UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

$\mathcal{D}$-Classes de Homotopia, uma Generalização da Teoria de Δ-Classes de Homotopia

Allan Edley Ramos de Andrade

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

$\mathcal{D}$-Classes de Homotopia, uma Generalização da Teoria de Δ-Classes de Homotopia

Allan Edley Ramos de Andrade

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dirceu Penteado

São Carlos - SP
2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

A553dh

Andrade, Allan Edley Ramos de.

D-classes de homotopia, uma generalização da teoria de Δ-classes de homotopia / Allan Edley Ramos de Andrade. -- São Carlos : UFSCar, 2011.

64 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Matemática. 2. Nielsen, Número de. 3. Topologia algébrica. I. Título.

CDD: 510 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Dirceu Penteado
DM - UFSCar

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
DM - UFSCar

Prof. Dr. João Peres Vieira
IGCE - UNESP

Agradecimentos

Ao professor Dirceu, pela dedicação, paciência e seriedade profissional com que conduziu este trabalho.

Aos meus pais, Adilson e Raquel, por me apoiarem em todos os momentos da minha vida, e pela dedicação que tiveram para que eu seguisse com meus estudos.

Aos meus amigos da turma de mestrado, pela amizade, pelo auxílio e por todos os momentos divertidos que passamos. Aos professores do departamento da UNESP-RC por me ajudarem na minha formação matemática, e pela amizade que sempre tiveram com os seus alunos. Também gostaria de agradecer aos professores do departamento da UFSCAR pela ajuda nos momentos de dúvida e pelo tratamento diferenciado que tem com seus alunos.

À CAPES, que me garantiu suporte financeiro.

Em fim, a todos que colaboraram de alguma forma com este trabalho.

Resumo

Este trabalho é baseado na tese de doutorado de R.Brooks [1]. R.Brooks desenvolve seu trabalho em três partes. Primeiramente, estabelece a teoria de Nielsen (Classes essenciais, número de Nielsen, estimativas do número de Nielsen) para determinadas classes de pares de homotopias, chamadas de Δ-classes de homotopia.

Na segunda parte usando homologia e cohomologia desenvolve um índice, que associa a cada terna admissível, (f, A, B), um homomorfismo $L_*(f, A, B)$.

Na terceira parte relaciona a teoria de Nielsen para Δ-classes de homotopia com a teoria de índice da segunda parte.

Neste trabalho estenderemos o conceito de Δ-classes de homotopia para $\mathcal{D}$-classes de homotopia, e estudaremos o $\mathcal{D}$-número de Nielsen, $n(f, p, \mathcal{D})$, para $(f, p) \in \mathcal{D}$, além disso definiremos um índice, $L_*(f, p, A, s(B))$, com o objetivo de detectar quando $n(f, p, \mathcal{D}) > 0$.

Abstract

This work is based on Ph.d. thesis of R.Brooks [1]. R.Brooks develops his work in three parts, first establishes Nielsen's theory (Essential class, Nielsen's number, estimates for the Nielsen's number) for determined classes of pairs of homotopy, called Δ-classes of homotopy.

In the second part using homology and cohomology develop an index, that associates to each tuple (f, A, B), a homomorphism $L_*(f, A, B)$.

In the third part he relates Nielsen's theory for Δ-classes of homotopy with the index theory of the second part.

In this work we will extend to the concept of Δ-classes of homotopy for $\mathcal{D}$-classes of homotopy, and will study the $\mathcal{D}$-number of Nielsen, $n(f, p, \mathcal{D})$, for $(f, p) \in \mathcal{D}$, after that we will define an index, $L_*(f, p, s(B))$, with the objective to detect when $n(f, p, \mathcal{D}) > 0$.

Sumário

Introdução

Este trabalho é baseado na tese de doutorado de R.Brooks [1], o qual consta de três partes. Primeiramente estabelece a teoria de Nielsen à partir de determinadas classes de pares de homotopias, chamadas de Δ- classes de homotopia. Nesta parte seguem os conceitos de classes essenciais, número de Nielsen e sua estimativa relacionada com o número de Reidemeister.

Por exemplo, para a classe $\Delta_1 := \Delta_1(X, Y)$ formada pelos pares de homotopias (F, G) de funções contínuas de X em Y desenvolve a teoria de Nielsen para coincidência; para a classe $\Delta_2 := \Delta_2(X, Y, a)$ formada pelos pares de homotopias (F, G) com G homotopia constante na função constante que leva X em um ponto $a \in Y$, desenvolve a teoria de Nielsen para raízes e para a classe $\Delta_3 := \Delta_3(X)$ formada pelos pares de homotopias (F, G) com G homotopia constante na função identidade desenvolve a teoria de Nielsen para pontos fixos.

Na segunda parte desenvolve um índice, $L_*(f, A, B)$, para funções $f : X \to Y$, o qual é um homomorfismo em grupos de homologia, para detectar classes essenciais de Nielsen. Analogamente define-se $L^*(f, A, B)$ fazendo uso de cohomologia.

Na terceira parte relaciona a teoria de Nielsen para Δ_i- classes de homotopias com a teoria de índice da segunda parte.

O objetivo desta dissertação é generalizar a abordagem aplicada a Δ-classes de homotopias ao contexto de $\mathcal{D}$-classes de homotopia.

A descrição sucinta de $\mathcal{D}$-classes de homotopia, consiste no seguinte. Fixada uma aplicação $q : E_2 \to B$ e uma inversa à direita $s : B \to E_2$ de q, então $\mathcal{D}$ é um subconjunto de $F(E_1, E_2)^I \times F(E_1, B)^I$, onde $F(E_1, E_2)$ denota o conjunto da funções contínuas de E_1 em E_2 e $F(E_1, E_2)^I$ denota o conjunto das homotopias de funções de E_1 em E_2. Analogamente $F(E_1, B)^I$ denota o conjunto das homotopias de funções de E_1 em B.

Os pares $(H, P) \in \mathcal{D}$ satisfazem as seguintes propriedades:

1) $q \circ H_t = P_t$;

2)É Fechado para a operação de justaposição de caminhos(vendo homotopias como caminhos no espaço de funções);

3)É fechado para as operações inversas e "restrições" a intervalos $[r, s] \subset [0, 1]$.

Este trabalho é organizado da seguinte forma

No Capítulo 1 é apresentado as definições e requisitos básicos para o desenvolver dos demais capítulos.

No Capítulo 2 é definido as $\mathcal{D}$-classes de homotopia e o $\mathcal{D}$-número de Nielsen, $n(f, p, \mathcal{D})$, para $(f, p) \in \mathcal{D}$, mostrando que $n(f, p, \mathcal{D})$ é um limitante inferior para o número de coincidências de f' e $s \circ p'$, onde $(f', p') \in \mathcal{D}$, com f' na classe de homotopia de f e p' na classe de homotopia de p.

No Capítulo 3 é definido o número algébrico de Reidemeister para homomorfismo de grupos $g, h : G \to H$, depois é definido o $\mathcal{D}$-número de Reidemeister, $r(f, p)$, para $(f, p) \in \mathcal{D}$. Neste capítulo também definiremos o $\mathcal{D}$-conjunto de Jiang e estudaremos a relação entre $r(f, p)$, $n(f, p, \mathcal{D})$ e o $\mathcal{D}$-conjunto de Jiang.

No Capítulo 4 é definido um índice, $L_*(f, A, B)$, para ternas admissíveis (f, A, B), e posteriormente é definido o índice $L_*(f, p, A, s(B))$ para $(f, p) \in \mathcal{D}$. Veremos que esse índice detecta quando $n(f, p, \mathcal{D}) > 0$.

Capítulo

1

Requisitos, Convenções e Terminologias

1.1. Convenções e Definições

Denotaremos por $F(E_1, E_2)$, o espaço das funções contínuas de E_1 em E_2, com a topologia que o torna compactamente gerado, isto é, $F(E_1, E_2)$ é Hausdorff e um subconjunto $B \subset F(E_1, E_2)$ é fechado se, e somente se, a intersecção com qualquer compacto $K \subset F(E_1, E_2)$ é fechado(veja página 17 [2]). Em particular quando $I = [0, 1]$, denotaremos $F(I, E)$ por E^I e $F(I, F(E_1, E_2))$ por $F(E_1, E_2)^I$.

As homotopias denotadas por letras maiúsculas, serão vistas como um caminho no espaço das funções $H \in F(E_1, E_2)^I$, além disso indicaremos por $H_t : E_1 \to E_2$, a função dada por $H_t(x) = H(t)(x)$ e por $\widetilde{H} : I \times E_1 \to E_2$ a adjunta de H, dada por $\widetilde{H}(t, x) = H(t)(x)$. Quando indicamos uma homotopia por uma letra minúscula estamos considerando uma homotopia que independe de t.

Um caminho $C \in E^I$ pode ser visto como uma homotopia em $F(*, E)^I$ onde $*$ é o espaço com um único ponto, por essa razão denotaremos caminhos por letras maiúsculas.

Definição 1.1.1. Se $C, D : I \to E_1$ forem caminhos em E_1, com $C(1) = D(0)$, então $CD : I \to E_1$ denotará o caminho em E_1 dado por

$$CD(t) = \begin{cases} C(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ D(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definição 1.1.2. Dois caminhos $D, C : I \to E_1$, são homotópicos relativamente ao bordo de I, se existir uma homotopia $H \in F(I, E_1)^I$ entre C e D tal que

$$H(t)(0) = C(0) = D(0), H(t)(1) = C(1) = D(1), t \in I.$$

Duas homotopias são homotópicas relativamente ao bordo de I, se como caminhos, elas são homotópicas relativamente ao bordo de I. Denotaremos por $[C]$ a classe de todos os caminhos homotópicos a C relativamente ao bordo I.

Denotaremos por $\pi_1(E_1, x_0)$, o grupo fundamental de E_1, com ponto base $x_0 \in E_1$. Além disso, sendo $f : E_1 \to E_2$ contínua, denotaremos por $f_\# : \pi_1(E_1, x_0) \to \pi_1(E_2, f(x_0))$ o homomorfismo induzido por f.

Definição 1.1.3. Sejam $x, y \in E_1$ e $C : I \to E_1$ um caminho unindo x a y, então definimos $C^\# : \pi_1(E_1, x) \to \pi_1(E_1, y)$ por $C^\#([D]) = [C^{-1}DC]$.

Definição 1.1.4. Sejam $H \in F(E_1, E_2)^I$ e $C \in E_1^I$, definimos o caminho em E_2, $< H, C >$: $I \to E_2$ por $< H, C > (t) = H(t)(C(t))$.

Temos que $< H, C >$ é composta das seguintes funções contínuas $HC : I \times I \to E_2$ dada por $HC(r, s) = H(r)(C(s))$ e $d : I \to I \times I$, dada por $d(t) = (t, t)$, assim $< H, C >$ é contínua.

Proposição 1.1.5. Sejam H, K homotopias em $F(E_1, E_2)$ e C, D caminhos em E_1 satisfazendo $C(1) = D(0)$ e $H(1) = K(0)$, assim :

i) $< HK, CD >=< H, C >< K, D >$;

ii) $< H^{-1}, C^{-1} >=< H, C >^{-1}$

Prova:. i) Dado $t \in I$, temos

$$< HK, CD > (t) = HK(t)(CD(t)) = \begin{cases} H(2t)(C(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t-1)(D(2t-1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} < H, C >< K, D > (t) &= \begin{cases} < H, C > (2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ < K, D > (2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} H(2t)(C(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t-1)(D(2t-1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ii) Dado $t \in I$, temos

$$\begin{aligned} < H^{-1}, C^{-1} > (t) = H^{-1}(t)(C^{-1}(t)) = H(1-t)(C(1-t)) = \\ < H, C > (1-t) =< H, C >^{-1} (t). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.1.6. Sejam H, K homotopias em $F(E_1, E_2)$, e C, D caminhos em E_1 tais que $[H] = [K]$ e $[C] = [D]$. Então $[< H, C >] = [< K, D >]$.

Prova:. Sejam Ψ homotopia relativa ao bordo entre H e K, Φ homotopia relativa ao bordo entre C e D. Mostremos que Π dada por

$$\Pi(t) =< \Psi(t), \Phi(t) >$$

é uma homotopia relativa ao bordo, entre $< H, C >$ e $< K, D >$. Temos que

$$\Pi(0) =< \Psi(0), \Phi(0) >=< H, C >, \Pi(1) =< \Psi(1), \Phi(1) >=< K, D >.$$

Além disso temos

$$\Pi(t)(0) =< \Psi(t), \Phi(t) > (0) = \Psi(t)(0)(\Phi(t)(0)) = H(0)(C(0)) =< H, C > (0), t \in I,$$
$$\Pi(t)(1) =< \Psi(t), \Phi(t) > (1) = \Psi(t)(1)(\Phi(t)(1)) = H(1)(C(1)) =< H, C > (1), t \in I.$$

Logo Π é uma homotopia relativa ao bordo e $[< H, C >] = [< K, D >]$. $\square$

1.2. Fibração e Fibrados

Seja $q : E_2 \to B$, um problema de levantamento para (q, P, f) é simbolizado pelo diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E_2 \arrow[d, "q"] \\ I \times E_1 \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd} \tag{1}$$

onde $i_0 : E_1 \to I \times E_1$ é dado por $i_0(x) = (0, x)$. Uma solução para o problema é uma homotopia $H : I \times E_1 \to E_2$, satisfazendo $H \circ i_0 = f$ e $q \circ H = P$. Portanto H é uma homotopia de f que levanta a homotopia P de $q \circ f$.

Uma função $q : E_2 \to B$ tem a propriedade de levantamento de homotopia para E_1 se, e somente se, cada problema representado pelo diagrama 1 tem solução.

Definição 1.2.1. Se q tem a propriedade de levantamento para todo espaço E_1, então dizemos que q é uma fibração. Se $q : E_2 \to B$ é uma fibração, chamamos de fibra sobre $b_0 \in B$, o conjunto $q^{-1}(b_0)$, o qual indicamos por F_{b_0}.

Exemplo 1.2.2. *Seja $p_1 : B \times F \to B$ a projeção no primeiro fator, então p_1 é uma fibração com fibra F. De fato, se $P : I \times E_1 \to B$ e $f : E_1 \to B \times F$ são tais que $P(0,e) = (p_1 \circ f)(e)$, então $H : I \times E_1 \to B \times F$ dada por $H(t,x) = (P(t,x),(p_2 \circ f)(x))$ com p_2 projeção no segundo fator, é uma levantamento de P.*

Teorema 1.2.3. *Se $q : E_2 \to B$ é uma fibração, $y_0 \in E_2, q(y_0) = b_0$ e $F = q^{-1}(b_0)$, então existe uma sequência exata longa*

$$... \to \pi_n(F,y_0) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_n(E_2,y_0) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_n(B,b_0) \stackrel{\Delta}{\to} \pi_{n-1}(F,y_0) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_{n-1}(E_2,y_0) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_{n-1}(B,b_0)$$

$$... \to \pi_1(F,y_0) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_1(E_2,y_0) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_1(B,b_0) \to 1$$

Prova:. veja [3], página 453.

Corolário 1.2.4. *Se $q : E_2 \to B$ é uma fibração, e existe $s : B \to E_2$ tal que $q \circ s = 1_B$, tomando os pontos bases $b_0 \in B$ e $y_0 = s(b_0)$, então para cada $n \in N$, temos a seguinte sequência exata curta*

$$0 \to \pi_n(F,y_0) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_n(E_2,y_0) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_n(B,b_0) \to 0$$

Além disso, para $n = 1$, temos $\pi_1(E_2,x_0) \cong \pi_1(F,y_0) \rtimes \pi_1(B,b_0))$ produto semidireto de $\pi_1(F,y_0)$ por $\pi_1(B,b_0))$.

Prova:. Suponhamos que exista $s : B \to E_2$ tal que $q \circ s = 1_B$, assim $q_\# \circ s_\# = (q \circ s)_\# = 1_{B_\#}$. Afirmamos que $q_\#$ é sobrejetora, de fato, dado $[\alpha] \in \pi_n(B,b_0))$, temos $q_\#(s_\#([\alpha])) = 1_{B_\#}([\alpha]) = [\alpha]$. Assim, sendo $q_\#$ sobrejetora a sequência do Teorema 1.2.3 se quebra em sequências exatas curtas

$$0 \to \pi_n(F,x_0) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_n(E_2,x_0) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_n(B,b_0) \to 0.$$

Para $n = 1$, a operação em $\pi_1(F,y_0) \rtimes \pi_1(B,b_0))$ é dada por $([\alpha_1],[\beta_1]) \bullet ([\alpha_2],[\beta_2]) = ([\alpha_1][s \circ \beta_1][\alpha_2][s \circ \beta_1^{-1}],[\beta_1][\beta_2])$.

Seja $\Phi : \pi_1(E_2,y_0) \to \pi_1(F,y_0) \rtimes \pi_1(B,b_0)$ dada por $\Phi([\alpha]) = ([\alpha][(s \circ q)\alpha^{-1}], q_\#([\alpha]))$.

i) Φ é homomorfismo

$\Phi([\alpha]) \bullet \Phi([\beta]) = \big([\alpha][(s \circ q)\alpha^{-1}], q_\#([\alpha])\big) \bullet \big([\beta][(s \circ q)\beta^{-1}], q_\#([\beta])\big)$

$= \Big(\big([\alpha][(s \circ q)\alpha^{-1}]\big)\big([(s \circ q)\alpha]\big)[\beta][(s \circ q)\beta^{-1}]\big([(s \circ q)\alpha]\big)^{-1}, q_\#([\alpha])q_\#([\beta])\Big)$

$= \Big([\alpha * \beta][(s \circ q)(\beta^{-1} * \alpha^{-1})], q_\#([\alpha * \beta])\Big) = \Big([\alpha * \beta][(s \circ q)(\alpha * \beta)^{-1}], q_\#([\alpha * \beta])\Big)$

$= \Phi([\alpha * \beta])$.

ii)Φ é bijetor

Seja $\Psi : \pi_1(F, y_0) \rtimes \pi_1(B, b_0) \to \pi_1(E_2, y_0)$ dado por $\Psi([\alpha], [\beta]) = [\alpha][s \circ \beta]$,
Assim,

$(\Phi \circ \Psi)([\alpha], [\beta]) = \Phi([\alpha][s \circ \beta]) = \Phi(\alpha * (s \circ \beta))$
$= \big([\alpha * (s \circ \beta)][(s \circ q)(\alpha * (s \circ \beta))^{-1}], q_\#([\alpha * (s \circ \beta)])\big)$
Como $i_\#(\alpha) = [\alpha]$, $q_\# \circ i_\# = 1_{B_\#}$ e $q \circ s = 1_B$, temos

$q_\#([\alpha * (s \circ \beta)]) = [\beta]$ e $([\alpha * (s \circ \beta)][(s \circ q)(\alpha * (s \circ \beta))^{-1}] = [\alpha]$.
Assim, temos $(\Phi \circ \Psi)([\alpha], [\beta]) = ([\alpha], [\beta])$ para todo $([\alpha], [\beta]) \in \pi_1(F, y_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$.
Por outro lado temos,
$(\Psi \circ \Phi)([\alpha]) = \Psi\big([\alpha][(s \circ q)\alpha^{-1}], q_\#([\alpha])\big) = [\alpha][(s \circ q)\alpha^{-1}][s \circ (q \circ \alpha)] = [\alpha]$.
Portanto, Φ é bijetor, com inversa Ψ.

Para $n \geq 2$, a prova é a mesma e como os grupos $\pi_n(F, y_0), \pi_n(E_2, y_0)$ e $\pi_n(B, b_0)$ são abelianos, o produto semi-direto se reduz ao produto cartesiano. □

Definição 1.2.5. Sejam $q : E_2 \to B$ uma fibração, e $W(E_2, q, B) = \{(e, u) \in E_2 \times B^I \mid q(e) = u(0)\}$. Uma conexão para q, é uma função contínua $\lambda_q : W(E_2, q, B) \to E_2^I$, que satisfaz as seguintes propriedades.

1) $\lambda_q(x, u)(0) = x$;

2) $q \circ \lambda_q(x, u) = u$, para todo $(x, u) \in W$.

Temos que λ_q é uma conexão para q se, e somente se, sua adjunta $\widetilde{\lambda_q} : I \times W \to E_2$ é uma solução para o seguinte problema de levantamento de homotopia.

$$\begin{tikzcd}
0 \times W(E_2, q, B) \arrow[r, "p_1'"] \arrow[d, "i"] & E_2 \arrow[d, "q"] \\
I \times W(E_2, q, B) \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\lambda_q}"] & B
\end{tikzcd}$$

onde $p_1'(0, (e, u)) = e, K(t, e, u) = u(t)$. Assim temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.6. *Uma função $q : E_2 \to B$ é uma fibração se, e somente se, existe uma conexão para q.*

Prova:. Ver [2], página 30. $\square$

Explicitamente o levantamento H no diagrama abaixo em termos da conexão λ_q é $H(t,x) = \lambda_q(f(x), P_x)(t)$ onde $P_x : I \to B$ é dado por $P_x(t) = P(t,x)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \times E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E_2 \arrow[d, "q"] \\
I \times E_1 \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.2.7. *Se $q : E_2 \to B$ é uma fibração com conexão λ_q, então $\overline{q} : F(E_1, E_2) \to F(E_1, B)$ dada por $\overline{q}(f) = q \circ f$ é uma fibração.*

Prova:. ver [2], página 31. $\square$

A conexão $\lambda_{\overline{q}} : W(F(E_1, E_2), \overline{q}, F(E_1, B)) \to F(E_1, E_2)^I$ é dada em termos de λ_q da seguinte forma $\lambda_{\overline{q}}(f, P) : I \to F(E_1, E_2)$, onde $\lambda_{\overline{q}}(f, P)(t)(x) := \lambda_q(f(x), P_x)(t)$, com $P_x : I \to B$ e $P_x(t) := P(x,t)$.

Definição 1.2.8. Um fibrado $\xi = (E_2, B, F, p)$, consiste de um espaço total E_2, um espaço base B, uma fibra F e uma aplicação $p : E_2 \to B$, chamada de projeção do fibrado, onde cada $b \in B$, possui uma vizinhança V, e um homeomorfismo $\varphi_V : V \times F \to p^{-1}(V)$ de tal forma que a composição

$$V \times F \xrightarrow{\varphi_V} p^{-1}(V) \xrightarrow{p} V$$

é a projeção no primeiro fator, ou seja, $(p \circ \varphi_V)(b, e) = b$ para todo $(b, e) \in V \times F$.

Exemplo 1.2.9. *Seja $M = \frac{I \times I}{\sim}$ a faixa de Mobius, obtida identificando os pontos $(0, t)$ e $(1, 1-t)$, então a projeção $p : M \to S^1 \cong \frac{I}{\sim}$ dada por $p([(t, s)]) =< t >$, é uma fibrado com espaço base S^1 e fibra I.*

Exemplo 1.2.10. *Seja $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to S^{n-1}$ dada por $\pi(x) = \frac{x}{|x|}$, então p é uma fibrado com espaço base S^{n-1} e fibra $\mathbb{R}$, onde todo ponto $x \in S^{n-1}$, possui vizinhança $V = S^{n-1}$, com $\varphi_V : V \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(V)$, dada por $\varphi_V(x, t) = e^t x$.*

Teorema 1.2.11. *Se $p : E_2 \to B$ é a projeção de um fibrado, com B paracompacto, então p é uma fibração.*

Prova:. vide [2], página 33. $\square$

Capítulo

2

$\mathcal{D}$-Número de Nielsen

2.1. $\mathcal{D}$- Classes de Homotopia

Definição 2.1.1. Sejam H uma homotopia em $F(E_1, E_2)$, e $r, s \in I$, definimos H_r^s homotopia em $F(E_1, E_2)$ por

$$H_r^s(t) = H(r + t(s - r)),\ t \in I.$$

Intuitivamente se $r < s$ então H_r^s é a restrição de H ao intervalo $[r, s]$, e caso $r > s$ a restrição de H^{-1} ao intervalo $[s, r]$.

Proposição 2.1.2. Seja $H \in F(E_1, E_2)$, q, r e $s \in I$. Então,

$$[H_q^r H_r^s] = [H_q^s] \text{ e } (H_r^s)^{-1} = H_s^r.$$

Prova:. Considere $\varphi : I \to F(E_1, E_2)^I$ dada por

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} H(\tau(q + t(s - q)) + (1 - \tau)(q + 2t(r - q))), 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(\tau(q + t(s - q)) + (1 - \tau)(r + (2t - 1)(s - r))), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Temos que $\varphi(0) = \begin{cases} H(q + 2t(r - q)), 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(r + (2t - 1)(s - r)), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = H_q^r H_r^s$

e $\varphi(1) = H(q + t(s - q)) = H_q^s$.

Além disso, temos $\varphi(\tau)(0) = H(q) = H_q^r H_r^s(0)$ e $\varphi(\tau)(1) = H(s) = H_q^s(1), \forall\ \tau \in I$. Assim φ é uma homotopia relativa ao bordo entre $H_q^r H_r^s$ e H_q^s.
Portanto, $[H_q^r H_r^s] = [H_q^s]$. $\square$

Definição 2.1.3. Dizemos que $q : E_2 \to B$ é uma r-função se existe $s : B \to E_2$ tal que $q \circ s = 1_B$.

Proposição 2.1.4. Sejam $q : E_2 \to B$ uma r-função e $s : B \to E_2$ com $q \circ s = 1_B$. Se E_2 é Hausdorff então $s(B)$ é fechado em E_2.

Prova:. Para mostrarmos que $s(B)$ é fechado em E_2, mostraremos que $E_2 - s(B)$ é aberto. Dado $x \in E_2 - s(B)$, temos que $s(q(x)) \neq x$, assim sendo E_2 hausdorff, existem abertos U e V contendo x e $s(q(x))$ respectivamente, com $U \cap V = \emptyset$.

Como s e q são contínuas temos que $(s \circ q)^{-1}(V)$ é um aberto de E_2, assim $W = U \cap (s \circ q)^{-1}(V)$ é um aberto de E_2, além disso temos que W contém x, pois $x \in U$ e $(s \circ q)(x) = s(q(x)) \in V$. Mostremos agora que $W \subset E_2 - s(B)$, para isso suponhamos por absurdo que exista $y \in W \cap s(B)$, assim $y = s(b)$ para algum $b \in B$ e $(s \circ q)(y) \in V$, ou seja, $(s \circ q)(s(b)) \in V$. Por hipótese temos $q \circ s = 1_B$, logo $y = s((q \circ s)(b)) \in V$, de onde temos uma contradição pois $U \cap V = \emptyset$ com $y \in U \cap V$. Portanto, dado $x \in E_2 - s(B)$ existe um aberto W com $W \subset E_2 - s(B)$, mostrando assim que $E_2 - s(B)$ é aberto. $\square$

Definição 2.1.5. Sejam $q : E_2 \to B$ uma r-função e $s : B \to E_2$ satisfazendo $q \circ s = 1_B$. Dizemos que um conjunto $\mathcal{D}$ de pares de homotopias $(H, P) \in F(E_1, E_2)^I \times F(E_1, B)^I$ é uma $\mathcal{D}$-classe se :

1) Se $(H, P), (H', P') \in \mathcal{D}$, com $H(1) = H'(0)$ e $P(1) = P'(0)$, então $(HH', PP') \in \mathcal{D}$;

2) Se $(H, P) \in \mathcal{D}$, e $r, s \in I$, então $(H_r^s, P_r^s) \in \mathcal{D}$;

3) Se $(H, P) \in \mathcal{D}$, então para cada $t \in I$, o diagrama abaixo comuta no sentido horário.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "H_t"] \arrow[dr, "P_t"'] & & E_2 \arrow[dl, "q"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Proposição 2.1.6. Suponhamos que $\mathcal{D}$ seja uma $\mathcal{D}$-classe de homotopia, e seja $(H, P) \in \mathcal{D}$. Então, $(H^{-1}, P^{-1}) \in \mathcal{D}$ e $(H(t), P(t)) \in \mathcal{D}$ para todo $t \in I$.

Prova:. Pela condição (2) da definição 2.1.5, temos $(H^{-1}, P^{-1}) = (H_1^0, P_1^0) \in \mathcal{D}$ e $(H(t), P(t)) = (H_t^t, P_t^t) \in \mathcal{D}$.

2.2. Exemplos

Exemplo 2.2.1. *Sejam $q : E_2 \to B$ e $s : B \to E_2$, com $q \circ s = 1_B$.*

Considere $\underline{q} : F(E_1, E_2)^I \to F(E_1, B)^I$ *dada por* $\underline{q}(H)(t) = q \circ H(t)$*, definimos a* $\mathcal{D}$*-classe,* $\mathcal{D}(\underline{q}) \subset F(E_1, E_2)^I \times \underline{q}\big(F(E_1, E_2)^I\big)$ *formada pelos elementos da forma* $(H, \underline{q}(H))$*.*

Observe que todas as $\mathcal{D}$*-classes estão contidas em* $\mathcal{D}(\underline{q})$*, pois dado* $\mathcal{D}$ *uma* $\mathcal{D}$*-classe então por definição se* $(H, P) \in \mathcal{D}$ *então* $q \circ H(t) = P(t)\ \forall\ t \in I$*.*

Exemplo 2.2.2. *Seja* $\mathcal{D}$ *uma* $\mathcal{D}$*-classe, para* $q : E_2 \to B$ *com secção* $s : B \to E_2$*, então podemos considerar* $\mathcal{D}_p$ *a classe de todos os pares* $(H, p) \in \mathcal{D}$*, com* p *homotopia constante.*

Exemplo 2.2.3. *No caso de* $q : E_2 \to B$ *ser uma fibração, com secção* $s : B \to E_2$*, definimos a* $\mathcal{D}$*-classe* $\mathcal{D}(\lambda_q)$ *constituída de todos os pares* (H, P) *obtidos da seguinte forma: para cada* $f : E_1 \to E_2$*, e para cada homotopia* $P : E_1 \times I \to B$ *com* $P(0) = q \circ f$*, tome* H *como sendo o levantamento determinado por* λ_q*, ver comentário em 1.2.7.*

Exemplo 2.2.4. *Em [1], R.Brooks definiu a* Δ*-classe de homotopia* $\Delta_1(X, Y)$ *formada por todos os pares* (F, G) *de homotopias* F *e* G *de funções contínuas de* X *em* Y*. Considerando* $q : Y \times Y \to Y$ *a projeção no primeiro fator e* $s : Y \to Y \times Y$ *dada por* $s(y) = (y, y)$*, definimos a* $\mathcal{D}$*-classe de homotopia, dada por* $\mathcal{D}(\Delta_1) = \{((F, G), F) \in F(X, Y \times Y)^I \times F(X, Y)^I\}$*. Note que para cada* $t \in I$*, temos o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
E_1 = X \arrow[rr, "(F_t, G_t)"] \arrow[dr, "F_t"'] & & E_2 = Y \times Y \arrow[dl, bend right, "q"'] \\
& B = Y \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Existe uma bijeção natural entre $\Delta_1(X, Y)$ *e* $\mathcal{D}(\Delta_1)$*, dada por* $(F, G) \to ((F, G), F)$*.*

Exemplo 2.2.5. *Em [1], R.Brooks definiu a* Δ*-classe de homotopia* $\Delta_2(X, Y)$ *formada por todos os pares* $(F, \overline{a})$ *de homotopias* F *e* $\overline{a}$ *de funções contínuas de* X *em* Y*, com* $\overline{a}$ *homotopia constante em* $a \in Y$*. Considerando* $s : \{a\} \to Y$ *a inclusão e* $q : Y \to \{a\}$ *a aplicação constante, definimos a* $\mathcal{D}$*-classe de homotopia* $\mathcal{D}(\Delta_2) = \{(F, \overline{a}) \in F(X, Y)^I \times F(X, a)^I\}$*. Note que para cada* $t \in I$*, temos o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
E_1 = X \arrow[rr, "F_t"] \arrow[dr, "\overline{a}_t"'] & & E_2 = Y \arrow[dl, bend right, "q"'] \\
& B = \{a\} \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 2.2.6. *Em [1], R.Brooks definiu a* Δ*-classe de homotopia* $\Delta_3(X)$ *formada por todos os pares* $(F, \overline{I})$ *de homotopias* F *e* $\overline{I}$ *de funções contínuas de* X *em* X*, com* $\overline{I}$ *homotopia constante na identidade de* X*. Considere* $s : X \to X \times X$ *dada por* $s(x) = (x, x)$

e $q : X \times X \to X$ a projeção no primeiro fator, definimos a $\mathcal{D}$-classe de homotopia $\mathcal{D}(\Delta_3) = \{((\overline{I}, F), \overline{I}) \in F(X, X \times X)^I \times F(X, X)^I\}$. Note que para cada $t \in I$, temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} E_1 = X \arrow[rr, "(\overline{I}_t, F_t)"] \arrow[dr, "\overline{I}_t"'] & & E_2 = X \times X \arrow[dl, bend right, "q"'] \\ & B = X \arrow[ur, bend right, "s"'] & \end{tikzcd}$$

2.3. H, P- Relações de Coincidência

Considere fixado uma $\mathcal{D}$-classe, $\mathcal{D}$, para $q : E_2 \to B$ e $s : B \to E_2$, com $q \circ s = 1_B$. Considere também $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$ com $(f, p) = (H(0), P(0))$ para algum par $(H, P) \in \mathcal{D}$.

Definição 2.3.1. Denotamos por $\Gamma(f, s \circ p)$ e $\Gamma(f; s(B))$ o conjunto das coincidências de f e $s \circ p$ e a imagem inversa de $s(B)$ por f, respectivamente.

Proposição 2.3.2. Sejam $\Gamma(f, s \circ p)$ e $\Gamma(f; s(B))$, como definidos acima, então $\Gamma(f, s \circ p) = \Gamma(f; s(B))$.

Prova:. Dado $x \in \Gamma(f; s(B))$, temos que $f(x) = s(b)$ para algum $b \in B$, logo $p(x) = q(f(x)) = q(s(b)) = b$. Segue que $(s \circ p)(x) = s(p(x)) = s(b) = f(x)$, assim $x \in \Gamma(f, s \circ p)$.

Por outro lado, se $x \in \Gamma(f, s \circ p)$, então $f(x) = s \circ p(x)$, assim $x \in f^{-1}((s \circ p)(x)) \subseteq f^{-1}(s(B))$. Portanto $\Gamma(f, s \circ p) = \Gamma(f; s(B))$.

Definição 2.3.3. Seja $(H, P) \in \mathcal{D}$ tal que $(H(0), P(0)) = (f_0, p_0)$ e $(H(1), P(1)) = (f_1, p_1)$, e sejam $x_0 \in \Gamma(f_0; s(B))$ e $x_1 \in \Gamma(f_1; s(B))$; dizemos que x_0 esta (H, P)-relacionado com x_1 se existir um caminho $C : I \to E_1$ unindo x_0 a x_1 tal que

$$[< H, C >] = [s(< P, C >)].$$

Se x_0 está (H, P)-relacionado com x_1 então denotaremos $x_0 \sim_{(H,P)} x_1$, e no caso de H ser uma homotopia constante em f, e P ser uma homotopia constante em p, denotaremos por $x_0 \sim_{(f,p)} x_1$.

Existe uma relação entre essa definição na classe $\mathcal{D}(\Delta_1)$ e a definição dada por R.Brooks para a Δ-classe $\Delta_1(X, Y)$, a saber :

Proposição 2.3.4. Se $(h, f) \in \mathcal{D}(\Delta_1)$ com $h = (f, g)$, onde $f, g : X \to Y$, então $x_0 \sim_{(h,f)} x_1$ se, e somente se, $x_0 \sim_{(f,g)} x_1$, isto é existe $C : I \to X$ tal que $[f \circ C] = [g \circ C]$.

Prova:. Na classe $\mathcal{D}(\Delta_1)$, temos a seguinte situação

$$\begin{tikzcd}
E_1 = X \arrow[rr, "h=(f,g)"] \arrow[dr, "p=f"'] & & Y \times Y = E_2 \arrow[dl, bend right, "q"'] \\
& Y \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Onde $q(x, y) = y$ e $s(y) = (y, y)$.
Suponha que $[< (f, g), C >] = [s(< f, C >)]$, para algum caminho C em E_1 unindo x_0 a x_1.

Observe que

$$s(< f, C >) = (< f, C >, < f, C >) \text{ e } < (f, g), C >= (< f, C >, < g, C >),$$

De fato, dado $t \in I$,
$s(< f, C >)(t) = s(f(C(t))) = (f(C(t)), f(C(t))) = (< f, C >, < f, C >)(t)$,
$< (f, g), C > (t) = (f(C(t)), g(C(t))) = (< f, C >, < g, C >)(t)$.
Agora considere $\Psi : I \to (Y \times Y)^I$ com $\Psi(t) = (\Psi_1, \Psi_2)(t) : I \to Y \times Y$, homotopia relativa ao bordo entre $s(< f, C >)$ e $< (f, g), C >$. Afirmamos que $\Psi_2 : I \to Y^I$ é uma homotopia relativa ao bordo entre $< f, C >$ e $< g, C >$, de fato:

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0)) = (\Psi_1, \Psi_2)(0) = s(< f, C >) = (< f, C >, < f, C >) \text{ e}$$
$$(\Psi_1(1), \Psi_2(1)) = (\Psi_1, \Psi_2)(1) =< (f, g), C >= (< f, C >, < g, C >)$$

Logo $\Psi_2(0) =< f, C >$ e $\Psi_2(1) =< g, C >$.

Além disso dado $t \in I$,

$$(\Psi_1(t)(0), \Psi_2(t)(0)) = (\Psi_1, \Psi_2)(t)(0) = (\Psi_1, \Psi_2)(0) = (\Psi_1(0), \Psi_2(0));$$
$$(\Psi_1(t)(1), \Psi_2(t)(1)) = (\Psi_1, \Psi_2)(t)(1) = (\Psi_1, \Psi_2)(1) = (\Psi_1(1), \Psi_2(1))$$

Ou seja, $\Psi_2(t)(0) = \Psi_2(0) =< f, C > (0)$ e $\Psi_2(t) = \Psi_2(1) =< g, C >, \ \forall \ t \in I$.
Portanto, $[< f, C >] = [< g, C >]$.

Por outro lado, suponha que $[f \circ C] = [g \circ C]$ para algum caminho $C : I \to X$, assim existe $\Phi : I \to (Y \times Y)^I$ homotopia relativa ao bordo entre $f \circ C$ e $g \circ C$.

Tome $H : I \to (Y \times Y)^I$ dada por $H(t)(s) = ((f \circ C)(s), \Phi(t)(s))$, assim
$H(0)(s) = ((f \circ C)(s), \Phi(0)(s)) = ((f \circ C)(s), (f \circ C)(s))$ e $H(1) = ((f \circ C)(s), \Phi(1)(s)) = ((f \circ C)(s), (g \circ C)(s))$ para todo $s \in I$. Além disso dado $t \in I$

$$H(t)(0) = ((f \circ C)(0), \Phi(t)(0)) = ((f \circ C)(0), (f \circ C)(0))$$

$$H(t)(1) = ((f \circ C)(1), \Phi(t)(1)) = ((f \circ C)(1), (f \circ C)(1)). \quad \square$$

Mostraremos agora algumas propriedades desta definição, em relação a multiplicação, inversão de homotopias e classes equivalentes de homotopias relativas ao bordo.

Proposição 2.3.5. Sejam $x, y, z \in E_1, (H, P)$ e $(H', P') \in \mathcal{D}$ com $H(1) = H'(0)$ e $P(1) = P'(0)$ então:

i) Se $x \in \Gamma(f, s \circ p)$, então $x \sim_{(f,p)} x$;

ii) Se $x \sim_{(H,P)} y$, então $y \sim_{(H^{-1},P^{-1})} x$;

iii) Se $x \sim_{(H,P)} y$ e $y \sim_{(H',P')} z$, então $x \sim_{(HH',PP')} z$.

Prova:. i) Suponha $x \in \Gamma(f, s \circ p)$, e tome $C : I \to E_1$ como sendo o caminho constante $C(t) = x, \ \forall\, t \in I$. Assim para $t \in I$, temos

$$< f, C > (t) = f(x) = (s \circ p)(x) = s(< p, C >)(t),$$

Logo $x \sim_{(f,p)} x$.

ii) Suponha que $x \sim_{(H,P)} y$, e seja $C : I \to E_1$ tal que $< H, C > \sim s(< P, C >)$, tomando $D = C^{-1}$ caminho inverso unindo y a x, temos

$$[< H^{-1}, D^{-1} >] = [< H, D >^{-1}] = [< H, D >]^{-1} = [s(< P, D >)]^{-1} =$$
$$[s(< P, D >^{-1})] = [s(< P^{-1}, D^{-1} >)].$$

Assim $y \sim_{(H^{-1},P^{-1})} x$.

iii) Suponha $x \sim_{(H,P)} y$ e $y \sim_{(H',P')} z$, assim existem caminhos $C, D : I \to E_1$ satisfazendo

$$[< H, C >] = [s(< P, C >)] \ e \ [< H', D >] = [s(< P', D >)].$$

Assim temos um caminho CD unindo x a z e

$$[< HH', CD >] = [< H, C >][< H', D >] = [s(< P, C >)][s(< P', D >)] =$$
$$[s(< P, C >< P', D >)] = [s(< PP', CD >)],$$

Logo $x \sim_{(HH',PP')} z$. $\square$

Proposição 2.3.6. Sejam (H, P) e $(H', P') \in \mathcal{D}$ com $[H] = [H']$ e $[P] = [P']$, se $x \sim_{(H,P)} y$, então $x \sim_{(H',P')} y$.

Prova:. Por hipótese temos $x \sim_{(H,P)} y$, assim existe um caminho C unindo x a y, tal que $[< H, C >] = [s(< P, C >)]$. Agora como $[P] = [P']$ e $[H] = [H']$, temos pela Proposição 1.1.6 que $[< H, C >] = [< H', C >]$ e $[< P, C >] = [< P', C >]$, assim

$$[< H', C >] = [s < P', C >].$$

Portanto, $x \sim_{(H',P')} y$. □

Se $(H, P) = (f, p) \in \mathcal{D}$ as duas últimas proposições induzem uma relação de equivalência em $\Gamma(f; s(B))$, mais explicitamente

Definição 2.3.7. Dados x e $y \in \Gamma(f; s(B))$, dizemos que x está (f, p)-relacionado com y, denotado por $x \sim_{(f,p)} y$, se existe um caminho $C : I \to E_1$ unindo x a y satisfazendo

$$[< f, C >] = [s(< p, C >)].$$

Proposição 2.3.8. A relação acima é uma relação de equivalência em $\Gamma(f; s(B))$.

Prova:. Pelo item i) da Proposição 2.3.5 temos que a relação é reflexiva.

Suponha que $x \sim_{(f,p)} y$, assim pelo item ii) da Proposição 2.3.5 temos que $y \sim_{(f^{-1},p^{-1})} x$, onde f^{-1} e p^{-1} são inversas de homotopias constantes em f e p respectivamente. Como a inversa de uma homotopia constante é ela própria, temos que $y \sim_{(f,p)} x$, de onde segue que a relação é reflexiva.

Suponha que $x \sim_{(f,p)} y$ e $y \sim_{(f,p)} z$, assim pelo item iii) da Proposição 2.3.5 temos que $x \sim_{(H,P)} z$, onde H é a composta da homotopia constante igual a f com ela mesma, e P é a composta da homotopia constante igual a p com ela mesma, ou seja, H é a homotopia constante igual a f e P é a homotopia constante igual a p, logo $x \sim_{(f,p)} z$, e a relação é transitiva. □

Definição 2.3.9. O conjunto $\Gamma(f; s(B))$ passado ao quociente pela relação acima é denotado por $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ e é chamado de conjunto das classes de coincidência de f e $s \circ p$.

Com o propósito de definir uma relação entre as classes de coincidência $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f_0; s(B))$ e $\beta \in \widetilde{\Gamma}(f_1; s(B))$, considere a seguinte proposição.

Proposição 2.3.10. Sejam $(H, P) \in \mathcal{D}$. Se $x \in \alpha \in \widetilde{\Gamma}(f_0; s(B))$ estiver (H, P)-relacionado com $y \in \beta \in \widetilde{\Gamma}(f_1; s(B))$, então para $x' \in \alpha$ e $y' \in \beta$ arbitrários, temos que $x' \sim_{(H,P)} y'$.

Prova:. Dados $x' \in \alpha$ e $y' \in \beta$, queremos mostrar que $x' \sim_{(H,P)} y'$. Temos que

$$x' \sim_{(f_0,p_0)} x \quad \text{e} \quad y \sim_{(f_1,p_1)} y'.$$

Além disso por hipótese temos $x \sim_{(H,P)} y$, logo pelo item iii) da Proposição 2.3.5 temos que $x' \sim_{(f_0H,p_0P)} y$. Como $[f_0H] = [H]$ e $[p_0P] = [P]$, segue da Proposição 2.3.6 que (1) $x' \sim_{(H,P)} y$.

Agora por hipótese temos (2) $y \sim_{(f_1,p_1)} y'$, assim por (1), (2) e pelo item iii) da Proposição 2.3.5, temos (3) $x' \sim_{(Hf_1,Pp_1)} y'$. Como $[Hf_1] = [H]$ e $[Pp_1] = [P]$, temos por (3) e pela Proposição 2.3.6 que $x' \sim_{(H,P)} y'$. □

Pela proposição acima podemos estender o conceito de (H, P)-relacionado para classes de coincidência, da seguinte forma.

Definição 2.3.11. Seja $(H, P) \in \mathcal{D}$, com $(H(0), P(0)) = (f_0, p_0)$ e $(H(1), P(1)) = (f_1, p_1)$, dizemos que uma classe de coincidência $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f_0; s(B))$ está (H, P)-relacionada com uma classe $\beta \in \widetilde{\Gamma}(f_1; s(B))$, denotado por $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$, se algum $x \in \alpha$ estiver (H, P)-relacionado com algum $y \in \beta$.

As propriedades a seguir são análogas às propriedades 2.3.5 e 2.3.6, feitas agora para classes.

Proposição 2.3.12. Sejam (H, P) e $(H', P') \in \mathcal{D}$ com $H(1) = H'(0)$ e $P(1) = P'(0)$, então:

i) Se $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B)), \beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$ e se $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$, então $\beta \sim_{(H^{-1},P^{-1})} \alpha$;

ii) Se $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$, $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$, e $\gamma \in \widetilde{\Gamma}(H'(1); s(B))$ com $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$ e $\beta \sim_{(H',P')} \gamma$, então $\alpha \sim_{(HH',PP')} \gamma$.

Prova:. i) Suponha $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$, então existe $x \in \alpha$ e $y \in \beta$, com $x \sim_{(H,P)} y$. Assim pelo item ii) da Proposição 2.3.5 temos $y \sim_{(H^{-1},P^{-1})} x$, de onde segue que $\beta \sim_{(H,P)} \alpha$.

ii) Suponha $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$ e $\beta \sim_{(H',P')} \gamma$, assim existem $x \in \alpha, y \in \beta$ e $z \in \gamma$ de tal forma que $x \sim_{(H,P)} y$ e $y \sim_{(H',P')} z$. Assim pelo item iii) da Proposição 2.3.5 temos $x \sim_{(HH',PP')} z$, logo $\alpha \sim_{(HH',PP')} \gamma$.

□

Proposição 2.3.13. Sejam (H, P) e $(H', P') \in \mathcal{D}$ com $[H] = [H']$ e $[P] = [P']$, $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$, $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$, se $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$, então $\alpha \sim_{(H',P')} \beta$.

Prova:. Suponhamos que $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$, logo existem $x \in \alpha$ e $y \in \beta$ com $x \sim_{(H,P)} y$. Pela Proposição 2.3.6 temos $x \sim_{(H',P')} y$, assim $\alpha \sim_{(H',P')} \beta$. $\square$

A seguir encontraremos condições para se ter uma quantidade finita de classes de coincidência, para isso considere as seguintes definições.

Definição 2.3.14. E_1 é um espaço **localmente conexo por caminhos** se, dado $x \in E_1$ e uma vizinhança V de x, existir uma vizinhança U de x, com $U \subset V$, onde U é conexa por caminhos.

Definição 2.3.15. E_2 é um espaço **semi-localmente simplesmente conexo** se, dado $y \in E_2$, existir uma vizinhança V de y, de tal forma que para todo laço C com ponto base y, contido em V, tem-se que $[C] = [y]$.

Teorema 2.3.16. *Sejam $\Gamma(f; s(B)) \subset E_1$ subespaço de E_1, e $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ com a topologia co-induzida pela projeção $p : \Gamma(f; s(B)) \to \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$, Então:*

i) Cada componente conexa por caminho de $\Gamma(f; s(B))$ está contida numa classe $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$.

ii) Se E_2 for hausdorff então $\Gamma(f; s(B))$ é fechado em E_1.

iii) Se E_1 é localmente conexo por caminhos e E_2 é semi-localmente simplesmente conexo, então $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é discreto.

iv) Se E_1 é localmente conexo por caminhos, E_2 é semi-localmente simplesmente conexo e $\Gamma(f; s(B))$ é compacto então $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é finito.

Prova:. $i)$ Sejam $\mathcal{C}$ componente conexa por caminhos de $\Gamma(f; s(B))$ e $x \in \mathcal{C}$, mostraremos que $\mathcal{C}$ esta contida na classe $\alpha = [x] \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$. Dado $y \in \mathcal{C}$, seja C caminho em $\Gamma(f; s(B))$ unindo x a y, assim $f(C(t)) = (s \circ p)(C(t)), \forall\ t \in I$, de onde segue que $< f, C >= s(< p, C >)$. Portanto $y \sim_{(f,p)} x$.

$ii)$ Suponhamos E_2 Hausdorff, assim pela Proposição 2.1.4 temos que $s(B)$ é fechado em E_2. Portanto, sendo $\Gamma(f; s(B)) = f^{-1}(s(B))$ e f é contínua, temos que $\Gamma(f; s(B))$ é fechado em E_1.

$iii)$ Suponhamos que E_1 seja localmente conexo por caminhos e E_2 seja semi-localmente simplesmente conexo e seja $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$. Dado $x \in \alpha$, considere V vizinhança de $f(x) = (s \circ p)(x) \in E_2$, onde para todo laço C em V, com ponto base $f(x)$, vale $[C] = [f(x)]$.

Como E_1 é localmente conexo por caminhos existe um aberto $U \subseteq f^{-1}(V) \cap (s \circ p)^{-1}(V)$ contendo x, onde U é conexo por caminhos. Mostraremos que W=$U \cap \Gamma(f; s(B)) \subseteq \alpha$, ou seja, que todo elemento $y \in W$ esta (f,p)-relacionado com x.

Dado $y \in W$, como $W \subseteq U$ e U é conexo por caminhos, existe um caminho C em U unindo x a y, observe que $f(C(t)) \subseteq V$ e $(s \circ p)(C(t)) \subseteq V$, $\forall\ t \in I$, assim $(f \circ C) *((s \circ p) \circ C)^{-1}$ é um laço em V, com ponto base $f(x)$.

Pela escolha de V temos $[(f \circ C) * ((s \circ p) \circ C)^{-1}] = [f(x)]$, ou seja, $[f \circ C] = [(s \circ p) \circ C)]$. Portanto $y \sim_{(f,p)} x$. Então cada $x \in \alpha$ possui uma vizinhança W com $W \subseteq \alpha$, assim α é aberto em $\Gamma(f; s(B))$, de onde segue que α é aberto em $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$.

$iv)$ Suponhamos que E_1 seja localmente conexo por caminhos, E_2 seja semi-localmente simplesmente conexo e $\Gamma(f; s(B))$ compacto, assim por $iii)$ temos que $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é discreto.

Como a projeção $\Gamma(f; s(B)) \to \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é contínua e $\Gamma(f; s(B))$ é compacto, temos que $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é compacto. Assim $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é compacto e discreto, de onde segue que $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é finito. □

2.4. $\mathcal{D}$-Classes Essenciais e o $\mathcal{D}$- Número de Nielsen

Definiremos nesta seção o conceito de $\mathcal{D}$-Classes Essenciais, $\mathcal{D}$- Número de Nielsen e por fim mostraremos que esse número é um invariante homotópico.

Proposição 2.4.1. Sejam $(H, P) \in \mathcal{D}$. Cada classe $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$ está (H, P)-relacionada com no máximo, uma classe $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$ e cada classe $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$ possui no máximo uma classe $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$ com $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$.

Prova:. Dado $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$, suponhamos que existam β_1 e $\beta_2 \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$, com $\alpha \sim_{(H,P)} \beta_1$ e $\alpha \sim_{(H,P)} \beta_2$. Pelo item $i)$ da Proposição 2.3.12 temos que $\beta_1 \sim_{(H^{-1},P^{-1})} \alpha$, assim pelo item $ii)$ da Proposição 2.3.12 temos que $\beta_1 \sim_{(H^{-1}H,P^{-1}P)} \beta_2$. Como $[H^{-1}H] = [H(1)]$ e $[P^{-1}P] = [P(1)]$, temos pela Proposição 2.3.13 que $\beta_1 \sim_{(H(1),P(1))} \beta_2$, logo $\beta_1 = \beta_2$.

Dado $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$, suponhamos que existam α_1 *e* $\alpha_2 \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$, com $\alpha_1 \sim_{(H,P)} \beta$ e $\alpha_2 \sim_{(H,P)} \beta$. Pelo item $i)$ da Proposição 2.3.12 temos que $\beta \sim_{(H^{-1},P^{-1})} \alpha_1$ e $\beta \sim_{(H^{-1},P^{-1})} \alpha_2$. Segue da primeira parte que $\alpha_1 = \alpha_2$.

□

Definição 2.4.2. Uma classe $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é dita ser essencial se, para qualquer $(H, P) \in \mathcal{D}$ com $(H(0), P(0)) = (f, p)$, existir uma classe $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$ com $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$. O número de $\mathcal{D}$-classes essenciais de $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ denotado por $n(f, p, \mathcal{D})$ é o $\mathcal{D}$- número de

Nielsen. O subconjunto de $\widetilde{\Gamma}(f;s(B))$, formado pelas classes essenciais será denotado por $N(f,p,\mathcal{D})$.

Observe que pelo Teorema 2.3.16, $n(f,p,\mathcal{D})$ é um limitante inferior para as componentes conexas por caminhos de $\Gamma(f;s(B))$.

O próximo teorema estabelece uma bijeção entre $N(H(0),P(0),\mathcal{D})$ e $N(H(1),P(1),\mathcal{D})$, para $(H,P)\in\mathcal{D}$.

Teorema 2.4.3. *Dados $(H,P)\in\mathcal{D}$ e $\alpha\in\widetilde{\Gamma}(H(0);s(B))$ uma classe essencial, então existe exatamente uma classe essencial $\beta\in\widetilde{\Gamma}(H(1);s(B))$ com $\alpha\sim_{(H,P)}\beta$. Reciprocamente dado $\beta\in\widetilde{\Gamma}(H(1);s(B))$, então existe exatamente uma classe essencial $\alpha\in\widetilde{\Gamma}(H(0),;s(B))$ com $\alpha\sim_{(H,P)}\beta$.*

Prova:. Suponhamos que $\alpha\in\widetilde{\Gamma}(H(0);s(B))$ seja classe essencial, assim por definição existe uma classe $\beta\in\widetilde{\Gamma}(H(1);s(B))$ com $\alpha\sim_{(H(1),P(1))}\beta$. Provemos que β é essencial.

Sejam $(H',P')\in\mathcal{D}$ com $(H'(0),P'(0))=(H(1),P(1))$, assim $(HH',PP')\in\mathcal{D}$, como α é essencial e $(HH'(0),PP'(0))=(H(0),P(0))$ temos que existe $\gamma\in\widetilde{\Gamma}(HH'(1);s(B))$ com $\alpha\sim_{(HH',PP')}\gamma$. Pelos itens $i)$ e $ii)$ da Proposição 2.3.12, temos que $\beta\sim_{(H^{-1}(HH'),P^{-1}(PP'))}\gamma$.

Como $[H^{-1}(HH')]=[H']$ e $[P^{-1}(PP')]=[P']$ temos pela Proposição 2.3.13 que $\beta\sim_{(H',P')}\gamma$. Portanto β é essencial, a unicidade segue da Proposição 2.4.1.

Reciprocamente, suponhamos $\beta\in\widetilde{\Gamma}(H(1);s(B))$ classe essencial, como $(H^{-1},P^{-1})\in\mathcal{D}$, temos pela primeira parte da proposição que existe uma $\mathcal{D}$-classe essencial $\alpha\in\widetilde{\Gamma}(H(0);s(B))$ com $\beta\sim_{(H^{-1},P^{-1})}\alpha$. Portanto $\alpha\sim_{(H,P)}\beta$, a unicidade segue da Proposição 2.4.1.

□

Corolário 2.4.4. *Se $(H,P)\in\mathcal{D}$, então $n(H(0),P(0)),\mathcal{D})=n(H(1),P(1),\mathcal{D})$.*

Prova:. Pela proposição anterior temos que a (H,P)-relação define uma bijeção entre $N(H(0),P(0),\mathcal{D})$ e $N(H(1),P(1),\mathcal{D})$, logo $n(H(0),P(0),\mathcal{D})=n(H(1),P(1),\mathcal{D})$.

□

Capítulo

3

$\mathcal{D}$- Número de Reidemeister e $\mathcal{D}$- Conjunto de Jiang

Para estimar o número de classes essenciais ($n(f, p, \mathcal{D})$), definiremos o $\mathcal{D}$-número de Reidemeister e o $\mathcal{D}$- conjunto de Jiang. Veremos que o $\mathcal{D}$-número de Reidemeister é um limitante superior para o $\mathcal{D}$-número de Nielsen. Primeiramente definiremos o número de Reidemeister ($r(j, k)$) para homomorfismos $j, k : G \to H$ entre grupos, depois considerando os espaços E_1 e E_2 conexos por caminhos, definiremos o $\mathcal{D}$-número de Reidemeister ($r(f, p)$) para o par $(f, p) \in \mathcal{D}$, usando os homomorfismos induzidos $f_{\#}, (s \circ p)_{\#} : \pi_1(E_1, x) \to \pi_1(E_2, y)$.

3.1. O Número Algébrico de Reidemeister

O número de Reidemeister é definido a partir de dois homomorfismos entre grupos $j, k : G \to H$. Primeiramente define-se a seguinte relação em H.

Definição 3.1.1. Dados $h_1, h_2 \in H$, dizemos que h_1 é (j, k)-congruente à h_2, se existe $g_0 \in G$, tal que $j(g_0)h_1 = h_2k(g_0)$. Quando h_1 é (j, k)-congruente à h_2, denotamos por $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$.

Proposição 3.1.2. A relação acima é uma relação de equivalência em H.

Prova:. $i)$ Reflexividade: Dado $h \in H$, tomando o elemento neutro e_G de G, temos $j(e_G)h = h = hk(e_G)$, logo $h \sim_{(j,k)_R} h$.

$ii)$Simetria: Sejam $h_1, h_2 \in H$, com $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$. Assim existe $g \in G$, tal que $j(g)h_1 = h_2k(g)$. Logo temos $j(g^{-1})j(g)h_1k(g^{-1}) = j(g^{-1})h_2k(g)k(g^{-1})$, de onde segue que $h_1k(g^{-1}) = j(g^{-1})h_2$. Portanto $h_2 \sim_{(j,k)_R} h_1$.

$iii)$Transitividade: Sejam h_1, h_2 e $h_3 \in H$ com $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$ e $h_2 \sim_{(j,k)_R} h_3$. Assim existem $g, g' \in G$, tais que $j(g)h_1 = h_2k(g)$ e $j(g')h_2 = h_3k(g')$.

Tomando $g_0 = g'g$ temos que $j(g_0)h_1 = j(g'g)h_1 = j(g')j(g)h_1 = j(g')h_2k(g) = h_3k(g')k(g) = h_3k(g'g) = h_3k(g_0)$. Portanto $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_3$. □

Definição 3.1.3. A (j,k)-classe de congruência determinada por h, $[h]_R = \{h' \in H \mid h \sim_{(j,k)_R} h'\}$ é chamada de classe de Reidemeister determinada pelos homomorfismos j e k . O número de classes de Reidemeister é chamado de número algébrico de Reidemeister de j e k . Denotamos o conjunto das classes de Reidemeister por $R(j,k)$ e o número de Reidemeister por $r(j,k)$.

Proposição 3.1.4. $r(j,k) = r(k,j)$.

Prova:. Dados $h_1, h_2 \in H$, temos $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$ se, e somente se, $h_1^{-1} \sim_{(k,j)_R} h_2^{-1}$. De fato, existe $g \in G$ com $j(g)h_1 = h_2k(g) \Leftrightarrow h_2^{-1}j(g)h_1h_1^{-1} = h_2^{-1}h_2k(g)h_1^{-1} \Leftrightarrow h_2^{-1}j(g) = k(g)h_1^{-1}$.

Portanto a correspondência $h \to h^{-1}$, induz uma bijeção entre $R(j,k)$ e $R(k,j)$, ou seja, $r(j,k) = r(k,j)$.

□

Proposição 3.1.5. Sejam $\varphi : G' \to G$ epimorfismo, e $j,k : G \to H$ homomorfismos. Assim temos $r(j \circ \varphi, k \circ \varphi) = r(j,k)$.

Prova:. Sejam $h_1, h_2 \in H$ com $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$. Assim existe $g \in G$ tal que $j(g)h_1 = h_2k(g)$. Como φ é sobrejetora, existe $g' \in G'$ com $\varphi(g') = g$, logo $j(\varphi(g'))h_1 = h_2k(\varphi(g'))$, de onde segue que $h_1 \sim_{(j\circ\varphi,k\circ\varphi)_R} h_2$. Por outro lado, se $h_1 \sim_{(j\circ\varphi,k\circ\varphi)_R} h_2$, existe $g' \in G'$ tal que $j(\varphi(g'))h_1 = h_2k(\varphi(g'))$, assim tomando $g_0 = \varphi(g')$, temos $j(g_0)h_1 = h_2k(g_0)$ e $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$. Portanto as (j,k)-classes de congruências são iguais as $(j \circ \varphi, k \circ \varphi)$-classes de congruências, de onde segue que $r(j \circ \varphi, k \circ \varphi) = r(j,k)$.

□

Proposição 3.1.6. Sejam $\psi : H \to H'$ isomorfismo, e $j,k : G \to H$ homomorfismos. Assim temos $r(\psi \circ j, \psi \circ k) = r(j,k)$.

Prova:. Sejam $h_1, h_2 \in H$ com $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$. Assim existe $g \in G$ tal que $j(g)h_1 = h_2k(g)$, logo $(\psi\circ j)(g)\psi(h_1) = \psi(j(g)h_1) = \psi(h_2k(g)) = \psi(h_2)(\psi\circ k)(g)$. Portanto $\psi(h_1) \sim_{(\psi\circ j,\psi\circ k)_R} \psi(h_2)$. Por outro lado, se $\psi(h_1), \psi(h_2) \in H'$, com $\psi(h_1) \sim_{(\psi\circ j,\psi\circ k)_R} \psi(h_2)$, então existe $g \in G$ tal que $(\psi\circ j)(g)\psi(h_1) = \psi(h_2)(\psi\circ k)(g)$. Sendo ψ homomorfismo temos $\psi(j(g)h_1) = \psi(h_2k(g))$, de onde segue que, $j(g)h_1 = h_2k(g)$, pois ψ é isomorfismo. Portanto $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$. Logo ψ induz uma bijeção entre $R(\psi \circ j, \psi \circ k) = R(j,k)$, ou seja, $r(\psi \circ j, \psi \circ k) = r(j,k)$. □

Proposição 3.1.7. Sejam $\varphi, \varphi' : H \to H$ automorfismos internos dados por $\varphi(h) = h_0 h h_0^{-1}$ e $\varphi'(h) = h_0' h (h_0')^{-1}$, com $h_0, h_0' \in H$ fixados. Assim $r(\varphi \circ j, \varphi' \circ k) = r(j,k)$.

Prova:. Sejam $h_1, h_2 \in H$ com $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$. Assim existe $g \in G$ tal que $j(g)h_1 = h_2 k(g)$. Aplicando φ temos $\varphi(j(g))h_0 h_1 h_0^{-1} = h_0(h_2 k(g))h_0^{-1}$ assim

$$\varphi(j(g))h_0 h_1 = h_0 h_2 k(g).$$

Aplicando φ' na equação anterior temos $h_0'(\varphi(j(g))h_0 h_1)(h_0')^{-1} = h_0'(h_0 h_2 k(g))(h_0')^{-1} = h_0' h_0 h_2((h_0')^{-1} h_0')k(g)(h_0')^{-1} = h_0' h_0 h_2 (h_0')^{-1} \varphi'(k(g))$, logo temos que

$$(\varphi \circ j)(g))h_0 h_1 (h_0')^{-1} = h_0 h_2 (h_0')^{-1} (\varphi' \circ k)(g)$$

Portanto, $h_0 h_1 (h_0')^{-1} \sim_{(\varphi \circ j, \varphi' \circ k)_R} h_0 h_2 (h_0')^{-1}$.

Por outro lado, se $h_0 h_1 (h_0')^{-1} \sim_{(\varphi \circ j, \varphi' \circ k)_R} h_0 h_2 (h_0')^{-1}$, então existe $g \in G$, tal que

$$(\varphi \circ j)(g))h_0 h_1 (h_0')^{-1} = h_0 h_2 (h_0')^{-1} (\varphi' \circ k)(g). \qquad (*)$$

Como $(\varphi \circ j)(g)) = h_0(j(g))h_0^{-1}$ e $(\varphi' \circ k)(g) = h_0'(k(g))(h_0')^{-1}$, substituindo em (*) temos $h_0(j(g))h_1(h_0')^{-1} = h_0 h_2 k(g)(h_0')^{-1}$, logo $j(g)h_1 = h_2 k(g)$. Portanto $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$.

Assim a correspondência $h \to h_0 h (h_0')^{-1}$, induz uma bijeção entre $R(j,k)$ e $R(\varphi \circ j, \varphi' \circ k)$. Portanto $r(j,k) = r(\varphi \circ j, \varphi' \circ k)$. □

Proposição 3.1.8. Se $(H,+)$ é abeliano então cada (j,k)-classe de congruência é uma classe lateral da imagem de $j - k : G \to H$ dado por $(j-k)(g) = j(g) - k(g)$. Portanto $r(j,k) = ord\left(\frac{H}{Im(j-k)}\right)$.

Prova:. Suponha H abeliano, e considere a classe de Reidemeister $[h_1]_R$. Mostraremos que esta classe é uma classe lateral de $(j-k)$. Dado $h_2 \in [h_1]_R$, temos $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$, então existe $g \in G$ tal que $j(g) + h_1 = h_2 + k(g)$. Logo, $h_1 - h_2 = -j(g) + k(g) = -((j-k)(g)) = (j-k)(g^{-1}) \in Im(j-k)$. Assim h_2 pertence a classe lateral $[h_1] = \{h \in H \mid h_1 - h \in Im(j-k)\}$.

Por outro lado, se h_2 pertence a classe lateral $[h_1]$, temos $h_1 - h_2 \in Im(j-k)$, logo existe $g \in G$ tal que $j(g) - k(g) = h_1 - h_2$. Assim, $-j(g) + h_1 = h_2 - k(g)$, e sendo $-j(g) = j(g^{-1})$ e $-k(g) = k(g^{-1})$, temos $j(g^{-1}) + h_1 = h_2 - k(g^{-1})$. Portanto $h_1 \sim_{(j,k)_R} h_2$, ou seja, $h_2 \in [h_1]_R$.

3.2. O $\mathcal{D}$-Número de Reidemeister

Consideremos E_1 e E_2 espaços conexos por caminhos, $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$, com $(f, p) \in \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é uma $\mathcal{D}$-classe qualquer para $q : E_2 \to B$ e $s : B \to E_2$.

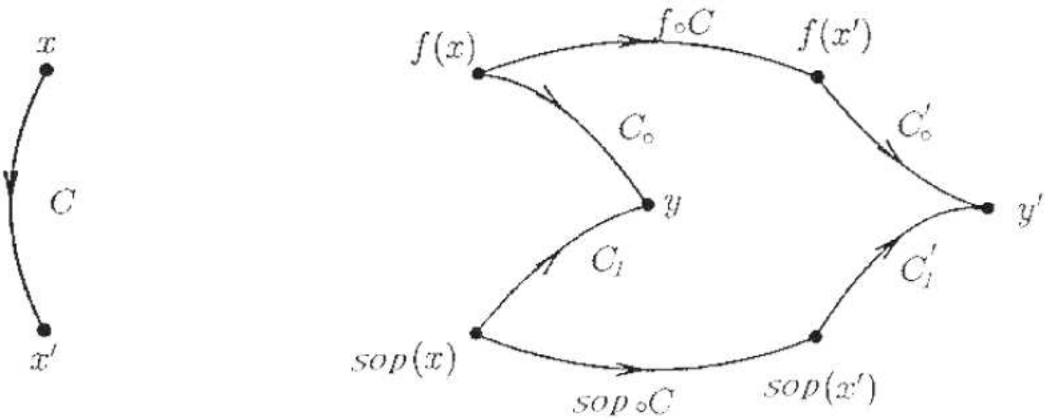
Seja $x \in E_1$ qualquer, assim podemos considerar os homomorfismos induzidos $f_{x\#} : \pi_1(E_1, x) \to \pi_1(E_2, f(x))$ e $(s \circ p)_{x\#} : \pi_1(E_1, x) \to \pi_1(E_2, (s \circ p)(x))$. Agora, para $y \in E_2$, considere C_0 um caminho unindo $f(x)$ à y, então C_0 induz um homomorfismo $C_0^{\#} : \pi_1(E_1, f(x)) \to \pi_1(E_2, y))$, onde $C_0^{\#}([C]) = [C_0^{-1}CC_0]$.

Da mesma maneira, sendo C_1 um caminho unindo $(s \circ p)(x)$ à y, temos um homomorfismo $C_1^{\#} : \pi_1(E_2, (s \circ p)(x)) \to \pi_1(E_2, y)$, dado por $C_1^{\#}([C]) = [C_1^{-1}CC_1]$. Podemos assim tomar as composições $C_1^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#}, C_0^{\#} \circ f_{x\#} : \pi_1(E_1, x) \to \pi_1(E_2, y)$, e considerar o número de Reidemeister de $C_1^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#}$ e $C_0^{\#} \circ f_{x\#}$. A seguir mostraremos que este número depende somente de f e $s \circ p$.

Proposição 3.2.1. O número $r(C_1^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#}, C_0^{\#} \circ f_{x\#})$, depende somente de f e $s \circ p$.

Prova:. Sejam $x' \in E_1$, $y' \in E_2$, C_0' caminho ligando $f(x')$ a y' e C_1' caminho ligando $(s \circ p)(x')$ a y'. Devemos mostrar que $r(C_1^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#}, C_0^{\#} \circ f_{x\#}) = r(C_1'^{\#} \circ (s \circ p)_{x'\#}, C_0'^{\#} \circ f_{x'\#})$.

Seja C caminho em E_1 unindo x a x' e considere a figura abaixo.



Considere o isomorfismo $C^{-1\#} : \pi_1(E_1, x') \to \pi_1(E_1, x)$ induzido por C^{-1}.

Pela Proposição 3.1.5 temos

(1) $r(C_1^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#}, C_0^{\#} \circ f_{x\#}) = r(C_1^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#} \circ C^{-1\#}, C_0^{\#} \circ f_{x\#} \circ C^{-1\#})$.

Da mesma forma o caminho $C_0^{-1}(f \circ C)C_0'$, induz um isomorfismo $C_0'^{\#}(f \circ C)^{\#}C_0^{-1\#} : \pi_1(E_2, y) \to \pi_1(E_2, y')$ e pela Proposição 3.1.6, podemos aplicar esse homomorfismo no lado direito da igualdade de (1), e obter a equação (2) abaixo

$$r(C_1^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#}, C_0^{\#}\circ f_{x\#}) = r(C_0'^{\#}(f\circ C)^{\#}C_0^{-1\#}C_1^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#}\circ C^{-1\#}, C_0'^{\#}(f\circ C)^{\#}\circ f_{x\#}\circ C^{-1\#}).$$

Observe agora, que $C_0'^{-1}(f\circ C)^{-1}C_0C_1^{-1}((s\circ p)\circ C)C_1'$ é um laço com ponto base y', assim ele induz um automorfismo interno

$$\phi = C_1'^{\#}((s\circ p)\circ C)^{\#}C_1^{-1\#}C_0^{\#}(f\circ C)^{-1\#}C_0'^{-1\#} : \pi_1(E_2, y') \to \pi_1(E_2, y').$$

Logo pela Proposição 3.1.7, podemos aplicar os pares de automorfismos internos (ϕ, id) do lado direito da igualdade de (2), e obter

$$(3)\ r(C_1^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#}, C_0^{\#}\circ f_{x\#}) = r(C_1'^{\#}\circ((s\circ p)\circ C)^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#}\circ C^{-1\#}, C_0'^{\#}(f\circ C)^{\#}\circ f_{x\#}\circ C^{-1\#}).$$

Temos que (*) $(f\circ C)^{\#}\circ f_{x\#}\circ C^{-1\#} = f_{x'\#}$. De fato, dado $[D]\in\pi_1(E_1, x')$, temos que $(f\circ C)^{\#}\circ f_{x\#}\circ C^{-1\#}([D]) = [(f\circ C)^{-1}(f\circ(CDC^{-1}))(f\circ C)] = [f\circ(C^{-1}CDC^{-1}C)] = [f\circ D] = f_{x'\#}([D])$.

Da mesma forma temos (**) $((s\circ p)\circ C)^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#}\circ C^{-1\#} = (s\circ p)_{x'\#}$. Substituindo (*) e (**) em (3), temos

$$r(C_1^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#}, C_0^{\#}\circ f_{x\#}) = r(C_1'^{\#}\circ(s\circ p)_{x'\#}, C_0'^{\#}\circ f_{x'\#}).$$

$\square$

Definição 3.2.2. Dados $(f,p)\in\mathcal{D}$, o $\mathcal{D}$-número de Reidemeister de f e p, é o número de Reidemeister de $C_0^{\#}\circ f_{x\#}$ e $C_1^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#}$, ou seja, $r(f,p) = r(C_0^{\#}\circ f_{x\#}, C_1^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#})$, para quaisquer $x\in E_1$ e $y\in E_2$ e caminhos C_0 e C_1 unindo $f(x)$ a y e $(s\circ p)(x)$ a y, respectivamente. Da mesma forma denotamos o conjunto das $\mathcal{D}$-classes de Reidemeister de f e p, por $R(f,p) = R(C_0^{\#}\circ f_{x\#}, C_1^{\#}\circ(s\circ p)_{x\#})$.

Teorema 3.2.3. *Se f é homotópica à f' e p é homotópica à p', então $r(f,p) = r(f',p')$.*

Prova:. Sejam F homotopia entre f e f', e P homotopia entre p e p'. Tome $x\in E_1$ e $y\in E_2$, seja C_0 caminho em E_2 unindo $f(x)$ a y e C_1 caminho unindo $(s\circ p)(x)$ a y.

Dado $[C]\in\pi_1(E_1, x)$, temos

$$< F, x >^{\#}\circ f_{x\#}([C]) = [< F, x >^{-1} f\circ C < F, x >] \quad e \quad f'_{x\#}([C]) = [f'\circ C].$$

Note que $< F, x >: I \to E_2$ é um caminho unindo $f(x)$ à $f'(x)$, assim

$$[< F, x >^{-1} f \circ C < F, x >] = [f' \circ C].$$

Portanto, $f'_{x\#} =< F, x >^{\#} \circ f_{x\#}$.

Analogamente temos $(s \circ p')_{x\#} = (s < P, x >)^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#}$, segue que

$$\begin{aligned} r(f,p) &= r(C_0^{\#} \circ f_{x\#}, C_1^{\#} \circ (s \circ p)_{x\#}) \\ &= r(C_0^{\#} \circ < F, x >^{-1\#} \circ f'_{x\#}, C_1^{\#} \circ (s < P, x >)^{-1\#} \circ (s \circ p')_{x\#}) \\ &= r((< F, x >^{-1} C_0)^{\#} \circ f'_{x\#}, (s < P, x >^{-1} C_1)^{\#} \circ (s \circ p')_{x\#}) = r(f', p'). \end{aligned}$$

□

3.3. $\mathcal{D}$-Conjunto de Jiang

Definiremos nesta seção o $\mathcal{D}$-conjunto de Jiang, e estudaremos a relação entre esse conjunto, o $\mathcal{D}$-número de Reidemeister e o $\mathcal{D}$-número de Nielsen.

Definição 3.3.1. Seja $(H, P) \in \mathcal{D}$, com H laço em f. Observe que da condição $q \circ H = P$ temos P laço em p, assim dado $x_0 \in \Gamma(f; s(B)) := f^{-1}(s(B))$, temos que $< H, x_0 > *s < P, x_0 >^{-1}$ é um laço em $f(x_0)$.
Logo

$$[< H, x_0 > *s < P, x_0 >^{-1}] \in \pi_1(E_2, f(x_0)).$$

O $\mathcal{D}$-conjunto de Jiang, que denotaremos por $T(f, p, x_0, \mathcal{D})$, é o subconjunto de $\pi_1(E_2, f(x_0))$, cujos elementos são da forma descrita acima.

Proposição 3.3.2. $T(f, p, x_0, \mathcal{D}) \subset Ker(q_\#)$.

Prova:. Dado $[< H, x_0 > *s < P, x_0 >^{-1}] \in T(f, p, x_0, \mathcal{D})$, temos que $q_\#([< H, x_0 > *s < P, x_0 >^{-1}]) = [q < H, x_0 > *(q \circ s) < P, x_0 >^{-1}]$. Como $(H, P) \in \mathcal{D}$, temos $q \circ H = P$, assim o caminho $q < H, x_0 >: I \to B$ é igual ao caminho $< P, x_0 >: I \to B$; de fato,

$$q < H, x_0 > (t) = q(H(t))(x_0) = P(t)(x_0) =< P, x_0 > (t), \quad \forall\ t \ \in \ I.$$

Além disso, temos por hipótese que $q \circ s = 1_B$, assim

$$q_\#([< H, x_0 > *s < P, x_0 >^{-1}]) = [< P, x_0 > * < P, x_0 >^{-1}] = [p(x_0)].$$

Portanto, $[< H, x_0 > *s < P, x_0 >^{-1}] \in Ker(q_\#)$. □

Definição 3.3.3. Seja $R(f,p,x_0)$ o conjunto das $\mathcal{D}$-classes de Reidemeister, considerando $x = x_0$ e $y = f(x_0)$ na definição 3.2.2. Para qualquer subconjunto $A \subset \pi_1(E_2, x_0)$, denotamos por $R(f,p,x_0;A)$ o subconjunto de $R(f,p,x_0)$ cujos representantes estão em A. Além disso denotaremos por $r(f,p;A)$ a cardinalidade de $R(f,p,x_0;A)$.

Proposição 3.3.4. Seja $\mathcal{D}_p$ formada pelos pares, $(H,p) \in \mathcal{D}$, então o $\mathcal{D}_p$-conjunto de Jiang, $T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$, é um subgrupo de $\pi_1(E_2, f(x_0))$.

Prova:. O caminho $s < p, x_0 >^{-1}$ é um laço constante em $(s \circ p)(x_0) = f(x_0)$, então para cada $[< H, x_0 > *s < p, x_0 >^{-1}] \in T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$ temos $[< H, x_0 > *s < p, x_0 >^{-1}] = [< H, x_0 >][s < p, x_0 >^{-1}] = [< H, x_0 >][f(x_0)] = [< H, x_0 >]$. Portanto, todo elemento de $T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$ é da forma $[< H, x_0 >]$, com $(H,p) \in \mathcal{D}_p$ e H laço em f.

Dados $[< H, x_0 >]$ e $[< H', x_0 >]$ em $T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$, temos

$$[< H, x_0 >][< H', x_0 >] = [< HH', x_0 >];$$

como HH' é laço em f e $(HH',p) \in \mathcal{D}_p$, temos $[< HH', x_0 >] \in T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$. Portanto, vale o fechamento.

Tomando H homotopia constante igual a f, temos pela Proposição 2.1.6 que $(H,p) \in \mathcal{D}_p$; além disso temos H laço em f. Portanto o elemento neutro $[f(x_0)]$=$[< H, x_0 >] \in T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$.

Agora, dado $[< H, x_0 >] \in T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$, temos $(H,p) \in \mathcal{D}_p$, com H laço em f, assim pela Proposição 2.1.6 temos $(H^{-1},p) \in \mathcal{D}_p$; além disso também temos que H^{-1} é um laço em f. Portanto $[< H, x_0 >]^{-1} = [< H^{-1}, x_0 >] \in T(f,p,x_0,\mathcal{D}_p)$. □

Fixe $x_0 \in \Gamma(f; s(B))$, assim para cada $x \in \Gamma(f; s(B))$ e C caminho ligando x_0 a x, temos $[(f \circ C) * (s \circ p) \circ C^{-1}] \in \pi_1(E_2, f(x_0))$; logo podemos considerar

$$\varphi : \Gamma(f; s(B)) \to R(f,p,x_0),$$

Definida por $\varphi(x) = [[(f \circ C) * (s \circ p) \circ C^{-1}]]_R$.
Veremos, que φ se fatora, como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(f; s(B)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & R(f,p,x_0) \\
\widetilde{\Gamma}(f; s(B)) \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Além disso, $\widetilde{\varphi}$ será injetora.

Observe que $q_{\#}([(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}]) = [(q\circ f)\circ C*((q\circ s)*p\circ C^{-1})] = [(p\circ C)*p\circ C^{-1}] = [p(x_0)]$, assim $Im(\widetilde{\varphi}) \subset R(f,p,x_0;Ker(q_{\#}))$.

Teorema 3.3.5. *Existe uma função injetora $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Gamma}(f;s(B)) \to R(f,p,x_0;Ker(q_{\#}))$, dada por*

$$\widetilde{\varphi}(\alpha) = [[(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}]]_R,$$

onde C é um caminho unindo x_0 a $x \in \alpha$.

Prova:. Devemos, mostrar que para $x' \in \alpha \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))$,

$$[[(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}]]_R = [[(f\circ C')*(s\circ p)\circ C'^{-1}]]_R.$$

Onde C é um caminho unindo x_0 a $x \in \alpha$ e C' é um caminho unindo x_0 a $x' \in \alpha$.

Como $x \sim_{(f,p)} x'$, existe um caminho D em E_1, unindo x a x', tal que $[f\circ D] = [(s\circ p)\circ D]$. Assim, $[CDC'^{-1}] \in \pi_1(E_1, x_0)$, com

$$\begin{aligned}
&f_{x_0\#}([CDC'^{-1}])[(f\circ C')*(s\circ p)\circ C'^{-1}] = [f\circ C][f\circ D][(s\circ p)\circ C'^{-1}]\\
&=[f\circ C][(s\circ p)\circ D][(s\circ p)\circ C'^{-1}]\\
&= [f\circ C]([(s\circ p)\circ C^{-1}][(s\circ p)\circ C])[(s\circ p)\circ D][(s\circ p)\circ C'^{-1}]\\
&=[f\circ C][(s\circ p)\circ C^{-1}][(s\circ p)(CDC'^{-1})] = [(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}](s\circ p)_{x_0\#}[CDC'^{-1}].
\end{aligned}$$

Logo, $[(f\circ C')*(s\circ p)\circ C'^{-1}]$ está $(f_{x_0\#}, (s\circ p)_{x_0\#})$- relacionado com $[(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}]$. Portanto $[[(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}]]_R = [[(f\circ C')*(s\circ p)\circ C'^{-1}]]_R$.

Mostramos acima que $\widetilde{\varphi}$ está bem definida, resta mostrarmos que $\widetilde{\varphi}$ é injetora. Sejam $\alpha, \beta \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))$ com $\widetilde{\varphi}(\alpha) = \widetilde{\varphi}(\beta)$. Tomando $x \in \alpha$, $x' \in \beta$, temos por hipótese que, existem C e C' caminhos em E_1 unindo x_0 a x e x_0 a x', respectivamente, onde $[(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}]$ está $(f_{x_0\#}, (s\circ p)_{x_0\#})$-relacionado com $[(f\circ C)*(s\circ p)\circ C^{-1}]$. Assim, existe um laço D no ponto base x_0 com

$$[f\circ D][f\circ C][(s\circ p)\circ C]^{-1} = [f\circ C'][(s\circ p)\circ C']^{-1}[(s\circ p)\circ D].$$

Operando com $[f\circ C']^{-1}$ e $[(s\circ p)\circ C]$ na equação acima, temos

$$[f\circ C']^{-1}[f\circ D][f\circ C] = [(s\circ p)\circ C']^{-1}[(s\circ p)\circ D][(s\circ p)\circ C].$$

Portanto, $[f \circ (C'^{-1}DC)] = [(s \circ p)(C'^{-1}DC)]$, onde $C'^{-1}DC$ é um caminho em E_1 unindo x' a x. Segue que $x' \sim_{(f,p)} x$ e $\alpha = \beta$.

□

Corolário 3.3.6. *Dado* $(f,p) \in \mathcal{D}$ *e* $x_0 \in \Gamma(f; s(B))$*, temos que*

$$n(f,p,\mathcal{D}) \leq r(f,p; Ker(q_{\#})).$$

Prova:. Pelo Teorema 3.3.5, existe uma injeção $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Gamma}(f; s(B)) \to R(f,p,x_0; Ker(q_{\#}))$. Portanto, $n(f,p,\mathcal{D}) \leq card(\widetilde{\Gamma}(f; s(B))) \leq r(f,p; Ker(q_{\#}))$.

□

Para o próximo teorema é fundamental que o ponto escolhido x_0, para a construção de $\widetilde{\varphi}$, esteja numa classe essencial; assim supomos de agora em diante que $n(f,p,\mathcal{D}) > 0$ e $x_0 \in \alpha_0 \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ com α_0 essencial.

Teorema 3.3.7. *Cada elemento de* $R(f,p,x_0; T(f,p,x_0,\mathcal{D}))$ *é imagem por* φ *de uma* $\mathcal{D}$*-classe essencial de* $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$.

Prova:. Seja $[\alpha]_R \in R(f,p,x_0; T(f,p,x_0,\mathcal{D}))$, com $\alpha = [< H, x_0 > * s(< P, x_0 >^{-1})]$. Como $\alpha_0 \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$ é essencial, e $(H,P) \in \mathcal{D}$, existe $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$ essencial com $\alpha_0 \sim_{(H,P)} \beta$. Assim dado $x \in \beta$, existe um caminho C em E_1 unindo x a x_0 tal que $[< H, C >] = [s(< P, C >)]$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\alpha &= [< H, x_0 >][s(< P, x_0 >)]^{-1} \\
&= [< H, x_0 >][s(< P, C >)^{-1} s(< P, C >)][s(< P, x_0 >)]^{-1} \\
&= [< H, x_0 >][s(< P, C >)^{-1}][s(< P, C >)][s(< P, x_0 >)]^{-1} \\
&= [< H, x_0 >][< H^{-1}, C^{-1} >][s(< P, C >)][s(< P^{-1}, x_0 >)] \\
&= [< HH^{-1}, x_0 C^{-1} >][s(< PP^{-1}, C x_0 >)] \\
&= [< f, C^{-1} >][s(< p, C >)] = [(f \circ C^{-1}) * (s \circ p) \circ C] \qquad .
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(\beta) = [[(f \circ C^{-1}) * (s \circ p) \circ C]]_R = [\alpha]_R$, onde β é essencial. □

Corolário 3.3.8. $r(f,p; T(f,p,x_0,\mathcal{D})) \leq n(f,p,\mathcal{D}) \leq r(f,p; Ker(q_{\#}))$.

Corolário 3.3.9. *Se* $T(f,p,x_0,\mathcal{D}) = Ker(q_{\#})$*, então* $n(f,p,\mathcal{D}) = r(f,p; Ker(q_{\#}))$.

Prova:. Suponha $T(f,p,x_0,\mathcal{D}) = Ker(q_{\#})$, então $r(f,p; T(f,p,x_0,\mathcal{D})) = r(f,p; Ker(q_{\#}))$, assim o resultado segue do Corolário 3.3.8. □

Definição 3.3.10. Denotaremos respectivamente por $T(f, x_0)$ e $T(E_2, f(x_0))$, os subconjunto de $\pi_1(E_2, f(x_0))$, formado por elementos da forma $[< H, x_0 >]$ com H laço em f e $[< H, f(x_0) >]$ com H laço na identidade de E_2.

Teorema 3.3.11. *Temos as seguintes igualdades e inclusões.*

1) $T(E_2, f(x_0)) \subset T(f, x_0)$;

2) $T(f, p, x_0, \mathcal{D}_p) \subset T(f, x_0)$;

3) $T(f, p, x_0, \mathcal{D}) \subset T(f, x_0)s_{\#}(T(p, x_0))$;

4) $T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\Delta_2)) = T(f, x_0)$.

Prova:. 1) Dado $\alpha = [< H, f(x_0) >] \in T(E_2, f(x_0))$, assim $F : I \to F(E_1, E_2)$ dada por $F(t) = H(t) \circ f$ é um laço em f, além disso temos que

$$< F, x_0 > (t) = F(t)(x_0) = H(t)(f(x_0)) =< H, f(x_0) > (t), \ \forall t \in I.$$

Portanto, $T(E_2, f(x_0)) \subset T(f, x_0)$.
2) Na Proposição 3.3.4, vimos que $T(f, p, x_0, \mathcal{D}_p)$ é formada por elementos da forma $[< H, x_0 >]$, com $(H, p) \in \mathcal{D}_p$ e H laço em f, assim temos a inclusão $T(f, p, x_0, \mathcal{D}_p) \subset T(f, x_0)$.
3) Dado $[< H, x_0 > *s(< P, x_0 >^{-1})] \in T(f, p, x_0, \mathcal{D})$, então $[< H, x_0 > *s(< P, x_0 >^{-1})] = [< H, x_0 >][s(< P, x_0 >^{-1})] = [< H, x_0 >]s_{\#}[< P, x_0 >^{-1}] \in T(f, x_0)s_{\#}(T(p, x_0))$. Portanto temos a inclusão $T(f, p, x_0, \mathcal{D}) \subset T(f, x_0)s_{\#}(T(p, x_0))$.
4)Temos $\mathcal{D}(\Delta_2)$, formado pelos pares de homotopias $(F, \overline{a})$, com $\overline{a}$ homotopia constante na função constante em a, e F homotopia qualquer, assim $T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\Delta_2)) = \{[< F, x_0 >] \ / \ F$ laço em f $\}$, logo $T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\Delta_2)) = T(f, x_0)$.

□

Corolário 3.3.12. *Se* $T(f, x_0) = \pi_1(E_2, f(x_0))$, *então* $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) = r(f, p; Ker(q_{\#}))$.

Prova:. Suponhamos $T(f, x_0) = \pi_1(E_2, f(x_0))$, então segue do Teorema 3.3.11 que $T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\Delta_2)) = \pi_1(E_2, f(x_0))$.

Assim temos $Ker(q_{\#}) \subset \pi_1(E_2, f(x_0)) = T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\Delta_2))$ e pela Proposição 3.3.2 temos $T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\Delta_2)) \subset Ker(q_{\#})$, logo $Ker(q_{\#}) = T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\Delta_2))$.

Portanto, usando o Corolário 3.3.9 temos que $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) = r(f, p; Ker(q_{\#}))$.

□

Proposição 3.3.13. Se f é uma função constante, então $T(f, x_0) = \pi_1(E_2, f(x_0))$.

Prova:. Dado $[C] \in \pi_1(E_2, f(x_0))$, consideremos $F : I \to F(E_1, E_2)$ tal que $F(t)(x) = C(t)$, $\forall\ x \in E_1, \forall t \in I$. Assim, temos que F é um laço em $F(E_1, E_2)$ na função constante f, pois

$$F(0)(x) = C(0) = f(x_0) = f(x), \quad e \quad F(1)(x) = C(1)(x) = f(x_0) = f(x), \forall x \in E_1.$$

Além disso, $< F, x_0 > (t) = F(t)(x_0) = C(t), \forall t \in I$, logo $< F, C >= C$.
Portanto, $[C] = [< F, C >] \in T(f, x_0)$. □

Proposição 3.3.14. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas, $x_0 \in \Gamma(f, g)$ com $\pi_1(Y, g(x_0)) = T(g, x_0)$, então $T((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i)) = Ker(q_{\#})$ para $i = 1, 3$.

Prova:. Sabemos pela Proposição 3.3.2 que $T((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i)) \subset Ker(q_{\#})$, assim basta mostrarmos que $Ker(q_{\#}) \subset T((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i))$.

Seja $[\alpha] = [(\alpha_1, \alpha_2)] \in Ker(q_{\#}) \subset \pi_1(Y \times Y, (f(x_0), g(x_0)))$, assim temos $q_{\#}([\alpha]) = [\alpha_1] = [f(x_0)]$. Por hipótese temos $\pi_1(Y, g(x_0)) = T(g, x_0)$, assim $[\alpha_2] = [< F, x_0 >]$ com F laço em g, logo $[\alpha] = [(f(x_0), < F, x_0 >)]$, com F laço em g.

Consideremos $[\beta] = [< (F^{-1}, G_0), x_0 > *s(< F^{-1}, x_0 >)^{-1}] \in T((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i))$ com G_0 homotopia constante em g. Mostraremos a seguir que $[\alpha] = [\beta] \in T((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i))$, demonstrando assim o resultado.

O caminho $\beta =< (F^{-1}, G_0), x_0 > *s(< F^{-1}, x_0 >)^{-1} : I \to Y \times Y$ é dado por

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \begin{cases} < (F^{-1}, G_0), x_0 > (2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ s(< F, x_0 >)(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (F^{-1}(2t)(x_0), g(x_0)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (F(2t - 1)(x_0), F(2t - 1)(x_0)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= (< F^{-1}F, x_0 >, g(x_0)* < F, x_0 >)(t). \end{aligned}$$

Como $[F^{-1}F] = [f]$, temos pela Proposição 1.1.6 que $[< F^{-1}F, x_0 >] = [f(x_0)]$; além disso temos $[g(x_0)* < F, x_0 >] = [< F, x_0 >]$, logo

$$[\beta] = [(< F^{-1}F, x_0 >, g(x_0)* < F, x_0 >)] = [(f(x_0), < F, x_0 >)] = [\alpha]. \quad \square$$

Proposição 3.3.15. Sejam $g, f : X \to Y$ funções contínuas com g homotópica a uma função constante, então $n((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i)) = r((f, g), f; Ker(q_{\#}))$, $i = 1, 3$.

Prova:. Suponhamos g homotópica a g_0, com g_0 função constante, assim pelo Corolário 2.4.4 temos que

$$(1) \quad n((f,g),f,\mathcal{D}(\Delta_i)) = n((f,g_0),f,\mathcal{D}(\Delta_i)).$$

Pela Proposição 3.3.13 temos $\pi_1(Y, g_0(x_0)) = T(g_0, x_0)$; assim da Proposição 3.3.14 e Corolário 3.3.9 temos

$$(2) \quad n((f,g_0),f,\mathcal{D}(\Delta_i)) = r((f,g_0),f;Ker(q_{\#})).$$

Além disso do Teorema 3.2.3 temos

$$(3) \quad r((f,g_0),f;Ker(q_{\#})) = r((f,g),f;Ker(q_{\#})).$$

Segue de (1),(2) e (3) que $n((f,g),f,\mathcal{D}(\Delta_i)) = r((f,g),f;Ker(q_{\#}))$. □

Proposição 3.3.16. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas, $x_0 \in \Gamma(f,g)$ e $T(Y, g(x_0)) = \pi_1(Y, g(x_0))$, então

$$n((f,g),f,\mathcal{D}(\Delta_i)) = r((f,g),g,Ker(q_{\#})), \quad i = 1,3.$$

Prova:. Suponhamos que $T(Y, g(x_0)) = \pi_1(Y, g(x_0))$, assim segue do Teorema 3.3.11(1) que $T(g, x_0) = \pi_1(Y, g(x_0))$.

Logo, pela Proposição 3.3.14, temos $T((f,g),f,\mathcal{D}(\Delta_i)) = Ker(q_{\#})$ para $i = 1$ e $i = 3$; portanto do Corolário 3.3.9 temos que

$$n((f,g),f,\mathcal{D}(\Delta_i)) = r((f,g),f,Ker(q_{\#})).$$

□

Para o resultado anterior foi fundamental a hipótese $T(Y, g(x_0)) = \pi_1(Y, g(x_0))$, assim é natural questionar em quais espaços se tem tal igualdade; logo a seguir mostraremos que para certos espaços chamados H-espaços a igualdade é verificada.

Definição 3.3.17. E_2 é um H-espaço se existe $x_0 \in E_2$ e uma função contínua $\mu : E_2 \times E_2 \to E_2$ tal que $\mu(.,y_0) : E_2 \to E_2$ dada por $\mu(.,y_0)(x) = \mu(x,y_0)$ e $\mu(y_0,.) : E_2 \to E_2$ dada por $\mu(y_0,.)(x) = \mu(y_0,x)$, são homotópicas a aplicação identidade de E_2.

Definição 3.3.18. Um grupo de lie é um grupo topológico G que tem a estrutura de uma variedade diferenciável no qual as funções produto $\mu : G\times G \to G$ dada por $\mu(g_1,g_2) = g_1g_2$ e inversão $\eta : G \to G$ dada por $\eta(g) = g^{-1}$ são diferenciáveis.

Teorema 3.3.19. *Suponhamos que E_2 seja*

1) Um H-espaço

2) Um espaço da forma G/G_0 onde G é um grupo de lie e G_0 é um subgrupo fechado e conexo.

Então $T(E_2, f(x_0)) = \pi_1(E_2, f(x_0))$.

Prova:. Suponhamos que E_2 é um H-espaço e denotemos $y_0 = f(x_0)$. Assim existe uma função contínua $\mu : E_2 \times E_2 \to E_2$ tal que $\mu(., y_0) : E_2 \to E_2$ dada por $\mu(., y_0)(x) = \mu(x, y_0)$ e $\mu(y_0, .) : E_2 \to E_2$ dada por $\mu(y_0, .)(x) = \mu(y_0, x)$, são homotópicas a aplicação identidade de E_2. Seja $F : I \to F(E_2, E_2)$ homotopia entre 1_{E_2} e $\mu(y_0, .)$; assim dado $[\alpha] \in \pi_1(E_2, y_0)$, temos que $G : I \to F(E_2, E_2)$ dada por $G(t)(x) = \mu(\alpha(t), x)$ é um laço em $F(E_2, E_2)$ com ponto base $\mu(y_0, .)$. Consideremos agora a composição dos caminhos

$$H = F * G * F^{-1} : I \to F(E_2, E_2).$$

Assim, H é um laço na função identidade de E_2 e $< H, y_0 >: I \to E_2$ é um laço em y_0. Observe que $< G, y_0 >= \mu(., y_0) \circ \alpha$, assim

$$< H, y_0 >=< F, y_0 >< G, y_0 >< F^{-1}, y_0 >=< F, y_0 > (\mu(., y_0) \circ \alpha) < F^{-1}, y_0 > .$$

Como $\mu(., y_0)$ é homotópica à 1_{E_2} e $< F^{-1}, y_0 >$ é um caminho unindo $(\mu(., y_0) \circ \alpha)(0)$ à $(1_{E_2} \circ \alpha)(0)$, temos

$$[< H, y_0 >] = [< F, y_0 > (\mu(., y_0) \circ \alpha) < F^{-1}, y_0 >] = [1_{E_2} \circ \alpha] = [\alpha].$$

Suponha $E_2 = G/G_0$, com G um grupo de Lie com elemento neutro e_0 e G_0 um subgrupo fechado e conexo, assim a projeção $q : G \to G/G_0$ é um fibrado localmente trivial com fibra conexa G_0. Assim temos a seguinte sequência exata

$$... \to \pi_1(G_0, e_0) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_1(G, e_0) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_1(G/G_0, e_0G_0) \stackrel{\Delta}{\to} 1.$$

Segue que $q_\# : \pi_1(G, e_0) \to \pi_1(G/G_0, e_0G_0)$ é sobrejetora. Logo, dado $[\beta] \in \pi_1(G/G_0, e_0G_0)$, existe $[\alpha] \in \pi_1(G, e_0)$ tal que $q_\#[\alpha] = \beta$. Seja $H : I \to F(G/G_0, G/G_0)$ dada por $H(t)(gG_0) = \alpha(t)gG_0$; assim H é um laço na identidade de G/G_0 e $< H, e_0G_0 > (t) = H(t)e_0G_0 = \alpha(t)G_0 = q(\alpha(t))$, $\forall\ t \in I$. Portanto $[< H, e_0G_0 >] = [q \circ \alpha] = q_\#[\alpha] = [\beta]$.

$\square$

Corolário 3.3.20. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas e $x_0 \in \Gamma(f, g)$, se Y possuir o mesmo tipo de homotopia de um H-espaço ou for da forma de espaços em 2) do Teorema 3.3.19, então*

$$n((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i)) = r((f, g), f; Ker(q_\#)),\ \ i = 1, 3\ .$$

Prova:. Pelo Teorema 3.3.19, temos que $T(Y, g(x_0)) = \pi_1(Y, g(x_0))$ e $T(Y, f(x_0)) = \pi_1(Y, f(x_0))$, assim segue da Proposição 3.3.16 que

$$n((f, g), f, \mathcal{D}(\Delta_i)) = r((f, g), f, Ker(q_\#)), i = 1, 3.$$

$\square$

Teorema 3.3.21. *Se $T(E_2, f(x_0)) = \pi_1(E_2, f(x_0))$ então $\pi_1(E_2, f(x_0))$ é abeliano.*

Prova:. Sejam $[C]$ e $[D] \in T(E_2, f(x_0)) = \pi_1(E_2, f(x_0))$, assim existe um laço H na identidade de E_2 tal que $[< H, f(x_0) >] = [D]$, além disso temos que $[C]$ pode ser escrito da forma $[C] = [< 1_{E_2}, C >]$. Logo

$$\begin{aligned}[C][D] &= [< 1_{E_2}, C >][< H, f(x_0) >] = [< 1_{E_2}H, Cf(x_0) >] = [< H1_{E_2}, f(x_0)C) >] \\ &= [< H, f(x_0) >][< 1_{E_2}, C >] = [D][C].\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.3.22. *Se E_2 possuir o mesmo tipo de homotopia de um H-espaço, então $n(f, p, x_0, \mathcal{D}(\underline{q})) = r(f, p; Ker(q_\#))$.*

Prova:. Observe que se mostrarmos que $T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\underline{q})) = Ker(q_\#)$, então o resultado segue do Corolário 3.3.9, e como mostramos na Proposição 3.3.2 que $T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\underline{q})) \subset Ker(q_\#)$, para provar o resultado basta mostrarmos que $Ker(q_\#) \subset T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\underline{q}))$.

Sendo E_2 um H-espaço, temos pelo Teorema 3.3.19 que $\pi_1(E_2, f(x_0)) = T(E_2, f(x_0))$, logo do Teorema 3.3.11(1) temos $\pi_1(E_2, f(x_0)) = T(f, x_0)(*)$.

Seja $[\alpha] \in Ker(q_\#) \subset \pi_1(E_2, f(x_0))$, assim segue de (*), que existe uma homotopia H laço em f com $[\alpha] = [< H, x_0 >]$.

Seja $P = q \circ H$, mostraremos a seguir que $[\alpha] = [< H, x_0 > *s(< P, x_0 >)^{-1}]$.
Como $[\alpha] \in Ker(q_\#)$ temos que $[s(< P, x_0 >)^{-1}] = [f(x_0)]$, de fato,

$$[s(< P, x_0 >)^{-1}] = [s(< q \circ H, x_0 >)]^{-1} = [(s \circ q) < H, x_0 >]^{-1} = (s \circ q)_\#[\alpha]^{-1} = [f(x_0)].$$

Logo, $[\alpha] = [< H, x_0 >] = [< H, x_0 >][f(x_0)] = [< H, x_0 >][s(< P, x_0 >)^{-1}] = [< H, x_0 > *s(< P, x_0 >)^{-1}]$.

Por construção temos H laço em f e $(H, P) \in \mathcal{D}(\underline{q})$, assim

$$[\alpha] = [< H, x_0 > *s(< P, x_0 >)^{-1}] \in T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\underline{q})).$$

Portanto, $Ker(q_\#) \subset T(f, p, x_0, \mathcal{D}(\underline{q}))$ de onde segue o resultado. □

Proposição 3.3.23. Seja $(f, p) \in \mathcal{D}$, com q fibração, então $Ker(q_\#) = i_\#(\pi_1(F_{p(x_0)}, f(x_0)))$, onde $F_{p(x_0)} = q^{-1}(p(x_0))$ é a fibra sobre $p(x_0)$.

Prova:. Suponhamos que $q : E_2 \to B$ é uma fibração, com fibra $F_{p(x_0)} = q^{-1}(p(x_0))$, assim existe uma sequência exata longa

$$... \stackrel{\Delta}{\to} \pi_1(F_{p(x_0)}, f(x_0)) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_1(E_2, f(x_0)) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_1(B, p(x_0)) \stackrel{\Delta}{\to}$$

$$\to \pi_0(F_{p(x_0)}, f(x_0)) \stackrel{i_\#}{\to} \pi_0(E_2, f(x_0)) \stackrel{q_\#}{\to} \pi_0(B, p(x_0)).$$

Assim, pela exatidão da sequência temos $i_\#(\pi_1(F_{p(x_0)}, f(x_0))) = Ker(q_\#)$, de onde segue o resultado. □

Capítulo

4

$\mathcal{D}$-Índices

4.1. Índice de Ternas Admissíveis

Consideraremos nesta seção E_1 normal e admitiremos conhecidos os conceitos básicos da teoria de homologia e cohomologia.

Indicaremos por $H_*(E_1, A)$ e $H^*(E_1, A)$ os grupos totais em homologia e cohomologia, respectivamente, do par (E_1, A); $f_* : H_*(E_1, A) \to H_*(E_2, B)$ e $f^* : H^*(E_2, B) \to H^*(E_1, A)$ são os homomorfismos homológico e cohomológico induzidos por uma função $f : (E_1, A) \to (E_2, B)$.

$H_n(E_1, A)$ e $H^n(E_1, A)$ são os grupos n-dimensionais homológico e cohomológico do par (E_1, A); $f_n : H_n(E_1, A) \to H_n(E_2, B)$ e $f^n : H^n(E_2, B) \to H^n(E_1, A)$ são os homomorfismos correspondentes. Em alguns momentos, f_n será denotada por f_* no nível n.

Proposição 4.1.1. Sejam $A \subset X$ e N uma vizinhança fechada de $\overline{A}$, assim temos que a inclusão $e : (N, N - A) \to (X, X - A)$ é uma excisão.

Prova:. Observe que o par $(N, N - A) = (X - (X - N), (X - A) - (X - N))$, assim temos $e : (X - (X - N), (X - A) - (X - N)) \to (X, X - A)$. Logo, para e ser uma excisão basta mostrarmos que

$$(*) \qquad \overline{X - N} \subset Int(X - A).$$

Temos que $X - Int(N)$ é um fechado contendo $X - N$, assim

$$(1) \quad \overline{X - N} \subset X - Int(N).$$

Por hipótese temos $\overline{A} \subset Int(N)$, logo

$$(2) \quad X - Int(N) \subset X - \overline{A}.$$

Sendo $X - \overline{A}$ um aberto contendo $X - A$, segue que

$$(3) \quad X - \overline{A} \subset Int(X - A).$$

Portanto, por (1), (2) e (3) temos (*), de onde segue o resultado.

Definição 4.1.2. Seja $f : E_1 \to E_2$ contínua. Dizemos que a terna (f, A, B) é admissível se B é fechado em E_2, $A \subset E_1$ e $\overline{A}$ está contido numa vizinhança fechada N, tal que f restrita a N, define uma aplicação de pares $f_/ : (N, N - A) \to (E_2, E_2 - B)$, ou equivalentemente, $f^{-1}(B) \cap (N - A) = \emptyset$.

Proposição 4.1.3. Suponhamos que (f, A, B) seja admissível. Se N e N' são vizinhanças fechadas de $\overline{A}$, tais que a restrição de f à N e à N' respectivamente, definem aplicações de pares $f_/ : (N, N - A) \to (E_2, E_2 - B)$ e $f'_/ : (N', N' - A) \to (E_2, E_2 - B)$, então as inclusões $e : (N, N - A) \to (E_1, E_1 - A)$ e $e' : (N', N' - A) \to (E_1, E_1 - A)$ induzem isomorfismos homológicos, satisfazendo $f_{/*} \circ e_*^{-1} = f'_{/*} \circ e_*'^{-1}$.

Prova:. Pela Proposição 4.1.1 temos que e e e' são excisões, assim induzem isomorfismos em homologia. Sendo N e N' vizinhanças fechadas de $\overline{A}$, satisfazendo $f^{-1}(B)\cap(N-A) = \emptyset$ e $f^{-1}(B) \cap (N' - A) = \emptyset$, temos que $N'' = N \cup N'$ é uma vizinhança fechada de $\overline{A}$, com $f^{-1}(B) \cap (N'' - A) = \emptyset$. Assim, a restrição de f à N'', define uma aplicação de pares $f''_/ : (N'', N'' - A) \to (E_2, E_2 - B)$. Consideremos agora o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (E_1, E_1 - A) & \\
(N, N - A) \arrow[ur, "e"] \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f_/"'] & (N'', N'' - A) \arrow[u, "e''"] \arrow[d, "f''_/"] & (N', N' - A) \arrow[ul, "e'"'] \arrow[l, "j'"'] \arrow[dl, "f'_/"] \\
 & (E_2, E_2 - B) &
\end{tikzcd}$$

O diagrama é comutativo, pois pela Proposição 4.1.1 as inclusões são excisões e as demais funções são obtidas a partir de restrições da f, assim temos,

$$\begin{array}{c} e_* = e''_* \circ j_* \\ f_{/*} = f''_{/*} \circ j_* \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} e'_* = e''_* \circ j'_* \\ f'_{/*} = f''_{/*} \circ j'_* \end{array}.$$

Logo $f_{/*} \circ e_*^{-1} = (f''_{/*} \circ j_*) \circ (j_*^{-1} \circ e_*''^{-1}) = f''_{/*} \circ e_*''^{-1} = (f''_{/*} \circ j'_*) \circ (j_*'^{-1} \circ e_*''^{-1}) = f'_{/*} \circ e_*'^{-1}$. □

Definição 4.1.4. Suponhamos (f, A, B) admissível e seja N uma vizinhança fechada de $\overline{A}$, para a qual a restrição de f à N, induz uma aplicação de pares $f_/ : (N, N - A) \to (E_2, E_2 -$

B). Sendo $e : (N, N - A) \to (E_1, E_1 - A)$ e $i : E_1 \to (E_1, E_1 - A)$, inclusões, definimos $L_*(f, A, B) : H_*(E_1) \to H_*(E_2, E_2 - B)$, como sendo a composição dos homomorfismos

$$H_*(E_1) \xrightarrow{i_*} H_*(E_1, E_1 - A) \xrightarrow{e_*^{-1}} H_*(N, N - A) \xrightarrow{f_{/*}} H_*(E_2, E_2 - B)$$

ou seja, $L_*(f, A, B) = f_{/*} \circ e_*^{-1} \circ i_*$. Além disso definimos $L^*(f, A, B)$ como a composição dos homomorfismos

$$H^*(E_2, E_2 - B) \xrightarrow{f_/^*} H^*(N, N - A) \xrightarrow{e^{-1*}} H^*(E_1, E_1 - A) \xrightarrow{i^*} H^*(E_1)$$

ou seja, $L^*(f, A, B) = i^* \circ e^{-1*} \circ f_/^*$.

Proposição 4.1.5. Sejam $f : E_1 \to E_2$ contínua e $B \subset E_2$ fechado, então:

i) (f, E_1, B) e $(f, \emptyset, B)$ são admissíveis;

ii) Se (f, A_1, B) e (f, A_2, B) são admissíveis então $(f, A_1 \cup A_2, B)$ e $(f, A_1 \cap A_2, B)$ serão admissíveis.

Prova:. *i)* Temos que E_1 é uma vizinhança fechada de $\overline{E_1} = E_1$, satisfazendo $f^{-1}(B) \cap (E_1 - E_1) = \emptyset$, logo (f, E_1, B) é admissível. Além disso temos que $\emptyset$ é uma vizinhança fechada de $\overline{\emptyset} = \emptyset$, e satisfaz $f^{-1}(B) \cap (\emptyset - \emptyset) = \emptyset$, logo $(f, \emptyset, B)$ é admissível.

Suponhamos agora que (f, A_1, B) e (f, A_2, B) são admissíveis, logo existe uma vizinhança fechada N_1 de $\overline{A_1}$, satisfazendo

$$(1) \quad f^{-1}(B) \cap (N_1 - A_1) = \emptyset.$$

Além disso, existe uma vizinhança fechada N_2 de $\overline{A_2}$, satisfazendo

$$(2) \quad f^{-1}(B) \cap (N_2 - A_2) = \emptyset.$$

Assim, $N_1 \cup N_2$ é uma vizinhança fechada de $\overline{A_1 \cup A_2}$, além disso como $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ e $A_2 \subset A_1 \cup A_2$, temos que $N_1 - (A_1 \cup A_2) \subset N_1 - A_1$ e $N_2 - (A_1 \cup A_2) \subset N_2 - A_2$. Segue de (1) e (2) que $f^{-1}(B) \cap (N_1 - (A_1 \cup A_2)) = \emptyset$ e $f^{-1}(B) \cap (N_2 - (A_1 \cup A_2)) = \emptyset$.

logo,

$$f^{-1}(B) \cap ((N_1 \cup N_2) - (A_1 \cup A_2)) = f^{-1}(B) \cap \Big(\big(N_1 - (A_1 \cup A_2)\big) \cup \big(N_2 - (A_1 \cup A_2)\big) \Big)$$

$$= \big(f^{-1}(B) \cap \big(N_1 - (A_1 \cup A_2)\big)\big) \cup \big(f^{-1}(B) \cap \big(N_2 - (A_1 \cup A_2)\big)\big) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Portanto, $(f, A_1 \cup A_2, B)$ é admissível.

$ii)$ Temos também que $N_1 \cap N_2$ é uma vizinhança fechada de $\overline{A_1 \cap A_2}$, além disso, como $N_1 \cap N_2 \subset N_i, i = 1, 2$, temos que $(N_1 \cap N_2) - A_i \subset N_i - A_i, i = 1, 2$. Assim de (1) e (2) segue que $f^{-1}(B) \cap ((N_1 \cap N_2) - A_i) = \emptyset, i = 1, 2$.

Logo,

$$f^{-1}(B) \cap ((N_1 \cap N_2) - (A_1 \cap A_2)) = f^{-1}(B) \cap \big(((N_1 \cap N_2) - A_1) \cup ((N_1 \cap N_2) - A_2)\big)$$

$$= (f^{-1}(B) \cap ((N_1 \cap N_2) - A_2)) \cup (f^{-1}(B) \cap ((N_1 \cap N_2) - A_2)) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Portanto,$(f, A_1 \cap A_2, B)$ é admissível.

□

Lema 4.1.6. *Sejam (f, A_1, B) admissível, e $A_2 \subset A_1$ tal que $f^{-1}(B) \cap (A_1 - A_2) = \emptyset$. Então, (f, A_2, B) é admissível e $L_*(f, A_1, B) = L_*(f, A_2, B)$.*

Prova:. Suponhamos (f, A_1, B) admissível, assim existe uma vizinhança fechada N de $\overline{A_1}$ tal que f restrita à N, define uma aplicação de pares $f_/ : (N, N - A_1) \to (E_2, E_2 - B)$. Assim se $A_2 \subset A_1$ é tal que $f^{-1}(B) \cap (A_1 - A_2) = \emptyset$, então $f^{-1}(B) \cap (N - A_2) = \emptyset$, ou seja, f restrita à N, define uma aplicação de pares $f'_/ : (N, N - A_2) \to (E_2, E_2 - B)$.

Consideremos agora o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
& E_1 \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] & \\
(E_1, E_1 - A_1) \arrow[rr, "j"'] & & (E_1, E_1 - A_2) \\
(N, N - A_1) \arrow[u, "e"] \arrow[rr, "k"'] \arrow[dr, "f_/"'] & & (N, N - A_2) \arrow[u, "e'"'] \arrow[dl, "f'_/"] \\
& (E_2, E_2 - B) &
\end{tikzcd}$$

Pela comutatividade temos $e'^{-1}_* \circ j_* = k_* \circ e^{-1}_*$, $j_* \circ i_* = i'_*$ e $f'_{/*} \circ k_* = f_{/*}$. Assim,

$$f'_{/*} \circ e'^{-1}_* \circ i'_* = f'_{/*} \circ e'^{-1}_* \circ j_* \circ i_*$$

$$= f'_{/*} \circ k_* \circ e^{-1}_* \circ i_* = f_{/*} \circ e^{-1}_* \circ i_*.$$

Portanto, $L_*(f, A_2, B) = f'_{/*} \circ e'^{-1}_* \circ i'_* = f_{/*} \circ e^{-1}_* \circ i_* = L_*(f, A_1, B)$. □

Lema 4.1.7. *Suponhamos que (f, A, B) seja admissível, e seja $\{A_\alpha, \alpha = 1, ..., n\}$ uma família de subconjuntos de E_1, satisfazendo*

i) (f, A_α, B) *é admissível para* $\alpha = 1, .., n$;

ii) $\overline{A}_\alpha \cap \overline{A}_\beta = \emptyset$, *para* $\alpha \neq \beta$;

iii) $A = \displaystyle\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$.

Então, $L_*(f, A, B) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f, A_\alpha, B)$.

Prova:. Como E_1 é normal e (f, A_α, B) é admissível para cada α, existe uma coleção $\{N_\alpha \mid \alpha = 1, ..., n\}$ de conjuntos fechados, tais que N_α é uma vizinhança fechada de $\overline{A_\alpha}$, com $N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$ e $f^{-1}(B) \cap (N_\alpha - A_\alpha) = \emptyset$.

Assim, $N = \displaystyle\bigcup_{\alpha=1}^{n} N_\alpha$ é uma vizinhança fechada de $\overline{A} = \overline{\cup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha}$ e $f^{-1}(B) \cap (N - A) = \emptyset$. Segue que f restrita à N define uma aplicação de pares $f_/ : (N, N - A) \to (E_2, E_2 - B)$. Consideremos agora as aplicações de pares $f_\alpha : (N_\alpha, N_\alpha - A) \to (E_2, E_2 - B)$ obtidas pela restrição da f às respectivas vizinhanças fechadas, assim temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[dl, "i_\alpha"'] \arrow[dr, "i"] & \\
(E_1, E_1 - A_\alpha) & & (E_1, E_1 - A) \arrow[ll, "j_\alpha"'] \\
(N_\alpha, N_\alpha - A_\alpha) \arrow[u, "e_\alpha"] \arrow[rr, "k_\alpha"'] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & (N, N - A) \arrow[u, "e"'] \arrow[dl, "f_/"] \\
 & (E_2, E_2 - B) &
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Mostraremos que $f_{/*} \circ e_*^{-1} \circ i_* = \displaystyle\sum^{n}_{\alpha=1} f_{\alpha *} \circ e_{\alpha *}^{-1} \circ i_{\alpha *}$. Sendo N uma reunião finita de fechados disjuntos N_α e $A = \displaystyle\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$, temos que as inclusões $k_\alpha : (N_\alpha, N_\alpha - A_\alpha) \to (N, N - A)$ induzem um isomorfismo $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} k_{\alpha *} : \bigoplus_{\alpha=1}^{n} H_*(N_\alpha, N_\alpha - A_\alpha) \to H_*(N, N - A)$.

Do diagrama 4.1 temos que $j_\alpha \circ e \circ k_\alpha = e_\alpha$, assim para cada α,

$$e_{\alpha *}^{-1} \circ j_{\alpha *} \circ e_* \circ k_{\alpha *} : H_*(N_\alpha, N_\alpha - A_\alpha) \to H_*(N_\alpha, N_\alpha - A_\alpha)$$

é o homomorfismo identidade, logo

$$Id = \sum_{\alpha=1}^{n} e_{\alpha *}^{-1} \circ j_{\alpha *} \circ e_* \circ k_{\alpha *} : \bigoplus_{\alpha=1}^{n} H_*(N_\alpha, N_\alpha - A_\alpha) \to \bigoplus_{\alpha=1}^{n} H_*(N_\alpha, N_\alpha - A_\alpha).$$

Aplicando $(\sum_{\alpha=1}^{n} k_{\alpha *})^{-1}$ na equação anterior temos $\sum_{\alpha=1}^{n} e_{\alpha *}^{-1} \circ j_{\alpha *} \circ e_* = Id \circ (\sum_{\alpha=1}^{n} k_{\alpha *})^{-1}$.
Aplicando $\sum_{\alpha=1}^{n} k_{\alpha *}$ na última equação, segue que

$$\sum_{\alpha=1}^{n} k_{\alpha *} \circ \sum_{\alpha=1}^{n} e_{\alpha *}^{-1} \circ j_{\alpha *} \circ e_* = Id.$$

Ou seja, $\sum_{\alpha=1}^{n}(k_{\alpha *} \circ e_{\alpha *}^{-1} \circ j_{\alpha *} \circ e_*) : H_*(N, N - A) \to H_*(N, N - A)$ é o homomorfismo identidade. Logo,

$$\begin{aligned} f_{/*} \circ e_*^{-1} \circ i_* &= f_{/*} \circ (\sum_{\alpha=1}^{n}(k_{\alpha *} \circ e_{\alpha *}^{-1} \circ j_{\alpha *} \circ e_*)) \circ e_*^{-1} \circ i_* \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}(f_{/*} \circ k_{\alpha *} \circ e_{\alpha *}^{-1} \circ j_{\alpha *} \circ (e_* \circ e_*^{-1}) \circ i_*). \end{aligned}$$

Pela comutatividade do diagrama 4.1, temos $f_{/*} \circ k_{\alpha *} = f_\alpha$ e $j_{\alpha *} \circ i_* = i_{\alpha *}$, segue que

$$f_{/*} \circ e_*^{-1} \circ i_* = \sum_{\alpha=1}^{n}(f_{\alpha *} \circ e_{\alpha *}^{-1} \circ i_{\alpha *}).$$

Portanto, $L_*(f, A, B) = \sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f, A_\alpha, B)$. $\square$

Teorema 4.1.8. *Suponhamos que (f, A, B) seja admissível e seja $\{A_\alpha, \alpha = 1, .., n\}$ uma família de subconjuntos de E_1 satisfazendo*

i) (f, A_α, B) é admissível para $\alpha = 1, .., n$;

ii) $f^{-1}(B) \cap (A - \bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha) = \emptyset$;

iii) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, *para* $\alpha \neq \beta$.

Então, $L_*(f, A, B) = \sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f, A_\alpha, B)$.

Prova:. Por hipótese temos que para cada A_α, existe uma vizinhança fechada N_α, satisfazendo $f^{-1}(B) \cap (N_\alpha - A_\alpha) = \emptyset$. Afirmamos que $A'_\alpha = f^{-1}(B) \cap A_\alpha$ é um fechado em E_1, De fato,

$$\begin{aligned} A'_\alpha &= f^{-1}(B) \cap A_\alpha = (f^{-1}(B) \cap (N_\alpha - A_\alpha)) \cup (f^{-1}(B) \cap A_\alpha) \\ &= f^{-1}(B)\big(A_\alpha \cup (N_\alpha - A_\alpha)\big) = f^{-1}(B) \cap N_\alpha. \end{aligned}$$

Assim, como $f^{-1}(B)$ e N_α são fechados de E_1, segue que A'_α é fechado em E_1. Sendo A'_α um fechado, temos que $\overline{A'_\alpha} = A'_\alpha \subset A_\alpha$; assim como $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$, segue que $\overline{A'_\alpha} \cap \overline{A'_\beta} = \emptyset$, para $\alpha \neq \beta$. Afirmamos que para cada α temos $L_*(f, A'_\alpha, B) = L_*(f, A_\alpha, B)$, De fato,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) \cap (A_\alpha - A'_\alpha) &= f^{-1}(B) \cap \Big(A_\alpha - \big(A_\alpha \cap f^{-1}(B)\big)\Big) \\ &= f^{-1}(B) \cap (A_\alpha - f^{-1}(B)) = \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, segue do Lema 4.1.6 que (f, A'_α, B) é admissível e $L_*(f, A'_\alpha, B) = L_*(f, A_\alpha, B)$. Portanto temos

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f, A_\alpha, B) = \sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f, A'_\alpha, B).$$

Consideremos agora $A' = \bigcup_{\alpha=1}^{n} A'_\alpha$. Observe que a coleção $\{A'_\alpha, \alpha = 1, ..., n\}$ satisfaz as hipóteses do Lema 4.1.7, assim

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f, A'_\alpha, B) = L_*(f, A', B).$$

Por hipótese temos $f^{-1}(B) \cap (A - \bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha) = \emptyset$, assim

$$f^{-1}(B) \cap (A - A') = f^{-1}(B) \cap (A - \bigcup_{\alpha=1}^{n} A'_\alpha)$$

$$= f^{-1}(B) \cap [A - \bigcup_{\alpha=1}^{n} (A_\alpha \cap f^{-1}(B))] = (f^{-1}(B) \cap A) - (f^{-1}(B) \cap \bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha)$$

$$= f^{-1}(B) \cap (A - \bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha) = \emptyset.$$

Segue do Lema 4.1.6 que $L_*(f,A,B) = L_*(f,A',B)$. Deste resultado, juntamente com (1) e (2), temos que $L_*(f,A,B) = \sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f,A_\alpha,B)$. $\square$

Corolário 4.1.9. *Seja (f,A,B) uma terna admissível. Se $L_*(f,A,B) \neq 0$, então $f^{-1}(B) \cap A \neq \emptyset$.*

Prova:. Suponha que $f^{-1}(B) \cap A = \emptyset$. Assim, aplicando o Teorema 4.1.8, para n=2 e considerando $A_1 = A_2 = \emptyset$, temos

$$(1) \qquad L_*(f,A,B) = L_*(f,\emptyset,B) + L_*(f,\emptyset,B).$$

Por outro lado, aplicando o Teorema 4.1.8 para n=1 e considerando $A_1 = \emptyset$, temos

$$(2) \qquad L_*(f,A,B) = L_*(f,\emptyset,B).$$

Segue de (1) e (2) que $L_*(f,A,B) = 0$. $\square$

Proposição 4.1.10. Suponhamos que $f : E_1 \to E_2$ seja contínua, B seja fechado em E_2 e $A \subset E_1$. Se $f^{-1}(B) \cap Fr(A) = \emptyset$ então (f,A,B) é admissível. Se A é aberto e (f,A,B) então $f^{-1}(B) \cap Fr(A) = \emptyset$.

Prova:. Se $f^{-1}(B) \cap Fr(A) = \emptyset$, então $f^{-1}(B) - Fr(A) = f^{-1}(B)$ e como $\overline{A} = Fr(A) \cup Int(A)$, temos

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) - \overline{A} &= f^{-1}(B) - \big(Fr(A) \cup Int(A)\big) \\ &= \big(f^{-1}(B) - Fr(A)\big) \cap \big(f^{-1}(B) - Int(A)\big) = f^{-1}(B) \cap \big(f^{-1}(B) - Int(A)\big) \\ &= f^{-1}(B) - Int(A). \end{aligned}$$

Assim, $\overline{A}$ e $f^{-1}(B) - Int(A)$ são fechados distintos em E_1, e sendo E_1 normal, existe uma vizinhança fechada N de $\overline{A}$, disjunta de $f^{-1}(B) - Int(A)$. Como $f^{-1}(B) - A \subseteq f^{-1}(B) - Int(A)$, temos que N é uma vizinhança disjunta de $f^{-1}(B) - A$ satisfazendo $f^{-1}(B) \cap (N - A) = \emptyset$. Portanto, (f,A,B) é admissível.

Se A é aberto e (f,A,B) é admissível, então $\overline{A}$ possui uma vizinhança fechada N, com $f^{-1}(B) \cap (N - A) = \emptyset$. Sendo A aberto, temos $Fr(A) \subset N - A$, logo

$$f^{-1}(B) \cap Fr(A) \subset f^{-1}(B) \cap (N - A) = \emptyset.$$

$\square$

Teorema 4.1.11. *Sejam H uma homotopia em $F(E_1, E_2)$ e A aberto em E_1.*
Se $(H(t), A, B)$ é admissível para cada $t \in I$, então

$$L_*(H(0), A, B) = L_*(H(1), A, B).$$

Prova:. Pela Proposição 4.1.10, temos que $H(t)^{-1}(B) \cap Fr(A) = \emptyset$, para cada $t \in I$, assim $H(t)(x) \in E_2 - B, x \in Fr(A), t \in I$. Como $E_2 - B$ aberto, dado $(t, x) \in I \times Fr(A)$, existe vizinhança W_{tx} contendo $H(t)(x)$ tal que $W_{tx} \subset E_2 - B$. Segue da continuidade de $H(t)$ que existe uma vizinhança V_{tx} de t, tal que $H(t)(V_{tx}) \subset W_{tx} \subset E_2 - B$. Variando $(t, x) \in I \times Fr(A)$, obtemos vizinhanças $U_{tx} \subset E_1$ e $V_{tx} \subset I$ tais que

$$H(t)(x) \in E_2 - B,\ x \in U_{tx},\ t \in V_{tx}.$$

Assim, se fixarmos $x \in Fr(A)$, temos uma cobertura $\{V_{tx} \mid t \in I\}$ de I, logo existe uma sub-cobertura finita $\{V_{tx}, t = t_0, ..., t_n\}$ de I. Seja $U_x = \bigcap_{i=0}^{n} U_{t_i x}$, assim U_x é uma vizinhança aberta de $x \in Fr(A)$, satisfazendo $H(t)(U_x) \subset E_2 - B$ para todo $t \in I$. Segue que $U = (\bigcup_{x \in Fr(A)} U_x) \cup A$ é uma vizinhança de $\overline{A}$ satisfazendo

$$H(t)^{-1}(B) \cap (U - A) = \emptyset, t \in I.$$

Sendo E_1 normal temos que existe uma vizinhança fechada de $\overline{A}$ contida em U, com $H(t)^{-1}(B) \cap (N - A) = \emptyset,\ t \in I$.

Logo, para cada $t \in I$, $H(t)$ restrita à N define uma aplicação de pares $H_/(t) : (N, N - A) \to (E_2, E_2 - B)$, ou seja, H define uma homotopia $H_/$ de funções contínuas $H_/(t) : (N, N - A) \to (E_2, E_2 - B)$.

Portanto, $L_*(H(0), A, B) = H_{/*}(0) \circ e_*^{-1} \circ i_* = H_{/*}(1) \circ e_*^{-1} \circ i_* = L_*(H(1), A, B)$. $\square$

Se considerarmos o homomorfismo $L^*(f, A, B)$, como a composição dos homomorfismos

$$H^*(E_2, E_2 - B) \xrightarrow{f_/^*} H^*(N, N - A) \xrightarrow{e^{-1*}} H^*(E_1, E_1 - A) \xrightarrow{i^*} H^*(E_1)$$

obtemos, os resultados duais do Teorema 4.1.11, 4.1.8 e Corolário 4.1.9, listados no teorema abaixo.

Teorema 4.1.12. *Seja (f, A, B) admissível então $L^*(f, A, B)$ satisfaz*

1) Se $\{A_\alpha \mid \alpha = 1, .., n\}$ for uma coleção finita de subconjuntos de $A \subset E_1$, satisfazendo *i)* (f, A_α, B) *é admissível para* $\alpha = 1, .., n$*;*

ii) $f^{-1}(B) \cap (A - \bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha) = \emptyset$*;*

iii) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$*, para* $\alpha \neq \beta$*. Então,* $L^*(f, A, B) = \sum_{\alpha=1}^{n} L^*(f, A_\alpha, B)$*.*

2) Se H *for uma homotopia em* $F(E_1, E_2)$*,* $A \subset E_1$ *e* $(H(t), A, B)$ *for admissível para cada* $t \in I$*, então* $L^*(H(0), A, B) = L^*(H(1), A, B)$*.*

3) Se (f, A, B) *for admissível e* $L^*(f, A, B) \neq 0$*, então* $f^{-1}(B) \cap A \neq \emptyset$*.*

4.2. $\mathcal{D}$-Índices

Nessa seção consideraremos E_1 um espaço compacto, localmente conexo por caminhos, conexo por caminhos e normal. E_2 será considerado Hausdorff, semi-localmente simplesmente conexo e conexo por caminhos.

O objetivo é aplicar os conceitos da seção anterior para uma $\mathcal{D}$-classe de homotopia, para a construção de um $\mathcal{D}$-índice o qual será um detector de $\mathcal{D}$-classe essencial(veja 4.2.14).

Seja $\mathcal{D}$ uma $\mathcal{D}$-classe para $q : E_2 \to B$ e $s : B \to E_2$ com $q \circ s = 1_B$.

Definição 4.2.1. Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$ funções contínuas. Dizemos que $(f, p, A, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível, se $(f, p) \in \mathcal{D}$, $A \subset E_1$, e existe uma vizinhança fechada N de $\overline{A}$ com

$$\Gamma(f, s \circ p) \cap (N - A) = \emptyset.$$

Proposição 4.2.2. $(f, p, A, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível se, e somente se, $(f, p) \in \mathcal{D}$ e $(f, A, s(B))$ é admissível no sentido da seção 4.1.

Prova:. Pela Proposição 2.3.2 temos que $\Gamma(f, s \circ p) = f^{-1}(s(B))$. Assim, $\overline{A}$ possui uma vizinhança fechada N, satisfazendo $\Gamma(f, s \circ p) \cap (N - A) = \emptyset$ se, e somente se, $f^{-1}(s(B)) \cap (N - A) = \emptyset$. Além disso, sendo E_2 hausdorff, temos pela Proposição 2.1.4 que $s(B)$ é fechado. Portanto, $(f, p, A, s(B))$ é admissível, se e somente se, $(f, A, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível e $(f, p) \in \mathcal{D}$. □

Da Proposição 4.2.2, temos as seguintes proposições.

Proposição 4.2.3. Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$ funções contínuas, $A \subset E_1$, e $(f, p) \in \mathcal{D}$. Se $\Gamma(f, s \circ p) \cap Fr(A) = \emptyset$, então $(f, p, A, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível. Se A é aberto e $(f, p, A, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível então $\Gamma(f, s \circ p) \cap Fr(A) = \emptyset$.

Prova:. Segue da Proposição 4.1.10. $\square$

Proposição 4.2.4. Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$ funções contínuas, com $(f, p) \in \mathcal{D}$. Então

i) $(f, p, \emptyset, s(B))$ e $(f, p, E_1, s(B))$ são $\mathcal{D}$-admissíveis;

ii) Se $(f, p, A_1, s(B))$ e $(f, p, A_2, s(B))$ são $\mathcal{D}$-admissíveis, então $(f, p, A_1 \cup A_2, s(B))$ e $(f, p, A_1 \cap A_2, s(B))$ serão $\mathcal{D}$-admissíveis.

Prova:. Segue da Proposição 4.1.5 . $\square$

Da Proposição 4.2.2, podemos definir um $\mathcal{D}$-índice para $(f, p, A, s(B))$ $\mathcal{D}$-admissível, da seguinte forma:

Definição 4.2.5. Sejam $f : E_1 \to E_2$, $p : E_1 \to B$ funções contínuas e $A \subset E_1$. Se $(f, p, A, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível então definimos $L_*(f, p, A, s(B)) = L_*(f, A, s(B))$.

Assim, os resultados da seção anterior ficam da seguinte maneira

Teorema 4.2.6. *Suponhamos que $(f, p, A, s(B))$ seja $\mathcal{D}$-admissível e seja $\{A_\alpha, \alpha = 1, .., n\}$ uma família finita de subconjuntos de E_1 satisfazendo*

i) $(f, p, A_\alpha, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível para $\alpha = 1, .., n$;

ii) $f^{-1}(s(B)) \cap (A - \bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha) = \emptyset$;

iii) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, para $\alpha \neq \beta$.

Então, $L_*(f, p, A, s(B)) = \sum_{\alpha=1}^{n} L_*(f, p, A_\alpha, s(B))$.

Prova:. Segue do Teorema 4.1.8. $\square$

Teorema 4.2.7. *Sejam $(H, P) \in \mathcal{D}$ e A aberto em E_1. Se $(H(t), P(t), A, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível para cada $t \in I$, então,*

$$L_*(H(0), P(0), A, s(B)) = L_*(H(1), P(1), A, s(B)).$$

Prova:. Segue do Teorema 4.1.11. $\square$

Proposição 4.2.8. Seja $(f, p, A, s(B))$ $\mathcal{D}$-admissível. Se $L_*(f, p, A, s(B)) \neq 0$, então $\Gamma(f, s \circ p) \cap A \neq \emptyset$.

Prova:. Segue do Corolário 4.1.9. □

Proposição 4.2.9. Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$, com $(f, p) \in \mathcal{D}$. Então, $(f, p, \alpha, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível para cada classe de coincidência $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ e

$$L_*(f, p, E_1, s(B)) = \sum_{\alpha \,\in\, \widetilde{\Gamma}(f;s(B))} L_*(f, p, \alpha, s(B)).$$

Prova:. Pelo item $iii)$ do Teorema 2.3.16, $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é discreto; assim dado $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$, existe uma vizinhança aberta U_α de α, satisfazendo $\Gamma(f; s(B)) \cap (U_\alpha - \alpha) = \emptyset$.

Como α é fechado em $\Gamma(f; s(B))$, e $\Gamma(f; s(B))$ é fechado em E_1, temos que α é fechado em E_1. Sendo E_1 normal, existe uma vizinhança fechada N_α de $\overline{\alpha}$, contida em U_α. Assim para essa vizinhança temos

$$\Gamma(f; s(B)) \cap (N_\alpha - \alpha) = \emptyset.$$

Portanto, $(f, p, \alpha, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível.

Temos pelo item $iv)$ do Teorema 2.3.16, que $\widetilde{\Gamma}(f; s(B))$ é finito. Como $\Gamma(f; s(B)) = \bigcup\limits_{\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))} \alpha$, temos $\Gamma(f; s(B)) \cap (E_1 - \bigcup\limits_{\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))} \alpha) = \emptyset$. Sendo $\alpha \cap \beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$, segue do Teorema 4.2.6 que

$$L_*(f, p, E_1, s(B)) = \sum_{\alpha \,\in\, \widetilde{\Gamma}(f;s(B))} L_*(f, p, \alpha, s(B)).$$

□

Lema 4.2.10. *Dados $t \in I$, $\alpha_0 \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B)$ e $\alpha_t = \{x_t \in \Gamma(H(t); s(B)) \mid \exists x_0 \in \alpha_0$ com $x_0 \sim_{(H_0^t, P_0^t)} x_t\}$, então $\alpha_t \in \widetilde{\Gamma}(H(t); s(B))$ ou $\alpha_t = \emptyset$.*

Prova:. Suponha $\alpha_t \neq \emptyset$, e seja $x_t \in \alpha_t$, assim existe $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(t), s(B))$ contendo x_t. Mostraremos que $\alpha = \alpha_t$.

Dado $y \in \alpha$, temos que $x_t \sim_{(H(t),P(t))} y$; como $x_t \in \alpha_t$ existe $x_0 \in \alpha_0$ com $x_0 \sim_{(H_0^t,P_0^t)} x_t$; assim pelo item $ii)$ da Proposição 2.3.5 temos que $x_0 \sim_{(H_0^t H(t), P_0^t P(t))} y$. Como $[H_0^t H(t)] = [H_0^t]$ e $[P_0^t P(t)] = [P_0^t]$, temos pela Proposição 2.3.13 que x_0 está (H_0^t, P_0^t)-relacionado com y, ou seja, $y \in \alpha_t$. Portanto $\alpha \subset \alpha_t$.

Dado $y_t \in \alpha_t$, suponha que $y_t \in \beta \in \Gamma(H(t); s(B)$ com $\alpha \neq \beta$. Seja $x_1 \in \Gamma(H(0); s(B))$ com $x_1 \sim_{(H_0^t,P_0^t)} y_t$; como $x_0 \sim_{(H(0),P(0))} x_1$ e $x_1 \sim_{(H_0^t,P_0^t)} y_t$ temos pelo item $iii)$ da Proposição 2.3.5 que $x_0 \sim_{(H(0)H_0^t, P(0)P_0^t)} y_t$.

Sendo $[H(0)H_0^t] = [H_0^t]$ e $[P(0)P_0^t] = [P_0^t]$ temos pela Proposição 2.3.13 que $x_0 \sim_{(H_0^t, P_0^t)} y_t$. Assim temos que $x_0 \sim_{(H_0^t, P_0^t)} x_t$ e $y_t \sim_{((H_0^t)^{-1}, (P_0^t)^{-1})} x_0$; logo pelo item $iii)$ da Proposição 2.3.5 segue que $y_t \sim_{((H_0^t)^{-1}H_0^t, (P_0^t)^{-1}P_0^t)} x_t$.

Como $[(H_0^t)^{-1}H_0^t] = [H(t)]$ e $[(P_0^t)^{-1}P_0^t] = [P(t)]$, temos pela Proposição 2.3.13 que $y_t \sim_{(H(t),P(t))} x_t$, assim $\alpha = \beta$, contrariando a hipótese, logo $y_t \in \alpha$. Portanto $\alpha_t \subset \alpha$. $\square$

Lema 4.2.11. *Sejam $(H, P) \in \mathcal{D}, q, r, s \in I$, e considere $\alpha_t \in \widetilde{\Gamma}(H(t); s(B))$ para $t = q, r, s$. Se α_q está (H_q^r, P_q^r)-relacionado com α_r e α_r está (H_r^s, P_r^s)-relacionado com α_s, então α_q está (H_q^s, P_q^s)-relacionado com α_s.*

Prova:. Suponha que $\alpha_q \sim_{(H_q^r, P_q^r)} \alpha_r$ e $\alpha_r \sim_{(H_r^s, P_r^s)} \alpha_s$, assim pelo item ii) da Proposição 2.3.12, $\alpha_q \sim_{(H_q^r H_r^s, P_q^r P_r^s)} \alpha_s$. Pela Proposição 2.1.2, temos $[H_q^r H_r^s] = [H_q^s]$ e $[P_q^r P_r^s] = [P_q^s]$, assim segue da Proposição 2.3.13 que $\alpha_q \sim_{(H_q^s, P_q^s)} \alpha_s$. $\square$

Lema 4.2.12. *Dados $(H, P) \in \mathcal{D}$ e $r \in I$, então existem $\epsilon > 0$ e $\{A_\alpha \mid \alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))\}$ coleção finita de abertos, com $\alpha \subset A_\alpha$ satisfazendo as propriedades abaixo:*

i) *$A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$, com α e $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$;*

ii) *Se $|r - s| \leq \epsilon$, e $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(s); s(B))$, então existe $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$, com $\beta \subset A_\alpha$ e $\beta \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \alpha$;*

iii) *Se $s \in I$ e $|r - s| \leq \epsilon$, então a coleção A_α(indexadas para $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$) é tal que $(H(s), P(s), A_\alpha, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível.*

$\square$

Prova:. $i)$ Pelos itens $iv), iii)$ e $ii)$ do Teorema 2.3.16 temos que $\widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$ é finito, cada α é fechado em $\Gamma(H(r); s(B))$ e $\Gamma(H(r); s(B))$ é fechado em E_1, assim cada α é fechado em E_1. Como E_1 é normal existem vizinhanças abertas e disjuntas A'_α, com $\alpha \subset A'_\alpha$ para cada $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$.

Fixado α, para cada $x \in \alpha$, tome V_x vizinhança de $H(r)(x) = (s \circ P(r))(x)$, de modo que para todo laço D contido em V_x com ponto base $H(r)(x)$, temos $[D] = [H(r)(x)]$.

Como $\overline{H}, (s \circ \overline{P}) : I \times E_1 \to E_2$ dadas por $\overline{H}(r, x) = H(r)(x)$ e $(s \circ \overline{P})(r, x) = (s \circ P(r))(x)$ são contínuas e $\overline{H}(r, x), s \circ \overline{P}(r, x) \in V_x$, então existe vizinhança $[r - \epsilon_x, r + \epsilon_x] \times U_x$ contendo (r, x), com $U_x \subset A'_\alpha$, tal que

$$(1) \qquad \overline{H}([r - \epsilon_x, r + \epsilon_x] \times U_x) \cup (s \circ \overline{P})([r - \epsilon_x, r + \epsilon_x] \times U_x) \subset V_x.$$

Podemos tomar U_x conexo por caminhos, pois E_1 é localmente conexo por caminhos. Fazendo α variar em $\widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$, obtemos a coleção $\{U_x \mid x \in \Gamma(H(r); s(B))\}$ que é uma cobertura por abertos de $\Gamma(H(r); s(B))$. Como $\Gamma(H(r); s(B))$ é compacto, existe um subconjunto finito J de $\Gamma(H(r); s(B))$ com $\{U_x, x \in J\}$ cobrindo $\Gamma(H(r); s(B))$.

Tome agora a coleção $A_\alpha = \bigcup_{x \in \alpha \cap J} U_x$, $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$, $\epsilon_1 = min\{\epsilon_x, x \in J\}$ e considere $K = E_1 - \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, com $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$. Como $\Gamma(H(r); s(B)) \subset \cup_\alpha A_\alpha$ temos

$$\Gamma(H(r); s(B)) \cap K = \emptyset.$$

Observe que K é compacto pois é um fechado dentro do compacto E_1 e sendo $\Gamma(H(r); s(B)) = H(r)^{-1}(s(B))$ temos que $H(r)(K) \subset E_2 - s(B)$.

Mostremos que existe ϵ_2 tal que para $|r - s| \leq \epsilon_2$

$$H(s)(K) \subset E_2 - s(B).$$

Para cada $k \in K$, $\overline{H}(r, k) = H(r)(k) \in E_2 - s(B)$, como $E_2 - s(B)$ é aberto, existe um aberto W_k contendo $H(r)(k)$, com $W_k \cap s(B) = \emptyset$.

Sendo $\overline{H}$ contínua existe uma vizinhança $[r - \epsilon_k, r + \epsilon_k] \times O_k$ contendo (r, k), com O_k aberto em K, satisfazendo $\overline{H}([r - \epsilon_k, r + \epsilon_k] \times O_k) \subset W_k$. Assim obtemos uma cobertura aberta $\{O_k, k \in K\}$ de K, e sendo K compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $\{O_{k_i}, i = 1, .., n\}$ de K, satisfazendo $\overline{H}([r - \epsilon_{k_i}, r + \epsilon_{k_i}] \times O_{k_i}) \subset W_{k_i} \subset E_2 - s(B)$.

Tomando $\epsilon_2 = \text{mín}\{\epsilon_{k_i}, i = 1.., n\}$, temos que $H(s)(K) \subset E_2 - s(B)$ para $|r - s| \leq \epsilon_2$.

Portanto, temos que para $|r - s| \leq \epsilon_2$

$$(2) \qquad H(s)^{-1}(s(B)) = \Gamma(H(s); s(B)) \subset \bigcup_{\alpha} A_\alpha.$$

Seja $\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Mostremos que ϵ e a coleção $\{A_\alpha \mid \alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))\}$ satisfazem as propriedades acima.

Temos que $A_\alpha = \bigcup_{x \in \alpha \cap J} U_x \subset A'_\alpha$, e por construção $A'_\alpha \cap A'_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$, assim segue o item $i)$.

$ii)$ Suponhamos que $|r - s| \leq \epsilon, s \in I$, e $x_s \in \beta \in \widetilde{\Gamma}(H(s); s(B))$. Como $\epsilon \leq \epsilon_2$, temos por (2) que $x_s \in A_\alpha$ para algum $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$, logo $x_s \in U_x$ para algum $x \in \alpha \cap J$. Como U_x é conexo por caminhos, existe um caminho C em U_x unindo x_s a x.

Como $|r-s| \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_x$ temos por (1) que $< H_s^r, C >$ e $s(< P_s^r, C >)$ estão contidos em V_x; além disso o caminho $< H_s^r, C > *s(< P_s^r, C >)^{-1}$ é um laço em V_x, com ponto base $H(r)(x)$. Pela escolha de V_x temos $[< H_s^r, C > *s(< P_s^r, C >)^{-1}] = [H(r)(x)]$, assim $[< H_s^r, C >] = [s(< P_s^r, C >)]$, logo $x_s \sim_{(H_s^r, P_s^r)} x$. Portanto $\beta \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \alpha$.

Além disso, se $x'_s \in \beta$, temos da mesma forma que, $x'_s \in A_{\alpha'}$ para algum α', e $x'_s \sim_{(H_s^r, P_s^r)} x'$ com $x' \in \alpha'$, ou seja, $\beta \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \alpha'$. Assim temos $\beta \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \alpha'$ e $\beta \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \alpha$, logo pela Proposição 2.4.1 temos que $\alpha = \alpha'$.
Portanto $\beta \subset A_\alpha$ e $\beta \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \beta$, provando assim $ii)$.

$iii)$ Suponhamos que $|r-s| \leq \epsilon, s \in I$, e $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$. Como A_β é aberto para cada β, e os abertos A_α são disjuntos, temos que $(\bigcup_\beta A_\beta) \cap Fr(A_\alpha) = \emptyset$.

Portanto, por (2) temos que

$$\Gamma(H(s); s(B)) \cap Fr(A_\alpha) = \emptyset.$$

Assim pela Proposição 4.2.3, temos que $(H(s), P(s), A_\alpha, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível. $\square$

Teorema 4.2.13. *Sejam* $(H, P) \in \mathcal{D}$ *e* $\alpha_0 \in \widetilde{\Gamma}(H(0); s(B))$. *Se* $\alpha_0 \sim_{(H,P)} \alpha_1$, *com* $\alpha_1 \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$, *então*

$$L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = L_*(H(1), P(1), \alpha_1, s(B)).$$

Se α_0 *não esta* (H, P)*-relacionado com nenhum* $\alpha_1 \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B)$, *então*

$$L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = 0.$$

Prova:. Para cada $t \in I$, seja α_t, como no Lema 4.2.10, assim $\alpha_t \in \widetilde{\Gamma}(H(t); s(B))$ ou $\alpha_t = \emptyset$. Em ambos os casos temos $(H(t), P(t), \alpha_t, s(B))$ $\mathcal{D}$-admissível.

Se $\alpha_1 = \emptyset$ então pela Proposição 4.2.8 $L_*(H(1), P(1), \alpha_1, s(B)) = 0$, assim para mostrarmos que $L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = 0$, basta mostrarmos que

$$L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = L_*(H(1), P(1), \alpha_1, s(B)).$$

Mostraremos agora que para provar isso é suficiente mostrarmos que fixado $r \in I$, existe $\epsilon > 0$ tal que para $|r-s| \leq \epsilon$

$$(1) \qquad L_*(H(s), P(s), \alpha_s, s(B)) = L_*(H(r), P(r), \alpha_r, s(B)).$$

Seja $J = \{t \in I \mid L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = L_*(H(t), P(t), \alpha_t, s(B))\}$, sendo I conexo e J não vazio pois $0 \in J$, se mostrarmos que J é aberto e fechado, teremos $J = I$, mostrando assim que $L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = L_*(H(1), P(1), \alpha_1, s(B))$.

Mostremos, então que J é aberto. Dado $t \in J$, temos $L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = L_*(H(t), P(t), \alpha_t, s(B))$, e por (1) temos que para $|s - t| < \epsilon$,

$$L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = L_*(H(t), P(t), \alpha_t, s(B)) = L_*(H(s), P(s), \alpha_s, s(B)).$$

Assim para $s \in I_t = (t - \epsilon, t + \epsilon)$, temos

$$L_*(H(0), P(0), \alpha_0, s(B)) = L_*(H(s), P(s), \alpha_s, s(B)).$$

Assim cada $t \in J$ possui uma vizinhança aberta $I_t \subset J$, logo J é aberto. Analogamente $I - J$ é aberto.

Provaremos agora (1), considerando o caso $\alpha_r = \emptyset$. Pela Proposição 4.2.8 basta mostrarmos que $\alpha_s = \emptyset$. Suponha por absurdo que $\alpha_s \neq \emptyset$, assim pelo item $ii)$ do Lema 4.2.12, existe $\beta_r \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$ com $\alpha_s \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \beta_r$ e sendo $\alpha_0 \sim_{(H_0^s, P_0^s)} \alpha_s$ temos pelo Lema 4.2.11 que $\alpha_0 \sim_{(H_0^r, P_0^r)} \beta_r$. Portanto $\alpha_r = \beta_r \neq \emptyset$, contrariando a suposição $\alpha_r = \emptyset$, assim $\alpha_s = \emptyset$.

Consideremos agora o caso $\alpha_r \neq \emptyset$. Mostraremos a seguir que, ao tomarmos a coleção A_{α_r} garantida pelo Lema 4.2.12, é suficiente mostrar

$$(2) \qquad A_{\alpha_r} \cap \Gamma(H(s); s(B)) = \alpha_s.$$

Se (2) é válido então para $r = s$ temos $A_{\alpha_r} \cap \Gamma(H(r); s(B)) = \alpha_r$. Pelo item $iii)$ do Lema 4.2.12, temos que $(H(s), P(s), A_{\alpha_r}, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível e pela Proposição 4.2.9 temos que $(H(s), P(s), \alpha_s, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível, além disso temos de (2) que $\Gamma(H(s); s(B)) \cap (A_{\alpha_r} - \alpha_s) = \emptyset$, portanto pelo Teorema 4.2.6 temos

$$(3) \qquad L_*(H(s), P(s), \alpha_s, s(B)) = L_*(H(s), P(s), A_{\alpha_r}, s(B)).$$

Da mesma forma temos

$$(4) \qquad L_*(H(r), P(r), \alpha_r, s(B)) = L_*(H(r), P(r), A_{\alpha_r}, s(B)).$$

Pelo item $iii)$ do Lema 4.2.12 temos que $(H_r^s(t), P_r^s(t), A_{\alpha_r}, s(B))$ é $\mathcal{D}$-admissível para cada $t \in I$. Como A_{α_r} é aberto e $(H_r^s, P_r^s) \in \mathcal{D}$, com $(H_r^s(0), P_r^s(0)) = (H(r), P(r))$ e $(H_r^s(1), P_r^s(1)) = (H(s), P(s))$, segue do Teorema 4.2.7 que

$$(5) \qquad L_*(H(r), P(r), A_{\alpha_r}, s(B)) = L_*(H(s), P(s), A_{\alpha_r}, s(B)).$$

Portanto,

$L_*(H(s), P(s), \alpha_s, s(B)) \overset{(3)}{=} L_*(H(s), P(s), A_{\alpha_r}, s(B)) \overset{(5)}{=} L_*(H(r), P(r), A_{\alpha_r}, s(B)) \overset{(4)}{=} L_*(H(r), P(s), \alpha_r, s(B))$. Assim é verificado a igualdade em (1).

Mostraremos agora (2). Se $A_{\alpha_r} \cap \Gamma(H(s); s(B)) = \emptyset$, então $\alpha_s = \emptyset$. De fato, se $\alpha_s \neq \emptyset$, então existe $x_s \in \alpha_s$ e pelo item $ii)$ do Lema 4.2.12, existe $\beta_r \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$ com $\alpha_s \subset A_{\beta_r}$ e $\alpha_s \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \beta_r$. Como $\alpha_0 \sim_{(H_0^s, P_0^s)} \alpha_s$ e $\alpha_s \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \beta_r$ temos pelo Lema 4.2.11 que $\alpha_0 \sim_{(H_0^s, P_0^s)} \beta_r$. Assim $\beta_r = \alpha_r$, e $x_s \in \alpha_s \subset A_{\beta_r} = A_{\alpha_r}$. Portanto $x_s \in A_{\alpha_r} \cap \Gamma(H(s); s(B))$, contrariando o fato de $A_{\alpha_r} \cap \Gamma(H(s); s(B)) = \emptyset$.

Se $A_{\alpha_r} \cap \Gamma(H(s); s(B)) \neq \emptyset$, seja $x \in A_{\alpha_r} \cap \Gamma(H(s); s(B))$ e $\gamma_s \in \widetilde{\Gamma}(H(s); s(B))$, com $x \in \gamma_s$. Pelo item $ii)$ do Lema 4.2.12, existe $\beta_r \in \Gamma(H(r); s(B))$ com $\gamma_s \subset A_{\beta r}$.

Como $A_{\alpha_r} \cap A_{\beta r} \neq \emptyset$, temos $A_{\beta r} = A_{\alpha_r}$, logo $\gamma_s \subset A_{\alpha_r}$. Portanto pelo item $ii)$ do Lema 4.2.12 temos que $\alpha_r \sim_{(H_r^s, P_r^s)} \gamma_s$. Como $\alpha_0 \sim_{(H_0^r, P_0^r)} \alpha_r$, temos $\alpha_0 \sim_{(H_0^s, P_0^s)} \gamma_s$, logo $\gamma_s = \alpha_s$. Portanto, $x \in \alpha_s$.

Por outro lado, temos que $\alpha_s \subset \Gamma(H(s); s(B))$, assim resta mostrar que $\alpha_s \subset A_{\alpha_r}$. Se $\alpha_s = \emptyset$, a inclusão é trivialmente satisfeita. Suponha então $\alpha_s \neq \emptyset$, assim pelo item $ii)$ do Lema 4.2.12, existe $\beta_r \in \widetilde{\Gamma}(H(r); s(B))$ com $\alpha_s \sim_{(H_s^r, P_s^r)} \beta_r$ e $\alpha_s \subset A_{\beta_r}$. Como $\alpha_0 \sim_{(H_0^s, P_0^s)} \alpha_s$, segue que $\alpha_0 \sim_{(H_0^r, P_0^r)} \beta_r$, logo $\beta_r = \alpha_r$. Portanto $\alpha_s \subset A_{\alpha_r}$.

□

Corolário 4.2.14. *Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$ funções contínuas, com $(f, p) \in \mathcal{D}$ e $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f; s(B))$. Se $L_*(f, p, \alpha, s(B)) \neq 0$, então α é essencial.*

Prova:. Suponhamos por absurdo que $L_*(f, p, \alpha, s(B)) \neq 0$ e α não seja essencial, então existe $(H, P) \in \mathcal{D}$, com $(H(0), P(0)) = (f, p)$, e não existe $\beta \in \widetilde{\Gamma}(H(1); s(B))$ satisfazendo $\alpha \sim_{(H,P)} \beta$. Assim, pelo Teorema 4.2.13 temos $L_*(f, p, \alpha, s(B)) = 0$, contrariando a hipótese.

□

Corolário 4.2.15. *Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$ funções contínuas, com $(f, p) \in \mathcal{D}$. Se $L_*(f, p, E_1, s(B)) \neq 0$, então $n(f, p, \mathcal{D}) > 0$.*

Prova:. Suponha $L_*(f,p,E_1,s(B)) \neq 0$, então pela Proposição 4.2.9

$$\sum_{\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))} L_*(f,p,\alpha,s(B)) = L_*(f,p,E_1,s(B)) \neq 0.$$

Logo, existe $\alpha \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))$, com $L_*(f,p,\alpha,s(B)) \neq 0$. Segue do Corolário 4.2.14 que α é essencial, logo $n(f,p,\mathcal{D}) > 0$.

□

Proposição 4.2.16. Seja $(f,p) \in \mathcal{D}$, assim para que $L_*(f,p,E_1,s(B)) \neq 0$, é necessário que o diagrama abaixo não se fatora para nenhuma g homotópica a f.

$$\begin{tikzcd} & E_2 - s(B) \arrow[d, "i'"] \\ E_1 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & E_2 \end{tikzcd}$$

Prova:. Suponhamos que exista alguma g homotópica à f, possuindo um levantamento $\widetilde{g}$, assim $f_* = g_*$ e $i'_* \circ \widetilde{g}_* = f_*$. Consideremos agora a terna admissível $(f,E_1,s(B))$ e o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \ldots H_n(E_1 - E_1) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(E_1) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dl, dashed, "\widetilde{g_n}"'] & H_n(E_1, E_1 - E_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n/}"] & H_{n-1}(E_1 - E_1)\ldots \arrow[d] \\ \ldots H_n(E_2 - s(B)) \arrow[r, "i'_n"] & H_n(E_2) \arrow[r, "k_n"] & H_n(E_2, E_2 - s(B)) \arrow[r] & H_{n-1}(E_2 - s(B))\ldots \end{tikzcd}$$

Segue da exatidão e comutatividade do diagrama que $f_{n/} \circ j_n = k_n \circ f_n = k_n \circ (i'_n \circ \widetilde{g}_n) = 0$; como j_n é isomorfismo, devemos ter $f_{n/} = 0$. Assim $L_n(f,p,E_1,s(B)) = f_{/n} \circ e_*^{-1} \circ i_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Portanto, $L_*(f,p,E_1,s(B)) : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i(E_1) \to \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i(E_2, E_2 - s(B))$ é igual ao homomorfismo nulo. □

Teorema 4.2.17. *Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $p : E_1 \to B$ funções contínuas, com $(f,p) \in \mathcal{D}$. Se existe $x_0 \in \alpha \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))$, tal que $T(f,p,x_0,\mathcal{D}) = Ker(q_\#)$, então para toda classe $\beta \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B))$ temos*

$$L_*(f,p,\alpha,s(B)) = L_*(f,p,\beta,s(B)).$$

Prova:. Sejam $\beta \in \widetilde{\Gamma}(f;s(B)), x \in \beta$ e C caminho ligando x_0 a x.

Temos que $[f \circ C][(s \circ p) \circ C]^{-1} \in Ker(q_\#) = T(f,p,x_0,\mathcal{D})$, logo existe $(H,P) \in \mathcal{D}$ com H laço em f e P laço em p, tal que

$$[f\circ C][(s\circ p)\circ C]^{-1}=[<H,x_0>][s(<P,x_0>^{-1})].$$

Assim,

$$\begin{aligned}[<H^{-1},C>]&=[<H^{-1}f,x_0C>]=[<H^{-1},x_0><f,C>]=[<H^{-1},x_0>][<f,C>]\\&=[s(<P,x_0>^{-1})][(s\circ p)\circ C]=[s(<P,x_0>^{-1})s(<p,C>)]=[s(<P^{-1},C>)].\end{aligned}$$

Portanto, $x_0\sim_{(H^{-1},P^{-1})}x$, ou seja, $\alpha\sim_{(H^{-1},P^{-1})}\beta$. Como $(H^{-1},P^{-1})\in\mathcal{D}$, e sendo H laço em f, P laço em p, segue do Teorema 4.2.13 que

$$L_*(f,p,\alpha,s(B))=L_*(f,p,\beta,s(B)).$$

□

Corolário 4.2.18. *Sejam $f:E_1\to E_2$ e $p:E_1\to B$ funções contínuas, com $(f,p)\in\mathcal{D}$. Se existe $x_0\in\Gamma(f;s(B))$, com $T(f,p,x_0,\mathcal{D})=Ker(q_\#)$ e $L_*(f,p,E_1,s(B))\neq 0$, então*

$$n(f,p,\mathcal{D})=r(f,p;Ker(q_\#)).$$

Além disso, para cada $\alpha\in\widetilde{\Gamma}(f;s(B))$, temos

$$L_*(f,p,E_1,s(B))=r(f,p;Ker(q_\#))L_*(f,p,\alpha,s(B))=n(f,p,\mathcal{D})L_*(f,p,\alpha,s(B)).$$

Prova:. Suponha que existe $x_0\in\alpha_0\in\widetilde{\Gamma}(f;s(B))$, com $T(f,p,x_0,\mathcal{D})=Ker(q_\#)$ e $L_*(f,p,E_1,s(B))\neq 0$. Como $L_*(f,p,E_1,s(B))\neq 0$, temos pela Proposição 4.2.9, que $L_*(f,p,\alpha,s(B))\neq 0$ para algum $\alpha\in\widetilde{\Gamma}(f;s(B))$, assim, pelo Teorema 4.2.17,

$$L_*(f,p,\alpha_0,s(B))\neq 0.$$

Segue do Corolário 4.2.14 que α_0 é essencial, e como $T(f,p,x_0,\mathcal{D})=Ker(q_\#)$, temos pelo Corolário 3.3.9 que

$$(1)\qquad n(f,p,\mathcal{D})=r(f,p;Ker(q_\#)).$$

Pela Proposição 4.2.9, temos que

$$L_*(f,p,E_1,s(B))=\sum_{\alpha\,\in\,\widetilde{\Gamma}(f;s(B))}L_*(f,p,\alpha,s(B)).$$

Segue do Teorema 4.2.17, que todas as classes tem mesmo índice, logo

$$L_*(f,p,E_1,s(B))=n(f,p,\mathcal{D})L_*(f,p,\alpha,s(B)).$$

Portanto, por (1) temos

$$L_*(f, p, E_1, s(B)) = n(f, p, \mathcal{D})L_*(f, p, \alpha, s(B)) = r(f, p; Ker(q_\#))L_*(f, p, \alpha, s(B)).$$

$\square$

Capítulo

5

Aplicação

Apresentaremos nesta seção algumas aplicações da teoria de $\mathcal{D}$-classes de homotopia. A seguir estimaremos o número de Nielsen $n(f, p, \mathcal{D})$, para determinadas $\mathcal{D}$-classes de homotopia.

Exemplo 5.0.19.

Sejam $f : S^1 \to S^1$ uma função contínua qualquer com f não homotópica a identidade e $1 : S^1 \to S^1$ a função identidade, assim podemos associar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 = S^1 \arrow[rr, "(1,f)"] \arrow[dr, "1"'] & & E_2 = S^1 \times S^1 \arrow[dl, bend left, "q"] \\ & B = S^1 \arrow[ur, bend right, "s"'] & \end{tikzcd}$$

onde $q(x, y) = x$ e $s(x) = (x, x)$.

a)**Mostrando que** $L_*((1, f), 1, E_1, s(B)) \neq 0$

Para isso, mostraremos que $L_1((1, f), 1, E_1, s(B)) \neq 0$.

Consideremos o seguinte digrama comutativo

$$\begin{tikzcd} ... \to H_1(E_1 - E_1) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(E_1) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "(1,f)_1"'] & H_1(E_1, E_1 - E_1) \arrow[r] \arrow[d, "(1,f)_{/1}"] & H_0(E_1 - E_1) \arrow[d] \\ ... \to H_1(E_2 - s(B)) \arrow[r, "i_1"] & H_1(E_2) \arrow[r, "k_1"] & H_1(E_2, E_2 - s(B)) \arrow[r] & H_0(E_2 - s(B)) \end{tikzcd}$$

Onde $j : E_1 \to (E_1, E_1 - E_1)$ e $i : E_2 - s(B) \to E_2$ são inclusões.

Temos que $\pi_1(E_2 - s(B)) \cong \mathbb{Z}$ (para mais detalhes veja pág 146 de [4]), também temos $i_\# : \pi_1(E_2 - s(B)) \cong \mathbb{Z} \to \pi_1(E_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $i_\#(x) = (x, x)$.

Assim $\pi_1(E_2 - s(B))$ é abeliano e $H_1(E_2 - s(B)) \cong \pi_1(E_2 - s(B))$.

Utilizando as identificações $H_1(E_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $H_1(E_2 - s(B)) \cong \mathbb{Z}$, temos que

$i_1 : H_1(E_2 - s(B)) \to H_1(E_2)$ é dada por $i_1(x) = (x, x)$. Além disso sendo f não homotópica a identidade, tomando $n = grau(f) \neq 1$ temos

$$(1, f)_1 : H_1(E_1) \cong \mathbb{Z} \to H_1(E_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

dada por $(1, f)_1(x) = (x, nx)$.

Assim $Im((1, f)_1) \not\subset im(i_1) = Ker(k_1)$; segue que $L_1((1, f), 1, E_1, s(B)) = (1, f)_{/1} \circ j_1 = k_1 \circ (1, f)_1 \neq 0$, portanto

$$L_*((1, f), 1, E_1, s(B)) = j_* \circ (1, f)_{/*} \neq 0.$$

Como $L_*((1, f), 1, E_1, s(B)) \neq 0$ temos pelo Corolário 4.2.15 que $n((1, f), 1, \mathcal{D}(\Delta_3)) > 0$.

$b)$**Calculando o Número de Nielsen**
Sendo q uma fibração, temos pela Proposição 3.3.23 que

$$Ker(q_\#) = i_\#\big(\pi_1(F_{x_0}, (x_0, f(x_0)))\big),$$

com $F_{x_0} = q^{-1}(x_0)$ a fibra sobre x_0, além disso temos que $Y = S^1$ é um H-espaço, logo pelo Corolário 3.3.20 temos

$$n((1, f), 1, \mathcal{D}(\Delta_3)) = r\Big((1, f), 1; i_\#\big(\pi_1(F_{x_0}, (x_0, f(x_0)))\big)\Big).$$

Como $F_{x_0} = \{x_0\} \times S^1$ temos
$i_\#\Big(\pi_1\big(F_{q(x_0)}, (x_0, f(x_0))\big)\Big) = \{[(\alpha_0, \alpha)] \in \pi_1\big(S^1 \times S^1, (x_0, f(x_0))\big)\}$, com α_0 laço constante em x_0. Determinaremos agora quando $[[(\alpha_0, \alpha_1)]]_R = [[(\alpha_0, \alpha_2)]]_R$.

Usando as identificações $\pi(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1\big(S^1 \times S^1, (x_0, f(x_0))\big) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, temos que o homomorfismo $(s \circ 1)_\# : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1\big(S^1 \times S^1, (x_0, x_0)\big)$ é dado por $(s \circ 1)_\#(x) = (x, x)$, além disso como f não é homotópica a identidade temos que existe $n \neq 1$ com

$$(1, f)_\# : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1\big(S^1 \times S^1, (x_0, f(x_0))\big)$$

Dado por $(1, f)_\#(x) = (x, nx)$.

Por definição temos que $[[(\alpha_0, \alpha_1)]]_R = [[(\alpha_0, \alpha_2)]]_R$, se e somente se, existe $\beta \in \pi_1(S^1, x_0)$ tal que $(1, f)_\#([\beta])[(\alpha_0, \alpha_1)] = [(\alpha_0, \alpha_2)](s \circ 1)_\#([\beta])$. Assim usando novamente a identificação acima temos $[(0, x)]_R = [(0, y)]_R$, se e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(1, f)_\#(k) +$

$(0,x) = (0,y) + (s \circ 1)_\#(k)$. Temos

$$(1,f)_\#(k) + (0,x) = (k, nk) + (0,x) = (k, nk + x)$$

$$(0,y) + (s \circ 1)_\#(k) = (0,y) + (k,k) = (k, y + k)$$

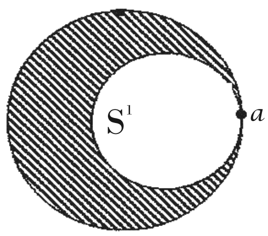
Assim, $(1,f)_\#(k) + (0,x) = (0,y) + (s \circ 1)_\#(k)$, se e somente se, $(n-1)k = y - x$. Segue que $[(0,x)]_R = [(0,y)]_R$, se e somente se, $x \equiv y \ mod(n-1)$, ou seja, existem exatamente $|n-1|$ classes de Reidemeister com representantes em $i_\#\Big(\pi_1\big(F_{x_0}, (x_0, f(x_0))\big)\Big)$.

Portanto $n((1,f), 1, \mathcal{D}(\Delta_3)) = r\Big((1,f), 1; i_\#\big(\pi_1\big(F_{x_0}, (x_0, f(x_0))\big)\big)\Big) = |n-1|$.

Exemplo 5.0.20.

Contexto:

Consideremos E_1 um espaço compacto, normal, localmente conexo por caminhos e conexo por caminhos e E_2 o anel pinçado em $a \in E_2$ representado pela figura abaixo.



Sejam $f : E_1 \to E_2$ função contínua qualquer e $p : E_1 \to \{a\}$, assim podemos associar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E_2 \arrow[dl, bend right, "q"'] \\
& B = \{a\} \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Onde s é a inclusão e q aplicação constante.

Condições para $n(f, 1, \mathcal{D}(\Delta_2)) > 0$.

Observemos que E_2 tem o mesmo tipo de homotopia que o círculo S^1, através de uma retração $r : (E_2, E_2 - a) \to (S^1, S^1 - a)$, a qual composta com a inclusão $i : (S^1, S^1 - a) \to (E_2, E_2 - a)$ é homotópica à identidade de $(E_2, E_2 - a)$.

Como E_2 tem o mesmo tipo de homotopia que S^1, temos $H_1(E_2) \cong \mathbb{Z}$, além disso pela sequência do par $(E_2, E_2 - a)$ segue que: $H_1(E_2, E_2 - a) \cong \mathbb{Z}$ e a inclusão $j : E_2 \to (E_2, E_2 - a)$ induz um isomorfismo, $j_1 : H_1(E_2) \to H_1(E_2, E_2 - a)$.

Como j_1 é isomorfismo, se $f_1 \neq 0$, então $L_1(f, p, E_1, s(a)) = j_1 \circ f_1 \neq 0$, assim pelo Corolário 4.2.15, $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) > 0$.

Calculando o Número de Nielsen

Temos que E_2 é um H-espaço, assim $T(E_2, a) = \pi_1(E_2, a)$ e $\pi_1(E_2, a) \cong \mathbb{Z}$ é abeliano. Supondo $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) > 0$, então pela Proposição 4.2.18 temos

$$n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) = r(f, p, Ker(q_{\#})) = r(f, p).$$

Além disso temos pela Proposição 3.1.8 que

$$r(f, p) = r(f_{\#}, (s \circ p)_{\#}) = ord\Big(\frac{\pi_1(E_2)}{Im\big(f_{\#} - (s \circ p)_{\#}\big)}\Big).$$

Observemos que $(s \circ p)_{\#}$ é o homomorfismo nulo, assim $Im(f_{\#} - (s \circ p)_{\#}) = Im(f_{\#})$.

Além disso, como $\pi_1(E_2, a) \cong \mathbb{Z}$, temos que existe $n \geq 0$ tal que

$$(1) \qquad\qquad Im(f_{\#}) = n\mathbb{Z}.$$

Se $n = 0$, então $r(f, p) = ord(\frac{\mathbb{Z}}{\{0\}}) = ord(\mathbb{Z}) = \infty$, assim devemos ter $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) = 0$, pois se $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) > 0$ então $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) = r(f, p) = \infty$, contrariando o item (iv) do Teorema 2.3.16.

Se $n > 0$, então $f_{\#} \neq 0$, assim pelos comentários feitos anteriormente temos

$$n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) = r(f, p) = ord(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}) = n.$$

Assim, podemos concluir que $n(f, p, \mathcal{D}(\Delta_2)) = n$ onde n é dado em (1).

Exemplo 5.0.21.

Contexto :

Consideremos $MA = \frac{I \times T}{\left(0, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \simeq \left(1, A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right)}$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e

T é o toro visto como $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.
O espaço MA é um fibrado sobre S^1 com projeção $q : MA \to S^1$ dada por $q(< t, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} >) =< t >$. Segue da sequência exata do fibrado que MA é também um espaço $K(\pi, 1)$, cujo grupo fundamental tem a presentação $< a, b, c; [a, b] = 1, cac^{-1} = a, cbc^{-1} = a^{-3}b^{-1} >$, onde a e b são geradores do $\pi_1(T)$ e c é o gerador de $\pi_1(S^1)$.

Consideremos $f : MA \to MA$, de modo que no grupo fundamental $f_\# : \pi_1(MA) \to \pi_1(MA)$ é dada por $f_\#(a) = 1, f_\#(b) = a^6b^4$ e $f_\#(c) = a^{c_1}b^{c_2}c$ (veja pág 11 de [10] que tal função é uma composição $p_2 \circ h \circ (1, f)$).

Tomemos $s : S^1 \to MA$ dada por $s(< t >) =< (t, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) >$, assim $s_\# : \pi_1(S^1) \to \pi_1(MA)$ é dada por $s_\#(c) = c$.

Pode-se provar (veja [10]) que f é construída de forma a tornar o seguinte diagrama comutativo no sentido horário, com $q \circ s = 1_{S^1}$.

$$\begin{tikzcd}
E_1 = MA \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & E_2 = MA \arrow[dl, "q"'] \\
& S^1 \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Estamos considerando a $\mathcal{D}$-classe de homotopia $\mathcal{D}_q$.

$a)$ **Cálculo de $r(f, p, Ker(q_\#))$.**

Para o cálculo de $r(f, p, Ker(q_\#))$ considere os homomorfismos $(s\circ q)_\#, f_\# : \pi_1(MA) \to \pi_1(MA)$. Dado $\beta_0 = a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3} \in \pi_1(MA)$, então $\beta_1 = a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}$ está na classe de Reidemeister de β_0 se existe $\alpha = a^xb^yc^z \in \pi_1(MA)$ tal que

$$f_\#(\alpha)a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3} = a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}(s \circ q)_\#(\alpha),$$

Assim,

$$(a^6b^4)^y(a^{c_1}b^{c_2}c)^z a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3} = a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}c^z$$

$$(a^6b^4)^y(a^{c_1}b^{c_2}c)^z a^{n_1}b^{n_2}c^{-z}c^{n_3} = a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}$$

$$(a^6b^4)^y \underbrace{(a^{c_1}b^{c_2}c)\dots(a^{c_1}b^{c_2}c)}_{|z|} a^{n_1}b^{n_2}c^{-z}c^{n_3} = a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}$$

$$(a^6b^4)^y(a^{c_1}b^{c_2})(ca^{c_1}b^{c_2}c^{-1})c^2(a^{c_1}b^{c_2})c^{-2}\dots c^{z-1}(a^{c_1}b^{c_2})c^{-z+1}c^z a^{n_1}b^{n_2}c^{-z}c^{n_3} = a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}$$

Notemos que $c^x(a^{c_1}b^{c_2})c^{-x} = \begin{cases} a^{c_1}b^{c_2} \text{ se } x \text{ é par} \\ a^{c_1}(a^{-3}b^{-1})^{c_2} \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$

Logo,

$$\begin{aligned} (a^6b^4)^y(a^{c_1}b^{c_2})(ca^{c_1}b^{c_2})c^{-1}c^2(a^{c_1}b^{c_2})c^{-2}\ldots c^{z-1}(a^{c_1}b^{c_2})c^{-z+1}c^z a^{n_1}b^{n_2}c^{-z}c^{n_3} &= a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3} \\ (a^6b^4)^y(a^{c_1}b^{c_2})^{[\frac{z+1}{2}]}(a^{c_1}(a^{-3}b^{-1})^{c_2})^{[\frac{z}{2}]}c^z a^{n_1}b^{n_2}c^{-z}c^{n_3} &= a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3} \end{aligned}$$

onde $[\frac{z}{2}]$ significa "maior inteiro menor ou igual que $\frac{z}{2}$. E assim, ora somando expoentes de a, ora de b e de c respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 6y + c_1[\frac{z+1}{2}] + c_1[\frac{z}{2}] - 3c_2[\frac{z}{2}] + n_1 + (-3n_2 \text{ se } z \text{ ímpar, caso contrario } +0) &= m_1 \\ 4y + c_2[\frac{z+1}{2}] - c_2[\frac{z}{2}] + (-n_2 \text{ se } z \text{ ímpar, caso contrário} + n_2) &= m_2 \\ n_3 &= m_3 \end{cases}$$

Segue que $a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}$ e $a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}$ estão na mesma classe de Reidemeister se é possivel encontrar x, y, z inteiros satisfazendo

Quando z é par, digamos $z = 2k$

$$\begin{cases} 6y + c_1z - 3c_2k + n_1 + &= m_1 \\ 4y + n_2 &= m_2 \\ n_3 &= m_3 \end{cases}$$

Se z ímpar, $z = 2k+1$

$$\begin{cases} 6y + c_1z - 3c_2k + n_1 - 3n_2 &= m_1 \\ 4y + c_2 - n_2 &= m_2 \\ n_3 &= m_3 \end{cases}$$

Assim, em ambos os casos a última igualdade implica que existem infinitas classes de Reidemeister, logo $r(f,p) = \infty$. No entanto, veremos que $r(f,p,Ker(q_\#))$ é finito sob algumas hipóteses.

Vamos identificar o $Ker(q_\#) \cong \pi_1(T)$ cujos geradores são a e b, como sendo o reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$, assim nas equações acima temos $n_3 = m_3 = 0$. Neste reticulado calcularemos quando que dois pontos deste reticulado representam mesma classe de Reidemeister.

Caso1: Se $Det \begin{bmatrix} 6 & c_1 \\ 4 & c_2 \end{bmatrix} = 0$, então existem infinitas classes de Reidemeister.

Suponha $Det \begin{bmatrix} 6 & c_1 \\ 4 & c_2 \end{bmatrix} = 0$, assim $3c_2 = 2c_1$.

Reescrevendo as equações acima temos

Se $z = 2k$

$$\begin{cases} 6y + (2c_1 - 3c_2)k + n_1 &= m_1 \\ 4y + n_2 &= m_2 \end{cases}$$

Assim, se $z = 2k$ temos

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se $z = 2k + 1$

$$\begin{cases} 6y + n_1 - 3n_2 + c_1 + (2c_1 - 3c_2)k &= m_1 \\ 4y + c_2 - n_2 &= m_2 \end{cases}$$

Assim, se $z = 2k + 1$ temos

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 - 3n_2 + c_1 \\ c_2 - n_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Portanto, fixado $a^{n_1}b^{n_2}$, a classe de Reidemeister $[a^{n_1}b^{n_2}]$ é composta apenas por pontos no reticulado que pertencem a reta $L_1 = \begin{pmatrix} n_1 - 3n_2 + c_1 \\ c_2 - n_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ou $L_2 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ $+ y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Assim, existem infinitas classes de Reidemeister com representantes em $Ker(q_{\#})$ se $Det \begin{bmatrix} 6 & c_1 \\ 4 & c_2 \end{bmatrix} = 0.$

Caso 2(Particular): Para $c_1, c_2 = 1$, existem 2 classes de Reidemeister.

Substituindo $c_1, c_2 = 1$ nas equações anteriores temos

Se $z = 2k$

$$\begin{cases} 6y - k + n_1 &= m_1 \\ 4y + n_2 &= m_2 \end{cases}$$

Colocando em forma matricial temos

$$A: \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 - k \\ n_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se $z = 2k + 1$

$$\begin{cases} 6y + n_1 - 3n_2 + 1 - k &= m_1 \\ 4y + 1 - n_2 &= m_2 \end{cases}$$

Colocando em forma matricial temos

$$B: \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 - 3n_2 + 1 - k \\ 1 - n_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tomando $y = 0$ na equação A, " em termos do reticulado temos que todos os pontos com mesma altura estão relacionados" assim $[a^{n_1+k}b^{n_2}]_R = [a^{n_1}b^{n_2}]_R$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Tomando, $k = 0$, e variando $y \in \mathbb{Z}$, é sempre possível achar um representante no reticulado da forma (n_1, n_2) com $0 \leq n_2 < 4$.

Assim, pelas considerações anteriores basta analisarmos os pontos do reticulado $J = \{(0,0), (2,1), (3,2), (5,3)\}$, que estão no paralelogramo de vértices $((0,0), (1,0), (6,4), (7,4))$. Ou seja, para calcularmos o número de classes de Reidemeister basta analisarmos no conjunto J quais estão na mesma classe.
Utilizaremos agora a equação B, para compararmos os elementos em J.

Tomando $k = n_1 = n_2 = y = 0$ na equação B, temos que $(0,0)$ esta relacionado com $(1,1)$, o qual por sua vez pela equação A esta relacionado com o ponto $(2,1)$.

Tomando $n_1 = 0, n_2 = -2$ e $k = 0$ na equação B temos que $(0,-2)$ esta relacionado com $(7,3)$, o qual pela equação A esta relacionado com $(5,3)$, além disso tomando $y = 1$ e $k = 0$ na equação A temos que $(0,-2)$ esta relacionado com $(6,2)$. Usando novamente A temos $(6,2)$ relacionado com $(3,2)$. Portanto conclui-se que $(3,2)$ esta relacionado com $(5,3)$.

Portanto, os representantes no conjunto J dão origem a priori duas classes de Reidemeister distintas a saber $[a^0b^0]_R$ e $[a^3b^2]_R$.

Mostremos agora que $(0,0)$ não esta relacionado com $(3,2)$.
Suponha que $(0,0)$ esta relacionado com $(3,2)$, então deve-se verificar a equação A ou B, ou seja deve existir $k, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Verifica-se facilmente que é impossível existir tais inteiros k e y. Portanto existem exatamente duas classes de Reidemeister a saber $[a^0b^0]_R$ e $[a^3b^2]_R$.

b) **Análise do $\mathcal{D}$-conjunto de Jiang**

Como MA é um espaço $K(\pi, 1)$ não abeliano, conforme pág 1773 de [9] temos que $\pi_1(F(MA, MA), f)$ é isomorfo ao $C(\pi_1 MA, f(\pi_1(MA)))$, centralizador da imagem de $\pi_1(MA)$ por f em $\pi_1(MA)$, através do homomorfismo $ev_{x_0} : \pi_1(F(MA, MA), f) \to \pi_1(MA, f(x_0))$ dada por $ev_{x_0}(H) = [< H, x_0 >]$.

A imagem de $f_\#$ é gerada por a^6b^4 e $a^{c_1}b^{c_2}c$, assim para que $a^xb^yc^z$ esteja no comutador deve comutar com esses elementos.

$$\text{Primeira condição comutar com } a^6b^4 \begin{cases} a^6b^4a^xb^yc^z = & a^xb^yc^za^6b^4 \\ b^4b^yc^z = & b^yc^zb^4 \\ b^4b^yc^zb^{-4}c^{-z} = & b^y \\ \text{se } z \text{ é par } b^4b^yb^{-4} = & b^y \\ \text{Se } z \text{ é ímpar } b^4b^ycb^{-4}c^{-1} = & b^y \\ b^4b^y(a^{-3}b^{-1})^{-4} = & b^y \text{ impossível} \end{cases}$$

ou seja, para comutar com a^6b^4 o elemento é da forma $a^xb^yc^{2k}$.

$$\text{Segunda condição comutar com } a^{c_1}b^{c_2}c\text{:} \begin{cases} a^{c_1}b^{c_2}ca^xb^yc^{2k} = & a^xb^yc^{2k}a^{c_1}b^{c_2}c \\ b^{c_2}cb^yc^{2k} = & b^yc^{2k}b^{c_2}c \\ b^{c_2}cb^yc^{2k-1}b^{-c_2} = & b^yc^{2k} \\ b^{c_2}cb^yc^{2k-1}b^{-c_2}c^{-2k} = & b^y \\ b^{c_2}cb^yc^{-1}b^{-c_2} = & b^y \\ b^{c_2}(a^{-3}b^{-1})^yb^{-c_2} = & b^y \\ \text{só ocorre se } y = & 0 \end{cases}$$

Assim os elementos do centralizador $C(\pi_1(MA); f)$ são da forma a^xc^{2k}, como a e c^2 comutam, esse centralizador é $Z \oplus Z$ com geradores a e c^2 .

Logo, os elementos da forma $Im(ev_{x_0}) = \{[< H, x_0 >] \in \pi_1(MA, f(x_0)), H \text{ laço em } f\}$ é gerado por a e c^2.

Observemos que $T(f, q, x_0, \mathcal{D}_q) \subset Im(ev_{x_0})$ e pela Proposição 3.3.2 temos $T(f, q, x_0, \mathcal{D}_q) \subset Ker(q_\#)$, assim $T(f, q, x_0, \mathcal{D}_q)$ é gerado apenas por a.

c) **Estimativa do Número de Nielsen**

Segue dos cálculos anteriores para o caso particular $c_1 = c_2 = 1$ que

$$r(f, q; T(f, q, x_0, \mathcal{D}_q)) = 1 \text{ e } r(f, q; Ker(q_\#)) = 2$$

Assim se existir classe essencial, ou seja, $n(f, q, \mathcal{D}_q) > 0$, temos pelo Corolário 3.3.8 que

$$1 \leq n(f, p, \mathcal{D}_q) \leq 2.$$

No artigo [10] mostra-se que se $Det \begin{bmatrix} 6 & c_1 \\ 4 & c_2 \end{bmatrix} \neq 0$, então f não se fatora de acordo com o Proposição 4.2.16. Assim, nesse exemplo particular para $c_1 = c_2 = 1$ podemos ter $L_*(f, q, MA, s(S^1)) \neq 0$ e portanto podemos ter $n(f, q, \mathcal{D}_q) > 0$.

Referências Bibliográficas

[1] Brooks, R., *Coincidences,Roots, and Fixed Points*, Doctoral Dissertation, University of california, Los Angeles,1967.

[2] Whitehead, G. W.,*Elements of Homotopy Theory*, Springer- Verlag, 1975.

[3] Bredon, G. E.,*Topology and Geometry*,Springer- Verlag, 1993.

[4] Vick, J., *Homology Theory*, New York and London Academic Press, Inc - USA, 1973.

[5] Dold,A., *Lectures on Algebraic Topology*, Springer- Verlag, Berlin, 1972.

[6] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, Springer- Verlag, 1981.

[7] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[8] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1996.

[9] Gonçalves,D.L e Kelly, M.R., *Topology and its Applications*, Elsevier, Volume 157, pág. 1770-1783, july 2010.

[10] Gonçalves,D.L ; D.Penteado e J.P. Vieira, *Fixed points on torus fiber bundles over the circle*, Fundamenta Mathematicae, Volume 183, 2004.

[11] Jezierski J. and Marzantowicz W., *Homotopy Methods in Topology Fixed and Periodic Point Theory*, Springer, 2006.

[12] K. Borsuk *Theory of Retracts*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1967.