UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RENAN DANTAS MEDRADO

ANALITICIDADE E SUAVIDADE MICRO-LOCAL PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS NÃO LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

São Carlos - SP

Abril de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RENAN DANTAS MEDRADO

ANALITICIDADE E SUAVIDADE MICRO-LOCAL PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS NÃO LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientação: Prof Dr. Gustavo Hoepfner

São Carlos - SP
Fevereiro de 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M492as

Medrado, Renan Dantas.
Analiticidade e suavidade micro-local para soluções de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem / Renan Dantas Medrado. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
79 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Equações diferenciais. 2. Regularidade de soluções. 3. Conjunto frente de ondas. I. Título.

CDD: 515.35 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
DM - UFSCar

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi
DM - UFSCar

Prof. Dr. Sergio Luis Zani
ICMC - USP

Agradecimentos

À Deus, pela vida, paz e saúde.

Aos meus pais, David Lúcio Medrado e Mirian Dantas Medrado, pela vida, educação, incentivo e pelo amor recebido.

À Ellen por estar em minha vida e por ter me apoiado e me incentivado.

Ao professor Dr. Gustavo Hoepfner, por ter acreditado em mim, pela orientação, pelos ensinamentos e pelas horas dedicadas a este trabalho.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela oportunidade da realização deste trabalho.

À CNPq, pelo auxilio financeiro.

Resumo

Este trabalho tem como finalidade estudar o conjunto frente de onda C^∞ e o conjunto frente de onda analítico de $u(x,0)$, assumindo que a equação diferencial parcial $u_t = f(x,t,u,u_x)$ possui uma solução $u = u(x,t) \in C^{k+1}$, para $t \geqslant 0$ e (x,t) pertencendo a alguma vizinhança de $(x_0, 0)$, com as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
&v = (u, u_x);\\
&f^v(x,t) = f(x,t,u(x,t),u_x(x,t));\\
&\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} f_{\zeta_j}(x,t,\zeta_0,\zeta)\frac{\partial}{\partial x_j};\\
&g^v(x,t) = \mathcal{L}^v v;\\
&\mathcal{H} = \mathcal{L} + g_0\partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^{N} g_j \partial_{\zeta_j}.
\end{aligned}$$

Nossa análise visa a localização do conjunto frente de onda C^∞. Para isto, faz-se necessário a condição abaixo:

$$\forall x \in \Omega,\ \ 0 \leqslant j \leqslant k,\ \ \Im(\mathcal{H}^j f_\zeta)^v(x,0) = 0,\ \ \Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) \neq 0;$$

tendo como pressuposto $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0)\cdot \xi^0 < 0$, no qual ξ^0 pertence a esfera unitária S^{N-1}.

O conjunto de todos pressupostos apresentados acima nos faz chegar à conclusão da impossibilidade de o ponto (x_0, ξ^0) pertencer ao conjunto frente de onda C^∞ do traço $u(x,0)$. Esta impossibilidade requer não apenas a condição de $f = f(x,t,\zeta_0,\zeta)$ ser de classe $C^\infty(\Omega \times [0,T) \times \mathcal{N})$ como também requer a condição de f ser holomorfa nas variáveis (ζ_0, ζ), nas quais Ω, T e $\mathcal{N}$ representam respectivamente um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, um número real e um subconjunto aberto de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^N$.

Uma outra possibilidade que pode ser admitida com respeito à função f é a de ser analítica real. Neste caso, tem-se que (x_0, ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda analítico do traço $u(x,0)$.

Abstract

This work intends to study the analytic wave front set and the C^∞ wave front set of $u(x,0)$, assuming that the partial differential equations $u_t = f(x,t,u,u_x)$ presents a solution $u = u(x,t) \in C^{k+1}$, once $t \geqslant 0$ and (x,t) belongs to some neighbourhood of $(x_0,0)$, under the following representations:

$$
\begin{aligned}
& v = (u, u_x);\\
& f^v(x,t) = f(x,t,u(x,t),u_x(x,t));\\
& \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} f_{\zeta_j}(x,t,\zeta_0,\zeta)\frac{\partial}{\partial x_j};\\
& g^v(x,t) = \mathcal{L}^v v;\\
& \mathcal{H} = \mathcal{L} + g_0\partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^{N} g_j\partial_{\zeta_j}.
\end{aligned}
$$

Our analysis seeks the localization of the C^∞ wave front set. For that, the condition below is required:

$$\forall x \in \Omega,\ \ 0 \leqslant j \leqslant k,\ \ \Im(\mathcal{H}^j f_\zeta)^v(x,0) = 0,\ \ \Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) \neq 0;$$

and it pressuposes that $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0)\cdot\xi^0 < 0$, in which ξ^0 belongs the unitary sphere S^{N-1}.

The comprehension of all conditions outlined above makes us conclude that it is impossible for the point (x_0,ξ^0) to belong to the C^∞ wave front set of the trace $u(x,0)$. Such impossibility demands not only that the condition $f = f(x,t,\zeta_0,\zeta)$ be of class $C^\infty(\Omega\times[0,T)\times\mathcal{N})$ but also requires the holomorphic property in the variable (ζ_0,ζ). In these cases Ω, T and $\mathcal{N}$ represent respectively an open subset of $\mathbb{R}^N$, a real number and an open subset of $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^N$.

Another possibility that can be taken into consideration regarding the function f is that it can be real-analytic type. In this case, (x_0,ξ^0) will not bellong to the analytic wave front set of the trace $u(x,0)$.

Conteúdo

Introdução

O artigo [11] é um dos precursores do estudo de suavidade micro-local para EDP's. J. Y. Chemin, em [11], provou que se considerarmos $f = f(x,t,\zeta_0,\zeta)$ de classe C^∞ e holomorfa nas variáveis $(\zeta_0,\zeta) \in \mathcal{N} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ e supusermos que existe $u \in C^2(\Omega)$ solução da equação diferencial parcial não linear $u_t = f(x,t,u,u_x)$, então $WF_a(u) \subset \text{char}(\mathcal{L}^v)$, em que $\text{char}(\mathcal{L}^v)$ representa o conjunto característico do operador linearizado

$$\mathcal{L}^v = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j}(x,t,u,u_x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

C. Asano, em [4], publicou uma outra prova deste resultado. Em [12], com a hipótese adicional de f ser analítica nas variáveis (x,t), N. Hanges e F. Treves demonstraram que o conjunto frente de onda analítico de u está contido no conjunto característico do operador linearizado $\mathcal{L}^v$. No trabalho [17], N. Lerner, Y. Morimoto e C.-J. Xu estudam a analiticidade micro-local do problema de Cauchy quase linear do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x,t,u), & 0 < t < T \quad x \in \Omega \\ u(x,0) = \omega(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $T > 0$. As funções a_j, b, $j = 1,...,N$, são restrições em $\Omega \times [0,T] \times V_3$ de funções holomorfas definidas em algum domínio $V = V_1 \times V_2 \times V_3 \subset \mathbb{C}^{N+2}$. Seja

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} a_j(x,t,v)\frac{\partial}{\partial x_j} + b(x,t,v)\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\nu_0 = (a_1,\cdots,a_N),\ \nu_1 = (\mathcal{L}(a_1),\cdots,\mathcal{L}(a_N)) = \mathcal{L}(\nu_0),\cdots,\nu_k = \mathcal{L}(\nu_{k-1}) = \mathcal{L}^k(\nu_0).$$

Em [17] é encontrada a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e u uma solução do problema de Cauchy (1), C^{k+1} para $t > 0$ em uma vizinhança de $(x_0, 0)$. Se para todo $x \in \Omega$ tivermos $\Im\nu_j(x, 0, \omega(x_0)) = 0$, $\Im\nu_k(x, 0, \omega(x_0)) \neq 0$, para todo $0 \leqslant j < k$, então $\forall \xi^0 \in \mathbb{R}^N$ tais $\Im\nu_k(x_0, 0, \omega(x_0)) \cdot \xi^0 > 0$, o ponto $(x_0, \xi^0) \notin WF_a(\omega)$.*

Z. Adwan e S. Berhanu estenderam o teorema acima no trabalho [1], enunciado-o para uma equação não linear $u_t = f(x, t, u, u_x)$, $f = f(x, t, \zeta_0, \zeta)$ restrição de uma função holomorfa. Para tanto os autores generalizaram os vetores $\Im v_j(x, 0, \omega(x))$, expressando $\Im\nu_j(x, 0, \omega(x))$ em termos de múltiplos colchetes de $\mathcal{L}^v$ e seu conjugado $\overline{\mathcal{L}^v}$. Resultados sobre analiticidade micro-local de colchetes até terceira ordem são encontrados em [13] e [14]. Em [2] e [5] são encontrados resultados sobre regularidade Gevrey.

O terceiro capítulo, desta dissertação é baseado em [1]. No terceiro capítulo desta dissertação apresentamos e demonstramos a extensão do Teorema 0.0.1. Para tanto, é utilizada uma caracterização, via transformada FBI, dos conjuntos frente de onda. Já que, a caracterização do conjunto frente de onda analítico via Transformada de Fourier é mais difícil de ser aplicada do que a caracterização via transformada FBI.

A transformada FBI é semelhante à transformada de Fourier. Dada uma distribuição u com suporte compacto definimos sua transformada FBI por $F_u(x, \xi) = \left\langle u_y, e^{i(x-y)\xi - |\xi||x-y|^2} \right\rangle$. Dado um aberto conexo $B \subset S^{m-1}$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^m$, chamamos o conjunto $\Gamma = \{tx \in \mathbb{R}^m : x \in B,\ \ t > 0\}$ de cone aberto conexo com vértice na origem. No segundo capítulo deste trabalho demonstramos que um ponto não está no conjunto frente de onda analítico de uma distribuição se, e somente se, existem uma vizinhança V e um cone Γ tal que a transformada FBI desta distribuição possui decrescimento exponencial em $V \times \Gamma$. De forma análoga, demonstra-se que um ponto não está no conjunto frente de onda C^∞ de uma distribuição se, e somente se, existem uma uma vizinhança V e um cone Γ tal que a transformada FBI desta distribuição possui decrescimento rápido em $V \times \Gamma$.

Esta dissertação está organizada na seguinte forma. No primeiro capítulo deste trabalho serão apresentadas algumas definições e resultados, sem demonstração (as demonstrações destes resultados podem ser encontradas no livro [16]), sobre funções-teste, distribuições, espaço de Schwartz e trasformada de Fourier. No segundo capítulo demonstramos um dos Teoremas de Paley-Wiener, definimos analiticidade e suavidade micro-local e os respectivos conjuntos frente de onda. Ainda no segundo capítulo apresentamos a transformada FBI e duas aplicações para transformada FBI, uma caracterização para analiticidade real e uma para o conjunto frente de onda analítico. Na primeira seção do terceiro capítulo definimos os operadores $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}$ e demonstramos alguns resultados envolvendo os operadores $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}$, os quais serão usados na extensão do Teorema 0.0.1.Na segunda seção do terceiro capitulo apresentamos alguns resultados sobre múltiplos colchetes de Lie. Na terceira seção do terceiro capítulo é demonstrada uma condição para um ponto não pertencer ao conjunto frente de onda C^∞ do traço de uma solução do problema de Cauchy. Na terceira seção demonstramos uma condição para um ponto não pertencer ao conjunto frente de onda analítico do traço de uma solução do problema de Cauchy. Quando não houver confusão iremos usar C para denotar uma constante, se a constante depender de algum parâmetro esta será denotada por C com o parâmetro como índice (por exemplo se depender de λ denotamos por C_λ). Usaremos $O(t^n)$ para denotar alguma função de ordem t^n, para qualquer n natural.

Capítulo

1

Pré-requisitos

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e resultados, sem demonstração (as demonstrações destes resultados podem ser encontradas no livro de Hounie [16]), sobre funções teste, distribuições, espaço de Schwartz e trasformada de Fourier.

1.1 As funções teste

Definição 1.1.1. *As funções $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ indefinidamente diferenciáveis, com suporte compacto em Ω serão chamadas funções teste em Ω. O conjunto das funções teste em Ω será denotado por $C_c^\infty(\Omega)$.*

Definição 1.1.2. *Uma seqüência (ϕ_j) de funções de $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se:*

1. *Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K$, $j = 1, 2, ...$ (sendo $S(\phi_j)$ o suporte de ϕ_j).*
2. *Para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.*

Observação: É possível dotar $C_c^\infty(\Omega)$ com uma topologia não metrizável de forma que a convergência nessa topologia coincida com a dada pela definição acima.

1.2 Distribuições

Definição 1.2.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto é se $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$,*

$\lambda \in \mathbb{C}$ e (ϕ_j) é uma seqüência em $C_c^\infty(\Omega)$, então,

$$u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2) \qquad \textit{(Linearidade)}$$
$$\phi_j \to 0 \quad \textit{em } C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u(\phi_j) \to u(0) \quad \textit{(Continuidade).}$$

Vamos escrever $\langle u, \phi\rangle$ em vez de $u(\phi)$.

As operações soma de distribuições e multiplicação de escalar por distribuição são definidas de maneira óbvia. Dados u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos:

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, \phi\rangle &= \langle u_1, \phi\rangle + \langle u_2, \phi\rangle \\ \langle \lambda u_1, \phi\rangle &= \lambda\langle u_1, \phi\rangle \end{aligned}$$

Dado L operador linear de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$ se $L\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ quando $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ dizemos que L é contínuo.

Definição 1.2.2. *Sejam L e L' operadores lineares contínuos de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que L é o transposto formal de L' e vice versa se*

$$\int_\Omega (L\phi)\psi dx = \int_\Omega \phi(L'\psi)dx \qquad \phi,\ \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.1}$$

Na definição acima temos $\phi, L\phi, \psi, L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, então, a equação (1.1) pode ser reescrita na forma $\langle L\phi, \psi\rangle = \langle \phi, L'\psi\rangle$. Deste modo, é intuitivo estender L a um operador $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, definido por:

$$\langle \tilde{L}u, \psi\rangle = \langle u, L'\psi\rangle \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Exemplo 1.2.3 (Produto por uma função C^∞). *Seja $f \in C^\infty(\Omega)$, definimos $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$, $(L\phi)(x) = f(x) \cdot \phi(x)$. L é operador linear contínuo e além disso,*

$$\int (L\phi)(x) \cdot \psi(x)dx = \int \phi(x) \cdot (L\psi)(x)dx.$$

Vemos que o transposto formal de L (L′) é L. Deste modo, definimos

$$\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.2.4 (Derivação)**.** *Sejam* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$*. L é operador linear contínuo e além disso, se* $\phi, \psi \in C_c^{\infty}(\Omega)$*, pelo Teorema de Fubini e integração por partes:*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\psi(x)dx \quad = -\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx.$$

Portanto, o transposto formal de L é $-\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ *e dado* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *definimos:*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle. \tag{1.4}$$

Exemplo 1.2.5 (Mudança de variável)**.** *Sejam* Ω_1*,* Ω_2 *abertos de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *um difeomorfismo, isto é, uma bijeção de* Ω_1 *em* Ω_2*, com* Φ *e* Φ^{-1} *de classe* C^{∞}*. Definamos* $Lf = f \circ \Phi$*, L é operador linear contínuo de* $C_c^{\infty}(\Omega_2)$ *em* $C_c^{\infty}(\Omega_1)$*. Dada uma função teste f em* Ω_2*, x pertence ao complementar de* $S(f \circ \Phi)$ *se, e somente se, existir* V_x *vizinhança de aberta de x , em que* $f \circ \Phi$ *é nula. Mas como* Φ *é difeomorfismo, isto equivale a dizer que existe uma vizinhança de* $\Phi(x)$*, a saber,* $\Phi(V_x)$*, em que f é nula. Deste modo,* $S(f \circ \Phi) = \Phi^{-1}(S(f))$*, já que* $S(f)$ *é compacto e* Φ *é difeomorfismo* $f \circ \Phi$ *possui suporte compacto. Assim, se* $Lf = f \circ \Phi$*,* Lf *é função teste em* Ω_1*, o que mostra a boa definição de L. Dada* ψ *função teste em* Ω_2*, pelo Teorema de mudança de variáveis obtemos*

$$\int_{\Omega_2} f(\Phi(x))\psi(y)dy = \int_{\Omega_1} f(x)\psi(\Phi^{-1}(x))|J(\Phi^{-1})|(x),$$

em que $|J(\Phi^{-1})|$ *representa o valor absoluto do determinante da jacobiana de* Φ^{-1}*, assim*

$$L'\psi = |J(\Phi^{-1})| \cdot \psi \circ \Phi^{-1}.$$

Portanto definimos:

$$\langle u \circ \Phi, \phi\rangle = \langle u, (\phi \circ \Phi^{-1})|J(\Phi^{-1})|\rangle. \tag{1.5}$$

1.3 Suporte de distribuições

Definição 1.3.1. *Dados $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dizemos que u_1 e u_2 são iguais ($u_1 = u_2$) se para todo função teste ϕ em Ω temos $\langle u_1, \phi\rangle = \langle u_2, \phi\rangle$.*

Abaixo será dada uma condição necessária para igualdade de distribuições.

Teorema 1.3.2. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ existe vizinhança aberta $V(x)$ onde $u_1 = u_2$. Então, $u_1 = u_2$ em Ω*

Definição 1.3.3. *Dado $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o suporte de u como sendo a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo. Denotamos o suporte de u por $S(u)$.*

Observação: As definições de suporte de distribuições e de funções coincidem, para funções que são contínuas.

Definição 1.3.4. *Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita ser C^∞ em um aberto $U \subset \Omega$, se existe $f \in C^\infty(U)$ tal que*

$$\langle u, \phi\rangle = \int f(x)\phi(x)dx; \quad \phi \in C_c^\infty(U).$$

Definição 1.3.5. *Definimos o suporte singular de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, como sendo a intersecção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é C^∞. Denotaremos o suporte singular de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por $SS(u)$.*

Definição 1.3.6. *Se Ω é aberto de $\mathbb{R}^n$, denotamos o espaço das distribuições em Ω com suporte compacto por $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Teorema 1.3.7. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\widetilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que,*

1. *$\widetilde{u}(\phi) = u(\phi) \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

2. *$\widetilde{u}(\phi) = 0$ se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \bigcap S(u) \neq \emptyset$.*

Definição 1.3.8. *Uma seqüência (ϕ_j) de funções $C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ quando para todo compacto K e qualquer α em $\mathbb{N}^n$ a seqüência de funções $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge uniformemente a zero em K.*

Observação: Se (ϕ_j) é uma seqüência de funções convergindo a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então, (ϕ_j) converge a zero em $C^\infty(\Omega)$.

Usaremos a seguinte notação, dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $i = \sqrt{-1}$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos:

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Teorema 1.3.9. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. u é contínuo é se e somente se existem $K \subset \Omega$ compacto, uma constante real positiva C e $m \in \mathbb{Z}^+$ tais que:*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_K |D^\alpha \phi|, \qquad \phi \in C^\infty(\Omega) \tag{1.6}$$

Teorema 1.3.10. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. u é contínuo se e somente se para todo compacto $K \subset \Omega$ existem uma constante real positiva C e $m \in \mathbb{Z}^+$ tais que,*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup |D^\alpha \phi|, \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega), \qquad S(\phi) \subset K. \tag{1.7}$$

Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se, para todo compacto K, a condição (1.7) é satisfeita para algum valor m fixado dizemos que u é de ordem $\leqslant m$. O conjunto das distribuições em Ω de ordem $\leqslant m$ é denotado por $\mathcal{D}'^m(\Omega)$.

1.4 A transformada de Fourier em S

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por;

$$\mathcal{F}f(\xi) \doteq \widehat{f}(\xi) \doteq \int e^{-ix\xi} f(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.8}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ e $x\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. Temos que $\widehat{f}$ é contínua e limitada.

Como já foi visto é possível estender a $\mathcal{D}'$ um operador contínuo definido em C_c^∞, o que não é aplicável neste caso, já que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então, $\widehat{\phi}$ não tem suporte compacto a menos que ϕ seja a função nula [1]. Por isso definimos um espaço que contem C_c^∞ e é invariante por transformada de

[1] Pelo Teorema 2.1.2 a transformada de Fourier é analítica real, deste modo, se possuir suporte compacto ela será nula. Pela fórmula de inversão da transformada de Fourier, se $\widehat{f} = 0$, então, $f = 0$.

Fourier.

Definição 1.4.1. *Denotamos por $\mathcal{S}$ (ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) o subespaço das funções $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\sup\{|x^\alpha D^\beta \phi|\} < \infty$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.*

Definição 1.4.2. *Dizemos que uma seqüência $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ converge a zero em $\mathcal{S}$ se para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ temos $x^\alpha D^\beta \phi_j \to 0$ uniformemente.*

$\mathcal{S}$ é invariante por multiplicação por polinômio e derivação e ainda $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.4.3. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e valem:*

$$\widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi) \tag{1.9}$$

$$\mathcal{F}\left(x^\alpha \phi(x)\right)(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\phi}(\xi). \tag{1.10}$$

Teorema 1.4.4. *A transformada de Fourier é continuamente invertível de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \phi(\xi) d\xi, \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.11}$$

Teorema 1.4.5. *Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, então,*

$$\int \widehat{\phi}\psi dx = \int \phi \widehat{\psi} dx \tag{1.12}$$

$$\int \phi \overline{\psi} dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\phi}\overline{\widehat{\psi}} dx \tag{1.13}$$

$$\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi} \cdot \widehat{\psi} \tag{1.14}$$

$$\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\phi} * \widehat{\psi}. \tag{1.15}$$

1.5 A transformada de Fourier em $\mathcal{S}'$

Definição 1.5.1. *Um funcional linear e contínuo em $\mathcal{S}$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota por $\mathcal{S}'$.*

Observemos que se u é distribuição temperada então a restrição de u à funções teste é uma distribuição e além disso $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A seguir será dada uma caracterização para continuidade em $\mathcal{S}'$.

TEOREMA 1.5.2. *Seja u um funcional linear em $\mathcal{S}$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *u é contínua;*

2. *Existem inteiros positivos M, m tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_x |(1+|x|^2)^m D^\alpha \phi(x)|, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

DEFINIÇÃO 1.5.3. *Dado $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'$ e $u \in \mathcal{S}'$ dizemos que $u_j \to u$ em $\mathcal{S}'$ quando, para todo $\phi \in \mathcal{S}$, $\langle u_j, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$, quando $j \to \infty$. As definições de convergência em $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{E}'$ são definidas de modo análogo.*

DEFINIÇÃO 1.5.4. *Seja $u \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier de u é definida por*

$$\langle \widehat{u}, \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\rangle, \qquad \phi \in \mathcal{S}.$$

TEOREMA 1.5.5. *(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de f como distribuição temperada coincide com a transformada de f dada por (1.8).*
(ii) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n}\|\widehat{f}\|_2^2$.
(iii) Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então, $\widehat{u}$ é uma função C^∞ dada por

$$\widehat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\xi}\rangle. \tag{1.16}$$

(iv) Se $u \in \mathcal{S}'$ então

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u}, \quad \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u},.$$

Capítulo

2

Conjuntos frente de onda.

