UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre o Modelo de Supercondutividade de Ginzburg-Landau com Efeito Magnético em Domínios Delgados[1]

Jamil Viana Pereira

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

Março - 2005

[1]Projeto realizado com apoio da FAPESP processo 02/11416-9

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Pereira, Jamil Viana.
P436sm	Sobre o modelo de supercondutividade de Ginzburg-Landau com efeito magnético em domínios delgados / Jamil Viana Pereira. -- São Carlos : UFSCar, 2005.
	62 p.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.
	1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações de Ginzburg-Landau. 3. Mínimos locais para o funcional energia de Ginzburg-Landau. 4. Domínios delgados. 5. Método direto do cálculo variacional. I. Título.
	CDD: 515.353 (20ª)

Orientador:

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

Dedico esta dissertação à minha mãe Olávia.

Agradecimentos

A Deus.

Ao Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento, por acreditar em mim e pela paciência e dedicação na orientação deste trabalho.

Aos professores do DM-UFSCar, pelos ensinamentos.

Aos professores do IBILCE-UNESP, que iniciaram minha formação. Em particular à Professora Cida, que além da formação acadêmica contribuiu muito para minha formação como cidadão.

Ao Professor Sérgio, por orientar meus primeiros passos nas Equações Diferenciais Parciais, pela amizade e pelo apoio.

À Universidade Federal de São Carlos, que possibilitou a realização deste trabalho.

À FAPESP, pela concessão de bolsa de estudo a este projeto de mestrado.

À minha namorada Paloma, amor da minha vida, pela paciência, apoio, dedicação, compreensão e principalmente pelo amor dedicados a mim nos últimos 7,5 anos.

Aos meus pais, irmãos e familiares, que me apoiaram e me ajudaram em todos os momentos da minha vida.

Aos meus amigos próximos e distantes, pelos momentos de diversão, pelo apoio e pela força, em particular Claudete, Elaine e Renato.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Resumo

Apresentaremos neste trabalho um estudo sobre o modelo de supercondutividade de Ginzburg-Landau com efeito magnético em uma película de altura variável. Esta película é representada por um domínio tridimensional $\Omega(\varepsilon) = D \times (0, \varepsilon\, a(x'))$, $x' \in D$, sendo ε um parâmetro positivo. Definiremos um problema limite, quando $\varepsilon \to 0$, no domínio bidimensional D. Mostraremos então que perto, em uma certa topologia, de um mínimo local do problema limite existe um mínimo local do problema original. O estudo é baseado no artigo "Ginzburg-Landau equation with Magnetic Effect in a thin domain"de S. Jimbo e Y. Morita publicado em Calc. Var. 15, 325-352 (2002).

Abstract

We will present in this work a study about the Ginzburg-Landal model of superconductivity with magnetic effect in a film with variable thickness. The representation of this film is a three dimensional domain $\Omega(\varepsilon) = D \times (0, \varepsilon a(x'))$, $x' \in D$, where ε a positive parameter. We will define a limit problem, when $\varepsilon \to 0$, in the two dimensional domain D. We will show that near, in a certainly topology, of a local minimum of the limit problem, there is a local minimum of the original problem. This study is based on the work "Ginzburg-Landau equation with Magnetic Effect in a thin domain"S. Jimbo e Y. Morita, Calc. Var. 15, 325-352 (2002).

Sumário

1 Introdução **8**

2 Informações sobre as Equações de Ginzburg-Landau **9**

3 Apresentação do problema **12**

4 Redução formal a um "problema limite" **17**

5 Resultados Principais **21**

6 Resultados preliminares **23**

7 Demonstração do Teorema Principal **30**

8 Existência de solução para o problema limite **48**

A Principais resultados utilizados **57**

Referências Bibliográficas **61**

1 Introdução

Estudaremos aqui o problema matemático, de grande interesse físico, de encontrar um mínimo local para o funcional de energia de Ginzburg-Landau.

Após apresentarmos algumas informações sobre o funcional de Ginzburg-Landau, apresentaremos uma dedução heurística de um problema limite, em um certo sentido, cuja abordagem é mais fácil. A idéia principal do artigo é mostrar que perto (numa certa topologia) de um mínimo deste problema limite podemos encontrar um mínimo local para o funcional original.

Feito isso, apresentaremos os resultados principais do trabalho, passando logo após a apresentar as principais ferramentas para demonstrar tais resultados. Terminado o estudo destas ferramentas é feita a demonstração do teorema principal do trabalho, que usa entre outras técnicas, o Método Direto do Cálculo Variacional. Por último, é demonstrado um resultado que garante a existência de soluções para o problema limite.

Este trabalho é baseado no artigo "Ginzburg-Landau equation with Magnetic Effect in a thin domain" de S. Jimbo e Y. Morita publicado em Calc. Var. 15, 325-352 (2002).

2 Informações sobre as Equações de Ginzburg-Landau

O fenômeno de correntes elétricas permanentes em materiais supercondutores tem sido estudado por várias décadas.

Um experimento típico é submeter um corpo (de material apropriado), na forma de um anel, a um campo eletromagnético, que o induz uma corrente elétrica. A temperatura do corpo é então diminuída até alcançar o regime supercondutor (i.e., quando praticamente não há resistência elétrica) e, então, o campo eletromagnético aplicado é desligado.

Observa-se que a corrente elétrica persiste com resistência elétrica praticamente nula por longos períodos (às vezes, durante anos). Os físicos Ginzburg e Landau criaram em aproximadamente 1950 um modelo fenomenológico para descrever a situação. De acordo com essa teoria, uma corrente permanente corresponde um mínimo do funcional energia

$$G(\Psi, A) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}|(\nabla - iA)\Psi|^2 + \frac{\lambda^2}{4}(1 - |\Psi|^2)^2 \right\} dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |rotA - H^{\lambda}_{apl}|^2 dx \tag{1}$$

sendo:

$|\ |$ a norma euclidiana (identificando $\mathbb{C}^3$ com $\mathbb{R}^6$),

Ω a região do espaço ocupada pelo material supercondutor,

$\Psi : \Omega \to \mathbb{C}$ a função de onda dos elétrons no material,

$|\Psi|$ a densidade dos pares de elétrons supercondutores,

$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o potencial magnético cujo rotacional representa o campo magnético induzido,

H^{λ}_{apl} o campo magnético aplicado e

λ o parâmetro de Ginzburg-Landau que depende das características do material da amostra supercondutora.

Observação 2.1 *No caso de ausência do campo aplicado (i.e.,* $H^{\lambda}_{apl} \equiv 0$*), um mínimo global (trivial) de* G *é dado por* (Ψ, A)*, sendo* $\Psi = e^{ic}$*,* $A = 0$*, e* c *um* *número real qualquer. Esta solução matemática não interessa ao modelo, pois não induz corrente.*

Os pontos críticos de G, interessantes do ponto de vista físico, são aqueles que minimizam (pelo menos localmente) o funcional energia $G_\varepsilon(\Psi, A)$ e que induzem corrente.

Observação 2.2 *A expressão* (1) *com* $H_{apl}^{\lambda} \equiv 0$ *pode ser escrita da forma*

$$G(\Psi, A) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|(\nabla - iA)\Psi|^2 + \frac{\alpha}{4}(1 - |\Psi|^2)^2 \right\} dx + \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |rotA|^2 dx, \quad (2)$$

sendo α *e* β *números reais estritamente positivos. Para obter (1) de (2), basta aplicar à (2) a mudança de coordenadas* $x \to \dfrac{y}{\sqrt{\beta}}$, $A \to \dfrac{B}{\sqrt{\beta}}$ *e multiplicar o resultado por* $\beta^{\frac{5}{2}}$, *assim obtemos* (1) *com* $\lambda = \sqrt{\alpha\beta}$.

Proposição 2.1 *O funcional* (2) *é gauge invariante, isto é, dada* $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ *suave temos*

$$G(\Psi, A) = G(\Psi e^{i\rho}, A + \nabla\rho)$$

Demonstração:

$$G(\Psi e^{i\rho}, A + \nabla\rho) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\left|(\nabla - iA - i\nabla\rho)\Psi e^{i\rho}\right|^2 + \frac{\alpha}{4}(1 - |\Psi e^{i\rho}|^2)^2 \right\} dx$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |rot(A + \nabla\rho)|^2 dx.$$

Consideremos $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$, com $\psi_1, \psi_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \text{i)}\ |(\nabla - iA - i\nabla\rho)\Psi e^{i\rho}|^2 &= \left|(\nabla - iA - i\nabla\rho)(\psi_1 + i\psi_2)(cos\rho + isen\rho)\right|^2 \\ &= \left|\nabla\psi_1 + i\nabla\psi_2 - iA\psi_1 + A\psi_2\right|^2 \\ &= \left|(\nabla - iA)\Psi\right|^2. \end{aligned}$$

ii) $|\Psi e^{i\rho}| = |\Psi|$.

iii) $|rot(A + \nabla\rho)|^2 = |rotA|^2$, pois rot é linear e ∇ é conservativo.

De i), ii) e iii) obtemos $G(\Psi, A) = G(\Psi e^{i\rho}, A + \nabla\rho)$. ■

Proposição 2.2 *Podemos procurar soluções para (2) tais que* A *satisfaça a igualdade* $divA = 0$.

Demonstração: Vimos que (2) é gauge invariante, logo dada ρ suave, temos que

$$G(\Psi, A) = G(\Psi e^{i\rho}, A + \nabla\rho).$$

Então, dada uma função apropriada A, basta tomarmos ρ tal que

$$\triangle\rho = -divA, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Temos então $div(A + \nabla\rho) = divA + \triangle\rho = 0.$ ■

3 Apresentação do problema

Nosso objetivo é encontrar um mínimo local não trivial (conforme Observação 2.1) para o funcional energia $G_\varepsilon : H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times \mathrm{Y}$ dado por

$$G_\varepsilon(\Psi, A) = \int_{\Omega(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2}|(\nabla - iA)\Psi|^2 + \frac{\alpha}{4}(1 - |\Psi|^2)^2 \right\} dx + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |rotA|^2 dx \quad (3)$$

sendo:

$$\Omega(\varepsilon) = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3; x' \in D \subset \mathbb{R}^2, 0 < x_3 < \varepsilon a(x')\} \quad (4)$$

α, β parâmetros estritamente positivos que dependem das características do material da amostra supercondutora,

$a : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\overline{D})$ estritamente positiva,

D um domínio com fronteira suave e

$Y = \{A \in L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3); \nabla A \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3\times 3})\}$.

Note que:

i) A superfície dada pelo gráfico de a determina a geometria da parte superior de $\Omega(\varepsilon)$. A fronteira de $\Omega(\varepsilon)$ é constituída de uma parte suave e uma não suave. Na figura abaixo, vemos um exemplo do domínio $\Omega(\varepsilon)$, sendo D um intervalo da reta e $a : D \to \mathbb{R}$ uma função estritamente positiva e suave.

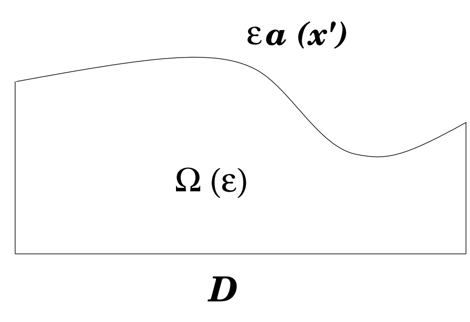

Figura 1

ii) Y é espaço de Banach se considerarmos, em Y, a norma

$$\|B\|_Y = \|\nabla B\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3})}.$$

Podemos definir esta norma em virtude da Desigualdade de Sobolev (154).

iii) Em virtude da Proposição 2.2 podemos procurar soluções para G_ε em $H^1(\Omega(\varepsilon)) \times Z$, sendo

$$Z = \left\{ A \in Y; divA = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3 \right\} \tag{5}$$

iv) Da igualdade

$$\|\nabla B\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})} = \|divB\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})} + \|rotB\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})},$$

segue que em Z vale $\|\nabla B\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})} = \|rotB\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})}$.

v) Foi demonstrado em [9], que, se o domínio for convexo e estiver contido em $\mathbb{R}^2$, existem apenas pontos críticos triviais para o funcional de Ginzburg-Landau. No mesmo artigo, eles dizem suspeitar que o mesmo vale para domínios convexos contidos em $\mathbb{R}^3$. Caso isto seja confirmado, não estaríamos interessados em a e D que tornem $\Omega(\varepsilon)$ convexo (como por exemplo a constante e D convexo) .

Vamos calcular a equação de Euler-Lagrange de (3). Dadas Φ e B funções teste, tais que, $(\Phi, B) \in H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times$ Z ,consideremos

$$g(t) = G_\varepsilon(\Psi + t\Phi, A + tB).$$

Precisamos calcular $g'(0) = G'_\varepsilon(\Psi, A)(\Phi, B)$.

Sejam $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$, $A = (A_1, A_2, A_3)$e $B = (B_1, B_2, B_3)$.

Temos

$$\begin{aligned} g'(0) &= \int_{\Omega(\varepsilon)} (\nabla\psi_1 + A\psi_2)(\nabla\phi_1 + A\phi_2 + B\psi_2)dx \\ &+ \int_{\Omega(\varepsilon)} (\nabla\psi_1 + A\psi_2)(\nabla\phi_1 - A\phi_1 - B\psi_1)dx + \\ &- \int_{\Omega(\varepsilon)} \alpha(1 - |\Psi|^2)(\psi_1\phi_1 + \psi_2\phi_2)dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \beta(rotA)(rotB)dx \\ &= \int_{\Omega(\varepsilon)} \{(\nabla\psi_1 + A\psi_2)\nabla\phi_1 - [(A\nabla\psi_2 - A^2\psi_1) + \alpha(1 - |\Psi|^2)\psi_1]\phi_1\}dx \\ &+ \int_{\Omega(\varepsilon)} \{(\nabla\psi_2 - A\psi_1)\nabla\phi_2 + [(A\nabla\psi_1 + A^2\psi_2) - \alpha(1 - |\Psi|^2)\psi_2]\phi_2\}dx \\ &+ \int_{\Omega(\varepsilon)} [\psi_2\nabla\psi_1 + A(\psi_2)^2 - \psi_1\nabla\psi_2 + A(\psi_1)^2]Bdx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \beta(rotA)(rotB)dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Integrando (6) por partes temos,

$$g'(0) = \int_{\Omega(\varepsilon)} \{-\triangle\psi_1 - A\nabla\psi_2 - A\nabla\psi_2 + A^2\psi_1 - \alpha(1 - |\Psi|^2)\psi_1\}\phi_1 dx \tag{7}$$

$$+ \int_{\Omega(\varepsilon)} \{-\triangle\psi_2 + A\nabla\psi_1 + A\nabla\psi_1 + A^2\psi_2 - \alpha(1 - |\Psi|^2)\psi_2\}\phi_2 dx \tag{8}$$

$$+ \int_{\partial\Omega(\varepsilon)} (\nabla\psi_1 + A\psi_2).\nu\phi_1 dS \tag{9}$$

$$+ \int_{\partial\Omega(\varepsilon)} (\nabla\psi_2 - A\psi_1).\nu\phi_2 dS \tag{10}$$

$$+ \int_{\Omega(\varepsilon)} [\psi_2\nabla\psi_1 + A(\psi_2)^2 - \psi_1\nabla\psi_2 + A(\psi_1)^2]Bdx \tag{11}$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \beta(rotrotA)Bdx. \tag{12}$$

Para encontrar a equação de Euler-Lagrange de (3) precisamos resolver a igualdade $g'(0) = 0$. Sabemos que $g'(0)$ é dado pelas equações (7)-(12); em particular quando $\phi_2 \equiv 0$, $B \equiv 0$ e $\phi_1 \in C_c^1(\overline{\Omega(\varepsilon)})$ temos que $g'(0) = 0$ se, e somente se, (7) é nula para toda $\phi_1 \in C_c^1(\overline{\Omega(\varepsilon)})$; logo

$$-\triangle\psi_1 - A\nabla\psi_2 - A\nabla\psi_2 + A^2\psi_1 - \alpha(1 - |\Psi|^2)\psi_1 = 0 \quad \forall x \in \Omega(\varepsilon). \tag{13}$$

