UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Miguel Angel Cuayla Zapata

Estimativa de energia no infinito para equações hiperbólicas com coeficientes oscilantes

São Carlos - SP
Agosto de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estimativa de energia no infinito para equações hiperbólicas com coeficientes oscilantes

Miguel Angel Cuayla Zapata
Orientador: Prof Dr. Jose Ruidival dos Santos Filho

Bolsista Cnpq
Processo 2012

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP
Agosto de 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Cuayla Zapata, Miguel Angel.
C961ee	Estimativa de energia no infinito para equações hiperbólicas com coeficientes oscilantes / Miguel Angel Cuayla Zapata. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
	59 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.
	1. Equações diferenciais parciais. 2. Equação da onda. 3. Estimativa de energia. 4. Coeficiente oscilante. I. Título.
	CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
DM - UFSCar

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
ICMC - USP

Agradecimentos

À Deus, pela vida, paz e saúde.

Aos meus pais Olga e Agustín, por sempre me apoiarem e motivarem durante meus estudos e em todos os outros aspectos da minha vida. Agradeço também aos professores de Matemática da UFSCar, que me ajudaram com minha formação durante a o mestrado.

Todos foram sempre muito atenciosos e exemplos de professores para mim. Entre todos estes, gostaria de agradecer em especial meu orientador Ruidival, por me auxiliar neste trabalho e por toda ajuda a mim dedicada.

Gostaria também de agradecer todos os meus amigos da pós-graduação que me ajudaram durante o mestrado, em especial aos meus colegas de sala. Agradeço também à Lorena, Aldo, Juliano, Silvestre por sempre estarem ao meu lado. E agradeço também a Cnpq pelo apoio financeiro. Obrigado a todos!

Resumo

Nós estudamos o comportamento da energia, para $t \to \infty$, das soluções do problema de Cauchy para algumas equações estritamente hiperbólicas de segunda ordem com coeficientes que oscilam rapidamente.

Palavras-Chave: Equação da Onda. Estimativa da energia. Coeficiente oscilante.

Abstract

We study the behavior, as $t \to \infty$, of the energy for the solutions of the Cauchy problem for some strictly hyperbolic linear second order equations with coefficients very rapidly oscillating.

Keywords: Equation of wave. Behaviour of energy. Coeficient oscillating.

Sumário

Introdução

Consideramos o problema de Cauchy em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, com $u = u(t, x)$,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a(t)\partial_x^2 u = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \qquad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

com valor iniciais $u_0 \in H^s(\mathbb{R}), u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}), s > 0$, com a hipótese de hiperbolicidade

$$0 < \lambda \leq a(t) \leq \Lambda, \quad \forall t. \tag{2}$$

Observamos que se $a(t)$ é positiva diferenciável com derivada limitada, então tem-se existência e unicidade local no espaço de Sobolev e, nesse caso, segue-se a estimativa de energia

$$E_s(u)(t) \leq C_{s,T} E_s(u)(0), \quad \forall t \in [0, T] \tag{3}$$

com

$$E_s(u)(t) := \|u(t)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}}^2. \tag{4}$$

Outra forma de ver o problema (1) é considerar ao invés da continuidade Lipschitz do coeficiente $a(t)$, a propriedade de Log-Lip.

Aqui Log-Lip é definido por:

Definição 0.0.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, com I um intervalo, diremos que f é Log-Lip contínua se ela satisfaz:*

$$\|f\|_{LL(I)} := \sup_{\substack{t,t+\tau\in I\\ 0<|\tau|<1/2}} \frac{|f(t+\tau)-f(t)|}{|\tau||log|\tau||} < +\infty \tag{5}$$

Com esta regularidade dos coeficientes $a(t)$ demonstra-se que (1) é C^∞-bem posto, veja [2].

Além disso a continuidade Log-Lip pode ser pensada como uma hipótese mínima para a regularidade nos coeficientes afim de ter C^∞-bem posto para (1). Por exemplo, [2] exibe uma situação em que a hipótese Log-Lip não pode ser enfraquecida para a classe Hölder com exponente menor que 1. Lá, tal exemplo é generalizado, provando que em geral a hipóteses Log-Lip regularidade não pode se enfraquecida no sentido especificado.

Ao considerar o coeficiente $a(t)$ em Log-Lip ainda tem-se a estimativa da energia, mas com perda de derivada, ver [5].

Ou seja, para a solução u e $a(t)$ Log-Lip contínuo, com $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ qualquer e para todo $t \in [0,T]$, tem-se:

$$E_{s-\beta t}(u)(t) \leq C^*_{s,T} E_s(u)(0), \tag{6}$$

com $C^*_{s,T}$ constante que só depende de s, da dimensão n, T e Λ , e β é dado por

$$\beta = \frac{1}{\lambda} C^* \|a\|_{LL([0,t])}, \tag{7}$$

sendo C^* uma constante positiva que depende apenas de n e λ (menor cota superior do coeficiente $a(t)$).

Agora se ampliamos o espaço de Log-Lip para o espaço Ω-Log-Lip, ao qual define-se da seguinte forma.

Definição 0.0.2. *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo real, é dita ser contínua **Ω-Log-Lip** quando:*

$$\|f\|_{\Omega LL(I)} := \sup_{\substack{t,t+\tau\in I\\ 0<|\tau|<\delta}} \frac{|f(t+\tau)-f(t)|}{|\tau||log|\tau||\Omega(|\tau|)} < +\infty.$$

Aqui Ω satisfaz.

Definição 0.0.3. *Seja a função $\Omega \in C^1((0,\delta])$, para algum $\delta > 0$ (podemos assumir sempre que $\delta < 1/2$) , é uma função módulo, se é uma função convexa, positiva, decrescente tal que*

$$\lim_{\tau \to 0^+} \Omega(\tau) = +\infty, \quad 0 < -\Omega'(\tau) \leq \tau^{-1}, \quad \Omega(\delta) \geq 1.$$

Com ajuda destas definições, tratamos de responder em parte se existe uma estimativa global da energia para coeficientes não Lipschitz. O objetivo da dissertação é estudar o comportamento assimptótica da energia no caso de ter-se coeficientes $a(t)$ não diferenciáveis. De fato, demonstraremos que a explosão da energia no infinito acontece, e isto independe da regularidade dos coeficientes. O fato importante para se ter uma estimativa assintótica da energia no infinito é o comportamento oscilante dos coeficientes.

Para isso construiremos um coeficiente $a(t)$ tal que acontece a explosão da solução de (1) em espaços de Sobolev homogêneo. Assim consideraremos dois casos, na primeira parte os coeficientes oscilam em uma sequência de intervalos de compremento 1, na segunda parte os coeficientes oscilam em uma sequencia de intervalos cujo compremento cresce rapidamente, e em ambos casos tem-se explosão da energia. A referencia básica é o artigo de F. Colombini(veja [1]).

Mais recentemente F. Hirosawa , ver [8], obterem o seguinte resultado:

Teorema 0.0.4. *Para qualquer $q < 1$, existe um $a(t) \in C^\infty([0,\infty))$ satisfazendo*

$$\left|a^{(k)}(t)\right| \leq C_k(1+t)^{-kq}, \tag{8}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$, tal que a conservação generalizada da energia[1]*, não vale.*

Observe que este resultado garante que para funções globalmente Lipschitz, a energia não é limitada em $[0,\infty)]$. Um exemplo explícito pode ser visto no artigo de M. Reissing e J. Smith, ver [13].

[1]GEC quer dizer que tem-se a seguinte estimativa $C_1E(0) \leq E(t) \leq C_2E(0)$(onde $E(t) = \frac{1}{2}\left(a(t)^2\left\|\nabla u(t,\cdot)\right\|^2 + \left\|\partial_t u(t,\cdot)\right\|^2\right)$)

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar os fatos básicos necessários a compreensão dos capítulos subsequentes. Apresentamos os principais resultados da Transformada de Fourier, definimos os espaços de Sobolev e exploramos algumas de suas propriedades. As referências básicas são [9], [11].

1.1 Notações

1.2 Espaços L^p

Fixemos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, ou seja, X é um conjunto não-vazio, $\mathcal{M}$ é uma $\sigma -$ álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ uma medida. Se f é uma função mensurável sobre X e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Para $p = \infty$, tomamos

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$$

com a convenção de que $\inf\emptyset = \infty$, $\|f\|_{L^\infty}$ é chamado supremo essencial de f e escrevemos

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{supess}_{x\in X}|f(x)|.$$

Definimos

$$L^p(X,\mathcal{M},\mu) = \{f : X \to \mathbb{C};\ \text{f é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Dizemos que duas funções definem o mesmo elemento de L^p quando elas são iguais quase toda a parte. Mediante esta identificação, temos que o espaço $L^p(X,\mathcal{M},\mu)$, munido da norma $\|\cdot\|_{L^p}$, é um espaço de Banach (para a prova, veja [14], por exemplo).

Recordemos que dois números reais p e p' satisfazendo $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, com $p,\ p' > 1$ são ditos expoentes conjugados. Além disso, 1 e ∞ são conjugados.

Proposição 1.2.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $1 \leq p,\ p' \leq \infty$ expoentes conjugados. Se f e g são funções mensuráveis sobre X,*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}} \tag{1.1}$$

Para a demonstração veja [7], pág. 174.

Se $p = p' = 2$, (1.1) é conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Proposição 1.2.2 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Se $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, então para todo $\lambda > 0$,*

$$\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p$$

A prova destes dois resultados pode ser encontrada em [7], nas páginas 178 e 185, respectivamente. Enunciamos a seguir uma caracterização da norma em L^p através de integrais sobre $[0,\infty)$:

Teorema 1.2.3. *Se $p \in [1,\infty)$, então para toda função mensurável f sobre $(X,\mathcal{M},\mu)$,*

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\})d\lambda$$

Para a demonstração ver [7], pág. 191.

Será útil, em algumas estimativas, a proposição abaixo e seu respectivo corolário, que generaliza a idéia da integração com coordenadas polares para $\mathbb{R}^d$. Novamente, a prova pode ser vista em [7], na página 75.

Proposição 1.2.4. *Seja f é uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^d$, não-negativa ou integrável tal que $f(x) = g(|x|)$, para alguma função g em $(0, \infty)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \sigma(S^{d-1}) \int_0^\infty g(r)r^{d-1}dr,$$

onde $\sigma(S^{d-1})$ expressa a medida da área de S^{d-1}.

Corolário 1.2.5. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Se $s > d/2$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} < \infty.$$

O seguinte Teorema de Rademacher será utilizado em (4.1).

Teorema 1.2.6. *(Teorema de Rademacher) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função localmente Lipschitz. Então f é diferenciável q.t.p.*

Para ver a demonstração ver [6].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Definimos o suporte de ϕ, o qual denotaremos por $S(\phi)$, como sendo o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ \phi(x) \neq 0\}$.

Definição 1.2.7. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. O conjunto*

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi : \Omega \to \mathbb{C};\ u \in C^\infty \text{ e } S(\phi) \text{ é compacto}\}$$

é o espaço das funções testes.

Para a existência de funções testes não-nulas, será útil a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser vista na página 7 de [9].

Proposição 1.2.8. *Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ numa vizinhança de K.*

Temos que $C_c^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial denso em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, por [7]. Conforme [12], é possível equipá-lo com uma estrutura de espaço vetorial topológico, não-metrizável, de modo que $C_c^\infty(\Omega)$ torne-se um espaço completo. Com esta estrutura topológica, teremos que uma sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções teste converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset K$ tal que $S(\phi_j) \subset \Omega$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e, para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m converge uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

Definição 1.2.9. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto. Um funcional linear e contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω se denota com $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Denotamos o valor da distribuição u na função teste ϕ por $\langle u, \phi\rangle$.

Exemplo 1.2.10. Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e definamos o funcional linear

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx,\ \ \phi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{1.2}$$

Se $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência convergindo a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, seja $K \subset \Omega$ compacto tal que $S(\phi_j) \subset K$. Então

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi_j\rangle| &\leq \int_K |f(x)||\phi_j(x)|dx \\ &\leq \sup_{x\in K} |\phi_j(x)| \int_K |f(x)|dx \xrightarrow{j\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Portanto, a expressão (1.2) define uma distribuição em Ω . Também, se $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\langle T_f, \phi\rangle = \langle T_g, \phi\rangle$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $f = g$ q.t.p (ver prova na pág. 11 de [9]).

Deste modo, a aplicação injetiva $f \mapsto T_f$ nos permite considerar vários espaços de funções como subespaços de $\mathcal{D}'(\Omega)$. É comum escrever simplesmente $\langle f, \phi\rangle$ ao invés de $\langle T_f, \phi\rangle$.

Dizemos que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é igual a zero num aberto $U \subset \Omega$ se $\langle u, \phi \rangle = 0$, para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. Definimos então o suporte de u, e denotemos por $S(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nula. Denotamos com $\mathcal{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

Teorema 1.2.11. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então $S(u)$ é compacto se, e somente se, existe um funcional linear e continuo v em $C^\infty(\Omega)$ cuja restrição a $C_c^\infty(\Omega)$ é igual a u.*

A prova deste Teorema se encontra na página 41 de [9]. Aqui, a noção de sequencialmente contínua é a seguinte: uma sequência de funções $C^\infty(\Omega)$ converge para zero se, para todo compacto K e todo inteiro m, as derivadas de ordem m convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.

Definição 1.2.12. *Dizemos que uma sequência $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle$ converge a $\langle u, \phi \rangle$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Suponhamos que u_n, $n = 1, 2, ...$ é uma sequência de distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $u_n(\phi)$ é convergente para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Se definirmos $u(\phi) = \lim_{n\to\infty} u_n(\phi)$, temos que u é um funcional linear. Mais ainda, u resulta contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.2.13. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de distribuições em Ω, e suponhamos que, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle u_n, \phi \rangle$ é uma sequência numérica de Cauchy. Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Ver [9], página 56, para a demonstração.

1.2.1 Operações com Distribuições

Seja $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Como u é localmente integrável, a expressão (1.2) nos permite considerá-la como uma distribuição em Ω. Por integração por partes, temos

$$\int \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\phi(x)dx = -\int u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)dx,$$

para toda função teste ϕ. Desta maneira, por dualidade, podemos definir a distribuição

$$\langle \partial_{x_j} u, \phi \rangle = -\langle u, \partial_{x_j} \phi \rangle,$$

para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Por indução em $|\alpha|$,

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$$

Pelo mesmo argumento, definimos a multiplicação por uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ como sendo a distribuição

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle$$

Agora, sejam f, g duas funções contínuas em $\mathbb{R}^d$ tal que uma delas tenha suporte compacto. Então a convolução de f e g se define como

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(y)g(x-y)dy$$

A fim de estender a definição acima para o contexto das distribuições, consideremos a

Definição 1.2.14. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $\phi \in C^\infty(\Omega)$). Definimos a convolução de u e ϕ, denotada por $u * \phi$, a função definida por*

$$u * \phi(x) = \langle u, \breve{\phi}_x \rangle,$$

onde $\breve{\phi}_x(y) = \phi(x-y)$.

Valem as seguintes propriedades:

(i) $u * \phi \in C^\infty(\Omega)$ e suas derivadas são dadas por

$$\partial^\alpha (u * \phi) = \partial^\alpha u * \phi = u * \partial^\alpha \phi$$

(ii) $S(u * \phi) \subset S(u) + S(\phi)$

Teorema 1.2.15. *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Para a demonstração ver [9], pág. 64

1.3 Distribuições Temperadas e Transformada de Fourier

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definimos a Transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} f(x)\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^d$$

onde i é a unidade imaginária e $x.\xi$ é o produto interno canônico.

