UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas Parabólicos: Aplicações em fluidos com capilaridade trifásico

Eduard Toon

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

T672sp

Toon, Eduard.
Sistemas parabólicos : aplicações em fluidos com capilaridade trifásico / Eduard Toon. -- São Carlos : UFSCar, 2009.
63 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2009.

1. Sistemas parabólicos. 2. Capilaridade. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
FFCL - USP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas Parabólicos: Aplicações em fluidos com capilaridade trifásico

Eduard Toon

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

São Carlos - SP
2009

À minha mãe Edna,

e à minha namorada Sil.

Resumo

Estudamos sistemas parabólicos degenerados que surgiram através de um fluxo trifásico num meio poroso sob um controle de pressão de entrada e saída na fronteira. Realizamos um estudo matemático de tais sistemas para uma classe de funções de pressões de capilaridade linear. Para este fim, foi desenvolvida uma teoria de aproximações parabólicas não-degeneradas. Então, foi provada, a unicidade da solução para o problema de valores inicial e de contorno.

Abstract

We study degenerate parabolic systems arised in three-phase capillary flows in porous media under a pressure control at the inflow and outflow boundaries. We perform a mathematical study of such systems for a class of linear capillarity pressure functions. To this end, a theory of non-degenerate parabolic approximations is developed. It has been proved the unique solvability of the initial boundary problems.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Cezar Issao Kondo, por ter aceito orientar-me durante este trabalho.

Aos professores José Ruidival, Luís Antônio e Marcelo Ebert, por terem contribuido com este trabalho nas ocasiões da qualificação e defesa.

Aos professores da Pós-Graduação, principalmente, Walter Motta, Ivo Machado, Luís Antônio, Marcello Fidélis, Ruy Tojeiro, Daniel Vendrúscolo, Marcelo Ebert, Paulo Dattori, Cezar Kondo e Jorge Hounie, meus professores nas disciplinas do mestrado.

Aos professores da UNESP - Rio Claro, em especial, à professora Alice Libardi.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e da Pós-Graduação da UFSCar.

À todos os meus amigos, em particular, Paulo Liboni, Paulo Mendes e Claudete, pela ajuda, apoio e momentos de discussões acerca deste trabalho.

À minha família, pois se não fosse por eles, não teria chegado a este momento. Gostaria de reforçar o agradecimento à minha mãe, Edna, que muitas vezes acreditou mais em mim do que eu mesmo, que sempre me deu força nos momentos de dificuldade e vibrou com minhas conquistas.

E claro, à minha amiga, namorada e esposa, Silvana, minha Sil, meu amor, meu tudo. Por todo o cuidado, carinho, paciência e dedicação nestes quase quatro anos, em especial neste último ano.

Sumário

Introdução

Neste trabalho consideramos o sistema 2×2 de equações parabólicas quasi-lineares:

$$u_t + f(u)_x = (B(u)\,u_x)_x\,, 0 < t < T, x \in \Omega = (-1,1),$$

onde $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ e a equação acima é uma versão simplificada de

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(B_{ij}(u)\,\frac{\partial u_j}{\partial x}\right).$$

Tal equação surgiu a partir do estudo de um fluxo trifásico em um meio poroso sob um controle de pressão de entrada e saída. Utilizamos também a equação diferencial parcial que dá o balanço de massas e damos algumas hipóteses físicas para obter tal modelo.

Além disso, impomos a condição de que a matriz de capilaridade B seja triangular superior e inicialmente também a seguinte condição sob os termos diagonais de tal matriz, $B_{ii} \geq \nu > 0$. Assim, temos um problema não-degenerado. O caso em que B é uma matriz qualquer, é ainda um problema em aberto.

Dada as seguintes condições inicial e de contorno,

$$\delta u_n + u = u_\partial \text{ em } |x| = 1,\ u|_{t=0} = u_0(x),$$

obtemos o principal resultado deste texto que garante a existência de uma única solução para nosso problema.

Este texto foi quase inteiramente baseado nos artigos de *Shelukhin e Kondo* [13], e de *Frid e Shelukhin* [5], exceto pelo Capítulo 1, que tem como base a teoria de *Ladyzenskaja et. al* [2].

No Capítulo 1, fixamos as notações que serão utilizadas no restante do texto. Além disso, damos algumas definições e resultados básicos para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2, é feita a dedução do modelo que será estudado.

No Capítulo 3, aproximamos nosso problema não-degenerado original para demonstrarmos a existência e unicidade de uma solução para o mesmo. Demonstramos também, neste capítulo, que enfraquecendo as hipóteses sobre as condições iniciais e de contorno, obteremos uma solução fraca para nosso problema.

Já no Capítulo 4, obtemos uma matriz de capilaridade que é degenerada em alguns pontos. Aproximamos tal problema transformando-o em um problema não-degenerado e, desta forma, podemos aplicar o resultado do Capítulo 3 para obter uma única solução do problema degenerado.

Capítulo

1

Requisitos Básicos

1.1 Notações

Nesta seção introduziremos algumas notações que serão utilizadas ao longo deste texto.

$\mathbb{R}^n$ é o espaço euclidiano n-dimensional; $x = (x_1, \cdots, x_n)$ é um ponto qualquer neste espaço.

$\mathbb{R}^{n+1}$ é o espaço euclidiano $(n+1)$-dimensional; seus pontos são denotados por (x,t), onde $x \in \mathbb{R}^n$, e $t \in (-\infty, \infty)$.

Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$, isto é, um conjunto aberto, conexo arbitrário de pontos de $\mathbb{R}^n$. Ω será considerado um domínio limitado.

S é a fronteira de Ω.

K_ρ é uma bola aberta arbitrária de $\mathbb{R}^n$, com raio ρ.

$\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$.

Q é o cilindro $\Omega x(0,T)$, isto é, o conjunto de pontos (x,t) de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$.

S_T é a superfície lateral de Q, ou mais precisamente o conjunto de pontos (x,t) de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $x \in S$, $t \in [0,T]$.

U, V e W denotarão espaços de Banach quaisquer.

Dizemos que o espaço U está contido compactamente no espaço V quando

1. $||.||_V \leq k||.||_U$;
2. Toda sequência limitada em U, admite uma subsequência convergente em V,

com $k < \infty$ constante. Denotamos $U \subset\subset V$.

A partir deste ponto, consideraremos $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$.

1.2 Definição dos espaços de funções básicos

Consideraremos a noção de mensurabilidade e somabilidade no sentido de Lebesgue.

Definição 1.1 *$L^p(\Omega)$ é o espaço de Banach consistindo de todas as funções mensuráveis em Ω tais que a p-ésima potência $(p \geq 1)$ é somável em Ω, ou seja,*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\},$$

para $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach consistindo de todas as funções u que são essencialmente limitadas em Ω. A norma neste espaço é definida da seguinte forma,

$$||u||_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad e \qquad ||u||_{\infty,\Omega} = \sup_\Omega ess|u|.$$

Os elementos de $L^p(\Omega)$ são classes de equivalência de funções em Ω.

A seguir neste texto, sempre que o expoente do espaço for igual a infinito utilizaremos a definição dada acima.

Definição 1.2 *$L^{q,r}(Q)$ é o espaço de Banach consistindo de todas as funções mensuráveis em $Q = \Omega x[0,T]$ com a norma finita*

$$||u||_{q,r,Q} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{r}},$$

onde $q \geq 1$ e $r \geq 1$.

Definição 1.3 *$L^p_{loc}(\Omega)$ é o espaço de Banach consistindo de todas as funções mensuráveis em Ω tais que $\forall K \subset \Omega$ compacto temos*

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty,$$

$p \geq 1$.

Definição 1.4 *Definimos*

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi : \Omega \to \mathbb{R};\, \phi \in C^\infty(\Omega)\, e\, \phi\, tem\ suporte\ compacto\ em\, \Omega\}.$$

Chamaremos uma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ *de função teste.*

Definição 1.5 *Sejam u e* $v \in L^1_{loc}$ *e* α *um multi-índice. Dizemos que v é a* α*-ésima derivada parcial fraca de u e denotamos*

$$D^\alpha u = v,$$

se

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx,$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lema 1.1 *Uma* α*-ésima derivada parcial fraca de u, se existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em Evans L. C. *[6].*

Definição 1.6 $W_q^{2l,l}(Q)$ *para l inteiro não-negativo* $(q \geq 1)$ *é o espaço de Banach consistindo de todos os elementos de* $L^q(Q)$ *possuindo derivadas fracas da forma* $D_t^r D_x^s$ *com quaisquer r e s satisfazendo a desigualdade* $2r + s \leq 2l$. *A norma neste espaço é definida pela seguinte igualdade*

$$||u||_{q,Q}^{(2l)} = \sum_{j=0}^{2l} << u >>_{q,Q}^{(j)},$$

onde

$$<< u >>_{q,Q}^{(j)} = \sum_{2r+s=j} ||D_t^r D_x^s u||_{q,Q}.$$

O somatório $\sum\limits_{2r+s=j}$ *é tomado sobre todos os inteiros não negativos r e s satisfazendo a condição* $2r + s = j$.

Um caso particular do espaço definido acima é o espaço $W^{l,q}(\Omega)$, *que, para l inteiro não-negativo* $(q \geq 1)$, *é o espaço de Banach consistindo de todos os elementos de* $L^q(\Omega)$ *possuindo derivadas fracas até ordem l inclusive, cuja q-ésima potência é somável em* Ω. *A norma em* $W^{l,q}(\Omega)$ *é definida pela igualdade*

$$||u||_{q,\Omega}^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} << u >>_{q,\Omega}^{(j)},$$

onde

$$<< u >>^{(j)}_{q,\Omega} = \sum_j ||D^j_x u||_{q,\Omega}.$$

O símbolo D^j_x *denota qualquer derivada fraca de* $u(x)$ *em relação à* x *de ordem* j*, enquanto* $\sum_j$ *denota o somatório sobre todas as possíveis derivadas fracas de* u *de ordem* j*.*

Observação 1.1 *Para domínios com fronteiras que tenham certa regularidade,* $W^{l,q}(\Omega)$ *coincidirá com o fecho na norma definida acima, do conjunto das funções infinitamente diferenciáveis (no sentido usual) em* $\overline{\Omega}$*. Isto será verdade, por exemplo, para domínios com fronteiras suaves por partes. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em* Evans L. C. *[6], página 252.*

Definição 1.7 $W^{1,0}_2(Q)$ *é o espaço de Hilbert com produto escalar*

$$(u,v)_{W^{1,0}_2(Q)} = \int_Q (uv + u_x v_x)dxdt$$

Definição 1.8 $V_2(Q)$ *é o espaço de Banach consistindo de todos os elementos de* $W^{1,0}_2(Q)$ *segundo a norma*

$$|u|_Q = \sup_{0\le t\le T} ess\left(||u(x,t)||_{2,\Omega}\right) + ||u_x||_{2,Q},$$

com

$$||u_x||_{2,Q} = \left(\int_Q u_x^2 dxdt\right)^{1/2}.$$

Definição 1.9 $V^{1,0}_2(Q)$ *é o espaço de Banach consistindo de todos os elementos de* $V_2(Q)$ *que são contínuos em* t *na norma de* $L^2(\Omega)$*, com norma*

$$|u|_Q = \max_{0\le t\le T} ||u(x,t)||_{2,\Omega} + ||u_x||_{2,Q}.$$

A continuidade em t *de uma função* $u(x,t)$ *na norma de* $L^2(\Omega)$ *significa que*

$$||u(x,t+\Delta t) - u(x,t)||_{2,\Omega} \to 0,$$

para $\Delta t \to 0$*. O espaço* $V^{1,0}_2(Q)$ *é obtido completando o conjunto* $W^{1,1}_2(Q)$ *na norma de* $V_2(Q)$*.*

Vamos então definir o espaço $W^{l,q}(\Omega)$ para valores de l não inteiros.

Definição 1.10 *O espaço* $W^{l,q}(\Omega)$ *com* l *não inteiro é o espaço de Banach consistindo de todos os* *elementos de $W^{[l],q}(\Omega)$ com a norma finita*

$$||u||^{(l)}_{q,\Omega} = << u >>^{(l)}_{q,\Omega} + ||u||^{([l])}_{q,\Omega},$$

onde

$$||u||^{[l]}_{q,\Omega} = \sum_{j=0}^{[l]} \sum_{j} ||D^j_x u||_{q,\Omega},$$

$$<< u >>^{(l)}_{q,\Omega} = \sum_{j=[l]} \left(\int_\Omega dx \int_\Omega |D^j_x u(x) - D^j_y u(y)|^q \frac{dy}{|x-y|^{n+q(l-[l])}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Definição 1.11 *Diremos que uma função $u(x)$ definida em $\overline{\Omega}$ satisfaz uma condição de Hölder em x com expoente α, $\alpha \in (0,1)$, e constante de Hölder $< u >^{(\alpha)}_{\Omega}$ no domínio $\overline{\Omega}$ se*

$$\sup \rho^{-\alpha} osc\{u\,;\Omega^i_\rho\} \equiv < u >^{(\alpha)}_{\Omega} < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as componentes conexas Ω^i_ρ de todos os Ω_ρ com $\rho \le \rho_0$. Se a fronteira de Ω tem alguma regularidade, por exemplo, se a mesma é suave por partes, então $< u >^{(\alpha)}_{\Omega}$ também pode ser definida de outra maneira como segue

$$\sup_{\substack{x,x' \in \Omega \\ |x-x'| \le \rho_0}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x-x'|^\alpha} = < u >^{(\alpha)}_{\Omega}.$$

Com $osc\{u, \Omega^i_\rho\}$ sendo a oscilação da função u no conjunto Ω^i_ρ.

Definição 1.12 *A função $[x]$ é definida para todos os números reais e representa o maior número inteiro que é menor ou igual a x, ou seja, significa a parte inteira de x.*

Definição 1.13 *Seja $l \in (0,\infty)$. Então, $H^l(\overline{\Omega})$ é o espaço de Banach cujos elementos são funções contínuas $u(x)$ em $\overline{\Omega}$, possuindo em $\overline{\Omega}$ derivadas contínuas até ordem $[l]$ e um valor finito para*

$$|u|^{(l)}_{\Omega} = < u >^{(l)}_{\Omega} + \sum_{j=0}^{[l]} < u >^{(j)}_{\Omega},$$

onde

$$< u >^{(0)}_{\Omega} = |u|^{(0)}_{\Omega} = \max_{\Omega} |u|,$$

$$< u >^{(j)}_{\Omega} = \sum_{j} |D^j_x u|^{(0)}_{\Omega}, < u >^{(l)}_{\Omega} = < D^{[l]}_x u >^{(l-[l])}_{\Omega}.$$

A primeira destas quatro igualdades define a norma $|u|^{(l)}_{\Omega}$ em $H^l(\overline{\Omega})$.

Definição 1.14 *Seja $l \in (0,\infty)$. Então, $H^{l,l/2}(\overline{Q})$ é o espaço de Banach de funções $u(x,t)$ que são contínuas em $\overline{Q}$, juntamente com todas as derivadas da forma $D_t^r D_x^s$ para $2r+s<l$, e com a norma finita*

$$|u|_Q^{(l)} = <u>_Q^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} <u>_Q^{(j)},$$

onde

$$<u>_Q^{(0)} \equiv |u|_Q^{(0)} = \max_Q |u|,$$

$$<u>_Q^{(j)} = \sum_{2r+s=j} |D_t^r D_x^s u|_Q^{(0)},$$

$$<u>_Q^{(l)} = <u>_{x,Q}^{(l)} + <u>_{t,Q}^{(l/2)},$$

$$<u>_{x,Q}^{(l)} = \sum_{2r+s=[l]} <D_t^r D_x^s u>_{x,Q}^{(l-[l])},$$

$$<u>_{t,Q}^{(l/2)} = \sum_{0<l-2r-s<2} <D_t^r D_x^s u>_{t,Q}^{\left(\frac{l-2r-s}{2}\right)}.$$

Para $0<\alpha<1$ definimos,

$$<u>_{x,Q}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in Q \\ |x-x'|\le\rho_0}} \frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^{\alpha}},$$

$$<u>_{t,Q}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in Q \\ |t-t'|\le\rho_0}} \frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha}}.$$

Seja X um espaço de Banach real com norma $||.||_X$.

Definição 1.15 *O espaço*

$$L^p(0,T;X)$$

consiste de todas as funções mensuráveis $u:[0,T]\to X$ com

$$||u||_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p dt\right)^{1/p} < \infty,$$

para $1\le p<\infty$, e

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0\le t\le T} ess||u(t)||_X < \infty$$

Definição 1.16 *Seja $u\in L^1(0,T;X)$. Dizemos que $v\in L^1(0,T;X)$ é a derivada fraca de u e escre-*

vemos

$$u' = v$$

quando

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)dt$$

para toda função teste escalar $\phi \in C_c^\infty(0,T)$.

Definição 1.17 *O espaço de Sobolev*

$$W^{1,p}(0,T;X),$$

consiste de todas as funções $u \in L^p(0,T;X)$ *tal que* u' *existe no sentido fraco e pertence ao espaço* $L^p(0,T;X)$. *Ainda mais,*

$$||u||_{W_p^1(0,T;X)} := \left(\int_0^T ||u(t)||^p + ||u'(t)||^p dt \right)^{1/p},$$

$$||u||_{W_\infty^1(0,T;X)} := \sup_{0 \le t \le T} ess(||u(t)|| + ||u'(t)||).$$

Definição 1.18 *Dizemos que uma função* $u(x,t)$ *pertence à classe* $\mathscr{B}_2(Q,M,\gamma,r,\delta,k)$ *se* $u(x,t) \in V_2^{1,0}(Q)$, $\sup ess_Q|u| \le M$ *e as funções* $w(x,t) = \pm u(x,t)$ *satisfazem a igualdade*

$$||w^{(k)}(x,t_0+\tau)\zeta(x,t_0+\tau)||^2_{2,K_\rho} + \nu||w_x^{(k)}\zeta||^2_{2,Q(\rho,\tau)} \le ||w^{(k)}(x,t_0)\zeta(x,t_0)||^2_{2,K_\rho}$$

$$+\gamma_1 \left(\int_{Q(\rho,\tau)} (\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|)(w^{(k)})^2 dxdt + \left[\int_{t_0}^{t_0+\tau} \left(\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right]^{\frac{2(1+k)}{r}} \right),$$

onde $w^{(k)}(x,t) = \max\{w(x,t) - k\,; 0\}$, $Q(\rho,\tau) = K_\rho \times \{|x - x_0| < \rho, t_0 < t < t_0 + \tau\}$ *é um cilindro arbitrário pertencendo à* Q, ρ *e* τ *são números positivos arbitrários.*

1.3 Alguns resultados

Nesta seção vamos enunciar alguns resultados importantes para o desenvolvimento do restante do trabalho.

Teorema 1.1 *A classe* $\mathscr{B}_2(Q,M,\gamma,r,\delta,k)$ *pode ser mergulhada em* $H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ *com algum* α *positivo unicamente determinado pelos parâmetros* M, γ, r, δ *e* k.

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em Ladyzenskaja et al. *[2], a partir da página 112.*

Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de contorno

$$\begin{cases} \mathscr{L}\left(x,t,\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=f(x,t), \\ \\ u|_{t=0}=\phi(x),\, u|_{S_T}=\Phi(x,t). \end{cases} \tag{1.1}$$

O operador $\mathscr{L}$ é definido como segue

$$\mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x,t)u.$$

Assumimos que este operador é uniformemente parabólico, ou seja, que existe uma constante $\theta>0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|^2$ para todo $(x,t)\in Q$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Vamos então enunciar um importante resultado sobre resolubilidade do problema (1.1) e que além disso, nos dá uma estimativa para a solução de tal problema. Definimos

$$||f||_{r,Q_T}^{(loc)}=\sup_{q_T}||f||_{r,q_T}$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cilindros $q_T=\omega\times(0,T)$, com ω sendo a intersecção do domínio Ω com algum domínio de medida unitária, por exemplo um cubo. Se Ω é limitado, então o conjunto de funções com norma finita $||f||_{r,Q_T}^{(loc)}$ coincide com $L^r(Q_T)$.