O Teorema de Paley-Wiener caracteriza a suavidade de uma função a partir da transformada de Fourier. Na primeira seção deste capítulo será apresentada a prova de um dos teoremas de Paley-Wiener. Quanto à analiticidade o resultado obtido via transformada de Fourier se baseia em estimativas usando uma seqüência de funções corte, o que faz o resultado via transformada de Fourier ser de difícil aplicação. Há uma caracterização para o conjunto frente de onda analítico via transformada FBI, a qual é de aplicação mais simples que o resultado via transformada de Fourier. A transformada FBI é semelhante à transformada de Fourier. Dada uma distribuição u com suporte compacto definimos sua transformada FBI por $F_u(x,\xi) = \left\langle u_y, e^{i(x-y)\xi - |\xi||x-y|^2} \right\rangle$. Dado um aberto conexo $B \subset S^{m-1}$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^m$, chamamos o conjunto $\Gamma = \{tx \in \mathbb{R}^m : x \in B,\ t > 0\}$ de cone aberto conexo com vértice na origem. Neste trabalho demonstramos que um ponto não está no conjunto frente de onda analítico de uma distribuição se, e somente se, existem uma vizinhança V e um cone Γ tal que a transformada FBI desta distribuição possui decrescimento exponencial em $V \times \Gamma$. De forma análoga demonstra-se que um ponto não está no conjunto frente de onda C^∞ de uma distribuição se, e somente se, existem uma uma vizinhança V e um cone Γ tal que a transformada FBI desta distribuição possui decrescimento rápido em $V \times \Gamma$.

2.1 Os Teoremas de Paley-Wiener

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 1.5.5 temos que $\widehat{x_j f}$ existe no sentido clássico, e que $\widehat{x_j f}$ é contínuo. Pela equação (1.10) obtemos $\partial^{e_j}\hat{f} = -i\mathcal{F}(x_j f(x))$, deste modo, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}$ existe no sentido clássico e é contínuo. Mais geralmente, se existe m natural em que $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leqslant m$ segue que $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Neste sentido a transformada de Fourier converte decrescimento no infinito em regularidade. Intuitivamente se $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $f(x)$ deve tender a zero quando $|x| \to \infty$ para compensar o crescimento de x^α. Mas isto não deve ser entendido literalmente, considere a função $f : [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = 2^{3n}x - 2^{3n}S_{n-1}, \qquad x \in [S_{n-1}; S_n), \qquad n = 2, 3, ...$$

em que $S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{2j}}$, para esta função tem-se $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\int f(x)dx < +\infty$. Quando f tem suporte compacto (que é o máximo que se pode exigir em matéria de tender a zero no infinito) obtém-se a máxima regularidade de $\widehat{f}$. Isto será estudado com mais detalhes nos Teoremas de Paley-Wiener. Dada $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 1.5.5, $\widehat{u}$ é de classe C^∞ e $\widehat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\xi}\rangle$. Deste modo, é natural estender $\widehat{u}(\xi)$ de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{C}^n$ definindo o operador

$$\widehat{u}(\zeta) = \langle u_x, e^{-ix\zeta}\rangle,$$

em que $x\zeta = x_1\zeta_1 + \cdots + x_n\zeta_n$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. Este operador está bem definido pois $e^{-ix\zeta}$ é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Defina

$$e_j(x, \zeta) = \sum_{k=0}^{j} \frac{(-ix\zeta)^k}{k!},$$

já sabemos que $e_j(x, \zeta) \to e^{-ix\zeta}$ uniformemente em em qualquer compacto. Deste modo, dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha \left(e_j(x, \zeta) - e^{-ix\zeta}\right) &= \left\{\sum_{k=|\alpha|}^{j} (-i\zeta)^\alpha \frac{(-ix\zeta)^{k-|\alpha|}}{k!} k(k-1)\cdots(k-|\alpha|+1)\right\} - (-i\zeta)^\alpha e^{-ix\zeta} \\
&= (-i\zeta)^\alpha \left\{\left(\sum_{k=|\alpha|}^{j} \frac{(-ix\zeta)^{k-|\alpha|}}{(k-|\alpha|)!}\right) - e^{-ix\zeta}\right\} \\
&= (-i\zeta)^\alpha \left\{\left(\sum_{k=0}^{j-|\alpha|} \frac{(-ix\zeta)^k}{k!}\right) - e^{-ix\zeta}\right\} \\
&= (-i\zeta)^\alpha \left(e_{j-|\alpha|} - e^{ix\zeta}\right) \to 0
\end{aligned}$$

uniformemente em qualquer compacto, quando $j \to +\infty$. Então, concluímos que $e_j(x, \zeta) \to e^{-ix\zeta}$ em C^∞ quando $j \to +\infty$. Pela continuidade de u, em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u}(\zeta) = \lim_{j\to\infty}\langle u, e_j(x, \zeta)\rangle$. Como $e_j(x, \zeta)$ é polinômio em (x,ζ) segue que

$$\langle u, e_j(x,\zeta)\rangle = \left\langle u, \sum_{k=0}^{j} \frac{(-ix\zeta)^k}{k!} \right\rangle$$

é polinômio em ζ. A distribuição $u \in \mathcal{E}'$ satisfaz a estimativa (1.6), ou seja, existem constantes positivas e reais R, C e natural m tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{|x|\leqslant R} |D^\alpha \phi|, \qquad \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Por outro lado $\frac{(-ix\zeta)^k}{k!} \in C^\infty$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e para todo k natural,

$$\begin{aligned} |\langle u, e_j(x,\zeta)\rangle| &= \left| \sum_{k=0}^{j} \left\langle u_x, \frac{(-ix\zeta)^k}{k!} \right\rangle \right| \\ &\leqslant C \sum_{k=0}^{j} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{|x|\leqslant R} \left| D_x^\alpha \left\{ \frac{(-ix\zeta)^k}{k!} \right\} \right|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sabe-se que

$$\partial^\alpha (-ix\zeta)^k = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-|\alpha|+1)(-ix\zeta)^{k-|\alpha|}(-i\zeta)^\alpha, & \text{se } \ |\alpha| \leqslant k \\ 0, & \text{se } \ |\alpha| > k \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \sup_{|x|\leqslant R} \left| D_x^\alpha \left(-\frac{ix\zeta}{k!} \right) \right| &\leqslant \sup_{|x|\leqslant R} \frac{1}{(k-|\alpha|)!} |x\zeta|^{k-|\alpha|} |\zeta^\alpha| \\ &\leqslant \sup_{|x|\leqslant R} \frac{1}{(k-|\alpha|)!} (|x||\zeta|)^{k-|\alpha|} |\zeta|^{|\alpha|} \\ &\leqslant \frac{1}{(k-|\alpha|)!} R^{k-|\alpha|} |\zeta|^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

Ao voltar na desigualdade (2.1) temos,

$$|\langle u, e_j(x,\zeta)\rangle| \leqslant C \sum_{k=|\alpha|}^{j} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{1}{(k-|\alpha|)!} R^{k-|\alpha|} |\zeta|^k,$$

mostrando que se $|\zeta| < M$ então,

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\left\langle u, \frac{(-ix\zeta)^k}{k!}\right\rangle\right| \leqslant C\sum_{k=|\alpha|}^{+\infty}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{(k-|\alpha|)!}R^{k-|\alpha|}M^k.$$

A série à esquerda, na expressão acima, pelo teorema de Weierstrass, converge uniformemente em compactos. Logo, $\langle u, e_j(x,\zeta)\rangle$ converge uniformemente a $\widehat{u}(\zeta)$ em compactos de $\mathbb{C}^n$ e, pela completude de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ (conjunto das funções holomorfas em $\mathbb{C}^n$), tem-se que $\widehat{u}(\zeta)$ é holomorfa. Agora estamos prontos para a próxima definição.

Definição 2.1.1. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$, a função inteira $\widehat{u}(\zeta) = \langle u_x, e^{-ix\zeta}\rangle$ é chamada transformada de Fourier-Laplace de u. Sua restrição à $\mathbb{R}^n$ é a transformada de Fourier de u.*

A transformada de Fourier-Laplace possui propriedades análogas às da transformada de Fourier, com relação a derivação, convolução, etc.

Há dois Teoremas de Paley-Wiener, um para funções e outro para distribuições, primeiro faremos o Teorema de Paley-Wiener para funções e logo depois enunciaremos, sem demonstrar, o Teorema para distribuições.

Teorema 2.1.2 (Paley-Wiener). *Uma função $U(\zeta)$ inteira em $\mathbb{C}^n$ é a transformada de Fourier-Laplace de uma função $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $S(u) \subset \{x : |x| \leqslant R\}$ se, e somente se, para cada inteiro positivo N existe uma constante C_N tal que*

$$|U(\zeta)| \leqslant C_N(1+|\zeta|)^{-N}e^{R|\Im\zeta|}. \tag{2.2}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, foi demonstrado que $\widehat{u}(\zeta)$ é inteira. Portanto, só nos resta demonstrar a desigualdade (2.2). Pela definição da transformada de Fourier

$$|\widehat{u}(\zeta)| = \left|\int e^{-ix\zeta}u(x)dx\right| \leqslant \int |e^{-ix\zeta}||u(x)|dx. \tag{2.3}$$

Se $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ então

$$|e^{-ix\zeta}| = \left|\exp\left\{-i\sum_{j=1}^n x_j(\mathcal{R}\zeta_j + i\Im\zeta_j)\right\}\right| = \left|\exp\left\{\sum_{j=1}^n (x_j\Im\zeta_j)\right\}\right| \leqslant e^{|x||\Im\zeta|}.$$

Pela desigualdade acima e por $S(u) \subset \{x : |x| \leqslant R\}$ concluímos que

$$|\widehat{u}(\zeta)| \leqslant \int_{|x|\leqslant R} e^{|x||\Im\zeta|}|u(x)|dx \leqslant e^{R|\Im\zeta|}\int |u(x)|dx = e^{R|\Im\zeta|}\|u\|_1. \tag{2.4}$$

Para todo natural N fixado e $j \in \{1, ..., n\}$,

$$|\widehat{D_j^N u}(\zeta)| = |\left\langle D_j^N u_x, e^{-ix\zeta}\right\rangle| = |\left\langle u_x, (-i\zeta_j)^N e^{-ix\zeta_j}\right\rangle| = |\zeta_j^N \widehat{u}(\zeta)|$$

e analogamente a (2.4)

$$|\zeta_j^N \widehat{u}(\zeta)| = |\widehat{D_j^N u}(\zeta)| \leqslant \|D_j^N u\|_1 e^{R|\Im\zeta|}. \tag{2.5}$$

Ao somar (2.4) e (2.5), para $1 \leqslant j \leqslant n$ e definir $C = \sup\left\{\|u\|_1 + \|D_1^N u\|_1 + \cdots + \|D_n^N u\|_1\right\}$ temos,

$$(1 + |\zeta_1|^N + \cdots + |\zeta_n|^N)|\widehat{u}(\zeta)| \leqslant Ce^{R|\Im\zeta|}. \tag{2.6}$$

Por outro lado (ver Apêndice, Teorema 3.4.2) existe uma constante B_N que só depende de N e n em que

$$(1 + |\zeta|)^N \leqslant B_N(1 + |\zeta_1|^N + \cdots + |\zeta_n|^N). \tag{2.7}$$

Seja $C_N = B_N C$, por (2.6)e (2.7),

$$(1 + |\zeta|)^N|\widehat{u}(\zeta)| \leqslant B_N(1 + |\zeta_1|^N + \cdots + |\zeta_n|^N)|\widehat{u}(\zeta)| \leqslant C_N e^{R|\Im\zeta|}.$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja U inteira satisfazendo a estimativa (2.2). Quando $\zeta = \xi \in \mathbb{R}^n$ segue que

$$\begin{aligned} |\xi^l U(\xi)| &\leqslant |\xi^l||U(\xi)| \\ &\leqslant |\xi|^{|l|}C_N(1 + |\xi|)^{-N}e^{R\Im\xi} \\ &\leqslant C_N(1 + |\xi|)^{|l|-N}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo multi-índice l. Para N tal que $|l| - N < -n$, mostra-se que o lado esquerdo da desigualdade acima é integrável. Pela equação (1.10), para $\mathcal{F}^{-1}$, temos que $\mathcal{F}^{-1}(U_{|\mathbb{R}^n})$ é de classe C^∞. Deste modo, consideremos $u(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(U_{|\mathbb{R}^n})(\xi)$. Para provar que $S(u) \subset \{x : |x| \leqslant R\}$, provaremos que u é nulo quando $|x| > R$. Dado real positivo A considere a integral

$$I_A = \int_{-A}^{A} e^{ix_1\zeta_1} U(\zeta) d\zeta_1. \tag{2.9}$$

Por outro lado, dado $\eta \in \mathbb{C}^n$ e $h(\zeta_1) = e^{ix_1\zeta_1}U(\zeta)$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ e $\eta = (\eta_1, .., \eta_n)$, como h é analítica

$$\begin{aligned} I_A &= \int_{-A}^{-A+i\eta_1} h(\zeta_1)d\zeta_1 + \int_{-A+i\eta_1}^{A+i\eta_1} h(\zeta_1)d\zeta_1 + \int_{A+i\eta_1}^{A} h(\zeta_1)d\zeta_1 \\ &= \int_0^{\eta_1} h(-A+it)dt + \int_{-A}^{A} h(t+i\eta_1)dt + \int_{\eta_1}^{0} h(A+it)dt, \end{aligned} \tag{2.10}$$

em que na segunda igualdade as integrais são reais. Dado N natural, para A suficientemente grande, por (2.2),

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{\eta_1} h(-A+it)dt\right| &\leqslant \int_0^{\eta_1} |h(-A+it)|dt \\ &= \int_0^{\eta_1} |e^{-ix_1A - x_1t}||U(-A+it, \zeta_2, ..., \zeta_n)|dt \\ &= \int_0^{\eta_1} e^{-x_1t} C_N (1 + |(-A+it, \zeta_2, ..., \zeta_n)|)^{-N} e^{R|\Im(-A+it,\zeta_2,...,\zeta_n)|}dt \\ &\leqslant \sup_{t\in[0,\eta_1]} \left\{e^{-x_1t}e^{R|(t,\Im\zeta_2,...,\Im\zeta_n)|}\right\} C_N \int_0^{\eta_1} (1 + |-A+it|)^{-N}dt \\ &\leqslant C(1-|A|)^{-N} \int_0^{\eta_1} dt \to 0, \end{aligned}$$

quando $A \to \infty$. Analogamente

$$\int_{\eta_1}^{0} h(A+it)dt \to 0 \qquad \text{quando} \qquad A \to \infty.$$

Assim, fazendo $A \to \infty$ em (2.9) e (2.10)

$$\int e^{ix_1\xi_1} U(\xi_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)d\xi_1 = \int e^{ix_1(\xi_1+i\eta_1)} U(\xi_1 + i\eta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)d\xi_1.$$

Se reiterarmos o argumento nas demais variáveis temos,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix(\xi+i\eta)} U(\xi + i\eta)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} U(\xi)d\xi = \mathcal{F}^{-1}(U_{|\mathbb{R}^n})(x) = u(x). \tag{2.11}$$

Por (2.2), para $N = n+1$,

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leqslant (2\pi)^{-n}\int e^{-x\eta}|U(\xi+i\eta)|d\xi\\ &\leqslant (2\pi)^{-n}\int e^{-x\eta}C_{n+1}(1+|\xi+i\eta|)^{-n-1}e^{R|\eta|}d\xi\\ &\leqslant (2\pi)^{-n}\int e^{-x\eta}C_{n+1}(1+|\xi|)^{-n-1}e^{R|\eta|}d\xi\\ &\leqslant (2\pi)^{-n}e^{R|\eta|-x\eta}C_{n+1}\int(1+|\xi|)^{-n-1}d\xi,\end{aligned}$$

como $(1+|\xi|)^{-n-1}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ existe constante C em que

$$|u(x)|\leqslant Ce^{R|\eta|-x\eta}.$$

Seja $\eta = tx$, para algum $t\in\mathbb{R}$,

$$|u(x)|\leqslant Ce^{|t||x|(R-|x|)}. \tag{2.12}$$

Para $|x|>R$ temos $|t||x|(R-|x|)\leqslant 0$, por isso $e^{|t||x|(R-|x|)}\to 0$ quando $t\to\infty$. Portanto $|u(x)|\leqslant 0$, ou seja, $u(x)=0$ quando $|x|>R$. Finalmente provaremos que $\widehat{u}(\zeta)=U(\zeta)$. De (2.11) segue que

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}e^{-x\eta}\int e^{ix\eta}U(\xi+i\eta)d\xi = e^{-x\eta}\mathcal{F}_\xi^{-1}(U(\xi+i\eta))(x).$$

Então,

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi+i\eta) &= \int e^{-i(\xi+i\eta)x}u(x)dx=\int e^{-i\xi x}e^{\eta x}u(x)dx\\ &= \mathcal{F}(e^{\eta x}u(x))(\xi)=\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}U(\xi+i\eta)(x))(\xi)\\ &= U(\xi+i\eta).\end{aligned}$$

■

Na demonstração anterior poderíamos ter verificado que $\widehat{u}(\zeta)=U(\zeta)$, pelo seguinte fato: Dadas f e g funções inteiras em $\mathbb{C}^n$ tais que $f|_{\mathbb{R}^n}=g|_{\mathbb{R}^n}$ então f e g coincidem em $\mathbb{C}^n$.

A seguir será enunciado, sem demonstração o outro Teorema de Paley-Wiener.

Teorema 2.1.3. *Uma função função $U(\zeta)$ inteira em $\mathbb{C}^n$ é a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ com $S(u)\subset\{x:|x|\leqslant R\}$ se, e somente se, existem constantes C e N*

tais que

$$|U(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{R|\Im\zeta|}.$$

Corolário 2.1.4. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Tem-se que $x_0 \notin SS(u)$ se e somente se existe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi = 1$ em alguma vizinhança de x_0 e para cada natural N existe constante $C_N > 0$ tal que*

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Definição 2.1.5. *Seja $B \subset S^{m-1}$(em que S^{m-1} é a esfera unitária de $\mathbb{R}^m$) um aberto conexo, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^m$. O conjunto $\Gamma = \{tx \in \mathbb{R}^m : x \in B,\ t > 0\}$ é chamado cone aberto conexo com vértice na origem, quando os vetores posição de quaisquer dois pontos do cone formam um ângulo agudo dizemos que o cone é agudo.*

O Corolário 2.1.4 nos leva às seguintes definições.

Definição 2.1.6. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $x_0 \in \Omega$, e $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Nós dizemos que uma distribuição u é suave micro-local em (x_0, ξ^0) se existe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi \equiv 1$ próximo de x_0 e uma vizinhança cônica $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ de ξ^0 tal que para todo $k = 1, 2, ...$ e para todo $\xi \in \Gamma$,*

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leqslant \frac{C_k}{(1+|\xi|)^k}.$$

Definição 2.1.7. *O conjunto frente de onda C^∞ de uma distribuição u, denotado por $WF(u)$, é definido por*

$$WF(u) = \{(x,\xi) : u \text{ não é suave micro-local em } (x,\xi)\}.$$

Dado um cone aberto conexo com vértice na origem $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ e $\delta > 0$ definimos o cone truncado $\Gamma_\delta \doteq \Gamma \bigcap \{\nu \in \mathbb{R}^m : |\nu| < \delta\}$. Se Γ' é outro cone, escrevemos $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ se $\overline{\Gamma'} \bigcap S^{m-1} \subset \Gamma \bigcap S^{m-1}$.

Definição 2.1.8. *Uma função holomorfa $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ tem crescimento temperado se existem um natural k e uma constante c tais que $|f(x+iy)| \leqslant \frac{c}{|y|^k}$.*

Para $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ e $\nu \in \Gamma$ vamos definir a seguinte distribuição:

$$\langle f_\nu, \phi \rangle = \int f(x+i\nu)\phi(x)dx, \quad \phi \in C_c^\infty(V)$$

Teorema 2.1.9. *Suponha $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ de crescimento temperado e k como na definição acima. Então,*

$$bf = \lim_{\nu \to 0,\, \nu \in \Gamma_\delta} f_\nu$$

está definido no sentido das distribuições em V, além disso bf define uma distribuição de ordem $k+1$.

A demonstração deste Teorema pode ser vista em [7].

Definição 2.1.10. *Sejam $f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma função $\tilde{f}$ é chamada extensão quase analítica de f se se existir uma vizinhança $\tilde{\Omega}$ de Ω, em $\mathbb{C}^m$, tal que $\tilde{f}(x,y) \in C^\infty(\tilde{\Omega})$, $\tilde{f}(x,0) = f(x)$, $\forall x \in \Omega$, e para cada $j = 1, ..., m$*

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overline{z_j}}(x,y) = O(|y|^k) \;\; \textit{para} \;\; k = 1, 2, ...$$

A seguir é apresentada, sem demonstração, uma importante caracterização do conjunto frente de onda C^∞.

Teorema 2.1.11. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Então $(x_0, \xi^0) \notin WF(u)$ se, e somente se, existem vizinhança V de x_0, cones abertos e agudos $\Gamma^1, ..., \Gamma^N$ em $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ e funções f_j quase analíticas em $V + i\Gamma^j_\delta$ (para algum $\delta > 0$) de crescimento temperado tais que $u = \sum_{j=1}^{N} bf_j$ próximo de x_0 e $\xi^0 \cdot \Gamma^j < 0$ para todo j.*

2.2 Analiticidade micro-local e a transformada FBI

O Teorema de Paley-Wiener (Teorema 2.1.3) caracteriza a suavidade de uma função u em termos do decaimento rápido de sua transformada de Fourier $\widehat{u}(\xi)$. Esta caracterização é muito útil no estudo de regularidade local e micro-local de soluções de equações diferenciais parciais com coeficientes suaves. Há também a caracterização de analiticidade em termos da transformada de Fourier. Entretanto esta caracterização é baseada em estimativas usando seqüencia de funções corte, o que torna este resultado difícil de ser aplicado. Nesta seção vamos apresentar a definição da transformada FBI e apresentar alguns resultados importantes sobre a transformada FBI. Entre esses resultados veremos uma caracterização de analiticidade e uma caracterização de suavidade via transformada FBI.

Definição 2.2.1. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$, definimos a transformada de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) de* *u por*

$$F_u(x,\xi) = \langle u_y, e^{i(x-y)\xi - |\xi||x-y|^2} \rangle, \tag{2.13}$$

para $(x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, *onde* $(x-y)\xi = \sum_{j=1}^{m}(x_j - y_j)\xi_j$.

O próximo Teorema nos dá a inversa da transformada FBI.

Teorema 2.2.2 (Inversão da FBI). *Seja* $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. *Então,*

$$u(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}} \int\int F_u(t,\xi) e^{i(x-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi \tag{2.14}$$

onde o limite é entendido no sentido de convergência uniforme.

Demonstração.

