $\varepsilon_{x_o}(t) = x_0$, para todo $t \in I$.

Pode-se provar que se $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ forem laços em X com ponto base x_0, então:

a) $\sigma_1 * \varepsilon_{x_o} \sim_{x_o} \sigma_1 \sim_{x_o} \varepsilon_{x_o} * \sigma_1$;

b) $\sigma_1 * \sigma_1^{-1} \sim_{x_o} \varepsilon_{x_o} \sim_{x_o} \sigma_1^{-1} * \sigma_1$;

c) $\sigma_1 * (\sigma_2 * \sigma_3) \sim_{x_o} (\sigma_1 * \sigma_2) * \sigma_3$;

d) se $\sigma_1 \sim_{x_o} \sigma_2$ e $\sigma_3 \sim_{x_o} \sigma_4$, então $\sigma_1 * \sigma_3 \sim_{x_o} \sigma_2 * \sigma_4$.

As propriedades acima significam que $*$ determina uma estrutura de grupo no conjunto quociente $\frac{\Omega(X,x_0)}{\sim_{x_o}}$, ou seja, temos assim bem determinado um grupo, chamado o Grupo Fundamental de X e denotado por $\pi_1(X, x_0)$, munido da operação $[\sigma_1][\sigma_2] = [\sigma_1 * \sigma_2]$, cujo elemento neutro é a classe do caminho constante ε_{x_o} e o elemento inverso de $[\sigma]$ é a classe $[\sigma^{-1}]$.

Observação 1.6.2 *Sempre que o espaço X for conexo por caminhos, prova-se que para quaisquer pontos básicos $x_0, x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos e, nesse caso, denota-se esse grupo simplesmente por $\pi_1(X)$.*

Dada uma aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ entre dois espaços topológicos, então as seguintes propriedades se verificam:

1) se σ for um laço em X com ponto base x_0, então $\varphi \circ \sigma$ será um laço em Y com ponto base $\varphi(x_0)$;

2) se $\sigma_1 \sim_{x_o} \sigma_2$, então $\varphi \circ \sigma_1 \sim_{\varphi(x_o)} \varphi \circ \sigma_2$.

Com base nessas propriedades, se $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, então $[\varphi \circ \sigma]$ é um elemento bem definido em $\pi_1(Y, \varphi(x_0))$. Dessa forma, φ induz uma aplicação $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ dada por $\varphi_*[\sigma] = [\varphi \circ \sigma]$. Pode-se provar que φ_* é um homomorfismo entre os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, \varphi(x_0))$, chamado homomorfismo induzido por φ. Esse homomorfismo possui duas propriedades chamadas propriedades funtoriais: a de que a composição de aplicações contínuas induz a composição dos respectivos homomorfismos induzidos, e que a aplicação identidade Id_X induz o homomorfismo identidade $Id_{\pi_1(X)}$.

Segue-se dessas considerações que se $h : X \to Y$ for um homeomorfismo, então $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, h(x_0))$ é um isomorfismo, ou seja, espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos. Além disso, se duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ são homotópicas, temos então que estas induzem o mesmo homomorfismo nos grupos fundamentais. Mais ainda, se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então o homomorfismo induzido

$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo. Uma consequência deste fato é que o grupo fundamental de um espaço contrátil é o grupo nulo.

Estamos, assim, em condições de enunciar o Teorema Fundamental do Levantamento, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [3]. Na formulação do mesmo, todos espaços envolvidos serão assumidos conexos e localmente conexo por caminhos.

Teorema 1.6.1 *Seja $p : E \to X$ uma aplicação de recobrimento. Sejam Y um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, $y_0 \in Y$ e $e_0 \in E$ tal que $p(e_0) = x_0$. Dada uma aplicação contínua $f : Y \to X$, com $f(y_0) = x_0$, então existe um levantamento $\overline{f}$ para f, ou seja, uma aplicação contínua $\overline{f} : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ tal que $p \circ \overline{f} = f$, com $\overline{f}(y_0) = e_0$, se, e somente se, $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

Capítulo 2

O $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice

Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, ou seja, um espaço topológico X qualquer equipado com uma aplicação contínua de grau p $T : X \to X$, tal que a correspondente ação de $\mathbb{Z}_p$ em X seja livre. A finalidade principal deste capítulo será a construção de um homomorfismo graduado $J_r : H_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$, $r \geq 0$, o qual denominaremos $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice. Tal índice é uma generalização para p qualquer do $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang introduzido em [12] para p=2. Aqui, $H_r(X,T)$ é a r-ésima homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante do par (X,T). O termo "índice", aqui utilizado (e baseado na literatura), vem do fato de que o homomorfismo em questão é invariante sob o efeito de homomorfismos induzidos por aplicações equivariantes. A construção desse homomorfismo índice configura-se como a principal parte desta dissertação. Conforme será visto no Capítulo 3, a principal utilidade do mesmo será a de detectar classes de homologia equivariante não nulas quando X satisfaz certas propriedades homológicas (e, em consequência, detectar classes não nulas na $\mathbb{Z}_p$-homologia singular do espaço de órbitas $\frac{X}{T}$). Como consequência deste fato, obteremos um teorema tipo Borsuk-Ulam concernente à não existência de aplicações equivariantes conectando certos $\mathbb{Z}_p$-espaços (X,T) e (Y,S).

2.1 A homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante associada ao $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T)

Seja X um espaço topológico e suponhamos $T : X \to X$ uma aplicação contínua de grau p tal que a correspondente ação de $\mathbb{Z}_p$ em X seja livre.

Tomando o complexo de cadeias singulares com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$

$$\cdots \longrightarrow \; S_{n+1}(X,\mathbb{Z}_p) \; \xrightarrow{\partial_{n+1}} \; S_n(X,\mathbb{Z}_p) \; \xrightarrow{\partial_n} \; S_{n-1}(X,\mathbb{Z}_p) \; \longrightarrow \cdots,$$

podemos considerar o $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo induzido ao nível de cadeias $T_\sharp : S_n(X,\mathbb{Z}_p) \to S_n(X,\mathbb{Z}_p)$, o qual é definido nos geradores por $T_\sharp(\phi) = T \circ \phi$. A partir de então, consideraremos um subconjunto especial de $S_n(X,\mathbb{Z}_p)$, de acordo com a seguinte

Definição 2.1.1 *Definimos*

$$S_n(X,T) = \{\alpha \in S_n(X,\mathbb{Z}_p); \;\; T_\sharp(\alpha) = \alpha\} \subset S_n(X,\mathbb{Z}_p).$$

Teorema 2.1.1 *$S_n(X,T)$ é um submódulo do $\mathbb{Z}_p$-módulo $S_n(X,\mathbb{Z}_p)$.*

Demonstração: Temos que $S_n(X,T)$ é não-vazio, pois sendo $T_\sharp$ um homomorfismo, temos que $T_\sharp(0) = 0$, onde 0 representa a cadeia nula em $S_n(X,\mathbb{Z}_p)$. Além disso, dados $\alpha, \beta \in S_n(X,T)$ e $r \in \mathbb{Z}_p$, temos que

$$T_\sharp(\alpha + r\beta) = T_\sharp(\alpha) + T_\sharp(r\beta) = T_\sharp(\alpha) + rT_\sharp(\beta) = \alpha + r\beta$$

e, deste modo, $\alpha + r\beta \in S_n(X,T)$, concluindo a demonstração.

∎

Observação 2.1.1 *O submódulo $S_n(X,T)$ será denominado "submódulo das (T,n)-cadeias".*

Teorema 2.1.2 *O operador bordo $\partial_n : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_{n-1}(X, \mathbb{Z}_p)$ satisfaz $\partial_n(S_n(X,T)) \subset S_{n-1}(X,T)$.*

Demonstração: Sendo $T_\sharp : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ uma aplicação de cadeias, temos que, em cada nível $n \geq 0$, $T_\sharp \circ \partial_n = \partial_n \circ T_\sharp$. Assim, se $\alpha \in S_n(X,T)$, teremos, então, que

$$T_\sharp(\partial_n(\alpha)) = (T_\sharp \circ \partial_n)(\alpha) = (\partial_n \circ T_\sharp)(\alpha) = \partial_n(T_\sharp(\alpha)) = \partial_n(\alpha),$$

ou seja, $\partial_n(\alpha) \in S_{n-1}(X,T)$ e, portanto, $\partial_n(S_n(X,T)) \subset S_{n-1}(X,T)$.

∎

Portanto, temos um novo complexo de cadeias de $\mathbb{Z}_p$-módulos

$$\cdots \longrightarrow \quad S_{n+1}(X,T) \quad \xrightarrow{\partial_{n+1}} \quad S_n(X,T) \quad \xrightarrow{\partial_n} \quad S_{n-1}(X,T) \quad \longrightarrow \cdots,$$

sendo $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ em cada nível $n \geq 0$, uma vez que estes operadores bordo são os mesmos considerados inicialmente, agora restritos aos submódulos $S_n(X,T)$.

Definição 2.1.2 *Definimos*

$$Z_n(X,T) = \{\alpha \in S_n(X,T);\ \partial_n(\alpha) = 0\}$$

como sendo o "submódulo dos (T-n)-ciclos" e

$$B_n(X,T) = \{\alpha \in S_n(X,T);\ \alpha = \partial_{n+1}(\beta),\ \textit{para algum}\ \beta \in S_{n+1}(X,T)\}$$

como sendo o "submódulo dos (T,n)-bordos".

A homologia do complexo de cadeias acima será chamada "homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante associada ao $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T)", e será denotada por $H_*(X,T)$. O enésimo módulo de homologia de (X,T) é dado então por $H_n(X,T) = \frac{Z_n(X,T)}{B_n(X,T)}$.

Observação 2.1.2 *Observemos que* $Z_n(X,T) = Z_n(X,\mathbb{Z}_p) \cap S_n(X,T)$*; temos também que* $B_n(X,T) \subset B_n(X,\mathbb{Z}_p) \cap S_n(X,T)$*, mas não necessariamente* $B_n(X,\mathbb{Z}_p) \cap S_n(X,T) \subset B_n(X,T)$ *pois, se* $\alpha \in S_n(X,T)$ *e* $\alpha = \partial_{n+1}(\beta)$*, com* $\beta \in S_{n+1}(X,\mathbb{Z}_p)$*, pode ser que* α *não seja imagem de uma (T,n+1)-cadeia. Isso significa que existe a possibilidade de* $Z_n(X,\mathbb{Z}_p) = B_n(X,\mathbb{Z}_p)$ *e, portanto,* $H_n(X,\mathbb{Z}_p) = \{0\}$*, mas* $B_n(X,T) \subset Z_n(X,T)$*; logo,* $H_n(X,T) \neq \{0\}$ *(no Capítulo 3 ficará claro a existência de exemplos com essa natureza).*

Suponhamos (X,T) e (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços e $f : (X,T) \to (Y,S)$ uma aplicação contínua equivariante, e consideremos $f_\sharp : S_n(X,\mathbb{Z}_p) \to S_n(Y,\mathbb{Z}_p)$. Dado $\alpha \in S_n(X,T)$, teremos

$$S_\sharp(f_\sharp(\alpha)) = (S \circ f)_\sharp(\alpha) = (f \circ T)_\sharp(\alpha) = f_\sharp(T_\sharp(\alpha)) = f_\sharp(\alpha).$$

Deste modo, $f_\sharp(S_n(X,T)) \subset S_n(Y,S)$ e, portanto, $f_\sharp$ define o homomorfismo $f_\sharp : S_n(X,T) \to S_n(Y,S)$. Como os operadores bordo dos complexos de cadeias $S_*(X,T)$ *e* $S_*(Y,S)$ são restrições dos operadores bordo usuais e $f_\sharp : S_n(X,T) \to S_n(Y,S)$ também é uma restrição, temos que $f_\sharp : S_n(X,T) \to S_n(Y,S)$ continua sendo uma aplicação de cadeias. Em particular, temos a induzida em homologia $\mathbb{Z}_p$-equivariante $f_* : H_n(X,T) \to H_n(Y,S)$ para todo $n \geq 0$. Assim, se $[\alpha] \in H_n(X,T)$, ou seja, $[\alpha] = \alpha + B_n(X,T)$, com $\alpha \in Z_n(X,T)$, então

$$f_*([\alpha]) = [f_\sharp(\alpha)] = f_\sharp(\alpha) + B_n(Y,S).$$

Observação 2.1.3 *Podemos estender as idéias acima para pares (X,f), com X espaço topológico e* $f : X \to X$ *uma função contínua fixada. De fato, considerando R um anel comutativo com unidade e definindo* $S_n(X,f,R) \subset S_n(X,R)$ *como* $S_n(X,f,R) = \{\alpha \in S_n(X,R); \quad f_\sharp(\alpha) = \alpha\}$*, temos, então, os seguintes teoremas, cujas demonstrações são iguais às apresentadas nos teoremas 2.1.1 e 2.1.2.*

Teorema 2.1.3 *$S_n(X, f, R)$ é um submódulo do R-módulo $S_n(X, R)$.*

Teorema 2.1.4 *$\partial(S_n(X, f, R)) \subset S_{n-1}(X, f, R)$.*

Desta forma, temos um novo complexo de cadeias de R-módulos

$$\cdots \longrightarrow \quad S_{n+1}(X, f, R) \quad \xrightarrow{\partial_{n+1}} \quad S_n(X, f, R) \quad \xrightarrow{\partial_n} \quad S_{n-1}(X, f, R) \quad \longrightarrow \cdots$$

A homologia deste complexo será denotada por $H_*(X, f, R)$ e o n-ésimo módulo de homologia de (X,f) é então $H_n(X, f, R) = \frac{Z_n(X,f,R)}{B_n(X,f,R)}$, onde
$Z_n(X, f, R) = \{\alpha \in S_n(X, f, R);\ \partial_n(\alpha) = 0\}$ e
$B_n(X, f, R) = \{\alpha \in S_n(X, f, R);\ \alpha = \partial_{n+1}(\beta), \text{para algum } \beta \in S_{n+1}(X, f, R)\}$.

Definição 2.1.3 *Consideremos pares (X,f) e (Y,g), como acima mencionados. Uma aplicação contínua $h : (X, f) \to (Y, g)$ é chamada "permissível" se satisfizer $h \circ f = g \circ h$.*

Teorema 2.1.5 *Se $h : (X, f) \to (Y, g)$ é permissível, então o homomorfismo induzido $h_\sharp : S_n(X, R) \to S_n(Y, R)$ é tal que $h_\sharp(S_n(X, f, R)) \subset S_n(Y, g, R)$.*

Demonstração: Dado $\alpha \in S_n(X, f, R)$, temos que $h_\sharp(\alpha) \in S_n(Y, R)$ e, além disso,

$$g_\sharp(h_\sharp(\alpha)) = (g_\sharp \circ h_\sharp)(\alpha) = (g \circ h)_\sharp(\alpha) = (h \circ f)_\sharp(\alpha) = h_\sharp(f_\sharp(\alpha)) = h_\sharp(\alpha),$$

ou seja, $h_\sharp(\alpha) \in S_n(Y, g, R)$. Portanto, $h_\sharp(S_n(X, f, R)) \subset S_n(Y, g, R)$.