Teorema 1.2 *Seja $q>1$. Suponha que os coeficientes a_{ij} do operador $\mathscr{L}$ são limitados e contínuos em Q, enquanto os coeficientes a_i e a têm normas finitas $||a_i||_{r,Q}^{(loc)}$ e $||a||_{s,Q}^{(loc)}$ respectivamente, com*

$$r=\begin{cases}\max(q,n+2) & \textit{para} \quad q\neq n+2,\\ n+2+\varepsilon & \textit{para} \quad q=n+2.\end{cases}$$

$$s=\begin{cases}\max\left(q,\dfrac{n+2}{2}\right) & \textit{para} \quad q\neq\dfrac{n+2}{2},\\ \\ \dfrac{n+2}{2}+\varepsilon & \textit{para} \quad q=\dfrac{n+2}{2},\end{cases}$$

e ε arbitrariamente pequeno positivo. Então, para qualquer $f \in L^q(Q)$, $\phi \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ e $\Phi \in W_q^{2-1/q,1-1/(2q)}(S_T)$, com $q \neq 3/2$, satisfazendo no caso em que $q > 3/2$ a seguinte condição de compatibilidade

$$\phi|_S = \Phi|_{t=0},$$

então o problema (1.1) tem uma única solução $u \in W_q^{2,1}(Q)$. Esta solução satisfaz a estimativa

$$||u||_{q,Q}^{(2)} \leq c\left(||f||_{q,Q} + ||\phi||_{q,\Omega}^{\left(2-\frac{2}{q}\right)} + ||\Phi||_{q,S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}\right).$$

A constante $c = c(T)$ permanece limitada para valores finitos de T. Uma demonstração mais geral para este fato pode ser encontrada em Ladyzenskaja et el. *[2], página 341. Neste texto utilizaremos este teorema com $q = 3$ ou $q = 4$.*

Teorema 1.3 *Suponha que $u(x,t)$ é uma solução generalizada em $V_2^{1,0}(Q)$ da equação*

$$u_t - \mathscr{M}u = \frac{\partial f_i}{\partial x_l} - f,$$

onde

$$\mathscr{M}u = \frac{\partial}{\partial x_l}(a_{ij}(x,t)u_{x_i} + a_i(x,t)u) - b_i(x,t)u_{x_i} - a(x,t)u,$$

cujos termos livres satisfazem a condição de parabolicidade uniforme e

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i^2; \sum_{i=1}^n b_i^2; \sum_{i=1}^n f_i^2; a; f\right\|_{q,r,Q} \leq c,$$

onde q e r são números positivos arbitrários satisfazendo as condições

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{r} + \dfrac{n}{2q} = 1 - \kappa_1 \\ com \\ q \in [1,\infty], r \in \left[\dfrac{1}{1-\kappa_1}, \dfrac{2}{1-2\kappa_1}\right], \\ \\ 0 < \kappa_1 < \dfrac{1}{2}, para\, n = 1. \end{array}\right\}$$

Suponha também que o $\sup_Q ess|u| = M$. Então $u \in H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$, e a norma $|u|_Q^{(\alpha)}$ é estimada por cima por uma constante que depende somente de n, M, e dos parâmetros c, q e r das condições acima. O expoente α é determinado somente pelos números $n = 1$, q e r.

Uma demonstração mais geral para este fato pode ser encontrada em Ladyzenskaja et al. *[2],* *página 204. O sentido de solução generalizada é dado no enunciado do Teorema 2.2, porém com os termos da equação acima no lugar dos termos da equação do problema tratado em tal Teorema.*

Teorema 1.4 *Suponha $l > 0$, os coeficientes do operador $\mathscr{L}$ pertencentes à classe $H^{l,l/2}(\overline{Q})$. Então para qualquer $f \in H^{l,l/2}(\overline{Q})$, $\phi \in H^{l+2}(\overline{\Omega})$, $\Phi \in H^{l+2,1+l/2}(\overline{S}_T)$ satisfazendo as condições de compatibilidade de ordem $[l/2]+1$ o problema (1.1) possui uma única solução de classe $H^{l+2,1+l/2}(\overline{Q})$, satisfazendo*

$$|u|_Q^{(l+2)} \leq c(|f|_Q^{(l)} + |\phi|_\Omega^{(l+2)} + |\Phi|_{S_T}^{(l+2)}).$$

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em Ladyzenskaja et al. *[2], página 320.*

Teorema 1.5 $H^{\beta,\beta/2} \subset\subset H^{\alpha,\alpha/2}$ *sempre que $\beta \geq \alpha$.*

Teorema 1.6 *O produto de duas funções em $H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ com $\alpha \in (0,1)$ ainda está em $H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$.*

Demonstração: Sejam, u e $v \in H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$, então,

$$|u|_Q^{(\alpha)} = \sup_{\bar{Q}} |u(x,t)| + \sup_{\substack{x_1,x_2 \in \bar{\Omega} \\ t \in [0,T]}} \frac{|u(x_1,t) - u(x_2,t)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} + \sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ t_1,t_2 \in [0,T]}} \frac{|u(x,t_1) - u(x,t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha/2}} < \infty.$$

A função v satisfaz uma estimativa análoga. Vamos então estimar separadamente cada um dos termos da norma em $H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ do produto destas duas funções. Temos que,

$$|uv|_Q^{(\alpha)} = \sup_{\bar{Q}} |uv(x,t)| + \sup_{\substack{x_1,x_2 \in \bar{\Omega} \\ t \in [0,T]}} \frac{|uv(x_1,t) - uv(x_2,t)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} + \sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ t_1,t_2 \in [0,T]}} \frac{|uv(x,t_1) - uv(x,t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\alpha/2}}.$$

$$\sup_{\overline{Q}} |uv(x,t)| = \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)|.|v(x,t)| \leq \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)|. \sup_{\overline{Q}} |v(x,t)| \leq |u|_Q^{(\alpha)}.|v|_Q^{(\alpha)} < \infty.$$

$$\sup_{\substack{x_1,x_2 \in \bar{\Omega} \\ t \in [0,T]}} \frac{|uv(x_1,t) - uv(x_2,t)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}$$

$$= \sup_{\substack{x_1,x_2 \in \bar{\Omega} \\ t \in [0,T]}} \frac{|uv(x_1,t) + uv(x_2,t) - 2uv(x_2,t) - u(x_1,t)v(x_2,t) + u(x_1,t)v(x_2,t) - u(x_2,t)v(x_1,t) + u(x_2,t)v(x_1,t)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}$$

$$\leq \sup_{\substack{x_1,x_2 \in \bar{\Omega} \\ t \in [0,T]}} \frac{|u(x_1,t) - u(x_2,t)|\,|v(x_1,t) - v(x_2,t)| + |u(x_1,t)v(x_2,t) - uv(x_2,t)| + |u(x_2,t)v(x_1,t) - uv(x_2,t)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}$$

$$\leq \sup_{\substack{x_1,x_2\in\bar{\Omega}\\ t\in[0,T]}} \frac{|u(x_1,t)-u(x_2,t)|\,|v(x_1,t)-v(x_2,t)|}{|x_1-x_2|^\alpha} + \sup_{\substack{x_1,x_2\in\bar{\Omega}\\ t\in[0,T]}} |v(x_2,t)| \sup_{\substack{x_1,x_2\in\bar{\Omega}\\ t\in[0,T]}} \frac{|u(x_1,t)-u(x_2,t)|}{|x_1-x_2|^\alpha}$$

$$+ \sup_{\substack{x_1,x_2\in\bar{\Omega}\\ t\in[0,T]}} |u(x_2,t)| \sup_{\substack{x_1,x_2\in\bar{\Omega}\\ t\in[0,T]}} \frac{|v(x_1,t)-v(x_2,t)|}{|x_1-x_2|^\alpha} \leq c_1 + c_2 \sup_{\overline{Q}} |v(x,t)| + c_3 \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)| < \infty.$$

Com cálculos análogos podemos concluir que

$$\sup_{\substack{x\in\bar{\Omega}\\ t_1,t_2\in[0,T]}} \frac{|uv(x,t_1)-uv(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha/2}} < \infty,$$

e portanto

$$|uv|_Q^{(\alpha)} < \infty$$

$\square$

Lema 1.2 *Suponha que $u(x)$ é uma função limitada de $W^1_{2s+2}(\Omega)$, $s \geq 0$, e $\zeta(x)$ uma função suave tal que o produto $u(x)\zeta(x)$ é zero na fronteira S do domínio Ω. Então*

$$\int_\Omega |u_x|^{2s+2}\zeta^2 dx \leq 16osc^2\{u,\Omega\} \int_\Omega (c|u_x|^{2s-2}u_{xx}^2\zeta^2 + |u_x|^{2s}\zeta_x^2)dx,$$

$c = n^2 + s^2$.

Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em Ladyzenskaja et al. *[2], página 93.*

Teorema 1.7 Teorema de Compacidade de Aubin-Lions: *Sejam U, V, W espaços de Banach com $U \subset V \subset W$. Suponha que a imersão $U \hookrightarrow V$ seja compacta e U e W reflexivos. Considere,*

$$\Pi = \left\{ u\,;\, u \in L^{p_0}(0,T;U),\, u' = \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0,T;W) \right\}$$

onde $0 < T < \infty$ e $1 < p_0,\, p_1 < \infty$. O espaço Π munido da norma

$$||u||_{L^{p_0}(0,T;U)} + ||u'||_{L^{p_1}(0,T;W)}$$

é um espaço de Banach.

Nestas hipóteses, a imersão $\Pi \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;V)$ é compacta.

Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em Lions *[12].*

Consideramos o sistema

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon D v_{xx} + M v_x + f(v,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

junto com o dado inicial

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Aqui $\varepsilon > 0$, Ω é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, $D = D(v,x)$, e $M = M(v,x)$, são matrizes definidas em um subconjunto aberto $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \Omega$, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ e f é uma aplicação suave de $U \times \mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}^n$. Se Ω não é todo $\mathbb{R}$, assumimos que v satisfaz alguma condição de fronteira específica (por exemplo, condição de Dirichlet ou Neumann). Supomos que este problema possua uma solução (no tempo) local em algum conjunto X de funções suaves de Ω em $\mathbb{R}^n$, isto é, dada uma função $v_0 \in X$, existe um $\delta > 0$ e uma solução suave $v(x,t)$ de (1.2), (1.3) definida para $x \in \Omega$ e $t \in [0,\delta)$, tal que $v(.,t) \in X$, $0 \leq t < \delta$.

Definição 1.19 *Um subconjunto fechado $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de* região positivamente invariante *para a solução local definida por (1.2), (1.3), se qualquer solução $v(x,t)$ possuindo todas as suas condições iniciais e de fronteira em Σ, satisfaz $v(x,t) \in \Sigma$ para todo $x \in \Omega$ e para todo $t \in [0,\delta)$.*

Sempre assumimos que se $u \in X$, existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que se $x \notin K$, então $u(x) \in int\,\Sigma$. Chamamos esta condição de *condição K*. Em Smoller [1] é mostrado que a condição K é sempre válida se considerarmos (1.2) em um domínio limitado, com as condições de fronteira pertencendo ao $int\,\Sigma$.

As regiões invariantes Σ serão dadas por intersecção de semi-planos, isto é, consideramos regiões Σ da forma

$$\Sigma = \cap_{i=1}^{m} \{v \in U \,;\, G_i(v) \leq 0\}, \tag{1.4}$$

onde G_i são funções a valores reais suaves definidas em um subconjunto aberto de U, e para cada i, o gradiente $\nabla_v G_i(v)$ nunca é o vetor nulo, nos pontos em que $G_i(v) = 0$.

Antes de darmos o principal resultado sobre regiões positivamente invariantes, precisamos de mais uma definição.

Definição 1.20 *A função suave $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada* quasi-convexa *em v se $\nabla_v G(\eta) = 0$, então $d^2 G_v(\eta,\eta) \geq 0$.*

Teorema 1.8 *Seja Σ definido por (1.4), e suponha que para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e para todo $v_0 \in \partial\Sigma$ (então*

$G_i(v_0) = 0$ para algum i), valem as seguintes condições:

1. *∇G_i em v_0 é um autovetor de $D(v_0,x)$, e $M(v_0,x)$, para todo $x \in \Omega$;*
2. *Se $(\nabla G_i)D(v_0,x) = \mu \nabla G_i$, com $\mu \neq 0$, então G_i é quasi-convexo em v_0;*
3. *$\nabla G_i.f < 0$ em v_0, para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

Então Σ é invariante para (1.2), para todo $\varepsilon > 0$.

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em Smoller *[1], página 200.*

Teorema 1.9 Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov

Suponha que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e que $\partial \Omega \in C^1$. Suponha $1 \leq p < n$. Então

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

para cada $1 \leq q \leq p^*$. Com,

$$p^* = \frac{pn}{n-p}.$$

Observação 1.2 *Como $p^* > p$ e $p^* \to \infty$ quando $p \to n$, teremos em particular pelo teorema acima que*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. Demonstrações para esta observação e para o teorema acima podem ser encontradas em Evans [6], página 272.

Capítulo

2

Dedução do Modelo

Consideramos o sistema 2×2 de equações parabólicas quasi-lineares:

(2.1) $u_t + g[t,u]\, f(u)_x = (B(u)\, u_x)_x\,, 0 < t < T, x \in \Omega = (-1,1), g[t;u] = \tilde{g}\left(\int_{-1}^{1} K(u_1,u_2)\, dx, t\right),$

onde $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ e (2.1) é uma versão simplificada de

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + g[t;u]\, \frac{\partial f_i(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(B_{ij}(u)\, \frac{\partial u_j}{\partial x}\right).$$

Vamos obter tal modelo (2.1):

Consideramos o fluxo unidimensional horizontal de três fluidos incompressíveis e imiscíveis formados em fases, digamos, óleo, gás e água. O balanceamento das massas é governado pela equação de conservação de massas:

(2.2) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi\, u_i\, \rho_i\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i\, v_i\right) = 0,$$

onde Φ denota a porosidade do meio poroso, u_i, ρ_i e v são a saturação, densidade e velocidade de seepage respectivamente da i-ésima fase. Já que u_i denota a porção da porosidade unitária do volume na i-ésima fase, teremos

(2.3) $$u_1 + u_2 + u_3 = 1$$

As equações do momento são dadas na forma da Lei de Darcy

$$v_i = -K\lambda_i p_{ix}, \qquad \lambda_i = \lambda_i(u_1, u_2), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.4}$$

onde K é a permeabilidade absoluta, λ_i é a mobilidade da i-ésima fase e p_i é a pressão da i-ésima fase.

As funções $\mathbf{P_i}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$, $i = 1, 2$, que definem as diferenças de pressão

$$p_1 - p_3 = \mathbf{P_1}, p_2 - p_3 = \mathbf{P_2} \tag{2.5}$$

são chamadas de pressões de capilaridade.

As constantes positivas Φ, ρ_i e K e as funções $\lambda_i(u_1, u_2)$, $i = 1, 2, 3$ e $\mathbf{P_1}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$, $\mathbf{P_2}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$ constituem os dados do modelo.

Vamos assumir por simplicidade que $K = \Phi = 1$. Denotemos

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{3} v_i, \qquad f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, i = 1, 2, 3 \tag{2.6}$$

Assim, de (2.2) e (2.3) teremos:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = 0$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = 0$$

$$\rho_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) = 0$$

Como $\rho_i \neq 0, \forall i$, somamos as três equações, obtendo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 + u_2 + u_3) + \frac{\partial}{\partial x}(v_1 + v_2 + v_3) = 0, \text{ assim } \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

já que $u_1+u_2+u_3=1$ e portanto v depende somente de t. Somando as equações em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} v &= -\left(\lambda_1 \frac{\partial p_1}{\partial x}+\lambda_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}+\lambda_3 \frac{\partial p_3}{\partial x}\right) \\ &= -\left(\lambda_1 \frac{\partial (P_1+p_3)}{\partial x}+\lambda_2 \frac{\partial (P_2+p_3)}{\partial x}+\lambda_3 \frac{\partial p_3}{\partial x}\right) \\ &= -\left(\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial x}+\lambda_2 \frac{\partial P_2}{\partial x}+\lambda \frac{\partial p_3}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

$$-\lambda \frac{\partial p_3}{\partial x} = v+\lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial x}+\lambda_2 \frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p_3}{\partial x} = \frac{v}{\lambda}+\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} \tag{2.7}$$

Vamos denotar $\Delta p_3 = p_3(1,t)-p_3(-1,t)$ e integrando a igualdade (2.7) em relação à x em $[-1,1]$ obtemos

$$\int_{-1}^{1} -\frac{\partial p_3}{\partial x}\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{v}{\lambda}+\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)dx$$

$$-\Delta p_3 = v\int_{-1}^{1}\frac{1}{\lambda}\,dx+\int_{-1}^{1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)dx$$

$$-v\int_{-1}^{1}\frac{1}{\lambda}\,dx = \Delta p_3+\int_{-1}^{1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)dx$$

$$v(t) = -\frac{1}{\int_{-1}^{1}\lambda^{-1}\,dx}\left(\Delta p_3+\int_{-1}^{1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)dx\right) \tag{2.8}$$

Multiplicando a equação (2.7) por $\frac{\lambda}{\lambda_2+\lambda_3}$, podemos escrever (2.4) do seguinte modo

$$\frac{\partial p_3}{\partial x} = \frac{v}{\lambda}+\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p_3}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\lambda_2+\lambda_3}\right) = \left(\frac{v}{\lambda_2+\lambda_3}\right)+\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}\frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p_3}{\partial x}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}\frac{\partial p_3}{\partial x}\right) = \left(\frac{v}{\lambda_2+\lambda_3}\right)+\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}\frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p_3}{\partial x} = \frac{v}{\lambda_2+\lambda_3}+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{\partial p_3}{\partial x}\right)+\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}\frac{\partial P_2}{\partial x}+(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3})\frac{\partial p_3}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p_3}{\partial x} = \frac{v}{\lambda_2+\lambda_3} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}\right)\frac{\partial p_1}{\partial x} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}\right)\frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda}\right)\frac{\partial p_3}{\partial x} = -\frac{v}{\lambda} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda} - 1\right) = \frac{v}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} + \left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda}\right)\frac{\partial p_3}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{v}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial p_3}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{v}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda}\right)\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

$$-\lambda_1\frac{\partial p_1}{\partial x} = v\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

Assim,

$$v_1 = v f_1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

Com cálculos análogos podemos concluir que

$$v_2 = v f_2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}.$$

Assim, usando (2.2) teremos as seguintes equações:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial(v(t)f_1)}{\partial x} + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)_x = 0 \qquad (*)$$

Observe que

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\partial P_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}$$

Assim, por (*) teremos

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v(t)\frac{\partial f_1}{\partial x} + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left(\frac{\partial P_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right)_x$$

$$-\left(\frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_x = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v(t)\,\frac{\partial f_1}{\partial x} + \left(\left(\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\frac{\partial P_2}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1\,(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\,\frac{\partial P_1}{\partial u_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_x$$

$$- \left(\frac{\lambda_1\,(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\,\frac{\partial P_1}{\partial u_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\frac{\partial P_2}{\partial u_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_x = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v(t)\,\frac{\partial f_1}{\partial x} = \left(\left(\frac{\lambda_1\,(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\,\frac{\partial P_1}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\frac{\partial P_2}{\partial u_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_x$$

$$- \left(\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\frac{\partial P_2}{\partial u_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\lambda_1\,(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\,\frac{\partial P_1}{\partial u_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_x$$

Com cálculos análogos podemos concluir que

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + v(t)\,\frac{\partial f_2}{\partial x} = \left(\left(\frac{\lambda_2\,(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\,\frac{\partial P_2}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\frac{\partial P_1}{\partial u_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_x$$

$$- \left(\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\frac{\partial P_1}{\partial u_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\lambda_2\,(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\,\frac{\partial P_2}{\partial u_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_x$$

Obtendo então o sistema

$$u_t + v(t)\,f(u)_x = (B(u)\,u_x)_x \tag{2.9}$$

para o vetor $u = (u_1, u_2)^T$, onde $f(u) := (f_1, f_2)^T$ e $v(t)$ é definido em (2.6) e (2.8) e a matriz B é dada por

$$\begin{cases} B_{11} = \dfrac{\lambda_1\,(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1} - \dfrac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_2}{\partial u_1} \\[2ex] B_{12} = \dfrac{\lambda_1\,(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} - \dfrac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_2}{\partial u_2} \\[2ex] B_{21} = \dfrac{\lambda_2\,(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_2}{\partial u_1} - \dfrac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1} \\[2ex] B_{22} = \dfrac{\lambda_2\,(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_2}{\partial u_2} - \dfrac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\,\dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} \end{cases} \tag{2.10}$$

A equação de balanceamento do volume (2.3) nos leva a seguinte condição:

$$u(x,t) \in \Delta := \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \le u_i \le 1, u_1 + u_2 \le 1\} \tag{2.11}$$

para cada $(x,t) \in Q := \Omega \times (0,T)$. Resumindo, a condição (2.11) nos leva

$$0 \le u_i(x,t) \le 1, \qquad 0 \le u_1(x,t) \le 1 - u_2(x,t), \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{Q}.$$

As mobilidades λ_i estão sujeitas às seguintes restrições físicas como em *Allen et. al* [4]:

$$\lambda_i \geq 0, \qquad \lambda_i|_{u_i} = 0, \qquad \lambda_i = \lambda_i(u_i), \qquad i \in \{1,2,3\}. \tag{2.12}$$

Por (2.10) e (2.12), podemos demonstrar que a matriz de capilaridade B é singular e degenerada, ou seja, a mesma possui determinante nulo e não é possível encontrar um número $k > 0$ tal que $B_{ii} \geq k$, na fronteira do triângulo Δ. De fato, consideramos primeiramente a parte da fronteira de Δ onde $u_1 = 0$. Vemos, por (2.10) que os termos B_{11} e B_{12} serão nulos. Analogamente, na parte da fronteira de Δ onde $u_2 = 0$, vemos que os termos B_{22} e B_{21} serão nulos. No caso em que $u_1 = 1 - u_2$, ou seja, $u_3 = 0$, vemos que

$$B_{11} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left(\frac{\partial P_1}{\partial u_1} - \frac{\partial P_2}{\partial u_1}\right)$$
$$B_{12} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left(\frac{\partial P_1}{\partial u_2} - \frac{\partial P_2}{\partial u_2}\right)$$
$$B_{21} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left(\frac{\partial P_2}{\partial u_1} - \frac{\partial P_1}{\partial u_1}\right)$$
$$B_{22} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left(\frac{\partial P_2}{\partial u_2} - \frac{\partial P_1}{\partial u_2}\right),$$

e portanto, a segunda linha da matriz será igual à -1 vezes a primeira linha. Ou seja, tal matriz é equivalente à uma constante vezes a matriz

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstrando portanto a afirmação sobre a matriz ser singular e degenerada na fronteira do triângulo Δ.

