UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Problema de Cauchy para a Equação da Onda Cúbica

Marcos Alves de Farias

SÃO CARLOS - SP
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Problema de Cauchy para a Equação da Onda Cúbica

Marcos Alves de Farias
Orientador: Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP
2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

F224pc

Farias, Marcos Alves de.
O problema de Cauchy para a equação da onda cúbica / Marcos Alves de Farias. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
75 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Análise harmônica. 3. Teoria das distribuições - análise funcional. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
DM - UFSCar

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
FFCLRP - USP

Pelos anos que passei em São Carlos, dedico este trabalho a meu pai, pois acredito que teria dado a própria vida para que eu pudesse realizar meus sonhos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais Carlos e Dionisia por todo apoio que me deram em cada etapa de minha vida, acredito que muito das conquistas que eu tive se devem a todas as lições que aprendi com eles. Devo também um agradecimento especial ao Professor José Ruidival dos Santos Filho pela preciosa orientação que me deu durante todo o período de mestrado e por toda paciência que tenho certeza teve para comigo. Agradeço também a toda minha família e aos meus amigos em especial Luiz e Liang pelos passeios em São Paulo e ao Emílio por todo companherismo em São Carlos. Acredito que também devo um agradecimento a meu primo Thiago por ter plantado em mim a semente de um sonho que acredito estar realizando hoje, estudar.
Finalmente, agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos um resultado de boa colocação global para a equação da onda cúbica $\partial_t^2 u - \Delta u + u^3 = 0$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, no qual os dados de Cauchy estão no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$, para $\frac{13}{18} < s < 1$. A prova é baseada no trabalho de T. Roy, [23], nele é estabelecido uma lei de quase conservação de energia e a partir disso se obtém uma desigualdade que aliada a teoria da boa colocação local estabelecida por Lindbald e Sogge em [18] garante a boa colocação global para o problema.

Palavras chaves: Equação da Onda Cúbica, Decomposição Homogênea de Littlewood Paley, Estimativas de Strichartz, Energia Modificada.

Abstract

In this work, we study the result of global well-Posedness for the cubic wave equation $\partial_t^2 u - \Delta u + u^3 = 0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, where the Cauchy data is in the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ with $\frac{13}{18} < s < 1$. The proof is based on the work of T. Roy, [23], in this paper Roy propose a almost conservation law for the energy and from this he get a inequality that together with the local well-posedness theory proved by Lindbald and Sogge in [18] guarantee the global well-posedness for the problem.

Keywords: Cubic Wave Equation, Homogeneous Littlewood-Paley Decomposition, Strichartz estimates, Mollified Energy.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar um resultado de boa colocação global para o problema de Cauchy envolvendo a equação da onda cúbica, isto é,

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u &= -u^3 \\ u(0,x) &= u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) &= u_1(x) \end{cases} \tag{1}$$

com dados iniciais $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ e $\frac{13}{18} < s < 1$.

Diremos que o problema da onda cúbica é localmente bem posto no espaço $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ se para quaisquer dados iniciais $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$, existir uma bola $B \subset H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ contendo (u_0, u_1) tal que

- Existe um tempo $T > 0$, um conjunto $X_T \subset C([0,T], H^s(\mathbb{R}^3)) \times C([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$ e um único par de funções $(u, \partial_t u)$ em X_T satisfazendo (1).
- A aplicação

$$\Psi : B \longrightarrow X_T$$

$$(v_0, v_1) \longmapsto (v, \partial_t v)$$

  é uniformemente contínua.

É conhecido que (1) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ para $s \geq 1$. Lindbald e Sogge em [18] provaram que o problema (1) é localmente bem posto para $\frac{1}{2} < s < 1$. Além da boa colocação local para esses casos, temos também que o tempo de existência local das soluções dependem somente da norma dos dados iniciais $\|(u_0, u_1)\|_{H^s \times H^{s-1}} = \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}$ e essa dependência faz com que T decresça com o aumento de $\|(u_0, u_1)\|_{H^s \times H^{s-1}}$.

Este resultado de boa colocação local tem grande importância no trabalho de Roy, [23], pois é a partir dele que Roy prova a boa colocação global para o problema (1).

Por boa colocação global entendemos que o problema da onda cúbica é localmente bem posto no espaço $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ e a solução local u existe para todo $T \geq 0$.

Devido a teoria da boa colocação local, Roy precisou apenas provar uma desigualdade do tipo

$$\|(u(T), \partial_t u(T))\|_{H^s \times H^{s-1}} \leq C(s, \|u_0\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}}, T), \quad \forall T \in (0, \infty) \tag{2}$$

para obter a boa colocação global.

De fato, se T^* representa o supremo dos instantes T tal que existe uma única solução $(u, \partial_t u) \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^3)) \times C([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$, então para $s > \frac{1}{2}$ há duas possibilidades:

1. $T^* = \infty$, neste caso temos a boa colocação global.

2. $T^* < \infty$ e neste caso vale

$$\lim_{t \to T^*} \left(\|u(t)\|_{H^s} + \|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}} \right) = \infty. \tag{3}$$

Observemos que supondo $T^* < \infty$ e $\lim\limits_{t \to T^*} \|u(t)\|_{H^s} + \|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}} < \infty$, então pela definição de limite existirá uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e um $M > 0$ tal que

- $t_n \nearrow T^*$.
- $\|u(t_n)\|_{H^s} + \|\partial_t u(t_n)\|_{H^{s-1}} \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, tomando $\varphi_n = u(t_n)$ e $\psi_n = \partial_t u(t_n)$, teremos (φ_n, ψ_n) pertencente a $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\|\varphi_n\|_{H^s} \leq M$ e $\|\psi_n\|_{H^{s-1}} \leq M$ e pela teoria da boa colocação local existirá uma única solução $v_n(t)$ para o problema

$$\begin{cases} \partial_{tt} v_n - \Delta v_n &= -v_n^3 \\ v_n(0) &= \varphi_n \\ \partial_t v_n(0) &= \psi_n \end{cases}$$

além disso, essas soluções $v_n(t), n \in \mathbb{N}$, estarão bem definidas em um intervalo $[0, T_M)$, para algum T_M que depende apenas de M. Definindo

$$\widetilde{u}_n(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se} \quad 0 \leq t < t_n \\ v_n(t - t_n), & \text{se} \quad t_n \leq t < t_n + T_M \end{cases}$$

teremos que $\widetilde{u}_n(t)$ é uma solução para (1) definida em $[0, t_n + T_M)$. Agora como $t_n \nearrow T^*$ segue que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n_0} + T_M > T^*$ e portanto $\widetilde{u}_{n_0}(t)$ será uma solução definida em $[0, t_{n_0} + T_M)$, o que é uma contradição, pois o intervalo $[0, T^*)$ é maximal.

Portanto, se tivermos uma desigualdade a priori do tipo (2), então o limite (3) será finito e assim teremos a boa colocação global.

Capítulo 1

Preliminares

Estabeleceremos neste capítulo os resultados básicos que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Iniciaremos este capítulo discutindo algumas propriedades que envolvem espaços de Lebesgue L^p bem como das distribuições $\mathcal{D}'$ e de Sobolev H^s_r e concluiremos com a decomposição homogênea de Littlewood-Paley e a definição de espaço homogêneo de Besov $\dot{B}^{\rho}_{r,s}$.

1.1 Espaços L^p

Nesta seção denotaremos por X um espaço de medida arbitrária e por μ uma medida positiva definida em X.

Definição 1.1.1 *Sejam $0 < p \leq \infty$ e f uma função complexa mensurável em X, definiremos:*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty$$

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}$$

e por $L^p(\mu)$ o espaço das funções complexas mensuráveis em X tal que

$$\|f\|_{L^p} < \infty.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$ se dissermos que duas funções que coincidam em quase toda parte define o mesmo elemento em $L^p(\mu)$ estamos dando propriedades de norma para $\|\cdot\|_{L^p}$ e no caso de $1 \leq p < \infty$ estaremos definindo $L^p(\mu)$ como um espaço de Banach. Para a demonstração deste resultado, veja [10].

Se a medida em questão μ for a de Lebesgue e o espaço for $\mathbb{R}^n$ ou algum subconjunto aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ então denotaremos $L^p(\mu)$ por $L^p(\mathbb{R}^n)$ ou $L^p(\Omega)$. Caso nada seja dito quando nos referirmos a funções mensuráveis, estaremos nos referindo as funções Lebesgue mensuráveis.

Para registro de informação, diremos que $p, q \in (1, \infty)$ são expoentes conjugados, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposição 1.1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 < p, q < \infty$ expoentes conjugados. Se f e g são funções mensuráveis em X, então*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}.$$

Demonstração: Ver [10], pág. 174.

Proposição 1.1.2 *Se $0 < p < q < r \leq \infty$, então $L^p \cap L^r \subset L^q$ e $\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}^{\lambda} \|f\|_{L^r}^{1-\lambda}$, onde $\lambda \in (0,1)$ é definido por*

$$\lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}.$$

Demonstração: Ver [10], pág. 185.

Proposição 1.1.3 (Desigualdade de Chebychev) *Se $f \in L^p(1 \leq p < \infty)$, então para todo $\lambda > 0$, vale:*

$$\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p.$$

Demonstração: Ver [10], pág. 178.

A seguir enunciaremos uma caracterização para a norma L^p através de integrais sobre $[0, \infty)$.

Teorema 1.1.1 *Se $0 \leq p < \infty$, então para toda função mensurável, segue:*

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda.$$

Demonstração: Ver [10], pág. 191.

Definição 1.1.2 *Sejam f e g funções mensuráveis em R^n, definiremos a convolução de f por g como segue abaixo:*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que a integral acima seja finita.

Proposição 1.1.4 (Desigualdade de Young) *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, então*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração: Ver [10], pág. 241.

Proposição 1.1.5 *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p \leq \infty$, então para a função Mf definida por*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

vale,

$$\|Mf\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$$

onde A_p depende somente de p e da dimensão n.

Demonstração: Ver [26], pág. 5.

1.2 Distribuições

Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Definiremos o suporte $Supp(\phi)$ de ϕ como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}$.

Definição 1.2.1 *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. As funções deste espaço daremos o nome de funções testes.*

Como um exemplo de função teste em $\mathbb{R}^n$, tome

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{(|x|^2-1)^{-1}}, & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Para a prova de que esta de fato é uma função teste, veja na referência [14].

Proposição 1.2.1 *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Se K é um subconjunto compacto de Ω, então existe uma função $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo x em Ω e $\psi(x) = 1$ em uma vizinhança de K.*

Demonstração: Ver [14], pág. 7.

Definição 1.2.2 *Diremos que uma sequência de funções $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_0^\infty(\Omega)$ se satisfizer duas condições:*

1. *Existe um subconjunto compacto K de Ω tal que $Supp(\phi_j) \subseteq K, \forall j \in \mathbb{N}$.*
2. *Para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando j tende para infinito.*

Vale observar que é possível dotar $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma a tornar $C_0^\infty(\Omega)$ um espaço topológico completo e garantir que a noção de convegência nessa topologia coincida como a da definição acima. Para isso veja [3].

Definição 1.2.3 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. Denotaremos o espaço das distribuições em Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Por vezes é conveniente escrever $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.

Exemplo 1.2.1 *Considere $\Omega = \mathbb{R}^n$ e defina $\delta_0(\phi) = \phi(0)$, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esta distribuição é conhecida como delta de Dirac.*

Para criarmos uma série de exemplos de distribuições, podemos definir o seguinte conjunto.

Definição 1.2.4 *Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função Lebesgue mensurável tal que para cada compacto $K \subset \Omega$ tenha-se*

$$\int_K |f| dx < \infty$$

então dizemos que f é localmente integrável e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Só para termos uma idéia do tamanho do conjunto $L^1_{loc}(\Omega)$, é fácil ver que todas as funções que são contínuas definidas em Ω estão em $L^1_{loc}(\Omega)$ e também pela desigualdade de Hölder, as funções em $L^p(\Omega)$ para $p \geq 1$ também estão em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 1.2.2 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definindo*

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

teremos T_f uma distribuição. De fato, a linearidade de T_f segue da linearidade da integral, quanto a continuidade segue da estimativa

$$|T_f(\phi)| \leq \sup_{x \in \Omega} |\phi(x)| \int_{Supp(\phi)} |f(x)| dx.$$

Neste ponto vale observar que para $f, g \in L^1_{loc}$, se $T_f(\phi) = T_g(\phi)$ para toda ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$, então teremos $f(x) = g(x)$ em quase toda parte de Ω. Para este fato veja [14].

Desta forma, através da injeção $f \mapsto T_f$ podemos identificar o espaço e os subespaços de $L^1_{loc}(\Omega)$ como subspaços de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Devido a este fato, em alguns momentos por questão de simplicidade escreveremos $\langle f, \phi \rangle$ para representar $T_f(\phi)$.

Proposição 1.2.2 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [14], pág. 64.

Definição 1.2.5 *Diremos que uma sequência $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, se $u_j(\phi)$ converge a $u(\phi)$ para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

Muitas operações podem ser definidas no espaço das distribuições, neste ponto mencionaremos apenas duas, são elas a diferenciação de uma distribuição e o produto de uma distribuição por uma função infinitamente diferenciável.

Definição 1.2.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Dados $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$, definiremos*

$$\partial_{x_j} u(\phi) = -u(\partial_{x_j}\phi), \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$fu(\phi) = u(f\phi), \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

É fácil ver que as definições acima definem distribuições $\partial_{x_j} u$ e fu e que além disso as aplicações $f \mapsto \partial_{x_j} u$ e $f \mapsto fu$ são contínuas.

É neste sentido que falamos em solução fraca para uma dada equação diferencial, ou seja, dizemos que uma solução u para uma dada equação diferencial é fraca, se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e satisfaz a equação no sentido das distribuição. Como um exemplo, poderíamos dizer que se $u_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é uma solução fraca da equação $\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha u = f$ então, teriamos

$$\sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} u_0(a_\alpha \partial^\alpha \phi) = T_f(\phi), \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 1.2.7 *Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido pelas funções ϕ tais que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi(x)|\right| < \infty$$

para todo inteiro não negativo N e para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é conhecido como espaço de Schwartz e sua topologia é definida por meio da família de seminormas $\left\{\left\|(1+|\cdot|)^N |\partial^\alpha \phi|\right\|_\infty\right\}_{N\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{N}^n}$.

Proposição 1.2.3 *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Ver [14], pág. 79.

Definição 1.2.8 *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f é definida por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $x.\xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

Em algumas ocasiões utilizaremos a notação $\mathcal{F}(f)$ para representar a tranformada de Fourier de uma dada função f.

Teorema 1.2.1 *A transformada de Fourier é um operador linear contínuo e invertível de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, além disso fixadas $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, valem as seguintes fórmulas:*

1. $\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\phi(\xi)d\xi$
2. $\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$
3. $\mathcal{F}(x^\alpha \phi)(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$
4. $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\widehat{\psi}(x)dx$
5. $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\overline{\psi}(x)dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)\overline{\widehat{\psi}}(x)dx$
6. $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}$
7. $\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\psi}$.

Demonstração: Ver [14], pág. 77.

Corolário 1.2.1 *Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\left\|\widehat{\phi}\right\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{L^1} \tag{1.1}$$

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n} \left\|\widehat{\phi}\right\|_{L^1}. \tag{1.2}$$

Demonstração: Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, segue por

$$\left|\widehat{\phi}(\xi)\right| = \left|\int e^{-ix.\xi}\phi(x)dx\right| \leq \int |\phi(x)|\, dx = \|\phi\|_{L^1}$$

a relação (1.1).

Para a relação (1.2), basta verificar que

$$|\phi(x)| = |\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi))(x)| = (2\pi)^{-n} \left|\int e^{ix.\xi}\widehat{\phi}(\xi)d\xi\right| \leq (2\pi)^{-n} \left\|\widehat{\phi}\right\|_{L^1}$$

vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$.$\square$

Definição 1.2.9 *Um funcional linear contínuo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.2.10 *Dado $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definiremos a transformada de Fourier de u por*

$$\widehat{u}(\phi) = u(\widehat{\phi}), \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Exemplo 1.2.3 *Fixado $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, calculemos a transformada de Fourier de δ_0.*

$$\widehat{\delta_0}(\phi) = \delta_0(\widehat{\phi}) = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = T_1(\phi).$$

Portanto $\widehat{\delta_0} = T_1$ e pela tranformada inversa teremos $\mathcal{F}^{-1}(T_1) = \delta_0$.

Proposição 1.2.4 *Sejam $f, g, f_1, ..., f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\widehat{g}(-x)dx \tag{1.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)...f_k(x)dx = (2\pi)^{-n(k-1)} \int_{\xi_1+...+\xi_k=0} \widehat{f_1}(\xi_1)...\widehat{f_k}(\xi_k)d\xi_1...d\xi_k. \tag{1.4}$$

Demonstração: Começaremos demonstrando (1.3).

Observando que

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(-x).\xi} g(\xi)d\xi = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(g)(-x)$$

segue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)g(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(x)\mathcal{F}^{-1}(g)(x)dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(x)\mathcal{F}(g)(-x)dx
\end{aligned}$$

Provemos agora (1.4).

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_1+...+\xi_k=0} \widehat{f_1}(\xi_1)...\widehat{f_k}(\xi_k)d\xi_1...d\xi_k &= \int_{\mathbb{R}^{kn}} \delta_0(\xi_1 + ... + \xi_k)\widehat{f_1}(\xi_1)...\widehat{f_k}(\xi_k)d\xi_1...d\xi_k \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{kn}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.(\xi_1+...+\xi_k)}dx\widehat{f_1}(\xi_1)...\widehat{f_k}(\xi_k)d\xi_1...d\xi_k \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{kn}} e^{ix.(\xi_1+...+\xi_k)}\widehat{f_1}(\xi_1)...\widehat{f_k}(\xi_k)d\xi_1...d\xi_k dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi_1}\widehat{f_1}(\xi_1)d\xi_1... \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi_k}\widehat{f_k}(\xi_k)d\xi_k dx \\
&= (2\pi)^{n(k-1)} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)...f_k(x)dx. \ \square
\end{aligned}$$

Proposição 1.2.5 (Identidade de Plancherel) *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}^2.$$

Demonstração: Ver [14], pág. 81.

Quando se trabalha com análise de Fourier uma classe de operadores que frequentemente aparece é a classe dos multiplicadores de Fourier. Se m é uma função mensurável e limitada em $\mathbb{R}^n$, em algumas situações pode-se definir o operador T_m através da seguinte relação:

$$\widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi). \tag{1.5}$$

Caso tenha-se $\|T_m f\|_{L^p} \leq A\|f\|_{L^p}$ para toda função f em $L^p(\mathbb{R}^n)$, dizemos que m é um multiplicador de Fourier em L^p.

A próxima proposição citará um caso em que um operador deste tipo pode ser definido como um multiplicador de Fourier.

Proposição 1.2.6 *Seja k é um inteiro maior do que $\frac{n}{2}$ e ν uma função de classe C^k no complementar da origem de $\mathbb{R}^n$. Se tivermos*

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial_x}\right)^{\alpha} \nu(x) \right| \leq B|x|^{-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad tal \quad que \quad |\alpha| \leq k$$

então para $1 < p < \infty$, teremos

$$\|T_\nu f\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$$

onde o operador T_ν está definido como em (1.5).

Demonstração: Ver [26], pág. 96.

1.3 Espaços de Sobolev

Devido a grande importância destes espaços, começaremos esta seção definindo espaços de Sobolev modelados em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.3.1 *Definiremos o espaço abaixo como o espaço não homogêneo de Sobolev*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|(1+D)^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

onde $D = \sqrt{-\Delta}$ representa o operador definido via transformada inversa de Fourier, ou seja, $Du = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|\widehat{f}(\cdot))$.

Como norma para o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$, utilizaremos:

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De fato esta é uma boa definição de norma, aplicando a identidade de Plancherel, observamos

$$\|(1+D)^s u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n} \|(1+|\cdot|)^s \widehat{u}\|_{L^2} = (2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Criaremos agora duas situações, uma em que $s \geq 0$ e a outra onde $s < 0$.
Supondo $s \geq 0$, teremos:

$$(1+|\xi|)^{2s} = [(1+|\xi|)^2]^s = [1+2|\xi|+|\xi|^2]^s \geq [1+|\xi|^2]^s.$$

Se por outro lado supormos $s < 0$, então

$$(1+|\xi|)^2 \leq 2^2(1+|\xi|^2).$$

Como $s < 0$, teremos:

$$(1+|\xi|)^{2s} \geq 2^{2s}(1+|\xi|^2)^s.$$

Devido as duas situações que analisamos, concluimos que existe um $C > 0$ tal que

$$C(1+|\xi|)^{2s} \geq (1+|\xi|^2)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, para $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ segue:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= C(2\pi)^{2n} \left\|(1+D)^s u\right\|_{L^2}^2 < \infty
\end{aligned}$$

As demais propriedades de norma seguem da linearidade da transformada de Fourier e da norma L^2 com respeito a medida $(1+|\xi|^2)^s d\xi$.

Proposição 1.3.1 *Se s é um número real, então o espaço H^s equipado com a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: O fato de que a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi$$

é imediato. Provemos então que o espaço H^s é completo.