Segue diretamente da definição que a aplicação $f \mapsto \widehat{f}$ define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}. \tag{1.3}$$

Mais ainda, está é uma aplicação que leva L^1 no espaço das funções contínuas que se anulam no infinito.

Lema 1.3.1 (Riemann-Lebesgue)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Então $\widehat{f}$ é uma função contínua satisfazendo $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$.*

Ver [9], pág. 75, para a demonstração.

Se ϕ é uma função teste, prova-se que sua transformada de Fourier é analítica complexa em $\mathbb{C}^d$. Assim, $\widehat{\phi}$ não terá suporte compacto, a menos que ϕ seja nula, uma vez que o conjunto dos zeros de uma função analítica complexa não-nula em $\mathbb{C}^d$ tem interior vazio.

Consideremos então um espaço que contém as funções de suporte compacto e que seja invariante pela Transformada de Fourier.

Definição 1.3.2 (Espaço de Schwartz)**.** *Denotamos por $\mathcal{S}$ o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ das funções ϕ tais que*

$$\|\phi\|_{N,\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi| < \infty \tag{1.4}$$

para todo inteiro não-negativo N e para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Tanto as funções de $\mathcal{S}$ quanto as suas derivadas decrescem no infinito mais rapidamente do que qualquer potência negativa de $|x|$. Muniremos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$ com a topologia dada pela família enumerável de semi-normas em (1.4).

Exemplo 1.3.3. O espaço das funções-testes está contido densamente em $\mathcal{S}$, mas para $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ pertence a $\mathcal{S}$, porém não possui suporte compacto. Assim, $C_c^\infty \subsetneq \mathcal{S}$.

Tendo em vista a Proposição 1.2.4, segue que se $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^p} &= \left(\int |\partial^\alpha \phi(x)|^p \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|)^{\frac{n+1}{p}} |\partial^\alpha (x) \phi| \leq C \|\phi\|_{N,\alpha}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde N é um inteiro positivo maior que $\frac{n+1}{p}$. Em particular, $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$.

Teorema 1.3.4. *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é um operador linear e contínuo, continuamente inversível, cuja transformada inversa é dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \check{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \phi(\xi) d\xi, \ \phi \in \mathcal{S}$$

A prova deste resultado encontra-se na página 77 de [9]. Se ϕ, $\psi \in \mathcal{S}$, utilizando o teorema anterior e as propriedades da convolução, prova-se as seguintes igualdades:

(i) $\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$

(ii) $\mathcal{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$

(iii) $\displaystyle\int \widehat{\phi}\psi \ dx = \int \phi \widehat{\psi} \ dx$

(iv) $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}$

(v) $\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-d} \widehat{\phi} * \widehat{\psi}$

(vi) $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^{-d} \breve{u}$, com $\breve{u}(\xi) = u(-\xi)$.

Também, pela continuidade da Transformada de Fourier, garantida pelo Teorema 1.3.4, outras famílias de semi-normas que podem ser usadas para definir a topologia em $\mathcal{S}$ são dadas por

$$\|f\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{\substack{|\alpha|\leq k \\ x\in\mathbb{R}^d}} (1+|\xi|)^k \; |\partial^\alpha f(x)|, k \in \mathbb{N}$$

$$\|\widehat{f}\|_k = \sup_{\substack{|\alpha|\leq k \\ \xi\in\mathbb{R}^d}} (1+|\xi|)^k \; |\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)|, k \in \mathbb{N}$$

Definição 1.3.5. *Um funcional linear e continuo em $\mathcal{S}$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota com $\mathcal{S}'$.*

Exemplo 1.3.6. Uma vez que toda distribuição com suporte compacto se estende continuamente a $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, vale a inclusão $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. Por restrição a $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, e como este é denso em $\mathcal{S}$, temos que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Se $f \in L^p$, podemos identificá-la como uma distribuição temperada definindo, para cada $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int f(x)\phi(x)dx.$$

A linearidade é imediata e a integral acima é finita, pela desigualdade de Hölder. Para verificar a continuidade, se $\phi \in \mathcal{S}$, segue de (1.5) que

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi\rangle| &\leq \|f\|_{L^p}\|\phi\|_{L^{p'}} \\ &\leq C\|f\|_{L^p}\|\phi\|_{N,1} \end{aligned}$$

Da estimativa acima, concluímos também que $L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$.

Teorema 1.3.7 (Desigualdade de Young)**.** *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então a convolução $f * g \in L^r$, com $\dfrac{1}{r}+1 = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$, e vale*

$$\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Ver [7], para a demonstração.

Definição 1.3.8. *Se $u \in \mathcal{S}'$, a Transformada de Fourier $\widehat{u}$ de u se define por*

$$\langle \widehat{u}, \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\rangle$$

Pelo Teorema 1.3.4, $\widehat{u}$ está bem definida e determina uma nova distribuição temperada. Mais ainda, $\mathcal{F}$ resulta contínua e inversível em $\mathcal{S}'$.

Proposição 1.3.9. *Seja* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(i) *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *a transformada* $\widehat{f}$ *de* f *como distribuição temperada e como função integrável coincidem.*

(ii) *Se* $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ *é uma função de classe* C^∞ *dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = \langle f_x, e^{-ix\xi} \rangle \tag{1.6}$$

(iii) *Se* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *então* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *e vale*

$$\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2 \qquad \textit{(Identidade de Fourier-Plancherel)}$$

Ver [9], pág. 81, para a demonstração.

Observação 1.3.10. Consideremos uma distribuição $u \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pela Proposição 1.3.9, a Transformada de Fourier de $\widehat{u}$ é a função dada por

$$\widehat{\widehat{u}}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} \widehat{u}(x) dx$$

Como $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^d \breve{u}$, uma mudança de variáveis nos dá que

$$u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix.\xi} \widehat{u}(x) dx$$

Assim, se $\widehat{u} \in L^1$, podemos "recuperar" u pela fórmula de inversão dada pelo Teorema 1.3.4. Por argumento semelhante a demonstração do Lema de Riemann-Lebesgue, obtemos que $u \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$, ou seja, u é contínua e vai a zero quando $|\xi| \to \infty$.

Também, pela mesma expressão,

$$|u(\xi)| \leq (2\pi)^{-d} \|\widehat{u}\|_{L^1},$$

para quase todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, donde

$$\|u\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-d} \|\widehat{u}\|_{L^1}. \tag{1.7}$$

1.4 Espaços de Sobolev

Neste texto, vamos nos restringir aos espaços de Sobolev modelados em L^2. Estes espaços desempenham um papel crucial no estudo de equações diferenciais parciais, lineares ou não. O ponto de partida será a Transformada de Fourier.

Definição 1.4.1. *Seja s um número real. Uma distribuição temperada u pertence ao* **espaço de Sobolev de índice s**, *denotado por $H^s(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se,*

$$\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d) \text{ e } \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$$

Escrevemos

$$\|u\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Proposição 1.4.2. *Para todo e qualquer $s \in \mathbb{R}$, o espaço H^s equipado com a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: É imediato que a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ provém do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi$$

Provemos então que este espaço é completo. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em H^s. Pela definição da norma, $(\widehat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$.

Como este é completo, existe $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_n - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d,(1+|\xi|^2)^s d\xi)} = 0. \tag{1.8}$$

Em particular, a sequência $(\widehat{u}_n)$ converge a $\tilde{u}$ em $\mathcal{S}'$. Tomemos $u = \mathcal{F}^{-1}\tilde{u}$. Como a Transformada de Fourier é um isomorfismo de $\mathcal{S}'$, segue que $u \in \mathcal{S}'$. Por fim, $u_n \to u$ em H^s devido a (1.8). ∎

Notemos que os espaços de Sobolev formam uma família decrescente de espaços, com respeito ao índice s. De fato, $s \geq s'$ implica $(1+|\xi|^2)^{s'} \leq (1+|\xi|^2)^s$.

Portanto, se uma distribuição temperada f é tal que $\widehat{f} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, segue que

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{H^{s'}} &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{s'} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|^2_{H^s}. \end{aligned}$$

Assim, $H^s(\mathbb{R}^d) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}^d)$ e tal inclusão é contínua.

Os teoremas que seguem têm como objetivo caracterizar os espaços de Sobolev para determinados valores de s sem o uso explícito da Transformada de Fourier.

Teorema 1.4.3. *Seja s um número inteiro não-negativo. O espaço $H^s(\mathbb{R}^d)$ é o espaço das funções u pertencentes a L^2 tal que, para todo α em $\mathbb{N}^d$, com $|\alpha| \leq s$ temos $\partial^\alpha u \in L^2$.*

Demonstração: Seja $s \in \mathbb{N}$. Pelo binômio de Newton, temos $(1+|\xi|^2)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} |\xi|^{2i}$. Agora, fixado $0 \leq i \leq s$ e $u \in L^2$,

$$\begin{aligned} |\xi|^{2i} |\widehat{u}(\xi)|^2 &= (\xi_1^2 + ... + \xi_d^2)^i |\widehat{u}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=i} c_\alpha |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{|\alpha|=i} c_\alpha |\widehat{\partial^\alpha u}|^2, \end{aligned}$$

pois $\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$, pelo Teorema 1.3.4. Assim,

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 &= \sum_{i=0}^{s} \sum_{|\alpha|=i} c_\alpha \binom{s}{i} |\widehat{\partial^\alpha u}|^2 \\ &= \sum_{|\alpha| \leq s} \tilde{c}_\alpha |\widehat{\partial^\alpha u}|^2 \end{aligned}$$

Integrando em ambos os membros e utilizando a Identidade de Fourier-Plancherel, segue que

$$\begin{aligned} \int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int \sum_{|\alpha| \leq s} \tilde{c}_\alpha |\widehat{\partial^\alpha u}|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq s} (2\pi)^d \tilde{c}_\alpha \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \min\left\{(2\pi)^d \tilde{c}_\alpha;\ |\alpha| \leq s\right\}$ e $C_2 = \max\left\{(2\pi)^d \tilde{c}_\alpha;\ |\alpha| \leq s\right\}$, obtemos

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq \int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \tag{1.9}$$

■

Corolário 1.4.4. *$\mathcal{S}$ é continuamente incluído em H^s , $\forall s \in \mathbb{R}$*

Demonstração: Tendo em vista a caracterização dada pelo Teorema anterior, juntamente com a desigualdade (1.5), se $s \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \|\phi\|_{N,\alpha}^2,$$

para toda função $u \in \mathcal{S}$. Assim, $\mathcal{S} \hookrightarrow H^s$, se s é natural.

Por fim, se $s \in \mathbb{R}$ qualquer, denotando por $\lceil s \rceil$ o menor inteiro positivo maior ou igual que s, segue que $\mathcal{S} \hookrightarrow H^{\lceil s \rceil} \hookrightarrow H^s$, pela propriedade de encaixe. ■

O resultado a seguir descreve o dual topológico dos espaços de Sobolev, que nos permitirá identificar, a menos de um isomorfismo, o espaço H^{-s} como o dual de H^s.

Teorema 1.4.5 (O Dual de H^s)**.** *A forma bilinear B definida por*

$$\begin{cases} B : \mathcal{S} \times \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad (u,\varphi) & \mapsto & B(u,\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\varphi(x)dx \end{cases}$$

pode ser estendida para uma forma bilinear contínua de $H^s \times H^{-s}$ para $\mathbb{C}$. Além disso, a aplicação δ_B definida por

$$\begin{cases} \delta_B : H^{-s} & \longrightarrow & (H^s)^* \\ \qquad u & \mapsto & \delta_B(u) : \varphi \mapsto B(u,\varphi) \end{cases}$$

é linear e um isomorfismo isométrico (a menos de uma constante).

Demonstração: Para $u, \varphi \in \mathcal{S}$, temos

$$\begin{aligned} B(u,\varphi) &= \int u(x)\varphi(x)dx \\ &= \int u(x)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)dx \\ &= (2\pi)^{-d}\int \widehat{u}(\xi)(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-d}\int \widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ e tomando o módulo, segue que

$$\begin{aligned} B(u,\varphi) &\leq (2\pi)^{-d}\int |\widehat{u}(\xi)||\widehat{\varphi}(-\xi)|d\xi \\ &= (2\pi)^{-d}\int (1+|\xi|^2)^{s/2}|\widehat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\widehat{\varphi}(-\xi)|d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-d}\left(\int (1+|\xi|^2)^{s}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int (1+|\xi|^2)^{-s}|\widehat{\varphi}(-\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &= (2\pi)^{-d}\|u\|_{H^s}\|\varphi\|_{H^{-s}} \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação B é uniformemente contínua em $H^s \times H^{-s}$. Mas $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ é denso neste espaço, pelo teorema anterior. Logo, esta forma bilinear se estende a uma única função contínua de $H^s \times H^{-s}$ em $\mathbb{C}$, também denotada por B.

Além disso, para cada $u \in H^{-s}$ fixa, $\delta_B(u)$ é um funcional linear e contínuo em H^s.

Resta mostrarmos que a aplicação δ_B é um isomorfismo.

A linearidade é imediata. Quanto a injetividade, $B(u,\varphi) = 0$ é equivalente a dizer que

$$\int u(x)\varphi(x)dx = 0,$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{S}$, ou seja, $u = 0$ enquanto distribuição temperada.

Para provar a sobrejetividade, se $\Psi : H^s(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ é um elemento do dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^d)$, como este é um espaço de Hilbert (Proposição 1.4.2), o Lema da Representação de Riesz nos diz que existe uma única $h \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\Psi(f) = \langle \varphi, h\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi,$$

para toda $\varphi \in H^s$.

Seja $u \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^d (1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{h}(-\xi)}$.

Observemos que $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$, pois

$$\begin{aligned}\int (1+|\xi|^2)^{-s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &= (2\pi)^d \int (1+|\xi|^2)^{-s} (1+|\xi|^2)^{2s} |\widehat{h}(-\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^d \int (1+|\xi|^2)^{s} |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^d \|h\|_{H^s} < \infty\end{aligned}$$

Assim, para $\varphi \in H^s$,

$$\begin{aligned}\delta_B(u)(\varphi) = B(u,\varphi) &= (2\pi)^{-d} \int \widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)\ d\xi \\ &= \int (1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{h}(-\xi)}\widehat{\varphi}(-\xi)\ d\xi \\ &= \int (1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{h}(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)\ d\xi = \Psi(\varphi)\end{aligned}$$

Portanto, $\delta_B(u) = \Psi$, como queríamos.

■

1.4.1 Espaços de Sobolev Homogêneo

Definição 1.4.6. *Seja s um número real. O espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^s$ é o conjunto das distribuições temperadas tais que $\widehat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\|u\|^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2\ d\xi < \infty \tag{1.10}$$

A norma $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ tem a propriedade de escala

$$\|u(\lambda\cdot)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{-\frac{d}{2}+s} \|u\|_{\dot{H}^s}, \tag{1.11}$$

como pode ser verificada através de uma mudança de variáveis na expressão (1.10).

Enquanto que os espaços de Sobolev não-homogêneos H^s formam uma família decrescente de espaços (com respeito ao índice s), os espaços homogêneos não são comparáveis entre si. Porém, é imediato que se s é positivo, H^s está contido em $\dot{H}^s$ e se s é negativo, H^s contém $\dot{H}^s$.