Como em *Frid & Shelukhin* [5], assumimos que a matriz B dada por (2.10) satisfaz as condições satisfaz as condições

$$B_{21} \equiv 0, \qquad \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1} \equiv 0 \tag{2.13}$$

A condição (2.13) significa que a primeira e a terceira fases não são responsáveis pelo total de difusão para a segunda fase.

Usando as condições (2.13) para B, vamos simplificar a fórmula (2.8). Por (2.10) e (2.13) temos que

$$\frac{\lambda_2\,(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_1}-\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1}=0$$

$$\frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1}$$

$$\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\frac{\partial P_2}{\partial u_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_1}=\frac{\partial P_2}{\partial u_1}$$

De (2.10),

$$B_{22}=\frac{\lambda_2\,(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2}-\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2}$$

$$\frac{B_{22}}{\lambda_2}=\frac{(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2}-\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2}$$

$$\frac{B_{22}}{\lambda_2}=\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\frac{\partial P_2}{\partial u_2}-\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2}=\frac{\partial P_2}{\partial u_2}-\frac{B_{22}}{\lambda_2}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{\partial P_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{B_{22}}{\lambda_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}$$

Assim,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}=\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x},$$

com

$$F(u_2)=-\int_0^{u_2}\frac{B_{22}(s)}{\lambda_2(s)}\,ds.$$

E então a fórmula (2.8) pode ser escrita da seguinte forma

$$v(t)=-\frac{p_2+F(u_2)}{\int_{-1}^{1}\lambda^{-1}\,dx}\Big|_{x=-1}^{x=1} \tag{2.14}$$

Assumindo que $\Delta p_2 \equiv p_2|_{x=-1}^{x=1}$ é uma função do tempo dada, chegamos ao sistema (2.1) se o funcional g é dado pela fórmula

$$g=\frac{g_1(t)}{\int_{-1}^{1}k(u_1,u_2)dx},$$

$g_1 = -\Delta p_2(t) - \Delta F(t)$, $k = \lambda^{-1}$, onde

$$\Delta F(t) = F(u_2(1,t)) - F(u_2(-1,t)).$$

Até agora sabemos pouco sobre as funções $\mathbf{P_i}(\mathbf{u})$ teoricamente e experimentalmente. O mesmo acontece para as funções de mobilidade $\lambda_i(u)$, $i = 1, 2, 3$. Existem algumas funções de mobilidade empíricas que tem grande utilidade em engenharia. Elas incluem as leis lineares $\lambda_i = k_i u_i$, as leis quadráticas $\lambda_i = k_i u_i^2$, e as leis de *H. Stone* como em *Allen et. al* [4].

A discussão de capilaridade nos resultados deste trabalho em algumas fórmulas de representação para as funções de pressão de capilaridade vão de acordo com a restrição (2.13) no tensor de capilaridade-difusão.

Por (2.10) a hipótese $B_{21} = 0$ nos leva à E.D.P.

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\frac{\partial P_2}{\partial u_1} - \lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_1} = 0, \tag{2.15}$$

para $\mathbf{P_i}(\mathbf{u})$, $i = 1, 2$ e se as funções $\lambda_i(u)$ são dadas. A equação (2.15) juntamente com a restrição adicional $\frac{\partial B_{22}}{\partial u_1} = 0$ e a condição de parabolicidade do sistema (2.1) é analisada na base da teoria de simetria de grupo.

É mostrado que a classe correspondente de funções de pressão capilar é grande o suficiente e pode ser descrita em termos de uma função arbitrária de uma variável e uma quantidade arbitrária de constantes.

Em particular, quando as mobilidades λ_i são lineares

$$\lambda_i = k_i u_i, k_i = cte.(\geq 0), i = 1, 2 \tag{2.16}$$

o sistema (2.13) admite uma solução

$$P_i = q_i(\xi) + Q_i(u_2), \xi = \frac{u_1}{1 - u_2}, i = 1, 2 \tag{2.17}$$

com as funções q_i e Q_i definidas no capítulo 4.

Dadas as equações (2.16) e (2.17), estudamos o sistema de fluxo de reservatório de fluidos (2.2)-(2.5) no caso em que $k_1 = k_3$. Então o sistema parabólico correspondente (2.1) é especificado como segue

$$
(2.18) \qquad \begin{cases} u_{1t}+g[t;u]\left(\dfrac{u_1}{ku_2+1}\right)_x = \alpha k_1(\xi(1-\xi)\pi_1'(\xi)u_{1x})_x \\ \quad +\left(\xi\left[\alpha k_1\xi(1-\xi)\pi_1'(\xi)-\beta\dfrac{k_1k_2u_2(1-u_2)\pi_2'(u_2)}{k_2u_2+k_1(1-u_2)}\right]u_{2x}\right)_x, \\ \\ u_{2t}+g[t;u]\left(\dfrac{(1+k)u_2}{1+ku_2}\right)_x = \beta\left(\dfrac{k_1k_2u_2(1-u_2)\pi_2'(u_2)}{k_2u_2+k_1(1-u_2)}u_{2x}\right)_x, \end{cases}
$$

onde α, β, k_1, k_2 e k são constantes,

$$
\xi := \frac{u_1}{1-u_2}, \qquad g := \frac{g_1(t)}{\int_{-1}^{1}(1+ku_2)^{-1}dx},
$$

e $\pi_1(\xi)$, $\pi_2(u_2)$ são funções suaves de ξ, $u_2 \in (0,1)$ definidas no enunciado do Teorema 2.3, com $\pi_1'(\xi) \geq 0$, $\pi_2'(u_2) \geq 0$, $0 < \xi < 1$, $0 < u_2 < 1$. Na seção 4.1 discutiremos tal sistema, fazendo a dedução do mesmo.

Observamos que o sistema (2.18) não é desacoplado pela restrição (2.11) e pela presença do funcional $g[t;u]$ em ambas equações.

Consideramos então um reservatório de fluidos especial que é conhecido na mecânica do petróleo como imbição capilar, *Barenblatt et. al* [7]. Tal fluxo é caracterizado pela condição $\sum_{i=1}^{3} v_i = 0$, isto é, duas fases se movem em direções opostas ao fluxo da outra fase. Por (2.14),

$$
(2.19) \qquad \sum_{i=1}^{3} v_i = 0
$$

quando por exemplo,

$$
p_2|_{x=-1} = p_2|_{x=1} \,\mathrm{e}\, u_2|_{x=-1} = u_2|_{x=1},
$$

ou seja,

$$
\Delta p_2(t) + \Delta F(t) = 0.
$$

Agora, no contexto do sistema não-local (2.9), é claro que com a condição (2.19) chegamos ao sistema reduzido

$$
(2.20) \qquad u_t = (B(u)u_x)_x.
$$

Vamos argumentar por regularização. Para isto estudamos primeiramente, no Capítulo 3, o sistema não-degenerado (2.1) com as condições

$$B_{ii} \geq \nu = cte. > 0,\ \forall u \in \Delta, i = 1, 2. \tag{2.21}$$

Vamos lembrar alguns resultados conhecidos de existência global para o sistema $2x2$ não-degenerado (2.1) com $g \equiv 1$. Na teoria de *Ladyzenskaja et al.* [2], a matriz B é um múltiplo escalar da matriz identidade. Os resultados de *Amann* [8] são obtidos para o caso em que

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \equiv 0,\ B_{21} \equiv 0,\ \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1} \equiv 0, \tag{2.22}$$

sob a hipótese de que a norma de alguma solução é finita a priori. Claramente, as condições (2.22) (mais precisamente a primeira das três condições) implicam que, quando $g \equiv 1$, o sistema (2.1) é desacoplado e a segunda equação, para u_2, não contém u_1.

Nossa hipótese sob as funções f_i, B_{ij}, são mais fracas do que aquelas impostas por *Amann* [8], mas também restringimos ao caso em que a matriz B é triangular:

$$B_{21} = 0 \tag{2.23}$$

Definimos as seguintes condições inicial e de contorno

$$\delta u_n + u = u_\partial \text{ em } |x| = 1,\ u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2.24}$$

e

$$u = u_\partial \text{ em } |x| = 1,\ u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2.25}$$

onde $\delta = cte. > 0$ e

$$u_n|_{x=\pm 1} := \pm u_x|_{x=\pm 1},\ u_\partial|_{x=\pm 1} := u_\pm(t).$$

Ou seja, a primeira condição em (2.24), nos indica que o vetor normal nos pontos $(-1,t)$ e $(1,t)$, apontam para o interior da região Δ. Esta condição significa, fisicamente, que estamos realizando um controle do volume na entrada e na saída dos fluidos no meio poroso. Já a primeira condição em (2.25) significa, fisicamente, que definimos o volume na entrada e na saída no meio poroso. Temos então, um problema de Dirichlet misto.

Claramente, o triângulo Δ é a interseção dos semi-planos

$$\Delta = \cap_{i=1}^{3}\{G_i(u) \leq 0\},\ G_1 = -u_1, G_2 = -u_2, G_3 = u_1 + u_2 - 1. \tag{2.26}$$

No que segue, assumiremos que o vetor $\nabla_u G_i$ é um autovetor das matrizes B^T e $(f')^T$ no pedaço correspondente da fronteira $\Delta \cap \{G_i = 0\}$ para cada $i = 1, 2, 3$:

$$(f')^T < \nabla_u G_i >= \alpha_i \nabla_u G_i, \qquad B^T < \nabla_u G_i >= \mu_i \nabla_u G_i, \, \mu_i \geq 0, \tag{2.27}$$

onde B^T é a transposta de B e $(f')_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$. Vamos demonstrar que tal fato é verdadeiro para a matriz B^T. Consideramos a matriz de capilaridade B como no sistema (2.18). Assim, teremos para $i = 1$, em $u_1 = 0$,

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -B_{11} \\ -B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como estamos no caso em que $u_1 = 0$, segue pela definição da nossa matriz que $\mu_1 = 0$. Observe que com cálculos análogos concluiremos que $\mu_2 = 0$. Seja então, o caso $i = 3$. Assim, teremos que, $u_1 + u_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, teremos

$$B_{11}|_{u_1+u_2=1} = \mu_3$$

$$(B_{12} + B_{22})|_{u_1+u_2=1} = \mu_3.$$

Substituindo $u_1 + u_2 = 1$ nas entradas B_{11}, B_{12} e B_{22} da matriz de capilaridade, concluímos que $\mu_3 = 0$. Portanto demonstramos a condição (2.27) para a matriz B^T.

Nossas hipóteses sobre a suavidade das funções f_i e B_{ij} são:

$$f_i, \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, B_{ij}, \frac{\partial B_{ij}}{\partial u_k}, \frac{\partial^2 B_{ij}}{\partial u_k \partial u_s} \in H^\beta(\Delta), \tag{2.28}$$

onde $H^\beta(\Delta)$, $\beta \in (0,1)$ é o espaço das funções Hölder contínuas definidas em Δ.

Assim como para os dados iniciais e de contorno, exigimos que

$$u_0(x) \in H^{2+\beta}(\overline{\Omega}), \, u_\pm(t) \in H^{1+\beta}([0,T]), \tag{2.29}$$

$$u_0(x), \, u_\pm(t) \in \Delta, \, \forall x \in \Omega, \, \forall t \in (0,T). \tag{2.30}$$

No que segue, também assumiremos que $g \equiv 1$. Formulamos agora nossos problemas

Teorema 2.1 *Assuma que os dados $B(u)$, $f(u)$, $u_0(x)$ e $u_\pm(t)$ satisfazem as condições (2.21), (2.23), (2.27)-(2.30). Seja também a seguinte condição de compatibilidade*

$$\pm\delta u_0'(\pm 1) + u_0(\pm 1) = u_\pm(0)$$

satisfeita. Então o problema (2.1), (2.11), (2.24) com $g \equiv 1$ tem uma única solução $u(x,t)$ com $u \in H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q})$, e β dado em (2.28) - (2.30).

Teorema 2.2 *Sejam as funções $B(u)$, $f(u)$, como no Teorema anterior. Assuma que os dados $u_0(x)$ e $u_\pm(t)$ satisfazem (2.30) e $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_\pm \in W^{1,1}(0,T)$. Então o problema (2.1), (2.11), (2.25) com $g \equiv 1$ possui uma solução fraca $u(x,t)$ tal que*

$$u \in L^2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q), \qquad u_t \in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)).$$

A solução fraca u deste teorema resolve o problema (2.1), (2.11), no seguinte sentido:

$$\int\int_Q u_i\phi_t + f_i(u)\phi_x - B_{ij}(u)u_{jx}\phi_x dxdt = -\int_\Omega u_{i0}\phi(0,x)dx,$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty((-\infty,T) \times \Omega)$.

Teorema 2.3 *Assuma que $\pi_1(\xi)$, $\pi_2(u_2)$ são funções dadas de ξ, $u_2 \in (0,1)$, com $\pi_1'(\xi) \geq 0$, $\pi_2'(u_2) \geq 0$, $0 < \xi < 1$, $0 < u_2 < 1$, e*

$$u_0 \in L^\infty(\Omega), \qquad u_\pm \in W^{1,1}(0,T), \qquad 0 < \delta \leq u_{2,\pm}(t) \leq 1-\delta, \qquad \delta \leq \xi_\pm(t) \leq 1-\delta,$$

$$\delta \leq u_{2,0}(x) \leq 1-\delta, \qquad \delta \leq \xi_0(x) \leq 1-\delta,$$

para algum $\delta \in (0,1)$, onde

$$\xi_0 = \frac{u_{1,0}}{1-u_{2,0}}, \qquad \xi_\pm = \frac{u_{1,\pm}}{1-u_{2,\pm}}.$$

Então com

$$f_1 = \frac{u_1}{ku_2+1}, \qquad f_2 = (1+k)\frac{u_2}{ku_2+1}, \qquad k = \frac{k_2}{k_1} - 1,$$

$$B_{11} = \alpha k_1 \xi\,(1-\xi)\pi_1'(\xi), \qquad B_{12} = \xi(B_{11} - B_{22}), \qquad B_{21} = 0, \qquad B_{22} = \frac{k_1k_2u_2(1-u_2)\pi_2'(u_2)}{k_2u_2 + k_1(1-u_2)},$$

onde k_1, k_2 são constantes positivas, $k = \frac{k_2}{k_1} - 1$, $\xi = u_1(1-u_2)^{-1}$, o problema (2.1), (2.25) possui *uma solução fraca $u(t,x)$ tal que*

$$u \in L^{\infty}(Q), \qquad u_x \in L^2(Q), \qquad u_t \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)),$$

e as estimativas

$$0 < \delta \leq u_2 \leq 1-\delta, \qquad \delta \leq \xi \leq 1-\delta, \tag{2.31}$$

valem.

Capítulo

3

Problemas não-Degenerados

3.1 Estimativas a Priori

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função suave tal que $\nabla_u G_i(u) \cdot h(u) < 0$, $i = 1, 2, 3$ em uma vizinhança da $\partial\Delta$. Tal escolha de h é possível já que $\nabla_u G_i(u) \neq 0$ e Δ é um conjunto convexo. Por agora, assumiremos que $h(u) = u_* - u$, onde u_* é um ponto qualquer do interior do triângulo Δ.

Dados números positivos $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$, consideramos o problema de valor de contorno aproximado

(3.1)
$$u_t + f(u)_x = (B^\nu u_x)_x + \varepsilon h, (t, x) \in Q,$$

(3.2)
$$\delta u_n + u = u_{\partial,\varepsilon}, |x| = 1, u|_{t=0} = u_{0,\varepsilon}(x).$$

Onde

$$u_{i,\pm,\varepsilon} = (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{i,\pm}\right), u_{i,0,\varepsilon} = (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{i,0}\right), i = 1, 2.$$

Observe que, tomamos as condições aproximadas desta forma para garantir que quando as condições iniciais e de fronteira originais estiverem no triângulo, então as condições aproximadas também estarão. Vamos demonstrar este fato:

Suponha que $u_0(x)$, $u_\pm(t) \in \Delta$, então,

$$0 \le u_{i,\pm,\varepsilon} = (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{i,\pm}\right) \le (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) \le (1-\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 \le 1$$

O que demonstra a primeira condição para que as funções $u_{i,\pm,\varepsilon} \in \Delta$. Mostremos agora a segunda condição:

$$0 \leq u_{1,\pm,\varepsilon} = (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{1,\pm}\right) \leq (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1 - u_{2,\pm}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + 1 - u_{2,\pm} - \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon + \varepsilon u_{2,\pm}$$

$$\leq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - u_{2,\pm} + \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon u_{2,\pm} = 1 - (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{2,\pm}\right) = 1 - u_{2,\pm,\varepsilon}$$

Com cálculos análogos, podemos constatar que o mesmo vale para a condição inicial.

Abaixo, nesta seção, as constantes c não dependem de ε; a matriz B^ν, obedece as restrições (2.21) e (2.23), e as funções $u_{0,\varepsilon}(x)$, $u_{i,\partial,\varepsilon}(t)$, $u_{\pm,\varepsilon}(t)$ são usados sem seus índices ν e ε.

Observe que, a ordem na qual os lemas estão colocados, é fundamental para a demonstração, já que sempre utilizaremos os lemas anteriores para concluir as demonstrações.

Neste primeiro lema demonstraremos que a solução do nosso problema, terá valores no interior do triângulo Δ, desde que as condições iniciais e de contorno assumam valores em Δ.

Lema 3.1 *A solução u assume valores em intΔ sempre que u_0 e $u_\pm$ assumem valores em Δ*

Demonstração: Seguimos o método das regiões positivamente invariantes como em [1].

Denotamos $z^i = G_i(u)$, provaremos que $z^i < 0$ para cada i. Mostramos que $\max_{x\in\Omega} z^i(0,x) < 0$, $i \in 1,2,3$. De fato, para $i = 1$, temos que $z^1 = G_1(u) = -u_1$

$$z^1(0,x) = -u_1(0,x) = -u^1_{0,\varepsilon}(x) = (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{01}\right) \leq -(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2} < 0.$$

Com cálculos análogos concluímos que o mesmo vale para $z^2 = G_2(u) = -u_2$. Seja então, $i = 3$. $z^3 = G_3(u) = u_1 + u_2 - 1$

$$z^3(0,x) = -1 + u_1(0,x) + u_2(0,x) = -1 + (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{01}\right) + (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{02}\right)$$

$$= -1 + (1-\varepsilon)\left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + u_{01} + u_{02}\right] = -1 + (1-\varepsilon)(\varepsilon + u_{01} + u_{02}) \leq -1 + (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

$$= -\varepsilon^2 < 0.$$

Supomos que exista um primeiro momento $t_1(i) > 0$ tal que

$$\max_{x\in\Omega} z^i(t_1(i), x) = z^i(t_1(i), x_0) = 0$$

para algum i. Existem duas possibilidades:

$|x_0| < 1$ ou $|x_0| = 1$. O caso $x_0 = 1$ é impossível. De fato, por (3.2) temos,

$$\delta z_x^i + z^i = -u^i_{+,\varepsilon} \tag{3.3}$$

segue então que $z_x^i(t_1, 1) < 0$.

Por continuidade, existe $t_0 \in (0, t_1)$ tal que $\max\limits_{x\in\Omega} z^i(t_0, x) = 0$.

O que contradiz nossa escolha de t_1. O caso $x_0 = -1$ pode ser tratado da mesma forma.

Vamos considerar o caso $|x_0| < 1$. Multiplicando (3.1) por $\nabla_u G_i$ chegamos a igualdade

$$z_t^i + \alpha_i z_x^i = (\mu_i z_x^i)_x + \varepsilon h \cdot \nabla_u G_i \qquad \text{em} \qquad (t_1, x_0) \tag{3.4}$$

Por hipótese,

$$z^i(t_1, x_0) = \max z^i(\tau, y)$$

onde o máximo é tomado sob $0 \leq \tau \leq t_1, |y| \leq 1$.

Segue então que

$$z_x^i(t_1, x_0) = 0, z_{xx}^i(t_1, x_0) \leq 0, z_t^i(t_1, x_0) \geq 0 \tag{3.5}$$

Pela escolha de h, temos

$$h \cdot \nabla_u G_i < 0 \qquad \text{em} \qquad (t_1, x_0)$$

Então, por (3.4) concluímos que $z_t^i(t_1, x_0) < 0$, o que contradiz (3.5).

$\square$

No lema a seguir, demonstraremos algumas estimativas para as funções u_x e u_t. Tais estimativas serão fundamentais para as demonstrações de outros lemas, e para as demonstrações dos Teoremas 2.2 e 2.3.