∎

Em particular, se h é permissível, temos o homomorfismo induzido $h_* : H_n(X, f, R) \to H_n(Y, g, R)$.

2.2 O operador θ

Definição 2.2.1 *Dado o $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T), definimos o operador*

$$\theta : S_n(X,\mathbb{Z}_p) \to S_n(X,\mathbb{Z}_p) \quad por \quad \theta = \overline{1}Id_\sharp + \overline{1}T_\sharp + \overline{1}T_\sharp^2 + ... + \overline{1}T_\sharp^{p-1}.$$

Sendo cada $T_\sharp^r : S_n(X,\mathbb{Z}_p) \to S_n(X,\mathbb{Z}_p), r = 0,1,\cdots,p-1$, uma aplicação de cadeias, segue então da observação 1.3.1 que o operador θ é uma aplicação de cadeias, por ser uma combinação linear de aplicações de cadeias.

Observação 2.2.1 *A fim de simplificar a notação, salvo quando houver perigo de confusão com elementos do anel $\mathbb{Z}$, omitiremos a barra dos elementos do anel $\mathbb{Z}_p$. Sendo assim, o operador θ será definido então simplesmente por $\theta = Id_\sharp + T_\sharp + T_\sharp^2 + \cdots + T_\sharp^{p-1}$.*

O resultado a seguir será crucial para a construção do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice. Ele simplesmente diz que as (T,n)-cadeias constituem exatamente a imagem do operador θ acima.

Teorema 2.2.1 *Imagem$(\theta) = S_n(X,T)$.*

Demonstração: Sendo $c \in S_n(X,\mathbb{Z}_p)$ uma n-cadeia, então

$$\begin{aligned}
T_\sharp(\theta(c)) &= T_\sharp(c + T_\sharp(c) + T_\sharp^2(c) + ... + T_\sharp^{p-2}(c) + T_\sharp^{p-1}(c)) \\
&= T_\sharp(c) + T_\sharp^2(c) + ... + T_\sharp^{p-1}(c) + T_\sharp^p(c) \\
&= T_\sharp(c) + T_\sharp^2(c) + ... + T_\sharp^{p-1}(c) + Id_\sharp(c) \\
&= \theta(c),
\end{aligned}$$

já que $T_\sharp$ tem grau p. Assim, mostramos que $\theta(c)$ pertence a $S_n(X,T)$ e, portanto, Imagem$(\theta) \subset S_n(X,T)$.

Reciprocamente, seja $\alpha \in S_n(X,T)$, isto é, $\alpha \in S_n(X,\mathbb{Z}_p)$ tal que $T_\sharp(\alpha) = \alpha$. Escreva $\alpha = r_1\phi_1 + r_2\phi_2 + ... + r_t\phi_t, \quad r_j \in \mathbb{Z}_p \quad e \ \phi_j \in C_n(X)$.

Lembremos que a n-cadeia α pode ser considerada como a função $\alpha : C_n(X) \to \mathbb{Z}_p$, definida por $\alpha(\phi_j) = r_j, \quad j = 1, 2, ..., t \;\; e \;\; \alpha(\phi) = 0, \quad se \;\; \phi \neq \phi_j$.

Seja $A = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_t\}$. Então A pode ser considerado como um subconjunto de $S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ e, desta forma, tomaremos a restrição de $T_\sharp : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ a A, ou seja, consideraremos $T_\sharp : A \to S_n(X, \mathbb{Z}_p)$.

Afirmamos que $T_\sharp(A) \subset A$. Para isso, devemos mostrar que para cada $1 \leq i \leq t$ existe $1 \leq j \leq t$ tal que $T_\sharp(\phi_i) = \phi_j$. Com efeito, $T_\sharp(\alpha) = \alpha$ implica que

$$r_1(T \circ \phi_1) + r_2(T \circ \phi_2) + ... + r_t(T \circ \phi_t) = r_1\phi_1 + r_2\phi_2 + ... + r_t\phi_t.$$

Em outras palavras, a função $T_\sharp(\alpha) : C_n(X) \to \mathbb{Z}_p$ dada por

$$T_\sharp(\alpha)(T \circ \phi_i) = r_i, \quad i = 1, 2, ..., t \;\; e \;\; T_\sharp(\alpha)(\phi) = 0, \text{ para todo } \phi \neq T \circ \phi_i,$$

é igual a função $\alpha : C_n(X) \to \mathbb{Z}_p$ considerada logo acima. Segue que, para $1 \leq i \leq t, \; \alpha(T \circ \phi_i) = r_i \neq 0$. Entretanto, os únicos elementos de $C_n(X)$ que são levados por α em elementos não nulos de $\mathbb{Z}_p$ são os elementos de A e, portanto, $T \circ \phi_i \in A$, isto é, $T \circ \phi_i = \phi_j$, para algum $1 \leq j \leq t$. Em outras palavras, dado qualquer i, $1 \leq i \leq t$, existe j, $1 \leq j \leq t$, tal que $T \circ \phi_i = \phi_j$, ou seja, $T_\sharp(\phi_i) = \phi_j$. Desta maneira, podemos concluir que $T_\sharp(A) \subset A$.

Observe adicionalmente que o j acima é diferente de i, pois se $T \circ \phi_i = \phi_i$, para cada $x \in \Delta_n$, teríamos que $T(\phi_i(x)) = \phi_i(x)$ e, portanto, a órbita de $\phi_i(x)$ correspondente à ação de $\mathbb{Z}_p$ em X só teria um ponto, contrariando o fato de que tal ação é livre.

Mostramos então que $T_\sharp : A \to A$ é uma função sem pontos fixos. Mais ainda, $(T_\sharp)^p = (T^p)_\sharp = Id_\sharp$ e, desta forma, segue da observação 1.2.2 que $T_\sharp$ define uma ação de $\mathbb{Z}_p$ em A. Afirmamos que esta ação é livre, ou seja, dado qualquer $\phi_i \in A$ e $0 \leq l, j \leq p-1$, com $l \neq j$, teremos $T_\sharp^l(\phi_i) \neq T_\sharp^j(\phi_i)$. De fato, se $(T_\sharp)^l(\phi_i) = (T_\sharp)^j(\phi_i)$, então $(T^l)_\sharp(\phi_i) = (T^j)_\sharp(\phi_i)$, ou seja, $T^l \circ \phi_i = T^j \circ \phi_i$. Tomando um ponto $z \in \Delta_n$, isso significa que $T^l(\phi_i(z)) = T^j(\phi_i(z))$. Como $0 \leq l, j \leq p-1 \;\; e \;\; l \neq j$, concluímos que a órbita de $\phi_i(z)$ em X segundo $T : X \to X$ possui menos que p pontos, contrariando o fato de que a ação gerada por T é livre. Desta forma, $T_\sharp$ define uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em A.

Denotemos por $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_l$ as órbitas desta ação. Afirmamos que se $\phi_i \;\; e \;\; \phi_j$ pertencem à mesma órbita γ_u, então os correspondentes coeficientes r_i, r_j são iguais; em outras palavras, todos os simplexos de uma mesma órbita possuem o mesmo coeficiente. De fato, $T_\sharp(\alpha) = \alpha$ implica que $T_\sharp^j(\alpha) = \alpha$, para todo $1 \leq j \leq p-1$. Consideremos então a órbita $\gamma_u = \{\phi_i, T_\sharp(\phi_i), T_\sharp^2(\phi_i), ..., T_\sharp^{p-1}(\phi_i)\}$. Para $1 \leq j \leq p-1$, $T_\sharp^j(\alpha) = \alpha$ significa que as funções $T_\sharp^j(\alpha), \alpha : C_n(X) \to \mathbb{Z}_p$ são iguais. Em particular, para qualquer j, $1 \leq j \leq p-1$, vale que

$$\begin{aligned} \alpha(T_\sharp^j(\phi_i)) &= T_\sharp^j(\alpha)(T_\sharp^j(\phi_i)) \\ &= [r_1 T_\sharp^j(\phi_1) + r_2 T_\sharp^j(\phi_2) + ... + r_i T_\sharp^j(\phi_i) + ... + r_t T_\sharp^j(\phi_t)](T_\sharp^j(\phi_i)) \\ &= r_i, \end{aligned}$$

uma vez que $T_\sharp^j(\phi_1), T_\sharp^j(\phi_2), \cdots, T_\sharp^j(\phi_t)$ é uma coleção de elementos distintos de $C_n(X)$ (de fato, se $T_\sharp^j(\phi_r) = T_\sharp^j(\phi_s)$, então $T_\sharp^{p-j}(T_\sharp^j(\phi_r)) = T_\sharp^{p-j}(T_\sharp^j(\phi_s))$, o que acarreta $T^p \circ \phi_r = T^p \circ \phi_s \;\; e \;\; \phi_r = \phi_s$). Como $\alpha(\phi_i) = r_i$, segue que

$$\alpha\{\phi_i, T_\sharp(\phi_i), T_\sharp^2(\phi_i), ..., T_\sharp^{p-1}(\phi_i)\} = r_i,$$

como queríamos.

Escolhamos então, aleatoriamente, um elemento de cada órbita, digamos $\phi_{i_1} \in \gamma_1, \phi_{i_2} \in \gamma_2, ..., \phi_{i_l} \in \gamma_l$. Redenotemos $r_{i_1} = v_1, r_{i_2} = v_2, ..., r_{i_l} = v_l \;\; e \;\; \phi_{i_1} = \mu_1, \phi_{i_2} = \mu_2, ..., \phi_{i_l} = \mu_l$. Pelas considerações acima, α pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\alpha = {} & v_1(\text{soma dos elementos da órbita de } \gamma_1) + v_2(\text{soma dos elementos da órbita} \\
& \text{de } \gamma_2) + \cdots + v_l(\text{soma dos elementos da órbita de } \gamma_l) \\
= {} & v_1(\mu_1 + T_\sharp(\mu_1) + ... + T_\sharp^{p-1}(\mu_1)) + v_2(\mu_2 + T_\sharp(\mu_2) + ... + T_\sharp^{p-1}(\mu_2)) \\
& + ... + v_l(\mu_l + T_\sharp(\mu_l) + ... + T_\sharp^{p-1}(\mu_l)) \\
= {} & v_1\mu_1 + v_1T_\sharp(\mu_1) + ... + v_1T_\sharp^{p-1}(\mu_1) + v_2\mu_2 + v_2T_\sharp(\mu_2) + ... + v_2T_\sharp^{p-1}(\mu_2) \\
& + ... + v_l\mu_l + v_lT_\sharp(\mu_l) + ... + v_lT_\sharp^{p-1}(\mu_l) \\
= {} & v_1\mu_1 + v_2\mu_2 + ... + v_l\mu_l + v_1T_\sharp(\mu_1) + v_2T_\sharp(\mu_2) + ... + v_lT_\sharp(\mu_l) + ... + \\
& v_1T_\sharp^{p-1}(\mu_1) + v_2T_\sharp^{p-1}(\mu_2) + ... + v_lT_\sharp^{p-1}(\mu_l) \\
= {} & v_1\mu_1 + ... + v_l\mu_l + T_\sharp(v_1\mu_1 + ... + v_l\mu_l) + ... + T_\sharp^{p-1}(v_1\mu_1 + ... + v_l\mu_l) \\
= {} & \theta(v_1\mu_1 + v_2\mu_2 + ... + v_l\mu_l),
\end{aligned}
$$

o que prova o resultado.

∎

Observação 2.2.2 *Na prova do teorema anterior, o elemento* $d = v_1\mu_1 + v_2\mu_2 + ... + v_l\mu_l \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ *tal que* $\theta(d) = \alpha$ *foi obtido escolhendo-se aleatoriamente* $\mu_j \in \gamma_j$ *e dotando-se o mesmo com o coeficiente comum correspondente à órbita* γ_j*. Portanto, tal* d *não é único, sendo que as outras possibilidades para* d *são obtidas substituindo-se cada* μ_j *por um outro elemento qualquer de* γ_j*, ou seja,* μ_j *por* $T_\sharp^{k_j}(\mu_j), 0 \leq k_j \leq p-1$*. Em outras palavras,* $v_1\mu_1 + v_2\mu_2 + ... + v_l\mu_l$ *pode ser substituído por* $v_1T_\sharp^{k_1}(\mu_1) + v_2T_\sharp^{k_2}(\mu_2) + ... + v_lT_\sharp^{k_l}(\mu_l)$*, onde* $0 \leq k_1, k_2, ..., k_l \leq p-1$*. Desta forma, existem* p^l *possibilidades para elementos* $d \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ *tal que* $\theta(d) = \alpha$*. Em linguagem de funções, temos que a imagem inversa de* α *por* θ *é um subconjunto de* $S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ *consistindo* *de p^l elementos. Mais precisamente,*

$$\theta^{-1}(\alpha) = \{v_1 T_\sharp^{k_1}(\mu_1) + v_2 T_\sharp^{k_2}(\mu_2) + \cdots + v_l T_\sharp^{k_l}(\mu_l), \quad 0 \leq k_1, k_2, ..., k_l \leq p-1\}.$$

2.3 O $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice

Nesta seção construiremos o $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo graduado

$$J_{r_{(X,T)}} : H_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p, \quad r \geq 0,$$

o qual denotaremos simplesmente por $J_r : H_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$, anunciado na introdução do capítulo, o qual chamaremos de "$\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice". Como dito na introdução, a razão deste nome será o fato de que tal homomorfismo é invariante sob o efeito de homomorfismos induzidos por aplicações equivariantes. Em outras palavras, se (X,T) e (Y,S) são $\mathbb{Z}_p$-espaços e $f : (X,T) \to (Y,S)$ é uma aplicação equivariante, então teremos que a induzida em homologia equivariante $f_* : H_r(X,T) \to H_r(Y,S)$ satisfará $J_r(f_*(\xi)) = J_r(\xi)$, *com* $\xi \in H_r(X,T)$.

A estratégia para a construção do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice J_r seguirá dois princípios:

1) A construção do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo J_r será feita por indução sobre r.

2) J_r será construído inicialmente a nível de (T,r)-ciclos, ou seja, $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$; a seguir, mostrar-se-á que $J_r(B_r(X,T)) = \{0\}$, o que implicará que J_r determine um homomorfismo $J_r : \frac{Z_r(X,T)}{B_r(X,T)} \to \mathbb{Z}_p$.

Observemos ainda que J_r será construído explicitamente apenas no nível 0, ou seja, construiremos explicitamente somente o homomorfismo $J_0 : Z_0(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ satisfazendo $J_0(B_0(X,T)) = \{0\}$. Nos demais níveis, será construído recursivamente. Isso significa que, na prática, para calcular explicitamente $J_r(\xi)$, com $\xi \in Z_r(X,T)$, será necessário algum processo de "rebaixamento" de dimensão até a dimensão zero, onde a computação é explícita.