Proposição 1.4.7. *Se $s < d/2$, então $\dot{H}^s$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\dot{H}^s$. Então a sequência $(\widehat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}, |\xi|^{2s}d\xi)$, que sabemos ser completo. Seja f este limite, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\|\widehat{u}_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus\{0\},|\xi|^{2s}d\xi)} = 0.$$

Mostremos que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Temos que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}, |\xi|^{2s}d\xi)$; assim, se $K \subset \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ é compacto,

$$\begin{aligned}\int_K |f(\xi)|d\xi &= \int_K |\xi|^{-2s}|\xi|^{2s}|f(\xi)|\, d\xi\\ &\leq C\int_K |\xi|^{2s}|f(\xi)|\, d\xi < \infty,\end{aligned}$$

pois a função $\rho(\xi) = |\xi|^{2s}$ é contínua em K.

Resta estimarmos a integral de f em compactos que contêm a origem. Para isto, é suficiente observarmos que a integral de f sobre a bola unitária $B(0,1)$ é finita. Neste caso,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)} |f(\xi)|\, d\xi &= \int_{B(0,1)} |\xi|^{-s}|\xi|^{s}|f(\xi)|\, d\xi\\ &\leq \left(\int_{B(0,1)} |\xi|^{2s}|f(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{B(0,1)} |\xi|^{-2s}\, d\xi\right)^{1/2} < \infty,\end{aligned}$$

visto que ρ é integrável sobre o conjunto $B(0,1)$, pois $s < d/2$.

Portanto, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Finalmente, tomando $u = \mathcal{F}^{-1}f$, segue o resultado. ■

Capítulo 2

Problema Inicial

Neste capítulo, estudaremos o comportamento de uma dada solução de equações hiperbólicas estrita, no caso em que $a(t)$ é do tipo Lipschitz, dando como resultado a estimativa da energia.

Assim, seja o problema de Cauchy em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, com $u = u(t, x)$,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a(t)\partial_x^2 u = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \qquad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

com valor iniciais $u_0 \in H^s(\mathbb{R}), u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}), s > 0$, com a hipótese de hiperbolicidade

$$0 < \lambda \leq a(t) \leq \Lambda, \quad \forall t \tag{2.2}$$

onde λ e Λ são contantes positivas.

Se o coeficiente $a(t)$ for uma função localmente Lipschitz em $[0, +\infty)$, então o problema de Cauchy (2.1) é C^∞ bem posto(veja-se [10] e[12]). Neste caso, teremos $u(t, \cdot)$ bem definido em $H^s(\mathbb{R})$ para qualquer valor inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e $u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R})$; mais precisamente, a única solução $u(t, \cdot)$ da equação pertence a

$$C([0, +\infty); H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, +\infty); H^{s-1}(\mathbb{R})).$$

De fato, se denotamos

$$E_s(u)(t) := \|u(t)\|^2_{H^s} + \|\partial_t u(t)\|^2_{H^{s-1}}, \tag{2.3}$$

temos a seguinte afirmação.

Afirmação 2.1. *A solução u de (2.1) é tal que para qualquer $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,T]$, satisfaz a seguinte estimativa*

$$E_s(u)(t) \leq C_{s,T} E_s(u)(0), \tag{2.4}$$

com $C_{s,T} > 0$.

Demonstração: Da equação

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0,$$

podemos considerar o sistema seguinte:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)u_{xx} \\ u_{tx} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \partial_x \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}; \tag{2.5}$$

denotando $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e aplicando transformada de Fourier temos

$$\partial_t \widehat{\mathrm{U}} = iA \cdot \xi \widehat{\mathrm{U}}, \tag{2.6}$$

logo diagonalizando a matriz $A \cdot \xi$ temos que,

$$NA \cdot \xi = D(\xi)N,$$

com

$$N = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{a(t)} & -\sqrt{a(t)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{e } D = \begin{pmatrix} \sqrt{a(t)}\xi & 0 \\ 0 & -\sqrt{a(t)}\xi \end{pmatrix}.$$

Depois, derivando $N\widehat{U}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(N\widehat{\mathrm{U}}) &= i(NA\cdot\xi)(\widehat{\mathrm{U}}) + N'\widehat{\mathrm{U}} \\ &= iD(N\widehat{\mathrm{U}}) + N'N^{-1}(N\widehat{\mathrm{U}}), \end{aligned}$$

fazendo $v := N\widehat{U}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v &= iD\,v + N'N^{-1}v, \\ \frac{d}{dt}v &= iD\,v + Bv, \end{aligned}$$

com $B = N'N^{-1}$ que é limitado para cada t, como podemos ver usando a norma de operador, [1], para a demonstração veja Afirmação 4.1 no Apêndice.

Por outro lado usaremos o seguinte produto interno

$$(u,v) = \int u(t,\xi)\cdot\overline{v(t,\xi)}d\xi, \tag{2.7}$$

e definiremos a norma

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int |u(t,\xi)|^2\,d\xi. \tag{2.8}$$

Seja a norma para $v_1(t,\cdot), v_2(t,\cdot) \in L^2$

$$\left\|\begin{pmatrix} v_1(t,\cdot) \\ v_2(t,\cdot) \end{pmatrix}\right\|_1 = \|v_1(t,\cdot)\|_{L^2} + \|v_2(t,\cdot)\|_{L^2}. \tag{2.9}$$

Logo, usando (2.7), temos $(v,\overline{B}\overline{v}) = (v,\overline{Bv}) = \overline{(\overline{v},Bv)} = (Bv,\overline{v})$ e $(v,-iD\overline{v}) = \overline{(v,-iD\overline{v})} = (-iDv,\overline{v})$, depois derivando teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|v\|_{L^2} &= (\frac{dv}{dt},\overline{v}) + (v,\frac{d\overline{v}}{dt}) \\ &= ((iD+B)v,\overline{v}) + (v,(-iD+B)\overline{v}) \\ &= (Bv,\overline{v}) + (v,B\overline{v}) \\ &= 2Re\{Bv\cdot\overline{v}\} \le 2\|Bv\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \qquad , \text{ com } 2\|B\| \le \widetilde{\gamma}, \\ &\le \widetilde{\gamma}\|v\|_1^2, \\ \text{então } \|v(t,\cdot)\|_{L^2} &\le e^{\gamma t}\|v(0,\cdot)\|_{L^2}, \quad \gamma = \widetilde{\gamma}/2. \end{aligned}$$

[1] $\|B\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$, onde $\lambda_{\max}$ o maior autovalor da matriz B^*B; B^* =adjunto de B.

onde $\widetilde{\gamma}$ e γ são constantes.

Então dada a norma (2.9), temos $\|v(t,\cdot)\|_1 = \|(v_1(t,\cdot), v_2(t,\cdot))\|_1 = \|v_1(t,\cdot)\|_{L^2} + \|v_2(t,\cdot)\|_{L^2}$ e fazendo $v(t,\xi) = N\widehat{\mathrm{U}}(t,\xi)$, segue a seguinte afirmação.

Afirmação 2.2.

$$\|v(t,\cdot)\|_1 = \left\|N\widehat{U}(t,\cdot)\right\|_1 \equiv \|U(t,\cdot)\|_1 .$$

Demonstração: Basta provar que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \left\|\begin{pmatrix} v_1(t,\cdot) \\ v_2(t,\cdot)\end{pmatrix}\right\|_1 \leq \left\|N\begin{pmatrix} v_1(t,\cdot) \\ v_2(t,\cdot)\end{pmatrix}\right\|_1 \leq C_2\left\|\begin{pmatrix} v_1(t,\cdot) \\ v_2(t,\cdot)\end{pmatrix}\right\|_1, \quad \forall t \leq T \tag{2.10}$$

pois sendo $\|\cdot\|_{L^2} = (2\pi)^{-d}\,\|\widehat{\cdot}\|_{L^2}$, temos que

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix} v_1(t,\cdot) \\ v_2(t,\cdot)\end{pmatrix}\right\|_1 &= \|v_1(t,\cdot)\|_{L^2} + \|v_2(t,\cdot)\|_{L^2} = (2\pi)^{-d}\left(\left\|\widehat{v_1(t,\cdot)}\right\|_{L^2} + \left\|\widehat{v_2(t,\cdot)}\right\|_{L^2}\right) \\ &= (2\pi)^{-d}\left\|\begin{pmatrix} \widehat{v_1(t,\cdot)} \\ \widehat{v_2(t,\cdot)}\end{pmatrix}\right\|_1 ,\end{aligned}$$

donde segue a Afirmação 2.2.

Falta então, provar (2.10). Para isso fazemos o seguinte produto

$$N^t \cdot N = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2a(t)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

usando a norma do operador, tem-se que $\|N\| = \sqrt{\max\{\frac{1}{2a(t)}, \frac{1}{2}\}}$ e $\|N^{-1}\|^{-1} = \sqrt{\min\{\frac{1}{2a(t)}, \frac{1}{2}\}}$ (onde $\|N\|_3 = \sup_{\|x\|=1}\|Nx\|$) , então temos o lado direito de (2.10)

$$\|Nv\|_1 \leq \|N\|\,\|v\|_1 .$$

Para provar o lado esquerdo de (2.10) usamos que $\det(N) \neq 0$.

Assim,

$$\|v\|_1 = \left\|N^{-1}Nv\right\|_1 \leq \left\|N^{-1}\right\|\,\|Nv\|_1 ,$$

logo,

$$\left\|N^{-1}\right\|^{-1}\|v\|_1 \leq \|Nv\|_1 ; \tag{2.11}$$

fazendo $C_1 = \sqrt{\min\{\frac{1}{2\Lambda}, \frac{1}{2}\}}$ e $C_2 = \sqrt{\max\{\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2}\}}$ temos que

$$C_1\|v\|_1 \leq \|Nv\|_1 \leq C_2\|v\|_1 .$$

■

Afirmação 2.3. *Se tem a seguinte equivalência de normas*

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} + \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2} \;\; e \;\; \left(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}. \tag{2.12}$$

Demonstração: Segue de

$$\begin{aligned}\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} + \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2} &\leq 2\max\{\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}, \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2}\}\\ &\leq 2\left(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{1/2} &\leq \sqrt{2}\max\{\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}, \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2}\}\\ &\leq \sqrt{2}\left(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} + \|u_x(t,\cdot)\|_{L^2}\right).\end{aligned}$$

■

Voltamos, agora à demonstração da Afirmação 2.1.

Usando a Afirmação 2.2 e $\|v(t,\cdot)\|_1 \leq e^{\gamma t}\|v(0,\cdot)\|_1$ (onde $v(t,\xi) = N\widehat{\mathrm{U}}(t,\xi)$), temos

$$\|\mathrm{U}(t,\cdot)\|_1 \leq Ce^{\gamma t}\|\mathrm{U}(0,\cdot)\|_1 ,$$

com C uma constante positiva dada por 2.2.

Logo pela Afirmação 2.3 segue

$$\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad e^{\gamma t}\left(\|\partial_t u(0,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u(0,\cdot)\|_{L^2}^2\right).$$

Agora, usando Plancherel e que $\widehat{\partial_x u}(t,\xi) = (i\xi)\widehat{u}(t,\xi)$, temos

$$\left\|\widehat{\partial_t u(t,\cdot)}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\widehat{\partial_x u(t,\cdot)}\right\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad e^{\gamma t}\left(\left\|\widehat{\partial_t u(0,\cdot)}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\widehat{\partial_x u(0,\cdot)}\right\|_{L^2}^2\right) \tag{2.13}$$

$$\left\|\widehat{\partial_t u(t,\cdot)}\right\|_{L^2}^2 + \left\|(i\xi)\widehat{u(t,\xi)}\right\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad e^{\gamma t}\left(\left\|\widehat{\partial_t u(0,\xi)}\right\|_{L^2}^2 + \left\|(i\xi)\widehat{u(0,\xi)}\right\|_{L^2}^2\right) \tag{2.14}$$

$$\int \left|\widehat{\partial_t u(t,\xi)}\right|^2 d\xi + \int |\xi|^2 \left|\widehat{u(t,\xi)}\right|^2 d\xi \le e^{\gamma t}\left(\int \left|\widehat{\partial_t u(0,\xi)}\right|^2 d\xi + \int |\xi|^2 \left|\widehat{u(0,\xi)}\right|^2 d\xi\right). \tag{2.15}$$

Para estimar $\widehat{u(t)}$, sabemos que

$$\frac{d}{dt}\left|\widehat{u(t)}\right|^2 = 2Re\left\{\widehat{u(t)}\cdot\overline{\widehat{u_t(t)}}\right\} \quad \le \quad \left|\widehat{u(t)}\right|^2 + \left|\partial_t\widehat{u(t)}\right|^2;$$

multiplicando por $\exp(-t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\widehat{u(t)}\right|^2 \exp(-t)\right) \le \left|\partial_t\widehat{u(t)}\right|^2 \exp(-t),$$

integrando de zero ate t, tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{u(t)}\right|^2 &\le \left|\widehat{u(0)}\right|^2 e^t + \int_0^t e^t \left|\widehat{u}_t(s,\cdot)\right|^2 ds \quad ,t\le T\\
\left|\widehat{u(t)}\right|^2 &\le \left|\widehat{u(0)}\right|^2 e^T + \int_0^T e^T \left|\widehat{u}_t(s,\cdot)\right|^2 ds\\
\left|\widehat{u(t)}\right|^2 &\le e^T\left(\left|\widehat{u(0)}\right|^2 + \int_0^T \left|\widehat{u}_t(s,\cdot)\right|^2 ds\right)\\
\left|\widehat{u(t)}\right|^2 &\le C_2\left(\left|\widehat{u(0)}\right|^2 + \int_0^T \left|\widehat{u}_t(s,\cdot)\right|^2 ds\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Finalmente provamos a Afirmação 2.1, primeiro para o caso $s=1$, ou seja

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{H^0}^2 \le C_T\left(\|u(0)\|_{H^1}^2 + \|\partial_t u(0)\|_{H^0}^2\right). \tag{2.17}$$

Usando que $\left|\widehat{u(t,\cdot)}\right|^2 \le C_2\left(\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2 + \int_0^T \left|\widehat{u}_t(s,\cdot)\right|^2 ds\right)$ em (2.15), segue que

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{u_t(t,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(t,\cdot)}\right|^2 &\le\\
C_1\left(\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + |\xi|^2\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right) + C_2\left(\left|\widehat{u(0)}\right|^2 + \int_0^T \left|\widehat{u}_t(s,\cdot)\right|^2 ds\right) &\le\\
C_3\left(\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right) + C_2\int_0^T \left|\widehat{u}_t(s,\cdot)\right|^2 ds,&
\end{aligned}$$

onde $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$.

Além disso, $\left|\widehat{u}_t(t,\cdot)\right|^2 \le \left|\widehat{u}_t(t,\cdot)\right|^2 + \left|\widehat{u_x}(t,\cdot)\right|^2 \le C_1\left(\left|\widehat{u_t(0)}\right|^2 + |\xi|^2\left|\widehat{u(0)}\right|^2\right)$, e como

$0 \leq s < t \leq T$, então pelas contas anteriores temos

$$\begin{aligned} \left|\widehat{u_t(t,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(t,\cdot)}\right|^2 &\leq \\ C_3\left(\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + (1+|\xi|^2)\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right) + C_2\int_0^T |\widehat{u}_t(s,\cdot)|^2\, ds &\leq \\ C_3\left(\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right) + C_2C_1T\left(\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + |\xi|^2\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right) &\leq \\ C_4\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + C_3\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2 + C_4|\xi|^2\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2 &\leq \\ C_T\left(\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right), \end{aligned}$$

onde $C_4 = C_3 + C_2C_1T$ e $C_T = \max\{C_4, C_3\}$.

