UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Detectando Fatores de Variedade de Codimensão Um com Propriedades de Posição Geral

Silvestre da Cruz Monteiro

SÃO CARLOS - SP

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Detectando Fatores de Variedade de Codimensão Um com Propriedades de Posição Geral

Silvestre da Cruz Monteiro

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

M775df	Monteiro, Silvestre da Cruz. Detectando fatores de variedade de codimensão um com propriedades de posição geral / Silvestre da Cruz Monteiro -- São Carlos : UFSCar, 2010. 91 f. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010. 1. Topologia algébrica. 2. Topologia. 3. Variedades topológicas. 4. Variedades homológicas. 5. Teoremas de extensão. I. Título. CDD: 514.2 (20ª)

Banca Examinadora:

Edivaldo Lopes dos Santos

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
DM - UFSCar

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar

Prof. Dr. Carlos Biasi
ICMC - USP

Aos meus queridos pais, com amor,
e ao meu estimado amigo Ronan,
com gratidão e reconhecimento.

Agradecimentos

Ao Deus Criador, Redentor e Santificador, por Sua infinita grandeza, por ter me dado tudo o que tenho de bom, por ter feito tudo o que de bom sou, por Sua onipresença em minha vida, por essa oportunidade. A Ele toda a honra e toda a glória, o meu louvor mais elevado e a minha mais profunda gratidão: *o irrestrito domínio da minha vida.*

À mãezinha do céu, Nossa Senhora da Imaculada Conceição Aparecida, por guiar-me sempre, pelo doce acolhimento em todas as tribulações, por ouvir minhas preces. À Santa Luzia, por abrir-me os olhos e encher-me de esperança.

Aos meus pais José e Cleusa, aos meus irmãos Paulo, Patrícia e Simone, e aos meus sobrinhos Gabriel e Stella, por tanto amor e carinho, pelo apoio incondicional, por sempre me receberem com um abraço, por todos esses anos incríveis. Aos meus avós e à minha tia Tereza, por toda bondade, por todo sorriso, por sempre me acolherem como um filho. Eu amo muito todos vocês.

Ao meu orientador, Professor Edivaldo Lopes dos Santos, pela orientação extremamente segura, minuciosa e sábia, pela prestatividade, pelos conhecimentos generosamente compartilhados, por todo respeito e amizade, pela lição cotidiana de humildade.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, principalmente ao Fábio, Pedro Pergher, Luís Antônio e Cézar Kondo, por todos seus ensinamentos e exemplos.

Aos professores do DMEC da Unesp de Presidente Prudente, especialmente ao meu caríssimo amigo Ronan Antônio dos Reis, por todos seus ensinamentos, que transcenderam lições de Matemática, pelo apoio e estímulo constantes, pelos exemplos de retidão, caráter e fé, pelo braço forte sempre estendido a mim.

Ao José Roberto, pelo companheirismo, ao meu amigo Aldo, ao meu padrinho Willer, e a todos os amigos da pós, particularmente à turma de mestrado de 2008, pelo apoio, amizade e momentos de alegria.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Muito obrigado a todos!

O coração do homem faz planos, mas a resposta certa vem dos lábios do SENHOR.

(Provérbios 16:1)

Resumo

Este trabalho é uma abordagem do famoso *"Problema do Produto com uma Reta"*, o qual investiga a classe dos espaços topológicos cujo produto cartesiano com $\mathbb{R}$ é uma variedade topológica. Tais espaços são chamados de *"Fatores de Variedade de Codimensão Um"*. Com base principalmente em [5, 7, 14, 15, 24], introduzimos o conceito de variedades generalizadas, as quais são espaços separáveis ANR que têm mesmo comportamento homológico local que as variedades topológicas, definimos as propriedades de posição geral DAP, DADP, DDP, DHP e DCP e, através desses conceitos e um ferramentário topológico-algébrico, obtivemos respostas ao problema motivador. Dada ainda a importância estratégica da propriedade de posição geral DHP, estudamos um critério para detectá-la na categoria das variedades generalizadas, qual seja, a P2MP.

Palavras Chave: *Variedades Generalizadas, Fatores de Variedade de Codimensão Um, Propriedades de Posição Geral, Teoremas de Extensão, Topologia.*

Abstract

This work is an approach to the famous *"Product with a Line Problem"*. It investigates the class of topological spaces whose cartesian product with $\mathbb{R}$ is a topological manifold. Such spaces are called *"Codimension One Manifold Factors"*. Based mainly on [5, 7, 14, 15, 24], we introduce the concept of generalized manifolds, which are separable ANR spaces with same local homological behavior that the topological manifolds, we define DAP, DADP, DDP, DHP, DCP general position properties and, through these concepts and a machinery topological-algebraic, we have got answers to the motivator problem. Even about the strategic importance of the DHP general position property, we studied a criterion to detect it into the generalized manifolds category, namely, the P2MP.

Keywords: *Generalized Manifolds, Codimension One Manifold Factors, General Position Properties, Extension Theorems, Topology.*

Sumário

Introdução

Um problema fundamental em topologia é determinar quais os tipos de espaços são variedades topológicas e como eles podem ser reconhecidos. Variedades são objetos de interesse de estudo porque, além de sua rica estrutura topológica, elas desempenham papel determinante em muitos ramos da Matemática, notadamente em Análise Complexa, Geometria, Álgebra e Geometria Algébrica e, também em áreas da Física, tais como Mecânica Clássica, Relatividade Geral e Teoria Quântica dos Corpos. Essencialmente, uma n-variedade é um espaço métrico modelado localmente no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, isto é, cada um de seus pontos tem uma vizinhança aberta homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Em geral, a dificuldade do reconhecimento de uma variedade topológica reside principalmente na verificação da condição do espaço ser localmente euclidiano.

Na tentativa de caracterizar as variedades apenas com propriedades clássicas de topologia geral, excluindo nesse caso a condição euclidiana, muitos matemáticos, tais como E. Čech, S.Lefeschetz, R. L. Wilder e P. Alexandroff, voltaram sua atenção a uma classe de espaços topológicos conhecidos atualmente como *variedades generalizadas*, isto é, espaços que têm mesmo comportamento homológico local que as variedades. Uma das versões mais modernas da definição de variedades generalizadas é a seguinte:

Definição 1 *Uma n-variedade generalizada X é um espaço métrico de dimensão finita separável do tipo ANR tal que $H_*(X, X - \{x\}, \mathbb{Z}_2) = H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}, \mathbb{Z}_2)$ qualquer que seja $x \in X$.*

Nem toda variedade generalizada é uma variedade topológica (os espaços 2-ghastly construídos por R. Daverman e J. Walsh em [8], por exemplo, ilustram esse fato). Porém, conforme resultados obtidos por R. D. Edwards e J. W. Cannon, existe uma subclasse de variedades generalizadas, as *resolúveis* e que satisfazem uma propriedade de posição geral denominada DDP ("disjoint disks property") que são variedades topológicas.

Definição 2 (Resolução) *Seja X uma n-variedade generalizada. Se existe uma aplicação própria de uma n-variedade topológica $\phi : M \to X$ tal que $\phi^{-1}(\partial X) = \partial M$ e a imagem inversa de cada ponto por ϕ é não vazia e contrátil em cada vizinhança aberta em M, então dizemos que X é* resolúvel. *A aplicação ϕ é chamada uma* resolução *de X.*

F. Quinn, em [22, 23], associou a qualquer n-variedade generalizada conexa, $n \geq 4$, um índice local $i(X) \in 1 + 8\mathbb{Z}$ e mostrou que $i(X) = 1$ se, e somente se, X é resolúvel. Um fato interessante é que, em [3, 4], foram construídas n-variedades generalizadas tendo índice local arbitrário em todas as dimensões $n > 5$ (tais variedades são conhecidas como *variedades generalizadas exóticas*).

Definição 3 *Um espaço X tem a DDP se dadas aplicações contínuas $f : I^2 \to X$ e $g : I^2 \to X$ então, para cada $\varepsilon > 0$, existem ε-aproximações contínuas $f' : I^2 \to X$ e $g' : I^2 \to X$ de f e g, respectivamente, tais que $f'(I^2) \cap g'(I^2) = \emptyset$.*
Notação: $I = [0, 1]$.

A caracterização de variedades topológicas através de variedades generalizadas é dada pelo seguinte:

Teorema 1 (Edwards-Cannon-Quinn) *X é uma n-variedade topológica, $n \geq 5$, se, e somente se, X é uma n-variedade generalizada resolúvel com a DDP.*

Este resultado justifica nosso interesse em conhecer melhor tais espaços. No presente trabalho, abordamos o clássico *"Problema do Produto com Uma Reta"*, o qual investiga a classe dos espaços topológicos cujo produto cartesiano com $\mathbb{R}$ é uma variedade topológica. Tais espaços são chamados *Fatores de Variedade de Codimensão Um.* Tal problema data de meados da década de 1930 e foi motivado, inicialmente, pelo trabalho de R.L. Moore sobre decomposições que deixavam $\mathbb{R}^2$ topologicamente invariante. R. H. Bing foi o primeiro a demonstrar, com seu espaço de Dogbone, a existência de um espaço que não é uma variedade e, porém, é um Fator de Variedade de Codimensão Um.

Em [5], R.J. Daverman com o objetivo de detectar a DDP definiu as propriedades de posição geral DAP ("disjoint arcs property") e DADP ("disjoint arc-disk property"), análogas a DDP em dimensão 3 e 4, respectivamente:

Definição 4 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Arcos (DAP - "Disjoint Arcs Property") se dados caminhos contínuos $\alpha : I \to X$ e $\beta : I \to X$ então, para cada $\varepsilon > 0$, existem ε-aproximações contínuas $\alpha' : I \to X$ e $\beta' : I \to X$ de α e β, respectivamente, tais que $\alpha'(I) \cap \beta'(I) = \emptyset$.*

Definição 5 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Arco e Disco (DADP - "Disjoint Arc-Disk Property") se dadas aplicações contínuas $\alpha : I \to X$ e $g : I^2 \to X$ então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem ε-aproximações contínuas $\alpha' : I \to X$ e $g' : I^2 \to X$ de α e g, respectivamente, tais que $\alpha'(I) \cap g'(I^2) = \emptyset$.*

R. J. Daverman provou que:

Teorema 2 *Se X tem a DAP então $X \times \mathbb{R}$ tem a DADP.*

Teorema 3 *Se X tem a DADP então $X \times \mathbb{R}$ tem a DDP.*

E, portanto:

Teorema 4 *Se X tem a DAP então $X \times \mathbb{R}^k$, para $k \geq 2$, tem a DDP.*

Ainda em [5], Daverman provou que toda n-variedade generalizada, $n \geq 3$, tem a DAP, e, deste modo, combinando tal fato com os Teoremas 1 e 4, segue que se X for uma n-variedade generalizada resolúvel, $n \geq 3$, então $X \times \mathbb{R}^k$ é uma variedade topológica para $k \geq 2$. Em particular, a questão relevante que continua parcialmente em aberto, e que abordamos nesse trabalho, é a determinação dos Fatores de Variedade de Codimensão Um na categoria das variedades generalizadas.

No Capítulo 1, apresentamos as notações e requisitos preliminares ao desenvolvimento do texto. Em particular, na Seção 1.5 damos algumas propriedades de extensão de homotopias em variedades generalizadas, as quais são essenciais para a obtenção dos principais resultados do trabalho. Na Seção 1.6, enunciamos a versão do Teorema da Dualidade de Alexander obtida por J. D. Ancel em [1] para variedades generalizadas.

No Capítulo 2, estudamos as propriedades de posição geral clássicas tais como a DDP e seus análogos em dimensões 3 e 4. Além disso, discorremos sobre os principais resultados concernentes a tais propriedades. Mostramos ainda que toda n-variedade generalizada com $n \geq 3$ tem a DAP. Na Seção 2.3 investigamos uma propriedade de posição geral mais fraca que a DADP, a DHP:

Definição 6 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Homotopias (DHP - "Disjoint Homotopies Property") se dadas homotopias de caminhos $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem ε-aproximações contínuas $f' : D \times I \to X$ e $g' : D \times I \to X$ de f e g, respectivamente, tais que $f'_t(D) \cap g'_t(D) = \emptyset$, $\forall t \in I$.*
Notação: $D = I = [0, 1]$.

Na Seção 2.4 investigamos uma propriedade de posição geral mais fraca que a DHP, a DCP:

Definição 7 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Concordâncias de Caminhos (DCP - "Disjoint Path Concordances Property") se dadas homotopias de caminhos $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ e qualquer $\varepsilon > 0$, então existem aplicações $F : D \times I \to X \times I$ e $G : D \times I \to X \times I$ tais que*

(i) *$F(D \times d) \subset X \times d$ e $G(D \times d) \subset X \times d$ sempre que $d \in \{0, 1\}$;*

(ii) *$F(D \times I) \cap G(D \times I) = \emptyset$;*

(iii) *$\rho\,(f, proj_X F) < \varepsilon$ e $\rho\,(g, proj_X G) < \varepsilon$.*

O Capítulo 3 é devotado à nossa primeira resposta ao Problema do Produto com Uma Reta, a qual é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 5 *Seja X uma n-variedade generalizada resolúvel, onde $n \geq 4$, e suponhamos que para cada aplicação contínua $f : D \times I \to X$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma ε-aproximação contínua $f' : D \times I \to X$ de f tal que*

$$\dim f'(D \times I) \leq n - 2.$$

Então X é um Fator de Variedade de Codimensão Um.

Ainda no Capítulo 3, na Seção 3.2, mostramos que a DHP é um refinamento estrito da DADP no sentido de que todo espaço com DADP tem a DHP e, no entanto, a recíproca não é verdadeira.

No Capítulo 4, baseando-se no artigo [14] e na tese de doutorado [15], ambos trabalhos de D. Halverson, mostramos na Seção 4.2 que a DHP é uma condição suficiente para que uma n-variedade generalizada resolúvel, $n \geq 4$, seja um Fator de Variedade de Codimensão Um:

Teorema 6 (Teorema de Disjunção de Homotopias) *Se X é um espaço localmente compacto ANR com a DHP então $X \times \mathbb{R}$ tem a DDP.*

Na Seção 4.3, baseando-se no trabalho [7] de R. Daverman e D. Halverson, mostramos que a DCP caracteriza os Fatores de Variedade de Codimensão Um na categoria das n-variedades generalizadas resolúveis para $n \geq 4$:

Teorema 7 (Teorema de Disjunção de Concordâncias) *Seja X um espaço localmente compacto ANR com a DAP. Então X tem a DCP se, e somente se, $X \times \mathbb{R}$ tem a DDP.*

No Capítulo 5, baseando-se no artigo [14] e na tese de doutorado [15], ambos de D. Halverson, estudamos a Propriedade de Profusão de 2-Variedades, a qual funciona como um critério, independente da DADP, para detectar a DHP em variedades generalizadas.

Definição 8 *Um espaço X tem a Propriedade de Profusão de 2-Variedades (P2MP - "Plentiful 2-Manifolds Property") se cada caminho $\alpha : I \to X$ pode ser, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, ε-aproximado por um caminho $\alpha' : I \to N \subset X$, onde N é uma 2-variedade mergulhada em X.*

E mostramos que:

Teorema 8 *Se X é uma n-variedade generalizada, $n \geq 4$, com a P2MP então X tem a DHP.*

No entanto, a recíproca deste resultado não é verdadeira. Os espaços 2-ghastly, construídos por Daverman e Walsh, são exemplos de variedades generalizadas resolúveis de dimensão $n \geq 4$ com a DHP, conforme demonstrado por D. Halverson em [13], e porém não tem a P2MP.

Observamos que a DHP é relativamente mais simples que a DCP. No entanto, ainda não se sabe se a DHP é uma condição necessária para que uma variedade generalizada resolúvel, com $n \geq 4$, seja um Fator de Variedade de Codimensão Um.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo, apresentamos requisitos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Em particular, definimos nosso principal objeto de estudo: as variedades generalizadas.

1.1 Terminologias e Notações

Em nosso trabalho todos os espaços considerados serão métricos separáveis. Dados espaços X e Y, denotaremos por $\mathcal{C}(X,Y)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em Y. Quando Y for métrico e fizer sentido (por exemplo, X ser um espaço compacto), usaremos em $\mathcal{C}(X,Y)$ a métrica uniforme. Dada uma aplicação $f : A \to B$ e um número real $\varepsilon > 0$, diremos que uma aplicação $f' : A \to B$ é uma ε-aproximação de f se $\rho(f, f') < \varepsilon$.
A esfera e o disco em $\mathbb{R}^k$ serão denotados, respectivamente, por $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k / \rho(x, 0) < 1\}$ e $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k / \rho(x, 0) \leq 1\}$. Dado um conjunto A e $\varepsilon > 0$, diremos que o conjunto $N_\varepsilon(A) = \{x \in X / \rho(x, A) < \varepsilon\}$ é a ε-vizinhança de A.
Admitiremos que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é dado por $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ e que todos os grupos de homologia e cohomologia citados têm coeficientes no anel $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$. O símbolo $\breve{H}^*$ denota a cohomologia de $\breve{C}$ech.

1.2 Complexos Simpliciais

Nesta Seção damos uma breve introdução à teoria dos complexos simpliciais. Definiremos tais objetos em dois estágios. Inicialmente, estudamos uma versão mais concreta, papel desempenhado pelos complexos simpliciais euclidianos, e depois procedemos a uma definição mais geral, a qual é dada pelos complexos simpliciais abstratos. De uma maneira natural, associremos um espaço topológico, chamado *poliedro*, a cada complexo simplicial abstrato.

1.2.1 Complexos Simpliciais Euclidianos

Definição 1.2.1 *Um conjunto ordenado de pontos* $\{v_o, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *é dito ser* geometricamente independente *se* $\{v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_0\}$ *é linearmente independente em* $\mathbb{R}^n$ *(considerado aqui como espaço vetorial real com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar).*

O *simplexo* gerado pelos pontos geometricamente independentes $v_0, \cdots, v_k$ é o conjunto, denotado $\langle v_o, \cdots, v_k \rangle$, dado por

$$\langle v_o, \cdots, v_k \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \; : \; 0 \leq t_i \leq 1, \; \forall i = 1, \cdots, k, \quad \text{e} \; \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}$$

com a topologia do subespaço.
Cada um dos pontos v_i é dito um vértice do simplexo. O inteiro k é dito ser a *dimensão* do simplexo, e um k-dimensional simplexo é dito um k-simplexo.

Exemplo 1.2.1 *Um* 0*-simplexo é um único ponto. Um* 1*-simplexo gerado por* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *é um segmento de reta em* $\mathbb{R}^n$*, isto é,* $\langle x, y \rangle = \{tx + (1-t)y \; ; \; 0 \leq t \leq 1\}$*. Um* 2*-simplexo é um triângulo "cheio". Um* 3*-simplexo é um tetraedro sólido.*

Definição 1.2.2 *Sejam* A *um subconjunto arbitrário de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *a família de todos os conjuntos convexos tais que* $A \subset C_\lambda$*. Então a* envoltória convexa *de* A*, denotada por* $E(A)$*, é dada por*

$$E(A) = \bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda.$$

Como a intersecção de conjuntos convexos é convexa, então é imediato que a envoltória convexa de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é, ela própria, um conjunto convexo. Mais ainda, $A \subset E(A)$ e $E(A)$ é o menor conjunto convexo contendo A no sentido de que dado qualquer conjunto convexo K tal que $A \subset K$ então $E(A) \subset K$.

Teorema 1.2.1 *Um simplexo é o envoltório convexo de seus vértices.*

Demonstração: Ver [26], Proposição 1.2, página 2. □

Seja σ um simplexo. Cada simplexo gerado por um subconjunto não vazio de seus vértices é dito uma *face* de σ. Note que, nesse caso, as faces 0-dimensionais de σ são justamente os seus vértices. Chamaremos as faces 1-dimensionais de *arestas*, e de *próprias* as faces de σ que não são iguais a σ.

Definição 1.2.3 *Sejam σ e τ simplexos. Uma aplicação contínua $f : \sigma \to \tau$ é dita ser uma* aplicação simplicial *se é a restrição de uma aplicação afim que leva vértices de σ em vértices de τ.*

Um *complexo simplicial euclidiano* é uma coleção K de simplexos de algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) Se $\sigma \in K$ então todas as faces de σ estão em K.

(ii) A intersecção de quaisquer dois simplexos em K ou é vazia ou é uma face de ambos.

(iii) (**Finitude Local**) Para cada ponto de um simplexo de K existe uma vizinhança que intercepta no máximo uma quantidade finita de simplexos de K.

A dimensão de K é definida como sendo o máximo das dimensões dos simplexos em K. Desde que cada simplexo tem dimensão menor ou igual a n, a dimensão de K está bem-definida.

Exemplo 1.2.2 *A coleção $\big\{\big[(0,0),(1,\frac{1}{n})\big]\big\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{(0,0)\} \cup \big\{(1,\frac{1}{n})\big\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\big[(0,0),(1,\frac{1}{n})\big]$ é um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ ligando a origem ao ponto $(1,\frac{1}{n})$, não é complexo simplicial euclidiano. Note que a condição de finitude local é violada na origem.*

A união de todos os simplexos em K, com a topologia do subespaço herdada de $\mathbb{R}^n$, é um espaço topológico denotado por $|K|$. Chamaremos tal espaço de *poliedro* de K.

Exemplo 1.2.3 *Seja P_n um polígono regular no plano com n lados, onde $n \geq 3$. A coleção de todas as arestas e vértices de P_n é um complexo simplicial euclidiano cujo poliedro é homeomorfo a S^1.*

Qualquer subcoleção K' de K que é, ela própria, um complexo simplicial euclidiano é dito um subcomplexo de K.

Observação 1.2.1 *Para qualquer inteiro não-negativo k, a coleção $K^{(k)}$ dos simplexos de K com dimensão menor ou igual a k é um subcomplexo de K, dito o k-esqueleto de K.*

Definição 1.2.4 *Sejam K e L dois complexos simpliciais euclidianos. Uma aplicação contínua $f : |K| \to |L|$ cuja restrição a cada simplexo de K é uma aplicação simplicial chegando em um simplexo de L é dita uma* aplicação simplicial. *A restrição de f a $K^{(0)}$ é dita a* aplicação vértice *de f.*

Note que até aqui todas as considerações feitas referem-se a simplexos que estão contidos no $\mathbb{R}^n$. Seja V espaço vetorial normado de dimensão n. As únicas propriedades de $\mathbb{R}^n$ usadas foram a estrutura de espaço vetorial normado e a estrutura de espaço métrico com métrica induzida pela norma. Além disso, com qualquer escolha de base vetorial, é possível definir um homeomorfismo linear (isto é, uma bijeção contínua que preserva a estrutura vetorial e a estrutura topológica) entre $\mathbb{R}^n$ e V. Portanto, todos os resultados dessa Subseção são verdadeiros se trocarmos $\mathbb{R}^n$ por V.

1.2.2 Complexos Simpliciais Abstratos

Definição 1.2.5 *Seja $\mathcal{K}$ uma coleção de conjuntos não-vazios finitos. Se para cada $\sigma \in \mathcal{K}$ tem-se que $\wp(\sigma) - \emptyset \subset \mathcal{K}$ então $\mathcal{K}$ é dito um* complexo simplicial abstrato.