De fato, seja $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em H^s, pela definição da norma em H^s teremos que $\{\widehat{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$. Por outro lado, $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ é uma espaço completo e portanto existirá uma função $\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_m - \widetilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi)} = 0. \tag{1.6}$$

Em particular, a sequência $\{\widehat{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tende para $\widetilde{u}$ no espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e definindo $u = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{u})$, como a transformada de Fourier é um isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ segue que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Por fim, $u_m \to u$ em H^s por (1.6). $\square$

Proposição 1.3.2 *Se s é um inteiro não negativo, então o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções u pertencentes a $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq s$. Além disso, a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ é equivalente à norma:*

$$\|u\|^2 = \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 .$$

Demonstração: Dado $s \in \mathbb{N}$, pelo binômio de Newton temos

$$(1+|\xi|^2)^s = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} |\xi|^{2j}$$

portanto, fixando $0 \leq j \leq s$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, segue:

$$\begin{aligned} |\xi|^{2j}|\widehat{u}(\xi)|^2 &= (\xi_1^2 + ... + \xi_n^2)^j |\widehat{u}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|\leq s} c_\alpha |\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 &= \sum_0^s \sum_{|\alpha|\leq s} c_\alpha \binom{s}{j} |\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|\leq s} \widetilde{c_\alpha} |\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Integrando em ambos os membros e aplicando Plancherel, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq s} \widetilde{c_\alpha} |\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha|\leq sj} (2\pi)^n \widetilde{c_\alpha} \|\partial^\alpha u(\xi)\|^2 . \end{aligned}$$

Tomando $C_1 = min\{(2\pi)^n \widetilde{c_\alpha} : |\alpha| \leq s\}$ e $C_2 = min\{(2\pi)^n \widetilde{c_\alpha} : |\alpha| \leq s\}$, obtemos:

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 .$$

□

Corolário 1.3.1 *$\mathcal{S}$ é continuamente incluído em H^s.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, sabemos que se s é um inteiro positivo, então

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 .$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha u\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(x)|^2 \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{\frac{n+1}{2}} |\partial^\alpha u(x)| \\ &\leq C \|u\|_{N,\alpha}^2\end{aligned}$$

onde N é um inteiro maior do que $\frac{n+1}{2}$.

Portanto,

$$\|u\|_{H^s} \leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \|u\|_{N,\alpha}^2 .$$

Portanto $\mathcal{S} \hookrightarrow H^s$ se s é natural. Por fim, se s é real, denotando por $\lceil s \rceil$ o menor inteiro positivo maior ou igual que s, obtemos $\mathcal{S} \hookrightarrow H^{\lceil s \rceil} \hookrightarrow H^s$, como queriamos demonstrar. $\square$

Teorema 1.3.1 *Seja s um número real.*

1. *O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*
2. *A multiplicação por uma função de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação contínua de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Para a prova do primeiro item vamos utilizar a caracterização de densidade devido ao corolário 12.3 da página 88 de [20].

Propriedade: Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. Um subespaço $X \subset \mathcal{N}$ é denso em $\mathcal{N}$ se, e somente se, o único elemento de $\mathcal{N}^*$(isto é , o conjunto dos funcionais lineares e contínuos) que se anula em X é o funcional nulo.

Assim, como $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert, seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenha-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Uma vez que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \hookrightarrow H^s$ então, $\forall f \in \mathcal{S}$ segue

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Isso mostra que $\langle (1+|\cdot|^2)^s\widehat{u}, f\rangle = 0, \forall f \in \mathcal{S}$, o que implica que $(1+|\cdot|^2)^s\widehat{u} = 0$ no sentido das distribuições temperadas. Como a função $\rho(\xi) = (1+|\xi|^2)^s$ não se anula e $\mathcal{F}$ é isomorfismo, segue que $u = 0$.

Quanto ao segundo item, sabemos que $\widehat{\varphi u} = (2\pi)^{-n}\widehat{\varphi} * \widehat{u}, \forall u \in \mathcal{S}$. Então,

$$\begin{aligned}\|\varphi u\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\varphi u}|^2 d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-n} \int \left((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi.\end{aligned}$$

Portanto o nosso objetivo é estudar a norma L^2 da função definida por

$$U(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta$$

para isto, definimos

$$\begin{aligned} I_1(\xi) &= \{\eta : 2|\xi-\eta| \leq |\eta||\} \\ I_2(\xi) &= \{\eta : 2|\xi-\eta| \geq |\eta||\}. \end{aligned}$$

Podemos então escrever $U(\xi) = U_1(\xi) + U_2(\xi)$, onde

$$U_j(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_j(\xi)} \widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)| d\eta, j = 1, 2.$$

Iniciaremos estimando o termo correspondente a $U_1(\xi)$. Para tanto, observemos que se $\eta \in I_1(\xi)$ então

$$\frac{1}{2}|\eta| \leq^{(i)} |\xi| \leq^{(ii)} \frac{3}{2}|\eta|.$$

De fato, pela desigualdade triangular,

$$|\eta| = |\eta - \xi + \xi| \leq |\eta - \xi| + |\xi| \leq \frac{|\eta|}{2} + |\xi| \Rightarrow \frac{1}{2}|\eta| \leq |\xi|$$

e de modo análogo,

$$|\xi| = |\xi - \eta + \eta| \leq |\xi - \eta| + |\eta| \leq \frac{|\eta|}{2} + |\eta| \Rightarrow |\xi| \leq \frac{3}{2}|\eta|.$$

Também para todo $\in \mathbb{R}$, existe um $C > 0$ tal que para a dupla (ξ, η) com $\eta \in I_1(\xi)$,

$$(1+|\xi|^2)^s \leq C(1+|\eta|^2)^s. \tag{1.7}$$

Com efeito, para $s \geq 0$, pela desigualdade (ii):

$$1+|\xi|^2 \leq 1 + \frac{9}{4}|\eta|^2 \leq \frac{9}{4}(1+|\eta|^2) \Rightarrow (1+|\xi|^2)^s \leq \left(\frac{9}{4}\right)^s (1+|\eta|^2)^s.$$

Agora, utilizando (i) para $s < 0$:

$$1+|\xi|^2 \geq 1 + \frac{1}{4}|\eta|^2 \geq \frac{1}{4}(1+|\eta|^2) \Rightarrow (1+|\xi|^2)^s \leq \left(\frac{1}{4}\right)^s (1+|\eta|^2)^s.$$

Utilizando então a desigualdade (1.7) em $U_1(\xi)$, segue que

$$\begin{aligned} U_1(\xi) &= (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_1(\xi)} \widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|d\eta \\ &\leq \int (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|d\eta. \end{aligned}$$

Calculando a norma da função U_1 em L^2, temos

$$\begin{aligned} \|U_1\|_{L^2}^2 &= \int |U_1(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C^2 \int \left(\int (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|d\eta \right)^2 d\xi \\ &= C^2 \left\| \widehat{\varphi} * (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq C^2 \left\| \widehat{\varphi} \right\|_{L^1}^2 \left\| (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| \widehat{\varphi} \right\|_{L^1}^2 \left\| u \right\|_{H^s}^2 . \end{aligned}$$

Extraindo a raiz, teremos:

$$\|U_1\|_{L^2} \leq C \left\| \widehat{\varphi} \right\|_{L^1} \|u\|_{H^s} .$$

De maneira semelhante ao que fizemos para provar (1.7), se (η, ξ) é tal que $\eta \in I_2(\xi)$ e $s \geq 0$, então existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$(1+|\xi|^2)^s \leq C_1(1+|\xi-\eta|^2)^s \quad e \quad (1+|\eta|^2)^s \leq C_2(1+|\xi-\eta|^2)^s.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} U_2(\xi) &= (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_2(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|d\eta \\ &\leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} \int_{I_2(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|(1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} d\eta \\ &\leq C \int |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)|d\eta \\ &\leq C \int |(1+|\xi-\eta|^2)^{-\frac{n+1}{2}} (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)|d\eta. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos o fato de que , como $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ existe $C > 0$ tal que

$$\widehat{\varphi}(z) \leq C(1+|z|^2)^{\frac{(n+1)}{2} - |s|}, \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\|U_2\|_{L^2} &\leq C^2 \int \left(\int (1+|\eta-\eta|^2)^{-\frac{n+1}{2}} (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi \\
&= C^2 \left\| (1+|\cdot|^2)^{-\frac{n+1}{2}} * (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C^2 \left\| (1+|\cdot|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \right\|_{L^1}^2 \left\| (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2}^2 \\
&= C^2 \left\| (1+|\cdot|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \right\|_{L^1}^2 \|u\|_{H^s}^2 .
\end{aligned}
$$

Extraindo a raiz,

$$
\|U_2\|_{L^2} \leq C \left\| (1+|\cdot|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \right\|_{L^1} \|u\|_{H^s} .
$$

□

Teorema 1.3.2 *Se s é um número real positivo menor do que $\frac{n}{2}$, então o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é continuamente incluído em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p = \frac{2n}{n-2s}$ e temos*

$$
\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}, \quad onde \quad \|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.
$$

Demonstração: Multiplicando f por um número real positivo, é suficiente provar a desigualdade no caso em que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$.

Vamos calcular a norma de f em L^p utilizando a caracterização dada pelo Teorema 1.1.1, isto é

$$
\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\{x : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda \tag{1.8}
$$

com m a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$. Para $A > 0$ a ser escolhido, escrevemos

$$
\widehat{f} = \widehat{f}.1_{\mathbb{R}^n} = \widehat{f}.1_{B(0,A) \cup B^c(0,A)} = \widehat{f}.1_{B(0,A)} + \widehat{f}.1_{B^c(0,A)}
$$

onde 1_X representa a função característica do conjunto X.

Aplicando a transformada invesa de Fourier,

$$
f = \mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}.1_{B(0,A)}) + \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}.1_{B^c(0,A)}).
$$

Para facilitar a notação, sejam $f_{1,A} = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}.1_{B(0,A)})$ e $f_{2,A} = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}.1_{B^c(0,A)})$.

Como $\mathcal{F}(f_{1,A})$ está suportada no conjunto compacto $B(0,A)$ segue pela desigualdade de Hölder que $\mathcal{F}(f_{1,A})$ pertence a L^1, portanto pelo Corolário 1.2.1, segue:

$$
\begin{aligned}
\|f_{1,A}\|_{L^\infty} &\leq (2\pi)^{-n} \left\| \widehat{f_{1,A}} \right\|_{L^1} \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{B(0,A)} |\xi|^{-s}|\xi|^{s}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-n} \left(\int_{B(0,A)} |\xi|^{-2s} d\xi| \right)^{\frac{1}{2}} | \, \|f\|_{\dot{H}^s} \\
&= \left(C \int_0^A r^{-2s} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C}{(n-2s)^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{n}{2}-s}.
\end{aligned}
$$

Tomando $A = A_\lambda = \left(\frac{\lambda(n-2s)^{\frac{1}{2}}}{4C} \right)^{\frac{p}{n}}$, segue que

$$
\|f_{1,A}\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{(n-2s)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{\lambda(n-2s)^{\frac{1}{2}}}{4C} \right)^{\frac{p}{n}} \right]^{\frac{n}{2}-s} = \frac{\lambda}{4} \leq \frac{\lambda}{2}
$$

e pela definição de supremo essencial,

$$
m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f_{1,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) = 0.
$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular,

$$
\{x : |f(x)| > \lambda\} \subset \{x : |f_{1,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{x : |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\}
$$

e deste modo,

$$
m(\{x : |f(x)| > \lambda\}) \leq m(\{x : |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\}).
$$

Substituindo em (1.8),

$$
\|f\|_{L^p}^p \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\{x : |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) d\lambda. \tag{1.9}
$$

Ora pela desigualdade de Chebyschev,

$$
m(\{x : |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \leq \frac{4}{\lambda^2} \|f_{2,A}\|_{L^2}^2 .
$$

Pela identidade de Plancherel, segue

$$\|f_{2,A}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n}\left\|\widehat{f_{2,A}}\right\|_{L^2}^2$$
$$= (2\pi)^{-n}\int_{\{|\xi|\geq A_\lambda\}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Assim,

$$m(\{x : |f_{2,A}(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \leq \frac{4}{\lambda^2}(2\pi)^{-n}\int_{\{|\xi|\geq A_\lambda\}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Aplicando esta última expressão em (1.9), produzirá:

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^{-n}\int_0^\infty \int_{\{|\xi|\geq A_\lambda\}} \lambda^{p-3}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$
$$= 4p(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n} \lambda^{p-3} 1_{\{(\lambda,\xi):|\xi|\geq A_\lambda\}}(\lambda,\xi)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.10}$$

No entanto, pela escolha de A_λ,

$$|\xi| \geq A_\lambda \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{4C}{(n-2s)^{\frac{1}{2}}}|\xi|^{\frac{n}{p}} = C_\xi.$$

Substituindo em (1.10) e utilizando o teorema de Fubini, concluimos que

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{C_\xi} \lambda^{p-3}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= 4p(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{C_\xi^{p-2}}{p-2}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \frac{4p(2\pi)^{-n}}{p-2}\left(\frac{4C}{(n-2s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{n(p-2)}{p}}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \frac{4p(2\pi)^{-n}}{p-2}\left(\frac{4C}{(n-2s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{p-2},$$

pois $2s = \frac{n(p-2)}{p}$ e $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$. □

Definição 1.3.2 *Fixados $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq r \leq \infty$, definiremos o espaço homogêneo de Sobolev $\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n)$ por*

$$\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\dot{H}^s_r} = \|D^\rho u\|_{L^r} < \infty\}.$$

Para o caso $r = 2$ em algumas ocasiões representaremos $\dot{H}^s_2$ por $\dot{H}^s$.

Num primeiro momento, observemos que o espaço $\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n)$ é um espaço seminormado, uma vez que

$$\|u\|_{\dot{H}_r^s} = 0 \Leftrightarrow Supp(\widehat{u}) \subset \{0\} \Leftrightarrow u \;\; é \;\; um \;\; polinômio.$$

Uma saída para esse problema seria definir a seguinte relação de equivalência em $\dot{H}_r^s(\mathbb{R}^n)$:

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \;\; é \;\; um \;\; polinômio. \tag{1.11}$$

e identificar o espaço $\dot{H}_r^s(\mathbb{R}^n)$ com o espaço quociente que acabamos de obter, onde a norma definida no espaço quociente seria a seminorma $\|\cdot\|_{\dot{H}_r^s}$ de qualquer representante da classe de equivalência. Na próxima seção voltaremos a discutir este problema e encontraremos uma solução mais conveniente para o que pretendemos fazer aqui.

Vale apena mencionar que por um argumento semelhante ao que demos no começo deste capítulo, são equivalentes as normas para $\dot{H}^s$ definidas no Teorema 1.3.2 e na definição acima.

Proposição 1.3.3 *Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ e $1 < r_1 \leq r_2 < \infty$. Se $s_1 - \frac{n}{r_1} = s_2 - \frac{n}{r_2}$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_{\dot{H}_{r_2}^{s_2}} \leq C \|f\|_{\dot{H}_{r_1}^{s_1}}.$$

Demonstração: Ver [4], pág. 153.

1.4 Decomposição de Littlewood-Paley e Espaços de Besov

Com a intenção de definirmos Espaço Homogêneo de Besov e também devido as estimativas que faremos no último capítulo, definiremos nesta seção a decomposição homogênea de Littlewood-Paley.

De acordo com a Proposição 1.2.1, existe uma função radial $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ suportada em $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq 2\}$ tal que ϕ assume valores no intervalo $[0, 1]$ e ϕ assume 1 na bola unitária $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$. Seja ψ a função definida por

$$\psi(\xi) = \phi(\xi) - \phi(2\xi).$$

Para facilitar a notação, seja $\psi_j(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)$. Assim, teremos:

$$\text{supp}\psi_j \subset \{\xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$$

e para $\xi \neq 0$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\xi) = 1. \tag{1.12}$$

De fato, se $\xi \neq 0$ então existirá $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{j_0 - 1} \leq |\xi| \leq 2^{j_0 + 1}$ e assim

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\xi) = \psi_{j_0-1}(\xi) + \psi_{j_0}(\xi) + \psi_{j_0+1}(\xi) = 1.$$

Sendo $M \in 2^{\mathbb{Z}}$, definimos via transformada inversa de Fourier os seguintes operadores:

$$\widehat{P_{\leq M}u}(\xi) = \phi(\frac{\xi}{M})\widehat{u}(\xi) \tag{1.13}$$

$$\widehat{P_M u}(\xi) = \psi(\frac{\xi}{M})\widehat{u}(\xi) \tag{1.14}$$

$$\widehat{P_{>M}u}(\xi) = \widehat{u}(\xi) - \phi(\frac{\xi}{M})\widehat{u}(\xi). \tag{1.15}$$

Observação 1.4.1 *Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\langle P_M u, \varphi\rangle = \langle u, P_M\varphi\rangle . \tag{1.16}$$

Por definição,

$$\begin{aligned}
\langle P_M u, \varphi\rangle &= \left\langle \mathcal{F}(P_M u), \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right\rangle \\
&= \left\langle \psi(\frac{\cdot}{M})\widehat{u}, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right\rangle \\
&= \left\langle u, \mathcal{F}(\psi(\frac{\cdot}{M})\mathcal{F}^{-1}(\varphi))\right\rangle .
\end{aligned}$$

Como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = (2\pi)^{-n}\widehat{\varphi}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lembrando que ψ é uma função radial, teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\psi(\frac{\cdot}{M})\mathcal{F}^{-1}(\varphi))(\xi) &= \int e^{-ix.\xi}\psi(\frac{x}{M})\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix.\xi}\psi(\frac{x}{M})\widehat{\varphi}(-x)dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\psi(-\frac{x}{M})\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\psi(\frac{x}{M})\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\psi(\frac{\cdot}{M})\widehat{\varphi})(\xi) \\
&= P_M\varphi(\xi).
\end{aligned}$$

A decomposição
$$u = \sum_{M\in 2^{\mathbb{Z}}} P_M u \tag{1.17}$$
é conhecida como decomposição homogênea de Littlewood-Paley. Porém não é difícil observar que a decomposição (1.17) nem sempre é verdadeira em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, como contra exemplo poderiamos tomar a distribuição temperada definida pela função $u(x) = 1$. De fato, pela Observação 1.4.1,

$$\begin{aligned}
\langle P_M u, \varphi\rangle = \langle u, P_M\varphi\rangle &= \langle 1, P_M\varphi\rangle \\
&= \langle 1, \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(P_M\varphi))\rangle \\
&= \langle \delta_0, \mathcal{F}(P_M\varphi)\rangle = \left\langle \delta_0, \psi(\tfrac{\cdot}{M})\widehat{\varphi}\right\rangle = \psi(\tfrac{0}{M})\widehat{\varphi}(0) = 0
\end{aligned}$$

e portanto $P_M u = 0, \ \ \forall M \in 2^{\mathbb{Z}}$, assim a decomposição (1.17) de $u = 1$ é zero.

Um modo de driblarmos este problema seria considerarmos o espaço $\mathcal{S}'_h$ das distribuições temperadas u tal que

$$\lim_{j\to-\infty} \dot{S}_j u = 0 \ \ em \ \ \mathcal{S}'$$

onde $\dot{S}_j u = \mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-j}\cdot)\widehat{u})$.

Desta forma pode-se constatar na referência [9] que a decomposição (1.17) é verdadeira no espaço $\mathcal{S}'_h$.

Observação 1.4.2

1. *Um polinômio u não pertence a esse espaço a menos que $u = 0$. Na verdade, se u é um polinômio, então $\dot{S}_j u = u$, para todo $j \in \mathbb{Z}$.*

   De fato, se u é um polinômio, então $\widehat{u} = \sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$, portanto se fixarmos $\varphi \in \mathcal{S}$, teremos:
   $$\left\langle \dot{S}_j u, \varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\dot{S}_j u, \mathcal{F}^{-1}\varphi\right\rangle.$$
   Para facilitar a notação, seja $\nu = \mathcal{F}^{-1}\varphi$, portanto

   $$\begin{aligned}
   \left\langle \dot{S}_j u, \varphi\right\rangle = \langle \phi(2^{-j}\cdot)\widehat{u}, \nu\rangle &= \langle \widehat{u}, \phi(2^{-j}\cdot)\nu\rangle \\
   &= \left\langle \textstyle\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha \partial^\alpha\delta_0, \phi(2^{-j}\cdot)\nu\right\rangle \\
   &= \textstyle\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha(\phi(2^{-j}\cdot)\nu)\rangle \\
   &= \textstyle\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} C_\beta \partial^\beta\phi(0)\partial^{\alpha-\beta}\nu(0)
   \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\nu(0)$$

$$= \left\langle \sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha\partial^\alpha\delta_0, \nu\right\rangle$$

$$= \langle \widehat{u}, \nu\rangle$$

$$= \langle u, \varphi\rangle.$$

2. *Se uma distribuição temperada u é tal que sua transformada de Fourier $\widehat{u}$ é localmente integrável perto de 0, então u pertence a $\mathcal{S}'_h$.*

   De fato, dado $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $\nu = \mathcal{F}^{-1}\varphi$, temos:

$$\lim_{j\to-\infty} \left\langle \dot{S}_j u, \varphi\right\rangle = \lim_{j\to-\infty} \int_{B(0,2^{j+1})} \widehat{u}(\xi)\phi(2^{-j}\xi)\nu(\xi)d\xi = 0.$$

Pelo fato 1 da Observação 1.4.2, podemos redefinir o espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n)$ como

$$\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\dot{H}^s_r} = \|D^\rho u\|_{L^r} < \infty\}$$

nessa situação, teremos $\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n)$ um espaço vetorial normado.

Agora de posse da decomposição homogênea de Littlewood-Paley, podemos definir os Espaços de Besov homogêneo.

Definição 1.4.1 *Fixados $\rho \in \mathbb{R}$ e $1 \leq r, s \leq \infty$, definiremos o espaço de Besov homogêneo $\dot{B}^\rho_{r,s}(\mathbb{R}^n)$ por*

$$\dot{B}^\rho_{r,s}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\dot{B}^\rho_{r,s}} = \left\|2^{\rho j}P_{2^j}u\right\|_{l^s_j L^r_x} < \infty\}$$

onde, $\|2^{\rho j}P_{2^j}u\|_{l^s_j L^r_x} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|2^{\rho j}P_{2^j}u\|^s_{L^r}\right)^{\frac{1}{s}}$.