Pelo Exemplo V.1.2 de [16] temos $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right)(\xi) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. Daí, fazendo a mudança de variável $\eta = \xi\sqrt{2\epsilon}$,

$$\begin{aligned}
\int e^{i(x-y)\xi - \epsilon|\xi|^2} d\xi &= \int e^{i(x-y)\xi} e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi \\
&= \int e^{i\frac{x-y}{\sqrt{2\epsilon}}\eta} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^{\frac{m}{2}} d\eta \\
&= \left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}\right)\left(\frac{y-x}{\sqrt{2\epsilon}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}} (2\pi)^{\frac{m}{2}} \\
&= \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$, fazendo a mudança de variável $t = \frac{x-y}{2\sqrt{\epsilon}}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^m} \int\int e^{i(x-y)\xi - \epsilon|\xi|^2} u(y) d\xi dy &= \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{m}{2}}} \int u(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}} dy \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int u(x - 2t\sqrt{\epsilon}) e^{-t^2} dt.
\end{aligned}$$

O membro da direita, da igualdade acima, converge uniformemente para u quando $\epsilon \to 0^+$. De fato, como u é contínua e tem suporte compacto, dado $\delta > 0$ existe ϵ_0 (independente de x e t) tal que

$|u(x-2t\sqrt{\epsilon})-u(x)|<\frac{\delta}{2}$ quando $|t|\sqrt{\epsilon}<\epsilon_0$. Como $\displaystyle\int e^{-t^2}dt=\pi^{\frac{m}{2}}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}\int u(x-2t\sqrt{\epsilon})e^{-t^2}dt-u(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}\int |u(x-2t\sqrt{\epsilon})-u(x)|e^{-t^2}dt\\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{|t|\geqslant\frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon}}} |u(x-2t\sqrt{\epsilon})-u(x)|e^{-t^2}dt\\
&+ \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{|t|<\frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon}}} |u(x-2t\sqrt{\epsilon})-u(x)|e^{-t^2}dt\\
&\leqslant \frac{2\|u\|_\infty}{\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{|t|\geqslant\frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon}}} e^{-t^2}dt+\frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $\epsilon\to 0^+$ temos $\displaystyle\int_{|t|\geqslant\frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon}}} e^{-t^2}dt\to 0$. Assim, existe ϵ_1 tal que se $|\epsilon|<\epsilon_1$ então

$$\int_{|t|\geqslant\frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon}}} e^{-t^2}dt\leqslant\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\delta}{4\|u\|_\infty}.$$

Logo,

$$\left|\frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}\int u(x-2t\sqrt{\epsilon})e^{-t^2}dt-u(x)\right|\leqslant\delta.$$

Então, concluímos que $\displaystyle\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2}u(y)d\xi dy=\frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}\int u(x-2t\sqrt{\epsilon})e^{-t^2}dt\to u(x)$ uniformemente, quando $\epsilon\to 0^+$. Como $\displaystyle\int e^{-|\xi||t-y|^2}dt=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{|\xi|^{\frac{m}{2}}}$, pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
u(x) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{(2\pi)^m}\int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2}u(y)d\xi dy\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{(2\pi)^m\pi^{\frac{m}{2}}}\int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2}u(y)\left(\int e^{-|\xi||t-y|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}dt\right)d\xi dy\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}\int\int\int e^{i(x-y)\xi-|\xi||t-y|^2-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}u(y)dydtd\xi\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}\int\int\left(\int e^{i(t-y)\xi-|\xi||t-y|^2}u(y)dy\right)e^{i(x-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}dtd\xi\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}\int\int F_u(t,\xi)e^{i(x-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}dtd\xi.
\end{aligned}$$

■

Dada uma distribuição $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ e $\phi(x,y)$ em que $\phi(\cdot,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ e $\partial_y^\alpha\phi(\cdot,y)\in L^1(\mathbb{R}^m)$, segue que

$$\int \langle u_y, \phi(x,y)\rangle dx = \left\langle u_y, \int \phi(x,y)dx \right\rangle.$$

Isto pode ser demonstrado sabendo que uma distribuição de ordem finita se escreve como soma de derivadas de funções contínuas (vide [19]).

Observação: Dado $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ a equação (2.14) continua valendo, com o limite no sentido de distribuições de suporte compacto. De fato, dadas $\phi \in C^\infty$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\psi = 1$ numa vizinhança de $S(u)$ obtemos $\langle u, \phi\rangle = \langle u, \psi\phi\rangle$. Isto é, basta supor $\phi \in C_c^\infty$. Assim, para $\phi \in C_c^\infty$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{\pi}{2}}} \int\int\int F_u(t,\xi) e^{i(x-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi \phi(x) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}} \int\int\int \left\langle u_y, e^{i(t-y)\xi - |\xi||t-y|^2} \right\rangle e^{i(x-t)\xi-\epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi \phi(x) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}} \int\int\int \left\langle u_y, e^{i(x-y)\xi - |\xi||t-y|^2 - \epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} \right\rangle dt d\xi \phi(x) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}} \int\int \left\langle u_y, e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} \int e^{-|\xi||t-y|^2} dt \right\rangle d\xi \phi(x) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}} \int\int \left\langle u_y, e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\pi}{|\xi|}\right)^{\frac{m}{2}} \right\rangle d\xi \phi(x) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi^2)^{\frac{m}{2}}} \int\int \left\langle u_y, e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} \right\rangle d\xi \phi(x) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \int \left\langle u_y, \int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} d\xi \right\rangle \phi(x) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m} \left\langle u_y, \int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} \phi(x) d\xi dx \right\rangle.
\end{aligned}$$

Para demonstrar que $\frac{1}{(2\pi)^m} \left\langle u_y, \int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} \phi(x) d\xi dx \right\rangle \to \langle u, \phi\rangle$, quando $\epsilon \to 0^+$ basta observar que como $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ existem K, compacto de $\mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
&\left| \left\langle u_y, \frac{1}{(2\pi)^m} \int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} \phi(x) d\xi dx \right\rangle - \langle u, \phi\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle u_y, \frac{1}{(2\pi)^m} \int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} \phi(x) d\xi dx - \phi(y) \right\rangle \right| \\
&\leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{y\in K} \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \partial_y^\alpha \left(\int\int e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} \phi(x) d\xi dx \right) - \partial^\alpha \phi(y) \right| \\
&= C \sum_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{y\in K} \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \int\int (-i\xi)^\alpha e^{i(x-y)\xi-\epsilon|\xi|^2} \phi(x) d\xi dx - \partial^\alpha \phi(y) \right|
\end{aligned}$$

$$= C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{y \in K} \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \int\int (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha \left(e^{i(x-y)\xi - \epsilon|\xi|^2} \right) \phi(x) d\xi dx - \partial^\alpha \phi(y) \right|$$
$$= C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{y \in K} \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \int\int e^{i(x-y)\xi - \epsilon|\xi|^2} \partial_x^\alpha \phi(x) d\xi dx - \partial^\alpha \phi(y) \right|$$
$$= C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{y \in K} \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{\frac{m}{2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}} \partial_x^\alpha \phi(x) dx - \partial^\alpha \phi(y) \right|$$
$$= C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{y \in K} \left| \frac{1}{2^m (\pi\epsilon)^{\frac{m}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}} \partial^\alpha \phi(x) dx - \partial^\alpha \phi(y) \right|$$
$$= C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{y \in K} \left| \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int e^{-|t|^2} \partial^\alpha \phi(y - 2t\sqrt{\epsilon}) dt - \partial^\alpha \phi(y) \right|,$$

integrando por partes, pelo fato de que $|\partial^\alpha e^{i(x-y)\xi - \epsilon|\xi|} \phi(x)| \leqslant |-i|^{|\alpha|} C e^{-\frac{\epsilon|\xi|}{2}} \phi(x) \in L^1(\mathbb{R}^m \times S\{\phi\})$ e fazendo a mudança de variáveis $t = \frac{y-2}{2\epsilon^{\frac{1}{2}}}$ (para uma certa constante $C > 0$) permite derivar sobre o sinal de integração. Veja que a última expressão converge a zero, já que, no teorema anterior provamos que dado $\psi \in C_c(\mathbb{R}^m)$ temos

$$\frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int e^{-t^2} \psi(x - 2t\sqrt{\epsilon}) dt \to \psi(x)$$

uniformemente, quando $\epsilon \to 0^+$. e $\partial^\alpha \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Portanto, quando $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ temos que que (2.14) é satisfeita no sentido de limite de distribuições de suporte compacto

O Teorema a seguir caracteriza a analiticidade de uma função pelo decaimento exponencial da transformada FBI.

Teorema 2.2.3. *Dada $u \in C_c(\mathbb{R}^m)$ as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) u é analítica real em $x_0 \in \mathbb{R}^m$ (possui série de Taylor convergente, numa vizinhança de x_0).
(ii) Existem uma vizinhança V de x_0 em $\mathbb{R}^m$ e constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|F_u(x,\xi)| \leqslant c_1 e^{-c_2|\xi|} \quad \textit{para} \quad (x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^m. \tag{2.15}$$

Demonstração. Se u é analítica real em x_0, existem $\delta > 0$ e $\tilde{u}$ analítica em $\{z \in \mathbb{C}^m : |z - x_0| < \delta\}$, tal que $\tilde{u}(x) = u(x)$, quando $x \in \mathbb{R}^m$. Sem perda de generalidade assuma $\delta < 2$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, com $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, $\phi(x) = 0$ quando $|x - x_0| \geqslant \frac{\delta}{2}$ e $\phi(x) = 1$ quando $|x - x_0| < \frac{\delta}{4}$. Assim, $S(\phi) \subset B(x_0, \frac{\delta}{2}) \subset B(x_0, \delta)$. Fixe $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ e $s \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ a ser escolhido. Sejam $U = \{z \in \mathbb{C}^m : |z - x_0| < \delta\}$

e $D=\{x+its\phi(x)\frac{\xi}{|\xi|}:0\leqslant t\leqslant 1,\, |x-x_0|\leqslant\frac{\delta}{2}\}$. Dado $x+its\phi(x)\frac{\xi}{|\xi|}\in D$, obtemos

$$\left|x+its\phi(x)\frac{\xi}{|\xi|}-x_0\right|\leqslant |x-x_0|+ts<\delta,$$

mostrando que $D\subset U$. Defina $\theta:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}^m$, $\theta(y)=y-is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}$. Vamos denotar $dz=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_m$ e $dy=dy_1\wedge\ldots\wedge y_m$. Temos que $\partial D=Img\{\theta\}\bigcup B(x_0,\frac{\delta}{2})$, deste modo, pelo Teorema de Stokes, analiticidade de $\tilde{u}$ e analiticidade da função exponencial, temos

$$\int_{\partial D}e^{i(x-z)\xi-|\xi||x-z|^2}\widetilde{u}(z)dz=\int_D d\left(e^{i(x-z)\xi-|\xi||x-z|^2}\widetilde{u}(z)dz\right)$$
$$=\int_D\left(\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial e^{i(x-z)\xi-|\xi||x-z|^2}\widetilde{u}(z)}{\partial z_j}dz_j+\frac{\partial e^{i(x-z)\xi-|\xi||x-z|^2}\widetilde{u}(z)}{\partial\overline{z_j}}d\bar{z}_j\right)\right)\wedge dz=0. \tag{2.16}$$

Então,

$$\begin{aligned}F_u(x,\xi)&=\int_{S(u)}e^{i(x-y)\xi-|\xi||x-y|^2}u(y)dy\\&=\int_{Img\{\theta\}}e^{i(x-z)\xi-|\xi|(x-z)^2}\widetilde{u}(z)dz\\&=\int_{S(u)}e^{i\left(x-y+is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}\right)\xi-|\xi|\left(x-y+is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}\right)^2}\widetilde{u}\left(y-is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}\right)|\det\theta'(y)|dy.\end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned}Q(x,y,\xi)&=i\left(x-y+is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}\right)\xi-|\xi|\left(x-y+is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}\right)^2\\&=i(x-y)\xi-s\phi(y)|\xi|-|\xi|\left(|x-y|^2+2is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}(x-y)-s^2(\phi(y))^2\right),\end{aligned}$$

temos $\mathcal{R}Q(x,y,\xi)=-s\phi(y)|\xi|-|\xi||x-y|^2+|\xi|(\phi(y))^2s^2$. Como ϕ e u são funções contínuas de suporte compacto existe constante real positiva C tal que $|det\theta'(y)|\|\widetilde{u}\|_\infty<C$. Deste modo,

$$\begin{aligned}|F_u(x,\xi)|&\leqslant\int_{S(u)}e^{\mathcal{R}Q(x,y,\xi)}\left|\widetilde{u}\left(y-is\phi(y)\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right||\det\theta'(y)|dy\\&\leqslant C\int_{S(u)}e^{\mathcal{R}Q(x,y,\xi)}dy\\&=C\int_{|y-x_0|\leqslant\frac{\delta}{4}}e^{\mathcal{R}Q(x,y,\xi)}dy+C\int_{\left\{|y-x_0|\geqslant\frac{\delta}{4}\right\}\bigcap S(u)}e^{\mathcal{R}Q(x,y,\xi)}dy\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

Pela definição de Q e de ϕ temos

$$I_1(x,\xi) \;\leqslant\; C\int_{|y-x_0|\leqslant\frac{\delta}{4}} e^{-s|\xi|(1-s)}dy = Ce^{-s|\xi|(1-s)},$$

na última igualdade C representa uma constante diferente. Como $\delta < 2$ e $0 < s < \frac{\delta}{2}$ temos $s(1-s) > 0$. Se $|x-x_0| < \frac{\delta}{8}$ e y pertence ao domínio de integração de I_2, temos $|x-y| \geqslant |y-x_0| - |x-x_0| > \frac{\delta}{8}$. Se $s = \frac{\delta}{16}$, pela definição de Q temos

$$I_2(x,\xi) \leqslant C\int_{\left\{|y-x_0|\geqslant\frac{\delta}{4}\right\}\bigcap S(u)} e^{-|\xi||x-y|^2+|\xi|s^2|\phi(y)|^2}dy \leqslant Ce^{-|\xi|\frac{3\delta^2}{16^2}}.$$

Então $F_u(x,\xi)$ tem decrescimento exponencial.

Reciprocamente, sem perda de generalidade considere $x_0 = 0$ e suponha que para certos c_1, c_2 tenhamos

$$|F_u(x,\xi)| \leqslant c_1 e^{-c_2|\xi|},$$

para todo ξ em $\mathbb{R}^m$ e x próximo de 0. Para provar que u é analítica real em x_0 usaremos a fórmula de inversão dada pela equação (2.14). Considere

$$\int\int F_u(t,\xi)e^{i(x-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}dtd\xi = I_1^\epsilon(x) + I_2^\epsilon(x) + I_3^\epsilon(x) + I_4^\epsilon(x)$$

onde $I_1^\epsilon(x)$, $I_2^\epsilon(x)$, $I_3^\epsilon(x)$, $I_4^\epsilon(x)$ representa a integral dupla de $F_u(t,\xi)e^{i(x-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}$ sobre

$$\begin{aligned}
&\{(t,\xi) : |t| \leqslant A_1, \xi \in \mathbb{R}^m\},\\
&\{(t,\xi) : A_1 \leqslant |t| \leqslant A_2, |\xi| \leqslant B\},\\
&\{(t,\xi) : |t| \geqslant A_2, \xi \in \mathbb{R}^m\},\\
&\{(t,\xi) : A_1 \leqslant |t| \leqslant A_2, |\xi| \geqslant B\},
\end{aligned}$$

respectivamente, com A_1, A_2 e B a escolher. Nosso objetivo é encontrar uma vizinhança da origem em que I_j^ϵ coincide com uma função analítica real e converge uniformemente quando $\epsilon \to 0^+$, para $j \in \{1,2,3,4\}$. Para isso usaremos a Afirmação 3.4.3. Considere primeiro I_1^ϵ. Seja $A_1 > 0$ tal que,

$$|F_u(t,\xi)| \leqslant c_1 e^{-c_2|\xi|}, \quad \text{quando} \quad |t| \leqslant A_1.$$

Ao complexificarmos x, tomando $z = x + iy$ com $|y| < \frac{c_2}{2}$, observe que

$$\begin{aligned} |F_u(t,\xi)| \left| e^{i(x+iy-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} \right| |\xi|^{\frac{m}{2}} &\leqslant c_1 e^{-c_2|\xi|} e^{-y\xi - \epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} \\ &\leqslant c_1 e^{(-c_2+|y|)|\xi|} |\xi|^{\frac{m}{2}} \\ &\leqslant c_1 e^{-\frac{c_2}{2}|\xi|} |\xi|^{\frac{m}{2}}. \end{aligned}$$

Então o membro à direita na expressão acima é uma função $L^1(\mathbb{R}^m)$. Como a função exponencial é holomorfa, pela Afirmação 3.4.3, $I_1^\epsilon(z)$ é holomorfa em $\{z : |\Im z| < \frac{c_2}{2}\}$. Agora só nos resta verificar se I_1^ϵ converge uniformemente, caso seja convergente, este limite será uma função holomorfa. Uma vez que $\epsilon > 0$ temos

$$\left| \int_{|t| \leqslant A_1} F_u(t,\xi) e^{i(x+iy-t)\xi} |\xi|^{\frac{m}{2}} \left(e^{-\epsilon|\xi|^2} - 1 \right) dt \right| \leqslant c_1 e^{-\frac{c_2}{2}|\xi|} |\xi|^{\frac{m}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

aumentando c_1, se necessário. Como a integral de funções integráveis define uma medida, dado $\delta > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| > \lambda} \left| \int_{|t| \leqslant A_1} F_u(t,\xi) e^{i(x+iy-t)\xi} |\xi|^{\frac{m}{2}} \left(e^{-\epsilon|\xi|^2} - 1 \right) dt \right| d\xi \leqslant \frac{\delta}{2}, \tag{2.17}$$

observe que podemos tomar $\lambda > 1$. Por outro lado temos $0 \leqslant 1 - e^{-\epsilon\lambda^2} \leqslant 1 - e^{-\epsilon} \to 0$, quando $\epsilon \to 0^+$, então, existe $\epsilon_0 > 0$ (independente de λ e independente de x) tal que

$$\left| e^{-\epsilon\lambda^2} - 1 \right| \leqslant \delta \left(2 \int_{|\xi| \leqslant \lambda} \int_{|t| \leqslant A_1} c_1 e^{-c_2|\xi|} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi \right)^{-1}, \tag{2.18}$$

quando $\epsilon \leqslant \epsilon_0$. Deste modo, por (2.17) e (2.18), temos

$$\begin{aligned}
& \left| \int\int_{|t|\leqslant A_1} F_u(t,\xi) e^{i(x+iy-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi - \int\int_{|t|\leqslant A_1} F_u(t,\xi) e^{i(x+iy-t)\xi} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi \right| \\
\leqslant & \left(\int_{|\xi|>\lambda} + \int_{|\xi|\leqslant\lambda} \right) \left(\left| \int_{|t|\leqslant A_1} F_u(t,\xi) e^{i(x+iy-t)\xi} |\xi|^{\frac{m}{2}} \left(e^{-\epsilon|\xi|^2} - 1 \right) dt \right| \right) \\
\leqslant & \int_{|\xi|\leqslant\lambda} \int_{|t|\leqslant A_1} c_1 e^{-\frac{c_2}{2}|\xi|} |\xi|^{\frac{m}{2}} \left(1 - e^{-\epsilon|\xi|} \right) dt d\xi + \frac{\delta}{2} \\
\leqslant & \int_{|\xi|\leqslant\lambda} \int_{|t|\leqslant A_1} c_1 e^{-\frac{c_2}{2}|\xi|} |\xi|^{\frac{m}{2}} \left(1 - e^{-\epsilon\lambda} \right) dt d\xi + \frac{\delta}{2} \\
\leqslant & \ \delta,
\end{aligned}$$

quando $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Como ϵ_0 não depende de x temos que $I_1^\epsilon(x)$ converge uniformemente para

$$I_1(x+iy) = \int\int_{|t|\leqslant A_1} F_u(t,\xi) e^{i(x+iy-t)\xi} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi,$$

a qual deve ser holomorfa em $\{z : \Im z < \frac{c_2}{2}\}$ pois neste domínio, para todo $\epsilon > 0$, I_1^ϵ é holomorfa.

Agora, vamos tratar I_2^ϵ. Neste caso o domínio de integração é limitado, pela analiticidade do integrando, podemos concluir, pela Afirmação 3.4.3 , que I_2^ϵ é analítica em $\{z : |\Im z| \leqslant \frac{c_2}{2}\}$. Com as mesmas idéias feitas no caso anterior concluímos que I_ϵ^2 converge uniformemente para uma função analítica em $\{z : |\Im z| \leqslant \frac{c_2}{2}\}$. Observe que, diferente do caso anterior, temos $|\xi| \leqslant B$ (não é preciso tomar λ como antes) e assim $|F_u(t,\xi)e^{i(z-t)\xi}||\xi|^{\frac{m}{2}}$ é limitada no domínio de integração de I_2^ϵ. Para I_3^ϵ escolheremos A_2 de modo que $S(u) \subset \{y' : |y'| \leqslant \frac{A_2}{4}\}$, $c_2 \leqslant \frac{A_2}{2}$ e $A_2 > 1$. Note que no domínio de integração de I_3^ϵ temos

$$\begin{aligned}
|F_u(t,\xi)| &= \left| \int_{|y'|\leqslant\frac{A_2}{4}} e^{i(t-y')\xi - |\xi||t-y'|^2} u(y') dy' \right| \\
&\leqslant \int_{|y'|\leqslant\frac{A_2}{4}} e^{-|\xi|(|t|-|y'|)^2} |u(y')| dy' \\
&\leqslant \int_{|y'|\leqslant\frac{A_2}{4}} e^{-|\xi|\left(|t|-\frac{A_2}{4}\right)^2} |u(y')| dy' \\
&\leqslant C \cdot e^{-|\xi|\left(|t|-\frac{A_2}{4}\right)^2},
\end{aligned}$$

já que $|t-y'| \geqslant |t|-|y'| \geqslant |t|-\frac{A_2}{4} \geqslant A_2-\frac{A_2}{4} > 0$. Seja $|y| < \frac{A_2}{4}$, pela definição de A_2, segue que

$$\begin{aligned}
\left|F_u(t,\xi)e^{i(x+iy-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}\right||\xi|^{\frac{m}{2}} &\leqslant C\ e^{-|\xi|\frac{9A_2^2}{16}}e^{-y\xi-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}\\
&\leqslant C\ e^{-|\xi|\frac{9A_2^2}{16}+|y||\xi|}|\xi|^{\frac{m}{2}}\\
&\leqslant C\ e^{-|\xi|\frac{9A_2^2}{16}+\frac{A_2}{4}|\xi|}|\xi|^{\frac{m}{2}}\\
&\leqslant C\ e^{-\frac{-5A_2^2}{16}|\xi|}|\xi|^{\frac{m}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^m).
\end{aligned}$$

Analogamente aos casos anteriores temos que $I_3^\epsilon(z)$ é holomorfa e converge uniformemente a uma função holomorfa. Para I_4^ϵ consideraremos $|x| \leqslant A_2$, assim,

$$\begin{aligned}
I_4^\epsilon(x) &= \int_{|\xi|\geqslant B}\int_{A_1\leqslant|t|\leqslant A_2} F_u(t,\xi)e^{i(x-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}dtd\xi\\
&= \int\int\int_R e^{i(x-y)\xi-|\xi||t-y|^2-\epsilon|\xi|^2}|\xi|^{\frac{m}{2}}u(y)dydtd\xi
\end{aligned}$$

em que $R = \{(y,t,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |\xi| \geqslant B,\ A_1 \leqslant |t| \leqslant A_2 \text{ e } |y| \leqslant \frac{A_2}{4}\}$. Considere $\zeta(\xi) = \xi + is|\xi|(x-y)$, com $0 < s < \frac{4}{5A_2}$. O ramo da extensão holomorfa da função módulo está bem definido em $\{z \in \mathbb{C}^m : |\Im z| < |\mathcal{R}z|\}$. Veja que

$$|\Im\zeta| \leqslant s|\xi|(|x|+|y|) < |\xi| = |\mathcal{R}\zeta|,$$

deste modo, em R, o ramo analítico da função módulo $\langle\zeta\rangle$ está bem definido . Se voltarmos para I_4^ϵ, pelo Teorema de Stokes, sendo $\zeta(\xi) = \xi + is|\xi|(x-y)$ (parametrização de $\partial D\backslash\mathbb{R}^m$) temos

$$I_4^\epsilon(x) = \int\int\int_R e^{P(x,y,t,\zeta,\epsilon)}\langle\zeta(\xi)\rangle^{\frac{m}{2}}u(y)d\xi dydt,$$

com $P(x,y,t,\zeta,\epsilon) = i(x-y)\zeta - \langle\zeta\rangle|t-y|^2 - \epsilon\zeta^2$. Podemos diminuir s, de modo a obter $s \leqslant \frac{2}{\sqrt{10A_2}}$ e concluir que

$$\mathcal{R}(\zeta(\xi))^2 = \xi^2 - s^2|\xi|^2|x-y|^2 \geqslant |\xi|^2 - \frac{|\xi|^2}{2} = \frac{|\xi|^2}{2}.$$