Portanto, temos

$$\left|\widehat{u_t(t,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(t,\cdot)}\right|^2 \leq C_T\left(\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right). \tag{2.18}$$

Integrando a desigualdade de acima,

$$\begin{aligned} &\int\left|\widehat{u_t(t,\xi)}\right|^2 d\xi + \int\left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(t,\xi)}\right|^2 d\xi \\ &\leq C_T\left(\int\left|\widehat{u_t(0,\xi)}\right|^2 d\xi + \int\left(1+|\xi|^2\right)\left|\widehat{u(0,\xi)}\right|^2\right) d\xi, \end{aligned}$$

e daí

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{H^0}^2 \leq C_T\left(\|u(0)\|_{H^1}^2 + \|\partial_t u(0)\|_{H^0}^2\right), \tag{2.19}$$

concluindo a demonstração de (2.17).

Por outro lado, se multiplicamos por $\left(1+|\xi|^2\right)^{s-1}$ em (2.18), temos

$$\begin{aligned} &\left(1+|\xi|^2\right)^{s-1}\left|\widehat{u_t(t,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\widehat{u(t,\cdot)}\right|^2 \\ &\leq C_T\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{s-1}\left|\widehat{u_t(0,\cdot)}\right|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\widehat{u(0,\cdot)}\right|^2\right), \end{aligned}$$

e integrando segue-se

$$\begin{aligned} \int\left(1+|\xi|^2\right)^{s-1}\left|\widehat{u_t(t,\xi)}\right|^2 d\xi + \int\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\widehat{u(t,\xi)}\right|^2 d\xi &\leq \\ C_T\left(\int\left(1+|\xi|^2\right)^{s-1}\left|\widehat{u_t(0,\xi)}\right|^2 d\xi + \int\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\widehat{u(0,\xi)}\right|^2 d\xi\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}}^2 \leq C_T\left(\|u(0)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(0)\|_{H^{s-1}}^2\right).$$

$\blacksquare$

Observação 2.0.8.

1. *Tal resultado se estende em [5], quando a função a também depende de $x \in \mathbb{R}^n$, mas há perda de derivadas.*

2. *Uma maneira alternativa de demonstração é considerarmos a seguinte energia*

$$E(t,\xi) = |v'(t)|^2 + a(t)\,|v(t)|^2\,,$$

onde $v(t) = v(t,\xi) = \widehat{u}(t,\xi)$, derivando $E(t,\xi)$ temos

$$\frac{d}{dt}E(t,\xi) = \frac{a'(t)}{a(t)}a(t)\,|\xi|^2\,|v|^2 \leq \frac{a'(t)}{a(t)}E(t,\xi),$$

logo, integrando de zero ate t, tem-se

$$E(t,\xi) \leq E(0,\xi)\int_0^t \left|\frac{a'(s)}{a(s)}\right| ds,$$

como $0 < \lambda \leq a(t) \leq \Lambda$, e pelo Teorema 1.2.6, temos que, $a'(t)$ é limitado ,com $t \in [0,T]$,

então

$$E(t) \leq C_T E(0),$$

onde $C_T = \dfrac{\max_{t\in[0,T]}\{|a'(t)|\}}{\lambda}$, constante que depende de T e λ.

Assim, tem-se

$$|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 + a(t)\,|\xi|^2\,|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leq C_T\left(|\widehat{u}_t(0,\xi)|^2 + a(0)\,|\xi|^2\,|\widehat{u}(0,\xi)|^2\right).$$

Logo, fazendo $c_1 = \min\{1,\lambda\}$ e $c_2 = \max\{1,\Lambda\}$ tem-se

$$|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 + |\xi|^2\,|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leq \frac{c_2}{c_1}C_T\left(|\widehat{u}_t(0,\xi)|^2 + |\xi|^2\,|\widehat{u}(0,\xi)|^2\right) \tag{2.20}$$

Então, usando (2.16), tem-se (2.18) o qual implica (2.19).

Por tanto, multiplicando por $\left(1+|\xi|^2\right)^{s-1}$ em (2.18) tem-se

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}}^2 \leq C_T\left(\|u(0)\|_{H^s}^2 + \|\partial_t u(0)\|_{H^{s-1}}^2\right).$$

Ao invés de funções na classe de Lipschitz consideremos, agora, o seguinte tipo de funções.

Definição 2.0.9. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, com I um intervalo, diremos que f é Log-Lip contínua se satisfaz:*

$$\|f\|_{LL(I)} := \sup_{\substack{t,t+\tau \in I \\ 0<|\tau|<1/2}} \frac{|f(t+\tau)-f(t)|}{|\tau||log|\tau||} < +\infty. \tag{2.21}$$

Com a regularidade dos coeficientes $a(t)$ em Log-Lip podemos demonstrar que (2.1) é C^∞-bem posto, veja [2]. No caso em que os coeficientes são independentes da variável x, usa-se o método aproximado de energia, que primeiro foi introduzido no artigo acima citado. No caso de uma equação com coeficientes Log-Lip contínuos dependentes de todas as variáveis, foi tratado em [5] para uma equação (2.1).

Além disso a continuidade Log-Lip é uma hipótese mínima para a regularidade nos coeficientes afim de ter C^∞-bem posto para (2.1). De fato, [2] dá um exemplo que a hipótese Log-Lip não pode ser enfraquecida para a classe Hölder de exponente menor que 1. De fato, em [2], generaliza tal exemplo, provando que em geral a hipótese de Log-Lip regularidade não pode se enfraquecida no sentido lá especificado.

Outra fato importante é que a estimativa da energia vale caso em que os coeficientes estão em Log-Lip no entanto há perda de derivadas (ver [5]).

Ou seja, para a solução u, $T > 0$, e qualquer $s \in \mathbb{R}$ e qualquer $t \in [0, T]$, tem-se:

$$E_{s-\beta t}(u)(t) \leq C^*_{s,T} E_s(u)(0), \tag{2.22}$$

onde $C^*_{s,T}$ constante que só depende de s, da dimensão n, T e Λ (cota superior de $a(t)$), e β é dado por

$$\beta = \frac{1}{\lambda} C^* \|a\|_{LL([0,t])}, \tag{2.23}$$

sendo C^* uma constante positiva que depende apenas de n e λ (menor cota inferior de $a(t)$).

Observamos que Ω dada na Definição (0.0.3) seja por exemplo $\Omega(\tau) = |\log(\tau)|$ ou, mais geral, para $\Omega(\tau) = \log^{(p)}(\tau)$, $\tau \in (0, \delta_p]$, onde $\log^{(1)}(\tau) = |\log(\tau)|$ e, para $p > 1$, $\log^p(\tau) = \log(\log^{(p-1)}(\tau))$.

Por outro lado para $\Omega(\tau) = |\log|\tau||^{-1}\,\tau^{-\alpha}$, $\Omega LL(I)$ coincide com o usual espaço de Hölder $C^{0,1-\alpha}$, onde formalmente temos que $\Omega(\tau) = 1$ então $\Omega LL(I)$ coincide com a classe de Log-Lip.

Capítulo 3

Problema geral

No capítulo anterior vimos no caso $a(t)$ ser Liptchitz, tem-se uma estimativa da energia local dada em (2.4). Mencionamos que no caso Log-Lip tem-se uma estimativa da energia (6) mas com perda de derivadas, ver [2].

Neste capítulo consideraremos condições para ternos uma estimativa global da energia para a solução do problema de Cauchy, quando o coeficiente vale (2.2). Veremos, em geral, tal estimativa não é possível no espaço de Sobolev homogeneo.

De fato, veremos que a explosão da energia vale se o coeficiente oscila muito rápido. Nossa referência será o artigo [1].

Com isto vemos a importância das propriedades da velocidade de propagação da equação da onda para determinar o comportamento da energia no espaço Sobolev homogeneo.

3.1 Solucão da equação da onda com coeficientes oscilantes em intervalos de compremento um.

Consideramos agora o problema de Cauchy dado em (2.1) com a condição de estrita hiperbolicidade (2.2). No seguinte teorema trabalharemos com soluções do problema de Cauchy 2π-periódica, para simplificar a demonstração, consideramos o problema de Cauchy para $x \in \mathbf{T}$ em lugar de $x \in \mathbb{R}$, onde $\mathbf{T}$ denota o toro 1 dimensional $\mathbf{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Além disso, em lugar da energia (2.3), usaremos

$$\dot{E}_s(u)(t) = \|u(t)\|_{\dot{H}^s} + \|\partial_t u(t)\|_{\dot{H}^{s-1}}, \tag{3.1}$$

onde $\dot{H}^s$ denota o espaço Sobolev homogêneo de exponente s em $\mathbf{T}$.

Para o Teorema seguinte denotamos (μ_k) uma sequencia de números inteiros tal que $\mu_{k+1} > \mu_k + 1$. e os intervalos

$$I_k = [\mu_k, \mu_k + 1), \quad J_k = [\mu_k + 1, \mu_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \tag{3.2}$$

Teorema 3.1.1. *Seja Ω uma função módulo e ω uma função contínua definida em $I = [t_0, +\infty)$ para algum $t_0 > 0$, crescente para $+\infty$ quando $t \to \infty$. Então, existem uma sequência μ_k, e uma função $a \in \Omega LL([0, +\infty)) \cap C^\infty([0, +\infty))$, periódica em cada intervalo I_k com período P_k[1], e igual a 1 em cada intervalo J_k, satisfazendo:*

$$\lim_{k\to+\infty} P_k = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} a(t) = 1 \quad e \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a'(t)}{\omega(t)} = 0. \tag{3.4}$$

Além isso, existem dados de Cauchy $u_0,\ u_1 \in H^s(\boldsymbol{T})$ para todo $s \in \mathbb{R}$, de tal forma que a solução u do problema de Cauchy (2.1) verifica:

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{E}_s(u)(t) = +\infty \qquad \text{para qualquer } s \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

onde

$$\dot{E}_s(u)(t) = \|u(t)\|_{\dot{H}^s} + \|\partial_t u(t)\|_{\dot{H}^{s-1}}. \tag{3.6}$$

[1] A função $a \in \Omega LL([0, +\infty)) \cap C^\infty([0, +\infty))$, é periódica em cada intervalo I_k com período P_k, se dados $t, t + P_k \in I_k$ temos que $a(t + P_k) = a(t)$.

Demonstração: Dividiremos a demonstração do Teorema 3.1.1 em etapas:

(i) Provemos que existe uma solução periódica de

$$w_\varepsilon''(\tau) + \alpha_\varepsilon(\tau) w_\varepsilon(\tau) = 0, \tag{3.7}$$

tal que para $\alpha_\varepsilon(\tau)$ tem-se

$$1/2 \leq \alpha_\varepsilon(\tau) \leq 3/2, \tag{3.8a}$$

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| \leq M\varepsilon, \tag{3.8b}$$

$$\left|\alpha_\varepsilon^{(h)}(\tau)\right| \leq M_h\varepsilon. \tag{3.8c}$$

Com efeito seguindo o Apêndice existe uma função periódica α_ε tal que as estimativas (3.8) são verdadeira (para a demonstração ver Afirmação 4.3 e Afirmação 4.4 no Apêndice).

Logo, consideremos (dada em [3] e [5]) uma função real, não-negativa φ, 2π-periódica, C^∞ tal que $\varphi(\tau) = 0$ para uma vizinhança de $\tau = 0$ e

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos^2 \tau d\tau = \pi.$$

para a existência de φ ver o Apêndice.

Então, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}]$ definimos

$$\alpha_\varepsilon(\tau) = 1 + 4\varepsilon\varphi(\tau)\sin 2\tau - 2\varepsilon\varphi'(\tau)\cos^2(\tau) - 4\varepsilon^2\varphi^2(\tau)\cos^4(\tau), \tag{3.9}$$

onde $\widetilde{\varepsilon}$ é tal que para cada, $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$ tem-se

$$1/2 \leq \alpha_\varepsilon(\tau) \leq 3/2. \tag{3.10}$$

Seja, agora, M e M_h constantes tais que para todo $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$, tem-se

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| \leq M\varepsilon,$$

$$|\alpha_\varepsilon^{(h)}(\tau)| \leq M_h\varepsilon,$$

onde $h = 1, 2, \ldots$.

Finalmente definimos

$$\widetilde{w}_\varepsilon(\tau) = \cos(\tau)\exp\left(-\varepsilon\tau + 2\varepsilon\int_0^\tau \varphi(s)\cos^2 s ds\right), \qquad w_\varepsilon(\tau) = \widetilde{w}_\varepsilon(\tau)\exp(\varepsilon\tau).$$

Afirmamos que $\alpha_\varepsilon(\tau)$ e $\widetilde{w}_\varepsilon(\tau)$, são funções C^∞ e 2π-periódica.

Por outro lado, w_ε é uma solução do problema de Cauchy

$$w_\varepsilon''(\tau) + \alpha_\varepsilon(\tau)w_\varepsilon(\tau) = 0, \qquad w_\varepsilon(0) = 1, \qquad {w_\varepsilon}'(0) = 0. \tag{3.11}$$

De fato

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_\varepsilon'(t) &= -\sin t\exp\left(-\varepsilon t + 2\varepsilon\int_0^t \varphi(s)\cos^2 s ds\right) + \\
&\quad + \cos t\exp\left(-\varepsilon t + 2\varepsilon\int_0^t \varphi(s)\cos^2 s ds\right)(-\varepsilon + 2\varepsilon\varphi(t)\cos^2(t)) \\
\widetilde{w}_\varepsilon''(t) &= \exp\left(-\varepsilon t + 2\varepsilon\int_0^t \varphi(s)\cos^2(s) ds\right)(-\cos(t) - 2\sin(t)(-\varepsilon + 2\varepsilon\varphi(t)\cos^2(t)) + \\
&\quad \cos(t)(-\varepsilon + 2\varepsilon\varphi(t)\cos^2(t))^2 + \cos(t)(2\varepsilon\varphi'(t)\cos^2(t) - 4\varepsilon\varphi(t)\cos(t)\sin(t)));
\end{aligned}$$

logo para provar que $\widetilde{w}_\varepsilon(\tau)\exp(\varepsilon t)$ é solução da equação $w_\varepsilon''(\tau) + \alpha_\varepsilon(\tau)w_\varepsilon(\tau) = 0$, basta provar que

$$\widetilde{w}_\varepsilon'' + 2\varepsilon\widetilde{w}_\varepsilon' + (\varepsilon^2 + \alpha_\varepsilon(t))\widetilde{w}_\varepsilon(t) = 0. \tag{3.12}$$

De fato, derivando $w_\varepsilon(t) = \widetilde{w}_\varepsilon(\tau)\exp(\varepsilon t)$ duas vezes e por (3.12), temos

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon''(t) &= (\widetilde{w}_\varepsilon'' + 2\varepsilon\widetilde{w}_\varepsilon' + \varepsilon^2\widetilde{w}_\varepsilon)\exp(\varepsilon t) &= -\alpha_\varepsilon(t)\widetilde{w}_\varepsilon(t)\exp(\varepsilon t) \\
& &= -\alpha_\varepsilon(t)w_\varepsilon(t).
\end{aligned}$$

Agora, provemos (3.12)

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_\varepsilon'' + 2\varepsilon\widetilde{w}_\varepsilon' &= \exp\left(-\varepsilon t + 2\varepsilon\int_0^t \varphi(s)\cos^2 s ds\right)(-\cos(t) - \\
&\quad -2\sin(t)(-\varepsilon + 2\varepsilon\varphi(t)\cos^2(t)) + \\
&\quad \cos(t)(-\varepsilon + 2\varepsilon\varphi(t)\cos^2(t))^2 + \cos(t)(2\varepsilon\varphi'(t)\cos(t) - 2\varepsilon\varphi(t)\sin(2t))\big) \\
&= \exp\left(-\varepsilon t + 2\varepsilon\int_0^t \varphi(s)\cos^2 s ds\right)\cos(t)(-1 - 4\varepsilon\varphi(t)\sin(2t) + \\
&\quad +2\varepsilon\varphi'(t)\cos^2(t) + 4\varepsilon^2\varphi^2(t)\cos^4(t) - \varepsilon^2) \\
&= \exp\left(-\varepsilon t + 2\varepsilon\int_0^t \varphi(s)\cos^2 s ds\right)\cos(t)(-\varepsilon^2 - \alpha_\varepsilon(t)) \\
&= \widetilde{w}_\varepsilon(-\varepsilon^2 - \alpha_\varepsilon(t)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\widetilde{w}_\varepsilon'' + 2\varepsilon\widetilde{w}_\varepsilon' + \widetilde{w}_\varepsilon(\varepsilon^2 + \alpha_\varepsilon(t)) = 0.$$

(ii) Nesta etapa definiremos a função $a(t)$ sobre $\mathbb{R}$, periódica e satisfazendo (3.3) e (3.4).