Seja $\mathcal{K}$ um complexo simplicial abstrato. Os elementos $\sigma \in \mathcal{K}$ são ditos *simplexos (abstratos).* Qualquer elemento de um simplexo σ é dito um *vértice* de σ, e qualquer subconjunto

não-vazio de σ é dita uma *face* de σ. Por simplicidade, não faremos distinção entre um vértice v e a correspondente face $\{v\}$. Os simplexos definidos na Subseção 1.2.1, como subconjuntos convexos de algum espaço euclidiano, serão ditos *simplexos euclidianos*.
A dimensão de um simplexo abstrato consistindo de $k+1$-vértices é definida como sendo k. A dimensão de $\mathcal{K}$ é o máximo das dimensões de seus simplexos, se este existe. Se existem simplexos de dimensões arbitrariamente grandes, $\mathcal{K}$ é dito ser de *dimensão infinita*. Dizemos ainda que $\mathcal{K}$ é um *complexo finito* se $\mathcal{K}$ é um conjunto finito, e *localmente finito* se qualquer vértice pertence a apenas um número finito de simplexos.
Uma subcoleção de $\mathcal{K}$ que é, ela própria, um complexo simplicial abstrato é dito um *subcomplexo* de $\mathcal{K}$. A coleção $\mathcal{K}^{(k)}$ de todos os simplexos de dimensão no máximo k é um subcomplexo k-dimensional de $\mathcal{K}$, dito a k- esqueleto de $\mathcal{K}$.
Sejam $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ dois complexos simpliciais abstratos. Uma aplicação $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ é dita ser uma *aplicação simplicial* se $f(\{v_0, \cdots, v_k\}) = \{f_0(v_0), \cdots, f_0(v_k)\}$ para alguma aplicação $f_0 : \mathcal{K}^{(0)} \to \mathcal{L}^{(0)}$. Neste caso, a aplicação f_0 é dita a *aplicação vértice* de f. Uma aplicação simplicial é um *isomorfismo* se f_0 é uma bijeção e $\{v_0, \cdots, v_k\}$ é um simplexo de $\mathcal{K}$ se, e somente se, $\{f_0(v_0), \cdots, f_0(v_k)\}$ é um simplexo de $\mathcal{L}$.

Observação 1.2.2 *Seja K um complexo simplicial euclidiano. Então a coleção de todos os subconjuntos finitos de $K^{(0)}$ define um o complexo simplicial abstrato $\mathcal{K}$, o qual chamaremos de* conjunto vértice *de K.*

De posse da álgebra elementar dos complexos simpliciais abstratos, construiremos agora um espaço topológico relacionado a cada complexo. Nosso primeiro passo será relacionar cada k-simplexo abstrato a um k-simplexo euclidiano.

Definição 1.2.6 *Seja S um conjunto arbitrário. Uma* combinação linear formal *de elementos de S é uma função $t : S \to \mathbb{R}$ tal que $t(v) \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de elementos $v \in S$.*

Munindo a coleção das combinações lineares formais do conjunto S com a multiplicação usual de uma constante real por uma função e soma usual de funções então temos uma estrutura de *espaço vetorial real*, o qual denotaremos por $\mathbb{R}\langle S\rangle$ e nos referiremos como *espaço vetorial livre* sobre S.

Um elemento $t \in \mathbb{R}\langle S \rangle$ tal que $t(v_i) \neq 0$ para $i = 1, \cdots, k$, onde $\{v_i\}_{i=1}^k \subset S$, e $t(v) = 0$ para todo $v \in S - \{v_i\}_{i=1}^k$, será simbolicamente representado por $t = \sum_{i=1}^k t_i v_i$, onde $t_i = t(v_i)$.

Note que $S \subset \mathbb{R}\langle S \rangle$ no sentido de que cada $v \in S$ pode ser enxergado como o elemento de $\mathbb{R}\langle S \rangle$, denotado também por v, dado por

$$v(w) = \begin{cases} 0, & w = v \\ 1, & w \neq v \end{cases}$$

Além disso, cada $t \in \mathbb{R}\langle S \rangle$ tem uma única expressão como combinação linear destas funções. Ou seja, S é uma "base vetorial" de $\mathbb{R}\langle S \rangle$.

Definição 1.2.7 *Seja $\{v_0, \cdots, v_k\}$ um k-simplexo abstrato qualquer. Então sua* realização geométrica *é o k-simplexo $\langle v_0, \cdots, v_k \rangle$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}\langle v_0, \cdots, v_k \rangle$.*
Dado um k-simplexo abstrato σ, denotaremos sua realização geométrica por $|\sigma|$.

Em particular, com a topologia de $\mathbb{R}\langle v_0, \cdots, v_k \rangle$ induzida por qualquer norma, a realização geométrica de um simplexo abstrato $\{v_0, \cdots, v_k\}$ é homeomorfa a um k-simplexo euclidiano.

Dado um complexo simplicial abstrato $\mathcal{K}$, então denotaremos por $|\mathcal{K}|$ o conjunto de todas as combinações lineares formais $\sum_{i=1}^k t_i v_i$ tais $0 \leq t_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^k t_i = 1$ e $\{v_0, \cdots, v_k\}$ é um simplexo de $\mathcal{K}$.

Observação 1.2.3 *De maneira abstrata, podemos considerar $|\mathcal{K}|$ com um subconjunto do espaço vetorial livre $\mathbb{R}\langle \mathcal{K}^{(0)} \rangle$; mais concretamente, $|\mathcal{K}|$ é exatamente a união de todas as realizações geométricas dos simplexos de $\mathcal{K}$.*

Consideremos em $|\mathcal{K}|$ a topologia quociente τ_π induzida pela aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \coprod_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma| & \longrightarrow & |\mathcal{K}| \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

onde $\coprod_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|$ é a união disjunta da realização geométrica de todos os simplexos de $\mathcal{K}$ com a topologia da união disjunta.

Observação 1.2.4 *Seja* $\{A_i\}_{i\in I}$ *uma coleção de espaços topológicos não-vazios. Dizemos que um conjunto da união disjunta* $\coprod_{i\in I} A_i$ *é aberto se, e somente se, a intersecção com cada* A_i *é aberta. A topologia sobre* $\coprod_{i\in I} A_i$ *assim definida é dita a* topologia da união disjunta.

O espaço topológico $(|\mathcal{K}|, \tau_\pi)$ é dito a *realização geométrica* de $\mathcal{K}$.

Observação 1.2.5 *Seja* $\{B_j\}_{j\in J}$ *uma coleção de subespaços de um espaço topológico* X *tal que* $\bigcup_{j\in J} B_j = X$. *Dizemos que a topologia de* X *é* coerente *com os subespaços* B_j *se, e somente se, a intersecção com* B_j *de um conjunto aberto em* X *é aberta em* B_j*, qualquer que seja* $j \in J$.

Proposição 1.2.1 *Seja* $\mathcal{K}$ *um complexo simplicial abstrato e* $|\mathcal{K}|$ *sua realização geométrica. Então,*

(i) *A realização geométrica de cada simplexo de* $\mathcal{K}$ *é um subconjunto fechado e compacto de* $|\mathcal{K}|$;

(ii) *Se* $\dim \mathcal{K} = n$, *então cada* n*-simplexo aberto* $int|\sigma|$ *é um subconjunto aberto de* $|\mathcal{K}|$;

Como no caso euclidiano, o simplexo aberto $int|\sigma|$ *é o subcojunto de* $|\sigma|$ *de todas as combinações lineares formais* $\sum_{i=1}^{k} t_i v_i$ *tais que* $0 < t_i \leq 1$ *e* $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ *, onde* $\sigma = \{v_0, \cdots, v_k\}$.

(iii) *A topologia de* $|\mathcal{K}|$ *é a única coerente com a coleção de subespaços* $\{|\sigma|\}_{\sigma\in\mathcal{K}}$;

(iv) *Uma aplicação* $F : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ *é contínua se, e somente se, sua restrição a realização geométrica de cada simplexo* $\sigma \in \mathcal{K}$ *é contínua.*

Observação 1.2.6 *Uma aplicação simplicial* $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *entre complexos simpliciais abstratos induz uma aplicação* $|f| : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ *dada por* $|f|\left(\sum_{i=1}^{k} t_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(v_i)$. *Note, em particular, que sobre cada simplexo* $|\sigma|$, $|f|$ *é exatamente a aplicação simplicial euclidiana determinada pela aplicação vértice* f. *Em particular, desde que* $|f|$ *restrita a cada simplexo é contínua então, pela Proposição 1.2.1,* $|f|$ *é uma aplicação contínua.*

Proposição 1.2.2 *Sejam* $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ *e* $\mathcal{M}$ *complexos simpliciais abstratos. Então:*

(i) *Se* $Id : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *é a identidade de* $\mathcal{K}$ *então* $|Id| : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{K}|$ *é a identidade de* $|\mathcal{K}|$*;*

(ii) *Se* $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *e* $g : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *são aplicações simpliciais então* $|g \circ f| = |g| \circ |f|$*;*

(iii) *Complexos simpliciais abstratos isomorfos têm realização geométrica homeomorfa.*

Portanto, segue que a realização geométrica é um funtor covariante da categoria dos complexos simpliciais abstratos na categoria dos complexos simpliciais euclidianos.

Proposição 1.2.3 *Se* $\mathcal{K}$ *é o conjunto vértice de um complexo simplicial euclidiano* K*, então a realização geométrica de* $\mathcal{K}$ *é homeomorfa ao poliedro* $|K|$*.*

Um espaço homeomorfo a realização geométrica de algum complexo simplicial é dito um *poliedro.*

Definição 1.2.8 *Uma triangulação de um espaço* Y *é um par ordenado* $(\mathcal{K}, t)$ *tal que* $\mathcal{K}$ *é um complexo simplicial e* $t : |\mathcal{K}| \to Y$ *é um homeomorfismo. O homomorfismo* t *é dito uma* triangulação *de* Y*.*

Qualquer espaço que admite uma triangulação , isto é, um poliedro, é dito ser *triangulável.* Em matemática é muito mais fácil estudarmos um problema "pedaço a pedaço" e depois através de alguma técnica concatenarmos os resultados obtidos para cada "pedaço" para o problema geral. Dessa maneira, a triangulação fornece-nos uma poderosa ferramenta para um melhor entendimento dos espaços topológicos trianguláveis, no sentido de que reduz o estudo apenas à realização geométrica de simplexos.

1.2.3 Subdivisão Baricêntrica e Aproximação Simplicial

Nesta Subseção, modificaremos um complexo simplicial de modo a obter outro complexo simplicial com realização geométrica homeomorfa ao primeiro. Especificamente, "subdivideremos" os simplexos do complexo original em partes "menores". Nesse sentido, dizemos que dois complexos são equivalentes quando têm uma subdivisão em comum.

Subdivisão Baricêntrica

Definição 1.2.9 *Seja K um complexo simplicial euclidiano. Uma subdivisão de K é um complexo simplicial K' com as propriedades:*

(i) $|K'| = |K|$;

(ii) *Cada simplexo de K' está contido em algum simplexo de K.*

(iii) *Cada simplexo de K é uma união finita de simplexos de K'.*

Daremos agora um importante exemplo de subdivisão de complexos simpliciais: a *subdivisão baricêntrica.*

Seja $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_k \rangle$ um k-simplexo euclidiano em $\mathbb{R}^n$. Se v é um ponto que não está no k-dimensional subespaço afim determinado por σ definimos

$$v * \sigma = \langle v, v_0, \cdots, v_k \rangle.$$

Este é um $(k+1)$-simplexo, dito o *cone* de v sobre σ.

Definição 1.2.10 *Seja K um complexo simplicial euclidiano de dimensão finita. O* bari-centro *de um k-simplexo $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_k \rangle \in K$ é o ponto*

$$b_\sigma = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} v_i \in int\sigma.$$

Seja K um complexo simplicial euclidiano n-dimensional. A subdivisão baricêntrica SK de K será definida usando-se indução sobre n.

Se $\dim K = 0$ então $SK = K$. Assumindo, agora, que conhecemos SK para todos complexos finitos de dimensão menor que n, então definimos SK para um complexo de dimensão n como sendo a união de $S(K^{(n-1)})$ com o conjunto de todos os simplexos da forma $b_\sigma * \tau$, onde σ é um n-simplexo de K e τ é qualquer simplexo de $S(K^{(n-1)})$ contido em uma face de σ. É imediato que a subdivisão baricêntrica é uma subdivisão no sentido da Definição 1.2.9.

Proposição 1.2.4 *Seja σ um simplexo euclidiano em $\mathbb{R}^n$ com diâmetro d. Então a subdivisão baricêntrica $S\sigma$ de σ é um poliedro cujos simplexos tem dimensão menor ou igual a $\frac{k}{k+1}d$.*

Demonstração: Ver [17], Lema 5.18, página 205. □

Ou seja, a subdivisão baricêntrica de um complexo simplicial reduz o diâmetro de seus simplexos. Mais ainda, podemos iterar o processo de subdivisão baricêntrica de um complexo um número tão grande de vezes de modo que todos os simplexos tenham diâmetros tão pequenos quanto se queira.
Considere:

Definição 1.2.11 *A n-ésima subdivisão baricêntrica S^nK de um complexo euclidiano K é dada recursivamente por:*

(i) $S^1K = SK$,

(ii) $S^nK = S(S^{n-1}K)$.

Neste caso, vale o:

Corolário 1.2.1 *Dado um complexo euclidiano K e qualquer $\varepsilon > 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todos os simplexos de S^nK têm diâmetro menor que ε.*

Demonstração: Ver [21], Corolário 1, página 107 . □

Aproximação Simplicial

Sejam Y_1 e Y_2 dois espaços trianguláveis (isto é, poliedros) com triangulações

$$t_1 : |K_1| \to Y_1 \qquad \text{e} \qquad t_2 : |K_2| \to Y_2,$$

onde, portanto, t_1 e t_2 são homeomorfismos e K_1 e K_2 são complexos simpliciais.
Dizemos que uma aplicação $h : Y_1 \to Y_2$ é uma *aplicação piecewise linear (p.l.)* se existe uma aplicação simplicial $\lambda : K_1' \to K_2'$ cuja realização geométrica é h, onde K_1' e K_2' são subdivisões de K_1 e K_2, respectivamente. Isto é, $h = |\lambda|$ no sentido da Observação 1.2.6.

Definição 1.2.12 *Seja $f : Y_1 \to Y_2$ uma aplicação contínua entre poliedros. Então uma aplicação $h : Y_1 \to Y_2$ é dita ser uma* aproximação simplicial *de f se dados $x \in Y_1$ e $a \in Y_1$ tal que a é vértice de um simplexo σ de Y_1 tal que $x \in int\ \sigma$ então $h(a)$ é vértice de um simplexo τ de Y_2 tal que $f(x) \in int\ \tau$.*

Seja K um complexo simplicial. Então,

$$|K| = |S^n K|$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, uma aplicação contínua $f : |K_1| \to |K_2|$ entre poliedros de complexos simpliciais K_1 e K_2 é a mesma que $f : |S^n K_1| \to |K_2|$.

Observação 1.2.7 *Dado um espaço triangulável Y, isto é, tal que existe um homeomorfismo $t : |K| \to Y$ entre Y e a realização geométrica de um complexo simplicial K, denotaremos sua triangulação por (K, t).*

Teorema 1.2.2 *Sejam Y_1 e Y_2 poliedros com triangulações (K_1, t_1) e (K_2, t_2), respectivamente, e $f : Y_1 \to Y_2$ uma aplicação contínua. Então, existe uma aplicação p.l. $f : |S^n K_1| \to Y_2$ que aproxima simplicialmente f para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Demonstração: Ver [21], Teorema 6, página 113. □

1.3 Espaços de Baire

Nesta Seção introduziremos a classe dos espaços topológicos de Baire. O matemático R. Baire usava a terminologia Primeira Categoria para os hoje conhecidos Espaços de Baire e Segunda Categoria para os outros espaços. Mais precisamente temos:

Definição 1.3.1 *X é dito ser um* espaço de Baire*, ou um espaço de* P*rimeira Categoria, se a intersecção de qualquer família enumerável de conjuntos abertos densos em X é densa em X.*

Como sabemos, um conjunto A é fechado em X se, e somente se, $X - A$ é aberto em X e, além disso, um conjunto B tem interior vazio em X se, e somente se, $X - B$ é denso em X. Portanto, podemos caracterizar um espaço de Baire através de conjuntos fechados da seguinte maneira: *X é um espaço de Baire se, e somente se, a união de qualquer família enumerável de conjuntos fechados com interior vazio em X tem interior vazio em X.*

A mais importante condição suficiente para que um espaço seja de Baire é dada por:

Teorema 1.3.1 (Teorema da Categoria de Baire) *Se X é um espaço compacto de Hausdorff ou um espaço métrico completo então X é um espaço de Baire.*

Demonstração: Ver [18], Teorema 48.2, página 296. □

Usando-se técnica semelhante a usada na prova do Teorema da Categoria de Baire em [18], mostra-se o seguinte:

Teorema 1.3.2 *Qualquer espaço localmente compacto de Hausdorff é um espaço de Baire.*

Lema 1.3.1 *Todo espaço métrico localmente compacto é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Demonstração: Ver [19], Corolário 2, página 236. □

Um resultado interessante, que usaremos mais adiante, é o seguinte:

Teorema 1.3.3 *Sejam Y um espaço métrico localmente compacto ou um espaço métrico completo e X um espaço compacto. Então $\mathcal{C}(X, Y)$ é um espaço de Baire.*

Demonstração: Se Y é completo, temos por ([19], Corolário 2, página 168) que $\mathcal{C}(X, Y)$ é um espaço métrico completo. Se Y é um espaço métrico localmente compacto, então podemos, pelo Lema 1.3.1, tomar uma nova métrica segundo a qual o espaço é completo, e isto sem modificar sua topologia. O resultado segue então do Teorema da Categoria de Baire. □

Observação 1.3.1 *O produto cartesiano finito de espaços de Baire é um espaço de Baire.*

1.4 Dimensão Topológica

Nesta Seção, abordamos os pré-requisitos da teoria de dimensão necessários para o desenvolvimento do texto. Trabalharemos com a teoria clássica de dimensão topológica explorada por Hurewicz e Wallman, em seu livro [16] de 1941, para espaços métricos separáveis.

Dados um espaço topológico X e uma cobertura $\mathcal{U}$, dizemos que uma cobertura $\mathcal{V}$ de X é um *refinamento* de $\mathcal{U}$, ou que *refina* $\mathcal{U}$, se para cada conjunto V de $\mathcal{V}$ existe um conjunto U de $\mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Ou seja, uma cobertura mais fina é aquela na qual cada um de seus elementos está contido em algum elemento de outra cobertura, menos fina neste caso.

Definição 1.4.1 *A* dimensão topológica *de um espaço X é o valor mínimo $n \in \mathbb{Z}$ para o qual toda cobertura aberta de X admite um refinamento de ordem menor ou igual a $n+1$. Se não existe o valor mínimo de n, dizemos que X tem dimensão topológica infinita. Notação: dim $X = n$.*

Aqui, por *ordem* de uma cobertura de um espaço entendemos o máximo de número de elementos da cobertura ao qual pertence qualquer ponto do espaço, isto é:

Definição 1.4.2 *Uma cobertura $\mathcal{U}$ de um espaço X tem* ordem *$m+1$ se algum ponto de X está em $m+1$ elementos de $\mathcal{U}$, e não existe nenhum ponto de X que esteja em mais do que $m+1$ elementos de $\mathcal{U}$.*

Um caso particular do conceito geral de dimensão de grande importância é desempenhado pelos espaços de dimensão 0. Segue diretamente da definição que um espaço X tem dimensão 0 se, e somente se, para cada $x \in X$ e para cada vizinhança aberta U de x, existe um subconjunto aberto V de X tal que $x \in V \subset U$ e $\partial V = \emptyset$. Ou seja, espaços 0-dimensionais podem ser caracterizados como espaços que têm uma base de abertos com fronteira vazia.

Proposição 1.4.1 *Seja $X \neq \emptyset$ um espaço métrico separável. Se X é enumerável então dim $X = 0$.*

Demonstração: Sejam $x \in X$ e U qualquer vizinhança aberta de x em X. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Desde que X é enumerável, existe $0 < \eta < \varepsilon$ tal que

$$\eta \neq \rho(x, y), \quad \forall y \in B(x, \varepsilon).$$

Neste caso,

$$x \in B(x, \eta) \subset U \quad \text{e} \quad \partial B(x, \eta) = \emptyset.$$

□

Exemplo 1.4.1 *Segue diretamente da Proposição 1.4.1 que*

$$dim\ \mathbb{Q}^n = 0,$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Um fato interessante é que também o conjunto dos números irracionais tem dimensão 0:

Proposição 1.4.2 $dim\ \mathbb{R} - \mathbb{Q} = 0$.

Demonstração: Sejam $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e U qualquer vizinhança aberta de x em $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Tomemos $y, z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $V = (y, z) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q} \subset U$, onde $(y, z) = \{k \in \mathbb{R}\ /\ y < k < z\}$. Desde que $\partial V = \emptyset$, segue o resultado. $\square$

Analogamente à Proposição 1.4.2, mostramos o seguinte:

Proposição 1.4.3 *Todo subcojunto dos números reais que não contém intervalos é* 0-*dimensional.*

Alguns fatos básicos sobre a teoria de dimensão são dados pelos seguintes Teoremas:

Teorema 1.4.1 *Sejam* X *um espaço com dimensão finita e* $Y \subset X$ *um subconjunto fechado. Então* Y *tem dimensão finita e* $dim\ Y \leq dim\ X$.

Demonstração: Ver [18], Teorema 50.2, página 306. $\square$

Teorema 1.4.2 *Sejam* X *e* Y *espaços tais que pelo menos um é não-vazio. Então*

$$dimX \times Y \leq dimX + dimY.$$

Se $dimY = 0$ *então vale a igualdade na identidade acima.*

Demonstração: Ver [16], página 33. $\square$

Teorema 1.4.3 *Seja* $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$, *onde cada* Y_i *é subespaço fechado de* X *de dimensão finita. Então,*

$$dimX = \max\{dimY_1, dimY_2, \cdots, dimY_k\}.$$

Demonstração: Ver [18], Teorema 50.2, página 307. □

Usaremos várias vezes no texto o seguinte resultado:

Teorema 1.4.4 *Seja K um espaço triangulável. Se $n > \dim K$ então*

$$H^n(K) \cong H_n(K) \cong \breve{H}^n(K) \cong 0.$$

Demonstração: Ver [16], página 113. □

1.5 Propriedades de Extensão de Aplicações

O famoso Teorema da Extensão de Tietze, cuja prova pode ser encontrada em [18], assegura que qualquer aplicação contínua de um subespaço fechado A de um espaço normal X em um intervalo fechado de $\mathbb{R}$ pode ser estendida continuamente para todo o espaço X. Um tal Teorema motiva a seguinte definição:

Definição 1.5.1 *Um espaço métrico X é um retrato absoluto (AR - "absolute retract") se toda aplicação contínua $f : B \to X$, onde B é um subespaço fechado de um espaço normal Y, estende-se continuamente Y.*

Em particular, o Teorema da Extensão de Tietze assegura que $\mathbb{R}$ é um AR.
Uma subclasse dos espaços AR é dada por:

Definição 1.5.2 *Um espaço métrico X é um retrato absoluto de vizinhança (ANR - "absolute neighborhood retract") se toda aplicação contínua $f : B \to X$, onde B é um subespaço fechado de um espaço normal Y, estende-se continuamente a uma vizinhaça aberta U de B em Y.*

Teorema 1.5.1 **(i)** *O produto cartesiano de espaços AR é um AR.*

(ii) *O produto cartesiano finito de espaços ANR é um ANR.*

(iii) *Qualquer subespaço aberto de um AR (ANR) é um AR (ANR).*

(iv) *Se X_1 e X_2 são abertos ANR de X tal que $X = X_1 \cup X_2$, então X é um ANR.*

Demonstração: Ver [9] e [12] . □

Segue do Teorema acima que o cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}}$, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o disco I^n são exemplos de espaços AR (em particular, ANR).

A propriedade de extensão em espaços ANR provém-nos de uma importante técnica para a aproximação de homotopias. A seguir, enunciamos e demonstramos o Teorema de Extensão de Homotopias, o qual nos referiremos mais adiante no texto apenas como *HET* - Homotopy Extension Theorem.