Temos $\Im(\zeta(\xi))^2 \leqslant |\xi|^2$, assim,

$$\cos\{\arg(\zeta(\xi))^2\} = \frac{\mathcal{R}(\zeta(\xi))^2}{\sqrt{(\mathcal{R}(\zeta(\xi))^2)^2 + (\Im(\zeta(\xi))^2)^2}} \geqslant \frac{\frac{|\xi|^2}{2}}{|\xi|^2\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Já que $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cos(\theta)+1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\langle\zeta(\xi)\rangle) = \quad & \mathcal{R}(e^{\frac{1}{2}\log(\zeta(\xi))^2}) && = \mathcal{R}\left\{e^{\frac{1}{2}\left\{\ln|(\zeta(\xi))^2| + i\arg(\zeta(\xi))^2\right\}}\right\} \\
= \quad & |(\zeta(\xi))^2|^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{\arg(\zeta(\xi))^2}{2} && \geqslant |\mathcal{R}(\zeta(\xi))^2|^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\arg(\zeta(\xi))^2}{2} \\
\geqslant \quad & \tfrac{|\xi|}{2}\left(\tfrac{\cos(\arg(\zeta(\xi))^2)+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} && \geqslant |\xi|\frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Assim, complexificando x e considerando $z = x + iy'$, com $|x| \leqslant \frac{A_1}{4}$ e $|y'| \leqslant \max\left\{\frac{5(A_1)^2}{64}, \frac{s(A_1)^2}{32}\right\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|e^{P(z,t,\xi,\epsilon)}\right| &\leqslant e^{\mathcal{R}\{-y'\zeta\}+\mathcal{R}\{i(x-y)\zeta\}-\mathcal{R}\{\langle\zeta\rangle\}|t-y|^2-\epsilon\mathcal{R}\zeta^2} \\
&\leqslant e^{-y'\xi-|x-y|^2 s|\xi|-\frac{5}{8}|\xi||t-y|^2-\frac{|\xi|^2\epsilon}{2}}.
\end{aligned}$$

Para estimar o exponencial acima iremos dividir o domínio de y em duas regiões (lembre-se que neste caso $|y| \leqslant \frac{A_2}{4}$). Primeiro consideremos a região $|y| \leqslant \frac{A_1}{2}$. Observe que neste domínio temos

$$|t-y| \geqslant |t| - |y| \geqslant A_1 - \frac{A_1}{2} = \frac{A_1}{2} > 0,$$

já que $|t| \geqslant A_1$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\left|e^{P(z,y,t,\xi,\epsilon)}\right| &\leqslant e^{|y'||\xi|-\frac{5}{8}|t-y|^2|\xi|} \\
&\leqslant e^{|y'||\xi|-\frac{5}{8}\cdot\frac{(A_1)^2}{4}|\xi|} \\
&\leqslant e^{-\frac{5(A_1)^2}{64}|\xi|}.
\end{aligned}$$

Agora, ao considerar a região $\frac{A_1}{2} \leqslant |y| \leqslant \frac{A_2}{4}$ temos

$$|x-y| \geqslant |y| - |x| \geqslant \frac{A_1}{2} - \frac{A_1}{4} = \frac{A_1}{4} > 0,$$

já que $|x| < \frac{A_1}{4}$. E, então

$$\left|e^{P(z,y,t,\xi,\epsilon)}\right| \leqslant e^{|y'||\xi| - \frac{(A_1)^2}{16}s|\xi|} \leqslant e^{-\frac{s(A_1)^2}{32}|\xi|},$$

já que $|y'| \leqslant \frac{s(A_2)^2}{128}$. Destas considerações sobre y vemos que existe $c > 0$ tal que

$$\left|e^{P(z,y,t,\xi,\epsilon)}\right| \leqslant e^{-c|\xi|},$$

para todo $(y, t, \xi) \in R$. Portanto, pela Afirmação 3.4.3, I_4^ϵ também é analítica, em uma vizinhança de $x = 0$. De modo análogo ao feito em I_1^ϵ vemos que I_4^ϵ converge uniformemente para uma função holomorfa. ■

Observação: Com uma adaptação da demonstração acima podemos mostrar que o Teorema 2.2.3 continua válido se no lugar de $u \in C_c(\mathbb{R}^m)$ supusermos $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$.

Agora vamos estudar o conjunto frente de onda analítico, mas primeiro precisamos definir analiticidade micro-local.

Definição 2.2.4. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Nós dizemos que u é analítica (micro-local) em (x_0, ξ^0) se existir vizinhança V de x_0 e cones abertos e conexos Γ^1, ..., Γ^N de $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ e funções holomorfas de crescimento temperado $f_j \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta^j)$ (para algum $\delta > 0$) tal que $u = \sum_{j=1}^{N} bf_j$, próximo de x_0 e $\xi^0\Gamma^j < 0$ para $j \in \{1, 2, ..., N\}$.*

Observações:

1. Quando $m = 1$, $x_0 = 0$ e $\xi^0 = -1$, temos que u é analítica micro-local no ponto $(0, -1)$ se há uma função holomorfa de crescimento temperado f sobre algum retângulo $(-a, a) \times (0, b)$ tal que $u = bf$ sobre $(-a, a)$.

2. Uma função analítica é analítica micro-local em todas as direções.

Definição 2.2.5. *O conjunto frente de onda analítico de uma distribuição u, denotado por $WF_a(u)$ é definido por $WF_a(u) \doteq \{(x, \xi) : u$ não é analítica micro-local em $(x, \xi)\}$.*

Teorema 2.2.6. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Então, $(x_0, \xi^0) \notin WF_a(u)$ se, e somente se, existem vizinhança V de x_0, um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, uma função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$,*

$\psi = 1$ em uma vizinhança de x_0, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ e constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|F_{\psi u}(x,\xi)| \leqslant c_1 e^{-c_2|\xi|} \qquad \forall (x,\xi) \in V \times \Gamma.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos supor $x_0 = 0$. Observe que todo aberto U contendo x_0 podemos tomar $\psi \in C_c^\infty(U)$ em que $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança $V_0 \subset U$ de x_0 e $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. A função ψ tem suporte compacto tão pequeno quanto se queira. Deste modo, podemos assumir $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ com o suporte tão pequeno quanto se queira. Se $(0,\xi^0) \notin WF_a(u)$ então, existem vizinhança V de x_0, cones Γ^1,..., Γ^N em $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$, $\delta > 0$ e funções holomorfas $f_j \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta^j)$ tais que $u = \sum_{j=1}^N bf_j$ próximo de x_0 e $\xi^0\Gamma^j < 0$, para todo $j = 1, ..., N$. Primeiro, suponha que existam cone aberto e conexo Γ^1 de vértice na origem, tal que $\xi^0 \cdot \Gamma_\delta^1 < 0$, V vizinhança aberta de x_0 e $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta^1)$ para algum $\delta > 0$, tais que $u = bf$. Supondo $S(u) \subset B\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \subset V$, a transformada FBI de u é dada por

$$\begin{aligned} F_u(x,\xi) &= \left\langle u_y, e^{i(x-y)\xi - |\xi||x-y|^2} \right\rangle \\ &= \lim_{w\to 0;\ w\in\Gamma^1} \int_V f(y+iw) e^{(x-y)\xi-|\xi||x-y|^2} dy \\ &= \lim_{\lambda\to 0;\ \lambda\in\mathbb{R}} \int_V f\left(y + i\lambda\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\right) e^{(x-y)\xi-|\xi||x-y|^2} dy, \end{aligned}$$

para algum $\nu_0 \in \Gamma^1$ fixo. Dado $\phi \in C_c^\infty\left(B\left(0,\frac{\delta}{2}\right)\right)$ e $\phi = 1$ numa vizinhança de x_0, considere a aplicação $\theta : V \longrightarrow \mathbb{C}^m$, dada por $\theta(y) = y + is\phi(y)\frac{\nu_0}{|\nu_0|}$, com s suficientemente pequeno para $|\theta(y)| < \delta$. Pelo teorema de Stokes, assim como na equação (2.16), temos

$$\left|\int_V f\left(y + i\lambda\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\right) e^{(x-y)\xi-|\xi||x-y|^2} dy\right| = \left|\int_V f\left(\theta(y) + i\lambda\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\right) e^{(x-\theta(y))\xi-|\xi|(x-\theta(y))^2} \det\theta'(y) dy\right|.$$

Pela definição de bf e pela topologia de $\mathcal{D}'(\Omega)$ existem constantes q natural e $C > 0$ real, independentes de $\lambda > 0$, tais que

$$\left|\int_V f\left(\theta(y) + i\lambda\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\right) e^{i(x-\theta(y))\xi-|\xi|(x-\theta(y))^2} \det\theta'(y) dy\right| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant q} \sup_{y\in V} \left|\partial_y^\alpha \left(e^{i(x-\theta(y))\xi-|\xi|(x-\theta(y))^2}\right)\right|,$$

para s e λ suficientemente pequenos. Assim, pela fórmula de Faa di Bruno e por $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, existe polinômio P com coeficientes positivos de modo que

$$|F_u(x,\xi)| \leqslant \sup_{y\in V}\left\{P(|\xi|)e^{\mathcal{R}\{Q(x,y,\xi)\}}\right\}, \tag{2.19}$$

em que $Q(x,y,\xi) = i(x-y)\xi + s\phi(y)\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\xi - |\xi|\left(x-y-is\phi(y)\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\right)^2$ e $x \in B(0,\delta)$. Pela definição de Q temos

$$\mathcal{R}\{Q(x,y,\xi)\} = s\phi(y)\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\xi - |\xi|(|x-y|^2 - s^2(\phi(y))^2).$$

A seguir vamos dividir o domínio da variável y em dois conjuntos disjuntos.

Primeiro considere $|y| \leqslant \frac{\delta}{4}$. Como $\nu_0 \in \Gamma^1$ temos $\nu_0 \cdot \xi^0 < 0$, então existe $d_1 > 0$ tal que $\nu_0\cdot\xi^0 = -d_1|\nu_0||\xi^0|$. Se $s < d_1$ (diminuindo s se necessário), $\left|\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| < \frac{d_1-s}{2}$ e $|\xi| = 1$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\{Q(x,y,\xi)\} &= s\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\left(\frac{\xi^0}{|\xi^0|} + \left(\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right)\right) - |\xi|(|x-y|^2 - s^2)\\
&\leqslant -s\left(d_1 - \left|\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| - s\right)\\
&< -s\frac{d_1-s}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, existe constante $c_1 = s\frac{d_1-s}{2} > 0$ tal que, se $s < d_1$, $\left|\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| < \frac{d_1-s}{2}$ e $|\xi| = 1$ obtemos

$$\mathcal{R}\{Q(x,y,\xi)\} < c_1.$$

Para fazer o caso $|y| > \frac{\delta}{4}$, observe que $|x-y|^2 > \left(|x| - \frac{\delta}{4}\right)^2$, quando $|x| < \frac{\delta}{4}$. Com isso, considerando $|y| \geqslant \frac{\delta}{4}$, $|x| < \frac{\delta}{16}$, $|\xi| = 1$ e $\left|\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| < \frac{d_1-s}{2}$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\{Q(x,y,\xi)\} &= s\phi(y)\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\frac{\xi^0}{|\xi^0|} + s\phi(y)\frac{\nu_0}{|\nu_0|}\left(\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right) - (|x-y|^2 - s(\phi(y))^2)\\
&< s\phi(y)d_1 + s\left|\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| - \left(|x| - \frac{\delta}{4}\right)^2 + s^2(\phi(y))^2\\
&< sd_1 + s\frac{d_1-s}{2} - |x|^2 + 2|x|\frac{\delta}{4} - \frac{\delta^2}{16} + s^2\\
&< \frac{3sd_1}{2} + s + \frac{\delta^2}{32} - \frac{\delta^2}{16}\\
&= s\left(\frac{3d_1}{2} + 1\right) - \frac{\delta^2}{32}.
\end{aligned}$$

Se $s < \frac{\delta^2}{16(3d_1+2)}$ (diminuindo s, se necessário) temos $c_2 = -s\left(\frac{3d_1}{2}+1\right) + \frac{\delta^2}{32} > 0$ e

$$\mathcal{R}\{Q(x,y,\xi)\} < c_2,$$

quando $|y| \leqslant \frac{\delta}{4}$, $|x| < \frac{\delta}{16}$, $|\xi| = 1$ e $\left|\xi - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| < \frac{d_1-s}{2}$. Destas considerações, sobre y, existem vizinhanças $V_1 = B\left(0, \frac{\delta}{16}\right)$ de 0 e $W = B\left(\frac{\xi^0}{|\xi^0|}, \frac{d_1-s}{2}\right) \bigcap S^{n-1}$ de $\frac{\xi_0}{|\xi_0|}$, tais que,

$$\mathcal{R}\left\{Q\left(x,y,\xi\right)\right\} < -c_2,$$

para $x \in V_1$ e $\xi \in W$. Deste modo, se $\Gamma = \{tw : t > 0 \text{ e } w \in W\}$, temos

$$\mathcal{R}\{Q(x,y,\xi)\} = \mathcal{R}\left\{Q\left(x,y,\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right\}|\xi| < -c_2|\xi|,$$

quando $x \in V_1$, $\xi \in \Gamma$ e $y \in V$. Deste modo, voltando na equação (2.19),

$$|F_u(x,\xi)| < P(|\xi|)\, e^{-c_2|\xi|},$$

para $x \in V_1$ e $\xi \in \Gamma$. E, diminuindo c_2, existe uma constante c_1 de modo que

$$|F_u(x,\xi)| < P(|\xi|)\, e^{-c_2|\xi|}; \quad x \in V_1, \quad \xi \in \Gamma.$$

Acima tratamos o caso de $u = bf$, o caso de $u = \sum_{j=1}^{N} bf_j$ obtemos por linearidade, diminuindo c_2, Γ, V_1 e aumentando c_1.

Reciprocamente, suponha a existência de uma vizinhança V da origem, um cone Γ aberto conexo com vértice na origem e constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$F_u(x,\xi) \leqslant c_1 e^{-c_2|\xi|}, \qquad \forall (x,\xi) \in V \times \Gamma.$$

Sem perda de generalidade podemos tomar $V = \{x : |x| < \delta\}$, para algum $\delta > 0$. Usaremos a fórmula de inversão da FBI. Considere

$$\int\int e^{i(x-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} F_u(t,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}} d\xi dt = I_1^\epsilon(x) + I_2^\epsilon(x) + I_3^\epsilon(x),$$

tal que $I_1^\epsilon(x)$, $I_2^\epsilon(x)$, $I_3^\epsilon(x)$ representam a integral dupla nos respectivos domínios de integração: $\{(t,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |t| < \delta,\ \xi \in \mathbb{R}^m \backslash \Gamma\}$, $\{(t,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |t| < \delta,\ \xi \in \Gamma\}$ e $\{(t,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |t| > \delta\}$. $F_u(t,\xi) = \left\langle u_s, e^{i(t-s)\xi - |\xi||t-s|^2} \right\rangle$ e pela observação feita no início da demonstração podemos supor $S(u) \subset B(0, \frac{\delta}{4})$, assim, $|s| < \frac{\delta}{4}$. Primeiro vamos tratar de I_3^ϵ. Diminua, se necessário, δ de tal modo que $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Se $|t| > \delta$ e $|s| < \frac{\delta}{4}$ temos $|s| < \frac{|t|}{4} \leqslant |t|$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
|t-s|^2 &= \frac{1}{2}|s-t|^2 + \frac{1}{2}|s-t|^2 \\
&> \frac{|s|^2 - 2|s||t| + |t|^2}{2} + \frac{(|t|-|s|)^2}{2} \\
&> \frac{|t|^2 - 2\left(\frac{|t|}{4}\right)|t|}{2} + \frac{9\delta^2}{32} \\
&= \frac{|t|^2}{4} + \frac{9\delta^2}{32} \\
&\geqslant a(1+|t|^2),
\end{aligned}
$$

onde $a = \frac{9}{32}\delta^2$. Além disso, pelo Teorema 1.3.10, existem $C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$
|F_u(t,\xi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{|s| \leqslant \frac{\delta}{4}} \left\{ \left| \partial_s^\alpha e^{i(t-s)\xi - |\xi||t-s|^2} \right| \right\} \leqslant CP(|\xi|) e^{-|\xi| a (1+|t|^2)},
$$

para algum polinômio P, em que $|t| > \delta$. Isso possibilita, para $|y| < \frac{a}{2}$, obter

$$
\left| e^{i(x+iy-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} F_u(t,\xi) |\xi|^{\frac{m}{2}} \right| \leqslant C|\xi|^{\frac{m}{2}} P(|\xi|) e^{-\frac{a}{2}|\xi|} e^{-|\xi| a |t|^2},
$$

quando $\epsilon > 0$. Seja

$$
h_\epsilon(x+iy,\xi) \doteq \int_{|t|>\delta} e^{i(x+iy-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} F_u(t,\xi) |\xi|^{\frac{m}{2}} dt,
$$

pela Afirmação 3.4.3, podemos concluir que $h_\epsilon(.,\xi) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m + iB_{\frac{a}{2}}(0))$ e pelo teorema da convergência dominada temos que h_ϵ é contínua em $(\mathbb{R}^m + iB_{\frac{a}{2}}(0)) \times \mathbb{R}^m$ para cada $\epsilon > 0$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
|h_\epsilon(x+iy,\xi)| &\leqslant C|\xi|^{\frac{m}{2}} P(|\xi|) e^{-\frac{a}{2}|\xi|} \int_{|t|>\delta} e^{-a|\xi||t|^2} dt \\
&= CP(|\xi|)|\xi|^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{a}{2}|\xi|} \left(\frac{\pi}{a|\xi|} \right)^{\frac{m}{2}} \\
&\leqslant CP(|\xi|) e^{-\frac{a}{2}|\xi|} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{m}{2}} \in L^1,
\end{aligned}
$$

para todo $\epsilon > 0$. Pela afirmação 3.4.3,

$$I_3^\epsilon(x+iy) = \int h_\epsilon(x+iy,\xi)d\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m + iB_{\frac{a}{2}}(0)).$$

Como feito no primeiro passo da recíproca do Teorema 2.2.3 temos que $\frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}I_3^\epsilon$ converge uniformemente para uma função holomorfa em $\mathbb{R}^m + iB_{\frac{a}{2}}(0)$, assim, podemos concluir que $\frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}I_3^\epsilon(x)$ converge uniformemente para uma função analítica real.

Para estudar a integral I_2^ϵ definiremos a função auxiliar

$$g_\epsilon(x+iy,\xi) = \int_{|t|<\delta} e^{i(x+iy-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}F_u(t,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}}dt,$$

para $|y| < \frac{c_2}{2}$. Pela Afirmação 3.4.3, para cada $\epsilon > 0$ temos g_ϵ contínua em $(\mathbb{R}^m + iB_{\frac{c_2}{2}}(0)) \times \Gamma$ e $g_\epsilon(\cdot,\xi) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m + iB_{\frac{c_2}{2}}(0))$ para todo $\xi \in \Gamma$. Além disso,

$$\begin{aligned} |g_\epsilon(x+iy,\xi)| &\leqslant \int_{|t|<\delta} e^{|y||\xi|-\epsilon|\xi|^2}c_1e^{-c_2|\xi|}|\xi|^{\frac{m}{2}}dt \\ &\leqslant Cc_1e^{\frac{c_2}{2}|\xi|-c_2|\xi|}|\xi|^{\frac{m}{2}} \\ &\leqslant Cc_1e^{-\frac{c_2}{2}|\xi|}|\xi|^{\frac{m}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Então, pela Afirmação 3.4.3, $I_2^\epsilon(x+iy) = \int_{\xi\in\Gamma} g_\epsilon(x+iy,\xi)d\xi$ é holomorfa em $\mathbb{R}^m + iB_{\frac{c_2}{2}}(0)$. Assim, como antes podemos concluir que I_2^ϵ converge uniformemente em $\mathbb{R}^m + iB_{\frac{c_2}{2}}(0)$, permitindo concluir que $I_{\{2\}}^\epsilon$ converge uniformemente para uma função analítica real.

A integral I_1^ϵ nos dará mais trabalho. Escreva $\mathbb{R}^m \backslash \Gamma = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$, em que Γ_j é um cone fechado conexo e $(\Gamma_j \bigcap \Gamma_k)^\circ = \varnothing$, de modo que a existir $c > 0$ tal que

$$\Gamma_j^c = \{y \in \mathbb{R}^m : y\xi^0 < 0, \text{ e } y\xi \geqslant c|y||\xi| \text{ para todo } \xi \in \Gamma_j\} \neq \varnothing$$

(vide [6] páginas 49 e 48). Então,

$$\frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}I_1^\epsilon(x) = \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}\sum_{j=1}^k \int_{|t|<\delta}\int_{\xi\in\Gamma_j} e^{i(x-t)\xi-\epsilon|\xi|^2}F_u(t,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}}d\xi dt.$$

Vamos definir $c_m \doteq \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}}$ e

$$f_j^\epsilon(x+iy) \doteq c_m \int_{|t|<\delta} \int_{\xi\in\Gamma_j} e^{i(x+iy-t)\xi-\epsilon|\xi|^2} F_u(t,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}} d\xi dt$$

para $x+iy \in \mathbb{R}^m + i\Gamma_j^c$. Sejam arbitrário $x_0+iy_0 \in \mathbb{R}^m + i\Gamma_{j\delta}^c$, com δ a escolher depois. Seja $0 < \epsilon_0 < 1$ tal que $B_{\epsilon_0}(y_0) \subset \Gamma_j^c$, nesse caso temos $\epsilon_0 < |y_0|$. Dado $y \in B_{\epsilon_0}(y_0)$ temos $|y| > |y_0| - |\epsilon_0|$. Para $x+iy \in \mathbb{R}^m + iB_{\epsilon_0}(y_0)$, defina

$$G(x+iy,\xi) \doteq c_m \int_{|t|<\delta} e^{i(x+iy-t)\xi-\epsilon|\xi|^2} F_u(t,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}} dt,$$

pela Afirmação 3.4.3, já que o domínio de integração é compacto e u possui suporte compacto, G é contínua em $(\mathbb{R}^m + iB_{\epsilon_0}(y_0)) \times \Gamma_j$ e $G(\cdot,\xi) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m + iB_{\epsilon_0}(y_0))$. Mais ainda, existem constantes $C, c > 0$ e natural k em que

$$\begin{aligned}
|G(x+iy,\xi)| &\leqslant c_m \int_{|t|<\delta} e^{-y\xi}|F_u(t,\xi)||\xi|^{\frac{m}{2}} dt \\
&= c_m \int_{|t|<\delta} e^{-y|\xi|} \left|\left\langle u_l, e^{i(t-l)\xi-|\xi||t-l|^2}\right\rangle\right| |\xi|^{\frac{m}{2}} dt \\
&\leqslant c_m \int_{|t|<\delta} e^{-c|y||\xi|} C \sum_{|\alpha|<k} \sup_{|l|\leqslant\frac{\delta}{2}} \left\{ D^\alpha e^{i(t-l)\xi-|\xi||t-l|^2} \right\} dt \\
&\leqslant c_m C \int_{|t|<\delta} e^{-c|y||\xi|} |\xi|^k dt \\
&\leqslant c_m C \int_{|t|<\delta} e^{-c(|y_0|-\epsilon_0)|\xi|} |\xi|^k dt \\
&\leqslant c_m C e^{-c|\xi|} |\xi|^k \in L^1(\Gamma_j \backslash B(0,1)).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Assim,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f_j^\epsilon(x+iy) \doteq f_j^\epsilon(x+iy) = \int_{\xi\in\Gamma_j} G(x+iy,\xi) d\xi$$

