UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leis de Conservação Escalar : Fórmula Explícita e Unicidade

Alex Ferreira Rossini

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leis de Conservação Escalar : Fórmula Explícita e Unicidade

Alex Ferreira Rossini

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

São Carlos - SP
2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

R835Lc

Rossini, Alex Ferreira.
Leis de conservacão escalar : fórmula explícita e unicidade / Alex Ferreira Rossini. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
81 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Leis de conservação. 3. Solução admissível. 4. Entropia. 5. Condição de Rankine-Hugoniot. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

Rafael Augusto dos Santos Kapp

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
DM - UFSCar

Prof. Dr. Evandro Raimundo da Silva
ICMC - USP

Dedico este trabalho a meus pais

Orlando Rossini Filho e Maria Ferreira Rossini

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Senhor que sempre me deu forças para seguir em busca dos meus objetivos, mesmo às vezes não merecendo suas graças ele esteve ao meu lado.

Agradeço aos meus pais pelo carinho e por acreditar em mim, também por ter proporcionado a chance de continuar meus estudos mesmo quando parecia que não daria certo. Também agradeço a toda minha família, em especial aos meus avós.

Quero agradecer ao professor Cezar Kondo pela orientação e contribuição em meu crescimento matemático, agradeço toda a disponibilidade e paciência para tirar dúvidas que não eram poucas e por acreditar no meu trabalho com o passar do tempo.

Agradeço muito aos professores do curso de Matemática da UEMS unidade de Cassilândia por abrirem meus olhos para matemática e por todo incentivo que trouxe-me até São Carlos. Sou grato, especialmente, aos professores Marco, Wilson e Marcelo. Aproveito a oportunidade para agraceder todos aos meus amigos que fiz naquela cidade e até hoje posso contar com eles e também aos amigos que tenho no DM que sempre me apoiaram em momentos desfavoráveis, a todos vocês meu muito obrigado.

Finalmente, agradeço à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo financiamento deste projeto.

Resumo

Neste trabalho estudamos leis de conservação escalar, com a dedução de uma fórmula explícita de uma solução suave de suporte compacto, também apresentamos o comportamento da solução dada pela fórmula quando o dado inicial é nulo fora de algum intervalo limitado e por fim estudamos a unicidade para uma dada lei de conservação sob certas hipóteses.

Palavra-chave: Leis de Conservação, Condição de Entropia, Relação de Rankine-Hugoniot e Solução Admissível.

Abstract

We study scalar conservation laws, with the deduction of an explicit formula of a smooth solution with compact support, we also present the behavior of the solution given by the formula when the initial value is zero outside a finite interval. In order to study the uniqueness of a given conservation law under certain hypotheses.

Sumário

Introdução

A apresentação deste trabalho inicia-se com um estudo sobre leis de conservação escalar, mais especificamente estudamos a equação $u_t + f(u)_x = 0$, para $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ que é o mais simples modelo de movimento de onda.

Escrevendo a equação na forma diferencial $u_t + f'(u)u_x = 0$, vimos que se $u(x,t)$ é uma solução suave para o problema de valor inicial, com dado inicial $u(x,0) = u_0(x)$, a mesma é igual ao seu dado inicial sobre a reta $x(t)$ satisfazendo a equação $\dfrac{dx}{dt} = f'(u(x,t))$, tais retas são chamadas de *características*.

Em geral, tal problema de Cauchy não possui solução suave globalmente definida, isto é, definida para todo $t > 0$, mesmo quando temos dados iniciais suaves. Este fenômeno de não existência de solução global, pode ser observada pelo fato que a inclinação das retas características dependem da solução e assim podemos esperar que tais retas se interceptam e onde isto ocorre não há solução suave definida.

Interessados em definir solução para todo tempo, o conceito de solução para a equação acima deve ser enfraquecido, cedendo lugar a um novo conceito de solução chamada de solução *fraca* ou *generalizada* o qual nos permite lidar com soluções descontínuas. Este novo conceito de solução significa satisfazermos não a equação diferencial parcial em si, mas uma formulação integral obtida a partir da mesma, de sorte que quando restrita a soluções clássicas (suaves) tal formulação integral é equivalente a equação diferencial original.

Após tal definição de solução fraca demos alguns exemplos explícitos de solução fraca e verificamos diretamente que as mesmas satisfazem a equação integral a qual define solução fraca. Também demos um teorema, a saber teorema 2.1, qual nos permite construir soluções fracas explicitamente.

O enfraquecimento do conceito de solução amplia nossa classe de candidatas a solução, mas adotando este novo conceito perdemos unicidade para o problema, isto é, soluções fracas não são unicamente determinadas por seus dados iniciais. Surge então a questão de como escolher a solução adequada ou fisicamente relevante, lembrando que nossa equação é proveniente de algum modelo físico. Um critério para a escolha da solução fisicamente relevante é dado quando o fluxo f em questão é convexo, tal critério é chamado de *condição de entropia*, dada por Lax .

Por fim apresentamos a dedução de uma fórmula explícita de uma solução suave de suporte compacto para o problema de Cauchy com dado inicial limitado, também apresentamos o comportamento da solução dada pela fórmula quando o dado inicial em questão é nulo fora de algum intervado limitado e estudamos um teorema de unicidade para a dada lei de conservação $u_t + f(u)_x = 0$, sob certas hipóteses.

Capítulo

1

Resultados Básicos e Conceitos

Neste capítulo estão alguns resultados e definições para a leitura dos demais capítulos e também alguns teoremas fundamentais para a obtenção de alguns resultados deste trabalho.

Definição 1.1 *Uma função real g definida em um intervalo* (a,b)*, onde* $-\infty \leq a < b \leq \infty$*, é dita convexa se para cada* $x,y \in (a,b)$ *e cada* $0 \leq \lambda \leq 1$ *temos*

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y). \tag{1.1}$$

Geometricamente, uma função é chamada convexa quando seu gráfico se situa sobre ou abaixo de qualquer de suas secante, mais precisamente, se $x < t < y$ *então o ponto* $(t, g(t))$ *encontra-se abaixo ou sobre a reta conectando os pontos* $(x, g(x))$ *e* $(y, g(y))$ *no plano.*

Substituindo $\leq$ *por* $<$ *temos a definição de função estritamente convexa, neste caso, o gráfico de g não apresenta trechos retilíneos.*

Teorema 1.1 *Se g é convexa sobre* (a,b) *então g é contínua sobre* (a,b)*.*

Prova: Veja demostração, por exemplo, em [7], p.106.

Teorema 1.2 *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f é convexa.

b) A derivada $f'(a,b) \to \mathbb{R}$ é monótona crescente.

c) Para quaisquer $u, v \in (a,b)$ tem-se $f(u) \geq f(v) + f'(v)(u-v)$.

Prova: Veja demostração, por exemplo, em [7], p.106.

Teorema 1.3 *Uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, duas vezes derivável em (a,b) é convexa se, e só se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$.*

Prova: Veja demostração, por exemplo, em [7], p.106.

Observação 1.1 *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f' é crescente, logo f é estritamente convexa.*

Teorema 1.4 *Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto.*

Prova: Veja demostração, por exemplo, em [7], p.107.

Definição 1.2 *Uma função $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diz-se côncava quando $-g$ é convexa.*

Teorema 1.5 *Todo ponto crítico de uma função côncava é um ponto de máximo absoluto.*

Demonstração: Segue da definição de função côncava e teorema anterior.

Lema 1.1 (Desigualdade de Jensen) *Se g é convexa sobre (c,d) e se x, y, x', y' são pontos de (c,d) tais que $x \leq x' < y'$ e $x < y \leq y'$, então*

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leq \frac{g(y') - g(x')}{y' - x'} \tag{1.2}$$

Demonstração: Se $x = x'$ e $y = y'$ então nada temos a fazer. Observamos que se $a < w < b$ são quaisquer pontos de (c,d) pela definição de função convexa temos

$$g(w) \leq \frac{b-w}{b-a}g(a) + \frac{w-a}{b-a}g(b).$$

Então seguem as desigualdades

$$\begin{aligned} (b-a)g(w) &\leq (b-w)g(a) + (w-a)g(b) \\ &\leq (b-a)g(a) + (a-w)g(a) + (w-a)g(b) \end{aligned}$$

ou seja,

$$(b-a)(g(w)-g(a)) \leq (w-a)(g(b)-g(a)),$$

multiplicando a última desigualdade por $\dfrac{1}{(w-a)(b-a)} > 0$ temos

$$\frac{g(w)-g(a)}{w-a} \leq \frac{g(b)-g(a)}{b-a}. \tag{1.3}$$

Por argumento similar podemos concluir que

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq \frac{g(b)-g(w)}{b-w}. \tag{1.4}$$

Portanto,

$$\frac{g(w)-g(a)}{w-a} \leq \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq \frac{g(b)-g(w)}{b-w}. \tag{1.5}$$

Por hipótese $x < x' < y'$ então de (1.3) temos a desigualdade

$$\frac{g(x')-g(x)}{x'-x} \leq \frac{g(y')-g(x')}{y'-x'}. \tag{1.6}$$

Caso tivermos $x < y < x'$ então por (1.5) e (1.6) obtemos

$$\frac{g(y)-g(x)}{y-x} \leq \frac{g(x')-g(x)}{x'-x} \leq \frac{g(y')-g(y)}{y'-y}.$$

Caso $x < x' < y$ e $x' < y < y'$ segue de (1.5) as desigualadades

$$\frac{g(y)-g(x)}{y-x} \leq \frac{g(y)-g(x')}{y-x'} \leq \frac{g(y')-g(x')}{y'-x'}.$$

Portanto em qualquer dos casos vale o resultado. Além disso, se g é estritamente convexa temos que vale a desigualdade estrita com $x < x' < y'$ e $x < y < y'$ em (c,d). ■

Definição 1.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^1(\mathbb{R})$*, e considere a aplicação*

$$g(v) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (uv - f(u)),\ v \in \mathbb{R}$$

g *é chamada de* transformação de Legendre *associada a* f.

Teorema 1.6 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuamente diferenciável e estritamente convexa de modo que*

$$\lim_{|u| \to \infty} f(u)/|u| = \infty.$$

Considere g *a* transformação de Legendre *associada a* f*. Então,*

a) g *é convexa,*

b) $\lim_{|v|\to\infty} \dfrac{g(v)}{|v|} = \infty$ *e* $g(f'(v)) = f'(v)v - f(v),\ v \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos provar que $g(.)$ é convexa. Dados $p,q \in \mathbb{R}$ distintos e $0 \leq \lambda \leq 1$ então

$$\begin{aligned}
g(\lambda p+(1-\lambda q)) &= \sup_{u\in\mathbb{R}}(u(\lambda p+(1-\lambda q))-f(u)) \\
&= \sup_{u\in\mathbb{R}}(\lambda(up-f(u))+(1-\lambda)(uq-f(u))) \\
&\leq \sup_{u\in\mathbb{R}}(\lambda(up-f(u))+\sup_{u\in\mathbb{R}}((1-\lambda)(uq-f(u)) \\
&= \lambda g(p)+(1-\lambda)g(q).
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $\lim_{|v|\to\infty}\dfrac{g(v)}{|v|}=\infty$. Dado $\lambda>0$, para $p\neq 0$, temos :

$$\begin{aligned}
g(p)=\sup_{q\in\mathbb{R}}(qp-f(q)) &\geq \lambda\frac{p}{|p|}p-f\left(\frac{\lambda p}{|p|}\right) \\
&= \lambda\frac{|p|^2}{|p|}-f\left(\frac{\lambda p}{|p|}\right) \\
&= \lambda|p|-f\left(\frac{\lambda p}{|p|}\right).
\end{aligned}$$

obtemos esta desigualdade considerando $q=\lambda\frac{p}{|p|}$. Daí temos que

$$g(p)\geq\lambda|p|-\max_{[-\lambda,\lambda]}f,$$

assim

$$\liminf_{|p|\to\infty}\frac{g(p)}{|p|}\geq\liminf_{|p|\to\infty}\left(\lambda-\frac{\max f}{|p|}\right)=\lambda.$$

Portanto,

$$\liminf_{|p|\to\infty}\frac{g(p)}{|p|}\geq\lambda,\ \ \forall\ \ \lambda\geq 0,$$

logo

$$\liminf_{|p|\to\infty}\frac{g(p)}{|p|}=\infty.$$

Segue da definição de g e do fato que $f(u) \geq f(v) + f'(v)(u-v)$ à igualdade

$$g(f'(v)) = f'(v)v - f(v), \; v \in \mathbb{R}.$$

$\blacksquare$

Observação 1.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa satisfazendo*

$$f''(x) \geq \theta > 0 \;\; e \;\; \lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = \pm\infty$$

e considere

$$g(v) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (uv - f(u)), \; v \in \mathbb{R}$$

a transformação de Legendre de $f(.)$*, observamos que o supremo acima é na verdade um máximo, pois considerando a função real* $H(u) = uv - f(u), u \in \mathbb{R}$*, temos que* $H'(u) = v - f'(u), \forall\, u \in \mathbb{R}$ *então* $H'(b(v)) = 0$*, onde* $b(v) = (f')^{-1}(v)$*, e como* $H(u)$*, para cada* v *fixado, é côncava temos que o ponto crítico* $b(v) \in \mathbb{R}$ *é um ponto de máximo global. Note que* $b(v)$ *é o único ponto crítico de* H*. Daí, podemos reescrever a transformação de Legendre como segue*

$$g(v) = b(v)v - f(b(v)).$$

Assim, $g'(v) = b(v)$*, o que implica* $g''(v) = 1/f''(b(v)) > 0$*. Portanto, a função* $g(.)$ *é estritamente convexa e também temos* $\lim_{\pm\infty} g' = \lim_{\pm\infty} b = \pm\infty$*.*

Teorema 1.7 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n *vezes derivável no intervalo aberto* (a,b)*, com* $f^{(n-1)}$ *contínua em* $[a,b]$*. Então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(a) = f(b) + f'(b)(a-b) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(a-b)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(a-b)^n.$$

Prova: Vide demostração em [7], p.104.

Teorema 1.8 (Derivada de uma função inversa) *Seja $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g : Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua em $f(a)$ então g admiti derivada em $f(a)$ se e só se $f'(a) \neq 0$. Neste caso, $g'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

Prova: Veja demostração em [7], p.92.

Teorema 1.9 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (resp. à esquerda) no ponto $a \in X \cap X'_{+}$ (resp. $a \in X \cap X'_{-}$) e tem aí um máximo local (resp. mínimo local) então $f'_{+}(a) \leq 0$ (resp. $f'_{-}(a) \leq 0$.)*

Prova: Veja demostração em [7], p.94.

Teorema 1.10 (Teorema da Função Implícita) *Seja $F : U \to \mathbb{R}$, de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$, $c = F(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então, existem uma bola aberta $B = B(x_0, r)$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propridades:*

- $B \times \overline{J} \subset U$ *e* $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0, \ \forall \ (x, y) \in B \times \overline{J}$;
- *Para cada $x \in B$ existe um único $y = u(x) \in J$ tal que $F(x, y) = F(x, u(x)) = c$.*

A função $u : B \to J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B \subset \mathbb{R}^n$ são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, u(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, u(x))}.$$

Prova: Veja demostração em [8], p.160.

Teorema 1.11 (Teorema da Divergência no Plano) *Seja $F = (P, Q)$ um campo vetorial de classe C^1 num aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ e seja K um compacto, com interior não-vazio, contido em Ω, cuja fronteira é imagem de uma curva fechada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, de classe C^1, simples, orientada no sentido anti-horário com $\gamma'(t) \neq 0$ no intervalo aberto. Seja n o normal unitário exterior a K, então $\displaystyle\oint_{\gamma} F.n\, ds = \iint_K divF\, dxdt$.*

Demonstração:

$$\oint_\gamma F.n\,ds = \int_a^b F(\gamma(t)).n(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt,$$

onde

$$n(\gamma(t)) = \frac{1}{|\gamma'(t)|}(y'(t), -x'(t))$$

Logo,

$$\oint_\gamma F.n\,ds = \int_a^b [P(\gamma(t))y'(t) - Q(\gamma(t))x'(t)]\,dt,$$

daí segue que

$$\oint_\gamma F.n\,ds = \oint_\gamma -Q\,dx + P\,dy.$$

Em vista do Teorema de Green

$$\oint_\gamma -Q\,dx + P\,dy = \iint_K \partial_x P + \partial_x Q\ dxdt.$$

Portanto,

$$\oint_\gamma F.n\,ds = \iint_K divF\ dxdt.$$

■

Teorema 1.12 *Sejam* $f, g \in C(X)$ *funções complexas onde* $X \subseteq R^n$ *e* $\int_X f\phi\,dx = \int_X g\phi\,dx$ *para toda* $\phi \in C_c^\infty(X)$ *então* $f = g$.