Utilizando o mesmo raciocínio para $\phi_1 \equiv 0$, $B \equiv 0$ e $\phi_2 \in C_c^1(\overline{\Omega(\varepsilon)})$ segue que

$$-\triangle\psi_2 + A\nabla\psi_1 + A\nabla\psi_1 + A^2\psi_2 - \alpha(1 - |\Psi|^2)\psi_2 = 0 \quad \forall x \in \Omega(\varepsilon). \tag{14}$$

Considerando agora $\phi_2 \equiv 0$ e $B \equiv 0$, a igualdade $g'(0) = 0$ acontece se, e somente se, (9) é nula para toda ϕ_1, logo temos

$$(\nabla\psi_1 + A\psi_2).\nu = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega(\varepsilon). \tag{15}$$

Analogamente temos

$$(\nabla\psi_2 - A\psi_1).\nu = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega(\varepsilon). \tag{16}$$

Vejamos agora o caso $\phi_1 \equiv 0$, $\phi_2 \equiv 0$ e $B \in C_c^1(\overline{\Omega(\varepsilon)})$. Utilizando (11) e (12) temos

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} [\psi_2\nabla\psi_1 + A(\psi_2)^2 - \psi_1\nabla\psi_2 + A(\psi_1)^2]Bdx - \int_{\Omega(\varepsilon)} \beta(rotrotA)Bdx = 0$$

para toda $B \in C_c^1(\overline{\Omega(\varepsilon)})$, logo

$$[\psi_2\nabla\psi_1 + A(\psi_2)^2 - \psi_1\nabla\psi_2 + A(\psi_1)^2]_{\chi\Omega(\varepsilon)} - \beta rotrotA = 0 \quad \forall x \in \Omega(\varepsilon). \tag{17}$$

Da mesma forma se $\phi_1 \equiv 0$, $\phi_2 \equiv 0$ e $B \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}^3 \backslash \Omega(\varepsilon)})$ segue que

$$[\psi_2\nabla\psi_1 + A(\psi_2)^2 - \psi_1\nabla\psi_2 + A(\psi_1)^2]_{\chi\Omega(\varepsilon)} - \beta rotrotA = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \Omega(\varepsilon). \tag{18}$$

Como $\partial\Omega(\varepsilon)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^3$ de (17) e (18) segue que

$$[\psi_2\nabla\psi_1 + A(\psi_2)^2 - \psi_1\nabla\psi_2 + A(\psi_1)^2]_{\chi\Omega(\varepsilon)} - \beta rotrotA = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{19}$$

Tomando $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$, das equações (13), (14), (15) e (16) segue que

$$(\nabla - iA)^2\Psi + \alpha(1 - |\Psi|^2)\Psi = 0 \quad x \in \Omega(\varepsilon) \tag{20}$$

e

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} = i(A.\nu)\Psi \quad x \in \partial\Omega(\varepsilon). \tag{21}$$

Segue de (20), (21) e (19) que a Equação de Euler-Lagrange de (3) é dada por

$$\begin{cases} (\nabla - iA)^2\Psi + \alpha(1-|\Psi|^2)\Psi = 0 & x \in \Omega(\varepsilon) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = i(A.\nu)\Psi & x \in \partial\Omega(\varepsilon) \\ -\beta rotrot A - [\frac{i}{2}(\Psi^*\nabla(\Psi) - \Psi\nabla(\Psi^*)) + |\Psi|^2 A]\chi_{\Omega(\varepsilon)} = 0 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{22}$$

sendo ν o vetor normal exterior a $\partial\Omega(\varepsilon)$, Ψ^* o conjugado complexo de Ψ e $\chi_{\Omega(\varepsilon)}$ a função característica em $\Omega(\varepsilon)$.

4 Redução formal a um "problema limite"

As aspas usadas acima são devidas ao fato do problema limite ser justificado pelo modelo físico.

Façamos em $\Omega(\varepsilon)$ a mudança de coordenadas $x_3 = \varepsilon a(x')\zeta,\ \zeta \in (0,1)$. Dadas $\Psi \in H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$ e $A \in Z$ definimos

$$\widetilde{\Psi}(x',\zeta) = \Psi(x', \varepsilon a(x')\zeta)$$

$$\widetilde{A}(x',\zeta) = A(x', \varepsilon a(x')\zeta).$$

Temos então

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_{x_1} &= \Psi_{x_1} + \varepsilon a_{x_1}\zeta\Psi_{x_3}\\
\widetilde{\Psi}_{x_2} &= \Psi_{x_2} + \varepsilon a_{x_2}\zeta\Psi_{x_3}\\
\widetilde{\Psi}_{\zeta} &= \varepsilon a\Psi_{x_3}
\end{aligned}$$

daí, segue que

$$\begin{aligned}
\Psi_{x_1} &= \widetilde{\Psi}_{x_1} - \frac{a_{x_1}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_{\zeta}\\
\Psi_{x_2} &= \widetilde{\Psi}_{x_2} - \frac{a_{x_2}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_{\zeta}\\
\Psi_{x_3} &= \frac{1}{\varepsilon a}\widetilde{\Psi}_{\zeta}.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$\nabla(\Psi) := \widetilde{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{\Psi} = \left(\widetilde{\Psi}_{x_1} - \frac{a_{x_1}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_{\zeta}, \widetilde{\Psi}_{x_2} - \frac{a_{x_2}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_{\zeta}, \frac{1}{\varepsilon a}\widetilde{\Psi}_{\zeta}\right). \tag{23}$$

De (23) segue que

$$|\nabla(\Psi)|^2 = |\widetilde{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{\Psi}|^2 = |\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - 2Re\left[\left\langle\frac{\nabla' a}{a}, \nabla'\widetilde{\Psi}\right\rangle_2 \widetilde{\Psi}^*_{\zeta}\right]\zeta + \left(\frac{|\nabla' a|^2\zeta^2}{a^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2}\right)|\widetilde{\Psi}_{\zeta}|^2 \tag{24}$$

sendo Ψ^* o conjugado complexo de Ψ, $\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ e $\langle (a,b),(c+di, e+fi)\rangle_2 = \langle (a,b),(c,e)\rangle + i\,\langle (a,b),(d,f)\rangle = ac + be + i(ad + bf)$.

Utilizando (24), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
G_\varepsilon(\Psi, A) \quad &= \widetilde{G}_\varepsilon(\widetilde{\Psi}, \widetilde{A}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int_D a \int_0^1 |\widetilde{\nabla}_\varepsilon \widetilde{\Psi}|^2 d\zeta dx' \\
&+\varepsilon \int_D a \int_0^1 \left\{ Re\left[i \left\langle \widetilde{A}, \widetilde{\nabla}_\varepsilon \widetilde{\Psi} \right\rangle_3 \widetilde{\Psi}^* \right] + \frac{1}{2}|\widetilde{A}|^2|\widetilde{\Psi}|^2 + \frac{\alpha}{4}(1-|\widetilde{\Psi}|^2)^2 \right\} d\zeta dx' \\
&+\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |rotA|^2 dx
\end{aligned} \tag{25}
$$

sendo $<,>_3$ análogo a $<,>_2$ para vetores de 3 coordenadas.

De (23) segue que

$$
\left\langle \widetilde{A}, \widetilde{\nabla}_\varepsilon \widetilde{\Psi} \right\rangle_3 \widetilde{\Psi}^* = \left\langle \widetilde{A}, (\nabla' \widetilde{\Psi}, 0) \right\rangle_3 \widetilde{\Psi}^* - \left\langle \widetilde{A}, \left(\frac{\nabla' a}{a}, 0 \right) \right\rangle_3 \zeta \widetilde{\Psi}_\zeta \widetilde{\Psi}^* + \frac{1}{\varepsilon a} \widetilde{A}_3 \widetilde{\Psi}_\zeta \widetilde{\Psi}^*
$$

e, substituindo isto em (25), temos

$$
\begin{aligned}
G_\varepsilon(\Psi, A) \quad &= \frac{\varepsilon}{2}\int_D a \int_0^1 |\widetilde{\nabla}_\varepsilon \widetilde{\Psi}|^2 d\zeta dx' \\
&+\varepsilon \int_D a \int_0^1 Re\left[i \left\langle \widetilde{A}, (\nabla' \widetilde{\Psi}, 0) \right\rangle_3 \widetilde{\Psi}^* \right] d\zeta dx' \\
&-\varepsilon \int_D a \int_0^1 Re\left[i \left\langle \widetilde{A}, \left(\frac{\nabla' a}{a}, 0 \right) \right\rangle_3 \zeta \widetilde{\Psi}_\zeta \widetilde{\Psi}^* \right] d\zeta dx' \\
&+\varepsilon \int_D a \int_0^1 Re\left[\frac{i}{\varepsilon a} \widetilde{A}_3 \zeta \widetilde{\Psi}_\zeta \widetilde{\Psi}^* \right] d\zeta dx' \\
&+\frac{\varepsilon}{2}\int_D a \int_0^1 \left\{ |\widetilde{A}|^2|\widetilde{\Psi}|^2 + \frac{\alpha}{2}(1-|\widetilde{\Psi}|^2)^2 \right\} d\zeta dx' \\
&+\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |rotA|^2 dx.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Finalmente, substituindo(24) em (26) temos

$$
\begin{aligned}
G_\varepsilon(\Psi, A) \;&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_D \frac{1}{a}\int_0^1 |\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 d\zeta dx' + \int_D\int_0^1 Re\left[iA_3\widetilde{\Psi}_\zeta\widetilde{\Psi}^*\right] d\zeta dx' + \\
&+\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |rotA|^2 dx \\
&+\frac{\varepsilon}{2}\int_D a\int_0^1 \left\{|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - 2Re\left[\left\langle \frac{\nabla' a}{a}, \nabla'\widetilde{\Psi}\right\rangle_2 \widetilde{\Psi}^*_\zeta\right]\zeta\right\} d\zeta dx' \\
&+\frac{\varepsilon}{2}\int_D a\int_0^1 \left\{-2Re\left[i\left\langle \widetilde{A}, \left(\frac{\nabla' a}{a}, 0\right)\right\rangle_3 \zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\widetilde{\Psi}^*\right]\right\} d\zeta dx' \\
&+\frac{\varepsilon}{2}\int_D a\int_0^1 \left\{\frac{|\nabla' a|^2\zeta^2}{a^2}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 + 2Re\left[i\left\langle \widetilde{A}, (\nabla'\widetilde{\Psi}, 0)\right\rangle_3 \widetilde{\Psi}^*\right]\right\} d\zeta dx' \\
&+\frac{\varepsilon}{2}\int_D a\int_0^1 \left\{|\widetilde{A}|^2|\widetilde{\Psi}|^2 + \frac{\alpha}{2}(1-|\widetilde{\Psi}|^2)^2\right\} d\zeta dx'.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

O "problema limite" para $G_\varepsilon(\Psi, A)$ é dado por

$$
G(\psi) = \int_D \left\{\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{\alpha}{4}(1-|\psi|^2)^2\right\} a dx',\ \psi \in H^1(D;\mathbb{C}) \tag{28}
$$

que denominaremos equação reduzida. Observe que, considerando (27), a equação reduzida é, em um certo sentido

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}G_\varepsilon(\Psi, A).
$$

As justificativas para esta redução (A e Ψ_ζ tendendo a zero quando $\varepsilon \to 0$) são devidas ao modelo físico.

A equação de Euler-Lagrange de $G(\psi)$ é

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{a}div(a\nabla\psi) + \alpha(1-|\psi|^2)\psi = 0 & x \in D \\
\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 & x \in \partial D.
\end{cases}
\tag{29}
$$

Proposição 4.1 *Se ψ_0 é uma solução de (29), então*

$$
\sup_{x\in\overline{\Omega(\varepsilon)}} |\psi_0(x)| \le 1.
$$

Demonstração: Esta demonstração é análoga à demonstração do Lema 6.1 que será feita posteriormente. ■

Se ψ_0 é solução de (29), o linearizado de (29) em torno de ψ_0 é dado por

$$\begin{cases} L'(\varphi) = \dfrac{1}{a} div(a\nabla\varphi) + \alpha(1 - |\psi_0|^2)\varphi - 2Re[\alpha\psi_0^*\varphi]\psi_0 \\ \\ D(L') = \left\{\varphi \in L_a^2(D;\mathbb{C}); \varphi \in \mathrm{H}_2(\mathrm{D};\mathbb{C}) \text{ e } \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ em } \partial\mathrm{D}\right\} \end{cases} \tag{30}$$

sendo $L_a^2(S) = \{\varphi \in L^2(S); \|\varphi\|_{L_a^2(S)} < \infty\}$ e $\|\varphi\|_{L_a^2(S)} = \displaystyle\int_S |\varphi|^2 a dx$.

Note que $L'(i\psi_0) = 0$. Logo, $\varphi = i\psi_0$ é uma autofunção correspondente ao autovalor 0 de L'.

O funcional L' é auto-adjunto em relação ao produto interno dado por

$$\langle\psi, \varphi\rangle_{L_{a(D;\mathbb{C})}^2} = Re\int_D \psi\varphi a dx'.$$

Portanto, assumindo este produto interno em $L_a^2(D;\mathbb{C})$ temos que todos os autovalores de L' são reais.

Consideremos a seguinte hipótese:

(A) Zero é autovalor simples de L' e o restante dos autovalores são negativos.

5 Resultados Principais

Teorema 5.1 *[Teorema Principal] Seja ψ_0 uma solução de (29) satisfazendo (A). Então existem $\varepsilon_1 > 0$ e uma função $\delta = \delta(\varepsilon)$ definida para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ tais que:*

i) $\delta(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$

ii) O funcional (3) possui um mínimo local $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \in H^1(\Omega(\varepsilon); \mathbb{C}) \times \mathrm{Y}$ satisfazendo

$$\inf_{0 \leq c \leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi}_\varepsilon - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} < \delta(\varepsilon). \tag{31}$$

Este resultado garante a existência de solução para (3) desde que e-xista solução de (29) satisfazendo (A). Apresentaremos agora um resultado que sob certas condições sobre a e D, garante a existência de solução para (29) satisfazendo (A). Consideremos

$$D = \left\{x' \in \mathbb{R}^3; |x'| < 1\right\}$$

e a radialmente simétrica, isto é,

$$a = a(|x'|) = a(r),\ r = |x'|.$$

Proposição 5.1 *Se $a(r) > 0$ é uma função de classe C^2 satisfazendo:*

i) $a_r(0) = a_r(1) = 0$,

ii) $a'(r) \geq 0$, $r \in [0,1]$ e

iii)

$$\int_0^1 \frac{a'}{r} dr > a(1). \tag{32}$$

Então existe $\alpha_1 > 0$ tal que para $\alpha > \alpha_1$ a equação (29) possui uma solução ψ_0 satisfazendo (A) escrita da forma

$$\psi_0 = f(r)e^{\pm i\theta}$$

sendo f solução do PVF

$$\begin{cases} f'' + \dfrac{(ra)'}{ra} f' - \dfrac{1}{r^2} f + \alpha(1 - f^2) f = 0\ ,\ r \in (0,1) \\ f(0) = 0\ ,\ f'(1) = 0. \end{cases}$$

Utilizando os dois resultados anteriores, podemos enunciar um teorema que garante a existência de mínimo local para o funcional energia G_ε dado pela expressão (3).