é holomorfa em $\mathbb{R}^m + iB_{\epsilon_0}(y_0)$. Como tomamos arbitrários $x_0+iy_0 \in \mathbb{R}^m + i\Gamma_j^c$ podemos concluir que $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m + i\Gamma_j^c)$. Temos também que f_j possui crescimento temperado em $\mathbb{R}^m + i\Gamma_j^c$ pois

$$\begin{aligned}
|f_j(x+iy)| &\leqslant \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\xi\in\Gamma_j} |G(x+iy,\xi)| d\xi \\
&\leqslant T_1(y) + T_2(y),
\end{aligned}$$

em que

$$T_1(y) = c_m \int_{\xi\in\Gamma_j,|\xi|<1} \int_{|t|<\delta} e^{-y\xi} |F_u(t,\xi)||\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi$$

e

$$T_2(y) = Cc_m \int_{\xi\in\Gamma_j,\, |\xi|>1} e^{-c|\xi||y|} |\xi|^k d\xi.$$

Sabemos que para todo n natural temos $e^{c|y||\xi|} \geqslant a_n |y|^n |\xi|^n$, $a_n = \frac{c^n}{n!}$. Para o caso $|\xi| > 1$ considere $n = k + m + 1$, obtendo

$$\frac{|\xi|^k}{|\xi|^n} \leqslant \frac{1}{|\xi|^{m+1}} \in L^1(\mathbb{R}^m).$$

Então,

$$\begin{aligned} T_2(y) &\leqslant c_m \int_{\xi\in\Gamma_j,\ |\xi|>1} e^{-c|\xi||y|} |\xi|^k d\xi \\ &\leqslant \int_{\xi\in\Gamma_j,\ |\xi|>1} \frac{1}{a_n |y|^n |\xi|^{m+1}} d\xi = \frac{b_1}{|y|^n}, \end{aligned}$$

para certa constante positiva b_1 e para todo $y \in \Gamma^c_{j\delta}$. Como T_1 é limitada (pelas definições de Γ_j e Γ^c_j) temos constante b_2 tal que $T_1(y) \leqslant b_2 \leqslant \frac{b_2}{|y|^n}$, para $|y| < \delta < 1$. Assim, conseguimos constante b em que $|f_j(x+iy)| \leqslant \frac{b}{|y|^n}$. Dado $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^m)$, análogo ao que foi feito em 2.20 e pelo Teorema de Paley-Wiener existe k tal que

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\phi}(-\xi) e^{-y\xi - it\xi} F_u(t,\xi) |\xi|^{\frac{m}{2}}\right| &\leqslant C_{k+m+1}(1+|\xi|)^{-(k+m+1)} e^{-c|y||\xi|} C_k (1+|\xi|)^k \\ &\leqslant \tilde{C}_k (1+|\xi|)^{m+1} \in L^1, \end{aligned}$$

para $y \in \Gamma^c_j$ e $\xi \in \Gamma_j$. Pela definição de transformada de Fourier e pelo teorema da convergência dominada temos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0^+} c_m \langle I^\epsilon_1, \phi\rangle &= c_m \sum_{j=1}^k \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\int_{|t|<\delta} \int_{\xi\in\Gamma_j} F_u(t,\xi) e^{i(x-t)\xi - \epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} \phi(x) d\xi dt dx \\ &= c_m \sum_{j=1}^k \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|t<\delta|} \int_{\xi\in\Gamma_j} \left(\int e^{ix\xi} \phi(x) dx\right) e^{-it\xi - \epsilon|\xi|^2} F_u(t,\xi) |\xi|^{\frac{m}{2}} d\xi dt \\ &= c_m \sum_{j=1}^k \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|t|<\delta} \int_{\xi\in\Gamma_j} \widehat{\phi}(-\xi) e^{-it\xi - \epsilon|\xi|^2} F_u(t,\xi) |\xi|^{\frac{m}{2}} d\xi dt \end{aligned}$$

$$= \quad c_m \sum_{j=1}^{k} \int_{|t|<\delta} \int_{\xi \in \Gamma_j} \widehat{\phi}(-\xi) e^{-it\xi} F_u(t,\xi) |\xi|^{\frac{m}{2}} d\xi dt$$

$$= \quad \sum_{j=1}^{k} \langle b f_j, \phi \rangle$$

o limite, para $\epsilon \to 0^+$, pode ser verificado como já fizemos antes. Pelos três casos, feitos acima, temos que $(x_0, \xi^0) \notin WF_a(u)$. ■

Com uma adaptação da demonstração do teorema anterior pode-se demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 2.2.7. *Sejam, Ω aberto de $\mathbb{R}^m$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Então, $(x_0, \xi^0) \notin WF(u)$ se, e somente se, existam uma vizinhança V de x_0, vizinhança cônica $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ de ξ^0, uma função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\psi = 1$ em uma vizinhança de x_0, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, e para cada k natural exista uma constante c_k em que*

$$|F_u(x,\xi)| \leqslant \frac{c_k}{(1+|\xi|)^k}, \qquad (x,\xi) \in V \times \Gamma.$$

Capítulo

3

Aplicação para solução de EDP's não lineares de primeira ordem.

Introdução

Neste capítulo demonstraremos os principais resultados deste trabalho.

3.1 Sobre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, T real e u solução da EDP não linear

$$u_t = f(x, t, u, u_x), \tag{3.1}$$

em que $f(x, t, \zeta_0, \zeta)$ é função de classe $C^\infty(\Omega \times [0, T) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$ e holomorfa em (ζ_0, ζ). Seja,

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} f_{\zeta_j}(x, t, \zeta_0, \zeta) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

e $v = (u, u_x)$. Se $\psi = \psi(x, t, \zeta_0, \zeta)$ é função suave e holomorfa em (ζ_0, ζ), usaremos a seguinte notação

$$\psi^v(x, t) = \psi(x, t, u, u_x).$$

Com esta notação podemos escrever

$$\mathcal{L}^v = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} f^v_{\zeta_j}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Segue que

$$\mathcal{L}^v u = f^v(x,t) - \sum_{j=1}^{N} f^v_{\zeta_j}(x,t) u_{x_j}(x,t). \tag{3.2}$$

Como u é solução da equação (3.1) pelo teorema de Schwarz, e pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^v u_{x_k}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_k}(x,t) - \sum_{j=1}^{N} f^v_{\zeta_j}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x,t) \\
&= \frac{\partial (f(x,t,u,u_x))}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{N} f^v_{\zeta_j}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x,t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^v (x,t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_0}\right)^v (x,t) u_{x_k}(x,t) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\right)^v (x,t)\frac{\partial u_{x_j}}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\right)^v (x,t)\frac{\partial u_{x_j}}{\partial x_k}(x,t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^v (x,t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_0}\right)^v (x,t) u_{x_k}(x,t).
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{L}^v v = g^v(x,t)$, em que $g = (g_0, g_1, ..., g_N)$ e

$$\begin{aligned}
g_0(x,t,\zeta_0,\zeta) &= f(x,t,\zeta_0,\zeta) - \sum_{j=1}^{N} \zeta_j f_{\zeta_j}(x,t,\zeta_0,\zeta), \\
g_l(x,t,\zeta_0,\zeta) &= f_{x_l}(x,t,\zeta_0,\zeta) + \zeta_l f_{\zeta_0}(x,t,\zeta_0,\zeta) \qquad (1 \leqslant l \leqslant N).
\end{aligned}$$

Considere a parte principal do Hamiltoniano holomorfo de $F(x,t,\zeta_0,\zeta,\eta) = \eta - f(x,t,\zeta_0,\zeta)$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} + g_0 \partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^{N} g_j \partial_{\zeta_j}. \tag{3.3}$$

Lema 3.1.1. *Seja $\psi = \psi(x,t,\zeta_0,\zeta)$ uma função suave, holomorfa em (ζ_0,ζ). Então:*

(i) Para todo natural n, temos

$$(\mathcal{L}^v)^n \psi^v = (\mathcal{H}^n \psi)^v.$$

(ii) Para todo natural n, temos

$$(\mathcal{L}^v)^n\psi^v = \partial_t^n(\psi^v) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}\psi^v). \tag{3.4}$$

Demonstração. (i) Faremos a demonstração por indução sobre n. Para $n = 1$, pela regra da cadeia, pelo fato de $u_t = f^v$ e pela definição das funções g_j's, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^v\psi^v &= \partial_t(\psi^v) - \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v\partial_{x_j}(\psi^v)\\
&= (\partial_t\psi)^v + (\partial_{\zeta_0}\psi)^v\cdot\partial_t u + \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}\psi)^v u_{x_j t}\\
&\quad - \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v\left((\partial_{x_j}\psi)^v + (\partial_{\zeta_0}\psi)^v u_{x_j} + \sum_{k=1}^{N}(\partial_{\zeta_k}\psi)^v u_{x_k x_j}\right)\\
&= (\partial_t\psi)^v - \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v(\partial_{x_j}\psi)^v + (\partial_{\zeta_0}\psi)^v\left(f^v - \sum_{j=1}^{N}u_{x_j}(f_{\zeta_j})^v\right)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\partial_t u_{x_j} - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v(\partial_{\zeta_k}\psi)^v u_{x_k x_j}\\
&= (\mathcal{L}\psi)^v + g_0^v(\partial_{\zeta_0}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}\left((\partial_t u_{x_j})(\partial_{\zeta_j}\psi)^v - \sum_{k=1}^{N}(f_{\zeta_k})^v(\partial_{x_k}u_{x_j})(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\right)\\
&= (\mathcal{L}\psi)^v + g_0^v(\partial_{\zeta_0}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\left(\partial_t u_{x_j} - \sum_{k=1}^{N}(f_{\zeta_k})^v\partial_{x_k}u_{x_j}\right)\\
&= (\mathcal{L}\psi)^v + g_0^v(\partial_{\zeta_0}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\mathcal{L}^v(u_{x_j}) = (\mathcal{H}\psi)^v.
\end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração veja que, supondo $(\mathcal{L}^v)^n\psi^v = (\mathcal{H}^n\psi)^v$ e usando o passo que já foi feito, temos,

$$(\mathcal{L}^v)^{n+1}\psi^v = \mathcal{L}^v((\mathcal{L}^v)^n\psi^v) = \mathcal{L}^v((\mathcal{H}^n\psi)^v) = (\mathcal{H}(\mathcal{H}^n\psi))^v = (\mathcal{H}^{n+1}\psi)^v.$$

(ii) A prova deste item também será feita por indução. Para $n = 1$ temos,

$$\mathcal{L}^v(\psi^v) = \partial_t(\psi^v) - \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v\partial_{x_j}(\psi^v). \tag{3.5}$$

Observe que, se $n = 1$ em (3.4) obtemos a equação (3.5). Agora, supondo que existe algum natural n

em que a equação (3.4) é satisfeita, vamos demonstrar que o mesmo segue para $n+1$. Pela hipótese de indução e pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^v)^{n+1}(\psi)^v &= \mathcal{L}^v((\mathcal{L}^v)^n(\psi^v)) \\
&= \mathcal{L}^v\left(\partial_t^n(\psi^v) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)\left((\mathcal{L}^v)^{l-s}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)\right)\right) \\
&= \mathcal{L}^v(\partial_t^n(\psi^v)) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^{s+1}(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\
&= I_1 - I_2 - I_3,
\end{aligned}$$

para

$$I_1 = \mathcal{L}^v(\partial_t^n(\psi^v)) = \partial_t^{n+1}(\psi^v) - \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v\partial_{x_j}\partial_t^n(\psi^v),$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^{s+1}(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{l+1}\binom{l}{s-1}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{l}\binom{l}{s-1}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}((\mathcal{L}^v)^{l+1}(f_{\zeta_j})^v)(\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}(f_{\zeta_j})^v(\mathcal{L}^v)^{l+1}(\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)).
\end{aligned}$$

Já que $\binom{l}{s} + \binom{l}{s-1} = \binom{l+1}{s}$ temos,

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{l}\binom{l+1}{s}((\mathcal{L})^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\ &+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}((\mathcal{L}^v)^{l+1}(f_{\zeta_j})^v)(\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}((f_{\zeta_j})^v(\mathcal{L}^v)^{l+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{l+1}\binom{l+1}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s+1}\partial_{x_j}\partial_t^{n-1-l}(\psi^v)) \\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s}\partial_{x_j}\partial_t^{n-l}(\psi^v)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= \partial_t^{n+1}\psi^v - \sum_{j=1}^{N} f_{\zeta_j}^v\partial_{x_j}\partial_t^n(\psi^v) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s}(\partial_{x_j}\partial_t^{n-l}(\psi^v))) \\ &= \partial_t^{n+1}\psi^v - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s(f_{\zeta_j})^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s}\partial_{x_j}\partial_t^{n-l}(\psi^v)), \end{aligned}$$

como queriamos demonstrar. ∎

Corolário 3.1.2. *(i)* $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) = 0$, *para todo* $0 \leqslant k \leqslant n-1$ *se e somente se* $(\mathcal{L}^v)^k\Im(f_\zeta)^v(x_0,0) = 0$, *para todo* $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

(ii) Se $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) = 0$, *para todo* $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *e* $\Im(\mathcal{H}^n f_\zeta)^v(x_0,0) \neq 0$, *então,*

$$(\mathcal{L}^v)^n(\Im(f_{\zeta_j})^v)(x_0,0) = \Im(\mathcal{H}^n f_{\zeta_j})^v(x_0,0), \ \ j = 1,...,N.$$

Demonstração.

(i)($\Rightarrow$) Dado $0 \leqslant k \leqslant n-1$, se $f_\zeta = (f_{\zeta_1},...,f_{\zeta_N})$ temos

$$\begin{aligned} 0 = \Im(\mathcal{H}f_\zeta)^v(x_0,0) &= \Im\{(\mathcal{H}^k f_{\zeta_1},...,\mathcal{H}^k f_N)\}(x_0,0) \\ &= (\Im\{\mathcal{H}^k f_{\zeta_1}\}(x_0,0),...,\Im\{\mathcal{H}^k f_{\zeta_N}\}(x_0,0)). \end{aligned}$$

Então $\Im\{\mathcal{H}^k f_{\zeta_j}\}^v(x_0,0) = 0$, para todo $1 \leqslant j \leqslant N$ e $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Assim pelo Lema 3.4.4

temos

$$(\mathcal{L}^v)^k(\Im\{f_{\zeta_j}\}^v)(x_0,0) = 0,$$

para $1 \leqslant j \leqslant N$ e $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $(\mathcal{L}^v)^k(\Im\{f_{\zeta_j}\}^v)(x_0,0) = 0$, para todo $0 \leqslant k \leqslant n-1$ e $1 \leqslant j \leqslant N$. Mostraremos por indução que $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) = 0$, para todo $0 \leqslant k \leqslant n-1$. O caso $k = 0$ segue direto da hipótese. Supondo a existência de um natural k, em que $\Im\{\mathcal{H}^l f_\zeta\}^v(x_0,0) = 0$, para $0 \leqslant l \leqslant k < n-1$. Como $(\mathcal{L}^v)^{k+1}(\Im\{f_{\zeta_j}\}^v)(x_0,0) = 0$, para todo $1 \leqslant j \leqslant N$. Pelo Lema 3.4.4 temos

$$\Im\{\mathcal{H}^{k+1} f_{\zeta_j}\}^v(x_0,0) = (\mathcal{L}^v)^{k+1}\Im\{f_{\zeta_j}\}^v(x_0,0) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{k}\Im\{\mathcal{H}^l f_{\zeta_j}\}^v(x_0,0)A_j^{l,n} = 0.$$

De mesmo modo, a demonstração de (ii) segue por aplicação direta do Lema 3.4.4. ∎

Lema 3.1.3. *Fixado k natural, se*

$$(\partial_t^l \Im f_{\zeta_j}^v)(x,0) = 0, \ \ \forall x \in \Omega, \ \ 1 \leqslant j \leqslant N \ \ e \ \ 0 \leqslant l \leqslant k-1 \tag{3.6}$$

então

$$((\mathcal{L}^v)^k \Im f_{\zeta_i}^v)(x,0) = \partial_t^k(\Im f_{\zeta_i}^v)(x,0) \ \ \forall x \in \Omega, \ \ 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{3.7}$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1 temos

$$(\mathcal{L}^v)^k(\Im f_{\zeta_i})^v \;\; = \;\; \partial_t^k(\Im f_{\zeta_i})^v - \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}((\mathcal{L}^v)^s f_{\zeta_j}^v)((\mathcal{L}^v)^{l-s}\partial_{x_j}\partial_t^{k-1-l}\Im\{f_{\zeta_j}\}^v). \tag{3.8}$$

Já que,

$$\mathcal{L}^v = \partial_t - \sum_{k=1}^{N} f_{\zeta_j}^v(x,t)\partial_{x_j},$$

se p e q ão naturais tais que $0 \leqslant p+q \leqslant k-1$, obtemos que

$$(\mathcal{L}^v)^q\partial_t^p\Im\{f_{\zeta_j}\}^v(x,0) \;\; = \;\; 0.$$

Observe que $l - s + k - 1 - l = k - 1 - s \leqslant k - 1$. A partir da equação (3.8) temos

$$(\mathcal{L}^v)^k(\Im f_{\zeta_i})^v(x,0) = \partial_t^k(\Im f_{\zeta_i}^v)(x,0).$$

■

3.2 Colchetes de Lie

Dados dois campos vetoriais complexos L e M denotamos o colchete de Lie de L e M por $[L, M] \doteq LM - ML$ (ver [7]). Nesta seção iremos demonstrar recentes caracterizações de múltiplos colchetes de Lie.

Fixado k natural não nulo, sejam $X_0, X_1, ..., X_k$ campos vetoriais complexos. Se $Y_1 = [X_1, X_0]$ e $Y_n = [X_n, Y_{n-1}]$, para $2 \leqslant n \leqslant k$, o k-colchete Y_k será representado por

$$[X_k, [X_{k-1}, ..., [X_1, X_0]]].$$

Lema 3.2.1. *Defina $M^v = \sum_{j=1}^{N}\{\Im\{f_{\zeta_j^v}\}\}\partial x_j$. Seja $X_0 = M^v$, fixado $k \geqslant 1$ considere os campos vetoriais $X_1, X_2, ..., X_k$, em que $X_j = M^v$ ou $X_j = \mathcal{L}^v$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Então o k-colchete*

$$[X_k, [X_{k-1}, ..., [X_1, X_0]]] = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_l \in 0,1;\ l=1,...,k} (X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} ... X_1^{\sigma_1} \Im f_{\zeta_j}^v)[X_k^{1-\sigma_k}, [X_{k-1}^{1-\sigma_{k-1}}, ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial_{x_j}]]],$$

em que se o expoente do campo for zero simplesmente ignoramos o colchete. Por exemplo, $[X^0, \partial_{x_j}] = \partial_{x_j}$ e $[X_3^1, [X_2^0, [X_1^1, \partial_{x_j}]]] = [X_3, [X_1, \partial_{x_j}]]$.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre k. Para $k = 1$, pela linearidade dos campos e por Leibniz, temos

$$\begin{aligned}
[X_1, X_0] &= [X_1, \sum_{j=1}^{N}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\})\partial_{x_j}] \\
&= X_1\left(\sum_{j=1}^{N}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\})\partial_{x_j}\right) - \sum_{j=1}^{N}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\})\partial_{x_j} \circ X_1 \\
&= \sum_{j=1}^{N} X_1(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}) \cdot \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{N} \Im\{f_{\zeta_j}^v\} \cdot X_1 \circ \partial_{x_j} - \sum_{j=1}^{N} \Im\{f_{\zeta_j}^v\} \cdot \partial_{x_j} \circ X_1 \\
&= \sum_{j=1}^{N} X_1(\Im f_{\zeta_j}^v) \cdot \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{N} \Im\{(f_{\zeta_j})^v\} \cdot [X_1, \partial_{x_j}]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} X_1^1(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}) \cdot [X_1^{1-1}, \partial_{x_j}] + \sum_{j=1}^{N} X_1^0(\Im\{(f_{\zeta_j})^v\}) \cdot [X_1^{1-0}, \partial_{x_j}]$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_1 \in \{0,1\}} (X_1)^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}\}^v) \cdot [X_1^{1-\sigma_1}, \partial_{x_j}].$$

Agora suponha a existência de um natural k em que,

$$[X_l, [X_{l-1}, ..., [X_1, X_0]]] = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in 0,1;\ p=1,...,l} (X_l^{\sigma_l} X_{l-1}^{\sigma_{l-1}} ... X_1^{\sigma_1} \Im\{f_{\zeta_j}\}^v)[X_l^{1-\sigma_l}, ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial_{x_j}]],$$

para todo $1 \leqslant l \leqslant k$, com $X_l = M^v$ ou $X_l = \mathcal{L}^v$. Seja $X_{k+1} = M^v$ ou $X_{k+1} = \mathcal{L}^v$. Pela regra de Leibniz, pela linearidade dos campos vetoriais e pela hipótese de indução temos

$$[X_{k+1}, [X_k, ..., [X_1, X_0]]] =$$
$$= \left[X_{k+1}, \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in \{0,1\}, p=1,...,k} (X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \cdots X_1^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}))[X_k^{1-\sigma_k}, [X_{k-1}^{1-\sigma_{k-1}}, ..., [X_{k-1}^{1-\sigma_1}, \partial_{x_j}]]] \right]$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in \{0,1\},\ p=1,...,k} (X_{k+1}^1 X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \cdots X_1^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}))[X_k^{1-\sigma_k}, ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial x_j]]$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in \{0,1\},\ p=1,...,k} (X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \cdots X_1^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}))X_{k+1} \circ [X_k^{1-\sigma_k}, ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial x_j]]$$
$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in \{0,1\},\ p=1,...,k} (X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \cdots X_1^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}))[X_k^{1-\sigma_k}, ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial x_j]] \circ X_{k+1}$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in \{0,1\},\ p=1,...,k} (X_{k+1}^1 X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} ... X_1^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}))[X_{k+1}^{1-1}, [X_k^{1-\sigma_k}, ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial x_j]]]$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in \{0,1\},\ p=1,...,k} (X_{k+1}^0 X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \cdots X_1^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}))[X_{k+1}{}^{1-0}, [X_k^{1-\sigma_k}, ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial x_j]]]$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sigma_p \in \{0,1\},\ p=1,...,k+1} (X_{k+1}^{\sigma_{k+1}} X_k^{\sigma_k} \cdots X_1^{\sigma_1}(\Im\{f_{\zeta_j}^v\}))[X_{k+1}^{1-\sigma_{k+1}}, [X_k^{1-\sigma_k} ..., [X_1^{1-\sigma_1}, \partial x_j]].$$

■

COROLÁRIO 3.2.2. *Dado $k = 1, 2, ...$ temos*

$$\underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, M^v]]]}_{k\text{ -colchete}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (\mathcal{L}^v)^l \Im\{f_{\zeta_j}^v\} \cdot \underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, \partial_{x_j}]]]}_{k-l\text{ -colchete}}.$$

Demonstração. Seja $X_j = \mathcal{L}^v$, $1 \leqslant j \leqslant k$, pelo Teorema 3.2.1 temos

$$\begin{aligned}
\underbrace{[\mathcal{L}^v,[\mathcal{L}^v,...,[\mathcal{L}^v,M^v]]]}_{k\text{-colchete}} &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{\sigma_p\in\{0,1\}\ p=1,...,k}(\mathcal{L}^v)^{\sigma_1+\cdots+\sigma_k}\Im\{f^v_{\zeta_j}\}\cdot[(\mathcal{L}^v)^{1-\sigma_k},...,[(\mathcal{L}^v)^{1-\sigma_1},\partial_{x_j}]] \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(\mathcal{L}^v)^l(\Im\{f^v_{\zeta_j}\})\underbrace{[\mathcal{L}^v,[\mathcal{L}^v,...,[\mathcal{L}^v,\partial x_j]]]}_{k-l\text{-colchete}}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.3. *Seja $k \geqslant 1$. Se todos os q-colchetes $[\mathcal{L}^v,[\mathcal{L}^v,...,[\mathcal{L}^v,M^v]]]$, com $0 \leqslant q < k$, se anulam em $(x,0)$, para algum $x \in \Omega$ (onde o 0-colchete é o campo M^v), então o k − colchete, em $(x,0)$:*

$$[\mathcal{L}^v,[\mathcal{L}^v,...,[\mathcal{L}^v,M^v]]] = \sum_{j=1}^{N}(\mathcal{L}^v)^k(\Im f^v_{\zeta_j})\ \cdot\partial_{x_j}.$$

