

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Teorema de Schur no Plano de Minkowski e
caracterização de Hélices Inclínadas no Espaço de
Minkowski.**

Luciano de Melo Ramos

Orientador: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

São Carlos - SP

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Teorema de Schur no Plano de Minkowski e
caracterização de Hélices Inclinadas no Espaço de
Minkowski.**

Luciano de Melo Ramos

Orientador: Prof. Dr. Guillermo A. Lobos Villagra

Dissertação apresentada ao
PPG-M da UFSCar como
parte dos requisitos para ob-
tenção do título de Mestre em
Matemática.

São Carlos - SP

Junho 2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

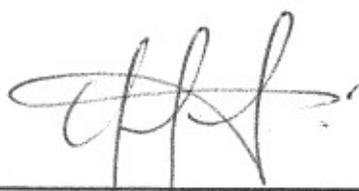
R175ts Ramos, Luciano de Melo.
Teorema de Schur no plano de Minkowski e
caracterização de hélices inclinadas no espaço de
Minkowski / Luciano de Melo Ramos. -- São Carlos :
UFSCar, 2013.
67 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2013.

1. Geometria. 2. Geometria de Minkowski. 3. Schur,
Teorema de. 4. Hélices. I. Título.

CDD: 516 (20^a)

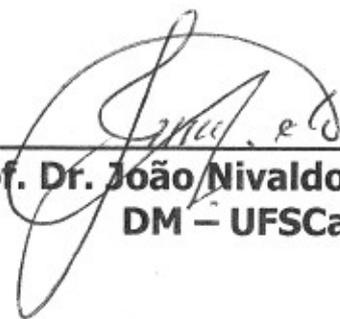
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
DM – UFSCar



Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
UFAL



Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
DM – UFSCar

Dedico este trabalho primeiramente a Deus. Dedico também à minha família, em especial à minha mãe.

Agradecimentos

Primeiro a Deus por tudo.

À minha família, em especial à minha mãe que acreditou em mim até quando eu mesmo não acreditava.

Aos professores Guillermo Antonio Lobos Villagra e João Nivaldo Tomazella, pelas orientações matemáticas que precisava, pela humildade com que escutaram as minhas idéias sobre a dissertação e pelas muitas vezes que entenderem os meus problemas pessoais e me ajudaram ou aconselharam.

Por fim, aos colegas, professores do Departamento de Matemática da UFSCar, ao senhor Luís Veloso e família por todo apoio nestes anos em São Carlos.

Resumo

Um resultado clássico da geometria diferencial de curvas no espaço euclidiano é o Teorema de Schur, que primeiro foi provado em 1921 por A. Schur em [3] no caso em que as curvaturas das curvas coincidem pontualmente. O caso geral do teorema foi provado em 1925 por E. Schmidt em [4]. O primeiro objetivo desta dissertação é apresentar uma versão do Teorema de Schur para o plano de Minkowski. Em seguida, mostraremos algumas aplicações desse resultado feitas por R. López em [1]. No caso do espaço de Minkowski veremos que o Teorema de Schur é falso. O segundo objetivo é mostrar uma caracterização das hélices inclinadas no espaço de Minkowski obtidas por A. T. Ali e R. López em [2], a qual estende de forma natural a caracterização de hélices inclinadas no espaço euclidiano obtida em 2004 por S. Izumiya e N. Takeuchi [6]. Concluimos esta dissertação provando uma caracterização de hélices inclinadas obtida em [2].

Abstract

A classical theorem of differential geometry of curves in Euclidean space is the Schur's Theorem, that was proof by A. Schur in 1921, when both curvatures agree pointwise [3]. The proof in the general case was proved in 1925 by E. Schmidt in [4]. The first objective in this dissertation is to present Lorentzian version of Schur's Theorem in the Minkowski plane. Then we will show some applications due to R. López [1]. In the Minkowski space we will see that the Schur's Theorem is false. The second objective is show a characterization of slant helices in the Minkowski space obtained by A. T. Ali and R. López in [2], which extends naturally a characterization of slant helices in Euclidean space obtained in 2004 by S. Izumiya And N. Takeuchi [6]. We conclude with an application that characterization of slant helices [2].

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{E}_1^n	3
1.2 Transformações de Lorentz.	10
1.3 Produto Vetorial em \mathbb{E}_1^3 .	17
1.4 Geometria de Curvas em \mathbb{E}_1^n	21
1.5 Teoria local das Curvas Planas em \mathbb{E}_1^2 .	25
1.6 Teoria Local das Curvas Espaciais em \mathbb{E}_1^3 .	35
2 O Teorema de Schur no Plano de Minkowski	41
2.1 O Teorema de Schur no Plano de Minkowski	41
2.2 Aplicações do Teorema de Schur	52
3 Uma Caracterização de Hélices Inclinadas em \mathbb{E}_1^3.	55
3.1 Hélices Inclinadas em \mathbb{E}_1^3 .	55
3.2 Indicatrizes de uma Hélice Inclinada não nula	64
Referências Bibliográficas	66

Introdução

Nesta dissertação estudamos os trabalhos de López [1] e Ali-López [2], publicados em 2004 e 2011, respectivamente. Apresentados resultados de curvas no plano e no espaço de Minkowski que estendem resultados clássicos válidos para curvas no plano e no espaço euclidiano tridimensional. Assim iniciamos o capítulo 1 introduzindo o espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão n , \mathbb{E}_1^n , que é o espaço vetorial \mathbb{R}^n munido de um produto escalar de índice 1. Destacamos as principais definições, propriedades e também mostramos alguns resultados básicos da geometria diferencial de curvas em \mathbb{E}_1^n , com a finalidade de distingui-la da geometria diferencial de curvas no espaço euclidiano. Estas diferenças ocorrem devido ao caráter causal da curva no espaço de Lorentz-Minkowski. Por exemplo, no espaço euclidiano tridimensional o Teorema fundamental de curvas diz que, a menos de isometrias, toda curva está unicamente determinada pela sua curvatura e torção. No entanto, no espaço de Minkowski existem curvas que possuem somente torção. Tal fato, ocorre com curvas tipo-luz e curvas tipo-espaço com vetor aceleração tipo-luz.

No segundo capítulo, enunciamos o resultado clássico conhecido como Teorema de Schur no espaço euclidiano tridimensional, provado por A. Schur, em 1921, [3], quando as curvaturas são iguais ponto a ponto. O caso geral foi provado por E. Schmidt em 1925, [4]. Em seguida, mostramos através de contra-exemplos que não existe uma versão do Teorema de Schur no espaço de Minkowski, devido a R. López em [1]. Posteriormente, demonstramos para o plano euclidiano, a seguinte versão do Teorema de Schur para duas curvas convexas, que pode ser encontrado em [5].

Teorema *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas convexas, parametrizadas pelo comprimento de arco. Denotemos por k_1, k_2 as funções curvaturas de α_1 e α_2 , respectivamente. Considere $d_1(s) = d(\alpha_1(0), \alpha_1(s))$ e $d_2(s) = d(\alpha_2(0), \alpha_2(s))$, onde $d(., .)$ é a distância euclidiana de \mathbb{R}^2 . Se $k_1(s) \geq k_2(s)$, então, $d_1(s) \leq d_2(s)$, $s \in [0, l]$. Além disso, $d_1(s) = d_2(s)$ para todo $s \in [0, l]$ se, e somente se, α_1 e α_2 são congruentes.*

Terminamos o segundo capítulo, com a versão do Teorema de Schur no plano de Minkowski de R. López [1].

Teorema *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco convexas. Denotemos por k_1, k_2 as funções curvaturas de α_1 e α_2 , respectivamente. Sejam $d_1(s) = d(\alpha_1(0), \alpha_1(s))$ e $d_2(s) = d(\alpha_2(0), \alpha_2(s))$, onde $d(., .)$ é a distância euclidiana de \mathbb{R}^2 . Se $k_1(s) \geq k_2(s)$, então, $d_1(s) \leq d_2(s)$, $s \in [0, l]$. Além disso, $d_1(s) = d_2(s)$ para todo $s \in [0, l]$ se, e somente se, α_1 e α_2 são congruentes.*

No terceiro capítulo, são apresentadas hélices e hélices inclinadas no espaços euclidiano e de Minkowski, respectivamente. As definições no espaço de Minkowski são baseadas nas caracterizações de hélices e hélices inclinadas feitas com o produto interno euclidiano, uma vez que, a definição de ângulo entre vetores no espaço de Lorentz-Minkowski não existe. Apresentamos e demonstramos a seguinte caracterização para hélices inclinadas no espaço euclidiano tridimensional feita por S. Izumyia e N. Takeuchi [6].

Teorema *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $k(s) \neq 0$, $s \in I$ e torção τ . Então α é hélice inclinada se, e somente se, a função*

$$g(s) = \frac{k^2}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k} \right)' (s)$$

é constante em todo ponto do intervalo de definição da curva.

Ainda no terceiro capítulo mostramos, conforme R. López em [2], que independente do caráter causal, as hélices inclinadas no espaço de Minkowski também possuem uma caracterização, as quais usamos para mostrar que as indicatrizes tangente e binormal de hélices inclinadas não nulas com vetor normal não nulo são hélices unitárias em \mathbb{E}_1^3 .

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{E}_1^n

Ao longo deste trabalho consideramos um *produto escalar*, como sendo uma aplicação bilinear, simétrica e não degenerada sobre um espaço vetorial. Um *produto interno* é um produto escalar positivo definido.

Exemplo 1.1. *A Geometria Diferencial Clássica é desenvolvida no Espaço Euclidiano de dimensão n , constituído do espaço vetorial \mathbb{R}^n munido com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que para os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas (x_1, \dots, x_n) , (y_1, \dots, y_n) , respectivamente, em relação à base canônica é definido por,*

$$\langle u, v \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Exemplo 1.2. *Um exemplo de produto escalar que não é produto interno é dado pela aplicação $\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que associa para os vetores $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ o valor,*

$$u \bullet v = (x_1, \dots, x_n) \bullet (y_1, \dots, y_n) = x_1y_1 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n.$$

Note que a bilinearidade e a simetria da aplicação são consequências da distributividade e da comutatividade do corpo \mathbb{R} , respectivamente. Além disso, se

$u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é não nulo, ao menos um x_i é diferente de zero, então $u \cdot e_i = \epsilon_i x_i$, onde $\epsilon_i = 1$ se $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ou $\epsilon_i = -1$, se $i = n$, portanto, \cdot é não-degenerada. Este produto escalar não é positivo definido, pois, $e_n \cdot e_n = -1$.

O índice de um produto escalar $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a dimensão do maior subespaço $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $g(w, w) < 0$, para todo $w \in W$ (veja mais sobre o índice de um produto escalar em [5] pag. 47). Todo produto interno tem índice 0. O índice do produto escalar \cdot do Exemplo 1.2 é 1.

O espaço vetorial \mathbb{R}^n , munido do *produto escalar lorentziano* definido no Exemplo 1.2 é chamado *espaço de Lorentz-Minkowski* de dimensão n e é denotado por \mathbb{E}_1^n . Os espaços \mathbb{E}_1^2 e \mathbb{E}_1^3 , são chamados de *plano de Minkowski* e *espaço de Minkowski*, respectivamente. A *norma lorentziana* de um vetor v em \mathbb{E}_1^n é o número real $\|v\| = \sqrt{|v \cdot v|}$.

Um vetor $v \in \mathbb{E}_1^n$ é chamado *tipo-espaço* quando v é o vetor nulo ou $v \cdot v > 0$, é chamado *tipo-tempo* se $v \cdot v < 0$ e *tipo-luz* se $v \neq 0$ e $v \cdot v = 0$. O *Caráter Causal* de um vetor em \mathbb{E}_1^n é a propriedade de ser tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz. Os vetores tipo-luz estão no hipercone $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0\}$. O lugar geométrico dos vetores tipo-luz é o conjunto $C^{n-1} = C - \{0\}$, chamado *Cone de Luz de Einstein*.

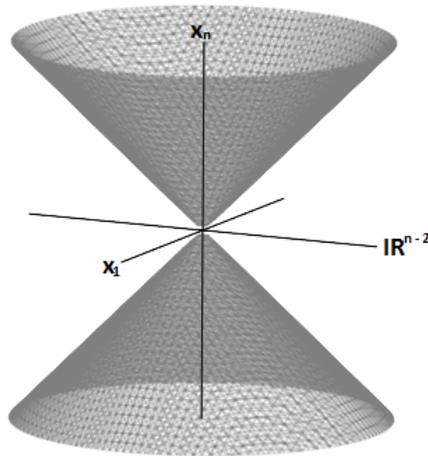


Figura 1.1: Cone de Luz de Einstein no espaço de Lorentz-Minkowski.

Todos os vetores do subespaço vetorial $D = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$, onde os vetores $e_i \in \mathbb{E}_1^n$, $i = 1, \dots, n$ são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n , são tipo espaço.

O caráter causal do antípoda e dos múltiplos de um vetor são preservados, pois

$$w \cdot w = u \cdot u \quad \text{e} \quad \bar{w} \cdot \bar{w} = \lambda^2 u \cdot u.$$

Quando a última coordenada de um vetore tipo-tempo ou tipo-luz é positiva (resp. negativa) dizemos que ele tem *paridade positiva* (resp. *negativa*).

O conjunto dos vetores tipo-tempo, que denotamos por \mathcal{T} e o Cone de Luz são conjuntos que possuem duas componentes conexas, consequência do seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Sejam u e v vetores não tipo-espaço de mesma paridade em \mathbb{E}_1^n . Então $u \cdot v \leq 0$ e vale a igualdade se, e somente se, u e v são linearmente dependentes tipo-luz.*

Prova: Sejam $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de \mathbb{E}_1^n não tipo-espaço de mesma paridade.

Considerando as $n - 1$ primeiras coordenadas dos vetores u e v como os vetores $\bar{u} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $\bar{v} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ em \mathbb{R}^{n-1} com produto interno usual, segue que,

$$\begin{aligned} u \cdot u &= \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle - x_n^2 = \|\bar{u}\|^2 - |x_n|^2 \leq 0, \\ v \cdot v &= \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle - y_n^2 = \|\bar{v}\|^2 - |y_n|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \leq |x_n y_n| = x_n y_n,$$

uma vez que, x_n e y_n possuem o mesmo sinal, por hipótese.

Portanto, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$u \cdot v = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - x_n y_n \leq |\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| - x_n y_n \leq \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| - x_n y_n \leq 0. \quad (1.1)$$

Resta mostrar que $u \cdot v = 0$ se, e somente se, u e v são vetores tipo-luz linearmente dependentes. É claro que se u e v são vetores linearmente dependentes tipo-luz, então

o produto entre os dois vetores é nulo. Para a recíproca, observamos inicialmente que se $u \cdot v = 0$ então $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$, logo, $\bar{u} = \lambda \bar{v}$. Precisamos mostrar ainda que u e v são tipo-luz e $x_n = \lambda y_n$.

Supondo, por absurdo, que u é tipo-tempo, temos, $\frac{x_n^2}{\|\bar{u}\|^2} - 1 > 0$. Podemos ter $\bar{u} = 0$ ou $\bar{u} \neq 0$. Para $\bar{u} = 0$, temos, $u = (0, \dots, 0, x_n)$, com $x_n \neq 0$, logo, $0 = u \cdot v = -x_n y_n$, implicando $y_n = 0$ e $v \in D$, contradizendo a hipótese de v não ser tipo-espaço.

Analisemos agora quando \bar{u} é não nulo. Por hipótese, $u \cdot v = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| - x_n y_n = 0$, de onde, $\|\bar{v}\| = x_n y_n / \|\bar{u}\|$. Disto,

$$v \cdot v = \|\bar{v}\|^2 - y_n^2 = (x_n^2 y_n^2 / \|\bar{u}\|^2) - y_n^2 = y_n^2 \left(\frac{x_n^2}{\|\bar{u}\|^2} - 1 \right) > 0$$

contradizendo, novamente, v não ser tipo-espaço. Portanto, u deve ser tipo-luz. De modo análogo, v é vetor tipo-luz.

Por último, como u e v são tipo-luz, temos $\|\bar{u}\|^2 = x_n^2$, $\|\bar{v}\|^2 = y_n^2$ e

$$0 = u \cdot v = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - x_n y_n = \lambda \|\bar{v}\|^2 - x_n y_n = \lambda y_n^2 - x_n y_n \Rightarrow y_n (\lambda y_n - x_n) = 0$$

com $y_n \neq 0$ (v é tipo-luz), portanto, $x_n = \lambda y_n$ e $u = \lambda v$. ■

Teorema 1.2. *Sejam u e v vetores tipo-tempo ou tipo-luz de mesma paridade de \mathbb{E}_1^n e t um número real positivo, então o vetor tv tem a mesma paridade de v e o vetor $u + v$ herda o tipo e a paridade dos vetores u e v . Além disso, $u + v$ será tipo-luz se, e somente se, u e v forem vetores linearmente independentes tipo-luz.*

Prova: É claro que o vetor tv herda o tipo e paridade do vetor v . O vetor $u + v$, tem a última coordenada dada pela soma das últimas coordenadas de u e v que tem mesma paridade por hipótese, logo a paridade de $u + v$ é a mesma de u e v . Além disso,

$$(u + v) \cdot (u + v) = \underbrace{u \cdot u}_{\leq 0} + 2 \underbrace{u \cdot v}_{\leq 0} + \underbrace{v \cdot v}_{\leq 0} \leq 0,$$

logo, $u + v$ não é tipo-espaço e $(u + v) \cdot (u + v) = 0$ se, e somente se, $u \cdot v = 0$ que pelo Teorema 1.1 ocorre se, e somente se, u e v são vetores tipo-luz linearmente

dependentes. ■

Corolário 1.1. *O conjunto dos vetores tipo-tempo de mesma paridade é um subconjunto conexo de E_1^n .*

Prova: De fato, pelo Teorema 1.2, dados u e v vetores tipo-tempo de mesma paridade de E_1^n , para $t \in [0, 1]$, tu e $(1 - t)v$ são vetores tipo-tempo de mesma paridade que u e v , respectivamente. Novamente, pelo Teorema 1.2, o vetor $tu + (1 - t)v$ também é tipo-tempo e de mesma paridade que u e v . Portanto, todo vetor do segmento $[u, v]$ é tipo-tempo de mesma paridade que u e v , provando o que queríamos. ■

Estes resultados, nos mostram que o conjunto \mathcal{T} tem duas componentes conexas, chamadas de *cones tipo-tempo*. O mesmo ocorre com o cone de luz \mathcal{C}^{n-1} , observando que dados dois vetores tipo-luz de mesma paridade podemos ligar estes dois vetores através de um caminho justaposto no cone, formado por um segmento de reta e um arco de circunferência.