Teorema 5.2 *Considere o domínio* $\Omega(\varepsilon)$, *sendo* $D = \{x' \in \mathbb{R}^2; |x'| < 1\}$ *e* a *uma função radialmente simétrica tal que*

$$a'(0) = a'(1) = 0 \ , \ a'(r) \geq 0 \ , \ r \in [0,1] \ \textit{e} \ \int_0^1 \frac{a'}{r} dr > a(1).$$

Então existem números estritamente positivos α_1 *e* ε_1 *tais que para* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *e* $\alpha > \alpha_1$ *o funcional energia* G_ε *possui um mínimo local* $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ *em* $\Omega(\varepsilon)$ *satisfazendo*

$$\inf_{0 \leq c \leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi}_\varepsilon - \widetilde{\Psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} < \delta(\varepsilon).$$

6 Resultados preliminares

Seja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ satisfazendo:

$$
\begin{array}{lll}
i) & g(s) = \dfrac{\alpha}{4}(1-s)^2 & s \in [0,1] \\
ii) & g'(s) > 0 & s > 1 \\
iii) & g(s) \leq \dfrac{\alpha}{4}(1-s)^2 & s \in [0,\infty) \\
iv) & \exists\, k > 0 \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |g'| \leq k \\ \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |g''| \leq k \\ \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |g'''| \leq k \end{array} \right. &
\end{array}
\tag{33}
$$

Observação 6.1 *Existem funções satisfazendo (33), como por exemplo*

$$
g(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\alpha}{4}(1-s)^2 & s \in [0,1] \\ \dfrac{\alpha}{4}(1-s)^2 \left[1 - e^{-\frac{t}{(1-s)^2}}\right] & s > 1. \end{array} \right.
$$

sendo $t > 0$ uma constante.

Dada uma função g satisfazendo (33) definimos

$$
W(\Psi) = g(|\Psi|^2) \tag{34}
$$

e também um novo funcional energia

$$
E_\varepsilon(\Psi, A) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Psi|^2 + W(\Psi) \right\} dx + \frac{\beta}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} |rotA|^2 dx. \tag{35}
$$

Observação 6.2 *De (33) iii), segue que* $W(\Psi) \leq \dfrac{\alpha}{4}(1-|\Psi|^2)^2$, $\forall \Psi \in H^1(\Omega(\varepsilon); \mathbb{C})$, *logo*

$$
E_\varepsilon(\Psi, A) \leq \frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(\Psi, A), \quad \forall (\Psi, A) \in H^1(\Omega(\varepsilon); \mathbb{C}) \times \mathrm{Z}.
$$

Observação 6.3 *De (33) i), segue que*

$$
E_\varepsilon(\Psi, A) = \frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(\Psi, A) \textit{ para } (\Psi, A) \in H^1(\Omega(\varepsilon); \mathbb{C}) \times \mathrm{Z} \textit{ tais que } |\Psi| \leq 1.
$$

A equação de Euler-Lagrange de $E_\varepsilon(\Psi, A)$ é

$$\begin{cases} (\nabla - iA)^2\Psi + W_u(\Psi) = 0 & x \in \Omega(\varepsilon) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = i(A.\nu)\Psi & x \in \partial\Omega(\varepsilon) \\ -\beta rotrot A - [\frac{i}{2}(\Psi^*\nabla(\Psi) - \Psi\nabla(\Psi^*)) + |\Psi|^2 A]\chi_{\Omega(\varepsilon)} = 0 & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{36}$$

Lema 6.1 *Se* (Ψ, A) *é uma solução de (36) então*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}} |\Psi(x)| \leq 1.$$

Demonstração: Seja Ψ uma solução de (36), vamos escrever $\Psi = u_1 + iu_2$ e $|u| = (u_1)^2 + (u_2)^2$. Separando a parte real e a parte imaginária nas duas primeiras linhas de (36), podemos reescrevê-las como

$$\triangle u_1 + 2A.\nabla u_2 - |A|^2 u_1 - 2g'(|u|^2)u_1 = 0 \quad x \in \Omega(\varepsilon) \tag{37}$$

$$\triangle u_2 - 2A.\nabla u_1 - |A|^2 u_2 - 2g'(|u|^2)u_2 = 0 \quad x \in \Omega(\varepsilon) \tag{38}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = -(A.\nu)u_2 \quad x \in \partial\Omega(\varepsilon) \tag{39}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = (A.\nu)u_1 \quad x \in \partial\Omega(\varepsilon). \tag{40}$$

Multiplicando (37) por $2u_1$, (38) por $2u_2$ e somando os resultados temos

$$\sum_{i=1}^{2} 2u_i\triangle u_i + 4(-1)^{i+1}Au_i\nabla u_i - 2|A|^2(u_i)^2 - 4g'(|u|^2)(u_i)^2 = 0 \; x \in \Omega(\varepsilon) \tag{41}$$

e substituindo $2u_i\triangle u_i = \triangle[(u_i)^2] - 2|\nabla u_i|^2$, $i = 1, 2$ em (41) segue que

$$\triangle(|u|^2) - 2(|\nabla u_1 + u_2 A|^2 + |\nabla u_2 - u_1 A|^2) - 4g'(|u|^2)|u|^2 = 0 \qquad x \in \Omega(\varepsilon). \tag{42}$$

Além disso, como $\dfrac{\partial}{\partial \nu}(|u|^2) = 2u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu} + 2u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial \nu}$ utilizando (39) e (40) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(|u|^2) = 0 \qquad x \in \partial\Omega(\varepsilon). \tag{43}$$

Logo se $\Psi = u_1 + iu_2$ é solução de (36), temos por (42) e (43) que

$$\begin{cases} \triangle(|u|^2) - 2(|\nabla u_1 + u_2 A|^2 + |\nabla u_2 - u_1 A|^2) - 4g'(|u|^2)|u|^2 = 0 & x \in \Omega(\varepsilon) \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(|u|^2) = 0 & x \in \partial\Omega(\varepsilon) \end{cases}$$

Conforme [2] se (Ψ, A) é solução de (36) então $\Psi \in C^1(\overline{\Omega(\varepsilon)})$. Logo

$$\sup_{x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}} |\Psi| = \max_{x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}} |\Psi|.$$

Suponhamos por contradição que $\sup\limits_{x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}} |\Psi| > 1$, temos então

$$\max_{x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}} |\Psi| > 1 \Rightarrow \max_{x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}} |u|^2 > 1.$$

Seja x_0 o ponto de máximo de $|u|^2$ em $\overline{\Omega(\varepsilon)}$.

i) Se x_0 é interior a $\Omega(\varepsilon)$ então existe aberto M interior a $\Omega(\varepsilon)$ tal que $x_0 \in M$ e $|u(x)|^2 > 1$, $\forall x \in M$. Logo por (33) $g'(|u|^2) > 0$, $\forall x \in M$, substituindo em (42) temos que $\triangle(|u|^2) \geq 0$, $\forall x \in M$. Utilizando no Princípio Maximal (ver apêndice) $A = \triangle$ e $\Omega = M$ segue que

$$|u(x)|^2 \equiv |u(x_0)|^2, \quad \forall x \in M. \tag{44}$$

Substituindo (44) em (42) temos

$$-2(|u_2 A|^2 + |u_1 A|^2) - 4g'(|u|^2)|u|^2 = 0, \ \forall x \in M \subset \Omega(\varepsilon).$$

A equação acima é uma contradição, pois, $g'(|u|^2) > 0$, $\forall x \in M$.

ii) Agora, se o ponto x_0 estiver na fronteira de $\Omega(\varepsilon)$ ele pode estar na parte suave ou na parte não suave desta fronteira. Caso ele esteja na parte não suave, existe vizinhança de x_0 (bola aberta com centro em x_0 intersecção com $\overline{\Omega(\varepsilon)}$) onde $|u(x)|^2 > 1$, e nesta vizinhança existe algum ponto que está na parte suave da fronteira.

Logo, se x_0 está na fronteira de $\Omega(\varepsilon)$ existe ponto x_1 que pertence à parte suave desta fronteira e que satisfaz $|u(x_1)|^2 > 1$. Podemos então encontrar uma bola aberta B tal que:

i) x_1 está na fronteira de B,

ii) o vetor normal a ∂B no ponto x_1 coincide com o vetor normal a $\partial\Omega(\varepsilon)$ no ponto x_1,

iii) $|u(x)|^2 > 1$ para todo $x \in \overline{B}$ e

iv) o conjunto $\{\overline{B} - \{x_1\}\}$ está contido no interior de $\Omega(\varepsilon)$.

Assim, em $\overline{B}$ vale $g'(|u|^2) > 0$. Se o máximo de $|u|^2$ em $\overline{B}$ não for atingido em x_1, ele é interior a $\Omega(\varepsilon)$ e obtemos uma contradição com o mesmo argumento usado anteriormente. Caso o máximo de $|u|^2$ em $\overline{B}$ seja atingido no ponto x_1, substituindo $g'(|u|^2) > 0$ em (42) temos $\triangle(|u|^2) \geq 0$. Aplicamos agora, o Lema de Hopf (ver apêndice) para $\Omega = B$ e $p = x_1$. Caso u seja não constante, temos uma contradição com (43); e caso u seja constante, temos uma contradição com (42). ∎

Lema 6.2 *Se $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ é mínimo local de (35). Então $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ é também mínimo local de (3).*

Demonstração: Se $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ é mínimo local de (35) então $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ é uma solução de (36), logo pelo Lema 6.1 $\sup_{x\in\overline{\Omega(\varepsilon)}} |\Psi_\varepsilon(x)| \leq 1$. Da observação 6.3 segue que

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon). \tag{45}$$

Como $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ é mínimo local de (35) segue que existe vizinhança V de $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ contida em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times \mathrm{Z}$ tal que

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(\Psi, A), \quad \forall(\Psi, A) \in V \tag{46}$$

utilizando (45), (46) e a observação 6.2 segue que

$$\frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) = E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(\Psi, A) \leq \frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(\Psi, A), \quad \forall(\Psi, A) \in V.$$

Mostrando que $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ é também um mínimo local para G_ε. ∎

Dados $M_0 > 0$ e $\delta > 0$, consideremos os conjuntos

$$F(\delta) = \left\{ (\Psi, A) \in H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times \mathrm{Z}; \inf_{0\leq \mathrm{c} \leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{ic}}\|_{\mathrm{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}} \leq \delta \right\},$$

$$F_1(\delta) = \{(\Psi, A) \in F(\delta); E_\varepsilon(\Psi, A) < M_0\}.$$

Lema 6.3 *Dados dois números estritamente positivos M_0 e δ_2 consideremos para $0 < \delta \leq \delta_2$ o conjunto $F_1(\delta) \subset F(\delta)$. Então existem $\varepsilon_1 > 0$ e $M_1 > 0$ tais que para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$*

$$\|\widetilde{\Psi}\|_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \leq M_1 \quad \forall(\Psi, A) \in F_1(\delta)$$

sendo M_1 uma constante que não depende de δ.

Demonstração: De (54) temos

$$\|\nabla\Psi\|^2_{L^2} \leq 4\varepsilon M_0 \left\{1 + C\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{2\beta}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^3_a}\right\} \quad , \quad \forall(\Psi, A) \in F_1(\delta). \tag{47}$$

Utilizando o Corolário A.1 temos que

$$\begin{aligned}
|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 &\leq \left(\left|\nabla'\widetilde{\Psi} - \frac{\nabla' a}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right| + \left|\frac{\nabla' a}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|\right)^2 \\
&\leq 2\left|\nabla'\widetilde{\Psi} - \frac{\nabla' a}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + 2\left|\frac{\nabla' a}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 \\
&= 2\left\{\left|\widetilde{\Psi}_{x_1} - \frac{a_{x_1}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \left|\widetilde{\Psi}_{x_2} - \frac{a_{x_2}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \frac{|\nabla' a|^2\zeta^2}{a^2}\zeta^2|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2\right\} \\
&= 2\left\{\left|\widetilde{\Psi}_{x_1} - \frac{a_{x_1}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \left|\widetilde{\Psi}_{x_2} - \tfrac{a_{x_2}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2\right\} \\
&+\frac{2}{a^2}\left(|\nabla' a|^2\zeta^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2.
\end{aligned}$$

Daí, tomando ε_0 tal que se $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, temos $\dfrac{1}{\varepsilon^2} \geq \max\limits_{x\in\overline{D}}\{|\nabla' a|^2\zeta^2 + \dfrac{a^2}{2}\}$, logo

$$\begin{aligned}
|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 + |\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 &\leq 2\left\{\left|\widetilde{\Psi}_{x_1} - \frac{a_{x_1}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \left|\widetilde{\Psi}_{x_2} - \frac{a_{x_2}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2\right\} \\
&+\frac{2}{a^2}\left(|\nabla' a|^2\zeta^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{a^2}{2}\right)|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 \\
&\leq 2\left\{\left|\widetilde{\Psi}_{x_1} - \frac{a_{x_1}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \left|\widetilde{\Psi}_{x_2} - \frac{a_{x_2}}{a}\zeta\widetilde{\Psi}_\zeta\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da desigualdade acima por a, integrando em $D \times (0, 1)$ e utilizando (23) segue que

$$\int_{D\times(0,1)}(|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 + |\widetilde{\Psi}_\zeta|^2)a(x')dx'd\zeta \leq \frac{2}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}|\nabla\Psi|^2 dx \tag{48}$$

Usando (47), (48) e a imersão de $L^3_a(D\times(0,1);\mathbb{C})$ em $H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})$ temos que em $F_1(\delta)$ vale

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} &= \|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + \int_{D\times(0,1)} (|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 + |\widetilde{\Psi}_\zeta|^2) a dx' d\zeta \\
&\leq \|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + 8M_0\{1 + C\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\beta}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^3_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}\} \qquad (49)\\
&\leq \|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + 8M_0\{1 + C\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\beta}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}\}
\end{aligned}
$$

Tomando ε_1 pequeno tal que $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ e para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ vale

$$\frac{8M_0C'\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\beta} \leq \frac{1}{2}$$

e utilizando (49) temos que em $F_1(\delta)$ vale

$$\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \leq 2\|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + 16M_0. \qquad (50)$$

Dado $(\Psi, A) \in F(\delta)$, utilizando a desigualdade acima, a desigualdade de Minkowski (ver apêndice) e propriedades do ínfimo, temos

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\Psi}\|_{L^2_a} &\leq \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} + \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \\
&\leq \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \\
&\leq \delta_2 + 1.
\end{aligned}
$$

Substituindo a desigualdade acima em (50), segue que existe $M_1 > 0$ tal que $\|\widetilde{\Psi}\|_{H^1_a} \leq M_1$ para todo par $(\Psi, A) \in F_1(\delta)$. ∎

Lema 6.4 *Nas hipóteses do Teorema 5.1 dados $M_0 > 0$ e $\gamma > 0$ existem números reais positivos μ_1, δ_1, c_1 e uma função $\varepsilon_0(\gamma)$ positiva, monótona e crescente, satisfazendo $\varepsilon_0(\gamma) \to 0$ quando $\gamma \to 0$, tais que se $(\Psi, A) \in F_1(\delta_1)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(\gamma)$ e*

$$\inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \leq \delta_1 \qquad (51)$$

então

$$
\begin{aligned}
E_\varepsilon(\Psi, A) - E_\varepsilon(\psi_0, 0) &\geq \mu_1 \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|^2_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} - \frac{\gamma}{2}\int_D a dx' \\
&\quad - c_1\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^4_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + \frac{\beta}{4\varepsilon}\|\nabla A\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} \qquad (52)\\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\|\Psi A\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}
$$

$$sendo \ \|\widetilde{\Psi}\|_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} = \left(\|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + \int_{D\times(0,1)} (|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 + |\widetilde{\Psi}_\zeta|^2) a dx' d\zeta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: A demonstração deste resultado será feita posteriormente a demonstração do Teorema Principal.

7 Demonstração do Teorema Principal

Demonstraremos o Teorema 5.1 encontrando um mínimo em $F(\delta)$ (que será mínimo local em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times \mathrm{Z})$ para o funcional E_ε . Então utilizando o Lema 6.2 segue que teremos um mínimo local em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times \mathrm{Z}$ para G_ε.