Recordemos os seguinte resultados de topologia geral:

Teorema 1.5.2 (Lema do Tubo) *Sejam A e B subespaços de X e Y, respectivamente, e N um aberto de $X \times Y$ tal que $A \times B \subset N$. Se A e B são compactos então existem abertos U e V de X e Y, respectivemente, tais que $A \times B \subset U \times V \subset N$.*

Teorema 1.5.3 (Lema de Urysohn) *Sejam X um espaço normal, A e B subespaços fechados disjuntos de X e $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Então, existe uma aplicação contínua*

$$\alpha : X \to [a, b]$$

tal que $\alpha(A) = a$ e $\alpha(B) = b$.

Teorema 1.5.4 (Teorema de Extensão de Homotopias (HET)) *Sejam $f : Y \to X$ uma aplicação contínua, onde Y é um espaço métrico e X é um ANR, Z um compacto de Y e $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que cada aplicação contínua $g_Z : Z \to X$ satisfazendo $\rho(f|_Z, g_Z) < \delta$ estende-se continuamente a uma aplicação $g : Y \to X$ que é ε-homotópica a f. Em particular, fixando um conjunto aberto arbitrário U tal que $Z \subset U \subset Y$, é possível tomarmos a ε-homotopia H entre f e g de tal forma que*

$$H_t|_{Y-U} = f|_{Y-U}, \quad \forall t \in I.$$

Demonstração: Seja $\Gamma_{f|_Z} = \{(z, f(z))/z \in Z\} \subset Y \times X$ o gráfico de $f|_Z$. Tomemos a aplicação contínua

$$F : (Y \times X \times \{0\}) \cup (\Gamma_{f|_Z} \times I) \cup (Y \times X \times \{1\}) \to X$$

dada por

$$\begin{cases} F(y,x,0) = f(y), & \text{se} \quad (y,x,0) \in Y \times X \times \{0\} \\ F(y,x,1) = x, & \text{se} \quad (y,x,1) \in Y \times X \times \{1\} \\ F(z,f(z),t) = f(z), & \text{se} \quad (z,f(z),t) \in \Gamma_{f|_Z} \times I \end{cases}$$

Desde que $(Y \times X \times \{0\}) \cup (\Gamma_{f|_Z} \times I) \cup (Y \times X \times \{1\})$ é um subespaço fechado de $Y \times X \times I$ e X é ANR, a aplicação F estende-se continuamente a

$$\overline{F} : \mathcal{W} \to X,$$

onde $\mathcal{W}$ é uma vizinhança aberta do domínio de F.
Pelo Lema do Tubo, existe uma vizinhança aberta V de $\Gamma_{f|_Z}$ em $Y \times X$ tal que

$$\Gamma_{f|_Z} \times I \subset V \times I \subset \mathcal{W}.$$

Notemos que, nesse caso,

$$\rho(\Gamma_{f|_Z}, Y \times X - V) > 0.$$

Mostraremos que é possível tomar uma tal vizinhança V de tal maneira que se $(y,x) \in V$ então $diam\ \overline{F}\,((y,x) \times I) < \varepsilon$.
Ora, dado qualquer $r > 0$, podemos, sem perda de generalidade, "diminuir" a vizinhança V de tal modo que $0 < \rho(\Gamma_{f|_Z}, Y \times X - V) < r$ e $\Gamma_{f|_Z} \subset V$. Denotemos, então, por V_n a vizinhança de $\Gamma_{f|_Z}$ dada pelo Lema do Tubo tal que

$$\rho(\Gamma_{f|_Z}, Y \times X - V_n) < \frac{1}{n}$$

para $n \geq n_o$, onde n_0 é um natural suficientemente grande.
Seja $(y_n, x_n)_{n \geq n_0}$ uma sequência convergente tal que $(y_n, x_n) \in V_n - int(\Gamma_{f|_Z})$.
Neste caso,

$$(x', y') = \lim_{n \geq n_0} (y_n, x_n) \in \partial \Gamma_{f|_Z}.$$

Com efeito,
É imediato que, $\forall \eta > 0$,

$$B\left((x', y'), \eta\right) \cap Y \times X - \Gamma_{f|_Z} \neq \emptyset.$$

Por outro lado, se existisse $\eta > 0$ tal que

$$B\left((x', y'), \eta\right) \cap \Gamma_{f|_Z} = \emptyset$$

então

$$B\left((x',y'),\eta\right) \subset Y \times X - \Gamma_{f|_Z}, \quad \forall n \geq n_0,$$

e, daí, tomando $n' \geq n_0$ de tal forma que

$$0 < \frac{1}{n'} < \rho(\Gamma_{f|_Z}, Y \times X - V_n)$$

teríamos então que $\forall n \geq n'$

$$V_n \cap B\left((x',y'),\eta\right) = \emptyset.$$

o que é uma contradição. Portanto, não existe um tal $\eta > 0$.

Dessa forma $\forall t \in I$,

$$(y_n, x_n, t) \longrightarrow (y_{\prime}, x_{\prime}, t) \in \partial\Gamma_{f|_Z} \times I \subset \Gamma_{f|_Z} \times I.$$

Pela continuidade de $\overline{F}$, temos que $\forall t \in I$

$$\overline{F}(y_n, x_n, t) \longrightarrow \overline{F}(y_{\prime}, x_{\prime}, t) = x'.$$

Logo, existe um natural positivo $n_1 \geq n_0$ tal que $\forall n \geq n_1$

$$\overline{F}(y_n, x_n, t) \subset B\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \forall t \in I,$$

ou seja,

$$\overline{F}((y_n, x_n) \times I) \subset B\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right), \forall n \geq n_1. \tag{1.1}$$

Tomemos $V = V_{n_1}$ e seja $(y,x) \in V - int(\Gamma_{f|_Z})$. Temos que $(y,x) \in V_{n_2} \subset V$ para algum $n_2 \geq n_1$. Sem perda de generalidade podemos supor

$$(y_n, x_n) = (y, x), \quad \forall n \geq n_2$$

e, daí, por (1.1),

$$\overline{F}((y,x) \times I) \subset B\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por outro lado, se $(y,x) \in \Gamma_{f|_Z}$ então, pela definição de $\overline{F}$,

$$\overline{F}((y,x) \times I) = \{x\}.$$

Portanto, tomando qualquer $(y,x) \in V$, tem-se

$$diam\overline{F}\left((y,x) \times I\right) < \varepsilon.$$

Sejam $\delta > 0$ um real positivo tal que $N_\delta(\Gamma_{f|_Z}) \subset V$ e $g_Z : Z \to X$ uma aplicação contínua tal que $\rho(f|_Z, g_Z) < \delta$. Neste caso, $\Gamma_{g_Z} = \{(z, g_Z(z))/z \in Z\} \subset V$.

Seja U um conjunto aberto tal que $Z \subset U \subset Y$. Fixemos-no. Desde que Z é fechado e X é ANR, existe uma aplicação contínua $g_A : A \to X$ tal que $g_A|_Z = g_Z$, onde A é uma vizinhança aberta de Z.

Consideremos o aberto $U' = A \cap U$. Desde que $\rho(Z, Y - U') > 0$ existe uma vizinhança fechada N de Z tal que $N \subset U' \subset U$ e, restringindo g_A a N, obtemos uma extensão contínua g_N de g_Z a uma vizinhança fechada N de Z contida no aberto U. Suponhamos que a vizinhança N é suficientemente próxima a Z de tal forma que

$$\Gamma_{g_N} = \{(n, g_N(n))/n \in N\} \subset V.$$

Pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua

$$\alpha : Y \to [0, 1]$$

tal que $\quad \alpha(Z) = 1 \quad$ e $\quad \alpha(\overline{Y - N}) = 0.$

Definamos a aplicação contínua

$$H : Y \times I \to X$$

por

$$H(y,t) = \begin{cases} \overline{F}(y, g_N(y), \alpha(y)t), & \text{se} \quad y \in N \\ f(y), & \text{se} \quad y \notin N \end{cases}$$

Tomemos $H_1 = g$. Como para todo $y \in Y$ tem-se que $H(y, 0) = \overline{F}(y, g_N(y), 0) = f(y)$ então H define uma homotopia entre f e g.

Além disso,

$$\begin{aligned} se \;\; y \in N \;\; &\Longrightarrow \;\; (y, g_N(y)) \in V \\ &\Longrightarrow \;\; diam\; \overline{F}((y, g_N(y)) \times I) < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \;\; diam\; H(y \times I) < \varepsilon \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} se \;\; y \notin N \;\; &\Longrightarrow \;\; y \in Y - N \subset \overline{Y - N} \\ &\Longrightarrow \;\; H(y \times I) = \{f(y)\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\forall y \in Y$ tem-se $diamH(y \times I) < \varepsilon$, ou seja, H é uma ε-homotopia entre f e g. Notemos ainda que tomando $z \in Z \subset N$ então

$$g(z) = H(z,1) = \overline{F}(z, g_N(z), 1) = \overline{F}(z, g_Z(z), 1) = g_Z(z),$$

e, daí, g é uma extensão de g_Z.
Em particular,

$$H_t|_{Y-U} = f|_{Y-U}, \quad \forall t \in I$$

pois tomando

$$x \in Y - U \subset Y - N \subset \overline{Y - N}$$

então

$$H_t(x) = \overline{F}(x, g_N(x), 0) = f(x).$$

□

Para muitas aplicações, será necessário apenas utilizarmos a versão mais fraca do HET dado pelo Teorema de Extensão de Aplicações, ao qual nos referiremos como *MET - Map Extension Theorem*:

Corolário 1.5.1 (Teorema de Extensão de Aplicações (MET)) *Sejam $f : Y \to X$ uma aplicação contínua, onde Y é um espaço métrico e X é um ANR, Z um subconjunto compacto de Y e $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta >$ o tal que cada aplicação contínua $g_Z : Z \to X$ δ-próxima de $f|_Z$ tem uma extensão contínua $g : Y \to X$ tal que $\rho(f, g) < \varepsilon$.*

A reformulação do HET dada pelo Teorema de Extensão de Homotopias Controlado será útil para muitos propósitos ao longo do trabalho. Nos referiremos a tal resultado como *CHET - Controlled Homotopy Extension Theorem*:

Teorema 1.5.5 (Teorema de Extensão de Homotopias Controlado (CHET)) *Sejam X um ANR, K um subconjunto compacto de X, $j : K \to X$ a aplicação inclusão e $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer aplicações contínuas $f : Y \to K$ e $g_Z : Z \to X$ com $\rho(jf|_Z, g_Z) < \delta$, onde Y é um espaço métrico e Z é um subconjunto compacto de Y, existe uma extensão $g : Y \to X$ de g_Z ε-homotópica a jf. Em particular,* *fixando um conjunto aberto U tal que $Z \subset U \subset Y$, é possível tomarmos a ε-homotopia H entre jf e g de tal forma que*

$$H_t|_{Y-U} = jf|_{Y-U}, \quad \forall t \in I.$$

Demonstração: Sejam X, K e j nas condições da hipótese e qualquer $\varepsilon > 0$. Tomemos qualquer $f : Y \to K$, onde Y é um espaço métrico, e um subespaço compacto Z de Y. O resultado segue diretamente do HET aplicado à jf, Z e $\varepsilon > 0$. □

1.6 Variedades

Uma n-dimensional variedade topológica é, informalmente, um $o$bjeto matemático modelado localmente em $\mathbb{R}^n$. Por simplicidade, chamaremos uma variedade topológica apenas por variedade. Variedades de dimensão 1 são geralmente ditas $c$urvas. O exemplo mais simples é a reta real, outros exemplos são as familiares curvas no plano, como a circunferência, a parábola ou o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Variedades de dimensão 2 são $s$uperfícies. O plano $\mathbb{R}^2$ e a esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ são dois importantes exemplos de uns tais objetos. Em particular, qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é uma n-variedade (isto é, uma variedade de dimensão n).

Definição 1.6.1 *Uma n-dimensional variedade é um espaço métrico separável tal que cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Para alguns propósitos, é usual termos a seguinte noção mais geral:

Definição 1.6.2 *Uma n-dimensional variedade com bordo é um espaço métrico separável tal que cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa ou ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ ou a sua* m*etade superior* $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n \geq 0\}$.

É imediato que $\mathbb{R}^n_+$ é uma variedade com bordo, assim como qualquer intervalo fechado em $\mathbb{R}$, ou, mais geralmente, um disco em qualquer espaço euclidiano.

O problema da classificação de variedades configura-se como um dos mais relevantes em topologia. No caso $n = 1$ e $n = 2$ temos os seguintes resultados:

Teorema 1.6.1 (Teorema da Classificação de 1-Variedades) *Uma 1-variedade conexa é homeomorfa a S^1 se é compacta e homeomorfa a $\mathbb{R}$ caso contrário.*

Teorema 1.6.2 (Teorema da Classificação de Superfícies - Radó, 1924) *Uma superfície compacta e conexa é homeomorfa a esfera, a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos.*

A prova de tais caracterizações são encontradas em grande parte dos livros de topologia, como por exemplo em [17]. Para dimensões maiores a situação é bem mais complicada, e apesar dos avanços feitos nesse sentido para $n = 3$ e $n = 4$ por matemáticos tais como Poincaré, o problema ainda continua em aberto. Em 1958 foi provado por A. A. Markov que não existe um algoritmo para completa classificação das n-variedades para $n > 3$.
Neste trabalho, convencionaremos:

Definição 1.6.3 *Seja M uma n-variedade.*

(i) *O interior de M, denotado por $int(M)$, é o conjunto dos pontos de M que tem vizinhanças homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *O bordo de M, denotado por ∂M, é o conjunto $M - int(M)$.*

Diremos que M é uma variedade fechada se é uma variedade compacta sem bordo.

Observamos que aqui o uso dos termos *b*ordo e *i*nterior têm sentido distinto aos usados comumente quando nos referimos a subespaços de um espaço topológico.
Investigamos, neste texto, uma classe de espaços topológicos cujo produto cartesiano com a reta $\mathbb{R}$ é uma variedade. Tais espaços são ditos *F*atores de Variedade de Codimensão Um.
Mais geralmente, temos:

Definição 1.6.4 *Um espaço X com dimensão topológica n é dito ser um* F*ator de Variedade de Codimensão k se $X \times \mathbb{R}^k$ é uma $(n+k)$-variedade.*

A seguir, damos dois importantes resultados que conectam os grupos de homologia e cohomologia de uma variedade.

Teorema 1.6.3 (Teorema da Dualidade de Poincaré) *Seja X uma n-variedade topológica. Então,*

$$H_{n-q}(X, \mathbb{Z}_2) \cong H_c^q(X, \mathbb{Z}_2), \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Ver [12], página 217. □

Teorema 1.6.4 (Teorema da Dualidade de Alexander) *Seja X uma n-variedade topológica. Se A é um subconjunto fechado de X, então*

$$H_{n-q}(X, X - A, \mathbb{Z}_2) \cong \breve{H}_c^q(A, \mathbb{Z}_2), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Ver [12], página 233. □

1.7 Variedades Generalizadas

Nesta Seção, definimos os espaços topológicos conhecidos como *v*ariedades generalizadas, e discorremos brevemente sobre sua topologia e algumas de suas subclasses.

Definição 1.7.1 (Variedade Homológica) *Seja X um espaço métrico localmente compacto. Dizemos que X é uma n-variedade homológica se*

$$H_*(X, X - \{x\}) = H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}), \ \forall x \in X.$$

Definição 1.7.2 (Variedade Generalizada) *Uma n-variedade generalizada X é um espaço de dimensão finita que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *X é uma n-variedade homológica;*
2. *X é um ANR;*
3. *X é separável.*

Definição 1.7.3 *Dizemos que um espaço métrico X é um retrato euclidiano de vizinhança (ENR - "euclidean neighborhood retract") quando, para algum $n \in \mathbb{N}$, é homeomorfo ao retrato de um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 1.7.1 *A classe dos espaços ENR está contida na classe dos espaços ANR.*

Demonstração: Ver [20], Proposição 7, página 17. □

Portanto, temos o seguinte:

Teorema 1.7.1 *Se X é uma variedade homológica ENR separável então X é uma variedade generalizada.*

Em [1], F. D. Ancel mostrou que a dualidade de Alexander é válida para as variedades generalizadas:

Teorema 1.7.2 (Teorema da Dualidade para Variedades Generalizadas) *Seja X uma n-variedade generalizada. Se B é um subconjunto fechado de X, então*

$$\check{H}_c^{n-i}(B, \mathbb{Z}_2) \cong H_i(X, X - B, \mathbb{Z}_2), \ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Durante o desenvolvimento do texto, nos restringiremos muitas vezes à classe das variedades generalizadas resolúveis:

Definição 1.7.4 (Resolução) *Seja X uma n-variedade generalizada. Se existe uma aplicação própria de uma n-variedade topológica $\phi : M \to X$ tal que $\phi^{-1}(\partial X) = \partial M$ e a imagem inversa de cada ponto por ϕ é não vazia e contrátil em cada vizinhança aberta em M, então dizemos que X é* resolúvel. *A aplicação ϕ é chamada uma* resolução *de X.*

Capítulo 2

Propriedades de Posição Geral

Neste Capítulo, estudamos as propriedades de posição geral DDP e seus análogos em dimensão 3 (DAP) e dimensão 4 (DADP). Mostramos que toda n-variedade generalizada resolúvel, com $n \geq 3$, é um Fator de Variedade de Codimensão k para $k \geq 2$. Definimos uma nova propriedade de posição geral, a DHP, mais refinada que a DADP quando deseja-se detectar Fatores de Variedade de Codimensão Um. Estudamos também a propriedade de posição geral DCP. O objetivo desse Capítulo é apresentar e estabelecer os principais resultados conhecidos referentes às propriedades de posição geral.

2.1 Propriedades de Posição Geral Clássicas

Nesta Seção, definimos a principal propriedade de posição geral (DDP) quando deseja-se detectar Fatores de Variedade de Codimensão Um na categoria das variedades generalizadas. Também damos seus análogos em dimensão 3 (DAP) e dimensão 4 (DADP). Além disso, estudamos os principais resultados concernentes a tais propriedades.
Usando topologia básica, mostra-se que:

Teorema 2.1.1 *Se $X \times \mathbb{R}$ é uma variedade topológica, então X é uma variedade generalizada.*

A recíproca deste resultado, conhecido como *Problema do Produto com uma Reta*, não é verdadeira. Em 1957, R.H. Bing construiu em [2] o espaço de Dogbone, o qual é um exemplo de uma 3-variedade generalizada que não é uma variedade topológica, mas cujo produto cartersiano com uma reta é uma 4-variedade. Portanto, pelo menos em circunstâncias especiais tal recíproca vale. Porém, como decorrência de [10], publicado em 1973 por W. T. Eaton, nem toda variedade generalizada é um Fator de Variedade de Codimensão Um.

Como bem ilustra o espaço de Dogbone, existem variedades generalizadas que não são variedades topológicas. Em meados da década de 70, J. W. Cannon reconheceu que a propriedade de posição geral DDP fornece uma ferramenta estratégica para reconhecer as variedades generalizadas resolúveis que também são variedades topológicas:

Definição 2.1.1 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Discos (DDP - "Disjoint Disks Property") se dadas aplicações contínuas $f : I^2 \to X$ e $g : I^2 \to X$ então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem ε-aproximações contínuas $f' : I^2 \to X$ e $g' : I^2 \to X$ de f e g, respectivamente, tais que $f'(I^2) \cap g'(I^2) = \emptyset$.*

Notação: $I = [0, 1]$.

F. Quinn, em [22, 23], associou a qualquer n-variedade generalizada conexa, $n \geq 4$, um índice local $i(X) \in 1 + 8\mathbb{Z}$ e mostrou que $i(X) = 1$ se, e somente se, X for resolúvel. Combinando tal fato com o Teorema de Aproximação de Edwards, resultado obtido e provado por R. D. Edwards em [11], segue que a subclasse das variedades generalizadas resolúveis que têm a DDP coincide com a classe das variedades topológicas em dimensão estritamente maior que 4, isto é:

Teorema 2.1.2 (Edwards-Cannon-Quinn) *X é uma n-variedade topológica, onde $n \geq 5$, se, e somente se, X é uma n-variedade generalizada com a DDP e $i(X) = 1$.*

Em [3, 4], n-variedades generalizadas tendo índice local arbitrário são construídas em todas as dimensões $n > 5$, ou seja, existem variedades generalizadas que não são variedades topológicas (essas variedades são conhecidas como *variedades generalizadas exóticas*).

R.J. Daverman, em [5], com o objetivo de detectar a DDP definiu as seguintes propriedades de posição geral mais simples:

Definição 2.1.2 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Arcos (DAP - "Disjoint Arcs Property") se dados caminhos contínuos $\alpha : I \to X$ e $\beta : I \to X$ então, para* *qualquer* $\varepsilon > 0$, *existem* ε*-aproximações contínuas* $\alpha' : I \to X$ *e* $\beta' : I \to X$ *de* α *e* β, *respectivamente, tais que* $\alpha'(I) \cap \beta'(I) = \emptyset$.

Definição 2.1.3 *Um espaço* X *tem a Propriedade de Disjunção de Arco e Disco (DADP - "Disjoint Arc-Disk Property") se dadas aplicações contínuas* $\alpha : I \to X$ *e* $g : I^2 \to X$ *então, para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existem* ε*-aproximações contínuas* $\alpha' : I \to X$ *e* $g' : I^2 \to X$ *de* α *e* g, *respectivamente, tais que* $\alpha'(I) \cap g'(I^2) = \emptyset$.

Em [5], Daverman provou os seguintes resultados:

Teorema 2.1.3 *Se* X *tem a DAP então* $X \times \mathbb{R}$ *tem a DADP.*

Teorema 2.1.4 *Se* X *tem a DADP então* $X \times \mathbb{R}$ *tem a DDP.*

E, portanto:

Teorema 2.1.5 *Se* X *tem a DAP então* $X \times \mathbb{R}^k$, *para* $k \geq 2$, *tem a DDP.*

Dessa maneira, acrescentando também a hipótese de resolubilidade, a DAP e a DADP fornecem-nos subcasos onde a recíproca do Teorema 2.1.1 é válida, os quais especificaremos ao longo do texto.

2.2 Detectando a DAP

Nesta Seção mostraremos que toda n-variedade generalizada com $n \geq 3$ tem a DAP. Especificamente, nosso objetivo é mostrar que toda n-variedade generalizada resolúvel com $n \geq 3$ é um Fator de Variedade de Codimensão k qualquer que seja $k \geq 2$.

Definição 2.2.1 *Seja* (X, ρ) *um espaço métrico e* $A, B \subset X$. *Então,*

(i) A é localmente k-conexo, *e escrevemos* LC^k, *se* $\forall a, \varepsilon$, *com* $a \in A$ *e* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que qualquer aplicação contínua de* S^i *em* $N_\delta(a)$ *estende-se a uma aplicação contínua de* D^{i+1} *em* $N_\varepsilon(a)$, *qualquer que seja* $i \in \{0, \cdots, k\}$.

(ii) B é localmente k-conexo em A, *e escrevemos* $k - LC$, *se* $\forall a, \varepsilon$, *com* $a \in A$ *e* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que qualquer aplicação contínua de* S^k *em* $N_\delta(a) \cap B$ *estende-se a uma aplicação contínua de* D^{k+1} *em* $N_\varepsilon(a) \cap B$, *qualquer que seja* $i \in \{0, \cdots, k\}$.

(iii) A é localmente k-coconexo, *e escrevemos* $k - LCC$, *se* $X - A$ *é* $k - LC$ *em* A.

Ao longo dessa Seção, X denotará um espaço métrico localmente compacto LC^1 tal que nenhum de seus subconjuntos fechados de dimensão 1 contêm um subconjunto aberto não-vazio.