Lema 3.2 *A estimativa*

$$||u_x||_{L^2(Q)} + \delta \sum_{\pm} \int_0^T |u_x(t, \pm 1)|^2 dt \leq c \tag{3.6}$$

vale com a constante c dependendo de ν e das normas $||\dot{u}_\pm||_{L^1(0,T)}$ e $||h||_{L^1(Q)}$. Em particular, por

(3.1), segue que

$$||u_t||_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \leq c \tag{3.7}$$

uniformemente em ε e δ.

Demonstração: Seja
$$w = \frac{1-x}{2}u_{-,\varepsilon} + \frac{1+x}{2}u_{+,\varepsilon}, \qquad v = u - w.$$

Afirmação 3.1
$$v|_{x=\pm 1} = \mp\delta(v_x + w_x)|_{x=\pm 1}$$

De fato, temos pela condição (3.2) que $\delta u_x = u_+ - u$ em $x = 1$ e que $\delta u_x = u_- - u$ em $x = -1$. Assim, usando a definição de v temos,

$$v|_{x=1} = u - u_+ = -\delta u_x|_{x=1} = -\delta(v_x + w_x)|_{x=1}$$

e

$$v|_{x=-1} = u - u_- = \delta u_x|_{x=-1} = \delta(v_x + w_x)|_{x=-1}$$

O que conclui nossa afirmação.

Observe também que

$$v = u - w \text{ assim, } v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u + \frac{x}{2}u - \frac{x}{2}u - w$$

$$\text{Logo, } v = \left(\frac{1-x}{2}\right)(u - u_{-,\varepsilon}) + \left(\frac{1+x}{2}\right)(u - u_{+,\varepsilon})$$

Então multiplicando a equação $(3.1)_2$ por v_2, obtemos

$$u_{2t}v_2 + f_{2x}v_2 = (B_{22}u_{2x})_x v_2 + \varepsilon h_2 v_2$$

$$v_{2t}v_2 + w_{2t}v_2 + (f_2 v_2)_x - f_2 v_{2x} = (B_{22}u_{2x}v_2)_x - B_{22}u_{2x}v_{2x} + \varepsilon h_2 v_2$$

$$v_{2t}v_2 + w_{2t}v_2 + (f_2 v_2)_x - f_2 v_{2x} = (B_{22}(v_{2x} + w_{2x})v_2)_x - B_{22}(v_{2x} + w_{2x})v_{2x} + \varepsilon h_2 v_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{dv_2^2}{dt} + B_{22}v_{2x}^2 = -w_{2t}v_2 - (f_2 v_2)_x + f_2 v_{2x} + (B_{22}(v_{2x} + w_{2x})v_2)_x - B_{22}w_{2x}v_{2x} + \varepsilon h_2 v_2$$

Integrando esta igualdade em Ω,utilizando as igualdades da afirmação e da observação acima,o fato de que $B_{22} \geq \nu$ e a desigualdade de Cauchy, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v_2^2 dx + \int_\Omega B_{22}|v_{2x}|^2 dx = v_2(B_{22}u_{2x} - f_2)|_{x=-1}^{x=1} + \int_\Omega (v_{2x}(f_2 - B_{22}(u_{2x} - v_{2x})) - w_{2t}v_2 + \varepsilon h_2 v_2)dx$$

$$\leq -\delta\nu|u_{2x}(t,1)|^2 + \delta(u_{2x}f_2)(t,1) - \delta\nu|u_{2x}(t,-1)|^2 + \delta(u_{2x}f_2)(t,-1)$$

$$+ \int_\Omega (v_{2x}(f_2 - B_{22}(u_{2x} - v_{2x}) + u_{2t}v_2 + \varepsilon h_2 v_2))dx$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v_2^2 dx \leq -\delta\nu|u_{2x}(t,1)|^2 + \delta(u_{2x}f_2)(t,1) - \delta\nu|u_{2x}(t,-1)|^2 + \delta(u_{2x}f_2)(t,-1)$$

$$+ \int_\Omega (v_{2x}f_2 - B_{22}v_{2x}u_{2x} + u_{2t}v_2 + \varepsilon h_2 v_2)dx = -\delta\nu|u_{2x}(t,1)|^2 + \delta(u_{2x}f_2)(t,1) - \delta\nu|u_{2x}(t,-1)|^2$$

$$+\delta(u_{2x}f_2)(t,-1) + \int_\Omega \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)(u_2 - u_{2,-,\varepsilon}) + \left(\frac{1+x}{2}\right)(u_2 - u_{2,+,\varepsilon})\right) f_2 dx$$

$$+ \int_\Omega \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)(u_2 - u_{2,-,\varepsilon}) + \left(\frac{1+x}{2}\right)(u_2 - u_{2,+,\varepsilon})\right) B_{22}u_{2x}dx$$

$$+ \int_\Omega u_{2t}\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)(u_2 - u_{2,-,\varepsilon}) + \left(\frac{1+x}{2}\right)(u_2 - u_{2,+,\varepsilon})\right) dx$$

$$+ \int_\Omega \varepsilon h_2\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)(u_2 - u_{2,-,\varepsilon}) + \left(\frac{1+x}{2}\right)(u_2 - u_{2,+,\varepsilon})\right) dx$$

Observe que o primeiro e terceiro termos do lado direito da desigualdade são os termos que precisávamos na nossa estimativa. Assim, pela desigualdade acima e as condições dadas no problema obtemos,

$$\delta\nu|u_{2x}(t,1)|^2 + \delta\nu|u_{2x}(t,-1)|^2 \leq \int_\Omega -\nu c dx - \int_\Omega \nu c u_{2x}^2 dx + c$$

Integrando esta desigualdade em relação à t de 0 à T obtemos a desigualdade desejada para u_2.

Vamos agora obter a mesma estimativa para u_1. Da equação $(3.1)_1$ temos

$$u_{1t} + f_{1x} = (B_{11}u_{1x} + B_{12}u_{2x}) + \varepsilon h_1$$

$$v_{1t}v_1 + w_{1t}v_1 + (f_1 v_1)_x - f_1 v_{1x} = ((B_{11}u_{1x} + B_{12}u_{2x})v_1)_x - (B_{11}u_{1x} + B_{12}u_{2x})v_{1x} + \varepsilon h_1 v_1$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_1^2 + w_{1t}v_1 + (f_1 v_1)_x - f_1 v_{1x} = ((B_{11}(v_{1x} + w_{1x}) + B_{12}u_{2x})v_1)_x - B_{11}v_{1x}^2 - (B_{11}w_{1x} + B_{12}u_{2x})v_{1x}$$

Integrando esta igualdade em Ω,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v_1^2 dx+\int_\Omega B_{11}v_{1x}^2 dx=-\int_\Omega (v_{1x}(B_{11}w_{1x}+B_{12}u_{2x}+f_1)+w_{1t}v_1-\varepsilon h_1 v_1)dx$$

$$+v_1(B_{11}(v_{1x}+w_{1x})+B_{12}u_{2x}-f_1)|_{x=-1}^{x=1}.$$

Utilizando a estimativa feita para u_2 e um argumento análogo ao feito para obter tal estimativa, concluímos que (3.6) vale para u_1, demonstrando assim o lema. □

No próximo lema, obteremos uma maior regularidade para a função u_2.

Lema 3.3 *Existem constantes c e $\alpha \in (0,1)$ tais que*

(3.8) $$|u_2|_Q^{(\alpha)} \equiv ||u_2||_{H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})} \leq c.$$

Ainda mais, se $u_\pm \equiv 0$, a estimativa (3.8) vale uniformemente em δ.

Demonstração: Seja $\zeta(t,x)$ uma função teste com valores entre 0 e 1 e que é diferente de zero somente para $x \in K_\rho$, a bola aberta de raio ρ centrada em $x_0 \in \bar{\Omega}$. Denotemos

$$\Omega_\rho = \bar{\Omega}\cap K_\rho = [x_-^0, x_+^0], \qquad x_+^0 = \min\{1, x^0+\rho\}, \qquad x_-^0 = \max\{-1, x^0-\rho\}.$$

Dado $\delta' > 0$, multiplicamos a equação $(3.1)_2$ por

$$\zeta^2 \max\{u_2-k, 0\} \equiv \zeta^2 u_2^{(k)}, \qquad k \geq -\delta',$$

supondo que $\max\{u_2-k,0\} = u_2-k$, obtemos

$$\zeta^2 u_{2t}(u_2-k)+\zeta^2 f_{2x}(u_2-k) = \zeta^2(B_{22}u_{2x})_x(u_2-k)+\zeta^2\varepsilon h_2(u_2-k)$$

Somando e subtraindo $\zeta\zeta_t(u_2-k)^2$ no primeiro termo da equação acima, e utilizando a regra da derivada do produto nos outros termos, obtemos,

$$\frac{1}{2}(2\zeta\zeta_t(u_2-k)^2+2\zeta^2(u_2-k)u_{2t}-2\zeta\zeta_t(u_2-k)^2)+(\zeta^2 f_2(u_2-k))_x - f_2(2\zeta\zeta_x(u_2-k)+\zeta^2(u_2-k)_x)$$

$$= (\zeta^2 B_{22}u_{2x}(u_2-k))_x-(2\zeta\zeta_x B_{22}u_{2x}(u_2-k)+\zeta^2 B_{22}u_{2x}(u_2-k)_x)+\zeta^2\varepsilon h_2(u_2-k)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\zeta^2(u_2-k)^2)+\zeta^2 B_{22}(u_2-k)_x^2 = (\zeta^2 B_{22}u_{2x}(u_2-k))_x-(\zeta^2 f_2(u_2-k))_x$$

$$-(2\zeta\zeta_x B_{22}u_{2x}(u_2-k)-\zeta\zeta_t|(u_2-k)|^2-f_2(2\zeta\zeta_x(u_2-k)+\zeta^2(u_2-k)_x)-\varepsilon h_2\zeta^2(u_2-k)).$$

Integrando em relação à x em Ω_ρ, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\rho}\zeta^2(u_2-k)^2dx+\int_{\Omega_\rho}\zeta^2B_{22}(u_2-k)_x^2dx=\zeta^2B_{22}u_{2x}(u_2-k)|_{x_-^0}^{x_+^0}-\zeta^2f_2(u_2-k)|_{x_-^0}^{x_+^0}$$

$$-\int_{\Omega_\rho}(2\zeta\zeta_xB_{22}u_{2x}(u_2-k)-\zeta\zeta_t|(u_2-k)|^2-f_2(2\zeta\zeta_x(u_2-k)+\zeta^2(u_2-k)_x)-\varepsilon h_2\zeta^2(u_2-k))dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\rho}\zeta^2|u_2^{(k)}|^2dx+\int_{\Omega_\rho}\zeta^2B_{22}|u_{2x}^{(k)}|^2dx=\zeta^2B_{22}u_{2x}u_2^{(k)}|_{x_-^0}^{x_+^0}-\zeta^2f_2u_2^{(k)}|_{x_-^0}^{x_+^0}$$

$$-\int_{\Omega_\rho}(2\zeta\zeta_xB_{22}u_{2x}u_2^{(k)}-\zeta\zeta_t|u_2^{(k)}|^2-f_2(2\zeta\zeta_xu_2^{(k)}+\zeta^2u_2^{(k)})-\varepsilon h_2\zeta^2u_2^{(k)})dx$$

A igualdade acima é obviamente satisfeita se $\max\{u_2-k,0\}=0$. Observe que $B_{22}\geq\nu$,

$$\delta u_x|_{x=\pm1}=\pm(u_\pm-u)|_{x=\pm1}\qquad\text{pela condição de contorno.}$$

Assim,

$$u_{2x}|_{x=1}=\frac{1}{\delta}(u_{2+}-u_2)|_{x=1}\leq\frac{1}{\delta}u_{2+}|_{x=1}\qquad\text{e}\qquad u_{2x}|_{x=-1}=-\frac{1}{\delta}(u_{2-}-u_2)|_{x=-1}\leq-\frac{1}{\delta}u_{2-}|_{x=-1},$$

e portanto,

$$\zeta^2B_{22}u_{2x}u_2^{(k)}|_{x=x_-^0}^{x=x_+^0}\leq\frac{1}{\delta}\zeta^2B_{22}u_2^{(k)}u_{2+}|_{x=1}+\frac{1}{\delta}\zeta^2B_{22}u_2^{(k)}u_{2-}|_{x=-1}.$$

Seja v uma função dada , definimos $v^{(k)}=\max\{v-k,0\}$.

Afirmação 3.2

$$|\zeta^2v^{(k)}|_{|x|=1}\leq|\int_{\Omega_\rho}\zeta^2v_x^{(k)}+2\zeta\zeta_xv^{(k)}dx|\tag{3.9}$$

, para ρ suficientemente pequeno.

De fato, se -1 e $1\notin\Omega_\rho$, a desigualdade é trivialmente satisfeita, já que o lado esquerdo da desigualdade será nulo e o lado direito é sempre maior ou igual a zero. Suponha que $-1\in\Omega_\rho$, assim, $1\notin\Omega_\rho$ pois supomos ρ pequeno. Assim,

$$|\zeta^2v^{(k)}|_{x=1}=0$$

$$|\zeta^2v^{(k)}|_{x=-1}=|\zeta^2v^{(k)}|_{x=-1}-|\zeta^2v^{(k)}|_{x=1}\leq|\zeta^2v^{(k)}|_{x=1}-\zeta^2v^{(k)}|_{x=-1}|=|\int_{-1}^{1}(\zeta^2v_x^{(k)}+2\zeta\zeta_xv^{(k)})dx|$$

$$=|\int_{-1}^{x_+^0}(\zeta^2v_x^{(k)}+2\zeta\zeta_xv^{(k)})dx|=|\int_{\Omega_\rho}(\zeta^2v_x^{(k)}+2\zeta\zeta_xv^{(k)})dx|$$

O caso em que $1 \in \Omega_\rho$ *é análogo. Concluindo nossa afirmação.*

Pelos cálculos realizados acima teremos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\rho} \zeta^2 |u_2^{(k)}|^2 dx \leq -\nu \int_{\Omega_\rho} \zeta^2 |u_{2x}^{(k)}|^2 dx + \frac{1}{\delta}\zeta^2 B_{22} u_2^{(k)} u_{2+}|_{x=1} + \frac{1}{\delta}\zeta^2 B_{22} u_2^{(k)} u_2|_{x=-1} - \zeta^2 f_2 u_2^{(k)}|_{x_-^0}^{x_+^0}$$

$$-\int_{\Omega_\rho} (2\zeta\zeta_x u_{2x} u_2^{(k)} B_{22} - \zeta\zeta_t |u_2^{(k)}|^2 - f_2(2\zeta\zeta_x u_2^{(k)} + \zeta^2 u_2^{(k)}) - \varepsilon h_2 \zeta^2 u_2^{(k)}) dx \leq -\frac{\nu}{2}\int_{\Omega_\rho} \zeta^2 |u_{2x}^{(k)}|^2 dx$$

$$+c_1 \int_{\Omega_\rho} (\zeta^2 |u_{2x}^{(k)}|^2 + 2\zeta\zeta_x u_2^{(k)}) dx - \int_{\Omega_\rho} \left(\frac{B_{22}\zeta^2 |u_{2x}^{(k)}|^2}{2} + 2|\zeta_x|^2 |u_2^{(k)}|^2 B_{22} - \zeta\zeta_t |u_2^{(k)}|^2 - \frac{\varepsilon^2 h_2^2 \zeta^2}{2} \right) dx$$

$$+\int_{\Omega_\rho} \left(\frac{\zeta^2 |u_2^{(k)}|^2}{2} + f_2 \left(\frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^2 |u_{2x}^{(k)}|^2}{2} + 2\zeta_x^2 |u_2^{(k)}|^2 + \frac{\zeta^2}{2} \right) \right) dx$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\rho} \zeta^2 |u_2^{(k)}|^2 dx + \nu \int_{\Omega_\rho} \zeta^2 |u_{2x}^{(k)}|^2 dx \leq \frac{\nu}{2}\int_{\Omega_\rho} \zeta^2 |u_{2x}^{(k)}|^2 dx$$
$$(3.10)\qquad +c_2 \int_{\Omega_\rho} (|u_2^{(k)}|^2 (|\zeta_x|^2 + |\zeta\zeta_t| + \zeta^2) + \zeta^2 1_{A_{k,\rho}(t)}) dx,$$

onde $A_{k,\rho}(t)$ é a interseção do suporte de $u_2^{(k)}$ com K_ρ e 1_A é a função característica do conjunto A. Procedendo de maneira análoga, provamos que (3.10) também vale com u_2 trocado por $-u_2$, para $k \leq 1+\delta'$. Assim, $u_2 \in \mathscr{B}_2(Q \cup \Gamma, M, \gamma, r, \delta', k)$ com $\Gamma = \partial Q\ \{t = T\}$, $M = 1$, $r = 6$, $k = 2$, e portanto pelo Teorema 1.1 segue que $u_2 \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ para algum $\alpha \in (0,1)$.

$\square$

Demonstraremos a seguir, mais uma estimativa para as derivadas em x e t, da função u_2.

Lema 3.4 *Existe uma constante c tal que*

$$(3.11)\qquad \max_{0\leq t\leq T} \left\{ \int_{\Omega_\rho} u_{2x}^2 dx + \delta \left(\sum_{\pm 1} u_{2x}^2(t, \pm 1) \right) \right\} + \int_Q u_{2xx}^2 + u_{2x}^4 + u_{2t}^2 dx dt \leq c.$$

Ainda mais, se $u_\pm \equiv 0$*, a constante c em (3.11) não depende de* δ.

Demonstração: Seja $\zeta(x)$ uma função teste como acima. Multiplicamos a equação $(3.1)_2$ por

$(\zeta^2 u_{2x})_x$ e obtemos,

$$u_{2t}(\zeta^2 u_{2x})_x + f_{2x}(\zeta^2 u_{2x})_x = (B_{22}u_{2x})_x(\zeta^2 u_{2x})_x + \varepsilon h_2(\zeta^2 u_{2x})_x$$

$$-(u_{2t}(\zeta^2 u_{2x}))_x + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\zeta^2 u_{2x}^2 - f_{2x}(\zeta^2 u_{2x})_x = -(B_{22}u_{2x})_x(\zeta^2 u_{2x})_x - \varepsilon h_2(\zeta^2 u_{2x})_x$$

Para um melhor entendimento, vamos renomear cada um dos termos e fazer estimativas para cada um deles separadamente. Então,

$I_1 = -(u_{2t}(\zeta^2 u_{2x}))_x$

$I_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\zeta^2 u_{2x}^2$

$I_3 = -f_{2x}(\zeta^2 u_{2x})_x$

$I_4 = -(B_{22}u_{2x})_x(\zeta^2 u_{2x})_x$

$I_5 = -\varepsilon h_2(\zeta^2 u_{2x})_x$

Assim teremos,

$$I_3 = -\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}.u_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}.u_{2x}\right).\left(2\zeta\zeta_x u_{2x} + \zeta^2 u_{2x}\right) = -\left(2\frac{\partial f_2}{\partial u_1}u_{1x}\zeta\zeta_x u_{2x} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}u_{1x}\zeta^2 u_{2xx}\right)$$

$$-\left(2\frac{\partial f_2}{\partial u_2}u_{2x}^2\zeta\zeta_x + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\zeta^2 u_{2x}u_{2xx}\right) \leq 2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)^2\zeta^2 u_{1x}^2 + \frac{\zeta_x^2 u_{2x}^2}{2} + \frac{\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)^2\zeta^2 u_{1x}^2}{2} + \zeta^2 u_{2xx}^2$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)^2\zeta_x^2 u_{2x}^2}{2} + \frac{\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)^2\zeta^2 u_{2x}^2}{2} + \frac{\zeta^2 u_{2xx}^2}{2} + 2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)^2\zeta^2 u_{2x}^2 \leq 2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)^2\zeta^2 u_{1x}^2 + \frac{\zeta_x^2 u_{2x}^2}{2}$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)^2\zeta^2 u_{1x}^2}{2} + \zeta^2 u_{2xx}^2 + \frac{\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)^2\zeta_x^2 u_{2x}^2}{2} + \frac{\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)^2\zeta^2 u_{2x}^2}{2} + \frac{\zeta^2 u_{2xx}^2}{2} + 2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)^4\zeta^2 + \frac{\zeta^2 u_{2x}^4}{2}$$

$$I_4 = -\left(2\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\zeta\zeta_x u_{2x}^2 + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\zeta^2 u_{2x}u_{2xx} + 2B_{22}\zeta\zeta_x u_{2x}u_{2xx} + B_{22}\zeta^2 u_{2xx}^2\right) \leq 2\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)^2\zeta^2 u_{2x}^2$$

$$+\frac{\zeta_x^2 u_{2x}^2}{2} + \frac{\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)^2\zeta^2 u_{2x}^2}{2} + \frac{\zeta^2 u_{2xx}^2}{2} + 2(B_{22})^2\zeta_x^2 u_{2x}^2 + \frac{\zeta^2 u_{2xx}^2}{2} + \frac{(B_{22})^2\zeta^2 u_{2xx}^2}{2} + \frac{\zeta^2 u_{2xx}^2}{2}$$

$$I_5 = -\varepsilon h_2(2\zeta\zeta_x u_{2x} + \zeta^2 u_{2xx}) = -(2\varepsilon h_2\zeta\zeta_x u_{2x} + \varepsilon h_2\zeta^2 u_{2xx}) \leq 2\varepsilon^2 h_2^2\zeta_x^2 u_{2x}^2 + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 h_2^2\zeta^2 u_{2xx}^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2}$$

Para I_1, vamos integrar em relação à x de -1 até 1 e utilizar a condição de fronteira (3.2), obtendo

$$\int_{-1}^{1} I_1 dx = -\zeta^2 u_{2x}u_{2t}|_{-1}^{1} = -\zeta^2 u_{2x}(-\delta\dot{u}_{2x} + \dot{u}_{2,\partial})|_{-1}^{1} = \delta\zeta^2 u_{2x}u_{2xt}|_{-1}^{1} - \zeta^2 u_{2x}\dot{u}_{2,\partial}|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta\zeta^2 u_{2x}^2|_{-1}^{1} - \zeta^2 u_{2x}\dot{u}_{2,\partial}|_{-1}^{1}.$$

Utilizando estas estimativas e integrando a desigualdade obtida em Ω_ρ, obtemos a seguinte desigualdade,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{2x}^2 dx + \delta\left(\sum_{x=x_\pm^0}\zeta^2 u_{2x}^2\right)\right\} + \nu\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{2xx}^2 dx \leq J,$$

$$J = ||\dot{u}_\partial||_{C([0,T])}\sum_{x=x_\pm^0}|\zeta^2 u_{2x}| + \frac{\nu}{2}\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{2xx}^2 dx + c_*\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{2x}^4 dx + c\int_{\Omega_\rho}\zeta^2(u_{2x}^2 + u_{1x}^2) + u_{2x}^2(\zeta_x^2 + \zeta^2) + \zeta^2 dx$$

Observe que pela equação $(3.1)_2$ temos,

$$u_{2t} = (B_{22}u_{2x})_x + \varepsilon h_2 - f_{2x}$$

$$u_{2t}^2 = [(B_{22}u_{2x})_x]^2 + \varepsilon^2 h_2^2 + 2\varepsilon h_2(B_{22}u_{2x})_x + f_{2x}^2 - 2\varepsilon h_2 f_{2x}(B_{22}u_{2x})_x = \left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)^2 u_{2x}^4 + (B_{22})^2 u_{2xx}^2$$

$$+2B_{22}\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)u_{2x}^2 u_{2xx} + \varepsilon^2 h_2^2 + 2\varepsilon h_2\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)u_{2x}^2 + 2\varepsilon h_2 B_{22}u_{2xx} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)^2 u_{1x}^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)^2 u_{2x}^2$$

$$+2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)u_{1x}u_{2x} - 2\varepsilon h_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)u_{1x}u_{2x}^2 - 2\varepsilon h_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)B_{22}u_{1x}u_{2xx}$$

$$-2\varepsilon h_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)u_{2x}^3 - 2\varepsilon h_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)B_{22}u_{2x}u_{2xx} \leq c_1 u_{2x}^4 + c_2 u_{2xx}^2 + c_3 u_{1x}^2 + c_4 u_{2x}^2$$

Onde a última desigualdade foi obtida utilizando-se a desigualdade de Cauchy e as constantes c_1, c_2, c_3 e c_4 dependem de $\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}\right)$, B_{22}, $\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)$, $\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)$ e h_2.