Construiremos, a seguir, o homomorfismo $J_0 : H_0(X,T) \to \mathbb{Z}_p$. Seja $c \in Z_0(X,T) = S_0(X,T)$. Pelo Teorema 2.2.1, $c = \theta(d)$, *sendo* $d = a_1d_1 + a_2d_2 + ... + a_sd_s$, *com* $a_i \in \mathbb{Z}_p$ *e* $d_i \in X$, para i=1,2...,s. Definimos

$$J_0 : Z_0(X,T) \to \mathbb{Z}_p \;\; por \;\; J_0(c) = \sum_{i=1}^{s} a_i.$$

Observemos que:

i) J_0 está bem definido já que se $c = \theta(d) = \theta(d')$, então existem inteiros $0 \leq j_1, j_2, ..., j_s \leq p-1$ tais que $d' = a_1T_\sharp^{j_1}(d_1) + a_2T_\sharp^{j_2}(d_2) + ... + a_sT_\sharp^{j_s}(d_s)$, ou seja, os coeficientes que comparecem em d' são os mesmos de d e, portanto, $J_0(c)$ não depende da forma de se expressar c como $c = \theta(d)$.

ii) J_0 é um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo pois se c_1, c_2 são elementos de $Z_0(X,T)$ tais que $c_1 = \theta(d_1)$ *e* $c_2 = \theta(d_2)$, com $d_1 = \sum_{i=1}^{s} a_ix_i$ *e* $d_2 = \sum_{i=1}^{l} b_iy_i$, onde $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_p$ *e* $x_i, y_i \in X$, então

$$c_1 + c_2 = \theta(d_1) + \theta(d_2) = \theta(d_1 + d_2),$$

sendo $d_1 + d_2 = \sum_{i=1}^{s} a_ix_i + \sum_{i=1}^{l} b_iy_i$ e, portanto,

$$J_0(c_1 + c_2) = \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{l} b_i = J_0(c_1) + J_0(c_2).$$

Além disso, se $k \in \mathbb{Z}_p$, então $kc_1 = k\theta(d_1) = \theta(kd_1)$, sendo $kd_1 = k(\sum_{i=1}^{s} a_ix_i) = \sum_{i=1}^{s}(ka_i)x_i$ e, portanto,

$$J_0(kc_1) = \sum_{i=1}^{s}(ka_i) = k(\sum_{i=1}^{s} a_i) = kJ_0(c_1).$$

iii) Para finalizar, $J_0(B_0(X,T)) = \{0\}$, pois dado $c \in B_0(X,T)$, existe então $d \in S_1(X,T)$ tal que $\partial(d) = c$. Pelo Teorema 2.2.1, podemos escrever $d = \theta(e)$, *com* $e \in S_1(X, \mathbb{Z}_p)$. Assim, $c = \partial(d) = \partial(\theta(e)) = \theta(\partial(e))$ e, deste modo,

$J_0(c)$ será a soma dos coeficientes de $\partial(e)$. Escrevendo $e = a_1e_1+a_2e_2+...+a_se_s$, onde cada $a_i \in \mathbb{Z}_p$ e cada $e_i : [0,1] \to X$ é um caminho contínuo em X, segue então que

$$\partial_1(e) = \partial_1(a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_se_s) = a_1\partial_1(e_1) + a_2\partial_1(e_2) + ... + a_s\partial_1(e_s) =$$

$$a_1(e_1(1) - e_1(0)) + a_2(e_2(1) - e_2(0)) + ... + a_s(e_s(1) - e_s(0))$$

e, portanto, pela definição, teremos $J_0(c) = a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + ... + a_s - a_s = 0$, como queríamos.

Portanto, por i), ii) e iii) concluímos a construção do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice $J_0 : H_0(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ no nível 0.

Para a construção recursiva de J_r, $r > 0$, necessitaremos introduzir dois novos operadores auxiliares em $S_r(X,\mathbb{Z}_p)$, os quais denotaremos por ψ e ν. Especificamente, os operadores $\psi, \nu : S_r(X,\mathbb{Z}_p) \to S_r(X,\mathbb{Z}_p)$ serão dados por

$$\psi = T_\sharp + 2T_\sharp^2 + 3T_\sharp^3 + ... + (p-1)T_\sharp^{p-1} \ \ e \ \nu = Id_\sharp - T_\sharp.$$

(lembremos novamente que, pela observação 1.3.1, tais $\mathbb{Z}_p$-homomorfismos são aplicações de cadeias, por serem combinações lineares de aplicações de cadeias). Observe que

$$\begin{aligned}
\nu \circ \psi &= (Id_\sharp - T_\sharp) \circ (T_\sharp + 2T_\sharp^2 + 3T_\sharp^3 + \cdots + (p-1)T_\sharp^{p-1}) \\
&= T_\sharp + 2T_\sharp^2 + 3T_\sharp^3 + \cdots + (p-1)T_\sharp^{p-1} - T_\sharp^2 - 2T_\sharp^3 - 3T_\sharp^4 - ... - \\
&\quad -(p-2)T_\sharp^{p-1} - (p-1)T_\sharp^p \\
&= Id_\sharp + T_\sharp + (2-1)T_\sharp^2 + (3-2)T_\sharp^3 + \cdots + ((p-1)-(p-2))T_\sharp^{p-1} \\
&= Id_\sharp + T_\sharp + T_\sharp^2 + \cdots + T_\sharp^{p-1} \\
&= \theta,
\end{aligned}$$

onde acima foi usado o fato de que $-(p-1)T_\sharp^p = Id_\sharp$.

De modo análogo, $\psi \circ \nu = \theta$.

Voltemos, então, à tarefa recursiva de construir $J_r \ \ para \ \ r > 0$. Suponhamos indutivamente que, para r-1, foi construído o $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo $J_{r-1} : Z_{r-1}(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ satisfazendo $J_{r-1}(B_{r-1}(X,T)) = \{0\}$. Consideremos então $c \in Z_r(X,T)$, com $c = \theta(u)$, $\ u \in S_r(X, \mathbb{Z}_p)$. Podemos então considerar o elemento $\psi(\partial(u)) \in S_{r-1}(X, \mathbb{Z}_p)$.

Nossos próximos objetivos serão:

1) Mostrar que $\psi(\partial(u)) \in Z_{r-1}(X,T)$. Note que, uma vez provado isso, fará sentido, pela hipótese de indução, calcular $J_{r-1}(\psi(\partial(u)))$ e, desta forma, poderemos então definir $J_r(c) = J_{r-1}(\psi(\partial(u)))$.

2) Mostrar que J_r assim definido não depende da maneira de se expressar c como $\theta(u)$, ou seja, se $c = \theta(u) = \theta(u')$, então $J_{r-1}(\psi(\partial(u))) = J_{r-1}(\psi(\partial(u')))$. Uma vez provado isso, teremos a função $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ definida por $J_r(c) = J_{r-1}(\psi(\partial(u)))$, sendo $c = \theta(u)$.

3) Mostrar que $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ é um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo satisfazendo $J_r(B_r(X,T)) = \{0\}$. Uma vez provado isso, J_r definirá um homomorfismo $J_r : \frac{Z_r(X,T)}{B_r(X,T)} = H_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ dado por $J_r(c + B_r(X,T)) = J_r([c]) = J_r(c) = J_{r-1}(\psi(\partial(u)))$, sendo $c = \theta(u)$, e o trabalho de definir J_r recursivamente estará concluído.

Estes fatos serão abordados em nosso trabalho em forma de proposições.

Proposição 2.3.1 $\psi(\partial(u)) \in Z_{r-1}(X,T)$.

Demonstração: Observe que, sendo ψ uma aplicação de cadeias, temos que $\partial(\psi(\partial(u))) = \psi(\partial(\partial(u))) = \psi(0) = 0$ e, portanto, $\psi(\partial(u)) \in Z_{r-1}(X, \mathbb{Z}_p)$.

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
T_\sharp(\psi(\partial(u))) &= (T_\sharp - Id_\sharp + Id_\sharp)(\psi(\partial(u))) \\
&= (Id_\sharp - \nu)(\psi(\partial(u))) \\
&= Id_\sharp(\psi(\partial(u))) - \nu(\psi(\partial(u))) \\
&= \psi(\partial(u)) - (\nu \circ \psi)(\partial(u)) \\
&= \psi(\partial(u)) - \theta(\partial(u)) \\
&= \psi(\partial(u)) - \partial(\theta(u)) \\
&= \psi(\partial(u)) - \partial(c) \\
&= \psi(\partial(u)),
\end{aligned}$$

uma vez que $c \in Z_r(X,T)$. Sendo então $T_\sharp(\psi(\partial(u))) = \psi(\partial(u))$, podemos concluir que $\psi(\partial(u)) \in Z_{r-1}(X,T)$.

∎

Conforme dito anteriormente, a proposição acima juntamente com a hipótese de indução acarretam que $J_{r-1}(\psi(\partial(u)))$ faz sentido. Temos, a seguir, a

Proposição 2.3.2 *A regra $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ dada por $J_r(c) = J_{r-1}(\psi(\partial(u)))$, onde $c = \theta(u)$, independe da maneira de se expressar c como $\theta(u)$.*

Demonstração: Consideremos $c \in Z_r(X,T)$ e suponhamos $c = \theta(u) = \theta(u')$, com $u, u' \in S_r(X, \mathbb{Z}_p)$. Provaremos que $J_{r-1}(\psi(\partial(u))) = J_{r-1}(\psi(\partial(u')))$.

Escrevendo $u = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + ... + a_s\phi_s$, *com* $a_i \in \mathbb{Z}_p$ *e* $\phi_i \in C_r(X)$, pela observação 2.2.2, existem $0 \leq v_1, v_2, ..., v_s \leq p-1$, os quais após reordenação e reindexação dos ϕ_i's podem ser supostos satisfazer $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq ... \leq v_s \leq p-1$, tal que $u' = a_1T_\sharp^{v_1}(\phi_1) + a_2T_\sharp^{v_2}(\phi_2) + ... + a_sT_\sharp^{v_s}(\phi_s)$. É claro que $(v_1, v_2, ..., v_s) \neq (0, 0, ..., 0)$, senão não há o que provar. Seja x o primeiro índice tal que $v_x > 0$ e considere $A_1 = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + ... + a_{x-1}\phi_{x-1}$ (parte comum entre u e u'). Observe que se x=1, então A=0.

Vamos, a seguir, construir uma sequência finita $u_1, u_2, \cdots, u_n$ de elementos de $S_r(X, \mathbb{Z}_p)$ tal que cada u_i dessa sequência satisfaça $c = \theta(u_i)$, e tal que $u_1 = u \ \ e \ \ u_n = u'$.

Coloquemos

$$u_2 = A_1 + a_x T_\sharp(\phi_x) + a_{x+1} T_\sharp(\phi_{x+1}) + ... + a_{s-1} T_\sharp(\phi_{s-1}) + a_s T_\sharp(\phi_s),$$

$$u_3 = A_1 + a_x T_\sharp^2(\phi_x) + a_{x+1} T_\sharp^2(\phi_{x+1}) + ... + a_{s-1} T_\sharp^2(\phi_{s-1}) + a_s T_\sharp^2(\phi_s)$$

e, em geral, para $1 \leq i \leq v_x$ escrevemos

$$u_{i+1} = A_1 + \sum_{j=x}^{s} a_j T_\sharp^i(\phi_j),$$

e com isso já definimos $u_1 = u, u_2, u_3, ..., u_{v_x+1}$, de tal sorte que para $1 \leq l \leq v_x$, se $u_l = A_1 + B$, então $u_{l+1} = A_1 + T_\sharp(B)$.

Vamos prosseguir com o mesmo raciocínio. A idéia é atingir, via esse procedimento, a potência máxima v_s. Seja, então, y o primeiro índice tal que $v_y > v_x$, se existir. Se não existir, paramos. Seja agora

$$A_2 = A_1 + \sum_{j=x}^{y-1} a_j T_\sharp^{v_x}(\phi_j).$$

Pomos $v_x + 1 = k$ e definamos, para $1 \leq i \leq v_y - v_x$,

$$u_{k+i} = A_2 + \sum_{j=y}^{s} a_j T_\sharp^{v_x+i}(\phi_j).$$

Com isto, definimos um novo trecho da sequência desejada, varrendo os índices $v_x + 2, v_x + 3, ..., v_y, v_y + 1$. Neste trecho, novamente é válido fato similar ao trecho anterior, ou seja, se $1 \leq l \leq v_y - v_x$ é tal que u_l pertence ao trecho em questão e se $u_l = A_2 + B$, então $u_{l+1} = A_2 + T_\sharp(B)$. Se $v_y = v_s$, paramos. Caso contrário, seja z o primeiro índice tal que $v_z > v_y$. Usando o procedimento anterior, construímos o terceiro trecho da sequência, varrendo os índices $v_y+2, v_y+3, ..., v_z, v_z+1$, de tal maneira que se $u_i = A_3 + B$, então $u_{i+1} = A_3 + T_\sharp(B)$, onde $v_{y+2} \leq i \leq v_z$.

Como os dados são finitos, no momento em que o último trecho da sequência for construído, o último elemento deste último trecho será u'. Em outras palavras, construímos uma sequência $u_1, u_2, ..., u_{v_s+1}$ *em* $S_r(X, \mathbb{Z}_p)$, com $u_1 = u$ *e* $u_{v_s+1} = u'$, satisfazendo:

i) Para cada $1 \leq i \leq v_s + 1$, $c = \theta(u_i)$;

ii) Para cada $1 \leq i \leq v_s$, existem r-cadeias $A_i, B_i \in S_r(X, \mathbb{Z}_p)$, com A_i podendo eventualmente ser zero, tal que $u_i = A_i + B_i$ *e* $u_{i+1} = A_i + T_\sharp(B_i)$.

Segue que, para provar a propriedade, é suficiente mostrar o seguinte: se $c \in Z_r(X, T)$ é tal que $c = \theta(A + B) = \theta(A + T_\sharp(B))$, então $J_{r-1}(\psi(\partial(A + B))) = J_{r-1}(\psi(\partial(A + T_\sharp(B))))$, onde $A, B \in S_r(X, \mathbb{Z}_p)$. Temos que

$$J_{r-1}(\psi(\partial(A+B)))-J_{r-1}(\psi(\partial(A+T_\sharp(B)))) = J_{r-1}(\psi(\partial(A+B))-\psi(\partial(A+T_\sharp(B)))$$

uma vez que $J_{r-1} : Z_{r-1}(X, T) \to \mathbb{Z}_p$ é, pela hipótese de indução, um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo. Como ψ *e* ∂ são também homomorfismos, o último termo é igual a

$$J_{r-1}(\psi(\partial(B - T_\sharp(B)))) = J_{r-1}(\psi(\partial(\nu(B)))) = J_{r-1}(\psi(\nu(\partial(B)))) =$$

$$J_{r-1}(\theta(\partial(B))) = J_{r-1}(\partial(\theta(B))).$$

Como $B \in S_r(X, \mathbb{Z}_p)$, então $\theta(B) \in S_r(X, T)$ e, deste modo, $\partial(\theta(B)) \in B_{r-1}(X, T)$. Como, por hipótese de indução, $J_{r-1}(B_{r-1}(X, T)) = \{0\}$, segue-se então que $J_{r-1}(\partial(\theta(B))) = \{0\}$, donde concluímos que

$$J_{r-1}(\psi(\partial(A + B))) - J_{r-1}(\psi(\partial(A + T_\sharp(B)))) = 0,$$

como queríamos.