Lema 2.2.1 *Seja X um espaço métrico localmente compacto tal que, para algum $r > 0$ e para todo $x \in X$,*

$$H_i(X, X - \{x\}) \cong 0$$

onde $i \in \{0, \cdots, r\}$.
Então, para cada subconjunto fechado A de X com dimensão k, $k \leq r$, vale que

$$H_j(X, X - A) \cong 0,$$

onde $j \in \{0, \cdots, r - k\}$.

Demonstração: Ver [6], Lema 2, página 192. □

Proposição 2.2.1 *Suponhamos que para cada subconjunto aberto U de X e para cada subconjunto fechado 1-dimensional A do espaço métrico localmente compacto X,*

$$H_1(U, U - A) \cong 0. \tag{2.1}$$

Então X tem a DAP.

Demonstração: Seja A um subconjunto fechado 1-dimensional de X, $a \in A$ e $\varepsilon > 0$. Tomemos uma vizinhança aberta V_a de a, e U_a um aberto conexo por caminhos tal que

$$a \in U_a \subset V_a \;\text{ e }\; diam\; U_a < \varepsilon.$$

Da sequência exata longa do par $(U_a, U_a - A)$, temos que

$$0 \cong H_1(U_a, U_a - A) \to \tilde{H}_0(U_a - A) \to \tilde{H}_0(U_a) \cong 0$$

desde que U_a é conexo por caminhos.
Neste caso,

$$\tilde{H}_0(U_a - A) \cong 0,$$

isto é, $U_a - A$ é conexo por caminhos.

Sejam $f, g : I \to X$ aplicações contínuas.

Particionando o intervalo I como

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_k = 1$$

de tal forma que cada conjunto $f([t_{i-1}, t_i])$ contenha um arco de $f(t_{i-1})$ a $f(t_i)$, sempre que $f(t_{i-1}) \neq f(t_i)$, ε-próximo de $f|_{[t_{i-1},t_i]}$. Aqui, por arco entendemos um caminho cuja imagem é 1-dimensional - em particular, se $\dim f([t_{i-1}, t_i]) = 1$ é suficiente tomarmos $f'|_{[t_{i-1},t_i]} = f|_{[t_{i-1},t_i]}$. Colando continuamente esses arcos obtemos uma ε-aproximação contínua $f' : I \to X$ de f tal que $f'([t_{i-1}, t_i])$ é um arco mergulhado em $f([t_{i-1}, t_i])$. Neste caso, $f'(I)$ é um fechado 1-dimensional. Seja $A = f'(I)$.

Desde que g é contínua, é possível tomarmos uma nova partição

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{i-1} < s_i < \cdots < s_m = 1$$

de I tal que $g([s_{i-1}, s_i])$ esteja inteiramente contido em algum $U_i \in \{U_a\}_{a\in A}$ sempre que $g([s_{i-1}, s_i]) \cap A \neq \emptyset$, $i = 1, \cdots, m-1$.

Para cada $i = 1, \cdots, m-1$, desde que $U_i - A$ é conexo por caminhos, podemos considerar

$$g'_i : [s_{i-1}, s_i] \to U_i - A$$

uma aplicação contínua tal que

$$\begin{aligned} g'_i(s) &= g_i(s), \quad \text{se } g_i(s) \notin A \\ g'_i(s) &= v, \quad \text{se } g_i(s) \in A \end{aligned}$$

onde v é qualquer elemento de $U_{i-1} \cap U_i - A$.

Neste caso, $\rho(g, g') < \varepsilon$ e

$$f'(I) \cap g'(I) = \emptyset.$$

Portanto, X tem a DAP. $\square$

Corolário 2.2.1 *Se X é um espaço métrico localmente compacto LC^0 tal que para qualquer $x \in X$ e para qualquer $i \in \{0, 1, 2\}$,*

$$H_i(X, X - \{x\}) \cong 0,$$

então X tem a DAP.

Em particular, temos:

Corolário 2.2.2 *Toda n-variedade generalizada com $n \geq 3$ tem a DAP.*

Portanto, combinando o Corolário 2.2.2 e os Teoremas 2.1.2 e 2.1.5, vale que:

Teorema 2.2.1 *Toda n-variedade generalizada resolúvel, com $n \geq 3$, é um Fator de Variedade de Codimensão k, qualquer que seja $k \geq 2$.*

2.3 A Propriedade de Disjunção de Homotopias

Nesta Seção, definimos uma nova propriedade de posição geral, a DHP, e damos algumas de suas propriedades. Como veremos, esta é uma estratégia mais refinada que a DADP quando desejamos detectar Fatores de Variedade de Codimensão Um.
Para evitarmos confusão entre os fatores do domínio das homotopias de caminhos, denotaremos $D = I = [0, 1]$.

Definição 2.3.1 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Homotopias (DHP - "Disjoint Homotopies Property") se dadas homotopias de caminhos $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem ε-aproximações contínuas $f' : D \times I \to X$ e $g' : D \times I \to X$ de f e g, respectivamente, tais que $f'_t(D) \cap g'_t(D) = \emptyset$, $\forall t \in I$.*

A seguinte versão da DHP será útil mais adiante na prova do Teorema da Disjunção de Homotopias:

Definição 2.3.2 *Um espaço X tem a DHP* se dadas duas homotopias $f : K \times I \to X$ e $g : L \times I \to X$, onde K e L são complexos simpliciais finitos de dimensão menor ou igual a um, então para qualquer $\varepsilon > 0$ existem ε-aproximações contínuas $f' : K \times I \to X$ e $g' : L \times I \to X$ de f e g, respectivamente, tais que $f'_t(K) \cap g'_t(L) = \emptyset, \quad \forall t \in I$.*

Teorema 2.3.1 *Um espaço X ANR localmente compacto tem a DHP se, e somente se, X tem a DHP*.*

Demonstração: Sejam X um espaço ANR localmente compacto com DHP e K e L complexos simpliciais finitos com dimensão no máximo um.
Definamos

$$\mathcal{H} = \mathcal{C}(K \times I, X) \times \mathcal{C}(L \times I, X)$$

com a métrica uniforme, isto é,

$$\rho((f_1, g_1), (f_2, g_2)) = max\{\rho(f_1, f_2), \rho(g_1, g_2)\}, \quad \text{onde} \quad (f_i, g_i) \in \mathcal{H}, \quad i = 1, 2.$$

Para cada $\sigma \in K$ e $\tau \in L$ seja

$$\mathcal{O}(\sigma, \tau) = \{(f, g) \in \mathcal{H} \ \ / \ \ f_t(\sigma) \cap g_t(\tau) = \emptyset, \ \ \forall t \in I\}.$$

Afirmação 2.3.1 *$\mathcal{O}(\sigma, \tau)$ é aberto em $\mathcal{H}$, quaisquer que sejam $\sigma \in K$ e $\tau \in L$.*

Demonstração da Afirmação 2.3.1:
Fixemos $\sigma \in K$ e $\tau \in L$. Seja $\{(f_n, g_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H} - \mathcal{O}(\sigma, \tau)$ uma sequência tal que $(f_n, g_n) \longrightarrow (f, g) \in \mathcal{H}$ quando $n \longrightarrow \infty$.
Mostraremos que necessariamente $(f, g) \in \mathcal{H} - \mathcal{O}(\sigma, \tau)$.
Desde que

$$(f_n, g_n) \in \mathcal{H} - \mathcal{O}(\sigma, \tau), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in I$ tal que

$$(f_n)_{t_n}(\sigma) \cap (g_n)_{t_n}(\tau) \neq \emptyset.$$

Sejam $r_n \in \sigma$ e $s_n \in \tau$ tais que $f_n(r_n, t_n) = g_n(s_n, t_n)$.
Ora, $\{(r_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de $\sigma \times I$ e, então, por compacidade, existe uma subsequência $\{(r_{n_k}, t_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(r_{n_k}, t_{n_k}) \longrightarrow (r, t) \in \sigma \times I \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Analogamente, $\{(s_{n_k}, t_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \tau \times I$ e, então, existe uma subsquência $\{(s_{n_l}, t_{n_l})\}_{l \in \mathbb{N}}$ de $\{(s_{n_k}, t_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(s_{n_l}, t_{n_l}) \longrightarrow (s, t) \in \sigma \times I \quad \text{quando} \quad l \longrightarrow \infty.$$

Seja $g = f_{n_l}$ para algum $l \in \mathbb{N}$. Então, por continuidade,

$$g(r_{n_l}, t_{n_l}) \longrightarrow g(r,t) \ \text{ e } \ g(s_{n_l}, t_{n_l}) \longrightarrow g(s,t) \ \text{ quando } \ l \longrightarrow \infty.$$

Desde que

$$g(r_{n_l}, t_{n_l}) = g(s_{n_l}, t_{n_l}), \ \forall l \in \mathbb{N}$$

então $g(r,t) = g(s,t)$, isto é,

$$f_{n_l}(r,t) = f_{n_l}(s,t), \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Fazendo $l \longrightarrow \infty$ em (2.2) segue que

$$f(r,t) = g(s,t).$$

Portanto, existe $t \in I$ tal que $f_t(\sigma) \cap g_t(\tau) \neq \emptyset$ e, então, $(f,g) \in \mathcal{H} - \mathcal{O}(\sigma,\tau)$.
Segue a Afirmação 2.3.1.

Afirmação 2.3.2 *$\mathcal{O}(\sigma,\tau)$ é denso em $\mathcal{H}$, quaisquer que sejam $\sigma \in K$ e $\tau \in L$.*

Demonstração da Afirmação 2.3.2:
Fixemos $\sigma \in K$ e $\tau \in L$. Sejam $(f,g) \in \mathcal{O}(\sigma,\tau)$ e $\varepsilon > 0$.
Como $f : K \times I \to X$ é uma aplicação contínua, X é um ANR e $\sigma \times I$ é um compacto de $K \times I$, temos, pelo MET, que existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada aplicação contínua

$$f'_{\sigma \times I} : \sigma \times I \to X$$

com $\rho(f|_{\sigma \times I}, f'_{\sigma}) < \delta_1$ existe uma extensão contínua

$$f' : K \times I \to X$$

tal que $\rho(f, f') < \varepsilon$.
Analogamente, pelo MET, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada aplicação contínua

$$g'_{\tau \times I} : \tau \times I \to X$$

com $\rho(g|_{\tau \times I}, g'_{\tau}) < \delta_2$ existe uma extensão contínua

$$g' : L \times I \to X$$

tal que $\rho(g, g') < \varepsilon$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Desde que σ e τ são simplexos de dimensão menor ou igual a um então podem ser mergulhados em I. Em particular, se $\dim \sigma = 1$ então σ é homeomorfo a I e se $\dim \sigma = 0$ então σ é homeomorfo a subconjunto finito de I e analogamente para τ. Portanto, como X tem a DHP, podemos escolher as δ-aproximações $f'_{\sigma\times I}$ e $g'_{\tau\times I}$ de $f|_{\sigma\times I}$ e $g|_{\tau\times I}$, respectivamente, de tal maneira que

$$\left(f'_{\sigma\times I}\right)_t(\sigma) \cap \left(g'_{\tau\times I}\right)_t(\tau) = \emptyset, \quad \forall t \in I.$$

Portanto, as aplicações f' e g', cuja existência é garantida pelo MET, são tais que

$$(f', g') \in B((f, g), \varepsilon) \cap \mathcal{O}(\sigma, \tau).$$

Segue, então, a Afirmação 2.3.2.

Além disso, pelo Teorema 1.3.3 e pela Observação 1.3.1, $\mathcal{H}$ é um espaço de Baire e, daí,

$$\mathcal{O} = \bigcap_{\sigma\in K, \tau\in L} \mathcal{O}(\sigma, \tau)$$

é denso em $\mathcal{H}$.

Logo, dadas duas homotopias $f : K \times I \to X$ e $g : L \times I \to X$ então para todo $\varepsilon > 0$ existem ε-aproximações contínuas $f' : K \times I \to X$ e $g' : L \times I \to X$, de f e g, respectivamente, tais que $(f', g') \in \mathcal{O}$, isto é, $f'_t(K) \cap g'_t(L) = \emptyset$, $\forall t \in I$.

A recíproca é imediata. $\square$

Definição 2.3.3 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de 1-Complexos se duas aplicações contínuas $f : K \to X$ e $g : L \to X$ quaisquer, onde K e L são complexos simpliciais finitos de dimensão menor ou igual a um, têm, para qualquer $\varepsilon > 0$, ε-aproximações contínuas $f' : K \to X$ e $g' : L \to X$, respectivamente, tais que $f'(K) \cap g'(L) = \emptyset$.*

Corolário 2.3.1 *Todo espaço localmente compacto ANR com a DHP tem a Propriedade de Disjunção de 1-Complexos.*

2.4 A Propriedade de Disjunção de Concordâncias

Definiremos nessa Seção uma nova propriedade de posição geral: a DCP. Com o objetivo de provarmos mais adiante o Teorema de Disjunção de Concordâncias, daremos também algumas de suas propriedades. Diferentemente da DHP, o produto cartesiano de um espaço localmente compacto ANR satisfazendo a DCP com uma reta tem necessariamente a DDP.

Definição 2.4.1 *Uma aplicação* $F : Y \times I \to X \times I$ *tal que* $F(D \times e) \subset X \times e$ *sempre que* $e \in \{0, 1\}$ *é dita ser uma* concordância *de* Y *em* X. *Em particular, quando* $Y = [a, b]$ *onde* $a < b$ *são reais, dizemos que* F *é uma* concordância de caminhos.

Definição 2.4.2 *Um espaço* X *tem a Propriedade de Disjunção de Concordâncias de Caminhos (DCP - "Disjoint Path Concordances Property") se dadas homotopias de caminhos* $f : D \times I \to X$ *e* $g : D \times I \to X$ *e qualquer* $\varepsilon > 0$, *então existem concordâncias de caminhos* $F : D \times I \to X \times I$ *e* $G : D \times I \to X \times I$ *tais que*

(i) $F(D \times I) \cap G(D \times I) = \emptyset$;

(ii) $\rho\,(f, proj_X F) < \varepsilon$ *e* $\rho\,(g, proj_X G) < \varepsilon$.

Lema 2.4.1 *Seja* X *um espaço ANR com a DAP. Consideremos as aplicações contínuas* $f : D \times I \to X \times I$ *e* $g : D \times I \to X \times I$ *tais que* $f(D \times t_i) \subset X \times t_i$ *e* $g(D \times t_i) \subset X \times t_i$, $i = 1, 2$, *onde* $t_1 < t_2$ *são elementos de* I. *Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existem* ε*-aproximações* F *de* f *e* G *de* g *tais que* $F(D \times t_i) \cap G(D \times t_i) = \emptyset$ *com* $F(D \times t_i) \subset X \times t_i$ *e* $G(D \times t_i) \subset X \times t_i$, $i = 1, 2$.

Demonstração: Seja $\delta > 0$ satisfazendo o MET para as aplicações f e g, o compacto $D \times \{t_1, t_2\}$ e $\varepsilon > 0$.
Desde que X tem a DAP então existem δ-aproximações $f_1 : D \times t_1 \to X \times t_1$ de $f|_{D \times t_1} : D \times t_1 \to X \times t_1$ e $g_1 : D \times t_1 \to X \times t_1$ de $g|_{D \times t_1} : D \times t_1 \to X \times t_1$ tais que

$$f_1(D \times t_1) \cap g_1(D \times t_1) = \emptyset.$$

Analogamente, pela DAP existem δ-aproximações $f_2 : D \times t_2 \to X \times t_2$ de $f|_{D \times t_2} : D \times t_2 \to X \times t_2$ e $g_2 : D \times t_2 \to X \times t_2$ de $g|_{D \times t_2} : D \times t_2 \to X \times t_2$ tais que

$$f_2(D \times t_2) \cap g_2(D \times t_2) = \emptyset.$$

Portanto, as aplicações

$$F' = \bigcup_{i=1}^{2} f_i : D \times \{t_1, t_2\} \to X \times I$$

e

$$G' = \bigcup_{i=1}^{2} g_i : D \times \{t_1, t_2\} \to X \times I$$

são δ-aproximações contínuas de $f|_{D\times\{t_1,t_2\}}$ e $g|_{D\times\{t_1,t_2\}}$, respectivamente, e, daí, aplicando o MET obtemos extensões contínuas $F : D \times I \to X \times I$ de F' e $G : D \times I \to X \times I$ de G', que são, nesse caso, ε-próximas de f e g, respectivamente. $\square$

Observação 2.4.1 *Dizemos que uma aplicação $f : Y \times I \to X \times I$ preserva o nível $t \in I$ se $f(D \times t) \subset X \times t$. Se todos os níveis de I são preservados, então dizemos simplesmente que f preserva níveis.*

Proposição 2.4.1 *Seja X um espaço ANR com a DAP. Então X tem a DCP se, e somente se, dadas aplicações contínuas $f : D \times I \to X \times I$ e $g : D \times I \to X \times I$ que preservam níveis e $\varepsilon > 0$, então existem ε-aproximações por concordâncias de caminhos $F : D \times I \to X \times I$ de f e $G : D \times I \to X \times I$ de g tais que*

$$F(D \times I) \cap G(D \times I) = \emptyset.$$

Além disso, se $f(D \times \partial I) \cap g(D \times \partial I) = \emptyset$, então podemos tomar as ε-aproximações F e G de tal modo que

$$F|_{D\times\partial I} = f|_{D\times\partial I} \qquad e \qquad G|_{D\times\partial I} = g|_{D\times\partial I}.$$

Demonstração: Seja X um espaço ANR com a DAP e a DCP. Tomemos aplicações contínuas $f : D \times I \to X \times I$ e $g : D \times I \to X \times I$ que preservam níveis e $\varepsilon > 0$.
Seja uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

de I cujos comprimentos dos intervalos $J_k = [t_{k-1}, t_k]$, para $k = 1, \cdots, m$, sejam menores que $\frac{\varepsilon}{2}$, isto é, $t_k - t_{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada k.

Observemos que dado qualquer $\eta > 0$, segue do Lema 2.4.1 que existem η-aproximações F de f e G de g tais que

$$F(D \times t_k) \cap G(D \times t_k) = \emptyset, \quad \forall k \in \{0, \cdots, m\}$$

e, além disso, para cada $e \in \{0, \cdots, m\}$ que satisfaz $f(D \times t_e) \cap g(D \times t_e) = \emptyset$ podemos considerar $F|_{D \times t_e} = f|_{D \times t_e}$ e $G|_{D \times t_e} = g|_{D \times t_e}$. Tendo em vista esse fato, consideraremos por simplicidade de notações e sem perda de generalidade que

$$f(D \times t_k) \cap g(D \times t_k) = \emptyset, \quad \forall k \in \{0, \cdots, m\}.$$

Seja

$$0 < \xi < \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{k=1,\cdots,m} \{\rho\left(f(D \times t_k), g(D \times t_k)\right)\}, \varepsilon \right\}.$$

Tomemos $0 < \delta < \frac{\xi}{2}$ satisfazendo o CHET para $\xi > 0$, o espaço ANR $X \times I$ e um compacto K de $D \times I$ tal que

$$N_\xi \left(f(D \times I) \cup g(D \times I)\right) \subset K.$$

Denotemos $f_k = f|_{D \times J_k} : D \times J_k \to X \times J_k$ e $g_k = g|_{D \times J_k} : D \times J_k \to X \times J_k$ para cada $k = 1, \cdots, m$.

Ora, a DCP aplicada a cada par de aplicações

$$proj_X f_k : D \times J_k \to X \qquad \text{e} \qquad proj_X g_k : D \times J_k \to X$$

onde $k = 1, \cdots, m$, fornece-nos concordâncias de caminhos

$$f'_k : D \times J_k \to X \times J_k \qquad \text{e} \qquad g'_k : D \times J_k \to X \times J_k$$

tais que

$$f'_k(D \times J_k) \cap g'_k(D \times J_k) = \emptyset$$

com

$$\rho\left(proj_X f_k, proj_X f'_k\right) < \delta \qquad \text{e} \qquad \rho\left(proj_X g_k, proj_X g'_k\right) < \delta$$

e ainda de tal forma que

$$f'_k(D \times J_k) \subset K \qquad \text{e} \qquad g'_k(D \times J_k) \subset K.$$

Agora, como f'_k preserva os níveis de ∂J_k então

$$\rho\,(f_k|_{D\times\partial J_k}, f'_k|_{D\times\partial J_k}) < \delta$$

e, pelo mesmo motivo,

$$\rho\,(g_k|_{D\times\partial J_k}, g'_k|_{D\times\partial J_k}) < \delta.$$

Portanto, para cada $k = 1, \cdots, m$, aplicando-se o CHET às aplicações

$$f'_k : D \times J_k \to X \times J_k \quad \text{e} \quad f_k|_{D\times\partial J_k} : D \times J_k \to X \times J_k$$

e também às aplicações

$$g'_k : D \times J_k \to X \times J_k \quad \text{e} \quad g_k|_{D\times\partial J_k} : D \times J_k \to X \times J_k$$

obtemos extensões

$$F_k : D \times J_k \to X \times J_k \quad \text{e} \quad G_k : D \times J_k \to X \times J_k$$

de

$$f_k|_{D\times\partial J_k} \quad \text{e} \quad g_k|_{D\times\partial J_k},$$

respectivamente, tais que

$$\rho\,(F_k, f'_k) < \xi < \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho\,(G_k, g'_k) < \xi < \varepsilon.$$

Em particular, a escolha de ξ implica que

$$F_k(D \times J_k) \cap G_k(D \times J_k) = \emptyset$$

e, pela propriedade de extensão,

$$F_k|_{D\times\partial J_k} = f_k|_{D\times\partial J_k} = f|_{D\times\partial J_k}.$$

Sejam

$$F = \cup_{k=1}^{m} F_k : D \times I \to X \times I \quad \text{e} \quad G = \cup_{k=1}^{m} G_k : D \times I \to X \times I$$

aplicações contínuas dadas por colagem.

Então, por construção, F e G são concordâncias de caminhos disjuntas ε-próximas, respectivamente, de f e g.

Para a recíproca, tomemos aplicações contínuas $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ e qualquer $\varepsilon > 0$. Sejam $f' : D \times I \to X \times I$ e $g' : D \times I \to X \times I$ as aplicações contínuas dadas, respectivamente, por $f'(s,t) = (f(s,t),t)$ e $g'(s,t) = (g(s,t),t)$, $\forall (s,t) \in D \times I$. Notemos que, nesse caso, f' e g' preservam níveis e, portanto, pela hipótese, existem concordâncias de caminhos F e G ε-próximas, respectivamente, a f' e g' tais que

$$F(D \times I) \cap G(D \times I) = \emptyset.$$

Além disso,

$$\rho\,(f, proj_X F) < \rho\,(proj_X f', proj_X F) < \rho(f', F) < \varepsilon$$

e

$$\rho\,(g, proj_X G) < \varepsilon.$$

□

A seguinte generalização da DCP será útil na prova do Teorema de Disjunção de Concordâncias:

Definição 2.4.3 *Um espaço X tem a Propriedade de Disjunção de Concordâncias de* 1-*Complexos (DCP*) se dadas duas homotopias $f : K \times I \to X$ e $g : L \times I \to X$, onde K e L são* 1-*complexos simpliciais finitos e qualquer $\varepsilon > 0$, existem concordâncias $F : K \times I \to X \times I$ e $G : L \times I \to X \times I$ tais que*

(i) *$F(K \times I) \cap G(L \times I) = \emptyset$;*

(ii) *$\rho\,(f, proj_X F) < \varepsilon$ e $\rho\,(g, proj_X G) < \varepsilon$.*

Relembremos o seguinte resultado de topologia:

Proposição 2.4.2 *Seja X um espaço metrizável localmente compacto ANR com a DAP. Então X tem DCP se, e somente se, X tem DCP*.*

Demonstração: Tendo em vista o Lema 1.3.1, podemos tomar uma métrica ρ segundo a qual X é completo. Neste caso, desde que X e I são completos então $X \times I$ com a métrica do máximo é completo. Assim, por ([19], Corolário 2, página 168), o espaço $\mathcal{C}(K \times I, X \times I) \times \mathcal{C}(L \times I, X \times I)$ é um espaço completo com a métrica da convergência uniforme, onde K e L são 1-complexos finitos.