Demonstração. Faremos esta demonstração por indução. Para $k = 1$, a hipótese se resume a $M^v|_{(x,0)} = 0$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{N}\Im\{f^v_{\zeta_j}(x,0)\}\cdot\partial_{x_j}|_{(x,0)} = 0.$$

Como $\{\partial_{x_j}|_{(x,0)} : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ é linearmente independente temos $\Im\{f^v_{\zeta_j}(x,0)\} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}^v, M^v] &= [\mathcal{L}^v,\sum_{j=1}^{N}\Im\{f^v_{\zeta_j}\}\partial_{x_j}] \\
&= \sum_{j=1}^{N}\mathcal{L}^v(\Im\{f^v_{\zeta_j}\})\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{N}\Im\{f^v_{\zeta_j}\}\mathcal{L}^v\partial_{x_j} - \sum_{j=1}^{N}\Im\{f^v_{\zeta_j}\}\partial_{x_j}\mathcal{L}^v.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}^v, M^v]|_{(x,0)} &= \sum_{j=1}^{N}\mathcal{L}^v(\Im\{f^v_{\zeta_j}\})(x,0)\partial_{x_j}|_{(x,0)} + \sum_{j=1}^{N}\Im\{f^v_{\zeta_j}(x,0)\}\mathcal{L}^v\partial_{x_j}|_{(x,0)} - \sum_{j=1}^{N}\Im\{f^v_{\zeta_j}(x,0)\}\partial_{x_j}\mathcal{L}^v|_{(x,0)} \\
&= \sum_{j=1}^{N}\mathcal{L}^v(\Im\{f^v_{\zeta_j}\})(x,0)\partial_{x_j}|_{(x,0)}.
\end{aligned}$$

O que prova o caso $k = 1$. Supondo que

$$\underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, \cdots [\mathcal{L}^v, M^v]]]_{(x,0)}}_{l\text{ -colchete}} = \sum_{j=1}^{N} (\mathcal{L}^v)^l (\Im f^v_{\zeta_j}) \partial_{x_j}$$

e $\underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, \cdots [\mathcal{L}^v, M^v]]]_{(x,0)}}_{l\text{ -colchete}} = 0$, para $0 \leqslant l \leqslant k$, temos que $(\mathcal{L}^v)^l (\Im f^v_{\zeta_j})(x, 0) = 0$, para $0 \leqslant l \leqslant k$. Pelo Corolário 3.2.2 temos que

$$\underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, \cdots, [\mathcal{L}^v, M^v]]]_{(x,0)}}_{k+1\text{ -colchete}} = \sum_{j=1}^{N} (\mathcal{L}^v)^{k+1} \Im f^v_{\zeta_j}(x, 0) \partial_{x_j}.$$

■

Lema 3.2.4. *Suponha que para algum $x_0 \in \Omega$ e k natural tenhamos*

$$\Im\{\mathcal{H}^j f_\zeta\}^v(x_0, 0) = 0, \quad \textit{quando} \;\; 0 \leqslant j \leqslant k-1 \;\; \textit{e} \;\; \Im\{\mathcal{H}^k f_\zeta\}^v(x_0, 0) \neq 0. \tag{3.9}$$

Com a mesma notação do Lema 3.2.1, se pelo menos um dos X_j's é M^v, então para todas possíveis escolhas de σ_j temos:

$$(X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \cdots X_1^{\sigma_1} \Im f^v_{\zeta_j})(x_0, 0) = 0.$$

E se todos os X_j's são $\mathcal{L}^v$, então

$$\underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, M^v]]]_{(x_0,0)}}_{k\text{ -colchete}} = \sum_{j=1}^{N} \Im(\mathcal{H}^k f_{\zeta_j})^v(x_0, 0) \partial_{x_j (x,0)}.$$

Demonstração. Assuma que ao menos um dos X_j's é M^v. Para $1 \leqslant l \leqslant k$, denotaremos por $Y_l Y_{l-1} \cdots Y_1$ os elementos que tem $\sigma_j = 1$ na expressão $X_k^{\sigma_k} X_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \cdots X_1^{\sigma_1}$ (por exemplo, $X_4^1 X_3^0 X_2^1 X_1^0$ será denotado por $Y_2 Y_1$, onde $Y_2 = X_4$ e $Y_1 = X_2$). Com esta notação queremos mostrar que

$$(Y_l Y_{l-1} \cdots Y_1 \Im\{f^v_{\zeta_j}\})(x_0, 0) = 0.$$

Primeiro, suponha que $Y_l = M^v$, então

$$\begin{aligned} Y_l Y_{l-1} \cdots Y_1(\Im\{f^v_{\zeta_j}\}) &= M^v(Y_{l-1} \cdots Y_1(\Im f^v_{\zeta_j})) \\ &= \sum_{p=1}^{N} \Im\{f_{\zeta_p}\}^v \partial_{x_p}(Y_{l-1} \cdots Y_1(\Im\{f^v_{\zeta_j}\})). \end{aligned}$$

Por hipótese $\Im(\mathcal{H}^j f_{\zeta_j})^v(x_0, 0) = 0$, quando $0 \leqslant j \leqslant k-1$, deste modo $\Im\{f^v_{\zeta_j}(x_0, 0)\} = 0$. Logo

$$(Y_l Y_{l-1} \cdots Y_1 \Im\{f^v_{\zeta_j}\})(x_0, 0) = 0.$$

Agora, para $Y_s = M^v$, com $1 \leqslant s \leqslant l-1$ e $Y_k = \mathcal{L}^v$, para $s+1 \leqslant k \leqslant l$,

$$\begin{aligned} Y_l Y_{l-1} \cdots Y_1 \Im f^v_{\zeta_j} &= (\mathcal{L}^v)^{l-s} M^s Y_{s-1} \cdots Y_1(\Im f^v_{\zeta_j}) \\ &= (\mathcal{L}^v)^{l-s} \sum_{p=1}^{N} \{(\Im f^v_{\zeta_p}) \partial_{x_p}(Y_{s-1} \cdots Y_1(\Im f^v_{\zeta_j}))\} \\ &= \sum_{p=1}^{N} \sum_{m=0}^{l-s} \binom{l-s}{m} (\mathcal{L}^v)^m (\Im f^v_{\zeta_p}) \cdot (\mathcal{L}^v)^{l-s-m} \partial_{x_p}(Y_{s-1} \cdots Y_1(\Im f^v_{\zeta_j})) = 0. \end{aligned}$$

Agora, supondo que $X_j = \mathcal{L}^v$, para $1 \leqslant j \leqslant k$, pelo Corolário 3.2.2 temos

$$[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, M^v]]]_{(x_0,0)} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (\mathcal{L}^v)^l (\Im\{f_{\zeta_j}\}^v) \underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, \partial_{x_j}]]]}_{k-l\text{-colchete}}.$$

E do item (i) do Corolário 3.1.2 temos $(\mathcal{L}^v)^l(\Im\{f_{\zeta_j}\}^v)(x_0, 0) = 0$, $0 \leqslant l < k$ e do item (ii) segue que $(\mathcal{L}^v)^k(\Im f_{\zeta^v_j})(x_0, 0) = \Im\{\mathcal{H}^k f_{\zeta_j}\}(x_0, 0)$. Então,

$$\begin{aligned} \underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, M^v]]]_{(x_0,0)}}_{k\text{-colchete}} &= \sum_{j=1}^{N} ((\mathcal{L}^v)^k \Im\{f_{\zeta_j}\}^v)(x_0, 0) \partial_{x_j}{}_{(x_0,0)} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \Im\{\mathcal{H}^k f_{\zeta_j}\}^v (x_0, 0) \partial_{x_j}{}_{(x_0,0)}. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.2.5. *A condição (3.9) do Lema 3.2.4 procede se e somente se as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Todos os colchetes de $\mathcal{L}^v$ *e* $\overline{\mathcal{L}^v}$ *de ordem menor que* k *se anulam em* $(x_0, 0)$.

(b) Os k*-colchetes*

$$\frac{1}{2i}[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, \overline{\mathcal{L}^v}]]](x_0, 0) \neq 0.$$

Demonstração. Suponha que para todo $0 \leqslant j \leqslant k-1$ tenhamos $\Im\{\mathcal{H}^j f_\zeta\}^v(x_0, 0) = 0$ e $\Im\{\mathcal{H}^k f_\zeta\}^v(x_0, 0) \neq 0$. Deste modo

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}^v} &= \partial_t - \sum_{j=1}^N \overline{f^v_{\zeta_j}} \partial x_j \\ &= \left(\partial_t - \sum_{j=1}^N f^v_{\zeta_j} \partial_{x_j}\right) + \sum_{j=1}^N (f^v_{\zeta_j} - \overline{f^v_{\zeta_j}}) \partial_{x_j} \\ &= \mathcal{L}^v + 2iM^v. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pelo Lema 3.2.4 temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}[\mathcal{L}^v, \overline{\mathcal{L}^v}]_{x_0,0} &= \frac{1}{2i}[\mathcal{L}^v, \mathcal{L}^v + 2iM^v] \\ &= \frac{1}{2i}\left\{\mathcal{L}^v\mathcal{L}^v + 2i\mathcal{L}^v M^v - \mathcal{L}^v\mathcal{L}^v - 2iM^v\mathcal{L}^v\right\}_{(x_0,0)} \\ &= \mathcal{L}^v M^v - M^v \mathcal{L}^v \\ &= [\mathcal{L}^v, M^v] \qquad (3.11) \\ &= \sum_{j=1}^N \Im\{\mathcal{H} f_{\zeta_j}\}^v(x_0, 0) \partial_{x_j (x_0,0)} = 0. \end{aligned}$$

A partir de agora vamos considerar os colchetes de $\mathcal{L}^v$ e $\overline{\mathcal{L}^v}$. Por (3.10), pela bilinearidade dos colchetes de Lie e por $\overline{\mathcal{L}^v} = \mathcal{L}^v + 2iM^v$, podemos escrever o colchete como soma de colchetes de $\mathcal{L}^v$ e M^v. Então pelo Lema 3.2.1 e pelo Lema 3.2.4 temos que os colchetes de $\mathcal{L}^v$ e $\overline{\mathcal{L}^v}$ se anulam.

Para provar (b) veja que por $\overline{\mathcal{L}^v} = \mathcal{L}^v + 2iM^v$, Lema 3.2.4 temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\underbrace{[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, \overline{\mathcal{L}^v}]]]}_{k-\text{colchete}}(x, 0) &= [\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, ..., [\mathcal{L}^v, M^v]]](x_0, 0) \\ &= \sum_{j=1}^N \Im\{\mathcal{H}^k f_{\zeta_j}\}^v(x_0, 0) \partial_{x_j} \neq 0, \end{aligned}$$

pois para cada $1 \leqslant j \leqslant N$ temos $\Im\{\mathcal{H}^k f_{\zeta_j}\}^v(x_0, 0) \neq 0$. Para completar a demonstração suponha que valham (a) e (b). Por (b), pelo Corolário 3.2.3 e por $\overline{\mathcal{L}^v} = \mathcal{L}^v + 2iM^v$ temos que

$$0 = \underbrace{\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, \cdots, [\mathcal{L}^v, \overline{\mathcal{L}^v}]]]}_{l\text{-colchete}} = \sum_{j=1}^{N} (\mathcal{L}^v)^l \Im f^v_{\zeta_j} \cdot \partial_{x_j} \tag{3.12}$$

para $l \leqslant k$. Pela equação (3.12)temos que $(\mathcal{L}^v)^l(\Im f_\zeta)^v(x_0, 0) = 0$ e disto tem-se que $\Im(\mathcal{H}^l f_\zeta)^v(x_0, 0)$. De modo análogo, por $[\mathcal{L}^v, [\mathcal{L}^v, \cdots, [\mathcal{L}^v, \overline{\mathcal{L}^v}]]](x_0, 0) \neq 0$, temos que $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0, 0) \neq 0$. ■

3.3 Caso C^∞

A seguir vamos usar Ω para denotar um aberto de $\mathbb{R}^N$, tomaremos T real e $f = f(x, t, \zeta_0, \zeta)$ como sendo uma função C^∞ em $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, holomorfa nas variáveis (ζ_0, ζ). Também usaremos a notação $f^v(x, t) = f(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$.

Teorema 3.3.1. *Seja k natural. Se a equação não linear de primeira ordem*

$$\partial_t u = f(x, t, u(x, t), u_x(x, t)), \;\; 0 < t < T, \;\; x \in \Omega \tag{3.13}$$

tem uma solução C^{k+1}, para $t \geqslant 0$, em uma vizinhança de $(x_0, 0)$ e

$$\forall x \in \Omega, \;\; 0 \leqslant j < k, \;\; \Im(\mathcal{H}^j f_\zeta)^v(x, 0) = 0, \;\; \Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0, 0) \neq 0, \tag{3.14}$$

então, para todo $\xi^0 \in S^{N-1}$ tal que $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0, 0) \cdot \xi^0 < 0$, temos que o ponto (x_0, ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda do traço $u(x, 0)$.

Demonstração. Como antes, considere

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} + g_0 \partial_{\zeta_0} + \sum_{j=1}^{N} g_j \partial_{\zeta_j},$$

na vizinhança $V = V_1 \times V_2 \times V_3 \times V_4 \subset \mathbb{C}^N_x \times \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_{\zeta_0} \times \mathbb{C}^N_\zeta$ do ponto $(x_0, 0, u(x_0, 0), u_x(x_0, 0))$, com

$$V_1 = \{x \in \mathbb{C}^N : |x - x_0| < r_0\} \qquad V_2 = \{t \in \mathbb{C} : |t| < T_0\}$$
$$V_3 = \{\zeta_0 \in \mathbb{C} : |\zeta_0 - u(x_0, 0)| < \rho_0\} \qquad V_4 = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : |\zeta - u_x(x_0, 0)| < \rho\}$$

e r_0, T_0, ρ_0, $\rho > 0$ a determinar. Pelo Lema 3.4.5 existem $Z_j(x, \zeta_0, \zeta)$ e $\Xi_l(x, t, \zeta_0, \zeta)$ suaves em V e holomorfas em (ζ_0, ζ) tais que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}Z_j &= O(t^n), \quad n = 1, 2, ... \quad \text{e} \quad Z_j(x, 0, \zeta_0, \zeta) = x_j \quad (1 \leqslant j \leqslant N) \\ \mathcal{H}\Xi_l &= O(t^n), \quad n = 1, 2, ... \quad \text{e} \quad \Xi_l(x, 0, \zeta_0, \zeta) = \zeta_l \quad (0 \leqslant l \leqslant N). \end{aligned}$$

Em outras palavras, existem soluções aproximadas[1], Z_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ e $\Xi_l (0 \leqslant l \leqslant N)$ tais que $Z_j(x, 0, \zeta_0, \zeta) = x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ e $\Xi_l(x, 0, \zeta_0, \zeta) = \zeta_l$ $(0 \leqslant l \leqslant N)$. Além disso, pelo Lema 3.1.1, para todo natural n existe constante $C_n > 0$ tal que

$$|\mathcal{L}^v Z_j^v(x, t)| = |(\mathcal{H}Z_j)^v| = |\mathcal{H}Z_j(x, t, u(x, t), u_x(x, t))| \leqslant C_n |t|^n.$$

Analogamente, para todo natural n existe constante $D_n > 0$ tal que

$$|\mathcal{L}^v \Xi_l^v(x, t)| \leqslant D_n |t|^n.$$

Então, as funções Z_j^v e Ξ_l^v $(1 \leqslant j \leqslant N,\ 0 \leqslant l \leqslant N)$ são soluções aproximadas de $\mathcal{L}^v$.

Observemos que se $0 \leqslant j \leqslant k - 1$ então $\partial_t^j \Im f_{\zeta_l}^v(x, 0) = 0$. De fato, para $j = 0$, por (3.14), temos $\Im f_\zeta^v(x, 0) = 0$. Assumiremos que existe $j < k - 1$, de modo que para $0 \leqslant l \leqslant j$ tenhamos $\partial_t^l \Im f_\zeta^v(x, 0) = 0$. Então, por (3.14), Corolário 3.1.2 e pelo Lema 3.1.3

$$0 = \Im(\mathcal{H}^{j+1} f_\zeta)^v(x, 0) = (\mathcal{L}^v)^{j+1} (\Im f_\zeta)^v(x, 0) = \partial_t^{j+1} \Im f_\zeta^v.$$

Portanto, por indução, obtemos que

$$\partial_t^j (\Im f_\zeta^v)(x, 0) = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leqslant j \leqslant k - 1. \tag{3.15}$$

Por (3.14), pelo Corolário 3.1.2, (3.15) e Lema 3.1.3 provamos que

$$\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0, 0) = ((\mathcal{L}^v)^k \Im f_\zeta^v)(x_0, 0) = \partial_t^k (\Im f_\zeta^v)(x_0, 0). \tag{3.16}$$

[1]Dado um operador diferencial L, se existe u tal que $Lu = O(t^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ dizemos que u é solução aproximada de L.

Pela fórmula de Taylor, em t, segue que

$$Z^v(x,t) \quad = \quad Z^v(x,0) + \sum_{j=1}^{k} \partial_t^j Z^v(x,0)t^j + o(t^k). \tag{3.17}$$

Seja

$$t\psi = \sum_{j=1}^{k} \partial_t^j Z^v(x,0)t^j + o(t^k), \qquad \psi = (\psi_1, ..., \psi_N) \text{ e } Z = (Z_1, ..., Z_N).$$

Se $\mathcal{R}\psi = \psi^1$ e $\Im\psi = \psi^2$ podemos escrever $Z^v(x,t) = Z^v(x,0) + t\psi(x,t) = Z^v(x,0) + t\psi^1(x,t) + it\psi^2(x,t)$. Seja $Z = (Z_1, \cdots, Z_N)$, como $\mathcal{L}^v Z_j^v(x,t) = O(|t|^n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, lembrando que $Z_j^v(x,0) = x_j$ temos

$$\mathcal{L}^v Z_j^v(x,t) = t\partial_t\psi_j(x,t) + \psi_j(x,t) - \sum_{l=1}^{N} f_{\zeta_l}^v(x,t)(\delta_{lj} + t\partial_{x_l}\psi_j(x,t)) = O(t^n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.18}$$

em que δ_{lj} representa o delta de Kronecker.

Nosso próximo passo é concluir que $\partial_t^p \psi^2(x,0) = 0$, para $0 \leqslant p \leqslant k-1$ e

$$(k+1)\partial_t{}^k\psi^2(x_0,0) = \partial_t^k \Im f_\zeta^v(x_0,0) = \Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0). \tag{3.19}$$

No caso $p = 0$, por (3.18), $\psi_j(x,0) - f_{\zeta_j}^v(x,0) = 0$ e assim, por (3.14), $\Im\psi_j(x,0) = 0$. Suponhamos que existe $p < k-1$ tal que $\partial_t^l \psi^2(x,0) = 0$, para $0 \leqslant l \leqslant p$. Ao derivarmos $(p+1)$ - vezes a função (3.18) em relação a variável t obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{p+1} \binom{p+1}{l} \partial_t^l(t)\partial_t^{p+1-l+1}\psi_j + \partial_t^{p+1}\psi_j - \partial_t^{p+1} f_{\zeta_j}^v - \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} \partial_t^q f_{\zeta_j} \cdot \partial_t^{p-q+1}(t\partial_{x_l}\psi_j) \\
= \quad & t\partial_t^{p+2}\psi_j + (p+1)\partial_t^{p+1}\psi_j + \partial_t^{p+1}\psi_j - \partial_t^{p+1} f_{\zeta_j}^v \\
- \quad & \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} \partial_t^q f_{\zeta_j}(t\partial_t^{p-q+1}\partial_{x_l}\psi_j + (p-q+1)\partial_t^{p-q}\partial_{x_l}\psi_j) = O(t^n),
\end{aligned}$$

para todo n natural. Se $t = 0$, na expressão acima temos

$$(p+2)\partial_t^{p+1}\psi(x,0) \quad = \quad \partial_t^{p+1} f_{\zeta_j}^v(x,0) + \sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} \partial_t^q f_{\zeta_j}(x,0)((p-q+1)\partial_{x_l}\partial_t^{p-q}\psi_j(x,0)).$$

Pela hipótese de indução e por (3.15)

$$\begin{aligned}(p+2)\partial_t^{p+1}\Im(\psi_j)(x,0) &= \partial_t^{p+1}\Im f^v_{\zeta_j}(x,0)+\sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}\partial_t^q\Im f_{\zeta_j}(x,0)((p-q+1)\partial_{x_l}\partial_t^{p-q}\Re\psi_j(x,0))\\ &+\sum_{l=1}^{N}\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}\partial_t^l\Re f_{\zeta_j}(x,0)((p-q+1)\partial_{x_l}\partial_t^{p-q}\Im\psi_j(x,0))=0. \end{aligned}\tag{3.20}$$

Então, concluímos que para $p<k$, temos $\partial_t^p\psi_j^2(x,0)=\partial_t^p\Im\psi_j(x,0)=0$. Se derivarmos (3.18) k -vezes, em t, encontramos uma equação semelhante a (3.20) (a diferença vem do fato de não ser nula), para $p+1=k$. Então, podemos concluir, por (3.16) que

$$\partial_t^j\psi^2(x,0)=0,\quad \text{para}\quad 0\leqslant j\leqslant k-1;\quad (k+1)\partial_t^k\psi^2(x_0,0)=\partial_t^k\Im f^v_\zeta(x_0,0)=\Im(\mathcal{H}^kf_\zeta)^v(x_0,0).\tag{3.21}$$

Por (3.17) existe o campo vetorial $M_j=\sum_{l=1}^N b_{il}(x,t)\partial_{x_j}$, em que $M_jZ^v_l=\delta_{jl}$, para $l,j=1,...,N$ (ver [7] página 23) e pela definição dos campos M_j's e do campo $\mathcal{L}^v$ temos que $\{\mathcal{L}^v,M_1,...,M_N\}$ forma uma base para os campos vetoriais em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ ($\mathfrak{X}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$). Logo, $\{dt,dZ^v_1,...,dZ^v_N\}$ forma uma base para as 1-formas. Dada uma função $h=h(x,t)$ de classe C^1 segue que existem campos $A,B_1,...,B_N$ tais que $dh=Adt+\sum\limits_{j=1}^N B_jdZ^v_j$. Por outro lado,

$$M_k(h)=dh(M_k)=Adt(M_k)+\sum_{j=1}^N B_jdZ^v_j(M_k)=B_k$$

e

$$dh(\mathcal{L}^v)=Adt(\mathcal{L}^v)+\sum_{j=1}^N M_j(h)\cdot\mathcal{L}^vZ^v_j$$

implica

$$A=\mathcal{L}^v(h)-\sum_{j=1}^N M_j(h)\mathcal{L}^v(Z^v_j).$$

Então, escrevendo dh como combinação linear da base $\{dt,dZ^v_1,...,dZ^v_N\}$, tem-se

$$dh=\left(\mathcal{L}^vh-\sum_{j=1}^N M_j(h)\mathcal{L}^v(Z^v_j)\right)dt+\sum_{j=1}^N M_j(h)dZ^v_j.$$

E disto,

$$\begin{aligned} d(hdZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_N^v) &= dh \wedge dZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_N^v \\ &= \left(\mathcal{L}^v h - \sum_{j=1}^{N} M_j(h)\mathcal{L}^v(Z_j^v)\right) dt \wedge dZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_n^v. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Para $(y,\xi) \in \mathbb{R}^N$ seja

$$Q(x,t,y,\xi) = i\xi(y - Z^v(x,t)) - |\xi|(y - Z^v(x,t))^2,$$

com $z^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$, se $z = (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N$. Seja $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, de modo que $\eta(x) = 1$, para $|x - x_0| < r$, $\eta(x) = 0$, quando $|x - x_0| > 2r_0$ e $|\eta| \leqslant 1$, com r_0 a ser escolhido. Seja

$$g(x,t,y,\xi) = \eta(x)\Xi_0^v(x,t)e^{Q(x,t,y,\xi)},$$

em que y e ξ são parâmetros. Denotaremos $dZ_1^v \wedge \cdots \wedge dZ_N^v$ por dZ e usando (3.22) temos,

$$\begin{aligned} d(gdZ) &= \left(\mathcal{L}^v g - \sum_{j=1}^{N} M_j(g)\mathcal{L}^v(Z_j^v)\right) dt \wedge dZ \\ &= \left((\mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v))e^Q + \eta\Xi_0^v \cdot \mathcal{L}^v(e^Q) - \sum_{j=1}^{N} \left(e^Q M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(e^Q)\right) \mathcal{L}^v(Z_j^v)\right) dt \wedge dZ \\ &= \left(\mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^{N} \left(M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(Q)\right) \mathcal{L}^v Z_j\right) e^Q dt \wedge dZ. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pelo Teorema de Stokes, com $T_0 > 0$ pequeno, a ser escolhido, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^N} d(gdz) &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x,0,y,\xi)dZ(x,0) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,T_0,y,\xi)dZ(x,T_0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x,0,y,\xi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,T_0,y,\xi)dZ(x,T_0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x,0,y,\xi)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,T_0,y,\xi)dZ(x,T_0) + \int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^N} d(gdZ). \tag{3.24}$$

A partir de agora nosso objetivo será estimar as duas integrais do lado direito da equação (3.24).