∎

Esse resultado significa que $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ definido por $J_r(c) = J_{r-1}(\psi(\partial(u)))$, onde $c = \theta(u)$ é de fato uma função bem definida. Temos agora a

Proposição 2.3.3 *A aplicação $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ é um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo.*

Demonstração: Sejam $c_1, c_2 \in Z_r(X,T)$ *e* $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Tomemos $d_1, d_2 \in S_r(X, \mathbb{Z}_p)$ tais que $c_1 = \theta(d_1)$ *e* $c_2 = \theta(d_2)$, respectivamente. Como θ é um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo, então $c_1 + c_2 = \theta(d_1) + \theta(d_2) = \theta(d_1 + d_2)$ e, portanto, $J_r(c_1 + c_2) = J_{r-1}(\psi(\partial(d_1 + d_2)))$. Sendo, por hipótese de indução, J_{r-1} um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo, e como ψ *e* ∂ são também $\mathbb{Z}_p$-homomorfismos, temos então que

$$\begin{aligned} J_r(c_1 + c_2) &= J_{r-1}(\psi(\partial(d_1 + d_2))) \\ &= J_{r-1}(\psi(\partial(d_1))) + J_{r-1}(\psi(\partial(d_2))) \\ &= J_r(c_1) + J_r(c_2). \end{aligned}$$

Além disso, $\alpha c_1 = \alpha\theta(d_1) = \theta(\alpha d_1)$ e, pelos mesmos motivos apresentados acima, temos que

$$J_r(\alpha c_1) = J_{r-1}(\psi(\partial(\alpha d_1))) = \alpha J_{r-1}(\psi(\partial(d_1))) = \alpha J_r(c_1)$$

e, assim, podemos concluir que $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ é um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo.

∎

Proposição 2.3.4 *O $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ satisfaz $J_r(B_r(X,T)) = \{0\}$.*

Demonstração: Seja $c \in B_r(X,T)$. Logo, existe $b \in S_{r+1}(X,T)$ tal que $\partial(b) = c$. No entanto, sendo $b \in S_{r+1}(X,T)$, existe $d \in S_{r+1}(X,\mathbb{Z}_p)$ tal que $\theta(d) = b$. Assim, sendo θ uma aplicação de cadeias, segue que

$$\theta(\partial(d)) = \partial(\theta(d)) = \partial(b) = c$$

e, portanto,

$$J_r(c) = J_{r-1}(\psi(\partial(\partial(d)))) = J_{r-1}(0) = 0,$$

uma vez que J_{r-1} é um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo.

∎

Observação 2.3.1 *Temos então que* $J_r : Z_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ *dada por* $J_r(c) = J_{r-1}(\psi(\partial(d)))$*, onde* $c = \theta(d)$*, é um* $\mathbb{Z}_p$*-homomorfismo bem definido e, adicionalmente,* $J_r(B_r(X,T)) = \{0\}$*. Desta forma,* J_r *induz um* $\mathbb{Z}_p$*-homomorfismo* $J_r : \frac{Z_r(X,T)}{B_r(X,T)} = H_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ *definido por* $J_r([c]) = J_r(c)$*, o qual denominaremos* $\mathbb{Z}_p$*-homomorfismo índice (graduado).*

2.4 Invariância do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice por induzidas de aplicações equivariantes

Veremos, nesta seção, a razão pela qual o homomorfismo recém construído

$$J_r : H_r(X,T) \to \mathbb{Z}_p$$

é chamado um "homomorfismo índice". Na literatura, o termo "índice" tem muitos significados; na teoria de ações é, em geral, associado a invariantes que se acoplam às ações de tal maneira a serem preservados, em algum sentido, sob o efeito de aplicações equivariantes. Nessa direção, no nosso caso em particular, temos a seguinte

Proposição 2.4.1 *Sejam (X,T) e (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços e $f : (X,T) \to (Y,S)$ uma aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante. Então, a induzida em homologia equivariante $f_* : H_r(X,T) \to H_r(Y,S)$ satisfaz $J_r(f_*([c])) = J_r([c])$.*

Demonstração: A prova será feita por indução sobre r.

Por definição, temos que $J_r(f_*([c])) = J_r([f_\sharp(c)]) = J_r(f_\sharp(c))$, enquanto que $J_r([c]) = J_r(c)$. Deste modo, nossa tarefa se resume a mostrar o resultado ao nível de (T,r)-ciclos, ou seja, para qualquer $c \in Z_r(X,T)$, $J_r(f_\sharp(c)) = J_r(c)$. Notemos inicialmente que, por ser f equivariante (ou seja, $f \circ T = S \circ f$), então $f \circ T^i = S^i \circ f$, para todo $1 \leq i \leq p-1$. Pela definição de θ *e* ψ, decorre então que $f_\sharp \theta = \theta f_\sharp$ e $f_\sharp \psi = \psi f_\sharp$, observando aqui que estamos usando a mesma letra θ *ou* ψ para designar operadores que, em princípio, são diferentes por estarem associados a ações distintas, no caso (X,T) e (Y,S). Provaremos tais fatos logo ao término da demonstração.

Seja $c \in Z_0(X,T)$. Pelo Teorema 2.2.1, temos que $c = \theta(d)$, com $d \in S_0(X, \mathbb{Z}_p)$. Escrevendo $d = a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_s p_s$, com $a_i \in \mathbb{Z}_p$ *e* $p_i \in X$, para i=1,2,...,s, resulta da definição que $J_0(c) = \sum_{i=1}^{s} a_i$, enquanto que

$$\begin{aligned}
J_0(f_\sharp(c)) &= J_0(f_\sharp(\theta(d))) \\
&= J_0(\theta(f_\sharp(d))) \\
&= J_0(\theta(f_\sharp(\sum_{i=1}^{s} a_i p_i))) \\
&= J_0(\theta(\sum_{i=1}^{s} a_i f_\sharp(p_i))) \\
&= J_0(\theta(\sum_{i=1}^{s} a_i f(p_i))) \\
&= \sum_{i=1}^{s} a_i.
\end{aligned}$$

Logo, $J_0(f_\sharp(c)) = J_0(c)$.

Suponhamos , indutivamente, que para todo inteiro k menor ou igual a r-1 seja válido que $J_k(f_\sharp(c)) = J_k(c)$. Seja então $c \in Z_r(X,T)$ e suponha $c = \theta(d)$, com $d \in S_r(X, \mathbb{Z}_p)$. Então,

$$J_r(f_\sharp(c)) = J_r(f_\sharp(\theta(d))) = J_r(\theta(f_\sharp(d))) = J_{r-1}(\psi(\partial(f_\sharp(d)))).$$

Como $f_\sharp$ é uma aplicação de cadeias, temos que $J_{r-1}(\psi(\partial(f_\sharp(d)))) =$ $J_{r-1}(f_\sharp(\psi(\partial(d))))$. Assim, como $\psi(\partial(d)) \in Z_{r-1}(X,T)$, segue da hipótese de indução que $J_{r-1}(f_\sharp(\psi(\partial(d)))) = J_{r-1}(\psi(\partial(d)))$ que é, por definição, $J_r(c)$, o que conclui nossa demonstração.

∎

Conforme anunciado durante a demonstração da proposição anterior, provaremos, a seguir, o

Lema 2.4.1 *Sejam (X,T), (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços e $f : (X,T) \to (Y,S)$ uma aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante. Então os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{array}{ccc} S_r(X,T) & \xrightarrow{f_\sharp} & S_r(Y,S) \\ \downarrow \theta, \psi & & \downarrow \theta, \psi \\ S_r(X,T) & \xrightarrow{f_\sharp} & S_r(Y,S) \end{array}$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} f_\sharp \circ \theta &= f_\sharp((Id_X)_\sharp + T_\sharp + T_\sharp^2 + ... + T_\sharp^{p-1}) \\ &= f_\sharp + f_\sharp T_\sharp + f_\sharp T_\sharp^2 + ... + f_\sharp T_\sharp^{p-1} \\ &= f_\sharp + (f \circ T)_\sharp + (f \circ T^2)_\sharp + ... + (f \circ T^{p-1})_\sharp \\ &= (Id_Y)_\sharp f_\sharp + (S \circ f)_\sharp + (S^2 \circ f)_\sharp + ... + (S^{p-1} \circ f)_\sharp \\ &= (Id_Y)_\sharp f_\sharp + S_\sharp f_\sharp + S_\sharp^2 f_\sharp + ... + S_\sharp^{p-1} f_\sharp \\ &= ((Id_Y)_\sharp + S_\sharp + S_\sharp^2 + ... + S_\sharp^{p-1}) \circ f_\sharp \\ &= \theta \circ f_\sharp. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
f_\sharp \circ \psi &= f_\sharp \circ (T_\sharp + 2T_\sharp^2 + 3T_\sharp^3 + ... + (p-1)T_\sharp^{p-1}) \\
&= f_\sharp T_\sharp + 2f_\sharp T_\sharp^2 + 3f_\sharp T_\sharp^3 + ... + (p-1)f_\sharp T_\sharp^{p-1} \\
&= (f \circ T)_\sharp + 2(f \circ T^2)_\sharp + 3(f \circ T^3)_\sharp + ... + (p-1)(f \circ T^{p-1})_\sharp \\
&= (S \circ f)_\sharp + 2(S^2 \circ f)_\sharp + 3(S^3 \circ f)_\sharp + ... + (p-1)(S^{p-1} \circ f)_\sharp \\
&= S_\sharp f_\sharp + 2S_\sharp^2 f_\sharp + 3S_\sharp^3 f_\sharp + ... + (p-1)S_\sharp^{p-1} f_\sharp \\
&= (S_\sharp + 2S_\sharp^2 + 3S_\sharp^3 + ... + (p-1)S_\sharp^{p-1}) \circ f_\sharp \\
&= \psi \circ f_\sharp.
\end{aligned}
$$

∎

Capítulo 3

Aplicações do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice

Este capítulo é dedicado a algumas aplicações do $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice. Logo em sua primeira seção mostraremos, mediante algumas condições homológicas impostas a um $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T), que o $\mathbb{Z}_p$-índice é uma ferramenta adequada para detectar classes de homologia não nulas em $H_*(X,T)$ (simplesmente mostrando que tais classes possuem $\mathbb{Z}_p$-índice não nulo). Em seguida, mostraremos que, sob certas condições topológicas sobre X, a homologia equivariante do $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T) é $\mathbb{Z}_p$-isomorfa à homologia singular com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ do espaço de órbitas $\frac{X}{T}$, fato este muito importante já que a homologia singular é computável (junto com o fato acima mencionado, isto detectará classes de $\mathbb{Z}_p$-homologia singular não nulas no espaço de órbitas $\frac{X}{T}$). De posse destas informações, estaremos então em condições de demonstrar, mediante algumas condições topológicas e homológicas sobre os espaços envolvidos, um Teorema tipo Borsuk-Ulam concernente à existência de aplicações equivariantes conectando os $\mathbb{Z}_p$-espaços adjacentes. Finalizaremos o capítulo com dois outros teoremas tipo Borsuk-Ulam.

3.1 Classes de homologia equivariantes com índice não-nulo

O objetivo desta seção é mostrar que, para certos valores de p e para $\mathbb{Z}_p$-espaços (X,T), com X conexo por caminhos e satisfazendo certas condições homológicas, existem classes $\xi \in H_r(X,T)$ com $J_r(\xi) \neq 0$. Antes, porém, provaremos alguns resultados algébricos que nos serão úteis para a obtenção destas classes não nulas.

Lema 3.1.1 *Dado o $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T), consideremos a aplicação de cadeias $\theta : S_r(X,\mathbb{Z}_p) \to S_r(X,\mathbb{Z}_p)$ do capítulo anterior. Então, vale que $T_\sharp^j \circ \theta = \theta \circ T_\sharp^j = \theta$, para todo $0 \leq j \leq p-1$.*

Demonstração: Como $T_\sharp^r \circ T_\sharp^s = T_\sharp^s \circ T_\sharp^r$, para todo $0 \leq r,s \leq p-1$, é claro que $T_\sharp^j \circ \theta = \theta \circ T_\sharp^j$, para todo $0 \leq j \leq p-1$. Provemos então que $\theta \circ T_\sharp^j = \theta$ e, para isso, é suficiente mostrar para j=1 pois, uma vez provado isso, teremos, para cada $0 \leq j \leq p-1$, que
$\theta \circ T_\sharp^j = (\theta \circ T_\sharp)T_\sharp^{j-1} = \theta \circ T_\sharp^{j-1} = (\theta \circ T_\sharp)T_\sharp^{j-2} = \theta \circ T_\sharp^{j-2} = \cdots = \theta \circ T_\sharp = \theta.$

Agora,

$$\begin{aligned}
\theta \circ T_\sharp &= (Id_\sharp + T_\sharp + T_\sharp^2 + ... + T_\sharp^{p-1}) \circ T_\sharp \\
&= T_\sharp + T_\sharp^2 + T_\sharp^3 + ... + T_\sharp^{p-1} + T_\sharp^p \\
&= T_\sharp + T_\sharp^2 + ... + T_\sharp^{p-1} + Id_\sharp \\
&= \theta.
\end{aligned}$$

∎

Lema 3.1.2 *Os operadores $\theta, \nu : S_r(X,\mathbb{Z}_p) \to S_r(X,\mathbb{Z}_p)$ definidos no capítulo anterior satisfazem $\theta \circ \nu = \nu \circ \theta = 0$ e $\theta \circ \theta = 0$.*

Demonstração: É fácil observar que $\theta \circ \nu = \nu \circ \theta$. Utilizando o lema anterior, obtemos

$$\theta \circ \nu = \theta(Id_\sharp - T_\sharp) = \theta - \theta T_\sharp = \theta - \theta = 0$$

e

$$\theta \circ \theta = \theta(\sum_{j=0}^{p-1} T_\sharp^j) = \sum_{j=0}^{p-1} \theta(T_\sharp^j) = \sum_{j=0}^{p-1} \theta = p\theta = 0,$$

já que estamos trabalhando com coeficientes no anel $\mathbb{Z}_p$.

∎

Lema 3.1.3 *Os operadores $\theta, \psi : S_r(X, \mathbb{Z}_p) \to S_r(X, \mathbb{Z}_p)$ definidos no capítulo anterior satisfazem $\psi \circ \theta = \theta \circ \psi = \frac{p.(p-1)}{2}.\theta$, observando que, como p ou p-1 é par, então $\frac{p.(p-1)}{2}$ é um número inteiro módulo p.*

Demonstração: Como $T_\sharp^r \circ T_\sharp^s = T_\sharp^s \circ T_\sharp^r$, para todo $0 \leq r, s \leq p-1$, então $\psi \circ \theta = \theta \circ \psi$. Utilizando o lema 3.1.1, obtemos que

$$\theta \circ \psi = \theta(\sum_{j=1}^{p-1} jT_\sharp^j) = \sum_{j=1}^{p-1} j\theta(T_\sharp^j) = \sum_{j=1}^{p-1} j\theta = (\sum_{j=1}^{p-1} j)\theta = \frac{p.(p-1)}{2}.\theta.$$

∎

Corolário 3.1.1 *No lema acima, se p é ímpar, $\theta \circ \psi = 0$, enquanto que se p é par, $\theta \circ \psi = \frac{p}{2}.\theta$.*

Demonstração: Se p é ímpar, então p-1 é par e, portanto, $\frac{p-1}{2}$ é um número inteiro. Logo, $\frac{p.(p-1)}{2} \equiv p$ mod(p) e, deste modo, $\theta \circ \psi = \frac{p.(p-1)}{2}.\theta = 0$. Por outro lado, se p é par,

$$\frac{p.(p-1)}{2} - \frac{p}{2} = \frac{p^2}{2} - \frac{p}{2} - \frac{p}{2} = \frac{p^2}{2} - p = p(\frac{p}{2} - 1)$$

e, como p é par, $(\frac{p}{2} - 1)$ é um número inteiro; segue que $\frac{p.(p-1)}{2} \equiv \frac{p}{2}$ mod(p). Assim, $\theta \circ \psi = \frac{p.(p-1)}{2}\theta = \frac{p}{2}\theta$.