Por simplicidade, denotaremos $\mathcal{C} = \mathcal{C}(K \times I, X \times I)$ e $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(L \times I, X \times I)$. Seja

$$\mathcal{H} = \{(f,g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \ / \ f|_{K \times \partial I} \ \text{ e } \ g|_{L \times \partial I} \ \text{ preservam níveis}\}.$$

Tomando uma sequência convergente de funções

$$(f_i, g_i) \longrightarrow (f', g')$$

tal que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $(f_i, g_i) \in \mathcal{H}$ então a convergência uniforme da sequência implica que $f'|_{K \times \partial I}$ e $g'|_{L \times \partial I}$ preservam níveis. Segue que $\mathcal{H}$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ e, portanto, completo. Daí, pelo Teorema da Categoria de Baire, $\mathcal{H}$ é um espaço de Baire.

Para cada $\sigma \in K$ e $\tau \in L$ seja

$$\mathcal{O}(\sigma, \tau) = \{(f,g) \in \mathcal{H} \ / \ f(\sigma \times I) \cap g(\tau \times I) = \emptyset\}$$

Afirmação 2.4.1 *$\mathcal{O}(\sigma, \tau)$ é aberto em $\mathcal{H}$ para cada $\sigma \in K$ e $\tau \in L$.*

Demonstração da Afirmação 2.4.1:

Fixemos $\sigma \in K$ e $\tau \in L$.

Seja $(f,g) \in \mathcal{O}(\sigma,\tau)$ e escolhamos $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho\left(f(\sigma \times I), g(\tau \times I)\right)$. Então,

$$B\left((f,g), \varepsilon\right) \subset \mathcal{O}(\sigma, \tau).$$

Segue, dessa forma, a Afirmação 2.4.1.

Afirmação 2.4.2 *$\mathcal{O}(\sigma, \tau)$ é denso em $\mathcal{H}$ para cada $\sigma \in K$ e $\tau \in L$.*

Demonstração da Afirmação 2.4.2:

Fixemos $\sigma \in K$ e $\tau \in L$ e sejam quaisquer $(f,g) \in \mathcal{O}(\sigma, \tau)$ e $\varepsilon > 0$.

Tomemos $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ satisfazendo o CHET para $X \times I$ e um compacto C tal que

$$N_\varepsilon\left(f(\sigma \times I) \cup g(\tau \times I)\right) \subset C.$$

Escolhamos $\eta > 0$ satisfazendo o CHET para $X \times I$, C e $\delta > 0$.

Ora, pela Proposição 2.4.1 existem η-aproximações f' de $f|_{\sigma\times I}$ e g' de $g|_{\tau\times I}$ tais que

$$f'(\sigma \times I) \cap f'(\tau \times I) = \emptyset,$$

com $f'|_{\sigma\times\partial I} = f|_{\sigma\times\partial I}$ e $g'|_{\tau\times\partial I} = g|_{\tau\times\partial I}$.

Portanto, aplicando o CHET às aplicações

$$f|_{\sigma\times I\cup K\times\partial I} : \sigma \times I \cup K \times \partial I \to C \quad \text{e} \quad f' : \sigma \times I \to X \times I,$$

obtemos uma extensão $f'' : \sigma \times I \cup K \times \partial I \to X \times I$ de f' tal que $\rho\left(f|_{\sigma\times I\cup K\times\partial I}, f''\right) < \delta$.

Analogamente, considerando a restrição de g a $\tau\times I\cup L\times\partial I$ e aplicando o CHET obtemos uma extensão $g'' : \tau \times I \cup L \times \partial I \to X \times I$ de g' δ-próxima à $g|_{\tau\times I\cup L\times\partial I}$.

Observemos que, nesse caso,

$$f''|_{K\times\partial I} = f'|_{K\times\partial I} \qquad \text{e} \qquad g''|_{K\times\partial I} = g'|_{K\times\partial I}$$

e, portanto, f'' e g'' são concordâncias de caminhos.

Então, aplicando o CHET para as aplicações $f : K\times I \to C$ e $f'' : \sigma\times I\cup K\times\partial I \to X\times I$ e para as aplicações $g : K \times I \to C$ e $g'' : \tau \times I \cup L \times \partial I \to X \times I$ obtemos extensões $F : K\times I \to X\times I$ de f'' e $G : L\times I \to X\times I$ de g'' que são, respectivamente, $\frac{\varepsilon}{2}$-próximas a f e g.

Neste caso,

$$(F, G) \in B\left((f, g), \varepsilon\right) \cap \mathcal{O}(\sigma, \tau),$$

o que mostra a Afirmação 2.4.2.

Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Baire, então o conjunto

$$\mathcal{O} = \bigcap_{(\sigma,\tau)\in K\times L} \mathcal{O}(\sigma, \tau)$$

é denso em $\mathcal{H}$.

Tomemos, agora duas homotopias $F : K \times I \to X$ e $G : L \times I \to X$, e qualquer $\varepsilon > 0$.

Definamos as concordâncias de caminhos $f : K \times I \to X \times I$ e $g : L \times I \to X \times I$ por $f = F \times Id_I$ e $g = G \times Id_I$, onde $Id_I : I \to I$ é a aplicação identidade.

Neste caso, existem

$$(f', g') \in \mathcal{O} \cap B\left((f, g), \varepsilon\right),$$

ou seja, f' e g' são concordâncias de caminho tais que

(i) $f'(K \times I) \cap g'(L \times I) = \emptyset$.

(ii) $\rho\,(F, proj_X f') < \varepsilon$ e $\rho\,(G, proj_X g') < \varepsilon$.

Portanto, X tem a DCP*.

A recíproca é imediata. $\square$

Capítulo 3

Sobre a DHP e a DADP

Como vimos nos Teoremas 2.1.2 e 2.1.4, toda n-variedade generalizada resolúvel, $n \geq 4$, com a DADP é um Fator de Variedade de Codimensão Um. Neste Capítulo, estudamos uma condição suficiente para que um espaço tenha a DADP. Depois, mostramos que a DHP é um refinamento estrito da DADP no sentido de que todo espaço com DADP tem a DHP e, no entanto, a recíproca não é verdadeira.

3.1 Detectando Fatores de Variedades de Codimensão Um com a DADP

Nessa Seção, X denotará um espaço métrico localmente compacto LC^1 tal que nenhum de seus subconjuntos fechados de dimensão 1 contêm um subconjunto aberto não-vazio. Aqui, motivados pelos Teoremas 2.1.2 e 2.1.4, os quais combinados garantem que toda n-variedade generalizada resolúvel para $n \geq 4$ é um Fator de Variedade de Codimensão Um, damos condições para que uma variedade generalizada tenha a DADP.
Relembremos a seguinte:

Definição 3.1.1 *Se Y é um espaço compacto de Hausdorff e X é um subespaço de Y cujo fecho é igual a Y, então Y é dito ser uma compactificação de X. Se $Y - X$ é igual a um único ponto, então Y é dito a compactificação por um ponto (ou compactificação de Alexandrov) de X. Neste último caso, denotaremos $Y = X^*$ e $Y - X = \{\infty\}$.*

O seguinte Teorema fornece uma condição suficiente para a existência da compactificação de Alexandrov de um espaço não compacto:

Teorema 3.1.1 *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff e não compacto. Então existe, e é única a menos de homeomorfismos, uma compactificação de Alexandrov $X^* = X \cup \{\infty\}$ de X.*

Demonstração: Ver [18]. $\square$

Observação 3.1.1 *A topologia τ^* de X^* é dada por $\tau^* = \tau \cup L$, onde τ é a topologia de X e $L = \{U \cup \{\infty\} \ / \ \ U \in \tau \ \ \text{e} \ \ X - U \ \ \text{é compacto}\}$.*

Observação 3.1.2 *Se A é um subconjunto fechado de X, podemos considerar A^* como subespaço fechado de X^*.*

Lema 3.1.1 *Seja X um espaço de Hausdorff, localmente compacto e conexo por caminhos tal que para algum n e para qualquer subconjunto fechado A de X tem-se*

$$\check{H}^n(X^*, A^*) \cong H_0(X - A). \tag{3.1}$$

Neste caso, se $\dim A \leq 2$ então $X - A$ é conexo por caminhos.

Demonstração: Seja a sequência exata em cohomologia de Čech do par (X^*, A^*):

$$\cdots \to \check{H}^{n-1}(A^*) \to \check{H}^n(X^*, A^*) \to \check{H}^n(X^*) \to \check{H}^n(A^*) \to \cdots \tag{3.2}$$

Desde que $\dim A \leq n-2$ então $\dim A^* \leq n-2$ e, daí, pelo Teorema 1.4.4,

$$\check{H}^{n-1}(A^*) \cong \check{H}^n(A^*) \cong 0.$$

Da exatidão da sequência (3.2) segue que

$$\check{H}^n(X^*, A^*) \cong \check{H}^n(X^*).$$

Assim,

$$H_0(X - A) \cong \check{H}^n(X^*, A^*) \cong \check{H}^n(X^*) = \check{H}^n(X^*, \emptyset) \cong H_0(X - \emptyset) = H_0(X) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Portanto, $X - A$ é conexo por caminhos. $\square$

Observação 3.1.3 *Pelo Teorema 1.7.2, se X é uma variedade generalizada então X satifaz a dualidade (3.1) do Lema 3.1.1.*

Teorema 3.1.2 *Seja X uma n-variedade generalizada e $F \subset X$ um subconjunto fechado tal que* $\dim F \leq n-2$. *Então, para cada aplicação contínua $g : I \to X$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe uma ε-aproximação contínua $g' : I \to X$ tal que $g'(I) \cap F = \emptyset$.*

Demonstração: Seja $g : I \to X$ uma aplicação contínua e $\varepsilon > 0$. Tomemos uma cobertura $\mathcal{U}$ de $g(I)$ tal que se $U \in \mathcal{U}$ então *diam* $U < \varepsilon$ e U é conexo por caminhos. Pelo Lema 3.1.1, para todo $U \in \mathcal{U}$ tem-se que $U - F$ é conexo por caminhos.
Seja δ um número de Lebesgue para $\mathcal{U}$ e escolhamos uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

de I tal que *diam* $g([t_{i-1}, t_i]) < \delta, \quad i = 1, \cdots, m.$
Denotemos por U_i o elemento de $\mathcal{U}$ tal que

$$g([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

Como $g(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$ então $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i = 0, \cdots, m-1$. Assim, tomando

$$\begin{aligned} x_0 &\in U_0 - F \\ x_i &\in U_i \cap U_{i+1} - F, \quad i = 0, \cdots, m-1 \\ x_m &\in U_m - F. \end{aligned}$$

e ligando x_{i-1} a x_i por uma caminho, o que é sempre possível tendo em vista que, para cada $i = 0, \cdots, m$, $U_i - F$ é conexo por caminhos, definimos uma ε-aproximação contínua $g' : I \to X$ de g tal que $g'(t_i) = x_i$ e $g'([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i - F$.
Neste caso,

$$g'(I) \cap F = \emptyset.$$

□

Teorema 3.1.3 *Seja X uma n-variedade generalizada resolúvel, onde $n \geq 4$, e suponhamos que para cada aplicação contínua $f : D \times I \to X$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma*

ε-aproximação contínua $f' : D \times I \to X$ de f tal que

$$\dim f'(D \times I) \leq n - 2.$$

Então X é um Fator de Variedade de Codimensão Um.

Demonstração: Sejam $f : D \times I \to X$ e $g : I \to X$ aplicações contínuas e $\varepsilon > 0$. Tomemos uma ε-aproximação contínua $f' : D \times I \to X$ de f tal que

$$\dim f'(D \times I) \leq n - 2,$$

dada pela hipótese.

Pelo Teorema 3.1.2, existe uma ε-aproximação contínua $g' : I \to X$ de g tal que

$$g'(I) \cap f'(D \times I) = \emptyset.$$

Portanto, X é uma n-variedade generalizada resolúvel, $n \geq 4$, com a DADP e então, tendo em vista os Teoremas 2.1.2 e 2.1.4, um Fator de Variedade de Codimensão Um. □

3.2 A DHP como um refinamento da DADP

Nesta Seção compararemos a DHP com a DADP. Especificamente, mostraremos que a DHP é estritamente mais fina que a DADP.

Neste sentido, nosso primeiro passo é modificar as coordenadas do espaço de parametrização I^2 de modo que, dadas duas homotopias de $D \times I$ em um espaço X, seja possível obter-se homotopias disjuntas arbitrariamente próximas às primeiras.

Definição 3.2.1 *Sejam $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ homotopias. Então o* Conjunto dos Pontos de Parametrização da Intersecção *("Set of Parameterization Points of Intersection") de f e g , escrito como $PPIN(f, g)$, é dado por*

$$PPIN(f, g) = \{(t, s) \in I^2 \ / \ f_t(D) \cap g_s(D) \neq \emptyset\}.$$

Lema 3.2.1 *Sejam $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ homotopias. Então $PPIN(f, g)$ é um conjunto fechado.*

Demonstração: Seja $(t_0, s_0) \in \overline{PPIN(f,g)}$. Então, existem sequências (x_i, t_i) e (y_i, s_i), cujos termos pertencem a $PPIN(f,g)$, tais que

$$t_i \longrightarrow t_0 \quad \text{e} \quad s_i \longrightarrow s_0$$

e

$$f(x_i, t_i) = g(y_i, s_i), \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por compacidade, podemos admitir (passando a uma subsequência se necessário) que

$$x_i \longrightarrow x_0 \quad \text{e} \quad y_i \longrightarrow y_0.$$

Daí, pela continuidade de f e g,

$$f(x_0, t_0) = g(y_0, s_0),$$

e, portanto,$(t_0, s_0) \in PPIN(f,g)$. □

Lema 3.2.2 (Lema da Reparametrização) *Sejam $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ homotopias tais que* $\dim PPIN(f,g) = 0$. *Então, podemos reparametrizar f e g de modo a obtermos, qualquer que seja $\varepsilon > o$, ε-aproximações por homotopias disjuntas f' de f e g' de g.*

Demonstração: Sejam $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ homotopias tais que $\dim PPIN(f,g) = 0$ e $\varepsilon > 0$.
Escolhamos $\eta > 0$ tal que

$$\rho(f_t, f_{t'}) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho(g_s, g_{s'}) < \varepsilon$$

sempre que $\rho((t,s),(t',s')) < \eta$.
Definamos o caminho

$$\alpha : I \to I^2$$

por

$$\alpha(t) = (t,t).$$

Afirmação 3.2.1 *Existe uma η-aproximação contínua $\alpha' : I \to I^2 - PPIN(f,g)$ de α.*

Demonstração da Afirmação 3.2.1:

Denotemos $A = PPIN(f,g)$.

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $\alpha(I)$ por conjuntos conexos por caminhos com diâmetro menor que η. Ora, pelo Lema 3.2.1 $PPIN(f,g)$ é fechado. Logo, tomando a sequência exata do par $(U, U-A)$, onde $U \in \mathcal{U}$, e usando o Teorema da Dualidade de Alexander,

$$0 \overset{(*)}{\cong} \check{H}^1_c(A) \cong H_1(U, U-A) \to \tilde{H}_0(U-A) \to \tilde{H}_0(U) \overset{(**)}{\cong} 0,$$

onde para ver o isomorfismo $(*)$ usamos o argumento da dimensão do Teorema 1.4.4 e o isomorfismo $(**)$ segue do fato de que U é conexo por caminhos.

Logo, pela exatidão da sequência,

$$\tilde{H}_0(U-A) \cong 0$$

e, então, $U - A$ é conexo por caminhos.

Seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue para $\mathcal{U}$. Escolhamos uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

de I tal que $diam\ \alpha([t_{i-1}, t_i]) < \delta$, $i = 1, \cdots, m$.

Denotemos por U_i o elemento de $\mathcal{U}$ tal que

$$\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

Como, para $i = 1, \cdots, m-1$, $\alpha(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$ então $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$.

Tomemos, então,

$$\begin{aligned} x_0 &\in U_1 - PPIN(f,g) \\ x_i &\in U_i \cap U_{i+1} - PPIN(f,g), \quad i = 1, \cdots, m-1 \\ x_m &\in U_m - PPIN(f,g). \end{aligned}$$

Desde que cada $U_i - PPIN(f,g)$ é conexo por caminhos, podemos, ligando x_i a x_{i+1}, definir uma η-aproximação contínua

$$\alpha' : I \to I^2$$

de α tal que

$$\alpha'(t_i) = x_i \quad \text{e} \quad \alpha'([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i - PPIN(f, g)$$

onde $i = 1, \cdots, m-1$.

Neste caso, como queríamos,

$$\alpha'(I) \cap PPIN(f, g) = \emptyset.$$

Segue, então, a Afirmação 3.2.1.

Denotemos por α'_1 e α'_2 as aplicações componentes de α' na primeira e segunda coordenadas, respectivamente. Assim, definindo $f' : D \times I \to X$ por $f'_t = f_{\alpha'_1(t)}$ e $g' : D \times I \to X$ por $g'_t = g_{\alpha'_2(t)}$ obtemos, respectivamente, ε-aproximações contínuas de f e g por homotopias disjuntas.

Com efeito,

Pela construção de α',

$$f_{\alpha'_1(t)}(D) \cap g_{\alpha'_2(t)}(D) = \emptyset, \ \forall t \in I,$$

isto é,

$$f'_t(D) \cap g'_t(D) = \emptyset, \ \forall t \in I.$$

Além do mais, desde que

$$\rho(\alpha(t), \alpha'(t)) = \rho((t, t), (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) < \eta, \quad \forall t \in I$$

então

$$\rho(f_t, f_{\alpha'_1(t)}) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho(g_t, g_{\alpha'_2(t)}) < \varepsilon, \quad \forall t \in I,$$

isto é,

$$\rho(f_t, f'_t) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho(g_t, g'_t) < \varepsilon, \quad \forall t \in I.$$

Portanto,

$$\rho(f, f') < \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho(g, g') < \varepsilon.$$

$\square$

Proposição 3.2.1 *Seja X um espaço localmente compacto ANR. Então X tem DHP se, e somente se, para cada duas homotopias $f : D\times I \to X$ e $g : D\times I \to X$ e $\varepsilon > 0$ existem ε-aproximações contínuas f' e g', respectivamente, tais que $PPIN(f', g')$ é 0-dimensional.*

Demonstração: Denotemos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}(D \times I, X)$ o espaço das aplicações contínuas de $D \times I$ em X.
Seja

$$\mathcal{T} = \{(P,Q) \in (\mathbb{Q} \cap I)^2 \times (\mathbb{Q} \cap I)^2 \ \ / \ \ P = (p_1,p_2), \ \ Q = (q_1,q_2), \ \ q_1 \neq q_2 \ \text{ e } \ p_1 \neq p_2\}.$$

Para cada $(P,Q) \in \mathcal{T}$ e $(f,g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ definamos as aplicações contínuas

$$f_{PQ} : D \times I \to X \quad \text{por} \quad (f_{PQ})_t = f_{[(1-t)p_1+tq_1]}, \ \ \forall t \in I$$

e

$$g_{PQ} : D \times I \to X \quad \text{por} \quad (g_{PQ})_t = g_{[(1-t)p_2+tq_2]}, \ \ \forall t \in I.$$

Seja, para cada $(P,Q) \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{O}_{PQ} = \{(f,g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \ \ / \ \ (f_{PQ})_t(D) \cap (g_{PQ})_t(D) = \emptyset, \ \ \forall t \in I\}.$$

De maneira análoga a Afirmação 2.3.1 do Teorema 2.3.1 vemos que $\mathcal{O}_{PQ}$ é aberto em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, qualquer que seja $(P,Q) \in \mathcal{T}$.

Afirmação 3.2.2 *$\mathcal{O}_{PQ}$ é denso em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, qualquer que seja $(P,Q) \in \mathcal{T}$.*

Demonstração da Afirmação 3.2.2:
Fixemos $(P,Q) \in \mathcal{T}$ e tomemos $(f,g) \in \mathcal{O}_{PQ}$ e $\varepsilon > 0$. Seja $\delta > 0$ dado pelo MET para f, g, ε e os compactos $D \times [p_1,q_1]$ e $D \times [p_2,q_2]$ de $D \times I$.
Ora, X tem a DHP e, portanto, existem δ-aproximações contínuas F e G de f_{PQ} e g_{PQ}, respectivamente, tais que

$$F_t(D) \cap G_t(D) = \emptyset, \ \ \forall t \in I.$$

Definamos as aplicações contínuas

$$f'_{D\times[p_1,q_1]} : D \times [p_1,q_1] \to X$$

por

$$\left(f'_{D\times[p_1,q_1]}\right)_t = F_{\left(\frac{t-p_1}{q_1-p_1}\right)}, \quad \forall t \in [p_1,q_1]$$

e

$$g'_{D\times[p_2,q_2]} : D \times [p_2,q_2] \to X$$

por

$$\left(g'_{D\times[p_2,q_2]}\right)_t = G_{\left(\frac{t-p_2}{q_2-p_2}\right)}, \quad \forall t \in [p_2,q_2].$$

Temos, por construção, que

$$\rho\left(f'_{D\times[p_1,q_1]}, f|_{D\times[p_1,q_1]}\right) < \delta \quad \text{e} \quad \rho\left(g'_{D\times[p_2,q_2]}, g|_{D\times[p_2,q_2]}\right) < \delta,$$

e então, aplicando o MET, existem extensões contínuas $f' : D \times I \to X$ e $g' : D \times I \to X$ de $f'_{D\times[p_1,q_1]}$ e $g'_{D\times[p_2,q_2]}$, respectivamente, tais que

$$\rho(f',f) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho(g',g) < \varepsilon.$$

Seja $t \in I$. Então existe um único par $(r,s) \in [p_1,q_1] \times [p_2,q_2]$ tal que

$$r = (1-t)p_1 + tq_1 \quad \text{e} \quad s = (1-t)p_2 + tq_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(f'_{PQ})_t(D) \cap (g'_{PQ})_t(D) &= f'_{(1-t)p_1+tq_1}(D) \cap g'_{(1-t)p_2+tq_2}(D) \\
&= f'_r(D) \cap g'_s(D) \\
&= F_{\left(\frac{r-p_1}{q_1-p_1}\right)}(D) \cap G_{\left(\frac{s-p_2}{q_2-p_2}\right)}(D)) \\
&= F_t(D) \cap G_t(D) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Segue que $(f',g') \in B((f,g),\varepsilon) \cap \mathcal{O}_{PQ}$.
Portanto, vale a Afirmação 3.2.2.

Desde que X é localmente compacto então, pelo Teorema 1.3.3 e pela Observação 1.3.1, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é um espaço de Baire. Segue então que

$$\mathcal{O} = \bigcap_{(P,Q)\in\mathcal{T}} \mathcal{O}_{PQ}$$

é denso em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Portanto, dado $(f, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ e $\varepsilon > 0$ existem ε-aproximações f' e g' de f e g, respectivamente, tais que $(f', g') \in \mathcal{O}$.

Agora, para cada $(P, Q) \in \mathcal{T}$

$$\emptyset = PPIN(f'_{PQ}, g'_{PQ}) = PPIN(f', g') \cap \overline{PQ}$$

e, daí,

$$PPIN(f', g') \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^2 \cap I^2.$$

Segue que $PPIN(f', g')$ é 0-dimensional.