Prova: Veja demostração em [4], p. 15.

Teorema 1.13 *Considere a aplicação* $f : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *e assuma que a função* $x \to f(x,t)$ *é* $\mathbb{R}-$ *mensurável para cada* $t \in [a,b]$. *Suponha que para algum* $t_0 \in [a,b]$, *a função* $x \to f(x,t_0)$ *seja integrável sobre* $\mathbb{R}$, *que* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *exista em* $\mathbb{R} \times [a,b]$, *e que exista uma função* $g(x)$ *integrável em* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x).$$

Então a função $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dx$ *é diferenciável em* $[a,b]$ *e* $\dfrac{dF}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$

Prova: Veja demostração em [3], p.54.

Definição 1.4 *Seja* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *e* $x \in \mathbb{R}$, *definimos*

$$T_u(x) = \sup\left\{\sum_1^n |u(x_j) - u(x_{j-1})| : -\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

$T_u(x)$ *é chamada de* ***função variação total*** *associada a* u. *Observamos que* T_u *é uma função monótona crescente com valores possivelmente em* $[0,\infty]$. *De fato, note que a soma na definição acima cresce se o número de pontos* x_j *na subdivisão cresce, daí se* $a < b$ *o supremo na definição de* $T_u(b)$ *não é alterado se assumirmos que* a *é sempre um ponto da subdivisão, pois dada uma soma* $\sum_1^n |u(x_j) - u(x_{j-1})|$ *a mesma é menor ou igual a outra soma onde algum* $x_j = a$. *Então, segue que*

$$T_u(b) = T_u(a) + \sup\left\{\sum_1^n |u(x_j) - u(x_{j-1})| : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}\right\}. \qquad (1.7)$$

portanto T_u *é monótona crescente.*

Dizemos que u *é de* ***variação limitada*** *sobre* $\mathbb{R}$, *se* $T_u(\infty) = \lim_{x\to+\infty} T_u(x)$ *é finito, notação* $u \in BV(\mathbb{R})$.

O supremo à direita de (1.7) é chamado variação total *de* u *sobre* $[a,b]$, *como tal supremo só depende dos valores de* u *em* $[a,b]$, *definimos* $BV[a,b]$ *ser o conjunto das funções sobre* $[a,b]$

cuja variação total *em* $[a,b]$ *é finita, em símbolos*

$$u \in BV[a,b] \Longleftrightarrow TV_u[a,b] =: \sup\left\{\sum_1^n |u(x_j) - u(x_{j-1})| : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Teorema 1.14 *Seja* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monótona crescente e* $\Phi(x) = u(x^+)$.

a) O conjunto dos pontos de descontinuidade de u é contável.

b) u e Φ *são diferenciáveis q.t.p* x, u' *é mensurável,* $u' \geq 0$ *q.t.p* x, *e* $\Phi'(x) = u(x)$ *q.t.p.*

Prova: Veja demostração em [3], p.95.

Teorema 1.15 *a) Se* $u \in BV$, *então* $u(x^+) = \lim_{y \to x^+} u(y)$ *e* $u(x^-) = \lim_{y \to x^-} u(y)$ *existem para todo* $x \in \mathbb{R}$.

b) Se $u \in BV$ *então u é contínua quase sempre.*

c) Se $u \in BV$ *e* $\Phi(x) = u(x^+)$, *então* u' *e* Φ' *existem quase sempre e são iguais quase sempre.*

d) Se $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é BV existem funções monótonas crescentes limitadas* $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que* $u = u_1 - u_2$.

Prova: Veja demostração em [3], p.98.

Teorema 1.16 *Se* $f = f_1 - f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é de variação limitada em* $[a,b]$ *então* $f'(x)$ *existe quase sempre e* $f' \in L^1[a,b]$. *Onde* f_i *é como no teorema anterior.*

Demonstração: Estenda f_i pondo $f_i(x) = f_i(a)$ para $x \leq a$ e $f_i(x) = f_i(b)$ para $x \geq b$, com $i = 1,2$. Pelo teorema (1.15) f é diferenciável quase sempre, pois $f_i \in BV(\mathbb{R})$. Portanto, as funções

$$f_k^i(x) = \frac{f_i(x+1/k) - f_i(x)}{1/k} = k(f_i(x+1/k) - f_i(x)) \tag{1.8}$$

convergem pontualmente q.t.p para $f_i'(x)$ para $k \to \infty$. Pelo Lema de Fatu, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b f_i'(x)\,dx &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k^i(x)\,dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left(k\int_{a+1/k}^{b+1/k} f_i(x)\,dx \,-\, k\int_a^b f_i(x)\,dx \right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left(k\int_{b}^{b+1/k} f_i(x)\,dx \,-\, k\int_a^{a+1/k} f_i(x)\,dx \right) \\
&\leq k\int_{b}^{b+1/k} f_i(b)\,dx \,-\, k\int_a^{a+1/k} f_i(a)\,dx \\
&= f_i(b) - f_i(a).
\end{aligned}
$$

Segue que $|f'| \leq |f_1'| + |f_2'|$ q.t.p-x, portanto $f' \in L^1[a,b]$.

■

Corolário 1.1 *Se $f = f_1 - f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada em $\mathbb{R}$ então $f'(x)$ existe quase sempre e $f' \in L^1(\mathbb{R})$.*

Demonstração:

De fato, defina as sequências, $0 \leq a_k = \displaystyle\int_0^k f_i'(x)\,dx$ e $0 \leq b_k = \displaystyle\int_{-k}^0 f_i'(x)\,dx$ para $i = 1,2$, e $k \in \mathbb{N}$. Note que $a_k \leq a_{k+1}$, $b_k \leq b_{k+1}$, e do teorema anterior

$$a_k \leq f_i(k) - f_i(0) \leq TV_{f_i}[0,k] \leq TV_{f_i}(\mathbb{R}) < \infty$$

e

$$b_k \leq f_i(0) - f_i(-k) \leq |f_i(-k) - f_i(0)| \leq TV_{f_i}[-k,0] \leq TV_{f_i}(\mathbb{R}) < \infty$$

Assim, as sequências são monótonas e limitadas, portanto convergentes. Daí, segue que ,

$$\begin{aligned}0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_i'(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f_i'(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_i'(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^{0} f_i'(x)\,dx + \lim_{k\to+\infty}\int_{0}^{k} f_i'(x)\,dx < \infty.\end{aligned}$$

Já que $f' = f_1' - f_2'$ q.t.p-x então $|f'| \leq |f_1'| + |f_2'|$ q.t.p-x. Pontanto $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

■

Teorema 1.17 *Seja $f \in BV[a,b]$ e $TV(x) \doteq TV_f[a,x]$, então $TV(x)$ é diferenciável q.t.p $x \in [a,b]$, e $(TV)'(x) = |f'(x)|$ q.t.p $x \in [a,b]$. Lembre que*

$$TV_f[a,x] \doteq \sup\left\{\sum_{1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x, n \in \mathbb{N}\right\} < \infty,$$

onde o supremo é sobre o conjunto de todas as partições de $[a,x]$.

Prova: Veja demonstração em [1].

Capítulo

2

Leis de Conservação

As EDPs de primeira ordem aparecem em muitos problemas físicos e geométricos, devido ao significado físico da noção de derivada (velocidade de movimento) e seu significado geométrico (a tangente do ângulo). Em muitos problemas deste tipo uma das variáveis é a variável tempo, e os processos podem durar um tempo suficientemente grande. Durante este período, algumas singularidades das soluções podem aparecer. Entre essas singularidades, consideramos apenas descontinuidades fortes que são ”saltos” das soluções . É claro que, após as singularidades terem surgido, a fim de dar um significado à equação em questão tem de se definir derivadas fracas e soluções fracas. Essas noções foram introduzidos na linguagem matemática apenas no século 20. A primeira realização matemática nesse sentido foi o trabalho clássico de Hopf (1950). Neste trabalho, uma teoria não-local para o problema de Cauchy foi construída para a equação $u_t + \left(u^2/2\right)_x = 0$ com dado inicial $u(x,0) = u_0(x)$, onde u_0 é uma função mensurável limitada. A equação

$$u_t + f(u)_x = 0$$

é uma natural generalização da equação estuda por Hopf.

Motivação para a equação de Hopf : Considere partículas em movimento em um meio unidimensional na ausência de forças externas. Denote por $u(x,t)$ a velocidade da partícula, localizada no ponto x no instante de tempo t. Se $x = \varphi(t)$ é a trajetória da partícula então sua velocidade é $\varphi'(t) = u(\varphi(t),t)$ e a aceleração $\varphi''(t)$ é nula para todo tempo t, pela primeira Lei de Newton. Portanto,

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}[u(\varphi(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\varphi' = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u.$$

A equação $u_t + uu_x = 0$ assim obtida que descreve o campo velocidade das partículas é chamada **equação de Hopf**.

Assim é natural estudar problemas mais gerais com

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

ou na forma multidimensional $u_t + div_x f(u) = 0$. No presente trabalho, o objeto de estudo é a equação $u_t + f(u)_x = 0$, que engloba a equação de Hopf, com $f(u)$ convexa e com algumas hipóteses adicionais.

2.1 Leis de Conservação Escalar

Uma lei de conservação escalar é uma EDP de primeira ordem da forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{2.1}$$

onde f é uma função não-linear dada e $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, é a função procurada. Estamos interessados no problema de Cauchy associado a equação (2.1), ou seja, queremos obter uma função $u(x,t)$ que satisfaz (2.1) e uma determinada condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.2}$$

Porém, leis de conservação do tipo (2.1)-(2.2) não possuem em geral solução global suave, isto é, de classe C^1 em $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ e contínua em $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, mesmo quando o dado inicial é suave. Vejamos isso nas subseções a seguir.

2.1.1. Condição para a não-existência de solução global

Seja $f''>0$, ou seja, f é estritamente convexa e $u_0(x)\in C^1(\mathbb{R})$. Considere o problema de Cauchy escalar

$$\begin{aligned} &u_t+f(u)_x=0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R},\\ &u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Suponha que $u(x,t)$ seja uma solução suave para $t>0$, e reescreva a equação acima na forma

$$u_t+f'(u)u_x=0.$$

Considere a curva integral $x(t)$ da equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt}=f'(u(x,t)),\ \ x(t_0)=x_0,\quad t_0>0. \tag{2.4}$$

Ao longo desta curva $t\to(x(t),t)$ temos que $u(x,t)$ é constante, pois

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t)=u_x(x(t),t)\frac{d}{dt}x(t)+u_t(x(t),t)=0,$$

deste fato e de (2.4) segue que

$$x(t)=x_0+(t-t_0)f'(u(x_0,t_0))$$

tal uma curva (reta) é chamada de *curva característica*. Consequentemente, o valor $u(x_0,t_0)$ da solução no ponto (x_0,t_0) é conservado por toda essa reta. Logo, estendendo tal reta até interceptar o eixo-x em algum ponto $(y_0,0)$, podemos considerar o valor de $u_0(y_0)$. Como o ponto $(y_0,0)$ encontra-se sobre a reta inicial temos $u(x_0,t_0) = u(y_0,0) = u_0(y_0)$ e podemos escrever

$x(t) = x_0 + (t-t_0)\, f'(u_0(y_0))$, ou ainda, já que $y_0 = x_0 - t_0\, f'(u_0(y_0))$ então

$$x(t) = y_0 + t\, f'(u_0(y_0)),$$

onde a inclinação da reta é dada pelo dado inicial. Assim, se tivermos

$$m_1 = f'(u_0(y_1)) > m_2 = f'(u_0(y_2))$$

para $y_1 < y_2$ então as curvas características passando por $(y_1,0)$, $(y_2,0)$, respectivamente, cruzarão em algum ponto p_0 do plano $x-t$, para algum $t > 0$, a saber para $0 < t = \dfrac{y_2 - y_1}{m_1 - m_2}$. Logo em p_0 a função $u(x,t)$ deixa de ser contínua, pois

$$u_0(y_1) = u(y_1,0) = u(p_0) = u(y_2,0) = u_0(y_2),$$

já que $u(\cdot,\cdot)$ é constante sobre as curvas, note que $u_0(y_1) \neq u_0(y_2)$. Para a existência dos pontos y_1 e y_2 basta supor que exista z tal que $u_0'(z) < 0$. Portanto, não podemos ter uma solução suave globalmente definida.

2.1.2. Redução do Problema de Cauchy a uma Equação Implícita

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &u_t + f(u)_x = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

com dado inicial $u_0 = u_0(x)$ de classe $C^1(\mathbb{R})$. Assuma que temos uma solução $u = u(x,t)$ clássica (suave) para o problema de Cauchy. Sendo as curvas características retas, seja (x,t)

é um ponto com $t > 0$, denote por $y = y(x,t)$ o único ponto sobre o eixo-x que a reta característica intercepta passando por (x,t). Já que $u = u(\cdot,\cdot)$ é constante sobre a reta característica temos a seguinte identidade para a solução

$$u(x,t) = u(y,0) = u_0(x - t f'(u(x,t))). \tag{2.6}$$

Agora, transferimos nossa atenção para a equação abaixo , proveniente de (2.6), ou seja,

$$F(u,x,t) = u - u_0(x - t f'(u)) = 0. \qquad (2.6)'$$

Observe que aplicação $F \in C^1(\mathbb{R}^2 \times (0,\infty))$ acima. Note para $t = 0$ que $F(u,x,0)$ é crescente em u. Suponha , para algum $T > 0$, que tenhamos

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x,t,u) = 1 + t u_0'(x - t f'(u)) f''(u) > 0,$$

para todo (u,x,t) onde u é solução da equação $F(u,x,t) = 0$ para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T)$ fixado. Note que estamos supondo ser possível resolver a equação $F(u,x,t) = 0$. Então para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$, existe um único $u = u(x,t)$ tal que $u(x,t) - u_0(x - t f'(u(x,t))) = 0$ e o *Teorema da Função Implícita* nos garante que a função assim definida é de classe C^1 na faixa $\mathbb{R} \times (0,T)$, além disso, temos as expressões

$$u_t(x,t) = -\frac{f'(u(x,t))u_0'(x - t f(u(x,t)))}{1 + t u_0'(x - tu) f''(u(x,t))}$$

e

$$u_x(x,t) = \frac{u_0'(x - t f(u(x,t)))}{1 + t u_0'(x - tu) f''(u(x,t))}.$$

Segue por substituição na equação $u_t + f(u)_x = 0$ que $u = u(\cdot,\cdot)$ é solução do problema de Cauchy com dado inicial u_0, e suave na faixa $\mathbb{R} \times (0,T)$.

Agora, se $||f''(u)|| \leq L$ sobre a imagem de u_0 e ainda $||u_0'|| \leq K$ então temos $u(x,t) = u_0(y)$, onde $y = x - tf'(u(x,t))$, portanto

$$1 + tu_0'(x - tf'(u))f''(u) > 1 - tKL > 0,$$

assim basta considerar t satisfazendo $0 < t < \dfrac{1}{KL} = T$. Assim o problema de Cauchy tem uma solução na faixa $0 < t < \dfrac{1}{KL} = T$.

Em suma, o que fizemos é transferir o problema de Cauchy à resolução da equação dada por $(2.6)'$ em uma faixa $\Pi_T = \{(x,t); -\infty < x < \infty,\, 0 < t < T\}$ de sorte a obter uma solução suave para o problema de Cauchy.

Comentário 1 *Em resumo, dado $y_0 \in \mathbb{R}$, a curva característica $t \longmapsto x(t)$ saindo de y_0 é definida (ao menos localmente) por*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f'(u(x,t)) \\ x(0) &= y_0. \end{aligned}$$

O ponto y_0 é considerado o pé da curva característica, e pondo $v(t) = u(x(t),t)$ temos $v'(t) = 0$. Assim a solução é constante ao longo da característica , onde a mesma deve ser uma reta. É geometricamente possível que duas tais características possam cruzar em algum tempo $t > 0$.