Note que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) &= \mathcal{R}\left\{i\xi(y-x-t(\psi^1+i\psi^2)) - |\xi|(y-x-t(\psi^1+i\psi^2))^2\right\} \qquad (3.25)\\ &= t\xi\psi^2(x,t) - |\xi|(|y-x|^2 + t^2|\psi^1(x,t)|^2 - t^2|\psi^2(x,t)|^2 - 2t(y-x)\psi^1(x,t)).\end{aligned}$$

Observe que pela formula de Taylor e por (3.21) temos

$$\begin{aligned}\psi^2(x,t) &= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial_t^j\psi^2(x,0)}{j!}t^j + \frac{\partial_t^k\psi^2(x,0)}{k!}t^k + O(t^{k+1})\\ &= \frac{\partial_t^k\psi^2(x,0)}{k!}t^k + O(t^{k+1})\\ &= \frac{1}{k!}\left(\partial_t^k\psi_2(x_0,0) + O(|x-x_0|)\right)t^k + O(t^{k+1})\\ &= \frac{\partial_t^k\psi_2(x_0,0)}{k!}t^k + O(|x-x_0|t^k) + O(t^{k+1})\\ &= \frac{\Im\{\mathcal{H}^k f_\zeta\}^v(x_0,0)}{k!}t^k + O(|x-x_0|t^k) + O(t^{k+1}). \qquad (3.26)\end{aligned}$$

Considere r_0 e T_0 de modo que existam constantes C, $D > 0$ tais que $O(|x-x_0|t^k) \leqslant C|x-x_0|t^k$ e $|O(t^{k+1})| \leqslant Dt^{k+1}$, quando $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|t| \leqslant T_0$. Com isso, para $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|t| \leqslant T_0$ temos

$$\begin{aligned}t\psi^2(x,t)\xi^0 &= \left(\frac{\Im\{\mathcal{H}^k f_\zeta\}^v(x_0,0)}{k!}t^{k+1} + tO(|x-x_0|t^k) + tO(t^{k+1})\right)\cdot\xi^0\\ &\leqslant \frac{\Im\{\mathcal{H}^k f_\zeta\}^v(x_0,0)\cdot\xi^0}{k!}t^{k+1} + |O(|x-x_0|t^k)||t||\xi^0| + |t||O(t^{k+1})||\xi^0|\\ &\leqslant \left(\frac{\Im\{\mathcal{H}^k f_\zeta\}^v(x_0,0)}{k!}\xi^0 + 2Cr_0|\xi^0| + T_0D|\xi^0|\right)|t|^{k+1}.\end{aligned}$$

Como $\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0)\cdot\xi^0 < 0$, podemos diminuir r_0 e T_0 de modo a obter

$$-2a \doteq \frac{\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)(x_0,0)\xi^0}{k!} + 2Cr_0T_0|\xi^0| + T_0D|\xi^0| < 0.$$

Se a é definido como acima, temos $a > 0$ e

$$t\psi^2(x,t)\xi \leqslant -2a|t|^{k+1} < -a|t|^{k+1}.$$

Então $t\psi^2(x,t)\xi^0 + at^{k+1} < 0$, quando $|x-x_0| < 2r_0$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Pela continuidade da função $G(\xi) = t\psi^2(x,t)\xi + at^{k+1}$ existe $s > 0$ tal que para todo $\xi \in S^{N-1} \cap B(\xi^0, s) \doteq V_0$ (lembrando que

$\xi^0 \in S^{N-1}$) temos $t\psi^2(x,t)\xi < -at^{k+1}$, quando $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Seja $\Gamma = \left\{\xi : \frac{\xi}{|\xi|} \in V_0\right\}$, temos

$$t\psi^2(x,t)\xi \leqslant -|\xi|at^{k+1}, \;\; \xi \in \Gamma$$

quando $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Seja $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|t| \leqslant T_0$, por (3.26), temos

$$|\psi^2(x,t)| \leqslant \frac{\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0)}{k!}|t|^k + 2Cr_0|t|^k + DT_0|t|^k,$$

o que mostra que $\psi_2(x,t) = O(|t|^k)$. Assim, existe constante D_1, tal que

$$\begin{aligned} t\psi^2(x,t)\xi + |\xi|t^2|\psi_2(x,t)|^2 &\leqslant -a|\xi|t^{k+1} + |\xi|t^2 D_1 t^{2k} \\ &\leqslant (-a + T_0^{1+k}D_1)t^{k+1}|\xi|, \end{aligned}$$

$\xi \in \Gamma$, $|x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Podemos diminuir T_0 de modo a obter $-a + T_0^{1+k}D_1 < 0$. A partir de agora vamos denotar por $-a$ o que denotávamos por $-a + T_0^{1-k}D_1$, com esta notação temos

$$t\psi^2(x,t)\xi + |\xi|t^2|\psi^2(x,t)|^2 \leqslant -at^{k+1}|\xi|, \qquad |x-x_0| < 2r_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \qquad \xi \in \Gamma. \tag{3.27}$$

Temos também que $2|t(y-x)\psi_1(x,t)| \leqslant |y-x|^2 + t^2|\psi_1(x,t)|^2$. Com isso, voltando à equação (3.25) e aplicando (3.27),

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) &= (t\xi\psi^2(x,t) + |\xi|t^2|\psi^2(x,t)|^2) - |\xi|(|y-x|^2 + t^2|\psi^1(x,t)|^2 - 2t(y-x)\psi^1(x,t)) \\ &\leqslant -a|\xi|t^{k+1}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

com $(x,\xi) \in B_{2r_0}(x_0) \times \Gamma$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$.

Por outro lado, se tomarmos $|t| \leqslant T_0$, $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) \leqslant -\delta|\xi|$. De fato, se $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ temos $|y-x| \geqslant \frac{r_0}{2} > 0$. Pela continuidade de ψ existe $A > 0$ tal que $|\psi(x,t)| \leqslant A$, quando $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Assim, por (3.25), temos

$$\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) \;\; = \;\; t\xi\psi^2(x,t) - |\xi||y-x|^2 - |\xi|t^2|\psi^1(x,t)|^2 + t^2|\xi||\psi^2(x,t)|^2 + 2t|\xi|(y-x)\psi^1(x,t)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant T_0|\xi||\psi^2(x,t)| - |\xi|\frac{r_0^2}{4} + T_0^2A^2|\xi| + 2T_0(|y-x_0| + |x-x_0|)|\psi^1(x,t)| \\
&\leqslant |\xi|\left(AT_0 - \frac{r_0^2}{4} + T_0{}^2A^2 + 5T_0r_0A\right),
\end{aligned}
$$

quando $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$, $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Se $T_0 \leqslant 1$ temos:

$$
\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) \quad \leqslant \quad |\xi|\left(AT_0 + T_0A^2 + 5T_0r_0A - \frac{r_0^2}{4}\right),
$$

$r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$, $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Para uma melhor estimativa de $\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi)$ (quando $r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0$, $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$ e $|t| \leqslant T_0$) vamos tomar $T_0 \leqslant \frac{r_0^2}{4}\frac{1}{A+A^2+5r_0A}$. Nestas condições existe $\delta > 0$ ($\delta = -(T_0A + T_0A^2 + 5T_0r_0A - r_04^{-1})$) em que

$$
\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi) \leqslant -\delta|\xi|; \quad r_0 \leqslant |x-x_0| \leqslant 2r_0, \quad |y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0. \tag{3.29}
$$

Como já foi dito nosso objetivo é estimar as integrais a direita em (3.24). Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ de modo que, por (3.28), a primeira integral de (3.24) pode ser estimada do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} g(x,T_0,y,\xi)dZ(x,T_0)\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |g(x,T_0,y,\xi)|dZ(x,T_0) \\
&= \int_{B(0,2r_0)} |\eta(x)\Xi_0^v(x,t)e^{Q(x,T_0,y,\xi)}|dZ(x,T_0) \\
&\leqslant c_1e^{-a|\xi|T_0^{k+1}} = c_1e^{-c_2|\xi|},
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

quando $|y-x_0| \leqslant \frac{r_0}{2}$, $\xi \in \Gamma$ e $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Para estimar a segunda integral de (3.24), primeiramente, por Leibniz e pela equação (3.23), temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^N} d(gdZ) = \qquad (3.31)\\
&= \left|\int_0^{T_0}\int_{B(0,2r_0)} \left\{\mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v) + (\eta\Xi_0^v)\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^N \left(M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(Q)\right)\mathcal{L}^v Z_j^v\right\} e^Q dZdt\right| \\
&\leqslant \int_0^{T_0}\int_{B(0,r_0)} \left|\left\{\mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v) + (\eta\Xi_0^v)\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^N \left(M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(Q)\right)\mathcal{L}^v Z_j^v\right\}\right| e^{\mathcal{R}Q} dZ\wedge dt \\
&+ \int_0^{T_0}\int_{B(0,2r_0)\setminus B(0,r_0)} \left|\left\{\mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v) + (\eta\Xi_0^v)\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^N \left(M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(Q)\right)\mathcal{L}^v Z_j^v\right\}\right| e^{\mathcal{R}Q} dZ\wedge dt
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \int_0^{T_0}\int_{B(0,r_0)} \left\{ |\mathcal{L}^v(\Xi_0^v)| + |\Xi_0^v \mathcal{L}^v(Q)| + \sum_{j=1}^{N} |M_j(\Xi_0^v) + \Xi_0^v(M_jQ)|\,|\mathcal{L}^v Z_j^v| \right\} e^{\mathcal{R}Q} dZ\wedge dt$$
$$+ \int_0^{T_0}\int_{B(0,2r_0)\setminus B(0,r_0)} \left| \left\{ \mathcal{L}^v(\eta\Xi_0^v) + (\eta\Xi_0^v)\mathcal{L}^v(Q) - \sum_{j=1}^{N} \left(M_j(\eta\Xi_0^v) + \eta\Xi_0^v M_j(Q)\right)\mathcal{L}^v Z_j^v \right\} \right| e^{\mathcal{R}Q} dZ\wedge dt.$$

Já que $\mathcal{L}^v(Z_j^v) = O(t^n)$, para todos naturais n e $1 \leqslant j \leqslant N$, temos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}^v(Q)| &= \left| \mathcal{L}^v \left(i\sum_{j=1}^{N} \xi_j (y_j - Z_j^v) - |\xi| \sum_{j=1}^{N} (y_j - Z_j^v)^2 \right) \right| \\
&= \left| -i\sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathcal{L}^v(Z_j^v) - |\xi| \sum_{j=1}^{N} 2(y_j - Z_j^v)\mathcal{L}^v(Z_j^v) \right| \\
&= |\xi| O(t^n). \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Por (3.28), (3.29), (3.32), lembrando que $\mathcal{L}^v(\Xi_0^v) = O(t^n)$ (para todo natural n) e que dado j temos $e^{-a|\xi|t^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(a^j|\xi|^j t^{jk+j})}$; voltando a (3.31) temos que para todo natural l existe constante positiva C_l tal que

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^N} d(gdZ) \right| &\leqslant \int_0^{T_0}\int_{B(0,r_0)} \{ |O(t^n)| + CO(t^n)|\xi| + C|O(t^n)| \} e^{-a|\xi|t^{k+1}} dZdt \\
&+ \int_0^{T_0}\int_{B(0,2r_0)\setminus B(0,r_0)} Ce^{-\delta|\xi|} dZdt \\
&\leqslant C\int_0^{T_0} O(t^n)e^{-a|\xi|t^{k+1}} + |\xi| C |O(t^n)| e^{-a|\xi|t^{k+1}} dt + Ce^{-\delta|\xi|} \\
&\leqslant \frac{C_l}{|\xi|^l}, \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

usamos C para denotar diferentes constantes e $O(t^n)$ para denotar alguma função de ordem t^n, para todo n natural. Seja $\omega(x) = u(x,0) = \Xi_0^v(x,0)$, temos que a transformada FBI de $\eta\omega$ possui decrescimento rápido. De fato, voltando a (3.24), por (3.30) e (3.33), dado natural l existe constante positiva D_l de modo que

$$|\mathcal{F}_{\eta\omega}(y,\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} g(x,0,y,\xi)dx \right| \leqslant C_1 e^{-c_2|\xi|} + \frac{C_l}{|\xi|^l} \leqslant \frac{D_l}{|\xi|^l}.$$

Pelo Teorema 2.2.7 (x_0, ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda C^∞ do traço $\omega(x) = u(x,0)$. ∎

Exemplo 3.3.2. *Seja $u(x,t)$ uma solução C^{k+1} da equação*

$$\partial_t u(x,t) + it^k \partial_x u(x,t) = g(x,t,u), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad x \in (a,b),$$

sendo $g(x,t,\zeta_0)$ uma função C^∞ holomorfa em ζ_0. Se definirmos $f(x,t,\zeta_0,\zeta) = g(x,t,\zeta_0) - it^k\zeta$ temos que

$$f^v(x,t) = g(x,t,u) - it^k \partial_x u(x,t) = \partial_t u(x,t).$$

Por definição, f é uma função de classe C^∞, holomorfa em (ζ_0,ζ). Veja também que $f_\zeta(x,t,\zeta_0,\zeta) = -it^k$,

$$\mathcal{H} = \partial_t - f_\zeta \partial_x + (f - \zeta f_\zeta)\partial_{\zeta_0} + (\partial_x f + \zeta \partial_{\zeta_0} f)\partial_\zeta.$$

Logo, $\mathcal{H} f_\zeta(x,t,\zeta_0,\zeta) = -ikt^{k-1}$. Mais geralmente, $\mathcal{H}^j f_\zeta = -i\frac{k!}{(k-j)!}t^{k-j}$, então

$$\Im(\mathcal{H}^j f_\zeta)^v(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant j < k \quad e \quad \Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x,0) = -k! \neq 0.$$

Portanto, se $\xi^0 > 0$ temos que (x_0,ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda do traço $u(x,0)$

Exemplo 3.3.3. *Seja $u(x,t)$ uma solução C^2 do problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} \partial_t u + itu\partial_x u = & g(x,t,u), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad x \in (a,b) \\ u(x,0) = & \omega(x), \end{cases}$$

sendo $g(x,t,\zeta_0)$ uma função C^∞, holomorfa em ζ_0. Vemos que

$$\partial_t u = -itu\partial_x u + g(x,t,u) = f^v(x,t),$$

$f(x,t,\zeta_0,\zeta)$ é uma função C^∞, holomorfa em ζ_0 definida por $f(x,t,\zeta_0,\zeta) = -it\zeta_0\zeta + g(x,t,\zeta_0)$. Ao derivarmos f na variável ζ temos que $f_\zeta(x,t,\zeta_0,\zeta) = -it\zeta_0$, então $\Im f_\zeta^v(x,0) = 0$. Neste caso o operador $\mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{H} = \partial_t - f_\zeta \partial_x + (f - \zeta f_\zeta)\partial_{\zeta_0} + (f_x + \zeta f_{\zeta_0})\partial_\zeta,$$

aplicando $\mathcal{H}$ a função f_ζ temos

$$\mathcal{H}f_\zeta = -i\zeta_0 - it(-it\zeta_0\zeta + g(x,t,\zeta_0) + it\zeta_0\zeta) = -i\zeta_0 - g(x,t,\zeta_0)it$$

e $(\mathcal{H}f_\zeta)^v = -iu - g(x,t,u)it$, assim,

$$\Im(\mathcal{H}f_\zeta)^v(x,0) = \Im\{-iu(x,0)\} = -\mathcal{R}\{\omega(x)\}.$$

Então, dado $x_0 \in (a,b)$ e ζ_0 tais que $\xi^0\mathcal{R}\omega(x_0) > 0$ temos que (x_0,ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda C^∞ do traço $u(x,0) = \omega(x)$

3.4 Caso analítico

Nesta seção consideraremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = & f(x,t,u(x,t),u_x(x,t)), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega \\ u_{|t=0} = & \omega(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \Omega, \end{cases}$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $T > 0$ e a função f é a restrição, em $\Omega \times [0,T) \times V_3 \times V_4$, de alguma função holomorfa definida no aberto conexo $V = V_1 \times V_2 \times V_3 \times V_4 \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$.

Teorema 3.4.1. *Seja $k \in \mathbb{N}$. Se a EDP não linear de primeira ordem*

$$\partial_t u = f(x,t,u(x,t),u_x(x,t)), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega$$

tem uma solução C^{k+1}, para $t > 0$ em uma vizinhança de $(x_0,0)$ e

$$\forall x, \quad 0 \leqslant j < k, \quad \Im(\mathcal{H}^j f_\zeta)^v(x,0), \quad \Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) \neq 0 \tag{3.34}$$

então, para todo $\xi^0 \in S^{N-1}$ tal que

$$\Im(\mathcal{H}^k f_\zeta)^v(x_0,0) \cdot \xi^0 < 0, \tag{3.35}$$

temos que (x_0,ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda analítico do traço $u(x,0)$.

Demonstração. Para $1 \leqslant j \leqslant N$, $0 \leqslant l \leqslant N$, pelo Teorema de Cauchy-Kovalevskaya existem funções holomorfas (ver [7]) $Z_j(x,t,\zeta_0,\zeta)$ e $\Xi_l(x,t,\zeta_0,\zeta)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}Z_j = &\ 0 \quad \text{e} \quad Z_j(x,0,\zeta_0,\zeta) = &\ x_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N; \\ \mathcal{H}\Xi_j = &\ 0 \quad \text{e} \quad \Xi_j(x,0,\zeta_0,\zeta) = &\ \zeta_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \end{aligned}$$

Deste modo, temos $\mathcal{L}^v(Z_j^v) = (\mathcal{H}Z_j)^v = 0$ e $\mathcal{L}^v\Xi_l^v = (\mathcal{H}\Xi_l)^v = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$ e $0 \leqslant l \leqslant N$. Assim como na demonstração do teorema anterior seja $g(x,t,y,\xi) = \eta(x)\Xi_0^v(x,t)e^{Q(x,t,y,\xi)}$, com $Q(x,t,y,\xi) = i\xi(y - Z^v(x,t)) - |\xi|(y - Z^v(x,t))^2$. Como em (3.23) temos

$$d(gdZ) = \Xi_0^v\mathcal{L}^v(\eta)\cdot e^{Q(x,t,y,\xi)}dt \wedge dZ.$$

Neste caso também temos (3.24) válida. Portanto, de modo análogo à demonstração do teorema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} |F_{\eta\omega}(x,\xi)| &\leqslant c_2e^{-c_1|\xi|} + \int_0^{T_0}\int_{B(0,2r_0)\setminus B(0,r_0)} c_2e^{\mathcal{R}Q(x,t,y,\xi)}dZ \wedge dt \\ &\leqslant c_2e^{-c_1|\xi|} + c_2e^{-\delta|\xi|} \\ &\leqslant c_2e^{-c_1|\xi|}, \end{aligned}$$

para y próximo de x_0 e ξ em um cone aberto Γ contendo ξ^0.

Então podemos concluir, pelo Teorema 2.2.6, que (x_0,ξ^0) não pertence ao conjunto frente de onda analítico de $\omega(x) = u(x,0)$. ∎

APÊNDICE - Alguns resultados utilizados

TEOREMA 3.4.2. *Dados $a_1, ..., a_n \geqslant 0$ existe constante $B_{N,n}$ dependendo apenas de N e n em que $(a_1 + \cdots + a_n)^N \leqslant B_{N,n}(a_1^N + \cdots + a_n^N)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Demonstraremos por indução sobre n. Para $n = 2$, sem perda de generalidade podemos supor $a_1 \leqslant a_2$, então

$$(a_1 + a_2)^N \leqslant (2a_2)^N = 2^N(a_2^N) \leqslant 2^N(a_2^N + a_1^N).$$

Agora supondo que a afirmação é valida para n, supondo sem perda de generalidade $a_{n+1} \leqslant a_n$ temos

$$\begin{aligned}
a_1 + \cdots + a_{n+1})^N &\leqslant (a_1 + \cdots + a_{n-1} + 2a_n)^N \\
&\leqslant B_{N,n}(a_1^N + \cdots + 2^N a^N) \leqslant 2^N B_{N,n}(a_1^N + \cdots + a_n^N) \\
&\leqslant 2^N B_{N,n}(a_1^N + \cdots + a_n^N + a_{n+1}^N),
\end{aligned}$$

■

A partir do Teorema acima vemos que:

$$(1 + |\zeta|)^N \leqslant (1 + |\zeta_1| + \cdots + |\zeta_n|)^N \leqslant B_{N,n+1}(1 + |\zeta_1|^N + \cdots + |\zeta_n|^N).$$

AFIRMAÇÃO 3.4.3. *Dado aberto $D \subset \mathbb{C}^m$, $G(z,\xi)$ contínua em $D \times \mathbb{R}^m$, considere também $z \mapsto G(z,\xi)$ holomorfa em D e $|G(z,\xi)| \leqslant h(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ para todo (z,ξ) em $D \times \mathbb{R}^m$. Então*

$$P(z) = \int G(z,\xi)d\xi$$

é holomorfa em D.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro provemos que P é contínua em D. Pelo Teorema da convergência dominada, dada uma sequência (z_j) em $\mathbb{C}^m$, com $z_j \to w$ quando $j \to \infty$, temos que

$$P(z_j) = \int G(z_j, \xi)d\xi \to \int G(w, \xi)d\xi = P(w),$$

quando $j \to \infty$, provando a continuidade de P. Para provar que P é holomorfa em D é suficiente provar que cada ponto de D possui uma vizinhança em que P é holomorfa. Dado $z_0 \in D$ existe δ em que $W = B(z_0, \delta) \subset D$. Seja $\phi \in C_c^\infty(W)$. Como $|G(\cdot, \xi)| \leqslant h(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pelo Teorema de Fubinni e integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
\int_W \frac{\partial P(z)}{\partial \overline{z_k}}\phi(z)dz &= -\int_W \frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z_k}}P(z)dz = -\int_W \int_{\mathbb{R}^m} G(z,\xi)d\xi \frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z_k}}dz \\
&= -\int_{\mathbb{R}^m}\int_{S(\phi)} G(z,\xi)\frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z_k}}dzd\xi = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{S(\phi)} \phi(z)\frac{G(z,\xi)}{\partial \overline{z_k}}dzd\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} 0 d\xi = 0
\end{aligned}$$

para todo $1 \leqslant k \leqslant m$. Como ϕ é arbitraria temos que $\frac{\partial P}{\partial \overline{z_k}} \equiv 0$, em W, para todo $1 \leqslant k \leqslant m$. Portanto P é holomorfa em D. ∎

Vamos introduzir uma notação para podermos enunciar o próximo Lema. Suponhamos que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, T é um numero real e $\psi = \psi(x, t, \zeta_0, \zeta)$ é uma função suave em $\Omega \times (-T, T) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ e holomorfa em (ζ_0, ζ). Para $1 \leqslant j \leqslant N$, nós denotaremos:

$$B_j(\psi) = \overline{\partial_{x_j}(\psi^v)}.$$

Também, para $1 \leqslant j \leqslant N$, $k = 0, 1, ..., n-1$, nós definimos $A_j^{k,n} = A_j^{k,n}(x,t)$ recursivamente como:

$$\begin{aligned}
A_j^{0,1}(\psi) &= B_j(\psi) \\
A_j^{0,n}(\psi) &= \mathcal{L}^v A_j^{0,n-1}(\psi) + B_j(\mathcal{H}^{n-1}\psi) + \sum_{s=0}^{n-2}\sum_{l=1}^{N} B_j(\mathcal{H}^s f_{\zeta_l})A_l^{s,n-1}(\psi), \quad \text{para } n \geqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant N \\
A_j^{k,n} &= A_j^{k-1,n-1} + \mathcal{L}^v A_j^{k,n-1}, \quad \text{para } n \geqslant 3,\ 1 \leqslant k \leqslant n-2,\ 1 \leqslant j \leqslant N \\
A_j^{n-1,n} &= A_j^{n-2,n-1}, \quad \text{para } n \geqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant N
\end{aligned}$$

Lema 3.4.4. *Sejam $\psi = \psi(x, t, \zeta_0, \zeta)$ uma função suave, holomorfa em (ζ_0, ζ), e $A_j^{k,n}$ como na notação* *apresentada acima. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^v)^n \Im\psi^v &= \Im(\mathcal{L}^v)^n\psi^v + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} \Im(\mathcal{L}^v)^k (f_{\zeta_j})^v \cdot A_j^{k,n}(\psi) \\ &= \Im(\mathcal{H}^n\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} \Im(\mathcal{H}^k f_{\zeta_j})^v \cdot A_j^{k,n}(\psi).\end{aligned}$$

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Observe que só precisamos demonstrar a primeira equação, já que podemos obter a segunda pelo Lema 3.1.1. Para $n = 1$ temos

$$(\mathcal{L}^v)(\Im\psi^v) = \left(\partial_t - \sum_{j=1}^{N} f_{\zeta_j}^v \partial_{x_j}\right)(\Im\psi^v). \tag{3.36}$$

Já que $u_t = f^v$, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\partial_t(\Im\psi^v) &= \Im(\partial_t\psi^v) \\ &= \Im\left((\partial_t\psi)^v + (\partial_{\zeta_0}\psi)^v\partial_t u + \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\partial_{x_j}\partial_t u\right) \\ &= \Im\left((\partial_t\psi)^v + (\partial_{\zeta_0}\psi)^v\partial_t u + \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\partial_{x_j}(f^v)\right) \\ &= \Im\left((\partial_t\psi)^v + (\partial_{\zeta_0}\psi)^v\partial_t u + \sum_{j=1}^{N}\psi_{\zeta_j}^v\left((\partial_{x_j}f)^v + (\partial_{\zeta_0}f)^v\partial_{x_j}u + \sum_{k=1}^{N}(\partial_{\zeta_k}f)^v\partial_{x_k}\partial_{x_j}u\right)\right) \\ &= \Im\left\{(\partial_t\psi)^v - \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}f)^v(\partial_{x_j}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v(\partial_{x_j}\psi)^v + \left(f^v - \sum_{j=1}^{N}\partial_{x_j}u\cdot(\partial_{\zeta_j}f)^v\right)(\partial_{\zeta_0}\psi)^v\right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N}\partial_{x_j}u(\partial_{\zeta_j}f)^v(\partial_{\zeta_0}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}((\partial_{x_j}f)^v + \partial_{x_j}u\cdot(\partial_{\zeta_0}f)^v)(\partial_{\zeta_j}\psi)^v \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(\partial_{\zeta_k}f)^v\cdot\partial_{x_j}\partial_{x_k}u\cdot(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\right\} \\ &= \Im\left\{(\mathcal{L}\psi)^v + g_0^v(\partial_{\zeta_0}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}g_j^v(\partial_{\zeta_j}\psi)^v\right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v(x,t)\left((\partial_{x_j}\psi)^v + (\partial_{\zeta_0}\psi)^v\partial_{x_j}u + \sum_{k=1}^{N}(\partial_{\zeta_k}\psi)^v\partial_{x_j}\partial_{x_k}u\right)\right\} \\ &= \Im\left\{(\mathcal{H}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}f)^v\partial_{x_j}(\psi^v)\right\} = \Im(\mathcal{H}\psi)^v + \Im\left\{\sum_{j=1}^{N}(\partial_{\zeta_j}f)^v\partial_{x_j}(\psi^v)\right\}.\end{aligned}$$

A partir da equação (3.36) temos

$$\mathcal{L}^v(\Im\psi^v) \;=\; \Im(\mathcal{H}\psi)^v + \left\{\sum_{j=1}^{N}\Im\{(f_{\zeta_j})^v\partial_{x_j}(\psi^v)\}\right\} - \sum_{j=1}^{N}(f_{\zeta_j})^v\partial_{x_j}(\Im\psi^v).$$

Sabemos que dados $z, w \in \mathbb{C}^m$, temos, $\Im(zw) - z\Im(w) = \Im(z)\overline{w}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^v(\Im\psi^v) &= \Im(\mathcal{H}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v\overline{\partial_{x_j}(\psi^v)}\\ &= \Im(\mathcal{H}\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v A_j^{0,1}(\psi).\end{aligned}$$

O que mostra o caso em que n=1. Agora suponha que exista algum n de modo que

$$(\mathcal{L}^v)^l\Im\psi^v = \Im(\mathcal{L}^v)^l\psi^v + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{l-1}\Im(\mathcal{L}^v)^k,$$

para $1 \leqslant l \leqslant n$. Pela regra de Leibniz e linearidade de um campo,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^v)^{n+1}\Im\psi^v &= \mathcal{L}^v(\mathcal{L}^n(\Im\psi^v))\\ &= \mathcal{L}^v\left(\Im((\mathcal{L}^v)^n\psi^v) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}(\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v)A_j^{k,n}(\psi)\right)\\ &= \mathcal{L}^v\left(\Im((\mathcal{L}^v)^n\psi^v)\right) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}^v(\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v)A_j^{k,n}(\psi)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}(\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v)(\mathcal{L}^v(A_j^{k,n}(\psi))).\end{aligned}$$

Vamos observar cada membro separadamente. Pelo caso $n = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^v(\Im(\mathcal{L}^v)^n\psi^v) &= \mathcal{L}^v(\Im(\mathcal{H}^v\psi)^v)\\ &= \Im(\mathcal{L}^v(\mathcal{H}^n\psi)^v) + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v A_j^{0,1}(\mathcal{H}^n\psi)\\ &= \Im((\mathcal{L}^v)^{n+1}\psi^v) + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v B_j(\mathcal{H}^n\psi).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^v(\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v) &= \Im\mathcal{L}^v(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v A_j^{0,1}(\mathcal{H}^k f_{\zeta_j}) \\
&= \Im(\mathcal{L}^v)^{k+1}(f_{\zeta_j})^v + \sum_{l=1}^{N}\Im(f_{\zeta_l})^v B_l(\mathcal{H}^k f_{\zeta_l}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^v)^{n+1}(\Im\psi^v) &= \Im(\mathcal{L}^v)^{n+1}(\psi)^v + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v B_j(\mathcal{H}^n\psi) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\Im(\mathcal{L}^v)^{k+1}(f_{\zeta_j})^v + \sum_{l=1}^{N}\Im(f_{\zeta_l})^v B_l(\mathcal{H}^k f_{\zeta_j})\right\} A_j^{k,n}(\psi) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k}^{n-1}(\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v)\mathcal{L}^v A_j^{k,n}(\psi) \\
&= \Im(\mathcal{L}^v)^{n+1}\psi^v + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v\left\{\mathcal{L}^v A_j^{0,n} + B_j(\mathcal{H}^n\psi) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{N}B_j(\mathcal{H}^k f_{\zeta_l})A_l^{k,n}(\psi)\right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v)(A_j^{k-1,n} + \mathcal{L}^v A_j^{k,n}) + \sum_{j=1}^{N}(\Im(\mathcal{L}^v)^n(f_{\zeta_j})^v)A_j^{n-1,n} \\
&= \Im(\mathcal{L}^v)^{n+1}\psi^v + \sum_{j=1}^{N}\Im(f_{\zeta_j})^v A_j^{0,n+1}(\psi) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v)A_j^{k,n+1}(\psi) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}(\Im(\mathcal{L}^v)^n(f_{\zeta_j})^v)A_j^{n,n+1} \\
&= \Im(\mathcal{L}^v)^{n+1}\psi^v + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n}(\Im(\mathcal{L}^v)^k(f_{\zeta_j})^v)A_j^{k,n+1}(\psi).
\end{aligned}$$

■

Lema 3.4.5. *Seja*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} a_j(x,t,\zeta)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{M} b_k(x,t,\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta_k}$$

onde os coeficiente a_j e b_j são C^∞ nas variáveis $(x,t) \in \Omega \times J \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e homomorfa na variável $\zeta \in \mathcal{N} \subset \mathbb{C}^m$, $\mathcal{N}$ aberto. Então, existe uma função, $u(x,t,\zeta)$, C^∞ e holomorfa em ζ a qual é solução *aproximada da equação $Lu = 0$, isto é,*

$$Lu(x,t,\zeta) = O(t^k), \quad \textit{para} \quad k = 1,2,3,...,$$

com $u(x,0,\zeta) = f(x,\zeta)$.

Demonstração. Devemos encontrar u, em que $u(x,\cdot,\zeta)$ deve possuir expansão de Taylor. Então devemos obter funções u_j tais que

$$u(x,t,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,\zeta)t^j,$$

com $u_j(x,\zeta) = \frac{\partial_t^j u(x,0,\zeta)}{j!}$ e $u_0(x,\zeta) = f(x,\zeta)$. Para encontrar u iremos procurar funções u_j que fazem a série acima convergir em C^∞ para uma função u a qual é solução aproximada de $Lu = 0$ e $u(x,0,\zeta) = f(x,\zeta)$. Vamos definir $u_0(x,\zeta) = f(x,\zeta)$. Para u ser solução aproximada de $Lu = 0$ é suficiente exigir que

$$\partial_t^{j-2}(Lu)(x,0,\zeta) = 0 \qquad \forall \ j = 1,2,.... \tag{3.37}$$

Pela fórmula de Taylor temos

$$Lu(x,t,\zeta) = \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial_t^j (Lu)(x,0,\zeta)}{j!} t^j + r_p(t)$$

em que $\lim_{t\to 0} \frac{r_p(t)}{|t|^p} = 0$. Pela regra de Leibniz temos

$$\begin{aligned}
\partial_t^{j-1} Lu(x,t,\zeta) &= \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,t,\zeta) + \sum_{k=1}^{N} \partial_t^{j-1}\left(a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)(x,t,\zeta) + \sum_{k=1}^{M} \partial_t^{j-1}\left(b_k \frac{\partial u}{\partial \zeta_k}\right)(x,t,\zeta) \\
&= \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,t,\zeta) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{q=0}^{j-1} \binom{j-1}{q} \partial_t^q a_k(x,t,\zeta) \frac{\partial^{j-q} u}{\partial t^{j-1-q}\partial x_k}(x,t,\zeta) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{M}\sum_{q=0}^{j-1} \binom{j-1}{q} \partial_t^q b_k(x,t,\zeta) \frac{\partial^{j-q} u}{\partial t^{j-1-q}\partial \zeta_k}(x,t,\zeta) \\
&= \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,t,\zeta) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{p+q=j-1} \binom{j-1}{q} \partial_t^q a_k(x,t,\zeta) \frac{\partial^{p+1} u}{\partial t^{p}\partial x_k}(x,t,\zeta) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{M}\sum_{p+q=j-1}^{j-1} \binom{j-1}{q} \partial_t^q b_k(x,t,\zeta) \frac{\partial^{p+1} u}{\partial t^{p}\partial \zeta_k}(x,t,\zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,t,\zeta) + \sum_{p+q=j-1}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{(j-1)!}{q!(j-1-q)!}\partial_t^q a_k(x,t,\zeta)\frac{\partial^{p+1}u}{\partial t^p\partial x_k}(x,t,\zeta)\right) \qquad (3.38)\\
&\quad + \sum_{p+q=j-1}\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{(j-1)!}{q!(j-1-q)!}\partial_t^q b_k(x,t,\zeta)\frac{\partial^{p+1}u}{\partial t^p\partial \zeta_k}(x,t,\zeta)\right)\\
&= \partial_t^j u(x,t,\zeta) + \frac{1}{j}\sum_{p+q=j-1}\frac{1}{p!q!}\left(\sum_{k=1}^{N} j!\partial_t^q a_k(x,t,\zeta)\frac{\partial^{p+1}u}{\partial t^p\partial x_k}(x,t,\zeta)\right.\\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{M} j!\partial_t^q b_k(x,t,\zeta)\frac{\partial^{p+1}u}{\partial t^p\partial x_k}(x,t,\zeta)\right), \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

em que $j = 1, 2, ...$ Em $t = 0$ temos

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t^j u(x,0,\zeta) + \frac{1}{j}\sum_{p+q=j-1}\frac{1}{p!q!}\left(\sum_{k=1}^{N} j!\partial_t^q a_k(x,0,\zeta)\frac{\partial^{p+1}u}{\partial t^p\partial x_k}(x,0,\zeta)\right.\\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{M} j!\partial_t^q b_k(x,0,\zeta)\frac{\partial^{p+1}u}{\partial t^p\partial x_k}(x,0,\zeta)\right).
\end{aligned}$$

Por isso definiremos recursivamente $u_0(x,\zeta) = f(x,\zeta)$ e para $j \neq 0$,

$$u_j(x,\zeta) = -\frac{1}{j}\sum_{p+q=j-1}\frac{1}{q!}\left(\sum_{k=1}^{N}\partial_{x_k}u_p(x,\zeta)\partial_t^q a_k(x,0,\zeta) + \sum_{k=1}^{M}\partial_{\zeta_k}u_p(x,\zeta)\partial_t^q b_k(x,0,\zeta)\right).$$

Cada $u_j(x,\zeta)$ é de classe C^∞ e holomorfa na variável ζ. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi = 1$ em $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $S(\phi) \subset [-1, 1]$. Então existe sequência (ϵ_j) a definir tal que a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x,\zeta)\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)t^j$$

converge uniformemente e é C^∞. Para todo $l \in \mathbb{N}$ temos constante B_l em que $\sup_J\{|\phi^l|\} < B_l$. Dados quaisquer multi-índices $\theta \in \mathbb{N}^N$, $\beta \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in \mathbb{N}^M$. Podemos tomar constante $C_{\theta,\gamma,j}$ em que

$$\left|\frac{\partial_x^\theta\partial_\zeta^\gamma u_j(x,\zeta)}{j!}\right| \leqslant C_{\theta,\gamma,j}, \quad \text{quando} \quad (x,\zeta) \in \Omega \times \mathcal{N},$$

diminuindo Ω e $\mathcal{N}$ se necessário. Se $|\theta| + |\gamma| + \beta < j$ temos

$$\left|\partial_x^\theta\partial_t^\beta\partial_\zeta^\gamma\left(u_j(x,\zeta)\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)t^j\right)\right| = \left|\partial_x^\theta\partial_\zeta^\gamma u_j(x,\zeta)\textstyle\sum_{l\leqslant\beta}\binom{\beta}{l}\phi^{\beta-l}\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)\left(\frac{1}{\epsilon_j}\right)^{\beta-l}t^{j-l}\frac{j!}{(j-l)!}\right|$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \sum_{l\leqslant\beta,\, l\leqslant j} \binom{\beta}{l} \left|(\partial_x^\theta\partial_\zeta^\gamma u_j)(x,\zeta)\phi^{\beta-l}\left(\tfrac{t}{\epsilon_j}\right)\right| \left(\tfrac{|t|}{\epsilon}\right)^{\beta-l} |t|^{j-\beta}\tfrac{j!}{(j-l)!} \\ &\leqslant \qquad |t|\sum_{l\leqslant\beta, l\leqslant j} C_{\theta\gamma}\left(\tfrac{|t|}{\epsilon_j}\right)^{\beta-l}|t|^{j-\beta-1}B_{\beta-l}d_{\beta l j}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Se $\epsilon_j \leqslant 1$, para $|y| \leqslant \epsilon_j$, temos

$$\left(\frac{|t|}{\epsilon_j}\right)^{\beta-l} \leqslant 1$$

e $|t|^{j-\beta-1} \leqslant (\epsilon_j)^{j-\beta-1} \leqslant 1$, já que $j-\beta-1>0$. Note que se $|t|>\epsilon_j$ então $\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)=0$. Então podemos escolher constante $A_{\theta\beta\gamma j}$ em que

$$\left|\partial_x^\theta\partial_t^\beta\partial_\zeta^\gamma\left(u_j(x,\zeta)\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)t^j\right)\right| \leqslant \epsilon_j\sum_{l\leqslant\beta} C_{\theta,\gamma,j}B_{\beta-l}d_{\beta l j} = \epsilon_j A_{\theta\beta\gamma j}. \tag{3.41}$$

Seja $\epsilon_0 = 1$. Para $j \geqslant 1$, como há finitas possibilidades de θ, γ e β para $|\theta|+|\gamma|+|\beta|<j$, podemos tomar ϵ_j de forma que

$$\epsilon_j A_{\theta\beta\gamma j} < \frac{1}{2^j}, \tag{3.42}$$

quando $|\theta|+|\gamma|+|\beta|<j$. Então, definimos

$$u(x,t,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x,\zeta)\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)t^j$$

que converge uniformemente em $\Omega\times\mathcal{N}$. Para $\theta\in\mathbb{N}^N$, $\beta\in\mathbb{N}$ e $\gamma\in\mathbb{N}^M$ temos formalmente

$$\begin{aligned} \partial_x^\theta\partial_t^\beta\partial_\zeta^\gamma u(x,t,\zeta) \quad &= \sum_{j\leqslant|\theta|+\beta+|\gamma|} \partial_x^\theta\partial_t^\beta\partial_\zeta^\gamma\left(u_j(x,\zeta)\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)t^j\right) \\ &\quad + \sum_{j>|\theta|+\beta+|\gamma|} \partial_x^\theta\partial_t^\beta\partial_\zeta^\gamma\left(u_j(x,\zeta)\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)t^j\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

A primeira soma é de classe $C^\infty(\Omega\times J\times\mathcal{N})$ pois é soma finita de funções $C^\infty(\Omega\times J\times\mathcal{N})$. A segunda, pelas desigualdades (3.41) e (3.42) temos

$$\left|\sum_{j>|\theta|+\beta+|\gamma|} \partial_x^\theta\partial_t^\beta\partial_\zeta^\gamma\left(u_j(x,\zeta)\phi\left(\frac{t}{\epsilon_j}\right)t^j\right)\right| \leqslant \sum_{j>|\theta|+\beta+|\gamma|} A_{\theta\beta\gamma j}\epsilon_j < \sum_{j>|\theta|+\beta+|\gamma|}\frac{1}{2^j} < +\infty.$$

Assim, a segunda soma de (3.43) converge uniformemente em $\Omega\times J\times\mathcal{N}$. Portanto, u define uma função de classe $C^\infty(\Omega\times J\times\mathcal{N})$. Para todo $j\in\mathbb{N}$, $u_j(x,\zeta)$ é holomorfa em ζ, então, pela convergência uniforme, $u(x,t,\zeta)$ é holomorfa em ζ. Pelas definições de u_j e ϕ temos que u é solução aproximada de $Lu = 0$. ∎

Bibliografia

[1] Adwan, Z., Berhanu, S., *On microlocal analyticity and smoothness of solutions of first-order nonlinear PDE's*, Math. Annalen 352(2011), 239-258.

[2] Adwan, Z., Hoepfner, G., *A generalization of Borel's theorem and microlocal Gevrey regularity in involutives structures*, J. Differential Equations 245, (2005), 2846-2870.

[3] Adwan, Z., *The FBI Transformation and the Analytic Wavefront Set*, Temple University Mathematics Departament, (2005).

[4] Asano, C., *On the C^∞ Wave-Front Set of solutions of first-order nonlinear PDE's*, Amer. Math, Soc, 123 No 10, (1995), 3009-3019.

[5] Barostichi, R.F., G. Petronilho, *Gevrey micro-regularity for solutions to first order nonlinear pde*, J. Differential Equations 247 (2009), 1899-1914.

[6] Barostichi R.F., *Sobre o conjunto frente de onda C^∞ de soluções de edp's não lineares de primeira ordem*, Dissertação de Mestrado: Universidade Federal de São Carlos, (2008).

[7] Berhanu, S., Cordaro, P.D. e Hounie, J.G., *An Introduction to involutive structures*, New Mathematical Monographs: 6 Cambridge University Press, (2008).

[8] Berhanu, S., Hounie, J.G., *An F. Riesz theorem for planar vector field*, Math. Annalen, 320(2001), 463-485.

[9] Berhanu, S. *On involutive systems of first-order nonlinear pdes*,Complex Analysis, Tends in Mathematics (2010), 25-50.

[10] Berhanu, S. *On microlocal analyticity of solutions of first-order nonlinear PDE*, Annales de l'Institut Fourier 59 (2009), 1267-1290.

[11] Chemin, J.Y. *Calcul paradiffèrentiel prècisè et applications à des equations aux dèrivèes partielles non semilinèaires*, Duke Math. J., 56(1988), 431-469.

[12] Hanges, N., Treves, F. *On the analyticity of solutions of first-order nonlinear PDE*, Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), 627-638.

[13] Himonas A. A., *On analytic microlocal hypoellipticity of linear partial differential operators of principal type*, Commun. Partial Differ. Equations 11 (1986), 1539-1574.

[14] Himonas A. A., *Semirigid partial differential operators and microlocal analytic hypoellipticity*, Duke Math. J. (1989), 265-387

[15] Hormander, L., *The analysus of linear partial differential operators*, Berlin: Springer-Verlag, v.1 (1983).

[16] Hounie, J.G., *Teoria Elementar das distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).

[17] Lerner, N. Morimoto Y. and Xu, C.-J. *Instability of the Cauchy-Kovalewskaya solution for a class of non linear systems*, American J. of mathematics, 132(2010) no. 1, 99-123.

[18] Spivak, J., *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, (1965).

[19] Treves, F., *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, (1967).