Tendo em vista o Lema da Reparametrização, a recíproca é válida. □

Proposição 3.2.2 *Seja X um espaço localmente compacto ANR. Então X tem a DADP se, e somente se, quaisquer duas homotopias $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ podem ser, para todo $\varepsilon > 0$, ε-aproximadas, respectivamente, por homotopias $f' : D \times I \to X$ e $g' : D \times I \to X$ tais que $PPIN(f', g') \subset A \times B$, onde A e B são subespaços 0-dimensionais de I.*

Demonstração: Denotemos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}(D \times I, X)$ o espaço das aplicações contínuas de $D \times I$ em X.

Para cada $q \in \mathbb{Q} \cap I$, definamos

$$\mathcal{O}_q = \{(f, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \;\; / \;\; f_q(D) \cap g(D \times I) = \emptyset \;\text{ e }\; f(D \times I) \cap g_q(D) = \emptyset\}.$$

De maneira análoga a Afirmação 2.3.1 do Teorema 2.3.1 vemos que $\mathcal{O}_q$ é aberto em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ para cada $q \in \mathbb{Q} \cap I$.

Afirmação 3.2.3 *$\mathcal{O}_q$ é denso em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, para cada $q \in \mathbb{Q} \cap I$.*

Demonstração da Afirmação 3.2.3:

Fixemos $q \in \mathbb{Q} \cap I$ e tomemos $(f, g) \in \mathcal{O}_q$ e $\varepsilon > 0$. Seja $\delta > 0$ dado pelo MET para $f, g, \frac{\varepsilon}{2}$ e o compacto $D \times q$ de $D \times I$.

Como X tem a DADP, existem δ-aproximações contínuas

$$F_q : D \times q \to X \quad \text{e} \quad G : D \times I \to X$$

de f_q e g, respectivamente, tais que

$$F_q(D \times q) \cap G(D \times I) = \emptyset.$$

Temos que $\rho\left(F_q, f|_{D\times q}\right) < \delta$ e, portanto, pelo MET existe uma extensão contínua $F : D \times I \to X$ de F_q tal que $\rho(F, f) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Analogamente, tomando

$$\xi = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \rho\left(F_q(D), G(D \times I)\right)\right\}$$

obtemos ξ-aproximações contínuas f' de F e g' de G tais que

$$f'(D \times I) \cap g'_q(D) = \emptyset.$$

Neste caso,

$$(f', g') \in B((f, g), \varepsilon) \cap \mathcal{O}_q.$$

Portanto, vale a Afirmação 3.2.3.

Desde que X é localmente compacto, então $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é um espaço de Baire, e, daí,

$$\mathcal{O} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap I} \mathcal{O}_q$$

é denso em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.
Portanto, dados $(f, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ e $\varepsilon > 0$ existem ε-aproximações f' e g' de f e g, respectivamente, tais que $(f', g') \in \mathcal{O}$.
Daí, $\forall q \in \mathbb{Q} \cap I$

$$PPIN(f', g') \subset (I - \{q\})^2$$

e, assim,

$$PPIN(f', g') \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^2 \cap I^2.$$

Tomemos $A = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap I$ e $B = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap I$.
Para vermos a recíproca, tomemos um caminho $\alpha : D \to X$, uma aplicação contínua $g : D \times I \to X$ e qualquer $\varepsilon > 0$.
Sejam $f : D \times I \to X$ a aplicação dada por $f_t = \alpha$, $\forall t \in I$, e f' e g' as ε-aproximações de f e g, respectivamente, dadas pela hipótese, tais que $PPIN(f', g') \subset A \times B$, onde A e B

são subespaços 0-dimensionais de I.

Escolhamos qualquer $t_0 \in I - A$ e definamos o caminho $\alpha' : D \to X$ por $\alpha'(s) = f'_{t_0}(s)$, $\forall s \in D$. Neste caso, $\rho(\alpha, \alpha') < \varepsilon$ e, desde que

$$f'_{t_0}(D) \cap g'_t(D) = \emptyset, \quad \forall t \in I,$$

então

$$\alpha'(D) \cap g(D \times I) = \emptyset.$$

Portanto, X tem a DADP. □

Corolário 3.2.1 *Todo espaço localmente compacto ANR com a DADP tem a DHP.*

Demonstração: Sejam X um espaço localmente compacto ANR com a DADP e $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ homotopias.

Pela Proposição 3.2.2, para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $\frac{\varepsilon}{2}$-aproximações contínuas f' de f e g' de g tais que $PPIN(f', g')$ é 0-dimensional.

Neste caso, a Proposição 3.2.1 fornece-nos $\frac{\varepsilon}{2}$-aproximações f'' de f' e g'' de g', tais que f'' e g'' são homotopias disjuntas.

Portanto, como f'' e g'' são ε-aproximações de f e g, respectivamente, X tem a DHP. □

Em particular, vale o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1 *Toda n-variedade generalizada com a DADP, onde $n \geq 4$, tem a DHP.*

Observação 3.2.1 *A DHP não é equivalente a DADP. Daverman e Walsh construiram, em [8], os espaços k-ghastly, os quais, em particular para $k = 2$, tem a DHP e, no entanto, não tem a DADP.*

Capítulo 4

Produto com Uma Reta

Neste Capítulo, demonstraremos o Teorema de Disjunção das Homotopias e o Teorema de Disjunção de Concordâncias. O primeiro estabelece que a DHP é uma condição suficiente e o segundo que a DCP é uma condição necessária e suficiente para reconhecer os Fatores de Variedade de Codimensão Um na categoria das n-variedades generalizadas resolúveis com $n \geq 4$.

4.1 Topografia sobre $D \times I$

Nesta Seção, muniremos $D \times I$ com uma "estrutura topográfica". Especificamente, nosso objetivo é introduzir uma ténica de demonstração para os dois principais resultados desse Capítulo.

Definição 4.1.1 (Topografia sobre $D \times I$) *Uma topografia Υ sobre $D \times I$ consiste dos seguintes elementos:*

(i) *Um conjunto $\{J_1, \cdots, J_m\}$ de intervalos consecutivos em $\mathbb{R}$ tais que $J_j = [t_{j-1}, t_j]$, onde $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$;*

(ii) *Um conjunto de complexos simpliciais finitos $\{L_0, \cdots, L_m\}$, ditos os* níveis de transição*, de dimensão no máximo um mergulhados em $D \times I$;*

(iii) *Um conjunto de 1-complexos finitos $\{K_1, \cdots, K_m\}$, ditos os* fatores de nível*;*

(iv) *Um conjunto de aplicações contínuas $\{\phi_j : K_j \times J_j \to D \times I\}_{j=1,\cdots,m}$.*

Tais elementos relacionam-se da seguinte forma:

(a) $L_o = \phi_1(K_1 \times \{t_0\})$,

$L_m = \phi_m(K_m \times \{t_m\})$,

$L_j = \phi_j(K_j \times \{t_j\}) \cup \phi_{j+1}(K_{j+1} \times \{t_j\}),\ j = 1, \cdots, m-1;$

(b) $\phi_j|_{K_j \times int J_j}$ *é um mergulho para cada* $j = 1, \cdots, m;$

(c) $\bigcup_{j=1}^{n} \phi_j(K_j \times J_j) = D \times I.$

Definição 4.1.2 (Aplicação Topográfica) *Uma aplicação* $\mu : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ *é chamada de* topográfica *se existe uma topografia* Υ *sobre* $D \times I$ *cujos níveis são preservados por* μ*, isto é, para cada* $\phi_j : K_j \times J_j \to D \times I$ *da topografia tem-se* $\mu \circ \phi_j(K_j \times t) \subset X \times t,\ \forall t \in J_j$.

Lema 4.1.1 (Lema da Aproximação Topográfica) *Seja* $\mu : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ *uma aplicação contínua. Então, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe uma* ε*-aproximação de* μ *por uma aplicação topográfica* $\mu' : D \times I \to X \times \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $\mu : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ uma aplicação contínua e $\varepsilon > 0$. Denotemos por $proj_X : X \times \mathbb{R} \to X$ e $proj_{\mathbb{R}} : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as aplicações projeções.
Pelo Teorema 1.2.2, existe uma p.l. aplicação $f : D \times \mathbb{R}$ que aproxima simplicialmente $proj_{\mathbb{R}} \circ \mu : D \times I \to \mathbb{R}$ com respeito a uma triangulação (K, s) de $D \times I$.
Definamos

$$\mu' = (proj_X \circ \mu) \times f : D \times I \to X \times \mathbb{R}.$$

Mostraremos que μ' é uma aproximação desejada para μ.
Seja $\{t_0, \cdots, t_m\} \in \mathbb{R}$ um conjunto ordenado contendo $f(K^{(0)})$. Subdividamos K de uma tal maneira que $f^{-1}(t_j)$ seja o poliedro de um subcomplexo K' de K cujos vértices estão em $f^{-1}(\{t_0, \cdots, t_m\})$. Sem perda de generalidade, K denotará K'.
Seja $\sigma \in K$ um 2-simplexo. Neste caso, $\sigma = \langle (a, b, c) \rangle$ e necessariamente temos que $f(a) = f(b) = t_j$ e $f(c) = t_{j-1}$. Sejam $\sigma_t = f^{-1}(t) \cap \sigma$ e $t^* = \frac{t_{j-1}+t_j}{2}$, para $j = 1, \cdots, m$.
Neste caso, σ_{t^*} é um segmento médio de σ e existe uma aplicação $\phi_\sigma : \sigma_{t^*} \times [t_{j-1}, t_j] \to \sigma$ que preserva níveis e tal que $\phi|_{\sigma_{t^*} \times [t_{j-1}, t_j]}$ é um homeomorfismo. Assim:

(i) $\{J_1, \cdots, J_m\}$ é uma coleção de intervalos consecutivos em $\mathbb{R}$, onde $J_j = [t_{j-1}, t_j]$ para cada j.

(ii) $\{L_0, \cdots, L_m\}$ é uma coleção de complexos de dimensão no máximo um, onde $L_j = \cup_{\sigma \in K} \sigma_t$ para cada j.

(iii) $\{K_1, \cdots, K_m\}$ é uma coleção de 1-complexos, onde $K_j = \cup_{\sigma \in K} \sigma_{t^*}$ para cada j.

(iv) As aplicações $\{\phi_j : K_j \times J_j \to D \times I\}_{j=1,\cdots,m}$, onde $\phi_j = \cup_{\sigma \in K \cap f^{-1}(J_j)} \phi_\sigma$, são tais que:

(a) $L_o = \phi_1(K_1 \times \{t_0\})$,
$L_m = \phi_m(K_m \times \{t_m\})$,
$L_j = \phi_j(K_j \times \{t_j\}) \cup \phi_{j+1}(K_{j+1} \times \{t_j\}),\ j = 1, \cdots, m-1;$

(b) $\phi_j|_{K_j \times int J_j}$ é um mergulho para cada $j = 1, \cdots, m$;

(c) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} \phi_j(K_j \times J_j) = D \times I.$

Isto determina uma topografia sobre $D \times I$. Notemos, em particular, que $\mu' \circ \phi_j(K_j \times t) \subset X \times t$ para todo $t \in J_j$. Portanto, μ' é uma aproximação desejada para μ.

□

4.2 Detectando Fatores de Variedades de Codimensão Um com a DHP

Nesta Seção, mostramos que a DHP é uma propriedade suficiente para detectar, no universo das variedades generalizadas resolúveis de dimensão maior ou igual a 4, os Fatores de Variedade de Codimensão Um. Aqui nos baseamos principalmente em [14] e [15], ambos da autoria de D. Halverson.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Disjunção de Homotopias) *Se X é um espaço localmente compacto ANR com a DHP então $X \times \mathbb{R}$ tem a DDP.*

Demonstração: Sejam $\mu_1 : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ e $\mu_2 : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ aplicações contínuas e $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 4.1.1 existem aplicações topográficas $\mu_1' : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ e $\mu_2' : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ com topografias Υ^1 e Υ^2, respectivamente, tais que $\rho(\mu_1, \mu_1') < \frac{\varepsilon}{3}$ e $\rho(\mu_2, \mu_2') < \frac{\varepsilon}{3}$. Denotaremos os elementos de cada Υ^i, $i = 1, 2$, como na Definição 4.1.1, de uma topografia Υ sobre $D \times I$, com o índice i sobrescrito.

Subdividindo os intervalos $\left\{J_j^i\right\}_{j=1}^{m_i}$, onde $i = 1, 2$, se necessário, podemos sem perda de generalidade assumir que eles são os mesmos (isto é, $m = m_1 = m_2$ e, para cada $j = 0, \cdots, m$, vale que $t_j = t_j^1 = t_j^2$).

Sejam $proj_X : X \times \mathbb{R} \to X$ e $proj_{\mathbb{R}} : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as aplicações projeções.

Nosso primeiro passo será disjuntar todos os níveis de transição por aplicações $\frac{\varepsilon}{3}$-próximas a $proj_X \circ \mu_1'$ e $proj_X \circ \mu_2'$, respectivamente. Sejam $L^1 = \bigcup_{j=1}^{m} L_j^1$ e $L^2 = \bigcup_{j=1}^{m} L_j^2$.

Ora, para cada $i = 1, 2$, se $p \neq q$ e $p, q \in \{1, \cdots, m-1\}$ então

$$
\begin{aligned}
\mu_i'(L_p^i \cap L_q^i) &\subset \mu_i'(L_p^i) \cap \mu_i'(L_q^i) \\
&= \mu_i'\left(\phi_p^i(K_p^i \times \{t_p\}) \cup \phi_{p+1}^i(K_{p+1}^i \times \{t_p\})\right) \cap \\
&\quad\ \mu_i'\left(\phi_q^i(K_q^i \times \{t_q\}) \cup \phi_{q+1}^i(K_{q+1}^i \times \{t_q\})\right) \\
&\subset X \times \{t_p\} \cap X \times \{t_q\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

e se $p \in \{1, \cdots, m-1\}$ então

$$\mu_i'(L_p^i \cap L_m^i) \subset X \times \{t_p\} \cap X \times \{t_m\} = \emptyset.$$

Portanto, $\mu_i'(L_p^i \cap L_q^i) = \emptyset$, $\forall i \in \{1, 2\}$ e $\forall p, q \in \{1, \cdots, m\}$ tal que $p \neq q$.

Seja

$$0 < \delta < \min_{\substack{i=1,2 \\ p,q \in \{1,\cdots,m\}}} \left\{ \frac{1}{2} \rho\left(proj_X \circ \mu_i'(L_p^i), proj_X \circ \mu_i'(L_q^i)\right) \right\}$$

dado pelo MET para as aplicações $proj_X \circ \mu_i'$, $i = 1, 2$, os compactos L^i, $i = 1, 2$, e $\frac{\varepsilon}{3}$.

Pelo Corolário 2.3.1, para cada $j = 1, \cdots, m$ existem aplicações contínuas

$$\varphi_j^1 : L_j^1 \to X \qquad \text{e} \qquad \varphi_j^2 : L_j^2 \to X$$

tais que

$$\rho(\varphi_j^1, proj_X \circ \mu_1'|_{L_j^1}) < \delta \qquad \rho(\varphi_j^2, proj_X \circ \mu_2'|_{L_j^2}) < \delta$$

com

$$\varphi_j^1(L_j^1) \cap \varphi_j^2(L_j^2) = \emptyset.$$

Pela escolha de δ, $\varphi_j^i(L_j^i \cap L_q^i) = \emptyset$, $\forall q \in \{1, \cdots, m\} - \{j\}$, $i = 1, 2$, e, portanto, segue do Lema da Colagem que as aplicações

$$\varphi_1 = \bigcup_{j=1}^{m} \varphi_j^1 : L^1 \to X \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 = \bigcup_{j=1}^{m} \varphi_j^2 : L^2 \to X$$

são contínuas.

Além disso, por construção,

$$\rho(\varphi_1, proj_X \circ \mu_1') < \delta \qquad \text{e} \qquad \rho(\varphi_2, proj_X \circ \mu_2') < \delta,$$

e

$$\varphi_1(L^1) \cap \varphi_2(L^2) = \emptyset.$$

Neste caso aplicando o MET, temos que as aplicações $\varphi_i : L^i \to X$, $i = 1, 2$, estendem-se continuamente a $\frac{\varepsilon}{3}$-aproximações $\psi_i : D \times I \to X$ de $proj_X \circ \mu_i'$, $i = 1, 2$, respectivamente. Ainda,

$$\psi_1(L^1) \cap \psi_2(L^2) = \varphi_1(L^1) \cap \varphi_2(L^2) = \emptyset.$$

Nosso próximo passo agora é obtermos extensões de adequadas aproximações das aplicações $\psi_i|_{L^i}$, $i = 1, 2$, por aplicações que disjuntam todo o disco $D \times I$ e ainda permanecem $\frac{\varepsilon}{3}$-próximas a ψ_i para $i = 1, 2$, respectivamente.

Sejam

$$0 < \xi < \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{4}\rho\left(\psi_1(L^1), \psi_2(L^2)\right)\right\}$$

e $0 < \tau < \xi$ satisfazendo o MET para os compactos L^i, $i = 1, 2$, e para as aplicações $\psi_i : D \times I \to X$, $i = 1, 2$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
L^i &= \bigcup_{j=1}^{m} L^i_j = \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \left(\phi^i_j(K^i_j \times \{t_j\}) \cup \phi^i_{j+1}(K^i_{j+1} \times \{t_j\})\right)\right) \cup \phi^i_m(K^i_m \times \{t_m\}) \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \phi^i_{j+1}(K^i_{j+1} \times \{t_j\})\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \phi^i_j(K^i_j \times \{t_j\})\right) \\
&= \left(\bigcup_{j=2}^{m} \phi^i_j(K^i_j \times \{t_{j-1}\})\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \phi^i_j(K^i_j \times \{t_j\})\right) \\
&= \phi^i_1(K^i_1 \times \{t_1\}) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{m} \phi^i_j(K^i_j \times \{t_{j-1}, t_j\})\right) \\
&\subset \bigcup_{j=1}^{m} \phi^i_j(K^i_j \times \{t_{j-1}, t_j\}).
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\psi_i\left(D \times I - \bigcup_{j=1}^{m} \phi^i_j(K^i_j \times \{t_{j-1}, t_j\})\right) &\subset \psi_i(D \times I - L^i) \\
&\subset \psi_i(D \times I) - \psi_i(L^i) \\
&\subset X - \psi_i(L^i).
\end{aligned}$$

Daí, tomando $\eta > 0$ suficientemente pequeno, temos, desde que ψ_i é uma aplicação uniformemente contínua, que

$$\psi_i\left(D \times I - \bigcup_{j=1}^{m} \phi^i_j(K^i_j \times [t_{j-1} + \eta, t_j - \eta])\right) \subset N_\tau(\psi_i(L^i)), \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2.$$

Tomemos as aplicações contínuas

$$\psi_i \circ \phi^i_j|_{K^i_j \times [t_{j-1}+\eta, t_j-\eta]} : K^i_j \times [t_{j-1} + \eta, t_j - \eta] \to X, \ i = 1, 2.$$

Pela DHP, para cada $j = 1, \cdots, m$ e $i = 1, 2$, existem aplicações contínuas

$$\theta^i_j : K^i_j \times [t_{j-1} + \eta, t_j - \eta] \to X, \ i = 1, 2,$$

tais que $\rho\left(\theta^i_j, \psi_i \circ \phi_j|_{K^i_j \times [t_{j-1}+\eta, t_j-\eta]}\right) < \tau$ e

$$\left(\theta^1_j\right)_t (K^1_j) \cap \left(\theta^2_j\right)_t (K^2_j) = \emptyset, \ \forall t \in [t_{j-1} + \eta, t_j - \eta].$$

Desde que, pela escolha de τ, as aplicações

$$\underbrace{\theta^i_j \circ \left(\phi^i_j|_{K^i_j \times [t_{j-1}+\eta, t_j-\eta]}\right)^{-1}}_{g^i_j} : \underbrace{Im\left(\phi^i_j|_{K^i_j \times [t_{j-1}+\eta, t_j-\eta]}\right)}_{A^i_j} \to X$$

são tais que para todo $p, q \in \{1, \cdots, m\}$ com $p \neq q$ tem-se

$$g_p^i(A_p^i \cap A_q^i) = g_q^i(A_p^i \cap A_q^i) = \emptyset$$

então as aplicações

$$g_i = \bigcup_{j=1}^{m} g_j^i : \bigcup_{j=1}^{m} A_j^i \to X, \ i = 1, 2,$$

são contínuas pelo Lema da Colagem e, além disso, por construção distam menos que τ de $\psi_i|_{\bigcup_{j=1}^m A_j^i}$.

Logo, aplicando o MET, obtemos extensões contínuas $\theta_i : D \times I \to X$ de g_i, para cada $i = 1, 2$, respectivamente, tais que $\rho(\theta_i, \psi_i) < \xi$, $i = 1, 2$.

Além do mais, pela definição de θ_1 e θ_2 temos que

$$\theta_1 \left(\bigcup_{j=1}^{m} \phi_j^1 \left(K_1^i \times [t_{j-1} + \eta, t_j - \eta] \right) \right) \bigcap \theta_2 \left(\bigcup_{j=1}^{m} \phi_j^2 \left(K_2^i \times [t_{j-1} + \eta, t_j - \eta] \right) \right) = \emptyset$$

e, por outro lado, desde que $\rho\left(\psi_1(L^1), \psi_2(L^2)\right) > 4\xi$,

$$\bigcap_{l=1}^{2} \theta_l \left(D \times I - \bigcup_{j=1}^{m} \phi_j^l (K_l^i \times [t_{j-1} + \eta, t_j - \eta]) \right) \subset \bigcap_{l=1}^{2} N_{2\xi}\left(\psi_l(L_l)\right) = \emptyset.$$

Portanto,

$$\theta_1(D \times I) \cap \theta_2(D \times I) = \emptyset.$$

Seja $\mu_i'' = \theta_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i' : D \times I \to X \times \mathbb{R}$.

Desde que

$$\begin{aligned}
\rho(\mu_i', \psi_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i') &= \rho(proj_X \circ \mu_i' \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i', \psi_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i') \\
&= \max\{\rho(proj_X \circ \mu_i', \psi_i), \rho(proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i', proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i')\} \\
&= \rho(proj_X \circ \mu_i', \psi_i) \\
&< \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

e

$$\rho(\psi_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i', \theta_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i') = \rho(\psi_i, \theta_i) < \xi < \frac{\varepsilon}{3}$$

então

$$\begin{aligned}
\rho(\mu_i, \mu_i'') &\leq \rho(\mu_i, \mu_i') + \rho(\mu_i', \psi_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i') + \rho(\psi_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i', \theta_i \times proj_{\mathbb{R}} \circ \mu_i') \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Além do mais,

$$\begin{aligned}\mu_1''(D\times I)\cap\mu_2''(D\times I) &= (\theta_1(D\times I)\cap\theta_2(D\times I))\times\\ &\quad (proj_{\mathbb{R}}\circ\mu_1'(D\times I)\cap proj_{\mathbb{R}}\circ\mu_2'(D\times I))\\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

Segue, dessa forma, que, para $i=1,2$, μ_i'' fornece uma ε-aproximação contínua de μ_i, e além disso, essas aplicações têm imagens disjuntas.
Portanto, $X\times\mathbb{R}$ tem a DDP. $\square$

Em particular, em virtude do Teorema de Disjunção de Homotopias é imediato que:

Teorema 4.2.2 *Toda n-variedade generalizada resolúvel, com $n\geq 4$, com a DHP é um Fator de Variedade de Codimensão Um.*

Conforme a Observação 3.2.1, a classe dos espaços com a DHP é estritamente mais ampla que a classe dos espaços com a DADP. Portanto, a DHP é uma ferramenta mais forte que a DADP quando desejamos responder o Problema do Produto com uma Reta.