Utilizando o Lema 1.2 com $s = 1$ obtemos

$$\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 v_x^4 dx \leq 16osc^2\{v,\Omega_\rho\}\int_{\Omega_\rho}2\zeta^2 v_{xx}^2 + \zeta^2 v_x^2 dx. \tag{3.12}$$

Utilizando o lema 3.3 e a definição da norma $|u_2|_{\Omega_\rho}^{(\alpha)}$ teremos,

$$\rho^\alpha osc\{u_2,\Omega_\rho\} \leq \sup\{\rho^\alpha osc\{u_2,\Omega_\rho\}\} = |u_2|_{\Omega_\rho}^{(\alpha)} \leq c$$

Como consideramos ρ suficientemente pequeno, podemos tomá-lo de forma que $32c_*\rho^\alpha < \nu/4$, onde α é a constante do Lema 3.3. Então que

$$c_*\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{2x}^4 dx \leq \frac{\nu}{4}\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{2xx}^2 + \zeta^2 u_{2x}^2 dx,$$

concluindo então a demonstração do lema.

□

O lema a seguir, é análogo ao Lema 3.3, mas agora para a função u_1.

Lema 3.5 *Existem constantes c e* $\alpha \in (0,1)$ *tais que* $|u_1|_Q^{(\alpha)} \leq c$. *Ainda mais, se* $u_\pm \equiv 0$, *a constante c não depende de* δ.

Demonstração: Seja $\zeta(t,x)$ uma função teste como no Lema 3.3. Definimos $u_1^{(k)} = \max\{u_1 - k, 0\}$ e multiplicamos a equação $(3.1)_1$ por $\zeta^2 u_1^{(k)}$. Vamos supor que o $\max\{u_1 - k, 0\} = u_1 - k$.

$$\zeta^2(u_1-k)u_{1t} + f_{1x}\zeta^2(u_1-k) = (B_{11}u_{1x} + B_{12}u_{2x})_x\zeta^2(u_1-k) + \varepsilon h_1\zeta^2(u_1-k)$$

$$\frac{1}{2}(2\zeta^2(u_1-k)u_{1t} + 2\zeta\zeta_t(u_1-k)^2 - 2\zeta\zeta_t(u_1-k)^2) + f_{1x}\zeta^2(u_1-k) = B_{12}u_{2x}(u_1-k)\zeta^2$$

$$+(B_{11}u_{1x}\zeta^2(u_1-k))_x - (B_{11}u_{1x})(2\zeta\zeta_x(u_1-k) + \zeta^2(u_1-k)_x) + \varepsilon h_1\zeta^2(u_1-k)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\zeta^2(u_1-k)^2 - \zeta\zeta_t(u_1-k)^2 + f_{1x}\zeta^2(u_1-k) = B_{12}u_{2x}(u_1-k)\zeta^2 + \varepsilon h_1\zeta^2(u_1-k)$$

$$+(B_{11}u_{1x}\zeta^2(u_1-k))_x - \zeta^2 B_{11}(u_1-k)_x^2 - 2\zeta\zeta_x u_{1x}(u_1-k)$$

Integrando esta igualdade em relação à x em Ω_ρ concluímos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\rho}\zeta^2|u_1^{(k)}|^2dx + \int_{\Omega_\rho}\zeta^2 B_{11}|u_{1x}^{(k)}|^2dx = J_1 + J_2, \qquad J_1 = \zeta^2 B_{11}u_{1x}u_1^{(k)}|_{x_-^0}^{x_+^0}$$

$$J_2 = \int_{\Omega_\rho}\left(\zeta\zeta_t|u_1^{(k)}|^2 - 2\zeta\zeta_x B_{11}u_{1x}u_1^{(k)} + \zeta^2 u_1^{(k)}\left[(B_{12}u_{2x})_x - \frac{\partial f_1}{\partial x} + \varepsilon h_1\right]\right)dx.$$

Temos então,

$$J_1 \leq \frac{1}{\delta}(\zeta^2 u_{1+}u_1^{(k)} + \zeta^2 u_{1-}u_1^{(k)}) \leq \frac{1}{\delta}\left(u_{1+}\left|\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{1x}^{(k)} + 2\zeta\zeta_x u_1^{(k)}dx\right|\right)$$

$$+\frac{1}{\delta}\left(u_{1-}\left|\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{1x}^{(k)} + 2\zeta\zeta_x u_1^{(k)}dx\right|\right) = \frac{1}{\delta}\left((u_{1+} + u_{1-})\left|\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 u_{1x}^{(k)} + 2\zeta\zeta_x u_1^{(k)}dx\right|\right)$$

$$\leq \int_{\Omega_\rho}\left(\frac{c_1}{2}\zeta^2|u_{1x}^{(k)}|^2 + \frac{c_1}{2}\zeta^2 1_{A_{k,\rho}(t)} + \frac{c_1}{2}\zeta^2 1_{A_{k,\rho}(t)} + 2c_1\zeta_x^2|u_1^{(k)}|^2\right)dx$$

$$= \int_{\Omega_\rho}\left(\frac{c_1}{2}\zeta^2|u_{1x}^{(k)}|^2 + c_1\zeta^2 1_{A_{k,\rho}(t)} + c\zeta_x^2|u_1^{(k)}|^2\right)dx$$

$$J_2 \leq \int_{\Omega_\rho}\left(|\zeta\zeta_t||u_1^{(k)}|^2 + \frac{1}{2}\zeta^2|u_1^{(k)}|^2 + 2c_2\zeta_x^2|u_{1x}|^2 + \zeta^2 u_1^{(k)}\left[(B_{12}u_{2x})_x - \frac{\partial f_1}{\partial x} + \varepsilon h_1\right]\right)dx.$$

Vamos estimar $\int_{\Omega_\rho}\left(\zeta^2 u_1^{(k)}\left[(B_{12}u_{2x})_x-\frac{\partial f_1}{\partial x}+\varepsilon h_1\right]\right)dx$ separadamente. Teremos então,

$$\int_{\Omega_\rho}\left(\zeta^2 u_1^{(k)}\left[(B_{12}u_{2x})_x-\frac{\partial f_1}{\partial x}+\varepsilon h_1\right]\right)dx=\int_{\Omega_\rho}u_1^{(k)}\zeta^2\left[\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2x}+\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}|u_{2x}|^2\right]dx$$

$$+\int_{\Omega_\rho}u_1^{(k)}\zeta^2\left[B_{12}u_{2xx}-\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x}-\frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}+\varepsilon h_1\right]dx\leq\int_{\Omega_\rho}u_1^{(k)}\zeta^2\left[\frac{1}{2}|u_{1x}|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}|u_{2x}|^2\right]dx$$

$$+\int_{\Omega_\rho}u_1^{(k)}\zeta^2\left[\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}|u_{2x}|^2+B_{12}u_{2xx}-\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x}-\frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}+\varepsilon h_1\right]dx\leq\int_{\Omega_\rho}u_1^{(k)}\zeta^2\left[c_3|u_{2x}|^2\right]dx$$

$$+\int_{\Omega_\rho}u_1^{(k)}\zeta^2[c_4u_{2xx}+c_5]dx\leq\int_{\Omega_\rho}\left(\frac{1}{2}|u_1^{(k)}|^2\zeta^2+\frac{1}{2}\zeta^2[c_3|u_{2x}|^2+c_4u_{2xx}+c_5]^2\right)dx$$

$$=\int_{\Omega_\rho}\left(\frac{1}{2}|u_1^{(k)}|^2\zeta^2+\frac{1}{2}\zeta^2\left(c_3^2|u_{2x}|^4+c_4^2u_{2xx}^2\right)\right)dx+\int_{\Omega_\rho}\frac{1}{2}\zeta^2\left(2c_3c_4|u_{2x}|^2u_{2xx}+c_5^2\right)dx$$

$$\int_{\Omega_\rho}\frac{1}{2}\zeta^2\left(2c_3c_5|u_{2x}|^2+c_4u_{2xx}\right)dx\leq\int_{\Omega_\rho}\left(\frac{1}{2}|u_1^{(k)}|^2\zeta^2+\frac{1}{2}\zeta^2c_3^2|u_{2x}|^4\right)dx$$

$$+\int_{\Omega_\rho}\frac{1}{2}\zeta^2\left(c_4^2u_{2xx}^2+2c_3^2|u_{2x}|^4+\frac{1}{2}c_4^2u_{2xx}^2+c_5^2+2c_3c_5|u_{2x}|^2+\frac{1}{2}c_4^2u_{2xx}^2+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$\leq\int_{\Omega_\rho}\left(\frac{1}{2}|u_1^{(k)}|^2\zeta^2+\frac{1}{2}\zeta^2c\right)dx.$$

Assim, com as estimativas acima, obtemos:

$$J_2\leq\int_{\Omega_\rho}|u_1^{(k)}|^2(|\zeta\zeta_t|+\zeta^2)dx+c\int_{\Omega_\rho}\zeta^2 1_{A_{k,\rho}(t)}dx,$$

onde $A_{k,\rho}(t)$ é a interseção do suporte de $u_1^{(k)}$ com K_ρ, e 1_A é a função característica do conjunto A. Assim, temos que u_1 pertence à classe $\mathscr{B}_2(Q,M,\gamma,r,\delta',k)$, como no lema 3.3, e assim $u_1\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, para algum $\alpha\in(0,1)$, concluindo a demonstração do lema.

□

O lema a seguir, é análogo ao lema 3.4, mas agora para a função u_1.

Lema 3.6 *Existe uma constante c tal que*

$$\max_{0\leq t\leq T}\left\{\int_{\Omega_\rho}u_{1x}^2dx+\delta\left(\sum_{\pm1}u_{1x}^2(t,\pm1)\right)\right\}+\int_Q u_{1xx}^2+u_{1x}^4+u_{1t}^2dxdt\leq c.$$

Ainda mais, se $u_{\pm} \equiv 0$, a constante c não depende de δ.

Demonstração: Seja $\zeta(x)$ uma função teste como no lema 3.4. Multiplicamos a equação 3.1_1 por $(\zeta^2 u_{1x})_x$ e obtemos:

$$-(u_{1t}(\zeta^2 u_{1x}))_x + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\zeta^2 u_{1x}^2 - \left[\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}\right](2\zeta\zeta_x u_{1x} - \zeta^2 u_{1xx})$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}u_{1x} - \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2x}\right)u_{1x} - B_{11}u_{1xx} - \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}u_{2x}\right)u_{2x} + B_{12}u_{2xx}\right](2\zeta\zeta_x u_{1x} + \zeta^2 u_{1xx})$$
$$-\varepsilon h_1(2\zeta\zeta_x u_{1x} - \zeta^2 u_{1xx})$$

Para um melhor entendimento, vamos renomear alguns dos termos desta equação e estimá-los separadamente:

$$I_1 = -(u_{1t}(\zeta^2 u_{1x}))_x$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\zeta^2 u_{1x}^2$$

$$I_3 = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}\right](2\zeta\zeta_x u_{1x} - \zeta^2 u_{1xx})$$

$$I_4 = -\left[\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2x}\right)u_{1x} + B_{11}u_{1xx} + B_{12}u_{2xx}\right](2\zeta\zeta_x u_{1x} + \zeta^2 u_{1xx})$$
$$-\left[\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}u_{2x}\right)u_{2x}\right](2\zeta\zeta_x u_{1x} + \zeta^2 u_{1xx})$$

$$I_5 = -\varepsilon h_1(2\zeta\zeta_x u_{1x} - \zeta^2 u_{1xx}).$$

Para I_1, vamos integrar em relação à x de -1 até 1 e utilizamos a condição de fronteira 3.2, obtendo:

$$\int_{-1}^{1} I_1 dx = -\zeta^2 u_{1x}u_{1t}|_{x=-1}^{x=1} = -\zeta^2 u_{1x}(-\delta\dot{u}_{1x} + \dot{u}_{1,\partial})|_{x=-1}^{x=1} = \delta\zeta^2 u_{1x}u_{1xt}|_{x=-1}^{x=1} - \zeta^2 u_{1x}\dot{u}_{1,\partial}|_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta\zeta^2 u_{1x}^2|_{-1}^{1} - \zeta^2 u_{1x}\dot{u}_{1,\partial}|_{-1}^{1}$$

$$I_3 = -2\zeta\zeta_x\frac{\partial f_1}{\partial u_1}|u_{1x}|^2 - 2\zeta\zeta_x\frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}u_{1x} + \zeta^2\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x}u_{1xx} + \zeta^2\frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}u_{1xx} \leq 2\zeta^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)^2|u_{1x}|^2$$

$$+\frac{\zeta^2|u_{1x}|^2}{2} + 2\zeta_x^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)^2|u_{2x}|^2 + \frac{\zeta^2|u_{1x}|^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)^2|u_{1x}|^2 + \frac{\zeta^2 u_{1xx}^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)^2|u_{2x}|^2$$

$$+\frac{\zeta^2 u_{1xx}^2}{2}$$

$$I_4 = 2\zeta\zeta_x\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}u_{1x}^3 + 2\zeta\zeta_x\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2x}u_{1x}^2 + 2\zeta\zeta_x B_{11}u_{1x}u_{1xx} + 2\zeta\zeta_x\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x}^2u_{2x} + 2\zeta\zeta_x\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}u_{1x}u_{2x}^2$$

$$+2\zeta\zeta_x B_{12}u_{1x}u_{2xx} + \zeta^2\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}u_{1x}^2u_{1xx} + \zeta^2\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2x}u_{1x}u_{1xx} + \zeta^2 B_{11}u_{1xx}^2 + \zeta^2\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2x}u_{1xx}$$

$$+\zeta^2\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}u_{2x}^2u_{1xx} + \zeta^2 B_{12}u_{1xx}u_{2xx} \leq 2\zeta^2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)^2u_{1x}^4 + \frac{\zeta_x^2u_{1x}^2}{2} + 2\zeta^2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)^2u_{1x}^4 + \frac{\zeta_x^2u_{2x}^2}{2}$$

$$+2\zeta^2(B_{11})^2u_{1xx}^2 + \frac{\zeta_x^2u_{1x}^2}{2} + 2\zeta^2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)^2u_{1x}^4 + \frac{\zeta_x^2u_{2x}^2}{2} + 2\zeta_x^2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)^2u_{2x}^4 + \frac{\zeta^2u_{1x}^2}{2}$$

$$+2\zeta_x^2(B_{12})^2u_{2xx}^2 + \frac{\zeta^2u_{1x}^2}{2} + \frac{1}{2}\zeta^2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)^2u_{1x}^4 + \frac{\zeta^2u_{1xx}^2}{2} + \frac{\zeta^2u_{1xx}^2}{2} + \frac{\zeta^2}{4}\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)^2u_{1x}^4$$

$$+\frac{\zeta^2}{4}u_{2x}^4 + \zeta^2B_{11}u_{1xx}^2 + \frac{\zeta^2}{2}u_{1xx}^2 + \frac{\zeta^2}{4}\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)^2u_{1x}^4 + \frac{\zeta^2}{4}u_{2x}^4 + \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)^2u_{2x}^4$$

$$+\frac{\zeta^2}{2}u_{1xx}^2 + \frac{\zeta^2}{2}(B_{12})^2u_{2xx}^2 + \frac{\zeta^2}{2}u_{1xx}^2.$$

$$I_5 = -2\varepsilon h_1\zeta\zeta_x u_{1x} + \varepsilon\zeta^2h_1u_{1xx} \leq 2\varepsilon^2h_1^2\zeta_x^2|u_{1x}|^2 + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\varepsilon^2\zeta^2h_1^2}{2}u_{1xx}^2 + \frac{\zeta^2}{2}$$

Utilizando estas estimativas e integrando esta desigualdade em Ω_ρ, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega_\rho}\zeta^2u_{1x}^2dx + \delta\left(\sum_{x=x_\pm^0}\zeta^2u_{1x}^2\right)\right\} + \nu\int_{\Omega_\rho}\zeta^2u_{1xx}^2dx \leq cJ,$$

$$J = ||\dot{u}_\partial||_{C([0,T])}\sum_{x=x_\pm^0}|\zeta^2u_{1x}| + \frac{\nu}{2}\int_{\Omega_\rho}\zeta^2u_{1xx}^2dx + \int_{\Omega_\rho}\zeta_x^2(u_{2x}^2+u_{1x}^2+u_{2xx}^2+u_{2x}^4)dx$$

$$+\int_{\Omega_\rho}\zeta^2(u_{1x}^4+u_{2x}^4+u_{2xx}^2+u_{1x}^2+1)dx.$$

Observe que pela equação 3.1_1 obtemos,

$$u_{1t} = \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}|u_{1x}|^2 + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2x}u_{1x} + B_{11}u_{1xx} + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2x} + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}|u_{2x}|^2\right) + \varepsilon h_1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}\right)$$

$$u_{1t}^2 = 2B_{11}u_{1xx}\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^2 + 2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^3u_{1x}\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2} + 2B_{11}u_{1xx}\varepsilon h_1$$

$$+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^2\varepsilon h_1 - 2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^3\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}\right)^2(|u_{1x}|)^2(|u_{2x}|)^2$$

$$-2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^2 u_{1x}\frac{\partial f_1}{\partial u_2}+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)u_{2x}u_{1x}B_{11}u_{1xx}+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)u_{2x}u_{1x}\varepsilon h_1$$

$$+2B_{11}u_{1xx}\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}\right)u_{1x}u_{2x}+2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}\right)u_{1x}u_{2x}\varepsilon h_1-2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}\right)u_{1x}(|u_{2x}|)^2\frac{\partial f_1}{\partial u_2}$$

$$+2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^2\varepsilon h_1-2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)u_{1x}-2\varepsilon h_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)u_{1x}$$

$$-2\varepsilon h_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)u_{2x}+2\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)u_{1x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)u_{2x}+\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)^2(|u_{2x}|)^2(|u_{1x}|)^2$$

$$-2B_{11}u_{1xx}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)u_{2x}-2B_{11}u_{1xx}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)u_{1x}+2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}\right)u_{1x}(|u_{2x}|)^3\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}$$

$$-2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)u_{2x}(|u_{1x}|)^2\frac{\partial f_1}{\partial u_1}+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^2(|u_{1x}|)^2\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}$$

$$+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^3\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}\right)u_{2x}-2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)u_{2x}$$

$$+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^2B_{11}u_{1xx}+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^3\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}\right)u_{2x}$$

$$-2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^2u_{2x}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}+\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)^2(|u_{1x}|)^4+B_{11}{}^2(|u_{1xx}|)^2+\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)^2(|u_{2x}|)^4$$

$$+\varepsilon^2 h_1{}^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)^2(|u_{1x}|)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)^2(|u_{2x}|)^2-2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^3\frac{\partial f_1}{\partial u_2}$$

$$+2\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}\right)(|u_{1x}|)^2\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}\right)(|u_{2x}|)^2$$

Utilizando novamente o lema 1.2 e um raciocínio análogo ao do lema 3.4 concluímos a demonstração do lema. □

A primeira estimativa do lema a seguir, será importante para a demonstração da segunda parte do mesmo, e para a demonstração dos últimos três lemas. A segunda estimativa, será importante para a demonstração do últimos três lemas.