∎

Lema 3.1.4 *Seja p par e escreva p=2q. Então:*

i) Se q é ímpar, $q^2 \equiv q$ mod (p).

ii) Se q é par, $q^2 \equiv 0$ mod (p).

Demonstração: i) Sendo q um número ímpar, temos que

$$q^2 - q = q.(q-1) = 2q.(\frac{q-1}{2}) = p.(\frac{q-1}{2})$$

e como $(\frac{q-1}{2})$ é um número inteiro (já que q é ímpar), segue então que $q^2 \equiv q$ mod (p).

ii) Se q é par, digamos q=2x, com $x \in \mathbb{Z}$, teremos então que $q^2 = 4x^2 = 4.x.x = 2.q.x = px$ e ,deste modo, concluímos que $q^2 \equiv 0$ mod (p).

∎

O próximo lema é uma construção que está em [5] e será de grande utilidade em nosso trabalho.

Lema 3.1.5 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, sendo X um espaço topológico conexo por caminhos. Suponhamos que, para algum natural fixado $n \geq 1$, valha que $H_i(X, \mathbb{Z}_p) = 0, \;\; para \;\; 1 \leq i \leq n$. Então, existem cadeias $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}$, com cada $c_j \in S_j(X, \mathbb{Z}_p)$, satisfazendo:*

i) Se $j > 0$ é par, $\partial(c_j) = \theta(c_{j-1})$.

ii) Se $j > 0$ é ímpar, $\partial(c_j) = \nu(c_{j-1})$.

Demonstração: Tome um ponto $c_0 \in X$ qualquer, considerando-o como uma 0-cadeia em $S_0(X, \mathbb{Z}_p)$. Como X é conexo por caminhos, existe caminho $c_1 : \Delta_1 \to X$ conectando $T_\sharp(c_0) \;\; a \;\; c_0$, e já consideramos $c_1 \in S_1(X, \mathbb{Z}_p)$. Observe que

$$\partial_1(c_1) = \partial_0(c_1) - \partial_1(c_1) = c_1(1) - c_1(0) = c_0 - T_\sharp(c_0) = (Id_\sharp - T_\sharp)(c_0) = \nu(c_0).$$

Assim, sendo θ uma aplicação de cadeias e utilizando o lema 3.1.2, temos $\partial_1(\theta(c_1)) = \theta(\partial_1(c_1)) = \theta(\nu(c_0)) = 0$, ou seja, $\theta(c_1) \in Z_1(X, \mathbb{Z}_p)$. Como

$H_1(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, segue que $\theta(c_1) \in B_1(X, \mathbb{Z}_p)$ e, portanto, existe $c_2 \in S_2(X, \mathbb{Z}_p)$ tal que $\partial_2(c_2) = \theta(c_1)$.

Suponhamos, indutivamente, já construídas cadeias $c_0, c_1, c_2, ..., c_j$, $2 \leq j \leq n$, satisfazendo as condições i) e ii) e considere j par. Então, sendo ν uma aplicação de cadeias e utilizando o lema 3.1.2, obtemos

$$\partial(\nu(c_j)) = \nu(\partial(c_j)) = \nu(\theta(c_{j-1})) = 0,$$

ou seja, $\nu(c_j) \in Z_j(X, \mathbb{Z}_p)$. Como, para $2 \leq j \leq n$, $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, segue então que $\nu(c_j) \in B_j(X, \mathbb{Z}_p)$, ou seja, existe $c_{j+1} \in S_{j+1}(X, \mathbb{Z}_p)$ tal que $\partial(c_{j+1}) = \nu(c_j)$. Considerando, abaixo, j ímpar, teremos

$$\partial(\theta(c_j)) = \theta(\partial(c_j)) = \theta(\nu(c_{j-1})) = 0,$$

ou seja, $\theta(c_j) \in Z_j(X, \mathbb{Z}_p)$. Analogamente ao passo anterior, obtemos $c_{j+1} \in S_{j+1}(X, \mathbb{Z}_p)$ tal que $\partial(c_{j+1}) = \theta(c_j)$. Observe que, sendo j=n o último j tal que $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, então o argumento prossegue até encontrarmos c_{n+1}.

∎

Lema 3.1.6 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, sendo X um espaço topológico conexo por caminhos. Suponhamos que, para algum natural fixado $n \geq 1$, valha que $H_i(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq i \leq n$. Então $\theta(c_j) \in Z_j(X, T)$, onde c_j, $j = 1, \cdots, n+1$ são as cadeias do lema anterior.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.1, para cada $0 \leq j \leq n+1$, $\theta(c_j) \in Imagem(\theta) = S_j(X, T)$. Basta então mostrar que $\partial\theta(c_j) = 0$, para cada $0 \leq j \leq n+1$.

É claro que $\theta(c_0) \in Z_0(X, T)$. Se $j > 0$ é par, utilizando os lemas 3.1.2 e 3.1.5 e o fato de θ ser uma aplicação de cadeias, obtemos

$$\partial(\theta(c_j)) = \theta(\partial(c_j)) = \theta(\theta(c_{j-1})) = 0$$

e, portanto, $\theta(c_j) \in Z_j(X,T)$. Agora, se $j > 0$ é ímpar, pelos mesmos motivos apresentados anteriormente, teremos

$$\partial(\theta(c_j)) = \theta(\partial(c_j)) = \theta(\nu(c_{j-1})) = 0$$

e, portanto, também neste caso, $\theta(c_j) \in Z_j(X,T)$.

∎

Observação 3.1.1 *O lema acima nos diz que $J_j(\theta(c_j))$ faz sentido, para cada $0 \leq j \leq n+1$, onde $J_j : H_j(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ é o $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice.*

Mostraremos que para certos valores de p e j, $J_j(\theta(c_j)) \neq 0$; em particular, para tais valores, $[\theta(c_j)] \in H_j(X,T)$ é uma classe não nula.

Teorema 3.1.1 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, sendo X um espaço topológico conexo por caminhos. Suponhamos, ainda, p um inteiro qualquer. Então $J_1(\theta(c_1)) \neq 0$.*

Demonstração: Utilizando o lema 3.1.5, obtemos

$$J_1(\theta(c_1)) = J_0(\psi(\partial(c_1))) = J_0(\psi(\nu(c_0))) = J_0(\theta(c_0)) = 1,$$

por definição, uma vez que c_0 é um ponto de X e $c_0 = 1.c_0$. ∎

Observação 3.1.2 *Note que o teorema acima tem como consequência o fato de que, se X é qualquer espaço topológico conexo por caminhos, e se X admite uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ gerada por T, então $H_1(X,T) \neq 0$.*

Teorema 3.1.2 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, sendo X um espaço topológico conexo por caminhos. Suponhamos, ainda, p um par qualquer. Se $H_1(X,\mathbb{Z}_p) = 0$ e $H_2(X,\mathbb{Z}_p) = 0$, então $J_i(\theta(c_i)) \neq 0$, para i=1,2,3.*

Demonstração: Pelo lema 3.1.5, temos as cadeias c_0, c_1, c_2 e c_3 satisfazendo as condições lá descritas. Pela prova do teorema anterior, $J_1(\theta(c_1)) = 1$. Temos ainda que $J_2(\theta(c_2)) = J_1(\psi(\partial(c_2))) = J_1(\psi(\theta(c_1)))$ e, como p é par, segue do corolário 3.1.1 que $\psi \circ \theta = \frac{p}{2}\theta$. Assim,

$$J_1(\psi(\theta(c_1))) = J_1(\frac{p}{2}\theta(c_1)) = \frac{p}{2}J_1(\theta(c_1)) = \frac{p}{2} \neq 0 \mod (p).$$

Finalizando,

$$J_3(\theta(c_3)) = J_2(\psi(\partial(c_3))) = J_2(\psi(\nu(c_2))) = J_2(\theta(c_2)) = \frac{p}{2} \neq 0 \ \ mod(p).$$

∎

Observação 3.1.3 *Note que o teorema acima mostra que, se X é qualquer espaço topológico conexo por caminhos admitindo ação livre de $\mathbb{Z}_p$, com p par, e se $H_1(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ e $H_2(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, então $H_1(X, T) \neq 0$, $H_2(X, T) \neq 0$ e $H_3(X, T) \neq 0$.*

O próximo teorema mostrará que os pares da forma p=2q, com q ímpar, são especiais neste contexto de se detectar classes de homologia equivariantes não nulas.

Teorema 3.1.3 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, sendo X um espaço topológico conexo por caminhos. Suponhamos p=2q, com q ímpar. Se $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq j \leq n$ (para algum natural $n \geq 1$), então $J_j(\theta(c_j)) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n+1$.*

Demonstração: Pelo lema 3.1.5, temos as cadeias $c_0, c_1, c_2, ..., c_{n+1}$ satisfazendo as condições lá especificadas. Pelas provas dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2, temos que $J_1(\theta(c_1)) = 1, J_2(\theta(c_2)) = \frac{p}{2} = q$ e $J_3(\theta(c_3)) = \frac{p}{2} = q$.

Suponhamos, por indução, já provado que $J_j(\theta(c_j)) = q$, onde $3 \leq j \leq n$. Afirmamos que $J_{j+1}(\theta(c_{j+1})) = q$.

Considerando, inicialmente, j ímpar, teremos

$$J_{j+1}(\theta(c_{j+1})) = J_j(\psi(\partial(c_{j+1}))) = J_j(\psi(\theta(c_j))) = J_j(\frac{p}{2}\theta(c_j)) = qJ_j(\theta(c_j)) = q^2.$$

Pelo lema 3.1.4, como q é ímpar, $q^2 \equiv q \,\mathrm{mod}(2\mathrm{q})$. Segue então que $J_{j+1}(\theta(c_{j+1})) = q$.

Considerando, neste momento, j par, teremos

$$J_{j+1}(\theta(c_{j+1})) = J_j(\psi(\partial(c_{j+1}))) = J_j(\psi(\nu(c_j))) = J_j(\theta(c_j)) = q.$$

Como $q \neq 0$ mod 2q=p, o teorema está provado.

∎

Observação 3.1.4 *Em outras palavras, se X conexo por caminhos admite ação livre de $\mathbb{Z}_p$ gerada por T, onde p=2q, com q ímpar, e se $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ para $1 \leq j \leq n$, então $H_j(X, T) \neq 0$, para todo $1 \leq j \leq n+1$.*

3.2 O isomorfismo $\Gamma : S_r(X, T) \to S_r(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$

Uma vez mostrado que sob certas condições sobre o $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T) existem classes $\xi \in H_i(X, T)$ com $J_i(\xi) \neq 0$ (e consequentemente $\xi \neq 0$), a aplicação desse fato requer conhecimentos sobre a homologia equivariante $H_*(X, T)$; mais precisamente, conhecer para quais $\mathbb{Z}_p$-espaços (X,T) teríamos $H_i(X, T) = 0$ ou alguma coisa sobre a computação da homologia equivariante. Nessa direção, mostraremos que, sob certas condições topológicas, a homologia equivariante do $\mathbb{Z}_p$-espaço (X,T) é $\mathbb{Z}_p$-isomorfa à homologia singular com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ do espaço de órbitas $\frac{X}{T}$ (lembrando que a homologia singular é, em algum sentido, computável). Para tanto, lembremos inicialmente que a homologia equivariante $H_*(X, T)$ é a homologia associada ao complexo de cadeias $S_*(X, T)$, enquanto que a homologia singular é a homologia associada ao complexo de cadeias singular com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$, $S_*(X, \mathbb{Z}_p)$. Então, para o objetivo acima, basta exibir uma aplicação de cadeias $\Gamma : S_*(X,T) \to S_*(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$, que seja um isomorfismo em cada nível. Isto decorre do seguinte

Lema 3.2.1 *Sejam $C = \{C_n, \partial_n\}, D = \{D_n, \delta_n\}$ complexos de cadeias de R-módulos, onde R é um anel comutativo com unidade. Seja $\phi = \{\phi_n\} : C \to D$ uma aplicação de cadeias tal que, para cada n, $\phi_n : C_n \to D_n$, seja um R-isomorfismo. Então $\phi_* : H_n(C) \to H_n(D)$ é isomorfismo, para todo n.*

Demonstração:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \phi_{n+1} & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\delta_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

Sendo $\phi = \{\phi_n\} : C \to D$ uma aplicação de cadeias, então $\phi_* : H_n(C) \to H_n(D)$ é um homomorfismo. Resta-nos mostrar então que $\{\phi_*\}$ é uma bijeção.

Seja $\alpha + B_n(C) \in H_n(C)$, com $\alpha \in Z_n(C)$, e suponha que $\phi_*(\alpha + B_n(C)) = 0$. Logo $\phi_n(\alpha) + B_n(D) = B_n(D)$, ou seja, $\phi_n(\alpha) \in B_n(D)$. Deste modo, existe $\beta \in D_{n+1}$ tal que $\delta_{n+1}(\beta) = \phi_n(\alpha)$. Como ϕ_{n+1} é uma aplicação sobrejetora, existe $\gamma \in C_{n+1}$ tal que $\phi_{n+1}(\gamma) = \beta$. Então, sendo ϕ uma aplicação de cadeias, temos $\phi_n(\partial_{n+1}(\gamma)) = \delta_{n+1}(\phi_{n+1}(\gamma)) = \delta_{n+1}(\beta) = \phi_n(\alpha)$. Sendo ϕ_n uma aplicação injetora, segue então que $\partial_{n+1}(\gamma) = \alpha$, ou seja, $\alpha \in B_n(C)$ e, desta forma, $\alpha + B_n(C) = 0$, donde podemos concluir que ϕ_* é injetora.

Consideremos agora $\beta + B_n(D) \in H_n(D)$, com $\beta \in Z_n(D)$. Como ϕ_n é sobrejetora, existe $\alpha \in C_n$ tal que $\phi_n(\alpha) = \beta$. Sendo ϕ uma aplicação de cadeias, temos $\phi_{n-1}(\partial_n(\alpha)) = \delta_n(\phi_n(\alpha)) = \delta_n(\beta) = 0$, já que $\beta \in Z_n(D)$. Sendo ϕ_{n-1} uma aplicação injetora, então $\partial_n(\alpha) = 0$ e, deste modo, segue que $\alpha \in Z_n(C)$ e, portanto, $\alpha + B_n(C) \in H_n(C)$. Assim, por definição,

$\phi_*(\alpha + B_n(C)) = \phi_n(\alpha) + B_n(D) = \beta + B_n(D)$, donde concluímos que a aplicação ϕ_* é sobrejetora.