2.2 Solução Fraca e Condição de Rankine-Hugoniot

Vimos nas seções anteriores em que geral não podemos ter solução clássica para todo tempo e quando isso é possível pode fazer apenas para tempo finito. Logo, como gostaríamos de obter solução para todo tempo, o conceito de solução clássica cede lugar ao de solução generalizada ou fraca. Esta última significa satisfazermos não a equação diferencial parcial em si, mas uma formulação integral obtida a partir da mesma que quando restrita a soluções clássicas suaves tal formulação é equivalente a equação diferencial original. Infelizmente adotando-se este conceito de solução generalizada perdemos unicidade, e um critério adicional se faz necessário para garantirmos a unicidade, ou ainda, selecionarmos a solução fisicamente correta dentre todas as fracas existentes. Existe uma abordagem geral que conduz a uma noção de solução generalizada, que tem sua origem na teoria das distribuições. Em vista de nossa equação diferencial em estudo damos a seguinte definição :

Definição 2.1 *Dizemos que uma função* $u : \mathbb{R} \times [0,\infty)$ *mensurável e limitada é uma solução generalizada do problema de Cauchy (2.7) com dado* $u_0(x)$ *mensurável limitado*

$$\begin{aligned} &u_t + f(u)_x = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.7}$$

se

$$\iint_{t\geq 0} (u\phi_t + f(u)\phi_x)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0 \tag{2.8}$$

para toda $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2$ *com* $Supp(\phi) \cap \{t \geq 0\} \subset [a,b] \times [0,T]$.

Motivação para tal definição: Seja $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Suponha que temos uma solução clássica (suave) para o problema de Cauchy, agora multiplique a equação $u_t + f(u)_x = 0$ por ϕ e integre sobre a região $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, supondo $Supp(\phi) \subset [a,b] \times [0,T]$ temos

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} (u_t + f(u)_x)\phi\,dtdx &= \int_a^b\int_0^T (u_t + f(u)_x)\phi\,dtdx \\ &= \int_a^b\int_0^T u_t\phi\,dtdx + \int_0^T\int_a^b f(u)_x\phi\,dxdt \\ &= \int_a^b \left[u\phi\Big|_0^T - \int_0^T u\phi_t \right] dx + \int_0^T \left[f(u)\phi\Big|_a^b - \int_a^b f(u)\phi_x \right] dt \\ &= -\int_a^b u(x,0)\phi(x,0)\,dx - \int_a^b\int_0^T u\phi_t\,dtdx - \int_0^T\int_a^b f(u)\phi_x\,dxdt \\ &= -\iint_{t\geq 0} (u\phi_t + f(u)\phi_x)\,dx\,dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)\,dx \end{aligned}$$

Portanto, se $u = u(x,t)$ é uma solução suave de (2.7) então (2.8) é satisfeita para toda $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ com $Supp(\phi) \cap \{t \geq 0\} \subset [a,b] \times [0,T]$.

Observamos ainda que, se $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ satisfaz (2.8) então $u = u(x,t)$ é uma solução clássica do problema de Cauchy com dado $u_0(x)$ contínuo e fluxo $f \in C^1(\mathbb{R})$. De fato, seja $\phi \in C_c^1(R \times (0,\infty))$ então por hipótese e usando integração por partes

$$0 = \int\int_{t\geq 0} u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx\, dt = \int\int_{t>0} (u_t + f(u)_x)\phi \, dx\, dt \tag{2.9}$$

como ϕ é qualquer segue que $u_t + f(u)_x = 0$ em $R \times (0,\infty)$. Agora, considere ϕ como na definição acima e multiplique $u_t + f(u)_x = 0$ por ϕ e integre por partes como na motivação dada acima. Segue que,

$$\int\int_{t\geq 0} (u\phi_t + f(u)\phi_x)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\phi(x,0)\, dx = 0$$

mas por (2.8) tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u(x,0) - u_0(x))\phi(x,0)\, dx = 0$$

já que ϕ é qualquer e $u(x,0) - u_0(x)$ é contínuo concluímos que $u(x,0) - u_0(x) = 0$ em $\mathbb{R}$, como queríamos.

2.3 Exemplos de Soluções Fracas

Vejamos alguns exemplos de soluções fracas :

Considere o fluxo f linear; isto é, $f(u) = au + b$, podemos escrever a equação na forma

$$u_t + au_x = 0$$

e é bem conhecido que $u(x,t) = u_0(x-at)$ é uma solução suave, com dado inicial suave, pelo método das características. Agora com dado inicial explicitado considere o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} &u_t + au_x = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} u_-, & x \leq 0, \\ u_+, & x > 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Portanto, segue dos fatos apresentados que $(u_- \neq u_+)$

$$u(x,t) = u_0(x-at) = \begin{cases} u_-, & x-at \leq 0 \\ u_+, & x-at > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

é uma solução pontual e suave de ambos os lados da reta $x - at = 0$ sobre a qual $u = u(x,t)$ é descontínua devido ao fato que seu dado inicial o é em $x = 0$. No caso, $u_- = u_+$ temos que $u(x,t) = u_-$ é uma solução clássica global.

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &u_t + (u^2/2)_x = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Então

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq t/2 \\ 1, & x > t/2 \end{cases} \tag{2.15}$$

é uma solução fraca. De fato, Seja $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ e suponha $S(\phi) \subset [a,b] \times [0,T]$ com

$a < 0 < b$ temos :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\phi_t + f(u)\phi_x)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^T \int_a^b (u\phi_t + f(u)\phi_x)\,dx\,dt + \int_0^b \phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^T \int_a^{t/2} (u\phi_t + f(u)\phi_x)\,dx\,dt + \int_0^T \int_{t/2}^b (u\phi_t + f(u)\phi_x)\,dx\,dt + \int_0^b \phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^T \int_{t/2}^b (\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x)\,dx\,dt + \int_0^b \phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^T \int_{t/2}^b \phi_t\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{t/2}^b \phi_t\,dx\,dt + \int_0^b \phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^b \int_0^{g(x)} \phi_t\,dt\,dx + \frac{1}{2}\int_0^T \phi(b,t) - \phi(t/2,t)\,dt + \int_0^b \phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^b \phi(x,g(x)) - \phi(x,0)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^T \phi(t/2,t)\,dt + \int_0^b \phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^{T/2} \phi(x,2x)\,dx - \int_{T/2}^b \phi(x,T)\,dx - \int_0^b \phi(x,0)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^T \phi(t/2,t)\,dt + \int_0^b \phi(x,0)\,dx &= \\
\int_0^{T/2} \phi(x,2x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^T \phi(t/2,t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \phi(t/2,t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T \phi(t/2,t)\,dt = 0.
\end{aligned}
$$

Onde

$$
g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{T}{2} \\ T, & \frac{T}{2} \le x \le b \end{cases} \tag{2.16}
$$

Portanto, já que ϕ é arbitrária segue que u é uma solução fraca.

Agora, considere para o mesmo problema a função

$$
u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 \le x < t \\ 1, & x \ge t \end{cases} \tag{2.17}
$$

Então afirmamos que esta também é uma solução fraca. De fato, $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ e suponha $S(\phi)\subset[a,b=T]\times[0,T]$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (u\phi_t+f(u)\phi_x)\,dx\,dt+\int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)\,dx &=\\
\int_0^T\int_0^b u\phi_t+\frac{u^2}{2}\phi_x\,dx\,dt+\int_0^b\phi(x,0)\,dx &=\\
\int_0^T\int_0^t u\phi_t+\frac{u^2}{2}\phi_x\,dx\,dt+\int_0^b\int_0^x u\phi_t+\frac{u^2}{2}\phi_x\,dx\,dt+\int_0^b\phi(x,0)\,dx &=\\
\int_0^T\int_0^t \frac{x}{t}\phi_t+\frac{x^2}{2t^2}\phi_x\,dx\,dt+\int_0^b\int_0^x \phi_t+\frac{1}{2}\phi_x\,dx\,dt+\int_0^b\phi(x,0)\,dx &=\\
\int_0^T\int_0^t \frac{x}{t}\phi_t\,dx\,dt+\int_0^T\frac{\phi(t,t)}{2}\,dt-\int_0^T\int_0^t\frac{x}{t^2}\phi\,dx\,dt+\int_0^b\int_0^x\frac{1}{2}\phi_x\,dx\,dt+\int_0^b\phi(x,x)\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, note que,

$$\int_0^T\int_0^t\frac{x}{t}\phi_t\,dx\,dt=-\int_0^b\phi(x,x)\,dx+\int_0^T\int_0^t\frac{x}{t^2}\phi\,dx\,dt \tag{2.18}$$

e que

$$\int_0^b\int_0^x\frac{1}{2}\phi_x\,dx\,dt=\int_0^T\frac{\phi(t,t)}{2}\,dt \tag{2.19}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (u\phi_t+f(u)\phi_x)\,dx\,dt+\int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)\,dx=0$$

pois ϕ foi tomada arbitráriamente. Observamos, em vista dos exemplos de soluções fracas, que perdemos unicidade ao considerar a classe das soluções fracas. Voltamos a este assunto mais adiante.

2.4 Conceitos e Condição de Rankine-Hugoniot

Definição 2.2 *Dizemos que $u : \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função suave por partes se existe apenas um número finito de curvas $\Gamma = \{(\varphi(t),t);\, t\geq 0\}$ em $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ fora das quais a função $u(x,t)$ é de classe C^1 e sobre Γ u tem limites laterais, isto é, os limites abaixo existem (finitos)*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\(x,t)\in\Omega_+}} u(x,t) = u_r(x_0,t_0) \quad e \quad \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\(x,t)\in\Omega_-}} u(x,t) = u_l(x_0,t_0),$$

para cada $(x_0,t_0)\in\Gamma$, onde $\Omega_+ = \{(x,t);x>\varphi(t)\}$ e $\Omega_- = \{(x,t);x<\varphi(t)\}$.

Definição 2.3 *Dizemos que $u = u(x,t)$ é uma solução suave por partes para a lei de conservação $u_t + f(u)_x = 0$ no semi-plano $t>0$ se satisfaz pontualmente a equação em ambos os lados de uma curva $x = x(t)$ suave sobre a qual u é descontínua.*

Comentário 2 (Sobre as definições 2.3) *Para ser mais específico no caso de uma única curva de descontinuidade temos a situação: tal uma curva divide o semi-plano $t\geq 0$ em duas regiões Ω_+ e Ω_- tal que $u\in C^1(\Omega_+)\cap C^1(\Omega_-)$ e satisfaz (2.7) no sentido usual, além disso, valem os limites laterais sobre a curva como na definição (2.2).*

Teorema 2.1 (Rankine-Hugoniot) *Seja $u : \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função suave por partes da forma*

$$u(x,t) = \begin{cases} u_-(x,t), & x<\varphi(t) \\ u_+(x,t), & x>\varphi(t) \end{cases} \tag{2.20}$$

onde $\Omega_+ = \{(x,t);x>\varphi(t)\}$ e $\Omega_- = \{(x,t);x<\varphi(t)\}$, e as funções

$$u_\pm : \overline{\Omega}_\pm \to \mathbb{R} \;\; e \;\; \varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

sendo continuamente diferenciáveis. Então, sendo u uma solução fraca, logo uma solução *clássica em ambas as regiões* $\Omega_\pm$, *temos que condição de* Rankine-Hugoniot *vale ao longo da curva* φ, *isto é,*

$$\left.\frac{d\varphi(z)}{dt}\right|_{z=t>0} = \frac{f(u(\varphi(t)+,t)) - f(u(\varphi(t)-,t))}{u(\varphi(t)+,t) - u(\varphi(t)-,t)}.$$

Reciprocamente, seja $u = u(x,t)$ *uma solução clássica da equação* $u_t + f(u)_x = 0$ *em ambas as regiões* $\Omega_\pm$ *e assuma que* u *tenha descontinuidade sobre a curva* Γ *separando* Ω_+ *e* Ω_- *e que a condição de Rankine-Hugoniot seja satisfeita sobre* Γ. *Então* $u = u(x,t)$ *é uma solução distribucional para lei de conservação.*

Demonstração: Seja U um aberto limitado tal que $U \subset \overline{U} \subset \mathbb{R} \times (0,\infty)$, e suponha que Γ passe por U dividindo-o em duas partes $U_+ = U \cap \Omega_+$ e $U_- = U \cap \Omega_-$. Observamos de inicío que sendo $u = u(x,t)$ solução fraca temos a igualdade $u_t + f(u)_x = 0$ pontual sobre as regiões $\Omega\pm$ pois $C_c^\infty(\Omega\pm) \subset C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ e u é suave em cada uma das regiões $\Omega\pm$. Considere ϕ uma função teste em $C_c^1(U) \subset C_c^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$, então

$$\begin{aligned} 0 = \iint_{t>0} u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx\, dt &= \iint_U u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx\, dt \\ &= \iint_{U_+} u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx\, dt + \iint_{U_-} u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx\, dt \\ &= \iint_{U_+} (f(u)\phi)_x + (u\phi)_t \, dx\, dt + \iint_{U_-} (f(u)\phi)_x + (u\phi)_t \, dx\, dt \end{aligned}$$

As funções $u = u(t,x),\ f(u(t,x))$ e ϕ são suaves nos domínios U_+ e U_- e já que tais domínios são limitados podemos usar o teorema do divergente no plano, mas notemos que as fronteiras dos domínios envolvidos possuem pontos de $\Gamma = \{(\varphi(t),t); t > 0\}$ e de ∂U. Então considerando a existência dos limites

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0) \\ (x,t)\in\Omega_+,\,(x_0,t_0)\in\Gamma}} u(x,t) := u_r(x_0,t_0) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0) \\ (x,t)\in\Omega_-,\,(x_0,t_0)\in\Gamma}} u(x,t) := u_l(x_0,t_0).$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\iint_{U_+} [(f(u)\phi)_x + (u\phi)_t]\,dx\,dt &= \int_{\partial U_+} \phi(-u_r)\,dx + \phi f(u_r)\,dt \\
\iint_{U_-} [(f(u)\phi)_x + (u\phi)_t]\,dx\,dt &= \int_{\partial U_-} \phi(-u_l)\,dx + \phi f(u_l)\,dt
\end{aligned}$$

Sobre ∂U temos que $\phi(x,t) = 0$, então estas integrais de linha deixam de ser nulas possivelmente só sobre Γ. Agora observando que a orientação de Γ como parte de ∂U_+ tem sentido oposto a orientação de Γ como parte de ∂U_-, podemos escrever as igualdades :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U_+} \phi(-u_r)\,dx + \phi f(u_r)\,dt &= -\int_{\Gamma} \phi(-u_r)\,dx + \phi f(u_r)\,dt \\
\int_{\partial U_-} \phi(-u_l)\,dx + \phi f(u_l)\,dt &= \int_{\Gamma} \phi(-u_l)\,dx + \phi f(u_l)\,dt
\end{aligned}$$

Portanto, segue

$$0 = \int_{\Gamma} \phi[-(u_l - u_r)\,dx + (f(u_l) - f(u_r))\,dt] \tag{2.21}$$

Esta igualdade ocorrendo para toda função teste ϕ implica que

$$(f(u_l) - f(u_r)) - (u_l - u_r)\varphi'(t) = 0$$

Como,

$$u_r(\varphi(t),t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u(\varphi(t) + \varepsilon, t) := u(\varphi(t)+,t)$$

e

$$u_l(\varphi(t),t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u(\varphi(t) - \varepsilon, t) := u(\varphi(t)-,t)$$

obtemos,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f(u(\varphi(t)+,t)) - f(u(\varphi(t)-,t))}{u(\varphi(t)+,t) - u(\varphi(t)-,t)}.$$

Reciprocamente, consideremos ϕ uma função teste em $C_c^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, seja U aberto limitado de modo que $Supp(\phi)\subset U\subset\overline{U}\subset\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Procedendo como acima temos

$$\iint_{t>0}(u\phi_t+f(u)\phi_x)\,dx\,dt=\int_\Gamma\phi[-(u_l-u_r)\,dx+(f(u_l)-f(u_r))\,dt].$$

Considere o intervalo $a\leq t\leq b$ de sorte que a parte da fronteira de U_+ sobre Γ seja coberta. Portanto, podemos escrever na forma

$$\begin{aligned}
\iint_{t>0}u\phi_t+f(u)\phi_x\,dx\,dt &= \\
&= \int_\Gamma\phi[-(u_l-u_r)\,dx+(f(u_l)-f(u_r))\,dt]\\
&= \int_a^b[u(\varphi(t)+,t)\varphi'(t)-f(u(\varphi(t)+,t))]\phi(\varphi(t),t)\,dt\\
&- \int_a^b[u(\varphi(t)-,t)\varphi'(t)-f(u(\varphi(t)-,t))]\phi(\varphi(t),t)\,dt\\
&= \int_a^b\phi(\varphi(t),t)\underbrace{\{[u_r-u_l]\varphi'(t)-[f(u_r)-f(u_l)]\}}_{=0}\,dt=0.
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\iint_{t>0}(u\phi_t+f(u)\phi_x)\,dx\,dt=0,$$

ou seja, u é uma solução distribucional, pois ϕ é arbitrária.