Para isto consideramos os intervalos I_k e J_k dados em (3.2).

Então, definimos o coeficiente $a(t)$ para $t \in [0, \infty)$ como: $a(t) = 1$ para $t < t_1$ (onde t_1 denotado em (3.2)) e

$$a(t) = 1 \quad \text{para } t \in J_k, \tag{3.13a}$$

$$a(t) = \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t) \quad \text{para } t \in I_k,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{3.13b}$$

onde α_ε é dado por (3.9), ε_k é uma sequência decrescente para 0 e ν_k uma sequência crescente de inteiros, os quais serão escolhidos de uma forma adequada mais na frente.

A partir da **função módulo** Ω e ω dada na hipóteses do Teorema 3.1.1, obtemos uma função $a(t) \in C^\infty([0, \infty))$, periódica em cada intervalo I_k tendendo para 1 quando $t \to \infty$ (ver Afirmação 4.5 no Apêndice) e tal que (3.3) é satisfeita com $P_k = 1/2\nu_k$.

De fato, de (3.13) segue que $a(t)$ é P_k-periódica. Vejamos isto, seja $t \in I_k$, para algum $k = 1, 2, \ldots$..

Assim, temos que

$$\begin{aligned} a(t + P_k) &= \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k(t + P_k)) \\ &= \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t + (4\pi\nu_k P_k)) \qquad (P_k = 1/2\nu_k) \\ &= \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t + (2\pi)) \qquad \text{,como } \alpha_{\varepsilon_k}(t) \text{ é periódica de período } 2\pi\ . \\ &= \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t) \\ &= a(t). \end{aligned}$$

Logo, sendo o período $P_k = 1/2\nu_k$ temos que P_k converge para zero quando $k \to +\infty$, pois ν_k é crescente positivo, então segue (3.3).

Agora, demonstraremos que $a \in \Omega LL([0,\infty))$. Com efeito, como Ω satisfaz (0.0.2) e usando (3.13) termos que, será suficiente impor

$$\varepsilon_k \nu_k = \log(\nu_k)\Omega(1/\nu_k). \tag{3.14}$$

De fato, de (3.14) na Definição 0.0.2, com $I = [0, +\infty)$ tem-se

$$\|a\|_{\Omega LL(I)} := \sup_{\substack{t, t+\tau \in I \\ 0<|\tau|<\delta}} \frac{|a(t+\tau) - a(t)|}{|\tau||\log|\tau||\Omega(|\tau|)} < +\infty,$$

notemos primeiro que $a(t)$ é P_k-periódica com $\lim_{t\to+\infty} P_k = 0$ e constante em J_k, isto é

Se $t,\ t+\tau \in J_k$, temos que $a(t+\tau) = a(t) = 1 \Rightarrow \|a\|_{\Omega LL(I)} = 0$.

Se $t, t+\tau \in I_k$

$$\frac{|a(t+\tau) - a(t)|}{|\tau|\,|\log|\tau||\,\Omega(|\tau|)} = \frac{|a'((1+\theta)t+\tau)\tau|}{|\tau|\,|\log|\tau||\,\Omega(|\tau|)}$$

fazendo $((1+\theta)t+\tau) = \widetilde{\theta}$, com $\theta \in (0,1)$

$$= \frac{\left|\alpha'(4\pi\nu_k\widetilde{\theta})4\pi\nu_k\right|}{|\log|\tau||\,\Omega(|\tau|)} \leq \frac{\varepsilon_k\nu_k M_1 4\pi}{|\log|\tau||\,\Omega(|\tau|)} = \frac{\log(\nu_k)\Omega(1/\nu_k)4\pi}{|\log|\tau||\,\Omega(|\tau|)},$$

sabemos que o numerador é finito(pois k é fixo), tomando o supremo e como $\dfrac{1}{\log|\tau|} \leq \dfrac{1}{\log\delta}$ e $\dfrac{1}{\Omega(|\tau|)} \leq \dfrac{1}{\Omega(\delta)}$ segue $\|a\|_{\Omega LL(I)} < \infty$.
No caso em que $t \in J_k$, e $t+\tau \in (I_k \cup J_k)$ segue como no caso anterior.

Agora, provemos a relação (3.4) isto é

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a'(t)}{\omega(t)} = 0.$$

Porém, notemos que em J_k, $a'(t)$ é identicamente nula, e em I_k o módulo da derivada é limitada isto é

$$|a'(t)| = \left|\alpha'_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t)\right| 4\pi\nu_k \leq 4\pi M_1\varepsilon_k\nu_k = 4\pi M_1 \log(\nu_k)\Omega(1/\nu_k), \tag{3.15}$$

usando (3.14), (3.15) e ω uma função crescente, temos que demonstrar que $a(t) \in \Omega LL([)0,\infty)$ então será suficiente provar:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log(\nu_k)\Omega(1/\nu_k)}{\omega(\mu_k)} = 0. \tag{3.16}$$

Logo, passamos a provar (3.16).

Usando a Definição 0.0.3 temos que

$$-\Omega(t)' \leq \frac{1}{t}, \tag{3.17}$$

logo, integrando:

$$\int_{1/\nu_k}^{1} (-\Omega(t)')\, dt \leq \int_{1/\nu_k}^{1} \frac{1}{t} dt, \tag{3.18}$$

temos

$$\Omega(1/\nu_k) \leq \log(\nu_k) + C, \qquad \text{onde } \; C = \Omega(1) + C_1, \tag{3.19}$$

então fazemos a seguinte escolha $\mu_k = \omega^{-1}(k(\log(\nu_k))^2)$, onde ω^{-1} a função inversa de ω, para ter (3.16), com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\log(\nu_k)\Omega(1/\nu_k)}{\omega(\mu_k)} &= \frac{\log(\nu_k)\Omega(1/\nu_k)}{k\log^2(\nu_k)} \\ &\leq \frac{\log(\nu_k) + C}{k\log(\nu_k)} \\ &\leq \frac{1}{k} + \frac{C}{k\log(\nu_k)}, \end{aligned}$$

tomando limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log(\nu_k)\Omega(1/\nu_k)}{\omega(\mu_k)} = 0. \tag{3.20}$$

Mas μ_k não é um inteiro em geral. Então, definimos

$$\mu_k = [\omega^{-1}(k(\log(\nu_k))^2)] + 1, \tag{3.21}$$

onde $[x]$ indica a parte inteira de x. A partir (3.17) e (3.21), e devido ao fato de que ω é uma função crescente, segue (3.16).

(iii) Agora provaremos (3.5).

Definimos a solução $u \in C^\infty([0,\infty); H^s(\mathbf{T}))$ tal que, para qualquer $s \in \mathbb{R}$ de $Lu = 0$ (onde $L = \partial_t^2 - a(t)\partial_x^2$) e tomamos $u_0(x) = u(0,x)$, $u_1(x) = \partial_1 u(0,x)$ como dados de Cauchy em (2.1). Assim, vamos tomar

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \exp(i\nu_k x). \tag{3.22}$$

Afim de ter $Lu = 0$, vamos impor que

$$v_k''(t) + \nu_k^2 a(t) v_k(t) = 0; \tag{3.23}$$

e que para, $t_k = \mu_k + 1/2$,

$$v_k(t_k) = 1, \qquad v_k'(t_k) = 0. \tag{3.24}$$

Mas, pela equação (3.11), temos que, a solução de (3.23) com condição inicial (3.24) é da forma

$$v_k(t) = w_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k(t - t_k)) \qquad , t \in I_k. \tag{3.25}$$

Em particular,

$$v_k(\mu_k) = \exp(-2\pi\varepsilon_k\nu_k), \qquad\qquad v_k'(\mu_k) = 0, \tag{3.26}$$

$$v_k(\mu_k + 1) = \exp(2\pi\varepsilon_k\nu_k), \qquad\qquad v_k'(\mu_k + 1) = 0. \tag{3.27}$$

Agora, para estimar u para $t \leq \mu_k$, definimos a energia "de ordem k"por

$$E_k(t) = |v_k'|^2 + \nu_k^2 a(t) |v_k(t)|^2 \,. \tag{3.28}$$

Derivando (3.28) temos que $E_k'(t) = a'(t)\nu_k^2 |v_k(t)|^2$; logo, de (3.25) e (3.23) obtemos, para todo $t \leq \mu_k$,

$$E_k'(t) \leq |a'(t)|\, \nu_k^2\, |v_k(t)|^2 = \frac{|a'(t)|}{a(t)} \nu_k^2 a(t)\, |v_k(t)|^2 \overset{2}{\leq} \frac{|a'(t)|}{a(t)} E(t),$$

usando a desigualdade Grönwall tem-se

$$E_k(t) \leq E_k(\mu_k) \exp\left(\int_{\mu_k}^{t} \frac{|a'(s)|}{a(s)} ds \right),$$

e como $t \leq \mu_k$ tem-se

$$E_k(t) \leq E_k(\mu_k) \exp\left(\int_{0}^{\mu_k} \frac{|a'(s)|}{a(s)} ds \right).$$

Por (3.25) e (3.23), segue que

$$\begin{aligned} E_k(t) &\leq E_k(\mu_k) \exp\left[\int_0^{\mu_k} \frac{|a'(t)|}{a(t)} dt \right] \\ &= \nu_k^2 \exp\left[-4\pi\varepsilon_k\nu_k + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{I_j} \frac{|a'(t)|}{a(t)} dt \right]. \end{aligned}$$

Mas, devido a (3.2), (3.10), (3.11) e (3.13), temos:

$$\int_{I_j} \frac{|a'(t)|}{a(t)} dt \leq 8\pi M_1 \nu_j \varepsilon_j, \tag{3.29}$$

e finalmente, para $t \leq \mu_k$,

$$E_k(t) \leq \exp\left[-4\pi\varepsilon_k\nu_k + 8\pi M_1 \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j\nu_j + 2\log(\nu_k)\right]. \tag{3.30}$$

Agora, escolhemos

$$\nu_k = 2^{B^k}, \tag{3.31}$$

com B suficientemente grande a ser escolhido. De (3.14) e (3.31), teremos

$$\varepsilon_k\nu_k = B^k\Omega(2^{-B^k})\log 2, \tag{3.32}$$

e assim

$$\frac{\varepsilon_{k+1}\nu_{k+1}}{\varepsilon_k\nu_k} = B\frac{\Omega(2^{-B^{(k+1)}})}{\Omega(2^{-B^k})}. \tag{3.33}$$

De (3.33) e (0.0.3), escolhemos B suficientemente grande, de forma que

$$\pi\varepsilon_k\nu_k \geq 8\pi M_1 \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j\nu_j. \tag{3.34}$$

Logo, da Definição 0.0.3 e (3.14), teremos para qualquer $k \geq 1$,

$$\pi\varepsilon_k\nu_k \geq 2\log(\nu_k). \tag{3.35}$$

Agora, usando (3.30), (3.34) e (3.35), obtemos para $t \leq \mu_k$,

$$E_k(t)(\nu_k^s) \leq \exp\left[(-2\pi\Omega(1/\nu_k) + s)\log(\nu_k)\right],$$

logo da Definição 0.0.3 temos que o lado direito tende para 0 quando $k \to +\infty$, para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Assim, para u definido por (3.22), para qualquer $s \in \mathbb{R}$ e para qualquer $T_0 > 0$ temos $u \in C^\infty([0,T_0], H^s(\mathbf{T}))$; isto é, $u \in C^\infty([0,\infty), H^s(\mathbf{T}))$. Em particular, $u(0,x)$ e $\partial_t u(0,x)$ estão em $H^s(\mathbf{T})$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, a fim de provar (3.5), vamos a usar, em vez de (3.28), a seguinte energia(a qual foi proposta em [4],[3])

$$\widetilde{E}_k(t) = |v_k'(t)|^2 + \nu_k^2 |v_k(t)|^2 . \tag{3.36}$$

Logo, a partir de (3.26) segue que

$$\widetilde{E}_k(\mu_{k+1}) = |v_k'(\mu_k + 1)|^2 + \nu_k^2 |v_k(\mu_k + 1)|^2 = \nu_k^2 \exp(4\pi\varepsilon_k\nu_k). \tag{3.37}$$

Diferenciando a expressão (3.36),

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_k'(t) &= \nu_k^2 (1 - a(t)) \left(v_k \overline{v_k'} + v_k' \overline{v_k}\right) \\ &\geq -\left[2 \, Re(\nu_k v_k(t) \overline{v_k'(t)})\right] \nu_k |1 - a(t)| \\ &\geq -\nu_k |1 - a(t)| \left[\nu^2 |v_k(t)|^2 + |v_k'(t)|\right] \\ &\geq -\nu_k |1 - a(t)| \widetilde{E}_k'(t), \end{aligned} \tag{3.38}$$

e usando a desigualdade de Grönwall, de (3.37) e (3.23) temos para $\mu_k + 1 \leq t < +\infty$,

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_k(t) \geq& \widetilde{E}_k(\mu_k + 1) \exp\left[-\nu_k \int_{\mu_k+1}^{+\infty} |1 - a(t)| \, dt\right] \\ =& \nu_k^2 \exp\left[4\pi\varepsilon_k\nu_k - \nu_k \sum_{j=k+1}^{+\infty} \int_{I_j} |1 - a(t)| \, dt\right]. \end{aligned} \tag{3.39}$$

pois $I_k = [\mu_k, \mu_k + 1)$, $J_k = [\mu_k + 1, \mu_{k+1})$ e $a(t) = 1$ em J_k , mas de (3.2), (3.8b) e (3.13), como $|1 - a(t)| \leq M\varepsilon_j$ em I_j, segue

$$\int_{I_j} |1 - a(t)| \leq M\varepsilon_j.$$

Finalmente, para $t \geq \mu_k + 1$, temos

$$\widetilde{E}_k(t) \left(\nu_k^{-s}\right) \geq \exp\left[\nu_k \left(4\pi\varepsilon_k - M \sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j\right) + (2 - s)\log(\nu_k)\right]. \tag{3.40}$$

Agora, para avaliar o termo (3.40), consideramos a razão

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{k+1}\nu_{k+1}}{\varepsilon_k\nu_k} &= \frac{B^{k+1} \log 2\Omega(2^{-B^{k+1}})}{B^k \log 2\Omega(2^{-B^k})} \\ &= \frac{B\Omega(2^{-B^{k+1}})}{\Omega(2^{-B^k})}. \end{aligned}$$

Fazendo $\tau^{'} := \nu_{k+1}^{-1}$ e $\tau^{''} := \nu_k^{-1} = 2^{-B^k}$, temos