Portanto, $\phi_* : H_n(C) \to H_n(D)$ é um isomorfismo, para cada n.

∎

Com o resultado acima em mãos, passemos à tarefa de construir um isomorfismo de cadeias entre os complexos de cadeias $S_*(X, T)$ *e* $S_*(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$, conforme antes anunciado.

Definição 3.2.1 *Definamos*

$$\Gamma : S_n(X, T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p) \ \ por \ \Gamma(c) = \pi_\sharp(d),$$

onde $c = \theta(d)$, $d \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ *e* $\pi : X \to \frac{X}{T}$ *é a aplicação quociente, definida por* $\pi(x) = [x] = \{T^i(x), \quad i = 0, 1, ..., p-1\}$.

Mostraremos, agora, que a aplicação Γ definida acima satisfaz as condições do Lema 3.2.1. Tais fatos serão mostrados separadamente, através de proposições.

Proposição 3.2.1 $\Gamma : S_n(X, T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ *está bem definida.*

Demonstração: Em outras palavras, queremos mostrar que $\Gamma(c)$ não depende da maneira de se expressar c como $c = \theta(d)$. Notemos inicialmente que $\pi \circ T^i : X \to \frac{X}{T}$, i=0,1,...,p-1 é tal que $\pi T^i(x) = [T^i(x)] = [x] = \pi(x)$, para todo $x \in X$, ou seja, $\pi \circ T^i = \pi$, para cada i=0,1,...,p-1. Suponhamos que $c \in S_n(X, T)$ é tal que $c = \theta(d) = \theta(d')$, com $d, d' \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$. Escrevendo $d = a_1 d_1 + a_2 d_2 + ... + a_s d_s$, onde $a_i \in \mathbb{Z}_p$ e $d_i \in C_n(X)$, teremos, pela observação 2.2.2, que $d' = a_1 T_\sharp^{j_1}(d_1) + a_2 T_\sharp^{j_2}(d_2) + ... + a_s T_\sharp^{j_s}(d_s)$, para certos $0 \leq j_1, j_2, ..., j_s \leq p-1$. Então teremos que

$$\pi_\sharp(d') = \pi_\sharp(\sum_{i=1}^{s} a_i T_\sharp^{j_i}(d_i)) = \sum_{i=1}^{s} a_i(\pi_\sharp(T_\sharp^{j_i}(d_i))) =$$

$$\sum_{i=1}^{s} a_i((\pi \circ T^{j_i})_\sharp(d_i)) = \sum_{i=1}^{s} a_i \pi_\sharp(d_i) = \pi_\sharp(\sum_{i=1}^{s} a_i d_i) = \pi_\sharp(d),$$

o que mostra o resultado.

∎

Proposição 3.2.2 *A aplicação* $\Gamma : S_n(X,T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ *definida acima é um* $\mathbb{Z}_p$*-homomorfismo.*

Demonstração: Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ *e* $c, c' \in S_n(X,T)$, onde $c = \theta(d)$ *e* $c' = \theta(d')$, *com* $d, d' \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$. Então $\alpha c + c' = \alpha\theta(d) + \theta(d') = \theta(\alpha d + d')$ e, portanto,

$$\Gamma(\alpha c + c') = \pi_\sharp(\alpha d + d') = \alpha \pi_\sharp(d) + \pi_\sharp(d') = \alpha\Gamma(c) + \Gamma(c'),$$

donde concluímos que Γ é um $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo.

∎

Proposição 3.2.3 *O* $\mathbb{Z}_p$*-homomorfismo* $\Gamma : S_n(X,T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ *é uma aplicação de cadeias.*

Demonstração: Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & S_n(X,T) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X,T) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma & & \\
\cdots & \longrightarrow & S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Seja $c \in S_n(X,T)$ e suponhamos que $c = \theta(d)$, *com* $d \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$. Então, sendo θ uma aplicação de cadeias, temos $\partial(c) = \partial(\theta(d)) = \theta(\partial(d))$ e, desta forma, segue da definição que $\Gamma(\partial(c)) = \pi_\sharp(\partial(d))$. Agora, por outro lado, $\partial(\Gamma(c)) = \partial(\pi_\sharp(d)) = \pi_\sharp(\partial(d))$, já que $\pi_\sharp$ é uma aplicação de cadeias. Assim, $\Gamma(\partial(c)) = \partial(\Gamma(c))$, donde segue que Γ é uma aplicação de cadeias.

∎

Observação 3.2.1 *Uma vez estabelecido o fato acima, nosso próximo objetivo é mostrar que, sob certas condições topológicas sobre X, Γ é uma aplicação bijetora em cada nível. Antes, porém, apresentaremos alguns resultados que nos serão úteis para a obtenção desta bijeção.*

Lema 3.2.2 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é um espaço de Hausdorff. Dado o ponto $\overline{x} = \{x, T(x), T^2(x), ..., T^{p-1}(x)\} \in \frac{X}{T}$, então existem abertos $U_0, U_1, ..., U_{p-1}$ satisfazendo:*

1) $T^i(x) \in U_i$, para todo i=0,1,...,p-1;

2) $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$;

3) $U_i = T^i(U_0)$, para todo i=0,1,...,p-1.

Demonstração: A demonstração será feita por indução finita. Inicialmente, construiremos abertos $U_0 \;\; e \;\; U_1$ satisfazendo as condições acima. Sendo X um espaço de Hausdorff e $x \neq T(x)$, existem abertos disjuntos $U_1 \;\; e \;\; V_1$ contendo os pontos x e T(x), respectivamente. Além disso, a continuidade de T nos garante que para o aberto V_1 contendo T(x), existe um aberto U_2 contendo x de tal forma que $T(U_2) \subset V_1$. Fazendo $U = U_1 \cap U_2$, temos que $T(U) = T(U_1 \cap U_2) \subset V_1$ é aberto em X, pois T é um homeomorfismo. Tomando V=T(U), temos o resultado desejado.

Suponhamos que já tenhamos construído abertos $U_0, U_1, ..., U_j$ satisfazendo as condições (1),(2) e (3) e vamos construir um aberto U_{j+1} contendo $T^{j+1}(x)$ e satisfazendo as mesmas condições.

Para $0 \leq l \leq j$, temos que $T^{j+1-l}(T^l(x)) = T^{j+1}(x)$. Assim, utilizando o argumento acima para $T^{j+1-l}, \;\; T^l(x) \;\; e \;\; T^{j+1}(x)$, existem abertos $V_l \;\; e \;\; W_l$ em X tais que $T^l(x) \in V_l, \;\; T^{j+1}(x) \in W_l, \;\; com \;\; V_l \cap W_l = \emptyset \;\; e \;\; T^{j+1-l}(V_l) = W_l$. Sem perda de generalidade, podemos supor ainda que cada V_l está contido em U_l, para l=0,1,...,j, bastando, para isso, considerarmos

$V_l \cap U_l$ (pois, após a intersecção, o aberto não perde as propriedades anteriores). Seja então $U_{j+1} = \bigcap_{l=0}^{j} W_l$ e redefinamos $U_l = (T^{j+1-l})^{-1}(U_{j+1}),\ \ para\ \ 0 \leq l \leq j$. É claro que $U_i \cap U_t = \emptyset$, para todo $0 \leq i, t \leq j$, já que estes U_i redefinidos estão contidos nos abertos U_j considerados na hipótese de indução e, além disso, por construção, $U_{j+1} \cap U_t = \emptyset$, para todo $0 \leq t \leq j$. Em particular, $U_0 = (T^{j+1})^{-1}(U_{j+1})$ e, então, $T^{j+1}(U_0) = U_{j+1}$. Assim, se $1 \leq i \leq j$, $\ (T^{j+1-i})^{-1}(T^{j+1}(U_0)) = (T^{j+1-i})^{-1}(U_{j+1})$ e, deste modo,

$$T^i(U_0) = T^i((T^{j+1})^{-1}(U_{j+1})) = T^{i-j-1}(U_{j+1}) =$$

$$T^{-(j+1-i)}(U_{j+1}) = (T^{j+1-i})^{-1}(U_{j+1}) = U_i$$

e, portanto, U_{j+1} satisfaz as condições desejadas.

∎

Lema 3.2.3 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é um espaço de Hausdorff. Então a aplicação quociente $\pi : X \to \frac{X}{T}$ é um recobrimento a p-folhas.*

Demonstração: Seja $\overline{x} \in \frac{X}{T}$ arbitrário, e considere U_0 um aberto de X contendo x tal como construído no lema anterior. Seja $\overline{U_0} = \pi(U_0) \subset \frac{X}{T}$. Então $\overline{x} \in \overline{U_0}\ \ e\ \pi^{-1}(\overline{U_0}) = U_0 \cup T(U_0) \cup ... \cup T^{p-1}(U_0)$ é aberto em X e, portanto, $\overline{U_0}$ é aberto em $\frac{X}{T}$.

Afirmamos que $\pi_{|_{U_0}} : U_0 \to \pi(U_0)$ é um homeomorfismo. Valendo isso, teremos, para cada $1 \leq j \leq p-1$, $\pi_{|_{T^j(U_0)}} : T^j(U_0) \to \pi(T^j(U_0)) = \pi(U_0)$ será um homeomorfismo, uma vez que $\pi_{|_{T^j(U_0)}} = \pi_{|_{U_0}} \circ T^j$. Claramente, $\pi_{|_{U_0}}$ é contínua e sobrejetora. Pela construção de U_0, se $a, b \in U_0$ são tais que $a \neq b$, como em cada U_i, $\ 0 \leq i \leq p-1$, existe um, e somente um, elemento de cada órbita de a, concluímos que $b \notin orb(a)$. Desta forma, $\pi(a) \neq \pi(b)$ e, portanto, π é injetora.

Resta-nos mostrar que $\pi^{-1}_{|_{\overline{U_0}}} : \overline{U_0} \to U_0$ é contínua. Seja $V \subset U_0$ um aberto de U_0; em particular, V é aberto em X. Pela construção de U_0, qualquer aberto de X contido em U_0 satisfaz as mesmas propriedades estabelecidas acima para U_0. Segue que $\pi^{-1}(\pi(V)) = V \cup T(V) \cup T^2(V) \cup ... \cup T^{p-1}(V)$ é aberto em X e, portanto, $\pi(V)$ é aberto em $\frac{X}{T}$. Como $\pi(V) \subset \overline{U_0}$ *e* $\overline{U_0}$ é aberto em $\frac{X}{T}$, segue-se então que $\pi(V) = (\pi^{-1}_{|_{\overline{U_0}}})^{-1}(V)$ é aberto em $\overline{U_0}$. Deste modo, $\pi^{-1}_{|_{U_0}}$ é contínua e, desta forma, podemos concluir que π é uma aplicação de recobrimento. Observemos ainda que se $[x] \in \frac{X}{T}$, então a cardinalidade de $\pi^{-1}([x])$ é p e, assim, π é um recobrimento a p-folhas.

∎

Lema 3.2.4 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é um espaço de Hausdorff. Sejam Y um espaço conexo e $\phi_1, \phi_2 : Y \to X$ contínuas e tais que $\pi \circ \phi_1 = \pi \circ \phi_2$. Então existe $0 \leq j \leq p-1$ tal que $\phi_1 = T^j \circ \phi_2$.*

Demonstração: Escolhendo $y_0 \in Y$ temos, de acordo com a hipótese, que $(\pi \circ \phi_1)(y_0) = (\pi \circ \phi_2)(y_0)$, ou seja, $orb(\phi_1(y_0)) = orb(\phi_2(y_0))$ e, deste modo, existe $0 \leq j \leq p-1$ tal que $\phi_1(y_0) = T^j \phi_2(y_0)$.

Consideremos o subconjunto $A \subset Y$ definido por $A = \{y \in Y;\ \phi_1(y) = T^j \phi_2(y)\}$. Podemos observar que $A \neq \emptyset$ pois $y_0 \in A$. Como X é um espaço de Hausdorff, temos que A é um subconjunto fechado de Y.

Afirmamos que A é aberto. De fato, seja $y \in A$. Logo, $\phi_1(y) = T^j \phi_2(y)$. Pela prova do lema anterior, existe aberto $V \subset X$ contendo $\phi_2(y)$ tal que $T^i(V) \cap T^l(V) = \emptyset$, para todo $i \neq l$, $0 \leq i, l \leq p-1$ e $\pi_{|_{T^i(V)}}$ é um homeomorfismo para cada $0 \leq i \leq p-1$. Temos que $T^j(\phi_2(y)) = \phi_1(y) \in T^j(V)$. Como $T^j \phi_2$ *e* ϕ_1 são aplicações contínuas, existem abertos W_1 *e* W_2 em Y contendo y e tal que $\phi_1(W_1) \subset T^j(V)$ *e* $T^j \phi_2(W_2) \subset T^j(V)$. Assim, tomando $W = W_1 \cap W_2$, temos que $y \in W$, $\phi_1(W) \subset T^j(V)$ *e* $T^j \phi_2(W) \subset T^j(V)$.

Afirmamos que $W \subset A$. Seja $z \in W$. Então $\phi_1(z) \in T^j(V)$ e $T^j\phi_2(z) \in T^j(V)$. Agora, temos que $\pi_{|_{T^j(V)}} : T^j(V) \to \pi T^j(V)$ é um homeomorfismo e $\pi(T^j\phi_2(z)) = (\pi \circ T^j)(\phi_2(z)) = \pi\phi_2(z)$; também por hipótese, $\pi\phi_2(z) = \pi\phi_1(z)$ e, deste modo, temos que $\pi(T^j\phi_2(z)) = \pi\phi_1(z)$. Sendo π injetora em $T^j(V)$, decorre que $T^j\phi_2(z) = \phi_1(z)$ e, portanto, $z \in A$. Logo, $W \subset A$, donde concluímos que A é aberto.

Como Y é conexo, segue que A=Y e, portanto, $T^j\phi_2 = \phi_1$.