Definição 1.1. Dizemos que o vetor u é *Lorentz ortogonal* ao vetor v em \mathbb{E}_1^n quando $u \cdot v = 0$.

Corolário 1.2. *O produto lorentziano de dois vetores tipo-tempo nunca se anula.*

Prova: Se u e v são dois vetores tipo-tempo, então $-u$ e $-v$ também são vetores tipo-tempo, porém, com paridades diferentes de u e v , respectivamente. Deste modo, pelo Teorema 1.1 temos,

$$\begin{cases} u \cdot v < 0, & \text{se } u \text{ e } v \text{ tem mesma paridade,} \\ u \cdot v > 0, & \text{se } u \text{ e } v \text{ tem paridade distintas.} \end{cases}$$

Na segunda linha usamos $u \cdot -v = -(u \cdot v) < 0$. ■

Corolário 1.3. *Seja u um vetor tipo-tempo de \mathbb{E}_1^n . Se $v \in \mathbb{E}_1^n$ é Lorentz ortogonal a u , então v é tipo-espaço.*

Prova: Basta observarmos que, pelo Teorema 1.1, v não pode ser tipo-tempo nem tipo-luz. ■

Se $U \subset \mathbb{E}_1^n$ é um subespaço vetorial de dimensão m , a restrição do produto escalar lorentziano ao subespaço U é ainda uma aplicação bilinear. Se o subespaço tem dimensão 1, então para todo $v \in U$, considerando um vetor $v_i \in U$, temos $v = \lambda v_i$ e

$$v \cdot v = \lambda^2 v_i \cdot v_i.$$

Consequentemente, todos os vetores terão o mesmo caráter causal e a matriz será um número positivo (resp. negativo, nulo) se o vetor v_i é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz). Vamos analisar o caso em que a dimensão do subespaço U é maior que 1, mas antes definimos o que vem a ser uma base ortonormal em \mathbb{E}_1^n .

Definição 1.2. Uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{E}_1^n é uma *base ortonormal de Lorentz* se $v_n \cdot v_n = -1$ e $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, caso contrário. Um vetor $v \in \mathbb{E}_1^n$ é dito unitário quando $v \cdot v = \pm 1$.

Exemplo 1.3. A base canônica de \mathbb{E}_1^n é uma base ortonormal de Lorentz.

Toda base ortonormal de Lorentz diagonaliza a matriz do produto lorentziano, com 1 nas $n - 1$ primeiras entradas da diagonal e -1 na última.

Observamos que em um subespaço $U \subset \mathbb{E}_1^n$, a restrição do produto escalar lorentziano ainda é uma aplicação bilinear (não necessariamente produto escalar devido a degenerabilidade) e sua matriz tem ordem inferior a n . Buscamos as possibilidades para a matriz desta restrição ao subespaço U . Para tal, usamos o seguinte resultado da Álgebra Linear: Todo espaço vetorial munido de um produto escalar possui uma base ortogonal.

Primeiramente, analisamos o caso em que U possui um vetor tipo-tempo v . Quando isto acontece, podemos tomar uma base ortonormal de Lorentz para U que contenha o vetor $\frac{v}{\|v\|}$, pois, uma base ortogonal de U formada por vetores unitários que contém um vetor tipo-tempo é uma base ortonormal de Lorentz para U . Portanto, uma matriz de U neste caso é uma matriz diagonal com 1 nas $m - 1$ primeiras entradas da diagonal e -1 na última entrada. Agora, suponhamos que não haja vetores tipo-tempo nem vetores tipo-luz em U . Então U é um subespaço vetorial onde todas bases terão apenas vetores tipo-espaço e assim uma matriz do produto com relação a uma base ortogonal de U será uma matriz diagonal onde

encontramos 1 em todas as m entradas da diagonal. O último caso que nos resta supor é que U não possua vetores tipo-tempo mas possua um vetor tipo-luz u . Neste caso, uma base de U que contenha o vetor u não pode possuir outros vetores tipo-luz em virtude do Teorema 1.1, logo a matriz do produto lorentziano é uma matriz diagonal com 1 nas $m - 1$ primeiras entradas da diagonal e 0 na última.

Definição 1.3. Seja A uma matriz diagonal da restrição do produto lorentziano ao subespaço U , com relação a uma base deste subespaço.

1. Quando A possui uma entrada negativa, dizemos que o subespaço é *tipo-tempo*;
2. Quando A possui uma entrada nula, dizemos que o subespaço é *tipo-luz*;
3. Quando A tem apenas entradas positivas, dizemos que o subespaço é *tipo-espaço*.

Observação 1.1. Notamos que se um subespaço U é tipo-espaço, então todos os vetores de U também o são. Além disso, subespaços tipo-luz e tipo-espaço não possuem vetores tipo-tempo. Portanto, um subespaço é tipo-tempo se, e somente se, possui um vetor tipo-tempo e um subespaço é tipo-luz se, e somente se, possui um vetor tipo-luz mas nenhum tipo-tempo.

Teorema 1.3. Sejam $U \subset \mathbb{E}_1^n$ um subespaço vetorial de dimensão $n - 1$ e \vec{n} o gerador do subespaço unidimensional U^\perp da geometria euclidiana. O subespaço U é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) se, e somente se, o vetor \vec{n} é um vetor tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz).

Prova: De fato, os vetores $\vec{n} = (a_1, \dots, a_n)$ e $w = (a_1, \dots, -a_n)$ possuem o mesmo caráter causal e para qualquer $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$,

$$0 = \langle \vec{n}, x \rangle = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a_1x_1 + \dots - (-a_n)x_n = w \cdot x,$$

ou seja, os vetores de U são Lorentz ortogonais a w .

Isto sugere uma classificação do subespaço U determinada pelo caráter causal do vetor w . Com efeito, se w é vetor tipo-tempo, então todos os vetores de U são tipo-espaço, de acordo com o corolário 1.3. Assim, U é tipo-espaço. Se w é um vetor

tipo-espaço (podemos supor w unitário), existe uma base ortonormal de Lorentz de \mathbb{E}_1^n que contem w , logo, os vetores restante nesta base formam uma base de U com um vetor tipo-tempo, portanto, U é tipo-tempo. Quando w é tipo-luz temos $w \in U$. Isto significa que U é tipo-luz, pois, \cdot é uma aplicação degenerada quando restrita ao subespaço U . ■

1.2 Transformações de Lorentz.

Nesta seção, tratamos das aplicações de \mathbb{E}_1^n para \mathbb{E}_1^n , equivalentes às Isometrias lineares de espaço euclidiano. Tais aplicações, são úteis no estudo da geometria de curvas no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão n e como no espaço euclidiano, tem sua importância na geometria agregada a invariância de funções como a curvatura e torção por movimento rígido, entre outros.

Definição 1.4. Uma aplicação $T : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ é chamada *transformação de Lorentz* se

$$Tx \cdot Ty = x \cdot y, \quad \text{para todo } x, y \text{ em } \mathbb{E}_1^n.$$

No próximo teorema, mostramos que uma transformação de Lorentz é uma transformação linear que preserva a base canônica de \mathbb{E}_1^n como uma base ortonormal de Lorentz.

Teorema 1.4. Uma função $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação de Lorentz se, e somente se, T é linear e $\{Te_1, \dots, Te_n\}$ é uma base ortonormal de Lorentz de \mathbb{E}_1^n .

Prova : Se T é uma transformação de Lorentz, diretamente da definição $Te_i \cdot Te_j = e_i \cdot e_j$, logo, $\{Te_1, \dots, Te_n\}$ é base ortonormal de Lorentz de \mathbb{E}_1^n . Então, para todo $v \in \mathbb{E}_1^n$, $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, supondo $Tv = \sum_{i=1}^n b_i Te_i$ temos $a_j = v \cdot e_j = Tv \cdot Te_j = b_j$, portanto, T é linear. Reciprocamente, como $\{Te_1, \dots, Te_n\}$ é base ortonormal de

Lorentz e T linear para $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $u = \sum_{j=1}^n b_j e_j$ em \mathbb{E}_1^n temos

$$\begin{aligned}
 Tv \cdot Tu &= T \sum_{i=1}^n a_i e_i \cdot T \sum_{j=1}^n b_j e_j \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i T e_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j T e_j \\
 &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j (T e_i \cdot T e_j) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j (e_i \cdot e_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i e_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j e_j \\
 &= v \cdot u.
 \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação de Lorentz. ■

Uma matriz A de ordem n é *lorentziana* se, e somente se, a transformação linear associada $A : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$, definida por $A(x) = Ax$ é lorentziana. O conjunto de todas as matrizes lorentzianas de ordem n com a operação de matrizes formam o grupo $O(n-1, 1)$, conhecido por *grupo de Lorentz* das matrizes de ordem n .

Teorema 1.5. *Seja A uma matriz real $n \times n$, e seja J uma matriz $n \times n$ diagonal definida por*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) A matriz A é lorentziana.
- (2) As colunas de A formam uma base ortonormal de Lorentz de \mathbb{R}^n .

- (3) A matriz A satisfaz a equação $A^t J A = J$.
(4) A matriz A satisfaz a equação $A J A^t = J$.
(5) As linhas de A formam uma base ortonormal de Lorentz de \mathbb{R}^n .

Prova: (1) \rightarrow (2) Por hipótese, A é lorentziana, logo existe uma transformação de Lorentz $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por, $Tv = Av$. Pelo Teorema 1.4, T é linear, e as colunas da matriz A são formadas pelas imagens da base canônica pela transformação T , que é uma transformação de Lorentz, logo as colunas de A formam uma base ortonormal de Lorentz.

(2) \rightarrow (3) Vamos representar as matrizes de ordem n da seguinte forma: $A = (a_{ij})$, $A^t = (b_{ij})$, $J = (c_{ij})$, $J A = (d_{ij})$ e $A^t(J A) = (e_{ij})$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, $c_{nn} = -1$ e $c_{ij} = \delta_{ij}$, caso contrário e $i, j = 1, \dots, n$. Por hipótese, os vetores $v_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$ $i = 1, \dots, n$ formam uma base ortonormal de Lorentz. Então, $d_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} a_{kj}$ e,

$$e_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il} d_{lj} = \sum_{l=1}^n a_{li} \left(\sum_{k=1}^n c_{lk} a_{kj} \right) = \sum_{l=1}^n a_{li} (c_{ll} a_{lj}) = \sum_{l=1}^n c_{ll} (a_{li} a_{lj}) = v_i \cdot v_j = c_{ij}.$$

(3) \rightarrow (4) A hipótese $A^t J A = J$, implica $-1 = \det(J) = \det(A^t J A) = -\det^2(A)$, logo, $\det(A) \neq 0$ e A é invertível. Da igualdade, $(J A^t J) A = J(A^t J A) = J J = I$, temos $J A^t J = A^{-1}$, logo $A J A^t J = A A^{-1} = I$, portanto $A J A^t = J^{-1} = J$.

(4) \rightarrow (5) Consideramos as representações das matrizes de ordem n : $A = (a_{ij})$, $A^t = (b_{ij})$, $J = (c_{ij})$, $A J = (d_{ij})$ e $(A J) A^t = (e_{ij})$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, $c_{nn} = -1$ e $c_{ij} = \delta_{ij}$, caso contrário, onde, $i, j = 1, \dots, n$. Tomando os vetores linhas de A , $w_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ vale $d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk} c_{ki}$ e,

$$e_{ij} = e_{ij} = \sum_{l=1}^n d_{jl} b_{li} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} c_{kl} \right) a_{il} = \sum_{l=1}^n (c_{ll} a_{jl}) a_{il} = \sum_{l=1}^n c_{ll} (a_{jl} a_{il}) = w_i \cdot w_j.$$

Portanto, as linhas de A formam uma base ortonormal de Lorentz.

(5) \rightarrow (1) Mostramos que existe uma aplicação de Lorentz $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que A seja sua matriz de Lorentz. Tomamos a aplicação $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por, $Tv = vA$. Se v_i é uma linha de A , temos $Te_i = v_i$. Como as linhas de A formam uma base ortonormal de Lorentz, o conjunto $\{Te_1, \dots, Te_n\}$ é uma base ortonormal de Lorentz. Além disso, T é linear e pelo Teorema 1.4 é uma transformação de Lorentz. ■

Se A uma matriz lorentziana, então $\det(A) = \pm 1$. Denotamos por $SO(n-1, 1)$, o conjunto de todas as matrizes A em $O(n-1, 1)$ tais que $\det(A) = 1$. Este subgrupo $SO(n-1, 1)$ é chamado *grupo especial de Lorentz*.

Como vimos, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo em \mathbb{R}^n tem duas componentes conexas, uma dada pelos vetores que tem paridade positiva e a outra dada pelos vetores que tem paridade negativa. Uma matriz A é dita *positiva* (resp. *negativa*) se, e somente se, A transforma vetores do tipo-tempo de paridade positiva em vetores tipo-tempo de paridade positiva (resp. negativa). Por exemplo, a matriz J citada no Teorema 1.5 é uma matriz negativa.

Seja $PO(n-1, 1)$ o conjunto de todas as matrizes positivas em $O(n-1, 1)$. Então $PO(n-1, 1)$ é um subgrupo de índice dois em $O(n-1, 1)$. De fato, como $A \in O(n-1, 1)$, para todo $v \in \mathbb{E}_1^n$, $Av \cdot Av = v \cdot v$. Desta forma, A é positiva ou negativa, isto significa que ou $A \in PO(n-1, 1)$ ou esta no seu complementar, ou seja, $O(1, n-1)/PO(n-1, 1)$ tem apenas duas classes. O grupo das matrizes positivas $PO(n-1, 1)$ é chamado *grupo positivo de Lorentz*. Seja também $PSO(n-1, 1)$ o grupo das matrizes positivas em $SO(n-1, 1)$ é um subgrupo de índice dois em $SO(n-1, 1)$. O grupo $SO(n-1, 1)$ é chamado *grupo especial de Lorentz positivo*.

Antes do próximo resultado, definimos o que é uma ação de um grupo G sobre um conjunto S não vazio.

Definição 1.5. Seja G um grupo e S um conjunto não vazio. Dizemos que G age sobre S se existe uma aplicação $\cdot : G \times S \rightarrow S$, denotado por $\cdot(g, s) \mapsto g \cdot s$ satisfazendo:

- (1) $e \cdot s = s$ para todo $s \in S$,
- (2) para todo $g, h \in G$ e $s \in S$ vale $(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$.

O conjunto $O(s) = \{g.s \text{ tal que } g \in G\}$ é chamado de *órbita* de s . Uma ação de um grupo G sobre um conjunto não vazio S é dita *transitiva* se existe uma única órbita.

Teorema 1.6. *A ação natural de $PO(n-1,1)$ sobre o conjunto dos subespaços tipo-tempo de dimensão m em \mathbb{R}^n é transitiva.*

Prova : Seja V um subespaço vetorial de dimensão m de \mathbb{R}^n . Podemos identificar \mathbb{R}^m com o subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelos vetores $\{e_{n-(m+1)}, \dots, e_n\}$. Como $e_n \in \mathbb{R}^n$, \mathbb{R}^m é um subespaço vetorial tipo-tempo. Provaremos o resultado mostrando que existe uma matriz $A \in PO(n-1,1)$ tal que $A(\mathbb{R}^m) = V$, usando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.

Como V é um subespaço tipo-tempo qualquer, todo subespaço tipo-tempo de dimensão m de \mathbb{R}^n esta relacionado com \mathbb{R}^m e portanto existe uma única órbita.

Tomando $\{u_1, \dots, u_m\}$ uma base do subespaço V , onde u_m é um vetor tipo-tempo de paridade positiva podemos completar esta base para uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_{n-m}\}$ de \mathbb{R}^n . Podemos reordenar e reescrever a base \mathcal{B} por $\mathcal{B} = \{q_1, \dots, q_n\}$, de modo que, $p_i = q_i$ para $i = 1, \dots, n-m$ e $q_{n-i} = u_{m-i}$, $i = 0, \dots, m-1$. Considerando $w_n = \frac{q_n}{\|q_n\|}$, observamos que

$$\begin{aligned} w_n \cdot w_n &= \frac{q_n}{\|q_n\|} \cdot \frac{q_n}{\|q_n\|} \\ &= \frac{1}{\|q_n\|^2} q_n \cdot q_n \\ &= -\frac{\|q_n\|^2}{\|q_n\|^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Portanto, w_n é um vetor tipo-tempo. Definindo o vetor $v_{n-1} = q_{n-1} + (w_n \cdot q_{n-1})w_n$ temos,

$$w_n \cdot v_{n-1} = w_n \cdot q_{n-1} + (w_n \cdot q_{n-1})(w_n \cdot w_n) = w_n \cdot q_{n-1} - w_n \cdot q_{n-1} = 0,$$

logo, v_{n-1} é um vetor tipo-espaço. Tomando $w_{n-1} = v_{n-1}/\|v_{n-1}\|$ que tem norma lorentziana unitária, definimos o vetor $v_{n-2} = q_{n-2} + (w_n \cdot q_{n-2})w_n - (w_n \cdot q_{n-2})w_{n-1}$,

e notamos que:

$$\begin{aligned} w_n \cdot v_{n-2} &= w_n \cdot q_{n-2} + (w_n \cdot q_{n-2})(w_n \cdot w_n) - (w_n \cdot q_{n-1})(w_n \cdot w_{n-1}) \\ &= w_n \cdot q_{n-2} - w_n \cdot q_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{n-1} \cdot v_{n-2} &= w_{n-1} \cdot q_{n-2} + (w_{n-1} \cdot q_{n-2})(w_{n-1} \cdot w_n) - (w_{n-1} \cdot q_{n-1})(w_{n-1} \cdot w_{n-1}) \\ &= w_{n-1} \cdot q_{n-2} - w_{n-1} \cdot q_{n-2} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, v_{n-2} é Lorentz ortogonal a w_n e a w_{n-1} , portanto é um vetor tipo-espaço.

Consideremos $w_{n-2} = \frac{v_{n-2}}{\|v_{n-2}\|}$.

Recursivamente, definimos:

$$\begin{aligned} v_{n-3} &= q_{n-3} + (w_n \cdot q_{n-3})w_n - (w_{n-1} \cdot q_{n-3})w_{n-1} - (w_{n-2} \cdot q_{n-3})w_{n-2}, \\ w_{n-3} &= \frac{v_{n-3}}{\|v_{n-3}\|}, \\ &\vdots \\ v_1 &= q_1 + (w_n \cdot q_1)w_n - (w_{n-1} \cdot q_1)w_{n-1} - (w_{n-2} \cdot q_1)w_{n-2} - \dots - (w_2 \cdot q_1)w_2, \\ w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|}. \end{aligned}$$

Deste modo, $\{w_1, \dots, w_n\}$ é base ortonormal de Lorentz. Pela definição dos q_i , os elementos de $\{w_{n-(m+1)}, \dots, w_n\}$ estão em V , pois são combinações lineares de elementos da base $\{u_1, \dots, u_m\}$ de V , portanto, $\{w_{n-m}, \dots, w_n\}$ é uma base de V . Se considerarmos a matriz A que tem $\{w_1, \dots, w_n\}$ como coluna, pelo Teorema 1.5 segue que A é lorentziana e $A(\mathbb{R}^m) = V$, mais ainda, temos que A é positiva, e $A(e_n) = w_n$ é tipo-tempo positivo. ■

Observação 1.2. *O Teorema 1.6 pode ser demonstrado também para o subgrupo das matrizes negativas. Podemos também, de modo análogo, demonstrar que a ação do grupo $O(n-1, 1)$ sobre o conjunto dos subespaços tipo-espaços de dimensão m de \mathbb{R}^n é transitiva.*

Teorema 1.7. *Sejam u, v vetores tipo-tempo com paridade positiva (resp. negativa) em \mathbb{R}^n . Então, $u \cdot v \leq \|u\| \|v\|$ com validade da igualdade se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.*

Prova : Nesta demonstração usamos $\|\cdot\|_e$ e $\|\cdot\|$ para as normas euclidiana e lorentziana, respectivamente. Pelo Teorema 1.6, existe um A em $PO(n-1, 1)$ tal que $Au = te_n$. Como A preserva o produto lorentziano, podemos substituir u e v por Au e Av . Supondo $Av = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ um vetor de \mathbb{E}_1^n temos:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 \|v\|^2 &= \|Au\|^2 \|Av\|^2 \\
&= -t^2 (\|\bar{y}\|_e^2 - \bar{y}_n^2) \\
&= -t^2 \|\bar{y}\|_e^2 + t^2 \bar{y}_n^2 \\
&\leq t^2 \bar{y}_n^2 \\
&= (Au \cdot Av)^2 \\
&= (u \cdot v)^2.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Desta forma, como u e v são vetores tipo-tempo de mesma paridade e A é positiva, segue que Au e Av são vetores de mesma paridade e assim

$$u \cdot v = Au \cdot Av = -t\bar{y}_n \leq 0.$$

Portanto, como $\|u\| \|v\| \geq 0$, segue que $u \cdot v \leq \|u\| \|v\|$. Repare que a igualdade vale se, e somente se, $\bar{y} = 0$, ou seja, se Au e Av são vetores colineares. Como A é linear e invertível, segue que u e v são colineares.

Outra demonstração simples deste teorema é feita usando a projeção ortogonal u sobre o vetor v . Sim, pois se λv é a projeção ortogonal de u sobre o vetor v , então $\lambda = \frac{u \cdot v}{v \cdot v}$. Notamos que $v \cdot v < 0$. Logo o vetor $z = u - \lambda v$ que é Lorentz ortogonal a v é tipo-espaço, então

$$z \cdot z \geq 0 \Rightarrow (u - \lambda v) \cdot (u - \lambda v) = (u - \lambda v) \cdot u = u \cdot u - \lambda v \cdot u \geq 0.$$

Isto implica que

$$-\frac{|u \cdot v|^2}{v \cdot v} \geq -(u \cdot u).$$

Multiplicando ambos os lados por $v \cdot v$, temos

$$|u \cdot v|^2 \leq [-(u \cdot u)] \cdot [-(v \cdot v)] = (\|u\| \|v\|)^2$$

logo,

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

Como u e v são vetores tipo-tempo de mesma paridade o produto lorentziano entre eles é negativo, logo,

$$u \cdot v \leq \|u\| \|v\|.$$

Note que a igualdade é válida se, e somente se, o vetor z é o vetor nulo, ou seja, quando $u = \lambda v$. ■

1.3 Produto Vetorial em \mathbb{E}_1^3 .

Nesta seção apresentamos o produto vetorial em \mathbb{E}_1^3 e demonstramos algumas de suas propriedades. Sejam u, v vetores de \mathbb{E}_1^3 e

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O *produto vetorial lorentziano* de u e v é definido por,

$$u \wedge v = J(u \times v).$$

Observamos que $J(u \times v)$ é exatamente a multiplicação da última coordenada de $u \times v$ por -1 . Sendo assim, para qualquer vetor w de \mathbb{R}^3 , $w \cdot J(u \times v)$ é o produto

interno usual de \mathbb{R}^3 entre w e $J(u \times v)$. Disto temos,

$$\begin{aligned} u \cdot (u \wedge v) &= u \cdot J(u \times v) = \langle u, u \times v \rangle = 0, \\ v \cdot (u \wedge v) &= v \cdot J(u \times v) = \langle v, u \times v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $u \wedge v$ é Lorentz ortogonal aos vetores u e v . Na prova do próximo teorema usamos a seguinte igualdade:

$$u \wedge v = J(u) \times J(v). \quad (1.3)$$

Vamos prová-la considerando $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 e lembrando que

$$\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v_i & v_j \\ u_i & u_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_i & -v_j \\ u_i & -u_j \end{vmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} u \wedge v &= J(u \times v) \\ &= J \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(- \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} v_2 & -v_3 \\ u_2 & -u_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & -v_3 \\ u_1 & -u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (v_1, v_2, -v_3) \times (u_1, u_2, -u_3) \\ &= J(v) \times J(u). \end{aligned}$$

Teorema 1.8. *Se w, u, v, z são vetores em \mathbb{R}^3 , então*

$$(1) \quad u \wedge v = -v \wedge u,$$

$$(2) \quad (u \wedge v) \cdot z = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$(3) \quad u \wedge (v \wedge z) = (u \cdot v)z - (z \cdot u)v,$$

$$(4) \quad (u \wedge v) \cdot (z \wedge w) = \begin{vmatrix} u \cdot w & u \cdot z \\ v \cdot w & v \cdot z \end{vmatrix}.$$

Prova : (1) Da identidade (2.2),

$$u \wedge v = J(v) \times J(u) = -J(u) \times J(v) = -(J(u) \times J(v)) = -(v \wedge u) = -v \wedge u.$$

(2)

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \cdot z &= J(u \times v) \cdot z \\ &= \langle u \times v, z \rangle \\ &= \left\langle \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right), z \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} z_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(3) Provamos este item usando a fórmula de Lagrange satisfeita pelo produto ve-

torial no espaço euclidiano, dada por $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$,

$$\begin{aligned}
u \wedge (v \wedge z) &= J(v \wedge z) \times J(u) \\
&= (J(J(v \times z)) \times J(u)) \\
&= (v \times z) \times J(u) \\
&= -(J(u) \times (v \times z)) \\
&= -(\langle J(u), z \rangle v - \langle J(u), v \rangle z) \\
&= (u \cdot v)z - (u \cdot z)v.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} u \cdot w & u \cdot z \\ v \cdot w & v \cdot z \end{vmatrix} &= (u \cdot w)(v \cdot z) - (u \cdot z)(v \cdot w) \\
&= (u(v \cdot z) \cdot w) - (v(u \cdot z) \cdot w) \\
&= (u(v \cdot z) - v(u \cdot z)) \cdot w \\
&= ((u \wedge v) \wedge z) \cdot w \\
&= \begin{vmatrix} u \wedge v \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z \\ w \\ u \wedge v \end{vmatrix} \\
&= (z \wedge w) \cdot (u \wedge v).
\end{aligned}$$

■

Corolário 1.4. *Se u e v são vetores tipo-tempo linearmente independentes, com paridade positiva (negativa) de \mathbb{R}^3 , então $u \wedge v$ é tipo-espaço e*

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sinh(\eta(u, v))$$

Prova : Como u e v são vetores tipo-tempo e $u \wedge v$ Lorentz ortogonal a u e a v segue pelo Corolário 2.2 que $u \wedge v$ é um vetor tipo-espaço. Pelo Teorema 1.8 temos,

$$\begin{aligned}
\|u \wedge v\|^2 &= (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) \\
&= \begin{vmatrix} u \cdot v & u \cdot u \\ v \cdot v & v \cdot u \end{vmatrix} \\
&= (u \cdot v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 \|v\|^2 \cosh^2(\eta(u, v)) - \|u\|^2 \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 \|v\|^2 \sinh^2(\eta(u, v)),
\end{aligned}$$

$$\eta(u, v) > 0 \Rightarrow \sinh(\eta(u, v)) > 0 \Rightarrow \|u\| \|v\| \sinh(\eta(u, v)) > 0.$$

Portanto, $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sinh(\eta(u, v))$. ■

Corolário 1.5. *Se u e v são vetores tipo-espaço em \mathbb{R}^3 , então*

- (1) $|u \cdot v| < \|u\| \|v\|$ se, e somente se, $u \wedge v$ é tipo-tempo,
- (2) $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$ se, e somente se, $u \wedge v$ é tipo-luz,
- (3) $|u \cdot v| > \|u\| \|v\|$ se, e somente se, $u \wedge v$ é tipo-espaço.

Prova : Pelo Teorema 1.8 item (4), $(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \cdot v|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2$. Com esta igualdade, obtemos todos os resultados. ■

1.4 Geometria de Curvas em \mathbb{E}_1^n

Definição 1.6. Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável (C^∞), $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$, de um aberto $I = (a, b)$ da reta real em \mathbb{E}_1^n . O conjunto imagem de α , $\alpha(I)$ é chamado de traço da curva α .

Esta definição de curva diferenciável é exatamente a mesma da geometria diferencial de curvas no espaço euclidiano, uma correspondência que leva cada $t \in I$ a um ponto $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, onde as aplicações $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, são diferenciáveis.

Definição 1.7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ uma parametrização de uma curva diferenciável. Dizemos que α é *tipo-espaço* em $t \in I$ (resp. *tipo-tempo*, *tipo-luz*), se $\alpha'(t)$ é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz). Se $\alpha'(t)$ é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) para todo $t \in I$, dizemos que α é *tipo-espaço* (resp. *tipo-tempo*, *tipo-luz*).

Exemplo 1.4. A circunferência de equação $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 0)$ é uma curva contida no plano Oxy que é tipo-espaço, portanto é uma curva tipo-espaço.

Exemplo 1.5. A hipérbole de equação $\alpha(t) = (0, \cosh(t), \sinh(t))$ é uma curva tipo-tempo, contida no plano Oyz que é tipo-tempo.

Exemplo 1.6. A reta $\alpha(t) = (0, t, t)$, para $t \in (0, \infty)$ é uma curva tipo-luz.

Exemplo 1.7. A curva parametrizada, $\alpha(t) = (\cosh(t), t^2, \sinh(t))$ é tipo-espaço em $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$, tipo-tempo no intervalo $(-1/2, 1/2)$ e tipo-luz nos pontos $\{-1/2, 1/2\}$.

Observação 1.3. Notamos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ é uma curva tal que, para $t_0 \in I$, $\alpha'(t_0)$ é tipo-tempo (resp. tipo-espaço não nulo), logo, pela continuidade de $\alpha' \cdot \alpha'$, existe um subconjunto aberto $J \subset I$, contendo t_0 , tal que $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) < 0$ (resp. > 0), $t \in J$. Isto significa que a curva é tipo-tempo ou tipo-espaço em subconjuntos abertos de I .

Uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ é dita *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in I$.

Alguns resultados sobre a regularidade de curvas em \mathbb{E}_1^n surgem imediatamente do caráter causal destas curvas, como vemos a seguir.

Proposição 1.1. Toda curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ tipo-tempo ou tipo-luz é regular.

Prova : Basta lembrarmos que o vetor nulo é tipo-espaço, logo as curvas tipo-tempo e tipo-luz são regulares. ■

Consideramos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ uma curva diferenciável e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável. Então a aplicação $\beta : J \rightarrow \mathbb{E}_1^n$, definida por

$$\beta(t) = \alpha \circ h(t)$$

é uma curva parametrizada diferenciável. Dizemos, neste caso, que β é uma reparametrização de α .

Da geometria diferencial de curvas no espaço euclidiano de dimensão n sabemos, que toda curva regular é localmente gráfico de uma aplicação diferenciável. Obviamente, este resultado permanece válido para curvas diferenciáveis no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão n , porém, quando $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ é uma curva tipo-tempo ou tipo-luz podemos dizer ainda que todo o traço de α é gráfico de uma aplicação diferenciável. Isto ocorre, porque uma curva tipo-tempo ou tipo-luz é sempre regular, pois $x'_n(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, logo x_n é uma aplicação monótona crescente ou decrescente, pelo teorema da aplicação inversa temos que é inversível.

Portanto, a reparametrização $\beta : x_n(I) \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ de α , dada por,

$$\beta(s) = \alpha \circ x_n^{-1}(s) = (x_1(x_n^{-1}(s)), \dots, x_{n-1}(x_n^{-1}(s)), s).$$

nos mostra que o traço de α é o gráfico da aplicação $f : x_n(I) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, definida por,

$$f(s) = (x_1(x_n^{-1}(s)), \dots, x_{n-1}(x_n^{-1}(s))).$$

Mantendo em vista este resultado, vemos que não existem curvas fechadas tipo-tempo e tipo-luz.

Observação 1.4. Quando $n = 2$, uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ tipo-espaço regular também pode ser totalmente reparametrizada como gráfico de uma aplicação diferenciável, pois para todo $s \in I$, $x'_1(s) \neq 0$. Portanto, do mesmo modo que uma curva tipo-tempo ou tipo-luz em \mathbb{E}_1^n temos $\beta : x_1(I) \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, definida por, $\beta(t) = \alpha \circ x_1^{-1}(t) = (t, y \circ x_1^{-1}(t))$.

No restante do texto assumimos todas as curvas regulares.

Quando estudamos a geometria diferencial de curvas no espaço euclidiano de dimensão n , aprendemos que o comprimento do arco de uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, a partir de $t_0 \in I$, é por definição

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Dizemos, a partir desta definição que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ esta parametrizada pelo comprimento de arco quando esta função que mede o comprimento de arco da curva a partir de um ponto $t_0 \in I$ é igual ao parâmetro da curva mais uma constante, ou seja, quando para $t_0 \in I$, $s(t) = t + c$. Imediatamente, uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ esta parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1$, $t \in I$.

Motivados por esta última equivalência, temos o seguinte:

Lema 1.1. *Seja α uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço. Então existe um difeomorfismo, $\phi : J \rightarrow I$, tal que a curva $\beta = \alpha \circ \phi$ satisfaz $\|\beta'(s)\| = \|(\alpha \circ \phi)'(s)\| = 1$. Neste caso, dizemos que β esta parametrizada pelo comprimento de arco.*

Prova: A demonstração deste Lema é a mesma feita para uma curva no caso euclidiano. ■

No caso em que α é uma curva tipo-luz, é claro que não podemos encontrar uma reparametrização $\beta : J \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ tal que $\|\beta'\| = 1$. Porém, supondo que $\alpha''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ deve ser tipo-espaço, portanto, podemos encontrar uma reparametrização $\beta : J \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ tal que $\|\beta''(s)\| = 1$, $s \in J$.

Lema 1.2. *Seja α uma curva tipo-luz em \mathbb{E}_1^n . Existe uma reparametrização de α dada por $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ de tal modo que $\|\beta''(s)\| = 1$. Dizemos que β é uma curva pseudo-parametrizada pelo comprimento de arco.*

Prova: Queremos encontrar uma aplicação $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável que satisfaça $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ com $\|\beta''(s)\| = 1$. Supondo que exista tal aplicação, temos

$$\beta''(s) = \phi''(s)\alpha'(t) + (\alpha'(s))^2\alpha''(t).$$

Deste modo, $1 = \beta''(s) \cdot \beta''(s) = (\phi'(s))^4\|\alpha''(t)\|^2$. Basta definirmos ϕ a solução da equação diferencial

$$\phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\alpha''(\phi(s))\|}}, \quad \phi(0) = t_0.$$

■

Exemplo 1.8. *As curvas dadas nos exemplos 1.4 e 1.5, são curvas tipo-espaço e tipo-tempo respectivamente, ambas parametrizadas pelo comprimento de arco.*

1.5 Teoria local das Curvas Planas em \mathbb{E}_1^2 .

Nesta seção introduzimos um referencial de vetores ao longo das curvas tipo-tempo e tipo-espaço, isto porque com exceção das retas $x = y$ e $x = -y$, não existem curvas tipo-luz em \mathbb{E}_1^2 . O referencial que adotamos aqui é composto pelos vetores tangente e normal em cada ponto da curva, assim como feito no caso euclidiano nos da informações sobre o comportamento da curva.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, com $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos os campos vetoriais tangente $T : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ e normal $N : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ ao longo de α , por

$$T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) \quad \text{e} \quad N(s) = J(\alpha'(s)) = (y'(s), x'(s)),$$

respectivamente, onde $J : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é a reflexão com relação à reta $x = y$. Para cada $s \in I$, o conjunto $\{T(s), N(s)\}$ é uma base ortonormal de Lorentz chamada de *diedro de Frenet* da curva α em s .

Observamos que

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ y' & x' \end{vmatrix} = [x']^2 - [y']^2 = \epsilon,$$

e portanto a orientação de $\{T, N\}$ muda de acordo com o caráter causal da curva, sendo positivamente orientada se α é tipo-espaço e negativamente orientada quando α é tipo-tempo.

Adotamos $T(s) \cdot T(s) = \epsilon$, onde $\epsilon = \{-1, 1\}$ de acordo com o caráter causal da curva. Como os campos T e N são unitários, $T(s) \cdot T'(s) = 0$, $N(s) \cdot N'(s) = 0$, logo, $T'(s) = a(s)N(s)$ e $N'(s) = b(s)T(s)$, com $a(s) = -\epsilon T'(s) \cdot N(s)$ e $b(s) = \epsilon T(s) \cdot N'(s)$. Para todo s em I , $T(s) \cdot N(s) = 0$, logo, $T'(s) \cdot N(s) = -T(s) \cdot N'(s)$ e segue $a(s) = b(s)$. Escrevemos então, as *equações de Frenet* da curva α ,

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s), \\ N'(s) &= k(s)T(s). \end{aligned}$$

A função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *função curvatura* de α e para $s_0 \in I$, dizemos que $k(s_0)$ é a curvatura da curva α em s_0 .

Damos uma interpretação geométrica para o sinal e valor da curvatura de uma curva no plano de Minkowski em um ponto $\alpha(s_0) = (x(s_0), y(s_0))$, $s \in I$, considerando a função vetorial

$$w(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

múltiplo do vetor normal euclidiano da curva α no ponto $\alpha(s_0)$. Como o conjunto $\{T(s_0), w(s_0)\}$ tem sempre orientação negativa, independentemente do caráter causal de α , podemos concluir que existe uma função $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, positiva, tal que $w(s) = \epsilon h(s)n(s)$, onde $\alpha' \cdot \alpha' = \epsilon$ e $n : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é a normal euclidiana da curva α .

Definimos a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \alpha(s) - \alpha(s_0) \cdot N(s_0) = \epsilon h(s_0) \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle$$

e como f esta bem definida e é diferenciável, obtemos diretamente $f(s_0) = f'(s_0) = 0$, uma vez que, $f'(s) = \alpha'(s) \cdot N(s_0)$. Derivando f novamente, encontramos, $f''(s) = \alpha''(s) \cdot N(s_0)$, logo,

$$f''(s_0) \equiv \alpha''(s_0) \cdot N(s_0) = -\epsilon k(s_0).$$

Nos casos abaixo, quando falamos em semiplanos estamos nos referindo aos semiplanos determinados pela reta tangente da curva α no ponto $\alpha(s_0)$.

- **Curva tipo-tempo:**

Nesta hipótese $\epsilon = -1$ e os vetores $N(s_0)$ e $n(s_0)$ apontam para semiplanos opostos.

Se $k(s_0) > 0$, então $f''(s_0) = k(s_0) > 0$ e existe uma vizinhança de s_0 onde $f(s) > 0$. Nesta vizinhança,

$$f(s) = -h(s_0) \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle > 0,$$

e $\alpha(s)$ esta no semiplano que $N(s_0)$ aponta.

Quando $k(s_0) < 0$, temos $f(s_0) = 0$ valor de máximo local de f . Logo, existe

uma vizinhança de s_0 onde $f(s) < 0$. Então nesta vizinhança,

$$f(s) = -h(s_0)\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle > 0,$$

e $\alpha(s)$ esta no semiplano oposto ao que $N(s_0)$ aponta.

• **Curva tipo-espaço:**

Temos $\epsilon = 1$ e os vetores $N(s_0)$ e $n(s_0)$ apontam para o mesmo semiplano.

Se $k(s_0) > 0$, então $f''(s_0) = -k(s_0) < 0$ e existe uma vizinhança V de s_0 , onde

$$f(s) = h(s_0)\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle < 0,$$

isto implica, para $s \in V$, que os pontos $\alpha(s)$ estão no semiplano que $N(s_0)$ aponta . ■

Repetindo a mesma análise quando a curvatura $k(s_0) < 0$, concluímos que $\alpha(s)$ esta no semiplano oposto ao apontado por $N(s_0)$.

Agora, consideremos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço não parametrizada pelo comprimento de arco. A curva pode ser reparametrizada pelo Lema 1.1, de modo que exista um difeomorfismo $\phi : J \rightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ \phi$ é a reparametrização pelo comprimento de arco. Definimos a curvatura da curva α , no parâmetro t , por

$$k_\alpha(t) = k_\beta(s(t)).$$

No Lema 1.1 vimos que a função ϕ é a inversa da aplicação $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$ que

tem derivada $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \frac{d\beta(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt}, \\ \frac{d^2\alpha(t)}{ds^2} &= \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_\alpha(t) &= k_\beta(s(t)) = -\epsilon \frac{dT_\beta(s(t))}{ds} \cdot N_\beta(s(t)) \\
&= -\epsilon \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2} \cdot N_\beta(s(t)) \\
&= -\epsilon \left[\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{\beta(s(t))}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \right] \cdot N_\beta(s(t)) \\
&= -\epsilon \left[\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \cdot N_\beta(s(t)) \right] \\
&= -\frac{\epsilon}{\|\alpha'(t)\|^3} \left[\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \cdot J(\alpha'(t)) \right] \\
&= -\frac{\epsilon}{\|\alpha'(t)\|^3} [\alpha''(t) \cdot J(\alpha'(t))] \\
&= \epsilon \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.9. A curva $\alpha(t) = (\text{sen}(t), \cos(t))$, $\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ é uma curva tipo-tempo não parametrizada pelo comprimento de arco, pois $\alpha'(t) = (\cos(t), -\text{sen}(t))$ e $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \cos(2t) < 0$. Sua segunda derivada é $\alpha''(t) = (-\text{sen}(t), -\cos(t))$ e pela fórmula para curvatura de uma curva regular sob um parâmetro qualquer,

$$k_\alpha(t) = - \left[-\frac{(\text{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2}{\sqrt{|\cos(2t)|}} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{|\cos(2t)|}} \right] > 0.$$

Esta curva, orientada no sentido horário, tem curvatura com sinal positivo em todo ponto de seu domínio, portanto, para todo $t \in I$, $\alpha(t)$ esta no semiplano o qual aponta o vetor $N_\alpha(t)$.

Em seguida, fazemos uma análise geométrica do valor da curvatura da curva. Para isto, supomos α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s_0) > 0$ e consideramos a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por,

$$g(s) = -\epsilon(\alpha(s) - P_\rho \cdot \alpha(s) - P_\rho) - \rho^2, \quad s, s_0 \in I \quad \text{e} \quad \rho > 0.$$

A circunferência lorentziana de centro P_ρ e raio ρ é denotada por C_ρ . Antes de prosseguirmos provamos o seguinte resultado:

Lema 1.3. *Se $\alpha : I \rightarrow E_1^2$ uma curva regular tipo-espaço (resp. tipo-tempo), então para quaisquer $s_1, s_2 \in I$, o vetor $\alpha(s_2) - \alpha(s_1)$ é tipo-espaço (resp. tipo-tempo).*

Prova: Vamos fazer a demonstração para o caso em que α é tipo-espaço. A curva α é regular, por hipótese, logo existe uma reparametrização $\beta : J \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ que torna o traço da curva α gráfico de uma aplicação diferenciável $f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos $\alpha(s(t)) = \beta(t) = (t, f(t))$. Pelo Teorema do Valor Médio, dados $t_1, t_2 \in J$, existe $\bar{t} \in J$, tal que,

$$f'(\bar{t})(t_2 - t_1) = f(t_2) - f(t_1).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \alpha(s_2) - \alpha(s_1) &= \beta(t_2) - \beta(t_1) \\ &= (t_2 - t_1, f(t_2) - f(t_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(1, f'(\bar{t})(t_2 - t_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(1, f'(\bar{t})) \\ &= (t_2 - t_1)(1, f'(\bar{t})) \\ &= (t_2 - t_1)\beta'(\bar{t}). \end{aligned}$$

Portanto, como $\beta'(\bar{t})$ é uma vetor tipo-espaço o vetor $\alpha(s_2) - \alpha(s_1)$ é um vetor tipo-espaço, como queríamos.

No caso em que α é uma curva tipo-tempo, procedemos como no caso tipo-espaço, modificando apenas a reparametrização da curva, para a forma $\beta(y) = (g(y), y)$. ■

Pelo lema, 1.3 para cada $s > s_0$ (resp. $s < s_0$), o vetor $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ tem caráter causal contrário ao de $N(s_0)$ pois existe um $c \in (s, s_0)$ (resp. $\bar{c} \in (s_0, s)$) tal que $\alpha(s) - \alpha(s_0) = \lambda\alpha'(c)$ (resp. $\alpha(s_0) - \alpha(s) = \lambda\alpha'(\bar{c})$), isto significa que o vetor $\alpha(s) - P_\rho$ é a soma de dois vetores de caráter causal diferentes e pode ter qualquer caráter causal.

Observamos porém que $\alpha(s) - \alpha(s_0) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow s_0$ implicando, para valores de s próximos de s_0 , que o caráter causal de $\alpha(s) - P_\rho$ é o mesmo de $\rho N(s_0)$. Basta notarmos que $\alpha(s) - P_\rho = \alpha(s) - \alpha(s_0) - \rho N(s_0)$ é uma soma de vetores e se existe $\bar{s} \in I$ tal que esta soma tem caráter causal diferente de $N(s_0)$ então existe $s_1 \in I$ tal que $\alpha(s_1) - P_\rho$ é tipo-luz pela continuidade desta curva. Tomando o parâmetro $s_1 \in I$ mais próximo de s_0 tal que $\alpha(s_1) - P_\rho$ é tipo-luz, o valor positivo $|s_1 - s| = \epsilon$ garante um intervalo $J = (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ no qual o caráter causal de $\alpha(s) - P_\rho$ é o mesmo do vetor $N(s_0)$ para $s \in J$.

Os parâmetros s suficientemente próximos a s_0 definem

$$\begin{aligned} g(s) &= -\epsilon(\alpha(s) - P_\rho \cdot \alpha(s) - P_\rho) - \rho^2 \\ &= \|\alpha(s) - P_\rho\|^2 - \rho^2. \end{aligned}$$

Tal função mede a distância dos pontos da curva próximos de $\alpha(s_0)$ e faz a diferença com os pontos da circunferência lorentziana de raio ρ . Imediatamente temos

$$\begin{aligned} g(s_0) &= g'(s_0) = 0, \\ g''(s_0) &= 2[\rho k(s_0) - 1]. \end{aligned}$$

Pelas regras do Cálculo Diferencial sobre valores de máximo e mínimo, $g(s_0) = 0$ é valor de máximo em um vizinhança de s_0 quando $g''(s_0) < 0$, isto é, quando $\rho < \frac{1}{k(s_0)}$. Deste modo, para $\rho < \frac{1}{k(s_0)}$ o ponto $\alpha(s)$ da curva, cujo parâmetro s esta em uma vizinhança de s_0 , possui distância lorentziana menor que ρ de P_ρ e portanto esta no exterior de C_ρ . Analogamente, o valor $g(s_0) = 0$ é de mínimo quando $g''(s_0) > 0$, ou seja, quando $\rho > \frac{1}{k(s_0)}$ e existe uma vizinhança V de s_0 , onde a distância lorentziana entre $\alpha(s)$ e $\alpha(s_0)$ é maior que ρ de P_ρ , portanto, $\alpha(s)$ esta no interior de C_ρ . Nada podemos concluir sobre g , quando $\rho = \frac{1}{k(s_0)}$.

O raio $\rho_0 = \frac{1}{k(s_0)}$ chamamos de *raio de curvatura* e ao centro P_{ρ_0} de *centro de curvatura*. A circunferência lorentziana de raio ρ_0 e centro P_{ρ_0} é chamada de *círculo osculador* de α em $\alpha(s_0)$.

Como mostra a análise do valor de $k(s_0)$ podemos dizer que a relação de uma curva no plano de Minkowski com relação ao círculo osculador de uma curva no plano de Minkowski é a mesma feita para o círculo osculador de uma curva no plano euclidiano.

Exemplo 1.10. A curva $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, $t \in I$, para $I = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ é tipo tempo, pois,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\text{sen}(t), \cos(t)), \\ \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) &= -\cos(2t) < 0.\end{aligned}$$

Usando a fórmula para a curvatura da curva sob um parâmetro qualquer temos,

$$k\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{\sqrt{0,309017}}.$$

Como o sinal da curvatura no ponto $s_0 = \frac{4\pi}{5}$ é negativo, notamos que o vetor normal a curva em $\alpha\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ aponta para o semiplano determinado pela tangente da curva em $T(s_0)$ que não contém uma vizinhança da curva α em $\alpha\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Definição 1.8. Um movimento rígido em \mathbb{E}_1^n é uma aplicação, $M : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$, onde $Mu = (F_v \circ A)u = Au + v$, com $v \in \mathbb{E}_1^n$ fixo, $A \in O(n-1, 1)$ e $F_v : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ é dada por $F_v(u) = u + v$, ou seja, um movimento rígido de \mathbb{E}_1^n é uma aplicação formada por uma transformação de Lorentz seguida de uma translação em \mathbb{E}_1^n .

Observação 1.5. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, onde $k_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ é a sua curvatura e $M : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é um movimento rígido então, a curva $\beta = M \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco. De fato, como A é transformação de Lorentz, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= (M \circ \alpha)'(s) \\ &= ((A + v) \circ (\alpha))'(s) \\ &= (A \circ \alpha)'(s) \\ &= A'(\alpha(s))\alpha'(s) \\ &= A\alpha'(s).\end{aligned}$$

Deste modo, $\|\beta'(s)\| = 1$ e pela fórmula de curvatura para parâmetro qualquer temos;

$$\begin{aligned}
k_\beta(s) &= \frac{\epsilon}{\|\beta'(s)\|^3} \det(\beta'(s), \beta''(s)) \\
&= \epsilon \det(A\alpha'(s), A\alpha''(s)) \\
&= \epsilon \det(A) \cdot \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) \\
&= \det(A)(\epsilon \det(\alpha'(s), \alpha''(s))) \\
&= \det(A)k_\alpha(s).
\end{aligned}$$

Um resultado interessante sobre as curvas tipo-tempo e tipo-espaço regulares que temos, diz que o caráter causal de tais curvas é invariante por uma transformação de Lorentz. E ainda transformações de Lorentz são aplicações equivalentes às transformações ortogonais na geometria euclidiana. De tais fatos, surge a seguinte questão: existe um similar do Teorema Fundamental das Curvas planas parametrizadas pelo comprimento de arco no plano de Minkowski? A resposta a esta questão é afirmativa como demonstraremos.

Antes, porém, enunciamos um teorema de existência e unicidade na seguinte forma: *Dados $s_0 \in I$, $(\xi_1)_0, \dots, (\xi_n)_0$, existe um intervalo aberto $J \subset I$, contendo s_0 , e uma única aplicação diferenciável $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, com*

$$\alpha(s_0) = ((\xi_1)_0, \dots, (\xi_n)_0) \quad e \quad \alpha'(s) = (f_1, \dots, f_n),$$

onde cada f_i , $i = 1, \dots, n$, é calculada em $(s, \alpha(s)) \in J \times \mathbb{R}^n$. Além disso, se o sistema é linear, $J = I$.

Teorema 1.9. *Dada a função diferenciável real $k(s)$, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ tipo-tempo (resp. tipo-espaço) tal que s é o comprimento de arco e $k(s)$ é a curvatura de α . Além disso, qualquer outra curva $\bar{\alpha}$, satisfazendo as mesmas condições, difere de α por um movimento rígido; isto é, existe uma isometria A de \mathbb{E}_1^2 , com determinante positivo e um vetor v tal que $\bar{\alpha} = A \circ \alpha + v$.*

Prova: Começamos essa demonstração com o seguinte resultado; dados $s_0 \in I$, $P_0 \in \mathbb{E}_1^2$ e $v_0 \in T_{P_0}\mathbb{E}_1^2$ unitário, existe uma única curva tipo-tempo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, parametrizada pelo comprimento de arco s , tal que $\alpha(s_0) = P_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$. De fato, suponhamos que exista tal curva parametrizada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Suponhamos também $P_0 = (P_1, P_2)$. Como v_0 é tipo-tempo unitário existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $v_0 = (\sinh(\theta_0), \cosh(\theta_0))$. Tal curva deve satisfazer as equações de Frenet e portanto,

$$\begin{cases} x''(s) = k(s)y'(s) \\ y''(s) = k(s)x'(s), \end{cases}$$

uma vez que, os vetores tangente $T(s)$ e normal $N(s)$ de uma curva tipo-tempo de E_1^2 são dados por $T(s) = (x'(s), y'(s))$ e $N(s) = J(T(s))$, onde $J : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é dada por $J(a, b) = (b, a)$ e as equações de Frenet por;

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \end{pmatrix}.$$

Definimos a seguinte função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^s k(u)du.$$

e em seguida a curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$,

$$\alpha(s) = \left(P_1 + \int_{s_0}^s \sinh(\theta(u))du, P_2 + \int_{s_0}^s \cosh(\theta(u))du \right).$$

É fácil verificar que a curva definida acima é a curva tipo-tempo que estamos procurando, e que é solução única do sistema com o PVI dado.

Provamos, a partir de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto I de \mathbb{R} , que dado um ponto qualquer de \mathbb{E}_1^2 e um vetor tipo-tempo unitário no plano tangente deste ponto, existe uma única curva tipo-tempo, parametrizada pelo comprimento de arco, que passa por este ponto e que tem vetor tangente dado pelo vetor unitário do plano tangente em um instante $s_0 \in I$, além disso, a curvatura desta curva é dada pela função k . Usamos este resultado para continuar a prova do

Teorema Fundamental.

Para finalizar, precisamos provar que se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ e $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ são curvas tipo-tempo parametrizadas pelo comprimento de arco tais que $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$, para todo $s \in I$, então existe um movimento rígido $M : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ tal que $M \circ \alpha = \beta$.

Observamos antes que um movimento rígido é a composição de uma isometria lorentziana ou transformação lorentziana com uma translação de \mathbb{E}_1^2 , e que a curvatura de uma curva é invariante por um movimento rígido.

De fato, seja $M = F_v \circ A$ um movimento rígido de \mathbb{E}_1^2 , onde A é isometria e F_v translação. A curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, dada por, $M \circ \alpha$ é tal que

$$\frac{d}{ds} M \circ \alpha(s) = A(\alpha'(s)),$$

$$\frac{d^2}{ds^2} M \circ \alpha(s) = A(\alpha''(s)).$$

Temos $JA = AJ$ se a isometria A mantém a orientação e $JA = -AJ$ se A inverte a orientação. Pela fórmula da curvatura de uma curva de \mathbb{E}_1^2 , supondo que A mantém a orientação temos,

$$k_{M \circ \alpha}(s) = k_\alpha(s).$$

Notamos, ao supor que A inverte a orientação, que $k_{M \circ \alpha}(s) = -k_\alpha(s)$.

Desta forma, queremos encontrar uma curva tipo-tempo parametrizada pelo comprimento de arco que seja um movimento rígido da curva α e que no instante s_0 passe pelo ponto $\beta(s_0)$ e tenha vetor tangente $\beta'(s_0)$, para usarmos o Teorema de existência e unicidade.

Um movimento rígido é completamente caracterizado pela isometria e pela translação compostas. Sendo assim, fixado $s_0 \in I$, queremos um movimento rígido $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ tal que $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$, $\gamma'(s_0) = \beta'(s_0)$ e $N_\gamma(s_0) = N_\beta(s_0)$. Uma transformação linear fica completamente determinada pela sua ação em vetores de uma base. Usando estes fatos mais o Teorema 1.4, tomamos nossa isometria $A : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ a transformação linear que leva a base ortonormal de Lorentz $\{T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0)\}$ na base ortonormal de Lorentz $\{T_\beta(s_0), N_\beta(s_0)\}$.

Precisamos definir a translação. Queremos a composição de um movimento rígido com a curva α dando a curva β , ou seja, procuramos a translação F_v , onde tenhamos $F_v \circ A \circ \alpha(s_0) = \beta(s_0)$, isto é, $v + A \circ \alpha(s_0) = \beta(s_0)$. Tomamos $v = \beta(s_0) - A \circ \alpha(s_0)$.

Então definimos $\gamma(s) = F_v \circ A \circ \alpha$ e temos,

$$\gamma(s_0) = F_v \circ A \circ \alpha(s_0) = \beta(s_0) - A \circ \alpha(s_0) + A \circ \alpha(s_0) = \beta(s_0),$$

$$\gamma'(s_0) = A \circ \alpha'(s_0) = A(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0),$$

$$N_\gamma(s_0) = JA \circ \alpha'(s_0) = AJ(T_\alpha(s_0)) = A(N_\alpha(s_0)) = N_\beta(s_0),$$

$$k_\gamma(s) = \gamma''(s) \cdot N_\gamma(s) = T'_\beta(s) \cdot N_\beta(s) = k_\beta(s).$$

Pela unicidade da primeira parte, $\gamma = \beta$ como queríamos demonstrar. ■

1.6 Teoria Local das Curvas Espaciais em \mathbb{E}_1^3 .

Na seção anterior foi feito o estudo de curvas tipo-tempo e tipo-espaço em \mathbb{E}_1^2 . Nesta seção, salvo quando mencionamos o contrário, fazemos o estudo das curvas tipo-tempo e tipo-espaço parametrizadas pelo comprimento de arco e de curvas tipo-luz pseudo-parametrizadas pelo comprimento de arco em \mathbb{E}_1^3 .

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço. Então $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = \epsilon$, onde $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$, dependendo do caráter causal de α . Queremos construir um triedro de Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$ para a curva α , ou seja, queremos construir uma base ortonormal de Lorentz de \mathbb{E}_1^3 , para cada $s \in I$. Observamos que se uma curva α em \mathbb{E}_1^3 é tipo-tempo, então qualquer vetor Lorentz ortogonal a $\alpha'(s)$ deve ser tipo-espaço para todo $s \in I$. Mas, se α é uma curva tipo-espaço um vetor Lorentz ortogonal a um vetor $\alpha'(s)$ pode ter qualquer caráter causal. Desta forma, nesta seção, vamos analisar somente curvas tipo-espaço tais que a curva $\alpha'(s)$ tenha um caráter causal fixo, isto é, nos detemos as curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ tipo-espaço onde a curva $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ é uma curva tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço com a curva $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ tipo-tempo ou tipo-espaço. Definimos o *triedro de Frenet* de α , usando os campos

vetoriais $T, N, B : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, da seguinte forma:

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Como a curva α' tem caráter causal, segue que o campo $N : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ tem o mesmo caráter causal. Além disso, como supomos no início da seção, α esta parametrizada pelo comprimento de arco, logo, T e N são Lorentz ortogonais. Notamos também que,

$$\begin{aligned} T(s) \cdot T(s) &= \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = \epsilon, & \epsilon &\in \{-1, 1\}, \\ N(s) \cdot N(s) &= \delta, & \delta &\in \{-1, 1\}, \\ B(s) \cdot B(s) &= T(s) \wedge N(s) \cdot T(s) \wedge N(s) \\ &= \det \begin{bmatrix} T(s) \cdot N(s) & T(s) \cdot T(s) \\ N(s) \cdot N(s) & N(s) \cdot T(s) \end{bmatrix} \\ &= -(N(s) \cdot N(s))(T(s) \cdot T(s)) \\ &= -\delta\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é uma base ortonormal de Lorentz, para todo $s \in I$. As funções $k, \tau : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ definidas por,

$$k(s) = T'(s) \cdot N(s), \quad \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) ,$$

são chamadas de *curvatura* e *torção* de α .

Os campos T, N, B são diferenciáveis e suas derivadas T', N', B' , quando escritas como vetores na base $\{T(s), N(s), B(s)\}$, são conhecidas como *equações de Frenet* de α e são dadas por;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta k(s) & 0 \\ -\epsilon k(s) & 0 & -\delta\epsilon\tau(s) \\ 0 & -\delta\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} ,$$

uma vez que, dado $v \in \mathbb{E}_1^3$, para cada $s \in I$,

$$v = \epsilon(v \cdot T(s))T(s) + \delta(v \cdot N(s))N(s) - \delta\epsilon(v \cdot B(s))B(s).$$

Temos também as curvas tipo-espaço parametrizadas pelo comprimento de arco com α' tipo-luz e as curvas tipo-luz pseudo-parametrizadas pelo comprimento de arco. Em tais curvas também introduzimos um triedro de Frenet.

1. **Caso α tipo-espaço com α' tipo-luz.** Para este caso tomamos o campo tangente $T : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dado por, $T(s) = \alpha'(s)$, o campo normal $N : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ por $T'(s) = \alpha''(s)$ e o campo binormal, pelo único vetor $B(s)$ tipo-luz tal que $B(s) \cdot N(s) = 1$ e $B(s)$ é Lorentz ortogonal a $N(s)$. Logo as equações de Frenet de α ficam,

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -1 & 0 & -\tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}.$$

2. **Caso α é curva tipo-luz pseudo-parametrizada pelo comprimento de arco.** Como no caso da curva tipo-espaço, parametrizada pelo comprimento de arco, com vetor normal tipo-luz, vamos construir um triedro de Frenet para α tomando $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) = T'(s)$ e o vetor binormal $B(s)$ como o único vetor tipo-luz tal que $T(s) \cdot B(s) = 1$ e é Lorentz ortogonal a $N(s)$, para todo $s \in I$. Deste modo, as equações de Frenet da curva α ficam,

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau(s) & 0 & -1 \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}.$$

Em ambos os casos, $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s)$ é a torção da curva α , porém não temos uma fórmula para curvatura de curva.

Vimos que uma curva α de \mathbb{E}_1^2 que pode ser parametrizada pelo comprimento de arco, possui uma fórmula para curvatura quando parametrizada por um parâmetro qualquer. Quando falamos de curvas tipo-tempo e tipo-espaço reparametrizáveis pelo comprimento de arco em \mathbb{E}_1^3 também encontramos uma fórmula para a curvatura sobre tal parâmetro.

Na prova desta afirmação, usamos as seguintes igualdades.

$$\alpha(t) = \beta(s(t)), \quad \left(\frac{ds}{dt}\right) = \|\alpha'(t)\|, \quad (1.4)$$

$$\alpha'(t) = \beta'(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right) = T(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right), \quad (1.5)$$

$$\alpha''(t) = \delta k_\beta(s(t))N_\beta(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T(s(t))\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right), \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= \delta k'_\beta(s(t))N_\beta(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + \delta k_\beta(s(t))N'_\beta(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \\ &+ \delta k_\beta(s(t))N_\beta(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T'(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) + T(s(t))\left(\frac{d^3s}{dt^3}\right), \end{aligned}$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (\delta k_\beta(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^3)B(s(t)). \quad (1.7)$$

Da definição do campo normal da curva α , temos $\|T'(s)\|N(s) = T'(s)$, logo $\|T'(s)\|\delta = T'(s) \cdot N(s) = k(s)$ portanto $|k(s)| = \delta\|T'(s)\|$. Deste modo, aplicamos a norma na igualdade (1.7), e temos,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| &= \|(\delta k_\beta(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^3)B(s(t))\| \\ &= |k_\beta(s(t))|\|\alpha'(t)\|^3 \\ &= \delta k_\beta(s(t))\|\alpha'(t)\|^3. \end{aligned}$$

Ainda por (1.7), o vetor binormal $B(s(t))$ pode ser escrito do seguinte modo,

$$\begin{aligned} B(s(t)) &= \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{|k_\beta(s(t))|\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}, \end{aligned}$$

e a curvatura de α é dada por

$$k_\alpha(t) = k_\beta((s(t))) = \delta \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Encontramos a torção de α , através das equações de Frenet de α e da forma dada para o vetor $(B(s(t)))$, pois

$$B(s(t)) \cdot \alpha'''(t) = \delta k_\beta((s(t))) \|\alpha'(t)\|^3 \tau_\beta((s(t))),$$

e

$$\begin{aligned} (\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) &= (\delta k_\beta((s(t)))) (\phi^{-1})'^3(t) B(s(t)) \cdot \alpha'''(t) \\ &= ((\delta k_\beta((s(t)))) (\phi^{-1})'^3(t) \delta k_\beta((s(t)))) \|\alpha'(t)\|^3 \tau_\beta((s(t))) \\ &= k_\beta^2((s(t))) \|\alpha'(t)\|^6 \tau_\beta((s(t))), \end{aligned}$$

que implica

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(t) = \tau_\beta((s(t))) &= \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{k_\beta^2((s(t))) \|\alpha'(t)\|^6} \\ &= \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Teorema 1.10 (Teorema Fundamental da Curvas tipo-tempo ou tipo-espaço de \mathbb{E}_1^3). *Dadas as funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular tipo-tempo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ tal que s é o comprimento de arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção. Além disso, qualquer outra curva $\bar{\alpha}$ tipo-tempo, satisfazendo às mesmas condições, difere de α por um movimento rígido; isto é, existe uma transformação de lorentz A de \mathbb{E}_1^3 , com determinante positivo, e um vetor c tal que $\bar{\alpha} = A \circ \alpha + c$.*

Prova: A demonstração é idêntica a feita para o caso de uma curva parametrizada regular do espaço euclidiano.

Proposição 1.2. *A curvatura e a torção de uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco são invariantes isométricos, ou seja, se $M : \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ é um movimento rígido de \mathbb{E}_1^3 , se $\beta(s) = M \circ \alpha(s)$, então $k_\beta = k_\alpha$ e $\tau_\beta = \pm\tau_\alpha$.*

Prova: Consideramos $M = F_v \circ A$, com $A : \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma matriz de transformação de Lorentz com determinante positivo e $F_v : \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma translação de um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ qualquer. Assim temos,

$$\beta'(s) = A\alpha'(s), \quad \beta''(s) = A\alpha''(s), \quad \beta'''(s) = A\alpha'''(s), \quad A(u \wedge v) = \pm Au \wedge Av.$$

Logo,

$$\begin{aligned} k_\beta(s) &= \beta''(s) \cdot \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} \\ &= A\alpha''(s) \cdot \frac{A\alpha''(s)}{\|A\alpha''(s)\|} \\ &= \alpha''(s) \cdot \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ &= T'_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s) = k_\alpha(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\beta(s) &= N'_\beta(s) \cdot B_\beta(s) \\ &= \left(T''_\beta \left(\frac{1}{\|T'_\beta(s)\|} \right) - \left(\frac{1}{\|T'_\beta(s)\|} \right)' T'_\beta(s) \right) \cdot B_\beta(s) \\ &= \frac{A\alpha''(s)}{\|A\alpha'(s)\|} \cdot A\alpha'(s) \wedge A\alpha''(s) \\ &= \frac{A\alpha''(s)}{\|A\alpha'(s)\|} \cdot \pm A(\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)) \\ &= \pm \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha'(s)\|} \cdot \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \\ &= \pm \left(T''_\alpha \left(\frac{1}{\|T'_\alpha(s)\|} \right) - \left(\frac{1}{\|T'_\alpha(s)\|} \right)' T'_\alpha(s) \right) \cdot B_\alpha(s) \\ &= \pm N'_\alpha(s) \cdot B_\alpha(s) = \pm\tau_\alpha(s). \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

O Teorema de Schur no Plano de Minkowski

Neste capítulo é demonstrada uma versão do Teorema de Schur para o plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 feita por R. López em [1]. Antes enunciamos o Teorema de Schur clássico da geometria diferencial de \mathbb{R}^3 e , por meio de contra-exemplo, mostramos que não existe uma versão do Teorema de Schur para o espaço de Minkowski \mathbb{E}_1^3 . Além disso, mostramos que entre todas as curvas tipo-espaço (resp. tipo-tempo) que são caminhos entre dois pontos de \mathbb{E}_1^3 , com curvatura inferior a $r \in \mathbb{R}$ a circunferência tipo-espaço (resp. tipo-tempo) de raio $1/r$ é a que possui menor comprimento. Devido ao nosso interesse neste capítulo em curvas que possuem curvatura não nula em todo ponto, sempre que falarmos de curvas tipo-espaço, as supomos regulares com derivada segunda não nula.

2.1 O Teorema de Schur no Plano de Minkowski

O Teorema de Schur, clássico da geometria diferencial do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , compara distâncias entre as cordas formadas por pontos que são extremidades de curvas que possuem o mesmo comprimento se as curvaturas destas curvas satisfazem uma certa relação de desigualdade. Além disso, uma das curvas deve ser plana e convexa. Grosseiramente, a curvatura de uma curva limitada convexa no plano

euclidiano \mathbb{R}^2 mede o quanto encurvamos um segmento de reta a partir de suas extremidades. Ainda de modo grosseiro, no plano euclidiano, o Teorema de Schur diz que quanto mais arqueamos um segmento de reta mais aproximamos os seus extremos. Formalmente;

Teorema 2.1. (Schur) *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas curvas (suficientemente diferenciáveis) de mesmo comprimento L , parametrizadas pelo comprimento de arco s . Suponha que α_1 é uma curva planar tal que α_1 junto com a corda unindo suas extremidades limitam uma região convexa do plano. Suponha d_1 e d_2 os comprimentos das cordas unindo as extremidades de α_1 e α_2 , respectivamente. Assuma que*

$$k_1 \geq k_2,$$

onde $k_1(s), k_2(s)$ são as curvaturas das curvas α_1, α_2 respectivamente. Então

$$d_1 \leq d_2,$$

e a igualdade vale se, e somente se, α_1 e α_2 são congruentes, ou seja, se α_1 e α_2 são as mesmas a menos de movimento rígido.

O Teorema de Schur não possui um similar espaço de Minkowski \mathbb{E}_1^3 , como observamos nos seguintes contra-exemplos.

Consideramos duas famílias de curvas em \mathbb{E}_1^3 , $\alpha_1(r, \cdot)$ e $\alpha_2(r, \cdot)$ com $r \in \mathbb{R}$ positivo:

$$\begin{aligned}\alpha_1(r, s) &= (r \cos(s/r), r \sin(s/r), 0), \\ \alpha_2(r, s) &= (0, r \cosh(s/r), r \sinh(s/r)).\end{aligned}$$

Para qualquer $r > 0$ tomado,

$$\begin{aligned}\alpha_1'(r, s) &= (-\sin(s/r), \cos(s/r), 0), \\ \alpha_2'(r, s) &= (0, \sinh(s/r), \cosh(s/r)).\end{aligned}$$

Notamos que a primeira família é formada por circunferências de raio r contidas no plano Oxy centradas na origem e a segunda é formada por ramos de hipérbolas equiláteras contidas no plano Oyz com seus vértices no semi eixo positivo y . Como $\|\alpha'_1\| = 1 = \|\alpha'_2\|$, as curvas das famílias estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Além disso, todos os elementos das famílias são curvas planas e convexas, com $k_1 = \delta_1\|T'_1\|$ e $k_2 = \delta_2\|T'_2\|$, onde T_1, T_2 são os campos tangentes ao longo de α_1 e α_2 , respectivamente, e $\delta_i = N_{\alpha_i} \cdot N_{\alpha_i}$ com $i = 1, 2$. Para todas as curvas $\delta_i = 1$, e,

$$\begin{aligned} T_1(s) &= \alpha'_1(r, s) = (-\text{sen}(s/r), \text{cos}(s/r), 0) \\ T'_1(s) &= (1/r)(-\text{cos}(s/r), \text{sen}(s/r), 0) \\ \|T'_1\| &= 1/r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(s) &= \alpha'_2(r, s) = (0, \text{senh}(s/r), \text{cosh}(s/r)) \\ T'_2(s) &= -(1/r)(0, \text{cosh}(s/r), \text{senh}(s/r)) \\ \|T'_2\| &= |(1/r)|\sqrt{(\text{cosh}(s/r))^2 - \text{senh}(s/r)^2}| \\ &= |(1/r)|\sqrt{|-1|} = 1/r. \end{aligned}$$

As curvaturas das curvas $\alpha_1(r, \cdot)$, $\alpha_2(r, \cdot)$ satisfazem $k_1(s) = k_2(s)$, para todo s . Definindo $d_i(r) = \|\alpha_i(r, L) - \alpha_i(r, 0)\|$, para $i = 1, 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} d_1(r) &= \|r(\text{cos}(L/r) - \text{cos}(0), \text{sen}(L/r) - 0, 0)\| \\ &= r\sqrt{(\text{cos}(L/r) - \text{cos}(0))^2 + (\text{sen}(L/r))^2} \\ &= r\sqrt{2(1 - \text{cos}(L/r))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2(r) &= \|r(0, \text{cosh}(L/r) - \text{cosh}(0), \text{senh}(L/r) - \text{senh}(0))\| \\ &= r\sqrt{(\text{cosh}(L/r) - \text{cosh}(0))^2 - (\text{senh}(L/r))^2} \\ &= r\sqrt{|2(1 - \text{cosh}(L/r))|} \\ &= r\sqrt{2(\text{cosh}(L/r) - 1)}, \end{aligned}$$

os termos $(\cosh(L/r) - 1)$ e $(1 - \cos(L/r))$ são positivos para $0 < L < 2\pi r$, pois, $\cosh(x) > 1$ e $-1 < \cos(x) < 1$, para $0 < x < 2\pi$.

Vamos mostrar que $d_1 < d_2$ para $0 < L < 2\pi r$, provando que

$$(\cosh(L/r) - 1) > (1 - \cos(L/r)).$$

Para tal consideramos a função diferenciável $f : [0, 2\pi r) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por,
 $f(s) = (\cosh(s/r) - 1) - (1 - \cos(s/r))$.

Como $f(0) = (\cosh(0/r) - 1) - (1 - \cos(0/r)) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ se mostrarmos que f é crescente em $(0, 2\pi r)$ então $f > 0$ e teremos $(\cosh(L/r) - 1) \geq (1 - \cos(L/r))$ para $0 < L < 2\pi r$.

Derivando f temos:

$$\begin{aligned} f'(s) &= (1/r)(\sinh(s/r) - \sin(s/r)), \\ f'(0) &= (1/r)(\sinh(0) - \sin(0)) = 0, \\ f''(s) &= (1/r^2)(\cosh(s/r) - \cos(s/r)), \\ f''(0) &= (1/r^2)(\cosh(0) - \cos(0)) = (1/r)^2(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, como a função $\cosh(s/r)$ é sempre maior que 1 e a função $\cos(s/r)$ é sempre menor que 1 segue que $f''(s) > 0$ em $(0, 2\pi r)$ uma vez que $f''(0) = 0$. Deste modo, a função f' é crescente em $(0, 2\pi r)$ e como $f'(0) = 0$ a derivada f' é uma função positiva em $(0, 2\pi r)$. Concluimos, que f é uma função crescente em $(0, 2\pi r)$ com $f(0) = 0$, como queríamos. Então, $k_1 = k_2$ e $d_1(r) < d_2(r)$.

Tratamos agora de curvas de famílias distintas e raios distintos, considerando as curvas $\alpha_1(1, s)$ e $\alpha_2(2, s)$. Refazendo os cálculos, como no caso anterior, obtemos $k_1 = 1 > 1/2 = k_2$, $d_1(1) = \sqrt{2(1 - \cos(L))}$ e $d_2(2) = 2\sqrt{2(\cosh(L/2) - 1)}$. Mostraremos que $d_1(1) < d_2(2)$, para $0 < L < \pi$, provando que a função $g : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por,

$$g(s) = (2\sqrt{2(\cosh(s/2) - 1)})^2 - (\sqrt{2(1 - \cos(s))})^2 = 8 \cosh(s/2) + 2 \cos(s) - 10$$

é positiva e que $g(0) = 0$. Como em $[0, \pi)$, $\cosh(x) > 1$ e $\cos(x) < 1$, a função

g está bem definida, pois, $((\cosh(s/2) - 1)$ e $(2(1 - \cos(s)))$ são sempre positivas. Logo, $g(s) > 0$ implica $(2\sqrt{2(\cosh(s/2) - 1)})^2 > (2(1 - \cos(s)))^2$, portanto, $2\sqrt{2(\cosh(s/2) - 1)} > 2(1 - \cos(s))$.

Notamos que $g(0) = 8 \cosh(0) + 2 \cos(0) - 10 = 8 + 2 - 10 = 0$.

Derivando a função g , obtemos,

$$\begin{aligned} g'(s) &= 4 \sinh(s/2) - 2 \sin(s), \\ g'(0) &= 4 \sinh(0) - 2 \sin(0) = 0, \\ g''(s) &= 2 \cosh(s/2) - 2 \cos(s), \\ g''(0) &= 2 \cosh(0) - 2 \cos(0) = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Como $2 \cosh(s/2) > 2$ e $2 \cos(s) < 2$ a derivada $g''(s) > 0$ em $(0, \pi)$, logo, a aplicação g' é crescente em $(0, \pi)$. Sendo $g'(0) = 0$, segue que, a aplicação g' é positiva em $(0, \pi)$, logo, a aplicação g é crescente em $(0, \pi)$. Portanto $g > 0$, como queríamos. Desta maneira, $k_1(s) > k_2(s)$, para todo s , e $d_1(1) < d_2(2)$.

Por último, consideremos as curvas, $\alpha_2(1, s)$ e $\alpha_2(2, s)$ da segunda família. Novamente através de cálculos análogos aos anteriores, $k_1 = 1 > 1/2 = k_2$ e

$$d_2(2) = 2\sqrt{2(\cosh(L/2) - 1)} \quad \text{e} \quad d_2(1) = \sqrt{2(\cosh(L) - 1)}.$$

Aqui temos diretamente $d_2(1) > d_2(2)$, já que $L > 0$ e que a função \cosh é uma função crescente em $(0, +\infty)$. ■

Abaixo colocamos uma demonstração do Teorema de Schur para o plano euclidiano \mathbb{R}^2 entre duas curvas convexas.

Teorema 2.2. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco convexas. Denotemos por k_1, k_2 as funções curvaturas de α_1 e α_2 , respectivamente. Sejam $d_1(s) = d(\alpha_1(0), \alpha_1(s))$ e $d_2(s) = d(\alpha_2(0), \alpha_2(s))$, onde $d(., .)$ é a distância euclidiana de \mathbb{R}^2 . Se $k_1(s) \geq k_2(s)$, então,*

$$d_1(s) \leq d_2(s), \quad s \in [0, l].$$

Além disso, $d_1(s) = d_2(s)$ para todo $s \in [0, l]$ se, e somente se, α_1 e α_2 são congruentes.

Prova: Por hipótese as curvas α_1 e α_2 são convexas. Deste modo, vamos através de um movimento rígido mover a curva α_1 de modo que suas extremidades sejam pontos do eixo Ox e o restante de seu traço esteja abaixo deste mesmo eixo. Sabemos que existe uma função ângulo $\theta_1 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, dada pelo ângulo entre o vetor tangente $T_1(s)$ e o eixo Ox , tal que $\theta_1'(s) = k_1(s)$. Como a curva α_1 é convexa a variação deste ângulo ocorre entre $-\pi$ e π . Tomamos um ponto s_0 tal que a curva α_1 tenha vetor derivada $\alpha_1'(s_0)$ paralelo ao eixo Ox . Tal s_0 existe, basta tomarmos o ponto onde a função y tem um mínimo. Desta forma, temos $\theta_1(s_0) = 0$. Vamos agora mover a curva α_2 , de modo que o vetor tangente $\alpha_2'(s_0)$, seja paralelo ao vetor $\alpha_1'(s_0)$ e tenha mesmo sentido de α_1 . Se consideramos a função ângulo $\theta_2 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ entre o vetor tangente $T_2(s)$ da curva α_2 em $\alpha_2(s)$ com o eixo Ox , temos então $\theta_2(s_0) = 0$ e assim

$$\begin{aligned}\theta_1(s) &= \int_{s_0}^s \theta_1'(u) du \\ &= \int_{s_0}^s k_1(u) du \geq \int_{s_0}^s k_2(u) du \\ &= \int_{s_0}^s \theta_2'(u) du = \theta_2(s).\end{aligned}$$

Tomando $0 < \theta_1(s) < \pi$, como a função cosseno é decrescente neste intervalo e é uma aplicação par temos $\cos(\theta_1(s)) \leq \cos(\theta_2(s))$. Lembrando que $\alpha_1'(s) = (\cos(\theta_1(s)), \text{sen}(\theta_1(s)))$ e $\alpha_2'(s) = (\cos(\theta_2(s)), \text{sen}(\theta_2(s)))$, encontramos

$$\begin{aligned}d_1(s) &= \|\alpha_1(s) - \alpha_1(0)\| \\ &= |x_1(s) - x_1(0)| = x_1(s) - x_1(0) \\ &= \int_0^s x_1'(u) du = \int_0^s \cos(\theta_1(u)) du \\ &\leq \int_0^s \cos(\theta_2(u)) du = \int_0^s x_2'(u) du \\ &= x_2(s) - x_2(0) \leq |x_2(s) - x_2(0)| \\ &\leq \|\alpha_2(s) - \alpha_2(0)\| = d_2(s)\end{aligned}$$

A igualdade entre $d_1(s)$ e $d_2(s)$ implica na igualdade em $\cos(\theta_1(s)) = \cos(\theta_2(s))$, que por sua vez, pela injetividade da função cosseno entre 0 e π , que

$$\theta_1(s) = \theta_2(s),$$

logo, $k_1(s) = k_2(s)$. Assim pelo Teorema Fundamental de Curvas Planas α_1 e α_2 são congruentes. ■

Teorema 2.3. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ duas curvas, com o mesmo caráter causal e comprimento L , parametrizadas pelo comprimento de arco. Suponha que o traço de α_1 , unido com a corda que une as suas extremidades limita um conjunto convexo. Considere $d_i, i \in \{1, 2\}$ os comprimentos das cordas unindo as extremidades do traço de α_i . Assuma que $k_1(s) \geq |k_2(s)|, s \in [0, L]$, são as curvaturas de α_1 e α_2 , respectivamente. Então $d_1 \geq d_2$ e vale a igualdade se, e somente se, α_1 e α_2 são congruentes.*

Prova: Consideramos β a reparametrização da curva α tipo-espaço, de modo que o traço da curva β seja o gráfico de uma função diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$\beta'(t) = (1, f'(t)) \quad e \quad \beta''(t) = (0, f''(t)).$$

Da expressão da curvatura para um parâmetro qualquer, segue que

$$k(t) = \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{f''(t)}{(1 - [f'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como α é tipo-espaço, $1 - [f'(t)]^2 > 0$.

Se α é curva tipo-tempo, seu traço pode ser analisado como gráfico de uma função g , através de uma reparametrização de α , dada por $\beta(t) = (g(t), t)$ e a curvatura por esta reparametrização é dada por

$$k(t) = -\frac{g''(t)}{(1 - [g'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Novamente, $1 - [g'(t)]^2 < 0$ porque a curva α é tipo-tempo.

Desta forma, se $k > 0$ temos $g''(t) < 0$ e $f''(t) > 0$ e as funções g e f são convexas, conseqüentemente a região limitada pelo traço de α unido da corda que une as extremidades do traço da própria α é convexa. Disto obtemos que toda curva α com caráter causal tipo-tempo ou tipo-espaço é uma curva limite a uma região convexa se $k > 0$ ou $k < 0$.

Observação 2.1. *Da mesma forma que existem curvas de curvatura constante no plano euclidiano, também existem em \mathbb{E}_1^2 . Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é a parametrização pelo comprimento de arco de uma curva diferenciável com curvatura constante nula, então $\alpha''(s) = 0$ para todo s , logo $\alpha'(s) = c$, onde c é constante em \mathbb{E}_1^2 . Integrando esta equação obtemos $\alpha(s) = cs + \bar{c}$, com \bar{c} outra constante em \mathbb{E}_1^2 , portanto, α é um segmento de reta em \mathbb{E}_1^2 . Mas, suponhamos que a curvatura da curva α é constante e não nula $k(s) = k$. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é tipo-espaço, dada por, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ temos $[x'(s)]^2 - [y'(s)]^2 = 1$, então existe uma função diferenciável $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x'(s) = \cosh(\theta(s))$ e $y'(s) = \sinh(\theta(s))$, para todo $s \in I$. Com isso, segue que,*

$$\alpha'(s) = (\cosh(\theta(s)), \sinh(\theta(s))), \quad T'(s) = \alpha''(s) = \theta'(s)(\sinh(\theta(s)), \cosh(\theta(s))).$$

Como estamos supondo a curvatura constante não nula k ,

$$\begin{aligned} k &= k(s) = -\epsilon T'(s) \cdot N(s) \\ &= -\theta'(s)(\sinh(\theta(s)), \cosh(\theta(s))) \cdot (\sinh(\theta(s)), \cosh(\theta(s))) = \theta'(s). \end{aligned}$$

Integrando, encontramos $\theta(s) = ks + c$, onde c é uma constante de \mathbb{R} . Integrando α' obtemos,

$$\alpha(s) = \frac{1}{k}(\sinh(\theta(s)), \cosh(\theta(s))),$$

que é um ramo de hipérbole no plano euclidiano.

No caso em que α é uma curva tipo-tempo, temos $[x'(s)]^2 - [y'(s)]^2 = -1$, então supondo existir θ tal que $x'(s) = \sinh(\theta(s))$ e $y'(s) = \cosh(\theta(s))$ encontramos, procedendo de modo análogo a curva tipo-espaço, $\theta(s) = ks + c$, e

$$\alpha(s) = \frac{1}{k}(\cosh(\theta(s)), \sinh(\theta(s))).$$

Logo, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ é uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço, parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura constante não nula para todo $s \in I$, o traço de α representa um ramo de hipérbole de \mathbb{R}^2 .

Os ramos das hipérbolas de \mathbb{R}^2 de equações $x^2 - y^2 = -r^2$ e $x^2 - y^2 = r^2$, são portanto, as curvas parametrizadas em \mathbb{E}_1^2 de curvatura constante e pelo teorema de fundamental de curvas planas em \mathbb{E}_1^2 são únicas a menos de movimento rígido com tal propriedade. Na geometria diferencial do espaço euclidiano as únicas curvas com curvatura constante, a menos de movimento rígido, são as circunferências e fazendo uma analogia os ramos de hipérbolas são chamadas de *circunferências tipo-espaço* e *circunferências tipo-tempo*.

A demonstração do Teorema de Schur está dividida em dois casos baseados no caráter causal da curva;

- *Caso em que as curvas são tipo-espaço.* Quando necessário usamos uma transformação de lorentz positiva de \mathbb{E}_1^2 , dada por

$$\begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) \end{pmatrix},$$

seguida de uma translação. Sejam $\alpha_i(s) = (x_i(s), y_i(s))$, com $s \in I = [0, L]$, $i = 1, 2$ curvas regulares tipo-espaço, parametrizadas pelo comprimento de arco. Então $[x_i'(s)]^2 - [y_i'(s)]^2 = 1$, para todo $s \in I$, $i = 1, 2$. Logo, existem aplicações diferenciáveis $\theta_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha_i'(s) = (\cosh(\theta_i(s)), \sinh(\theta_i(s)))$. Consequentemente,

$$\alpha_i''(s) = \theta_i'(s)(\cosh(\theta_i(s)), \sinh(\theta_i(s))) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} k_i(s) &= -T_i(s) \cdot N_i(s) \\ &= -\theta_i'(s)(\sinh(\theta_i), \cosh(\theta_i(s))) \cdot (\sinh(\theta_i), \cosh(\theta_i(s))) \\ &= -\theta_i'(s)(-1) = \theta_i'(s). \end{aligned}$$

Através de uma translação e de uma isometria podemos mover a curva α_1 de modo que $\alpha_1(s_1)$ e $\alpha_1(s_2)$ sejam pontos do eixo Ox , ou seja, $y_1(s_1) = y_1(s_2) =$

0. Como a curva α_1 é tipo-espaço pode reparametrizada como gráfico de uma aplicação diferenciável $y = f(x)$ e pelo teorema do valor médio existe $s_0 \in I$ tal que $\alpha'_1(s_0)$ é paralelo ao vetor $\alpha_1(s_2) - \alpha_1(s_1)$. Movendo a curva α_2 com uma translação seguida de uma isometria podemos deixar $\alpha'_2(s_0)$ paralelo $\alpha'_1(s_0)$.

Por hipótese, $k_1(s) \geq |k_2(s)|$, logo $\theta'_1(s) \geq |\theta'_2(s)|$, $s \in I$. Como $\alpha'_1(s_0)$ e $\alpha'_2(s_0)$ são paralelos ao eixo Ox então $\sinh(\theta_i)(s_0) = 0$ implicando $\theta_i(s_0) = 0$. Juntamos estas informações e usamos do cálculo diferencial a desigualdade

$$\int \theta'_1(s) ds \geq \int |\theta'_2(s)| ds \geq \left| \int \theta'_2(s) ds \right|,$$

encontramos $\theta_1(s) \geq |\theta_2(s)|$, para $s \in [s_0, s_2]$ e $\theta_1(s) \leq -|\theta_2(s)| \leq 0$, para $s \in [s_1, s_0]$.

De fato, para $s \in [s_1, s_0]$, usando as desigualdades para integrais acima,

$$\int_s^{s_0} \theta'_1(s) ds = \theta_1(s_0) - \theta_1(s) = -\theta_1(s),$$

$$\int_s^{s_0} |\theta'_2(s)| ds \geq \left| \int_s^{s_0} \theta'_2(s) ds \right| = |\theta_2(s_0) - \theta_2(s)| = |\theta_2(s)|,$$

logo,

$$-\theta_1(s) \geq |\theta_2(s)| \Rightarrow \theta_1(s) \leq -|\theta_2(s)| \leq 0.$$

Para $s \in [s_0, s_2]$, do mesmo modo,

$$\int_{s_0}^s \theta'_1(s) ds = \theta_1(s) - \theta_1(s_0) = \theta_1(s),$$

$$\int_{s_0}^s |\theta'_2(s)| ds \geq \left| \int_{s_0}^s \theta'_2(s) ds \right| = |\theta_2(s) - \theta_2(s_0)| = |\theta_2(s)|,$$

logo,

$$\theta_1(s) \geq |\theta_2(s)|.$$

Em virtude da função cosseno hiperbólico ser crescente em $[0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0]$, $\cosh(\theta_1(s)) \geq \cosh|\theta_2(s)|$, $s \in [s_1, s_2]$. Observamos que

$\alpha_1(s_2) - \alpha_1(s_1)$ é um segmento paralelo ao eixo Ox , pois, $\alpha_1(s_2)$ e $\alpha_1(s_1)$ são pontos do eixo Ox , portanto é um vetor tipo-espaço. O vetor $\alpha_2(s_2) - \alpha_2(s_1)$, é também tipo-espaço pelo lema 1.3. Logo

$$\begin{aligned}
d_1 &= \|\alpha_1(s_2) - \alpha_1(s_1)\| \\
&= |x_1(s_2) - x_1(s_1)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} x_1'(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{s_1}^{s_2} \cosh(\theta_1(s)) ds \right| \geq \int_{s_1}^{s_2} \cosh|\theta_2(s)| ds \\
&= \int_{s_1}^{s_2} \cosh(\theta_2(s)) ds \\
&= \int_{s_1}^{s_2} |\cosh(\theta_2(s))| ds \\
&= \int_{s_1}^{s_2} |x_2'(s)| ds \geq \left| \int_{s_1}^{s_2} x_2'(s) ds \right| \\
&= |x_2(s_2) - x_2(s_1)| \geq \|\alpha_2(s_2) - \alpha_2(s_1)\| \\
&= d_2,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade, vem do fato que um vetor (a, b) tipo-espaço satisfaz $|a| \geq \sqrt{a^2 - b^2}$. Veja que $d_1 = d_2$ se, e somente se, $\theta_1 = \theta_2$ e isto significa que $k_1 = k_2$ e pelo Teorema Fundamental de curvas tipo-espaço no plano de Minkowski assegura a igualdade das curvas α_1 e α_2 a menos de movimento rígido do espaço \mathbb{E}_1^2 .

- *Caso em que as curvas são tipo-tempo.* Neste caso as mudanças com relação a demonstração anterior são poucas. Como as curvas são parametrizadas pelo comprimento de arco satisfazem $\alpha_i'(s) \cdot \alpha_i'(s) = -1$, logo existem aplicações diferenciáveis $\theta_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha_i'(s) = (\sinh(\theta_i(s)), \cosh(\theta_i(s)))$. O triedro de Frenet terá os campos $\{T_i, N_i\}$, onde neste caso $N_i(s) = (\cosh(\theta_i(s)), \sinh(\theta_i(s)))$ e por sua vez $k_i(s) = T_i(s) \cdot N_i(s) = \theta_i'(s)$. Novamente, usando um movimento rígido podemos supor $\alpha_1(s_1)$ e $\alpha_1(s_2)$ pontos do eixo Oy , isto é,

$x_1(s) = x_2(s) = 0$. Tomamos então o vetor $\alpha'_1(s_0)$ paralelo ao eixo Oy e movimentamos a curva α_2 de modo que $\alpha'_2(s_0)$ é paralelo a $\alpha'_1(s_0)$. Por hipótese, $k_1(s) \geq |k_2(s)|$, então, $\theta'_1(s) \geq |\theta'_2(s)|$. Como no caso anterior $\cosh(\theta_1(s)) \geq \cosh|\theta_2(s)|$ para todo $s \in [s_1, s_2]$, e assim

$$\begin{aligned}
 d_1 &= |y_1(s_2) - y_1(s_1)| \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} \cosh(\theta_1(s)) ds \\
 &\geq \int_{s_1}^{s_2} \cosh(\theta_2(s)) ds \\
 &\geq |y_2(s_2) - y_2(s_1)| \\
 &\geq \|\alpha_2(s_2) - \alpha_2(s_1)\| \\
 &= d_2,
 \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem de (a, b) ser vetor tipo-tempo, então $|b| \geq \|(a, b)\| = \sqrt{-a^2 + b^2}$. Para valer a igualdade entre d_1 e d_2 é necessário $k_1 = k_2$ e então como antes pelo teorema fundamental para curvas planas tipo-tempo α_1 e α_2 devem ser congruentes. ■

2.2 Aplicações do Teorema de Schur

Nesta seção são demonstradas duas aplicações do Teorema de Schur que buscam a curva de menor comprimento unindo dois pontos, adicionando certas condições sobre suas curvaturas para se adequar as hipóteses ao teorema.

Observação 2.2. Ressaltamos que ao contrário do que acontece no caso Euclidiano, onde uma circunferência que passa por dois pontos dados precisa ter raio superior a metade do comprimento da distância entre estes dois pontos, no plano de Minkowski dados dois pontos P e Q e um número real $r > 0$ sempre existe uma circunferência de raio r que passa por P e Q . Isto ocorre em função das circunferências no plano de Minkowski serem hipérboles equiláteras de \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.4. *Sejam P e Q dois pontos de \mathbb{E}_1^2 tais que o vetor $Q - P$ é um vetor tipo-espaço (resp. tipo-tempo). Denote por d , a distância entre Q e P . Se α é uma curva tipo-espaço (resp. tipo-tempo) unindo P e Q com curvatura $0 \leq k(s) \leq 1/r$. Então o comprimento de α é maior ou igual o comprimento de uma circunferência de raio r unindo P e Q .*

Prova: Sabemos que existe uma curva α tipo-espaço que passa pelos pontos P e Q . Usando um movimento rígido de \mathbb{E}_1^2 movemos a curva de modo que os pontos P e Q estejam sobre o eixo Ox , e o caráter causal de α é preservado. Seja α_1 a parametrização de uma circunferência de raio r que passa pelos pontos P e Q . Ao comprimento do arco da circunferência α_1 que une P e Q chamamos de L_1 e ao comprimento da curva α do ponto P ao ponto Q chamamos de L . Tomamos o arco de α_1 que tem comprimento L (este arco tem seus limites em pontos cujo o segmento que os une é paralelo ao eixo Ox) e estamos dentro das hipóteses do Teorema de Schur, pois a curvatura de α_1 é $1/r$, para todo ponto de α_1 , logo, $d_1 > d$, onde d_1 é o comprimento do segmento que une as extremidades do arco de α_1 de comprimento L e d o comprimento do segmento que une P e Q . Encontramos o arco da circunferência α_1 , tal que a distância entre os pontos da sua extremidade seja d , diminuindo o comprimento do arco, portanto $L_1 < L$. ■

Dados dois pontos P e Q no plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 tal que o vetor $Q - P$ é tipo-espaço (resp. tipo-tempo), o segmento de reta é a curva tipo-espaço (resp. tipo-tempo) de maior comprimento unindo P e Q . De fato, colocamos, inicialmente, os pontos P e Q sobre o eixo Ox (resp. eixo Oy) por um movimento rígido de \mathbb{E}_1^2 . Uma curva tipo-espaço (resp. tipo-tempo) de parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ que liga os pontos $\alpha(a)=P$ e $\alpha(b)=Q$, satisfaz, $x'(t) \neq 0$, para todo t . Supondo $x'(t) > 0$, para todo t , e chamando o comprimento de α de L , segue que,

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|\alpha'(s)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(s) - y'^2(s)} dt \leq \int_a^b x'(s) dt \\ &= x(b) - x(a) = \|\alpha(b) - \alpha(a)\| = \|Q - P\|. \end{aligned}$$

Teorema 2.5. *Sejam P e Q dois pontos distintos de \mathbb{E}_1^2 tais que o vetor $Q-P$ é tipo-espaço (resp. tipo-tempo) e $c > 0$. Dentre todas as curvas tipo-espaço (resp. tipo-tempo) cujas extremidades são P e Q e cuja curvatura $k(s)$ satisfaz $0 \leq k(s) \leq c$, a que possui o menor comprimento é a circunferência de raio $1/c$.*

Observação 2.3. Não existe uma versão deste resultado para o caso Euclidiano pois a menor distância entre dois pontos é o segmento de reta unindo P e Q . No plano Euclidiano, o interesse está nas curvas fechadas onde $P = Q$, neste caso sabemos que a resposta é a circunferência. Porém, no plano de Minkowski não existe curva do tipo-espaço ou tipo-tempo fechadas, porque são gráficos de funções.

Prova: Como na demonstração do Teorema 2.4 o segmento $Q-P$ é tipo-espaço e após movimento rígido, os pontos P e Q estão no eixo Ox . Consideramos a circunferência β_1 de raio $1/c$ que passa por P e Q e L_1 o comprimento do arco de β_1 entre P e Q . Após um movimento rígido de \mathbb{E}_1^2 ao eixo Ox , a curva β_1 se parametriza como $\alpha_1(s) = (\text{sen}(s/c), \text{cosh}(s/c))$. Tomemos β_2 a curva de curvatura $k_2(s) \leq c = k_1(s)$ unindo P e Q e com comprimento L_2 . Assumimos $L_2 \leq L_1$.

Seja C o arco de β_1 com comprimento L_2 tal que a corda S' das extremidades é paralelo ao eixo Ox . Como $L_2 < L_1$, S' está mais próximo do vértice da hipérbole que S , segmento de reta unindo P e Q , isto é, entre S e o vértice da hipérbole β_1 . Em particular, os comprimentos d' e d , respectivamente, satisfazem $d' < d$. Entretanto, pelo Teorema de Schur, $d \geq d'$ que é uma contradição. ■

Capítulo 3

Uma Caracterização de Hélices Inclinadas em \mathbb{E}_1^3 .

3.1 Hélices Inclinadas em \mathbb{E}_1^3 .

Nesta seção citamos direção como um vetor unitário em \mathbb{E}_1^3 . Iniciamos este capítulo definindo o conceito de hélice no espaço de Minkowski. No espaço euclidiano, uma hélice generalizada é uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco, tal que, para todo $s \in I$ o ângulo entre o vetor $\alpha'(s)$ e uma direção fixa $v \in I$, não muda com o movimento do ponto $\alpha(s)$. No espaço euclidiano temos a relação entre o cosseno de um ângulo θ entre dois vetores unitários u e v e o produto interno de \mathbb{R}^3 , dada por $\cos(\theta) = \langle u, v \rangle$.

No espaço de Minkowski a definição de ângulo, está restrita a vetores tipo-tempo de mesma paridade, e isto se torna um problema para definirmos uma hélice generalizada em \mathbb{E}_1^3 . Porém, usamos a relação entre o cosseno de um ângulo entre dois vetores e o produto interno, no espaço euclidiano, para caracterizarmos uma hélice como a curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco, dizendo que α é uma hélice se, para todo $s \in I$, a aplicação $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por, $f(s) = \langle T(s), v \rangle$, é constante, onde $T(s)$ é o campo tangente do triedro de Frenet no ponto $\alpha(s)$ e $v \in \mathbb{R}^3$ uma direção fixada. Baseados nesta relação definimos.

Definição 3.1. Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, parametrizada pelo comprimento de arco,

é uma *hélice generalizada no espaço de Minkowski* se existe uma direção $v \in \mathbb{E}_1^3$ tal que a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por, $f(s) = T(s) \cdot v$ é constante, onde $T : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ é o campo tangente a curva α .

Observação 3.1. *Com esta definição de hélice generalizada para uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ observamos que toda hélice generalizada do espaço de Minkowski é uma hélice generalizada do espaço euclidiano, pois, como não existe variação na definição do campo tangente T segue que, para $v = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{E}_1^3$ tal que $c = T(s) \cdot v$, o vetor $w = (a_1, a_2, -a_3)$ satisfaz $\langle T(s), w \rangle = T(s) \cdot v = c$.*

Outra caracterização de uma hélice generalizada no espaço euclidiano é dada através da suas funções curvatura e torção, a mesma caracterização pode ser feita no espaço de Minkowski para curvas tipo-tempo ou tipo-espaço com vetor normal não nulo.

Proposição 3.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, e consideramos $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ a sua torção. Então α é uma hélice generalizada em \mathbb{E}_1^3 se, e somente se, $\frac{\tau}{k} : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante.*

Prova: Iniciamos a demonstração supondo que α é uma hélice em \mathbb{E}_1^3 . Pela definição de hélice $T(s) \cdot v$ é uma constante $c \in \mathbb{R}$, para algum vetor $v \in \mathbb{E}_1^3$ unitário, fixado. Diretamente das equações de Frenet, $0 = T'(s) \cdot v = \delta k(s)N(s) \cdot v$. Por hipótese, $k(s) \neq 0$, $N(s) \cdot v = 0$, deste modo,

$$v = \epsilon(T(s) \cdot v)T(s) - \epsilon\delta(B(s) \cdot v)B(s),$$

assim, derivando o campo v temos $(T(s) \cdot v)' = 0$ e $(B(s) \cdot v)' = 0$. Logo, a função $B(s) \cdot v = d$, d constante. Usando agora a segunda equação de Frenet da curva, dada por $N'(s) = -\epsilon k(s)T(s) - \delta\epsilon\tau(s)B(s)$ e aplicando em ambos os lados da equação o produto lorentziano pelo vetor v , temos

$$0 = N'(s) \cdot v = -\epsilon k(s)(T(s) \cdot v) - \delta\epsilon\tau(s)(B(s) \cdot v) = -\epsilon k(s)c - \delta\epsilon\tau(s)d$$

logo,

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{-c}{\delta d}.$$

Para a prova da recíproca, observamos que a constante $\frac{\tau(s)}{k(s)} = c$ pode ser nula ou não nula. Se $c = 0$, então $\tau(s) = 0$ e o vetor binormal $B(s)$ é um vetor constante b , implicando a inclusão da curva α em um plano P . Como $T(s) \cdot b = 0$, para todo s , a curva α é uma hélice generalizada.

Se $c \neq 0$, tomamos o campo $v(s) = T(s) + \frac{1}{c}B(s)$, e obtemos

$$v'(s) = T'(s) + \frac{1}{\epsilon c}B'(s) = \delta k(s)N(s) + \frac{1}{\epsilon c}(-\delta\epsilon\tau(s)N(s)).$$

Por hipótese, $\frac{\tau(s)}{k(s)} = c$ implica, $\tau(s) = ck(s)$, logo, $v'(s) = 0$. Portanto, $v(s) = v$ é constante e satisfaz

$$T(s) \cdot v = T(s) \cdot (T(s) + \frac{1}{c}B(s)) = T(s) \cdot T(s) = \epsilon.$$

■

Definição 3.2. Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *hélice inclinada* quando existe uma direção $v \in \mathbb{R}^3$ que mantém um ângulo fixo com a reta normal em todo ponto.

S. Izumiya e N. Takeuchi demonstram em [6] a existência de uma caracterização para hélices inclinadas no espaço euclidiano com o seguinte:

Teorema 3.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $k(s) \neq 0$, $s \in I$ e com torção τ . Então α é hélice inclinada se, e somente se, a função*

$$g(s) = \frac{k^2}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k} \right)'(s)$$

é constante em todo ponto do intervalo de definição da curva.

Prova: A prova deste teorema é relativamente simples. Mostramos, primeiramente, que α é hélice inclinada se, e somente se, o campo normal da curva

$n_\alpha(s) : I \rightarrow S^2$ é um arco de circunferência em S^2 . De fato, o traço de n_α é um arco de circunferência em S^2 se, e somente se, existe um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que para todo $s \in I$,

$$\|n_\alpha(s) - v\| = r.$$

Esta igualdade é verdadeira se, e somente se, $\langle n_\alpha(s), v \rangle = c$. Agora, calculamos a curvatura geodésica da normal n_α em S^2 e mostramos que é dada pela função g . Para isto, lembramos que a curvatura geodésica de um campo tangente unitário w ao longo de uma curva γ é dada por

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, \mathbf{N} \wedge w \right\rangle,$$

onde \mathbf{N} é a normal de Gauss de S^2 . Neste nosso caso tomamos o campo w como sendo $\frac{dn_\alpha}{dt}$ e usando as equações de Frenet de uma curva em \mathbb{R}^3 temos que a curvatura geodésica da normal de α tem a fórmula dada por g . ■

Como não existe definição de ângulo no espaço de Minkowski introduzimos a seguinte:

Definição 3.3. *Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ parametrizada pelo comprimento de arco é uma hélice inclinada se existe uma direção fixa v em \mathbb{E}_1^3 tal que a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por, $f(s) = N(s) \cdot v$ é constante.*

Notamos que assim como no caso de uma hélice generalizada, uma hélice inclinada no espaço de Minkowski também é uma hélice inclinada no espaço euclidiano.

Mostramos agora que é possível caracterizar hélices inclinadas no espaço de Minkowski. Para isto, restringimos o conjunto de curvas às que possuem curvatura e torção e segunda derivada não nulas.

Teorema 3.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com vetor normal tipo-tempo ou tipo-espaço. Então $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ é uma hélice inclinada se, e somente se, uma das duas funções*

$$\frac{k^2}{(k^2 - \delta\tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k}\right)' \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{(\tau^2 - \delta k^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k}\right)',$$

é constante em todo lugar onde $k^2 - \delta\tau^2$ não se anula.

Prova: Como a curva α é tipo-tempo ou tipo-espaço com vetor normal tipo-tempo ou tipo-espaço em \mathbb{E}_1^3 , o triedro de Frenet $\{T, N, B\}$ é dado por,

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Fazemos primeiro a implicação (\Rightarrow). Como a curva α é uma hélice inclinada existe uma direção $v \in \mathbb{E}_1^3$ tal que a função $N(s) \cdot v$ é constante. Para cada $s \in I$, o conjunto $\{T, N, B\}$ é uma base ortonormal lorentziana e escrevemos o vetor v como um campo constante usando funções diferenciáveis $a_1, a_2, a_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1(s)T(s) + a_2(s)N(s) + a_3(s)B(s).$$

Notamos que $a_2(s) = N(s) \cdot v = c$, onde c é uma constante em \mathbb{R} . Derivando a expressão que determina a constante v em \mathbb{E}_1^3 , e usando as equações de Frenet para a curva chegamos ao seguinte sistema;

$$\begin{cases} a_1'(s) + c\epsilon k(s) & = 0 \\ \delta k(s)a_1(s) - \delta\tau(s)a_3(s) & = 0 \\ a_3'(s) - c\delta\epsilon\tau(s) & = 0, \end{cases}$$

onde da segunda equação $a_1(s) = a_3(s) \left(\frac{\tau}{k}\right)(s)$. Segue ainda que

$$v \cdot v = \epsilon a_1^2(s) + \delta c^2 - \delta\epsilon a_3^2(s) = \epsilon a_3^2(s) \left(\frac{\tau}{k}\right)^2(s) + \delta c^2 - \delta\epsilon a_3^2(s).$$

Assim, $a_3^2(s) \left(\left(\frac{\tau}{k} \right)^2 - \delta \right) = -\delta c^2 + v \cdot v$. Consideramos a constante $m > 0$ tal que

$$a_3^2(s) \left(\left(\frac{\tau}{k} \right)^2 - \delta \right) =: \gamma m^2, \gamma \in \{-1, 0, 1\}. \quad (3.1)$$

Notamos que se $\gamma = 0$, temos $a_3^2(s) \left(\left(\frac{\tau}{k} \right)^2 - \delta \right) = 0$, e por hipótese como $k^2(s) - \delta \tau^2(s) \neq 0$, $s \in I$ devemos ter $a_3(s) = 0$. Mas se isso acontece, pela segunda equação do sistema $a_1(s) = 0$, logo $a_1'(s) = 0$ e pela primeira equação, $c = 0$ implicando $v = 0$ o que é uma contradição. Sendo assim, $\gamma \in \{-1, 1\}$. Com a variação de γ em $\{-1, 1\}$ seguem as seguintes expressões para a_3 ,

$$a_3(s) = \pm \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{k} \right)^2 - \delta}} \quad \text{ou} \quad a_3(s) = \pm \frac{m}{\sqrt{\delta - \left(\frac{\tau}{k} \right)^2}}.$$

Pela terceira equação do sistema, derivamos as expressões de a_3 e encontramos:

$$\frac{k^2}{(k^2 - \delta \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k} \right)' = \pm \frac{\delta c}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{(\tau^2 - \delta k^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k} \right)' = \mp \frac{\delta c}{m}.$$

Para provar a recíproca, supondo $\frac{k^2}{(k^2 - \delta \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k} \right)' = c$, definimos o campo vetorial,

$$v(s) = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \delta k^2}} T(s) - \delta \epsilon c N(s) + \frac{k}{\sqrt{\tau^2 - \delta k^2}} B(s).$$

Derivando e usando as equações de Frenet, encontramos

$$\begin{aligned} v'(s) &= -\delta c k T(s) + \left(\frac{\delta \tau k}{\sqrt{\tau^2 - \delta k^2}} \right) N(s) \\ &+ \delta c k T(s) + c \tau B(s) - c \tau B(s) - \left(\frac{\delta \tau k}{\sqrt{\tau^2 - \delta k^2}} \right) N(s), \end{aligned}$$

mostrando que o campo v é constante. Além disso, $N(s) \cdot v = c$. Portanto, α é uma hélice inclinada. ■

Observação 3.2. A hipótese neste teorema sobre a função $\tau^2(s) - \delta k^2(s) \neq 0$ para

todo s , é necessária uma vez que não se sabe o que acontece quando $\delta = 1$. Porém, para uma curva tipo-tempo onde $\tau^2 - k^2 = 0$ temos $\tau = k$ ou $\tau = -k$ e definindo os campos $v(s) = T(s) + B(s)$ ou $v(s) = T(s) - B(s)$ respectivamente, provamos derivando os respectivos campos e usando as equações de Frenet que v é constante. Mais ainda, $N(s) \cdot v = 0$ para todo s , logo a curva tipo-tempo em questão é uma hélice inclinada. Finalizamos esta observação, com o fato que uma curva tipo-tempo α tal que $\tau = k = \text{constante}$ tem existência assegurada pelo Teorema Fundamental de curvas no espaço.

Existe ainda um teorema de caracterização para hélices que são curvas do tipo-espaço, de segunda derivada tipo-luz, com o seguinte enunciado.

Teorema 3.3. *Toda curva tipo-espaço onde o vetor normal é tipo-luz é uma hélice.*

Prova: Neste caso, o vetor normal tipo-luz e as equações de Frenet são as dadas no Capítulo 2 onde τ é a torção da curva e não se anula em nenhum s . O fato de $N(s)$ ser tipo-luz em todo ponto, induz tomar um campo do tipo $v(s) = b(s)N(s)$ para alguma função b diferenciável. Supondo que exista tal campo, este deveria ser constante e portanto derivando e usando as equações de Frenet chegamos a $v'(s) = (b'(s) + b(s)\tau(s))N(s)$ logo $b'(s) + b(s)\tau(s) = 0$, uma vez que, $N(s) \cdot v = 0$.

Então a prova deste item se resume a tomar o campo $v(s) = b(s)N(s)$ com $b(s)$ solução não trivial da equação diferencial ordinária $b'(s) + b(s)\tau(s) = 0$. ■

Para finalizar, apresentamos uma caracterização para hélices inclinada tipo-luz.

Teorema 3.4. *Seja α uma curva tipo-luz pseudo-parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{E}_1^3 . Então α é uma hélice inclinada se, e somente se, a torção é dada por*

$$\tau(s) = \frac{a}{(bs + c)^2},$$

onde a , b e c são constantes, com $bs + c \neq 0$.

Prova: Seja τ a torção de α , assumida não nula em todo ponto $s \in I$. Novamente, assumindo que α é hélice inclinada, existe uma direção fixa v tal que $N(s) \cdot v = c$, $c \in \mathbb{R}$ constante. Podemos escrever o campo constante v como

$$v = a_1(s)T(s) + cN(s) + a_3B(s),$$

para funções diferenciáveis a_1, a_3 definidas sobre I . Deste modo, derivamos o campo v , usamos as equações de Frenet e chegamos a

$$\begin{cases} a_1'(s) + c\tau(s) & = 0 \\ a_1(s) - \tau(s)a_3(s) & = 0 \\ a_3'(s) + c & = 0. \end{cases}$$

Da terceira equação $a_3'(s) = c$, então $a_3(s) = cs + m$ implicando com a segunda equação que $a_1 = \tau(s)(cs + m)$ de derivada $a_1'(s) = \tau'(s)(cs + m) + c\tau$ substituída na primeira equação resulta na equação diferencial $(cs + m)\tau'(s) + 2c\tau(s) = 0$. A solução desta equação é

$$\tau(s) = \frac{a}{(cs + m)^2},$$

onde a, c e m são constantes.

Para a implicação reversa do teorema, mais uma vez definimos um campo vetorial conveniente

$$v(s) = \left(\frac{a}{bs + c} \right) T(s) + bN(s) + (bs + c)B(s).$$

Usando as equações de Frenet, para o caráter causal da curva, temos $v' = 0$, isto é, v é campo constante, além disso, $N(s) \cdot v = b$ e b é constante por hipótese. Portanto, α é hélice inclinada e concluímos a prova do teorema. ■

Corolário 3.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ a parametrização de uma curva pelo comprimento de arco.*

a) *Se α é curva tipo-tempo ou tipo-espaço com vetor normal tipo-espaço e $\tau^2 - k^2(s) \neq 0$, então α é uma hélice inclinada se, e somente se, a curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ de parametrização $\beta(s) = \left(\int kds, \int \tau ds \right)$ é uma curva com curvatura constante no plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 .*

Prova: Como $\tau^2 - k^2(s) \neq 0$, ou $|\tau^2 - k^2| = \tau^2 - k^2$ ou $|\tau^2 - k^2| = k^2 - \tau^2$. Tomamos a curva diferenciável $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ de parametrização $\beta(s) = \left(\int kds, \int \tau ds \right)$, com primeira e segunda derivadas sendo respectivamente, $\beta'(t) = (k, \tau)$ e $\beta''(t) = (k', \tau')$ e aplicando a fórmula para encontrar

a curvatura de uma curva sob um parâmetro qualquer vista no capítulo 2, encontramos;

$$\begin{aligned}
\epsilon k_\beta &= \frac{\det(\beta', \beta'')}{\|\beta'\|^3} \\
&= \frac{\det((k, \tau), (k', \tau'))}{\|(k, \tau)\|^3} \\
&= \frac{\tau'k - k'\tau}{|k^2 - \tau^2|^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{k^2}{|k^2 - \tau^2|^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{k}\right)'.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$k_\beta = \epsilon \frac{k^2}{(k^2 - \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{k}\right)' \quad \text{ou} \quad k_\beta = \epsilon \frac{k^2}{(\tau^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{k}\right)'.$$

Deste modo, pelo Teorema 3.2 α é hélice inclinada em \mathbb{E}_1^3 se, e somente se, a curvatura k_β da curva $\beta(s) = (\int k ds, \int \tau ds)$ é constante. ■

- b) *Seja α é uma curva tipo-espaço com vetor normal tipo-tempo satisfazendo $k^2 + \tau^2(s) \neq 0$. Então α é uma hélice inclinada se, e somente se, a curva de parametrização $\beta = (\int k ds, \int \tau ds)$ é um circunferência no plano Euclidiano \mathbb{R}^2 .*

Prova: A demonstração deste item do corolário é praticamente idêntica a do item anterior, a única modificação ocorre no produto interno e isto implica que a curvatura da curva $\beta = (\int k ds, \int \tau ds)$ seja

$$k_\beta = \frac{k^2}{(k^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{k}\right)'.$$

Portanto, a curva α será hélice inclinada se, e somente se, a curvatura da curva $\beta = (\int k ds, \int \tau ds)$ é constante. ■

3.2 Indicatrizes de uma Hélice Inclinada não nula

Nesta seção mostramos que é possível identificar uma hélice inclinada através de suas indicatrizes tangente e binormal. Nos restringimos apenas a curvas *não nulas* (tipo-tempo ou tipo-espaço) cujo vetor normal N é tipo-tempo ou tipo-espaço. Se α é curva tipo-espaço ou tipo-tempo parametrizada pelo comprimento de arco, sua *indicatriz tangente* é o campo tangente $T : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ e sua *indicatriz binormal* é o campo binormal $B : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$. Os conjuntos $H^2 = \{x \in \mathbb{E}_1^2; x \cdot x = -1\}$ e $S_1^2 = \{x \in \mathbb{E}_1^2; x \cdot x = 1\}$ são chamados de *espaço hiperbólico* e o *espaço De Sitter*, respectivamente. Quando a imagem de uma curva é um subconjunto de H^2 ou de S_1^2 dizemos que a *curva é esférica*. Como $\|T(s)\| = \|B(s)\| = 1$ para todo s , as indicatrizes tangente e binormal de α são curvas esféricas.

Teorema 3.5. *Se uma curva α tipo-tempo ou tipo-espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com vetor normal tipo-tempo ou tipo-espaço é uma hélice inclinada em \mathbb{E}_1^3 , então sua indicatriz tangente é uma hélice esférica.*

Prova: Denotamos a curvatura e a torção de T por k_T e τ_T , respectivamente. Provamos que $\frac{\tau_T}{k_T}$ é constante, e pela Proposição 3.1 isto mostra que T é uma hélice. Observamos que T não é necessariamente a parametrização pelo comprimento de arco da indicatriz tangente. Então, usamos as fórmulas de curvatura e torção de uma curva não parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{E}_1^3 :

$$k_\beta^2(t) = \frac{|(\beta'(t) \cdot \beta''(t))^2 - (\beta'(t) \cdot \beta'(t))(\beta''(t) \cdot \beta''(t))|}{\|\beta'(t)\|^6},$$

$$\tau_\beta(t) = \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{k_\beta^2(t)\|\beta'(t)\|^6}.$$

Por hipótese, α é uma curva com vetor normal N tipo-espaço ou tipo-tempo. Então a indicatriz tangente T é uma curva tipo-espaço ou uma curva tipo-tempo pois pelas equações de Frenet $T' = \delta k N$. Para ambos os casos,

$$k_T^2 = \frac{|k^2 - \delta\tau^2|}{k^2}, \quad \det(T', T'', T''') = -k^5 \left(\frac{\tau}{k}\right)', \quad \tau_T = \frac{k}{|k^2 - \delta\tau^2|} \left(\frac{\tau}{k}\right)'.$$

Portanto,

$$\frac{\tau_T}{k_T} = -\frac{k^2}{|k^2 - \delta\tau^2|^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{k}\right)'.$$

Concluimos que α é uma hélice inclinada se, e somente se, a sua indicatriz tangente T é uma hélice em \mathbb{E}_1^3 . ■

Teorema 3.6. *Seja α uma curva tipo-espaço ou tipo-tempo parametrizada pelo comprimento de arco, com vetor normal tipo-espaço ou tipo-tempo. Então α é uma hélice inclinada de \mathbb{E}_1^3 se, e somente se, a indicatriz binormal B de α é uma hélice esférica.*

Prova: A demonstração deste teorema é feita do mesmo modo que a do Teorema 3.5. Desta forma,

$$k_B^2 = \frac{|\tau^2 - \delta k^2|}{\tau^2}, \quad \det(B', B'', B''') = k^2 \tau^3 \left(\frac{\tau}{k}\right)', \quad \tau_B = \frac{k^2}{\tau |\tau^2 - \delta k^2|} \left(\frac{\tau}{k}\right)'.$$

Portanto,

$$\frac{\tau_B}{k_B} = \frac{k^2}{|\tau^2 - \delta k^2|^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{k}\right)',$$

consequentemente, α é uma hélice inclinada se, e somente se, a indicatriz binormal é hélice generalizada em \mathbb{E}_1^3 . ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. López, *The Theorem of Schur in the Minkowski plane*. J. of Geometry and Physics **61** 2011, no.1, 342-346.
- [2] A. T. Ali and R. López, *Slant Helices in Minkowski Space \mathbb{E}_1^3* . J. Korean Math. Soc. **48** 2011, no.1, 159-167.
- [3] A. Schur, *Über die Schwarsche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven kontanter Krümmung*. Math. Annalen **83** 1921, 143-148.
- [4] E. Schmidt, *Über das Extremum der Bogenlänge einer Raumkurve bei vergeschriebenen Einschränkungen ihrer Krümmung*. Sitzungsber. Akad. Berlin 1925, 485-490.
- [5] S. S. Chern, *Curves and Surfaces in Euclidean Spaces*. Studies in Global Geometry and Analysis. The Mathematical Association of America. 1967.
- [6] S. Izumiya and N. Takeuchi, *New Special Curves and Developable Surfaces*. Turkish J.Math. **28** 2004, no.2, 153-163.
- [7] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, 3ª Edição*. Graduate Studies in Mathematics Vol. **69** Soc. Bras. de Matem. 2008.
- [8] S. Montiel e A. Rós, *Curves and Surfaces, 2ª Edição*. Amer. Math. Soc. 2009.
- [9] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer 2010.
- [10] R. López, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*, arXiv:0810.3351[v1], 2008.

- [11] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics Vol. **103** Academic Press 1983.
- [12] H. Alencar e W. Santos, *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. Coleção-Colóquio Brasileiro de Matemática 24o - 2003.