Lema 3.7 *Existe uma constante c tal que*

$$\int_Q |u_{ix}|^6 dxdt \leq c, \qquad \int_Q |u_{ix}u_{ixx}|^2 dxdt \leq c. \tag{3.13}$$

Demonstração: Começamos com a seguinte desigualdade,

$$|u_{ix}|^6 = |u_{ix}|^4|u_{ix}|^2 \leq \max_{x\in\Omega}\{|u_{ix}|^4\}|u_{ix}|^2 \text{ então, } \int_Q |u_{ix}|^6 dxdt \leq \int_0^T \max_{x\in\Omega}\{|u_{ix}|^4\} \int_\Omega |u_{ix}|^2 dxdt.$$

Observe que para quaisquer x, $y \in \Omega$ vale,

$$v_x^2(x) - v_x^2(y) = 2\int_x^y v_{xx}v_x dz,$$

pois $2v_{xx}v_x = \frac{d}{dx}(v_x^2)$. Assim teremos,

$$v_x^2(x) - v_x^2(y) = 2\int_x^y v_{xx}v_x dz \leq 2\left(\int_x^y v_{xx}^2 dz\right)^{1/2}\left(\int_x^y v_x^2 dz\right)^{1/2} \leq 2\left(\int_{-1}^1 v_{xx}^2 dz\right)^{1/2}\left(\int_{-1}^1 v_x^2 dz\right)^{1/2}$$

$= 2||v_{xx}||_{L^2(\Omega)}||v_x||_{L^2(\Omega)}$

Integrando esta desigualdade em relação à y de -1 até 1,

$$\int_{-1}^1 v_x^2(x)dy - \int_{-1}^1 v_x^2(y)dy \leq 4||v_{xx}||_{L^2(\Omega)}||v_x||_{L^2(\Omega)}$$

$$(v_x^2)^2 \leq \left[2||v_{xx}||_{L^2(\Omega)}||v_x||_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||v_x||^2_{L^2(\Omega)}\right]^2 = 4||v_{xx}||^2_{L^2(\Omega)}||v_x||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}||v_x||^4_{L^2(\Omega)}$$

$$+2||v_{xx}||_{L^2(\Omega)}||v_x||^3_{L^2(\Omega)} \leq 4||v_{xx}||^2_{L^2(\Omega)}||v_x||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}||v_x||^4_{L^2(\Omega)} + 2||v_{xx}||^2_{L^2(\Omega)}||v_x||^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+\frac{1}{2}||v_x||^4_{L^2(\Omega)} = 6||v_{xx}||^2_{L^2(\Omega)}||v_x||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3}{4}||v_x||^4_{L^2(\Omega)}.$$

Então,

$$\max_{|x|\leq 1} v_x^4 \leq 6||v_{xx}||^2_{L^2(\Omega)}||v_x||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3}{4}||v_x||^4_{L^2(\Omega)}.$$

Assim,

$$||u_{ix}||^6_{L^6(Q)} \leq \int_0^T \max_{x\in\Omega}\{|u_{ix}|^4\}\int_\Omega |u_{ix}|^2 dxdt \leq \int_0^T 6||u_{ixx}||^2_{L^2(\Omega)}||u_{ix}||^2_{L^2(\Omega)}\int_\Omega |u_{ix}|^2 dxdt$$

$$+\int_0^T \frac{3}{4}||u_{ix}||^4_{L^2(\Omega)}\int_\Omega |u_{ix}|^2 dxdt = \int_0^T \left(6||u_{ixx}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3}{4}||u_{ix}||^2_{L^2(\Omega)}\right)\left(\int_\Omega |u_{ix}|^2 dx\right)^2 dt$$

$$\leq ||u_{ix}||^4_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\left(\frac{3}{4}||u_{ix}||^2_{L^2(Q)} + 6||u_{ixx}||^2_{L^2(Q)}\right),$$

o que conclui a demonstração da primeira estimativa do lema.

Para demonstrar a segunda parte do lema, escrevemos primeiramente a equação 3.1_2 da seguinte forma

$$u_{2t} = B_{22}u_{2xx} + F, \tag{3.14}$$

$$F := \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}|u_{2x}|^2 - \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}u_{2x}\right) + \varepsilon h_2.$$

Pelos lemas 3.4, 3.6 e pela primeira parte deste lema, temos que $||F||_{L^3(Q)} \leq c$. Assim podemos aplicar o Teorema 1.2 com $q = 3$ e obtemos a seguinte estimativa:

$$\int_Q |u_{2xx}|^3 dxdt \leq c. \tag{3.15}$$

A segunda estimativa em (3.13) para u_2 segue pela seguinte desigualdade

$$\int_Q |uv|^2 dxdt \leq \left(\int_Q |u|^6 dxdt\right)^{1/3} \left(\int_Q |v|^3 dxdt\right)^{2/3}. \tag{3.16}$$

tomando $u = u_{2x}$ e $v = u_{2xx}$ na equação acima. A desigualdade acima é facilmente obtida utilizando-se a desigualdade de Hölder com expoentes $p = 3$ e $q = 3/2$.

Escrevemos agora a equação 3.1_1 da seguinte forma

$$u_{1t} = B_{11}u_{1xx} + F, \tag{3.17}$$

$$F := \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}|u_{1x}|^2 + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2x}u_{1x} + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2x} + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}|u_{2x}|^2\right) + \varepsilon h_1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}\right)$$

Pelo mesmo argumento anterior, temos que $||F||_{L^3(Q)} \leq c$. Assim a estimativa (3.15) também é válida para u_{1xx}. Portanto a segunda estimativa em (3.13) para u_1 segue da desigualdade (3.16). $\square$

No lema a seguir, obtemos uma maior regularidade para a função u_{2x}.

Lema 3.8 *Existem constantes c e $\alpha \in (0,1)$ tais que $|u_{2x}|_Q^{(\alpha)} \leq c$.*

Demonstração: Derivamos a equação 3.1_2 em relação à x.

$$u_{2xt} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}u_{2x}\right)_x = \left(\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}\right)u_{2x} + B_{22}u_{2xx}\right)_x + (\varepsilon h_2)_x.$$

Vamos efetuar cálculos com o seguinte termo da igualdade acima:

$$\left(\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}\right)u_{2x} + B_{22}u_{2xx}\right)_x = \left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}\right)_x u_{2x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2xx}$$

$$+\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}u_{2xx} + (B_{22}u_{2xx})_x = \left(\frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_1^2}u_{1x}^2 + \frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_1 \partial u_2}u_{1x}u_{2x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1xx} + \frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_1 \partial u_2}u_{1x}u_{2x}\right)u_{2x}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_2^2}u_{2x}^2 + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2xx}\right)u_{2x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2xx} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}u_{2xx} + (B_{22}u_{2xx})_x = \frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_1^2}|u_{1x}|^2 u_{2x}$$

$$+2\frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_1 \partial u_2}u_{1x}|u_{2x}|^2 + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1xx}u_{2x} + \frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_2^2}u_{2x}^3 + 2\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}u_{2xx} + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2xx}$$

$$+(B_{22}u_{2xx})_x.$$

Assim, vemos que $v = u_{2x}$ resolve a equação

$$v_t = (B_{22}(u_2)v_x)_x + F + H_x,$$

$$F := \frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_1^2}|u_{1x}|^2 u_{2x} + 2\frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_1 \partial u_2}u_{1x}|u_{2x}|^2 + \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1xx}u_{2x} + \frac{\partial^2 B_{22}}{\partial u_2^2}u_{2x}^3 + 2\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}u_{2xx}$$

$$+\frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2xx}$$

$$H := -\frac{\partial f_2}{\partial u_1}u_{1x} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2}u_{2x} + \varepsilon h_2$$

Utilizando a desigualdade de Young e os lemas anteriores, vemos que

$$||F||_{q,r,Q} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega F^q dx\right)^{r/q} dt\right)^{1/r} \leq c, \qquad ||H^2||_{q,r,Q} \leq c,$$

quando $q = 2$, $r = 2$. Claramente, as constantes q e r satisfazem as seguintes condições

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2q} = 1 - k, \qquad 0 < k < \frac{1}{2}, \qquad q \in [1, \infty], \qquad r \in \left[\frac{1}{1-k}, \frac{2}{1-2k}\right],$$

com $k = 1/4$. Além disso, segue da condição de fronteira (3.2) e do Lema 3.3 que

$$||v(t, \pm)||_{H^{\alpha/2}([0,T])} \leq c.$$

Assim, pelo teorema 1.3, segue que

$$|v|_Q^{(\sigma)} \leq c$$

para algum $\sigma \leq \alpha$.

□

O lema a seguir, é análogo ao lema 3.8, mas agora obtemos uma maior regularidade para a função u_{1x}.

Lema 3.9 *Existem constantes c e $\alpha \in (0, 1)$ tais que $|u_{1x}|_Q^{(\alpha)} \leq c$.*

Demonstração: Derivamos a equação (3.1_1) em relação à x e obtemos

$$u_{1xt} = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} u_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} u_{2x}\right)_x + (\varepsilon h_1)_x + \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1} u_{1x}^2 + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2} u_{1x} u_{2x} + B_{11} u_{1xx}\right)_x$$
$$+ \left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1} u_{1x} u_{2x} + \frac{\partial B_{12}}{\partial u_2} u_{2x}^2 + B_{12} u_{2xx}\right)_x$$

Vamos efetuar cálculos com o seguinte termo da igualdade acima

$$\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1} u_{1x}^2 + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2} u_{1x} u_{2x} + B_{11} u_{1xx}\right)_x = \frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_1^2} u_{1x}^3 + \frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} u_{1x}^2 u_{2x} + 2\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1} u_{1x} u_{1xx}$$
$$+ \frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} u_{1x}^2 u_{2x} + \frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_2^2} u_{1x} u_{2x}^2 + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2} u_{2x} u_{1xx} + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2} u_{1x} u_{2xx} + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_1} u_{1x} u_{1xx} + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2} u_{2x} u_{1xx}$$
$$+ B_{11} u_{1xxx}$$

Assim, vemos que $v = u_{1x}$ resolve a equação

$$v_t = (B_{11}(u_1, u_2) v_x)_x + F_1 + F_{2x}, \tag{3.18}$$

$$F_1 := 2u_{1xx}\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1} u_{1x} + \frac{\partial B_{11}}{\partial u_2} u_{2x}\right) + u_{1x}\left[\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1} u_{1xx} + u_{1x}\left(\frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_1^2} u_{1x} + \frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} u_{2x}\right)\right]$$

$$+u_{1x}\left[\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{2xx}+u_{2x}\left(\frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_1\partial u_2}u_{1x}+\frac{\partial^2 B_{11}}{\partial u_2^2}u_{2x}\right)\right],$$

$$F_2 := u_{2x}\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial u_1}u_{1x}+\frac{\partial B_{12}}{\partial u_2}u_{2x}\right)+B_{12}u_{2xx}-\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x}+\frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}\right)+\varepsilon h_1.$$

Pelos lemas anteriores, concluímos que $||F_1||_{L^2(Q)} \leq c$. Com a estimativa do Lema 3.8 para u_{2x} em mãos, teremos que $||F||_{L^4(Q)}$, onde F é a função da equação (3.14). Isto implica, pelo Teorema 1.2, para $q=4$, que $||u_{2xx}||_{L^4(Q)} \leq c$.

Olhamos a equação (3.18) como uma equação parabólica linear em v, com

$$||F_1||_{2,2,Q} \leq c, \qquad ||F_2^2||_{2,2,Q} \leq c, \qquad ||v(t,\pm 1)||_{H^{\alpha/2}([0,T])} \leq c.$$

Pelo mesmo argumento do lema anterior, concluímos que

$$||u_{1x}||_{H^{\sigma,\sigma/2}(\overline{Q})} \leq c$$

para algum $\sigma < \alpha$.

□

Neste último lema, demonstraremos que a solução do nosso problema terá a regularidade que desejávamos. Fazemos tal demonstração a partir das informações obtidas nos lemas anteriores.

Lema 3.10 *Seja*

$$u_0 \in H^{2+\beta}(\overline{\Omega}), \qquad u_\pm \in H^{1+\beta/2}([0,T]), \qquad 0<\beta<1,$$

e as condições de compatibilidade

$$\pm\,\delta u_0'(\pm 1)+u_0(\pm 1)=u_\pm(0) \tag{3.19}$$

satisfeitas. Então existe uma constante c tal que a solução do problema (3.1), (3.2) *satisfazem a estimativa $|u|_Q^{(2+\beta)} \leq c$. A constante c não depende de ε, mas depende de T, $||u_0||_{H^{2+\beta}(\overline{\Omega})}$, $||u_\pm||_{H^{1+\beta/2}([0,T])}$, $||h||_{H^{\beta,\beta/2}(\overline{Q})}$, e das normas L^∞ de $f(u)$, $\nabla_u f$, $B_{ij}(u)$, $\nabla_u B_{ij}$ e $\frac{\partial^2 B_{ij}}{\partial u_i \partial u_j}$.*

Demonstração: Observe inicialmente que pelas definições de $u_{0\varepsilon}$ e de $u_{\partial\varepsilon}$, as mesmas também satisfazem as condições de compatibilidade (3.19). Sabemos dos lemas anteriores que existem constantes c e $\alpha \in (0,1)$ tais que $|u_i|_Q^{(\alpha)} \leq c$, $|u_{ix}|_Q^{(\alpha)} \leq c$. Se $\gamma = \min\{\alpha,\beta\}$, segue da equação (3.14) e do Teorema 1.4 que $|u_2|_Q^{(2+\gamma)} \leq c$. Pelo mesmo argumento, utilizando a equação (3.17) concluímos que $|u_1|_Q^{(2+\gamma)} \leq c$. Retornando aos problemas (3.14) e (3.17) concluímos que $|u_2|_Q^{(2+\beta)} \leq c$ e $|u_1|_Q^{(2+\beta)} \leq c$.

$\square$

3.2 Existência e Unicidade

Para provar a resolubilidade do problema $(3.1)-(3.2)$, aplicamos um argumento de ponto fixo na forma do princípio de Leray-Schauder como em Ladyzenskaja et al. [3].

Definimos então o espaço $\mathscr{B}$ de funções vetoriais $\mathbf{u}(t,x) \in \mathbb{R}^2$, com a norma limitada

$$||\mathbf{u}||_{\mathscr{B}} = |\mathbf{u}|_Q^{(\beta)} + |\mathbf{u}_x|_Q^{(\beta)}.$$

Afirmação 3.3 *O espaço $\mathscr{B}$ definido acima é de Banach. De fato, seja $\{u_m\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{B}$. Assim, pela definição de $\mathscr{B}$, segue que $\{u_m\}$ e $\{u_{mx}\}$ são sequências de Cauchy em $H^{\beta,\beta/2}(Q)$. Como $H^{\beta,\beta/2}(Q)$ é um espaço de Banach, segue que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0, n_1$ tais que,*

$$|u_m - u|_Q^{(\beta)} < \varepsilon/2, \qquad para \qquad m > n_0,$$

$$|u_{mx} - v|_Q^{(\beta)} < \varepsilon/2, \qquad para \qquad m > n_1.$$

Afirmação 3.4 *$v = u_x$. De fato, seja φ uma função teste definida em Q qualquer. Temos que*

$$\int_Q u_m \varphi_x dxdt \to \int_Q u\varphi_x dxdt \qquad e \qquad \int_Q u_{mx} \varphi dxdt \to \int_Q v\varphi dxdt.$$

Observe que as convergências acima valem, pois,

$$\int_Q |u_m - u||\varphi| dxdt \leq \int_Q \sup_Q |u_m - u||\varphi| dxdt \leq \int_Q |u_m - u|_Q^{(\beta)} |\varphi| dxdt \leq c|u_m - u|_Q^{(\beta)} \to 0.$$

Analogamente para u_{mx}. Assim,

$\int_Q v\varphi dxdt \leftarrow \int_Q u_{mx} \varphi dxdt = -\int_Q u_m \varphi_x dxdt \to -\int_Q u\varphi_x dxdt,$

mostrando que $v = u_x$, concluindo nossa afirmação.

Então $\forall\, \varepsilon > 0$, *seja* $N = \max\{n_0, n_1\}$. *Assim,*

$$||u_m - u||_{\mathscr{B}} = |u_m - u|_Q^{(\beta)} + |u_{mx} - u_x|_Q^{(\beta)} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Logo, $\mathscr{B}$ *é um espaço de Banach.*

Dado $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathscr{B}$ e $\lambda \in [0,1]$, definimos $\mathbf{u} = (u, v)$ como uma solução do problema linear

$$v_t + \lambda \left[\frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x} - (B_{22}(\mathbf{a}) v_x)_x - \varepsilon h_2(\mathbf{a}) \right] = (1-\lambda) v_{xx},$$

$$u_t + \lambda \left[\frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x} - (B_{11}(\mathbf{a}) u_x)_x - (B_{12}(\mathbf{a}) v_x)_x - \varepsilon h_1(\mathbf{a}) \right] = (1-\lambda) u_{xx},$$

$$\delta \mathbf{u}_n + \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\partial,\varepsilon}, \qquad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_{0,\varepsilon} = (1-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2} + u_{01}, \frac{\varepsilon}{2} + u_{02} \right).$$

Teremos então que o operador $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{u} \equiv A_\lambda(\mathbf{a})$ é bem definido para cada $\mathbf{a}$ fixado, pois se $\mathbf{a}$ é fixado, pela teoria de equações parabólicas, temos que existe uma única solução do problema acima. Os pontos fixos do operador acima são soluções do problema $(3.1)-(3.2)$ quando $\lambda = 1$. Pelos mesmos argumentos utilizados nos lemas 3.1-3.10, chegamos a uma estimativa a priori para os pontos fixos $\mathbf{u}_\lambda$ do operador A_λ:

$$\mathbf{u}_\lambda \in \Delta, \qquad |\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{\lambda x}|_Q^{(\beta)} \leq M, \qquad |\mathbf{u}_\lambda|_Q^{(2+\beta)} \leq M_1,$$

onde as constantes M e M_1 são independentes de λ. Restringimos o operador A_λ ao conjunto

$$\mathscr{U} = \{\mathbf{u} \in \mathscr{B} : \mathbf{u} \in \Delta', |\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{\lambda x}|_Q^{(\beta)} \leq M', \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_{0,\varepsilon}(x), \delta \mathbf{u}_n + \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\partial,\varepsilon}\},$$

onde Δ' é um triângulo tal que $int\Delta' \supset \overline{\Delta}$ e $M' > M$. Claramente, $\mathscr{U}$ é limitado em $\mathscr{B}$.

Afirmação 3.5 $\mathscr{U}$ *é um conjunto convexo. De fato, sejam* $u_1, u_2 \in \mathscr{U}$ *então,* $tu_1 + (1-t)u_2 \in \Delta'$, *para* $t \in [0,1]$, *pois* Δ' *é um triângulo e portanto convexo. Temos também que,*

$$|tu_{1\lambda} + (1-t)u_{2\lambda}|_Q^{(\beta)} \leq t|u_{1\lambda}|_Q^{(\beta)} + (1-t)|u_{2\lambda}|_Q^{(\beta)} \leq tM' + (1-t)M' = M'.$$

Analogamente, para $u_{1\lambda x}$ *e* $u_{2\lambda x}$. *O que conclui nossa afirmação.*

Vemos também que todos os pontos fixos $\mathbf{u}_\lambda$ de A_λ estão estritamente dentro de $\mathscr{U}$ pela própria definição de tal conjunto. (Pois tomamos Δ' tal que $int\Delta' \supset \overline{\Delta}$ e $M' > M$).

Como em Ladyzenskaja et al. [2], provaremos que as outras condições do teorema de Leray-Schauder também são verificadas. Verificaremos então as seguintes condições,

1. O conjunto $A_\lambda(\mathscr{U})$ é compacto em $\mathscr{B}$ para cada $\lambda \in [0,1]$;

   De fato, temos pelos lemas anteriores que $A_\lambda(\mathbf{a}) \equiv u \in H^{\beta+2,1+\beta/2}(Q)$. Pelo Teorema 1.5, temos que toda sequência limitada em $H^{\beta+2,1+\beta/2}$ admite subsequência convergente em $H^{\beta,\beta/2}$ e portanto o conjunto $A_\lambda(\mathscr{U})$ é compacto em $\mathscr{B}$ para cada $\lambda \in [0,1]$ já que toda sequência limitada neste conjunto admitirá uma subsequência convergente.