∎

Como consequência temos o

Teorema 3.2.1 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é um espaço de Hausdorff. Então a aplicação de cadeias $\Gamma : S_n(X,T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ é injetora.*

Demonstração: Sendo Γ um homomorfismo, basta mostrar que, se $c \in S_n(X,T)$ é não nulo, então $\Gamma(c)$ é não nulo. Seja $c = \theta(d)$, onde $d \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$, digamos $d = r_1\phi_1 + r_2\phi_2 + ... + r_t\phi_t$, com $r_i \in \mathbb{Z}_p$ e $\phi_i \in C_n(X)$. Como $c \neq 0$, consequentemente $d \neq 0$. Olhando d como a função $d : C_n(X) \to \mathbb{Z}_p$ tal que $d(\phi_j) = r_j, \ \ 1 \leq j \leq t \ \ e \ \ d(\phi) = 0$ quando $\phi \neq \phi_j$, o fato de que $d \neq 0$ significa que $t \geq 1, \ \phi_i \neq \phi_j, \ \ se \ \ i \neq j \ \ e \ r_i \neq 0, \ \ i = 1, 2, ..., t$. Na prova do Teorema 2.2.1, obtivemos que $T_\sharp$ determina uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ na coleção A formada pelos n-simplexos singulares que compõem a cadeia c, e que d é obtido através da escolha de um representante de cada órbita da ação em questão, acompanhado do $\mathbb{Z}_p$-coeficiente comum a todos os elementos de uma mesma órbita. Em outras palavras, isso significa que se $i \neq j$, então ϕ_i e ϕ_j pertencem a órbitas distintas da ação de $T_\sharp$ em A. Agora,

$$\Gamma(c) = \pi_\sharp(d) = r_1(\pi \circ \phi_1) + r_2(\pi \circ \phi_2) + ... + r_t(\pi \circ \phi_t)$$

é uma n-cadeia em $S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ e pode ser vista como a função $\Gamma(c) : C_n(\frac{X}{T}) \to \mathbb{Z}_p, \ \ onde \ \ \Gamma(c)(\pi\phi_j) = r_j, \ \ 1 \leq j \leq t, \ \ e \ \Gamma(c)(\psi) = 0, \ \ se \ \psi \neq \pi\phi_j, \ \ j =$

$1, 2, ..., t$. Notemos que $t \geq 1$ *e* $r_i \neq 0$, para todo i; adicionalmente, caso existissem $0 \leq i, j \leq t$, com $i \neq j$, tal que $\pi\phi_i = \pi\phi_j$, existiria, pelo lema anterior, $0 \leq k \leq p-1$ com $\phi_i = T^k \circ \phi_j = (T^k)_\sharp \phi_j = (T_\sharp)^k \phi_j$ e, assim, ϕ_i *e* ϕ_j pertenceriam à mesma órbita de $T_\sharp$, o que é um absurdo. Segue então que $\pi \circ \phi_i \neq \pi \circ \phi_j$, para todo i,j, com $i \neq j$. Portanto, $\Gamma(c) \neq 0$, concluindo a nossa demonstração. ∎

O último passo para obter o isomorfismo $\Gamma : S_n(X, T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ é mostrar a sobrejetividade de Γ. Para tanto, necessitaremos impor duas condições adicionais sobre X, a saber, conexidade e conexidade local por caminhos; isso se deve ao fato de que usaremos o Teorema Fundamental do Levantamento.

Para provar que Γ é sobrejetora, basta provar que $\pi_\sharp : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetora, devido ao seguinte fato: se $\pi_\sharp : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetora, então para todo $\alpha \in S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$, existe $\overline{\alpha} \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ tal que $\pi_\sharp(\overline{\alpha}) = \alpha$. Deste modo, tomando o elemento $\theta(\overline{\alpha}) \in S_n(X, T)$, teremos $\Gamma(\theta(\overline{\alpha})) = \pi_\sharp(\overline{\alpha}) = \alpha$ e, assim, $\Gamma : S_n(X, T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetora. Por outro lado, para provar que $\pi_\sharp : S_n(X, \mathbb{Z}_p) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetora, precisamos apenas provar isto nos geradores, ou seja, dado $\phi \in C_n(\frac{X}{T})$, basta mostrar que existe uma cadeia $\phi' \in S_n(X, \mathbb{Z}_p)$ tal que $\pi_\sharp(\phi') = \phi$, ou particularmente, $\phi' \in C_n(X)$ tal que $\pi_\sharp(\phi') = \pi \circ \phi' = \phi$.

Teorema 3.2.2 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é um espaço de Hausdorff conexo e localmente conexo por caminhos. Então $\Gamma : S_n(X, T) \to S_n(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetora.*

Demonstração: Seja $\phi : \Delta_n \to \frac{X}{T}$ um n-simplexo singular. Sabemos que Δ_n é localmente conexo por caminhos. Por outro lado, sendo $\pi : X \to \frac{X}{T}$ um recobrimento a p-folhas então, em particular, π é um homeomorfismo local. Assim, como X é localmente conexo por caminhos, $\frac{X}{T}$ também o será. Adicionalmente, Δ_n é um espaço contrátil e, portanto, $\phi_*(\pi_1(\Delta_n)) = \phi_*(\{0\}) = \{0\} \subset \pi_*(\pi_1(X))$. Pelo Teorema Fundamental do Levantamento, temos que existe uma aplicação $\phi' : \Delta_n \to X$ tal que $\pi \circ \phi' = \phi$, o que mostra que Γ é sobrejetora através das considerações prévias acima. ∎

Sumarizando, provamos o seguinte

Teorema 3.2.3 *Suponhamos (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde X é um espaço de Hausdorff conexo e localmente conexo por caminhos. Então a aplicação Γ_* : $H_r(X,T) \to H_r(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$, induzida pela aplicação de cadeias $\Gamma : S_r(X,T) \to S_r(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p)$ acima considerada, é um $\mathbb{Z}_p$-isomorfismo.*

Observação 3.2.2 *É conhecido o fato de que $H_j(RP(n), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, para $1 \leq j \leq n$. Aqui, RP(n) é o espaço projetivo real n-dimensional, dado pelo espaço de órbitas $\frac{S^n}{A}$, onde a aplicação $A : S^n \to S^n$ é a antipodal. Observe que $H_j(S^n, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq j \leq n-1$, S^n é um espaço de Hausdorff localmente conexo por caminhos e o fato acima nos diz, em particular, que $H_j(\frac{S^n}{A}, \mathbb{Z}_2) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n$. Esse fato pode ser generalizado através da seguinte consequência do teorema acima.*

Corolário 3.2.1 *Seja (X,T) um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde p=2q, com q ímpar, X é um espaço de Hausdorff conexo e localmente conexo por caminhos, e $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq j \leq n$. Então $H_j(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n+1$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, temos que $H_j(\frac{X}{T}, \mathbb{Z}_p) \cong H_j(X,T)$, para qualquer j. Portanto, é suficiente mostrar que $H_j(X,T) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n+1$. Sendo X conexo por caminhos e p=2q, com q ímpar, e sendo $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq j \leq n$, o Teorema 3.1.3 nos diz que o homomorfismo índice $J_j : H_j(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ é tal que $J_j(H_j(X,T)) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n+1$ e, consequentemente, $H_j(X,T) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n+1$. ∎

Outras consequências do mesmo gênero do resultado acima são:

Corolário 3.2.2 *Se (X,T) é um $\mathbb{Z}_p$-espaço, onde p é qualquer par, e X um espaço de Hausdorff conexo e localmente conexo por caminhos, com $H_1(X,\mathbb{Z}_p) = 0$ e $H_2(X,\mathbb{Z}_p) = 0$, então $H_j(\frac{X}{T},\mathbb{Z}_p) \neq 0$, para j=1,2,3.*

Demonstração: O argumento é completamente similar ao do corolário 3.2.1, nesse caso utilizando-se o teorema 3.1.2.

∎

Corolário 3.2.3 *Seja X um espaço de Hausdorff conexo e localmente conexo por caminhos, admitindo uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ gerado por $T : X \to X$ (p natural qualquer), então $H_1(\frac{X}{T},\mathbb{Z}_p) \neq 0$.*

Demonstração: O argumento é completamente similar ao do corolário 3.2.1, nesse caso utilizando-se o teorema 3.1.1.

∎

Outra consequência na mesma direção é a seguinte: lembremos que no exemplo 1.2.4, se n é ímpar, então S^n admite uma aplicação standard de grau p, $p \geq 2$, $T : S^n \to S^n$, tal que a correspondente ação de $\mathbb{Z}_p$ em S^n é livre. Nesse caso, o espaço de órbitas é chamado "Espaço de Lens" n-dimensional, denotado por L_p^n. É conhecido o fato de que $H_j(L_p^n,\mathbb{Z}_p) \neq 0$, para cada $1 \leq j \leq n$ [12]. Se p=2q, com q ímpar, o fato acima é um caso particular do corolário 3.2.1. Analogamente, se p é um número par qualquer e $n \geq 3$, temos que $H_j(L_p^n,\mathbb{Z}_p) \neq 0$, para j=1,2,3. Também para um número p qualquer é verdade que $H_1(L_p^n,\mathbb{Z}_p) \neq 0$.

3.3 Um teorema tipo Borsuk-Ulam concernente à existência de aplicações equivariantes

Conforme comentamos na introdução, o Teorema de Borsuk-Ulam clássico estabelece que, se $f : S^n \to S^m$ é contínua e A-equivariante (A=antípoda), então $n \geq m$. Uma consequência disso é que se a aplicação contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^m$ é tal que $n \geq m$, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$ (vide teorema 3.5.1). Esse resultado levanta uma questão natural: a possibilidade de estender o resultado para $\mathbb{Z}_p$, com $p > 2$, no caso em que n e m são ímpares e a ação de $\mathbb{Z}_p$ em S^n é aquela dada pela aplicação standard de grau p, $T : S^n \to S^n$. Outra questão natural é a investigação sobre até que ponto a geometria do $\mathbb{Z}_p$-espaço (S^n, T) é ou não fundamental para o resultado. Em outras palavras, questiona-se a existência de uma classe de $\mathbb{Z}_p$-espaços mais gerais, que inclua a esfera S^n (domínio) com ação standard de $\mathbb{Z}_p$ como caso particular, e analogamente, a existência de uma classe de $\mathbb{Z}_p$-espaços mais gerais que inclua a esfera S^m (contra-domínio) com ação standard de $\mathbb{Z}_p$ como caso particular, de tal maneira que valha, para tais $\mathbb{Z}_p$-espaços, resultado tipo Borsuk-Ulam como acima mencionado.

Pensemos primeiro, nesta direção, em substituir a esfera domínio S^n, com a aplicação antipodal $A : S^n \to S^n$, por um espaço topológico mais geral X, dotado de uma involução $T : X \to X$ sem pontos fixos, e tal qual X possua a propriedade homológica de que $H_j(X, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq j \leq n-1$. Nesta direção, J.W.Walker provou em [13] o seguinte resultado: se X é um espaço de Hausdorff, conexo por caminhos, equipado com involução sem pontos fixos $T : X \to X$ e satisfazendo $H_j(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ para $1 \leq j \leq n-1$, então não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$-equivariante $f : (X, T) \to (S^m, A)$, quando $n > m$.

O teorema de Walker acima foi posteriormente generalizado para

$p > 2$ por T.Kobayashi em [5]; o seguinte resultado foi provado: se X é um espaço de Hausdorff, conexo por caminhos, equipado com ação livre de $\mathbb{Z}_p$ ($p \geq 2$) gerada por uma aplicação periódica de grau p $S : X \to X$ e tal que $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq j \leq n-1$, então não existe aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante $f : (X, S) \to (S^m, T)$ quando $n > m$, onde $T : S^m \to S^m$ é a aplicação standard de grau p e m é ímpar. Notemos que tal resultado é uma generalização simultânea do Teorema de Borsuk-Ulam clássico, o qual não tinha ainda sido provado para $p > 2$, e do Teorema de Walker. Enfatizamos que tanto na prova de J.W.Walker quanto na de Kobayashi, a geometria do $\mathbb{Z}_p$-espaço (S^m, T) do contradomínio é fundamental. Informalmente, isso pode ser explicado da seguinte maneira: em S^1, consideremos os arcos $[e^{\frac{2\pi ij}{p}}, e^{\frac{2\pi i(j+1)}{p}}]$, j=0,1,2,...,p-1, considerados como 1-simplexos singulares $\alpha_j : \Delta_1 \to S^1$. É conhecido o fato de que a classe de homologia do 1-ciclo $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_{p-1}$ é o gerador de $H_1(S^1, \mathbb{Z}_p)$. Essa idéia pode ser extrapolada para esferas ímpares S^{2q+1}. Nesse caso, considerando S^{2q+1} equipada com a ação standard de $\mathbb{Z}_p$, existe uma decomposição de S^{2q+1}, chamada "decomposição celular $\mathbb{Z}_p$-equivariante de S^{2q+1}" (vide T.Kobayashi), em p células de dimensão 2q+1, a saber, $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}$, tal que $\alpha_j = T^j(\alpha_0)$, j=0,1,...,p-1. Mais ainda, a (2q+1)-cadeia $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_{p-1}$, onde α_i está sendo considerada como um (2q+1)-simplexo, é um ciclo que representa um gerador de $H_{2q+1}(S^{2q+1}, \mathbb{Z}_p)$. Em linhas gerais, a idéia por trás da demonstração do Teorema de Kobayashi (e de Walker também) é a seguinte: supõe-se, por absurdo, que exista aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante $f : (X, S) \to (S^m, T)$. A seguir, com uso da induzida em $\mathbb{Z}_p$-homologia singular $f_* : H_*(X, \mathbb{Z}_p) \to H_*(S^m, \mathbb{Z}_p)$, certos ciclos com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ de $S_*(X, \mathbb{Z}_p)$ são transportados para $H_*(S^m, \mathbb{Z}_p)$ e, através da comparação destes com certos j-ciclos geométricos de S^m, $1 \leq j \leq m$, provindos da decomposição de S^m obtida através da ação standard de $\mathbb{Z}_p$, comparação esta que culmina com uma análise sobre o gerador m-dimensional (m=2q+1) $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{p-1}$ acima mencionado, conclui-se que o espaço X obrigatoriamente deve possuir uma classe de homologia singular m-dimensional com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$, $\beta \in H_m(X, \mathbb{Z}_p)$, tal que $f_*(\beta) = [\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{p-1}]$, o que significa que β é uma classe de homologia m-dimensional não nula de X. Se $n > m$, então $n - 1 \geq m$, o que conduz a uma contradição com a hipótese prévia de que $H_j(X, \mathbb{Z}_p) = 0, \;\; para \;\; 1 \leq j \leq m - 1$.

Em outras palavras, o m-ciclo $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_{p-1}$ é crucial para o argumento por contradição acima; a classe de homologia não nula de X, que não existe por hipótese, é herdada da geometria de (S^m, T) através da suposta aplicação equivariante $f : (X, S) \to (S^m, T)$.

Os resultados do capítulo anterior, concernentes ao $\mathbb{Z}_p$-homomorfismo índice, permitem, para alguns valores de p, a substituição do contradomínio (S^m, T) por $\mathbb{Z}_p$-espaços mais gerais (Y,T), com Y sendo Hausdorff e localmente conexo por caminhos tal que $H_{m+1}(Y, T) = 0$. Como $\frac{S^m}{T} = L_p^m$ é o espaço de Lens m-dimensional (é uma variedade de dimensão m), então $H_{m+1}(\frac{S^m}{T}, \mathbb{Z}_p) = 0$ e, portanto, a categoria de $\mathbb{Z}_p$-espaços (Y,T) acima descrita inclui (S^m, T). Portanto, isso mostra que a geometria do $\mathbb{Z}_p$-espaço (S^m, T) do contradomínio é também dispensável. Por exemplo, no lugar de (S^m, T), pode-se considerar qualquer variedade m-dimensional M^m, equipada com ação livre de $\mathbb{Z}_p$ gerada por $T : M^m \to M^m$. De fato, M^m é um espaço de Hausdorff localmente conexo por caminhos; além disso, pelo Lema 3.2.2, se $x \in M^m$, existe aberto $U \subset M$ contendo x tal que $T^i(U) \cap T^j(U) = \emptyset$, se $0 \leq i, j \leq p-1, \;\; com \;\; i \neq j$. Como M^m é m-variedade, U pode ser considerado um m-disco aberto (o mesmo para cada $T^i(U)$). Então, se $\pi : M^m \to \frac{M^m}{T}$ é a aplicação quociente, $\pi(U)$ será um aberto contendo $\pi(x)$ em $\frac{M^m}{T}$, o qual é ainda topologicamente um m-disco. Isso mostra que $\frac{M^m}{T}$ é uma m-variedade e então $H_{m+1}(\frac{M^m}{T}, \mathbb{Z}_p) = 0$.