Note que o interior de $F(\delta)$ que denotaremos

$$F(\delta)\backslash\partial F(\delta) = \left\{(\Psi, A) \in F(\delta); \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} < \delta\right\}$$

é não vazio, pois $\psi_0 \in F(\delta)\backslash\partial F(\delta)$.

Sejam $M_0 = E_\varepsilon(\psi_0, 0) + 1$ e $\delta_2 = \delta_1$, sendo δ_1 dado pelo Lema 6.4. Mostremos que $F_1(\delta)$ é limitado em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times \mathrm{Z}$.

Pelo Lema 6.3 com M_0 e δ_2 dados acima, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|\widetilde{\Psi}\|_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \leq M_1 \quad \forall(\Psi, A) \in F_1(\delta). \tag{53}$$

Logo para $(\Psi, A) \in F_1(\delta)$ temos:

i) Utilizando (53) e a equivalência das normas $\|.\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}$ e $\|.\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}$, existe $c > 0$ tal que

$$\|\Psi\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \leq c\|\widetilde{\Psi}\|_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \leq c\|\widetilde{\Psi}\|_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \leq cM_1.$$

ii) Das definições de E_ε e $F_1(\delta)$ segue que

$$\|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} \leq \frac{2\varepsilon}{\beta} E_\varepsilon(\Psi, A) \leq \frac{2\varepsilon}{\beta} M_0.$$

iii) Existe $C' > 0$ tal que

$$\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \leq 4\varepsilon M_0 + C'\|\widetilde{\Psi}\|_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \leq 4\varepsilon M_0 + C' M_0.$$

Da fato, utilizando a Desigualdade de Minkowski (ver apêndice) e a Proposição A.5 temos

$$\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \leq 2\left[\|(\nabla - iA)\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} + \|iA\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\right].$$

Aplicando a definição de E_ε e a Desigualdade de Hölder Generalizada (ver apêndice) no lado direito da equação acima segue que

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} &\leq 4\varepsilon E_\varepsilon(\Psi, A) + 2\|A\|^2_{L^6(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)}\|\Psi\|^2_{L^3(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \\
&\leq 4\varepsilon E_\varepsilon(\Psi, A) + 2\|A\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^3_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}.
\end{aligned}$$

Aplicando ii) e (154) no lado direito da equação acima temos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} &\leq 4\varepsilon E_\varepsilon(\Psi, A) + C\|\nabla A\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^3_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \\ &\leq 4\varepsilon M_0 + C\frac{2\varepsilon}{\beta}M_0\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|_{L^3_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}. \end{aligned} \tag{54}$$

Como $L^3_a(D \times (0,1);\mathbb{C})$ está imerso em $H^1_a(D \times (0,1);\mathbb{C})$ segue de (54) que existe $C' > 0$ tal que

$$\|\nabla\Psi\|^2_{L^2} \leq 4\varepsilon M_0 + C'\|\widetilde{\Psi}\|_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \leq 4\varepsilon M_0 + C'M_0.$$

Logo, de i), ii) e iii) segue que $F_1(\delta)$ é limitado em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times$ Z. Além disso, dado $(\Psi, A) \in F_1(\delta)$, temos que Ψ é limitada em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$ e A é limitada em Z.

Utilizaremos a seguir o método direto do cálculo variacional, com a finalidade de encontrar um mínimo em $F(\delta)$ para o funcional E_ε.

Seja $d = \inf\limits_{(\Psi,A)\in F(\delta)} E_\varepsilon(\Psi, A) \geq 0$. Da definição de ínfimo segue que dado $j \in \mathbb{N}^*$, existe uma seqüencia $(\Psi_j, A_j) \in F(\delta)$, chamada seqüencia minimizante tal que

$$E_\varepsilon(\Psi_j, A_j) < d + \frac{1}{j} \leq d + 1 \leq E_\varepsilon(\psi_0, 0) + 1 = M_0.$$

Temos então que cada elemento (Ψ_j, A_j) da seqüência minimizante está contido em $F_1(\delta)$. Como $F_1(\delta)$ é um conjunto limitado, a seqüência $\{\Psi_j\}$ é limitada em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$ e a seqüência $\{A_j\}$ é limitada em Z.

Dada $A \in Z$ e chamemos A^* a restrição de A a $\Omega(\varepsilon)$, temos que $A^* \in H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)$, pois $A^* \in L^6(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)$ e $\nabla A^* \in L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^{3\times 3})$. Utilizando o Teorema de Rellich-Kondrachov (ver apêndice) podemos extrair subseqüências $\{\Psi_{j_k}\} \subset \{\Psi_j\}$ e $\{A_{j_k}\} \subset \{A_j\}$ tais que existem $\Psi_\varepsilon \in L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \cap \mathrm{L}^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$ e $A^*_\varepsilon \in L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3) \cap L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \Psi_{j_k} &\to \Psi_\varepsilon \text{ em } L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \\ \Psi_{j_k} &\to \Psi_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \\ A^*_{j_k} &\to A^*_\varepsilon \text{ em } L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3) \\ A^*_{j_k} &\to A^*_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Compacidade Fraca (ver apêndice) existem subseqüências de $\{\Psi_{j_k}\}$ e $\{A_{j_k}\}$ que continuaremos denotando $\{\Psi_{j_k}\}$ e $\{A_{j_k}\}$ e funções $\Psi'_\varepsilon \in H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$, $A_\varepsilon \in Z$ tais que $\Psi_{j_k} \rightharpoonup \Psi'_\varepsilon$ em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$ e $A_{j_k} \rightharpoonup A_\varepsilon$ em Z.

Como $\Psi_{j_k} \rightharpoonup \Psi'_\varepsilon$ em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$, temos que $\Psi_{j_k} \rightharpoonup \Psi'_\varepsilon$ em $L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$. Temos também que $\Psi_{j_k} \to \Psi_\varepsilon$ em $L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$. Portanto, pela unicidade do limite fraco, temos $\Psi'_\varepsilon = \Psi_\varepsilon$. Analogamente, mostramos que A^*_ε é a restrição de A_ε a $\Omega(\varepsilon)$.

Conseqüentemente, redefinindo os índices, se necessário para que eles sejam os mesmos temos $(\Psi_{j_k}, A_{j_k}) \rightharpoonup (\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \times \mathrm{Z}$, e também

$$\Psi_{j_k} \to \Psi_\varepsilon \text{ em } L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \tag{55}$$

$$\Psi_{j_k} \to \Psi_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \tag{56}$$

$$A^*_{j_k} \to A^*_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3) \tag{57}$$

$$\Psi_{j_k} \rightharpoonup \Psi_\varepsilon \text{ em } H^1(\Omega(\varepsilon)) \tag{58}$$

$$A_{j_k} \rightharpoonup A_\varepsilon \text{ em } Z \tag{59}$$

sendo A^* a restrição de A a $\Omega(\varepsilon)$.

Vejamos agora que $E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) = d$. Primeiramente, vejamos que

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq d.$$

De fato,

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} \left\{\frac{1}{2}|\nabla\Psi_\varepsilon|^2 + W(\Psi_\varepsilon)\right\} dx + \frac{\beta}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla A_\varepsilon|^2 dx \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} |A_\varepsilon|^2|\Psi_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} 2A_\varepsilon Re[i\Psi^*_\varepsilon\nabla\Psi_\varepsilon]dx \end{aligned} \tag{60}$$

Por [4] pag. 8, segue que $\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} \left\{\frac{1}{2}|\nabla\Psi|^2 + W(\Psi)\right\} dx$ é fracamente s.c.i. em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})$ e portanto

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}\{\frac{1}{2}|\nabla\Psi_\varepsilon|^2 + W(\Psi_\varepsilon)\}dx \leq \liminf_{j_k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}\{\frac{1}{2}|\nabla\Psi_{j_k}|^2 + W(\Psi_{j_k})\}dx. \tag{61}$$

Temos também que $\frac{\beta}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla A|^2dx$ é fracamente s.c.i., pois $\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla A|^2dx$ é a norma em Z, que é espaço de Banach. Logo,

$$\frac{\beta}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla A_\varepsilon|^2dx \leq \liminf_{j_k\to\infty}\frac{\beta}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla A_{j_k}|^2dx. \tag{62}$$

Da Desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}|A_{j_k}|^2|\Psi_{j_k}|^2dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}|A_\varepsilon|^2|\Psi_\varepsilon|^2dx \\
= & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}\left[|A_{j_k}|^2|\Psi_{j_k}|^2 - |A_{j_k}|^2|\Psi_\varepsilon|^2 + |A_{j_k}|^2|\Psi_\varepsilon|^2 - |A_\varepsilon|^2|\Psi_\varepsilon|^2\right]dx \\
= & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}\left\{|A_{j_k}|^2[|\Psi_{j_k}|^2 - |\Psi_\varepsilon|^2] + |\Psi_\varepsilon|^2[|A_{j_k}|^2 - |A_\varepsilon|^2]\right\}dx \\
\leq & \frac{1}{\varepsilon}\|A_{j_k}\|^2_{L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)}\||\Psi_{j_k}|^2 - |\Psi_\varepsilon|^2\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\||A_{j_k}|^2 - |A_\varepsilon|^2\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
&\Psi_{j_k} \to \Psi_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \Rightarrow |\Psi_{\mathrm{j_k}}|^2 \to |\Psi_\varepsilon|^2 \text{ em } \mathrm{L}^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \\
&A^*_{j_k} \to A^*_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3) \Rightarrow |A^*_{j_k}|^2 \to |A^*_\varepsilon|^2 \text{ em } L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3).
\end{aligned} \tag{64}$$

De (63) e (64) segue que

$$\lim_{j_k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}|A_{j_k}|^2|\Psi_{j_k}|^2dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}|A_\varepsilon|^2|\Psi_\varepsilon|^2dx. \tag{65}$$

Se escrevermos $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$ temos

$$\Psi_{j_k} \to \Psi_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \Rightarrow \begin{cases} \psi_{1_{j_k}} \to \psi_{1\varepsilon} \\ \psi_{2_{j_k}} \to \psi_{2\varepsilon} \end{cases} \text{em } \mathrm{L}^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \tag{66}$$

$$\Psi_{j_k} \rightharpoonup \Psi_\varepsilon \text{ em } H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}) \Rightarrow \begin{cases} \nabla\psi_{1_{j_k}} \rightharpoonup \nabla\psi_{1\varepsilon} \\ \nabla\psi_{2_{j_k}} \rightharpoonup \nabla\psi_{2\varepsilon} \end{cases} \text{em } \mathrm{L}^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}). \tag{67}$$

Além disso,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}2ARe[i\Psi^*\nabla\Psi]dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}2A[\psi_2\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi_2]dx.$$

Como visto anteriormente

$$A^*_{j_k} \to A^*_\varepsilon \text{ em } L^4(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3). \tag{68}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k} Re[i\Psi_{j_k}^{*}\nabla\Psi_{j_k}]dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon} Re[i\Psi_{\varepsilon}^{*}\nabla\Psi_{\varepsilon}]dx \\
= & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}[\psi_{2_{j_k}}\nabla\psi_{1_{j_k}} - \psi_{1_{j_k}}\nabla\psi_{2_{j_k}}]dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}[\psi_{2_\varepsilon}\nabla\psi_{1_\varepsilon} - \psi_{1_\varepsilon}\nabla\psi_{2_\varepsilon}]dx \\
= & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{2_{j_k}}\nabla\psi_{1_{j_k}}dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{1_{j_k}}\nabla\psi_{2_{j_k}}dx \\
- & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}\psi_{2_\varepsilon}\nabla\psi_{1_\varepsilon}dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}\psi_{1_\varepsilon}\nabla\psi_{2_\varepsilon}dx \\
= & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{2_{j_k}}\nabla\psi_{1_{j_k}}dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{1_{j_k}}\nabla\psi_{2_{j_k}}dx \\
- & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}\psi_{2_\varepsilon}\nabla\psi_{1_\varepsilon}dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}\psi_{1_\varepsilon}\nabla\psi_{2_\varepsilon}dx \\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}\psi_{2_\varepsilon}\nabla\psi_{1_{j_k}}dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}\psi_{2_\varepsilon}\nabla\psi_{1_{j_k}}dx \\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{2_\varepsilon}\nabla\psi_{1_{j_k}}dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{2_\varepsilon}\nabla\psi_{1_{j_k}}dx \\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{1_{j_k}}\nabla\psi_{2_\varepsilon}dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{1_{j_k}}\nabla\psi_{2_\varepsilon}dx \\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{1_\varepsilon}\nabla\psi_{2_\varepsilon}dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{1_\varepsilon}\nabla\psi_{2_\varepsilon}dx.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos podemos escrever a igualdade acima como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{j_k}\psi_{1_{j_k}}[\nabla\psi_{2_\varepsilon} - \nabla\psi_{2_{j_k}}]dx & (69)\\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} A_{\varepsilon}\psi_{2_\varepsilon}[\nabla\psi_{1_{j_k}} - \nabla\psi_{1_\varepsilon}]dx & (70)\\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} \nabla\psi_{1_{j_k}} A_{j_k}[\psi_{2_{j_k}} - \psi_{2_\varepsilon}]dx & (71)\\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} \nabla\psi_{2_\varepsilon}\psi_{1_\varepsilon}[A_{\varepsilon} - A_{j_k}]dx & (72)\\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} \nabla\psi_{1_{j_k}}\psi_{2_\varepsilon}[A_{j_k} - A_{\varepsilon}]dx & (73)\\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} \nabla\psi_{2_\varepsilon} A_{j_k}[\psi_{1_\varepsilon} - \psi_{1_{j_k}}]dx. & (74)
\end{aligned}$$

Utilizando (67) e a Desigualdade de Hölder, temos que o limite de (69) e (70) quando j_k tende a infinito é zero. Além disso, utilizando (66), (68) e a Desigualdade de Hölder em (71)-(74), temos que o limite destas equações quando j tende a infinito também é zero. Portanto,

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}2A_{j_k}Re[i\Psi^*_{j_k}\nabla\Psi_{j_k}]dx=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}2A_{\varepsilon}Re[i\Psi^*_{\varepsilon}\nabla\Psi_{\varepsilon}]dx. \tag{75}$$

Substituindo (61), (62), (65) e (75) em (60) temos

$$\begin{aligned}
E_{\varepsilon}(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon}) &\leq \liminf_{j_k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}\left\{\frac{1}{2}|\nabla\Psi_{j_k}|^2+W(j_k)\right\}dx\\
&+\liminf_{j_k\to\infty}\frac{\beta}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla A_{j_k}|^2dx\\
&+\lim_{j_k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}|A_{j_k}|^2|\Psi_{j_k}|^2dx\\
&+\lim_{j_k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}2A_{j_k}Re[i\Psi^*_{j_k}\nabla\Psi_{j_k}]dx.
\end{aligned}$$

Da equação acima, segue que

$$E_{\varepsilon}(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon})\leq\liminf_{j\to\infty}E_{\varepsilon}(\Psi_j,A_j)\leq d. \tag{76}$$

Provemos agora que $E_{\varepsilon}(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon})\geq d$. Temos que $F(\delta)$ é fechado em $H^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})\times$ Z. Logo, $F(\delta)$ é fechado em $L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})\times$ Z. Como $(\Psi_{j_k},A)\to(\Psi_{\varepsilon},A)$ em $L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})\times$ Z para todo A em Z, temos que $(\Psi_{j_k},A_{\varepsilon})\to(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon})$ em $L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})\times$ Z. Como $(\Psi_{j_k},A_{\varepsilon})\in F(\delta)$, $\forall j_k$ e $F(\delta)$ é fechado em $L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})\times$ Z temos que $(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon})\in F(\delta)$. Portanto

$$E_{\varepsilon}(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon})\geq d. \tag{77}$$

De (76) e (77) temos

$$E_{\varepsilon}(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon})=d.$$

Resta mostrar que $(\Psi_{\varepsilon},A_{\varepsilon})$ é ponto interior a $F(\delta)$. Denotaremos a partir daqui a seqüencia (Ψ_{j_k},A_{j_k}) novamente por (Ψ_j,A_j).