■

Uma situação simples é quando u_+ e u_- são constantes e $\varphi(t)=\lambda t$ é linear; segue que

$$u(t,x)=\begin{cases}u_-, & x<\lambda t\\ u_+, & x>\lambda t\end{cases}\tag{2.22}$$

é uma solução fraca se e só se os escalares $u_\pm$ e λ satisfazem *Rankine-Hugoniot*, ou seja,

$$\lambda(u_+-u_-)+f(u_+)-f(u_-)=0.$$

Considerando a *equação de Burgers*

$$u_t + (u^2/2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

temos que

$$u(t,x) = \begin{cases} u_-, & x < \lambda t \\ u_+, & x > \lambda t \end{cases} \tag{2.23}$$

é uma a solução fraca quando $\lambda = \dfrac{u_- + u_+}{2}$.

2.4.1. Aplicação da Condição de Rankine-Hugoniot

Considere a *equação de Burgers* $u_t + (u^2/2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ com dado inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Geometricamente (vide figura 2.1) o gráfico das caracteríticas não entram na região

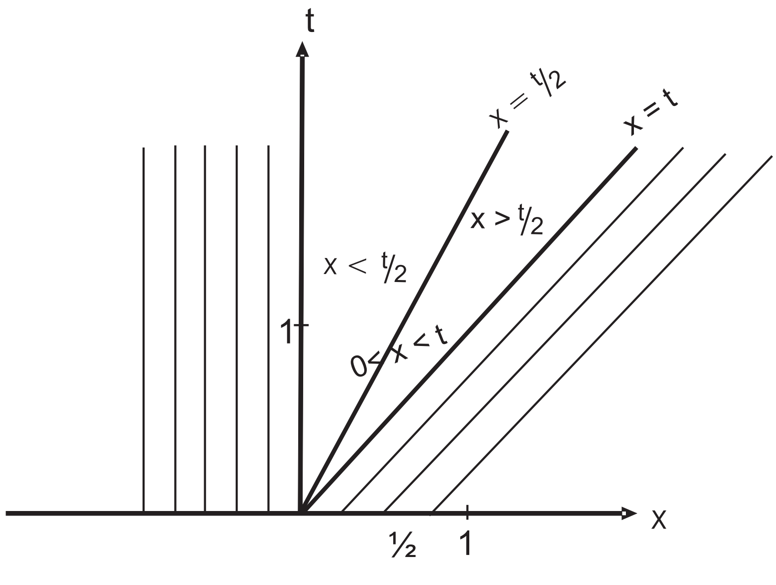

Figura 2.1:

$\{(x,t); 0 < x < t\}$. Assim, o dado inicial não nos fornece informações de como a solução pode ser computada nesta região. Uma tentativa de contornar esta situação seria construir artificialmente uma descontinuidade, isto é; considere uma curva dada por $\Gamma = \{(\varphi(t),t); t \geq 0\}$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $0 < \varphi(t) < t$,(φ encontra-se na região) e defina $u(x,t) = 0$, $x < \varphi(t)$ e $u(x,t) = 1$ para $x > \varphi(t)$. Por contrução u é descontínua sobre Γ. Em vista de Rankine-Hugoniot tal uma curva não pode ser qualquer, ou seja, deve satisfazer

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

Assim, tal uma φ é obtida considerando o P.V.I abaixo :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{2} \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Portanto,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < t/2 \\ 1, & x \geq t/2 \end{cases} \tag{2.26}$$

é uma candidata a solução fraca segundo teorema (2.1).

2.5 Entropia de Lax

Vimos que soluções fracas para a lei de conservação em estudo podem conter descontinuidade que são provindas do dado inicial ou originada por interseções de retas características. Vimos também, através de exemplos concretos que em se tratando de soluções fracas o problema de Cauchy não possui em geral única solução fraca. Isto nos mostra que um adicional critério se faz necessário, baseado em princípios físicos e suportado em princípios matemáticos, para que possamos escolher dentre as possíveis soluções fracas a solução fisicamente correta, lembrando que a equação $u_t + f(u)_x = 0$ provém de algum modelo físico, e assim deve ter algum mecanismo para escolher a solução fisicamente relevante. Matematicamente, a questão é impor uma condição sobre a classe das soluções fracas que assegure existência e unicidade. Para este propósito segue a definição

Definição 2.4 *Seja u uma solução suave por partes para lei de conservação $u_t + f(u)_x = 0$ no semi-plano $t \geq 0$. Suponha que $u = u(x,t)$ tenha descontinuidade sobre uma curva da forma $\Gamma = \{(x(t),t); t \geq 0\}$, e denote por u_l e u_r os valores-limites de u em um ponto $(x(t),t) \in \Gamma$, isto é, $u_l(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} u(x(t)-\varepsilon,t)$ e $u_r(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} u(x(t)+\varepsilon,t)$. Então a solução é dita* admissível, *se em cada ponto sobre Γ a condição de* Rankine-Hugoniot *e a condição de* Entropia *(devido à Lax) $f'(u_l) > \dfrac{dx}{dt} > f'(u_r)$ sejam satisfeitas.*

Comentário 3 *A condição de* Rankine-Hugoniot *não escolhe a solução fisicamente relevante ou admissível, pois considerando a equação de* Burgers *com dado inicial*

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

temos que

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq t/2 \\ 0, & x > t/2 \end{cases} \tag{2.28}$$

é uma solução fraca que satisfaz Rankine-Hugoniot, porém, $f'(u_l) < \dfrac{dx}{dt} < f'(u_r)$.

Observação 2.1 *No próximo capítulo o fluxo f em questão será sempre considerado estritamente convexo, ou seja, vamos supor $f'' > 0$. Assim sendo, seja $x = x(t)$ uma curva de descontinuidade de $u = u(x,t)$, sobre a qual valha a condição de Rankine-Hugoniot, ou seja,*

$$\dot{x}(t) = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}.$$

Caso $u_r < u_l$, temos pelo teorema do valor médio *que $\dot{x}(t) = f'(u_r + \theta(u_l - u_r))$, e no caso contrário, $\dot{x}(t) = f'(u_l + \theta(u_r - u_l))$. Sendo f' crescente, concluímos em qualquer dos casos* *que* $\dfrac{dx}{dt}$ *está entre* $f'(u_r)$ *e* $f'(u_l)$*. Portanto, para obtermos a desigualdade dada na definição (2.4) basta mostrar que*

$$f'(u_r) < f'(u_l),$$

ou ainda, que $u_r < u_l$*. Em suma, para que* $u = u(x,t)$*, uma solução de* $u_t + f(u)_x = 0$*, seja solução* admissível *devemos concluir a desigualdade* $u_r < u_l$*.*

Capítulo

3

Fórmula Explícita

Este capítulo é dedicado à dedução de uma *fórmula explícita* para o problema de Cauchy quando o fluxo em questão é convexo. Também mostramos que esta fórmula nós dá uma pista de uma possível solução generalizada descontínua. Provamos um resultado de unicidade para o problema (3.1) sob certas condições. Em se tratando do dado inicial mostramos o comportamento da solução dada pela fórmula explícita quando o dado inicial é de *variação limitada* e quando o dado tem suporte compacto.

Teorema 3.1 (Fórmula Explícita) *Sejam* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função convexa satisfazendo*

$$f''(x)\geq\theta>0 \;\; e \quad \lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\pm\infty,$$

e $u_0(x)$ *um dado inicial em* $L^{\infty}(\mathbb{R})$. *Então, se* $u=u(x,t)$ *é uma solução suave de suporte compacto do problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} &u_t+f(u)_x=0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \quad (3.a)\\ &u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}, \qquad\quad\ (3.b)\end{aligned} \tag{3.1}$$

e denotando por $g(.)$ *a* transformação de Legendre *de* f *e por* b *a inversa de* $a=f'$ *temos a* *seguinte expressão para* $u(x,t)$:

$$u(x,t) = b\left(\frac{x - y(x,t)}{t}\right) \tag{3.2}$$

onde $y = y(x,t)$ *é um ponto de mínimo de*

$$\int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx + tg\left(\frac{x-y}{t}\right) = G(x,t,y) \tag{3.3}$$

Demonstração: Consideremos o problema de Cauchy (3.1) e demonstramos que a fórmula (3.2) é válida para qualquer solução suave por partes com suporte compacto satisfazendo a condição de Entropia. Note que, segundo estas condições o dado inicial também tem suporte compacto, pois $u_0(x) = u(x,0)$.

Considere a seguinte função integral

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{x} u(y,t)\,dy, \; x \in \mathbb{R}, \; t \geq 0$$

então

$$U_x = u. \tag{3.4}$$

Integrando na variável espacial a equação em $(3.a)$ de $-\infty$ a x e usando (3.4) derivamos a igualdade:

$$U_t + f(U_x) = 0,$$

onde ajustamos f de modo que $f(0)=0$, do contrário considere o fluxo $F(u)=f(u)-f(0)$. Tal igualdade é deduzida abaixo :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{x} u_t(y,t)+f'(u(y,t))u_x(y,t)\,dy \\
&= U_t(x,t)+\int_{-\infty}^{x} f'(u(y,t))u_x(y,t)\,dy \\
&= U_t(x,t)+\int_{0}^{u(x,t)} f'(z)\,dz \\
&= U_t(x,t)+f(u(x,t))-f(0)
\end{aligned}$$

Já que f é convexa vale a desigualdade

$$f(u)\geq f(v)+f'(v)(u-v) \tag{3.5}$$

para $\forall\ u,v\in\mathbb{R}$.

Usando a desigualdade (3.5) com $u=U_x(x,t)$ e qualquer $v\in\mathbb{R}$ deduzimos a seguinte desigualdade :

$$U_t(x,t)+a(v)U_x(x,t)\leq a(v)v-f(v),\quad \forall v\in\mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Denote por y o ponto onde a reta $X=X(t)$ de inclinação $\dfrac{dX}{dt}=a(v)$ passando por (x,t) intercepta o eixo-x, segue que o ponto y é dado por

$$\frac{x-y}{t}=a(v) \tag{3.7}$$

Agora, integramos (3.6) ao longo desta reta sobre $[0,t]$,

$$\begin{aligned} t[a(v)v-f(v)] &\geq \int_0^t U_t(X(s),s)+a(v)U_x(X(s),s)\,ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}[U(X(s),s)]\,ds \\ &= U(X(t),t)-U(X(0),0) \end{aligned}$$

e obtemos

$$U(x,t) \leq U(y,0)+t[a(v)v-f(v)] \tag{3.8}$$

De (3.7) temos que $b((x-y)/t)=v$. Seja

$$g(z)=b(z)z-f(b((z))$$

a transformada de Legendre de f. Em vista de (3.8) deduzimos a expressão

$$U(x,t) \leq U(y,0)+tg\left(\frac{x-y}{t}\right)=\int_{-\infty}^{y} u_0(x)dx+tg\left(\frac{x-y}{t}\right) \tag{3.9}$$

Note que esta desigualdade é válida para todo y real, pois $\mathbb{R} \ni v \to x-ta(v) \in \mathbb{R}$ é uma bijeção, e concluimos que

$$U(x,t) \leq G(x,t,y),\ \forall\ y\ \in\ \mathbb{R}.$$

Agora considere o único ponto $y=y(x,t)$ sobre o eixo-x associado a reta de inclinação, como anteriormente, com $v=u(x,t)$ e que passa por (x,t), ou seja, estamos interessados na curva (reta) característica associada a E.D.O com dado inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds}=a(u(X(s)),s) \\ X(t)=x \end{cases} \tag{3.10}$$

Desta curva note que

$$
\begin{aligned}
U_t(X(s),s)+a(u(x,t))U_x(X(s)),s) &= \int_{-\infty}^{X(s)} u_t(y,s)\,dy + a(v)u(X(s),s) \\
&= \int_{-\infty}^{X(s)} -f'(u(y,s))u_y(y,s)\,dy + a(v)u(X(s),s) \\
&= -f(u(X(s),s)) + a(v)u(X(s),s) \\
&= -f(u(X(t),t)) + a(v)u(X(t),t) \\
&= a(v)v - f(v)
\end{aligned}
$$

já que $u = u(\cdot,\cdot)$ é constante sobre tal reta. Então sobre a curva característica $X = X(s)$ vale a igualdade em (3.6) e consequentemente temos igualdade em (3.9) para $y = y(x,t) = x - tf'(u(x,t))$, ou seja, $y(x,t)$ minimiza a função $G(x,t,\cdot)$ e daí deduzimos que

$$u(x,t) = b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right).$$

$\blacksquare$

Teorema 3.2 (Solução Generalizada) *As fórmulas (3.2)-(3.3) definem uma possível função $u(x,t)$ descontínua para um arbitrário dado inicial $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$; e a função $u(x,t)$ assim definida satisfaz $(3.a)$ no sentido das distribuições.*

Demonstração: Definimos as funções $\Omega_N(x,t)$, $u_N(x,t)$ e $f_N(x,t)$ para $N > 0$, por

$$
\begin{aligned}
\Omega_N(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} exp\{-NG(x,t,y)\}\,dy \\
u_N(x,t) &= \frac{1}{\Omega_N(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty} b\left(\frac{x-y}{t}\right) exp\{-NG(x,t,y)\}\,dy, \\
f_N(x,t) &= \frac{1}{\Omega_N(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) exp\{-NG(x,t,y)\}\,dy
\end{aligned}
$$

Considerando a aplicação $V(x,t)$ no semi-plano $t > 0$,

$$V_N(x,t) = ln \int_{-\infty}^{\infty} exp\{-NG(x,t,y)\}\, dy,$$

tem-se por diferenciação direta que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_N}{\partial x} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} -N \frac{\partial G}{\partial x} exp\{-NG(x,t,y)\} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} exp\{-NG(x,t,y)\}\, dy} \\
&= \frac{-N \int_{-\infty}^{\infty} b\left(\frac{x-y}{t}\right) exp\{-NG(x,t,y)\} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} exp\{-NG(x,t,y)\} dy} \\
&= -Nu_N.
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$u_N = \frac{-1}{N} \frac{\partial V_N}{\partial x}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_N}{\partial t} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} -N \frac{\partial G}{\partial t} exp\{NG(x,t,y)\} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} exp\{-NG(x,t,y)\}\, dy} \\
&= \frac{N \int_{-\infty}^{\infty} f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) exp\{-NG(x,t,y)\} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} exp\{-NG(x,t,y)\} dy} \\
&= N f_N.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f_N = \frac{1}{N}\frac{\partial V_N}{\partial t}.$$

Agora, diferenciando $\dfrac{\partial V_N}{\partial t}$ em relação a x e $\dfrac{\partial V_N}{\partial x}$ em relação a t obtem-se

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x},$$

e portanto,

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{\partial f_N}{\partial x} = 0.$$

As igualdades acima tem sido justificadas de uma certa forma em apêndice.

Agora demonstraremos as seguintes convergências pontuais:

$$u_N(x,t) \to u(x,t), \quad f_N(x,t) \to f(u(x,t)), \text{ quando } N \to \infty,$$

respectivamente.

Seja (x,t) um ponto de continuidade de $y(\cdot,t)$ então a aplicação $G(t,x,\cdot)$ tem como único ponto de mínimo $y(x,t)$. Afirmamos que

$$u_N(x,t) \to u(x,t).$$

Provemos este fato :

Adicionando uma constante a função $G(x,t,\cdot)$, se necessário, podemos supor que

$$G(x,t,y(x,t)) = 0,$$

pois não alteramos as funções $u_N(x,t)$.

Dado $0 < \varepsilon < 1$ arbitrário, por hipótese $0 \leq G$, existe (veja apêndice) uma constante $C_1 = C_1(x,t) > 0$ tal que

$$G(x,t,y) \leq C_1|y - y(x,t)|, \ \ \mathrm{y} \in [y(x,t) - \varepsilon, y(x,t) + \varepsilon]$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-NG(x,t,y)}\,dy &\geq \\
&= \int_{y(x,t)-\varepsilon}^{y(x,t)+\varepsilon} e^{-NC_1|y-y(x,t)|}\,dy \\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-NC_1|y|}\,dy \\
&= 2\int_{0}^{\varepsilon} e^{-NC_1 y}\,dy \\
&= \frac{2}{N}\int_{0}^{N\varepsilon} e^{-C_1 y}\,dy \\
&> \frac{2}{N}\int_{0}^{1} e^{-C_1 y}\,dy = \frac{C_2}{N}
\end{aligned}$$

onde $C_2 = 2\left(\dfrac{1 - e^{-C_1}}{C_1}\right)$ e $\varepsilon N > 1$.