Para dar alguns exemplos $(M^m, T) \neq (S^m, T)$ como acima, o seguinte resultado é útil: suponha que G atua nos espaços X e Y via ações $\cdot : G \times X \to X$ e $* : G \times Y \to Y$, respectivamente. Então temos a ação produto

$$\diamond : G \times X \times Y \to X \times Y \text{ dada por } g \diamond (x, y) = (g \cdot x, g * y).$$

Observe que se $\cdot$ é livre e $g \diamond (x, y) = (g \cdot x, g * y)$, então $g \cdot x = x$, donde segue que g é o elemento neutro de G. Isso mostra que se uma das ações que compõem uma ação produto é livre, então a ação produto é livre. Como caso particular dessa situação, se m é ímpar e $T : S^m \to S^m$ é a ação standard de $\mathbb{Z}_p, \ \ p \geq 2$, em S^m, então temos a ação produto

$$\underbrace{T \times T \times \cdots \times T}_{q \text{ vezes}} : S^m \times S^m \times ... \times S^m \to S^m \times S^m \times ... \times S^m,$$

a qual é livre pois T é livre.

Para dar exemplos que não sejam produto de esferas ímpares, observe que se G e H são grupos atuando livremente em X e Y, respectivamente, então a ação $G \oplus H : X \times Y \to X \times Y$, dada por $(g, h) \cdot (x, y) = (g \cdot x, h \cdot y)$ ainda é livre. Usando isso, seja M^p qualquer variedade p-dimensional, equipada com involução $\varphi : M^p \to M^p$ sem pontos fixos (por exemplo, a antipodal em esferas de qualquer dimensão), e seja V^r uma variedade r-dimensional qualquer, equipada com homeomorfismo periódico de grau p $T : V^r \to V^r$, com p ímpar, o qual gere uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em V^r (por exemplo, as esferas ímpares com ação standard de $\mathbb{Z}_p$). Então, pelo fato anterior, temos que $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_p$ atua livremente em $M^p \times V^r$, e sabemos que, como p é ímpar, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{2p}$, gerado pela aplicação de grau 2p dada por $\varphi \times T : M^p \times V^r \to M^p \times V^r$. Por exemplo, temos uma ação μ desse tipo de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10}$ em $S^2 \times S^7$, e o teorema que provaremos a seguir abrange o fato de que não existe aplicação equivariante $f : (S^{11}, T) \to (S^2 \times S^7, \mu)$, com T sendo a aplicação standard de grau 10.

Sumarizando, provaremos o seguinte

Teorema 3.3.1 *Sejam (X,T) e (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços, com p=2q, q ímpar. Suponhamos que:*

i) (condições topológicas sobre X e Y) X é conexo por caminhos e Y é Hausdorff e localmente conexo por caminhos.

ii) (condições homológicas sobre X e Y) Para algum natural $n \geq 1$, $H_r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq n$ e $H_{n+1}(\frac{Y}{S}, \mathbb{Z}_p) = 0$.

Então, não existe aplicação equivariante $f : (X,T) \to (Y,S)$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista aplicação equivariante $f : (X,T) \to (Y,S)$. Então, por ser f equivariante, temos o homomorfismo induzido em homologia equivariante $f_* : H_{n+1}(X,T) \to H_{n+1}(Y,S)$. Como X é conexo por caminhos, $H_r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq n$, e sendo p=2q, com q ímpar, pelo Teorema 3.1.3 temos que o homomorfismo $\mathbb{Z}_p$-índice $J_{n+1} : H_{n+1}(X,T) \to \mathbb{Z}_p$ é tal que $J_{n+1}(\xi) \neq 0$ para algum $\xi \in H_{n+1}(X,T)$. Pela Proposição 2.4.1, temos que $J_{n+1} : H_{n+1}(Y,S) \to \mathbb{Z}_p$ é tal que $J_{n+1}(f_*(\xi)) = J_{n+1}(\xi) \neq 0$. Em particular, $H_{n+1}(Y,S) \neq 0$. Por outro lado, como Y é Hausdorff e localmente conexo por caminhos, pelo Teorema 3.2.3 temos que $H_{n+1}(Y,S)$ é isomorfo a $H_{n+1}(\frac{Y}{S}, \mathbb{Z}_p)$. Assim, $H_{n+1}(\frac{Y}{S}, \mathbb{Z}_p) \neq 0$, contrariando a hipótese.

∎

Na mesma direção, temos o

Teorema 3.3.2 *Sejam (X,T) e (Y,S) $\mathbb{Z}_p$-espaços, com p sendo um inteiro par qualquer. Suponhamos X e Y satisfazendo as mesmas condições topológicas do teorema anterior e suponha $H_1(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, $H_2(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ e $H_3(\frac{Y}{S}, \mathbb{Z}_p) = 0$. Então não existe aplicação equivariante $f : (X,T) \to (Y,S)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.2, existe $\xi \in H_3(X,T)$ tal que $J_3(\xi) \neq 0$. O argumento restante é completamente semelhante ao do teorema anterior.

∎

Exemplo 3.3.1 *Um exemplo da situação acima é: $X = S^3$ com ação standard de Z_{2p}, p ímpar, $Y = S^1 \times S^1$, com ação de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{2p}$, como anteriormente mencionado.*

3.4 Um teorema tipo Borsuk-Ulam concernente à existência de T-coincidências

Seja X um espaço topológico equipado com involução $T : X \to X$ sem pontos fixos, e seja $f : X \to Y$ aplicação contínua, onde Y é um espaço qualquer. Um ponto $x \in X$ é chamado um ponto de "T-coincidência" se f(x)=f(T(x)). Nesta seção, demonstraremos um teorema tipo Borsuk-Ulam, concernente à existência de tais pontos.

Seja X um espaço topológico de Hausdorff e considere $\Delta = \{(x,x);\ x \in X\} \subset X \times X$ a "diagonal" de $X \times X$.

Lema 3.4.1 *Se X é um espaço de Hausdorff localmente conexo por caminhos, então $X \times X - \Delta$ é também um espaço de Hausdorff localmente conexo por caminhos.*

Demonstração: Sendo X um espaço de Hausdorff, então $X \times X$ também o é e, portanto, $X \times X - \Delta$ é um espaço de Hausdorff pois este é um subespaço de um espaço de Hausdorff.

Como X é um espaço de Hausdorff, temos que Δ acima definido é um subconjunto fechado em $X \times X$ e, desta forma, $X \times X - \Delta$ é aberto em

$X \times X$. Agora, sendo $X \times X$ localmente conexo por caminhos (já que o produto cartesiano de espaços localmente conexos por caminhos é ainda localmente conexo por caminhos) e como subconjuntos abertos de espaços localmente conexos por caminhos possuem ainda esta propriedade, segue então que
$X \times X - \Delta$ é localmente conexo por caminhos.

∎

Em $X \times X$, considere a involução "twist" $S : X \times X \to X \times X$ definida por $S(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$. Esta tem pontos fixos, a saber, a nossa diagonal Δ. Desta forma, no espaço $X \times X - \Delta$ temos a involução livre, que continuaremos denotando por S, $S : X \times X - \Delta \to X \times X - \Delta$ dada por $S(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

Definição 3.4.1 *Dado X um espaço topológico, denotemos $X^* = \frac{X \times X - \Delta}{S}$.*

O teorema a seguir é o resultado tipo Borsuk-Ulam anunciado no início desta seção.

Teorema 3.4.1 *Seja X um espaço conexo por caminhos e consideremos $T : X \to X$ uma involução livre. Suponhamos $H_1(X, \mathbb{Z}_2) = 0, H_2(X, \mathbb{Z}_2) = 0, \cdots, H_{n-1}(X, \mathbb{Z}_2) = 0$. Seja Y um espaço de Hausdorff localmente conexo por caminhos e suponhamos que $H_n(Y^*, \mathbb{Z}_2) = 0$. Então, para toda função $f : X \to Y$, existe um ponto de T-coincidência, ou seja, existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que para todo $x \in X$ se tenha $f(x) \neq f(T(x))$ e consideremos a aplicação $F : X \to Y \times Y$ definida por $F(x) = (f(x), f(T(x)))$. Como vimos acima, a aplicação $S : Y \times Y \to Y \times Y$ dada por S(x,y)=(y,x) é uma involução contínua cujo conjunto de pontos fixos é $\Delta = \{(a, a);\ \ a \in Y\} \subset Y \times Y$. Dessa forma, $S : (Y \times Y) - \Delta \to (Y \times Y) - \Delta$

é livre de pontos fixos. Como por hipótese, $f(x) \neq f(T(x))$, para todo $x \in X$, segue que F(X) está contido em $(Y \times Y) - \Delta$. Logo, podemos considerar a aplicação $F : (X, T) \to (Y \times Y - \Delta, S)$. Afirmamos que F é $\mathbb{Z}_2$-equivariante com relação a T e S. De fato, para todo $x \in X$,

$$F(T(x)) = (f(T(x)), f(T^2(x))) = (f(T(x)), f(x)) =$$

$$S(f(x), f(T(x))) = S(F(x))$$

e, então, F é $\mathbb{Z}_2$-equivariante com relação a T e S. Como X é conexo por caminhos com $H_i(X, \mathbb{Z}_2) = 0, \;\; para \;\; 1 \leq i \leq n-1$, e como $Y \times Y - \Delta$ é Hausdorff e localmente conexo por caminhos com $H_n(\frac{Y \times Y - \Delta}{S}, \mathbb{Z}_2) = H_n(Y^*, \mathbb{Z}_2) = 0$, o Teorema 3.3.1, particularizado para p=2 (2=2.1, com 1 ímpar), nos diz que não existe aplicação equivariante $X \to Y \times Y - \Delta$, estabelecendo a contradição e provando o teorema.

∎

Observação 3.4.1 *Seja Y^k um CW-complexo k-dimensional. Então é possível introduzir em $(Y^k)^* = \frac{Y^k \times Y^k - \Delta}{S}$ uma estrutura de CW-complexo 2k-dimensional (por exemplo, vide em [2] um argumento mostrando isso). Desta forma, $H^{2k+1}((Y^k)^*, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$. Portanto, uma consequência do teorema acima é o fato de que, dada qualquer função contínua $f : S^n \to Y^k$, onde $n > 2k$, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Este caso particular do teorema acima foi provado por M. Izydorek e J. Jaworowski em [4].*

3.5 Uma generalização do tradicional teorema de Borsuk-Ulam

O tradicional teorema de Borsuk-Ulam nos diz que toda função contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^m$ possui coincidência antipodal (ou seja, um ponto $x \in S^n$

tal que f(x)=f(-x)) caso $n \geq m$. Observe que S^n é um espaço topológico conexo por caminhos tal que $H_i(S^n, \mathbb{Z}_2) = 0, \ \ para \ \ 1 \leq i \leq n-1$; desta forma, o teorema a seguir é uma generalização deste resultado.

Teorema 3.5.1 *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos com involução sem pontos fixos $T : X \to X$ e tal que $H_r(X, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n-1$, para algum natural n. Então, se $n \geq m$, toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}^m$ possui pelo menos um ponto de T-coincidência.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) \neq f(T(x))$, para todo $x \in X$. Consequentemente, podemos considerar a função contínua $F : X \to S^{m-1}$ definida por $F(x) = \frac{f(x)-f(T(x))}{\|f(x)-f(T(x))\|}$.

Afirmamos que $F : (X, T) \to (S^{m-1}, A)$, onde A é a aplicação antipodal, é equivariante, ou seja, $F(T(x)) = -F(x)$, para todo $x \in X$. De fato, dado $x \in X$, então

$$F(T(x)) = \frac{f(T(x)) - f(T(T(x)))}{\| f(T(x)) - f(T(T(x))) \|} = \frac{f(T(x)) - f(x)}{\| f(T(x)) - f(x) \|} = -F(x).$$

Mas, como $n \geq m$, temos então que $n > m-1$, implicando que $H_n(\frac{S^{m-1}}{A}, \mathbb{Z}_2) = H_n(RP(m-1), \mathbb{Z}_2) = 0$. Temos então os ingredientes: X conexo por caminhos com $H_i(X, \mathbb{Z}_2) = 0, \ \ para \ \ 1 \leq i \leq n-1$, S^{m-1} Hausdorff e localmente conexa por caminhos, e com $H_m(\frac{S^{m-1}}{A}, \mathbb{Z}_2) = 0$; nestas condições, o Teorema 3.3.1 (com p=2) nos diz então que não existe aplicação equivariante $X \to S^{n-1}$, estabelecendo a contradição e provando o teorema.

∎

Observação 3.5.1 *O resultado acima está em [9] e foi sugerido pelo Prof. Carlos Biasi, do ICMC-USP-São Carlos.*

Capítulo 4

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, A.M. *Versão Homológica do Teorema de Borsuk-Ulam para funções $\mathbb{Z}_p$-equivariantes,* Dissertação de Mestrado, PPGM, UFSCAR, 1998.

[2] D'ANNIBALE, W. *Coincidências Antipodais para Aplicações da Esfera em Complexos Simpliciais*, Dissertação de Mestrado, PPGM, UFSCAR, 1998.

[3] GREEMBERG, J.M. *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, New York, 1967.

[4] IZIDOREK,M. and JAWOROWSKI, J. *Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 123, no. 6, 1995; 1947 - 1950.

[5] KOBAYASHI,T. *The Borsuk-Ulam Theorem for a $\mathbb{Z}_p$-map from a $\mathbb{Z}_q$-Space to S^{2n+1}*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 97, no.4, 1986; 714-716.

[6] LIMA, E.L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, 1993.

[7] MATTOS, D.L. *Homologia de f-Homeomorfismos e Teoremas de Borsuk-Ulam*, Dissertação de Mestrado, PPGM, UFSCAR, 2001.

[8] MUNKRES, J.R. *Topology: a first course*, Prentice-Hall,Inc. Engleewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[9] PERGHER, P.L.Q., MATTOS, D.L., SANTOS, E.L. *The Borsuk-Ulam theorem for general spaces*, Archiv der Mathematik, a aparecer.

[10] PERGHER, P.L.Q. *A $\mathbb{Z}_p$-index homomorphism for $\mathbb{Z}_p$-spaces*, Houston Journal of Mathematics, a aparecer.

[11] VICK, J.W. *Homology Theory: an introduction to Algebraic Topology*, Academic Press, New York, 1973.

[12] WHITEHEAD, G.W. *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[13] WALKER, J.W. *A Homology version of the Borsuk-Ulam Theorem*, American Mathematical Monthly, 1983; 466-468.

[14] YANG, C.T. *On Theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson,* I,Annals of Mathematics, Vol 60, no.2, 1954; 262-282.