Podemos assumir (redefinindo os primeiros termos se necessário)

$$E_{\varepsilon}(\Psi_j,A_j)<E_{\varepsilon}(\psi_0,0)+\frac{\mu_1\delta^2}{8}\quad\forall j \tag{78}$$

Sejam

$$\gamma=\gamma(\delta)=\frac{\mu_1\delta^2}{8\int_D a\,dx'} \tag{79}$$

e

$$\widetilde{\varepsilon}(\delta) = \min\left\{\varepsilon_0(\gamma(\delta)), \left(\frac{\mu_1\delta^2}{16C_1(M_1)^4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{80}$$

sendo $\varepsilon_0(\gamma)$ dado pelo Lema 6.4.

Como

$$\frac{\gamma(\delta)}{2}\int_D adx' = \frac{\mu_1\delta^2}{16}$$

e

$$C_1(\widetilde{\varepsilon}(\delta))^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^4_{H^1_a} \leq \frac{\mu_1\delta^2}{16} \text{ para } (\Psi, A) \in F_1(\delta)$$

temos

$$-\frac{\gamma(\delta)}{2}\int_D adx' - C_1(\widetilde{\varepsilon}(\delta))^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^4_{H^1_a} \geq \frac{\mu_1\delta^2}{8} \text{ para } (\Psi, A) \in F_1(\delta). \tag{81}$$

Utilizando o Lema 6.4 juntamente com (81) temos

$$E_\varepsilon(\Psi, A) - E_\varepsilon(\psi_0, 0) \geq \mu_1 \inf_{0\leq c\leq 2\pi}\|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi_0}e^{ic}\|^2_{L^2_a} - \frac{\mu_1\delta^2}{8} \text{ para } (\Psi, A) \in F_1(\delta) \tag{82}$$

desde que $\gamma = \gamma(\delta)$, $\delta \in (0, \delta_1]$, $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}(\delta) \leq \varepsilon_0(\gamma(\delta))$ e (51) seja satisfeita.

Como $(\Psi_j, A_j) \in F_1(\delta) \subset F(\delta)$, temos que (Ψ_j, A_j) satisfaz (51), logo, de (82) segue

$$\frac{\mu_1\delta^2}{8} + E_\varepsilon(\Psi_j, A_j) - E_\varepsilon(\psi_0, 0) \geq \mu_1 \inf_{0\leq c\leq 2\pi}\|\widetilde{\Psi}_j - \widetilde{\psi_0}e^{ic}\|^2_{L^2_a}. \tag{83}$$

De (78) segue que

$$\frac{\mu_1\delta^2}{4} > E_\varepsilon(\Psi_j, A_j) - E_\varepsilon(\psi_0, 0) + \frac{\mu_1\delta^2}{8} \tag{84}$$

Utilizando (83) e (84) temos

$$\inf_{0\leq c\leq 2\pi}\|\widetilde{\Psi}_j - \widetilde{\psi}_0e^{ic}\|^2_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

e portanto

$$\inf_{0\leq c\leq 2\pi}\|\widetilde{\Psi}_j - \widetilde{\psi}_0e^{ic}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} < \frac{\delta}{2}$$

mostrando que $(\Psi_j, A_j) \in F(\frac{\delta}{2})$, $\forall j$.

Daí, como

$$\|\widetilde{\Psi}_\varepsilon - \widetilde{\psi}_0e^{ic}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \leq \|\widetilde{\Psi}_\varepsilon - \widetilde{\Psi}_{j_k}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} + \|\widetilde{\Psi}_{j_k} - \widetilde{\psi}_0e^{ic}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}, \quad \forall j_k, \quad \forall c$$

temos

$$\inf_{0\le c\le 2\pi}\|\widetilde{\Psi}_\varepsilon-\widetilde{\psi}_0e^{ic}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\le\|\widetilde{\Psi}_\varepsilon-\widetilde{\Psi}_{j_k}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}+\inf_{0\le c\le 2\pi}\|\widetilde{\Psi}_{j_k}-\widetilde{\psi}_0e^{ic}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})},\quad \forall j_k.$$

Logo

$$\inf_{0\le c\le 2\pi}\|\widetilde{\Psi}_\varepsilon-\widetilde{\psi}_0e^{ic}\|_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}<\delta$$

e portanto $(\Psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ é interior a $F(\delta)$.

Consideremos $\gamma = \gamma(\delta)$, $\quad \delta \in (0,\delta_1]$ e $0<\varepsilon<\widetilde{\varepsilon}(\delta)$, $\quad \delta\in(0,\delta_1]$. Pela definição de $\widetilde{\varepsilon}(\delta)$ temos que $\widetilde{\varepsilon}(\delta)$ é monótona crescente e $\widetilde{\varepsilon}(\delta)\to 0$ quando $\delta\to 0$. Tomando δ como a inversa de $\varepsilon=\widetilde{\varepsilon}(\delta)$, temos $\delta=\widetilde{\varepsilon}^{-1}(\varepsilon)=\delta(\varepsilon)$, $\quad \varepsilon\in(0,\widetilde{\varepsilon}(\delta_1))$. Quando $\varepsilon\to 0$, temos que $\widetilde{\varepsilon}(\delta)\to 0$, Logo, $\frac{\mu_1\delta^2}{16C_1(M_1)^4}\to 0\Rightarrow\delta\to 0\Rightarrow\delta(\varepsilon)\to 0$. ■

Vejamos agora a demonstração do Lema 6.4. Primeiramente demonstremos alguns resultados preliminares.

Sejam

$$J^1_\varepsilon = E_\varepsilon(\Psi,A)-E_\varepsilon(\Psi,0)$$

$$J^2_\varepsilon = E_\varepsilon(\Psi,0)-E_\varepsilon(\psi_0,0).$$

Lema 7.1 *Existem números estritamente positivos C_2, C_3 e ε_2 tais que para $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$*

$$\begin{aligned} J^1_\varepsilon &\ge \tfrac{\beta}{4\varepsilon}\|\nabla A\|^2_{L^2}+\tfrac{1}{2\varepsilon}\|\Psi A\|^2_{L^2}\\ &-C_2\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a}\{2\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a}+\tfrac{C_3}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a}\}\end{aligned}\tag{85}$$

Demonstração:

$$J^1_\varepsilon=\frac{1}{2\varepsilon}\|\Psi A\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon))}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}Re[-i\Psi^*(A\nabla\Psi)]dx+\frac{\beta}{2\varepsilon}\|\nabla A\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\tag{86}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada, a Desigualdade de Cauchy com Peso, a imersão de $H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})$ em $L^3_a(D\times(0,1);\mathbb{C})$ e a equação (154) temos que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega(\varepsilon)} |Re[-i\Psi^*(A\nabla\Psi)]|dx \\
\leq & \int_{\Omega(\varepsilon)} |i\Psi^*(A\nabla\Psi)|dx \\
\leq & \int_{\Omega(\varepsilon)} |\Psi^*||A||\nabla\Psi|dx \\
\leq & \|A\|_{L^6(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)}\|\nabla\Psi\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\|\Psi\|_{L^3(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \\
\leq & \|A\|_{L^6(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}\|\nabla\Psi\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\|\Psi\|_{L^3(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \\
\leq & C\|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})}\|\nabla\Psi\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\|\Psi\|_{L^3(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \\
\leq & \frac{\beta}{4}\|\nabla A\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \frac{C^2}{\beta}\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\|\Psi\|^2_{L^3(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \qquad (87) \\
\leq & \frac{\beta}{4}\|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \frac{C^2}{\beta}\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{L^3_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \\
\leq & \frac{\beta}{4}\|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \frac{C^2}{\beta}\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})}\varepsilon^{\frac{2}{3}}C'\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \qquad (88)
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Cauchy em (24) obtemos

$$
\begin{aligned}
|\nabla\Psi|^2 & \leq |\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 + |\nabla'\widetilde{\Psi}|\frac{2|\nabla a|\zeta}{a}|\widetilde{\Psi}_\zeta| + (\frac{|\nabla a|^2\zeta^2}{a^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2})|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 \\
& \leq 2|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 + \left[2|\nabla a|^2\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right]\frac{1}{a^2}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2.
\end{aligned} \qquad (89)
$$

Afirmação: Existe $C_3 > 0$ e $0 < \varepsilon_2 \leq 1$ tais que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$

$$
\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} \leq \varepsilon[2\|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + \frac{C_3}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}]. \qquad (90)
$$

De fato, tomando $p = \min_D a > 0$, $C^* = \max_D |\nabla a|$ e $c_3 = \dfrac{\varepsilon_2^2(C^*)^2 + 1}{p^2}$ temos

$$
2\frac{|\nabla a|^2}{a^2}\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 a^2} \leq \frac{2(C^*)^2}{p^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 p^2} = \frac{\varepsilon^2(C^*)^2 + 1}{p^2}\frac{1}{\varepsilon^2} = C_3\frac{1}{\varepsilon^2}.
$$

Aplicando esta desigualdade a (89), depois multiplicando o resultado por εa e integrando em $D \times (0,1)$, segue que (90) é válida.

Aplicando (90) em (88)

$$
\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} |Re[-i\Psi^*(A.\nabla\Psi)]|dx \leq \frac{\beta}{4\varepsilon}\|\nabla A\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C'\frac{C^2}{\beta}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a}[2\|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a} + \frac{C_3}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a}] \qquad (91)
$$

combinando (91) com (86) segue o resultado ■

Lema 7.2 *Dada $\Psi \in F(\delta)$ definimos*

$$\widetilde{E}_a(\widetilde{\Psi}) = \int_{D\times(0,1)} \left[\frac{1}{2}|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 + \frac{1}{2}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 + W(\widetilde{\Psi})\right] ad\zeta dx'. \tag{92}$$

Então existem números estritamente positivos μ_0 e δ_1 tais que se $\inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|_{L^2_a} \leq \delta_1$ temos

$$\widetilde{E}_a(\widetilde{\Psi}) - \widetilde{E}_a(\psi_0) \geq \mu_0 \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|^2_{L^2_a}. \tag{93}$$

Demonstração: Seja $\widetilde{\psi}_0(x')$ como no Teorema 5.1 . Vamos escrever $\widetilde{\Psi}$ e $\widetilde{\psi_0}$ como vetores, isto é,

$$U(x',\zeta) = (Re[\widetilde{\Psi}(x',\zeta)], Im[\widetilde{\Psi}(x',\zeta)])^T$$
$$U_0(x',\zeta) = (Re[\widetilde{\psi_0}(x')], Im[\widetilde{\psi_0}(x')])^T.$$

A equação de Euler-Lagrange de $\widetilde{E}_a(U)$ é dada por

$$\begin{cases} \frac{1}{a}div(a\nabla U) + U_{\zeta\zeta} - W_u(U) = 0 & (x',\zeta) \in D\times(0,1) \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 & (x',\zeta) \in \partial(D\times(0,1)). \end{cases} \tag{94}$$

Note que U_0 é uma solução desta equação. Consideremos o problema de autovalores para o linearizado de (94) em torno de U_0, que é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a(x')}div'(a(x')\nabla' V) + V_{\zeta\zeta} - W_{uu}(U_0)V = \mu V, & (x',\zeta) \in D\times(0,1) \\ \dfrac{\partial V}{\partial \nu} = 0, & (x',\zeta) \in \partial(D\times(0,1)). \end{cases} \tag{95}$$

Tomemos a expansão em série de Fourier de V, dada por

$$V = V_0(x') + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x') cos k\pi\zeta.$$

Utilizando esta expansão, podemos decompor (95) em infinitos problemas de autovalores da forma

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a(x')}div'(a(x')\nabla' V_k) - k^2\pi^2 V_k - W_{uu}(U_0)V_k = \mu V_k, & x' \in D \\ \\ \dfrac{\partial V_k}{\partial \nu'} = 0, & x \in \partial D, \end{cases} \tag{96}$$

$k = 1, 2, 3, ...$

Quando $|U| \leq 1$ temos que $W(U) = \dfrac{\alpha}{4}(1-|U|^2)^2$. Logo, para $k=0$ o problema (96) coincide com o problema de autovalores para o linearizado de (29) em torno de ψ_0, isto é, o operador linear dado por (96) quando $k=0$ coincide com L' dado por (30) que possui zero como autovalor simples e os demais autovalores negativos.

Utilizando o Teorema A.4 para (96) e (30) concluímos que os autovalores de (96) para $k \geq 1$ são negativos. Portanto, U_0 é uma solução para (95) que satisfaz (A). Para o restante da demonstração confira [12].

■

Lema 7.3 *Seja δ_1 dado pelo Lema 7.2. Então existem $\mu_1 > 0, c_2 > 0$ e uma função $\varepsilon_0(\gamma)$ positiva, monótona, crescente e definida para $\gamma > 0$ tais que quando $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $\Psi \in F(\delta)$ temos*

$$J_\varepsilon^2 \geq \mu_1 \inf_{0 \leq c \leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|^2_{L^2_a} - \frac{\gamma}{2}\int_D a dx' + \frac{c_2}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a}. \tag{97}$$

Demonstração: Sejam $\gamma > 0$, $\eta > 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Mostremos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} |\nabla\Psi|^2 dx \;&\geq \int_{D\times(0,1)} \left[|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - \eta|\nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi_0}e^{ic})|^2 - \gamma\right] a d\zeta dx' \\ &+ \int_{D\times(0,1)} \left[\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla' a|^2\zeta^2\left(1 - \frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\psi_0|^2}{\gamma}\right)\right\}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2\right] d\zeta dx'.\end{aligned} \tag{98}$$

De fato, da equação (23) segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)} |\nabla\Psi|^2 dx \;&= \int_{D\times(0,1)} \{|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - 2Re[\nabla' a.\nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})\widetilde{\Psi}^*_\zeta]\frac{\zeta}{a}\} a d\zeta dx' \\ &- \int_{D\times(0,1)} \{2Re[\nabla' a.\nabla'(\widetilde{\psi}_0 e^{ic})\widetilde{\Psi}^*_\zeta]\frac{\zeta}{a}\} a d\zeta dx' \\ &+ \int_{D\times(0,1)} \{\frac{1}{a^2}(\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla' a|^2\zeta^2)|\widetilde{\Psi}^*_\zeta|^2\} a d\zeta dx'.\end{aligned} \tag{99}$$

Utilizando a Desigualdade de Cauchy com Peso (ver apêndice) temos

$$
\begin{aligned}
& |\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - 2Re[\nabla a \nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})\widetilde{\Psi}^*_\zeta]\frac{\zeta}{a} - 2Re[\nabla a \nabla'(\widetilde{\psi}_0 e^{ic})\widetilde{\Psi}^*_\zeta]\frac{\zeta}{a} \\
& + \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla' a|^2\zeta^2\right)|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 \\
\geq \; & |\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - 2|\nabla a \nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})||\widetilde{\Psi}^*_\zeta|\frac{\zeta}{a} - 2|\nabla a \nabla'(\widetilde{\psi}_0 e^{ic})||\widetilde{\Psi}^*_\zeta|\frac{\zeta}{a} \\
& + \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla' a|^2\zeta^2\right)|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 \\
\geq \; & |\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - \eta|\nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})|^2 - \frac{|\nabla' a|^2|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2\zeta^2}{\eta a^2} - \gamma - \frac{|\nabla' a|^2|\nabla'\widetilde{\psi}_0 e^{ic}|^2|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2\zeta^2}{\gamma a^2} \\
+ \; & \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla' a|^2\zeta^2\right)|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 \\
= \; & |\nabla'\widetilde{\Psi}|^2 - \eta|\nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})|^2 - \gamma + \frac{1}{a^2}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2[|\nabla a|^2\zeta^2\left(-\frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\widetilde{\psi_0}|^2}{\gamma} + 1\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}].
\end{aligned}
$$

Substituindo a desigualdade acima em (99) segue a afirmação.

Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{D\times(0,1)} |\nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})|^2 a d\zeta dx' \; & = \|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a} - \|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} \\
& -2 < \nabla'\widetilde{\psi}_0 e^{ic}, \nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}) >_{L^2_a} \\
& = \|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a} - \|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} \\
& -2\int_{D\times(0,1)} Re[(\nabla'\widetilde{\psi}_0 e^{ic})(\nabla('\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}))^* a d\zeta dx']
\end{aligned}
$$

integrando por partes

$$
\begin{aligned}
\int_{D\times(0,1)} |\nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})|^2 a d\zeta dx' \; & = \|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a} - \|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} \\
& +2\int_{D\times(0,1)} Re[(\frac{1}{a}div'(a\nabla'\widetilde{\psi}_0 e^{ic}))(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})^* a d\zeta dx'] \\
& -\int_{\partial(D\times(0,1))} \nabla'\widetilde{\psi}_0 e^{ic}(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})\nu' a dS.
\end{aligned}
$$

Como ψ_0 é solução de (94) segue que

$$
\int_{D\times(0,1)} |\nabla'(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})|^2 a d\zeta dx' = \|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a} - \|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} + 2 < W_u(\nabla'\widetilde{\psi}_0 e^{ic}), \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a} .
$$

Substituindo isto em (98) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}|\nabla\Psi|^2dx \;&\geq \frac{1-\eta}{2}\|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a}+\frac{\eta}{2}\|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a}-\eta < W_u(\widetilde{\psi}_0e^{ic}),\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0e^{ic} >_{L^2_a}\\ &-\frac{\gamma}{2}\int_D a+\int_{D\times(0,1)}\frac{1}{a^2}[\frac{1}{\varepsilon^2}+|\nabla'a|^2\zeta^2(1-\frac{1}{\eta}-\frac{|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2}{\gamma})]|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2adx'd\zeta.\end{aligned} \tag{100}$$

Por definição

$$J^2_\varepsilon=\frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla\Psi\|^2_{L^2_{(\Omega(\varepsilon)})}-\frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla\widetilde{\psi_0}\|^2_{L^2(\Omega(\varepsilon))}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega(\varepsilon)}[W(\Psi)-W(\psi_0)]dx$$

e

$$\widetilde{E}_a(\widetilde{\Psi})-\widetilde{E}_a(\widetilde{\psi_0})=\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)}[|\nabla'\widetilde{\Psi}|^2-|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2+|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2]ad\zeta dx'+\int_{D\times(0,1)}[W(\widetilde{\Psi})-W(\widetilde{\psi}_0)]ad\zeta dx' \tag{101}$$

Daí, usando (100) e (101) temos que

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon^2 \;&\geq \frac{1-\eta}{2}\|\nabla\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a} + \frac{\eta}{2}\|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} \\
&-\eta < W_u(\widetilde{\psi}_0 e^{ic}), \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a} - \frac{\gamma}{2}\int_D a dx' \\
&+\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)} \frac{1}{a^2}[\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla' a|^2\zeta^2(1 - \frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2}{\gamma})]|\widetilde{(\Psi)}_\zeta|^2 a d\zeta dx' \\
&-\frac{1}{2}\|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} + \int_{D\times(0,1)}[W(\widetilde{\Psi}) - W(\widetilde{\psi}_0)] a d\zeta dx' \\
&= \frac{1-\eta}{2}\|\nabla'\widetilde{\Psi}\|^2_{L^2_a} - \frac{1-\eta}{2}\|\nabla'\widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} + \frac{1-\eta}{2}\int_{D\times(0,1)}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a dx' d\zeta \\
&-\frac{1-\eta}{2}\int_{D\times(0,1)}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a + (1-\eta)\int_{D\times(0,1)}[W(\widetilde{\Psi}) - W(\widetilde{\psi}_0)]a \\
&+\eta\int_{D\times(0,1)}[W(\widetilde{\Psi}) - W(\widetilde{\psi}_0)]a - \eta < W_u(\widetilde{\psi}_0)e^{ic}, \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a} - \frac{\gamma}{2}\int_D a \\
&+\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)} \frac{1}{a^2}[\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla' a|^2\zeta^2(1 - \frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2}{\gamma})]|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a \\
&= (1-\eta)[\widetilde{E}_a(\widetilde{\Psi}) - \widetilde{E}_a(\widetilde{\psi}_0)] - \frac{\gamma}{2}\int_D a \\
&+\eta\int_{D\times(0,1)}[W(\widetilde{\Psi}) - W(\widetilde{\psi}_0)]a - \eta < W_u(\widetilde{\psi}_0), \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a} \\
&+\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)} \frac{1}{a^2}[\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla a|^2\zeta^2(1 - \frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2}{\gamma})]|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a \\
&-\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a + \frac{\eta}{2}\int_{D\times(0,1)}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a \\
&\geq (1-\eta)[\widetilde{E}_a(\widetilde{\Psi}) - \widetilde{E}_a(\widetilde{\psi}_0)] - \frac{\gamma}{2}\int_D a \\
&+\eta\int_{D\times(0,1)}[W(\widetilde{\Psi}) - W(\widetilde{\psi}_0)]a - \eta < W_u(\widetilde{\psi}_0), \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a} \\
&+\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)}\{\frac{1}{a^2}[\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla a|^2\zeta^2(1 - \frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2}{\gamma})] - 1\}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Façamos primeiramente uma estimativa para

$$\eta\int_{D\times(0,1)}[W(\widetilde{\Psi})-W(\widetilde{\psi}_0)]adx'd\zeta=\eta\int_{D\times(0,1)}[g(|\widetilde{\Psi}|^2)-g(|\widetilde{\psi}_0|^2)]adx'd\zeta.$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio, segue que dado $x\in D\times(0,1)$ existe $x_0\in D\times(0,1)$ tal que $g(|\widetilde{\Psi}(x)|^2)-g(|\widetilde{\psi}_0(x)|^2)=g'(x_0)[|\widetilde{\Psi}(x)|^2-|\widetilde{\psi}_0(x)|^2]$. Definimos $p_0(x)=x_0$, temos então, que para todo $x\in D\times(0,1)$, $g(|\widetilde{\Psi}(x)|^2)-g(|\widetilde{\psi}_0(x)|^2)=g'(p_0(x))[|\widetilde{\Psi}(x)|^2-|\widetilde{\psi}_0(x)|^2]$.

Consideremos $D\times(0,1)=B_1\bigcup B_2$, sendo

$$B_1=\{x\in D\times(0,1);g'(p_0(x))\geq 0\}$$

$$B_2=\{x\in D\times(0,1);g'(p_0(x))<0\}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\eta\textstyle\int_{D\times(0,1)}[g(|\widetilde{\Psi}|^2)-g(|\widetilde{\psi}_0|^2)]adx'd\zeta\ &=\eta\textstyle\int_{B_1}g'(p_0(x))[|\widetilde{\Psi}|^2)-|\widetilde{\psi}_0|^2]adx'd\zeta\\ &+\eta\textstyle\int_{B_2}g'(p_0(x))[|\widetilde{\Psi}|^2)-|\widetilde{\psi}_0|^2]adx'd\zeta\end{aligned}\tag{103}$$

Vejamos duas estimativas para $|\widetilde{\Psi}|^2-|\widetilde{\psi}_0|^2$. Temos que

$$\begin{aligned}|\widetilde{\Psi}|^2-|\widetilde{\psi}_0|^2\ &\leq|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0+\widetilde{\psi}_0|^2-|\widetilde{\psi}_0|^2\\ &\leq|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2+|\widetilde{\psi}_0|^2+2|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0||\widetilde{\psi}_0|-|\widetilde{\psi}_0|^2\\ &\leq|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2+2|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|\\ &\leq 3|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2+2|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|.\end{aligned}\tag{104}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}|\widetilde{\Psi}|^2-|\widetilde{\psi}_0|^2\ &\geq|\widetilde{\Psi}|^2-|\widetilde{\psi}_0-\widetilde{\Psi}+\widetilde{\Psi}|^2\\ &\geq|\widetilde{\Psi}|^2-|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2-|\widetilde{\Psi}|^2-2|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0||\widetilde{\Psi}|\\ &\geq-|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2-2|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|[|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|+|\widetilde{\psi}_0|]\\ &\geq-3|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2-2|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|.\end{aligned}\tag{105}$$

Utilizando (105), (33) e a desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}\eta\textstyle\int_{B_1}g'(p_0(x))(|\widetilde{\Psi}|^2)-|\widetilde{\psi}_0|^2)adx'd\zeta\ &\geq-\eta K\textstyle\int_{B_1}(3|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2+2|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|)adx'd\zeta\\ &\geq-\eta K(3+2\textstyle\int_D adx')\int_{B_1}|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2adx'd\zeta\\ &=-\eta K'\textstyle\int_{B_1}|\widetilde{\Psi}-\widetilde{\psi}_0|^2adx'd\zeta\end{aligned}\tag{106}$$

sendo $K' = K(3 + 2\int_D adx') > 0$ uma constante.

Agora, utilizando (104), (33) e a desigualdade de Hölder temos

$$\eta \int_{B_2} g'(p_0(x))(|\widetilde{\Psi}|^2) - |\widetilde{\psi}_0|^2)adx'd\zeta \geq -\eta K' \int_{B_2} |\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0|^2 adx'd\zeta. \qquad (107)$$

Substituindo (106) e (107) em (103) obtemos

$$\eta \int_{D\times(0,1)} [W(\widetilde{\Psi}) - W(\widetilde{\psi}_0)]adx'd\zeta \geq -\eta K' \int_{D\times(0,1)} |\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0|^2 adx'd\zeta \qquad (108)$$

Vejamos agora uma estimativa para o termo $-\eta < W_u(\widetilde{\psi}_0), \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a}$. Utilizando a definição de $-\eta <, >_{L^2_a}$ e a desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} -\eta < W_u(\widetilde{\psi}_0), \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a} &= -\eta < 2g'(|\widetilde{\psi}_0|^2)\psi_0, \widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic} >_{L^2_a} \\ &= -2\eta Re[\textstyle\int_{D\times(0,1)} g'(|\widetilde{\psi}_0|^2)\widetilde{\psi}_0(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})^* a] \\ &\geq -2\eta |\textstyle\int_{D\times(0,1)} g'(|\widetilde{\psi}_0|^2)\widetilde{\psi}_0(\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic})^* a| \\ &\geq -2\eta \textstyle\int_{D\times(0,1)} |g'(|\widetilde{\psi}_0|^2)||\widetilde{\psi}_0||\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}|a \\ &\geq -2\eta K \textstyle\int_{D\times(0,1)} |\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}|a \\ &\geq -2\eta K \textstyle\int_D adx' \int_{D\times(0,1)} |\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}|^2 adx'd\zeta \\ &= -\eta K'' \textstyle\int_{D\times(0,1)} |\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}|^2 adx'd\zeta \end{aligned} \qquad (109)$$

sendo $K'' = 2K\int_D adx' > 0$ uma constante.

Por fim, façamos uma estimativa para

$$\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)} \{\frac{1}{a^2}[\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla a|^2\zeta^2(1 - \frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2}{\gamma})] - 1\}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a$$

Afirmação: Existe uma função $\epsilon_3 = \epsilon_3(\gamma, \eta) > 0$, monótona, crescente na variável γ tal que $\epsilon_3(\gamma, \eta) \to 0$ quando $\gamma \to 0$ e para $\varepsilon \in (0, \epsilon_3)$ existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_{D\times(0,1)} \{\frac{1}{a^2}[\frac{1}{\varepsilon^2} + |\nabla a|^2\zeta^2(1 - \frac{1}{\eta} - \frac{|\nabla'\widetilde{\psi}_0|^2}{\gamma})] - 1\}|\widetilde{\Psi}_\zeta|^2 a \geq \frac{C}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a}. \quad (110)$$

De fato, se a é constante tomemos $0 < C < \frac{1}{a^2}$ e basta definirmos

$$\varepsilon_3(\gamma, \eta) = \begin{cases} \gamma & \gamma \leq \sqrt{\frac{1-a^2c}{a^2}} \\ \sqrt{\frac{1-a^2c}{a^2}} & \gamma > \sqrt{\frac{1-a^2c}{a^2}} \end{cases}$$

Se a é não constante tomemos $p = \max_{\overline{D}} a^2 > 0$, $0 < C < \frac{1}{p}$ $C_1 = \dfrac{\max_{\overline{\Omega}} |\nabla a|^2\zeta^2}{a^2} > 0$, $C_2 = \dfrac{\max_{\overline{\Omega}} |\nabla' \widetilde{\psi}_0|^2 |\nabla a|^2 \zeta^2}{a^2} > 0$, basta definirmos

$$\epsilon_3(\gamma,\eta) = \sqrt{\frac{(1-Cp)}{p}\left[\frac{\gamma\eta}{\gamma C_1 + \eta C_2 + \gamma\eta}\right]}.$$

Logo, combinando (102), com (108), (109) e (110) temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^2 &\geq (1-\eta)[\widetilde{E}_a(\widetilde{\Psi}) - \widetilde{E}_a(\widetilde{\psi_0})] - \frac{\gamma}{2}\int_D a \\ &-\eta(K'+K'')\|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0\|^2_{L^2_a} + \frac{C}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a}. \end{aligned} \tag{111}$$

De (93) e (111) segue que se $\Psi \in F(\delta)$ e satisfaz (51) temos que

$$J_\varepsilon^2 \geq [(1-\eta)\mu_0 - \eta(K'+K'')] \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|^2_{L^2_a} - [\frac{\gamma}{2} + 2\eta K + C^*]\int_D a + \frac{C}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a}.$$

Fixemos $\eta > 0$ pequeno tal que $\mu_1 = (1-\eta)\mu_0 - \eta(K'+K'') > 0$. Então $\epsilon_0(\gamma) = \epsilon_3(\gamma,\eta)$ é a função procurada. Substituindo este novo η na equação acima segue que

$$J_\varepsilon^2 \geq \mu_1 \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|^2_{L^2_a} - \frac{\gamma}{2}\int_D a + \frac{C}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi}_\zeta\|^2_{L^2_a}.$$

■

Demonstração do Lema 6.4: Para esta demonstração consideremos

$$E_\varepsilon(\Psi, A) - E_\varepsilon(\psi_0, 0) = J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2 \tag{112}$$

sendo

$$J_\varepsilon^1 = E_\varepsilon(\Psi, A) - E_\varepsilon(\Psi, 0)$$

$$J_\varepsilon^2 = E_\varepsilon(\Psi, 0) - E_\varepsilon(\psi_0, 0)$$

Utilizando os Lemas 7.1, 7.3 e a equação (112), segue que existem constantes estritamente positivas μ_1, C_1, C_2 e C_3 tais que

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\Psi, A) - E_\varepsilon(\psi_0, 0) &\geq \mu_1 \inf_{0\leq c\leq 2\pi} \|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|^2_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} - \frac{\gamma}{2}\int_D a dx' \\ &+ C_1 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \|\widetilde{\Psi}\|^4_{H^1_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}))} + \frac{\beta}{4\varepsilon}\|\nabla A\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon}\|\Psi A\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)} \\ &- C_2 \varepsilon^{\frac{-4}{3}} \|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \|\widetilde{\Psi_\zeta}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + \frac{C_3}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi_\zeta}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 6.3 segue que existem M_1 e ε_1 estritamente positivos tais que

$$-C_2\varepsilon^{\frac{-4}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^2_{H^1_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}\|\widetilde{\Psi_\zeta}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \geq -C_2\varepsilon^{\frac{-4}{3}}{M_1}^2\|\widetilde{\Psi_\zeta}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})}$$

para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$. Tomando $\varepsilon_2 = \min\left\{\varepsilon_1, \left(\frac{C_3}{C_2{M_0}^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$ segue que

$$-C_2\varepsilon^{\frac{-4}{3}}{M_1}^2\|\widetilde{\Psi_\zeta}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} + \frac{C_3}{\varepsilon^2}\|\widetilde{\Psi_\zeta}\|^2_{L^2_a(D\times(0,1);\mathbb{C})} \geq 0$$

e desta equação segue que para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\Psi,A) - E_\varepsilon(\psi_0,0) \quad &\geq \mu_1 \inf_{0\leq c\leq 2\pi}\|\widetilde{\Psi} - \widetilde{\psi}_0 e^{ic}\|^2_{L^2_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C})} - \frac{\gamma}{2}\int_D a dx' \\ &+C_1\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\widetilde{\Psi}\|^4_{H^1_a(\Omega(\varepsilon);\mathbb{C}))} + \frac{\beta}{4\varepsilon}\|\nabla A\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} \\ &+\frac{1}{2\varepsilon}\|\Psi A\|_{L^2(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Concluímos a demonstração do Lema 6.4 redefinindo $\varepsilon_0(\gamma)$ dada pelo Lema 7.3 como

$$\varepsilon_0(\gamma) = \begin{cases} \varepsilon_0(\gamma) & \text{se } \varepsilon_0(\gamma) \leq \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & \text{se } \varepsilon_0(\gamma) > \varepsilon_2 \end{cases}$$

$\blacksquare$

8 Existência de solução para o problema limite

Queremos encontrar uma solução para (29) satisfazendo (A). Faremos isto considerando algumas restrições sobre a e D. Seja $D = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ e a uma função suave radialmente simétrica, isto é, $a(x) = a(|x|)$. Lembremos que (29) é a equação de Euler-Lagrange de (28).

Vamos aplicar a mudança de coordenadas $x' = (rcos\theta, rsen\theta)$ em (28), temos:

$$E(\Psi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \{|\Psi_r|^2 + \frac{1}{r^2}|\Psi_\theta|^2 + \frac{\alpha}{2}(1-|\Psi|^2)^2\}a(r)rdrd\theta. \tag{113}$$

A equação de Euler-Lagrange de (113) é dada por

$$\begin{cases} \frac{1}{ra(r)}(ra(r)\Psi_r)_r + \frac{1}{r^2}\Psi_{\theta\theta} + \alpha(1-|\Psi|^2)\Psi = 0 & r \in (0,1) \\ \Psi_r = 0 & r = 1. \end{cases} \tag{114}$$

Procuraremos soluções de (114) da forma

$$\Psi(r,\theta) = f(r)e^{\pm i\theta} \tag{115}$$

e satisfazendo

$$\begin{cases} f(r) > 0 & r \in (0,1) \\ f(0) = 0 \end{cases} \tag{116}$$

substituindo (115) e (116) em (114) temos

$$\begin{cases} \frac{1}{ra(r)}(ra(r)f_r)_r - \frac{1}{r^2}f + \alpha(1-f^2)f = 0 & r \in (0,1) \\ f_r(1) = 0, f(0) = 0 \\ f(r) > 0 & r \in (0,1). \end{cases} \tag{117}$$

Para α suficientemente grande, [3] garante a existência de solução única $f = \widehat{f}^\alpha$ para

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(rf_r)_r - \frac{1}{r^2}f + \alpha(1-f^2)f = 0 & r \in (0,1) \\ f_r(1) = 0, f(0) = 0 \\ f(r) > 0 & r \in (0,1). \end{cases} \tag{118}$$

Se $a' \geq 0$, $\widehat{f}^{\alpha}$ é subsolução de (117). Temos que 1 é supersolução de (117). Logo, existe f^{α} solução de (117) tal que $\widehat{f}^{\alpha} \leq f^{\alpha} \leq 1$ desde que α seja suficientemente grande e $a' \geq 0$.

Teorema 8.1 *Se a é uma função estritamente positiva e de classe C^2 satisfazendo*

$$a'(0) = a'(1) = 0, a' \geq 0, r \in [0, 1]. \tag{119}$$

Então para α suficientemente grande existem soluções de (114) dadas por

$$\Psi^{\alpha} = f^{\alpha}(r)e^{i\theta}, f^{\alpha}(r)e^{-i\theta} \tag{120}$$

sendo f^{α} a solução única de (117). Além disso, se

$$\int_0^1 \frac{a'}{r} dr > a(1) \tag{121}$$

então existe $\alpha_1 > 0$ tal que para cada $\alpha \geq \alpha_1$, as soluções dadas em (120) satisfazem (A), mais precisamente, 0 é autovalor simples de L' dado pela expressão (29) e existe $\mu > 0$ tal que as soluções Ψ^{α} dadas em (120) satisfazem

$$F(\varphi) = \frac{d^2}{ds^2} E(\Psi^{\alpha} + s\varphi)|_{s=0} \geq \mu \int_D |\varphi|^2 a \tag{122}$$

para toda função $\varphi \in H^1(D; \mathbb{C})$ tal que

$$Re[\int_d \varphi(i\Psi^{\alpha})^*] = 0 \tag{123}$$

sendo

$$F(\varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \{|\varphi_r|^2 + \frac{1}{r^2}|\varphi_\theta|^2 - \alpha(1 - |\Psi^{\alpha}|^2)|\varphi|^2 + 2\alpha[Re(\Psi^{\alpha *}\varphi)]^2\} ardrd\theta.$$

Demonstração: Tomando a expansão em série de Fourier, podemos escrever

$$\varphi = \widetilde{\varphi} e^{i\theta}$$

sendo

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(r) e^{in\theta}.$$

Logo

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(r) e^{i(n+1)\theta}.$$

Temos que

$$F(\varphi) \geq 2\pi F_0(\varphi_0) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} F_n \varphi_n, \varphi_{-n} \tag{124}$$

sendo

$$F_0(\varphi_0) = \int_0^1 \{|(\varphi_0)_r|^2 + \frac{1}{r^2}|\varphi_0|^2 - \alpha(1 - f^{\alpha 2})|\varphi_0|^2 + 2\alpha(Re(\varphi_0))^2 (f^\alpha)^2\} ardr \tag{125}$$

para $n = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} F_n(\varphi_n, \varphi_{-n}) \quad &= \int_0^1 \{|(\varphi_n)_r|^2 + |(\varphi_{-n})_r|^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2}|\varphi_n|^2 + \frac{(n-1)^2}{r^2}|\varphi_{-n}|^2 \\ &-\alpha(1 - 2f^{\alpha 2})(|\varphi_n|^2 + |\varphi_{-n}|^2) + 2\alpha(Re(\varphi_n)(\varphi_{-n}))(f^\alpha)^2\} ardrd\theta. \end{aligned} \tag{126}$$

Mostremos que existe $\mu > 0$ tal que

$$F_0(\varphi) \geq \mu \int_0^1 |\varphi|^2 ardr, \tag{127}$$

para toda φ tal que $Re \int_0^1 \varphi(if^\alpha e^{i\theta})^* ardr = 0$. De fato, escrevendo $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, temos que

$$F_0(\varphi) = F_0^1(\varphi_1) + F_0^2(\varphi_2),$$

sendo

$$F_0^1(\varphi_1) = \int_0^1 \left[|\varphi_{1r}|^2 + \frac{1}{r^2}|\varphi_1|^2 - \alpha(1 - 3(f^\alpha)^2)|\varphi_1|^2 \right] ardr$$

e

$$F_0^2(\varphi_1) = \int_0^1 \left[|\varphi_{2r}|^2 + \frac{1}{r^2}|\varphi_2|^2 - \alpha(1 - (f^\alpha)^2)|\varphi_2|^2 \right] ardr.$$

Temos que o problema de autovalores para F_0^2 é dado por

$$h'' + \frac{(ar)'}{ar}h' - \frac{1}{r^2}h + \alpha(1 - (f^\alpha)^2)h = \mu h. \tag{128}$$

Como $f^\alpha > 0$ é solução única de

$$\begin{cases} \frac{1}{ra(r)}(ra(r)f_r)_r - \frac{1}{r^2}f + \alpha(1 - f^2)f = 0 & r \in (0,1) \\ f_r(1) = 0, f(0) = 0 & \\ f(r) > 0 & r \in (0,1). \end{cases}$$

temos que 0 é o menor autovalor do problema (128) e os demais autovalores são estritamente positivos. Logo, temos que existe $\mu > 0$ tal que

$$F_0^2(g) \geq \mu \int_0^1 |g|^2 ardr, \ \forall g; \int_0^1 g f^\alpha ardr = 0.$$

Como $F_0^1(g) > F_0^2(g)$, $\forall g$, temos que existe $\mu > 0$ tal que

$$F_0(\varphi) \geq \mu \int_0^1 |\varphi|^2 ardr, \ \forall \varphi; Re\left[\int_0^1 \varphi(if^\alpha e^{i\theta})^* ardr = 0\right].$$

Quando $n \geq 2$ temos que

$$F_n(\varphi, \phi) > F_1(\varphi, \phi), \quad \forall (\varphi, \phi) \neq (0, 0).$$

Provaremos agora que existe $\mu > 0$ tal que

$$F_1(\varphi_n, \varphi_{-n}) \geq \mu(\|\varphi_n\|_{L_a^2}^2 + \|\varphi_{-n}\|_{L_a^2}^2). \tag{129}$$

Sejam $\varphi = g_1 + ih_1$ e $\phi = g_2 + ih_2$, podemos escrever $F_1(\varphi, \phi) = \mathcal{E}(g_1, -g_2) + \mathcal{E}(h_1, h_2)$ sendo

$$\mathcal{E}(v, w) = \int_0^1 \{|v_r|^2 + |w_r|^2 + \frac{4}{r^2}v^2 - \alpha(1 - 2(f^\alpha)^2)(v^2 + w^2) - 2\alpha(f^\alpha)^2 vw\} ardr \tag{130}$$

Trocando as variáveis

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(w - v); q = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + w) \tag{131}$$

temos que

$$\mathcal{E}(v, w) = \mathcal{F}(p, q)$$

sendo

$$\mathcal{F}(p, q) = \int_0^1 \{|p_r|^2 + |q_r|^2 + \frac{2}{r^2}(p - q)^2 - \alpha(1 - f^{\alpha 2})(p^2 + q^2) + 2\alpha(f^\alpha)^2 p^2\} ardr. \tag{132}$$

Lembrando que $\widehat{f^\alpha}$ solução de (118) é subsolução de (117) e considerando

$$\widehat{\mathcal{F}}(p, q) = \int_0^1 \{|p_r|^2 + |q_r|^2 + \frac{2}{r^2}(p - q)^2 - \alpha(1 - (\widehat{f^\alpha})^2)(p^2 + q^2) + 2\alpha(\widehat{f^\alpha})^2 p^2\} ardr \tag{133}$$

temos $\mathcal{F}(p,q) \geq \widehat{\mathcal{F}}(p,q)$ e daí

$$F_1(\varphi,\phi) \geq \widehat{\mathcal{F}}(p_1,q_1) + \widehat{\mathcal{F}}(p_2,q_2) \tag{134}$$

sendo $p_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(g_1+g_2), q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_1-g_2), p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_2-h_1), q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_1+h_2)$. Consideremos o problema de autovalores para $\widehat{F}(p,q)$ dado por

$$-\mathcal{L}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{135}$$

sendo

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'' + \frac{(ar)'}{ar}p' - \frac{2}{r^2}(p-q) + \alpha(1-3(\widehat{f}^\alpha)^2)p \\ q'' + \frac{(ar)'}{ar}q' - \frac{2}{r^2}(q-p) + \alpha(1-(\widehat{f}^\alpha)^2)q \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$-\mathcal{L}\begin{pmatrix} (\widehat{f}^\alpha)' \\ \frac{\widehat{f}^\alpha}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{a}(\widehat{f}^\alpha)'' \\ -\frac{a'}{a}\left(\frac{\widehat{f}^\alpha}{r}\right)' + \frac{a'}{ar^2}\widehat{f}^\alpha \end{pmatrix}. \tag{136}$$

Se μ é o menor autovalor de $-\mathcal{L}$ e $(\widetilde{p},\widetilde{q})$ é a autofunção correspondente temos

$$-\mathcal{L}\begin{pmatrix} \widetilde{p} \\ \widetilde{q} \end{pmatrix}((\widehat{f}^\alpha)'ar, \frac{\widehat{f}^\alpha}{r}ar)^T = \mu \begin{pmatrix} \widetilde{p} \\ \widetilde{q} \end{pmatrix}((\widehat{f}^\alpha)'ar, \frac{\widehat{f}^\alpha}{r}ar)^T.$$

Integrando a equação acima de 0 a 1 e utilizando (136), encontramos a expressão

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{a(1)\left\{(\widehat{f}^\alpha)''(1)p(1) - \widehat{f}^\alpha(1)q(1)\right\}}{\left\langle(\widehat{f}^\alpha)',p\right\rangle + \left\langle\frac{\widehat{f}^\alpha}{r},q\right\rangle} \\ &\quad - \frac{\left\langle\frac{a'}{a}(\widehat{f}^\alpha)'',p\right\rangle + \left\langle\frac{a'}{a}\left(\frac{\widehat{f}^\alpha}{r}\right)',q\right\rangle}{\left\langle(\widehat{f}^\alpha)',p\right\rangle + \left\langle\frac{\widehat{f}^\alpha}{r},q\right\rangle}. \end{aligned} \tag{137}$$

Utilizando os Lemas A.1 e A.2 provaremos que μ é positivo. Vamos supor que existe uma seqüencia $\{\alpha_j\}$ tal que $\alpha_j \to \infty$ quando $j \to \infty$ e para cada $\alpha = \alpha_j$ o menor autovalor é não positivo. Assim, o Lema A.2 ii) diz que para cada $0 < r_0 < 1$ existe j_0 tal que para $\alpha = \alpha_j, j \geq j_0$

$$\left(\frac{C}{\alpha}\widetilde{p}(r) + \widetilde{q}(r)\right)_r < 0, r \in (r_0,1). \tag{138}$$

Provaremos que se (138) for verdadeira então $\mu > 0$ para j suficientemente grande, o que gera uma contradição.

Observação 8.1 *De (155) segue que*

i)

$$\widehat{f}^{\alpha} = 1 + o(1), \tag{139}$$

ii)

$$(\widehat{f}^{\alpha})_r = o(1), \tag{140}$$

sendo que $o(1) \to 0$ *quando* $\alpha \to \infty$.

Observação 8.2 *De (157) segue que*

$$\alpha(1 - (\widehat{(f)}^{\alpha})^2) = \frac{1}{r^2} + o(1) \tag{141}$$

Observação 8.3 *Como* $\widehat{\mathcal{F}}$ *é uma função par, podemos assumir no Lema A.2 i), que*

$$\widetilde{q}(r) > \widetilde{p}(r) > 0 \tag{142}$$

Suponhamos então que existe uma seqüencia $\{\alpha_j\}$ tal que $\alpha_j \to \infty$ quando $j \to \infty$ e para cada $\alpha = \alpha_j$ o menor autovalor é não positivo. Por simplicidade, não especificaremos a seqüência α_j, escreveremos simplesmente α.