Proposição 1.4.1 *Sejam $1 \leq r_2 \leq r_1 \leq \infty, 1 \leq s \leq \infty, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$. Se $\rho_1 - \frac{n}{r_1} = \rho_2 - \frac{n}{r_2}$ então $\dot{B}^{\rho_2}_{r_2,s} \subset \dot{B}^{\rho_1}_{r_1,s}$ e*

$$\|u\|_{\dot{B}^{\rho_1}_{r_1,s}} \leq C\,\|u\|_{\dot{B}^{\rho_2}_{r_2,s}}.$$

Demonstração: Como $P_{2^j}u = \mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-j}\cdot)\widehat{u})$, segue

$$P_{2^j}u = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j\widehat{u}) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j) * u.$$

Para facilitar a notação seja $\varphi_j = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j)$. Assim, $P_{2^j}u = \varphi_j * u$ e portanto,

$$\|u\|_{\dot{B}^\rho_{r,s}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\|2^{\rho j}\varphi_j * u\right\|^s_{L^r}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{1.18}$$

Retomando a partição da unidade que fizemos para obter (1.12), se definirmos $\widetilde{\varphi_j} = \varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1}$, teremos $\widehat{\varphi_j} = \widehat{\widetilde{\varphi_j}}\widehat{\varphi_j}$. Portanto,

$$\varphi_j * u = \widetilde{\varphi_j} * \varphi_j * u$$

segue pela desigualdade de Young que

$$\|\varphi_j * u\|_{L^{r_1}} \leq \|\widetilde{\varphi_j}\|_{L^p} \|\varphi_j * u\|_{L^{r_2}}$$

com $\frac{n}{p'} = \frac{n}{r_2} - \frac{n}{r_1} = \rho_2 - \rho_1$, onde p' representa o expoente conjugado de p. Fazendo uma mudança de variável dentro da integral, teremos:

$$\|\varphi_j * u\|_{L^{r_1}} \leq 2^{\frac{jn}{p'}} \|\widetilde{\varphi_0}\|_{L^p} \|\varphi_j * u\|_{L^{r_2}}$$

$$= 2^{j(\rho_2-\rho_1)} \|\widetilde{\varphi_0}\|_{L^p} \|\varphi_j * u\|_{L^{r_2}} .$$

Tomando então $C = \|\widetilde{\varphi_0}\|_{L^p}$ obtemos o resultado. $\square$

Proposição 1.4.2 *Existem $C_1, C_2 > 0$ tal que*

$$C_1 \|D^\mu u\|_{\dot{B}^{\rho-\mu}_{r,s}} \leq \|u\|_{\dot{B}^{\rho}_{r,s}} \leq C_2 \|D^\mu u\|_{\dot{B}^{\rho-\mu}_{r,s}} . \tag{1.19}$$

Demonstração: Para esta demonstração utilizaremos a caracterização (1.18) da norma de Besov.

Iniciaremos demonstrando a desigualdade:

$$\|D^\mu(\varphi_j * u)\|_{L^r} \leq C 2^{j\mu} \|\varphi_j * u\|_{L^r} . \tag{1.20}$$

De fato, quando introduzimos a caracterização (1.18) para a norma de Besov na demonstração da Proposição 1.4.1, provamos que $\varphi_j * u = \widetilde{\varphi_j} * \varphi_j * u$, onde

$$\widetilde{\varphi_j} = \varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1}$$

e portanto,

$$D^\mu(\varphi_j * u) = D^\mu(\widetilde{\varphi_j} * \varphi_j * u)$$

$$= \sum_{l=-1}^{1} D^\mu(\varphi_{j+l} * \varphi_j * u).$$

Tomando a norma de Lebesgue e aplicando a desigualdade triangular, obtemos:

$$\|D^\mu(\varphi_j * u)\|_{L^r} \leq \sum_{l=-1}^{1} \|D^\mu(\varphi_{j+l} * \varphi_j * u)\|_{L^r} .$$

Observando que

$$\|D^\mu(\varphi_{j+l}*\varphi_j*u)\|_{L^r} = \|D^\mu\varphi_{j+l}*\varphi_j*u\|_{L^r}$$

$$\leq \sup_{\|g\|_{L^r}=1} \|D^\mu\varphi_{j+l}*g\|_{L^r}\|\varphi_j*u\|_{L^r}$$

para que possamos obter (1.20) será suficiente provarmos

$$\|D^\mu\varphi_{j+l}*g\|_{L^r} \leq C2^{j\mu}$$

para todo $g \in L^r$ tal que $\|g\|_{L^r} = 1$.

Fixemos então $g \in L^r$ tal que $\|g\|_{L^r} = 1$, pela desigualdade de Young, teremos:

$$\|D^\mu\varphi_{j+l}*g\|_{L^r} \leq \|D^\mu\varphi_{j+l}\|_{L^1}\|g\|_{L^r} = \|D^\mu\varphi_{j+l}\|_{L^1}. \tag{1.21}$$

Por outro lado,

$$D^\mu\varphi_{j+l}(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^\mu\widehat{\varphi}_{j+l})(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^\mu\widehat{\varphi}_0(2^{-(j+l)}\xi))(x)$$

$$= (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}|\xi|^\mu\widehat{\varphi}_0(2^{-(j+l)}\xi)d\xi.$$

Após a mudança de variável $\xi = 2^{j+l}w$, teremos:

$$D^\mu\varphi_{j+l}(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.2^{j+l}w}2^{\mu(j+l)}|w|^\mu\widehat{\varphi}_0(w)2^{n(j+l)}dw$$

$$= 2^{\mu(j+l)}2^{n(j+l)}(2\pi)^{-n}\int e^{ix.2^{j+l}w}|w|^\mu\widehat{\varphi}_0(w)dw$$

$$= 2^{\mu(j+l)}2^{n(j+l)}\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^\mu\widehat{\varphi}_0)(2^{j+l}x)$$

$$= 2^{\mu(j+l)}2^{n(j+l)}D^\mu\varphi_0(2^{j+l}x).$$

Portanto,

$$\|D^\mu\varphi_{j+l}\|_{L^1} = 2^{\mu(j+l)}2^{n(j+l)}\left\|D^\mu\varphi_0(2^{j+l}\cdot)\right\|_{L^1}. \tag{1.22}$$

Estimemos agora $\left\|D^\mu\varphi_0(2^{j+l}\cdot)\right\|_{L^1}$.

$$\left\|D^\mu\varphi_0(2^{j+l}\cdot)\right\|_{L^1} = \int\left|D^\mu\varphi_0(2^{j+l}x)\right|dx$$

$$= \int|D^\mu\varphi_0(y)|\,2^{-n(j+l)}dy$$

$$= 2^{-n(j+l)}\|D^\mu\varphi_0\|_{L^1}.$$

Por (1.22), obtemos:

$$\|D^{\mu}\varphi_{j+l}\|_{L^1} = 2^{\mu j}2^{\mu l}\|D^{\mu}\varphi_0\|_{L^1}.$$

Sendo $C' = \max\{2^{\mu l} : l \in \{-1,0,1\}\}$, se tomarmos $C = C'\|D^{\mu}\varphi_0\|_{L^1}$, então teremos:

$$\|D^{\mu}\varphi_{j+l}\|_{L^1} \leq C2^{\mu j}$$

desta forma obtemos a desigualdade (1.20).

Agora de posse da desigualdade (1.20), observe:

$$\begin{aligned}
\|D^{\mu}u\|_{\dot{B}^{\rho-\mu}_{r,s}} &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|2^{(\rho-\mu)j}\varphi_j * D^{\mu}u\right\|^s_{L^r}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|2^{(\rho-\mu)j}D^{\mu}(\varphi_j * u)\right\|^s_{L^r}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|2^{\rho j}\varphi_j * u\right\|^s_{L^r}\right)^{\frac{1}{s}} = C\|u\|_{\dot{B}^{\rho}_{r,s}}.
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \frac{1}{C}$ obtemos uma parte da desigualdade (1.19), por outro lado repetindo alguns dos últimos argumentos, segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^{\rho}_{r,s}} &= \left\|D^{-\mu}D^{\mu}u\right\|_{\dot{B}^{\rho}_{r,s}} \\
&\leq C_2\|D^{\mu}u\|_{\dot{B}^{\rho-\mu}_{r,s}}
\end{aligned}$$

para algum $C_2 > 0$ e assim obtemos (1.19). $\square$

Aqui, vale a pena uma observação a respeito da Proposição 1.4.2, seu resultado implica que o operador D^{μ} opera como um homeomorfismo linear entre os espaços $\dot{B}^{\rho}_{r,s}$ e $\dot{B}^{\rho-\mu}_{r,s}$. Se deixassemos de lado o fato de que um isomorfismo entre espaços vetoriais normados deve preservar também a norma desses espaços, poderiamos dizer que o operador D^{μ} é um isomorfismo entre os espaços $\dot{B}^{\rho}_{r,s}$ e $\dot{B}^{\rho-\mu}_{r,s}$.

Proposição 1.4.3 *As seguintes inclusões se verificam*

$$\dot{B}^{s}_{r,2}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{H}^s_r, \quad para \quad 2 \leq r < \infty \quad e \quad s \in \mathbb{R} \tag{1.23}$$

$$\dot{B}^{s}_{r,2}(\mathbb{R}^n) \supset \dot{H}^s_r, \quad para \quad 1 < r \leq 2 \quad e \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1.24}$$

Demonstração: Ver [4], pág. 152.

Proposição 1.4.4 *Dada $u \in \mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^n)$, existirão constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tal que vale a seguinte estimativa de Littlewood paley*

$$C_1 \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |P_{2^j} u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^r} \leq C_2 \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |P_{2^j} u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r}.$$

Demonstração: Ver [28], pg. 242.

Capítulo 2

Estimativas de Strichartz

2.1 Notação

Nesta seção definiremos toda uma notação que será fortemente utilizada apartir deste capítulo.

Sejam x e y números reais positivos.

1. A simbologia $x \lesssim y$ denotará que existe uma constante universal $K > 0$ tal que $x \leq Ky$. Diremos que K_0 é a constante determinada pela relação $x \lesssim y$, caso K_0 seja a menor constante K tal que $x \leq Ky$ seja verdade.

2. Denotaremos por $x \sim y$ caso se tenha $x \lesssim y$ e $y \lesssim x$.

3. A notação $x << y$ implicará na existência de uma constante $K < \frac{1}{100}$ tal que $x \leq Ky$.

4. Dado $0 < \epsilon << 1$, denotaremos por $x+$, $x++$, $x-$ e $x--$ respectivamente $x-\epsilon$, $x+2\epsilon$, $x-\epsilon$ e $x-2\epsilon$. Abusando da notação estabelecida em alguns momentos poderemos escrever $+$ e $-$ para representar $0+$ e $0-$.

5. Sendo J um intervalo, representaremos por $|J|$ o seu comprimento.

2.2 Estimativas

Devido a sua importância em muitos trabalho que envolveram o problema da onda, dedicaremos este capítulo as Estimativas de Strichatz.

As Estimativas de Strichartz compreendem uma classe de desigualdades que se obtem apartir de um problema de valor inicial, esta classe de desigualdades tem se mostrado muito útil em problemas de boa coloação para as equações da Onda e de Schöldinger. Neste trabalho porém não a utilizaremos diretamente para obter a boa colocação para o problema que estamos abordando, mas será a partir dela que se desenvolverá muitos dos resultados que serão utilizados para a prova do resultado que desejamos.

No artigo [27] publicado em 1977 Robert Strichartz provou que se u é solução para o problema não homogêneo da onda

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t,x) - \Delta u(t,x) & = & F(t,x) \quad , \qquad \forall t \geq 0 \\ u(0,x) & = & f(x) \\ \partial_t u(0,x) & = & g(x) \end{cases}$$

então

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R},L^q(\mathbb{R}^n))} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\rho} + \|g\|_{\dot{H}^{\rho-1}} + \|F\|_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{q'}(\mathbb{R}^n))}$$

para $q = \frac{2(n+1)}{n+1-2\rho}$ e $1 \leq \rho < \frac{n-1}{2}$.

Seguindo o desenvolvimento de R. Strichartz, B. Marshall em [19] estudando a equação de Klein-Gordon publicou um artigo em 1981 sugerindo a não igualdade dos expoentes nas normas de Lebesgue em t e em x. H. Pecher em 1984 publicou o artigo [21] em que obteve quase todas as possibilidades hoje conhecidas para a estimativa homogênea de Strichartz. Estimativas de Strichartz para a equação da onda foram depois generalizadas por Ginebre e Velo em [12], trocando-se as normas de Lebesgue por normas mais gerais, será este o caso que abordaremos aqui. M. Keel e T. Tao numa contribuição maior trabalharam em [15] fechando assim o problema da estimativa homogênea de Strichartz, ao longo dos anos vários outros trabalho foram feitos no sentido de expandir ainda mais o alcance das Estimativas de Strichatz, inclusive há muitos artigos recentes a respeito deste tipo de desigualdade.

Neste capítulo trabalharemos no $\mathbb{R}^3$ e partiremos de um resultado do artigo de Ginebre e Velo [12] que enunciaremos aqui como um Lema, em seguida provaremos a seguinte estimativa de Strichartz para o problema da onda.

Teorema 2.2.1 *Sejam $\rho_1, \rho_2, \mu \in \mathbb{R}$, $2 < q_1, q_2 \leq \infty$ e $2 \leq r_1, r_2 < \infty$. Suponhamos também que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\frac{1}{q_i} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{r_i}, \quad para \quad i = 1,2$$

$$\rho_1 + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{q_1} = \mu = 1 - \left[\rho_2 + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_2}\right) - \frac{1}{q_2}\right].$$

Supondo $f \in \dot{H}^\mu(\mathbb{R}^3), g \in \dot{H}^{\mu-1}(\mathbb{R}^3)$ e $F \in L^{q_2'}(\mathbb{R}, \dot{B}^{-\rho_2}_{r_2',2})$. Se u é solução (fraca) do problema

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u & = & F \\ u(0,x) & = & f \\ \partial_t u(0,x) & = & g \end{cases} \tag{2.1}$$

então

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\rho_1}_{r_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\mu} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^{-\rho_2}_{r_2',2})}.$$

Antes de enunciarmos o Lema que nos possibilitará demonstrarmos o Teorema, façamos uma observação.

Observação 2.2.1 *Tendo em vista o problema* (2.1), *considere os seguintes problemas*

$$\begin{cases} \partial_{tt}v - \Delta v &= 0 \\ v(0,x) &= f \\ \partial_t v(0,x) &= g \end{cases} \tag{2.2}$$

e

$$\begin{cases} \partial_{tt}w - \Delta w &= F \\ w(0,x) &= 0 \\ \partial_t w(0,x) &= 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Não é difícil ver que se tivermos uma solução v para (2.2) *e w para* (2.3), *então formalmente $u = v + w$ será uma solução para* (2.1). *Por outro lado, se aplicarmos a tranformada de Fourier com relação a variável espacial no problema* (2.2), *obteremos um problema de valor inicial envolvendo uma EDO,*

$$\begin{cases} \partial_{tt}\widehat{v} + |\xi|^2\widehat{v} &= 0 \\ \widehat{v}(0,\xi) &= \widehat{f} \\ \partial_t\widehat{v}(0,\xi) &= \widehat{g} \end{cases} \tag{2.4}$$

resolvendo este PVI e aplicando transformada de Fourier inversa na solução, obtemos a solução para o problema homogêneo (2.2).

$$v(t) = \cos(Dt)f + D^{-1}\sin(Dt)g. \tag{2.5}$$

Na expressão de $v(t)$ o D denota o operador $\sqrt{-\Delta}$ que definimos na página 10, ou seja, os operadores $\cos(Dt)$ e $D^{-1}\sin(Dt)$ são definidos via transformada inversa de Fourier,

$$\cos(Dt)f = \mathcal{F}^{-1}(cos(|\cdot|t)\widehat{f})$$

$$D^{-1}\sin(Dt)f = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{-1}\sin(|\cdot|t)\widehat{f})$$

.

A solução w para o problema (2.3) *pode ser dada via Príncipio de Duhamel, veja referência [1].*

$$w(t) = \int_{s<t} D^{-1}\sin(D(t-s))F(s)ds.$$

Aqui também temos o operador $D^{-1}\sin(D(t-s))$ definido via transformada inversa de Fourier,

$$\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{-1}\sin(|\cdot|(t-s))\widehat{F(s)}).$$

Definindo as famílias de operadores $U(t) = e^{itD}$ e $U(t)^* = e^{-itD}$, $t \in \mathbb{R}$. A solução u pode ser escrita como

$$u(t) = \tfrac{1}{2}(U(t) + U(-t))f + D^{-1}\tfrac{1}{2i}(U(t) - U(-t))g$$

$$+ \textstyle\int_{s<t} D^{-1}\tfrac{1}{2i}(U(t)U(s)^* - (U(-t)U(-s)^*)F(s)ds.$$

Vamos agora enunciar o Lema que nos possibilitará demonstrar o Teorema 2.2.1 .

Lema 2.2.1 *Suponhamos que as triplas ordenadas* (q_1, r_1, γ_1) *e* (q_2, r_2, γ_2) *satisfaçam*

$$2 < q_i \leq \infty, \quad para \quad i = 1, 2$$

$$2 \leq r_i < \infty, \quad para \quad i = 1, 2$$

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r_i}, \quad para \quad i = 1, 2$$

$$\gamma_i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_i}\right), \quad para \quad i = 1, 2.$$

Então

$$\|U(t)f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}, \dot{B}^{-\gamma_1}_{r_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{B}^0_{2,2}} \qquad , \forall f \in \dot{B}^0_{2,2}$$

$$\left\| \int_{t<s} (U(t)U(s)^*)F(s)ds \right\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}, \dot{B}^{-\gamma_1}_{r_1,2})} \lesssim \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R}, \dot{B}^{\gamma_2}_{r_2',2})} \quad , \forall F \in L^{q_2'}(\mathbb{R}, \dot{B}^{\gamma_2}_{r_2',2}).$$

Demonstração: Veja [12].

Demonstremos agora o Teorema 2.2.1.

Fixados $\rho_1, \rho_2, \mu \in \mathbb{R}$, $2 < q_1, q_2 \leq \infty$ e $2 \leq r_1, r_2 < \infty$ de acordo com as hipóteses do Teorema 2.2.1. Seja $s_1 \leq r_1$ de modo que $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{s_1}$, com esta escolha de s_1 obtemos $-\gamma_1 + \mu - \frac{3}{s_1} = \rho_1 - \frac{3}{r_1}$, onde $\gamma_1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s_1}\right)$.

Seja também $s_2 \leq r_2$ de modo que $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{s_2}$, com esta escolha de s_2 obtemos $-\gamma_2 - \mu + 1 - \frac{3}{s_2} = \rho_2 - \frac{3}{r_2}$, onde $\gamma_2 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s_2}\right)$.

Estamos agora nas hipóteses do Lema 2.2.1 e portanto, teremos:

$$\|U(t)f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}, \dot{B}^{-\gamma_1}_{s_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{B}^0_{2,2}} \qquad , \forall f \in \dot{B}^0_{2,2}$$

$$\left\| \int_{t<s} (U(t)U(s)^*)F(s)ds \right\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}, \dot{B}^{-\gamma_1}_{s_1,2})} \lesssim \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R}, \dot{B}^{\gamma_2}_{s_2',2})} \quad , \forall F \in L^{q_2'}(\mathbb{R}, \dot{B}^{\gamma_2}_{s_2',2}).$$

Pela Proposição 1.4.2, se trocarmos f e F respectivamente por $D^\mu f$ e $D^\mu F$, então

$$\|U(t)f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}, \dot{B}^{-\gamma_1+\mu}_{s_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{B}^\mu_{2,2}} \qquad , \forall f \in \dot{B}^\mu_{2,2}. \tag{2.6}$$

$$\left\| \int_{t<s} (U(t)U(s)^*)F(s)ds \right\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}, \dot{B}^{-\gamma_1+\mu}_{s_1,2})} \lesssim \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R}, \dot{B}^{\gamma_2+\mu}_{s_2',2})} \quad , \forall F \in L^{q_2'}(\mathbb{R}, \dot{B}^{\gamma_2+\mu}_{s_2',2}). \tag{2.7}$$

Chamando de $\tau_1 = -\gamma_1 + \mu$, $\tau_2 = -(\gamma_2 + \mu - 1)$ e lembrando o modo como escrevemos u utilizando os operadores $U(t)$ e $U(s)^*$, segue:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\tau_1}_{s_1,2})} \lesssim \|U(t)f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\tau_1}_{s_1,2})} + \|D^{-1}U(t)g\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\tau_1}_{s_1,2})} + \\ \left\|\int_{t<s} D^{-1}(U(t)U(s)^*)F(s)ds\right\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\tau_1}_{s_1,2})}$$

Utilizando os resultados (2.6) e (2.7) na expressão acima, produziremos:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\tau_1}_{s_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{B}^{\mu}_{2,2}} + \left\|D^{-1}g\right\|_{\dot{B}^{\mu}_{2,2}} + \left\|D^{-1}F\right\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^{\gamma_2+\mu}_{s_2',2})}$$

$$\lesssim \|f\|_{\dot{B}^{\mu}_{2,2}} + \|g\|_{\dot{B}^{\mu-1}_{2,2}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^{\gamma_2+\mu-1}_{s_2',2})}.$$

Finalizando, como $\tau_2 = -(\gamma_2 + \mu - 1)$, segue:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\tau_1}_{s_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\mu}} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^{-\tau_2}_{s_2',2})}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, $r_1 \geq s_1$ e $\tau_1 - \frac{3}{s_1} = \rho_1 - \frac{3}{r_1}$ e pela Proposição 1.4.1, temos:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\rho_1}_{r_1,2})} \lesssim \|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\tau_1}_{s_1,2})}. \tag{2.9}$$

Como $r_2 \geq s_2$ e $\tau_2 - \frac{3}{s_2} = \rho_2 - \frac{3}{r_2}$, segue que $s_2' \geq r_2'$ e $-\tau_2 - \frac{3}{s_2'} = -\rho_2 - \frac{3}{r_2'}$ e pela Proposição 1.4.1, temos:

$$\|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^{-\tau_2}_{s_2',2})} \lesssim \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^{-\rho_2}_{r_2',2})}. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), obtemos o resultado desejado:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{\rho_1}_{r_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\mu}} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^{-\rho_2}_{r_2',2})}.$$

□

Corolário 2.2.1 *Sejam $\mu \in \mathbb{R}$, e $2 < q_1, q_2 \leq \infty$ e $2 \leq r_1, r_2 < \infty$. Suponhamos também que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\frac{1}{q_i} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_i}\right), \quad para \quad i = 1, 2$$

$$3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{q_1} = \mu = 1 - \left[3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_2}\right) - \frac{1}{q_2}\right].$$

Supondo $f \in \dot{H}^{\mu}(\mathbb{R}^3), g \in \dot{H}^{\mu}(\mathbb{R}^3)$ e $F \in L^{q_2'}(\mathbb{R}, L^{r_2'})$. Se u é solução (fraca) do problema (2.1) *então*

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},L^{r_1})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\mu}} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},L^{r_2'})}.$$

Demonstração: Tomando $\rho_1 = \rho_2 = 0$ no Teorema 2.2.1, teremos de imediato:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^0_{r_1,2})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\mu} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^0_{r_2',2})}. \tag{2.11}$$

Como $2 \leq r_1, r_2 < \infty$ e $1 < r_1', r_2' \leq 2$, obtemos pela Proposição 1.4.3:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{H}^0_{r_1})} \lesssim \|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^0_{r_1,2})} \tag{2.12}$$

$$\|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{B}^0_{r_2',2})} \lesssim \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{H}^0_{r_2'})}. \tag{2.13}$$

Agora utilizando (2.11), (2.12) e (2.13), obtemos:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{H}^0_{r_1})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\mu} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{H}^0_{r_2'})}. \tag{2.14}$$

Pela definição das normas L^{r_1} e $\dot{H}^0_{r_1}$, observemos que

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{H}^0_{r_1})} = \|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},L^{r_1})} \tag{2.15}$$

$$\|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},\dot{H}^0_{r_2'})} = \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},L^{r_2'})}. \tag{2.16}$$

Por fim, substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14), obtemos o resultado:

$$\|u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},L^{r_1})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\mu} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L^{q_2'}(\mathbb{R},L^{r_2'})}.$$

□

As definições que daremos a seguir serão fortemente usadas no próximo capítulo e juntamente com essas definições enunciaremos mais um importante caso da Estimativa de Strichartz.