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = B\frac{\tau^{'}}{\tau^{''}}\frac{\Omega(\tau^{'})}{\Omega(\tau^{''})}; \tag{3.41}$$

e usando o Teorema do Valor Médio em (3.41),

$$\frac{\tau^{'}}{\tau^{''}}\frac{\Omega(\tau^{'})}{\Omega(\tau^{''})} = \frac{\tau^{'}}{\tau^{''}}\left[\frac{\Omega(\tau^{'})-\Omega(\tau^{''})}{\Omega(\tau^{''})}+1\right] = \frac{\tau^{'}}{\tau^{''}}\left[\frac{|\Omega'(\tau)|\,(\tau^{''}-\tau^{'})}{\Omega(\tau^{''})}+1\right] \tag{3.42}$$

para algum $\tau \in [\tau^{'}, \tau^{''}]$, e como Ω é uma função módulo, assim temos

Afirmação 3.1. *Seja Ω como a Definição 0.0.3 e $\tau \in [\tau', \tau'']$ como em (3.42). Então,*

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \le 2B\frac{1}{\Omega(\tau'')} = \frac{2B}{\Omega(\nu_k^{-1})}.$$

Primeiro vejamos quais condições são necessárias para ter

$$\begin{aligned}\frac{\Omega(\tau'')}{\tau''+\tau'} &\le |\Omega'(\tau)| \\ &\le \frac{\Omega(\tau')-\Omega(\tau'')}{\tau''-\tau'},\end{aligned}$$

será necessário ter

$$2\tau''\Omega(\tau'') \le (\tau'+\tau'')\Omega(\tau')$$

isto é, devemos provar que $\tau\Omega(\tau)$ é crescente. Para isso calculamos a derivada de $\tau\Omega(\tau)$ e vejamos em que dominio ela é positiva

$$(\tau\Omega(\tau))' = \Omega(\tau) + \tau\Omega'(\tau) > 0,$$

isto é, devemos ter

$$\Omega(\tau) > \tau(-\Omega'(\tau)).$$

Mas $\tau \in [\tau', \tau'']$, e τ'', τ' são muito pequenos pois B é muito grande, além disso, $0 < -\Omega'(\tau) < 1/\tau$, o que implica $0 < -\tau\Omega'(\tau) < 1$, então como $\lim_{\tau\to 0^+}\Omega(\tau) = +\infty$, consideraremos $\Omega(\tau) > 1$, assim

$$\begin{aligned}\Omega(\tau) > 1 > -\tau\Omega'(\tau) &> 0 \\ \Omega(\tau) + \tau\Omega'(\tau) &> 0;\end{aligned}$$

portanto para τ suficientemente pequeno, $\tau\Omega(\tau)$ é crescente, então temos

$$\tau'\Omega(\tau') < \tau''\Omega(\tau''),$$

e como Ω é decrescente e $\tau' < \tau''$ temos

$$\tau''\Omega(\tau'') < \tau''\Omega(\tau').$$

Então,

$$\frac{\Omega(\tau'')}{\tau'' + \tau'} \leq |\Omega'(\tau)|$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
\Omega(\tau'') - |\Omega'(\tau)|\,\tau' &\leq |\Omega'(\tau)|\,\tau'' \\
\frac{\Omega(\tau'') - |\Omega'(\tau)|\,\tau'}{\Omega(\tau'')} &\leq \frac{|\Omega'(\tau)|\,\tau''}{\Omega(\tau'')} \\
1 - \frac{|\Omega'(\tau)|\,\tau'}{\Omega(\tau'')} &\leq \frac{|\Omega'(\tau)|\,\tau''}{\Omega(\tau'')}
\end{aligned}$$

Agora provaremos a afirmação, para isto usamos a estimativa anterior e (3.42). *Assim, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = B\frac{\tau'}{\tau''}\frac{\Omega(\tau')}{\Omega(\tau'')} &= B\frac{\tau'}{\tau''}\left[\frac{|\Omega'(\tau)|\,(\tau'' - \tau')}{\Omega(\tau'')} + 1\right] \\
&= B\frac{\tau'}{\tau''}\left[\frac{\left|\Omega'(\tau)\right|\tau''}{\Omega(\tau'')} + 1 - \frac{\left|\Omega'(\tau)\right|}{\Omega(\tau'')}\tau'\right] \\
&\leq B\frac{\tau'}{\tau''}\left[\frac{\left|\Omega'(\tau)\right|\tau''}{\Omega(\tau'')} + \frac{\left|\Omega'(\tau)\right|\tau''}{\Omega(\tau'')}\right] \\
&\leq 2B\frac{\tau'\left|\Omega'(\tau)\right|}{\Omega(\tau')} \\
&\leq 2B\frac{1}{\Omega(\tau'')} = \frac{2B}{\Omega(\nu_k^{-1})}
\end{aligned}$$

Mas, $\tau \in [\tau', \tau'']$ e $\tau\,|\Omega'(\tau)| < 1$, então temos

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \leq 2B\frac{1}{\Omega(\tau'')} = \frac{2B}{\Omega(\nu_k^{-1})} \tag{3.43}$$

De (3.43) segue que para, $k \geq \overline{k}$,

$$2\pi\varepsilon_k \geq M \sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_j \tag{3.44}$$

Agora, para estimar a energia primeiro devemos estimar $\widetilde{E}_k(t)(\nu_k^{-s})$, para isto usamos a definição de $\widetilde{E}_k(t)$ dada em (3.36), a estimativa (3.40) e a Definição 0.0.3. Assim temos para $k+1 \leq t < +\infty$,

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_k(t)(\nu_k^{-s}) &\geq \exp\left[2\pi\varepsilon_k\nu_k + (2-s)\log(\nu_k)\right] \\ &= \exp\left[\log(\nu_k)(2\pi\Omega(1/\nu_k) + 2 - s)\right]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Finalmente, para energia dada em (3.6),

$$\begin{aligned} \dot{E}_s(u)(t) &= \|u(t)\|_{\dot{H}^s} + \|\partial_t u(t)\|_{\dot{H}^{s-1}} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nu_j|^{2s} |v_j(t)|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nu_j|^{2(s-1)} \left|v_j'(t)\right|^2 \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nu_j|^{2(s-1)} \left[\nu_j^2 |v_j(t)|^2 + \left|v_j'(t)\right|^2\right] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nu_j|^{2(s-1)} \widetilde{E}_j(t). \end{aligned}$$

Agora, por (3.39), temos

$$\begin{aligned} \dot{E}_s(u)(t) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nu_j|^{3s-2} \widetilde{E}_j(t)\nu_j^{-s} \\ &\geq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nu_j|^{3s-2} \exp\left[\log(\nu_j)(2\pi\Omega(1/\nu_j) + 2 - s)\right]; \end{aligned}$$

disto fazemos $j \to \infty$ o que implica que $t \to \infty$.

Portanto temos que

$$\lim_{t\to\infty} \dot{E}_s(u)(t) = +\infty. \tag{3.46}$$

■

3.2 Solução da equação da onda com coeficientes oscilantes numa sequência de intervalos crescente.

Neste seção veremos o comportamento da solução (2.1) no caso, o coeficiente $a(t)$ seja muito oscilante e definido sobre uma sequencia de intervalos com comprimento crescente. Para isto damos a seguinte Teorema:

Teorema 3.2.1. *Seja ψ uma função real em $[0,+\infty)$, contínua, côncava e crescente para $+\infty$ para $t \to +\infty$.*

Então, existe uma função $a(t) \in C^{\infty}([0,+\infty))$ cumpre

$$1/2 \leq a(t) \leq 3/2 \tag{3.47}$$

tal que, para $t \in (0,+\infty)$, temos

$$\int_0^t |a(s)-1|\, ds \leq C\psi(t) \tag{3.48}$$

e, para qualquer $h = 0, 1, \ldots,$

$$\left|a^{(h)}(t)\right| \leq C_h t^{-1}\psi(t), \tag{3.49}$$

com C e C_h constantes positivas.

Além disso, existem dados de Cauchy $u_0,\ u_1 \in H^s(\boldsymbol{T})$ para todo $s \in \mathbb{R}$, de tal forma que a solução u do problema de Cauchy (1.1) verifica

$$\limsup_{t\to+\infty} \dot{E}_s(u)(t) = +\infty \tag{3.50}$$

Demonstração:

A demonstração será feita em etapas:

Etapa 1: Construiremos uma função $a(t)$ satisfazendo (3.47) .

Para isto suponhamos que existe uma sequencia ε_k decrescente positiva convergindo para zero, e uma sequência crescente positiva δ_k de inteiros verificando:

$$\sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \leq \delta_k, \tag{3.51a}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j \delta_j \leq \varepsilon_k \delta_k, \tag{3.51b}$$

$$M_1 \sum_{j=1}^{k-1} j \varepsilon_j \delta_j \leq k \varepsilon_k \delta_k, \tag{3.51c}$$

com M_1 dado como em (3.8c), tal que

$$\varepsilon_k \delta_k \leq \psi(\delta_k), \tag{3.52}$$

escolheram depois estas sequências.

Para construir $a(t)$ fazemos de maneira similar que o Teorema 3.1.1.

Denotamos o conjunto,

$$J_k = [t''_{k-1}, t'_k), \qquad I_k = [t'_k, t''_k), \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, \tag{3.53}$$

onde

$$t''_0 = 0, \quad t'_k = \sum_{j=1}^{k-1} 2\delta_j + \delta_k \; e \quad t''_k = t'_k + \delta_k. \tag{3.54}$$

Tomando em conta (3.51), (3.53) e (3.54), temos

$$\delta_k \leq t \leq 4\delta_k \qquad\qquad , \; t \in I_k. \tag{3.55}$$

Assim definimos o coeficiente $a(t)$ para $t \in [0, +\infty)$ como em (3.13), isto é

$$\begin{aligned} a(t) &= 1 && , \text{para } t \in J_k, \\ a(t) &= \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t) && , \text{para } t \in I_k, \; k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

De maneira similar como no Teoremas 3.1.1 tem-se (3.47).

Etapa 2: Nesta etapa afirmamos que a função $a(t)$ cumpre (3.48).

A diferença da demonstração do Teorema 3.1.1 é a escolha de ν_k aqui:

$$4\pi\nu_k = k. \tag{3.56}$$

Depois, de (3.8c), (3.51) e (3.52), a inequação (3.48) é satisfeita (com $C = 2M$, com M dado em (3.8c).

De fato, temos que o coeficiente é da forma $a(t) = \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t)$ quando $t \in I_k$ e $a(t) = 1$ quando $t \in J_k$, e também sabemos que $|\alpha_{\varepsilon_k}(t) - 1| \leq \varepsilon_k M$ (isto quando $t \in I_k$, e se $t \in J_k$ a diferença é nula).
Então,

$$\int_0^t |a(t) - 1|\, dt \leq \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j M\, |I_j| & , t \in I_k \\ \\ \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j M\, |I_j| & , t \in J_k \end{cases} \tag{3.57}$$

e como $|I_j| = \delta_k$, e $\sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j \delta_j \leq \varepsilon_k \delta_k$, temos que

$$\int_0^t |a(t) - 1|\, dt \leq \begin{cases} \varepsilon_{k+1}\delta_{k+1} M & , t \in I_k \\ \\ \varepsilon_k \delta_k M & , t \in J_k \end{cases}.$$

Então, se $t \in I_k$ e usando (3.52) segue

$$\int_0^t |a(t) - 1|\, dt \leq \varepsilon_{k+1}\delta_{k+1} M \leq \psi(\delta_{k+1}) M \leq 2M\psi(t).$$

Agora, se $t \in J_k$, e usando o fato que ψ é crescente, tem-se:

$$\int_0^t |a(t) - 1|\, dt \leq M\varepsilon_k \delta_k \leq \psi(\delta_k) M \leq 2M\psi(t).$$

Etapa 3: Agora, provaremos que a função $a(t)$ verifica (3.49), isto é

$$\left| a^{(h)}(t) \right| \leq C_h t^{-1} \psi(t).$$

Para isto usaremos (3.11) e (3.55) , e definimos

$$\varepsilon_k 2^k = (4\delta_k)^{-1} \psi(\delta_k). \tag{3.58}$$

Assim, temos a inequação (3.49).

De fato, para $t \in I_k$,

$$
\begin{aligned}
\left|a^{(h)}(t)\right| = \left|(\alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t))^{(h)}\right| = & \left|\alpha_{\varepsilon_k}^{(h)}(4\pi\nu_k t)\right| (4\pi\nu_k)^h \\
\leq & (4\pi\nu_k)^h \varepsilon_k M_h \\
\leq & k^h \varepsilon_k M_h \qquad , 4\pi\nu_k = k \\
\leq & 2^k N_h \varepsilon_k \widetilde{M_h} \qquad , N_h = \max_{k\geq 1}\left\{k^h 2^{-k}\right\} \geq k^h 2^{-k} \quad \Rightarrow 2^k N_h \geq k^h \\
\leq & M_h N_h (4\delta_k)^{-1}\psi(\delta_k) \qquad , t \leq 4\delta_k \\
\leq & M_h N_h t^{-1}\psi(t).
\end{aligned}
$$

Então, temos:

$$
\left|a^{(h)}(t)\right| \leq M_h N_h t^{-1}\psi(t) = C_h t^{-1}\psi(t), \tag{3.59}
$$

onde $N_h = \max_k \left\{k^h 2^{-1}\right\}$.

As contas anteriores foram feitas assumindo que (3.51) era válido, então agora provaremos que existe a escolha de ε_k, δ_k que converge para zero e crescente, respectivamente, tal que verificam (3.51).

Etapa 4: Demostraremos que as estimativas (3.51) valem e faremos a escolha de ε_k tal que ela é decrescente positiva e converge para zero.

(i) Queremos determinar δ_k tal que

$$
\sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \leq \delta_k. \tag{3.60}
$$

Primeiro, vejamos que condições são necessárias para termos

$$
\delta_1 + \delta_2 \leq \delta_3. \tag{3.61}
$$

Para isto fazemos a seguinte escolha, $\delta_k = [\psi^{-1}(\Delta^k)] + 1$, mas sem perda de generalidade suponhamos que $\delta_k = \psi^{-1}(\Delta^k)$ é um inteiro com Δ grande. Usando (3.58) tem-se

$$
\begin{aligned}
\delta_k &= \frac{1}{4\varepsilon_k}\frac{1}{2^k}\psi(\delta_k) && (3.62) \\
&= \frac{1}{4\varepsilon_k}\frac{1}{2^k}\Delta^k, && (3.63)
\end{aligned}
$$

então para provar (3.61), é equivalente provar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{\Delta}{2^1\varepsilon_1} + \frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{2^2\varepsilon_2} &\leq \frac{1}{4}\frac{\Delta^3}{2^3\varepsilon_3} \\
\frac{\Delta}{2^1\varepsilon_1} + \frac{\Delta^2}{2^2\varepsilon_2} &\leq \frac{\Delta^3}{2^3\varepsilon_3} \\
\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\Delta}{2\varepsilon_2} &\leq \frac{\Delta^2}{2^2\varepsilon_3}
\end{aligned}$$

Sendo ε_k uma sequência decrescente positiva, então ela cumpre o seguinte

$$\frac{1}{\varepsilon_1} < \frac{1}{\varepsilon_2};$$

e daí, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\Delta}{2\varepsilon_2} &\leq \frac{1}{2\varepsilon_2}(2+\Delta) && (3.64)\\
&\leq \frac{2}{2^2\varepsilon_2}(2+\Delta) && (3.65)\\
&\leq \frac{1}{2^2\varepsilon_3}(2(2+\Delta)) && (3.66)
\end{aligned}$$

usando (3.66), para provar a desigualdade desejada devemos ter

$$2(2+\Delta) \leq \Delta^2, \qquad (3.67)$$

o qual sempre se verifica para um Δ grande.