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-NG(x,t,y)}\,dy \geq \frac{C_2}{N}, \text{ para } \varepsilon > \frac{1}{N}.$$

Agora, consideremos a região $|y - y(x,t)| \geq \varepsilon$, afirmamos que existe uma constante $C_3(\varepsilon) > 0$ tal que

$$e^{-NG(x,t,y)} \leq e^{-C_3 N|y-y(x,t)|}$$

sobre a região $|y - y(x,t)| \geq \varepsilon$.

De fato, já que $\lim_{|y|\to\infty}\frac{G(x,t,y)}{|y|}=+\infty$ também temos que $\lim_{|y|\to\infty}\frac{G(x,t,y)}{|y-y(x,t)|}=+\infty$. Daí, pela definição de limite infinito, existe algum $r=r(C_1)>0$ tal que

$$G(x,t,y)>C_1|y-y(x,t)|$$

para $|y|>r$. Observe que $r>y(x,t)+\varepsilon$ e $-r<y(x,t)-\varepsilon$. Considere os seguintes intervalos, $[y(x,t)+\varepsilon,\, r]=I_1$ e $[-r,\, y(x,t)-\varepsilon]=I_2$ e sejam

$$B_1=(x_1,G(x_1)),\quad B_2=(x_2,G(x_2))$$

os pontos de mínimo em I_1 e I_2, tais pontos dependem de (x,t) e $\varepsilon>0$. Denote $z=y(x,t)$ e suponha $z\geq 0$ Considere $m_1=\frac{G(x_1)}{z+r}(>0)$ e $m_2=\frac{G(x_2)}{z+r}(>0)$, ou seja, m_1 e m_2 são respectivamente os coeficientes angulares das retas passando por $A=(z,\,0)$ e $B'=(2z+r,G(x_1))$, A e $C=(2z+r,G(x_2))$.

Seja $\widetilde{C_3}=\min\{m_1,m_2\}$ então $G(x,t,y)\geq\widetilde{C_3}|y-y(x,t)|$ para $y\in I_1\cup I_2$, De fato,

1. Caso $\widetilde{C_3}=m_1$. Seja $z+\varepsilon\leq w\leq r$ então $\widetilde{C_3}|w-z|=m_1|w-z|=m_1(w-z)<m_1(r-z)\leq m_1((2z+r)-z)=G(x_1)\leq G(w)$.
   Se $-r\leq w\leq z-\varepsilon$ então $\widetilde{C_3}|w-z|=m_1|w-z|=-m_1(w-z)\leq -m_1(-r-z)=G(x_1)\leq G(x_2)\leq G(w)$.

2. Caso $\widetilde{C_3}=m_2$. Seja $z+\varepsilon\leq w\leq r$ então $\widetilde{C_3}|w-z|=m_2|w-z|=m_2(w-z)\leq m_2(r-z)<m_2((2z+r)-z)=G(x_2)\leq G(x_1)\leq G(w)$.
   Se $-r\leq w\leq z-\varepsilon$ então $\widetilde{C_3}|w-z|=m_1|w-z|=-m_1(w-z)\leq -m_1(-r-z)=G(x_2)\leq G(w)$.

3. Fora dos intervalos I_1 e I_2 já temos que $G(x,t,y)>C_1|y-y(x,t)|$.

4. Portanto $G(x,t,y)>C_3|y-y(x,t)|$, para $y\in\{y;|y-y(x,t)|\geq\varepsilon\}$, com $C_3=\min\{C_1,\widetilde{C_3}\}$.

Caso, dado (x,t) tivermos $y(x,t)<0$ a idéia é análoga.

Agora, seja $C_4>0$ uma constante de Lipschitz para $b(\cdot)/t$, que existe pois $f''\geq\theta>0$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
|u_N(x,t)-u(x,t)| &= \left|\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)-b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right)e^{-NG}\,dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-NG}\,dy}\right| \\
&\leq \frac{C_4\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|y-y(x,t)|e^{-NG}\,dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-NG}\,dy} \\
&\leq C_4\frac{\displaystyle\int_{y(x,t)-\varepsilon}^{y(x,t)+\varepsilon}\varepsilon e^{-NG}\,dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-NG}\,dy}+C_4\frac{\displaystyle\int_{|y-y(x,t)|\geq\varepsilon}|y-y(x,t)|e^{-NG}\,dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-NG}\,dy} \\
&\leq \varepsilon C_4+NC_4/C_2\int_{|y-y(x,t)|\geq\varepsilon}|y-y(x,t)|e^{-NG}\,dy \\
&\leq \varepsilon C_4+\frac{NC_4}{C_2}\int_{|y-y(x,t)|\geq\varepsilon}|y-y(x,t)|e^{-NC_3|y-y(x,t)|}\,dy \\
&\leq \varepsilon C_4+\frac{NC_4}{C_2}\int_{|y|\geq\varepsilon}|y|e^{-|y|NC_3}\,dy \\
&\leq \varepsilon C_4+\frac{2NC_4}{C_2}\int_{y\geq\varepsilon}ye^{-yNC_3}\,dy \\
&\leq \varepsilon C_4+\frac{2NC_4}{C_2}\int_{0}^{\infty}ye^{-yNC_3}\,dy \\
&= \varepsilon C_4+\frac{2NC_4}{C_2(NC_3)^2}=\varepsilon C_4+\frac{C_5}{N}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\limsup_{N\to\infty}|u_N(x,t)-u(x,t)|\leq\varepsilon C_4,$$

como ε é arbitrário, segue o resultado desejado.

Agora vamos provar que

$$f_N(x,t)\to f(u(x,t)),\ \text{quando}\ N\to\infty.$$

Podemos escrever $u_N(x,t)$ como segue

$$u_N(x,t) = \int_{\mathbb{R}} b\left(\frac{x-y}{t}\right) \mu_N(y)\, dy,$$

onde $\mu_N(y) = \dfrac{e^{-NG(x,t,y)}}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-NG(x,t,z)}\, dz}$, note que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mu_N(y)\, dy = 1$. Do mesmo modo,

$$f_N(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) \mu_N(y)\, dy.$$

Daí, pela convexidade de f segue a desigualdade abaixo

$$\begin{aligned} f_N(x,t) - f(u(x,t)) &= \int_{\mathbb{R}} \left[f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) - f\left(b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right)\right] \mu_N(y)\, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} -\left(\frac{x-y}{t}\right)\left[b\left(\frac{x-y}{t}\right) - b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right] \mu_N(y)\, dy \\ &\leq I_1^N(x,t) + I_2^N(x,t) \end{aligned}$$

onde

$$I_1^N(x,t) = \frac{|x|}{t}\left| \int_{\mathbb{R}} \left[b\left(\frac{x-y}{t}\right) - b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right] \mu_N(y)\, dy \right|$$

e

$$I_2^N(x,t) = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{t}\left[b\left(\frac{x-y}{t}\right) - b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right] \mu_N(y)\, dy. \right|$$

Note que

$$I_1^N(x,t) \to 0,\ N \to \infty,$$

pois $I_1^N(x,t) = \dfrac{|x|}{t}|u_N(x,t) - u(x,t)| \to 0,\ N \to \infty.$

Agora, $I_2^N(x,t) \leq I_3^N(x,t) + I_4^N(x,t)$ onde

$$I_3^N(x,t) = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} |y - y(x,t)| \left| b\left(\frac{x-y}{t}\right) - b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right| \mu_N(y)\, dy$$

e

$$I_4^N(x,t) = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} |y(x,t)| \left| b\left(\frac{x-y}{t}\right) - b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right| \mu_N(y)\, dy.$$

Seja C_4 uma constante de Lipschitz para $b(\cdot)/t$ então

$$I_3^N(x,t) \leq \frac{C_4}{t}\int_{\mathbb{R}} |y - y(x,t)|^2 \mu_N(y)\, dy$$

$$\text{e} \quad I_4^N(x,t) \leq \frac{|y(x,t)|C_4}{t}\int_{\mathbb{R}} |y - y(x,t)|^2 \mu_N(y)\, dy.$$

Segue da demonstração que $u_N(x,t) \to u(x,t)$ as seguintes estimativas :

$I_3^N(x,t) \leq \dfrac{C_4}{t}\varepsilon^2 + \dfrac{2C_5}{tN^2}$ e

$I_4^N(x,t) \leq \dfrac{|y(x,t)|C_4}{t}\varepsilon^2 + \dfrac{2|y(x,t)|C_5}{tN^2}.$

Novamente pela convexidade de f temos

$$\begin{aligned} f(u(x,t)) - f_N(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right) - f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)\mu_N(y)\, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} -\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\left[b\left(\frac{x-y}{t}\right) - b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right]\mu_N(y)\, dy \\ &\leq I_N'(x,t) \end{aligned}$$

onde

$$I_N' = \left|\frac{x-y(x,t)}{t}\right| \left|\int_{\mathbb{R}} \left[b\left(\frac{x-y}{t}\right) - b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right]\mu_N(y)\, dy\right|$$

observamos $I_N'(x,t) \to 0$ quando $N \to \infty$.

Em vista das estimativas anteriores obtemos que

$$|f_N(x,t) - f(x,t)| \leq \max\{I_N^{'}, I_1^N + I_3^N + I_4^N\},$$

daí segue que

$$\limsup_{N\to\infty} |f_N(x,t) - f(x,t)| \leq \varepsilon^2 C,$$

onde $C = \max\left\{\dfrac{C_4}{t}, \dfrac{|y(x,t)|C_4}{t}\right\}$ como ε é arbitrário, concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} |f_N(x,t) - f(x,t)| = 0.$$

Vimos anteriormente que

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} + \frac{\partial f_N}{\partial x} = 0,$$

e por ([11]) temos também que $u_N \to u(x,t)$ e $f_N \to f(u)$ na norma $L^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

Daí, para toda $\phi(x,t) \in C_c^1((\mathbb{R} \times (0,\infty)))$ no semi-espaço $t > 0$ temos

$$u_N(\cdot,\cdot)\phi_t + f_N(\cdot,\cdot)\phi_x \xrightarrow{L^1} u\phi_t + f(u)\phi_x$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{N\to+\infty} \iint_{S(\phi)} u_{Nt}\phi + f_{Nx}\phi \, dxdt &= -\lim_{N\to+\infty} \iint_{S(\phi)} u_N\phi_t + f_N\phi_x \, dxdt \\ &= -\iint_{S(\phi)} u\phi_t + f(u)\phi_x \, dxdt \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\left|\iint_{S(\phi)} (u_N\phi_t + f_N\phi_x) - (u\phi_t + f(u)\phi_x)\,dxdt\right| &\leq \iint_{S(\phi)} |u_N - u||\phi_t|\,dxdt \\ &+ \iint_{S(\phi)} |f_N - f(u)||\phi_x|\,dxdt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = \iint_{S(\phi)} u\phi_t + f(u)\phi_x\,dxdt,$$

isto é, $u(x,t)$ é uma solução fraca . ■

Lema 3.1 *Para $t > 0$ fixado, denote por $y(x)$ algum valor que minimize $G(x,y)$. Então $y(x)$ é uma função monótona crescente de x.*

Demonstração: Temos que demonstrar para $x_1 < x_2$ que $G(x_2,y)$ não atinge seu mínimo para $y < y_1 = y(x_1)$, o que equivale a verificarmos que se $y < y_1$,

$$G(x_2,y_1) < G(x_2,y).$$

No entanto tal desigualdade é equivalente à

$$G(x_1,y) + G(x_2,y_1) < G(x_2,y) + G(x_1,y_1)$$

para $y < y_1$, já que $G(x_1,y_1) \leq G(x_1,y)$. Então, transferimos nossa atenção a dedução da desigualdade $G(x_1,y) + G(x_2,y_1) < G(x_2,y) + G(x_1,y_1)$, para $y < y_1$. Pela definição de $G(x_1,.)$ e $G(x_2,\cdot)$ esta desigualdade é equivalente à

$$t\left[g\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) + g\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right)\right] < t\left[g\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) + g\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right)\right]$$

ou ainda

$$t\left[g\left(\frac{x_1-y}{t}\right)-g\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)\right]<t\left[g\left(\frac{x_2-y}{t}\right)-g\left(\frac{x_2-y_1}{t}\right)\right]$$

a qual podemos reescrever após multiplicação por $y_1-y>0$ como segue

$$\frac{g\left(\frac{x_1-y}{t}\right)-g\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)}{\frac{x_1-y}{t}-\frac{x_1-y_1}{t}}<\frac{g\left(\frac{x_2-y}{t}\right)-g\left(\frac{x_2-y_1}{t}\right)}{\frac{x_2-y}{t}-\frac{x_2-y_1}{t}}$$

Mas esta desigualdade é verdadeira pela convexidade estrita de $g(.)$ para $x_1<x_2$ e $y<y_1$, pois os pontos

$$(x_1-y)/t \;\;,\;\; (x_1-y_1)/t \;\;,\;\; (x_2-y)/t \;\; e \;\; (x_2-y_1)/t$$

estão nas condições do Lema 1.1. Portanto, $G(x_2,y_1)<G(x_2,y)$, se $y<y_1$ e daí $y_1\leq y_2$.

■

Observação 3.1 *Esta observação é dedicada a verificar que de fato a aplicação $G(x,t,\cdot)$ para cada (x,t) tem algum ponto de mínimo. Para isto, mostraremos alguns limites e concluiremos tal resultado. Faremos abaixo algumas afirmações:*

Inciamos observando que a transformada de Legendre *de f tem crescimento linear, pois*

$$\lim_{\pm\infty} g' = \pm\infty,$$

o que nos permite concluir que $g(v)\to\infty$ quando $v\to\pm\infty$.

Afirmação 1:

$$\lim_{y\to\pm\infty} g\left(\frac{x-y}{t}\right)\frac{t}{y}=\pm\infty.$$

De fato, basta aplicar a Regra de L'Hospital e notar que

$$\lim_{y\to\pm\infty} b\left(\frac{x-y}{t}\right) = \mp\infty.$$

pois $\lim_{y\to\pm\infty} b(y) = \pm\infty$.

Afirmação 2:

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{G(x,t,y)}{y} = \pm\infty.$$

De fato, já que, $\frac{1}{y}\int_0^y u_0(z)dz$ *é limitado, pois* $u_0 \in L^\infty$*, e segue o resultado da afirmação 1.*

Afirmação 3:

$$\lim_{y\to\pm\infty} G(x,t,y) = \infty.$$

Segue da afirmação 2.

Já que $\lim_{y\to\infty} \frac{G(x,t,y)}{y} = \infty$*, existe* $y' > 0$ *tal que* $G(y') > 0$*. Como* $\lim_{y\to\infty} G(x,t,y) = \infty$*, segue da definição de limite* $G(y) \geq G(y')$ *para* $y \in [r,\infty)$ *onde* $r = r(G(y')) > 0$.

Por outro lado, como G é contínua e $I = [0,r]$ *é compacto existe* $y'' \in I$ *que é ponto de mínimo. Então considerando,* $G(y_1) = \min\{G(y'), G(y'')\}$ *obtemos que* $G(y_1) \leq G(y)$ *para todo* $y \geq 0$*. Porém, temos também que* $\lim_{y\to-\infty} G(x,t,y) = \infty$*, e conseguimos* $y_2 < 0$ *tal que* $G(y_2) \leq G(y)$ *para todo* $y \leq 0$.

Portanto, $\min\{G(y_1), G(y_2)\} \leq G(y)$ *para todo* $y \in \mathbb{R}$*. Assim, a aplicação* $G(x,t,\cdot)$ *admite ponto de mínimo.*

Segue do Lema acima que, para $t > 0$ fixado, exceto para um conjunto enumerável de $x \in \mathbb{R}$ a aplicação $G(x,t,\cdot)$ possui um único ponto de mínimo $y(x,t)$, que define uma função monótona crescente na variável x. Portanto, $u = u(x,t)$ está bem definida a menos de um conjunto enumerável de x, para cada $t > 0$ fixado.

Observação 3.2 *Nesta observação, verifiquemos que para $t > 0$ fixado a função $G(x,t,\cdot)$ tem um único ponto de mínimo exceto para um conjunto enumerável de x.*

Definimos a função $x \to y(x)$ onde $y(x)$ é algum ponto que minimiza a função $y \to G(t,x,y)$ para $y \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ fixado. Vimos acima que $y(x)$ assim definida é monótona crescente, logo contínua a menos de um conjunto enumerável. Afirmamos que, se x_0 é um ponto de continuidade de $y(.)$ então a função $G(x_0,y)$ tem somente um ponto de mínimo. De fato, seja

$$U(x_0) = \{y \in \mathbb{R};\ y \text{ minimiza a função } G(x_0,y)\},$$

aqui escrevemos $G(x_0,y)$ em vez de $G(x_0,t,y)$, verifiquemos que $U(x_0)$ é unitário (já temos que é não vazio). Suponha que não, sejam $y_0 \neq z_0$ em $U(x_0)$, onde y_0 é a imagem da função $y(.)$ definida na primeira linha avaliada em x_0. Agora, definimos a função $\alpha(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} z_0 & , \text{ se } x = x_0 \\ y(x) & , \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{3.11}$$

Note que para cada $x \in \mathbb{R}$, o valor $\alpha(x)$ minimiza a função $G(x,.)$. Mas, por construção $\alpha(x)$ não é monótona crescente, o que contradiz o Lema acima. Com efeito, para $y_0 < z_0$ sendo $y(x)$ é contínua em x_0, dado $0 < \varepsilon < z_0 - y_0$ existe $r > 0$ tal que $-\varepsilon < y(x_0) - y(x_0 + r) < \varepsilon$, ou seja, $-\varepsilon < y(x_0) - \alpha(x_0 + r)$, logo $\alpha(x_0 + r) < \varepsilon + y(x_0) < z_0 = \alpha(x_0)$ então $\alpha(x_0 + r) < \alpha(x_0)$. Para $y_0 > z_0$ é análogo. Portanto, $U(x_0)$ é unitário.

Proposição 3.1 (Condição de entropia) *Existe uma constante K, dependendo de $||u_0||_\infty$ e de f'' tal que*

$$\frac{u(x_2,t) - u(x_1,t)}{x_2 - x_1} \leq \frac{K}{t},\ \ t > 0,\ \ x_1 < x_2. \tag{3.12}$$

Demonstração: Pelo Lema 3.1, $y(\cdot,t)$ é uma função monótona crescente. Daí para $x_1 < x_2$, denote $y_1 = y(x_1,t)$ e $y_2 = y(x_2,t)$, segue do *teorema do valor médio* que

$$\begin{aligned} b\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right) - b\left(\frac{x_1-y_2}{t}\right) &\le b'\left((1-s)\left(\frac{x_1-y_2}{t}\right)+s\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right)\right)\left(\frac{x_2-x_1}{t}\right) \\ &\le K\left(\frac{x_2-x_1}{t}\right). \end{aligned}$$

onde $K = 1/\inf f''$. Daí, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} u(x_1,t) &= b\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right) \\ &\ge b\left(\frac{x_1-y_2}{t}\right) \\ &\ge b\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right) - K\left(\frac{x_2-x_1}{t}\right) \\ &= u(x_2,t) - K\left(\frac{x_2-x_1}{t}\right) \end{aligned}$$

Seguindo, obtemos

$$\frac{u(x_2,t)-u(x_1,t)}{x_2-x_1} \le \frac{K}{t}. \tag{3.13}$$

Esta desigualdade mostra que nos pontos x de descontinuidade de $u(\cdot,t)$ temos

$$u_r < u_l,$$

onde

$$u_r(t) = \lim_{s\to x^+} u(s,t), \quad u_l(t) = \lim_{s\to x^-} u(s,t),$$

pois considerando sequências $w_j < a < z_j$ convergindo para o ponto de descontinuidade a sobre o eixo-x temos de (3.13)

$$u(z_j,t) - u(w_j,t) \le \frac{K}{t}(z_j - w_j),$$

quando $j \to \infty$, obtemos $u_r(t) < u_l(t)$.

Segue da convexidade estrita de f que :

$$f(u_l) > f(u_r) + f'(u_r)(f(u_l) - f(u_r)),$$

então

$$\begin{aligned} f'(u_r) < \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} &= \frac{1}{u_l - u_r}\int_{u_r}^{u_l} f'(x)\,dx \\ &\leq \frac{1}{u_l - u_r}\int_{u_r}^{u_l} f'(u_l)\,dx = f'(u_l) \end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(u_r) < \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} < f'(u_l).$$

Deste fato, se $S = S(t)$ é uma curva de descontinuidade de $u = u(x,t)$ e a condição de *Rankine-Hugoniot* vale, segue as desigualdades

$$f'(u_r) < \frac{dS}{dt} < f'(u_l). \tag{3.14}$$

Tal desigualdade é chamada de *condição de entropia*, de Lax . ∎

3.1 Unicidade da Solução

Lema 3.2 *Seja u = u(x, t) uma solução suave por partes de* $(3.a)$ *no semi-plano* $t > 0$ *com suporte compacto na variável x, tal que* $y = y(t)$ *seja a única curva suave de descontinuidade de u satisfazendo a condição de* Rankine-Hugoniot. *Denote por*

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx$$

então $I(t)$ independe de t, ou seja, $\dfrac{dI}{dt} = 0.$

Demonstração: De fato, podemos escrever

$$I(t) = \int_{-\infty}^{y(t)} u(x,t)\,dx + \int_{y(t)}^{\infty} u(x,t)\,dx$$

denote

$$u(y(t)-0,t) = \lim_{x \to y(t)^-} u(x,t) \text{ e } u(y(t)+0,t) = \lim_{x \to y(t)^+} u(x,t)$$

os limites laterais ao longo do eixo-x da solução u sobre a curva de descontinuidade. Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) &= y'(t)u(y(t)-0,t) + \int_{-\infty}^{y(t)} u_t(x,t)\,dx \\
&- y'(t)u(y(t)+0,t) + \int_{y(t)}^{\infty} u_t(x,t)\,dx \\
&= (u(y(t)-0,t) - u(y(t)+0,t))y'(t) + \int_{-\infty}^{y(t)} -(f(u(x,t)))_x\,dx + \int_{y(t)}^{\infty} -(f(u(x,t)))_x\,dx \\
&= (u(y(t)-0,t) - u(y(t)+0,t))y'(t) - f(u(y(t)-0,t)) + f(u(-\infty,t)) \\
&- f(u(\infty,t)) + f(u(y(t)+0,t)) \\
&= (f(u(y(t)+0,t)) - f(u(y(t)-0,t))) - (u(y(t)+0,t) - u(y(t)-0,t))y'(t) = 0,
\end{aligned}$$

já que

$$y'(t) = \frac{f(u(y(t)+0,t)) - f(u(y(t)-0,t))}{u(y(t)+0,t) - u(y(t)-0,t)} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}$$

por hipótese, ou seja, a curva de descontinuidade satisfaz a condição de *Rankine-Hugoniot.* Note que o mesmo resultado ainda é válido se supormos um número finito de descontinuidades.

■

Teorema 3.3 *Sejam $u(x,t)$ e $v(x,t)$ duas soluções de $(3.a)$ continuamente diferenciáveis por partes com dados iniciais $u_0(x)$ e $v_0(x)$ em $L^1(\mathbb{R})$ respectivamente, e assuma que f é convexa e que todas as curvas de descontinuidades de $u(x,t)$ e $v(x,t)$ satisfaçam a condição de* Rankine-Hugoniot *e a* condição de entropia *(3.14). Então, a função*

$$||u(t)-v(t)||_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)-v(x,t)|dx$$

é decrescente em t, na norma $L^1(\mathbb{R})$ com respeito a variável x.

Demonstração: Para manusear esta integral, particionamos o eixo-x para cada tempo $t \geq 0$ por uma partição enumerável $\{x_i(t)\}_i$ tal que $u(\cdot,t)-v(\cdot,t)$ como função de x tem sinal constante em $x_i(t) < x < x_{i+1}(t)$. Tal decomposição existe pois $(u-v)(\cdot,x)$ é contínua por partes.

Podemos então escrever a norma $L^1(\mathbb{R})$ de $(u-v)(\cdot,t)$ como segue :

$$||u(t)-v(t)||_{L^1(\mathbb{R})} = \sum_i sgn_i(u-v) \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} (u(x,t)-v(x,t))\, dx. \tag{3.15}$$

onde $sgn_i(u-v)$ significa o sinal de $u(\cdot,t)-v(\cdot,t)$ no interior do intervalo $[x_i(t), x_{i+1}(t)]$. Destas escolhas temos algumas observações sobre o comportamento destes pontos.

Se $u(\cdot,t)$ e $v(\cdot,t)$ são contínuas em $x_i(t)$, então $u(x_i(t),\, t) = v(x_i(t),\, t)$, pois

$$\lim_{x\to x_i(t)^+} (u-v)(x,t) = (u-v)(x_i) \geq 0$$

e

$$\lim_{x\to x_i(t)^-} (u-v)(x,t) = (u-v)(x_i) \leq 0$$

onde supomos, sem perda de generalidade, $sgn_i(u-v) > 0$ e $sgn_{i-1}(u-v) < 0$ e neste caso, $(x_i(t),t)$ encontra-se sobre uma curva característica de ambas.

Se u ou v tem uma descontinuidade em $x_i(t)$ e a outra é suave neste ponto, então neste caso $x_i(t)$ move-se ao longo de uma curva de descontinuidade. Em resumo, ou $x_i(t)$ é uma curva caracterítica ou uma curva de descontinuidade.

No interior de cada intervalo $[x_i(t), x_{i+1}(t)]$, a aplicação $u(\cdot,t) - v(\cdot,t)$ como função de x ou é suave ou possui alguma descontinuidade, neste último caso quebramos a integração ao longo da curva de descontinuidade. Assim cada termo a direita da igualdade (3.15) é diferenciável.

Seja $(u-v)(\cdot,t)$ suave para cada t sobre o interior de $[x_i(t), x_{i+1}(t)]$, temos segundo a fórmula de *Leibnitz Generalizada*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} (u(x,t)-v(x,t))\,dx &= x'_{i+1}(t)\{u(x_{i+1}(t)-0,\ t)-v(x_{i+1}(t)-0,\ t)\} \\
&- x'_i(t)\{u(x_i(t)+0,\ t)-v(x_i(t)+0,\ t)\}+\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} u_t(x)-v_t(x)\,dx \\
&= x'_{i+1}(t)\{u(x_{i+1}(t)-0,\ t)-v(x_{i+1}(t)-0,\ t)\} \\
&- x'_i(t)\{u(x_i(t)+0,\ t)-v(x_i(t)+0,\ t)\}+\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} f(v)_x-f(u)_x\,dx \\
&= x'_{i+1}(t)\{u(x_{i+1}(t)-0,\ t)-v(x_{i+1}(t)-0,\ t)\} \\
&- x'_i(t)\{u(x_i(t)+0,\ t)-v(x_i(t)+0,\ t)\}+[f(v(x))-f(u(x))]_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}
\end{aligned}$$

Diferenciando (3.15) obtemos :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||u(t)-v(t)|| &= \sum_i sgn_i(u-v)\Big\{x'_{i+1}(t)[u(x_{i+1}(t)-0,\,t)-v(x_{i+1}(t)-0,\,t)] \\
&- x'_i(t)[u(x_i(t)+0,\,t)-v(x_i(t)+0,\,t)] \\
&+ [f(v(x))-f(u(x))]_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\Big\}
\end{aligned}
$$

Agora analisemos dois casos:

1. Se $x_i(t)$ e $x_{i+1}(t)$ são pontos de continuidade de u e v vimos que $u(x_i(t),t)=v(x_{i+1}(t),t)$, portanto todas as parcelas acima são nulas e a derivada é nula, fato que nos habilita derivar termo a termo. Assim, as únicas contribuições para a derivada vem das descontinuidades, mais ainda, vem das descontinuidades nos extremos , pois no interior de $[x_i(t),x_{i+1}(t)]$ podemos quebrar o intervalo e ter uma situação semelhante ao do Lema 3.2, e neste caso a derivada também será nula.

2. Supomos que tenhamos descontinuidade em algum extremo.

Então, suponha que exista uma única descontinuidade de $u(\cdot,t)$ no extremo $x_{i+1}(t)$ e que $v(\cdot,t)$ seja contínua, deste modo $x_j(t)$ com $j\neq(i+1)$ é continuidade para ambas. Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||u(t)-v(t)|| &= sgn_i(u-v)\Big\{f(v(x_{i+1},t))-f(u(x_{i+1}-0,t)) \\
&- x'_{i+1}(t)[u(x_{i+1}(t)-0,\,t)-v(x_{i+1}(t),\,t)]\Big\} \\
&- sgn_{i+1}(u-v)\Big\{f(v(x_{i+1},t))-f(u(x_{i+1}+0,t)) \\
&- x'_{i+1}(t)[u(x_{i+1}(t)+0,\,t)-v(x_{i+1}(t),\,t)]\Big\}
\end{aligned}
$$

Note que tal expressão acima nos autoriza derivar termo a termo (3.15).

- Seja $sgn_i(u(\cdot,t') - v(\cdot,t')) = 1$.

- Já que $(u-v)(\cdot,t') > 0$ em $(x_i(t'), x_{i+1}(t'))$ então por hipótese $(u-v)(\cdot,t') < 0$ em (x_{i+1}, x_{i+2}). Daí, via limites laterais obtemos, respectivamente, que $u - v_l \geq 0$ e $u - v_r \leq 0$, portanto, $u_r < v(x_{i+1}) < u_l,$ onde os índices r, l denotam os limites laterais à direita e à esquerda, no caso em $x_{i+1}(t')$, respectivamente.

De acordo com a condição de *Rankine-Hugoniot*,

$$\frac{dx_{i+1}}{dt} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r},$$

e temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}||u(t') - v(t')|| &= \left[f(v) - f(u_l) + (u_l - v)\frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \right] \\ &- (-1)\left[f(v) - f(u_r) + (u_r - v)\frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \right] \end{aligned}$$

Afirmamos que a expressão acima avaliada em t' é negativa, pois

$$\begin{aligned} f(v) - f(u_l) + (u_l - v)\frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} &= f(v) \\ &- \left[\frac{v - u_r}{u_l - u_r} f(u_l) + \frac{u_l - v}{u_l - u_r} f(u_r) \right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

e já que $v(x_{i+1}(t')) \in (u_r, u_l)$ então $v = \lambda u_l + (1-\lambda)u_r$, onde $\lambda = \dfrac{v - u_r}{u_l - u_r}$ e $(1-\lambda) = \dfrac{u_l - v}{u_l - u_r}$, daí pela convexidade de f temos que

$$f(v) \leq \lambda f(u_l) + (1-\lambda) f(u_r).$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
f(v) - f(u_r) + (u_l - v)\frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} &= f(v) \\
&+ \left[-f(u_l)\frac{v - u_r}{u_l - u_r} - \frac{u_l - v}{u_l - u_r} f(u_r) \right] \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

logo

$$f(v) - \lambda f(u_l) - (1-\lambda) f(u_r) \leq 0.$$

Portanto, $\dfrac{d}{dt}||u(t') - v(t')|| \leq 0.$

Agora, suponha que $(x_{i+1}(t), t)$ é uma curva de descontinuidade para $u(\cdot,\cdot)$ e $v(\cdot,\cdot)$ com $x_i(t)$ continuidade para ambas.

- Se $(u-v)(\cdot,t') > 0$ em $(x_i(t'), x_{i+1}(t'))$ então $(u-v)(\cdot,t') < 0$ em $(x_{i+1}(t), x_{i+2}(t))$. Daí, usando limites laterais obtemos que $u_l - v_l \geq 0$ e $u_r - v_r \leq 0$, portanto, $u_r \leq v_r < v_l \leq u_l$.

Agora, temos a seguinte situação

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||u(t') - v(t')|| &= \left[f(v_l) - f(u_l) + (u_l - v_l)\frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \right] \\
&+ \left[f(v_r) - f(u_r) + (u_r - v_r)\frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \right]
\end{aligned}
$$

Assim, $u_l > v_l > u_r$ e $u_l > v_r > u_r$, e estamos nas condições do caso acima, portanto em qualquer dos casos $\dfrac{d}{dt}||u(t') - v(t')|| \leq 0$, no ponto t'.

Para o caso onde $u(\cdot,t)$ tem no extremo $x_i(t)$ única descontinuidade o qual é continuidade de $v(\cdot,t)$, com $x_j(t)$ $(j \neq i)$ ponto de continuidade para ambas, pode ser tratado de modo análogo. Só observamos que não podemos ter $sgn_i(u-v) = 1$, pois se for este o caso, $(u-v)(x) > 0$ em

(x_i, x_{i+1}) então $(u-v)(x) < 0$ em (x_{i-1}, x_i). Daí obtemos $u_r - v \geq 0$ e $u_l - v \leq 0$, ou seja,

$$u_l \leq v(x_i(t')) \leq u_r.$$

Absurdo, pois $u_r < u_l$ pela condição de entropia.

Portanto, em quaisquer dos casos $\frac{d}{dt}||u(t') - v(t')|| \leq 0$, assim inferimos que $||u(t) - v(t)||$ é monótona decrescente. ■

Corolário 3.1 (Unicidade) *Se $u(x,t) = v(x,t)$ em $t = 0$, então $u = v$ para todo $t > 0$.*

Demonstração: De fato, já que $\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - v(x,t)|\, dx \leq 0$ para $t > 0$, então

$$\int_0^{t_1} \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - v(x,t)|\, dx\, dt \leq 0,$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t_1) - v(x,t_1)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,0) - v(x,0)|\, dx = 0$$

portanto,

$$|u(x,t_1) - v(x,t_1)| = 0$$

q.t.p-x para todo $t_1 > 0$. Isto completa a prova. ■

Teorema 3.4 (Dado inicial) *Quando $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ a solução $u = u(x,t)$ obtida pelo teorema (3.1) assume seu dado inicial u_0 na* norma L^1, *no seguinte sentido:*

$$||u(t) - u_0(t)||_{L^1(\mathbb{R})} \to 0, \quad t \to 0. \tag{3.18}$$

Demonstração: Desde que $y(x,t)$ minimiza a função $G(x,t,\cdot)$ temos

$$\begin{aligned} G(x,t,y(x,t)) &= \int_0^{y(x,t)} u_0(z)\,dz + tg\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) \\ &\le G(x,t,x) = \int_0^x u_0(z) + tg(0) \\ &\le ||u_0||_{L^1} + tg(0) \le C_1 \end{aligned}$$

para $0 < t < T$ e $C_1 = C_1(T) > 0$. Daí, obtemos que

$$tg\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) \le C_1 + ||u_0||_{L^1} \doteq C_2.$$

Suponha que $0 < K < \frac{1}{2}g''(z)$ e seja $c = f'(0)$, recordemos que g é convexa e que $g'(c) = b(c) = 0$ logo c é ponto de mínimo para g, além disso, $g(c) = g'(c) = 0$. Segue pelo teorema de *Taylor com resto de Lagrange*

$$g(z) \ge K(z-c)^2 \;\; \forall\, z \in \mathbb{R},$$

então

$$tg\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) \ge \frac{K}{t}(x-y(x,t)-ct)^2$$

ou ainda,

$$|x-y(x,t)-ct| \le \frac{t}{\sqrt{K}}\left(g\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right)^{1/2},$$

logo

$$\begin{aligned} |x-y(x,t)| \le |x-y(x,t)-ct| + |ct| &\le \frac{t}{\sqrt{K}}\left[g\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right]^{1/2} + |ct| \\ &= \frac{t^{1/2}}{\sqrt{K}}\left[tg\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right]^{1/2} + |ct| \\ &\le \frac{(tC_2)^{1/2}}{\sqrt{K}} + |ct|, \end{aligned}$$

portanto,

$$y(x,t) \to x, \text{ para } t \to 0.$$

Pela propriedade de mínimo de $y(x,t)$ e pelo fato que u_0 é $BV(\mathbb{R})$ valem as desigualdades

$$u_{0-}(y(x,t)) \leq u(x,t) \leq u_{0+}(y(x,t)).$$

De fato, defina $F(s) = -G(x,t,s)$ então $y(x,t)$ é ponto de máximo de F, logo,

$$0 \geq F'_{+}(y(x,t)) = -[u_{0+}(y(x,t)) - b((x - y(x,t))/t))]$$

onde

$$\lim_{s \to y(x,t)^{+}} u_0(s) \doteq u_{0+}(y(x,t))$$

ou, ainda, $u(x,t) \leq u_{0+}(y(x,t))$. Também,

$$0 \leq F'_{-}(y(x,t)) = -[u_{0-}(y(x,t)) - b((x - y(x,t))/t))]$$

logo, $u_{0-}(y(x,t)) \leq u(x,t)$. Portanto,

$$u_{0-}(y(x,t)) \leq u(x,t) \leq u_{0+}(y(x,t)).$$

Segue que, se x é ponto de continuidade de $u_0(.)$ e pelo fato que $y(x,t) \to x$ quando $t \to 0$ as desigualdades acima implicam que

$$u(x,t) \to u_0(x), \quad t \to 0.$$

De fato, seja x ponto de continuidade de u_0, então conseguimos uma vizinhança $|x-s| < r$ de x tal que u_0 restrita é contínua. Também temos que $y(x,t) \to x$ quando $t \to 0$ então existe

$T > 0$ de modo que para $t \in (0,T)$ temos $|y(x,t) - x| < r$. Logo, para $0 < t < T$ segue que $y(x,t)$ é ponto de continuidade de u_0. Daí, $u_{0\pm}(y(x,t)) = u_0(y(x,t))$ para $t \in (0,T)$, portanto

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0} u_0(y(x,t)) = u_0\left(\lim_{t\to 0} y(x,t)\right) = u_0(x).$$

Em resumo temos que :

$$|x - y(x,t)| \leq \frac{(tC_2)^{1/2}}{\sqrt{K}} + |ct| \leq \beta t, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ e } t \in (0,T).$$

e

$u_{0-}(y(x,t)) \leq u(x,t) \leq u_{0+}(y(x,t))$, então

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u_0(x)| &\leq |u_0(x) - u_{0+}(y(x,t))| + |u_0(x) - u_{0-}(y(x,t))| \\ &= \lim_{s\to y(x,t)^+} |u_0(x) - u_0(s)| + \lim_{s\to y(x,t)^-} |u_0(x) - u_0(s)| \end{aligned}$$

portanto

$$|u(x,t) - u_0(x)| \leq 2TV_{u_0}[x - t\beta, x + t\beta], \text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - u_0(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} 2TV_{u_0}[x - t\beta, x + t\beta]\, dx,$$

considere $TV(y) = TV_{u_0}[x - t\beta, y]$ para $y \in [x - t\beta, x + t\beta]$ pelo teorema 1.17 tem-se

$$(TV)'(y) = |u_0'(y)|,$$

daí segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - u_0(x)| \leq 2\int_{\mathbb{R}} \int_{x-t\beta}^{x+t\beta} |u_0'(y)|\, dy\, dx &= 2\int_{\mathbb{R}} \int_{y-t\beta}^{y+t\beta} |u_0'(y)|\, dx\, dy \\
&= 4t\beta \int_{\mathbb{R}} |u_0'(y)|\, dy
\end{aligned}
$$

portanto,

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - u_0(x)|\, dx = 0.$$

■

3.2 Decaimento da solução

Supondo ainda $f''(u) \geq \theta > 0$, ou seja, f estritamente convexa o teorema (3.1) da uma expressão explícita da solução u de (3.1)

$$u(x,t) = b\left(\frac{x-y}{t}\right) \tag{3.19}$$

onde $y = y(x,t)$ minimiza a aplicação $G(x,t,\cdot)$.

Vejamos que podemos obter informações de (3.19) sobre o comportamento das soluções para t suficientemente grande. Recordemos que $g(z)$ é uma função convexa , $b(z)$ é monótona crescente e que $g(z)$ atinge seu valor mínimo em $c = a(0)$ e

$$g(c) = g'(c) = 0, \text{ estamos supondo que } f(0) = 0. \tag{3.20}$$

Denote por k a constante

$$k = \frac{1}{2}b'(c) = \frac{1}{2}g''(c).$$

Já que f é estritamente convexa temos que $k > 0$. Além disso, assumimos que

$$0 < k_- < \frac{1}{2}b'(x) < k_+. \tag{3.21}$$

Segue de (3.20), (3.21) e teorema 1.7

$$g(z) = g(c) + g'(c)(z-c) + \frac{g''(w)}{2}(z-c)^2 = \frac{g''(w)}{2}(z-c)^2 \geq k_-(z-c)^2, \forall z \in \mathbb{R}.$$

portanto

$$g(z) \geq k_-(z-c)^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

então para $z = \dfrac{x-y}{t}$

$$tg\left(\frac{x-y}{t}\right) \geq \frac{k_-}{t}(x-y-ct)^2.$$

Agora, suponha $u_0(x)$ dado inicial de u em $L^1(\mathbb{R})$; então para todo $y \in \mathbb{R}$, aplicação

$$U_0(y) = \int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx$$

é limitada em valor absoluto por $||u_0||_1 = M$. Em vista de (3.22), vemos que para todo y,

$$-M + \frac{k_-}{t}(x-y-ct)^2 \leq \int_{-\infty}^{y} u_0(s)\,ds + tg\left(\frac{x-y}{t}\right) = G(x,t,y). \tag{3.23}$$

Daí, $G(x,t,x-ct) = U_0(x-ct) \leq M$ isto demonstra que $G(x,t,y(x,t)) \leq M$ no ponto de mínimo. Combinando isto com (3.23) vemos que

$$\left|\frac{x-y(x,t)}{t} - c\right| \leq \sqrt{\frac{2M}{tk_-}}. \tag{3.24}$$

Segue de (3.21) por integração de ambos os lados e também por $b(c) = 0$ a desigualdade

$$|b(z)| < 2k_+|z-c|,$$

e combinando isto com (3.24) obtemos

$$\left|b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right| \leq 2k_+\left|\frac{x-y(x,t)}{t} - c\right| \leq \frac{const.}{\sqrt{t}},$$

onde $const. = 2k_+\sqrt{\frac{2M}{k_-}}$.

Portanto, por (3.19)

$$|u(x,t)| \leq \frac{const.}{\sqrt{t}}. \tag{3.25}$$

Em vista destas estimativas, suponha que o dado inicial $u_0(x)$ seja nulo fora do intervalo $(-A,A)$, então a aplicação $U_0(y)$ é constante igual a zero para $y < -A$ e é alguma constante para $A < y$. De acordo com (3.24) o ponto de mínimo $y = y(x,t)$ encontra-se no intervalo

$$x - ct - L\sqrt{t} \leq y \leq x - ct + L\sqrt{t},$$

onde $L = \sqrt{\frac{2M}{k_-}}$.

Se $x < ct - L\sqrt{t} - A$, então $y < -A$ e $U_0(y)$ independente de y pois é nulo, portanto o ponto mínimo de G é o ponto que minimiza a função $tg\left(\frac{x-y}{t}\right)$ e este valor é $y(x,t) = x - ct$. Similarmente, para

$$x > ct + L\sqrt{t} + A,$$

$y > A$ e o valor de $U_0(y)$ independe de y, logo o mínimo valor de G é dado por $y(x,t) = x - ct$.

Segue desses fatos e já que $b(c) = 0$, que $u(x,t) = 0$ para x fora do intervalo

$$\left(ct - L\sqrt{t} - A\,,\, ct + L\sqrt{t} + A\right).$$

Portanto, toda solução u cujo valor inicial é zero fora de algum intervalo finito é, para t fixo, nula fora de um intervalo.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Justificativas

Este apêndice visa esclarecer alguns passos apresentados na demonstração do teorema 3.2, escolhemos apresenatar as justificavas abaixo só neste momento e não no texto para tornar a leitura menos carregada.

Dado $0 < \varepsilon < 1$ arbitrário, existe uma constante $C = C(x,t) > 0$ tal que

$$G(x,t,y) \leq C|y - y(x,t)|, \ \ \mathrm{y} \in [y(x,t) - \varepsilon, y(x,t) + \varepsilon].$$

Vamos verificar tal afirmação, para $0 < \varepsilon < 1$, considere $I = [y(x,t) - \varepsilon, y(x,t) + \varepsilon]$.

Seja $y \in I$ temos:

$$|G(x,t,y) - G(x,t,y(x,t))| \leq |u_0||y - y(x,t)| + t\left|g\left(\frac{x-y}{t}\right) - g\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right|$$

Agora, pelo teorema do valor médio, supondo $y \leq y(x,t)$:

$$t\left|g\left(\frac{x-y}{t}\right)-g\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)\right| = |y(x,t)-y|\left|b\left(\frac{x-y(x,t)}{t}+\lambda\left(\frac{y(x,t)-y}{t}\right)\right)\right|$$

Como, para $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\underbrace{\frac{x-y(x,t)}{t}+\lambda\left(\frac{y(x,t)-y}{t}\right)}_{s}\right| &\leq \left|\frac{x-y(x,t)}{t}\right|+\frac{1}{t}|y-y(x,t)| \\
&\leq \frac{1}{t}(|x-y(x,t)|+\varepsilon) \\
&\leq \frac{1}{t}(|x-y(x,t)|+1)
\end{aligned}$$

temos que $s \in [-K,K]$ onde $K = \frac{1}{t}(|x-y(x,t)|+1)$, sendo $b(.)$ contínua temos que $|b(s)| \leq C_1(x,t)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
|G(x,t,y)-G(x,t,y(x,t))| &\leq |u_0||y-y(x,t)|+C_1(x,t)|y-y(x,t)| \\
&\leq C_2(x,t)|y-y(x,t)|
\end{aligned}$$

Agora, supondo $y \geq y(x,t)$ temos

$$t\left|g\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right)-g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right| = |y(x,t)-y|\left|b\left(\frac{x-y}{t}+\lambda\left(\frac{y-y(x,t)}{t}\right)\right)\right|$$

Como, para $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\underbrace{\frac{x-y}{t} + \lambda\left(\frac{y-y(x,t)}{t}\right)}_{s}\right| &\leq \left|\frac{x-y}{t}\right| + \frac{1}{t}|y-y(x,t)| \\
&\leq \frac{1}{t}(|x|+\varepsilon) + \frac{1}{t}(|y-y(x,t)| + |y(x,t)|) \\
&\leq \frac{1}{t}(|x|+\varepsilon) + \frac{1}{t}(|y(x,t)|+\varepsilon) = K
\end{aligned}$$

temos que $s \in [-K, K]$ sendo $b(.)$ contínua temos que $|b(s)| \leq C_3(x,t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
|G(x,t,y) - G(x,t,y(x,t))| &\leq |u_0||y-y(x,t)| + C_3(x,t)|y-y(x,t)| \\
&\leq C_4(x,t)|y-y(x,t)|
\end{aligned}$$

Portanto, em qualquer dos casos, temos

$$|G(x,t,y) - G(x,t,y(x,t))| \leq C(x,t)|y-y(x,t)|$$

onde $C(x,t) = \max\{C_4, C_2\}$. Segue a afirmação.

Agora, considere as estimativas abaixo, e recordemos que $G(x,t,y) = \int_0^y u_0(s)\,ds + tg\left(\frac{x-y}{t}\right)$ para $y \in \mathbb{R}$ onde

$$g(u) = \sup_{v \in \mathbb{R}} (uv - f(v)).$$

Fixados $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, para $y \geq 0$ e $N \in \mathbb{N}$ temos :

$$
\begin{aligned}
NG(x,t,y) &\geq N\int_0^y u_0(s)\,ds + tN\left[-\left(\frac{x-y}{t}\right)2||u_0|| - f(-2||u_0||)\right] \\
&= -Ny||u_0|| + 2N||u_0||(y-x) - tNf(-2||u_0||) \\
&\geq Ny||u_0|| - 2N||u_0||x - tNf(-2||u_0||)
\end{aligned}
$$

logo , $e^{-NG} \leq e^{ND}e^{-Ny||u_0||}$, onde $D = 2||u_0||x + tf(-2||u_0||)$.

No caso, $y \leq 0$ temos :

$$
\begin{aligned}
NG(x,t,y) &\geq -N\int_y^0 u_0(s)\,ds + tN\left[3\left(\frac{x-y}{t}\right)||u_0|| - f(3||u_0||)\right] \\
&= Ny||u_0|| + 3N||u_0||(x-y) - tNf(3||u_0||) \\
&\geq -2Ny||u_0|| + 3N||u_0||x - tNf(3||u_0||)
\end{aligned}
$$

assim , $e^{-NG} \leq e^{NW}e^{2Ny||u_0||}$, onde $W = -3||u_0||x + tf(3||u_0||)$.

Afirmamos , para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ fixados, que

$$
\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right| e^{-NG(x,t,y)} \leq h(y),\, y \in \mathbb{R}
$$

onde $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,dy < \infty$.

De fato, seja $C_4 > 0$ uma contante de Lipchtz de $b(z)/t$ (função de z) e por desigualdade triangular

$$\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)-b(0)\right|e^{-NG(x,t,y)}+|b(0)|e^{-NG(x,t,y)}\leq\frac{C_4}{t}|x-y|e^{-NG(x,t,y)}+|b(0)|e^{-NG(x,t,y)}$$

Para $y\geq 0$:

1. $\frac{C_4}{t}|x-y|e^{-NG(x,t,y)}\leq\frac{C_4}{t}|x-y|e^{ND}e^{-Ny||u_0||}\leq\frac{C_4}{t}|x|e^{ND}e^{-Ny||u_0||}+\frac{C_4}{t}|y|e^{ND}e^{-Ny||u_0||}$.
2. $|b(0)|e^{-NG(x,t,y)}\leq|b(0)|e^{ND}e^{-Ny||u_0||}$.

Para $y\leq 0$:

1. $\frac{C_4}{t}|x-y|e^{-NG(x,t,y)}\leq\frac{C_4}{t}|x-y|e^{NW}e^{-Ny||u_0||}\leq\frac{C_4}{t}|x|e^{NW}e^{2Ny||u_0||}+\frac{C_4}{t}|y|e^{NW}e^{2Ny||u_0||}$.
2. $|b(0)|e^{-NG(x,t,y)}\leq|b(0)|e^{NW}e^{2Ny||u_0||}$.

Agora defina

$$h(y)=\begin{cases}\frac{C_4}{t}|y|e^{ND}e^{-Ny||u_0||}+(|b(0)|e^{ND}+\frac{C_4}{t}|x|e^{ND})e^{-Ny||u_0||} & \text{se } y>0\\ \\ \frac{C_4}{t}|y|e^{NW}e^{2Ny||u_0||}+(|b(0)|e^{NW}+\frac{C_4}{t}|x|e^{NW})e^{2Ny||u_0||} & \text{se } y<0\end{cases}\tag{A.1}$$

Agora temos

- $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-Ny||u_0||}\,dy=\left(-\frac{e^{-Ny||u_0||}}{N||u_0||}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{N||u_0||}$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty}ye^{-Ny||u_0||}\,dy=\frac{1}{(N||u_0||)^2}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{2Ny||u_0||}\,dy=\int_0^{\infty}e^{-2Ny||u_0||}\,dy=\left(-\frac{e^{-2Ny||u_0||}}{2N||u_0||}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2N||u_0||}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}-ye^{2Ny||u_0||}\,dy=\int_0^{\infty}ye^{-2Ny||u_0||}\,dy=\frac{1}{2(N||u_0||)^2}$

Portanto, das expressões que definem a aplicação h, segue a afirmação. Concluímos então que $b\left(\frac{x-y}{t}\right)e^{-NG(x,t,y)}$, $y \in \mathbb{R}$ é integrável para cada par $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ fixado. Além disso, obtemos que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-NG(x,t,y)}\,dy < \infty$.

Agora afirmamos que $f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)e^{-NG(x,t,y)}$, $y \in \mathbb{R}$ é integrável para cada par $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ fixado e para cada $N \in \mathbb{N}$ dado.

Pela convexidade de f temos :

$$\begin{aligned}
\left|f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)\right|e^{-NG(x,t,y)} &\leq \frac{|x|}{t}\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|e^{-NG(x,t,y)} \\
&+ 2|f(0)|e^{-NG(x,t,y)} + |f'(0)|\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|e^{-NG(x,t,y)} \\
&+ \frac{|y|}{t}\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|e^{-NG(x,t,y)} \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

a única expressão que ainda não conhecemos ser integrável é $\frac{|y|}{t}\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|e^{-NG(x,t,y)}$. Mas dos resultados acima temos que $\frac{|y|}{t}\left|b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|e^{-NG(x,t,y)} \leq \frac{|y|}{t}h(y)$ e obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{t}h(y) < \infty,$$

Portanto, segue a afirmação.

Agora, justificaremos que a aplicação

$$V(x,t) = ln\int_{-\infty}^{\infty} exp\{-NG(x,t,y)\}\,dy,$$

admite derivadas parciais. Primeiramente, verificamos que

$$\frac{\partial V_N}{\partial x} = \frac{-N\int b\left(\frac{x-y}{t}\right)exp\{-NG(x,t,y)\}dy}{\int exp\{-NG(x,t,y)\}dy}.$$

O objetivo é apenas justificar que podemos derivar sob o sinal de integração. De fato, defina

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-NG(t,x,y)}\, dy \tag{A.3}$$

para $x \in [c,d]$ e $t > 0$ fixado.

Agora, considere $\mathbb{R} \ni y \longmapsto e^{-NG(t,x,y)}$ com $x \in [c,d]$ e $t > 0$ fixados. Então,

$$\left| Nb\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-NG(x,t,y)} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-NG(t,x,y)}\right) \right|$$

provemos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-NG(t,x,y)}\right) \right| \leq h(y)$$

para $y \in \mathbb{R}$, para alguma função $h(y)$ integrável, ou seja, $\int_{\mathbb{R}} h(y)\, dy < \infty$. Mas de (A.1) com $x \in [c,d]$ existe tal função $h(y)$. Então por teorema 1.13 a aplicação $F(x)$ é diferenciável e

$$\frac{dF}{dx}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-NG(t,x,y)}\right) dy = N \int_{\mathbb{R}} b\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-NG(x,t,y)}\, dy$$

Agora, verificamos que

$$\frac{\partial V_N}{\partial t} = \frac{N \int f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) exp\{-NG(x,t,y)\}dy}{\int exp\{-NG(x,t,y)\}dy}$$

novamente só justificaremos que podemos derivar sob o sinal de integração. Defina

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-NG(t,x,y)}\, dy \tag{A.4}$$

para $0 < c \leq t \leq d$ e $x \in \mathbb{R}$ fixado, e considere $\mathbb{R} \ni y \longmapsto e^{-NG(t,x,y)}$ com $t \in [c,d]$ e $x \in \mathbb{R}$ fixados. Então,

$$\left| Nf\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-NG(x,t,y)} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-NG(t,x,y)}\right) \right|$$

provemos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-NG(t,x,y)}\right)\right| \leq H(y)$$

para $y \in \mathbb{R}$, para alguma função $H(y)$ integrável, ou seja, $\int_{\mathbb{R}} H(y)\,dy < \infty$. Mas isso é exatamente o que fizemos em (A.2). Por argumentos semelhantes podemos mostrar que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}.$$

Apêndice

$\mathcal{B}$

Mais Alguns Casos

Aprovitamos estes espaço para cobrir mais alguns casos que poderiam ser questionados no decorrer da demonstração do teorema 3.3:

1. • Se $(u-v)(\cdot,t) > 0$ em $(x_i(t), x_{i+1}(t))$ com $x_i(t)$ descontinuidade de $u(\cdot,t)$ e continuidade para $v(\cdot,t)$, além disso, $x_{i+1}(t)$ é ponto de continuidade para ambas então por hipótese $(u-v)(\cdot,t) < 0$ em (x_{i-1}, x_i). Daí,

$$\lim_{x \to x_i^+} (u-v)(x) = u_r - v \geq 0$$

e

$$\lim_{x \to x_i^-} (u-v)(x) = u_l - v \leq 0,$$

ou seja, $v \leq u_r$ e $u_l \leq v$, portanto $u_l \leq v \leq u_r$. Absurdo, pois $u_l > u_r$. Logo as condições deste caso não ocorrem.

2. • Seja $(u-v)(\cdot,t') > 0$ em $(x_i(t'), x_{i+1}(t'))$ com $x_i(t)$ descontinuidade de $v(\cdot,t)$ e continuidade para $u(\cdot,t)$ onde $x_{i+1}(t)$ é ponto de continuidade para ambas. Por hipótese

$(u-v)(x)<0$ em (x_{i-1},x_i). Daí, usando limites laterais

$$\lim_{x\to x_i^+}(u-v)(x)=u-v_r\geq 0$$

e

$$\lim_{x\to x_i^-}(u-v)(x)=u-v_l\leq 0,$$

ou seja, $v_r\leq u$ e $u\leq v_l$, portanto $v_r\leq u\leq v_l$.(não ocorrendo a igualdade simultâneamente pois $v_r<v_l$).

- Neste caso, estamos supondo $sgn_i(u-v)=1$. E segue que a expressão abaixo avaliada no ponto t' é não-positva

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}u(x,t)-v(x,t)\,dx &= \dot{x_{i+1}}(u-v)(x_{i+1})+\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}(u(x)-v(x))_t\,dx\\
&- \dot{x}_i(u-v_r)(x_i)\\
&= (f(v)-f(u))(x_{i+1})-[f(v_r)-f(u)]-\dot{x}_i(u-v_r)\\
&= f(u)-f(v_r)-\left[\frac{f(v_l)-f(v_r)}{v_l-v_r}\right](u-v_r).
\end{aligned}$$

3. - Se $(u-v)(\cdot,t')>0$ em $(x_i(t'),x_{i+1}(t'))$ com $x_i(t)$ descontinuidade de $v(\cdot,t)$ e $u(\cdot,t)$ onde $x_{i+1}(t)$ é ponto de continuidade para ambas. Segue $(u-v)(\cdot,t')<0$ em (x_{i-1},x_i). Daí,

$$\lim_{x\to x_i^+}(u-v)(x)=u_r-v_r\geq 0 \;\text{ e }\; \lim_{x\to x_i^-}(u-v)(x)=u_l-v_l\leq 0,$$

ou seja, $v_r\leq u_r$ e $u_l\leq v_l$, portanto $v_r\leq u_r<u_l\leq v_l$.

- Neste caso, supomos $sgn_i(u-v)=1$. E, concluímos que a expressão abaixo é não-positiva em t'

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} u(x,t)-v(x,t)\,dx &= \dot{x}_{i+1}(u-v)(x_{i+1})+\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}(u(x)-v(x))_t\,dx\\ &- \dot{x}_i(u_r-v_r)(x_i)\\ &= -[f(v_r)-f(u_r)]-\dot{x}_i(u_r-v_r)\end{aligned}$$

4. • Se $(u-v)(\cdot,t)<0$ em $(x_i(t),x_{i+1}(t))$ com $x_{i+1}(t)$ descontinuidade de $u(\cdot,t)$ e continuidade para $v(\cdot,t)$ onde $x_i(t)$ é ponto de continuidade para ambas, teríamos $(u-v)(x)>0$ em (x_{i+1},x_{i+2}). Daí,

$$\lim_{x\to x_{i+1}^+} u-v(x)=u_r-v\geq 0 \text{ e } \lim_{x\to x_{i+1}^-} u-v(x)=u_l-v\leq 0,$$

ou seja, $v\leq u_r$ e $u_l\leq v$, portanto $u_l\leq v\leq u_r$. absurdo pois $u_r<u_l$. Logo este caso não ocorre.

5. • Se $(u-v)(\cdot,t')<0$ em $(x_i(t'),x_{i+1}(t'))$ com $x_{i+1}(t)$ descontinuidade de $v(\cdot,t)$ e continuidade para $u(\cdot,t)$ onde $x_i(t)$ é ponto de continuidade para ambas então por hipótese $(u-v)(x)>0$ em (x_{i+1},x_{i+2}). Segundo os limites laterais abaixo,

$$\lim_{x\to x_{i+1}^+} u-v(x)=u-v_r\geq 0 \text{ e } \lim_{x\to x_{i+1}^-} u-v(x)=u-v_l\leq 0,$$

ou seja, $v_r\leq u$ e $u\leq v_l$, temos $v_r\leq u\leq v_l$. (não ocorrendo a igualdade simultâneamente pois $v_r<v_l$).

• Neste caso estamos supondo $sgn_i(u-v)=-1$. Deste fatos também concluímos que

$$(-1)\left(\frac{d}{dt}\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} u(x,t)-v(x,t)\,dx\right)\Bigg|_{t=t'}\leq 0$$

6. • Se $(u-v)(\cdot,t')<0$ em $(x_i(t),x_{i+1}(t'))$ com $x_{i+1}(t)$ descontinuidade de $v(\cdot,t)$ e $u(\cdot,t)$ onde $x_i(t)$ é ponto de continuidade para ambas. Então $(u-v)(x)>0$ em (x_{i+1},x_{i+2}).

Daí, usando limites laterais

$$\lim_{x \to x_{i+1}^+} (u-v)(x) = u_r - v_r \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{i+1}^-} (u-v)(x) = u_l - v_l \leq 0,$$

ou seja, $v_r \leq u_r$ e $u_l \leq v_l$, portanto $v_r \leq u_r < u_l \leq v_l$.

- Supomos aqui $sgn_i(u-v) = -1$. E novamente temos

$$(-1)\left(\frac{d}{dt}\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} u(x,t) - v(x,t)\,dx\right)\Bigg|_{t=t'} \leq 0$$

7. - Se $(u-v)(\cdot,t) < 0$ em $(x_{i+1}(t), x_{i+2}(t))$ com $x_{i+1}(t)$ descontinuidade de $v(\cdot,t)$ e continuidade para $u(\cdot,t)$ onde $x_{i+2}(t)$ é ponto de continuidade para ambas. Então $(u-v)(x) > 0$ em (x_i, x_{i+1}) . Daí,

$$\lim_{x \to x_{i+1}^+} (u-v)(x) = u - v_r \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{i+1}^-} (u-v)(x) = u - v_l \geq 0,$$

ou seja, $u \leq v_r$ e $v_l \leq u$, portanto $v_l \leq u \leq v_r$. Absurdo pois $v_r < v_l$. E este caso não ocorre.

8. - Se $(u-v)(\cdot,t') > 0$ em $(x_i(t'), x_{i+1}(t'))$ com $x_{i+1}(t)$ descontinuidade de $u(\cdot,t)$ e continuidade de $v(\cdot,t)$ onde $x_i(t)$ é ponto de continuidade para ambas. Este caso esta apresentado trabalho e a derivada em questão é não-positiva.

- Segue da hipótese acima que $(u-v)(x) < 0$ em (x_{i+1}, x_{i+2}), com x_{i+2} ponto de continuidade de ambas, estamos supondo ainda x_{i+1} descontinuidade de u e continuidade de v . Daí, usando limites laterais

$$\lim_{x \to x_{i+1}^+} (u-v)(x) = u_r - v \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{i+1}^-} (u-v)(x) = u_l - v \geq 0,$$

ou seja, $u_r \leq v$ e $v \leq u_l$, portanto $u_r \leq v \leq u_l$. (não ocorrendo a igualdade simultâneamente pois $u_r < u_l$.

- Neste caso, supomos $sgn_i(u-v) = 1$, logo $sgn_{i+1}(u-v) = -1$. Temos a situação :

$$(1)\left(\frac{d}{dt}\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} u(x,t) - v(x,t)\,dx\right)\Bigg|_{t=t'} \leq 0$$

$$(-1)\left(\frac{d}{dt}\int_{x_{i+1}(t)}^{x_{i+2}(t)} u(x,t) - v(x,t)\,dx\right)\Bigg|_{t=t'} \leq 0$$

O caso (8) foi apresentado no corpo do trabalho. As outras situações poderiam também ocorrer, e em quaisquer dos casos teremos que a função dada no teorema 3.3 é decrescente em t.

Referências Bibliográficas

[1] Christopher E. Heil, Notas de aula, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2010. Veja http://math.gatech.edu/ heil.

[2] Evans, L.C, Partial Differential Equations. AMS, Providence, 1998.

[3] Folland, G.B, Real analysis: modern techniques and their applications. New York: Wiley Interscience, 1984, p.54.

[4] Hormander, L. The Analysis of Linear Differential Operadores I, 2 ed. Springer-Verlag. New York, 1990.

[5] Keyfitz, B.Q, Solutions with shocks: An example of an contractive semigroup, Com. Pure Appl. Math, 24, 1971 ,125-129.

[6] LeFloch, P.G. Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Birkhäuser,Basel, 2002.

[7] Lima, E.L. Curso de Análise. v.1, 11 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2004.

[8] Lima, E.L. Curso de Análise. v.2, 5 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1999.

[9] P.D. Lax. Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Com. Pure Appl. Math, 10, 1957, 539-543.

[10] P.D. Lax. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1973, 1-18.

[11] P.D. Lax. Hyperbolic Partial Differential Equations. AMS, Providence, 2006.

[12] Smoller, J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer-Verlag, 1983.