Definição 2.2.1

- *Diremos que (q, r) é onda admíssivel se*

$$(q,r) \in W = \left\{ (q,r) : (q,r) \in (2,\infty] \times [2,\infty), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

- *Chamaremos de conjunto dual de W o seguinte conjunto*

$$\widetilde{W} = \left\{ (\widetilde{q},\widetilde{r}) : \quad \frac{1}{\widetilde{q}} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{\widetilde{r}} + \frac{1}{r} = 1, \quad (q,r) \in W \right\}.$$

- *Dado $m \in [0,1]$, diremos que (q,r) é m-onda admíssivel se $(q,r) \in W$ e vale*

$$\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2} - m.$$

Corolário 2.2.2 (Estimativa m-Strichartz com derivativo)

Seja $m \in [0,1]$ e $0 \leq \tau < \infty$, se u é solução fraca do problema (2.1) *então temos a estimativa m-Strichartz com derivativo*

$$\|u\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} + \left\|\partial_t D^{-1} u\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^m} + \|g\|_{\dot{H}^{m-1}} + \|F\|_{L_t^{\widetilde{q}}([0,\tau])L_x^{\widetilde{r}}}$$

para $(q,r) \in W$, $(\widetilde{q}, \widetilde{r}) \in \widetilde{W}$ e $(q, r, \widetilde{q}, \widetilde{r})$ satisfazendo

$$\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2} - m = \frac{1}{\widetilde{q}} + \frac{3}{\widetilde{r}} - 2.$$

Demonstração: Começaremos observando que poderiamos ter enunciado e demonstrado de forma análoga os resultados anteriores a respeito da Estimativa de Strichartz considerando $[0,\tau]$ como região de definição para t ao invés de $\mathbb{R}$.

A respeito das hipóteses sobre (q,r) e $(\widetilde{q}, \widetilde{r})$ vemos que podemos aplicar o Corolário 2.2.1 para $q_1 = q$, $q_2 = \widetilde{q}'$, $r_1 = r$, $r_2 = \widetilde{r}'$ e $\mu = m$, lembrando que $\widetilde{q}'$ e $\widetilde{r}'$ representam respectivamente os expoentes conjugados de $\widetilde{q}$ e $\widetilde{r}$, portanto pelo Corolário 2.2.1, temos:

$$\|u\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\mu} + \|g\|_{\dot{H}^{\mu-1}} + \|F\|_{L_t^{\widetilde{q}}([0,\tau])L_x^{\widetilde{r}}}. \tag{2.17}$$

Com isso obtemos uma parte da desigualdade que desejamos provar, nos resta agora obter um resultado semelhante para $\|\partial_t D^{-1} u\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r}$.

Pela Observação 2.2.1, vimos que podemos pensar na solução u como uma decomposição $u = u_l + u_{nl}$, onde $u_l = \cos(Dt)f + D^{-1}\sin(Dt)g$ é solução do problema homogêneo (2.2) e $u_{nl} = \int_0^t D^{-1}\sin(D(t-s))F(s)ds$ é solução do problema não homogêneo (2.3). Decompondo u ainda mais, podemos pensar na parte linear u_l como $u_l = u_l^1 + u_l^2$, onde $u_l^1(t) = \cos(Dt)f$ e $u_l^2(t) = D^{-1}\sin(Dt)g$.

Pela fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, podemos escrever

$$u_l^1 = \cos(Dt)f = \frac{e^{itD}f + e^{-itD}f}{2}$$

$$u_l^2 = D^{-1}\sin(Dt)g = D^{-1}\left(\frac{e^{itD}g - e^{-itD}g}{2i}\right)$$

e obter:

$$D^{-1}\partial_t u_l^1 = \frac{ie^{itD}f - ie^{-itD}f}{2}$$

$$D^{-1}\partial_t u_l^2 = \frac{D^{-1}e^{itD}g + D^{-1}e^{-itD}g}{2}.$$

Portanto,

$$\left\|D^{-1}\partial_t u_l^1\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \left\|e^{itD}f\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} + \left\|e^{-itD}f\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \tag{2.18}$$

$$\left\|D^{-1}\partial_t u_l^2\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \left\|e^{itD}D^{-1}g\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} + \left\|e^{-itD}D^{-1}g\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r}. \tag{2.19}$$

Queremos utilizar aqui o Lema 2.2.1, portanto assim como fizemos na demonstração do Teorema 2.2.1, seja $s \le r$ tal que $\frac{1}{q}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$ e tomemos $\gamma_1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)$, pelo Lema 2.2.1 e pela Proposição 1.4.2, obtemos:

$$\left\|e^{\pm itD}f\right\|_{L^q([0,\tau],\dot{B}_{s,2}^{-\gamma_1+m})} \lesssim \|f\|_{\dot{B}_{2,2}^m}. \tag{2.20}$$

Por hipótese sabemos que $\frac{1}{q}+\frac{3}{r}=\frac{3}{2}-m$ e portanto

$$\gamma_1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right) = \frac{3}{r}+\frac{3}{q}-\frac{3}{2}+m.$$

A última relação é de grande importância, pois ela implicará em

$$0-\frac{3}{r} = -\gamma_1 + m - \frac{3}{s}$$

e pela Proposição 1.4.1 segue que

$$\left\|e^{\pm itD}f\right\|_{L^q([0,\tau],\dot{B}_{r,2}^{0})} \lesssim \left\|e^{\pm itD}f\right\|_{L^q([0,\tau],\dot{B}_{s,2}^{-\gamma_1+m})}.$$

Recorrendo agora a Proposição 1.4.3 e observando a relação (2.20), obtemos:

$$\left\|e^{\pm itD}f\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^m}$$

e por (2.18) teremos:

$$\left\|D^{-1}\partial_t u_l^1\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^m}. \tag{2.21}$$

De modo similar,

$$\left\|D^{-1}\partial_t u_l^2\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \left\|D^{-1}g\right\|_{\dot{H}^m} \tag{2.22}$$

$$= \|g\|_{\dot{H}^{m-1}}.$$

Quanto a parte não linear $u_{nl}(t)$, observemos que

$$\partial_t u_{nl}(t) = \int_0^t \cos((t-s)D)F(s)ds.$$

Reescrevendo $\cos((t-s)D)F(s)$ pela fórmula de Euler e utilizando a propriedade triangular da norma $L_t^q([0,\tau])L_x^r$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\left\|D^{-1}\partial_t u_{nl}\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim & \left\|\int_0^t D^{-1}e^{i(t-s)D}F(s)ds\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \\
& + \left\|\int_0^t D^{-1}e^{-i(t-s)D}F(s)ds\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r}.
\end{aligned}
$$

De forma similar ao que fizemos no começo desta demonstração podemos utilizar o Lema 2.2.1 para concluir

$$
\left\|D^{-1}\partial_t u_{nl}\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|F\|_{L_t^{\tilde{q}}([0,\tau])L_x^{\tilde{r}}}. \tag{2.23}
$$

Finalizando, por (2.21), (2.22) e (2.23), temos:

$$
\left\|\partial_t D^{-1}u\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^m} + \|g\|_{\dot{H}^{m-1}} + \|F\|_{L_t^{\tilde{q}}([0,\tau])L_x^{\tilde{r}}}. \tag{2.24}
$$

Somando as desigualdades (2.17) e (2.24) obtemos o resultado

$$
\|u\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} + \left\|\partial_t D^{-1}u\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^m} + \|g\|_{\dot{H}^{m-1}} + \|F\|_{L_t^{\tilde{q}}([0,\tau])L_x^{\tilde{r}}}.
$$

□

Capítulo 3

A Equação da Onda Cúbica

3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a equação da onda cúbica no $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u &= -u^3 \\ u(0,x) &= u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) &= u_1(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

com dados iniciais $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ e $\frac{13}{18} < s < 1$.

Nosso foco estarão nas soluções fracas a valores reais reais u, $\partial_t u$ pertencentes a $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^3))$, $C([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$ respectivamente e que satisfazem a seguinte equação integral:

$$u(t) = \cos(tD)u_0 + D^{-1}\sin(tD)u_1 - \int_0^t D^{-1}\sin((t-t')D)u^3(t')dt'. \tag{3.2}$$

Podemos observar que para $u(t) \in H^s(\mathbb{R}^3)$, teremos aqui $-u^3(t)$ muito bem localizada em um espaço do tipo $L^p(\mathbb{R}^3)$ com $p \geq 1$, de fato pelo Teorema 1.3.2, temos:

$$\left\|u(t)^3\right\|_{L^p} = \left(\int |u^3|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |u|^{3p} dx\right)^{\frac{3}{3p}} \lesssim \left(\|u(t)\|_{H^s}\right)^3$$

com $3p = \frac{6}{3-2s}$. Portanto, como $s > \frac{13}{18} > \frac{1}{2}$ temos $p \geq 1$.

Devido a argumentos de aproximação e densidade, iremos supor neste capítulo que as funções em questão são Schwartz no espaço e de classe C^∞ com respeito ao tempo.

Um resultado importante para este tipo de problema e que certamente motiva as construções que faremos neste capítulo é a lei de conservação de energia que vale para a equação da onda.

Teorema 3.1.1 (Lei de conservação de Energia)
Seja u solução de (3.1), *definiremos*

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t u)^2(t,x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|(Du)(t,x)|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}u^4(t,x)dx \tag{3.3}$$

como sendo a energia associada a solução u.

Para $E(u(t))$ vale:

$$E(u(t)) = E(u(0)), \quad \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Começaremos calculando $\partial_t E(u(t))$.

$$\begin{aligned}
\partial_t E(u(t)) &= \partial_t\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t u)^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|(Du)|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}u^4dx\right)\\
&= \partial_t\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t u)^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}Du\overline{Du} + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}u^4dx\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\partial_t^2u\partial_t udx + \int_{\mathbb{R}^3}Re(D\partial_t u\overline{Du}) + \int_{\mathbb{R}^3}u^3\partial_t udx\\
&= Re\left(\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t^2u\partial_t u + D\partial_t u\overline{Du} + u^3\partial_t udx\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\partial_t E(u(t)) = Re\left(\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t^2u\partial_t u + D\partial_t u\overline{Du} + u^3\partial_t udx\right).$$

Pelo Teorema 1.2.1, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}D\partial_t u\overline{Du}dx &= (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{D\partial_t u}\overline{\widehat{Du}}d\xi\\
&= (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\partial_t\widehat{u}\overline{|\xi|\widehat{u}}d\xi\\
&= (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\widehat{u}\overline{|\xi|^2\widehat{u}}d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\partial_t u\overline{D^2u}d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^3}D\partial_t u\overline{Du}dx = \int_{\mathbb{R}^3}\partial_t u\overline{D^2u}d\xi.$$

Por outro lado,

$$D^2u = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^2\widehat{u}) = \mathcal{F}^{-1}(-\widehat{\Delta u}) = -\Delta u.$$

Assim, obtemos:

$$\partial_t E(u(t)) = Re\left(\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t u \left(\partial_t^2 u - \Delta u + u^3\right) dx\right) = 0$$

Portanto,

$$E(u(t)) = E(u(0)), \quad \forall t \in [0,T]. \quad \square$$

Esta lei de conservação é importante para a teoria do problema da onda, porém ela não nos servirá aqui. O motivo é simples, como estamos trabalhando com os dados de Cauchy (u_0, u_1) em $H^s \times H^{s-1}$ para $s < 1$, não temos garantia da finitude da energia $E(u(0))$ e por isso este tipo de relação não se mostra muito atraente. Por outro lado, para $s = 1$ podemos provar que $E(u(0)) < \infty$ e utilizando esta lei de conservação de energia e a teoria da boa colocação local podemos provar a boa colocação global para (3.1), como faremos no próximo Corolário.

Corolário 3.1.1 *O problema* (3.1) *é globalmente bem posto para* $s = 1$.

Demonstração: A idéia dessa demonstração consiste em utilizar a lei de conservação de energia para obter uma desigualdade do tipo (2) que garante a boa colocação global para este problema. Começaremos então provando que para $s = 1$, vale $E(u(0)) < \infty$. De fato, $s = 1$ implica em $(u_0, u_1) \in H^1 \times H^0$, logo

$$\|\partial_t u(0)\|_{L^2} = \|u_1\|_{H^0} < \infty$$

$$\|Du_0\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{H^1} < \infty$$

$$\|u_0\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{H^1} < \infty.$$

Pela Proposição 1.1.2 e Teorema 1.3.2, segue para $\lambda = \frac{3}{12}$ que

$$\|u_0\|_{L^4} \leq \|u_0\|_{L^2}^{\lambda} \|u_0\|_{L^6}^{1-\lambda}$$

$$\lesssim \|u_0\|_{L^2}^{\lambda} \|u_0\|_{H^1}^{1-\lambda} < \infty.$$

Assim,

$$E(u(0)) = \frac{1}{2}\|\partial_t u(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|Du_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u_0\|_{L^4}^4 < \infty.$$

Provaremos agora uma estimativa do tipo (2) para todo $T > 0$.

Pela definição de $E(u(T))$ e pela lei de conservação de energia, sabemos que

$$\|\partial_t u(T)\|_{H^0}^2 \lesssim E(u(T)) = E(u(0)).$$

A definição da norma $\|\cdot\|_{H^1}$ e a identidade de Plancherel, produzem:

$$\|u(T)\|_{H^1}^2 = \int (1 + |\xi|^2)|\widehat{u}(T)|^2 d\xi = \|\widehat{u}(T)\|_{L^2}^2 + \||\cdot|\widehat{u}(T)\|_{L^2}^2$$

$$= (2\pi)^3 \|u(T)\|_{L^2}^2 + (2\pi)^3 \|Du(T)\|_{L^2}^2 .$$

De um lado sabemos que $\|Du(T)\|_{L^2}^2 \lesssim E(u(0))$. Por outro, utilizando o teorema fundamental do cálculo, segue:

$$\begin{aligned}
\|u(T)\|_{L^2}^2 &\leq (\|u(T)-u(0)\|_{L^2} + \|u(0)\|_{L^2})^2 \\
&\lesssim \|u(T)-u(0)\|_{L^2}^2 + \|u(0)\|_{L^2}^2 \\
&= \left\| \int_0^T \partial_t u(t) dt \right\|_{L^2}^2 + \|u(0)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left(\int_0^T \|\partial_t u(t)\|_{L^2} dt \right)^2 + \|u_0\|_{H^1}^2 \\
&\lesssim \left[\int_0^T (E(u(0)))^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 + \|u_0\|_{H^1}^2 \\
&= T^2 E(u(0)) + \|u_0\|_{H^1}^2 .
\end{aligned}$$

Assim, obtemos a estimativa

$$\|u(T)\|_{H^1}^2 + \|\partial_t u(T)\|_{H^0}^2 \lesssim \|u_0\|_{H^1}^2 + (T^2+2)E(u(0)).$$

que nos fornece a boa colocação global para o caso $s = 1$. $\square$

Está conjecturado que (3.1) é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ para $s > \frac{1}{2}$. O estudo da boa colocação global para a equação da onda cúbica tem atraído a atenção de muitos pesquisadores. Kenig, Ponce e Vega em [16] foram os primeiros a provar que (3.1) é globalmente bem posto para $\frac{3}{4} < s < 1$, eles usaram o método de Fourier truncado descoberto por Bourgain em [5]. I. Gallagher e F. Planchon em [11] propuseram um método diferente para provar a boa colocação global para $\frac{3}{4} < s < 1$, H. Bahouri e Jean - Yves Chemin em [2] provaram a boa colocação global para $s = \frac{3}{4}$ usando um método de interpolação não linear e estimativas logarítmicas criadas por S. Klainerman e D. Tataru em [17]. Recentemente foi provado em [25] por T. Roy que o problema da equação da onda cúbica com dados radiais em $H^s \times H^{s-1}$ é globalmente bem posto para $\frac{7}{10} < s < 1$.

Por fim, o objetivo deste capítulo será o de compreender e demonstrar o seguinte teorema dado por T. Roy em [23]:

Teorema 3.1.2 *O problema de Cauchy para a equação da onda cúbica é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ para $1 > s > \frac{13}{18} \cong 0,722$. Mais ainda, se $s > \frac{13}{18}$ está perto de $\frac{13}{18}$ e T é suficientemente grande então*

$$\|(u(T), \partial_t u(T))\|_{H^s \times H^{s-1}}^2 \leq C(\|u_o\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}}) T^{\frac{28s-18}{18s-13}+}. \tag{3.4}$$

3.2 Resultados Preliminares

Enunciaremos neste capítulo quatro proposicões que nos permitirá demonstrar o Teorema 3.1.2. Antes porém algumas definições são necessárias.

Definição 3.2.1 *Denotaremos por I o operador $\widehat{If}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$ onde m é uma função regular radial e não crescente definida por*

$$m(\xi) = \begin{cases} 1, & se \quad |\xi| \leq N \\ \left(\frac{N}{|\xi|}\right)^{1-s}, & se \quad |\xi| \geq 2N \end{cases}$$

onde $N >> 1$ representa uma constante que escolheremos futuramente.

A importância desta definição está no fato de desejarmos utilizar a fórmula da energia (3.3) para provarmos o teorema 3.1.2, porém para $s < 1$ como mencionamos anteriormente a energia (3.3) pode não assumir valores finitos dado que a solução $(u(t), \partial_t u(t))$ estará em $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$. Por esse motivo trabalharemos com a energia modificada da onda $E(Iu(t))$, definida por

$$E(Iu(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |(\partial_t Iu)(t,x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |(DIu)(t,x)|^2 \, dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |Iu(t,x)|^4 dx. \quad (3.5)$$

Pela identidade de Plancherel segue (i) e (ii) abaixo e pelo Teorema 1.3.2 segue (iii), portanto se $(u(t), \partial_t u(t)) \in H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ então $E(Iu(t)) < \infty$.

(i) $$\int_{\mathbb{R}^3} (|\partial_t Iu(t,x)|)^2 dx = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} |m(\xi)\partial_t \widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi$$
$$= (2\pi)^{-3}\left[\int_{|\xi|<2N} |m(\xi)\partial_t \widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 2N} |m(\xi)\partial_t \widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi\right]$$
$$\leq C_1 \left\|\partial_t u\right\|^2_{H^{s-1}} < \infty.$$

(ii) $$\int_{\mathbb{R}^3} (|DIu(t,x)|)^2 dx = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |m(\xi)\widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi$$
$$= (2\pi)^{-3}\left[\int_{|\xi|<2N} |\xi|^2 |\widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 2N} |\xi|^2 \left(\frac{N}{|\xi|}\right)^{2-2s} |\widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi\right]$$
$$\leq C_2 \left\|u(t)\right\|^2_{H^s} < \infty.$$

(iii) $$\|Iu(t)\|_{L^4} \leq C\|Iu(t)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{4}}} = C\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{\frac{3}{2}} \left|m(\xi)\widehat{u}(t,\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\left[\int_{|\xi|<2N} |\xi|^{\frac{3}{2}} |\widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 2N} |\xi|^{\frac{3}{2}} \left(\frac{N}{|\xi|}\right)^{2-2s} |\widehat{u}(t,\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C_3 \left\|u(t)\right\|_{H^s} < \infty$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes que dependem de N.

Observemos também que a medida que N cresce o operador I se aproxima do operador identidade, portanto a variação da energia modificada é esperada ser baixa se tomarmos um N muito grande, pelo fato da variação de $E(u(t))$ ser nula. Este método de introduzir o operador I para que seja possível fazer futuras comparações utilizando a fórmula da energia modificada foi originalmente inventado por J. Colliander, M. Kell, G. Staffilani, H. Takaoka e T. Tao em [8] para provar a boa colocação global para a equação semilinear de Schrödinger com dado inicial em $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $n = 2$ e 3 e $s = \frac{4}{7}$ e $\frac{5}{6}$ respectivamente.

Lema 3.2.1 (Regra Leibnitz)
Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para $\alpha \geq 1-s$ e $1 < p_1, p_2, q_1, q_2, r < \infty$ com $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} = \frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}$, vale

$$\|D^\alpha I(fg)\|_{L^r} \lesssim \|D^\alpha If\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{q_1}} + \|f\|_{L^{p_2}} \|D^\alpha Ig\|_{L^{q_2}} .$$

Demonstração: Seja ψ a função C_0^∞ que definimos no início da seção 1.4, ou seja ψ está suportada em $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$ e satisfaz $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \psi(2^j\xi) = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Além disso, definiremos também uma função $\widetilde{\psi} \in C_0^\infty$ com suporte em $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{8} \leq |\xi| \leq 8\}$ tal que $\widetilde{\psi}(\xi) = 1$ no conjunto $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4\}$. De imediato podemos observar que $\psi(\xi)\widetilde{\psi}(\xi) = \psi(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3$.