4.3 Detectando Fatores de Variedade de Codimensão Um com a DCP

Nesta Seção, mostramos que a DCP é uma propriedade suficiente e necessária para dectectar, no universo das variedades generalizadas resolúveis de dimensão maior ou igual a 4, os Fatores de Variedade de Codimensão Um. A principal referência para tal caracterização é [7], trabalho de R. Daverman e D. Halverson de 2006.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Disjunção de Concordâncias) *Seja X um espaço localmente compacto ANR com a DAP. Então X tem a DCP se, e somente se, $X\times\mathbb{R}$ tem a DDP.*

Demonstração:
($\Leftarrow$) Suponhamos que $X\times\mathbb{R}$ tem a DDP e sejam $f: D\times I\to X$ e $g: D\times I\to X$

aplicações contínuas e $\varepsilon > 0$.

Definamos as aplicações contínuas

$$f' : D \times I \to X \times I \qquad \text{por} \qquad f'(s,t) = (f(s,t),t)\,, \quad \forall (s,t) \in D \times I$$

e

$$g' : D \times I \to X \times I \qquad \text{por} \qquad g'(s,t) = (g(s,t),t)\,, \quad \forall (s,t) \in D \times I.$$

Como X tem a DAP então, tendo em vista o Lema 2.4.1, podemos admitir que

$$f'(D \times \partial I) \cap g'(D \times \partial I) = \emptyset$$

com $f'(D \times e) \subset X \times e$ e $g'(D \times e) \subset X \times e$, $\forall e \in \partial I$.

Notemos que, como $X \times (0,1)$ tem a DDP e

$$f'\left(D \times (0,1)\right) \subset X \times (0,1) \quad \text{e} \quad g'\left(D \times (0,1)\right) \subset X \times (0,1)$$

então existem ε-aproximações contínuas

$$F' : D \times (0,1) \to X \times (0,1) \quad \text{e} \quad G' : D \times (0,1) \to X \times (0,1)$$

de $f'|_{D \times (0,1)}$ e $g'|_{D \times (0,1)}$, respectivamente, tais que

$$F'\left(D \times (0,1)\right) \cap G'\left(D \times (0,1)\right) = \emptyset.$$

Assim,

$$F = F' \cup f'|_{D \times \partial I} : D \times I \to X \times I$$

e

$$G = G' \cup g'|_{D \times \partial I} : D \times I \to X \times I$$

são concordâncias de caminho tais que

$$\rho\left(f, proj_X F\right) = \rho\left(proj_X f', proj_X F\right) \leq \rho(f', F) < \varepsilon$$

e

$$\rho\left(g, proj_X G\right) < \varepsilon.$$

($\Rightarrow$) Suponhamos que X tem a DCP e sejam $\mu_1 : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ e $\mu_2 : D \times I \to X \times \mathbb{R}$ aplicações contínuas e $\varepsilon > 0$.

Tendo em vista o Lema 4.1.1, então, passando a uma aproximação se necessário, admitiremos que μ_1 e μ_2 são aplicações topográficas. A topografia de μ_i será denotada por Υ^i com elementos dados como na Definição 4.1.1 de uma topografia sobre $D \times I$ com o índice i sobrescrito, onde $i = 1, 2$.

Subdividindo os intervalos $\left\{J_j^i\right\}_{j=1}^{m_i}$, onde $i = 1, 2$, se necessário, podemos sem perda de generalidade assumir que eles são os mesmos (isto é, $m = m_1 = m_2$ e, para cada $j = 0, \cdots, m$, $t_j = t_j^1 = t_j^2$).

As aplicações projeções serão denotadas por $proj_X : X \times \mathbb{R} \to X$ e $proj_{\mathbb{R}} : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Afirmação 4.3.1 *Para todo $\eta > 0$ existem η-aproximações μ_1' de μ_1 e μ_2' de μ_2 tais que*

$$\mu_1'\left(\bigcup_{j=1}^{m} L_j^1\right) \cap \mu_2'\left(\bigcup_{j=1}^{m} L_j^2\right) = \emptyset.$$

Demonstração da Afirmação 4.3.1:

Seja $\eta > 0$.

Notemos, inicialmente, que se $p \neq q$ e $p, q \in \{1, \cdots, m-1\}$ então

$$\begin{aligned}
\mu_i(L_p^i \cap L_q^i) &\subset \mu_i(L_p^i) \cap \mu_i(L_q^i) \\
&= \mu_i\left(\phi_p^i(K_p^i \times \{t_p\}) \cup \phi_{p+1}^i(K_{p+1}^i \times \{t_p\})\right) \cap \\
&\quad\ \mu_i\left(\phi_q^i(K_q^i \times \{t_q\}) \cup \phi_{q+1}^i(K_{q+1}^i \times \{t_q\})\right) \\
&\subset X \times \{t_p\} \cap X \times \{t_q\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

e se $p \in \{1, \cdots, m-1\}$ então

$$\mu_i(L_p^i \cap L_m^i) \subset X \times \{t_p\} \cap X \times \{t_m\} = \emptyset$$

e, portanto, $\mu_i(L_p^i \cap L_q^i) = \emptyset$, para todo $\forall p \neq q$ em $\{1, \cdots, m\}$ e $i = 1, 2$.

Portanto, a Afirmação 4.3.1 segue aplicando o MET como na demonstração do Teorema de Disjunção de Homotopias.

Levando em conta um tal fato, assumiremos, sem perda de generalidade, que

$$\mu_1\left(\bigcup_{j=1}^{m} L_j^1\right) \cap \mu_2\left(\bigcup_{j=1}^{m} L_j^2\right) = \emptyset.$$

Uma vez que para cada $j = 1, \cdots, m$ os pares de aplicações

$$\mu_1\phi_j^1 : K_j^1 \times J_j \to X \times J_j \qquad \text{e} \qquad \mu_2\phi_j^2 : K_j^2 \times J_j \to X \times J_j$$

preservam níveis, então, pela Proposição 2.4.1, existem ε-aproximações

$$\psi_j^1 : K_j^1 \times J_j \to X \times J_j \qquad \text{e} \qquad \psi_j^2 : K_j^2 \times J_j \to X \times J_j$$

de $\mu_1\phi_j^1$ e $\mu_2\phi_j^2$, respectivamente, tais que

$$\psi_j^1\left(K_j^1 \times J_j\right) \cap \psi_j^2\left(K_j^2 \times J_j\right) = \emptyset.$$

Agora, $\forall j \in \{1, \cdots, m\}$,

$$\mu_1\phi_j^1\left(K_j^1 \times \partial J_j\right) \cap \mu_2\phi_j^2\left(K_j^2 \times \partial J_j\right) \subset \mu_1\left(L_j^1 \cup L_{j-1}^1\right) \cap \mu_2\left(L_j^2 \cup L_{j-1}^2\right) = \emptyset$$

então, também pela Proposição 2.4.1, podemos assumir que

$$\psi_j^i|_{K_j^i \times \partial J_j} = \mu_i\phi_j^i|_{K_j^i \times \partial J_j}, \quad i = 1, 2.$$

Sejam, para cada $i = 1, 2$ e $j = 1, \cdots, m$,

$$h_j^i : \phi_j^i\left(K_j^i \times \partial J_j\right) \to X \times \partial J_j \subset X \times \mathbb{R}$$

dada por

$$h_j^i\left(\phi_j^i(x,t)\right) = \mu_i\left(\phi_j^i(x,t)\right)$$

e

$$g_j^i = \psi_j^1 \circ \left(\phi_j^i|_{K_j^i \times intJ_j}\right)^{-1} : \phi_j^i\left(K_j^i \times intJ_j\right) \to X \times \mathbb{R}.$$

Neste caso, as aplicações

$$\mu_1' = \bigcup_{j=1}^m g_j^1 \cup \bigcup_{j=1}^m h_j^1 : D \times I \to X \times \mathbb{R}$$

e

$$\mu_2' = \bigcup_{j=1}^m g_j^2 \cup \bigcup_{j=1}^m h_j^2 : D \times I \to X \times \mathbb{R}$$

são ε-aproximações de μ_1 e μ_2, respectivamente, tais que

$$\mu_1'(D \times I) \cap \mu_2'(D \times I) = \emptyset.$$

□

Em particular, o seguinte resultado é imediato a partir do Teorema de Disjunção de Concordâncias:

Teorema 4.3.2 *Seja X uma n-variedade generalizada resolúvel, com $n \geq 4$. Então, X tem a DCP se, e somente se, X é um Fator de Variedade de Codimensão Um.*

Como consequência dos Teoremas de Disjunção de Homotopias e Concordâncias, temos que:

Corolário 4.3.1 *Seja X uma n-variedade generalizada, $n \geq 4$. Se X tem a DHP então X tem a DCP.*

Demonstração: Pelo Teorema de Disjunção de Homotopias, dada uma n-variedade generalizada X, $n \geq 4$, com a DHP então $X \times \mathbb{R}$ tem a DDP. Nesse caso, pelo Teorema de Disjunção de Concordâncias, X tem a DCP. □

Portanto, todo espaço com a DHP tem a DCP. Atualmente, ainda é desconhecido se a DHP e a DCP são propriedades equivalentes.

Capítulo 5

Detectando a DHP com a P2MP

Vimos no Capítulo 4 que, para $n \geq 4$, toda n-variedade generalizada resolúvel com a DHP é um Fator de Variedade de Codimensão Um. Também, no Capítulo 3, verificamos que nem todo espaço ANR localmente compacto com a DHP tem a DADP. Motivados por tais fatos, neste Capítulo estudamos a Propriedade de Profusão de 2-Variedades, a qual funciona como um critério, independente da DADP, para detectar a DHP em variedades generalizadas.

5.1 Estratégia para a Disjunção de Homotopias

Visando mostrar o resultado principal desse Capítulo, nesta Seção damos uma estratégia para disjunção de homotopias.

Lema 5.1.1 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $\mathcal{Q}$ o conjunto dos homeomorfismos de X em X cuja restrição a ∂X é a aplicação identidade. Então a aplicação*

$$\begin{gathered} \overline{\rho}\ : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \overline{\rho}(\psi, \phi) = \rho(\psi, \phi) + \rho(\psi^{-1}, \phi^{-1}) \end{gathered}$$

onde ρ é a métrica usual induzida por $C(X, X)$ em $\mathcal{Q}$, define uma métrica segundo a qual $\mathcal{Q}$ é um espaço métrico completo.

Demonstração: Denotaremos $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, X)$. Notemos, inicialmente, que $\overline{\rho}$ define uma métrica já que dados ψ, ϕ e θ em $\mathcal{Q}$ então

(i)

$$\overline{\rho}(\psi,\phi)=0 \iff \rho(\psi,\phi)=\rho(\psi^{-1},\phi^{-1})=0 \iff \psi=\phi,$$

(ii)

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\psi,\phi) &= \rho(\psi,\phi)+\rho(\psi^{-1},\phi^{-1})\\ &\leq \rho(\psi,\theta)+\rho(\theta,\phi)+\rho(\psi^{-1},\theta^{-1})+\rho(\theta^{-1},\phi^{-1})\\ &= \overline{\rho}(\psi,\theta)+\overline{\rho}(\theta,\phi)\end{aligned}$$

(iii)

$$\overline{\rho}(\psi,\phi) = \rho(\psi,\phi)+\rho(\psi^{-1},\phi^{-1})=\rho(\phi,\psi)+\rho(\phi^{-1},\psi^{-1})=\overline{\rho}(\phi,\psi).$$

Além disso, visto que X é um subconjunto fechado do espaço completo $\mathbb{R}^n$, então X é completo. Portanto, como X é compacto, temos que $\mathcal{C}$ é completo com a métrica usual ρ. Mostraremos o conjunto $(\mathcal{Q},\rho)$ é fechado em $(\mathcal{C},\rho)$. Para tanto, tomemos uma sequência convergente

$$f_n \longrightarrow f\in\mathcal{C}$$

tal que $f_n\in\mathcal{Q}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Como $(f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então é convergente em $\mathcal{C}$.

Seja

$$f^{-1}=\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}.$$

Temos que para cada $x\in X$,

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f)(x) &= f^{-1}(f(x))\\ &= f^{-1}(\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x))\\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x))\\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}}(\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(f_n(x)))\\ &= x\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$(f\circ f^{-1})(x)=x.$$

Portanto, f é uma bijeção com inversa f^{-1}, e como $f, f^{-1} \in \mathcal{C}$, um homeomorfismo. Além do mais, para qualquer $x \in X$ tem-se

$$\begin{aligned} f|_{\partial X}(x) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n|_{\partial X}(x) \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} id_{\partial X}(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Logo, $f \in \mathcal{Q}$ e $(\mathcal{Q}, \rho)$ é fechado em $(\mathcal{C}, \rho)$. Segue que $(\mathcal{Q}, \rho)$ é completo.

Seja $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{Q}, \overline{\rho})$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então

$$\overline{\rho}(\psi_n, \psi_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, neste caso,

$$\rho(\psi_n^{-1}, \psi_m^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \rho(\psi_n, \psi_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\psi_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $(\mathcal{Q}, \rho)$.

Dessa forma,

$$\psi_n \longrightarrow \psi \quad \text{e} \quad \psi_n^{-1} \longrightarrow \psi^{-1}$$

em $(\mathcal{Q}, \rho)$, onde $\psi \in \mathcal{Q}$. Agora, se $n \geq n_0$ então

$$\overline{\rho}(\psi_n, \psi) = \rho(\psi_n, \psi) + (\psi_n^{-1}, \psi^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e, daí, $\psi_n \longrightarrow \psi$ em $(\mathcal{Q}, \overline{\rho})$. □

Observação 5.1.1 *Dizemos que um subsconjunto A de um espaço topológico X é um* conjunto G_δ em X *se é uma intersecção enumerável de conjuntos abertos de X. Analogamente, A é um* conjunto F_σ em X *se é uma união enumerável de conjuntos fechados de X.*

Proposição 5.1.1 *Sejam $A \subset intD \times I$ um subconjunto fechado 0-dimensional de $D \times I$ e $\mathcal{Q}$ o conjunto dos homeomorfismos de $D \times I$ em $D \times I$ cuja restrição a $\partial(D \times I)$ é a aplicação identidade. Então*

$$\mathcal{Q}^* = \{\psi \in \mathcal{Q} \ / \ proj \circ \psi|_A \ \textit{é injetora}\}$$

é um conjunto denso G_δ em $\mathcal{Q}$.

Demonstração: Pelo Lema 5.1.1, $(\mathcal{Q},\overline{\rho})$ é um espaço métrico completo com respeito a métrica

$$\overline{\rho}\ :\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$\overline{\rho}(\psi,\phi)=\rho(\psi,\phi)+\rho(\psi^{-1},\phi^{-1})$$

onde ρ é a métrica da convergência uniforme induzida por $\mathcal{C}(D\times I,D\times I)$ no subespaço $\mathcal{Q}$.

Então, pelo Teorema da Categoria de Baire, $(\mathcal{Q},\overline{\rho})$ é um espaço de Baire.

Seja, para cada $m\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_m=\left\{\psi\in\mathcal{Q}\ /\ diam\ \left(proj^{-1}(t)\cap\psi(A)\right)<\frac{1}{m},\forall t\in I\right\}.$$

Afirmação 5.1.1 $\mathcal{Q}_m$ *é denso em* $(\mathcal{Q},\overline{\rho})$ *para cada* $m\in\mathbb{N}$.

Demonstração da Afirmação 5.1.1:

Fixemos $m\in\mathbb{N}$ e tomemos quaisquer $\psi\in\mathcal{Q}$ e $\varepsilon>0$.

Notemos, inicialmente, que a continuidade uniforme de ψ^{-1} garante a existência de $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$\psi^{-1}\left(B\left((x,t),\frac{\delta}{2}\right)\right)\subset B\left(\psi^{-1}(x,t),\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

qualquer que seja $(x,t)\in D\times I$.

Em particular, desde que $diam\ B\left(\psi^{-1}(x,t),\frac{\varepsilon}{4}\right)=\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall(x,t)\in D\times I$, e levando-se em conta que dado qualquer subconjunto W de $D\times I$ tal que $diam\ W<\delta$ então existe $(x_0,t_0)\in D\times I$ tal que $W\subset B\left((x_0,t_0),\frac{\delta}{2}\right)$ concluímos que $diam\ \psi^{-1}(Z)<\frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $diam\ Z<\delta$, qualquer que seja $Z\subset D\times I$.

Seja $\{B_i\}_{i\in I}$ uma cobertura de A por bolas abertas com diâmetro menor que δ e tal que $B_i\subset intD\times I$, $\forall i\in I$. A 0-dimensionalidade de A garante a existência de um refinamento $\left\{A'_j\right\}_{j\in J}$ de $\{B_i\}_{i\in I}$ tal que $A'_j\subset intD\times I$, $\forall j\in J$, e ainda de tal maneira que para cada $a\in A$ existe um único $j_0\in J$ para o qual $a\in A'_{j_0}$. Notemos que, nesse caso, $A'_i\cap A'_j\cap A=\emptyset$ sempre que $i\neq j,\ \ i,j\in J$.

Extraíamos, usando a compacidade de A, uma subcoleção finita $\{A_j\}_{j=1}^k$ de $\left\{A'_j\right\}_{j\in J}$ tal que $A\subset\cup_{j=1}^k A_j$.

Para cada $j = 1, \cdots, k$ escolhamos

$$(x_j, t_j) \in intA_j$$

e tal que $t_i \neq t_j$ se $i \neq j$.

Seja

$$0 < \xi < \frac{1}{3} \min_{\substack{i \neq j \\ i,j \in \{1,\cdots,k\}}} \left\{ |t_i - t_j|, \frac{1}{2m}, \delta \right\}.$$

Definamos, usando colagem, um homeomorfismo

$$\phi : D \times I \to D \times I$$

tal que

$$\phi|_{D \times I - \cup_{j=1}^{k} A_j} = Id$$

e, para cada $j = 1, \cdots, k$,

$$\phi(A \cap A_j) \subset B\left((x_j, t_j), \xi\right)$$

e ainda de tal forma que

$$proj \circ \phi(A_j) \cap proj \circ \phi(A_j) = \emptyset$$

sempre que $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, k$.

Tomemos $\psi' = \phi\psi$.

Neste caso, por construção $\psi' \in \mathcal{Q}_m$. Notemos agora que

$$\begin{aligned} \rho(\phi\psi, \psi) &= \sup_{\psi(x) \in \psi(D \times I) = D \times I} \{\rho\left(\phi\left(\psi(x)\right), \psi(x)\right)\} \\ &= \sup_{y \in D \times I} \{\rho\left(\phi\left(y\right), y\right)\} \\ &= \rho\left(\phi, Id\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho(\psi^{-1}\phi^{-1}, \psi^{-1}) &= \sup_{x \in D \times I} \left\{\rho\left(\psi^{-1}\phi^{-1}(x), \psi^{-1}(x)\right)\right\} \\ &= \sup_{x \in D \times I} \left\{\rho\left(\psi^{-1}\phi^{-1}(x), \psi^{-1}\phi(\phi^{-1}(x))\right)\right\} \\ &= \sup_{y \in D \times I} \left\{\rho\left(\psi^{-1}(y), \psi^{-1}\phi(y)\right)\right\} \\ &= \rho\left(\psi^{-1}, \psi^{-1}\phi\right). \end{aligned}$$

Além disso, como $\rho(\phi, Id) < \delta$ então $\rho(\psi^{-1}, \psi^{-1}\phi) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\psi', \psi) &= \rho(\phi\psi, \psi) + \rho(\psi^{-1}\phi^{-1}, \psi^{-1}) \\ &= \rho(\phi, Id) + \rho(\psi^{-1}, \psi^{-1}\phi) \\ &< \delta + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

e, daí, $\mathcal{Q}_m$ é denso em $\mathcal{Q}$.

Segue a Afirmação 5.1.1.

Afirmação 5.1.2 *$\mathcal{Q}_m$ é aberto em $(\mathcal{Q}, \overline{\rho})$ para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração da Afirmação 5.1.2:

Fixemos $m \in \mathbb{N}$.

Seja $\psi \in \mathcal{Q}_m$. Então para cada $t \in I$, existe $\delta_t > 0$ tal que

$$diam\left(proj^{-1}([t - \delta_t, t + \delta_t]) \cap \psi(A)\right) < \frac{1}{m} \tag{5.1}$$

Com efeito,

Suponha que existe $t_0 \in I$ tal que para cada $\delta > 0$

$$diam\left(proj^{-1}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \cap \psi(A)\right) \geq \frac{1}{m}.$$

Assim, tomando sucessivamente $\delta_i = \frac{1}{i}$, onde $i \in \mathbb{Z}^+$, obtemos pontos

$$(x_i, t_i), (x_i', t_i') \in proj^{-1}([t_0 - \delta_i, t_0 + \delta_i]) \cap \psi(A) \subset \psi(A)$$

tais que

$$\rho((x_i, t_i), (x_i', t_i')) \geq \frac{1}{m}.$$

Ora, $\psi(A)$ é compacto e, portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$(x_i, t_i) \to (x, t_o) \in \psi(A)$$

$$(x_i', t_i') \to (x', t_o) \in \psi(A).$$

Pela continuidade da função distância vem que $\rho((x,t_0),(x',t_0)) \geq \frac{1}{m}$ e, então,

$$diam \quad \left(proj^{-1}(t_0) \cap \psi(A)\right) \geq \frac{1}{m},$$

o que é uma contradição. Portanto não existe um tal t_0 em I e, daí, vale (5.1).

Tomemos um número de Lebesgue $2\delta > 0$ para a cobertura $\{(t-\delta_t, t+\delta_t)\}_{t\in I}$ de I, onde δ_t é dado como em (5.1) para cada $t \in I$. Neste caso,

$$\sigma = \sup\left\{diam \ \left(proj^{-1}([t-\delta, t+\delta]) \cap \psi(A)\right)\right\} < \frac{1}{m} \tag{5.2}$$

Com efeito,

Suponha que $\sigma = \frac{1}{m}$. Então existem sequências $\{(x_i,t_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{(x_i',t_i')\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que

$$(x_i,t_i),(x_i',t_i') \in proj^{-1}([t_0-\delta, t_0+\delta]) \cap \psi(A) \subset \psi(A),$$

tal que

$$\rho((x_i,t_i),(x_i',t_i')) \to \frac{1}{m} \qquad \text{e} \qquad |t_i - t_i'| < 2\delta.$$

Uma vez que $\psi(A)$ é compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$(x_i,t_i) \to (x,t) \in \psi(A)$$

$$(x_i',t_i') \to (x',t') \in \psi(A).$$

Ora, a continuidade da função distância implica que

$$\rho((x,t),(x',t')) = \frac{1}{m} \qquad \text{e} \qquad |t-t'| < 2\delta.$$

Neste caso, denotando $t^* = \dfrac{t+t'}{2}$, a escolha de $\delta > 0$ implica que

$$[t^*-\delta, t^*+\delta] \subset [t^*-\delta_{t^*}, t^*+\delta_{t^*}]$$

e, portanto,

$$diam\left(proj^{-1}([t^*-\delta, t^*+\delta]) \cap \psi(A)\right) < \frac{1}{m},$$

o que é uma contradição. Logo, vale (5.2).

Sejam $\psi \in \mathcal{Q}_m$, δ e σ satisfazendo (5.2). Então tomando $0 < \varepsilon < \min\left\{\delta, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \sigma\right)\right\}$ vem que se $\psi' \in B(\psi, \varepsilon)$ então, para cada $t \in I$,

$$\begin{aligned} diam\left(proj^{-1}(t) \cap \psi(A)\right) &\leq diam\left(N_\varepsilon\left(proj^{-1}([t-\delta, t+\delta]) \cap \psi(A)\right)\right) \\ &\leq \sigma + 2\varepsilon \\ &< \sigma + \frac{1}{m} - \sigma \\ &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

e, portanto, $\psi' \in \mathcal{Q}_m$.

Segue a Afirmação 5.1.2.

Afirmação 5.1.3 $\mathcal{Q}^* = \bigcap \mathcal{Q}_m$

Demonstração da Afirmação 5.1.3:

Seja $\psi \in \mathcal{Q}^*$ e $t \in I$. Se existe $x \in D$ tal que $(x,t) \in \psi(A)$ então, desde que $proj|_{\psi(A)}$ é injetora, $proj^{-1}(t)$ é um conjunto unitário e se $(x,t) \notin \psi(A)$, qualquer que seja $x \in D$, então $proj^{-1}(t) \cap \psi(A) = \emptyset$. Neste caso,

$$diam\left(proj^{-1}(t) \cap \psi(A)\right) < \frac{1}{m}, \quad \forall t \in I, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, tomando $\psi \in \bigcap \mathcal{Q}_m$ então $diam\,(proj^{-1}(t) \cap \psi(A)) = 0, \quad \forall t \in I$. Neste caso, dado qualquer $t \in I$ então ou $(proj^{-1}(t) \cap \psi(A)) = \emptyset$ ou $(proj^{-1}(t) \cap \psi(A))$ é um conjunto unitário. Logo, $proj \circ \psi|_A$ é injetora.

Segue a Afirmação 5.1.3.

Logo, pelo Teorema da Categoria de Baire, $\mathcal{Q}^*$ é um denso G_δ em $\mathcal{Q}$, como queríamos demonstrar. □

Observação 5.1.2 *Como a aplicação identidade $Id : D \times I \to D \times I$ é um elemento de $\mathcal{Q}$ então, $\forall \varepsilon > 0$, existe uma ε-aproximação contínua $\psi : D \times I \to D \times I$ de Id tal que ψ é um homeomorfismo, $\psi|_{\partial(D\times I)} = Id$ e $proj \circ \psi|_A$ é injetora.*

Exemplo 5.1.1 *A conclusão da Proposição 5.1.1 vale se $A \subset intD \times I$ é um conjunto 0-dimensional do tipo F_σ. Para ver isso, suponhamos que $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, onde cada A_j é* *um subconjunto fechado* 0*-dimensional de* $D \times I$*. Pela demonstração da Proposição 5.1.1,* $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Q}_j^* = \{\psi \in \mathcal{Q} \ \ / \ \ proj \circ (\psi|_{A_j}) \quad \acute{e} \quad injetora\}$$

é um denso G_δ *em* $\mathcal{Q}$ *e, desde que, para cada* $j \in \mathbb{N}$*,* $\mathcal{Q}_j^*$ *é aberto, então*

$$\mathcal{Q}^* = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_j^*$$

é também um denso G_δ *em* $\mathcal{Q}$*.*

5.2 A propriedade de Profusão de 2-Variedades

Nesta Seção, estudamos a Propriedade de Profusão de 2-Variedades (P2MP), a qual, como mostraremos, funciona como um critério independente da DADP para detectar a DHP em variedades generalizadas. A P2MP foi sugerida por D. Halverson em sua tese de doutorado [15] e também no artigo [14] de sua autoria. Esse capítulo é uma abordagem dos resultados obtidos por D. Halverson em tais trabalhos.

Definição 5.2.1 *Um espaço* X *tem a Propriedade de Profusão de* 2*-Variedades (P2MP - "Plentiful* 2*-Manifolds Property") se cada caminho* $\alpha : I \to X$ *pode ser, qualquer que seja* $\varepsilon > 0$*,* ε*-aproximado por um caminho* $\alpha' : I \to N \subset X$*, onde* N *é uma* 2*-variedade mergulhada em* X*.*

Nosso próximo objetivo é mostrar que toda n-variedade generalizada, $n \geq 4$, com a P2MP tem a DHP. Para tanto, começamos com o seguinte Teorema, o qual é uma consequência direta do Teorema da Dualidade para variedades generalizadas:

Teorema 5.2.1 *Seja* X *uma* n*-variedade generalizada, com* $n \geq 4$*, e* N *uma* 2*-variedade mergulhada em* X *como um subconjunto fechado. Então,*

(i) *Cada caminho* $\alpha : I \to X$ *pode ser,* $\forall \varepsilon > 0$*,* ε*-aproximado por um caminho* $\alpha' : I \to X$ *tal que* $\alpha'(I) \cap N = \emptyset$*. Dizemos que* α' *omite* N*.*

(ii) *Cada aplicação contínua* $g : D \times I \to X$ *pode ser,* $\forall \varepsilon > 0$*,* ε*-aproximada por uma aplicação contínua* g' *tal que* $(g')^{-1}(N)$ *é* 0*-dimensional em* $D \times I$*.*

Demonstração:

(i) Seja $\alpha : I \to X$ um caminho e $\varepsilon > 0$.

Tomemos uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $\alpha(I)$ cujos elementos são conexos por caminho e têm diâmetro menor que ε. Desde que um aberto em uma variedade generalizada é uma variedade generalizada, então, usando o Teorema 1.7.2 para cada aberto $U \in \mathcal{U}$ vale que

$$\breve{H}_c^{n-i}(N \cap U) \cong H_i(U, U - N), \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

e, daí, tomando a sequência exata do par $(U, U - N)$,

$$0 \overset{(*)}{\cong} \breve{H}_c^{n-1}(N \cap U) \cong H_1(U, U - N) \to \tilde{H}_0(U - N) \to \tilde{H}_0(U) \cong 0,$$

onde para ver o isomorfismo $(*)$ usamos o argumento de Teoria de Dimensão do Teorema 1.4.4. Neste caso, a exatidão da sequência implica que $\tilde{H}_0(U - N) \cong 0$ e, portanto, $U - N$ é conexo por caminhos.

Seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue para $\mathcal{U}$ e escolhamos uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

tal que *diam* $\alpha([t_{i-1}, t_i]) < \delta$, para cada $i = 1, \cdots, m$. Dessa maneira, existe, para cada $i = 1, \cdots, m$, um aberto $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$.

Escolhamos

$$\begin{aligned} x_0 &\in U_1 - N \\ x_i &\in U_i \cap U_{i+1} - N, \quad i = 1, \cdots, m-1 \\ x_m &\in U_m - N. \end{aligned}$$

Ora, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ desde que $\alpha(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$, qualquer que seja $i = 1, \cdots, m-1$, e portanto, ligando x_i a x_{i+1} por um caminho cuja imagem está contida em $U_i - N$ e depois colando continuamente esses caminhos, obtemos um caminho

$$\alpha' : I \to X$$

tal que $\alpha'(t_i) = x_i$ e $\alpha'([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i - N$ para $i = 1, \cdots, m-1$.

Além do mais, por construção

$$\rho(\alpha, \alpha') < \varepsilon \ \text{ e } \ \alpha'(I) \cap N = \emptyset.$$

(ii) Denotemos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}(D \times I, X)$ o espaço das aplicações contínuas de $D \times I$ em X e seja, para cada $q \in \mathbb{Q}$,

$$\mathcal{Q}_q = \{h \in \mathcal{C} \ \ / \ \ h(D \times \{q\} \cup \{q\} \times I) \cap N = \emptyset\}.$$

Dados $q \in \mathbb{Q}$, $h \in \mathcal{Q}_q$ e $0 < \varepsilon \leq \rho(h(D \times \{q\} \cup \{q\} \times I), N)$ então $B(h, \varepsilon) \subset \mathcal{Q}_q$ e, portanto, $\mathcal{Q}_q$ é aberto em $\mathcal{C}$ para cada $q \in \mathbb{Q}$.

Afirmamos que $\mathcal{Q}_q$ é denso em $\mathcal{C}$, $\forall q \in \mathbb{Q}$.

Com efeito,

Sejam $q \in \mathbb{Q}$, $h \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$ e um $\delta > 0$ dado pelo MET para h, ε e o compacto $D \times \{q\} \cup \{q\} \times I$ de $D \times I$.

Tomemos os caminhos contínuos

$$\begin{array}{rccc} h_1 : & D & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & h(t, q) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} h_2 : & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & h(q, t). \end{array}$$

Pela parte (i), existem δ-aproximações contínuas h_1' e h_2' de h_1 e h_2, respectivamente, tais que

$$h_1'(D) \cap N = \emptyset$$

e

$$h_2'(D) \cap N = \emptyset.$$

Definamos a aplicação contínua

$$h' : D \times \{q\} \cup \{q\} \times I \to X$$

por

$$\begin{array}{rcl} h'(t, q) & = & h_1'(t), \quad \text{se} \ \ t \neq q; \\ h'(q, t) & = & h_2'(t), \quad \text{se} \ \ t \neq q; \\ h'(q, q) & = & h_1'(q). \end{array}$$

Desde que

$$\rho(h\mid_{D \times \{q\} \cup \{q\} \times I}, h') < \delta$$

então, aplicando o MET, obtemos uma extensão contínua h'' de h' tal que

$$\rho(h, h'') < \varepsilon.$$

Também,

$$h''(D \times \{q\} \cup \{q\} \times I) \cap N = \emptyset.$$

Segue que $\mathcal{Q}_q$ é um aberto denso em $\mathcal{C}$, qualquer que seja $q \in \mathbb{Q}$.

Assim, pelo Teorema da Categoria de Baire, o conjunto

$$\mathcal{Q}^* = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathcal{Q}_q = \left\{ h \in \mathcal{C} \ \ / \ \ h\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (D \times \{q\} \cup \{q\} \times I) \right) \cap N = \emptyset \right\}$$

é denso em $\mathcal{C}$.

Neste caso, dada uma aplicação $g : D \times I \to X$ e $\varepsilon > 0$, existe uma ε-aproximação contínua $g' : D \times I \to X$ de g tal que

$$g'\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (D \times \{q\} \cup \{q\} \times I) \right) \cap N = \emptyset.$$

Segue que $(g')^{-1}(N)$ está contido no conjunto 0-dimensional $D \times I \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^2$ e, portanto, assumindo, sem perda de generalidade, que $(g')^{-1}(N) \neq \emptyset$, temos que

$$\dim (g')^{-1}(N) = 0.$$

□

Lema 5.2.1 *Sejam $g : D \times I \to X$ e $f : D \times I \to N \subset X$ aplicações contínuas, onde X é uma n-variedade generalizada com $n \geq 4$ e N é uma 2-variedade mergulhada em X. Então, f e g podem ser, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, ε-aproximadas por homotopias disjuntas.*

Demonstração: Assumamos, sem perda de generalidade, que $g^{-1}(N)$ é 0-dimensional (tendo em vista o Teorema 5.2.1) e que f é um p.l. mergulho sobre uma triangulação finita de $D \times I$.

Notemos que, como $g^{-1}(f(D \times I)) \subset g^{-1}(N)$, então dim $g^{-1}(f(D \times I)) = 0$. Seja $Id : D \times I \to D \times I$ a aplicação identidade e $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 5.1.1 existe um homeomorfismo $\psi : D \times I \to D \times I$ tal que $proj \circ \psi|_{g^{-1}(f(D\times I))}$ é injetora e $\rho(\psi, Id) < \frac{\varepsilon}{2}$. Em particular,

$$\begin{aligned} \rho(g\psi, g) &= \rho(\psi^{-1}, Id) \\ &= \rho(\psi, Id) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Definamos $g^* = g\psi^{-1}$.

Ora, $(g^*)^{-1}(f(D \times I)) = \psi g^{-1}(f(D \times I))$. Então, $\psi|_{(g^*)^{-1}(f(D\times I))}$ é injetora e, portanto, pelo Lema da Aplicação Fechada, um mergulho.

Seja

$$D \times I = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$$

onde σ_i é uma 2-célula tal que $f|_{\sigma_i}$ é um mergulho. Denotemos, para cada $i = 1, \cdots, m$,

$$A_i = proj\left[(g^*)^{-1}\left(f(\sigma_i)\right)\right].$$

Pelo Lema da Aplicação Fechada temos, também, que $proj^{-1}|_{A_i}$ é um mergulho.

Segue que

$$\phi_i = proj \circ f^{-1} g^* \circ proj^{-1} : A_i \to I$$

é uma aplicação contínua.

Como ϕ_i é definida sobre um subconjunto 0-dimensional fechado de I, então o gráfico de ϕ_i, denotado por $\Gamma(\phi_i)$, é um conjunto fechado 0-dimensional de I^2.

Agora, como

$$PPIN(f, g^*) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma(\phi_i)$$

segue que

$$\dim PPIN(f, g^*) = 0.$$

Portanto, pelo Lema da Reparametrização, existem $\frac{\varepsilon}{2}$-aproximações contínuas f' e g' de f e g^*, respectivamente, tais que

$$f'_t(D) \cap g'_t(D) = \emptyset, \ \forall t \in I,$$

com

$$\rho(f, f') < \varepsilon \ \text{ e } \ \rho(g, g') < \varepsilon.$$

□

Teorema 5.2.2 *Toda n-variedade generalizada, com $n \geq 4$, que possui a P2MP tem a DHP.*

Demonstração: Sejam X uma n-variedade generalizada, onde $n \geq 4$, com a P2MP, $f : D \times I \to X$ e $g : D \times I \to X$ homotopias e $\varepsilon > 0$.
Tomemos uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

de I tal que

$$\rho(f_t, f_s) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \rho(g_t, g_s) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $t, s \in [t_{i-1}, t_i]$, qualquer que seja $i \in \{1, \cdots, m\}$.
Sejam $\eta > 0$ qualquer e $\beta > 0$ dado pelo MET para as aplicações f, g e o compacto $D \times \{t_0, \cdots, t_m\}$ de $D \times I$.
Como, pelo Corolário 2.2.2, X tem a DAP, existem β-aproximações contínuas

$$f' : D \times \{t_0, \cdots, t_m\} \to X \quad \text{e} \quad g' : D \times \{t_0, \cdots, t_m\} \to X$$

de $f|_{D \times \{t_0, \cdots, t_m\}}$ e $g|_{D \times \{t_0, \cdots, t_m\}}$, respectivamente, tais que

$$f'_{t_i}(D) \cap g'_{t_j}(D) = \emptyset$$

qualquer que seja $i, j \in \{1, \cdots, m\}$. Aplicando o MET, obtemos extensões contínuas de f' e g' a $D \times I$ que são η-próximas de f e g, respectivamente.
Portanto, podemos assumir por simplicidade que

$$f_{t_i}(D) \cap g_{t_j}(D) = \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, m\}.$$

Também, visto que X tem a P2MP, assumiremos

$$f_{t_i}(D) \subset N_i \quad \text{e} \quad g_{t_j}(D) \subset T_j$$

onde $i, j \in \{1, \cdots, m\}$ e N_i e T_j são 2-variedades mergulhadas em X.
Para cada $k = 1, \cdots, m$, definamos as aplicações

$$\alpha_k : D \times I \to N_k \subset X \quad \text{por } (\alpha_k)_t = f_{t_{k-1}},$$

$$\beta_k : D \times I \to T_k \subset X \quad \text{por } (\beta_k)_t = g_{t_k},$$

$$f_k : D \times I \to X \quad \text{por } (f_k)_t = f_{t_{k-1}+t(t_k-t_{k-1})} \text{ e}$$

$$g_k : D \times I \to X \quad \text{por } (g_k)_t = g_{t_{k-1}+t(t_k-t_{k-1})}.$$

Seja $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ tal que

$$\rho(f_{t_i}(D), g_{t_j}(D) > 4\delta$$

e $\xi > 0$ satisfazendo o HET para δ.

Pelo Lema 5.2.1, existem homotopias disjuntas α_k' e g_k' que são, respectivamente, $\frac{\xi}{2}$-próximas de α_k e g_k e homotopias disjuntas β_k' e f_k' que são, respectivamente, $\frac{\xi}{2}$-próximas de β_k e f_k.

Agora, $\forall k = 1, \cdots, m$,

(i) $\rho\left(f_{t_{k-1}}, (\alpha_k')_0\right) \leq \rho\left((\alpha_k)_t, (\alpha_k')_t\right) < \frac{\xi}{2}$,

(ii)

$$\begin{aligned} \rho\left((\alpha_k')_1, (f_k')_0\right) &\leq \rho\left(\alpha_k', f_k'\right) \leq \rho\left(\alpha_k', \alpha_k\right) + \rho\left(\alpha_k, f_k'\right) \\ &= \rho\left(\alpha_k', \alpha_k\right) + \rho\left(f_{t_{k-1}}, f_k'\right) \\ &< \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi. \end{aligned}$$

(iii) $\rho\left((f_k')_1, f_{t_k}\right) < \frac{\xi}{2}$,

(iv) $\rho\left(g_{t_{k-1}}, (g_k')_0\right) < \frac{\xi}{2}$,

(v) $\rho\left((g_k')_1, (\beta_k')_0\right) < \xi$ e

(vi) $\rho\left((\beta_k')_1, g_{t_k}\right) < \frac{\xi}{2}$,

e, portanto, denotando "δ-homotópica a" por "$\approx_\delta$", temos pelo HET que

(i) $f_{t_{k-1}} \approx_\delta (f_k')_0$ por uma homotopia η_1,

(ii) $\alpha_k')_1 \approx_\delta (f_k')_0$ por uma homotopia η_2,

(iii) $(f_k')_1 \approx_\delta f_{t_k}$ por uma homotopia η_3,

(iv) $g_{t_{k-1}} \approx_\delta (g_k')_0$ por uma homotopia μ_1,

(v) $g'_k)_1 \approx_\delta (\beta'_k)_0$ por uma homotopia μ_2 e

(vi) $(\beta'_k)_1 \approx_\delta g_{t_k}$ por uma homotopia μ_3.

Definamos as homotopias

$$F_k : D \times I \to X \quad \text{e} \quad G_k : D \times I \to X$$

por

$$F_k = \eta_1 * \alpha'_k * \eta_2 * f'_k * \eta_3 \quad \text{e} \quad G_k = \mu_1 * \beta'_k * \mu_2 * g'_k * \mu_3$$

onde $*$ é a operação produto de homotopias, isto é, para cada $(s,t) \in D \times I$

$$F_k(s,t) = \begin{cases} \eta_1(5s,t), & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{5} \\ \alpha'_k(5s-1,t), & \text{se} \quad \frac{1}{5} \leq s \leq \frac{2}{5} \\ \eta_2(5s-2,t), & \text{se} \quad \frac{2}{5} \leq s \leq \frac{3}{5} \\ f'_k(5s-3,t), & \text{se} \quad \frac{3}{5} \leq s \leq \frac{4}{5} \\ \eta_3(5s-4,t), & \text{se} \quad \frac{4}{5} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

e

$$G_k(s,t) = \begin{cases} \mu_1(5s,t), & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{5} \\ \beta'_k(5s-1,t), & \text{se} \quad \frac{1}{5} \leq s \leq \frac{2}{5} \\ \mu_2(5s-2,t), & \text{se} \quad \frac{2}{5} \leq s \leq \frac{3}{5} \\ g'_k(5s-3,t), & \text{se} \quad \frac{3}{5} \leq s \leq \frac{4}{5} \\ \mu_3(5s-4,t), & \text{se} \quad \frac{4}{5} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Agora, a escolha de δ implica que

$$Im\eta_i \cap Im\mu_i = \emptyset, \quad i = 1,2,3$$

e, além disso, (α'_k, g'_k) e (β'_k, g'_k) são pares de homotopias disjuntas; portanto, temos que

$$(F_k)_t\,(D) \cap (G_k)_t\,(D) = \emptyset, \quad \forall t \in I.$$

Também, por construção, vale que

$$F_k(s \times I) \subset N_{2\delta}\left(f_k(s \times I)\right), \quad \forall s \in D,$$

e

$$G_k(s \times I) \subset N_{2\delta}\left(G_k(s \times I)\right), \quad \forall s \in D.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho(F_k, f_k) &< \sup_{s\in D}\{diam\,(f_k(s\times I))\} + 2\delta \\
&= \sup_{s\in D}\{diam\,(f(s\times [t_{k-1}, t_k]))\} + 2\delta \\
&= \sup_{s\in D}\left\{\sup_{u,v\in[t_{k-1},t_k]} \rho\,(f_u(s), f_v(s))\right\} + 2\delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\rho(G_k, g_k) < \varepsilon.$$

Definamos

$$F = F_1 * F_2 * \cdots * F_m$$

e

$$G = G_1 * G_2 * \cdots * G_m.$$

Neste caso, F e G são ε-aproximações de f e g, respectivamente, tais que

$$F_t(D) \cap G_t(D) = \emptyset, \quad \forall t \in I.$$

Segue que X tem a DHP. $\square$

A recíproca desse resultado não é verdadeira. Os espaços 2-ghastly, construídos por Daverman e Walsh, são variedades generalizadas resolúveis que não tem a P2MP e, porém, conforme demonstrado por D. Halverson em [13], são espaços de dimensão $n \geq 4$ com a DHP. Segue, em particular, pelo Teorema de Disjunção de Homotopias, que tais espaços são necessariamente Fatores de Variedade de Codimensão Um.

Referências Bibliográficas

[1] Ancel, F. D., *The Locally Flat Approximation of Cell-Like Embedding Relations*, Doctoral Thesis, 1976-1977.

[2] Bing, R.H., *Upper Semicontinuous Decompositions of E^3*, Ann. of Math ,(**65**), 363-374, 1957.

[3] Bryant, J., Ferry, S., Mio, W., and Weinberger, S., *Topology of homology manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., (**28**), 324-328, 1993.

[4] Bryant, J., Ferry, S., Mio, W., and Weinberger, S., *Topology of homology manifolds*, Ann. of Math., (**143**), 435-467, 1996.

[5] Daverman, R. J., *Detecting the Disjoint Disks Property*, Pacific J. Math.,(**93**), 277-298, 1981.

[6] Daverman, R. J., *Decompositions of Manifolds*, Academic Press, New York, 1986.

[7] Daverman, R. J., and Halverson, D. M., *Path Concordances as Detectors of Codimension-One Manifold Factors*, Geometry e Topology Monographs, (**9**), 7-15, 2006.

[8] Daverman, R. J., and Walsh, J.J., *A ghastly generalized n-manifold*, Illinois J. Math., (**25**), 555-576, 1981.

[9] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[10] Eaton, W. T., *A Generalization of the Dogbone Space to $\mathbb{R}^n$*, Proc. Amer. Math. Soc.,(**39**), 379-387, 1973.

[11] Edwards, R. D. *The Topology of Manifolds and Cell-Like maps*, "Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsink, 1978), Aca. Sci. Fennica, Helsinki, 111-127, 1973.

[12] Greenberg, M. J., *Lectures on Algebraic Topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1967.

[13] Halverson, D. M., *2-ghastly spaces with the disjoint homotopies property: The method of fractured maps*, Top. App., (**138**), 277-286, 2004.

[14] Halverson, D. M., *Detecting Codimension One Manifolds Factors with the Disjoint Homotopies Property*, Top. App., (**117**), 231-258, 2002.

[15] Halverson, D. M., *Detecting Codimension One Manifolds Factors with the Disjoint Homotopies Property*, Doctoral Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 1999. X

[16] Hurewicz, W., and Wallman,H., *Dimension Theory*, Princeton Math. Series, Vol. 4, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

[17] Lee, M. J., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[18] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[19] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura Aplicada, CNPq, 1977.

[20] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura Aplicada, Projeto Euclides, 2006.

[21] Lima, E. L., *Homologia Básica*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura Aplicada, Projeto Euclides, 2009.

[22] Quinn, F., *Resolutions of homology manifolds, the topological characterization of manifolds*, Invent. Math., (**72**), 267-284, 1983.

[23] Quinn, F., *An obstruction to the resolutions of homology manifolds*, Mich. Math. J., (**34**), 285-292, 1987.

[24] Santos, E. L., *Sobre Teoremas de Funções Implícitas, Abertas e Suas Aplicações*, Tese de Doutorado, ICMC/USP, São Carlos, 2005.

[25] Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[26] Vick, J. W. , *Homology Theory - An Introduction To Algebraic Topology*, Academic Press, Inc. , New York , 1973.