2. A aplicação $\mathbf{a} \to A_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua em $\mathscr{U}$ uniformemente em $(\mathbf{a},\lambda) \in \mathscr{U}x[0,1]$;

   De fato, sejam a' e $a'' \in \mathscr{U}$ tais que $||a'-a''||_{\mathscr{B}} \to 0$. Para a' associamos a seguinte equação,
   $v'_t - [\lambda B_{22}(a') + (1-\lambda)]v'_{xx} = -\lambda \left[\frac{\partial f_2}{\partial a'_1}a'_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial a'_2}a'_{2x} - \frac{\partial B_{22}}{\partial a'_1}a'_{1x}v'_x - \frac{\partial B_{22}}{\partial a'_2}a'_{2x}v'_x - \varepsilon h_2(a')\right].$
   E para a'' associamos a equação,
   $v''_t - [\lambda B_{22}(a'') + (1-\lambda)]v''_{xx} = -\lambda \left[\frac{\partial f_2}{\partial a''_1}a''_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial a''_2}a''_{2x} - \frac{\partial B_{22}}{\partial a''_1}a''_{1x}v''_x - \frac{\partial B_{22}}{\partial a''_2}a''_{2x}v''_x - \varepsilon h_2(a'')\right].$
   Subtraindo a segunda equação da primeira e rearranjando os termos, obtemos
   $v_t - [\lambda B_{22}(a') + (1-\lambda)]v_{xx} = \lambda[B_{22}(a') - B_{22}(a'')]v''_{xx} - \lambda \left[\frac{\partial f_2}{\partial a'_1}a'_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial a'_2}a'_{2x} - \frac{\partial B_{22}}{\partial a'_1}a'_{1x}v'_x\right]$
   $-\lambda \left[-\frac{\partial B_{22}}{\partial a'_2}a'_{2x}v'_x - \varepsilon h_2(a') - \frac{\partial f_2}{\partial a''_1}a''_{1x} - \frac{\partial f_2}{\partial a''_2}a''_{2x} + \frac{\partial B_{22}}{\partial a''_1}a''_{1x}v''_x + \frac{\partial B_{22}}{\partial a''_2}a''_{2x}v''_x + \varepsilon h_2(a'')\right],$
   onde $v = v' - v''$. Vamos olhar para esta esta equação como equação em v. Observe que o primeiro termo do lado direito desta equação vai à zero já que B_{22} é Hölder contínua e portanto a diferença $[B_{22}(a') - B_{22}(a'')]$ vai à zero em módulo quando $||a'-a''||_{\mathscr{B}} \to 0$. Definimos,

   $$A(x,t,a,a_x) = -\lambda \left[\frac{\partial f_2}{\partial a_1}a_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial a_2}a_{2x} - \frac{\partial B_{22}}{\partial a_1}a_{1x}v_x - \frac{\partial B_{22}}{\partial a_2}a_{2x}v_x - \varepsilon h_2(a)\right].$$

   Pelas hipóteses do nosso problema, pelos lemas provados anteriormente e pelo Teorema 1.6 temos que a função $A \in H^{\beta,\beta/2}(Q)$. Vamos então estimar o módulo do segundo termo do lado direito da igualdade.
   $|-\lambda \left[\frac{\partial f_2}{\partial a'_1}a'_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial a'_2}a'_{2x} - \frac{\partial B_{22}}{\partial a'_1}a'_{1x}v'_x - \frac{\partial B_{22}}{\partial a'_2}a'_{2x}v'_x - \varepsilon h_2(a') - \frac{\partial f_2}{\partial a''_1}a''_{1x} - \frac{\partial f_2}{\partial a''_2}a''_{2x}\right]$
   $-\lambda \left[\frac{\partial B_{22}}{\partial a''_1}a''_{1x}v''_x + \frac{\partial B_{22}}{\partial a''_2}a''_{2x}v''_x + \varepsilon h_2(a'')\right]| = |A(x,t,a',a'_x) - A(x,t,a'',a''_x)|$
   $= \frac{|A(x,t,a',a'_x) - A(x,t,a'',a''_x)|}{|a'-a''|^\beta}|a'-a''|^\beta \leq ||A(x,t,a',a'_x) - A(x,t,a'',a''_x)||_{\mathscr{B}}||a'-a''||_{\mathscr{B}} \to$
   $0.$

Segue então pelo Teorema 1.4, que $|v|_Q^{(\beta+2)} \to 0$ e portanto demonstramos a condição 2 para a primeira equação.

Mostremos agora que esta mesma condição vale para a segunda equação. De fato, sejam a' e $a'' \in \mathscr{U}$ tais que $||a'-a''||_{\mathscr{B}} \to 0$. Para a' associamos a seguinte equação,

$$u'_t - [\lambda B_{11}(a') + (1-\lambda)]u'_{xx} = -\lambda\left[\frac{\partial f_1}{\partial a'_1}a'_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial a'_2}a'_{2x} - \frac{\partial B_{11}}{\partial a'_1}a'_{1x}u'_x - \frac{\partial B_{11}}{\partial a'_2}a'_{2x}u'_x\right]$$
$$-\lambda\left[-(B_{12}(a')v'_x)_x - \varepsilon h_1(a')\right],$$

e para a'' associamos a seguinte equação,

$$u''_t - [\lambda B_{11}(a'') + (1-\lambda)]u''_{xx} = -\lambda\left[\frac{\partial f_1}{\partial a''_1}a''_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial a''_2}a''_{2x} - \frac{\partial B_{11}}{\partial a''_1}a''_{1x}u''_x - \frac{\partial B_{11}}{\partial a''_2}a''_{2x}u''_x\right]$$
$$-\lambda\left[-(B_{12}(a'')v''_x)_x - \varepsilon h_1(a'')\right].$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e rearranjando os termos obtemos,

$$u_t - [\lambda B_{11}(a') + (1-\lambda)]u_{xx} = \lambda[B_{11}(a') - B_{11}(a'')]u''_{xx} - \lambda\left[\frac{\partial f_1}{\partial a'_1}a'_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial a'_2}a'_{2x} - \frac{\partial B_{11}}{\partial a'_1}a'_{1x}u'_x\right]$$
$$-\lambda\left[-\frac{\partial B_{11}}{\partial a'_2}a'_{2x}u'_x - (B_{12}(a')v'_x)_x - \varepsilon h_1(a') - \frac{\partial f_1}{\partial a''_1}a''_{1x} - \frac{\partial f_1}{\partial a''_2}a''_{2x} + \frac{\partial B_{11}}{\partial a''_1}a''_{1x}u''_x + \frac{\partial B_{11}}{\partial a''_2}a''_{2x}u''_x\right]$$
$$-\lambda\left[(B_{12}(a'')v''_x)_x + \varepsilon h_1(a'')\right],$$

com $u = u' - u''$. Vamos olhar para esta esta equação como equação em u. Observe que o primeiro termo do lado direito desta equação vai à zero já que B_{11} é Hölder contínua e portanto a diferença $[B_{11}(a') - B_{11}(a'')]$ vai à zero em módulo quando $||a'-a''||_{\mathscr{B}} \to 0$. Definimos,

$$B(x,t,a,a_x) = -\lambda\left[\frac{\partial f_1}{\partial a_1}a_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial a_2}a_{2x} - \frac{\partial B_{11}}{\partial a_1}a_{1x}u_x - \frac{\partial B_{11}}{\partial a_2}a_{2x}u_x - (B_{12}(a)v_x)_x - \varepsilon h_1(a)\right].$$

Pelas hipóteses do nosso problema, pelos lemas provados anteriormente e pelo Teorema 1.6 temos que a função $B \in H^{\beta,\beta/2}(Q)$. Vamos então estimar o módulo do segundo termo do lado direito da igualdade.

$$|-\lambda\left[\frac{\partial f_1}{\partial a'_1}a'_{1x} + \frac{\partial f_1}{\partial a'_2}a'_{2x} - \frac{\partial B_{11}}{\partial a'_1}a'_{1x}u'_x - \frac{\partial B_{11}}{\partial a'_2}a'_{2x}u'_x - (B_{12}(a')v'_x)_x - \varepsilon h_1(a') - \frac{\partial f_1}{\partial a''_1}a''_{1x}\right]$$
$$-\lambda\left[-\frac{\partial f_1}{\partial a''_2}a''_{2x} + \frac{\partial B_{11}}{\partial a''_1}a''_{1x}u''_x + \frac{\partial B_{11}}{\partial a''_2}a''_{2x}u''_x + (B_{12}(a'')v''_x)_x + \varepsilon h_1(a'')\right]|$$
$$= |B(x,t,a',a'_x) - B(x,t,a'',a''_x)| = \frac{|B(x,t,a',a'_x) - B(x,t,a'',a''_x)|}{|a'-a''|^\beta}|a'-a''|^\beta$$
$$\leq ||B(x,t,a',a'_x) - B(x,t,a'',a''_x)||_{\mathscr{B}}||a'-a''||_{\mathscr{B}} \to 0.$$

Segue então pelo Teorema 1.4, que $|u|_Q^{(\beta+2)} \to 0$ e portanto demonstramos a condição 2 para a primeira equação.

Observe que utilizamos o teorema 1.4 sem preocupação com as condições iniciais e de fronteira já que fizemos a diferença de duas soluções do nosso problema e portanto tais condições são iguais a zero.

3. A aplicação $\lambda \to A_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua em $(\mathbf{a},\lambda) \in \mathscr{U}x[0,1]$

De fato, sejam λ' e $\lambda'' \in [0,1]$ tais que $|\lambda' - \lambda''| \to 0$. Para λ' associamos a seguinte equação,

$$v'_t + \lambda' \left[\frac{\partial f_2(a)}{\partial x} - (B_{22}(a)v'_x)_x - \varepsilon h_2(a) \right] = (1-\lambda')v'_{xx},$$

e para λ'' associamos a seguinte equação,

$$v''_t + \lambda'' \left[\frac{\partial f_2(a)}{\partial x} - (B_{22}(a)v''_x)_x - \varepsilon h_2(a) \right] = (1-\lambda'')v''_{xx}.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e rearranjando os termos obtemos,

$$v_t - [\lambda' B_{22}(a) + (1-\lambda')]v_{xx} = (\lambda' - \lambda'')[B_{22}(a) - 1]v''_{xx} + (\lambda'' - \lambda') \left[\frac{\partial f_2(a)}{\partial x} - \varepsilon h_2(a) \right]$$

$$+\lambda' \frac{\partial B_{22}(a)}{\partial x} v'_x - \lambda'' \frac{\partial B_{22}(a)}{\partial x} v''_x,$$

com $v = v' - v''$. Vamos olhar para esta esta equação como equação em v. Observe que os dois primeiros termos do lado direito desta equação vão à zero já que $|\lambda' - \lambda''| \to 0$ e os termos dentro dos colchetes são Hölder contínuos pelas hipóteses do nosso problema e pelos lemas anteriores. Seja,

$$A(\lambda, a) = \lambda \frac{\partial B_{22}(a)}{\partial x} v_x.$$

Temos pelas hipóteses do nosso problema, pelos lemas provados anteriormente e pelo Teorema 1.6 que a função $A \in H^{\beta,\beta/2}(Q)$. Vamos estimar o módulo do terceiro termo do lado direito da equação em v,

$$|\lambda' \frac{\partial B_{22}(a)}{\partial x} v'_x - \lambda'' \frac{\partial B_{22}(a)}{\partial x} v''_x| = |A(\lambda', a) - A(\lambda'', a)| = \frac{|A(\lambda', a) - A(\lambda'', a)|}{|\lambda' - \lambda''|^\beta} |\lambda' - \lambda''|^\beta$$

$$\leq |A(\lambda', a) - A(\lambda'', a)|_Q^{(\beta)} |\lambda' - \lambda''|^\beta \to 0.$$

Segue então pelo teorema 1.4, que $|v|_Q^{(\beta+2)} \to 0$ e portanto demonstramos a condição 3 para a primeira equação.

Mostremos agora que esta mesma condição vale para a segunda equação. De fato, sejam λ' e $\lambda'' \in [0,1]$ tais que $|\lambda' - \lambda''| \to 0$. Para λ' associamos a seguinte equação,

$$u'_t + \lambda' \left[\frac{\partial f_1(a)}{\partial x} - \frac{\partial B_{11}(a)}{\partial x} u'_x - B_{11}(a)u'_{xx} - (B_{12}(a)v'_x)_x - \varepsilon h_1(a) \right] = (1-\lambda')u'_{xx},$$

e para λ'' associamos a equação,

$$u_t'' + \lambda'' \left[\frac{\partial f_1(a)}{\partial x} - \frac{\partial B_{11}(a)}{\partial x} u_x'' - B_{11}(a) u_{xx}'' - (B_{12}(a) v_x'')_x - \varepsilon h_1(a) \right] = (1-\lambda'') u_{xx}''.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e rearranjando os termos obtemos,

$$u_t - [\lambda' B_{11}(a) + (1-\lambda')] u_{xx} = (\lambda' - \lambda'') \left[(B_{11}(a) - 1) u_{xx}'' + \varepsilon h_1(a) - \frac{\partial f_1(a)}{\partial x} \right]$$

$$+\lambda' \left[\frac{\partial B_{11}(a)}{\partial x} u_x' + (B_{12}(a) v_x')_x \right] - \lambda'' \left[\frac{\partial B_{11}(a)}{\partial x} u_x'' + (B_{12}(a) v_x'')_x \right].$$

Com $u = u' - u''$. Vamos olhar para esta equação como uma equação em u. Observe que o primeiro termo do lado direito da igualdade vai à zero já que $|\lambda' - \lambda''| \to 0$ e o termo dentro dos colchetes é Hölder contínuo pelas hipóteses do nosso problema e pelos lemas anteriores. Seja,

$$B(\lambda, a) = \lambda \left[\frac{\partial B_{11}(a)}{\partial x} u_x + (B_{12}(a) v_x)_x \right].$$

Temos pelas hipóteses do nosso problema, pelos lemas provados anteriormente e pelo Teorema 1.6 que a função $B \in H^{\beta,\beta/2}(Q)$. Vamos então estimar o módulo do segundo termo do lado direito da igualdade em u.

$$\left| \lambda' \left[\frac{\partial B_{11}(a)}{\partial x} u_x' + (B_{12}(a) v_x')_x \right] - \lambda'' \left[\frac{\partial B_{11}(a)}{\partial x} u_x'' + (B_{12}(a) v_x'')_x \right] \right| = |A(\lambda', a) - A(\lambda'', a)|$$

$$= \frac{|A(\lambda', a) - A(\lambda'', a)|}{|\lambda' - \lambda''|^\beta} |\lambda' - \lambda''|^\beta \leq |A(\lambda', a) - A(\lambda'', a)|_Q^{(\beta)} |\lambda' - \lambda''|^\beta \to 0.$$

Segue então pelo teorema 1.4, que $|u|_Q^{(\beta+2)} \to 0$ e portanto demonstramos a condição 3 para a segunda equação.

Observe novamente que utilizamos o teorema 1.4 sem preocupação com as condições iniciais e de fronteira já que fizemos a diferença de duas soluções do nosso problema e portanto tais condições são iguais a zero.

4. o operador A_0 tem um único ponto fixo dentro de $\mathscr{U}$, e a aplicação $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a} - A_0(\mathbf{a})$ possui uma inversa próxima a este ponto fixo.

   De fato, basta observarmos que o operador $A_0(\mathbf{a})$ independe de $\mathbf{a}$, isto é, ele é um único elemento de $\mathscr{U}$ para todo $\mathbf{a}$ e este é o único ponto fixo de tal operador. Assim, vemos também que a aplicação $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a} - A_0(\mathbf{a})$ é uma perturbação do operador identidade e portanto possui uma inversa próxima ao ponto fixo de $A_0(\mathbf{a})$. O que conclui a demonstração da condição 4.

Assim, o problema (3.1)-(3.2) admite uma solução no espaço de Hölder $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q})$.

Para demonstrar a unicidade do problema (3.1)-(3.2) escrevemos as equações do nosso sistema da seguinte forma:

$$u_{2t}+\frac{\partial f_2}{\partial u_1}u_{1x}+\frac{\partial f_2}{\partial u_2}u_{2x}-\left(\frac{\partial B_{22}}{\partial u_1}u_{1x}u_{2x}+\frac{\partial B_{22}}{\partial u_2}u_{2x}^2\right)-B_{22}u_{2xx}-\varepsilon h_2=0$$

$$u_{1t}+\frac{\partial f_1}{\partial u_1}u_{1x}+\frac{\partial f_1}{\partial u_2}u_{2x}-\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial u_1}u_{1x}^2+\frac{\partial B_{11}}{\partial u_2}u_{1x}u_{2x}+(B_{12}u_{2x})_x\right)-B_{11}u_{1xx}-\varepsilon h_1=0.$$

E assim, ambas as equações ficam na forma $\mathscr{L}u=0$. Pelos lemas anteriores temos que os termos do operador $\mathscr{L}$ em cada uma das equações acima pertence à classe $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, para $0<\alpha<1$. Observe que já temos que qualquer solução u do nosso problema satisfaz $u\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, logo, pela própria definição de tal espaço, temos que, $u_{xx}\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ e $u_t\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$. Utilizamos também o Teorema 1.5 para concluir tais fatos. Assim, podemos utilizar o teorema 1.4, pois as condições iniciais e de contorno também estão nas hipóteses de tal teorema e, portanto, demonstramos a unicidade da solução do problema (3.1)-(3.2). Observe que além da unicidade da solução, ainda temos uma estimativa para tal solução que depende somente das normas das condições iniciais e de contorno. Assim, provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Sejam as funções f_u, $\nabla_u f$, $B_{ij}(u)$, $\nabla_u B_{ij}$, $\frac{\partial^2 B_{ij}}{\partial u_i \partial u_j}$, e a função $h(u)$ ser Hölder contínua com expoente de Hölder $\beta\in(0,1)$. Suponha também que as condições do Lema 3.10 são satisfeitas. Então o problema (3.1)-(3.2) tem uma única solução $u(t,x)\in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q})$ tal que $\mathbf{u}(t,x)\in\Delta$ para cada $(t,x)\in Q$.*

Como a estimativa do Lema 3.10 não depende de ε, existe uma sequência $\varepsilon_k\downarrow 0$, tal que a sequência correspondente u_k de soluções do problema (3.1)-(3.2) possui, pela primeira condição verificada do Teorema de Leray-Schauder, uma subsequência convergente para uma função $u\in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q})$ na norma $|.|_Q^{2+\gamma}$ para qualquer $\gamma<\beta$. Claramente, u resolve o problema (2.1), (2.11), (2.24) com $g\equiv 1$. Assim, o Teorema 2.1 está provado.

Demonstração do Teorema 2.2: Consideremos o problema de Dirichlet (2.1), (2.11), (2.25). Pelo Teorema 1.9, de compacidade de Rellich-Kondrachov, temos que

$$W^{1,2}((-1,1))\subset\subset L^2((-1,1)),$$

em particular, vale que,

$$W^{1,2}((-1,1))\hookrightarrow L^2((-1,1)).$$

Assim, no enunciado do Teorema 1.7, de compacidade de Aubin-Lions, tomamos,

$$U=W^{1,2}((-1,1)),V=L^2((-1,1))\text{ e }W=W^{-1,2}((-1,1)).$$

Construímos então o conjunto

$$\Pi = \{u\,;\, u \in L^2(0,T;W^{1,2}((-1,1))),\, u_t \in L^2(0,T;W^{-1,2}((-1,1)))\}.$$

Seja u_k com $\delta_k \downarrow 0$ uma sequência de soluções do problema (2.1), (2.11), (2.24). Como as estimativas (3.6) e (3.7) são uniformes com respeito à $\delta \downarrow 0$, segue que

$$u_k \in \Pi.$$

Logo, pelo teorema de compacidade de Aubin-Lions, temos,

$$u_k \to u \qquad \text{em} \qquad L^2(Q), \qquad u(t,x) \in \Delta \,\text{para cada}\,(t,x) \in Q,$$

$$u \in L^\infty(Q), \qquad u_x \in L^2(Q), \qquad u_t \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)) \tag{3.20}$$

Afirmação 3.6 *u resolve a equação (2.1) no sentido fraco. De fato, seja $\varphi \in C_c^\infty((-\infty,T)x\Omega)$ qualquer.*

$$\int\int_Q u_i\varphi_t dxdt + \int\int_Q f_i(u)\varphi_x - B_{ij}(u)u_{jx}\varphi_x dtdx = \int\int_Q u_{it}\varphi + f_{ix}(u)\varphi - (B_{ij}u_{jx})_x\varphi dxdt$$

$$-\int\int_Q (u_i\varphi)_t dxdt + \int\int_Q (f_i(u)\varphi)_x - (B_{ij}u_{jx}\varphi)_x dtdx = -\int_\Omega u_{i0}\varphi(0,x)dx,$$

concluindo nossa afirmação.