Sejam

$$r_* = sup\{r : \max_{0 \le s \le r} a_r(s) = 0\}, \quad r^* = inf\{\max_{r \le s \le 1} a_r(s) = 0\} \tag{143}$$

Note que $0 \le r_* < r^* \le 1$, pois $a_r(0) = a_r(1) = 0$. Definimos $I_0 = [r_*, r*]$. Por (121)

$$\int_0^1 \frac{a_r}{r} dr = \int_{I_0} \frac{a_r}{r} dr > a(1).$$

tomemos η tal que $r_* + \eta < r^*$ e

$$\int_{I_0} \frac{a_r}{r} dr > \int_{[r_* + \eta, r^*]} \frac{a_r}{r} dr > a(1). \tag{144}$$

Denotemos o numerador de (137) por

$$S = a(1)\{\widehat{f}^{\alpha}_{rr}(1)\widetilde{p}(1) - \widehat{f}^{\alpha}(1)\widetilde{q}(1)\} + \frac{J_1 + J_2}{1 + \frac{C}{\alpha}} \tag{145}$$

sendo

$$\begin{aligned} J_1 &= -(1 + \tfrac{C}{\alpha}) < (\tfrac{a_r}{r}\widehat{f}^{\alpha}_{rr}), \widetilde{p} > \\ &= (1 + \tfrac{C}{\alpha}) \int_{I_0} a_r[-\widehat{f}^{\alpha}_{rr}]\widetilde{p} r dr \\ J_2 &= -(1 + \tfrac{C}{\alpha}) < (\tfrac{a_r}{r})(\tfrac{\widehat{f}^{\alpha}}{r})_r, \widetilde{q} > \\ &= (1 + \tfrac{C}{\alpha}) \int_{I_0} a_r(-\tfrac{\widehat{f}^{\alpha}}{r})_r \widetilde{q} r dr. \end{aligned} \tag{146}$$

Façamos

$$I_0 = I_0^+ \cup I_0^- \tag{147}$$

sendo

$$I_0^+ = \{r \in I_0; \widehat{f}^{\alpha}_{rr}(r) \geq 0\}$$

$$I_0^- = I_0 \backslash I_0^+$$

Logo, pelo Lema A.2 i) segue que

$$\begin{aligned} J_1 &\geq (1 + \tfrac{C}{\alpha}) \int_{I_0{`}+} a_r(-\widehat{f}^{\alpha}_{rr})\widetilde{p} r dr \\ \\ &\geq \int_{I_0^+} a_r(-\widehat{f}^{\alpha}_{rr})(\tfrac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q}) r dr. \end{aligned} \tag{148}$$

Utilizando o Lema A.1 ii) temos que $(\frac{\widehat{f}^{\alpha}}{r})_r = \frac{(\widehat{f}^{\alpha})_r - \frac{\widehat{f}^{\alpha}}{r}}{r} < 0$. Logo, do Lema A.2 i), segue que

$$J_2 \geq \int_{I_0} a_r(-\frac{\widehat{f}^{\alpha}}{r})_r(\frac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q}) r dr \tag{149}$$

Somando (148) e (149) e utilizando (138), (118), (141), (139) e (140) temos que

$$
\begin{aligned}
J_1 + J_2 &\geq \int_{I_0^+} a_r(-\widehat{f}^\alpha_{rr} - (\frac{\widehat{f}^\alpha}{r})_r)(\frac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q})rdr \\
&+ \int_{I_0^-} a_r(-\frac{\widehat{f}^\alpha}{r})_r(\frac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q})rdr \\
&= \int_{I_0^+} a_r[\alpha(1-(\widehat{f}^\alpha)^2)\widehat{f}^\alpha](\frac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q})rdr \\
&+ \int_{I_0^-} a_r[\frac{\widehat{f}^\alpha}{r^2} - \frac{(\widehat{f}^\alpha)_r}{r}](\frac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q})rdr \\
&\geq \int_{I_0^+\cap[r_*+\eta,r^*]} a_r[\alpha(1-(\widehat{f}^\alpha)^2)\widehat{f}^\alpha](\frac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q})rdr \\
&+ \int_{I_0^-\cap[r_*+\eta r^*]} a_r[\frac{\widehat{f}^\alpha}{r^2} - \frac{(\widehat{f}^\alpha)_r}{r}](\frac{C\widetilde{p}}{\alpha} + \widetilde{q})rdr \\
&\geq [\frac{C\widetilde{p}(r^*)}{\alpha} + \widetilde{q}(r^*)]\{\int_{I_0^+\cap[r_*+\eta,r^*]} a_r[\alpha(1-(\widehat{f}^\alpha)^2)\widehat{f}^\alpha]rdr \\
&+ [\frac{C\widetilde{p}(r^*)}{\alpha} + \widetilde{q}(r^*)]\{\int_{I_0^-\cap[r_*+\eta r^*]} a_r[\frac{\widehat{f}^\alpha}{r} - (\widehat{f}^\alpha)_r]dr\} \\
&\geq [\frac{C\widetilde{p}(1)}{\alpha} + \widetilde{q}(1)]\{\int_{I_0^+\cap[r_*+\eta,r^*]} a_r[\frac{1}{r^2} + o(1)]rdr + \int_{I_0^-\cap[r_*+\eta r^*]} a_r[\frac{1}{r} + o(1)]dr\} \\
&= [\frac{C\widetilde{p}(1)}{\alpha} + \widetilde{q}(1)]\{\int_{I_0\cap[r_*+\eta r^*]} \frac{a_r}{r}dr + o(1)\}. \qquad (150)
\end{aligned}
$$

De (118) segue que $(\widehat{f}^\alpha)_{rr}(1) < 0$ e $(\frac{\widehat{f}^\alpha}{r})_r(1) = -\widehat{f}^\alpha(1) < 0$. Logo,

$$a(1)[(\widehat{f}^\alpha)_{rr}(1)\widetilde{p}(1) + (\frac{\widehat{f}^\alpha}{r})_r(1)\widetilde{q}(1)] \geq a(1)[\frac{C\widetilde{p}(1)}{\alpha} + \widetilde{q}(1)][(\widehat{f}^\alpha)_{rr}(1) + (\frac{\widehat{f}^\alpha}{r})_r(1)].$$

Utilizando que $\widehat{f}^\alpha$ é solução de (117), da equação acima temos que

$$a(1)[(\widehat{f}^\alpha)_{rr}(1)\widetilde{p}(1)+(\frac{\widehat{f}^\alpha}{r})_r(1)\widetilde{q}(1)] \geq a(1)[\frac{C\widetilde{p}(1)}{\alpha}+\widetilde{q}(1)][-\alpha(1-(\widehat{f}^\alpha(1))^2)\widehat{f}^\alpha(1)].$$

Substituindo (141) e (139) na equação acima, temos

$$a(1)[(\widehat{f}^\alpha)_{rr}(1)\widetilde{p}(1) + (\frac{\widehat{f}^\alpha}{r})_r(1)\widetilde{q}(1)] \geq -a(1)[\frac{C\widetilde{p}(1)}{\alpha} + \widetilde{q}(1)](1 + o(1)) \qquad (151)$$

Combinando (151) com (150) temos

$$
\begin{aligned}
S &\geq [\tfrac{C\widetilde{p}(1)}{\alpha} + \widetilde{q}(1)]\{\tfrac{1}{1+\frac{C}{\alpha}} \int_{I_0\cap[r_*+\eta,r^*]} \tfrac{a_r}{r}dr - a(1) + o(1)\} \\
&= \tfrac{1}{1+\frac{C}{\alpha}}[\tfrac{C\widetilde{p}(1)}{\alpha} + \widetilde{q}(1)]\{\int_{I_0\cap[r_*+\eta,r^*]} \tfrac{a_r}{r}dr - a(1) + o(1)\}
\end{aligned} \qquad (152)
$$

De (144) podemos garantir que $S > 0$ para α suficientemente grande, o que conclui a positividade de μ.

Logo, temos que $\widehat{\mathcal{F}} \geq \mu(\|p\| + \|q\|)$. Substituindo isto em (134) temos

$$F_1(\varphi, \phi) \geq \mu[\|p_1\| + \|q_1\| + \|p_2\| + \|q_2\|] = \mu[\|\varphi\| + \|\phi\|].$$

Portanto,

$$F_n(\varphi_n, \varphi_{-n}) \geq F_1(\varphi_n, \varphi_{-n}) \geq \mu[\|\varphi_n\| + \|\varphi_{-n}\|]. \tag{153}$$

De (127) e (153), segue que para toda φ que satisfaz (123) vale

$$F(\varphi) \geq \mu\|\varphi\|_{L^2_a(D,\mathbb{C})}.$$

Logo, todos os autovalores de $-\mathcal{L}$, com exceção do primeiro são positivos. Portanto $\mathcal{L}$ satisfaz (A).

■

A Principais resultados utilizados

Proposição A.1 (Desigualdade de Sobolev) *Existe $c > 0$ tal que*

$$\|A\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq c\|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} \qquad \forall A \in L^6(\mathbb{R}^3) \tag{154}$$

Demonstração: Veja [1] pag. 38 e 103.

Teorema A.1 (Princípio Maximal) *Seja $Au + au = f$, onde $Au = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i}$, com $a_{ik} = a_{ki}$, $a_{ik}, a_i, a \in C(\overline{\Omega})$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Se $Au \geq 0$ em Ω e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x) \leq u(x_0)$ para todo $x \in \Omega$ então $u(x) \equiv u(x_0)$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Veja [11] pag. 66.

Proposição A.2 (Lema de Hopf) *Consideremos $Au + au = f$ nas mesmas hipóteses do Teorema A.1 (Princípio Maximal). Se $Au \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e u atinge seu ponto de máximo em $p \in \partial\Omega$, então se u é não constante, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}(p) > 0$, sendo ν é o vetor normal exterior a Ω no ponto p.*

Demonstração: Veja [11] pag. 69.

Proposição A.3 (Desigualdade de Cauchy) *Sejam a e b números reais, então*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Demonstração Veja [5] pag. 622.

Corolário A.1 *Sejam a e b números reais estritamente positivos, então*

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Demonstração:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) = 2a^2 + 2b^2$$

■

Proposição A.4 (Desigualdade de Cauchy com Peso) *Sejam a, b e ε números reais estritamente positivos, então*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

Demonstração Veja [5] pag. 622.

Proposição A.5 *Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ então*

$$|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$$

Demonstração: Sejam $a = a_1 + ia_2$ e $b = b_1 + ib_2$. Então, $|a+b|^2 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (b_1)^2 + (b_2)^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2$. Utilizando a Proposição A.3 temos $|a+b|^2 \leq 2(a_1)^2 + 2(a_2)^2 + 2(b_1)^2 + 2(b_2)^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$.
■

Proposição A.6 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Seja U um aberto em $\mathbb{R}^n$ e suponha $1 \leq p_1, p_2, ..., p_m \leq \infty$ e $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$. Se $u_i \in L^{p_i}(U), i = 1, ..., m)$ então*

$$\int_U |u_1 ... u_m| dx \leq \Pi_{i=1}^m \|u_i\|_{L_{p_i}}$$

Demonstração: Veja [5] pag. 623.

Teorema A.2 (Teorema de Rellich-Kondrachov) *Suponhamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suave. Suponhamos $1 \leq p < n$. Então*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U), \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-p}$$

isto é, existe $C > 0$ tal que $\|.\|_{L^q(U)} \leq C\|.\|_{W^{1,p}(U)}$ e toda seqüência limitada em $W^{1,p}$ possui subseqüência convergente em L^q

Demonstração: Veja [5] pag. 272.

Seja X um espaço de Banach, dizermos que X é reflexivo quando $(X^*)^* = X$, sendo X^* a coleção de todos os operadores lineares limitados definidos de X em $\mathbb{R}$.

Teorema A.3 (Teorema de Compacidade Fraca) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que $\{u_k\} \subset X$ é uma seqüência limitada. Então existem uma subseqüência $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ e uma função $u \in X$ tais que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ em } X.$$

Demonstração Veja [5] pag. 639.

Proposição A.7 (Desigualdade de Minkowski) *Suponha $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suave, $1 \leq p \leq \infty$ e $u, v \in L^p(U)$. Então,*

$$\|u+v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

Demonstração: Veja [5] pag. 623.

Teorema A.4 *Sejam $U \in \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira suave. Definimos*

$$Lu = div(k(x)\nabla u) - a(x)u$$

$$L'u = div(k'(x)\nabla u) - a'(x)u$$

sendo $a, a' \in C(\bar{U})$, $k, k' \in C^1(\bar{U})$, $k(x) \geq k_0 > 0$, $\forall x \in U$ e $k'(x) \geq k'_0 > 0$, $\forall x \in U$. Se $k \leq k'$, $a \leq a'$, λ_k o k-ésimo autovalor de L e λ'_k o k-ésimo autovalor de L', então, $\lambda_k \geq \lambda'_k$.

Demonstração: Veja [10] pag. 186.

Lema A.1 *A solução $\widehat{f}^\alpha$ de (118) satisfaz:*

i) $0 < \widehat{f}^\alpha(r) < 1, r \in (0,1]$ *e* $(\widehat{f}^\alpha)_r(r) > 0, r \in (0,1)$.

ii)

$$\frac{\widehat{f}^\alpha(r)}{r} > (\widehat{f}^\alpha)_r(r), r \in (0,1].$$

iii) Dado $r_0 > 0$, existe $\alpha_1 > 0$ e $C_1 > 0$ tais que para cada $\alpha > \alpha_1$ vale

$$\|\widehat{f}^\alpha - 1\|_{C^1[r_0,1]} \leq \frac{C_1}{\alpha}. \tag{155}$$

Além disso,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|(\widehat{f}^\alpha)_{rr}\|_{C^0[r_0,1]} = 0, \tag{156}$$

e conseqüentemente

$$\lim_{\alpha\to\infty} \| -\frac{1}{r^2} + \alpha(1-(\widehat{f}^{\alpha})^2)\|_{C^0[r_0,1]} = 0. \tag{157}$$

Demonstração: Veja [7].

Lema A.2 *Sejam $(\widetilde{p}(r), \widetilde{q}(r))$ as autofunções correspondentes ao menor autovalor de $-\mathcal{L}$ dado por (135). Então*

i) $\widetilde{q}(r) > \widetilde{p}(r) > 0$ ou $\widetilde{q}(r) < \widetilde{p}(r) < 0$, $r \in (0,1]$.

ii) Sejam μ o menor autovalor de $-\mathcal{L}$ e $\mu^* < 1$. Dado $r_0 \in (0,1)$, existem números positivos α_2 e C tais que para $\alpha > \alpha_2$

$$\left(\frac{C}{\alpha}\widetilde{p}(r) + \widetilde{q}(r)\right)_r < 0, r \in (r_0, 1)$$

desde que $\mu \in (-\infty, \mu^*]$. Sendo que α_2, C independem de μ.

Demonstração: Veja [7].

Referências

[1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F.: **Sobolev Spaces** (Second Edition), Academic Press, Amsterdan, 2003.

[2] Bauman, P., Carlson, N. P., Phillips, D.: **On the Zeros of Solutions to Ginzburg-Landau Type Systems**, SIAM J. Math. Anal., Vol 24, Number 5, pp. 1283-1293, 1993.

[3] Chen, X., Elliott, C. M., Qi, T.: **Shotting method for vortex solutions of a complex-valued Ginzburg-Landau equation**, Proc. Roy. Soc. Edingburgh Sect. A, 124, 1075-1088, 1994.

[4] Costa, D. G.: **Tópicos em Análise Não-Linear e Aplicações às Equações Diferenciais**, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, Rio de Janeiro, 1986.

[5] Evans, L. C., **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, Rhode Island, 1999.

[6] Gildbarg, N., Trudinger, N. S.: **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order** (Second Edition), Springer-Verlag, Berlin , 1983.

[7] Jimbo, S., Morita, Y.: **Stable Vortex Solutions to the Ginzburg-Landau Equation with a Variable Coefficient in a Disk**, Journal of Differential Equations, 155, pp. 153-176, 1999.

[8] Jimbo, S., Morita, Y.: **Ginzburg-Landau equation with magnetic effect in a thin domain**, Calc. Var., vol. 15, 325-352, 2002.

[9] Jimbo, S., Sternberg, P.: **Nonexistence of Permanent Currents in Convex Planar Samples**, SIAM J. Math. Anal, Vol. 33, Number 6, pp. 1379-1392, 2002.

[10] Mikhailov, V. P.: **Partial Differential Equations**, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[11] Smoller, J.: **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[12] Taheri, A.: **Strong versus weak local minimizers for the perturbed Dirichlet functional**, Calc. Var., vol. 15, 215-235, 2002.