No caso geral, devemos verificar que

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{k-1} \leq \delta_k.$$

Mas da equação (3.62) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\frac{\Delta}{2^1\varepsilon_1} + \frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{2^2\varepsilon_2} + \frac{1}{4}\frac{\Delta^3}{2^3\varepsilon_3} + \cdots + \frac{1}{4}\frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\varepsilon_{k-1}} &\leq \frac{1}{4}\frac{\Delta^k}{2^k\varepsilon_k} \\
\frac{\Delta}{2^1\varepsilon_1} + \frac{\Delta^2}{2^2\varepsilon_2} + \frac{\Delta^3}{2^3\varepsilon_3} + \cdots + \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\varepsilon_{k-1}} &\leq \frac{\Delta^k}{2^k\varepsilon_k} \\
\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\Delta^1}{2\varepsilon_2} + \frac{\Delta^2}{2^2\varepsilon_3} + \cdots + \frac{\Delta^{k-2}}{2^{k-2}\varepsilon_{k-1}} &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\varepsilon_k} \\
\frac{1}{\varepsilon_k}\left(1 + \frac{\Delta^1}{2} + \frac{\Delta^2}{2^2} + \cdots + \frac{\Delta^{k-2}}{2^{k-2}}\right) &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\varepsilon_k} \\
\frac{1}{\varepsilon_k}\left(\frac{2^{k-2} + 2^{k-3}\Delta^1 + \cdots + 2\Delta^{k-3} + \Delta^{k-2}}{2^{k-2}}\right) &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\varepsilon_k} \\
\frac{1}{2^{k-2}\varepsilon_k}\left(\frac{\Delta^{k-1} - 2^{k-1}}{\Delta - 2}\right) &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\varepsilon_k}
\end{aligned}$$

ou seja, para provar (3.60) é necessário termos

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{\Delta^{k-1}-2^{k-1}}{\Delta-2}\right) &\leq \Delta^{k-1} && (3.68)\\
0 &\leq \Delta^{k-1}-2\left(\frac{\Delta^{k-1}-2^{k-1}}{\Delta-2}\right) && (3.69)\\
0 &\leq \frac{\Delta^{k-1}(\Delta-2)-2(\Delta^{k-1}-2^{k-1})}{\Delta-2} && (3.70)\\
0 &\leq \frac{\Delta^{k}-4\Delta^{k-1}+2^{k}}{\Delta-2} && (3.71)
\end{aligned}
$$

Assim, provar o caso geral é equivalente a provar (3.71), isto é

$$
0 \leq \Delta^{k}-4\Delta^{k-1}+2^{k}. \qquad (3.72)
$$

Notemos que

$$
\Delta^{k}-4\Delta^{k-1}+2^{k}=\Delta^{k-1}(\Delta-4)+2^{k} \qquad \text{, para } k\in\mathbb{Z}
$$

assim basta supor que $\Delta > 4$, e teremos a desigualdade desejada.

(ii) Agora, passemos a demonstrar a equação (3.51b), isto é

$$
\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon_j\delta_j \leq \varepsilon_k\delta_k,
$$

Mas pelas contas anteriores sabemos que para um $\Delta > 4$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \Delta^{k}-4\Delta^{k-1}+2^{k} \qquad , k\in\mathbb{Z} && (3.73)\\
0 &\leq \Delta^{k}-2\Delta^{k-1}-2\Delta^{k-1}+2^{k} && (3.74)\\
2\Delta^{k-1}-2^{k} &\leq \Delta^{k}-2\Delta^{k-1} && (3.75)\\
2(\Delta^{k-1}-2^{k-1}) &\leq \Delta^{k-1}(\Delta-2) && (3.76)\\
2\left(\frac{\Delta^{k-1}-2^{k-1}}{\Delta-2}\right) &\leq \Delta^{k-1}. && (3.77)
\end{aligned}
$$

Agora, queremos provar

$$
\varepsilon_1\delta_1+\varepsilon_2\delta_2+\cdots+\varepsilon_{k-1}\delta_{k-1} \leq \varepsilon_k\delta_k; \qquad (3.78)
$$

usaremos (3.77), e usando (3.58) ($\varepsilon_k\delta_k = \frac{1}{4\cdot 2^k}\psi(\delta_k) = \frac{1}{4\cdot 2^k}\Delta^k$) em (3.78), tem-se

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1}\delta_{k-1} &\leq \varepsilon_k\delta_k \\
\frac{1}{4}\frac{\Delta}{2^1} + \frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{2^2} + \frac{1}{4}\frac{\Delta^3}{2^3} + \cdots + \frac{1}{4}\frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}} &\leq \frac{1}{4}\frac{\Delta^k}{2^k} \\
\frac{\Delta}{2^1} + \frac{\Delta^2}{2^2} + \frac{\Delta^3}{2^3} + \cdots + \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}} &\leq \frac{\Delta^k}{2^k} \\
1 + \frac{\Delta^1}{2} + \frac{\Delta^2}{2^2} + \cdots + \frac{\Delta^{k-2}}{2^{k-2}} &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}} \\
\left(1 + \frac{\Delta^1}{2} + \frac{\Delta^2}{2^2} + \cdots + \frac{\Delta^{k-2}}{2^{k-2}}\right) &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}} \\
\left(\frac{2^{k-2} + 2^{k-3}\Delta^1 + \cdots + 2\Delta^{k-3} + \Delta^{k-2}}{2^{k-2}}\right) &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}} \\
\frac{1}{2^{k-2}}\left(\frac{\Delta^{k-1} - 2^{k-1}}{\Delta - 2}\right) &\leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}},
\end{aligned}$$

e por (3.77) temos que é verdadeira, então vale (3.78).

(iii) Provaremos, agora, a equação (3.51c)

$$M_1\sum_{j=1}^{k-1} j\varepsilon_j\delta_j \leq k\varepsilon_k\delta_k.$$

Como nos casos anteriores vejamos quais condições são necessárias para termos (3.51c).

Assim, usando $\varepsilon_k\delta_k = \frac{1}{4\cdot 2^k}\psi^{-1}(\delta_k) = \frac{1}{4\cdot 2^k}\Delta^k$,

$$\begin{aligned}
M_1\sum_{j=1}^{k-1} j\varepsilon_j\delta_j &\leq k\varepsilon_k\delta_k \\
M_1\left(\frac{1}{4}\frac{\Delta}{2^1} + \frac{2}{4}\frac{\Delta^2}{2^2} + \frac{3}{4}\frac{\Delta^3}{2^3} + \cdots + \frac{(k-1)}{4}\frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}}\right) &\leq k\frac{1}{4}\frac{\Delta^k}{2^k} \\
M_1\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{2} + 2\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \cdots + (k-1)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{k-1}\right) &\leq k\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^k \\
M_1\left(1 + 2\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \cdots + (k-1)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{k-2}\right) &\leq k\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{k-1};
\end{aligned}$$

vemos que o lado esquerdo é igual a derivada da seguinte expressão, com respeito a Δ,

$$M_1\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{k-1}\right)' \leq \left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^k\right)'$$

integrando com respeito a Δ,

$$M_1 \int_0^{\Delta} \left(\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{k-1} \right)' d\Delta \leq \int_0^{\Delta} \left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^k \right)' d\Delta$$

$$\left(\frac{M_1\Delta}{2}\right) \left[1 + \left(\frac{\Delta}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{k-2} \right] \leq \left(\frac{\Delta}{2}\right)^k$$

$$\left(\frac{M_1\Delta}{2}\right) \left[\frac{(\Delta/2)^{k-3} - 1}{(\Delta/2) - 1} \right] \leq \left(\frac{\Delta}{2}\right)^k$$

$$\left(\frac{M_1\Delta}{2}\right) \left[\frac{\Delta^{k-3} - 2^{k-3}}{\Delta - 2} \right] \cdot \frac{2}{2^{k-3}} \leq \frac{\Delta^k}{2^k}$$

$$M_1 \left[\frac{\Delta^{k-3} - 2^{k-3}}{\Delta - 2} \right] \leq \frac{\Delta^{k-1}}{2^3}$$

$$2^3 M_1 \left(\Delta^{k-3} - 2^{k-3} \right) \leq \Delta^{k-1} (\Delta - 2).$$

Resumindo, é necessário ter

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Delta^{k-1}(\Delta - 2) - 2^3 M_1 \left(\Delta^{k-3} - 2^{k-3} \right) \\ 0 &\leq \Delta^k - 2\Delta^{k-1} - 2^3 M_1 \Delta^{k-3} + 2^k M_1 \\ 0 &\leq \Delta^{k-3} \left(\Delta^2(\Delta - 2) - 2^3 M_1 \right) + 2^k M_1. \end{aligned}$$

Então, para um Δ adequado tal que $0 < \Delta^2(\Delta - 2) - 2^3 M_1$ a última equação sempre é válida para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Assim, temos que

$$M_1 \sum_{j=1}^{k-1} j\varepsilon_j \delta_j \leq k\varepsilon_k \delta_k. \tag{3.79}$$

(iv) Nesta outra etapa provaremos a existência da sequência ε_k decrescente, positiva, convergente para zero.

De fato, considerando (3.58) temos:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{4 \cdot 2^k} \frac{\psi(\delta_k)}{\delta_k}. \tag{3.80}$$

Provaremos que ε_k é decrescente, positiva e convergente para zero.

Para o caso, $k = 1$

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \qquad \text{isto é} \qquad \frac{\Delta^2}{2^2 \psi^{-1}(\Delta^2)} < \frac{\Delta}{2\psi^{-1}(\Delta)}$$

em geral devemos ter

$$\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k \qquad \text{isto é} \qquad \frac{\Delta^{k+1}}{2^{k+1}\psi^{-1}(\Delta^{k+1})} < \frac{\Delta^k}{2\psi^{-1}(\Delta^k)}$$

Vejamos quais condições são necessárias para ter o caso geral. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\psi^{-1}(\Delta^{k-1})} &\leq \frac{\Delta^k}{2^k\psi^{-1}(\Delta^k)} && \text{então}\\
0 &< \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}\psi^{-1}(\Delta^{k-1})} - \frac{\Delta^k}{2^k\psi^{-1}(\Delta^k)} && \text{o que implica}\\
0 &< \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{\psi^{-1}(\Delta^{k-1})} - \frac{\Delta}{2\psi^{-1}(\Delta^k)}\right) && \text{e consequentemente,}\\
0 &< \frac{\Delta^{k-1}}{2^{k-1}}\left(\frac{2\psi^{-1}(\Delta^k) - \Delta\psi^{-1}(\Delta^{k-1})}{2\psi^{-1}(\Delta^k)\psi^{-1}(\Delta^{k-1})}\right);
\end{aligned}$$

então, tudo depende em provar que

$$0 < 2\psi^{-1}(\Delta^k) - \Delta\psi^{-1}(\Delta^{k-1}) \quad \text{, ie,} \tag{3.81}$$

$$\Delta\psi^{-1}(\Delta^{k-1}) < 2\psi^{-1}(\Delta^k). \tag{3.82}$$

Para k=2, devemos ter

$$\begin{aligned}
0 &< 2\psi^{-1}(\Delta^2) - \Delta\psi^{-1}(\Delta) \qquad \text{, isto é}\\
\Delta\psi^{-1}(\Delta) &< 2\psi^{-1}(\Delta^2);
\end{aligned}$$

mas pelo convexidade de ψ, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\psi^{-1}(\Delta^2)}{\Delta^2} &\leq \frac{\psi^{-1}(\Delta^2) - \psi^{-1}(\Delta)}{\Delta(\Delta-1)} \Rightarrow\\
\psi^{-1}(\Delta^2)(\Delta-1) &\leq \Delta(\psi^{-1}(\Delta^2) - \psi^{-1}(\Delta)) \Rightarrow\\
\Delta\psi^{-1}(\Delta^2) - \psi^{-1}(\Delta^2) &\leq \Delta\psi^{-1}(\Delta^2) - \Delta\psi^{-1}(\Delta) \Rightarrow\\
\Delta\psi^{-1}(\Delta) &\leq \psi^{-1}(\Delta^2) \Rightarrow\\
\Delta\psi^{-1}(\Delta) &\leq 2\psi^{-1}(\Delta^2).
\end{aligned}$$

No caso geral de maneira similar, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\psi^{-1}(\Delta^{k+1})}{\Delta^{k+1}} &\leq \frac{\psi^{-1}(\Delta^{k+1}) - \psi^{-1}(\Delta^k)}{\Delta^k(\Delta-1)} \Rightarrow\\
\frac{\psi^{-1}(\Delta^{k+1})}{\Delta} &\leq \frac{\psi^{-1}(\Delta^{k+1}) - \psi^{-1}(\Delta^k)}{(\Delta-1)} \Rightarrow\\
\psi^{-1}(\Delta^{k+1})(\Delta-1) &\leq \Delta\left(\psi^{-1}(\Delta^{k+1}) - \psi^{-1}(\Delta^k)\right) \Rightarrow\\
\Delta\psi^{-1}(\Delta^{k+1}) - \psi^{-1}(\Delta^{k+1}) &\leq \Delta\psi^{-1}(\Delta^{k+1}) - \Delta\psi^{-1}(\Delta^k),
\end{aligned}$$

e assim

$$\Delta\psi^{-1}(\Delta^k) \leq 2\psi^{-1}(\Delta^{k+1}).$$

Assim para garantir que δ é inteiro fazemos

$$\delta_k = \left[\psi^{-1}(\Delta_k)\right] + 1, \tag{3.83}$$

onde ψ^{-1} é a função inversa de ψ, $[x]$ é a parte inteira de x e Δ é escolhido suficientemente grande; daí que ε_k é decrescente, positiva que converge a zero.