Definindo os operados

$$\widehat{Q_j u}(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)\widehat{u}(\xi)$$
$$\widehat{\widetilde{Q}_j u}(\xi) = \widetilde{\psi}(2^{-j}\xi)\widehat{u}(\xi)$$

seja P_k o seguinte operador

$$P_k u = \sum_{j\leq k-3} Q_j u.$$

Pela decomposição de Littlewood Paley, temos:

$$u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{Q_j} Q_j u.$$

Para as funções f e g, teremos portanto

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f \quad e \quad g = \sum_{i\in\mathbb{Z}} Q_i g.$$

Utilizaremos aqui a decomposição de Bony.

$$fg = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f P_j g + \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j g P_j f + \sum_{|i-j|\leq 2} Q_j f Q_i g. \tag{3.6}$$

Veja [9] para mais detalhes a respeito da decomposição de Bony.

Agora, observando que

$$Supp(\widehat{Q_k f P_k g}) = Supp(\widehat{Q_k f} * \widehat{P_k g}) \subset Supp(\widehat{Q_k f}) + Supp(\widehat{P_k g})$$

$$Supp(\widehat{Q_k f}) + Supp(\widehat{P_k g}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 : 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2}\}$$

mais o fato de $\widetilde{\psi}(2^{-k}\xi) = 1, \forall \xi \in \{\xi \in \mathbb{R}^3 : 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2}\}$, segue:

$$Q_k f P_k g = \widetilde{Q}_k (Q_k f P_k g).$$

Logo, por (3.6), obtemos

$$fg = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{Q}_j (Q_j f P_j g) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{Q}_j (Q_j g P_j f) + \sum_{|i-j| \leq 2} Q_j f Q_i g \tag{3.7}$$

e pela Proposição 1.4.4 é possível obter:

$$\|D^\alpha I u\|_{L^r} \sim \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |2^{j\alpha} m(2^j) Q_j u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r}. \tag{3.8}$$

Aplicando o operador $D^\alpha I$ em (3.7) e tomando a norma L^r, teremos:

$$\|D^\alpha I(fg)\|_{L^r} \leq \left\| D^\alpha I \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\widetilde{Q}_j (Q_j f P_j g)) \right\|_{L^r} + \left\| D^\alpha I \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\widetilde{Q}_j (Q_j g P_j f)) \right\|_{L^r} \tag{3.9}$$

$$+ \left\| D^\alpha I \textstyle\sum_{|i-j| \leq 2} (Q_j f Q_i g) \right\|_{L^r}.$$

Por outro lado, podemos observar que

$$|\widetilde{Q}_j u(x)| \lesssim M u(x) \tag{3.10}$$

$$|Q_j u(x)| \lesssim M u(x) \tag{3.11}$$

$$|P_j u(x)| \lesssim M u(x) \tag{3.12}$$

para todo $u \in \mathcal{S}$, onde M denota o operador maximal descrito na Proposição 1.1.5, ou seja,

$$Mu(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u(y)| dy.$$

Pela definição do operador $\widetilde{Q}_j$, sabemos que

$$\widetilde{Q}_j u = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\psi}(2^{-j} \cdot) \widehat{u}) = 2^{3j} \nu(2^j \cdot) * u$$

onde $\nu(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\psi})(x)$, portanto escrevendo $\psi_j(x) = 2^{3j} \nu(2^j x)$, teremos:

$$\widetilde{Q}_j u(x) = \psi_j * u(x). \tag{3.13}$$

Além disso, fixado $N \in \mathbb{N}$, segue pelo Teorema 1.2.1 que

$$\begin{aligned} |\psi_j(x)| = 2^{3j}|\nu(2^j(x))| &= 2^{3j}|\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\psi})(2^j(x))| \\ &= 2^{3j}(2\pi)^{-3}\left|\int e^{i(2^jx)\cdot\xi}\widetilde{\psi}(\xi)d\xi\right| \\ &\lesssim 2^{3j}\left\|\widetilde{\psi}\right\|_{L^1} \end{aligned}$$

de modo geral,

$$\begin{aligned} |((2^j)x_k)^N\psi_j(x)| = 2^{3j}|((2^j)x_k)^N\nu(2^j(x))| &= 2^{3j}|((2^j)x_k)^N\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\psi})(2^j(x))| \\ &= 2^{3j}|\mathcal{F}^{-1}(\partial_k^N\widetilde{\psi}(2^jx))| \\ &= 2^{3j}(2\pi)^{-3}\left|\int e^{i(2^jx)\cdot\xi}\partial_k^N\widetilde{\psi}(\xi)d\xi\right| \\ &\lesssim 2^{3j}\left\|\partial_k^N\widetilde{\psi}\right\|_{L^1}. \end{aligned}$$

para $k \in \{1, 2, 3\}$.

Portanto, obtemos:

$$|\psi_j(x)| \lesssim 2^{3j} \tag{3.14}$$

$$|(2^jx_k)^N\psi_j(x)| \lesssim 2^{3j}, \quad k \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.15}$$

Somando então (3.14) e (3.15), obtemos:

$$(1 + |2^jx_1|^N + |2^jx_2|^N + |2^jx_3|^N)|\psi_j(x)| \lesssim 2^{3j}. \tag{3.16}$$

Por outro lado, para a, b, c números reais positivos, podemos provar que

$$3^{-t}(a + b + c)^t \leq a^t + b^t + c^t \leq 3(a + b + c)^t \tag{3.17}$$

para todo $t > 0$.

De fato, $3(a^t + b^t + c^t)^{\frac{1}{t}} \geq a + b + c$, portanto

$$a^t + b^t + c^t \geq 3^{-t}(a + b + c)^t. \tag{3.18}$$

Por outro lado, sabemos que $a + b + c = (a^t)^{\frac{1}{t}} + (b^t)^{\frac{1}{t}} + (c^t)^{\frac{1}{t}}$, e pela relação (3.18), obtemos

$$a + b + c \geq 3^{-\frac{1}{t}}(a^t + b^t + c^t)^{\frac{1}{t}}$$

por fim, aplicando a potência t em ambos os lados da última desigualdade, temos:

$$(a+b+c)^t \geq 3^{-1}(a^t+b^t+c^t).$$

Isso conclui a desigualdade (3.17).

Portanto, tendo em vista (3.17), por (3.16) obtemos:

$$\begin{aligned}(1+2^j|x|)^N|\psi_j(x)| &\leq 3^N(1+2^{jN}|x|^N)|\psi_j(x)| \\ &\leq 3^N[1+2^{jN}(|x_1|+|x_2|+|x_3|)^N]|\psi_j(x)| \\ &\leq 3^{2N}[1+2^{jN}(|x_1|^N+|x_2|^N+|x_3|^N)]|\psi_j(x)| \\ &\lesssim 3^{2N}2^{3j}.\end{aligned}$$

Assim,

$$|\psi_j(x)| \lesssim 3^{2N}(1+2^j|x|)^{-N}2^{3j}, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Estamos agora em condições de provar $|\widetilde{Q}_j u(x)| \lesssim Mu(x)$, por (3.13) é suficiente provarmos $\psi_j * u(x) \lesssim Mu(x)$. Portanto, tomando $N=4$, teremos:

$$\begin{aligned}|\psi_j * u(x)| = \left|\int \psi_j(y)u(x-y)dy\right| &\leq \int |\psi_j(y)||u(x-y)|dy \\ &\leq 3^8 2^{3j}\int (1+2^j|y|)^{-4}|u(x-y)|dy.\end{aligned}$$

Para facilitar a nossa notação, seja $k(y)=(1+2^j|y|)^{-4}$, assim

$$|\psi_j * u(x)| \lesssim 2^{3j}\int k(y)|u(x-y)|dy.$$

Sendo $E=\{(y,t) : y \in \mathbb{R}^3, t>0, k(y)>t\}$, segue que

$$k(y) = \int_0^{k(y)} dt = \int_0^\infty \chi_E(y,t)dt$$

onde $\chi_E(y,t)$ representa a função característica do conjunto E.

Agora, utilizando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\begin{aligned}|\psi_j * u(x)| &\lesssim 2^{3j}\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty \chi_E(y,t)dt|u(x-y)|dy \\ &= 2^{3j}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}\chi_E(y,t)|u(x-y)|dydt \\ &= 2^{3j}\int_0^\infty\int_{\{y\in\mathbb{R}^3 : k(y)>t\}}|u(x-y)|dydt.\end{aligned}$$

Seja $E_t = \{y \in \mathbb{R}^3 : k(y) > t\}$, pela definição de $k(y)$ é fácil ver que E_t é uma bola centrada na origem. Denotando a medida de Lebesgue de E_t por $|E_t|$, teremos:

$$\begin{aligned}
|\psi_j * u(x)| &\lesssim 2^{3j} \int_0^\infty \int_{E_t} |u(x-y)| dy dt \\
&= 2^{3j} \int_0^\infty |E_t| \left(\frac{1}{|E_t|} \int_{E_t} |u(x-y)| dy \right) dt \\
&\lesssim 2^{3j} \int_0^\infty |E_t| Mu(x) dt \\
&= 2^{3j} Mu(x) \int_0^\infty |E_t| dt \\
&= 2^{3j} Mu(x) \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^3} \chi_{E_t}(y) dy \right) dt \\
&= 2^{3j} Mu(x) \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^\infty \chi_{E_t}(y) dt \right) dy \\
&= 2^{3j} Mu(x) \int_{\mathbb{R}^3} k(y) dy \\
&= 2^{3j} Mu(x) \left\| k(y) \right\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\psi_j * u(x)| \lesssim 2^{3j} Mu(x) \left\| k(y) \right\|_{L^1}.$$

Calculemos agora $\|k(y)\|_{L^1}$.

$$\begin{aligned}
\|k(y)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+2^j|y|)^4} dy \\
&= \int_0^\infty \int_{S^2} \frac{1}{(1+2^j r)^4} d\sigma r^2 dr \\
&= \int_{S^2} d\sigma \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+2^j r)^4} dr \\
&= \int_{S^2} d\sigma \int_1^\infty \frac{\frac{(w-1)^2}{2^{2j}}}{w^4} \frac{1}{2^j} dw \\
&= \int_{S^2} d\sigma \frac{1}{3} . \frac{1}{2^{3j}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\psi_j * u(x)| \lesssim Mu(x). \tag{3.20}$$

A prova de $|Q_j u(x)| \lesssim Mu(x)$ ocorre pelos mesmos argumentos que utilizamos para obter (3.20). Para provarmos $|P_j u(x)| \lesssim Mu(x)$, basta observar que

$$\widehat{P_j u}(\xi) = \sum_{k\leq j-3} \psi(2^{-k}\xi)\widehat{u}(\xi) = \phi(2^{-j}\xi)\widehat{u}(\xi)$$

onde $\phi(\xi) = \sum_{k\leq -3} \psi(2^{-k}\xi) \in C_0^\infty(B(0,2^4))$.

Assim, podemos escrever $P_j u(x) = \phi_j * u(x)$, para alguma função ϕ_j em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e procedendo de maneira análoga ao que fizemos para obter (3.20), obteremos

$$|P_j u(x)| \lesssim Mu(x).$$

Retomando o objetivo principal dessa demonstração, utilizaremos a seguir (3.8), (3.10), (3.11), (3.12), o Proposição 1.1.5 e a desigualdade de Hölder.

$$\begin{aligned}
\left\|D^\alpha I \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{Q}_j(Q_j f P_j g)\right\|_{L^r} &\lesssim \left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|2^{k\alpha} m(2^k) Q_k \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{Q}_j(Q_j f P_j g)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^r}\\
&\lesssim \left\|\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{j\alpha} m(2^j)\widetilde{Q}_j(Q_j f P_j g)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^r}\\
&\lesssim \left\|\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{j\alpha} m(2^j)M(Q_j f P_j g)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^r}\\
&\lesssim \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{j\alpha} m(2^j)Q_j f P_j g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^r}\\
&\lesssim \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{j\alpha} m(2^j)Q_j f Mg|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^r}\\
&\lesssim \left\|Mg\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{j\alpha} m(2^j)Q_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^r}\\
&\lesssim \|Mg\|_{L^{p_1}} \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{j\alpha} m(2^j)Q_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{q_1}}\\
&\lesssim \|g\|_{L^{p_1}} \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |D^\alpha I Q_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{q_1}}\\
&\lesssim \|g\|_{L^{p_1}} \|D^\alpha I f\|_{L^{q_1}}.
\end{aligned}$$

Por razões análogas podemos concluir que

$$\left\|D^\alpha I \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\widetilde{Q}_j(Q_j g P_j f))\right\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^{p_2}} \|D^\alpha I g\|_{L^{q_2}}.$$

Para concluir o lema nos resta estimar o último termo de (3.9). Observando que $Q_k(Q_i f Q_j g) = 0$, se $k > max(i,j) + 4$ e $|i-j| \leq 2$ e utilizando (3.8) e as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder concluiremos a demonstração do lema.

$$
\begin{aligned}
&\left\| D^\alpha I \sum_{|i-j|\le 2} (Q_j f Q_i g) \right\|_{L^r} \lesssim \left\| \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| 2^{\alpha k} m(2^k) Q_k \sum_{|i-j|\le 2} (Q_j f Q_i g) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \\
&= \left\| \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| 2^{\alpha k} m(2^k) Q_k \sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} (Q_j f Q_i g) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \\
&\lesssim \left\| \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| Q_k \sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} 2^{\alpha max(i,j)} m(2^{max(i,j)}) (Q_j f Q_i g) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \\
&\lesssim \left\| \sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} 2^{\alpha max(i,j)} m(2^{max(i,j)}) (Q_j f Q_i g) \right\|_{L^r} \\
&\lesssim \left\| \sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} \left| 2^{\alpha i} m(2^i) (Q_j f Q_i g) \right| + \sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} 2^{\alpha j} \left| m(2^j) (Q_j f Q_i g) \right| \right\|_{L^r} \\
&\lesssim \left\| \sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} \left| 2^{\alpha i} m(2^i) (Q_j f Q_i g) \right| \right\|_{L^r} \\
&+ \left\| \sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} \left| 2^{\alpha j} m(2^j) (Q_j f Q_i g) \right| \right\|_{L^r} \\
&\lesssim \left\| \left(\sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} |Q_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} \left| 2^{\alpha i} m(2^i) Q_i g \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \\
&+ \left\| \left(\sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} \left| 2^{\alpha j} m(2^j) Q_j f \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|i-j|\le 2, max(i,j)\ge k-4} |Q_i g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \\
&\lesssim \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left| 2^{\alpha i} m(2^i) Q_i g \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \\
&+ \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| 2^{\alpha j} m(2^j) Q_j f \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |Q_i g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r} \\
&\lesssim \|f\|_{L^{p_2}} \|D^\alpha I\|_{L^{q_2}} + \|D^\alpha I f\|_{L^{q_1}} \|g\|_{L^{p_1}}.
\end{aligned}
$$

□

Definição 3.2.2 *Dado um intervalo $J = [a, b]$ contido em $[0, \infty)$ e uma função u, definiremos:*

$$Z_{m,s}(J,u) = \sup_{(q,r)} \left\{ \left\| D^{1-m} I u \right\|_{L^q_t(J) L^r_x} + \left\| D^{-m} \partial_t I u \right\|_{L^q_t(J) L^r_x} \right\}$$

onde, o sup é tomado sobre os pares (q,r) m-onda admissível.

$$Z(J,u) = \sup \left\{ Z_{m,s}(J,u) : m \in [0,1) \right\}.$$

Obs.: Veja na página 33 a definição de m-onda admissível.

Definição 3.2.3 *Sendo $J = [a,b]$ contido em $[0,\infty)$, definiremos:*

$$u^{l,J}(t) = \cos\left((t-a)D\right) u(a) + D^{-1} \sin\left((t-a)D\right) \partial_t u(a)$$

$$u^{nl,J}(t) = -\int_a^t D^{-1} \sin\left((t-t')D\right) u^3(t') dt'.$$

Portanto se u satisfaz a equação integral (3.2) e $t \in J$, poderemos escrever

$$u(t) = u^{l,J}(t) + u^{nl,J}(t).$$

Definição 3.2.4 *Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ denotaremos por u_λ a seguinte função*

$$u_\lambda(t,x) = \frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right).$$

É fácil ver que se u satisfaz o problema da onda (3.1), então u_λ irá satisfazer o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u_\lambda - \Delta u_\lambda &= -u_\lambda^3 \\ u_\lambda(0,x) &= \frac{1}{\lambda} u_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ \partial_t u_\lambda(0,x) &= \frac{1}{\lambda^2} u_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) \end{cases}$$

Estabeleceremos agora as proposições.

Proposição 3.2.1 *Se u satisfaz (3.1) em $[0,T]$, então vale:*

$$\|u(T)\|^2_{H^s} + \|\partial_t u(T)\|^2_{H^{s-1}} \lesssim \|u_0(T)\|^2_{H^s} + (T^2+1) \sup_{t \in [0,T]} E(Iu(t)).$$

Demonstração: Pela desigualdade triangular da norma H^s, segue

$$\begin{aligned} \|u(T)\|^2_{H^s} &= \|P_{\leq 1} u(T) + P_{>1} u(T)\|^2_{H^s} \\ &\leq \left(\|P_{\leq 1} u(T)\|_{H^s} + \|P_{>1} u(T)\|_{H^s}\right)^2 \\ &\lesssim \|P_{\leq 1} u(T)\|^2_{H^s} + \|P_{>1} u(T)\|^2_{H^s} \\ &= \|P_{\leq 1} u(T)\|^2_{H^s} + \int_{1 \leq |\xi| \leq 2N} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq 2N} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

a igualdade na última linha se justifica pelo fato de $\widehat{P_{>1}u}(T,\xi)=0$ para $|\xi|\leq 1$. Antes do próximo passo devemos observar que sendo $|\xi|\geq 1$, vale

$$(1+|\xi|^2)^s \leq (|\xi|^2+|\xi|^2)^s = 2^s|\xi|^{2s}$$

assim,

$$\|u(T)\|_{H^s}^2 \lesssim \|P_{\leq 1}u(T)\|_{H^s}^2 + \int_{1\leq|\xi|\leq 2N} |\xi|^{2s}|\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 2N} |\xi|^{2s}|\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi.$$

De um lado, como $\frac{13}{18} < s < 1$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{1\leq|\xi|\leq 2N} |\xi|^{2s}|\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{1\leq|\xi|\leq 2N} |\xi|^2\frac{m(\xi)^2}{m(\xi)^2}|\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi\\ &\lesssim \|DIu(T)\|_{L^2}^2\\ &\lesssim E(Iu(T))\end{aligned}$$

por outro lado, teremos também

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 2N} |\xi|^{2s}|\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|\geq 2N} |\xi|^2\frac{N^{2(1-s)}}{|\xi|^{2(1-s)}}|\widehat{u}(T,\xi)|^2 d\xi\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3} |DIu(T,x)|^2 dx\\ &\lesssim E(Iu(T)).\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade triangular para a norma H^s, o Teorema fundamental do cálculo e a identidade de Plancherel, teremos:

$$\begin{aligned}\|P_{\leq 1}u(T)\|_{H^s} &\leq \|P_{\leq 1}u(T)-P_{\leq 1}u(0)\|_{H^s} + \|P_{\leq 1}u(0)\|_{H^s}\\ &\leq \int_0^T \|P_{\leq 1}\partial_t u(t)\|_{H^s}\,dt + \|u_0\|_{H^s}\\ &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T sup_{t\in[0,T]}\|\partial_t Iu(t)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|P_{\leq 1}u(T)\|_{H^s}^2 \lesssim \|u_0\|_{H^s}^2 + T^2 sup_{t\in[0,T]}E(Iu(t)).$$

Por fim, estimando $\|\partial_t u(T)\|_{H^{s-1}}^2$,

$$\|\partial_t u(T)\|_{H^{s-1}}^2 = \int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{s-1}|\widehat{\partial_t u}(T,\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3} m(\xi)^2|\widehat{\partial_t u}(T,\xi)|^2 d\xi \lesssim E(Iu(T))$$

teremos:

$$\|u(T)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(T)\|_{H^{s-1}}^2 \lesssim \|u_0\|_{H^s}^2 + T^2 sup_{t\in[0,T]} E(Iu(t)) + 3E(Iu(T))$$

$$\lesssim \|u_0\|_{H^s}^2 + (T^2+1) sup_{t\in[0,T]} E(Iu(t)).$$

□

Proposição 3.2.2 (Limitação local e global)
Seja $J = [a, b]$ um intervalo contido em $[0, \infty)$. Assumindo que u satisfaça (3.1) e que

$$sup_{t\in J} E(Iu(t)) \leq 2 \tag{3.21}$$

então

$$Z(J, u^{l,J}) \lesssim 1. \tag{3.22}$$

Mais ainda, se (p, q) é m-onda admíssivel então

$$\left\|D^{1-m} Iu\right\|_{L_t^q(J)L_x^r} \lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{1}{q}} \tag{3.23}$$

e

$$\left\|D^{1-m} Iu^{nl,J}\right\|_{L_t^q(J)L_x^r} \lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{1}{q}}. \tag{3.24}$$

Demonstração: Para facilitar a notação iremos supor $J = [0, \tau]$, pelo que faremos na demonstração pode-se ver que não há perda de generalidade uma vez que temos $Z(J, u^{l,J}) \leq Z(J', u^{l,J'})$ e $Z_{m,s}(J, u) \leq Z_{m,s}(J', u)$, para $J = [a, b]$ e $J' = [0, b]$.

Aplicando a m-estimativa de Strichartz com derivativo para $D^{1-m}Iu^{l,J}$ e a identidade de Plancherel, teremos:

$$\left\|D^{1-m} Iu^{l,J}\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} + \left\|D^{-m}\partial_t Iu^{l,J}\right\|_{L_t^q([0,\tau])L_x^r} \lesssim \|D^{1-m}Iu_0\|_{\dot{H}^m} + \|D^{1-m}Iu_1\|_{\dot{H}^{m-1}}$$

$$\lesssim \|DIu_0\|_{L^2} + \|Iu_1\|_{L^2} \lesssim 1.$$

Portanto,

$$Z(J, u^{l,J}) \lesssim 1$$

Demonstraremos agora (3.23) e (3.24). Por (3.22) e a desigualdade triangular é suficiente demonstrar apenas (3.23). Se dividirmos o intervalo $[0, \tau]$ em subintervalos $(J_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ de modo que $|J_1|, |J_2|, \ldots, |J_{n-1}| = \tau_0$ e $|J_n| \leq \tau_0$ para τ_0 constante a ser determinada, teremos $Z_{m,s}(J, u) = Z_{m,s}(\cup_{k=1}^n J_k, u) \lesssim \sum_{k=1}^n Z_{m,s}(J_k, u)$. Portanto será suficiente provarmos $Z_{m,s}(J_k, u) \lesssim 1$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Provaremos a afirmação para $k = 1$, por iteração também será verdade para $k > 1$.

A prova se constituirá em dois passos.

Passo 1: Assumiremos $m \leq s$. Aplicando a m-Strichartz com derivativo para $D^{1-m}Iu$, teremos:

$$\|D^{1-m}Iu\|_{L_t^q([0,\tau_0])L_x^r} + \|D^{-m}\partial_t Iu\|_{L_t^q([0,\tau_0])L_x^r}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \|D^{1-m}Iu_0\|_{\dot{H}^m} + \|D^{1-m}Iu_1\|_{\dot{H}^{m-1}} + \|D^{1-m}I(uuu)\|_{L_t^1([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{5-2m}}} \\
&\lesssim \|DIu_0\|_{L^2} + \|Iu_1\|_{L^2} + \|D^{1-m}I(uuu)\|_{L_t^1([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{5-2m}}} \\
&\lesssim 1 + \|D^{1-m}I(uuu)\|_{L_t^1([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{5-2m}}}.
\end{aligned}$$

Utilizando a regra fracionária de Leibnitz, teremos:

$$\begin{aligned}
\|D^{1-m}I(uuu)\|_{L_t^1([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{5-2m}}} &= \left\| \|D^{1-m}I(uuu)\|_{L_x^{\frac{6}{5-2m}}} \right\|_{L_t^1([0,\tau_0])} \\
&\lesssim \left\| \|D^{1-m}I(uu)\|_{L_x^{\frac{6}{4-2m}}} \|u\|_{L_x^6} + \|D^{1-m}Iu\|_{L_x^{\frac{6}{3-2m}}} \|u^2\|_{L_x^3} \right\|_{L_t^1([0,\tau_0])} \\
&\lesssim \left\| \|D^{1-m}Iu\|_{L_x^{\frac{6}{3-2m}}} \|u\|_{L_x^6} \|u\|_{L_x^6} + \|D^{1-m}Iu\|_{L_x^{\frac{6}{3-2m}}} \|u^2\|_{L_x^3} \right\|_{L_t^1([0,\tau_0])} \\
&\lesssim \|D^{1-m}Iu\|_{L_t^\infty([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{3-2m}}} \|u\|^2_{L_t^2([0,\tau_0])L_x^6}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D^{1-m}Iu\|_{L_t^q([0,\tau_0])L_x^r} + \|D^{-m}\partial_t Iu\|_{L_t^q([0,\tau_0])L_x^r} \lesssim 1 + \|D^{1-m}Iu\|_{L_t^\infty([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{3-2m}}} \|u\|^2_{L_t^2([0,\tau_0])L_x^6}$$

e pela definição de $Z_{m,s}(\tau_0, u)$, mais o fato de $(\infty, \frac{6}{3-2m})$ ser m-onda admíssivel segue que

$$\begin{aligned}
Z_{m,s}(\tau_0,u) &\lesssim 1 + \|D^{1-m}Iu\|_{L_t^\infty([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{3-2m}}} \|u\|^2_{L_t^2([0,\tau_0])L_x^6} \\
&\lesssim 1 + Z_{m,s}(\tau_0,u) \|u\|^2_{L_t^2([0,\tau_0])L_x^6} \\
&= 1 + Z_{m,s}(\tau_0,u) \|P_{\leq N}u + P_{>N}u\|^2_{L_t^2([0,\tau_0])L_x^6} \\
&\leq 1 + Z_{m,s}(\tau_0,u) \left(\|P_{\leq N}u\|_{L_t^2([0,\tau_0])L_x^6} + \|P_{>N}u\|_{L_t^2([0,\tau_0])L_x^6} \right)^2.
\end{aligned}$$

Agora a desigualdade de Hölder no tempo, produzirá:

$$\begin{aligned}
&Z_{m,s}(\tau_0,u) \\
&\lesssim 1 + Z_{m,s}(\tau_0,u) \left(\tau_0^{\frac{1}{3}} \|P_{\leq N}u\|_{L_t^6([0,\tau_0])L_x^6} + \tau_0^{s-\frac{1}{2}} \|P_{>N}u\|_{L_t^{\frac{1}{1-s}}([0,\tau_0])L_x^6} \right)^2. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Retomando as definições (1.13), (1.15) dos operadores $P_{\leq N}$ e $P_{>N}$, se escrevermos

$$\phi(\frac{\xi}{N}) = \frac{\phi(\frac{\xi}{N})}{m(\xi)} m(\xi) \;\; e \;\; 1 - \phi(\frac{\xi}{N}) = \frac{(1 - \phi(\frac{\xi}{N}))}{m(\xi)} \frac{N^{1-s}}{|\xi|^{1-s}} \frac{|\xi|^{1-s}}{N^{1-s}} m(\xi)$$

teremos,

$$P_{\leq N}u(x) = T_{\nu_1}(Iu)(x) \ \ e \ \ P_{>N}u(x) = \frac{T_{\nu_2}(D^{1-s}Iu)(x)}{N^{1-s}}$$

onde T_{ν_1} e T_{ν_2} são operadores definidos por

$$\widehat{T_{\nu_1}u}(\xi) = \frac{\phi(\frac{\xi}{N})}{m(\xi)}\widehat{u}(\xi)$$

$$\widehat{T_{\nu_2}u}(\xi) = \frac{(1-\phi(\frac{\xi}{N}))}{m(\xi)}\frac{N^{1-s}}{|\xi|^{1-s}}\widehat{u}(\xi).$$

Não é difícil observar que as funções

$$\nu_1(\xi) = \frac{\phi(\frac{\xi}{N})}{m(\xi)} \ \ e \ \ \nu_2(\xi) = \frac{(1-\phi(\frac{\xi}{N}))}{m(\xi)}\frac{N^{1-s}}{|\xi|^{1-s}}$$

satisfazem as hipóteses da Proposição 1.2.6 e que a constante A_p da proposição não depende do N, portanto devido a Proposição 1.2.6, teremos

$$\|P_{\leq N}u(x)\|_{L_t^6([0,\tau_0])L_x^6} \lesssim \|Iu\|_{L_t^6([0,\tau_0])L_x^6}$$

$$\|P_{>N}u(x)\|_{L_t^6([0,\tau_0])L_x^6} \lesssim \frac{\|D^{1-s}Iu\|_{L_t^{\frac{1}{1-s}}([0,\tau_0])L_x^6}}{N^{1-s}}$$

e por (3.25), segue que

$$Z_{m,s}(\tau_0,u) \lesssim 1 + Z_{m,s}(\tau_0,u)\left(\tau_0^{\frac{1}{3}}\|Iu\|_{L_t^6([0,\tau_0])L_x^6} + \tau_0^{s-\frac{1}{2}}\frac{\|D^{1-s}Iu\|_{L_t^{\frac{1}{1-s}}([0,\tau_0])L_x^6}}{N^{1-s}}\right)^2.$$

O fato de $(\frac{1}{1-s},6)$ ser s-onda admíssivel e de L^6 estar mergulhado em $\dot{H}^1$ como nos diz o Teorema 1.3.2, justificam as próximas duas desigualdades

$$\begin{aligned} Z_{m,s}(\tau_0,u) &\lesssim 1 + Z_{m,s}(\tau_0,u)\left(\tau_0^{\frac{1}{3}}\|Iu\|_{L_t^6([0,\tau_0])L_x^6} + \tau_0^{s-\frac{1}{2}}\tfrac{Z_{s,s}(\tau_0,u)}{N^{1-s}}\right)^2 \\ &\lesssim 1 + Z_{m,s}(\tau_0,u)\left[\tau_0^{\frac{1}{2}}\left(sup_{t\in J}E(Iu(t))\right)^{\frac{1}{6}} + \tau_0^{s-\frac{1}{2}}\frac{Z_{s,s}(\tau_0,u)}{N^{1-s}}\right]^2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Supondo $m = s$, se $\tau_0 > 0$ é suficientemente pequeno então por (3.21) e (3.26), teremos

$$Z_{s,s}(\tau_0,u) \lesssim 1. \tag{3.27}$$

Por outro lado, supondo agora $m < s$, então por (3.26) e (3.27), segue

$$Z_{m,s}(\tau_0,u) \lesssim 1. \tag{3.28}$$

Passo 2: Suponhamos $m > s$. Por (3.26),(3.27) e (3.28), temos

$$\begin{aligned} \|D^{1-r}I(uuu)\|_{L^1_t[0,\tau_0]L_x^{\frac{6}{5-2r}}} &\lesssim Z_{r,s}(\tau_0,u)\left[\tau_0^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{t\in[0,\tau_0]}E(Iu(t))\right)^{\frac{1}{6}}+\tau_0^{s-\frac{1}{2}}\frac{Z_{s,s}(\tau_0,u)}{N^{1-s}}\right]^2 \\ &\lesssim 1 \end{aligned} \tag{3.29}$$

para $r \leq s$. A desigualdade

$$\left\|D^{1-m}I(uuu)\right\|_{L^1_t([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{5-2m}}} \lesssim \left\|D^{1-r}I(uuu)\right\|_{L^1_t([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{5-2r}}} \tag{3.30}$$

segue pela Proposição 1.3.3.

Como fizemos anteriormente, utilizaremos a estimativa m-Strichatz com derivativo para $D^{1-m}Iu$.

$$Z_{m,s}(\tau_0,u) \lesssim \|DIu_0\|_{L^2} + \|Iu_1\|_{L^2} + \left\|D^{1-m}I(uuu)\right\|_{L^1_t([0,\tau_0])L_x^{\frac{6}{5-2m}}}.$$

Por (3.29) e (3.30), segue:

$$Z_{m,s}(\tau_0,u) \lesssim 1.$$

□

Proposição 3.2.3 (Ganho Local de Regularidade do Termo Não Linear) *Seja $J=[a,b]$ um intervalo contido em $[0,\infty)$ e u satisfazendo* (3.1) *e* (3.21), *então*

$$\left\|\partial_t Iu^{nl,J}\right\|_{L^6_t(J)L^3_x} + \left\|DIu^{nl,J}\right\|_{L^6_t(J)L^3_x} \lesssim (max(1,|J|))^{\frac{2}{3}}.$$

Demonstração: Por motivos similares as citadas na demonstração da proposição anterior, também iremos supor aqui $J=[0,\tau]$. Aplicando a estimativa $\frac{1}{3}$-Strichartz com derivativo para $DIu^{nl,J}$, teremos

$$\left\|\partial_t Iu^{nl,J}\right\|_{L^6_t([0,\tau])L^3_x} + \left\|DIu^{nl,J}\right\|_{L^6_t([0,\tau])L^3_x} \lesssim \|DI(uuu)\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])L_x^{\frac{6}{5}}}.$$

Utilizando agora a regra fracionária de Leibnitz, segue:

$$\begin{aligned} \|DI(uuu)\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])L_x^{\frac{6}{5}}} &= \left\|\|DI(uuu)\|_{L_x^{\frac{6}{5}}}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])} \\ &\lesssim \left\|\|DI(uu)\|_{L_x^{\frac{3}{2}}}\|u\|_{L^6_x} + \|DIu\|_{L^2_x}\|u^2\|_{L^3_x}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])} \\ &\lesssim \left\|2\|DIu\|_{L^2_x}\|u\|_{L^6_x}\|u\|_{L^6_x} + \|DIu\|_{L^2_x}\|u^2\|_{L^3_x}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])} \\ &\lesssim \left\|\|DIu\|_{L^2_x}\|u\|^2_{L^6_x}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])} \\ &\lesssim \|DIu\|_{L^\infty_t([0,\tau])L^2_x}\|u\|^2_{L^3_t([0,\tau])L^6_x}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|DI(uuu)\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])L_x^{\frac{6}{5}}} \lesssim \|DIu\|_{L_t^\infty([0,\tau])L_x^2} \|u\|^2_{L_t^3([0,\tau])L_x^6}$$
$$\lesssim \|DIu\|_{L_t^\infty([0,\tau])L_x^2} \left(\|P_{<N}u\|_{L_t^3([0,\tau])L_x^6} + \|P_{\geq N}u\|_{L_t^3([0,\tau])L_x^6}\right)^2.$$

Por (1.14) e (1.15) sabemos que

$$\widehat{P_{\geq N}u}(\xi) = (1-\phi(\frac{2\xi}{N}))\widehat{u}(\xi) \;\; e \;\; \widehat{P_{<N}u}(\xi) = \phi(\frac{2\xi}{N})\widehat{u}(\xi).$$

Por outro lado, podemos escrever

$$1-\phi(\frac{2\xi}{N}) = \frac{(1-\phi(\frac{2\xi}{N}))}{m(\xi)}\frac{N^{\frac{1}{3}}}{|\xi|^{\frac{1}{3}}}\frac{|\xi|^{\frac{1}{3}}}{N^{\frac{1}{3}}}m(\xi)$$
$$\phi(\frac{2\xi}{N}) = \frac{\phi(\frac{2\xi}{N})}{m(\xi)}m(\xi)$$

e definindo

$$\nu_1(\xi) = \frac{(1-\phi(\frac{2\xi}{N}))}{m(\xi)}\frac{N^{\frac{1}{3}}}{|\xi|^{\frac{1}{3}}}$$
$$\nu_2(\xi) = \frac{\phi(\frac{2\xi}{N})}{m(\xi)}$$

teremos

$$P_{\geq N}u(x) = \frac{T_{\nu_1}(D^{\frac{1}{3}}Iu)(x)}{N^{\frac{1}{3}}} \;\; e \;\; P_{<N}u(x) = T_{\nu_2}(Iu)(x).$$

Agora, recorrendo a Proposição 1.2.6 obtemos

$$\|P_{<N}u(x)\|_{L_t^3([0,\tau_0])L_x^6} \lesssim \|Iu\|_{L_t^3([0,\tau_0])L_x^6}$$

$$\|P_{\geq N}u(x)\|_{L_t^3([0,\tau_0])L_x^6} \lesssim \frac{\left\|D^{\frac{1}{3}}Iu\right\|_{L^3([0,\tau_0])L_x^6}}{N^{\frac{1}{3}}}.$$

Assim,

$$\|DI(uuu)\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])L_x^{\frac{6}{5}}} \lesssim \|DIu\|_{L_t^\infty([0,\tau])L_x^2} \left(\left\|D^{1-1}Iu\right\|_{L_t^3([0,\tau])L_x^6} + \left\|D^{1-\frac{2}{3}}Iu\right\|_{L_t^3([0,\tau])L_x^6}\right)^2$$

$$\lesssim \|DIu\|_{L_t^\infty([0,\tau])L_x^2} \left(\tau^{\frac{1}{3}}\left\|D^{1-1}Iu\right\|_{L_t^\infty([0,\tau])L_x^6} + \left\|D^{1-\frac{2}{3}}Iu\right\|_{L_t^3([0,\tau])L_x^6}\right)^2.$$

Tendo visto que $(\infty,2)$ é 0-onda admíssivel, $(\infty,6)$ é 1-onda admíssivel e $(3,6)$ é $\frac{2}{3}$-onda admíssivel, podemos usar a Proposição 3.2.2 para obter:

$$\|DI(uuu)\|_{L_t^{\frac{3}{2}}([0,\tau])L_x^{\frac{6}{5}}} \lesssim \tau^{\frac{2}{3}}.$$

Concluindo,

$$\left\|\partial_t I u^{nl,J}\right\|_{L_t^6([0,\tau])L_x^3} + \left\|D I u^{nl,J}\right\|_{L_t^6([0,\tau])L_x^3} \lesssim \tau^{\frac{2}{3}}.$$

□

Proposição 3.2.4 (Lei de Quase Conservação de Energia)
Se $J = [a, b]$ é um intervalo contido em $[0, \infty)$ e u uma função satisfazendo (3.1) *e* (3.21), *então vale a seguinte lei de quase conservação de energia:*

$$\left|\sup_{t\in J} E(Iu(t)) - E(Iu(a))\right| \lesssim max\left(\frac{(max\{1,|J|\})^{\frac{1}{2}}}{N^{1-}}, \frac{(max\{1,|J|\})^{\frac{5}{2}}}{N^{2-}}\right). \tag{3.31}$$

Demonstração: Para o que virá a seguir atentemos para o fato de que embora as funções $u(t,x)$ e $\partial_t u(t,x)$ sejam reais, as funcões $Iu(t,x)$ e $\partial_t Iu(t,x)$ são complexas por serem definidas via transformada inversa de Fourier, para efeito de notação, denotaremos o conjugado de um número complexo z por $\overline{z}$.

Seja $\tau \in J$, começaremos estimando a variação $|E(Iu(\tau)) - E(Iu(a))|$, para isso utilizaremos o Teorema fundamental do cálculo e a Proposição 1.2.4.

$$|E(Iu(\tau)) - E(Iu(a))| = \left|\int_a^\tau \partial_t E(I(t))dt\right|.$$

Calculemos $\partial_t E(Iu(t))$:

$$\partial_t E(Iu(t)) = \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\partial_t Iu(t,x)\overline{\partial_t Iu}(t,x) + \frac{1}{2}DIu(t,x)\overline{DIu}(t,x) + \frac{1}{4}(Iu(t,x)\overline{Iu}(t,x))^2 dx$$

$$= Re(\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t^2 Iu(t,x)\overline{\partial_t Iu}(t,x) + DIu(t,x)\overline{D\partial_t Iu}(t,x) + |Iu(t,x)|^2 Iu(t,x)\overline{\partial_t Iu}(t,x)dx)$$

$$= Re(\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\partial_t Iu}(t,x)[Iu(t,x)\overline{Iu}(t,x)Iu(t,x) - I(uuu)]dx)$$

$$= Re(\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\partial_t Iu}(t,\xi)Iu(t,x)\overline{Iu}(t,x)Iu(t,x)dx - \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\partial_t Iu}(t,x)I(uuu)dx).$$

Pela Proposição 1.2.4, seguem as duas igualdades abaixo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\partial_t Iu}(t,\xi)Iu(t,x)\overline{Iu}(t,x)Iu(t,x)dx$$
$$= (2\pi)^{-9}\int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i=0} \widehat{\overline{\partial_t Iu}}(t,\xi_1)\widehat{Iu}(t,\xi_2)\widehat{\overline{Iu}}(t,\xi_3)\widehat{Iu}(t,\xi_4)d\xi$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\partial_t Iu}(t,x)I(uuu)dx$$
$$= (2\pi)^{-9}\int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i=0} \frac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}\widehat{\overline{\partial_t Iu}}(t,\xi_1)\widehat{Iu}(t,\xi_2)\widehat{\overline{Iu}}(t,\xi_3)\widehat{Iu}(t,\xi_4))d\xi$$

com $d\xi$ denotando $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$. Daqui até o fim desta seção usaremos esta notação sempre que não houver perigo de confusão. Portanto,

$$|E(Iu(\tau)) - E(Iu(a))| \leq \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\overline{\partial_t Iu}}(t,\xi_1) \widehat{Iu}(t,\xi_2) \widehat{\overline{Iu}}(t,\xi_3) \widehat{Iu}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

onde $\mu(\xi) = 1 - \frac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}$.

Usaremos a decomposição homogênea de Littlewood-Paley para estimar variação de energia. Sendo $u_i = P_{N_i} u$, definiremos:

$$X = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\overline{\partial_t Iu_1}}(t,\xi_1) \widehat{Iu_2}(t,\xi_2) \widehat{\overline{Iu_3}}(t,\xi_3) \widehat{Iu_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|.$$

Para estimar X utilizaremos a seguinte estratégia, descrita em três passos:

1. Buscaremos uma estimativa para $\mu(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ da seguinte forma:

   $$\mu(\xi_2, \xi_3, \xi_4) \leq B(N_2, N_3, N_4).$$

   Então para algum $A \subset \{1,2,3,4\}$ a ser escolhido nós iremos decompor $u_i, \forall i \in A$, nas partes lineares $u_i^{l,J}$ e não lineares $u_i^{nl,J}$ e depois de expandirmos nos restará estimar a seguinte expressão

   $$Y = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\overline{\partial_t Iv_1}}(t,\xi_1) \widehat{Iv_2}(t,\xi_2) \widehat{\overline{Iv_3}}(t,\xi_3) \widehat{Iv_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

   com $v_j, j \in \{1,2,3,4\}$, denotando u_j ou $u_j^{l,J}$ ou $u_j^{nl,J}$, note que os valores de v_j dependerão da escolha de A.
   Este passo se encerra com a aplicação do seguinte teorema de Coifman-Meyer.

   Teorema 3.2.1 *Seja $\sigma : \mathbb{R}^{nk} \longmapsto \mathbb{C}$ uma função infinitamente diferenciável tal que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{nk}$ existe um $c(\alpha)$ satisfazendo*

   $$\left| \partial_\xi^\alpha \sigma(\xi) \right| \leq \frac{c(\alpha)}{(1+|\xi|)^{|\alpha|}}, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^{nk}.$$

   Sendo Λ_σ o operador multilinear

   $$\Lambda_\sigma(f_1, \ldots, f_k)(x) = \int_{\mathbb{R}^{nk}} e^{ix(\xi_1+\ldots+\xi_k)} \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k) \widehat{f_1}(\xi_1) \ldots \widehat{f_k}(\xi_k) d\xi_1 \ldots d\xi_k$$

   e $q_j \in (1,\infty)$ para $j \in \{1,\ldots,k\}$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_k} \leq 1$, então existe uma constante $C = C(q_j, n, k, c(\alpha))$ de modo que para funções $f_1, \ldots, f_k$ em $\mathcal{S}$ tem-se:

   $$\|\Lambda_\sigma(f_1, \ldots, f_k)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_1\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \cdots \|f_k\|_{L^{q_k}(\mathbb{R}^n)}.$$

Para demonstração deste teorema veja [7].

Antes de aplicarmos o teorema de Coifman Meyer devemos estabelecer a seguinte desigualdade:

$$Y \lesssim \left| B \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\Lambda_{\frac{\mu}{B}}} (\overline{\partial_t I v_1}(t) I v_2(t) \overline{I v_3}(t))(-\xi_4) \widehat{I v_4}(t, \xi_4) d\xi_4 dt \right|. \tag{3.32}$$

De fato,

$\widehat{\Lambda_{\frac{\mu}{B}}} (\overline{\partial_t I v_1}(t) I v_2(t) \overline{I v_3}(t))(-\xi_4)$

$= \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi_4} \int_{\mathbb{R}^{3.3}} e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)} \frac{\mu(\xi_1+\ldots+\xi_3)}{B} \widehat{\overline{\partial_t I v_1}}(t,\xi_1) \widehat{I v_2}(t,\xi_2) \widehat{\overline{I v_3}}(t,\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 dx.$

Multiplicando por $\widehat{I u_4}(t, \xi_4)$ e integrando em ξ_4, teremos:

$\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\Lambda_{\frac{\mu}{B}}} \left(\overline{\partial_t I v_1}(t) I v_2(t) \overline{I v_3}(t)\right) (-\xi_4) \widehat{I v_4}(t, \xi_4) d\xi_4$

$= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^{3.4}} e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)} \frac{\mu}{B} \widehat{\overline{\partial_t I v_1}}(t,\xi_1) \widehat{I v_2}(t,\xi_2) \widehat{\overline{I v_3}}(t,\xi_3) \widehat{I v_4}(t,\xi_4) d\xi_1 \ldots dx d\xi_4$

$= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^{3.4}} e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)} dx \frac{\mu}{B} \widehat{\overline{\partial_t I v_1}}(t,\xi_1) \widehat{I v_2}(t,\xi_2) \widehat{\overline{I v_3}}(t,\xi_3) \widehat{I v_4}(t,\xi_4) d\xi_1 \ldots d\xi_4$

$= \int_{\mathbb{R}^3} (2\pi)^3 \delta_0(\xi_1 + \ldots + \xi_4) \frac{\mu}{B} \widehat{\overline{\partial_t I v_1}}(t,\xi_1) \widehat{I v_2}(t,\xi_2) \widehat{\overline{I v_3}}(t,\xi_3) \widehat{I v_4}(t,\xi_4) d\xi_1 \ldots d\xi_4$

$= (2\pi)^3 \int_{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0} \frac{\mu}{B} \widehat{\overline{\partial_t I v_1}}(t,\xi_1) \widehat{I v_2}(t,\xi_2) \widehat{\overline{I v_3}}(t,\xi_3) \widehat{I v_4}(t,\xi_4) d\xi_1 \ldots d\xi_4.$

Por fim, multiplicando a última igualdade por B e integrando na variável t de 0 à τ obtemos (3.32).

Neste ponto estamos em condições de melhorar a estimativa (3.32). De fato, aplicando (1.3) à (3.32), teremos:

$$\begin{aligned} Y &\lesssim (2\pi)^3 \left| B \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_{\frac{\mu}{B}} (\overline{\partial_t I v_1}(t) I v_2(t) \overline{I v_3}(t))(x) I v_4(t,x) dx dt \right| \\ &\lesssim (2\pi)^3 B \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^3} \left| \Lambda_{\frac{\mu}{B}} (\overline{\partial_t I v_1}(t) I v_2(t) \overline{I v_3}(t))(x) I v_4(t,x) \right| dx dt. \end{aligned}$$

Agora, a desigualdade de Hölder e o Teorema 3.2.1 implicam em

$$Y \lesssim B(N_2, N_3, N_4) \left\| \partial_t I v_1 \right\|_{L_t^{p_1}(J) L_x^{q_1}} \left\| I v_2 \right\|_{L_t^{p_2}(J) L_x^{q_2}} \ldots \left\| I v_4 \right\|_{L_t^{p_4}(J) L_x^{q_4}} \tag{3.33}$$

com $(p_j, q_j) \in [0, \infty] \times (0, \infty)$ de modo que $\sum_{j=1}^4 \frac{1}{p_j} = 1 = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{q_j}$ e (p_j, q_j) é m_j-onda admissível para algum m_j tal que $0 \le m_j < 1$ e $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = \frac{1}{2}$.

2. Para refinarmos a estimativa (3.33) provaremos neste passo três desigualdades que chamaremos de desigualdades de Bernstein que conduzirá a demonstração da Proposição 3.2.4.

   Nas condições do passo anterior, seguem as desigualdades de Bernstein:

$$\|Iv_j|\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}} \lesssim N_j^{m_j-1} \left\|D^{1-m_j}Iv_j|\right\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}}$$

$$\|\partial_t Iv_1|\|_{L_t^{p_1}(J)L_x^{q_1}} \lesssim N_1^{m_1} \left\|D^{-m_1}\partial_t Iv_1|\right\|_{L_t^{p_1}(J)L_x^{q_1}}$$

$$\|Iv_j|\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}} \lesssim \frac{1}{N_j} \|DIv_j|\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}}.$$

   Como as três desigualdades são provadas da mesma forma, será suficiente provarmos apenas uma delas, provaremos então a primeira.

   Suponhamos sem perda de generalidade que $v_j = P_{N_j}u$, portanto se definirmos $w(t,x) = Iv_j(t, \frac{x}{N_j})$ então teremos $D^k w(t,x) = N_j^{-k} D^k Iv_j(t, \frac{x}{N_j})$, onde tomamos $k = 1 - m_j$ para simplificar a notação. Calculando as normas, obtemos:

$$\|w\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}} = N_j^{\frac{3}{q_j}} \|Iv_j|\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}}$$

$$\left\|D^k w\right\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}} = N_j^{\frac{3}{q_j}-k} \left\|D^k Iv_j\right\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}}.$$

   Portanto, provando a desigualdade

$$\|w\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}} \leq C \left\|D^k w\right\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}}$$

   para alguma constante universal C, teremos o resultado.

$$\|Iv_j|\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}} \leq C N_j^{-k} \left\|D^k Iv_j\right\|_{L_t^{p_j}(J)L_x^{q_j}}.$$

   De fato, aplicando a transformada de Fourier com relação a variável x, teremos:

$$\widehat{w}(t,\xi) = N_j^3 m(N_j\xi)\widehat{v_j}(t, N_j\xi) = N_j^3 m(N_j\xi)\psi(\xi)\widehat{u}(t, N_j\xi).$$

   Como sabemos $\mathrm{Supp}(\psi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\} = \mathbf{C}$ e pela Proposição 1.2.1, existe $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} < |\xi| < 4\})$ tal que $\phi(\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbf{C}$.

   Portanto,

$$\widehat{w}(t,\xi) = \phi(\xi)\widehat{w}(t,\xi) = \phi(\xi)|\xi|^{-k}|\xi|^k\widehat{w}(t,\xi).$$

Agora, aplicando a transformada inversa de Fourier obtemos:

$$w(t,x) = D^{-k}g(x) *_x D^k w(t,x)$$

onde $g = \mathcal{F}^{-1}(\phi)$.

Fixando t, segue pela desigualdade de Young que

$$\|w(t,.)\|_{L_x^{q_j}} \leq \left\|D^{-k}g\right\|_{L^1} \left\|D^k w(t,.)\right\|_{L_x^{q_j}}.$$

Porém,

$$\begin{aligned}
\left\|D^{-k}g\right\|_{L^1} &= \int |D^{-k}g(x)|dx \\
&= \int \frac{(1+|x|^2)^3}{(1+|x|^2)^3}|D^{-k}g(x)|dx \leq C_0 \left\|(1+|\cdot|^2)^3|D^{-k}g|\right\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

e pelo Corolário 1.2.1, segue:

$$\begin{aligned}
\left\|D^{-k}g\right\|_{L^1} &\leq C_0(2\pi)^{-3} \left\|(Id-\Delta)^3|\cdot|^{-k}\phi|\right\|_{L^1} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Observando a expressão de $\left\|(Id-\Delta)^3|\cdot|^{-k}\phi|\right\|_{L^1}$ e a hipótese $K \leq 1$ é fácil ver que podemos tomar um $C > 0$ de forma que independa de K.

Assim,

$$\|w(t,.)\|_{L_x^{q_j}} \leq C \left\|D^k w(t,.)\right\|_{L_x^{q_j}}.$$

Calculando agora a norma na variável t, obteremos o resultado

$$\|w\|_{L_x^{q_j} L_t^{p_j}} \leq C \left\|D^k w\right\|_{L_x^{q_j} L_t^{p_j}}.$$

3. Em alguns casos criaremos $N_j^{\pm}$ para alguns j´s considerando pequenas variações $(p_j\pm, q_j\pm) \in [1,\infty] \times (1,\infty)$ $m_j\pm$-onda admíssivel de (p_j, q_j). Por exemplo, se criarmos pequenas variações (p_1+, q_1-),(p_j+, q_j-) e $(6-, 3+)$ respectivamente de (p_1, q_1),(p_j, q_j) e $(6, 3)$, então pelas desigualdades de Bernstein e Hölder, teremos:

$$\|Iv_j\|_{L_t^{p_j+}(J)L_x^{q_j-}} \lesssim N_j^- N_j^{m_j-1} \left\|D^{1-(m_j-)}Iv_j|\right\|_{L_t^{p_j+}(J)L_x^{q_j-}}$$

$$\|\partial_t Iv_1\|_{L_t^{p_j+}(J)L_x^{q_j-}} \lesssim N_1^- N_1^{m_1} \left\|D^{-(m_1-)}\partial_t Iv_1|\right\|_{L_t^{p_j+}(J)L_x^{q_j-}}$$

$$\|Iv_j\|_{L_t^{6-}(J)L_x^{3+}} \lesssim \frac{N_j^+}{N_j} \|DIv_j|\|_{L_t^6(J)L_x^3}$$

$$\|\partial_t I v_1\|_{L_t^{6-}(J)L_x^{3+}} \lesssim N_1^{+} \|\partial_t I v_1\|\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}}.$$

Outra desigualdade que também nos será útil, é

$$\|Iv_j\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \lesssim N_j^{+} \left\|D^{1-(1-)} I v_j\right\|\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}. \tag{3.34}$$

Para a prova desta desigualdade denotaremos a medida de Lebesgue do intervalo J por τ, assim, sejam $\epsilon > 0, \epsilon' > 0$ e $\epsilon'' > 0$ tal que $\frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon'}{2} - \frac{\epsilon''}{3}$, logo obtemos

$$\begin{aligned}
\|Iv_j\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon}}} &\lesssim N_j^{\epsilon'} \left\|D^{-\epsilon'} I v_j\right\|\Big\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon}}} \\
&\lesssim N_j^{\epsilon'} \tau^{\frac{\epsilon'-\epsilon}{2}} \left\|D^{-\epsilon'} I v_j\right\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon'}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon}}} \\
&\lesssim N_j^{\epsilon'} \tau^{\frac{\epsilon'-\epsilon}{2}} \left\|D^{-\epsilon'+\epsilon''} I v_j\right\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon'}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon'}}} \\
&\lesssim N_j^{\epsilon''-\epsilon'} \tau^{\frac{\epsilon'-\epsilon}{2}} \left\|D^{1-(1-\epsilon')} I v_j\right\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon'}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon'}}}
\end{aligned}$$

aplicando Bernstein para obter a primeira desigualdade, Hölder para obter a segunda, Proposição 1.3.3 para a terceira e Bernstein para a quarta.

Agora tomando $\epsilon' = 5\epsilon$, teremos $\epsilon'' - \epsilon' = \epsilon$ e portanto,

$$\|Iv_j\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon}}} \lesssim N_j^{\epsilon} \tau^{2\epsilon} \left\|D^{1-(1-\epsilon')} I v_j\right\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon'}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon'}}}.$$

Escolheremos então $\epsilon > 0$ tal que $\tau^{2\epsilon} \leq 2$, assim

$$\|Iv_j\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon}}} \lesssim N_j^{\epsilon} \left\|D^{1-(1-\epsilon')} I v_j\right\|_{L_t^{\frac{2}{1-\epsilon'}}(J)L_x^{\frac{2}{\epsilon'}}}.$$

Concluindo, para $\epsilon > 0$ muito pequeno, teremos:

$$\|Iv_j\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \lesssim N_j^{+} \left\|D^{1-(1-)} I v_j\right\|\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}.$$

Uma vez descrita a estratégia, vamos agora aplica-lá.

Por questão de simetria, podemos assumir que $N_2 \geq N_3 \geq N_4$.

Seja $N_1^*, \ldots, N_4^*$ os quatro números $N_1, \ldots, N_4$ na ordem $N_1^* \geq N_2^* \geq N_3^* \geq N_4^*$.

Como estamos interessados em estimar X nos casos em que $X \neq 0$, podemos supor que $N_1^* \gtrsim N$ desde que μ não se anule e $N_1^* \sim N_2^*$ desde que $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$ não implique em $X = 0$.

Há três casos a se analisar.

- **Caso 1:** $N_1^* = N_2$ e $N_2^* = N_1$.

  Escrevendo $u_i = u_i^{l,J} + u_i^{nl,J}$, $i \in \{1,2\}$, precisaremos estimar

$$X_1 = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{l,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{l,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

$$X_2 = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{l,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

$$X_3 = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{nl,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{l,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

$$X_4 = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{nl,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|.$$

  Há dois subcasos a considerar:

  -Caso 1.a: $N_3 \gtrsim N$.

  Para este caso, teremos

$$\begin{aligned} |\mu| &\lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} \\ &\lesssim \frac{1}{m(N_3)m(N_4)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

  Por (3.22),(3.23),(3.24), (3.34) e (3.35), temos:

$$\begin{aligned} X_1 &\lesssim \tfrac{1}{m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \left\| I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2} \| I u_3 \|_{L_t^{\infty-}(J)L_x^{2+}} \| I u_4 \|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \\ &\lesssim \tfrac{1}{m(N_3)m(N_4)} N_1^- N_1 \tfrac{1}{N_2} \tfrac{N_3^+}{N_3} N_4^+ \left\| D^{-(1-)} \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \left\| D^{1-0} I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2} \\ &\left\| D^{1-(0+)} I u_3 \right\|_{L_t^{\infty-}(J)L_x^{2+}} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \\ &\lesssim (max\{1,|J|\})^{\frac{1}{2}} \tfrac{N_2^{--} N_4^+}{N^{1-}}. \end{aligned}$$

  De modo similar,

$$X_2 \lesssim \frac{1}{m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \left\| I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2} \| I u_3 \|_{L_t^{\infty-}(J)L_x^{2+}}$$

$$\| I u_4 \|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{1}{2}} \frac{N_2^{--} N_4^{+}}{N^{1-}}$$

$$X_3 \lesssim \frac{1}{m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2} \left\| I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \| I u_3 \|_{L_t^{\infty-}(J)L_x^{2+}}$$

$$\| I u_4 \|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim \frac{1}{m(N_3)m(N_4)} N_2^{-} \frac{N_3^{+}}{N_3} N_4^{+} \left\| D^{(-0)} \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2} \left\| D^{1-(1-)} I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\left\| D^{1-(0+)} I u_3 \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}.$$

$$\lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{1}{2}} \frac{N_2^{--} N_4^{+}}{N^{1-}}.$$

Para estimarmos X_4 escreveremos $u_3 = u_3^{l,J} + u_3^{nl,J}$ e assim será suficiente estimarmos

$$X_{4,1} = \left| \int_0^{\tau} \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{nl,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{l,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

e

$$X_{4,2} = \left| \int_0^{\tau} \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{nl,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{nl,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|.$$

Portanto,

$$X_{4,1} \lesssim \frac{1}{m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty-}(J)L_x^{2+}} \left\| I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2} \left\| I u_3^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\| I u_4 \|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$X_{4,1} \lesssim \frac{1}{m(N_3)m(N_4)} N_1^{+} \frac{1}{N_2} N_3^{+} N_4^{+} \left\| D^{-(0+)} \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty-}(J)L_x^{2+}} \left\| D I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^2}$$

$$\left\| D^{1-1-} I u_3^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{1}{2}} \frac{N_2^{--} N_4^{+}}{N^{1-}}$$

e pela Proposição 3.2.3, teremos

$$X_{4,2} \lesssim \tfrac{1}{m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^{6-}(J)L_x^{3+}} \left\| I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}} \left\| I u_3^{nl,J} \right\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}}$$

$$\| I u_4 \|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim \tfrac{1}{m(N_3)m(N_4)} N_1^{+} \tfrac{1}{N_2} \tfrac{1}{N_3} N_4^{+} \left\| \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}} \left\| D I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}}$$

$$\left\| D^{I} u_3^{nl,J} \right\|_{L_t^{6}(J)L_x^{3}} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{5}{2}} \tfrac{N_2^{--} N_4^{+}}{N^{2-}}.$$

-Caso 1.b: $N_3 << N$.

$$|\mu(\xi_2, \xi_3, \xi_4)| = \left| 1 + \frac{m(\xi_2, \xi_3, \xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)} \right|$$

$$= \left| \frac{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4) + m(\xi_2, \xi_3, \xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)} \right|.$$

Pelo teorema da desigualdade do valor médio, segue:

$$|\mu(\xi_2, \xi_3, \xi_4)| \lesssim \frac{|\nabla(\xi_2)||\xi_3 + \xi_4|}{m(\xi_2)}$$

$$\lesssim \frac{N_3}{N_2}.$$

Agora para este μ que acabamos de calcular, se repetirmos os argumentos do Caso 1.a para os novos $X_1, X_2, X_3, X_{4,1}$ e $X_{4,2}$, veremos que aparece um fator N_3^{α} com $\alpha \geq 0$ e consequentemente comparável à N^{α}. Por exemplo,

$$X_1 \lesssim \tfrac{N_3}{N_2} \left\| \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \left\| I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^{2}} \| I u_3 \|_{L_t^{\infty-}(J)L_x^{2+}} \| I u_4 \|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$X_1 \lesssim \tfrac{N_3}{N_2} N_1^{-} N_1 \tfrac{1}{N_2} \tfrac{N_3 +}{N_3} N_4^{+} \left\| D^{-(1-)} \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}} \left\| D^{1-0} I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^{2}}$$

$$\left\| D^{1-(0+)} I u_3 \right\|_{L_t^{\infty}(J)L_x^{2}} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J)L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{1}{2}} \tfrac{N_2^{--} N_4^{+}}{N^{1-}}.$$

- Caso 2: $N_1^* = N_1$ e $N_2^* = N_2$.

  Pelo fato de $N_1 \sim N_2$, neste caso se repetirão todos o argumentos do caso anterior.

- Caso 3: $N_1^* = N_2$ e $N_2^* = N_3$.

  Escrevendo $u_i = u_i^{l,J} + u_i^{nl,J}$, $i \in \{2,3\}$, precisaremos estimar

$$X_1' = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{l,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{l,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

$$X_2' = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{l,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{nl,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

$$X_3' = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{l,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

$$X_4' = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{nl,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

  para

$$|\mu| \lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)}. \tag{3.36}$$

  Por (3.22), (3.23), (3.24), (3.34) e (3.36), teremos:

$$X_1' \lesssim \tfrac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1 \right\|_{L_t^{\infty-}(J) L_x^{2+}} \left\| I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^\infty(J) L_x^2} \left\| I u_3^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\left\| I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim \tfrac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} N_1^+ \tfrac{1}{N_2} N_3^+ N_4^+ \left\| D^{-(0+)} \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty-}(J) L_x^{2+}} \left\| D I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^\infty(J) L_x^2}$$

$$\left\| D^{1-(1-)} I u_3^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1,|J|\})^{\frac{1}{2}} \tfrac{N_1^+ N_2^{---} N_4^+}{N^{1-}}$$

  e

$$X_2' \lesssim \tfrac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1 \right\|_{L_t^{\infty-}(J) L_x^{2+}} \left\| I u_2^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}} \left\| I u_3^{nl,J} \right\|_{L_t^\infty(J) L_x^2}$$

$$\left\| I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$X_2' \lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} N_1^+ N_2^+ \frac{1}{N_3} N_4^+ \left\| D^{-(0+)} \partial_t I u_1 \right\|_{L_t^{\infty-}(J) L_x^{2+}}$$

$$\left\| D^{1-(1-)} I u_2^{l,j} \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}} \left\| D^{1-(1-)} I u_3^{l,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J) L_x^2} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1,|J|\})^{\frac{1}{2}} \frac{N_1^+ N_2^{---} N_4^+}{N^{1-}}.$$

Similarmente, como $N_2 \sim N_3$, teremos

$$X_3' \lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1 \right\|_{L_t^{\infty-}(J) L_x^{2+}} \left\| I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J) L_x^2} \left\| I u_3^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\left\| I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1,|J|\})^{\frac{1}{2}} \frac{N_1^+ N_2^{---} N_4^+}{N^{1-}}.$$

Para estimarmos X_4' escreveremos $u_1 = u_1^{l,J} + u_1^{nl,J}$ e assim será suficiente estimarmos

$$X_{4,1}' = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{l,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{nl,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|$$

e

$$X_{4,2}' = \left| \int_0^\tau \int_{\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0} \mu(\xi) \widehat{\partial_t I u_1^{nl,J}}(t,\xi_1) \widehat{I u_2^{nl,J}}(t,\xi_2) \widehat{I u_3^{nl,J}}(t,\xi_3) \widehat{I u_4}(t,\xi_4) d\xi dt \right|.$$

Portanto,

$$X_{4,1}' \lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}} \left\| I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J) L_x^2} \left\| I u_3^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty-}(J) L_x^{2+}}$$

$$\left\| I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$X_{4,1}' \lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} N_1^- N_1 \frac{1}{N_2} \frac{N_3+}{N_3} N_4^+ \left\| D^{-(1-)} \partial_t I u_1^{l,J} \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\left\| D I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty}(J) L_x^2} \left\| D^{1-(0+)} I u_3^{nl,J} \right\|_{L_t^{\infty-}(J) L_x^{2+}} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty-}}$$

$$\lesssim (max\{1,|J|\})^{\frac{1}{2}} \frac{N_1^+ N_2^{---} N_4^+}{N^{1-}}.$$

Pela Proposição 3.2.3, temos

$$X'_{4,2} \lesssim \tfrac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} \left\| \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^{6-}(J) L_x^{3+}} \left\| I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^6(J) L_x^3} \left\| I u_3^{nl,J} \right\|_{L_t^6(J) L_x^3}$$

$$\| I u_4 \|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty -}}$$

$$\lesssim \tfrac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)m(N_4)} N_1^{+} \tfrac{1}{N_2} \tfrac{1}{N_3} N_4^{+} \left\| \partial_t I u_1^{nl,J} \right\|_{L_t^6(J) L_x^3} \left\| D I u_2^{nl,J} \right\|_{L_t^6(J) L_x^3}$$

$$\left\| D I u_3^{nl,J} \right\|_{L_t^6(J) L_x^3} \left\| D^{1-(1-)} I u_4 \right\|_{L_t^{2+}(J) L_x^{\infty -}}$$

$$\lesssim (max\{1, |J|\})^{\frac{5}{2}} \tfrac{N_1^{+} N_2^{---} N_4^{+}}{N^{2-}} \quad \square$$

3.3 Prova do teorema principal

Nesta seção provaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1 *O problema de Cauchy para a equação da onda cúbica é globalmente bem posto em* $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ *para* $1 > s > \frac{13}{18} \cong 0,722$*. Mais ainda, se* $s > \frac{13}{18}$ *está perto de* $\frac{13}{18}$ *e* T *é suficientemente grande então*

$$\|(u(T), \partial_t u(T))\|^2_{H^s \times H^{s-1}} \leq C(\|u_o\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}}) T^{\frac{28s-18}{18s-13}+}. \tag{3.37}$$

Demonstração: Seja $T > 0$ e $N = N(T) >> 1$ um parametro diádico a ser escolhido futuramente. A prova deste Teorema ocerrerá em três passos.

Passo 1: Provaremos que existe uma constante $C_0 = C_0(\|u_0\|_{H^s}, \|u_1\|_{Hs-1})$ tal que, se λ satisfaz $\lambda = C_0 N^{\frac{2(1-s)}{2s-1}}$ então $E(Iu_\lambda(0)) \leq \frac{1}{2}$.

Seja $\lambda >> 1$, gostariamos de estimar $E(Iu_\lambda(0))$.
Pela identidade de Plancherel teremos:

$$\begin{aligned}
\|DIu_\lambda(0)\|^2_{L^2} &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 m(\xi)^2 |\widehat{u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim \int_{|\xi|\leq 2N} |\xi|^2 |\widehat{u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 2N} |\xi|^2 \frac{N^{2(1-s)}}{|\xi|^{2(1-s)}} |\widehat{u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim N^{2(1-s)} \|u_\lambda(0)\|^2_{\dot{H}^s} \\
&\lesssim N^{2(1-s)} \lambda^{1-2s} \|u_0\|^2_{\dot{H}^s} \\
&\lesssim N^{2(1-s)} \lambda^{1-2s} \|u_0\|^2_{H^s} \\
\|\partial_t I u_\lambda(0)\|^2_{L^2} &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3} m(\xi)^2 |\widehat{\partial_t u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim \int_{|\xi|\leq 2N} |\widehat{\partial_t u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 2N} \frac{N^{2(1-s)}}{|\xi|^{2(1-s)}} |\widehat{\partial_t u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim N^{2(1-s)} \|\partial_t u_\lambda(0)\|^2_{\dot{H}^{s-1}} \\
&\lesssim N^{2(1-s)} \left(\int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{\partial_t u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2(s-1)} |\widehat{\partial_t u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi \right) \\
&\lesssim N^{2(1-s)} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{|\xi|\leq \lambda} |\widehat{u_1}(\xi)|^2 d\xi + \lambda^{1-2s} \int_{|\xi|\geq \lambda} |\xi|^{2(s-1)} |\widehat{u_1}(\xi)|^2 d\xi \right) \\
&\lesssim N^{2(1-s)} \lambda^{1-2s} \|u_1\|^2_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 1.3.2 para $s = \frac{3}{4}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|Iu_\lambda(0)\|_{L^4}^2 &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{\frac{3}{2}} |\widehat{Iu_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim \int_{|\xi|\leq 2N} |\xi|^{\frac{3}{2}} |\widehat{u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq 2N} |\xi|^{\frac{3}{2}} \frac{N^{2(1-s)}}{|\xi|^{2(1-s)}} |\widehat{u_\lambda}(0,\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_{|\xi|\leq 2N\lambda} |\xi|^{\frac{3}{2}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi + N^{2(1-s)} \lambda^{\frac{3}{2}-2s} \int_{|\xi|\geq 2N\lambda} |\xi|^{2s-\frac{1}{2}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_{|\xi|\leq 2N\lambda} |\xi|^{\frac{3}{2}+2s-2s} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi + N^{2(1-s)} \lambda^{\frac{3}{2}-2s} \int_{|\xi|\geq 2N\lambda} \frac{|\xi|^{2s}}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim \frac{Max\{(N\lambda)^{\frac{3}{2}-2s}, 1\}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \|u_0\|_{H^s}^2 + N^{\frac{3}{2}-2s} \lambda^{1-2s} \|u_0\|_{H^s}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Iu_\lambda(0)\|_{L^4}^4 \lesssim N^{2(1-s)} \lambda^{1-2s} \|u_0\|_{H^s}^4.$$

Assim,

$$E(Iu_\lambda(0)) \lesssim N^{2(1-s)} \lambda^{1-2s} (\|u_0\|_{H^s}^2 + \|u_1\|_{H^{s-1}}^2 + \|u_0\|_{H^s}^4).$$

Portanto existe $C_0 = C_0(\|u_0\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}})$ tal que, se λ satisfaz

$$\lambda = C_0 N^{\frac{2(1-s)}{2s-1}} \tag{3.38}$$

então

$$E(Iu_\lambda(0)) \leq \frac{1}{2}. \tag{3.39}$$

Passo 2: Seja F_T o seguinte conjunto:

$$F_T = \left\{ T' \in [0,T] : \sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) \leq 1 \right\}$$

com λ satizfazendo (3.38). Neste passo iremos provar que F_T é todo intervalo $[0,T]$ para algum $N = N(T) >> 1$.

Como $[0,T]$ é conexo em $\mathbb{R}$, é suficiente provarmos que F_T é não vazio, fechado e aberto em $[0,T]$.

- F_T é não vazio, pois $0 \in F_T$ pelo passo 1.
- Seja $\{T'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F_T convergindo para algum $T_0 \in [0,T]$.

  Dado $\bar{t} \in [0, \lambda T_0]$, segue:

  1. Se $\bar{t} < \lambda T_0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{t} \leq \lambda T'_{n_0}$ e portanto

$$E(Iu_\lambda(\bar{t})) \leq \sup_{t\in[0,\lambda T'_{n_0}]} E(Iu_\lambda(t)) \leq 1.$$

2. Se $\bar{t} = \lambda T_0$, então por continuidade teremos as convergências:

$$\lim_{n\to\infty} |\partial_t I u_\lambda(x, \lambda T'_n)|^2 = |\partial_t I u_\lambda(x, \lambda T_0)|^2$$

$$\lim_{n\to\infty} |D I u_\lambda(x, \lambda T'_n)|^2 = |D I u_\lambda(x, \lambda T_0)|^2$$

$$\lim_{n\to\infty} |I u_\lambda(x, \lambda T'_n)|^4 = |I u_\lambda(x, \lambda T_0)|^4.$$

E pelo teorema da convergência domínada, segue a convergência:

$$\lim_{n\to\infty} E(I u_\lambda(\lambda T'_n)) = E(I u_\lambda(\lambda T_0)).$$

Como $E(I u_\lambda(\lambda T'_n)) \leq 1$ por hipótese, pois $T'_n \in F_T$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $E(I u_\lambda(\lambda T_0)) \leq 1$.

Portanto, $\sup\limits_{t\in[0,\lambda T_0]} E(I u_\lambda(t)) \leq 1$ e assim F_T é fechado em $[0, T]$.

- Provaremos agora que F_T é aberto.

  Utilizando o teorema da convergência domínada e repetindo alguns dos últimos argumentos, temos a continuidade de $E(I u_\lambda(t))$, portanto tomando $\widetilde{T}' \in F_T$ e fixando $0 < \epsilon < 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\lambda\widetilde{T}' - t| < \delta \Rightarrow |E(I u_\lambda(\lambda\widetilde{T}')) - E(I u_\lambda(t))| < \epsilon, \quad \forall t \in [0, \lambda T]. \tag{3.40}$$

  Tomando $\eta < \frac{\delta}{\lambda}$, afirmamos que se $T' \in (\widetilde{T}' - \eta, \widetilde{T}' + \eta) \cap [0, T]$ então

$$\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(I u_\lambda(t)) \leq 2.$$

  De fato, fixado $T' \in (\widetilde{T}' - \eta, \widetilde{T}' + \eta) \cap [0, T]$, há dois casos a considerar:

  1. Se $T' \leq \widetilde{T}'$, então $\sup\limits_{t\in[0,\lambda T']} E(I u_\lambda(t)) \leq \sup\limits_{t\in[0,\lambda\widetilde{T}']} E(I u_\lambda(t)) \leq 1$, pois $\widetilde{T}' \in F_T$.

  2. Se $T' > \widetilde{T}'$, então $[0, \lambda T'] = [0, \lambda\widetilde{T}'] \cup [\lambda\widetilde{T}', \lambda T']$. Portanto,

$$\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(I u_\lambda(t)) = max\left\{\sup_{t\in[0,\lambda\widetilde{T}']} E(I u_\lambda(t)), \sup_{t\in[\lambda\widetilde{T}',\lambda T']} E(I u_\lambda(t))\right\}.$$

     Dado $t \in [\lambda\widetilde{T}', \lambda T']$, temos

$$|\lambda\widetilde{T}' - t| < |\lambda\widetilde{T}' - \lambda T'| < \lambda|\widetilde{T}' - T'| < \lambda\eta < \delta.$$

     Por (3.40) e desigualdade triangular, segue:

$$E(Iu_\lambda(t)) \leq |E(Iu_\lambda(\lambda\widetilde{T}')) - E(Iu_\lambda(t))| + E(Iu_\lambda(\lambda\widetilde{T}')) < \epsilon + 1 \leq 2.$$

Portanto,

$$\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) \leq 2. \tag{3.41}$$

Primeiramente, observemos que se $\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) \leq \frac{1}{2}$, então $T' \in F_T$. O nosso intuito neste momento é o exaurir todas as possibilidades e a ainda sim concluir que $T' \in F_T$. Portanto, suponhamos agora que $\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) > \frac{1}{2}$.

Se $\lambda T' \leq 1$, então por (3.39), (3.41) e Proposição 3.2.4, teremos:

$$\left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - \frac{1}{2}\right| \leq \left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - E(Iu_\lambda(0))\right| \lesssim \frac{1}{N^{1-}}. \tag{3.42}$$

Se por outro lado supormos $\lambda T' > 1$, então podemos dividir o intervalo $[0, \lambda T']$ em subintervalos $(J_i = [T_{i-1}, T_i])_{i\in[1,\ldots,n]}$ tal que $|J_1| = \ldots |J_{n-1}| = \epsilon$ e $|J_n| \leq \epsilon$, onde $1 < \epsilon \leq \lambda T'$ é uma constante ainda a ser determinada.

Dessa forma obtemos

$$\left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - \frac{1}{2}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\sup_{t\in J_i} E(Iu_\lambda(t)) - E(Iu_\lambda(T_{i-1}))\right|$$

e pela Proposoção 3.2.4, teremos:

$$\left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - \frac{1}{2}\right| \lesssim \frac{\lambda T'}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{N^{1-}} + \frac{\epsilon^{\frac{5}{2}}}{N^{2-}}\right). \tag{3.43}$$

Procuremos agora minimizar o lado direito de (3.43) com respeito a ϵ.

Se $\lambda T' > N^{\frac{1}{2}}$, então escolhendo $\epsilon \sim N^{\frac{1}{2}}$, teremos:

$$\left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - \frac{1}{2}\right| \lesssim \frac{\lambda T}{N^{\frac{5}{4}-}}. \tag{3.44}$$

Agora, se $\lambda T' \lesssim N^{\frac{1}{2}}$, então escolheremos $\epsilon = \lambda T'$ para obter

$$\left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - \frac{1}{2}\right| \lesssim \frac{1}{N^{\frac{3}{4}-}}. \tag{3.45}$$

Sendo K_0, K_1 e K_2 as constantes determinadas pela relação $\lesssim$ em (3.42),(3.44) e (3.45) respectivamente, seja $K = max\{K_0, K_1, K_2\}$.

Lembrando que $\lambda = C_0 N^{\frac{2(1-s)}{2s-1}}$, segue

$$\frac{\lambda T}{N^{\frac{5}{4}-}} = \frac{TC_0 N^{\frac{2(1-s)}{2s-1}}}{N^{\frac{5}{4}-}} = \frac{TC_0 N^{\frac{2(1-s)}{2s-1}}}{N^{\frac{5}{4}-\eta}} = TC_0 N^{\frac{2(1-s)}{2s-1}-\frac{5}{4}+\eta} \tag{3.46}$$

para algum $\eta > 0$ muito pequeno.

Como $s > \frac{13}{18}$, temos $\frac{2(1-s)}{2s-1} - \frac{5}{4} + \eta < 0$ e portanto para N suficientemente grande, podemos ter $\frac{K\lambda T}{N^{\frac{5}{4}-}} \leq \frac{1}{2}$.

Portando, desde que $s > \frac{13}{18}$ podemos para cada T escolher $N = N(T) >> 1$ tal que

$$Kmax\left(\frac{1}{N^{1-}}, \frac{\lambda T}{N^{\frac{5}{4}-}}, \frac{1}{N^{\frac{3}{4}-}}\right) \leq \frac{1}{2}. \tag{3.47}$$

Com esta escolha de N, teremos:

$$\left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

e portanto,

$$\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) \leq \left|\sup_{t\in[0,\lambda T']} E(Iu_\lambda(t)) - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2} \leq 1.$$

Com isso provamos que se $T' \in (\widetilde{T}' - \delta, \widetilde{T}' + \delta) \cap [0,T]$ então $T' \in F_T$ e portanto F_T é aberto em [0,T].

Logo, pela conexidade de $[0,T]$, temos $F_T = [0,T]$.

Passo 3: Efetuando uma mudança de escala e utilizando o Passo 2, obteremos

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} E(Iu(t)) &\lesssim \lambda \sup_{t\in[0,\lambda T]} E(Iu_\lambda(t)) \\ &\lesssim \lambda. \end{aligned} \tag{3.48}$$

e pela Proposição 3.2.1 obtemos uma relação do tipo (2) que nos garante a boa colocação global do problema em $H^s \times H^{s-1}$ para $\frac{13}{18} < s < 1$. Agora, se T é suficientemente grande e $s > \frac{13}{18}$ está suficientemente perto de $\frac{13}{18}$ então existirá um N satisfazendo

$$\frac{0,9}{2} \leq \frac{K\lambda T}{N^{\frac{5}{4}-}} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.49}$$

Note que esta escolha de N é feita de modo que ainda satisfaça (3.47).

Por (3.46) e (3.49), teremos

$$N^{\frac{2(1-s)}{1-2s}+\frac{5}{4}-} \leq \frac{2}{0,9} KTC_0$$

e portanto:

$$N \le \left(\frac{2}{0,9}KTC_0\right)^{\frac{8s-4}{18s-13}+}. \tag{3.50}$$

Agora, utilizando a Proposição 3.2.1 e (3.48) partiremos da relação

$$\|u(T)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(T)\|_{H^{s-1}}^2 \lesssim \|u_0\|_{H^s} + (T^2+1)\lambda$$

e refinando ela ao longo do texto obteremos (3.37).

Lembrando que λ satisfaz (3.38), segue apartir da última desigualdade e de (3.50) que

$$\|u(T)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(T)\|_{H^{s-1}}^2 \lesssim \|u_0\|_{H^s} + (T^2+1)C_0\left(\left(\frac{2}{0,9}KTC_0\right)^{\frac{8s-4}{18s-13}+}\right)^{\frac{2(1-s)}{2s-1}}.$$

Tendo em vista que $\frac{2(1-s)}{2s-1} \le \frac{5}{4}$, $\forall s \ge \frac{13}{18}$, segue para T suficientemente grande,

$$\begin{aligned}\|u(T)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(T)\|_{H^{s-1}}^2 &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + (T^2+1)C_0\left(\left(\frac{2}{0,9}KTC_0\right)^{\frac{8s-4}{18s-13}+}\right)^{\frac{5}{4}}\\ &= \|u_0\|_{H^s} + T^2C_0\left(\frac{2}{0,9}KTC_0\right)^{\frac{10s-5}{18s-13}+} + C_0\left(\frac{2}{0,9}KTC_0\right)^{\frac{10s-5}{18s-13}+}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u(T)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(T)\|_{H^{s-1}}^2 \lesssim \tag{3.51}$$

$$\|u_0\|_{H^s} + C_0\left(\left(\frac{2}{0,9}KC_0\right)^{\frac{10s-5}{18s-13}+}\right)T^{\frac{46s-31}{18s-13}+} + C_0\left(\left(\frac{2}{0,9}KC_0\right)^{\frac{10s-5}{18s-13}+}\right)T^{\frac{10s-5}{18s-13}+}.$$

Como $s > \frac{13}{18}$ temos $10s-5 < 28s-18$ e portanto para $T \ge 1$, obtemos a relação abaixo:

$$T^{\frac{10s-5}{18s-13}+} < T^{\frac{28s-18}{18s-13}+}. \tag{3.52}$$

Por outro lado se s está suficientemente próximo de $\frac{13}{18}$, podemos ter

$$T^{\frac{46s-31}{18s-13}+} < T^{\frac{28s-18}{18s-13}+}. \tag{3.53}$$

Para concluir, por (3.51) , (3.52) e (3.53), obtemos:

$$\|u(T)\|^2_{H^s} + \|\partial_t u(T)\|^2_{H^{s-1}} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + C_0 \left(\left(\frac{2}{0,9} K C_0 \right)^{\frac{10s-5}{18s-13}+} \right) T^{\frac{28s-18}{18s-13}+}$$

$$\lesssim \left[\|u_0\|_{H^s} + C_0 \left(\left(\frac{2}{0,9} K C_0 \right)^{\frac{10s-5}{18s-13}+} \right) \right] T^{\frac{28s-18}{18s-13}+}.$$

Finalizando a demonstração. □

Referências Bibliográficas

[1] Alinhac, S., *Hiperbolic Diferential Equations*, Springer, New York, 2009.

[2] Bahouri, H., Chemin, J.Y., *On Global Well-Posedness for Defocusing Cubic Wave Equation*, International Mathematics Researches Notes, 1-12, 2006.

[3] Barros-Neto, J., *An Introduction to the Theory of Distributions*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[4] Bergh, J. e Löfström, J., *Interpolation Spaces*, Springer, Berlim, 1976.

[5] Bourgain, J., *Refinement of Strichartz inequality and applications to 2D - NLS with critical nonlinearity*, Internat. Math. Res. Notices, **5** (1998), 253-283.

[6] Chemin, J.-Y., *Théorie des Équations D'Évolution, Notes du Course*, Laboratoire J. L. Lions.

[7] Coifman, R. R. and Meyer, Y., *Commutateurs d'integrales singulières et opérateurs multilinéaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **28** (1978), 177-202.

[8] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka H., and Tao, T., *Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation*, Math. Res. Letters, **9** (2002), 659-682.

[9] Danchin, R., *Fourier Analysis Methods for PDE's, Notes of Course*, Wuhan Normal University, 2005.

[10] Folland, G.B., *Real Analysis: Moderns techniques and its aplications*, Jonh Wiley, New York, 1984.

[11] Gallagher, I. e Planchon, F., *On global solutions to a dofocusing semi-linear wave equation*, Revista Mathematicá Iberoamericana, **19** (2003), 161-177.

[12] Ginebre, J. e Velo, G., *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*, J.Funct. Anal.**133**(1995), 50-68.

[13] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol.1, Springer-Verlang, Berlin, 1990.

[14] Hounie, J., *Teoria Elementar das Distribuições*, Instituto de matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1970.

[15] Keel, M. e Tao, T., *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math. **120** (1998),no. 5, 955,980.

[16] Kenig , C. E., Ponce, G., Vega, L., *Global well-posedness for semi-linear wave equations*, Communications in Partial Differential Equations **25**, n. 9-10, 1741-1752, 2000.

[17] Klainerman, W., Tataru, D., *On the optimal local regularity for Yang-Mills equations in* $\mathbb{R}^{4+1}$, Journal of the American Mathematical Society **12**, n.1, 93-116, 1999.

[18] Lindbald, H. and Sogge, C., *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations*, Journal of Functional Anaysis **130**, n.102, 357-426, 1995.

[19] Marshall, B., *Mixed norm estimates for the Klein-Gordon equation*, Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981), Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, (1983),pp. 638-649.

[20] Oliveira, C. R. de, *Introdução a Análise Funcional*, 3 ed., Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2010.

[21] Pecher, H. , *Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equation*,Math. Z. **185** (1984), no. 2, 261-270.

[22] Peetre, J., *New thoughts on Besov spaces*, Duke University Mathematical Series **1**, Durham N. C. (1976).

[23] Roy, T., *Adapted linear-nonlinear decomposition and global well-posedness for solutions to the defocusing cubic wave equation on* $\mathbb{R}^3$, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Volume **24**, Number 4, August 2009.

[24] Roy, T., *Global Analysis of the Defocusing Cubic Wave Equation in Dimension 3*, Ph.D thesis, University of California Los Angeles, 2008.

[25] Roy, T., *Global well-posedness for the radial defocusing cubic wave equation on* $\mathbb{R}^3$ *and for rough data*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 166, pp. 1-22.

[26] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton Univ. Press, Princeton. NJ, 1970.

[27] Strichartz, R., *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), no. 3, 705-714.

[28] Triebel H. , *Theory of function spaces, Monographs in Mathematics*, vol. **78**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.