Demonstramos assim o teorema 2.2. □

Capítulo

4

Um Problema Degenerado

4.1 Equações básicas de fluidos trifásicos

Dadas as funções de mobilidade $\lambda_i(u_1,u_2)$, $i=1,2,3$, e a função $B_{22}(u_2)$, tratamos a hipótese (2.13) como um sistema linear de equações diferenciais para as funções de pressão de capilaridade $P_i(u_1,u_2)$. Vamos analisar este sistema no importante caso em que

$$\lambda_i = k_i u_i,\ k_i = const\ (>0). \tag{4.1}$$

Uma análise de simetria de grupo dada em Ovsiannikov [9] sugere que olhemos para soluções do sistema

$$0=\frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_1}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1},\ B_{22}=-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2}+\frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2}, \tag{4.2}$$

na seguinte forma

$$P_i = q_i(\xi)+Q_i(u_2),\ \xi=\frac{u_1}{1-u_2}\equiv\frac{u_1}{u_1+u_3}. \tag{4.3}$$

Substituindo tais soluções no sistema acima, obtemos,

$$q_2'(\xi)=q_1'(\xi)\left(\frac{k_1u_1}{k_1u_1+k_3u_3}\right)=q_1'(\xi)\left(\frac{k_1\xi}{(k_1-k_3)\xi+k_3}\right)=q_1'(\xi)A(\xi),$$

$$A(\xi)=\left(\frac{k_1\xi}{(k_1-k_3)\xi+k_3}\right),\ \xi=\frac{u_1}{1-u_2}\equiv\frac{u_1}{u_1+u_3}.$$

Tomando

$$Q_1'(u_2)=-\frac{B_{22}(u_2)}{1-u_2},\ k_0=\frac{k_3-k_1}{k_1k_3},$$

obtemos,

$$
\begin{aligned}
Q_2'(u_2) &= B_{22}(u_2)\left(\frac{\lambda_1(k_1-k_3)}{(\lambda_1+\lambda_3)k_1k_3(1-u_2)}+\frac{\lambda}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}\right)\\
&= B_{22}(u_2)\left(\frac{u_1(k_1-k_3)}{(\lambda_1+\lambda_3)k_3(1-u_2)}+\frac{\lambda}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}\right) = B_{22}(u_2)\left(\frac{\lambda_2u_1(k_1-k_3)+\lambda k_3(1-u_2)}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)k_3(1-u_2)}\right)\\
&= B_{22}(u_2)\left(\frac{\lambda_2\lambda_1-\lambda_2u_1k_3+\lambda_1k_3(1-u_2)+\lambda_2k_3(1-u_2)+\lambda_3k_3(1-u_2)}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)k_3(1-u_2)}\right)\\
&= B_{22}(u_2)\left(\frac{\lambda_2\lambda_1+\lambda_2k_3(1-u_1-u_2)+\lambda_1k_3(1-u_2)+\lambda_3k_3(1-u_2)}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)k_3(1-u_2)}\right)\\
&= B_{22}(u_2)\left(\frac{\lambda_2\lambda_1+\lambda_2k_3u_3+\lambda_1k_3(1-u_2)+\lambda_3k_3(1-u_2)}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)k_3(1-u_2)}\right)\\
&= B_{22}(u_2)\left(\frac{\lambda_2\lambda_1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1k_3(1-u_2)+\lambda_3k_3(1-u_2)}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)k_3(1-u_2)}\right)\\
&= B_{22}(u_2)\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+k_3(1-u_2))}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)k_3(1-u_2)}\right)\\
&= B_{22}(u_2)\left(\frac{\lambda_2+k_3(1-u_2)}{\lambda_2k_3(1-u_2)}\right) = B_{22}(u_2)\left(\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{k_3(1-u_2)}\right) = B_{22}(u_2)\left(\frac{1}{k_2u_2}+\frac{1}{k_3(1-u_2)}\right),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
Q_2'(u_2) = B_{22}(u_2)\left(\frac{1}{k_2u_2}+\frac{1}{k_3(1-u_2)}\right). \tag{4.4}
$$

Suponha que a pressão de capilaridade $P_1(u)$ é uma função dada de u_1 na parte da fronteira do triângulo Δ onde $u_2=0$:

$$
P_1|_{u_2=0} = \pi_1(u_1).
$$

Suponha também que a pressão de capilaridade $P_2(u)$ é uma função dada de u_2 na parte da fronteira do triângulo Δ onde $u_1=0$:

$$
P_2|_{u_1=0} = \pi_2(u_2).
$$

Segue de (4.3) que

$$
\pi_1(u_1) = q_1(u_1)+Q_1(0), \qquad \pi_2(u_2) = q(0)+Q_2(u_2).
$$

É natural definirmos

$$q_1(\xi) = \pi_1(\xi), \qquad Q_2(u_2) = \pi_2(u_2).$$

Então as funções $Q_1(u_2)$ e $q_2(\xi)$ são definidas por (4.4) como segue:

$$q_2(\xi) = \int_0^{\xi} A(\xi)\pi_1'(\xi)d\xi, \qquad B_{22}(u_2) = \frac{k_2k_3u_2(1-u_2)\pi_2'(u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)},$$

$$Q_1'(u_2) = -\frac{k_0B_{22}(u_2)}{1-u_2}.$$

Assim, chegamos às fórmulas para as pressões de capilaridade:

$$(4.5) \qquad \begin{cases} P_1(u_1,u_2) = \pi_1(\xi) - \displaystyle\int_0^{u_2} \frac{k_0k_2k_3u_2\pi_2'(u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}du_2 + const. \\ \\ P_2(u_1,u_2) = \displaystyle\int_0^{\xi} A(\xi)\pi_1'(\xi)d\xi + \pi_2(u_2) + const. \end{cases}$$

Chamamos este processo que nos levou à fórmula (4.5) de método físico de interpolação já que as fórmulas definem as pressões de capilaridade P_1 e P_2 no triângulo Δ a partir de seus valores quando $u_2 = 0$ e $u_1 = 0$, respectivamente.

Substituindo $\lambda_i = k_iu_i$ e (4.5) em (2.10), obtemos,

$$B_{11} = \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\pi_1'(\xi).\frac{1}{1-u_2} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}A(\xi)\pi_1'(\xi).\frac{1}{1-u_2} = \frac{\pi_1'(\xi)}{1-u_2}\left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}(1-A(\xi)) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda}\right]$$

$$= k_1\frac{u_1}{1-u_2}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda} - \frac{\lambda_2}{\lambda}A(\xi)\right)\pi_1'(\xi) = k_1\xi\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}\right)\right)\pi_1'(\xi)$$

$$= k_1\xi\left(\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_2\lambda_1}{\lambda(\lambda_1+\lambda_3)}\right)\pi_1'(\xi) = k_1\xi\left(\frac{\lambda_2\lambda_1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_3^2-\lambda_2\lambda_1}{\lambda(\lambda_1+\lambda_3)}\right)\pi_1'(\xi)$$

$$= k_1\xi\left(\frac{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda(\lambda_1+\lambda_3)}\right)\pi_1'(\xi) = k_1\xi(1-A(\xi))\pi_1'(\xi)$$

$$B_{12} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left(A(\xi)\pi_1'(\xi)\frac{u_1}{(1-u_2)^2} + \pi_2'(u_2)\right) - \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\left(\frac{k_0k_2k_3u_2\pi_2'(u_2)}{k_2u_2k_3(1-u_2)}\right)$$

$$+\frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\left(\pi_1'(\xi)\frac{u_1}{(1-u_2)^2}\right) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}(1-A(\xi))\pi_1'(\xi) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}\pi_1'(\xi)$$

$$-\pi_2'(u_2)\left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left(\frac{k_0k_2k_3u_2}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}+1\right) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda}\left(\frac{k_0k_2k_3u_2}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right)\right]$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}(1-A(\xi))\,\pi_1'(\xi) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}\pi_1'(\xi)$$

$$-\frac{u_1}{\lambda}\left[k_2u_2\left(\frac{(k_3-k_1)k_2u_2\pi_2'(u_2)}{k_2u_2k_3(1-u_2)} + \frac{k_1k_2u_2+k_1k_3(1-u_2)\pi_2'(u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right)\right]$$

$$-\frac{u_1k_3u_3}{\lambda}\left(\frac{(k_3-k_1)k_2u_2\pi_2'(u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}(1-A(\xi))\,\pi_1'(\xi) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}\pi_1'(\xi)$$

$$-\frac{u_1\pi_2'(u_2)}{\lambda}\left[k_2u_2\left(\frac{k_3k_2u_2}{k_2u_2+k_3(1-u_2)} + \frac{k_1k_3u_1+k_1k_3u_3}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right) + k_3u_3\left(\frac{k_3k_2u_2+k_1k_3u_3}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right)\right]$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}(1-A(\xi))\,\pi_1'(\xi) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}\pi_1'(\xi)$$

$$-\frac{u_1\pi_2'(u_2)}{\lambda}(k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3)\left(\frac{k_3k_2u_2}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right)$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}(1-A(\xi))\,\pi_1'(\xi) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda}\frac{u_1}{(1-u_2)^2}\pi_1'(\xi)$$

$$-\frac{u_1\pi_2'(u_2)}{1-u_2}\left(\frac{k_3k_2u_2(1-u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right) = \frac{k_1(1-A(\xi))u_1\pi_1'(\xi)}{1-u_2} - \frac{u_1\pi_2'(u_2)}{1-u_2}\left(\frac{k_3k_2u_2(1-u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\right)$$

$$= \xi(B_{11}-B_{22})$$

Assim, concluímos

$$\begin{cases} B_{11} = k_1\xi(1-A(\xi))\pi_1'(\xi). \\[2ex] B_{22} = \dfrac{k_2k_3u_2(1-u_2)\pi_2'(u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}. \\[2ex] B_{21} = 0, \qquad B_{12} = \xi(B_{11}-B_{22}). \end{cases} \tag{4.6}$$

Finalmente, vemos que a matriz B dada por (4.6) satisfaz

$$B_{12}|_{u_1=0} = 0, \qquad B_{21} = 0,$$

$$(B_{11}-B_{12}-B_{22})|_{u_1+u_2=1} = 0$$

Mais geralmente, é fácil ver que as funções B_{ij} da matriz geral de capilaridade dada por (2.10) satisfazem

$$\begin{cases} B_{12}|_{u_1=0} = 0, \qquad B_{21}|_{u_2=0} = 0, \\ \\ (B_{11} + B_{21} - B_{12} - B_{22})|_{u_1+u_2=1} = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Também é imediato ver que as funções f_i definidas por $f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$, $i = 1, 2, 3$, para o modelo geral de fluidos trifásicos satisfazem,

$$\begin{cases} f_1|_{u_1=0} = 0, \qquad f_2|_{u_2=0} = 0. \\ \\ (f_1 + f_2)|_{u_1+u_2=1} = 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

A última igualdade acima decorre do fato de que se $u_1 + u_2 = 1$, então $u_3 = 0$ já que $u_1 + u_2 + u_3 = 1$.

4.2 Um sistema particular

Aqui, estudamos um sistema particular que surge em reservatórios de petróleo. Assumimos que as mobilidades são funções lineares,

$$\lambda_i = k_i u_i, \qquad i \in \{1,2,3\}, \qquad k_1 = k_3,$$

e que as pressões de capilaridade são dadas pelas fórmulas em (4.5). Neste caso, o fluxo é governado pelo sistema parabólico degenerado

$$\begin{gathered} u_{1t} + f_1(u_1,u_2)_x = (B_{11}(u_1,u_2)u_{1x})_x + (B_{12}(u_1,u_2)u_{2x})_x, \\ u_{2t} + f_2(u_2)_x = (B_{22}(u_2)u_{2x})_x, \end{gathered} \tag{4.9}$$

com

$$f_1 = \frac{u_1}{ku_2 + 1}, \qquad f_2 = (1+k)\frac{u_2}{ku_2+1}, \qquad k = \frac{k_2}{k_1} - 1,$$

e B_{11}, B_{22}, B_{12} são dadas por (4.6), com $k_1 = k_3$. As equações $(4.9)_1$ e $(4.9)_2$ são acopladas pela condição $u(t,x) \in \Delta$, que pode ser escrita como

$$0 \leq u_i(t,x) \leq 1, \qquad u_2(t,x) \leq 1 - u_1(t,x). \tag{4.10}$$

Consideramos o problema de valor inicial e contorno de Dirichlet

$$u|_{x=\pm1} = u_\pm(t), \qquad u|_{t=0} = u_0(x). \tag{4.11}$$

Demonstração do Teorema 2.3. Consideramos o problema não-degenerado aproximado

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = (B^\nu(u)u_x)_x, \\ \nu u_x + u = u_b^\nu \quad \text{em} \quad |x| = 1, \quad u|_{t=0} = u_0^\nu(x), \end{cases} \tag{4.12}$$

com

$$B_{11}^\nu = \nu + X_\nu(u_2)B_{11}, \qquad B_{22}^\nu = \nu + X_\nu(u_2)B_{22}, \qquad B_{12}^\nu = X_\nu(u_2)\xi(B_{11}^\nu - B_{22}^\nu),$$

$$u_0^\nu \in H^{2+\beta}(\overline{\Omega}), \qquad u_0^\nu \in \Delta, \qquad u_\pm^\nu \in H^{1+\beta/2}([0,T]), \qquad u_\pm^\nu \in \Delta,$$

$$\pm\nu u_0^\nu(\pm1) + u_0^\nu(\pm1) = u_\pm^\nu(0),$$

$$||u_\pm^\nu - u_\pm||_{W^{1,1}(0,T)} \to 0, \qquad ||u_0^\nu - u_0||_{L^2(\Omega)} \to 0, \qquad \text{quando} \qquad \nu \downarrow 0.$$

Onde, $X_\nu(u_2)$ é uma função suave tal que

$$X_\nu(u_2) = 1 \qquad \text{se} \qquad 0 \le u_2 \le 1-\nu, \qquad X_\nu(u_2) = 0, \qquad \text{se} \qquad 1 - \frac{\nu}{2} \le u_2 \le 1.$$

A construção de tal função satisfazendo estas propriedades pode ser encontrada em Evans, L. C. [6].

Claramente, a matriz B^ν satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1, e portanto temos uma única solução do problema (4.12). Também observamos que, sob as condições do Teorema 2.3 nos dados u_0^ν e $u_\pm^\nu$, temos pelo princípio do máximo que qualquer solução suave do problema (4.12) satisfaz uma estimativa a priori

$$\delta \le u_2(t,x) \le 1-\delta. \tag{4.13}$$

Com esta estimativa em mãos, a matriz B^ν, para ν suficientemente pequeno, fica

$$B_{11}^\nu = \nu + B_{11}, \qquad B_{22}^\nu = \nu + B_{22}, \qquad B_{12}^\nu = \xi(B_{11}^\nu - B_{22}^\nu). \tag{4.14}$$

Assim, pela definição da matriz B, temos que $B_{22}^\nu(u_2^\nu) \ge k \equiv \text{const.} > 0$ uniformemente para $\nu \downarrow 0$. Assim, a constante c no lema 3.2 não depende de ν, e

$$||u_{2x}^\nu||_{L^2(Q)} \le c, \qquad ||u_{2t}^\nu||_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \le c, \tag{4.15}$$

uniformemente em ν.

Levando em conta a última igualdade em (4.14) para a entrada B_{12}^{ν}, podemos verificar a partir das equações (4.12) que a função $\xi = u_1^{\nu}/(1-u_2^{\nu})$ resolve o problema

$$\xi_t + \frac{\xi_x}{ku_2^{\nu}+1} = (B_{11}^{\nu}\xi_x)_x - \frac{\xi_x u_{2x}^{\nu}(B_{11}^{\nu}+B_{22}^{\nu})}{1-u_2^{\nu}},$$

$$\frac{\nu(1-u_2^{\nu})}{1-u_{\pm}^{\nu}}\xi_x + \xi = \xi_{\pm} \qquad \text{em} \qquad x=\pm 1, \qquad \xi|_{t=0} = \xi_0(x).$$

Vamos verificar a afirmação acima. Substituindo $\xi = u_1^{\nu}/(1-u_2^{\nu})$ na equação acima, obtemos,

$$\frac{u_{1t}^{\nu}(1-u_2^{\nu})+u_{2t}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2} + \frac{u_{1x}^{\nu}(1-u_2^{\nu})+u_{2x}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2(ku_2^{\nu}+1)} = \left(B_{11}^{\nu}\left(\frac{u_{1x}^{\nu}(1-u_2^{\nu})+u_{2x}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2}\right)\right)_x$$

$$-\frac{(u_{1x}^{\nu}(1-u_2^{\nu})+u_{2x}^{\nu}u_1^{\nu})u_{2x}^{\nu}(B_{11}^{\nu}+B_{22}^{\nu})}{(1-u_2)^4}$$

$$\frac{u_{1t}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})} + \frac{u_{2t}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})} + \frac{u_{1x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})(ku_2^{\nu}+1)} + \frac{u_{2x}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2(ku_2^{\nu}+1)}$$

$$= (B_{11}^{\nu})_x\left(\frac{u_{1x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})} + \frac{u_{2x}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2}\right) + B_{11}^{\nu}\left(\frac{u_{1xx}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})} + \frac{u_{1x}^{\nu}u_{2x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2} + \frac{u_{2xx}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})} + \frac{u_{2x}^{\nu}u_{1x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})}\right)$$

$$+B_{11}^{\nu}\left(\frac{(u_{2x}^{\nu})^2u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^4}\right) - \frac{u_{1x}^{\nu}u_{2x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2}(B_{11}^{\nu}+B_{22}^{\nu}) - \frac{(u_{2x}^{\nu})^2u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2}(B_{11}^{\nu}+B_{22}^{\nu})$$

$$\frac{u_{1t}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})} + \frac{u_{2t}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})} + \frac{u_{1x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})(ku_2^{\nu}+1)} + \frac{u_{2x}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2(ku_2^{\nu}+1)}$$

$$= (B_{11}^{\nu})_x\left(\frac{u_{1x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})}\right) + (B_{12}^{\nu})_x\left(\frac{u_{2x}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})}\right) + (B_{22}^{\nu})_x\left(\frac{u_{2x}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2}\right) + B_{11}\left(\frac{u_{1xx}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})}\right)$$

$$+B_{12}\left(\frac{u_{2xx}^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})}\right) + B_{22}\left(\frac{u_{2xx}^{\nu}u_1^{\nu}}{(1-u_2^{\nu})^2}\right).$$

A última igualdade acima é exatamente a primeira equação de (4.12) multiplicada por $1/(1-u_2^{\nu})$ somada à segunda equação de (4.12) multiplicada por $u_1^{\nu}/(1-u_2^{\nu})^2$. E portanto temos o resultado desejado. Assim, podemos utilizar as hipóteses do Teorema 2.3 e o princípio do máximo para concluir que

$$\delta \le \xi(t,x) \le 1-\delta, \tag{4.16}$$

uniformemente em ν. Como consequência de (4.13) e de (4.16) temos que

$$\delta^2 \le u_1^{\nu}(t,x) \le (1-\delta)^2,$$

e assim, $B_{11}^{\nu} \geq k \equiv$ const. > 0 uniformemente para $\nu \downarrow 0$. Logo, a constante c no lema 3.2 não depende de ν e portanto,

$$||u_{1x}^{\nu}||_{L^2(Q)} \leq c, \qquad ||u_{1t}^{\nu}||_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \leq c, \tag{4.17}$$

uniformemente em ν. Assim, basta utilizarmos o Teorema de Compacidade de Aubin-Lions como na demonstração do Teorema 2.2 e concluímos o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Smoller, J. (1983) *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Springer-Verlag.

[2] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A. & Ural´ceva, N. N. (1968) *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type.* AMS, Providence

[3] Ladyzenskaja, O. A., Ural´ceva, N. N. Translated by Scripta Technica. Translation editor: Leon Ehrenpreis 1968 *Linear and quasilinear elliptic equations*

[4] Allen, M. B., Behie, J. B. & Trangenstein, J. A. (1988) *Multiphase Flows in Porous Media: Mechanics, Mathematics and Numerics.* New York. Springer-Verlag Lecture Notes in Engineering **34**.

[5] Frid, H. & Shelukhin, V. V. (2005) *Initial boudary value problems for a quasilinear parabolic system in three-phase capillary flow in porous media*. SIAM J. Math. Anal. **36** (5), 1407-1425.

[6] Evans, L. C. (1997) *Partial Differential Equations*. AMS

[7] Barenblatt, G. I., Entov, V. M. & Ryzhik, V. M. (1990) *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks.* Dordrecht. Kluwer Academic.

[8] Amann, H. (1989) *Dynamic theory of quasi-linear parabolic systems III. Global existence.* Math. Z. 202, 219-250.

[9] Ovsiannikov L. V., *Group Analysis of Differential Equations,* Academic Press, New York, London, 1982.

[10] Brézis, H., *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones,* Ed. cast.: Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[11] Adams, R. A., *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[12] J.L. Lions, *Quelques Methods de Resolution des Problemes aux Limits Non Lineaires,* Dunod, Paris, 1969.

[13] Shelukhin, V. V. & Kondo, C. I. (2005) *Non-local parabolic systems: applications in the three-phase capillary fluid filtration*. Euro Journal of Applied Mathematics. **16**, 1-25.