Etapa 5: Agora, provaremos que $\limsup_{t\to+\infty}\dot{E}_s(u)(t) = +\infty$, para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Para isto definimos a solução $u \in C^\infty([0,\infty); H^s(\mathbf{T}))$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$ de $Lu = 0$(onde $L = \partial_t^2 - a(t)\partial_x^2$) como na demonstração do teorema anterior. Procuramos a solução dada por (3.22), com (3.23) e (3.24), onde definimos $t_k = (t_k'' + t_k')/2$, o ponto médio de I_k. As igualdades (3.25) e (3.26) tornam-se:

$$v_k(t_k') = \exp(-2\pi k\varepsilon_k\delta_k), \qquad \nu_k'(t_k') = 0, \tag{3.84}$$

$$v_k(t_k'') = \exp(2\pi k\varepsilon_k\delta_k), \qquad \nu_k'(t_k'') = 0. \tag{3.85}$$

De forma similar à demonstração do Teorema 3.1.1, temos:

$$\int_{J_j} \frac{|a'(t)|}{a(t)}dt = 0, \qquad \int_{I_j} \frac{|a'(t)|}{a(t)}dt \leq 8\pi M_1 j\varepsilon_j\delta_j; \tag{3.86}$$

de fato, pois $a(t) = 1$ em J_j e, agora, no segundo caso para $t \in I_j$; temos que

$$|a'(t)| = \left|\alpha_{\varepsilon_j}'(4\pi\nu_j t)\right|(4\pi\nu_j) \leq \varepsilon_j M_1 4\pi\nu_j, \qquad 1/2 \leq a(t) \leq 3/2$$
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|a'(t)|}{a(t)} \leq 8\pi M_1\nu_j\varepsilon_j \Rightarrow \int_{I_j}\frac{|a'(t)|}{a(t)} \leq 8\pi M_1 j\varepsilon_j\delta_j,$$

e de maneira análoga definimos E_k como em (3.28),

$$E_k(t) = |v_k'(t)|^2 + \nu_k^2 a(t)|v_k(t)|^2, \qquad \text{para } t \leq t_k'. \tag{3.87}$$

Diferenciando acima e usando o lema de Gronwall temos:

$$
\begin{aligned}
E_k(t) &\leq E_k(t_k') \exp\left[\int_0^{t_k'} \frac{|a'(t)|}{a(t)} dt\right] = \\
&= \nu_k^2 \exp\left[-4\pi\varepsilon_k\nu_k\delta_k + \sum_{j=1}^{k-1}\int_{I_j}\frac{|a'(t)|}{a(t)}dt\right] \\
&= \exp\left[-4\pi\varepsilon_k\nu_k\delta_k + \sum_{j=1}^{k-1}\int_{I_j}\frac{|a'(t)|}{a(t)}dt + 2\log\nu_k\right].
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

Logo, multiplicando por ν_k^s e como $4\pi\nu_k = k$ em (3.88), temos

$$
\begin{aligned}
E_k(t)k^s &= \exp\left[-4\pi\varepsilon_k\nu_k\delta_k + \sum_{j=1}^{k-1}\int_{I_j}\frac{|a'(t)|}{a(t)}dt + (2+s)\log\nu_k\right], \\
&\leq \exp\left[-4\pi\varepsilon_k\nu_k\delta_k + \sum_{j=1}^{k-1} 8\pi M_1 j\varepsilon_j\delta_j + (2+s)\log\nu_k\right];
\end{aligned} \tag{3.89}
$$

fazendo uso de (3.11), (3.13) e (3.56),

$$
\begin{aligned}
E_k(t)k^s &\leq \exp\left[-4\pi k\varepsilon_k\delta_k + 8\pi M_1\sum_{j=1}^{k-1} j\varepsilon_j\delta_j + (2+s)\log(k)\right], \\
&\leq \exp\left[-4\pi k\varepsilon_k\delta_k + 8\pi k\varepsilon_k\delta_k + (2+s)\log(k)\right], \\
&\leq \exp\left[4k\varepsilon_k\delta_k + (2+s)\log(k)\right].
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

Para obter (3.50) consideramos a energia definida em (3.36)

$$\widetilde{E}_k(t) = |v_k'(t)|^2 + \nu_k^2 |v_k(t)|^2 .$$

Usando (3.85), temos:

$$\widetilde{E}_k(t_k'') = \nu_k^2 e^{4\pi k\varepsilon_k\delta_k},$$

e fazendo $k \to \infty$,

$$\limsup_{k\to+\infty} \widetilde{E}(t_k'') = +\infty.$$

Então, temos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \dot{E}_s(u)(t) = +\infty \qquad \text{, para qualquer } s \in \mathbb{R};$$

De (3.51) e (3.90) segue como no Teorema 3.1.1, que u definida como em (3.22), temos $u \in C^\infty([0,\infty), H^s(\mathbf{T}))$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

■

Observação 3.2.2. *A diferença do Teorema 3.2.1 com o Teorema 3.1.1 está em que*

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_k(t) \geq & \widetilde{E}_k(t''_k) \exp\left[-\nu_k \int_{t''_k}^{+\infty} |1-a(t)|\, dt\right] = \\ = & \nu_k^2 \exp\left[4\pi\varepsilon_k\nu_k - \nu_k \sum_{j=k+1}^{+\infty} \int_{I_j} |1-a(t)|\, dst\right] \\ = & \nu_k^2 \exp\left[4\pi\varepsilon_k\nu_k - \nu_k \sum_{j=k+1}^{+\infty} M\varepsilon_j\delta_j\right],\end{aligned} \tag{3.91}$$

multiplicando por k^s temos

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_k(t)k^s \geq & \exp\left[4\pi\varepsilon_k\nu_k - kM \sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_j\delta_j + (2+s)\log k\right] \\ \geq & \exp\left[4\pi\varepsilon_k\nu_k - kM\varepsilon_k\delta_k + (2+s)\log k\right].\end{aligned} \tag{3.92}$$

isto no Teorema 3.2.1.

Capítulo 4

Apêndice

Afirmação 4.1. $B = N'N^{-1}$ *é limitado com a norma* $\|\cdot\|$.

Demonstração: De fato, sendo

$$N = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{a(t)}} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{a(t)} & -\sqrt{a(t)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos

$$B = N' \cdot N^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a'(t)}{4a(t)^{3/2}} & \dfrac{a'(t)}{4a(t)^{3/2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a(t)} & -\sqrt{a(t)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{a'(t)}{4a(t)} - \dfrac{a'(t)}{4a(t)^{3/2}} & \dfrac{a'(t)}{4a(t)} + \dfrac{a'(t)}{4a(t)^{3/2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{a'(t)}{4a(t)} - \dfrac{a'(t)}{4a(t)^{3/2}} & \dfrac{a'(t)}{4a(t)} + \dfrac{a'(t)}{4a(t)^{3/2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Sendo $a(t)$ Lipschitz segue do Teorema 1.2.6 que ela é diferenciável q.t.p, e como $t \in [0, T]$ segue que $a'(t)$ é limitado, usando isto e que $0 < \lambda \leq a(t) \leq \Lambda$, segue que cada b_{ij} (onde $B = (b_{ij})$) é limitado, logo segue Afirmação 4.1. ■

Afirmação 4.2. *Existe uma função real φ, C^∞,2π-periódica, tal que $\varphi(\tau) = 0$ para τ numa vizinhança de $\tau = 0$.*

Demonstração: Primeiro consideremos a função teste centrada em π

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(\tau-\pi)^2-1}\right) & , \text{ se } |\tau - \pi| < 1, \\ 0 & , \text{ se } |\tau - \pi| \geq 1, \end{cases}$$

tal que para $h = 0, 1, 2, \ldots$ temos

$$\left|\psi^{(h)}(\tau)\right| \leq A_{h+1}. \tag{4.1}$$

Veja [9].

Logo, considerando a seguinte função

$$\varphi(\tau) = \{\psi(\tau - 2\pi k)), \text{ se } \tau \in [2\pi k, 2\pi(k+1)], \ k \in \mathbb{Z}\}, \tag{4.2}$$

segue-se de (4.1)

$$\left|\varphi^{(h)}(\tau)\right| \leq A_{h+1} \qquad , \ h = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{4.3}$$

Assim temos uma função $2\pi-$periódica C^∞, nula numa vizinhança de 0, valendo a estimativa (4.3) ■

Afirmação 4.3. *Seja $\alpha_\varepsilon(\tau)$ dado em* (3.9), *então existe $0 < \widetilde{\varepsilon}$ tal que, para todo $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$, tem-se*

$$\frac{1}{2} \leq \alpha_\varepsilon(\tau) \leq \frac{3}{2}. \tag{4.4}$$

e $\alpha_\varepsilon(\tau)$, é 2π-periódica.

Demonstração: Para ter (4.4) é equivalente a provar

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| \leq \frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

Mas sabemos que

$$\alpha_\varepsilon(\tau) = 1 + 4\varepsilon\varphi(\tau)\sin(2\tau) - 2\varepsilon\varphi'(\tau)\cos^2(\tau) - 4\varepsilon^2\varphi^2(\tau)\cos^4(\tau). \tag{4.6}$$

Logo para determinar $\widetilde{\varepsilon}$, primeiro damos as seguintes estimativas que seguem de (4.3)

$$|4\varepsilon\varphi(\tau)\sin(2\tau)| \leq 4\varepsilon A_1, \tag{4.7a}$$

$$-2A_2\varepsilon \leq -2\varepsilon\varphi'(\tau)\cos^2(\tau) \leq 0, \tag{4.7b}$$

$$-4A_1^2\varepsilon^2 \leq -4\varphi^2(\tau)\cos^4(\tau) \leq 0. \tag{4.7c}$$

De (4.7a), (4.7b), (4.7c), temos

$$-4A_1\varepsilon - 2A_2\varepsilon - 4A_1^2\varepsilon^2 \leq \alpha_\varepsilon(\tau) - 1 \leq 4\varepsilon A_1, \tag{4.8}$$

Logo fazendo a escolha

$$\widetilde{\varepsilon} = \min\left\{\frac{1}{8A_1}, \frac{-2(A_2+2A_1) + \sqrt{4(A_2+2A_1)^2 + 8A_1^2}}{8A_1}\right\}. \tag{4.9}$$

Segue de (4.6), que para todo $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$, tem-se

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Agora, usando o fato que φ e φ' são 2π-periódicas e as funções cos e sin também o são segue-se que $\alpha_\varepsilon(\tau)$ é 2π-periódica

$$\begin{aligned}
\alpha_\varepsilon(\tau+2\pi) =& 1 + 4\varepsilon\varphi(\tau+2\pi)\sin(2(\tau+2\pi)) - 2\varepsilon\varphi'(\tau+2\pi)\cos^2(\tau+2\pi) \\
& - 4\varepsilon^2\varphi^2(\tau+2\pi)\cos^4(\tau+2\pi) \\
=& 1 + 4\varepsilon\varphi(\tau)\sin(2\tau) - 2\varepsilon\varphi'(\tau)\cos^2(\tau) - 4\varepsilon^2\varphi^2(\tau)\cos^4(\tau) \\
=& \alpha_\varepsilon(\tau).
\end{aligned}$$

■

Afirmação 4.4. *Sejam as contantes M e M_h tal que, para $h = 1, 2, \ldots,$ tem-se para todo $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$:*

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| \leq M\varepsilon, \tag{4.10a}$$

$$\left|\alpha_\varepsilon^{(h)}(\tau)\right| \leq M_h\varepsilon. \tag{4.10b}$$

Demonstração: Para demonstrar (4.10a) de (4.6) segue

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| = \left|4\varepsilon\varphi(\tau)\sin(2\tau) - 2\varepsilon\varphi'(\tau)\cos^2(\tau) - 4\varepsilon^2\varphi^2(\tau)\cos^4(\tau)\right|, \tag{4.11}$$

e de (4.8),

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| \leq 4A_1\varepsilon + 2A_2\varepsilon + 4A_1^2\varepsilon^2. \tag{4.12}$$

Logo, para ter (4.10a) escolhemos $M > 2(2A_1 + 1) > 0$ e $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{M - 2(2A_1+1)}{4A_1^2}$.

Agora para demonstrar (4.10b), fazemos por indução.

Primeiro para $h = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha_\varepsilon'(\tau) &= 4\varepsilon\varphi'(\tau)\sin(2\tau) + 4\varepsilon\varphi(\tau)2\sin(2\tau)\cos(2\tau) - 2\varepsilon\varphi''(\tau)\cos^2(\tau) - \\ &- 2\varepsilon\varphi'(\tau)2\cos(\tau)(-\sin(\tau)) + 8\varepsilon^2\varphi(\tau)\varphi'(\tau)\cos^4(\tau) - \\ &- 4\varepsilon^2\varphi^2(\tau)4\cos^3(\tau)(-\sin(\tau)), \end{aligned} \tag{4.13}$$

logo, segue de (4.3) em (4.13) que

$$|\alpha_\varepsilon'(\tau)| \leq 4\varepsilon B_1 + 8\varepsilon B_2 + 2\varepsilon B_3 + 4\varepsilon B_4 + 8\varepsilon^2 B_5 + 16\varepsilon^2 B_6 \tag{4.14}$$

fazendo $C_1 = 4B_1 + 8B_2 + 2B_3 + 4B_4$ e $C_2 = 8B_5 + 16B_6$. Escolhemos $M_1 > C_1 > 0$, e $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{M_1 - C_1}{C_2}$.

Assim temos que para todo $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$ segue (4.10b). Então para $h = 1$ é verdade.

Agora suponhamos que vale para $h = k$ inteiro, isto é, existe um M_k e $\widetilde{\varepsilon}$ tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$ segue-se (4.10b),

$$\left|\alpha_\varepsilon^{(k)}(\tau)\right| \leq M_k\varepsilon.$$

onde

$$\alpha_\varepsilon^{(k)}(\tau) = b_1(\tau)\varepsilon + b_2(\tau)\varepsilon^2, \tag{4.15}$$

tal que b_1 e b_2 são limitado (segue-se de (4.3)).

Agora demonstremos que para $h = k + 1$ é verdade (4.10b).

Com efeito de (4.15), temos que

$$\alpha_\varepsilon^{(k+1)}(\tau) = c_1(\tau)\varepsilon + c_2(\tau)\varepsilon^2, \tag{4.16}$$

onde $|c_1(\tau)| \leq d_1$ e $|c_2(\tau)| \leq d_2$ são limitados (segue-se de (4.3)), então temos:

$$\left|\alpha_\varepsilon^{(k+1)}(\tau)\right| \leq d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2. \tag{4.17}$$

Então para ter (4.10b), escolhemos $M_{k+1} > d_1$ e $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{M_{k+1} - d_1}{d_2}$.

Assim temos para todo $0 < \varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$, de (4.17) e da escolha de M_{k+1}, segue-se:

$$\left|\alpha_\varepsilon^{(k+1)}(\tau)\right| \leq M_{k+1}\varepsilon.$$

■

Afirmação 4.5.

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 1$$

Demonstração: De fato sendo

$$a(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in J_k, \ k \in \mathbb{N}, \\ \alpha_{\varepsilon_k}(4\pi\nu_k t) & , \ t \in I_k, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.18}$$

Assim, bastará demonstrar que

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_\varepsilon(t) = 1.$$

Mas pela estimativa (4.10a), temos que, dado um $\varepsilon_1 > 0$, se $\varepsilon_1 > \widetilde{\varepsilon}$ segue que

$$|\alpha_\varepsilon(\tau) - 1| \leq M\varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}M < \varepsilon_1 M.$$

Por outro lado se $0 < \varepsilon_1 < \widetilde{\varepsilon}$ segue de (4.10a)

$$|\alpha_{\varepsilon_1}(\tau) - 1| \leq M\varepsilon_1,$$

demonstrando assim a Afirmação. ■

Referências Bibliográficas

[1] Colombini, F. (2006). Energy estimates at infinity for hyperbolic equations with oscillating coefficients. *Journal of Differential Equation*.

[2] Colombini, F., E. D. Giorgi, and S. Spagnolo (1979). Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci 6*, 511–559.

[3] Colombini, F., E. Janelli, and S. Spagnolo (1987). Nonuniqueness in hyperbolic cauchy problems. *Ann. of Math 126*, 495–524.

[4] Colombini, F., E. Jannelli, and S. Spagnolo (1983). Well-posedness in the gevrey classes of the cauchy problem for a nonstrictly hyperbolic equation with coefficients depending on time. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci 10*, 291–312.

[5] Colombini, F. and N. Lerner (1995). Hyperbolic operators with non-lipschitz coefficients. *Duke Math J. 77*, 657–698.

[6] Evans, L. C. and R. F. Gariepy (1992). *Measure theory and fine properties of functions.* Jhon Wiley & Sons, INC.

[7] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis.* Jhon Wiley & Sons, INC.

[8] Hirosawa and Fumihiko (2007). On the asymptotic behavior of the energy for the wave equations with time depending coefficients. *Mathematische Annalen 339*, 819–838.

[9] Hounie, J. (1970). *Teoria Elementar das Distribuições.* 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Brasil.

[10] Hörmander, L. (1963). *Linear Partial Differential Equations.* Spring-Verlag, Berlim.

[11] Iorio, R. J. (2001). *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* IMPA.

[12] Mizohata, S. (1973). *The Theory of Partial Differential Equations* (2da ed.). Cambridge Univ. Press.

[13] Reissing, M. and J. Smith (2005). $l^p - l^q$ estimate for wave equation with bounded time dependent coefficient. *Hokkaido Mathematische Journal 34*, 541–586.

[14] Rudin, W. (1974). *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill.