

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Éderson Ricardo Frühling Dutra

**Generalização da Sequência Curta de
Fadell-Neuwirth para os Grupos de Tranças de
Superfícies**

São Carlos-SP
Fevereiro de 2014

O presente trabalho teve suporte financeiro da FAPESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Generalização da Sequência Curta de Fadell-Neuwirth para os
Grupos de Tranças de Superfícies**

Éderson Ricardo Frühling Dutra

Orientador: Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo

Bolsista FAPESP

Processo 2011/15855-6

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP

Fevereiro de 2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

D978gs

Dutra, Éderson Ricardo Frühling.

Generalização da sequência curta de Fadell-Neuwirth para os grupos de tranças de superfícies / Éderson Ricardo Frühling Dutra. -- São Carlos : UFSCar, 2014.

94 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

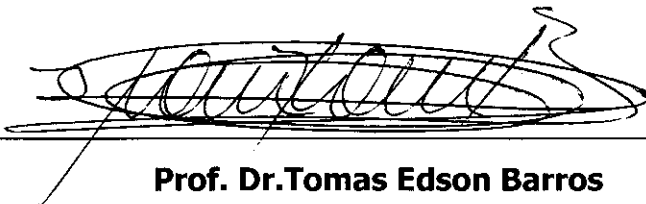
1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria das tranças. I. Título.

CDD: 510 (20^a)

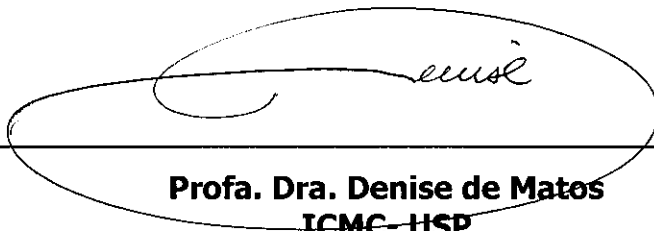
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Daniel Vandrúsculo
DM- UFSCar



Prof. Dr. Tomas Edson Barros
DM- UFSCar



Profa. Dra. Denise de Matos
ICMC- USP

”Carrego nas mãos
As marcas de ontem
Já perdi o medo
Pois aprendi
Aprendi a ser valente
Neste meu caminho
Muitas vezes sozinho
Mas cheguei aqui
Levei manotaços
Pois a vida é rude
Lutei como pude
E não me entreguei
Sem primaveras
No meu peito tapera
Vivia de sonhos
Mas tudo eu amei...”
Manotaços - Celso de Souza.

Esta é uma homenagem que deixo
ao meu pai Vilmar. Numa
das indas e vindas de Crissiu-
mal à Santa Maria, enquanto essa
música tocava no rádio, meu pai
emocionado, disse que esta retra-
tava sua vida, todas as dificul-
dades que enfrentara para chegar
aonde chegou.

Agradecimentos

Aos meus pais Vilmar e Janeti, por sempre me apoiarem e motivarem em meus estudos e por estarem a disposição sempre que precisei, pelos conselhos indicando o caminho certo a seguir. Agradeço também a todos os demais da minha família, meus avós em especial.

Reservo um parágrafo para agradecer a duas pessoas muito importantes em minha vida, minha esposa Maiara e minha filha Isadora, por estarem sempre ao meu lado nos momentos árduos que encaramos durante esta jornada, por tolerarem minhas longas horas de estudos, os vários Domingos que não passei com elas. Agradeço minha esposa por tomar conta da nossa filha com tanto zelo e carinho, tomando em várias situações todas as responsabilidades para que eu pudesse realizar meu trabalho. Muito obrigado por vocês estarem na minha vida tornando isso possível.

Já no âmbito da matemática, agradeço à todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria que contribuíram com a minha formação durante a graduação. Em especial, ao professor Maurício, não apenas aos ensinamentos matemáticos, mas também pelos vários conselhos pessoais, pelas conversas sobre história e por ter indicado a UFSCar.

Agradeço ao professor Daniel Vendrúscolo pela excelente orientação e profissionalismo e por ter me dado a oportunidade de estudar este maravilhoso tema que são os grupos de tranças.

A todos amigos que fiz aqui em São Carlos, ao Osmar, Danilo, Tales. Ao Alisson, pelos bons momentos no verão de 2011 aqui em São Carlos e durante todo o mestrado.

Por fim, deixo aqui registrado o meu agradecimento à FAPESP pelo suporte financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os grupos de tranças de uma superfície topológica e a generalização da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth. Tratamos também da existência de uma secção geométrica e algébrica para a fibração de Fadell-Neuwirth generalizada, em particular, consideraremos o caso em que a superfície é a esfera \mathbb{S}^2 .

Abstract

The objective of this work is to study the braid groups on topological surfaces as well as studying a generalization of the Fadell-Neuwirth short exact sequence. We treated also the existence of a cross-section for the Fadell-Neuwirth's generalized fibration, in particular, we are concerned in the case when the surface is equal the sphere S^2 .

Sumário

Introdução	7
1 Pré-requisitos	10
1.1 Apresentação de uma extensão de grupos	10
1.2 Produto semi-direto de grupos	14
1.3 Fibrações	16
1.4 Alguns lemas técnicos	24
2 Grupos de tranças de uma superfície	27
2.1 Espaços de configurações	27
2.2 Grupos de tranças no plano	39
2.3 Grupos de tranças na esfera	48
3 Estrutura dos grupos $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$	63
3.1 Apresentação de $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ e certos quocientes	63
3.2 Existência de secção geométrica para a fibração de Fadell-Neuwirth generalizada	74

Introdução

Os grupos de tranças no plano \mathbb{E}^2 foram introduzidos explicitamente pelo matemático alemão Emil Artin em 1925 de uma forma intuitiva e geométrica para estudar os nós, mais tarde, em 1947, ele os estudou mais rigorosamente de um ponto de vista algébrico. Entretanto, eles estavam implicitamente introduzidos num trabalho sobre monodromia de Adolf Hurewicz em 1891 .

Posteriormente eles foram generalizados usando a definição dada por Ralph H. Fox (com a noção de espaços de configurações) a espaços topológicos arbitrários. No ano de 1969, Joan S. Birman provou que a teoria de traças tem pouco interesse para variedades topológicas de dimensão ≥ 3 . Os grupos de tranças de superfícies topológicas compactas, conexas e sem bordo tem sido amplamente estudados, tais grupos são finitamente apresentados, e apresentações destes foram inicialmente obtidas por Joan S. Birman em 1969 e G. P. Scott em 1970. Já no ano de 2000, uma nova apresentação foi calculada pelo matemático Juan Gonzálves-Meneses.

Os grupos de tranças são interessantes por si próprios, mas também por terem um papel importante em vários ramos da matemática, como por exemplo topologia, teoria de homotopia, geometria, álgebra, sistemas dinâmicos, apenas para citar alguns. Uma consequência disto é que o espectro de aplicações dos grupos de tranças é grande, por exemplo em teoria dos nós e entrelaçamentos, topologia de baixa dimensão, em particular em dimensão 3, geometria e equações algébricas e até em robótica e criptografia.

De um modo grosseiro, o grupo de n -tranças de uma dada superfície conexa M pode ser descrito da seguinte forma: comece fixando n pontos distintos em M , digamos, P_1, \dots, P_n .

Então, uma n -trança em M consiste de n caminhos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ em $M \times I$ dispostos de sorte que $\gamma_i(0) = (P_i, 1)$, $\gamma_i(1) = (P_{\tau(i)}, 0)$ para alguma permutação $\tau \in S_n$ e, para todo t , o conjunto $\{\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\}$ contém exatamente n pontos distintos. A composição de tranças é definida por concatenação e re-escalamento. As deformações permitidas são homotopias de cordas individuais que, durante estas, cordas distintas nunca se intersectam. As n -tranças cujas permutações τ são triviais, são ditas tranças puras. Na referência [11] tem-se a construção dos grupos de tranças do plano com este ponto de vista geométrico e também, é mostrado a equivalência entre as definições de Artim e Fox.

A dissertação foi dividida em três capítulos. No primeiro, tentamos abordar alguns pré-requisitos que julgamos necessários para uma boa compreensão do restante do trabalho. Inicialmente, abordamos alguns tópicos da Teoria Combinatória de Grupos, visando expor uma ferramenta para a obtenção da apresentação de um grupo \tilde{G} que contém um subgrupo normal N tal que $\tilde{G}/N \cong G$, onde são conhecidas as apresentações de N e G . Em sequência, passamos nossas atenções para topologia, focando numa classe de aplicações contínuas chamadas fibrações de Serre (também conhecidas como fibrações fracas). As fibrações de Serre fornecem uma ótima ferramenta que auxilia no cálculo dos grupos de homotopia de certos espaços topológicos. Encerramos o capítulo com alguns lemas técnicos de natureza distinta.

No segundo capítulo, definimos os grupos de tranças em superfícies conexas e derivamos a sequência curta de Fadell-Neuwirth. Ainda, na primeira seção, estabelecemos algumas relações entre os grupos de tranças do plano, de uma dada superfície M e seu grupo fundamental, resultado contido em [8]. Na segunda seção, estudamos os grupos de tranças do plano \mathbb{E}^2 , obtemos uma apresentação bem como algumas propriedades interessantes concernindo seu centro e sua abelinização. Finalizamos o capítulo com os grupos de tranças da esfera \mathbb{S}^2 . A medida do possível, tentamos transladar todas as propriedades obtidas anteriormente no caso do plano, para a esfera. Entretanto, algumas diferenças surgem, como por exemplo, no que diz respeito aos elementos de torção, os grupos de tranças na esfera contém elementos de torção, mais ainda, tem-se uma descrição de todos os elementos de torção, vide [18]. A seção 2.3 encerra com a demonstração de que o n -ésimo grupo de tranças da esfera contém apenas um elemento de ordem 2.

O último capítulo se reserva ao estudo da generalização da sequência de Fadell-Neuwirth. Obtemos uma apresentação dos grupos $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ de todas as $m + n$ tranças

em \mathbb{S}^2 cuja permutação associada pertence ao grupo $S_n \times S_m$. O trabalho finda com uma discussão tratando sobre a existência ou não de uma secção geométrica (algébrica) para a fibração de Fadell-Neuwirth generalizada.

CAPÍTULO 1

Pré-requisitos

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados sobre extensões de grupos, produto semidireto de grupos e fibrações que serão utilizados nos capítulos posteriores. Estes resultados, apesar de serem bem conhecidos e de certo modo elementares, serão apresentados para dar mais consistência ao texto e para comodidade do leitor. O capítulo encerra com alguns lemas técnicos de natureza distinta.

1.1 Apresentação de uma extensão de grupos

Antes de abordarmos o tema principal desta seção, iremos enunciar alguns lemas abrangendo apresentações de grupos e homomorfismos induzidos por aplicações definidas num conjunto de geradores de um dado grupo. Assumiremos aqui e durante o decorrer do trabalho, um conhecimento elementar sobre teoria de grupos e apresentações de grupos, cujas definições básicas e resultados relevantes podem ser encontrados nas referências [12] e [14].

Seja G um grupo. Dado um subconjunto $Y \subseteq G$ denotaremos por $\langle Y \rangle$ o subgrupo de G gerado por Y , isto é, o subgrupo consistindo de todos os elementos de G escritos como um produto

$$y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots y_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

com $y_{i_k} \in Y$, $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ e algum $l \in \mathbb{N}$. Claramente $\langle Y \rangle$ é o menor subgrupo de G contendo o conjunto Y . Comumente, Y é dito um conjunto de geradores de $\langle Y \rangle$.

Para um subconjunto $Y \subseteq G$, denotamos por $\langle\langle Y \rangle\rangle$ o seu fecho normal em G , ou seja, o menor subgrupo normal de G que contém o conjunto Y . Um elemento g pertence ao fecho normal de Y se, e somente se, g pode ser escrito como um produto

$$w_1 y_{i_1}^{\varepsilon_1} w_1^{-1} \cdots w_l y_{i_l}^{\varepsilon_l} w_l^{-1}$$

com $y_{i_k} \in Y$, $w_k \in G$, $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ e $l \in \mathbb{N}$. Em alguns casos não será claro em qual grupo estaremos considerando o fecho normal de algum subconjunto, assim, escreveremos por vezes $\langle\langle Y \rangle\rangle_G$ em vez de $\langle\langle Y \rangle\rangle$.

Lema 1.1.1. *Sejam F , G e H grupos, $\nu: F \rightarrow G$ e $\alpha: F \rightarrow H$ homomorfismos. Suponha que tenhamos:*

(i) ν é sobrejetor;

(ii) $\ker(\nu) \subseteq \ker(\alpha)$.

Então, existe um único homomorfismo $\beta: G \rightarrow H$ que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \nu & \vdots \beta \\ F & & \\ & \searrow \alpha & \\ & & H \end{array}$$

Demonstração. Dado $g \in G$, a hipótese (i) garante a existência de um elemento $a \in F$ tal que $\nu a = g$. Defina então $\beta g := \alpha a$. Por sua vez, a hipótese (ii) garante que a aplicação β independe da escolha do elemento $a \in F$. Vamos mostrar que α é um homomorfismo de grupos. Se $g_i = \nu(a_i)$ com $i = 1, 2$ e $a_i \in F$ então

$$\beta(g_1 g_2) = \beta(\nu(a_1) \nu(a_2)) = \beta(\nu(a_1 a_2)) = \alpha(a_1 a_2) = \alpha(a_1) \alpha(a_2) = \beta(g_1) \beta(g_2)$$

como queríamos. Pela definição de β , concluímos a comutatividade do diagrama acima. \square

Lema 1.1.2 (Teste de Substituição). *Suponha dados uma apresentação $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$, um grupo H e uma aplicação $\theta: X \rightarrow H$. Então, θ pode ser estendida a um homomorfismo*

$\theta' : G \rightarrow H$ se, e só se, dado $r = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_k}^{\varepsilon_k} \in \mathcal{R}$ tivermos $\theta(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots \theta(x_{i_k})^{\varepsilon_k} = e_H$.

Demonstração. Sejam $F = F(X)$ o grupo livre em X e $\lambda : F \rightarrow G$ o homomorfismo canônico. Como F é livre em X , existe um único homomorfismo $\theta' : F \rightarrow H$ que estende a aplicação θ . Se olharmos para os homomorfismos λ e θ' , podemos constatar que eles satisfazem as hipóteses do Lema 1.1.1 com $\nu = \lambda$ e $\alpha = \theta'$. Assim, existe um único homomorfismo $\theta'' : G \rightarrow H$ tal que $\theta''\lambda = \theta'$. Dado $x \in X$, temos $\theta''(x) = \theta''(\lambda(x)) = \theta'(x) = \theta(x)$. Portanto θ'' é o homomorfismo procurado.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{R} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 X & \hookrightarrow & F & \xrightarrow{\lambda} & G \\
 & \searrow \theta & \downarrow \theta' & \swarrow \theta'' & \\
 & & H & &
 \end{array}$$

A recíproca é imediata pois cada $r \in \mathcal{R}$ representa o elemento neutro de G . □

Lema 1.1.3 (von Dick). *Se $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ e $H = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$ com $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \subseteq F(X)$, então existe um único homomorfismo sobrejetor $\phi : G \rightarrow H$ tal que $\phi x = x$ para todo $x \in X$ e $\ker(\phi) = \langle\langle \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} \rangle\rangle$. Reciprocamente, se N é um subgrupo normal de G , então, o grupo quociente G/N tem apresentação $\langle X \mid \mathcal{S} \rangle$ com $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.*

Demonstração. Sejam $\mu : F(X) \rightarrow G$ e $\alpha : F(X) \rightarrow H$ os homomorfismos naturais. O homomorfismo μ é sobrejetor e seu núcleo está contido no núcleo de α . Pelo Lema 1.1.1, existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ tal que $\phi\mu = \alpha$. Agora, resta mostrar que ϕ fixa os elementos de X e $\ker(\phi) = \langle\langle \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} \rangle\rangle$. A primeira condição é facilmente verificada pela definição dos homomorfismos λ e μ . A segunda, segue da igualdade $\phi\mu = \alpha$, pois $\ker(\phi) = \mu(\ker(\alpha)) = \mu(\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle) = \langle\langle \mu(\mathcal{S}) \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{S} \setminus \mathcal{R} \rangle\rangle$. Reciprocamente, se $\pi : G \rightarrow G/N$ é a projeção canônica e μ é o homomorfismo dado acima, ponha $\nu = \pi\mu$. Temos assim $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle \subseteq \ker(\nu)$, como queremos. □

Exemplo 1.1.1. Dado um grupo G , lembre que o subgrupo dos comutadores de G é o grupo $\Gamma_2(G)$ gerado pelo conjunto $\{[g, h] = ghg^{-1}g^{-1} \mid g, h \in G\}$. Entre as propriedades de $\Gamma_2(G)$, destacamos a sua normalidade e o fato de $G/\Gamma_2(G)$ ser abeliano. Além disso, o subgrupo dos comutadores é o menor subgrupo normal de G que torna o quociente abeliano. Por esta razão, $G/\Gamma_2(G)$ é dito abelinização de G . Suponha que G tenha apresentação $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$. Então, sua abelinização tem apresentação $\langle X \mid \mathcal{R}, \mathcal{C} \rangle$, onde \mathcal{C} representa

o conjunto dos símbolos $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ com $x, y \in X$. De fato, se denotarmos por H o grupo com apresentação dada acima, então, pelo Lema de von Dick 1.1.3, existe um epimorfismo $\phi : G \rightarrow H$ que ϕ fixa cada x e cujo núcleo é igual a $\langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$. Devemos mostrar que $\langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle = \Gamma_2(G)$. Por um lado, temos $\mathcal{C} \subseteq \Gamma_2(G)$, e pela normalidade de $\Gamma_2(G)$, concluimos que o fecho normal de \mathcal{C} está contido em $\Gamma_2(G)$. Para a outra inclusão, perceba que as relações que definem H o fazem um grupo abeliano, logo, o mesmo ocorre com o quociente $G/\langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$ e assim, $\Gamma_2(G) \subseteq \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$.

Posto isto, temos o aparato técnico necessário para abordarmos o tema principal da nossa seção. O resultado aqui apresentado terá importância fundamental no restante deste trabalho e será empregado inúmeras vezes em situações particulares.

Suponhamos que são dadas a sequência exata curta de grupos e homomorfismos

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \tilde{G} \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

e apresentações $\langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$ e $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ para A e G , respectivamente. Nosso objetivo é obter uma apresentação para o grupo \tilde{G} em função das apresentações conhecidas de antemão na sequência acima. O grupo \tilde{G} é dito uma *extensão* de G por A .

Primeiro, sejam $\tilde{Y} = \{\tilde{y} := \alpha y \mid y \in Y\}$ e $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{s} \mid s \in \mathcal{S}\}$ o conjunto das palavras em \tilde{Y} obtidas de \mathcal{S} substituindo-se cada y por \tilde{y} sempre que cada y aparecer, isto é, se $s = y_{i_1}^{\eta_1} \cdots y_{i_n}^{\eta_n} \in \mathcal{S}$, com $y_{i_j} \in Y$, $\eta_j = \pm 1$, então $\tilde{s} = \tilde{y}_{i_1}^{\eta_1} \cdots \tilde{y}_{i_n}^{\eta_n}$.

Como β é sobrejetiva, escolha para cada $x \in X$ um único elemento $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tal que $\beta \tilde{x} = x$. A fim de completar o conjunto de geradores defina $\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid x \in X\}$. Para cada $r = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}$, como feito acima, designe por \tilde{r} o elemento $\tilde{x}_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \tilde{x}_{i_n}^{\varepsilon_n}$ de \tilde{G} . Sendo β um homomorfismo, segue que $\beta \tilde{r} = r = e$, assim $\tilde{r} \in \ker(\beta) = \text{Im}(\alpha)$, logo \tilde{r} é uma palavra v_r em \tilde{Y} . Ponha $\tilde{\mathcal{R}} = \{\tilde{r}v_r^{-1} \mid r \in \mathcal{R}\}$.

Finalmente, usando a normalidade de $\text{Im}(\alpha)$ em \tilde{G} , concluimos que cada conjugação $\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x}$ está em $\text{Im}(\alpha)$, logo, é uma palavra $w_{x,y}$ em \tilde{Y} . Seja $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x}w_{x,y}^{-1} \mid x \in X, y \in Y\}$.

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 1.1.1. *Com as notações anteriores, o grupo \tilde{G} tem como apresentação*

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \mid \tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{T}} \rangle. \tag{1.1}$$

Demonstração. Seja D o grupo que tem apresentação dada em (1.1). Vamos mostrar que \tilde{G} é isomorfo a D . Com a apresentação de D em mãos, garantimos a existência de um homomorfismo $\theta : D \rightarrow \tilde{G}$ tal que $\theta \tilde{x} = \tilde{x}$ e $\theta \tilde{y} = \tilde{y}$. A restrição de θ ao subgrupo $\langle \tilde{Y} \rangle$ dá origem a um homomorfismo

$$\theta_1 : \langle \tilde{Y} \rangle \rightarrow \text{Im}(\alpha) \cong A$$

dado por $\theta_1 \tilde{y} = y$. Como as relações contidas em \mathcal{S} são satisfeitas em $\langle \tilde{Y} \rangle < D$ (com cada y substituído por \tilde{y}), podemos definir um homomorfismo inverso pondo simplesmente $y \rightarrow \tilde{y}$. Consequentemente, θ_1 é um isomorfismo.

As relações em \mathcal{T} , por sua vez, garantem que $\langle \tilde{Y} \rangle$ é um subgrupo normal de D e, desde que $\theta(\langle \tilde{Y} \rangle)$ é um subgrupo de $\text{Im}(\alpha)$, θ induz um homomorfismo

$$\theta_2 : D/\langle \tilde{Y} \rangle \rightarrow \tilde{G}/\text{Im}(\alpha) \cong G$$

dado por $\theta_2(\langle \tilde{Y} \rangle \cdot \tilde{x}) = x$. Agora, as relações em \mathcal{R} são satisfeitas no quociente $D/\langle \tilde{Y} \rangle$ se substituirmos cada x por $\langle \tilde{Y} \rangle \cdot \tilde{x}$, analogamente ao que foi feito no parágrafo anterior mostramos que θ_2 é uma bijeção. Desta forma, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle \tilde{Y} \rangle & \hookrightarrow & D & \longrightarrow & D/\langle \tilde{Y} \rangle \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta_2 \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{G} & \xrightarrow{\beta} & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

no qual as linhas são exatas. Aplicando o Lema dos Cinco obtemos o resultado. \square

1.2 Produto semi-direto de grupos

Sejam A, G grupos e $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ um homomorfismo. No que segue, denotaremos $[\alpha(g)](a)$ simplesmente por $a \cdot g$.

No conjunto $G \times A$, defina a seguinte operação binária

$$(g, a)(h, b) = (gh, (a \cdot h)b).$$

Com esta operação, $G \times A$ torna-se um grupo, chamado *produto semidireto de G por A* com respeito ao homomorfismo α e denotado por $G \rtimes_{\alpha} A$, ou apenas $G \rtimes A$ quando o

homomorfismo α ficar subentendido.

Se o homomorfismo α for o trivial, isto é, $\alpha(g) = \text{id}_A$ para todo g em G então, a operação acima é a multiplicação coordenada a coordenada. Logo, o produto direto de grupos é um caso particular do produto semidireto.

Suponhamos dadas apresentações para os grupos G e A , digamos $\langle X|\mathcal{R} \rangle$ e $\langle Y|\mathcal{S} \rangle$, respectivamente. Temos a sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \rtimes_{\alpha} A \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

onde o homomorfismo i é a inclusão $a \rightarrow (e, a)$ e π é a projeção sobre o primeiro fator ($G \rtimes_{\alpha} A$ é uma extensão de G por A). Assim, estamos nas hipóteses das considerações da seção anterior. Aplicando o método lá exposto, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.1. *Nas condições acima, o grupo $G \rtimes_{\alpha} A$ tem apresentação dada por*

$$\langle X, Y \mid \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T} \rangle$$

onde $\mathcal{T} = \{x^{-1}yx(y \cdot x)^{-1} \mid x \in X, y \in Y\}$.

Exemplo 1.2.1. Considere um grupo \tilde{G} , e sejam G e A subgrupos, onde A é suposto ser também normal em \tilde{G} , tais que

- (i) $\tilde{G} = GA$, isto é, todo elemento de \tilde{G} é da forma ga com $g \in G$ e $a \in A$;
- (ii) $G \cap A = \{e\}$.

Então, o grupo \tilde{G} é isomorfo ao produto semidireto de G por A . De fato, defina o homomorfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ pondo $\alpha(g)(a) = g^{-1}ag$, ou seja, o homomorfismo α é simplesmente a conjugação de elementos de A por elementos de G . A normalidade do subgrupo A nos assegura a boa definição de α . De modo natural, a cada par (g, a) em $G \rtimes_{\alpha} A$ faça corresponder o elemento $ga \in \tilde{G}$, designe por ψ esta aplicação. Agora, a condição (i) nos garante que ψ é sobrejetora, enquanto que a condição (ii) garante sua injetividade. Devemos verificar que ψ é de fato um homomorfismo. Para tanto, tome $(g, a), (h, b) \in G \rtimes_{\alpha} A$, então

$$\psi((g, a)(h, b)) = \psi(gh, (a \cdot h)b) = \psi(gh, h^{-1}ahb) = gahb = \psi(g, a)\psi(h, b)$$

como queríamos. Portanto, ψ é um isomorfismo.

Exemplo 1.2.2. Dizemos que a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \tilde{G} \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

cinde, se existe um homomorfismo $\gamma : G \rightarrow \tilde{G}$ tal que $\beta\gamma = id_G$. Em tais casos, o grupo \tilde{G} pode ser expresso como produto semidireto entre os grupos G e A . Com efeito, os homomorfismos α e γ são injetores, logo $A \cong \text{Im}(\alpha)$ e $G \cong \text{Im}(\gamma)$. Se $\tilde{g} \in \text{Im}(\alpha) \cap \text{Im}(\gamma)$ então $\tilde{g} = \gamma g$ para algum $g \in G$. Mas, $g = \beta\gamma g = \beta\tilde{g} = e$ pois o núcleo do homomorfismo β coincide com a imagem de α . Logo, $\tilde{g} = \gamma g = \gamma e = e$. Portanto, a interseção entre as imagens de α e γ contém apenas o elemento neutro. Dado $\tilde{g} \in \tilde{G}$, tem-se $\beta\gamma\beta\tilde{g} = \beta\tilde{g}$, consequentemente $[\gamma\beta(\tilde{g}^{-1})]\tilde{g} \in \ker(\beta) = \text{Im}(\alpha)$. Então, podemos encontrar $a \in A$ com $[\gamma\beta(\tilde{g}^{-1})]\tilde{g} = \alpha a$, donde $\tilde{g} = \gamma(\beta\tilde{g})\alpha(a)$. Assim, estamos nas condições do exemplo acima, e portanto

$$\tilde{G} \cong \text{Im}(\gamma) \times_{\text{conj}} \text{Im}(\alpha) \cong G \times A.$$

1.3 Fibrações

Uma n -upla topológica (X, A_1, \dots, A_{n-1}) consiste de um espaço topológico X e uma sequência $A_{n-1} \subseteq A_{n-2} \subseteq \dots \subseteq A_1 \subseteq X$ de subespaços. Uma aplicação entre duas n -uplas topológicas (X, A_1, \dots, A_{n-1}) e (Y, B_1, \dots, B_{n-1}) é uma aplicação contínua f entre os espaços X e Y , com a propriedade de aplicar cada subespaço A_i em B_i .

Sejam E e B espaços topológicos. Uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ goza da *Propriedade da Extensão do Levantamento* (P.E.L.) com respeito ao par (Z, A) quando, todo levantamento parcial $A \rightarrow E$ de uma dada aplicação $Z \rightarrow B$ puder ser estendido a um levantamento $Z \rightarrow E$. Mais precisamente, dadas $g : Z \rightarrow B$ e $g_1 : A \rightarrow E$ contínuas tais que $p \circ g_1 = g|_A$, então existe uma aplicação contínua $g_2 : Z \rightarrow E$ com $g_2|_A = g_1$ e $p \circ g_2 = g$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & E \\ \downarrow & \nearrow g_2 & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Todo homeomorfismo tem, evidentemente, a P.E.L. com respeito a qualquer par topológico. Também é facilmente verificável que, toda aplicação tem a P.E.L. relativo ao

par (X, X) , qualquer que seja o espaço X .

Uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ tem a *Propriedade do Levantamento de Homotopia* (P.L.H.) com respeito ao espaço X , se ela tiver a P.E.L. com respeito ao par $(X \times I, X \times \{0\})$. Por sua vez, se p tiver a P.E.L. com respeito ao par $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$, onde $A \subseteq X$, então dizemos que p tem a P.L.H. relativamente ao par (X, A) .

Note que a P.L.H. com respeito a um dado espaço X é invariante por homeomorfismos, isto é, se uma aplicação tiver a P.L.H. com respeito a X , ela também terá com respeito a qualquer espaço homeomorfo a X .

Se $p : E \rightarrow B$ tiver a P.L.H. com respeito ao ponto $\{0\}$ então, todo caminho $\omega : I \rightarrow B$ com $\omega(I) \subseteq p(E)$, possui um levantamento cujo ponto inicial pode ser escolhido no conjunto $p^{-1}(\omega(0))$. De fato, o caminho ω pode ser pensado como uma homotopia $\{0\} \times I \rightarrow B$, um levantamento parcial é definido tomando a aplicação constante $\{0\} \times \{0\} \rightarrow E$ em algum ponto de $p^{-1}(\omega(0))$.

Dizemos que uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ é uma *fibração de Serre*, se ela tiver a P.L.H. com respeito a todos discos \mathbb{D}^k , com $k \geq 0$. Neste caso, E é dito o espaço total, B é a base e $p^{-1}(b) = F_b$ é a fibra sobre o ponto b .

Usando argumentos de topologia geral, podemos mostrar que existe um homeomorfismo $\mathbb{D}^k \times I \rightarrow \mathbb{D}^k \times I$ que aplica, homeomorficamente, o subespaço $\mathbb{D}^k \times \{0\}$ sobre $\mathbb{D}^k \times \{0\} \cup \partial\mathbb{D}^k \times I$. Assim, quando for conveniente, podemos substituir a P.L.H. com respeito aos discos \mathbb{D}^k pela P.L.H. com respeito aos pares $(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k)$.

Por sua vez, uma *fibração* é uma aplicação contínua que goza da P.L.H com respeito a classe de todos os espaços topológicos. Assim, toda fibração é também uma fibração de Serre. A mesma nomenclatura é usada para o caso de fibrações, ou seja, E é dito espaço total, B a base e a imagem inversa de cada ponto é dita fibra.

Exemplo 1.3.1. Se tomarmos dois espaços topológicos arbitrários, digamos B e F , então a projeção $B \times F \rightarrow B$ sobre a primeira coordenada é uma fibração. Neste caso, a fibra sobre um ponto $b \in B$ é o conjunto $\{b\} \times F$.

Exemplo 1.3.2. Toda aplicação de recobrimento é uma fibração. Em particular, se um grupo topológico finito age sem pontos fixos, num espaço topológico de Hausdorff X , então a projeção sobre o conjunto das órbitas é um recobrimento, sendo assim, é também uma fibração, para maiores detalhes consultar a referência [19].

Lema 1.3.1. *Sejam $p : E \rightarrow B$ uma fibração e Y um espaço contrátil. Então, qualquer aplicação contínua $f : Y \rightarrow B$ cuja imagem está contida na imagem de p , possui um levantamento.*

Demonstração. Como o espaço Y é contrátil, existe uma homotopia $H : Y \times I \rightarrow Y$ tal que $H(y, 0) = y_0$ onde $y_0 \in Y$ é um ponto qualquer, e $H(y, 1) = y$. Considere a composição $F = f \circ H$ e f' a aplicação constante $y \rightarrow e_0$ onde e_0 é um ponto escolhido de modo arbitrário na fibra sobre $f(y_0)$. Assim, ficamos com o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{f_1} & E \\ \downarrow & \nearrow F_1 & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Sendo p uma fibração, F possui um levantamento F_1 . Para obtermos um levantamento de f podemos simplesmente tomar F_1 restrita ao subespaço $Y \times \{1\}$. \square

Teorema 1.3.1. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma fibração de Serre onde o espaço total E e a base B são conexos por caminhos. Sejam também $b_0 \in B$, $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ os pontos base. Existe, para cada $n \geq 1$, um homomorfismo $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$ que torna a sequência*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\eta_*} & \pi_2(E, x_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_2(B, b_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(F, x_0) \\ & & & & & \searrow \eta_* & \downarrow \\ & & & & & & \pi_1(E, x_0) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \pi_1(B, b_0) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \pi_0(F, x_0) \\ & & & & & & \longrightarrow 0 \end{array}$$

exata. Onde η_ é o homomorfismo induzido pela inclusão da fibra F no espaço total E .*

Observação 1.3.1. O conjunto $\pi_0(X, x_0)$ não tem uma estrutura natural de grupo. Sendo assim, $\partial : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, x_0)$ não é um homomorfismo. Para sanar esse problema, definimos o núcleo de ∂ como sendo o conjunto das classe de homotopia em $\pi_1(B, b_0)$ que são aplicados por ∂ na classe da função $0 \rightarrow x_0$.

A sequência dada no teorema é chamada *sequência exata longa de homotopia* associada à fibração p .

Demonstração. Primeiro definiremos o homomorfismo $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$ e depois verificaremos a exatidão da sequência.

Etapa (1): Construção de ∂ .

Seja $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ uma classe de homotopia, onde f é uma aplicação de pares $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. De modo natural, podemos pensar f definida em $I^{n-1} \times I$. Defina $f_1 : I^{n-1} \times \{1\} \cup \partial I^{n-1} \times I \rightarrow E$ como sendo a aplicação constante $x \rightarrow x_0$. Com isso, obtemos um levantamento parcial de f no subespaço $I^{n-1} \times \{1\} \cup \partial I^{n-1} \times I$. Logo, pela P.L.H. com respeito ao par $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$, existe uma extensão $f_2 : I^{n-1} \times I \rightarrow E$ de f_1 tal que $p \circ f_2 = f$. Desta última igualdade, concluímos que $f_2(I^{n-1} \times \{0\}) \subseteq F$ e $f_2(\partial I^{n-1} \times \{0\}) \subseteq \{x_0\}$. Defina então $\partial[f] = [f_2|_{I^{n-1} \times \{0\}}] \in \pi_{n-1}(F, x_0)$.

Agora, suponha que f_2 e f'_2 sejam extensões de f_1 e $p \circ f_2 = p \circ f'_2 = f$. Vamos mostrar que $f_2|_{I^{n-1} \times 0} \simeq f'_2|_{I^{n-1} \times 0}$ através de aplicações $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, x_0)$. Para tanto, defina $G_1 : I^n \times \{0\} \cup I^n \times 1 \cup J^{n-1} \times I \rightarrow E$ pondo $G_1(x, 0) = f_2(x)$, $G_1(x, 1) = f'_2(x)$ e $G_1(x, t) = x_0$ se $(x, t) \in J^{n-1} \times I$, onde J^{n-1} é fecho do conjunto $\partial I^n \setminus I^{n-1}$. Note que G_1 é um levantamento parcial de $G(x, t) = f(x)$, $(x, t) \in I^n \times I$, no subespaço $I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I$. Usando a P.L.H., obtemos uma extensão G_2 de G_1 tal que $p \circ G_2 = G$. Se restringirmos G_2 ao subespaço $I^{n-1} \times I \subseteq I^n \times I$, obtemos a homotopia desejada.

Acabamos de mostrar que a definição de ∂ independe da extensão f_2 descrita no primeiro parágrafo da demonstração. Porém, ainda não mostramos que ∂ não depende do representante de cada classe de homotopia. Suponha que $[f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)] = [g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)]$. Então, existe uma homotopia $H : (I^n, \partial I^n) \times I \rightarrow (B, b_0)$ entre f e g . Como antes, sejam f_2 e g_2 tais que $p \circ f_2 = f$, $p \circ g_2 = g$. Seja $H_2 : I^n \times I \rightarrow E$ extensão do levantamento parcial H_1 de H , onde $H_1(x, 0) = f(x)$, $H_1(x, 1) = g(x)$ e $H_1(J^{n-1} \times I) = x_0$. Deste modo, $H_2|_{I^{n-1} \times I}$ nos dá uma homotopia entre $f_2|_{I^{n-1}}$ e $g_2|_{I^{n-1}}$ por meio de aplicações de pares $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, x_0)$.

Com uma argumentação similar à feita acima, conseguimos mostrar que ∂ é um homomorfismo quando $n \geq 2$.

A prova da exatidão da sequência de homotopia tem três etapas.

Etapa (2): A sequência (1.3.1) é exata.

2a) Na sequência $\pi_n(F, x_0) \xrightarrow{\eta_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ o núcleo do homomorfismo p_* é igual a imagem de η_* .

Como p é constante na fibra F , a composição de p com qualquer aplicação em F é constante. Logo, $p_* \eta_* = 0$.

Por outro lado, se $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (E, x_0)$ é tal que $p \circ f$ é homotópica a aplicação constante através de aplicações $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ então, seja $H : (I^n, \partial I^n) \times I \rightarrow (B, b_0)$ a homotopia entre elas. Como de praxe, começamos definindo um levantamento parcial e em seguida invocaremos a P.L.H. para estende-lo a todo espaço $I^n \times I$. Defina $H_1 : I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow E$ pondo $H_1(x, 1) = f(x)$ e $H_1(\partial I^n \times I) = x_0$. Obviamente H_1 é um levantamento de H no subespaço $I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I$, obtemos então um levantamento H_2 de H que estende H_1 . Como $p \circ H_2(x, 0) = H(x, 0) = b_0$, concluímos que $H(\partial I^n \times 0) \subseteq F$. Portanto, f é homotópica a um a aplicação $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (F, x_0)$, ou seja, $[f]$ está na imagem de η_* .

2b) Na sequência $\pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0)$ tem-se $\text{Im}(p_*) = \ker(\partial)$.

A inclusão $\text{Im}(p_*) \subseteq \ker(\partial)$ é imediata. Com efeito, dada uma aplicação $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (E, x_0)$, a ação de ∂ em $[p \circ f]$ se resume a restringir f ao subespaço $I^{n-1} \times \{0\}$ no qual f é constante igual a x_0 .

Para a inclusão contrária, tome $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ tal que $[f]$ está no núcleo de ∂ . Mas, isto significa que, se $f_2 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ é tal que $p \circ f_2 = f$, então $f_2|_{I^{n-1} \times \{0\}}$ é homotópica a aplicação constante $I^{n-1} \rightarrow F$ através de aplicações de pares $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, x_0)$. Denote por H tal homotopia, isto é, $H(x, 0) = x_0$, $H(x, 1) = f_2(x)$ e $H(\partial I^{n-1} \times I) = x_0$. Defina $g : I^n \rightarrow E$ pondo

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} H(x_1, \dots, x_{n-1}, 2x_n) & \text{se } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ f_2(x_1, \dots, x_{n-1}, 2x_n - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

então, g é contínua e $g(\partial I^n) = x_0$. Além disso, temos $p \circ g$ homotópica à f por meio de aplicações $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$.

2c) Na sequência $\pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{\eta_*} \pi_{n-1}(E, x_0)$ o núcleo de η_* é igual a imagem de ∂ .

Dado $[f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)] \in \pi_n(B, b_0)$, seja $f_2 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ tal que $p \circ f_2 = f$. De acordo com a definição do homomorfismo ∂ , temos $\partial[f] = [f_2|_{I^{n-1} \times \{0\}}]$. Agora, perceba que a própria aplicação f_2 , se considerada como uma aplicação $I^{n-1} \times I \rightarrow E$, nos dá uma homotopia entre $\eta \circ f_2|_{I^{n-1} \times \{0\}}$ e a aplicação constante $I^{n-1} \rightarrow F$. Portanto, $\text{Im}(\partial) \subseteq \ker(\eta_*)$.

Para concluirmos a demonstração do teorema, basta mostrar que o núcleo de η_* está contido na imagem de ∂ . Para tanto, suponha que $[f] \in \pi_{n-1}(F, x_0)$ está no núcleo de

η_* , isto é, $\eta \circ f$ é homotópica à aplicação constante $x \rightarrow x_0$. Neste caso, existe uma homotopia $H : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \times I \rightarrow (E, x_0)$ com $H(x, 0) = \eta \circ f(x)$, $H(x, 1) = x_0$ e $H(\partial I^{n-1} \times I) = x_0$. Podemos então considerar a composta $p \circ H$ como uma aplicação $(I^n, \partial I) \rightarrow (E, x_0)$. Pela definição do homomorfismo ∂ , concluímos que $\partial[p \circ H] = [f]$. Portanto $\ker(\eta_*) \subseteq \text{Im}(\partial)$. \square

A seqüência exata que acabamos de construir no Teorema acima possui uma propriedade extra que será utilizada mais adiante neste texto, chamada de naturalidade e formulada da seguinte maneira: suponha dadas duas fibrações de Serre $p : (E, x_0) \rightarrow (B, b_0)$, $p' : (E', x'_0) \rightarrow (B', b'_0)$ e duas aplicações contínuas $\alpha : (E, x_0) \rightarrow (E', x'_0)$, $\beta : (B, b_0) \rightarrow (B', b'_0)$ de sorte que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ E' & \xrightarrow{p'} & B' \end{array}$$

Sejam também $F = p^{-1}(b_0)$ e $F' = (p')^{-1}(b'_0)$ as fibras de p e p' , respectivamente. Se indicarmos com γ a restrição de α à fibra F , teremos uma aplicação contínua entre os pares (F, x_0) e (F', x'_0) .

Com estas condições, o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(F, x_0) & \xrightarrow{\eta_*} & \pi_n(E, x_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F, x_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_n(F', x'_0) & \xrightarrow{\eta'_*} & \pi_n(E', x'_0) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_n(B', b'_0) & \xrightarrow{\partial'} & \pi_{n-1}(F', x'_0) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

é comutativo. De fato, a comutatividade nos dois primeiros quadrados são óbvias desde que $\beta \circ p = p' \circ \alpha$ implica a igualdade $\beta_* \circ p_* = p'_* \circ \alpha_*$ enquanto que, $\alpha \circ \eta = \eta' \circ \gamma$ implica $\alpha_* \circ \eta_* = \eta'_* \circ \gamma_*$. Para o terceiro quadrado, lembre que o homomorfismo $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$ foi definido como $\partial[f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)] = [f_2|_{I^{n-1} \times \{0\}}]$, onde $f_2 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ é tal que $p \circ f_2 = f$. Logo, $\gamma_* \partial[f] = [\alpha \circ f_2|_{I^{n-1} \times \{0\}}]$. Por outro lado, observe que $p' \circ (\alpha \circ f_2) = \beta \circ f$, ou seja, $\partial' \beta_* [f] = \partial' [\beta \circ f] = [\alpha \circ f_2|_{I^{n-1} \times \{0\}}]$. Portanto, $\gamma_* \circ \partial = \partial' \circ \beta_*$, como queríamos.

Uma *secção transversal*, ou *secção geométrica*, para uma fibração de Serre $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ tal que $p \circ s = \text{id}_B$. Em outras palavras, uma secção para uma fibração de Serre é um levantamento da identidade $B \rightarrow B$. Deste modo, a

questão de encontrar uma secção é equivalente e existência de um levantamento para a identidade do espaço base. Por sua vez, uma *secção algébrica* para p é um homomorfismo $s_* : \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(E)$ tal que $p_* \circ s_* = \text{id}$. Observe que a existência de uma secção transversal implica na existência de uma secção algébrica.

Corolário 1.3.1. *Suponha que a fibração de Serre $p : E \rightarrow B$ possua uma secção transversal s . Então*

$$\pi_n(E, x_0) \cong \pi_n(B, b_0) \oplus \pi_n(F, x_0) \quad \text{se } n \geq 2$$

$$\pi_1(E, x_0) \cong \pi_1(B, b_0) \ltimes \pi_1(F, x_0)$$

Demonstração. A existência da secção transversal implica que, para cada $n \geq 1$, temos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{\eta_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 1$$

$\longleftarrow \text{ } \xrightarrow{s_*} \text{ } \longrightarrow$

a qual cinde. Assim, basta utilizar o exemplo 1.2.2 e lembrar que, para $n \geq 2$, os grupos de homotopia são abelianos. □

Uma *fibração localmente trivial*, com espaço total E , base B e fibra típica F é uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ com a seguinte propriedade: para cada ponto $b \in B$ existem uma vizinhança U de b e um homeomorfismo $\phi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow[\cong]{\phi_U} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \downarrow p \\ & & U \end{array}$$

onde π_U é a projeção na primeira coordenada. A igualdade $p \circ \phi_U(u, x) = x$ significa que, para cada ponto $x \in U$, $\phi_U|_{\{x\} \times F} : \{x\} \times F \rightarrow F_x$ é um homeomorfismo. Cada uma das vizinhanças U acima chama-se uma *vizinhança distinguida* e o homeomorfismo ϕ_U diz-se uma *trivialização local*.

Lema 1.3.2. *Se $p : E \rightarrow B$ é uma fibração localmente trivial com fibra típica F e $\omega : I \rightarrow B$ é um caminho com $\omega(0) = p(e_0)$, então ω possui um levantamento com ponto inicial em e_0 .*

Demonstração. Inicialmente, suponha que ω tem sua imagem contida em alguma vizinhança distinguida U . Seja ϕ_U a trivialização local. Então, $\phi_U^{-1}(e_0) = (\omega(0), y_0)$, onde y_0 é um ponto de F . Logo, o caminho $\tilde{\omega}(t) = \phi_U(\omega(t), x_0)$ é um levantamento de ω com ponto inicial em e_0 .

Para o caso geral, usando a compacidade do intervalo I , obtemos uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tal que $\omega([t_{i-1}, t_i])$ está contido em alguma vizinhança distinguida de p . Usando repetidas vezes o argumento do parágrafo anterior obtemos um levantamento de ω . \square

O teorema abaixo pode ser encontrado na referência [13], onde é mostrado que toda fibração localmente trivial possui a P.L.H. com respeito aos pares (X, A) , onde X é um complexo CW e A é um subcomplexo de X .

Teorema 1.3.2. *Toda fibração localmente trivial é uma fibração de Serre.*

Demonstração. Seja $p : E \rightarrow B$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F . A fim de demonstrar o teorema, é suficiente mostrar que, para cada $k \geq 0$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} I^k \times \{0\} & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow & \nearrow G_1 & \downarrow p \\ I^k \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

pode ser comutativamente completado.

O caso $k = 0$ já foi demonstrado no Lema 1.3.2. Suponha que o resultado é válido para todo inteiro positivo menor do que n , onde $n \geq 1$. Análogo ao que foi feito no lema anterior, vamos inicialmente supor que a imagem de G está inteiramente contida em alguma vizinhança distinguida de p , digamos U . Pela hipótese de indução, obtemos um levantamento parcial G_1 de G no subespaço $I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$. Seja ϕ_U a trivialização local, então, $\phi_U^{-1}(G_1(x, t)) = (G(x, t), a(x, t))$ onde $a : I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow F$ é contínua. Sabemos que, para todo $n \geq 1$, existe uma retração $r : I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$. Definimos então $G_2(x, t) = \phi_U(G(x, t), a(r(x, t)))$ onde $(x, t) \in I^n \times I$.

No caso geral, usando a compacidade do cubo $I^n \times I$, obtemos $n + 1$ partições do intervalo I de modo que, cada retângulo gerado na decomposição é aplicado por G em alguma vizinhança distinguida de p . Com isso, podemos aplicar sucessivamente o método do parágrafo acima para obter um levantamento de G . \square

Observação 1.3.2. O teorema acima pode ser generalizado se impormos mais condições sobre o espaço base B . Um teorema de Huebsh e Hurewicz, provado em [19], assegura que toda fibração localmente trivial com espaço base paracompacto é uma fibração. Entretanto, em nosso trabalho usaremos apenas a versão demonstrada aqui.

1.4 Alguns lemas técnicos

Lema 1.4.1. *Sejam $q, n \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(2n, q) = 1$. Então*

$$\text{mdc}\left(n(n-2), \frac{q(n-2)-n}{2}\right) = 1.$$

Demonstração. Desde que $2n$ e q são coprimos, q é ímpar e $\text{mdc}(n, q) = 1$. Suponha que k divida ambos, $n(n-2)$ e $\frac{q(n-2)-n}{2}$. Então, existem números naturais a, b tais que $ak = n(n-2)$ e $bk = \frac{q(n-2)-n}{2}$. Assim

$$\begin{aligned} bak &= bn(n-2) = a\left(\frac{q(n-2)-n}{2}\right) \\ &= \frac{a}{2}((q-1)(n-2) - 2) = a \underbrace{\left(\frac{q-1}{2}\right)}_{\in \mathbb{Z}}(n-2) - a. \end{aligned}$$

Com isso vemos que, $n-2$ divide a , isto é, existe um inteiro l tal que $l(n-2) = a$. Logo, $l(n-2)k = n(n-2)$, e assim k divide n . Agora,

$$bk = n \underbrace{\left(\frac{q-1}{2}\right)}_{\in \mathbb{Z}} - q$$

implicando que k divide também q . Portando k deve ser igual a 1. □

Observação 1.4.1. No conjunto S_n de todas as bijeções $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, vamos adotar a seguinte convenção: dados $s, s' \in S_n$, então definimos o produto $ss' : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ pondo $ss'(i) = s'(s(i))$. Esta notação ficará clara quando abordarmos o tema principal da dissertação, os grupos de tranças, onde será imprescindível ver o produto dessa forma.

Sejam i_1, i_2, \dots, i_r ($r \leq n$), elementos distintos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Então, $(i_1 i_2 \dots i_r)$ representa a permutação que aplica $i_1 \rightarrow i_2, i_2 \rightarrow i_3, \dots, i_r \rightarrow i_1$ e $i \rightarrow i$ se $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$.

A permutação $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r)$ é chamada um ciclo de comprimento r , ou um r -ciclo. Os 2-ciclos são chamados de transposições.

As permutações τ_1, \dots, τ_d são ditas disjuntas se, cada elemento $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ é afetado por no máximo uma das permutações τ_i , ou seja, se $\tau_{i_0}(k) \neq k$ então, $\tau_i(k) = k$ para todo $i \neq i_0$. Claramente, permutações disjuntas comutam entre si. Um teorema bem conhecido de álgebra afirma que toda permutação diferente da identidade pode ser fatorada de modo único (a menos da ordem) como produto de r -ciclos, cada um dos quais de comprimento ≥ 2 . Com isso, dada uma permutação τ podemos escrever

$$\tau = (i_{1,1} \ i_{1,2} \ \dots \ i_{1,r_1})(i_{2,1} \ i_{2,2} \ \dots \ i_{2,r_2}) \cdots (i_{d,1} \ i_{d,2} \ \dots \ i_{d,r_d})$$

onde $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_d \geq 2$ e $i_{i,j} \neq i'_{r,s}$. Neste caso, dizemos que o tipo de ciclo de τ é $(r_1, r_2, \dots, r_d, 1, \dots, 1)$, o que nada mais é do que uma lista dos comprimentos de cada ciclo presente na decomposição de τ , ordenados de forma decrescente (onde estamos considerando também os 1-ciclos presentes na decomposição de τ). Por exemplo, considere a permutação

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in S_9,$$

sua decomposição em r -ciclos ($r \geq 2$) é dada por $(1 \ 3 \ 5)(2 \ 4)(7 \ 8)$. Porém, note que existem dois 1-ciclos na sua decomposição, a saber: (6) e (9). Logo, o tipo de ciclo da permutação τ é $(3, 2, 2, 1, 1)$.

O tipo de ciclo de uma permutação é invariante por conjugação, pois

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = (\sigma(i_{1,1}) \ \sigma(i_{1,2}) \ \dots \ \sigma(i_{1,r_1})) \cdots (\sigma(i_{d,1}) \ \sigma(i_{d,2}) \ \dots \ \sigma(i_{d,r_d}))$$

para toda permutação $\sigma \in S_n$.

Para finalizar, o grupo simétrico S_n tem apresentação dada por geradores $s_i = (i \ i+1)$ e relações:

- (i) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ se $i = 1, \dots, n-2$;
- (ii) $s_i s_j = s_j s_i$ se $|i-j| \geq 2$;
- (iii) $s_i^2 = \text{id}$ se $i = 1, \dots, n-1$.

Um cálculo detalhado da apresentação do grupo simétrico pode ser encontrado em [14].

Lema 1.4.2. *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal. Então, $\Gamma_2(H)$ é um subgrupo normal de G .*

Demonstração. Obviamente $\Gamma_2(H)$ é um subgrupo de G . Resta verificar sua normalidade. Dados $g \in G$, $h_i \in H$, $i = 1, 2$, temos $g[h_1, h_2]g^{-1} = [gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}]$. Sendo H normal em G , os elementos $gh_i g^{-1}$ ainda estão em H e assim, $g[h_1, h_2]g^{-1} \in \Gamma_2(H)$. Portanto, $\Gamma_2(H)$ é normal em G . \square

Observação 1.4.2. O grupo quociente $G/\Gamma_2(H)$, onde H é um subgrupo normal de G , é dito uma *abelinização parcial* de G .

Grupos de tranças de uma superfície

Na primeira seção deste capítulo vamos definir os grupos de tranças de uma superfície fazendo uso dos espaços de configurações, tal abordagem foi inicialmente tratada por R. Fox e L. Neuwirth no artigo “The Braid Groups”, no ano de 1962. Na referência [11] encontra-se uma demonstração da equivalência entre as definições de Artin e Fox para os grupos de tranças no plano. Em seguida, trataremos dos casos em que a superfície é o plano ou a esfera, em particular, uma apresentação para ambos será calculada.

2.1 Espaços de configurações

Sejam M uma superfície topológica conexa e n um inteiro positivo. O n -ésimo *espaço de configurações* de M é definido como sendo o conjunto

$$F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M, x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$$

munido da topologia induzida do produto de n cópias da superfície M por ela mesma.

Para toda superfície conexa M , o espaço $F_n(M)$ é conexo por caminhos e aberto em M^n . Sendo assim, seus grupos de homotopia não dependem da escolha do ponto base e $F_n(M)$ é uma variedade de dimensão $2n$.

Os espaços de configurações desempenham um papel importante em vários ramos da

matemática e foram extensivamente estudados em [3] e [7] por exemplo. Neste trabalho, desempenharão um papel central, em grande parte devido ao subsequente resultado.

Teorema 2.1.1 (Fadell-Neuwirth). *Sejam $n \geq 2$ e $1 \leq m < n$ inteiros, então a aplicação*

$$\begin{aligned} p : F_n(M) &\rightarrow F_m(M) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

é uma fibração localmente trivial com fibra típica $F_{n-m}(M \setminus \{x_1^0, \dots, x_m^0\})$ onde $(x_1^0, \dots, x_m^0) \in F_m(M)$.

Demonstração. Tome um ponto arbitrário $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in F_m(M)$. Temos

$$p^{-1}(x^0) = \{(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1, \dots, y_{n-m}) \mid \text{todas coordenadas distintas em } M\}.$$

De imediato, notamos que $p^{-1}(x^0)$ é homeomorfo ao espaço $F_{n-m}(M \setminus \{x_1^0, \dots, x_m^0\})$ mediante a aplicação $\eta(y_1, \dots, y_{n-m}) = (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1, \dots, y_{n-m})$.

Agora, vamos mostrar que p é localmente trivial em torno do ponto x^0 . Sendo M uma superfície, para cada índice $i = 1, \dots, m$, existe um aberto U_i contendo o ponto x_i^0 com as seguintes propriedades:

- (i) $U_i \cong \text{Int}(\mathbb{D}^2)$;
- (ii) $\overline{U_i} \cong \mathbb{D}^2$;
- (iii) $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ se $i \neq j$.

O conjunto $U = U_1 \times \dots \times U_m$ é um aberto de $F_m(M)$ e contém x^0 . Para cada $i = 1, \dots, m$, existe uma aplicação contínua $\theta_i : U_i \times \overline{U_i} \rightarrow \overline{U_i}$ tal que

- Para cada $x \in U_i$, $\theta_i^x : \overline{U_i} \rightarrow \overline{U_i}$ definida por $\theta_i^x(y) = \theta_i(x, y)$ é um homeomorfismo que fixa o bordo de $\overline{U_i}$;
- $\theta_i^x(x) = x_i^0$.

Da maneira como foram construídas as aplicações θ_i , está bem definida e é contínua a aplicação $\theta : U \times M \rightarrow M$ dada por

$$\theta(\underbrace{(x_1, \dots, x_m)}_{x \in U}, y) = \begin{cases} \theta_i^{x_i}(y) & \text{se } y \in U_i \\ y & \text{se } y \notin U_1 \cup \dots \cup U_m \end{cases}$$

Mais ainda, para cada $x \in U$, $\theta^x : M \rightarrow M$ dado por $\theta^x(y) = \theta(x, y)$ é um homeomorfismo.

Finalmente, defina $\phi_U : U \times F_{n-m}(M \setminus \{x_1^0, \dots, x_m^0\}) \rightarrow p^{-1}(U)$ por

$$\phi_U(\underbrace{(x_1, \dots, x_m)}_{x \in U}, (y_1, \dots, y_{n-m})) = (x_1, \dots, x_m, (\theta^x)^{-1}(y_1), \dots, (\theta^x)^{-1}(y_{n-m})).$$

Antes de tudo, devemos verificar que ϕ_U está bem definida. De fato, como $x \in U$, temos $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Assim, as primeiras m coordenadas de ϕ_U são duas a duas distintas. O ponto (y_1, \dots, y_m) está em $F_{n-m}(M \setminus \{x_1^0, \dots, x_m^0\})$, logo, $y_i \neq y_j$ se $i \neq j$ e $y_i \notin \{x_1^0, \dots, x_m^0\}$. Por se tratar de um homeomorfismo, θ^x aplica pontos distintos em pontos distintos, ou seja, $\theta^x(y_i) \neq \theta^x(y_j)$ se $i \neq j$. Por fim, se $x_i = (\theta^x)^{-1}(y_j)$ então, $y_j = \theta^x(x_i)$. Pela definição de θ^x , concluímos que $\theta^x(x_i) = \theta_i^{x_i}(x_i) = x_i^0$, ou seja, a igualdade $\theta^x(x_i) = y_j$ implica $y_j = x_i^0$, uma contradição. Olhando para as coordenadas de ϕ_U , constatamos sua continuidade. Para mostrar que ϕ_U é um homeomorfismo, defina $\psi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F_{n-m}(M \setminus \{x_1^0, \dots, x_m^0\})$ pondo

$$\psi_U(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-m}) = (x_1, \dots, x_m, \theta^x(y_1), \dots, \theta^x(y_{n-m})).$$

De modo análogo ao feito à ϕ_U , verifica-se a boa definição de ψ_U . Obviamente temos $\psi_U \circ \phi_U = \text{id}$ e $\phi_U \circ \psi_U = \text{id}$, concluindo que ϕ_U é um homeomorfismo.

Mais ainda, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times F_{n-m}(M \setminus \{x_1^0, \dots, x_m^0\}) & \xrightarrow{\phi_U} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

é comutativo. Isto encerra a demonstração do teorema. □

Lema 2.1.1. *Seja $V = \text{Int}(\mathbb{D}^2)$. Existe uma aplicação contínua $\theta : V \times \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ tal que*

(i) *Para cada $x \in V$, $\theta^x : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ definida por $\theta^x(y) = \theta(x, y)$ é um homeomorfismo que mantém fixo o bordo de V ;*

(ii) $\theta^x(x) = 0$.

Demonstração. Dado o ponto $(x, y) \in V \times \bar{V}$, vamos definir θ considerando dois casos. Primeiro, se $x = y$ então ponha $\theta(x, y) = 0$. Porém, se $x \neq y$ então $\|x - y\| > 0$ e deste

modo, existe um número real positivo $t(x, y)$ tal que $X(x, y) = x + t(x, y)(y - x) \in \mathbb{S}^1$. Defina $\theta(x, y) = \frac{1}{t(x, y)}X(x, y)$. Assim, θ satisfaz as condições (i) – (ii).

Geometricamente podemos facilmente verificar a existência do número $t > 0$, a continuidade da aplicação θ assim como as condições (i) – (ii). Entretanto, para uma abordagem mais formal, ferramentas da geometria analítica devem ser empregadas na demonstração dos fatos acima afirmados. \square

Observação 2.1.1. A aplicação θ pode ser tomada continuamente diferenciável. Uma construção de θ com estas condições pode ser encontrada no trabalho [17].

Definição 2.1.1. O n -ésimo grupo de tranças puras da superfície M , $P_n(M)$, é definido como o grupo fundamental de $F_n(M)$.

Seja $\iota : \mathbb{E}^2 \rightarrow M$ um mergulho topológico. Então, ι induz uma aplicação $\bar{\iota} : F_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow F_n(M)$. Por sua vez, $\bar{\iota}$ induz um homomorfismo $\bar{\iota}_* : P_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow P_n(M)$. Seja $P_0 = (P_1, \dots, P_n)$ ponto base de $F_n(\mathbb{E}^2)$, e designe também por P_0 o ponto $\bar{\iota}(P_0)$. Se j representa a inclusão de $F_n(M)$ em M^n então, ela induz um homomorfismo $j_* : P_n(M) \rightarrow \prod_1^n \pi_1(M, P_i)$. Com esta notação, temos os seguintes resultados relacionando os grupos $P_n(\mathbb{E}^2)$, $P_n(M)$ e $\prod_1^n \pi_1(M, P_i)$:

Proposição 2.1.1. O homomorfismo $j_* : P_n(M) \rightarrow \prod_1^n \pi_1(M, P_i)$ é sobrejetor.

Demonstração. Seja $[\alpha_i] \in \pi_1(M, P_i)$. Existe um laço β_i baseado no ponto P_i em M evitando o conjunto $\{P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n\}$ tal que $[\alpha_i] = [\beta_i]$. Tome então $f_i : (I, \partial I) \rightarrow (F_n(M), P_0)$ dada por $f_i(t) = (P_1, \dots, P_{i-1}, \beta_i(t), P_{i+1}, \dots, P_n)$ e $f = f_1 * \dots * f_n$. Logo, $[f] \in P_n(M)$ e

$$\begin{aligned} j_*[f] &= j_*[f_1 * \dots * f_n] \\ &= j_*[f_1] * \dots * j_*[f_n] \\ &= ([\beta_1], 1, \dots, 1)(1, [\beta_2], 1, \dots, 1) \cdots (1, \dots, 1, [\beta_n]) \\ &= ([\alpha_1], \dots, [\alpha_n]). \end{aligned}$$

Portanto, j_* é sobrejetora. \square

Proposição 2.1.2. $Im(i_*) \subseteq \ker(j_*)$.

Demonstração. Seja $f = (f_1, \dots, f_n)$ um laço em $F_n(\mathbb{E}^2)$ baseado no ponto P_0 . As coordenadas da composição $j \circ \bar{l}(f)$ são $(\iota \circ f_1, \dots, \iota \circ f_n)$, onde cada $\iota \circ f_i$ é um laço em $\iota(\mathbb{E}^2) \cong \mathbb{E}^2$. Logo, $\iota \circ f_i$ é homotópico ao caminho constante em P_i , ou seja, $[\iota \circ f_i]$ representa o elemento neutro de $\pi_1(M, P_i)$. Em suma, $j_* \circ \bar{l}_*[f]$ é trivial. \square

Teorema 2.1.2 (Goldberg). *Para toda superfície fechada M diferente da esfera \mathbb{S}^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, tem-se a sequência*

$$1 \rightarrow P_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow P_n(M) \rightarrow \prod_1^n \pi_1(M, P_i) \rightarrow 1$$

onde o núcleo de cada homomorfismo é igual ao fecho normal da imagem do homomorfismo anterior.

Demonstração. Ver [8]. \square

Nos próximos parágrafos, analisaremos os espaços de configurações do plano e da esfera. Nosso desejo é reduzir a sequência exata longa de homotopia associada à fibração de Fadell-Neuwirth, a uma sequência exata curta.

Lema 2.1.2. $\pi_i(F_n(\mathbb{E}^2)) = 0$ para todo $i \geq 2$ e todo $n \geq 1$.

Demonstração. O resultado é imediato se $n = 1$ pois $F_1(\mathbb{E}^2) = \mathbb{E}^2$. Suponha válido para todo inteiro $k \leq n - 1$, onde $n > 1$. A fibração de Fadell-Neuwirth $p : F_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow F_{n-1}(\mathbb{E}^2)$ admite uma secção transversal s . De fato, basta definir $s(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1} + \varepsilon(x_1, \dots, x_{n-1})e_1)$, onde $e_1 = (1, 0)$ e $\varepsilon(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \inf\{\|x_i - x_j\| \mid 1 \leq i \neq j \leq n - 1\}$. Aplicando o Corolário 1.3.1 para $i \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \pi_i(F_n(\mathbb{E}^2)) &\cong \pi_i((F_{n-1}(\mathbb{E}^2)) \oplus \pi_i(\mathbb{E}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}, P_n)) \\ &\cong \pi_i((F_{n-1}(\mathbb{E}^2)) \oplus \underbrace{\pi_i(\mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1)}_{n-1}) \\ &\cong \pi_i((F_{n-1}(\mathbb{E}^2))) \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, $\pi_i(F_n(\mathbb{E}^2)) = 0$. \square

Passamos agora nossas atenções para os espaços de configurações da esfera. Inicialmente, note que $F_1(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$. Logo, o grupo de 1-tranças puras na esfera é trivial e $\pi_2(F_1(\mathbb{S}^2)) \cong \mathbb{Z}$.

Para o espaço $F_2(\mathbb{S}^2)$ tem-se o mesmo. Com efeito, considere a fibração de Fadell-Neuwirth $p : F_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{S}^2$ cuja fibra sobre cada ponto é homeomorfa ao plano. Aplicando a sequência exata longa de homotopia, temos:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{\eta_*} \pi_i(F_2(\mathbb{S}^2)) \xrightarrow{p_*} \pi_i(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(\mathbb{E}^2) \longrightarrow \cdots$$

Da exatidão da sequência acima resulta que $\pi_i(F_2(\mathbb{S}^2))$ e $\pi_i(\mathbb{S}^2)$ são isomorfos para todo $i \geq 1$. Consequentemente, o grupo de 2-tranças puras da esfera é novamente trivial enquanto que, $\pi_2(F_2(\mathbb{S}^2))$ é infinito cíclico.

Para o caso geral, vamos considerar a variedade de Stiefel $V_2(\mathbb{E}^3)$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados (v, w) , com $v, w \in \mathbb{S}^2$ e $v \cdot w = 0$. A projeção $p_1 : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ sobre a primeira coordenada, restrita ao subespaço $V_2(\mathbb{E}^3)$, é uma fibração localmente trivial com fibra típica igual ao círculo \mathbb{S}^1 , vide [13].

Considere a aplicação $\phi : V_2(\mathbb{E}^3) \rightarrow F_3(\mathbb{S}^2)$ dada por $\phi(v, w) = (v, w, -w)$. Deste modo, tem-se o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} V_2(\mathbb{E}^3) & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{S}^2 \\ \phi \downarrow & & \parallel \\ F_3(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

onde p é a fibração de Fadell-Neuwirth. Como ponto base, por conveniência, escolha $v_0 = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$. A fibra de p_1 sobre v_0 é igual ao conjunto $\{(v_0, (x_1, x_2, 0)) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Por sua vez,

$$p^{-1}(v_0) = \{(v_0, v_1, v_2) \mid v_1 \neq v_2 \in \mathbb{S}^2 \setminus \{v_0\}\}.$$

Vamos mostrar que as fibras $p_1^{-1}(v_0)$ e $p^{-1}(v_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia, precisamente, vamos mostrar que $\phi' = \phi|_{p_1^{-1}(v_0)} : p_1^{-1}(v_0) \rightarrow p^{-1}(v_0)$ é uma equivalência homotópica. Com isto em mente, comece denotando por $\xi : \mathbb{S}^2 \setminus \{v_0\} \rightarrow \mathbb{E}^2$ a projeção estereográfica a partir do ponto v_0 , então $\xi(-v_0) = 0$ e $\xi(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$ se $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Agora, ξ induz um homeomorfismo, digamos ψ , entre $p^{-1}(v_0)$ e $F_2(\mathbb{E}^2)$ dado por $(v_0, v_1, v_2) \rightarrow (\xi(v_1), \xi(v_2))$. Por outro lado, a aplicação $\psi_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow p_1^{-1}(v_0)$ definida por $\psi_1(x_1, x_2) = (v_0, (x_1, x_2, 0))$ é obviamente um homeomorfismo. Finalmente, designe por $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow F_2(\mathbb{E}^2)$ a aplicação $v \rightarrow (v, -v)$. Reunindo todas essas aplicações ficamos com o

diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} p_1^{-1}(v_0) & \xrightarrow{\phi'} & p^{-1}(v_0) \\ \psi_1 \uparrow \cong & & \cong \downarrow \psi \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\gamma} & F_2(\mathbb{E}^2) \end{array}$$

A fim de completar nossa afirmação, devemos provar que γ é uma equivalência homotópica.

Considere $\beta : F_2(\mathbb{E}^2) \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\beta(v_1, v_2) = \frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|}$. Temos $\beta \circ \gamma(v) = \beta(v, -v) = \frac{v - (-v)}{\|v - (-v)\|} = v$, ou seja, $\beta \circ \gamma = \text{id}$, para a outra composição:

$$\gamma \circ \beta(v_1, v_2) = \gamma\left(\frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|}\right) = \left(\frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|}, -\frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|}\right).$$

Para a homotopia entre $\gamma \circ \beta$ e id , defina $H : F_2(\mathbb{E}^2) \times I \rightarrow F_2(\mathbb{E}^2)$ pondo

$$H((v_1, v_2), t) = (1 - t)(v_1, v_2) + t\left(\frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|}, -\frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|}\right).$$

É fácil ver que H está bem definida, isto é, suas coordenadas são distintas para todo t e todo par $(v_1, v_2) \in F_2(\mathbb{E}^2)$, além disso $H((v_1, v_2), 0) = (v_1, v_2)$ e $H((v_1, v_2), 1) = \gamma \circ \beta(v_1, v_2)$. Donde segue o afirmado.

Aplicando a naturalidade da sequência exata de homotopia, obtemos, para cada $n \geq 1$, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(p_1^{-1}(v_0)) & \xrightarrow{\eta_*} & \pi_n(V_2(\mathbb{E}^4)) & \xrightarrow{(p_1)_*} & \pi_n(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\eta_*} & \pi_{n-1}(p_1^{-1}(v_0)) \\ \parallel & & \downarrow \phi'_* & & \downarrow \phi_* & & \parallel & & \downarrow \phi'_* \\ \pi_{n+1}(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\partial'} & \pi_n(p^{-1}(v_0)) & \xrightarrow{\eta'_*} & \pi_n(F_3(\mathbb{S}^2)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\eta'_*} & \pi_{n-1}(p^{-1}(v_0)) \end{array}$$

no qual as linhas são exatas. Pelo Lema dos Cinco, ϕ_* é um isomorfismo entre os grupos $\pi_n(V_2(\mathbb{E}^3))$ e $\pi_n(F_3(\mathbb{S}^2))$ para todo $n \geq 1$.

Sabe-se que $\pi_2(V_2(\mathbb{E}^3)) = \{0\}$ e $\pi_1(V_2(\mathbb{E}^3)) \cong \mathbb{Z}_2$. Logo, $\pi_2(F_3(\mathbb{S}^2))$ é trivial e $P_3(\mathbb{S}^2)$ tem ordem igual a 2.

Vamos explicitar um gerador do grupo de 3-tranças puras da esfera usando o que sabemos a respeito da variedade de Stiefel. O grupo $\pi_1(V_2(\mathbb{E}^3))$ é gerado pela classe de homotopia representada pelo laço $a : I \rightarrow V_2(\mathbb{E}^3)$ dado por $a(t) = (v_0, (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0))$.

Deste modo, o grupo de 3-tranças puras na esfera é gerado por $\phi_*([a]) = [\phi \circ a]$. Mas,

$$\phi \circ a(t) = (v_0, (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0), -(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0))$$

além disso, $\phi \circ a(0) = \phi \circ a(1) = (v_0, (1, 0, 0), -(1, 0, 0))$.

Ainda como consequência do isomorfismo ϕ_* temos:

Lema 2.1.3. $\pi_2(F_n(\mathbb{S}^2)) = 0$ para todo inteiro $n \geq 3$.

Demonstração. O resultado já está provado quando $n = 3$. Se considerarmos a fibração $p : F_{n+1}(\mathbb{S}^2) \rightarrow F_n(\mathbb{S}^2)$ e aplicarmos a sequência exata longa de homotopia associada à p , e considerando apenas o trecho envolvendo o nível $i = 2$, obtemos:

$$\underbrace{\pi_2(F_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}))}_{\cong \pi_2(\mathbb{E}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\})=0} \xrightarrow{\eta_*} \pi_2(F_{n+1}(\mathbb{S}^2)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(F_n(\mathbb{S}^2))$$

Pela hipótese de indução, $\pi_2(F_n(\mathbb{S}^2)) = 0$. Como $\pi_2(\mathbb{E}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}) = 0$, concluímos que $\pi_2(F_{n+1}(\mathbb{S}^2))$ também é trivial. \square

Com estes resultados em mãos, ficamos com a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_{n-m}(M \setminus \{P_1, \dots, P_m\}) \xrightarrow{\eta_*} P_n(M) \xrightarrow{p_*} P_m(M) \longrightarrow 1 \quad (2.1)$$

onde $n > m \geq 1$ se $M = \mathbb{E}^2$ (Lema 2.1.2) e $n > m \geq 3$ se $M = \mathbb{S}^2$ (Lema 2.1.3).

Observação 2.1.2. Se $M = \mathbb{R}P^2$ então a sequência (2.1) também é válida quando $n > m \geq 2$ [2] e para as demais superfícies fechadas o resultado continua válido se $n > m \geq 1$ [7].

A sequência exata (2.1) é dita *sequência exata curta de Fadell-Neuwirth* para o grupo de tranças puras da superfície M .

Uma questão natural que surge neste ponto é a existência de uma secção transversal para a fibração de Fadell-Neuwirth ou, no âmbito algébrico, saber quando que a sequência (2.1) cinde. Tais questões são importantes, pois como vimos antes, se qualquer uma das duas condições ocorrer, podemos expressar o grupo de tranças puras recursivamente. Esse problema será abordado com mais detalhes no próximo capítulo.

O grupo simétrico S_n age livremente em $F_n(M)$ permutando suas coordenadas, rigorosamente, dados $(x_1, \dots, x_n) \in F_n(M)$ e $\sigma \in S_n$ então a ação do elemento σ no ponto

(x_1, \dots, x_n) é dada pela expressão $(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. O espaço das órbitas de S_n em $F_n(M)$, $F_n(M)/S_n$, será denotado por $D_n(M)$. Denote também por q a aplicação quociente $F_n(M) \rightarrow D_n(M)$. Assim, se $(x_1, \dots, x_n) \in F_n(M)$ então:

$$q(x_1, \dots, x_n) = [[x_1, \dots, x_n]] = \{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n\}.$$

Como S_n é um grupo finito agindo sem pontos fixos no espaço de Hausdorff $F_n(M)$, a projeção q é um recobrimento regular a $|S_n| = n!$ -folhas.

Definição 2.1.2. O n -ésimo grupo de tranças da superfície M , $B_n(M)$, é definido como sendo o grupo fundamental do espaço $D_n(M)$.

Note que todo subgrupo H de S_n age de modo natural em $F_n(M)$, sendo esta ação ainda livre. Assim, se denotarmos por $D_n^H(M)$ o espaço quociente $F_n(M)/H$ e por q_H a projeção $F_n(M) \rightarrow D_n^H(M)$, então q_H é um recobrimento assim como a aplicação $q_1 : D_n^H(M) \rightarrow D_n(M)$ dada por $q_1[[x_1, \dots, x_n]]_H = [[x_1, \dots, x_n]]$.

Com isto, o recobrimento q pode ser fatorado como

$$\begin{array}{ccccc} F_n(M) & \xrightarrow{q_H} & D_n^H(M) & \xrightarrow{q_1} & D_n(M) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & q & \end{array}$$

Denote por $B_n^H(M)$ o grupo fundamental do espaço $D_n^H(M)$.

Note que, se H for o subgrupo trivial de S_n então $B_n^H(M) \cong P_n(M)$. Na outra extremidade, se $H = S_n$ então $B_n^{S_n}(M) \cong B_n(M)$. Sendo q_1 um recobrimento, podemos considerar o grupo $B_n^H(M)$ como um subgrupo do grupo de tranças da superfície M . Por esta razão, os elementos de $B_n^H(M)$ também serão chamados de n -tranças, ou n -tranças com permutação associada pertencente ao subgrupo H . Esta nomenclatura será esclarecida no próximo parágrafo.

Até aqui podemos perceber uma forte relação entre os grupos de tranças e o grupo simétrico. Vamos agora estreitar este vínculo estabelecendo um homomorfismo entre estes dois objetos de natureza aparentemente distinta. Com isso em mente, escolha um ponto P_0 em $F_n(M)$ e seja $[[P_0]]_H = q_H(P_0)$. Dada uma n -trança $\beta = [f] \in B_n^H(M)$, onde f é uma aplicação de pares $(I, \partial I) \rightarrow (D_n^H(M), [[P_0]]_H)$, existe um único levantamento $\tilde{f} : I \rightarrow F_n(M)$ de f com ponto inicial P_0 . Como $q_H(\tilde{f}(1)) = f(1) = [[P_0]]_H$, segue-se

que $\tilde{f}(1) = P_0 \cdot \sigma$ para alguma permutação σ pertencente ao subgrupo H . Defina então $\pi : B_n^H(M) \rightarrow H$ pondo $\pi(\beta) = \sigma$.

A aplicação π está bem definida visto que q_H é uma aplicação de recobrimento e, sendo assim, os levantamentos com mesmo ponto inicial de dois laços homotópicos possuem os mesmos extremos e são ainda homotópicos.

Para verificar que π é um homomorfismo de grupos, tome duas n -tranças $\beta_1 = [f]$, $\beta_2 = [g]$ e sejam \tilde{f}, \tilde{g} como acima. Sejam ainda σ_f e σ_g tais que $\tilde{f}(1) = P_0 \cdot \sigma_f$, $\tilde{g}(1) = P_0 \cdot \sigma_g$. Se definirmos $\tilde{g}(t) = \tilde{g}(t) \cdot \sigma_f$ com t percorrendo o intervalo I então, \tilde{g} é um levantamento de g com ponto inicial $\tilde{f}(1)$ e ponto final $P_0 \cdot \sigma_f \cdot \sigma_g$. Desse modo, $\tilde{f} * \tilde{g}$ é um levantamento de $f * g$ com ponto inicial P_0 e $\tilde{f} * \tilde{g}(1) = P_0 \cdot \sigma_f \sigma_g$. Portanto, $\pi(\beta_1 \beta_2) = \sigma_f \sigma_g$.

Agora, observe que o núcleo do homomorfismo π coincide com a imagem do homomorfismo induzido $(q_H)_*$. Tratando-se de uma aplicação de recobrimento, o homomorfismo induzido pela aplicação q_H é injetor. A sobrejetividade de π será demonstrada na próxima seção deste capítulo. Assim, temos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_n(M) \xrightarrow{(q_H)_*} B_n^H(M) \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1 \quad (2.2)$$

e, como consequência imediata da sequência acima temos:

Corolário 2.1.1 (Goldberg). *Para toda superfície fechada $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2$ existe um homomorfismo injetor $\varrho_* : B_n^H(\mathbb{E}^2) \rightarrow B_n^H(M)$.*

Demonstração. Com a notação utilizada no Teorema de Goldberg, tem-se que a aplicação $\bar{\iota} : F_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow F_n(M)$ induz, por passagem ao quociente, uma aplicação contínua $\varrho : D_n^H(\mathbb{E}^2) \rightarrow D_n^H(M)$. Vamos provar que o homomorfismo induzido ϱ_* é injetor. Com efeito, a sequência 2.2 e o homomorfismo ϱ_* dão origem ao diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & P_n(\mathbb{E}^2) & \xrightarrow{(q_H)_*} & B_n^H(\mathbb{E}^2) & \xrightarrow{\pi_H} & H \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \bar{\iota}_* & & \downarrow \varrho_* & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & P_n(M) & \xrightarrow{(q_H)_*} & B_n^H(M) & \xrightarrow{\pi_H} & H \longrightarrow 1 \end{array}$$

onde as linhas são exatas. Já sabíamos de antemão que o homomorfismo $\bar{\iota}_*$ é injetor sempre que $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2$ e obviamente a identidade $H \rightarrow H$ é injetora. Então, aplicando o Lema dos Cinco, concluímos que ϱ_* é também injetor. \square

Se tomarmos $H = S_n$, então a sequência (2.2) toma a seguinte forma

$$1 \longrightarrow P_n(M) \xrightarrow{q^*} B_n(M) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1 \quad (2.3)$$

A sequência (2.3) é chamada *sequência fundamental* do grupo de n -tranças da superfície M e a permutação $\pi(\beta)$ é dita permutação associada a n -trança β . Assim, quando substituimos o grupo S_n por um subgrupo qualquer H , estamos olhando para o conjunto de todas as n -tranças cuja permutação associada pertence ao subgrupo H .

Olhando mais de perto para a sequência (2.2), obtemos um resultado muito interessante, a saber: o Teorema de Representação de Cayley afirma que todo grupo finito G pode ser representado como um subgrupo do grupo simétrico $S_{|G|}$. Logo, todo grupo finito pode ser expresso como um quociente de algum subgrupo do grupo de $|G|$ -tranças em M pelo grupo de $|G|$ -tranças puras, sendo a superfície M arbitrária. Precisamente, vale o isomorfismo $G \cong B_{|G|}^G(M)/P_{|G|}(M)$. Esta observação nos fornece um modo geométrico de realizar qualquer grupo finito.

No restante desta seção, nos restringiremos a tarefa de generalizar a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth (2.1). Dada uma partição (d_1, \dots, d_r) do inteiro $n \geq 2$, considere o subgrupo $H = S_{d_1} \times \dots \times S_{d_r}$ de S_n e denote por $D_{d_1, \dots, d_r}(M)$ o espaço $D_n^H(M)$. Se $1 \leq j < r$ então, a fibração $p : F_n(M) \rightarrow F_m(M)$, onde $m = d_1 + \dots + d_j$, induz uma aplicação $p : D_{d_1, \dots, d_r}(M) \rightarrow D_{d_1, \dots, d_j}(M)$ definida por $p([[x_1, \dots, x_n]]) = [[x_1, \dots, x_m]]$.

$$\begin{array}{ccc} F_n(M) & \xrightarrow{p} & F_m(M) \\ q_H \downarrow & & \downarrow q_{S_{d_1} \times \dots \times S_{d_j}} \\ D_{d_1, \dots, d_r}(M) & \xrightarrow{p} & D_{d_1, \dots, d_j}(M) \end{array}$$

Teorema 2.1.3. *A aplicação induzida por passagem ao quociente*

$$p : D_{d_1, \dots, d_r}(M) \rightarrow D_{d_1, \dots, d_j}(M)$$

é uma fibração de Serre.

Demonstração. Devemos mostrar que p tem a P.L.H. com respeito a todos discos \mathbb{D}^k com

$k \geq 0$. Considere o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 & & G_2 \\
 & \swarrow & \\
 F_n(M) & \xrightarrow{p} & F_m(M) \\
 \downarrow q_H & & \downarrow q_{S_{d_1} \times \dots \times S_{d_j}} \\
 D_{d_1, \dots, d_r}(M) & \xrightarrow{p} & D_{d_1, \dots, d_j}(M) \\
 \uparrow g & \swarrow G_1 & \uparrow G \\
 \mathbb{D}^k \times \{0\} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{D}^k \times I
 \end{array}$$

onde as aplicações g e G são previamente dadas. Nosso objetivo é obter uma aplicação contínua G_1 tal que $G_1|_{\mathbb{D}^k \times \{0\}} = g$ e $p \circ G_1 = G$. Se tratando de uma aplicação de recobrimento, q_H é também uma fibração, ou seja, podemos usar a convexidade do espaço $\mathbb{D}^k \times \{0\}$ e o Lema 1.3.1 para obter uma aplicação contínua g_2 conforme o diagrama, de sorte que $q_H \circ g_2 = g$. Agora, perceba que $q_{S_{d_1} \times \dots \times S_{d_j}} \circ p$ é uma fibração de Serre e $q_{S_{d_1} \times \dots \times S_{d_j}} \circ p \circ g_2 = p \circ q_H \circ g_2 = p \circ g = G|_{\mathbb{D}^k \times \{0\}}$. Logo, existe uma aplicação $G_2 : \mathbb{D}^k \times I \rightarrow F_n(M)$ satisfazendo $G_2|_{\mathbb{D}^k \times \{0\}} = g_2$ e $q_{S_{d_1} \times \dots \times S_{d_j}} \circ p \circ G_2 = G$. Portanto, basta tomar $G_1 = q_H \circ G_2$. \square

A fibra sobre cada ponto de $D_{d_1, \dots, d_j}(M)$ pela fibração p é homeomorfa ao espaço $D_{d_{j+1}, \dots, d_r}(M \setminus \{P_1, \dots, P_m\})$, onde $m = d_1 + \dots + d_j$. Aplicando a sequência exata longa de homotopia associada a p , obtemos uma generalização da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth:

$$1 \rightarrow B_{d_{j+1}, \dots, d_r}(M \setminus \{P_1, \dots, P_m\}) \xrightarrow{\eta_*} B_{d_1, \dots, d_r}(M) \xrightarrow{p_*} B_{d_1, \dots, d_j}(M) \rightarrow 1 \quad (2.4)$$

onde $m \geq 3$ se $M = \mathbb{S}^2$, $m \geq 2$ se $M = \mathbb{R}P^2$ e $m \geq 1$ para qualquer outra superfície fechada ou $M = \mathbb{E}^2$.

Neste trabalho estaremos interessados no caso $r = 2$, formulado da seguinte maneira: sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Considere a fibração de Serre $p : D_{n,m}(M) \rightarrow D_n(M)$ que consiste em esquecer as últimas m coordenadas. Neste caso, a fibra sobre cada ponto de $D_n(M)$ é

homeomorfa ao espaço $D_m(M \setminus \{P_1, \dots, P_m\})$. A generalização da sequência de Fadell-Neuwirth fica:

$$1 \longrightarrow B_m(M \setminus \{P_1, \dots, P_m\}) \xrightarrow{\eta^*} B_{n,m}(M) \xrightarrow{p^*} B_n(M) \longrightarrow 1 \quad (2.5)$$

onde $n \geq 3$ no caso em que $M = \mathbb{S}^2$, $n \geq 2$ se $M = \mathbb{R}P^2$ e $n \geq 1$ para as demais superfícies fechadas ou $M = \mathbb{E}^2$.

2.2 Grupos de tranças no plano

O Teorema de Goldberg e seu Corolário mostram que o grupo de tranças do plano pode ser considerado um subgrupo do grupo de tranças de qualquer superfície topológica fechada, desde que esta seja diferente da esfera e do plano projetivo. Por esta razão, nesta seção será exposto um cálculo de uma apresentação de $B_n(\mathbb{E}^2)$ e $P_n(\mathbb{E}^2)$, parcialmente contidos na referência [6]. Também será dada uma descrição do centro de ambos.

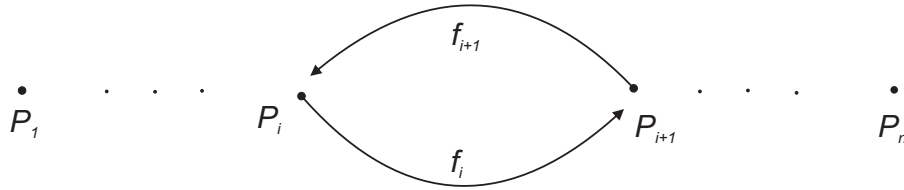


Figura 2.1: Geradores do grupo $B_n(\mathbb{E}^2)$.

Tome $P_i = (i, 0) \in \mathbb{E}^2$, com $1 \leq i \leq n$, e seja $P_0 = (P_1, \dots, P_n)$ ponto base do espaço de configurações de n pontos do plano. Para cada $i = 1, \dots, n - 1$, considere o caminho \tilde{f}_i em $F_n(\mathbb{E}^2)$ dado por:

$$\tilde{f}_i(t) = (P_1, \dots, P_{i-1}, f_i(t), f_{i+1}(t), P_{i+2}, \dots, P_n)$$

onde $f_i(t) = (i + \sin(\frac{\pi}{2}t), \sin(\pi t))$ e $f_{i+1}(t) = (i + \cos(\frac{\pi}{2}t), -\sin(\pi t))$, $t \in I$ (Fig. 2.1).

Observe que \tilde{f}_i é um caminho em $F_n(\mathbb{E}^2)$ com ponto inicial P_0 e ponto final $P_0 \cdot s_i$, onde s_i é a transposição $(i \ i + 1)$. Designe também por s_i a classe de homotopia em $B_n(\mathbb{E}^2)$ representada pelo laço $q \circ \tilde{f}_i$.

Lema 2.2.1. Se $1 \leq i < k \leq n$ então $s_{k-1} \dots s_{i+1} s_i^2 s_{i+1}^{-1} \dots s_{k-1}^{-1} \in B_n(\mathbb{E}^2)$ pode ser representado pelo laço $q \circ \tilde{f}$, onde \tilde{f} é o caminho em $F_n(\mathbb{E}^2)$ dado pela figura 2.2.

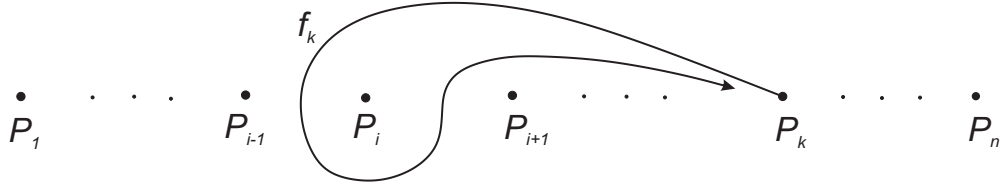


Figura 2.2: $s_{k-1} \dots s_{i+1} s_i^2 s_{i+1}^{-1} \dots s_{k-1}^{-1} \in B_n(\mathbb{E}^2)$.

Lema 2.2.2. $s_{n-1} \dots s_2 s_1^2 s_2 \dots s_{n-1} \in B_n(\mathbb{E}^2)$ pode ser representado pelo laço $q \circ \tilde{f}$, onde \tilde{f} é o caminho em $F_n(\mathbb{E}^2)$ dado pela figura 2.3.

Lema 2.2.3. Em $B_n(\mathbb{E}^2)$ valem as relações:

- (i) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-2$;
- (ii) $s_i s_j = s_j s_i$ se $|i-j| \geq 2$.

Lema 2.2.4. Seja $\pi : B_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow S_n$ o homomorfismo de grupos definido na seção anterior. Então $\pi(s_i) = s_i$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Em particular, π é sobrejetor.

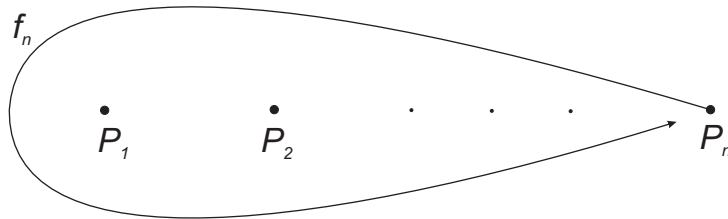


Figura 2.3: $s_{n-1} \dots s_2 s_1^2 s_2 \dots s_{n-1} \in B_n(\mathbb{E}^2)$.

Observação 2.2.1. O lema acima também mostra que $\pi : B_n(M) \rightarrow S_n$ é sobrejetor para qualquer superfície M pois, considerando um mergulho topológico de \mathbb{E}^2 em M , as n -tranças s_i podem ser pensadas como n -tranças em M . Com isto, concluímos a demonstração de que as sequências 2.2 e 2.3 são exatas.

Seja $n \geq 2$ e B_n o grupo com apresentação dada pelos geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relações:

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{se } 1 \leq i \leq n-2 \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad \text{se } |i-j| \geq 2 \text{ e } 1 \leq i, j \leq n-1\end{aligned}$$

Por conveniência ponha também B_1 igual ao grupo trivial.

Para $n \geq 2$, considere o homomorfismo $\pi_n : B_n \rightarrow S_n$ definido nos geradores por $\pi_n(\sigma_i) = s_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Tal homomorfismo existe pois, as relações que definem o grupo B_n são ainda válidas no grupo simétrico S_n substituindo-se os geradores σ_i pelos geradores s_i . Represente por P_n o núcleo de π_n .

Para cada par (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$, considere o elemento

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}$$

e seja A_n o subgrupo de B_n gerado pelo conjunto $\{A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n}\}$. Temos:

$$\begin{aligned}\pi_n(A_{i,j}) &= \pi_n(\sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}) \\ &= s_{j-1} \dots s_{i+1} \underbrace{s_i^2}_{1} s_{i+1}^{-1} \dots s_{j-1}^{-1} \\ &= s_{j-1} \dots s_{i+1} s_{i+1}^{-1} \dots s_{j-1}^{-1} \\ &= s_{j-1} \dots s_{i+1} s_{i+1}^{-1} \dots s_{j-1}^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

logo, cada $A_{i,j}$ pertence ao grupo P_n . Em particular, A_n está contido em P_n se $n \geq 2$.

Note que o grupo S_{n-1} pode ser identificado com o subgrupo de S_n que consiste das permutações que mantêm o símbolo n fixo. Com S_{n-1} visto deste modo, podemos considerar o grupo $D_n = \pi_n^{-1}(S_{n-1})$. Obviamente, P_n está contido em D_n visto que $P_n = \pi_n^{-1}(1)$.

Aplicando o método de Reidemeister-Schreier ao subgrupo D_n , chegamos ao seguinte resultado:

Proposição 2.2.1 (Chow). *O grupo D_n tem a seguinte apresentação*

Geradores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n}$.

Relações:

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} &= \sigma_j \text{ se } |i - j| \geq 2 \\
\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ se } i = 1, \dots, n - 2 \\
\sigma_i^{-1} A_{k,n} \sigma_i &= A_{k,n} \text{ se } k \neq i, i + 1 \\
\sigma_i^{-1} A_{i,n} \sigma_i &= A_{i,n} A_{i+1,n} A_{i,n} \\
\sigma_i^{-1} A_{i+1,n} \sigma_i &= A_{i,n}.
\end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração deste teorema, assim como uma exposição do Método de Reidemester-Schreier podem ser encontrados em [11]. \square

Seja $F = F(y_1, \dots, y_{n-1})$ o grupo livre de posto $n - 1$ com geradores y_1, \dots, y_{n-1} . O teste de substituição assegura a existência de um homomorfismo de grupos $\alpha : B_{n-1} \rightarrow \text{Aut}(F)$ que opera nos geradores da seguinte forma:

$$\alpha(\sigma_i)(y_k) = y_k \cdot \sigma_i = \begin{cases} y_k & \text{se } k \neq i, i + 1 \\ y_i y_{i+1} y_i^{-1} & \text{se } k = i \\ y_i & \text{se } k = i + 1 \end{cases}$$

então, segundo o Teorema 1.2.1, $B_{n-1} \rtimes_{\alpha} F$ tem apresentação dada por:

Geradores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Relações:

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} &= \sigma_j \text{ se } |i - j| \geq 2 \\
\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ se } i = 1, \dots, n - 3 \\
\sigma_i^{-1} y_k \sigma_i &= y_k \text{ se } k \neq i, i + 1 \\
\sigma_i^{-1} y_i \sigma_i &= y_i y_{i+1} y_i^{-1} \\
\sigma_i^{-1} y_{i+1} \sigma_i &= y_i.
\end{aligned}$$

Observe que o grupo B_{n-1} pode ser identificado com o subgrupo de B_n gerado pelos elementos $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$. Como todos estes elementos pertencem ao grupo D_n , vemos também que B_{n-1} é um subgrupo de D_n . Mediante estas identificações, é imediato verificar

a existência de um isomorfismo entre $B_{n-1} \rtimes_{\alpha} F$ e D_n , dado explicitamente por $\xi(\beta, 1) = \beta$ e $\xi(1, y_i) = A_{i,n}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Do isomorfismo acima extraímos as seguintes informações:

- (1) A_n é livre de posto $n-1$ cuja base é $\{A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n}\}$;
- (2) A_n é um subgrupo normal de D_n ;
- (3) Todo elemento de D_n pode ser escrito de modo único como $\beta_{n-1}\beta_A$ onde $\beta_{n-1} \in B_{n-1}$ e $\beta_A \in A_n$;
- (4) $B_{n-1} \cap A_n = \{1\}$.

Assim, se definirmos $j : D_n \rightarrow B_{n-1}$ pondo $j(\beta) = \beta_{n-1}$ e i como sendo a inclusão de A_n em D_n , ficamos com a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i} D_n \xrightarrow{j} B_{n-1} \longrightarrow 1$$

Agora, considere o homomorfismo $\tilde{\pi} : B_{n-1} \rtimes_{\alpha} F \rightarrow S_n$ que associa a cada par (β_{n-1}, V) a permutação $\pi_n(\beta_{n-1})$. Perceba que, o núcleo do homomorfismo $\tilde{\pi}$ é igual a $P_{n-1} \rtimes_{\alpha} F$. Ainda, $\tilde{\pi}$ faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} B_{n-1} \rtimes_{\alpha} F & \xrightarrow[\cong]{\xi} & D_n \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow \pi_n|_{D_n} \\ & & S_n \end{array}$$

Como consequência da comutatividade do diagrama, temos

$$P_{n-1} \rtimes_{\alpha} F = \ker(\tilde{\pi}) \cong \xi(\ker(\tilde{\pi})) = \ker(\pi_n|_{D_n}) = P_n$$

A partir deste isomorfismo, concluímos que todo elemento de P_n pode ser escrito de modo único como $\beta_{n-1}\beta_A$, onde $\beta_{n-1} \in P_{n-1}$ e $\beta_A \in A_n$. Restringindo o homomorfismo $j : D_n \rightarrow B_{n-1}$ ao subgrupo P_n , obtemos um novo homomorfismo $j : P_n \rightarrow P_{n-1}$ e a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i} P_n \xrightarrow{j} P_{n-1} \longrightarrow 1$$

Tanto o homomorfismo $j : D_n \rightarrow B_{n-1}$ quanto sua restrição $j : P_n \rightarrow P_{n-1}$, são ditos *homomorfismo de Chow*.

Posto isto, estamos aptos a enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.1. *Os grupos $B_n(\mathbb{E}^2)$ e B_n são isomorfos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. O resultado é evidente se $n = 1$ pois ambos, B_1 e $B_1(\mathbb{E}^2)$, são triviais. Suponha então que $n \geq 2$.

Utilizando o teste de substituição e o Lema 2.2.3, garantimos a existência de um homomorfismo $\phi_n : B_n \rightarrow B_n(\mathbb{E}^2)$ tal que $\phi_n(\sigma_i) = s_i$, $1 \leq i \leq n - 1$. Como $\pi \phi_n = \pi_n$, ϕ_n aplica o subgrupo P_n em $P_n(\mathbb{E}^2)$. Logo, podemos considerar o homomorfismo $\psi_n = \phi_n|_{P_n} : P_n \rightarrow P_n(\mathbb{E}^2)$. Juntando estas informações, ficamos com o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & P_n & \hookrightarrow & B_n & \xrightarrow{\pi_n} & S_n & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \psi_n & & \downarrow \phi_n & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & P_n(\mathbb{E}^2) & \xrightarrow{q_*} & B_n(\mathbb{E}^2) & \xrightarrow{\pi} & S_n & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

no qual as linhas são exatas. Assim, pelo Lema dos Cinco, ϕ_n é um isomorfismo se, e somente se, ψ_n for um isomorfismo.

O restante da demonstração consiste em mostrar que ψ_n é um isomorfismo de grupos. O grupo $\pi_1(\mathbb{E}^2 \setminus \{P_1 \dots P_{n-1}\}, P_n)$ é livre de posto $n - 1$ gerado pelas classes de homotopia que contém os laços b_i , cuja dinâmica está representada na figura 2.4.

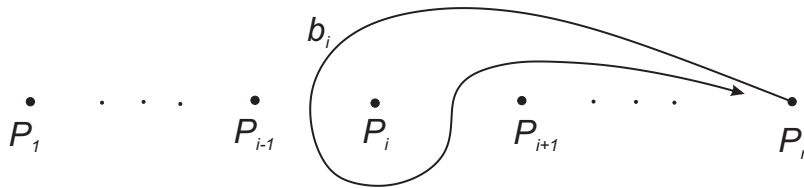


Figura 2.4: Geradores do grupo fundamental do plano com $n - 1$ pontos removidos.

Deste modo, se pormos $\theta_n(A_{i,n}) = b_i$ (usamos a mesma notação para o laço b_i e para a classe de homotopia que o contém), $1 \leq i \leq n - 1$, vemos que θ_n estabelece um isomorfismo entre A_n e $\pi_1(\mathbb{E}^2 \setminus \{P_1 \dots P_{n-1}\}, P_n)$. Com isto, para $n \geq 3$, obtemos o

diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & A_n & \xleftarrow{i} & P_n & \xrightarrow{j} & P_{n-1} \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow \theta_n & & \downarrow \psi_n & & \downarrow \psi_{n-1} \\
1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{E}^2 \setminus \{P_1 \dots P_{n-1}\}, P_n) & \xrightarrow{\eta_*} & P_n(\mathbb{E}^2) & \xrightarrow{p_*} & P_n(\mathbb{E}^2) \longrightarrow 1
\end{array}$$

onde as linhas são exatas. Novamente, pelo Lema dos Cinco, ψ_n é um isomorfismo se, e somente se, ψ_{n-1} for um isomorfismo.

Para concluir o teorema, devemos mostrar que ψ_2 é um isomorfismo entre P_2 e $P_2(\mathbb{E}^2)$. Por um lado, P_2 é infinito cíclico gerado pelo elemento σ_1^2 . Por outro, se considerarmos a fibração $p : F_2(\mathbb{E}^2) \rightarrow \mathbb{E}^2$ e aplicarmos a sequência exata longa de homotopia a ela associada, obtemos o isomorfismo $P_2(\mathbb{E}^2) \cong \pi_1(\mathbb{E}^2 \setminus \{P_1\}, P_2)$. Logo, $P_2(\mathbb{E}^2)$ é infinito cíclico gerado pelo laço $\eta_*(b_1)$. Mas, $\psi_2(\sigma_1^2) = s_1^2 = \eta_*(b_1)$ pelo Lema 2.2.1. Portanto, ψ_2 é um isomorfismo de grupos. \square

Observação 2.2.2. A partir desse ponto denotaremos as classes de homotopia $s_i \in B_n(\mathbb{E}^2)$ por σ_i .

Corolário 2.2.1. *Para todo $n \geq 2$ existe um homomorfismo sobrejetor*

$\mathbf{es} : B_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$\mathbf{es}(\sigma_{i_1}^{\nu_1} \cdots \sigma_{i_k}^{\nu_k}) = \sum_{j=1}^k \nu_j$$

Além disso, $\ker(\mathbf{es}) = \Gamma_2(B_n(\mathbb{E}^2))$.

Demonstração. A existência do homomorfismo \mathbf{es} é assegurada pelo teste de substituição pois, basta estender a aplicação $\sigma_i \rightarrow 1$. A sua sobrejetividade decorre da igualdade $\mathbf{es}(\sigma_1^k) = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Da comutatividade do grupo \mathbb{Z} , segue-se que $\Gamma_2 = \Gamma_2(B_n(\mathbb{E}^2)) \subseteq \ker(\mathbf{es})$. Logo, \mathbf{es} induz um homomorfismo $\tilde{\mathbf{es}} : B_n(\mathbb{E}^2)/\Gamma_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\tilde{\mathbf{es}}(\Gamma_2 \cdot \beta) = \mathbf{es}(\beta)$, cujo núcleo é $\ker(\mathbf{es})/\Gamma_2$. Aplicando o exemplo 1.1.1, concluímos que a abelinização de $B_n(\mathbb{E}^2)$ é infinito cíclico gerado pelo elemento $\Gamma_2 \cdot \sigma = \Gamma_2 \cdot \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Como $\tilde{\mathbf{es}}(\Gamma_2 \cdot \sigma) = 1$, vemos que $\tilde{\mathbf{es}}$ trata-se de um isomorfismo. Portanto, $\Gamma_2 = \ker(\mathbf{es})$. \square

Corolário 2.2.2. *Seja $n \geq 3$. Então $P_n(\mathbb{E}^2)$ tem a seguinte apresentação:*

Geradores: $A_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$;

Relações:

$$\begin{aligned}
A_{i,j}^{-1}A_{r,s}A_{i,j} &= A_{r,s} \text{ se } i < j < r < s \text{ ou } r < i < j < s \\
A_{r,i}^{-1}A_{i,j}A_{r,i} &= A_{r,j}A_{i,j}A_{r,j}^{-1} \text{ se } r < i < j \\
A_{i,s}^{-1}A_{i,j}A_{i,s} &= A_{i,j}A_{s,j}A_{i,j}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}^{-1} \text{ se } i < s < j \\
A_{r,s}^{-1}A_{i,j}A_{r,s} &= A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1} \text{ se } r < i < s < j.
\end{aligned}$$

Demonstração. Com o isomorfismo $P_n \cong P_{n-1}A_n$, $n \geq 3$, podemos calcular uma apresentação para P_n utilizando indução sobre n . O grupo P_2 é infinito cíclico gerado por $A_{1,2}$ enquanto que, A_3 é livre de posto 2 com base $\{A_{1,3}, A_{2,3}\}$. Logo, pelo Teorema 1.2.1, P_3 é gerado por $A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3}$ e valem as relações $A_{1,2}^{-1}A_{1,3}A_{1,2} = A_{1,3} \cdot A_{1,2}$ e $A_{1,2}^{-1}A_{2,3}A_{1,2} = A_{2,3} \cdot A_{1,2}$. Mas

$$\begin{aligned}
A_{1,3} \cdot A_{1,2} &= (A_{1,3} \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_1 \\
&= (A_{1,3}A_{2,3}A_{1,3}^{-1}) \cdot \sigma_1 \\
&= (A_{1,3}A_{2,3}A_{1,3}^{-1})A_{1,3}(A_{1,3}A_{2,3}A_{1,3}^{-1})^{-1} \\
&= A_{1,3}A_{2,3}A_{1,3}A_{2,3}^{-1}A_{1,3}^{-1}
\end{aligned}$$

e, para a outra conjugação

$$\begin{aligned}
A_{2,3} \cdot A_{1,2} &= (A_{2,3} \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_1 \\
&= A_{2,3} \cdot \sigma_1 \\
&= A_{1,3}A_{2,3}A_{1,3}^{-1}
\end{aligned}$$

obtendo assim o resultado para $n = 3$.

Suponha que o teorema seja válido para $n - 1 \geq 3$. Os geradores de P_n são facilmente obtidos, pois, basta tomar os geradores de P_{n-1} , $A_{i,j}$ onde $1 \leq i < j \leq n-1$, e os geradores de A_n , $A_{i,n}$, $1 \leq i \leq n$. Quanto as relações, todas válidas em P_{n-1} e A_n continuam válidas em P_n , adicionando apenas o conjunto de relações $A_{r,s}^{-1}A_{i,n}A_{r,s} = A_{i,n} \cdot A_{r,s}$, com

$1 \leq r < s \leq n - 1$ e $1 \leq i \leq n - 1$. Vamos ilustrar o caso $r < s = i \leq n - 1$. Temos

$$\begin{aligned}
A_{i,n} \cdot A_{r,i} &= A_{i,n} \cdot (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{r+1} \sigma_r^2 \sigma_{r+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
&= A_{i-1,n} \cdot (\sigma_{i-2} \cdots \sigma_{r+1} \sigma_r^2 \sigma_{r+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
&= A_{i-2,n} \cdot (\sigma_{i-3} \cdots \sigma_{r+1} \sigma_r^2 \sigma_{r+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
&= A_{r,n} \cdot (\sigma_r \sigma_{r+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
&= (A_{r,n} A_{r+1,n} A_{r,n}^{-1}) \cdot (\sigma_{r+1}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
&= (A_{r,n} A_{r+2,n} A_{r,n}^{-1}) \cdot (\sigma_{r+2}^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\
&= (A_{r,n} A_{i-1,n} A_{r,n}^{-1}) \cdot \sigma_{i-1}^{-1} \\
&= A_{r,n} A_{i,n} A_{r,n}^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Seja G um grupo e $g \in G$. Dizemos que g tem *ordem finita* se existe um número natural n tal que $g^n = e_G$. Neste caso, a sua *ordem* é definida como sendo o número

$$o(g) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = e_G\}$$

Quando $g^k \neq e_G$ para todo natural n , dizemos que g tem ordem *infinita* e escrevemos $o(g) = \infty$. Um elemento $g \in G$ é dito de *torção* se $o(g) < \infty$ e $g \neq e_G$.

Teorema 2.2.2. *Se $n \geq 3$ então, o centro de $B_n(\mathbb{E}^2)$ é infinito cíclico gerado por Δ_n , onde $\Delta_n = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^n$.*

Demonstração. Inicialmente, utilizando o homomorfismo introduzido no Corolário 2.2.1, vê-se que $\text{es}(\Delta_n^k) = kn(n-1)$ para todo k , ou seja, $\Delta_n^k = 1$ se, e só se, $k = 0$. Portanto, $o(\Delta_n) = \infty$ e o subgrupo gerado por Δ_n é infinito.

Agora, note que o elemento Δ_n pertence ao centro de $B_n(\mathbb{E}^2)$ pois

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \sigma_i &= \sigma_{i+1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \quad \text{se } 1 \leq i \leq n-2, \\
(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^2 \sigma_{n-1} &= \sigma_1 (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^2.
\end{aligned}$$

Se $\beta \in C(B_n(\mathbb{E}^2))$ então, $\pi(\beta) \in C(S_n) = \{1\}$, ou seja, $C(B_n(\mathbb{E}^2)) \subseteq P_n(\mathbb{E}^2)$. Com isso, reduzimos nosso problema em mostrar que $C(P_n(\mathbb{E}^2))$ é infinito cíclico gerado por Δ_n .

Vamos proceder usando indução sobre $n \geq 3$. Para o passo inicial, considere a fibração de Fadell-Neuwirth $p : F_3(\mathbb{E}^2) \rightarrow F_2(\mathbb{E}^2)$. Se $\beta \in C(P_3(\mathbb{E}^2))$ então $p_*(\beta) = \Delta_2^k$ para algum k , pois o grupo de 2-tranças puras no plano é gerado por Δ_2 . Mas, a 3-trança Δ_3 pertence à imagem inversa de Δ_2 pelo homomorfismo p_* , e assim $\beta^{-1}\Delta_3^k \in \ker(p_*)$. Logo, $\beta^{-1}\Delta_3^k$ está no centro de $\ker(p_*)$, que por sua vez é trivial. Portanto, $\beta = \Delta_3^k$.

Para o caso geral $n \geq 4$, basta considerar a fibração de Fadell-Neuwirth $p : F_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow F_{n-1}(\mathbb{E}^2)$ e notar que, se $\beta \in C(P_n(\mathbb{E}^2))$ então $p_*(\beta)$ estará no centro de $P_{n-1}(\mathbb{E}^2)$. O restante da demonstração é totalmente análogo ao caso anterior. \square

2.3 Grupos de tranças na esfera

Seja B'_n ($n \geq 2$) o grupo com $n - 1$ geradores $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ sujeitos as relações:

$$\begin{aligned} \delta_i \delta_j &= \delta_j \delta_i \quad \text{se } |i - j| \geq 2 \\ \delta_i \delta_{i+1} \delta_i &= \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1} \quad \text{se } i = 1, \dots, n - 2 \\ \delta_{n-1} \dots \delta_2 \delta_1^2 \delta_2 \dots \delta_{n-1} &= 1. \end{aligned}$$

Por conveniência ponha também $B'_1 = \{1\}$ e denote por x_n o elemento $\sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$ de B_n .

Pelo Lema de substituição, existe um homomorfismo de grupos $\beta_n : B_n \rightarrow B'_n$ tal que $\beta_n \sigma_i = \delta_i$, $i = 1, \dots, n - 1$. Já o Lema de von Dick (Lema 1.1.3), nos garante que o núcleo de β_n , o qual denotaremos por $R(x_n)$, é igual a $\langle\langle \{x_n\} \rangle\rangle$. Observe também que $x_n \in P_n$. Logo, como P_n é um subgrupo normal de B_n , contém o fecho normal $R(x_n)$ de x_n .

Reunindo as informações do parágrafo acima, mais o fato de β_n ser sobrejetora, garantimos a existência de um homomorfismo π'_n tal que $\pi'_n \circ \beta_n = \pi_n$. Com isto, o homomorfismo π'_n aplica os geradores δ_i nas transposições s_i , implicando na sua sobrejetividade. Se escrevermos P'_n para representar o seu núcleo, então β_n aplica P_n sobre P'_n .

A fim de não causar confusão, denotaremos os geradores de B_{n-1} por $\sigma_1^*, \dots, \sigma_{n-2}^*$. Então, o núcleo do β_{n-1} é igual ao fecho normal do elemento x_{n-1}^* , onde

$$x_{n-1}^* = \sigma_{n-2}^* \dots \sigma_2^* \sigma_1^* \sigma_1^* \sigma_2^* \dots \sigma_{n-2}^*.$$

Lema 2.3.1. *Seja $j : D_n \rightarrow B_{n-1}$ o homomorfismo de Chow, então $j(R(x_n)) \subseteq R(x_{n-1}^*)$.*

Demonstração. Inicialmente, note que $[B_n : D_n] = [S_n : S_{n-1}] = n$ ou seja, existem exatamente n classes laterais à direita de D_n em B_n . Em seguida, $D_n \cdot g_1 = D_n \cdot g_2$ se, e só se, $\pi_n g_1(n) = \pi_n g_2(n)$.

Considere então o conjunto $L = \{S_0, \dots, S_{n-1}\}$ onde $S_0 = 1$ e $S_i = \sigma_{n-1} \dots \sigma_{n-i}$ para os demais índices. A imagem de S_i pelo homomorfismo π_n consiste no ciclo

$$(n \ n-i \ n-i+1 \ \dots \ n-2 \ n-1).$$

Logo, $D_n \cdot S_i \neq D_n \cdot S_j$ se $i \neq j$. Assim, o conjunto L contém exatamente um representante de cada classe lateral de D_n em B_n . Portanto, todo elemento de B_n é da forma dS_i para algum $d \in D_n$ e algum $i = 0, \dots, n-1$.

Por fim, observe que x_n comuta com cada gerador σ_i se $i \leq n-2$.

Devemos mostrar que $j(gx_n g^{-1})$ pertence à $R(x_{n-1}^*)$ qualquer que seja o elemento $g \in B_n$. Mas, conforme visto acima, todo elemento g pode ser escrito como dS_i , ou seja, nosso trabalho se resume em calcular todas as possibilidades $j(dS_i x_n S_i^{-1} d^{-1})$, $i = 0, \dots, n-1$.

Quando $i = 0$, temos:

$$j(dS_0 x_n S_0^{-1} d^{-1}) = j(d)j(S_0)j(x_n)j(S_0)^{-1}j(d)^{-1} = 1$$

visto que $x_n \in A_n = \ker(j)$ e $S_0 = 1$. Em seguida tome $i = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} j(dS_1 x_n S_1^{-1} d^{-1}) &= j(d)j(\sigma_{n-1} x_n \sigma_{n-1}^{-1})j(d)^{-1} \\ &= j(d)j(\sigma_{n-1}^2)j(\sigma_{n-2} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2})j(d)^{-1} \\ &= j(d)x_{n-1}^* j(d)^{-1}, \end{aligned}$$

novamente utilizamos o fato de que $\sigma_{n-1}^2 = A_{n-1,n} \in A_n$. Para os casos restantes, isto é, se $i \geq 2$, temos:

$$\begin{aligned} j(dS_i x_n S_i^{-1} d^{-1}) &= j(d)j(\sigma_{n-1} \dots \sigma_{n-i} x_n \sigma_{n-i}^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1})j(d)^{-1} \\ &= j(d)j(S_i x_n S_i^{-1})j(d)^{-1} \\ &= j(d)x_{n-1}^* j(d)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a imagem de $R(x_n)$ pelo homomorfismo de Chow j está contida no fecho normal de x_{n-1}^* em B_{n-1} . \square

O homomorfismo de Chow, $j : P_n \rightarrow P_{n-1}$, induz um homomorfismo $j'_n : P'_n \rightarrow P'_{n-1}$ da seguinte maneira: dado $g' \in P'_n$, existe um $g \in P_n$ tal que $\beta_n g = g'$. Como era de se esperar, definimos $j' g' = \beta_{n-1} j g$.

O Lema 2.3.1 garante que j' está bem definido. De fato, se $\beta_n g_1 = \beta_n g_2$ então $g_1 g_2^{-1} \in \ker(\beta_n) = R(x_n)$, donde segue-se que $j(g_1 g_2^{-1}) \in R(x_{n-1}^*)$. Portanto, $\beta_{n-1} j g_1 = \beta_{n-1} j g_2$.

Da forma como foi construído o homomorfismo j' , conclui-se a comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & P_n & \xrightarrow{j} & P_{n-1} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \beta_{n-1} & & \\ 1 & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{i'} & P'_n & \xrightarrow{j'} & P_{n-1} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

onde $A'_n = \beta_n(A_n)$ e i' é a inclusão de A'_n em P'_n .

Desejamos mostrar que a sequência da linha inferior do diagrama acima é exata. Para tanto, o seguinte lema facilitará nosso trabalho.

Lema 2.3.2. *Dado $v \in R(x_{n-1}^*)$ existem $z \in P_n$ e $a \in A_n$ tais que $j z = v$ e $\beta_n z = \beta_n a$.*

Demonstração. Um elemento v de $R(x_{n-1}^*) = \langle\langle\{x_{n-1}^*\}\rangle\rangle$ é um produto da forma

$$g_1(x_{n-1}^*)^{\varepsilon_1} g_1^{-1} \cdots g_r(x_{n-1}^*)^{\varepsilon_r} g_r^{-1}$$

onde $g_i \in B_{n-1}$ e $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Observe que é suficiente demonstrar o lema se $v = g x_{n-1}^* g^{-1}$. Inicialmente, existe $d \in D_n$ de sorte que $j(d) = g$. Defina $z = dyd^{-1}$ e $a = dA_{n-1,n}^{-1}d^{-1}$, onde $y = \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}$. Então, $j(z) = j(d)x_{n-1}^* j(d)^{-1} = v$ e

$$\begin{aligned} \beta_n(a) &= \beta_n(d)\beta_n(A_{n-1,n}^{-1})\beta_n(d)^{-1} \\ &= \beta_n(d)\delta_{n-1}^{-2}\beta_n(d)^{-1} \\ &= \beta_n(d)(\delta_{n-2} \cdots \delta_2 \delta_1^2 \delta_2 \cdots \delta_{n-2})\beta_n(d)^{-1} \\ &= \beta_n(d)\beta_n(\sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2})\beta_n(d)^{-1} \\ &= \beta_n(dyd^{-1}) \\ &= \beta_n(z). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.1. *A sequência*

$$1 \longrightarrow A'_n \xrightarrow{i'} P'_n \xrightarrow{j'} P'_{n-1} \longrightarrow 1$$

é exata.

Demonstração. Dado $a' \in A'_n$ então, pela definição de A'_n , $a' = \beta_n a$ para algum $a \in A_n$. Logo, $j' i'(a') = j'(a') = \beta_{n-1} j(a) = \beta_{n-1}(1) = 1$ pois A_n coincide com o núcleo do homomorfismo de Chow. Com isto, temos a primeira inclusão. Por outro lado, se $w' \in \ker(j')$ então, escolha $w \in P_n$ de tal maneira que $\beta_n(w) = w'$. Logo, $1 = \beta_{n-1} j(w)$, donde $j(w) \in R(x_{n-1}^*)$. Agora, fazendo uso do lema anterior, podemos encontrar $z \in P_n$ e $a \in A_n$ tais que $j(z) = j(w)$ e $\beta_n(z) = \beta_n(a)$. Mas, $z^{-1}w \in \ker(j)$ assim como o elemento a , logo $az^{-1}w \in A_n$. Finalmente, $\beta_n(az^{-1}w) = \beta_n(zz^{-1}w) = w'$, ou seja, w' realmente está na imagem de i' . □

Os próximos lemas serão utilizados na obtenção de algumas propriedades importantes do grupo B'_n referentes aos seus elementos de torção.

Lema 2.3.3. $\delta_i(\delta_1 \cdots \delta_j) = (\delta_1 \cdots \delta_j)\delta_{i-1}$, para $1 < i \leq j \leq n-1$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \delta_i(\delta_1 \cdots \delta_j) &= \delta_1 \delta_i \delta_2 \cdots \delta_{i-1} \delta_i \delta_{i+1} \cdots \delta_j \\ &= \delta_1 \cdots \delta_{i-2} (\delta_i \delta_{i-1} \delta_i) \delta_{i+1} \cdots \delta_j \\ &= \delta_1 \cdots \delta_{i-2} (\delta_{i-1} \delta_i \delta_{i-1}) \delta_{i+1} \cdots \delta_j \\ &= \delta_1 \cdots \delta_{i-1} \delta_i \delta_{i+1} \delta_{i-1} \cdots \delta_j \\ &= (\delta_1 \cdots \delta_j) \delta_{i-1}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3.4. $(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n = (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})^{n-1}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n &= (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})\delta_{n-1}(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^{n-2} \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})\delta_{n-2}(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^{n-2} \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^2\delta_{n-3}(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^{n-3} \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^{n-2}\delta_1(\delta_1\delta_2 \cdots \delta_{n-1}) \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})^2\delta_{n-1}(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^{n-3}(\delta_1^2\delta_2 \cdots \delta_{n-1}) \\
&= (\delta_1\delta_2 \cdots \delta_{n-2})^2(\delta_1\delta_2 \cdots \delta_{n-1})^{n-3}\delta_2\delta_1^2\delta_2 \cdots \delta_{n-1} \\
&= (\delta_1\delta_2 \cdots \delta_{n-2})^{n-1}(\delta_{n-1} \cdots \delta_1^2\delta_2 \cdots \delta_{n-1}) \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})^{n-2}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.5. $(\delta_1 \cdots \delta_j)^{j+1} = (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})^j(\delta_{j+1}^{-1} \cdots \delta_{n-1}^{-1}\delta_{n-1}^{-1} \cdots \delta_{j+1}^{-1})$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
(\delta_1 \cdots \delta_j)^{j+1} &= (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})\delta_j(\delta_1 \cdots \delta_j)^{j-1}(\delta_1 \cdots \delta_j) \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})(\delta_1 \cdots \delta_j)^{j-1}\delta_1(\delta_1 \cdots \delta_j) \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})^2(\delta_1 \cdots \delta_j)^{j-2}\delta_2\delta_1(\delta_1 \cdots \delta_j) \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})^j(\delta_j\delta_{j-1} \cdots \delta_2\delta_1\delta_1 \cdots \delta_j) \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})^j(\delta_{j+1}^{-1}\delta_{j+2}^{-1} \cdots \delta_{n-2}^{-1}\delta_{n-1}^{-1}\delta_{n-1}^{-1}\delta_{n-2}^{-1} \cdots \delta_{j+1}^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.6. $(\delta_1 \cdots \delta_j)^{j+1}(\delta_1^{-1} \cdots \delta_j^{-1})^{j+1} = (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})^j(\delta_1^{-1} \cdots \delta_{j-1}^{-1})^j$.

Demonstração. Inicialmente, observe que as relações que definem o grupo B'_n continuam válidas se substituirmos os símbolos δ_i por seus inversos δ_i^{-1} . Portanto

$$\begin{aligned}
(\delta_1 \cdots \delta_j)^{j+1}(\delta_1^{-1} \cdots \delta_j^{-1})^{j+1} &= (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})^j(\delta_{j+1}^{-1} \cdots \delta_{n-1}^{-1}\delta_{n-1}^{-1} \cdots \delta_{j+1}^{-1}) \cdot \\
&\cdot (\delta_1^{-1} \cdots \delta_{j-1}^{-1})^j(\delta_{j+1} \cdots \delta_{n-1}\delta_{n-1} \cdots \delta_{j+1}) = (\delta_1 \cdots \delta_{j-1})^j(\delta_1^{-1} \cdots \delta_{j-1}^{-1})^j.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.7. $(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^{2n} = 1$ em B'_n .

Demonstração.

$$\begin{aligned}
(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^{2n} &= (\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n (\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n (\delta_1^{-1} \cdots \delta_{n-1}^{-1})^n \\
&= (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})^{n-1} (\delta_1^{-1} \cdots \delta_{n-2}^{-1})^{n-1} \\
&= (\delta_1)^2 (\delta_1)^{-2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.8. O elemento $\delta_2^2 = (\delta_1 \delta_2)^3$ de B'_3 tem ordem 2. Além disso, B'_3 é isomorfo ao grupo metacíclico ZS de ordem 12.

Observação 2.3.1. O grupo metacíclico de ordem 12 possui dois geradores a, b e valem as relações: (1) $a^6 = 1$ e (2) $a^3 = b^2 = (ab)^2$.

Demonstração. A permutação $\pi'_3(\delta_1 \delta_2) = (1 \ 3 \ 2)$ possui ordem 3, logo $(\delta_1 \delta_2)^k \neq 1$ se k não for múltiplo de 3. Agora, olhe para o homomorfismo $\mathbf{es} : B'_3 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ que associa os geradores δ_i a $\bar{1}$. Então, o elemento $(\delta_1 \delta_2)^3$ é aplicado por \mathbf{es} em $\bar{2}$, isto é, $(\delta_1 \delta_2)^3$ é diferente do elemento neutro. O Lema anterior nos diz que $(\delta_1 \delta_2)^6 = 1$, concluindo assim a primeira parte do lema.

Para a segunda parte da demonstração, basta definirmos os homomorfismos $\phi : B'_3 \rightarrow ZS$ e $\psi : ZS \rightarrow B'_3$ pondo

$$\phi(\delta_1) = b \quad e \quad \phi(\delta_2) = b^{-1}a,$$

$$\psi(a) = \delta_1 \delta_2 \quad e \quad \psi(b) = \delta_1.$$

Com um cálculo simples vemos que realmente ambos definem homomorfismos e $\psi = \phi^{-1}$. □

Teorema 2.3.2. $(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})$ tem ordem $2n$ em B'_n .

Demonstração. Novamente, vamos utilizar o homomorfismo π'_n . Note que

$$\pi'_n(\delta_1 \cdots \delta_{n-1}) = (1 \ n \ \dots \ 3 \ 2)$$

é uma permutação de ordem n , sendo assim, $(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^k \neq 1$ se k não for múltiplo de n .

Resta mostrar que $(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n \neq 1$. Para tanto, considere a sequência de homomorfismos dada abaixo

$$P'_n \xrightarrow{j'_n} P'_{n-1} \xrightarrow{j'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{j'_5} P'_4 \xrightarrow{j'_4} P'_3$$

Conforme visto nos lemas anteriores, em B'_n tem-se

$$(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n = (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})^{n-1},$$

aplicando o homomorfismo j'_n em ambos os lados da igualdade, ficamos com $j'_n(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n = (\delta_1 \cdots \delta_{n-2})^{n-1} \in B'_{n-1}$ (na verdade em P'_{n-1}). Em B'_{n-1} tem-se a igualdade:

$$(\delta_1 \cdots \delta_{n-2})^{n-1} = (\delta_1 \cdots \delta_{n-3})^{n-2},$$

aplicando agora j'_{n-1} teremos o elemento $(\delta_1 \cdots \delta_{n-3})^{n-2}$ em B'_{n-2} . Após repetir este argumento $n-3$ vezes, obtemos a igualdade $j'_4 \cdots j'_n(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n = (\delta_1 \delta_2)^3$. Se supormos que $(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})^n = 1$ obrigatoriamente tem-se $(\delta_1 \delta_2)^3 = 1$ contrariando o lema anterior. Portanto $(\delta_1 \cdots \delta_{n-1})$ tem ordem igual a $2n$. \square

Para nossos futuros propósitos, convém identificar a esfera \mathbb{S}^2 com o espaço quociente do disco \mathbb{D}^2 pela relação de equivalência que identifica os pontos $(x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ e $(x, -\sqrt{1 - \|x\|^2})$ se $x \in \mathbb{S}^1$. Sejam $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{S}^2$ dispostos conforme a figura abaixo e seja também $P_0 = (P_1, \dots, P_n) \in F_n(\mathbb{S}^2)$ ponto base.

Agora, como feito anteriormente para o plano, considere os elementos $s_i = [q \circ \tilde{f}_i] \in B_n(\mathbb{S}^2)$, $1 \leq i \leq n$, onde as coordenadas do caminho $\tilde{f}_i : I \rightarrow F_n(\mathbb{S}^2)$ estão representadas na figura 2.5.

Para o caso da esfera, os Lemas 2.2.1-2.2.3 continuam válidos, em adição temos:

Lema 2.3.9. *Em $B_n(\mathbb{S}^2)$ tem-se $s_{n-1} \cdots s_2 s_1^2 s_2 \cdots s_{n-1} = 1$.*

Teorema 2.3.3. *Os grupos $B_n(\mathbb{S}^2)$ e B'_n são isomorfos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. O caso $n = 1$ é imediato pois por definição $B'_1 = 1$ assim como $B_1(\mathbb{S}^2) = \pi_1(\mathbb{S}^2)$. Suponha então $n \geq 2$.

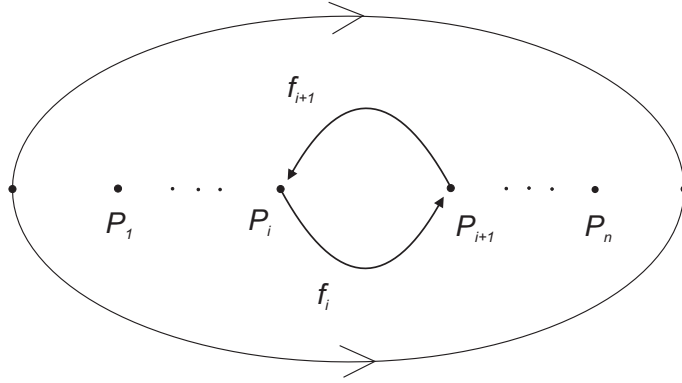


Figura 2.5: Geradores do grupo $B_n(\mathbb{S}^2)$.

Vamos iniciar definindo o homomorfismo $\phi'_n : B'_n \rightarrow B_n(\mathbb{S}^2)$ que aplica o elemento base δ_i em s_i , $1 \leq i \leq n-1$. Se restringirmos ϕ'_n ao subgrupo P'_n , obtemos um homomorfismo $\psi'_n : P'_n \rightarrow P_n(\mathbb{S}^2)$. Em suma, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & P'_n & \hookrightarrow & B'_n & \xrightarrow{\pi'_n} & S_n & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \psi'_n & & \downarrow \phi'_n & & \parallel & & \\
 1 & \longrightarrow & P_n(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{q_*} & B_n(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\pi} & S_n & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

onde as linhas são exatas. Portanto, devemos mostrar que ψ'_n é um isomorfismo para todo $n \geq 2$.

Agora, para $n \geq 4$ considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & P_n & \xrightarrow{j} & P_{n-1} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \beta_{n-1} & & \\
 1 & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{i'} & P'_n & \xrightarrow{j'} & P'_{n-1} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \theta'_n & & \downarrow \psi'_n & & \downarrow \psi'_{n-1} & & \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}, P_n) & \xrightarrow{\eta_*} & P_n(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{p_*} & P_{n-1}(\mathbb{S}^2) & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

onde todos homomorfismos estão definidos com exceção de θ'_n . Antes de definirmos θ'_n , observe que $\psi'_{n-1} j' = p_* \psi'_n$ donde $\psi'_{n-1} \beta_{n-1} j = p_* \psi'_n \beta_n$. Consequentemente, $p_* \psi'_n \beta_n(A_n) = 1$, isto é, $\psi'_n(A'_n)$ está contido no núcleo de p_* . Podemos então definir θ'_n como sendo a composta $(\eta_*)^{-1} \circ \psi'_n \circ i'$.

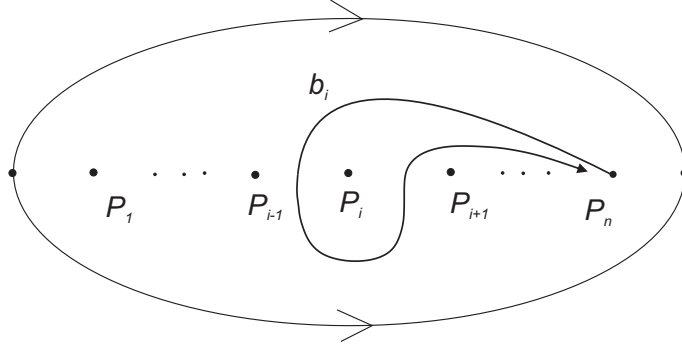


Figura 2.6: Geradores do grupo fundamental da esfera com $n - 1$ pontos removidos.

Afirmamos que θ'_n é um isomorfismo. De fato, por definição A'_n é igual a imagem de A_n pelo homomorfismo β_n . Logo, é gerado pelo conjunto

$$\{\beta_n(A_{1,n}), \beta_n(A_{2,n}), \dots, \beta_n(A_{n-1,n})\}$$

Podemos escrever x_n como o produto $A_{1,n} \dots A_{n-1,n}$ e assim

$$\beta_n(A_{1,n}) = \beta_n(A_{n-1,n})^{-1} \dots \beta_n(A_{2,n})^{-1}$$

De onde segue-se que A'_n é gerado por $\{\beta_n(A_{2,n}), \dots, \beta_n(A_{n-1,n})\}$.

Transferindo nossas atenções para o grupo $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}, P_n)$, sabemos que as classes de homotopia b_1, \dots, b_{n-1} , onde b_i é representada pelo laço b_i conforme a figura 2.6, são geradores e vale a relação $b_1 \dots b_{n-1} = 1$, ou seja, o grupo fundamental da esfera com $n - 1$ pontos removidos é livre de posto $n - 2$ e base $\{b_2, \dots, b_{n-1}\}$. Defina o homomorfismo $\mu : \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}, P_n) \rightarrow A'_n$ pondo na base $\mu(b_i) = A_{i,n}$. Temos:

$$\begin{aligned} \theta'_n \mu(b_i) &= (\eta_*)^{-1} \psi'_n(A_{i,n}) \\ &= (\eta_*)^{-1} (\delta_{n-1} \dots \delta_{i+1} \delta_i^2 \delta_{i+1}^{-1} \dots \delta_{n-1}^{-1}) \\ &= b_i. \end{aligned}$$

isto é, $\theta'_n \mu = \text{id}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mu \theta'_n(A_{i,n}) &= \mu(\eta_*)^{-1} \beta_n(A_{i,n}) \\
&= \mu(\eta_*)^{-1} (\delta_{n-1} \cdots \delta_{i+1} \delta_i^2 \delta_{i+1}^{-1} \cdots \delta_{n-1}^{-1}) \\
&= \mu(b_i) \\
&= A_{i,n}.
\end{aligned}$$

obtendo assim $\mu \circ \theta'_n = \text{id}$. Portanto, θ'_n é um isomorfismo cujo inverso é igual à μ . Para findarmos a demonstração, devemos verificar os casos $n = 2, 3$.

Se $n = 2$ então B'_n é cíclico de ordem 2. Por outro lado, considerando a sequência (2.3) com $n = 2$ e relembando que $P_2(\mathbb{S}^2)$ é trivial, concluímos que $\pi : B_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow S_2$ é um isomorfismo. Logo, $B_2(\mathbb{S}^2)$ é cíclico de ordem 2 gerado por s_1 . Mas, ϕ'_2 aplica o gerador δ_1 em s_1 , ou seja, ϕ'_2 é um isomorfismo.

Vimos que B'_3 é o grupo metacíclico de ordem 12 e o elemento δ_2^2 tem ordem igual a 2. Visto que S_3 tem ordem 6, concluímos que P'_3 deve ter ordem igual a 2. Sendo δ_2^2 um elemento cuja permutação associada é trivial, concluímos que ele gera P'_3 . Por outro lado, $P_3(\mathbb{S}^2)$ é cíclico de ordem 2 gerado por s_2^2 . Olhando para a imagem do elemento δ_2^2 pelo homomorfismo ψ'_3 , constatamos que ψ'_3 é um isomorfismo. \square

Observação 2.3.2. De agora em diante, representaremos os geradores de $B_n(\mathbb{S}^2)$ também por σ_i ao invés de s_i ou δ_i . Com esta notação fica bem claro que o grupo de tranças na esfera é obtido do grupo de tranças no plano adicionando-se uma única relação, a saber $\sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} = 1$.

Observação 2.3.3. O elemento $(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^n$ tanto no grupo de tranças do plano como no grupo de tranças da esfera, será denotado por Δ_n e chamado de *full-twist*.

Corolário 2.3.1. *Seja $n \geq 3$. Então o seguinte consiste numa apresentação de $P_n(\mathbb{S}^2)$:*

Geradores: $A_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$;

Relações:

$$\begin{aligned}
A_{i,j}^{-1} A_{r,s} A_{i,j} &= A_{r,s} \text{ se } i < j < r < s \text{ ou } r < i < j < s \\
A_{r,i}^{-1} A_{i,j} A_{r,i} &= A_{r,j} A_{i,j} A_{r,j}^{-1} \text{ se } r < i < j \\
A_{i,s}^{-1} A_{i,j} A_{i,s} &= A_{i,j} A_{s,j} A_{i,j} A_{s,j}^{-1} A_{i,j}^{-1} \text{ se } i < s < j
\end{aligned}$$

$$A_{r,s}^{-1}A_{i,j}A_{r,s} = A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1} \text{ se } r < i < s < j$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} A_{i,n} = 1$$

Demonstração. Considere o homomorfismo $\psi_n : P_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow P_n(\mathbb{S}^2)$ discutido acima. Então, ψ_n é sobrejetor e $\ker(\psi_n) = \langle \langle \{A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n}\} \rangle \rangle$. Logo, $P_n(\mathbb{S}^2) \cong P_n(\mathbb{E}^2) / \ker(\psi_n)$, ou seja, $P_n(\mathbb{S}^2)$ é obtido de $P_n(\mathbb{E}^2)$ adicionando-se a relação $A_{1,n}A_{2,n} \cdots A_{n-1,n} = 1$. \square

Quando estávamos lidando com o grupo de tranças no plano, estabelecemos o homomorfismo $\text{es} : B_n(\mathbb{E}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$. Contudo, no grupo de tranças da esfera temos a relação adicional $\sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} = 1$ que impossibilita tal construção. Uma maneira de solucionar este problema é considerar a soma $\text{mod } 2(n-1)$. Assim, o homomorfismo

$$\text{es}(\sigma_{i_1}^{\nu_1} \cdots \sigma_{i_k}^{\nu_k}) = (\nu_1 + \cdots + \nu_k) \text{ mod } 2(n-1)$$

está bem definido.

Observação 2.3.4. Em alguns momentos iremos considerar a soma $\nu_1 + \cdots + \nu_k$ como um número inteiro ao invés de uma classe de equivalência $\text{mod } 2(n-1)$.

Ainda na tentativa de transladar todas as propriedades obtidas no plano para o caso da esfera, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.4. $C(B_n(\mathbb{S}^2))$ é cíclico de ordem 2 gerado pelo elemento Δ_n se $n \geq 3$.

Demonstração. A fim de mostrar que $\Delta_n \in C(B_n(\mathbb{S}^2))$ basta repetir a argumentação feita no caso do plano. Quanto a sua ordem, no Teorema 2.3.2 foi mostrado que $o(\Delta_n) = 2$. Devemos mostrar que $C(B_n(\mathbb{S}^2)) \subseteq \langle \Delta_n \rangle$.

Assim como no caso \mathbb{E}^2 , temos $C(B_n(\mathbb{S}^2)) \subseteq P_n(\mathbb{S}^2)$ para $n \geq 3$.

Para $n = 3$ o resultado é imediato pois $P_n(\mathbb{S}^2)$ é exatamente o grupo $\langle \Delta_3 \rangle$, visto que $\Delta_3 = \sigma_2^2 = \sigma_1^2$.

O restante da demonstração é inteiramente análogo ao feito anteriormente para o plano, com a ressalva de que $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_{n-1}\}, P_n)$ é livre de posto $n-2$. \square

Para finalizar esta seção bem como o capítulo, estudaremos os elementos de torção de $B_n(\mathbb{S}^2)$. Esta é uma diferença crucial entre os grupos de tranças do plano e da esfera, visto que $B_n(\mathbb{E}^2)$ é livre de torção, ver [11] para maiores detalhes.

Teorema 2.3.5 (Murasugi). *Seja $q \geq 3$. Então, os elementos de torção de $B_q(\mathbb{E}^2)$ são precisamente os conjugados de potências de algum dos seguintes elementos:*

- **tipo 0:** $\alpha_0 = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$, cuja ordem é $2q$ e o tipo de permutação é (q) ;
- **tipo 1:** $\alpha_1 = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2$, cuja ordem é $2(q-1)$ e o tipo de permutação é $(q-1, 1)$;
- **tipo 2:** $\alpha_2 = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-3} \sigma_{n-2}^2$, cuja ordem é $2(q-2)$ e o tipo de permutação é $(q-2, 1, 1)$;

Demonstração. Ver [18]. □

Os elementos de ordem finita do grupo $P_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$, são facilmente caracterizados. Mais uma vez, usando indução sobre o índice n . Para $n = 3$ o trabalho está feito pois $P_3(\mathbb{S}^2)$ é finito de ordem 2 gerado por $\Delta_3 = \sigma_2^2$. Deste modo, seus elementos de ordem finita são o elemento neutro e a trança Δ_3 .

Seja β um elemento de ordem finita de $P_4(\mathbb{S}^2)$ então, se p representa a fibração $F_4(\mathbb{S}^2) \rightarrow F_3(\mathbb{S}^2)$, $p_*(\beta)$ será um elemento de ordem finita de $P_3(\mathbb{S}^2)$. Logo, $p_*(\beta)$ é igual a 1 ou Δ_3 . Se ocorrer a primeira possibilidade, então β é um elemento de ordem finita do grupo livre $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}, P_4)$, isto é, β é trivial. Se por sua vez tivermos $p_*(\beta) = \Delta_3$ então $\beta^{-1}\Delta_4$ pertence ao grupo livre $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}, P_4)$. Como Δ_4 e β comutam, concluímos que $\beta^{-1}\Delta_4$ tem ordem finita. Novamente pelo fato de todo grupo livre ser livre de torção, deve-se ter $\beta = \Delta_4$.

Assumindo como hipótese que o conjunto dos elementos de ordem finita do grupo $P_{n-1}(\mathbb{S}^2)$ consiste das tranças 1 e Δ_{n-1} e adaptando as ideias do parágrafo anterior para a fibração $F_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow F_{n-1}(\mathbb{S}^2)$, concluímos que os elementos de ordem finita de $P_n(\mathbb{S}^2)$ são precisamente as n -tranças 1 e Δ_n .

Teorema 2.3.6. *O único elemento de ordem 2 em $B_n(\mathbb{S}^2)$ é Δ_n para $n \geq 3$.*

Demonstração. Se $\alpha \in P_n(\mathbb{S}^2)$ tem ordem 2 então, de acordo com as observações acima, $\alpha = \Delta_n$. Suponha também que $\alpha \in B_n(\mathbb{S}^2) \setminus P_n(\mathbb{S}^2)$.

Como $o(\alpha) = 2$ e $\alpha \notin P_n(\mathbb{S}^2)$, a permutação $\pi(\alpha)$ também tem ordem 2 e assim, pode ser escrita como um produto de transposições e 1 ciclos disjuntos. Vamos separar a demonstração em dois casos:

1. A fatoração de $\pi(\alpha)$ contém pelo menos um 1-cíclo;

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha \in B_{1,2,\dots,2}(\mathbb{S}^2)$ e com isso, a

permutação associada a α contém a transposição (2 3). Considere a fibração

$$p : D_{1,2,\dots,2}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_{1,2}(\mathbb{S}^2).$$

Se pormos $\gamma = p_*(\alpha)$, então $\gamma^2 = 1$ e $\pi(\gamma) = \pi(\sigma_2)$. Logo, $\gamma^{-1}\sigma_2 \in P_3(\mathbb{S}^2)$. Temos duas possibilidades, $\gamma^{-1}\sigma_2 = 1$ ou $\gamma^{-1}\sigma_2 = \Delta_3$. A primeira delas implica que $\gamma = \sigma_2$ e assim $o(\sigma_2) = 2$, uma contradição. A segunda possibilidade nos conduz a mesma contradição, pois, se $\sigma_2 = \Delta_3\gamma$ então $\sigma_2^2 = (\Delta_3\gamma)^2 = \Delta_3^2\gamma^2 = 1$.

2. A decomposição de $\pi(\alpha)$ contém apenas transposições;

Neste caso, podemos supor que $\alpha \in B_{2,\dots,2}(\mathbb{S}^2)$ e $\pi(\alpha)$ contém as transposições (1 2) e (3 4). Novamente, considere a fibração de Fadell-Neuwirth generalizada $p : D_{2,\dots,2}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_{2,2}(\mathbb{S}^2)$ e ponha $\gamma = p_*(\alpha)$. Então, $\pi(\gamma) = (1\ 2)(3\ 4) = \pi(\sigma_1\sigma_3)$ donde $\gamma = w\sigma_1\sigma_3$ para algum $w \in P_4(\mathbb{S}^2)$. Além disso,

$$\gamma^2 = w(\sigma_1\sigma_3w\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1})\sigma_1^2\sigma_3^2. \quad (2.6)$$

Agora, de acordo com o Teorema 2.3.1, $P_4(\mathbb{S}^2)$ é gerado pelos elementos $A_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 4$ e, entre outras relações, tem-se

$$(i) \quad A_{1,4}A_{2,4}A_{3,4} = 1.$$

$$(ii) \quad A_{1,2}A_{1,3}A_{1,4} = 1.$$

$$(iii) \quad A_{1,2}A_{2,3}A_{2,4} = 1.$$

$$(iv) \quad A_{1,3}A_{2,3}A_{3,4} = 1.$$

em particular

$$\Delta_4 = A_{1,2}(A_{1,3}A_{2,3})(A_{1,4}A_{2,4}A_{3,4}) = A_{1,2}A_{3,4}^{-1}. \quad (2.7)$$

Pode-se escrever $P_4(\mathbb{S}^2)$ como $\langle \Delta_4 \rangle \rtimes F$ (Lema 2.3.10), onde F é grupo livre $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}, P_4) \cong \langle A_{1,4}, A_{2,4} \rangle$. Com isso, o elemento w tem a forma $\Delta_4^\varepsilon v(A_{1,4}, A_{2,4})$, onde $\varepsilon \in \{0, 1\}$ e $v = v(A_{1,4}, A_{2,4})$ é uma palavra reduzida em $\{A_{1,4}, A_{2,4}\}$. Temos:

$$\sigma_1\sigma_3A_{1,4}\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} = A_{3,4}A_{2,3}A_{3,4}^{-1}$$

$$\sigma_1\sigma_3A_{2,4}\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} = A_{3,4}A_{2,3}^{-1}A_{1,3}A_{2,3}A_{3,4}^{-1}$$

ambos pertencentes a $P_4(\mathbb{S}^2)$. Logo, tem a forma $\Delta_4^\varepsilon \cdot \tilde{v}$. Com as relações (i) – (iv), obtemos:

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_3A_{1,4}\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} &= \Delta_4A_{2,4}^{-1}A_{1,4}A_{2,4} \\ \sigma_1\sigma_3A_{2,4}\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} &= \Delta_4A_{2,4}^{-1}A_{1,4}^{-1}A_{2,4}A_{1,4}A_{2,4}.\end{aligned}$$

Da equação 2.6 mais o fato de Δ_4 ser central, obtem-se:

$$\begin{aligned}1 = \gamma^2 &= w(\sigma_1\sigma_3w\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1})\sigma_1^2\sigma_3^2 \\ &= \Delta_4^\varepsilon v(A_{1,4}, A_{2,4}) \cdot (\sigma_1\sigma_3\Delta_4^\varepsilon v(A_{1,4}, A_{2,4})\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1})A_{1,2}A_{3,4} \\ &= v(A_{1,4}, A_{2,4}) \cdot (\sigma_1\sigma_3v(A_{1,4}, A_{2,4})\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1})\Delta_4A_{3,4}^2.\end{aligned}$$

Abelinizando $P_4(\mathbb{S}^2)$ obtemos $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2$, com geradores $\Delta_4, A_{1,4}, A_{2,4}$. Se representarmos por ϕ a projeção $P_4(\mathbb{S}^2) \rightarrow P_4(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(P_4(\mathbb{S}^2))$ então, $\phi(w) = \Delta_4^\varepsilon \cdot A_{1,4}^{m_1}A_{2,4}^{m_2}$. Abelinizando a igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}1 &= \gamma^2 \\ &= A_{1,4}^{m_1}A_{2,4}^{m_2} \cdot (\Delta_4A_{2,4}^{-1}A_{1,4}A_{2,4})^{m_1}(\Delta_4A_{2,4}^{-1}A_{1,4}^{-1}A_{2,4}A_{1,4}A_{2,4})^{m_2} \cdot \\ &\quad \cdot \Delta_4(A_{1,4}A_{2,4})^{-2} \\ &= A_{1,4}^{m_1}A_{2,4}^{m_2} \cdot (\Delta_4A_{1,4})^{m_1}(\Delta_4A_{2,4})^{m_2} \cdot \Delta_4A_{1,4}^{-2}A_{2,4}^{-2} \\ &= \Delta_4^{m_1+m_2+1}A_{1,4}^{2m_1-2}A_{2,4}^{2m_2-2}\end{aligned}$$

e assim, obrigatoriamente $2m_i - 2 = 0$ para $i = 1, 2$ e, $\Delta_4^{m_1+m_2+1} = 0$ (em $P_4(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(P_4(\mathbb{S}^2))$). Porém, este conjunto de condições sobre os coeficientes m_1 e m_2 implica que $\Delta_4 = 0$, uma contradição.

As contradições surgiram do fato de supormos que $\alpha \notin P_n(\mathbb{S}^2)$. Portanto, se a n -trança α tem ordem igual a 2, então ela deve ser uma trança pura, e conseqüentemente, deve ser igual a Δ_n . \square

Lema 2.3.10. $P_4(\mathbb{S}^2) \cong \langle \Delta_4 \rangle \rtimes F$, onde F representa o grupo livre de posto 2 e base $\{A_{1,4}, A_{2,4}\}$.

Demonstração. Temos a sequência exata

$$1 \longrightarrow A'_n \xrightarrow{i'} P_4 \xrightarrow{j'} P_3 \longrightarrow 1$$

onde A'_4 é o grupo com geradores $A_{i,j}$ sujeitos a única relação $A_{1,4}A_{2,4}A_{3,4} = 1$. Assim, A'_4 é livre de posto 2 com base $\{A_{1,4}, A_{2,4}\}$ (já sabíamos que A_4 é livre de posto 2, a única diferença aqui são os geradores). Agora, $P_3 = \{1, \Delta_3\}$ e, o elemento Δ_4 tem ordem 2 em P_4 . Se definirmos $s : P_3 \rightarrow P_4$ pondo $s(\Delta_3) = \Delta_4$ teremos que a sequência acima cinde. □

Estrutura dos grupos $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$

Neste capítulo apresentaremos os resultados contidos em [10]. Primeiramente iremos expor uma apresentação para os grupos $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ e certos quocientes. Em seguida, serão apresentados alguns resultados concernindo a existência ou não de uma secção geométrica ou algébrica para a fibração generalizada de Fadell-Neuwirth.

3.1 Apresentação de $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ e certos quocientes

As ferramentas utilizadas no cálculo de uma apresentação dos grupos $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$, onde $n, m \geq 1$, são a seqüência generalizada de Fadell-Neuwirth e o método de obtenção de uma apresentação de uma extensão de grupos. Entretanto, alguns casos particulares devem ser analisados separadamente pois, como vimos, a seqüência (2.5) com $M = \mathbb{S}^2$ só é válida quando $n \geq 3$ e $m \geq 1$.

Iniciamos analisando o caso mais simples onde $n = m = 1$. Observe que $D_{1,1}(\mathbb{S}^2) = F_2(\mathbb{S}^2)$ pois $S_1 \times S_1$ é trivial. Logo, $B_{1,1}(\mathbb{S}^2)$ é trivial.

A próxima possibilidade é $n = 2$ e $m = 1$. A seqüência (2.2) com $H = S_2 \times S_1$, dá origem a seqüência exata curta

$$1 \longrightarrow \underbrace{P_3(\mathbb{S}^2)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{(q_H)^*} B_{2,1}(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\pi_H} \underbrace{S_2 \times S_1}_{\cong \mathbb{Z}_2} \longrightarrow 1$$

Imediatamente, constata-se que $B_{2,1}(\mathbb{S}^2)$ deve ter ordem igual a 4. Temos duas possibilidades: $B_{2,1}(\mathbb{S}^2)$ é isomorfo ao grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ou é isomorfo ao grupo cíclico de ordem 4. Vamos excluir a primeira delas. Foi mostrado no Teorema 2.3.6, que o único elemento de ordem 2 no grupo de 3-tranças da esfera, é a trança full-twist Δ_3 . Logo, se ocorresse a primeira possibilidade, todo elemento diferente da identidade em $B_{2,1}(\mathbb{S}^2)$ teria ordem 2, ou seja, existiriam 3 elementos distintos de ordem dois em $B_3(\mathbb{S}^2)$, contradizendo a unicidade de Δ_3 . Portanto, $B_{2,1}(\mathbb{S}^2)$ é cíclico de ordem 4 gerado pela trança σ_1 visto que $o(\sigma_1) = 4$ e $\pi(\sigma_1) = s_1 \in S_2 \times S_1$.

A última configuração a ser analisada separadamente é o caso $n = m = 2$. Olhando para a sequência 2.2 com $H = S_2 \times S_2$, ficamos com a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_4(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{(q_H)^*} B_{2,2}(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\pi_H} S_2 \times S_2 \longrightarrow 1$$

Teorema 3.1.1. *O grupo $B_{2,2}(\mathbb{S}^2)$ tem a seguinte apresentação*

Geradores: $A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3}, A_{1,4}, A_{2,4}, A_{3,4}, \sigma_1, \sigma_3$.

Relações:

$$\begin{aligned} A_{1,2}^{-1} A_{3,4} A_{1,2} &= A_{3,4} \\ A_{1,4}^{-1} A_{2,3} A_{1,4} &= A_{2,3} \\ A_{r,i}^{-1} A_{i,j} A_{r,i} &= A_{r,j} A_{i,j} A_{r,j}^{-1} \quad \text{se } r < s < j \\ A_{i,s}^{-1} A_{i,j} A_{i,s} &= A_{i,j} A_{s,j} A_{i,j} A_{s,j}^{-1} A_{i,j}^{-1} \quad \text{se } i < s < j \\ A_{1,3}^{-1} A_{2,4} A_{1,3} &= A_{1,4} A_{3,4} A_{1,4}^{-1} A_{3,4}^{-1} A_{2,4} A_{3,4} A_{1,4} A_{3,4}^{-1} A_{1,4}^{-1} \\ A_{1,4} A_{2,4} A_{3,4} &= 1 \\ \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_1 &= \sigma_3 \\ \sigma_i^2 &= A_{i,i+1} \\ \sigma_k^{-1} A_{i,i+1} \sigma_k &= A_{i,i+1} \quad \text{se } k, i \in \{1, 3\} \\ \sigma_1^{-1} A_{1,j} \sigma_1 &= A_{1,j} A_{2,j} A_{1,j}^{-1} \quad \text{se } j = 3, 4 \\ \sigma_1^{-1} A_{2,j} \sigma_1 &= A_{1,j} \quad \text{se } j = 3, 4 \\ \sigma_3^{-1} A_{i,3} \sigma_3 &= A_{3,4}^{-1} A_{i,4} A_{3,4} \quad \text{se } i = 1, 2 \\ \sigma_3^{-1} A_{i,4} \sigma_3 &= A_{i,3} \quad \text{se } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Demonstração. A prova é uma aplicação direta do Teorema 1.1.1. \square

Para o caso geral, isto é, $n \geq 3$ e $m \geq 1$, temos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}) \xrightarrow{\eta_*} B_{n,m}(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{p_*} B_n(\mathbb{S}^2) \longrightarrow 1 \quad (3.1)$$

ou seja, $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ é uma extensão de $B_n(\mathbb{S}^2)$ por $B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\})$. A fim de aplicar o método exposto no primeiro capítulo, devemos conhecer uma apresentação para os demais grupos presentes na sequência acima, ou seja, resta obter uma apresentação para $B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_m\})$.

Inicialmente, seja $\beta_{n,m}$ o núcleo do homomorfismo p_* . Agora, o grupo de tranças puras $P_{n+m}(\mathbb{S}^2)$ pode ser considerado como um subgrupo de $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ via o homomorfismo induzido pelo recobrimento $q_H : F_{n+m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_{n,m}(\mathbb{S}^2) = F_{n+m}(\mathbb{S}^2)/S_n \times S_m$, ponha $\Pi_{n,m} = \beta_{n,m} \cap P_{n+m}(\mathbb{S}^2)$.

Temos, $\beta_{n,m} \cong B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\})$ enquanto que, $\Pi_{n,m} \cong P_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\})$. Da sequência exata 2.3, aplicada a superfície $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$, obtemos que $\beta_{n,m}$ é uma extensão de S_m por $\Pi_{n,m}$. Logo, devemos obter uma apresentação para o grupo $\Pi_{n,m}$.

Proposição 3.1.1. *Sejam $n \geq 3$ e $m \geq 1$. O grupo*

$$\Pi_{n,m} = P_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\})$$

tem apresentação dada por:

Geradores: $A_{i,j}$, onde $1 \leq i < j$ e $j \in \{n+1, \dots, n+m\}$.

Relações: para $n+1 \leq j \leq n+m$,

$$\left(\prod_{i=1}^{j-1} A_{i,j} \right) \left(\prod_{k=j+1}^{n+m} A_{j,k} \right) = 1 \quad (3.2)$$

e, para $n+1 \leq j < l \leq n+m$, $1 \leq i < j$ e $1 \leq k < l$, valem as seguintes relações

$$A_{i,j}^{-1} A_{k,l} A_{i,j} = A_{k,l} \text{ se } k < i \text{ ou } k > j$$

$$A_{i,j}^{-1} A_{i,l} A_{i,j} = A_{i,l} A_{j,l} A_{i,l} A_{j,l}^{-1} A_{i,l}^{-1}$$

$$A_{i,j}^{-1} A_{k,l} A_{i,j} = A_{i,l} A_{j,l} A_{i,l}^{-1} A_{j,l}^{-1} A_{k,l} A_{j,l} A_{i,l} A_{j,l}^{-1} A_{j,l}^{-1} \text{ se } i < k < j$$

$$A_{i,j}^{-1} A_{j,l} A_{i,j} = A_{i,l} A_{j,l} A_{i,l}^{-1}$$

Demonstração. Se $m = 1$, então $\Pi_{n,1} = P_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\})$ é gerado pelos elementos $A_{1,n+1}, \dots, A_{n,n+1}$ e vale a única relação :

$$A_{1,n+1} \cdots A_{n,n+1} = 1$$

ou seja, a proposição é válida quando $m = 1$.

Agora, seja $m = 2$. Considere a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \Pi_{n+1,1} \longrightarrow \Pi_{n,2} \xrightarrow{p_*} \Pi_{n,1} \longrightarrow 1$$

onde p_* é igual a restrição do homomorfismo induzido pela fibração de Fadell-Neuwirth

$$F_{n+2}(\mathbb{S}^2) \rightarrow F_{n+1}(\mathbb{S}^2)$$

ao subgrupo $\Pi_{n,2}$.

De acordo com o Teorema 1.1.1, $\Pi_{n,2}$ é gerado por $A_{i,j}$, onde $1 \leq i < j$ e $j \in \{n+1, n+2\}$. Quanto as relações, o primeiro conjunto de relações consiste das relações provenientes de $\Pi_{n+2,1}$, resumidas a única relação $A_{1,n+2} \cdots A_{n+1,n+2} = 1$. Da apresentação de $B_{n+2}(\mathbb{S}^2)$, obtém-se a igualdade

$$A_{1,n+1} \cdots A_{n,n+1} = \sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_n = \sigma_{n+1}^{-2} = A_{n+1,n+2}^{-1}.$$

Dessa forma, a única relação $A_{1,n+1} \cdots A_{n,n+1} A_{n+1,n+2} = 1$ consiste do segundo conjunto de relações. Para o último, devemos calcular as conjugações $A_{i,n+1}^{-1} A_{k,n+2} A_{i,n+1}$, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq k \leq n+2$. Entretanto, estes cálculos já estão listados no Teorema 2.3.1. Portanto, a apresentação para o grupo $\Pi_{n,2}$ coincide com a apresentação enunciada na proposição.

O caso geral segue a mesma linha de raciocínio pois, deve-se considerar a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \Pi_{n+m,1} \longrightarrow \Pi_{n,m+1} \xrightarrow{p_*} \Pi_{n,m} \longrightarrow 1$$

que surge da restrição do homomorfismo induzido pela fibração de Fadell-Neuwirth

$$F_{n+m+1}(\mathbb{S}^2) \rightarrow F_{n+m}(\mathbb{S}^2)$$

ao subgrupo $\Pi_{n,m+1} = P_{m+1}(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}) \subseteq P_{n+m+1}(\mathbb{S}^2)$. \square

Proposição 3.1.2. *Seja $n \geq 3$ e $m \geq 1$. Então, o seguinte constitui uma apresentação de $\beta_{n,m} = B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}) \subseteq B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$:*

Geradores: $A_{i,j}$, com $1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq n+m$, e $\tilde{\sigma}_r := \sigma_{n+r}$, $1 \leq r \leq m-1$.

Relações: Para $1 \leq i, k \leq n$, $n+1 \leq j < l \leq n+m$, mas $n+1 \leq j \leq n+m$ quando não tivermos o índice l e $1 \leq r, s \leq m-1$:

$$A_{i,j}^{-1} A_{k,l} A_{i,j} = A_{k,l} \quad \text{se } k < i \quad (3.3)$$

$$A_{i,j}^{-1} A_{i,l} A_{i,j} = A_{i,l} A_{j,l} A_{i,l} A_{j,l}^{-1} A_{i,l}^{-1} \quad (3.4)$$

$$A_{i,j}^{-1} A_{k,l} A_{i,j} = A_{i,l} A_{j,l} A_{i,l}^{-1} A_{j,l}^{-1} A_{k,l} A_{j,l} A_{i,l} A_{j,l}^{-1} A_{j,l}^{-1} \quad (3.5)$$

se $i < k$

$$A_{i,j}^{-1} A_{j,l} A_{i,j} = A_{i,l} A_{j,l} A_{i,l}^{-1} \quad (3.6)$$

$$\left(\prod_{i=1}^n A_{i,n+m} \right)^{-1} = \tilde{\sigma}_{m-1} \dots \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{m-1} \quad (3.7)$$

$$\tilde{\sigma}_r \tilde{\sigma}_s = \tilde{\sigma}_s \tilde{\sigma}_r \quad \text{se } |r-s| \geq 2 \quad (3.8)$$

$$\tilde{\sigma}_r \tilde{\sigma}_{r+1} \tilde{\sigma}_r = \tilde{\sigma}_{r+1} \tilde{\sigma}_r \tilde{\sigma}_{r+1} \quad (3.9)$$

$$\tilde{\sigma}_r^{-1} A_{i,j} \tilde{\sigma}_r = A_{i,j} \quad \text{se } r \neq j-n-1, j-n \quad (3.10)$$

$$\tilde{\sigma}_{j-n} A_{i,j} \tilde{\sigma}_{j-n}^{-1} = A_{i,j+1} \quad \text{se } n+1 \leq j \leq n+m-1 \quad (3.11)$$

Nas relações acima, o elemento $A_{i,j}$, $n+1 \leq i < j \leq n+m$, deve ser escrito como

$$\tilde{\sigma}_{j-n-1} \dots \tilde{\sigma}_{i-n+1} \tilde{\sigma}_{i-n} \tilde{\sigma}_{i-n}^{-1} \tilde{\sigma}_{i-n+1}^{-1} \dots \tilde{\sigma}_{j-n-1}^{-1} \quad (3.12)$$

Demonstração. Nosso trabalho se resume em aplicar o Teorema 1.1.1 à sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \Pi_{n,m} \longrightarrow \beta_{n,m} \xrightarrow{\pi} S_m \longrightarrow 1$$

Assim, $\beta_{n,m}$ é gerado pelos elementos $A_{i,j}$, $1 \leq i < j$, $j \in \{n+1, \dots, n+m\}$, mais um conjunto de representantes de $\beta_{n,m}/\Pi_{n,m}$. Como a imagem do elemento $\tilde{\sigma}_r$ pelo homomorfismo π é igual a transposição $s_r = (r \ r+1)$, podemos escolher os elementos $\tilde{\sigma}_r = \sigma_{n+r}$ a fim de completar o conjunto de geradores. Agora, lembre que, para $n+1 \leq i < j \leq n+m$

temos a igualdade:

$$A_{i,j} = \tilde{\sigma}_{j-n-1} \cdots \tilde{\sigma}_{i-n+1} \tilde{\sigma}_{i-n} \tilde{\sigma}_{i-n}^{-1} \tilde{\sigma}_{i-n+1}^{-1} \cdots \tilde{\sigma}_{j-n-1}^{-1}$$

donde obtemos as relação descritas em (3.12). Com isso, o conjunto de geradores se resume ao conjunto $\{A_{i,j}, \tilde{\sigma}_r \mid 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m, 1 \leq r \leq m-1\}$, conforme afirmado no enunciado da proposição.

As três classes de relações em $\beta_{n,m}$ são obtidas como segue: a primeira provém das relações contidas em $\Pi_{n,m}$, descritas na proposição 3.1.1. Como no parágrafo acima foi observado uma relação entre os geradores $A_{i,j}$ e $\tilde{\sigma}_r$, no decorrer da demonstração tentaremos descartar algumas das relações contidas em $\Pi_{n,m}$.

Para a segunda classe de relações, devemos escrever cada relação em S_m , substituindo cada s_r por $\tilde{\sigma}_r$, em função dos geradores do núcleo $\Pi_{n,m}$. As relações (3.9) e (310) são facilmente obtidas por meio da apresentação de $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$ e da terceira relação em S_m , obtém-se a igualdade $\tilde{\sigma}_r^2 = A_{n+r, n+r+1}$ que é um caso especial da relação (3.13).

Enquanto que, para a terceira classe de relações, devemos calcular os conjugados $\tilde{\sigma}_r^{\mp 1} A_{i,j} \tilde{\sigma}_r^{\pm 1}$, $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m, 1 \leq r \leq m-1$. Temos:

$$\tilde{\sigma}_r^{-1} A_{i,j} \tilde{\sigma}_r = \begin{cases} A_{i,j} & \text{se } r < j - n - 1 \\ A_{i,j-1} & \text{se } r = j - n - 1 \\ A_{j,j+1}^{-1} A_{i,j+1} A_{j,j+1} & \text{se } r = j - n \\ A_{i,j} & \text{se } r > j - n \end{cases}$$

por outro lado

$$\tilde{\sigma}_r A_{i,j} \tilde{\sigma}_r^{-1} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{se } r < j - n - 1 \\ A_{j-1,j} A_{i,j-1} A_{j-1,j}^{-1} & \text{se } r = j - n - 1 \\ A_{i,j+1} & \text{se } r = j - n \\ A_{i,j} & \text{se } r > j - n \end{cases}$$

donde extraímos a relação (3.10). Perceba agora que, para $r \in \{j-n-1, j-n\}$ as quatro relações resultantes são duas a duas equivalentes. Assim, basta listar apenas a relação (3.11).

Da comutatividade entre $\tilde{\sigma}_r$ e $A_{i,j}$ quando $r \neq j-n-1, j-n$, podemos descartar a

relação $A_{i,j} \equiv A_{k,l}$ se $1 \leq i < j < k$, $n+1 \leq j < l \leq n+m$.

Por fim, pela relação (3.11), para $n+1 \leq j \leq n+m-1$, tem-se:

$$\tilde{\sigma}_{j-n} \left(\prod_{i=1}^{j-1} A_{i,j} \right) \tilde{\sigma}_{j-n}^{-1} = \prod_{i=1}^{j-1} A_{i,j+1}.$$

Mais ainda, para $k \geq j+1$, usando a apresentação de $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$, obtemos

$$\tilde{\sigma}_{j-n} A_{j,k} \tilde{\sigma}_{j-n}^{-1} = A_{j+1,k}.$$

Logo, para $n+1 \leq j \leq n+m-1$

$$\tilde{\sigma}_{j-n} \left(\prod_{i=1}^{j-1} A_{i,j} \right) \left(\prod_{k=j+1}^{n+m} A_{j,k} \right) \tilde{\sigma}_{j-n}^{-1} = \left(\prod_{i=1}^j A_{i,j+1} \right) \left(\prod_{k=j+2}^{n+m} A_{j+1,k} \right)$$

ou seja, em $\beta_{n,m}$ todas as relações contidas em 3.12 são equivalentes. Para finalizar, tem-se

$$A_{1,n+m} \cdots A_{n,n+m} \cdots A_{n+m-1,n+m} = \left(\prod_{i=1}^n A_{i,n+m} \right) \sigma_{m-1} \cdots \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_1 \cdots \sigma_{m-1}$$

o que encerra a demonstração. □

Corolário 3.1.1. *Sejam $n \geq 3$ e $m \geq 1$. Então, a abelinização de $\beta_{n,m} = B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\})$ tem apresentação dada por:*

Geradores: $\rho_1, \dots, \rho_n, \sigma$.

Relações:

$$\begin{aligned} \rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i \quad \text{se } 1 \leq i, j \leq n \\ \rho_i \sigma &= \sigma \rho_i \quad \text{se } 1 \leq j \leq n \\ \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \sigma^{2(m-1)} &= 1. \end{aligned}$$

Assim, $B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}) / \Gamma_2(B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}))$ é abeliano livre com base $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \sigma$.

Demonstração. Seja $\psi : \beta_{n,m} \rightarrow \beta_{n,m} / \Gamma_2(\beta_{n,m})$ o homomorfismo canônico. De acordo com o exemplo 1.1.1, a abelinização de $\beta_{n,m}$ é gerada pelos elementos $\psi(A_{i,j})$, $1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq n+m$ e $\psi(\tilde{\sigma}_r)$, $1 \leq r \leq m-1$. Continuam válidas as mesmas relações

de $\beta_{n,m}$ adicionando-se apenas a comutatividade entre os geradores. Se aplicarmos a comutatividade entre os geradores $\psi(A_{i,j})$ e $\psi(A_{k,l})$ nas relações (3.3)-(3.7) não obtemos nenhuma informação relevante. Por sua vez, usando a comutatividade entre $\psi(\tilde{\sigma}_{j-n})$ e $\psi(A_{i,j})$ na relação (3.13), concluímos que $\psi(A_{i,n+1}) = \dots = \psi(A_{i,n+m})$ para todo $i = 1, \dots, n$. Denote por $\rho_i = \psi(A_{i,n+1})$. Ao aplicarmos a comutatividade entre os geradores $\psi(\tilde{\sigma}_r)$ e $\psi(\tilde{\sigma}_{r+1})$ na relação (3.10), chegamos a igualdade $\psi(\tilde{\sigma}_1) = \dots = \psi(\tilde{\sigma}_{m-1})$. Denote por σ o elemento $\psi(\tilde{\sigma}_1)$. Com estas observações obtemos o conjunto de geradores dado no enunciado do corolário. Sendo o grupo $\beta_{n,m}/\Gamma_2(\beta_{n,m})$ abeliano, obviamente seus geradores comutam. Para obtermos a última relação, basta aplicar a comutatividade na relação (3.7). \square

Teorema 3.1.2. *Sejam $n \geq 3$ e $m \geq 1$. Então, o seguinte constitui uma apresentação para o grupo $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$:*

Geradores: $A_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq n+m$, $\tilde{\sigma}_r$, $1 \leq r \leq m-1$, τ_p , $1 \leq p \leq n-1$.

Relações: para $1 \leq i, k \leq n$, $n+1 \leq j < l \leq n+m$, mas $n+1 \leq j \leq n+m$ quando não tivermos o índice l , $1 \leq r, s \leq m-1$, e $1 \leq p, q \leq n-1$, as relações (3.3)-(3.12) da Proposição 3.1.2 são válidas, em adição tem-se:

$$\begin{aligned} \tau_p \tau_q &= \tau_q \tau_p \quad \text{se } |p - q| \geq 2 \\ \tau_p \tau_{p+1} \tau_p &= \tau_{p+1} \tau_p \tau_{p+1} \\ \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \left(\prod_{k=n+1}^{n+m} A_{n,k} \right) &= 1 \\ \tilde{\sigma}_r \tau_p &= \tilde{\sigma}_r \tau_p \\ \tau_p^{-1} A_{i,j} \tau_p &= A_{i,j} \quad \text{se } p \neq i-1, i \\ \tau_p A_{p,j} \tau_p^{-1} &= A_{p+1,j} \\ \tau_p^{-1} A_{p,j} \tau_p &= A_{p,j} A_{p+1,j} A_{p,j}^{-1} \end{aligned}$$

Demonstração. Tudo o que temos a fazer é aplicar o Teorema 1.1.1 à sequência (3.1). Sabemos que $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$ é gerado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+m-1}$, e, todos estes elementos, exceto σ_n , pertencem ao grupo $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$. Note que a imagem por p_* dos $n-1$ primeiros geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ é igual a $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \in B_n(\mathbb{S}^2)$, respectivamente. Por esta razão, denote por τ_i o elemento $\sigma_i \in B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$, com $i = 1, \dots, n-1$.

Logo, o grupo $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ é gerado pelo conjunto $\{A_{i,j}, \tilde{\sigma}_r := \sigma_{n+r}, \tau_p \mid 1 \leq i \leq n, n+1 \leq$

$j \leq n + m, 1 \leq r \leq m - 1, 1 \leq p \leq n - 1\}$.

As relações de $\beta_{n,m}$ são carregadas diretamente ao grupo $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$, obtendo assim as relações (3.3)-(3.12). Para a segunda classe de relações, da apresentação de $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$ tiramos que τ_p e τ_q comutam se $|p-q| \geq 2$ e, $\tau_p\tau_{p+1}\tau_p = \tau_{p+1}\tau_p\tau_{p+1}$. A fim de completarmos a segunda classe de relações, devemos escrever o elemento $\tau_{n-1} \dots \tau_2\tau_1^2\tau_2 \dots \tau_{n-1}$ como uma palavra nos geradores do núcleo $\beta_{n,m}$. Temos:

$$\tau_{n-1} \dots \tau_2\tau_1^2\tau_2 \dots \tau_{n-1} = A_{1,n} \dots A_{n-1,n} = \left(\prod_{k=n+1}^{n+m} A_{n,k} \right)^{-1}$$

onde a última igualdade decorre da relação (3.2) da proposição 3.1.1.

Para concluirmos a demonstração, devemos calcular as conjugações $\tau_p^{\mp 1}\tilde{\sigma}_r\tau_p^{\pm 1}$ e $\tau_p^{\mp 1}A_{i,j}\tau_p^{\pm 1}$. Mais uma vez, das relações em $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$, concluímos que os geradores τ_p e $\tilde{\sigma}_r$ comutam e ainda, tem-se:

$$\tau_p^{-1}A_{i,j}\tau_p = \begin{cases} A_{i,j} & \text{se } p < i - 1 \\ A_{i-1,j} & \text{se } p = i - 1 \\ A_{i,j}A_{i+1,j}A_{i,j}^{-1} & \text{se } p = i \\ A_{i,j} & \text{se } p > i \end{cases}$$

por outro lado

$$\tau_p A_{i,j}\tau_p^{-1} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{se } p < i - 1 \\ A_{i,j}^{-1}A_{i-1,j}A_{i,j} & \text{se } p = i - 1 \\ A_{i+1,j} & \text{se } p = i \\ A_{i,j} & \text{se } p > i \end{cases}$$

Logo, τ_p e $A_{i,j}$ comutam se $p \notin \{i - 1, i\}$. Agora, note que é necessário apenas listar as duas relações com $p = i$ pois, as demais podem ser deduzidas a partir destas. \square

Seja $H_{n,m} = \Gamma_2(\beta_{n,m})$. Pelo Lema 1.4.2, $H_{n,m}$ é normal em $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$, visto que $\beta_{n,m}$ é igual ao núcleo do homomorfismo $p_* : B_{n,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_n(\mathbb{S}^2)$. O homomorfismo p_* induz um homomorfismo \widehat{p}_* entre os grupos $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m}$ e $B_n(\mathbb{S}^2)$, cuja imagem coincide com a de p_* e o núcleo é igual ao quociente $\beta_{n,m}/H_{n,m}$. Em suma, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \beta_{n,m} & \hookrightarrow & B_{n,m}(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{p^*} & B_n(\mathbb{S}^2) \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \parallel \\
1 & \longrightarrow & \beta_{n,m}/H_{n,m} & \hookrightarrow & B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m} & \xrightarrow{\widehat{p}^*} & B_n(\mathbb{S}^2) \longrightarrow 1
\end{array} \tag{3.13}$$

onde ϕ é o homomorfismo quociente. Das observações acima a respeito da imagem e o núcleo de \widehat{p}^* , concluímos que a linha inferior é exata. Estamos então nas hipóteses do Teorema 1.1.1.

Proposição 3.1.3. *Sejam $n \geq 3$ e $m \geq 1$. Então, $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m}$ tem apresentação dada por:*

Geradores: ρ_i , $1 \leq i \leq n$, σ , τ_k , $1 \leq k \leq n-1$.

Relações: para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k, l \leq n-1$

$$\begin{aligned}
\sigma \rho_i \sigma^{-1} &= \rho_i \\
\rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i \text{ para todos } 1 \leq i, j \leq n \\
\rho_1 \cdots \rho_n \sigma^{2(m-1)} &= 1 \\
\tau_k \tau_l &= \tau_l \tau_k \text{ se } |l - k| \geq 2 \\
\tau_k \tau_{k+1} \tau_k &= \tau_{n+1} \tau_k \tau_{k+1} \text{ se } 1 \leq k \leq n-2 \\
\tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \rho_n^m &= 1 \\
\tau_k \sigma \tau_k^{-1} &= \sigma \\
\tau_k \rho_i \tau_k^{-1} &= \rho_i \text{ se } k \neq i, i+1 \\
\tau_{k-1} \rho_k \tau_{k-1}^{-1} &= \rho_{k-1} \\
\tau_{k-1}^{-1} \rho_k \tau_{k-1} &= \rho_{k-1}
\end{aligned}$$

Em particular, as relações

$$\begin{aligned}
\rho_{k+1} \tau_k &= \tau_k \rho_k \\
\rho_k \tau_k &= \tau_k \rho_{k+1}
\end{aligned}$$

são válidas em $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m}$.

Demonstração. Inicialmente lembre que $\rho_i = \psi(A_{i,j})$, $j = n+1, \dots, n+m$, e $\sigma = \psi(\tilde{\sigma}_r)$, $r = 1, \dots, m-1$. Tem-se $\widehat{p}_*(H_{n,m} \cdot \tau_i) = \tau_i \in B_n(\mathbb{S}^2)$ assim, se denotarmos por τ_i a classe lateral à direita $H_{n,m} \cdot \tau_i$, obtemos o conjunto de geradores.

As primeiras três relações listadas acima consistem das relações do núcleo $\beta_{n,m}/H_{n,m}$. Para o segundo tipo de relações, note que, se $|k-l| \geq 2$, então:

$$\begin{aligned} \tau_k \tau_l &= (H_{n,m} \cdot \tau_k)(H_{n,m} \cdot \tau_l) \\ &= H_{n,m} \cdot (\tau_k \tau_l) \\ &= H_{n,m} \cdot (\tau_l \tau_k) \\ &= (H_{n,m} \cdot \tau_l)(H_{n,m} \cdot \tau_k) \\ &= \tau_l \tau_k \end{aligned}$$

e, com o mesmo raciocínio, $\tau_k \tau_{k+1} \tau_k = \tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1}$ se $k = 1, \dots, n-2$. Para a última relação proveniente de $B_n(\mathbb{S}^2)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} &= H_{n,m} \cdot (\tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1}) \\ &= H_{n,m} \cdot (A_{n,n+m}^{-1} \cdots A_{n,n+1}^{-1}) \\ &= \rho_n^{-m}. \end{aligned}$$

Por fim, devemos calcular as conjugações $\tau_k^{\pm 1} \sigma \tau_k^{\mp 1}$ e $\tau_k^{\pm 1} \rho_i \tau_k^{\mp 1}$. A primeira delas é simples pois τ_k e $\tilde{\sigma}_r$ comutam em $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$, implicando na comutatividade entre os geradores τ_k e σ . Enquanto que, para o segundo tipo de conjugações, na demonstração da Proposição 3.1.2, foram calculados os valores de $\tau_k^{\pm 1} A_{i,j} \tau_k^{\mp 1}$, projetando os resultados lá obtidos em $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m}$, obtemos a comutatividade entre τ_k e ρ_i se $k \neq i-1, i$. Naquela ocasião, foi visto também que o par de igualdades $\tau_k A_{k,j} \tau_k^{-1} = A_{k+1,j}$, $\tau_k^{-1} A_{k,j} \tau_k = A_{k,j} A_{k+1,j} A_{k,j}^{-1}$ eram suficientes para descrever as demais conjugações. Logo, é suficiente calcular $\tau_k^{\mp 1} \rho_k \tau_k^{\pm 1}$. Projetando no quociente as igualdades dadas acima, obtemos $\tau_k \rho_k \tau_k^{-1} = \rho_{k+1}$ e $\tau_k^{-1} \rho_k \tau_k = \rho_k$. \square

3.2 Existência de secção geométrica para a fibração de Fadell-Neuwirth generalizada

Para finalizar nosso trabalho, estudaremos a existência de uma secção geométrica para a fibração $D_{n,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_n(\mathbb{S}^2)$ bem como a existência de uma secção algébrica. Uma motivação para tal estudo provém da fibração $F_m(\mathbb{S}^2) \rightarrow F_n(\mathbb{S}^2)$, no qual tem-se uma resposta completa, vide [5].

Seja $n = 1$. Neste caso, $B_1(\mathbb{S}^2) = \{1\}$ e a existência de uma secção algébrica é trivial. No âmbito geométrico, se m também for igual a um, então basta definir a aplicação $s : D_1(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_{1,1}(\mathbb{S}^2) = F_2(\mathbb{S}^2)$ pondo $s(x) = (x, -x)$. Se $m \geq 2$ então, não existe secção geométrica. De fato, suponha que existisse, pelo Corolário 1.3.1, teríamos :

$$\begin{aligned} \pi_2(D_{1,m}(\mathbb{S}^2)) &\cong \pi_2(D_1(\mathbb{S}^2)) \oplus \pi_2(D_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1\})) \\ &\cong \pi_2(\mathbb{S}^2) \oplus \pi_2(D_m(\mathbb{E}^2)) \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \pi_2(D_m(\mathbb{E}^2)). \end{aligned}$$

Como $m + 1 \geq 3$, o segundo grupo de homotopia do espaço $D_{1,m}(\mathbb{S}^2)$ é trivial (Lema 2.1.3). O mesmo ocorre com $D_m(\mathbb{E}^2)$. Logo, a existência de uma secção geométrica nos leva a uma contradição.

Teorema 3.2.1. (i) A fibração $p : D_{1,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_1(\mathbb{S}^2)$ admite uma secção geométrica se, e somente se, $m = 1$.

(ii) A fibração $p : D_{1,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_1(\mathbb{S}^2)$ sempre admite uma secção algébrica.

Vamos agora para o caso $n = 2$. Suponha que exista uma secção algébrica s_* para a fibração $p : D_{2,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_2(\mathbb{S}^2)$. Recorde que o grupo de 2-tranças na esfera é cíclico de ordem 2 gerado pela trança σ_1 . Como s_* é injetora, o elemento $s_*(\sigma_1)$ tem ordem 2 em $B_{2,m}(\mathbb{S}^2)$, e assim, deve-se ter $s_*(\sigma_1) = \Delta_{2+m}$. Considerando o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} P_{2+m}(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{p'_*} & P_2(\mathbb{S}^2) \\ (qs_2 \times s_m)_* \downarrow & & \downarrow q_* \\ B_{2,m}(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{p_*} & B_2(\mathbb{S}^2) \end{array}$$

onde p' representa a fibração de Fadell-Neuwirth, temos:

$$\begin{aligned}
p_*(\Delta_{2+m}) &= p_*((q_{S_2 \times S_m})_* \Delta_{2+m}) \\
&= q_*(p'_*(\Delta_{2+m})) \\
&= q_*(p'_*(A_{1,2}(A_{1,3}A_{2,3}) \cdots (A_{1,n} \cdots A_{n-1,n}))) \\
&= q_*(\Delta_2) = \Delta_2 = 1,
\end{aligned}$$

o que por sua vez, implica que $\sigma_1 = p_*(s_*(\sigma_1)) = 1$, uma contradição.

Teorema 3.2.2. *A fibração $p : D_{2,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_2(\mathbb{S}^2)$ não admite secção geométrica.*

Demonstração. A existência de uma secção geométrica implicaria na existência de uma secção algébrica, contradizendo o que acabamos de mostrar no parágrafo acima. \square

Proposição 3.2.1. *Sejam $d_0 = 3q_0 + \varepsilon_0, d_1 = 6q_1 + \varepsilon_1, \dots, d_s = 6q_s + \varepsilon_s$, onde $q_i \geq 1$, $\varepsilon_i \in \{0, 2\}$ e $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s \in \{0, 2\}$. Então, a fibração $p : D_{3,d_0, \dots, d_s}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_3(\mathbb{S}^2)$ admite uma secção geométrica.*

Demonstração. Dada uma tripla não ordenada $[[x_1, x_2, x_3]] \in D_3(\mathbb{S}^2)$, considere o plano Π determinado por estes pontos e seja $\mathcal{C}_0 = \Pi \cap \mathbb{S}^2$.

Em \mathcal{C}_0 , para cada $1 \leq i \neq j \leq 3$, escolha q_0 pontos igualmente espaçados entre x_i e x_j . Assim, obtemos $3q_0$ pontos na esfera que dependem de maneira contínua de x_1, x_2, x_3 , porém, não dependem da ordem em que estão dispostos.

Seja r_Π a reta normal ao plano Π através do centro P do círculo \mathcal{C} e sejam N_1, N_2 os pontos onde ela intersecta a esfera. Agora, em cada segmento $[P, N_i]$, escolha s pontos igualmente espaçados distintos de P e N_i , digamos, $z_1^{(i)}, \dots, z_s^{(i)}$, tais que :

$$[P, N_i] = [P, z_1^{(i)}] \cup [z_1^{(i)}, z_2^{(i)}] \cup \dots \cup [z_s^{(i)}, N_i]$$

Através de cada ponto $z_j^{(i)}$ considere o plano normal à reta r_Π e seja $\mathcal{C}_j^{(i)}$ o círculo determinado por este plano na esfera. Para cada ponto x_k , existe um segmento de reta (na esfera) contendo os pontos N_1, x_k, N_2 , este segmento por sua vez, determina um ponto $w_{j,k}^{(i)}$ em cada círculo $\mathcal{C}_j^{(i)}$. Assim, em cada círculo $\mathcal{C}_j^{(i)}$ criamos 3 pontos em função de x_1, x_2, x_3 .

Por fim, em cada $\mathcal{C}_j^{(i)}$ escolha $q_j - 1$ pontos igualmente espaçados entre cada par $w_{j,k}^{(i)}, w_{j,l}^{(i)}$, $1 \leq k \neq l \leq 3$. Deste modo, para cada $j = 1, \dots, s$ construímos $6q_j$ pontos

em função de x_1, x_2, x_3 , pois, para cada círculo $\mathcal{C}_j^{(i)}$ foram obtidos $3q_j$ pontos. Para não termos nenhuma escolha dependendo da ordem dos pontos x_1, x_2, x_3 , devemos agrupar os pontos obtidos nos círculos $\mathcal{C}_j^{(1)}$ e $\mathcal{C}_j^{(2)}$ num mesmo bloco.

Quanto aos pontos N_1, N_2 , podemos agrupá-los em qualquer um dos conjuntos de pontos obtidos. \square

Corolário 3.2.1. *Se $m \equiv 0, 2 \pmod{3}$ então a fibração $p : D_{3,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_3(\mathbb{S}^2)$ admite uma secção geométrica.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema acima para o caso $s = 0$. \square

Proposição 3.2.2. *Se $m \equiv 1 \pmod{3}$ então o grupo $B_{3,m}(\mathbb{S}^2)$ não possui nenhum subgrupo isomorfo à $B_3(\mathbb{S}^2)$. Consequentemente, a fibração $p : B_{3,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_3(\mathbb{S}^2)$ não admite uma secção algébrica.*

Demonstração. O inteiro m tem a forma $3q + 1$, onde $q \in \mathbb{N}$. Suponha que $B_{3,m}(\mathbb{S}^2)$ possua um subgrupo finito H isomorfo ao grupo de 3-tranças na esfera. Assim, H é gerado pelos elementos w_1, w_2 , e os geradores estão sujeitos as relações $w_i^4 = (w_1w_2)^6 = 1$ e $w_1w_2w_1 = w_2w_1w_2$. Dessa forma, $w_i^2 = \Delta_{3+m}$. Pelo Teorema de Murasugi (Teorema 2.3.5) cada gerador w_i é conjugado à alguma potência de algum $\alpha_{j(i)}$, $j(i) \in 0, 1, 2$.

Em virtude de w_i ter ordem igual a 4, concluímos que ele é conjugado ao elemento $\alpha_{j(i)}^{\pm(m+3-j(i))/2}$. Com as informações coletadas até o momento, sabemos que $w_i = g_i A_i g_i^{-1}$, onde A_i satisfaz a $A_i^2 = \Delta_{3+m}$.

Substituindo a expressão de w_i na igualdade $w_1w_2w_1 = w_2w_1w_2$ obtemos:

$$g_1 A_1 g_1^{-1} \cdot g_2 A_2 g_2^{-1} \cdot g_1 A_1 g_1^{-1} = g_2 A_2 g_2^{-1} \cdot g_1 A_1 g_1^{-1} \cdot g_2 A_2 g_2^{-1}.$$

Ponha $h = g_1^{-1} g_2$ e conjugue por g_1 a igualdade acima, resultando em:

$$\begin{aligned} 1 &= h A_2 h^{-1} \cdot A_1 \cdot h A_2 h^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot h A_2^{-1} h^{-1} \cdot A_1^{-1} \\ &= [h, A_2] \cdot A_2 A_1^{-1} \cdot A_2^2 \cdot h A_2 h^{-1} A_2^{-1} \cdot A_2 A_1^{-1} \cdot h A_2 A_2^{-2} \cdot h^{-1} A_2^{-1} \cdot A_2 A_1^{-1} \\ &= [h, A_2] A_2 A_1^{-1} \cdot \Delta_{3+m} \cdot [h, A_2] A_2 A_1^{-1} \cdot h A_2 \cdot \Delta_{3+m}^{-1} \cdot h^{-1} A_2^{-1} \cdot A_2 A_1^{-1} \\ &= [h, A_2] \cdot A_2 A_1^{-1} \cdot \Delta_{3+m} \cdot [h, A_2] A_2 A_1^{-1} \cdot [h, A_2] A_2 A_1^{-1} \cdot \Delta_{3+m} \\ &= \gamma^3 \end{aligned}$$

onde $\gamma = [h, A_2] \cdot A_2 A_1^{-1}$. Assim, temos duas possibilidades, $\gamma = 1$ ou $o(\gamma) = 3$.

(i) Suponha que $\gamma = 1$;

Neste caso tem-se a igualdade $hA_2 = A_1h$ e como consequência:

$$w_1w_2 = g_1A_1g_1^{-1} \cdot g_2A_2g_2^{-1} = g_1A_1 \cdot h \cdot A_2g_2 = \Delta_{3+m}$$

donde $(w_1w_2)^2 = 1$, contradizendo a apresentação de H .

(ii) Suponha que $o(\gamma) = 3$.

Neste caso, γ é um elemento de torção de $B_{3+m}(\mathbb{S}^2)$ sendo assim conjugado ao elemento α_j^k , para algum inteiro k . Como $1 = \gamma^{o(\alpha_j)}$, a ordem de γ divide $o(\alpha_j) = 2(m+3-j) = 6(q+1) + 2(1-j)$, porém, para que isso ocorra, deve-se ter $j = 1$. Após algumas manipulações concluímos que $k = \pm 2(q+1)$.

Seja $\mathbf{es} : B_{3+m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z}_{6(q+1)}$ o homomorfismo definido no capítulo anterior. Sendo $\mathbb{Z}_{6(q+1)}$ abeliano, \mathbf{es} é invariante por conjugações e assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{es}(\gamma) &= \mathbf{es}(\alpha_1^{\pm 2(q+1)}) \\ &= \pm 2(q+1)(3q+4) \\ &= \pm 2(q+1)(3q+4) \\ &= \pm(6(q+1)^2 + 2(q+1)) \\ &\equiv \pm 2(q+1) \pmod{6(q+1)} \end{aligned}$$

em particular, a igualdade acima nos diz que $\mathbf{es}(\gamma)$ é um número par.

Por outro lado, usando a expressão de γ , isto é, $\gamma = [h, A_2]A_2A_1^{-1}$, obtemos $\mathbf{es}(\gamma) = \mathbf{es}(A_2A_1^{-1})$. Vamos calcular o valor de $\mathbf{es}(A_1A_2^{-1})$ em dois casos conforme a paridade do inteiro m .

(a) m é par. Como w_i é conjugado ao elemento $\alpha_j^{\pm(m+3-j)/2}$, o expoente $\pm \frac{m+3-j}{2}$ deve ser um número inteiro, ocorrendo apenas quando $j = 1$. Deste modo, $A_1 = A_2^{\pm 1}$. Se $A_2A_1^{-1} = 1$ então, $\mathbf{es}(\gamma) = \bar{0}$, e assim, $0 \equiv 2(q+1) \pmod{6(q+1)}$, uma contradição. Se $A_2 = A_1^{-1}$, então $A_2A_1^{-1} = A_1^{-2} = \Delta_{3+m}^{-1} = \Delta_{3+m}$ e $\mathbf{es}(\gamma) = (m+2)(m+3)$. Usando o fato do número m ser par, concluímos que $(m+2)(m+3) \equiv (m+2) \pmod{\underbrace{6(q+1)}_{=2(m+2)}}$, donde $\pm 2(q+1) \equiv 3(q+1) \pmod{\underbrace{6(q+1)}_{=2(m+2)}}$, novamente uma contradição.

(b) m é ímpar. Novamente, o fato de $\pm(m+3-j)/2$ ser inteiro, implica que $j = 0, 2$. Assim, $A_i \in \{\alpha_0^{\pm(m+3)/2}, \alpha_2^{\pm(m+1)/2}\}$. Se $A_1 = A_2^{\pm 1}$, então $\mathbf{es}(\gamma) \equiv 0 \pmod{6(q+1)}$, e obtemos novamente uma contradição conforme o caso (a). Suponha que $A_1 = \alpha_0^{\pm(m+3)/2}$ e $A_2 = \alpha_2^{\pm(m+1)/2}$. Como $\mathbf{es}(\alpha_0) = \mathbf{es}(\alpha_2) = m+2$, tem-se:

$$\mathbf{es}(\gamma) = \mathbf{es}(A_2 A_1^{-1}) = \pm(m+2) \left(\frac{(m+1) \pm (m+3)}{2} \right).$$

Mas, sendo m ímpar, o número $\mathbf{es}(\gamma)$ também é ímpar. Uma contradição pois, como havíamos notado anteriormente, $\mathbf{es}(\gamma)$ é um número par.

□

Corolário 3.2.2. *Se $(d_1 + \dots + d_s) \equiv 1 \pmod{3}$, então a fibração $p : D_{3,d_1,\dots,d_s}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_3(\mathbb{S}^2)$ não admite uma secção algébrica.*

Demonstração. Com efeito, se existisse uma secção algébrica, então, o grupo $B_{3,d_1,\dots,d_s}(\mathbb{S}^2)$ teria um subgrupo isomorfo ao grupo de 3-tranças na esfera. Por sua vez, $B_{3,d_1,\dots,d_s}(\mathbb{S}^2)$ pode ser considerado um subgrupo de $B_{3,m}(\mathbb{S}^2)$ via o homomorfismo induzido pela aplicação de recobrimento $D_{3,d_1,\dots,d_s}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_{3,m}(\mathbb{S}^2)$, onde $m = d_1 + \dots + d_s$, contradizendo a proposição acima.

□

Teorema 3.2.3. (i) *A fibração $p : D_{3,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_3(\mathbb{S}^2)$ admite uma secção geométrica se, e somente se, $m \equiv 0, 2 \pmod{3}$.*

(ii) *A sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow B_m(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}) \xrightarrow{\eta^*} B_{3,m}(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{p^*} B_3(\mathbb{S}^2) \longrightarrow 1$$

cinde se, e somente se, $m \equiv 0, 2 \pmod{3}$.

Daqui para frente iremos tratar da existência de secção para o caso geral, isto é, quando $n \geq 4$. Como vimos acima, se $n \in \{1, 2, 3\}$ temos uma resposta completa. Contudo, no caso geral, conseguimos apenas algumas condições necessárias sobre os índices n, m .

Proposição 3.2.3. *Sejam $n \geq 4$ e $m \geq 1$. Se a fibração $p : D_{n,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_n(\mathbb{S}^2)$ admite uma secção algébrica $s_* : B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ então:*

(i) *n divide m , $m-1$ ou $m-2$;*

(ii) $n - 1$ divide m ou $m - 1$;

(iii) $n - 2$ divide m .

Demonstração. Sejam α_0, α_1 e $\alpha_2 \in B_n(\mathbb{S}^2)$ os elementos descritos no Teorema de Murasugi. A fim de evitar confusão, iremos denotar por $\hat{\alpha}_j$ os respectivos elementos em $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$.

Se tratando de uma secção, s_* é injetora. Logo, a ordem de α_i é igual a ordem de $s_*(\alpha_i)$, ou seja, $o(s_*(\alpha_i)) = 2(n - i)$. Aplicando o Teorema de Murasugi, obtemos que $s_*(\alpha_i)$ é conjugado a alguma potência de $\hat{\alpha}_{j(i)}$, para algum $j = j(i) \in \{0, 1, 2\}$. Conseqüentemente, $o(\alpha_i)$ divide $o(\hat{\alpha}_j) = 2(m + n - j)$. Se pormos $i = 0$, obtemos a condição (i) do enunciado.

Agora, denote por π a composição

$$B_{n,m}(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\pi_H} S_n \times S_m \xrightarrow{\text{proj}} S_n$$

Geometricamente, π corresponde à permutação associada as n primeiras cordas de uma $(n + m)$ -trança em $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$. Denote também por π o homomorfismo $B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow S_n$ definido no capítulo anterior. Observe que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} B_{n,m}(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{p_*} & B_n(\mathbb{S}^2) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S_n & \xlongequal{\quad} & S_n \end{array}$$

e assim, $\pi(s_*(\alpha_i)) = \pi(\alpha_i)$.

Novamente, o Teorema de Murasugi assegura que todo elemento de torção de $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$ é da forma $g\hat{\alpha}_j^k g^{-1}$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $g \in B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$ e $j \in \{0, 1, 2\}$. Desse modo, o tipo de ciclo de um elemento de torção tem uma das seguintes configurações:

(i) para os conjugados de potências do tipo 0 em $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$, o tipo de ciclo é da forma

$$\left(\underbrace{t, \dots, t}_{\frac{m+n}{t} \text{ vezes}} \right), \text{ onde } t \text{ divide } n + m;$$

(ii) para os conjugados de potências do tipo 1 em $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$, o tipo de ciclo é da forma

$$\left(\underbrace{t, \dots, t}_{\frac{m+n-1}{t} \text{ vezes}}, 1 \right), \text{ onde } t \text{ divide } n + m - 1;$$

(iii) para os conjugados de potências do tipo 0 em $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$, o tipo de ciclo é da forma

$(\underbrace{t, \dots, t}_{\frac{m+n-2}{t} \text{ vezes}}, 1, 1)$, onde t divide $n + m - 2$.

Vamos comparar estes tipos de ciclos com a permutação $\pi(s_*(\alpha_i))$, $i = 1, 2$. Se $i = 1$ então, $\pi(s_*(\alpha_1))$ tem pelo menos um elemento fixo. Logo, de acordo com a descrição acima, só pode ser conjugado a alguma potência de um elemento do tipo 1 ou 2 e neste caso, $2(n - 1)$ divide $2(m + n - j)$ com $j = 1$ ou $j = 2$. Portanto $n - 1$ divide m ou $m - 1$. Se $i = 2$ então a permutação $\pi(s_*(\alpha_2))$ contém pelo menos 2 elementos fixos e assim, $s_*(\alpha_2)$ deve ser conjugado a alguma potência de $\widehat{\alpha}_2$. Como acima, concluímos que $n - 2$ divide o número m . \square

Considere o diagrama comutativo 3.13, p. 72. Se supormos que o homomorfismo p_* possui uma secção $s_* : B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ então, o homomorfismo \widehat{p}_* também admite uma secção a saber:

$$\widehat{s}_* = \phi \circ s_* : B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m}.$$

Donde tem-se que

$$B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m} \cong B_n(\mathbb{S}^2) \times \beta_{n,m}/H_{n,m}.$$

e assim, para cada $1 \leq k \leq n - 1$, vale a igualdade:

$$\widehat{s}_*(\tau_k) = \tau_k \rho_1^{r_{k,1}} \rho_2^{r_{k,2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{k,n-1}} \sigma^{r_{k,n}}. \quad (3.14)$$

Seja $R = (r_{k,l})_{1 \leq k \leq n-1, 1 \leq l \leq n}$ a matriz cujas entradas são os expoentes da igualdade acima.

Proposição 3.2.4. *A matriz R tem a seguinte forma:*

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} & \ddots & & \vdots & r_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r_{n-3,n-3} & r_{n-3,n-2} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r_{n-2,n-2} & r_{n-2,n-1} & r_{1,n} \\ r_{n-1,1} & r_{n-1,1} & \cdots & \cdots & r_{n-1,1} & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

onde

$$r_{i,i} + r_{i,i+1} = r_{n-1,n-1} - 2r_{n-1,1} = \frac{m}{n-2} \quad (3.15)$$

para $i = 1, \dots, n-2$

$$r_{n-1,n} = r_{1,n} + 2(m-1)r_{n-1,1} \quad (3.16)$$

$$(n-2)r_{1,n} + r_{n-1,n} = (m-1)r_{n-1,n-1} \quad (3.17)$$

Em particular, $r_{1,n} = \frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}$.

Demonstração. A idéia principal da demonstração é comparar as relações que definem o grupo $B_n(\mathbb{S}^2)$ via o homomorfismo \widehat{s}_* .

(i) Primeiramente, seja $1 \leq i, j \leq n-2$, $|i-j| \geq 2$. Então:

$$\begin{aligned} \widehat{s}_*(\tau_i \tau_j) &= \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_j^{r_{i,j}} \rho_{j+1}^{r_{i,j+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \cdot \tau_j \rho_1^{r_{j,1}} \rho_2^{r_{j,2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{j,n-1}} \sigma^{r_{j,n}} \\ &= \tau_i \tau_j \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_{j+1}^{r_{i,j}} \rho_j^{r_{i,j+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \cdot \rho_1^{r_{j,1}} \rho_2^{r_{j,2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{j,n-1}} \sigma^{r_{j,n}} \\ &= \tau_i \tau_j \rho_1^{r_{i,1}+r_{j,1}} \rho_2^{r_{i,2}+r_{j,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}+r_{j,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}+r_{j,i}} \cdots \rho_j^{r_{i,j+1}+r_{j,j}} \\ &\quad \cdot \rho_{j+1}^{r_{i,j}+r_{j,j+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}+r_{j,n-1}} \sigma^{r_{i,n}+r_{j,n}}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \widehat{s}_*(\tau_j \tau_i) &= \tau_j \rho_1^{r_{j,1}} \rho_2^{r_{j,2}} \cdots \rho_i^{r_{j,i}} \rho_{i+1}^{r_{j,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{j,n-1}} \sigma^{r_{j,n}} \cdot \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \\ &= \tau_j \tau_i \rho_1^{r_{j,1}+r_{i,1}} \rho_2^{r_{j,2}+r_{i,2}} \cdots \rho_j^{r_{j,j}+r_{i,j}} \rho_{j+1}^{r_{j,j+1}+r_{i,j+1}} \cdots \rho_i^{r_{j,i+1}+r_{i,i}} \\ &\quad \cdot \rho_{i+1}^{r_{j,i}+r_{i,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{j,n-1}+r_{i,n-1}} \sigma^{r_{j,n}+r_{i,n}}. \end{aligned}$$

Desde que $\widehat{s}_*(\tau_i \tau_j) = \widehat{s}_*(\tau_j \tau_i)$, comparando os coeficientes das igualdades acima, obtemos:

$$r_{i,j} = r_{i,j+1} \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq n-2, |i-j| \geq 2. \quad (3.18)$$

(ii) Agora considere $1 \leq i \leq n-3$. Então:

$$\begin{aligned} \widehat{s}_*(\tau_i \tau_{n-1}) &= \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \\ &\quad \cdot \tau_{n-1} \rho_1^{r_{n-1,1}} \cdots \rho_i^{r_{n-1,i}} \rho_{i+1}^{r_{n-1,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}} \sigma^{r_{n-1,n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_i \tau_{n-1} \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{i,n-2}} \underbrace{(\rho_{n-1}^{-1} \cdots \rho_1^{-1} \sigma^{-2(m-1)})}_{\rho_n}^{r_{i,n-1}} \\
&\quad \cdot \sigma^{r_{i,n}} \rho_1^{r_{n-1,1}} \rho_2^{r_{n-1,2}} \cdots \rho_i^{r_{n-1,i}} \rho_{i+1}^{r_{n-1,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}} \sigma^{r_{n-1,n}} \\
&= \tau_i \tau_{n-1} \rho_1^{r_{i,1}+r_{n-1,1}-r_{i,n-1}} \rho_2^{r_{i,2}+r_{n-1,2}-r_{i,n-1}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}+r_{n-1,i}-r_{i,n-1}} \\
&\quad \cdot \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}+r_{n-1,i+1}-r_{i,n-1}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{i,n-2}+r_{n-1,n-2}-r_{i,n-1}} \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}-r_{i,n-1}} \\
&\quad \cdot \sigma^{r_{i,n}+r_{n-1,n}-2(m-1)r_{i,n-1}}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\widehat{s}_*(\tau_{n-1}\tau_i) &= \tau_{n-1} \rho_1^{r_{n-1,1}} \rho_2^{r_{n-1,2}} \cdots \rho_i^{r_{n-1,i}} \rho_{i+1}^{r_{n-1,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}} \sigma^{r_{n-1,n}} \\
&\quad \cdot \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{i,n} \\
&= \tau_{n-1} \tau_i \rho_1^{r_{n-1,1}} \rho_2^{r_{n-1,2}} \cdots \rho_{i+1}^{r_{n-1,i}} \rho_i^{r_{n-1,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}} \sigma^{r_{n-1,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \\
&= \tau_{n-1} \tau_i \rho_1^{r_{n-1,1}+r_{i,1}} \rho_2^{r_{n-1,2}+r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{n-1,i+1}+r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{n-1,i}+r_{i,i+1}} \cdots \\
&\quad \cdot \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}+r_{i,n-1}} \sigma^{r_{n-1,n}+r_{i,n}}.
\end{aligned}$$

Igualando as duas equações, obtemos:

$$r_{i,n-1} = 0 \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n-3, \quad (3.19)$$

e

$$r_{n-1,1} = r_{n-1,i} = r_{n-1,i+1} \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n-3. \quad (3.20)$$

(iii) Seja $1 \leq i \leq n-3$. Temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{s}_*(\tau_i \tau_{i+1} \tau_i) &= \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \\
&\quad \cdot \tau_{i+1} \rho_1^{r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i+1,2}} \cdots \rho_i^{r_{i+1,i}} \rho_{i+1}^{r_{i+1,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i+1,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i+1,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \cdot \\
&= \tau_i \tau_{i+1} \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+1}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \\
&\quad \cdot \tau_i \rho_1^{r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i+1,2}} \cdots \rho_{i+1}^{r_{i+1,i}} \rho_i^{r_{i+1,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i+1,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i+1,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_i \tau_{i+1} \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_{i+1}^{r_{i,i}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+1}} \rho_i^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i+1,2}} \cdots \rho_{i+1}^{r_{i+1,i}} \rho_i^{r_{i+1,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i+1,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i+1,n}} \cdots \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \\
&= \tau_i \tau_{i+1} \tau_i \rho_1^{2r_{i,1}+r_{i+1,1}} \rho_2^{2r_{i,2}+r_{i+1,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}+r_{i+1,i+1}+r_{i,i+2}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}+r_{i+1,i+2}+r_{i,i+3}} \cdots \\
&\quad \cdot \rho_{i+2}^{r_{i,i+2}+r_{i+1,i+3}+r_{i,i+4}} \cdots \rho_{n-1}^{2r_{i,n-1}+r_{i+1,n-1}} \sigma^{2r_{i,n}+r_{i+1,n}}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_*(\tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}) &= \tau_{i+1} \rho_1^{r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i+1,2}} \cdots \rho_i^{r_{i+1,i}} \rho_{i+1}^{r_{i+1,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i+1,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i+1,n}} \\
&\quad \cdot \tau_i \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \\
&\quad \cdot \tau_{i+1} \rho_1^{r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i+1,2}} \cdots \rho_i^{r_{i+1,i}} \rho_{i+1}^{r_{i+1,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i+1,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i+1,n}} \\
&= \tau_{i+1} \tau_i \rho_1^{r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i+1,2}} \cdots \rho_{i+1}^{r_{i+1,i}} \rho_i^{r_{i+1,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i+1,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i+1,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \tau_{i+1} \rho_1^{r_{i,1}} \rho_2^{r_{i,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+2}^{r_{i,i+1}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}} \sigma^{r_{i,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i+1,2}} \cdots \rho_i^{r_{i+1,i}} \rho_{i+1}^{r_{i+1,i+1}} \rho_{i+2}^{r_{i+1,i+2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i+1,n}} \\
&= \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} \rho_1^{r_{i,1}+2r_{i+1,1}} \rho_2^{r_{i,2}+r_{i+1,2}} \cdots \rho_i^{r_{i,i}+r_{i+1,i+1}+r_{i,i+2}} \cdot \\
&\quad \cdot \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}+r_{i+1,i+2}+r_{i,i+3}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{i,n-1}+2r_{i+1,n-1}} \sigma^{r_{i,n}+2r_{i+1,n}}.
\end{aligned}$$

Igualando as duas equações e usando o fato de que $\beta_{n,m}/H_{n,m}$ é abeliano livre de posto n , gerado por $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \sigma$, obtemos as seguintes igualdades:

$$r_{i,j} = r_{i+1,j} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n-3, 1 \leq j \leq n, j \neq i, i+1, i+2. \quad (3.21)$$

Em particular

$$r_{i,n} = r_{i+1,n} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n-3. \quad (3.22)$$

Agora, dos coeficientes em $\rho_i, \rho_{i+1}, \rho_{i+2}$, obtemos:

$$r_{i+1,i} = r_{i,i+2}$$

$$r_{i,i} + r_{i,i+1} = r_{i+1,i+1} + r_{i+1,i+2} \quad (3.23)$$

ambas as igualdades são válidas para $1 \leq i \leq n-3$.

(iv) Seja $i = n-2$. Então:

$$\begin{aligned}
\widehat{s}_*(\tau_{n-2}\tau_{n-1}\tau_{n-2}) &= \tau_{n-2}\rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \\
&\quad \cdot \tau_{n-1}\rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}}\sigma^{r_{i,n}} \\
&\quad \cdot \tau_{n-2}\rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \\
&= \tau_{n-2}\tau_{n-1}\rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \\
&\quad \tau_{n-2}\rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}}\rho_{n-1}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-1}}\sigma^{r_{n-1,n}} \\
&\quad \rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \\
&= \tau_{n-2}\tau_{n-1}\tau_{n-2}\rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-2}} \\
&\quad \cdot \underbrace{(\rho_{n-1}^{-1}\cdots\rho_1^{-1}\sigma^{-2(m-1)})}_{\rho_n}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}}\rho_{n-1}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-1}}\sigma^{r_{n-1,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \\
&= \tau_{n-2}\tau_{n-1}\tau_{n-2}\rho_1^{2r_{n-2,1}+r_{n-1,1}-r_{n-2,n-1}} \\
&\quad \cdot \rho_2^{2r_{n-2,2}+r_{n-1,2}-r_{n-2,n-1}} \cdots \\
&\quad \cdot \rho_{n-3}^{2r_{n-2,n-3}+r_{n-1,n-3}-r_{n-2,n-1}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-1}+r_{n-2,n-2}-r_{n-2,n-1}} \\
&\quad \cdot \rho_{n-1}^{r_{n-2,n-2}+r_{n-1,n-2}}\sigma^{2r_{n-2,n}+r_{n-1,n}-2(m-1)r_{n-2,n-1}}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\widehat{s}_*(\tau_{n-1}\tau_{n-2}\tau_{n-1}) &= \tau_{n-1}\rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}}\sigma^{r_{i,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \tau_{n-2}\rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \tau_{n-1}\rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}}\sigma^{r_{n-1,n}} \cdot \\
&= \tau_{n-1}\tau_{n-2}\rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}}\rho_{n-1}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-1}}\sigma^{r_{n-1,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \tau_{n-1}\rho_1^{r_{n-2,1}}\rho_2^{r_{n-2,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}}\sigma^{r_{n-2,n}} \cdot \\
&\quad \cdot \rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}}\sigma^{r_{n-1,n}} \cdot \\
&= \tau_{n-1}\tau_{n-2}\tau_{n-1}\rho_1^{r_{n-1,1}}\rho_2^{r_{n-1,2}}\cdots\rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}} \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{(\rho_{n-1}^{-1}\cdots\rho_1^{-1}\sigma^{-2(m-1)})}_{\rho_n}^{r_{n-1,n-2}}\rho_{n-2}^{r_{n-1,n-1}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sigma^{r_{n-1,n}} \rho_1^{r_{n-2,1}} \rho_2^{r_{n-2,2}} \cdots \rho_{n-3}^{r_{n-2,n-3}} \rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}} \cdot \\
& \cdot \underbrace{(\rho_{n-1}^{-1} \cdots \rho_1^{-1} \sigma^{-2(m-1)})}_{\rho_n} \rho_{n-2}^{r_{n-2,n-1}} \sigma^{r_{n-2,n}} \rho_1^{r_{n-1,1}} \rho_2^{r_{n-1,2}} \cdots \\
& \cdot \rho_{n-3}^{r_{n-1,n-3}} \rho_{n-2}^{r_{n-1,n-2}} \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}} \sigma^{r_{n-1,n}} \\
= & \tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-1} \rho_1^{2r_{n-1,1} + r_{n-2,1} - r_{n-1,n-2} - r_{n-2,n-1}} \cdot \\
& \cdot \rho_2^{2r_{n-1,2} + r_{n-2,2} - r_{n-1,n-2} - r_{n-2,n-1}} \cdots \\
& \cdot \rho_{n-3}^{2r_{n-1,n-3} + r_{n-2,n-3} - r_{n-1,n-2} - r_{n-2,n-1}} \cdot \\
& \cdot \rho_{n-2}^{r_{n-1,n-1} + r_{n-2,n-2} - r_{n-2,n-1}} \cdot \\
& \cdot \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1} - r_{n-1,n-2} - r_{n-2,n-1}} \cdot \\
& \cdot \sigma^{2r_{n-1,n} + r_{n-2,n} - 2(m-1)(r_{n-1,n-2} + r_{n-2,n-1})} \cdot
\end{aligned}$$

Mas, $\widehat{s}_*(\tau_{n-2}\tau_{n-1}\tau_{n-2}) = \widehat{s}_*(\tau_{n-1}\tau_{n-2}\tau_{n-1})$. Comparando os coeficientes em ρ_i , $1 \leq i \leq n-3$, obtemos:

$$r_{n-2,i} = r_{n-1,i} - r_{n-1,n-2}$$

Já sabíamos que $r_{n-1,i} = r_{n-2,n-2}$, assim:

$$r_{n-2,i} = 0 \tag{3.25}$$

para todo $1 \leq i \leq n-3$. Resta analisar os coeficientes dos elementos ρ_{n-2} e ρ_{n-1} . Para $i = n-2$ não obtemos nenhuma relação interessante. Entretanto, para $i = n-1$ temos:

$$2r_{n-1,n-2} + r_{n-2,n-1} = r_{n-1,n-1} - r_{n-2,n-2}$$

mas, em virtude da equação (6.23) e da igualdade $r_{n-1,n-2} = r_{n-1,1}$, constatamos que:

$$2r_{n-1,1} + r_{n-2,n-1} = r_{n-1,n-1} - r_{n-2,n-2} \tag{3.26}$$

e para o coeficiente de σ obtemos:

$$r_{n-2,n} + 2(m-1)r_{n-1,n-2} = r_{n-1,n}.$$

Desde que $r_{n-1,n-2} = r_{n-1,1}$ pela equação (6.23) e, $r_{n-2,n} = r_{1,n}$ pela equação (3.24),

obtemos:

$$r_{1,n} + 2(m-1)r_{n-1,1} = r_{n-1,1} \quad (3.27)$$

Até este ponto coletamos as seguintes informações:

- Das equações (3.18) e (3.19), vemos que $r_{i,j} = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n-1$, $|i-j| \geq 2$;
- Da equação (3.20), temos $r_{n-1,i} = r_{n-1,1}$ para todo $1 \leq i \leq n-2$;
- Da equação (3.22), temos $r_{i,n} = r_{1,n}$ para todo $1 \leq i \leq n-3$;
- Da equação (3.25), temos $r_{n-2,i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-3$;
- Das equações (3.21) e (3.22), concluímos que $r_{i,j} = 0$ para todo $1 \leq j \leq i \leq n-2$.

Com isso, mostramos que a matriz dos coeficientes R tem realmente a forma afirmada. Resta verificar as igualdades (3.18)-(3.20). A igualdade (3.19) já foi obtida em (3.27). As equações (3.26) e (3.23) nos dão uma parte da igualdade (3.18). Utilizando a estrutura da matriz dos coeficientes R , concluímos que

$$\widehat{s}_*(\tau_i) = \tau_i \rho_i^{r_{i,i}} \rho_{i+1}^{r_{i,i+1}} \sigma^{r_{1,n}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-2$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \widehat{s}_*(\tau_{n-1}) &= \tau_{n-1} \rho_1^{r_{n-1,1}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{n-1,1}} \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}} \sigma^{r_{n-1,n}} \\ &= \tau_{n-1} (\rho_1 \cdots \rho_{n-2} \rho_{n-1} \sigma^{2(m-1)})^{r_{n-1,1}} \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}-r_{n-1,1}} \sigma^{r_{1,n}} \\ &= \tau_{n-1} \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}-r_{n-1,1}} \rho_n^{-r_{n,1}} \sigma^{r_{1,n}} \end{aligned}$$

pois $2(m-1)r_{n-1,1} + r_{1,n} = r_{n-1,n}$.

Tendo a expressão do homomorfismo \widehat{s}_* aplicado em cada gerador, vamos analisar a última relação em $B_n(\mathbb{S}^2)$. Sejam $w_1 = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$ e $w_2 = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1}$, então $w_1 w_2 = 1$.

Temos:

$$\begin{aligned} \widehat{s}_*(w_1) &= \tau_{n-1} \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}-r_{n-1,1}} \rho_n^{-r_{n,1}} \sigma^{r_{1,n}} \cdot \tau_{n-2} \rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}} \rho_{n-1}^{r_{n-2,n-1}} \sigma^{r_{1,n}} \cdot \tau_{n-3} \cdot \\ &\quad \rho_{n-3}^{r_{n-3,n-3}} \rho_{n-2}^{r_{n-3,n-2}} \sigma^{r_{1,n}} \cdots \tau_2 \rho_2^{r_{2,2}} \rho_3^{r_{2,3}} \sigma^{r_{1,n}} \cdot \tau_1 \rho_1^{r_{1,1}} \rho_2^{r_{1,2}} \\ &= \tau_{n-1} \rho_{n-1}^{r_{n-1,n-1}-r_{n-1,1}} \tau_{n-2} \rho_{n-2}^{r_{n-2,n-2}} \tau_{n-3} \rho_{n-3}^{r_{n-3,n-3}} \cdots \tau_2 \rho_2^{r_{2,2}} \tau_1 \rho_1^{r_{1,1}} \\ &\quad \cdot \rho_n^{-r_{n-1,1}} \rho_{n-1}^{n-2, n-1} \rho_{n-2}^{r_{n-3,n-2}} \cdots \rho_3^{r_{2,3}} \rho_2^{r_{1,2}} \sigma^{(n-1)r_{1,n}} \\ &= \tau_{n-1} \tau_{n-2} \rho_{n-2}^{r_{n-1,n-1}-r_{n-1,1}+r_{n-2,n-2}} \tau_{n-3} \rho_{n-3}^{r_{n-3,n-3}} \cdots \tau_2 \rho_2^{r_{2,2}} \tau_1 \rho_1^{r_{1,1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \rho_n^{-r_{n-1,1}} \rho_{n-1}^{n-2, n-1} \rho_{n-2}^{r_{n-3, n-2}} \cdots \rho_3^{r_{2,3}} \rho_2^{r_{1,2}} \sigma^{(n-1)r_{1,n}} \\
= & \tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-3} \cdots \tau_2 \tau_1 \rho_1^{r_{n-1, n-1} + r_{n-2, n-2} + r_{n-3, n-3} + \cdots + r_{1,1} - r_{n-1, n}} \\
& \cdot \rho_2^{r_{1,2}} \rho_3^{r_{2,3}} \rho_4^{r_{3,4}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{n-3, n-2}} \rho_{n-1}^{r_{n-2, n-1}} \rho_n^{-r_{n-1,1}} \sigma^{(n-1)r_{1,n}}
\end{aligned}$$

para o elemento w_2 , tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{s}_*(w_2) &= \tau_1 \rho_1^{r_{1,1}} \rho_2^{r_{1,2}} \sigma^{r_{1,n}} \cdot \tau_2 \rho_2^{r_{2,2}} \rho_3^{r_{2,3}} \sigma^{r_{1,n}} \cdots \tau_{n-3} \rho_{n-3}^{r_{n-3, n-3}} \\
& \cdot \rho_{n-2}^{r_{n-3, n-2}} \sigma^{r_{1,n}} \cdot \tau_{n-2} \rho_{n-2}^{r_{n-2, n-2}} \rho_{n-1}^{r_{n-2, n-1}} \sigma^{r_{1,n}} \cdot \tau_{n-1} \rho_{n-1}^{r_{n-1, n-1} - r_{n-1,1}} \\
& \cdot \rho_n^{-r_{n-1,1}} \sigma^{r_{1,n}} \\
= & \tau_1 \rho_2^{r_{1,2}} \tau_2 \rho_3^{r_{2,3}} \cdots \tau_{n-3} \rho_{n-2}^{r_{n-3, n-2}} \tau_{n-2} \rho_{n-1}^{r_{n-2, n-1}} \tau_{n-1} \rho_n^{-r_{n-1,1}} \\
& \cdot \rho_1^{r_{1,1}} \rho_2^{r_{2,2}} \cdots \rho_{n-3}^{r_{n-3, n-3}} \rho_{n-2}^{r_{n-2, n-2}} \rho_{n-1}^{r_{n-1, n-1} - r_{n-1,1}} \sigma^{(n-1)r_{1,n}} \\
= & \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \rho_n^{r_{1,2} + r_{2,3} + \cdots + r_{n-3, n-2} + r_{n-2, n-1} - r_{n-1,1}} \\
& \cdot \rho_1^{r_{1,1}} \rho_2^{r_{2,2}} \cdots \rho_{n-3}^{r_{n-3, n-3}} \rho_{n-2}^{r_{n-2, n-2}} \rho_{n-1}^{r_{n-1, n-1} - r_{n-1,1}} \sigma^{(n-1)r_{1,n}}
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
& \rho_1^{r_{n-1, n-1} + \cdots + r_{1,1} - r_{n-1,1}} \rho_2^{r_{1,2}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{n-2, n-1}} \rho_n^{-r_{n-1,1}} \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \\
= & \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \rho_1^{r_{1,2}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{n-2, n-1}} \rho_{n-1}^{-r_{n-1,1}} \rho_n^{r_{n-1, n-1} + \cdots + r_{1,1} - r_{n-1,1}}
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
1 = \widehat{s}_*(w_1 w_2) &= \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \rho_1^{r_{1,2}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{n-2, n-1}} \rho_{n-1}^{-r_{n-1,1}} \\
& \cdot \rho_n^{r_{n-1, n-1} + \cdots + r_{1,1} - r_{n-1,1}} \rho_n^{r_{1,2} + \cdots + r_{n-2, n-1} - r_{n-1,1}} \rho_1^{r_{1,1}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{n-2, n-2}} \\
& \cdot \rho_{n-1}^{r_{n-1, n-1} - r_{n-1,1}} \sigma^{2(n-1)r_{1,n}} \\
= & \rho_1^{r_{1,1} + r_{1,2}} \cdots \rho_{n-2}^{r_{n-2, n-2} + r_{n-2, n-1}} \rho_{n-1}^{r_{n-1, n-1} - 2r_{n-1,1}} \\
& \cdot (\rho_1^{-1} \cdots \rho_{n-1}^{-1} \sigma^{-2(m-1)}) \alpha \sigma^{2(n-1)r_{1,n}}
\end{aligned}$$

pois $\tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} = \rho_n^{-m}$ em $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m}$, onde

$$\alpha = (r_{1,1} + r_{1,2}) + \cdots + (r_{n-2, n-2} + r_{n-2, n-1}) + (r_{n-1, n-1} - 2r_{n-1,1}) - m \quad (3.28)$$

Comparando os coeficientes de $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, podemos ver que todos são iguais, em outras

palavras

$$r_{1,1} + r_{1,2} = \dots = r_{n-2,n-2} + r_{n-2,n-1} = r_{n-1,n-1} - 2r_{n-1,1} = \alpha \quad (3.29)$$

Combinando as equações (3.28) e (3.29), vemos que $\alpha = (n-1)\alpha - m$, ou seja, $\alpha = \frac{m}{n-2}$. Logo, obtemos a igualdade afirmada em (3.18).

Comparando os coeficientes de σ , vemos que

$$\begin{aligned} (n-1)r_{1,n} &= (m-1)(r_{n-1,n-1} - 2r_{n-1,1}) \\ &= (m-1)r_{n-1,n-1} - 2(m-1)r_{n-1,1} \\ &= (m-1)r_{n-1,n-1} + (r_{1,n} - r_{n-1,n}) \end{aligned}$$

Consequentemente

$$(n-2)r_{1,n} + r_{n-1,n} = (m-1)r_{n-1,n-1}$$

o que por sua vez implica na igualdade (3.20). Para concluirmos, note que, substituindo o valor de $r_{n-1,n}$ dado em (3.19) na equação (3.20), obtemos

$$(n-2)r_{1,n} + r_{1,n} + 2(m-1)r_{n-1,1} = (m-1)r_{n-1,n-1}$$

logo

$$\begin{aligned} (n-1)r_{1,n} &= (m-1)(r_{n-1,n-1} - 2r_{n-1,1}) \\ &= \frac{m(m-1)}{n-2} \end{aligned}$$

Portanto, $r_{1,n} = \frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}$, como queríamos. \square

Proposição 3.2.5. *Sejam $n \geq 4$ e $m \geq 1$. Se a fibração $p : D_{n,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_n(\mathbb{S}^2)$ admite uma secção algébrica então $m = \lambda n(n-2) - \varepsilon(n-2)$, onde $\lambda \in \mathbb{Z}$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$.*

Demonstração. Seja $s_* : B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ uma secção algébrica de p . O Lema de Substituição garante a existência de um homomorfismo $p_1 : B_{n,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_m(\mathbb{S}^2)$ definido nos geradores por:

$$p_1(A_{i,j}) = p_1(\tau_k) = 1 \quad \text{e} \quad p_1(\tilde{\sigma}_r) = \sigma_r$$

onde $1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq n+m$, $1 \leq k \leq n-1$ e $1 \leq r \leq m-1$. Geometricamente, p_1 corresponde ao homomorfismo induzido pela fibração $D_{n,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_m(\mathbb{S}^2)$. Note que,

$p_1(\beta_{n,m}) = B_m(\mathbb{S}^2)$ pois os elementos $\tilde{\sigma}_r$ pertencem ao núcleo $\beta_{n,m}$ de p_* . De onde segue-se que $p_1(H_{n,m}) = \Gamma_2(B_m(\mathbb{S}^2))$.

Seja $p_2 : B_m(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_m(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(B_m(\mathbb{S}^2))$ a projeção canônica. Agora, vamos construir um homomorfismo

$$p_3 : B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m} \rightarrow B_m(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(B_m(\mathbb{S}^2))$$

da seguinte maneira: dada uma classe lateral à direita $H_{n,m} \cdot \alpha$, ponha $p_3(H_{n,m} \cdot \alpha) = p_2 \circ p_1(\alpha)$. Note que p_3 está bem definida pois, se $\beta^{-1}\alpha \in H_{n,m}$ então $p_1(\beta)^{-1}p_1(\alpha) \in \Gamma_2(B_m(\mathbb{S}^2))$, ou seja, $\Gamma_2 \cdot p_1(\beta) = \Gamma_2 \cdot p_1(\alpha)$. Da maneira que foi definido o homomorfismo p_1 , constatamos que $p_2 \circ p_1 = p_3 \circ \phi$, consequentemente vale a igualdade

$$p_2 \circ p_1 \circ s_* = p_3 \circ \widehat{s}_*. \quad (3.30)$$

O objetivo da prova é comparar os valores de $p_2 \circ p_1 \circ s_*(\alpha_0)$ e $p_3 \circ \widehat{s}_*(\alpha_0)$, onde $\alpha_0 = \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \in B_n(\mathbb{S}^2)$. O parágrafo acima pode ser resumido no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} B_m(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(B_m(\mathbb{S}^2)) & \xleftarrow{p_3} & B_{n,m}(\mathbb{S}^2)/H_{n,m} & \xrightarrow[\widehat{s}_*]{\widehat{p}_*} & B_n(\mathbb{S}^2) \\ \uparrow p_2 & & \uparrow \phi & & \parallel \\ B_m(\mathbb{S}^2) & \xleftarrow[p_1]{} & B_{n,m}(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow[\widehat{s}_*]{p_*} & B_n(\mathbb{S}^2) \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ & & S_n & \xlongequal{\quad} & S_n \end{array}$$

Iniciaremos com o cálculo de $p_3 \circ \widehat{s}_*(\alpha_0)$. Temos:

$$\begin{aligned} p_3 \circ \widehat{s}_*(\tau_k) &= p_3(\tau_k \rho_1^{r_{k,1}} \cdots \rho_{n-1}^{r_{k,n-1}} \sigma^{r_{k,n}}) \\ &= p_3(\phi(\tau_k) \phi(A_{1,n+1})^{r_{k,1}} \cdots \phi(A_{n-1,n+1})^{r_{k,n-1}} \phi(\tilde{\sigma}_1)^{r_{k,n}}) \\ &= p_2(p_1(\tau_k A_{1,n+1}^{r_{k,1}} \cdots A_{n-1,n+1}^{r_{k,n-1}} \tilde{\sigma}_1^{r_{k,n}})) \\ &= p_2(\sigma_1)^{r_{k,n}} \\ &= \Gamma_2 \cdot \sigma_1^{r_{k,n}} = \sigma^{r_{k,n}}. \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 3.2.4, concluimos que $r_{k,n} = r_{1,n} = \frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}$ se $k = 1, \dots, n-2$,

e $r_{n-1,n} = r_{1,n} + 2(m-1)r_{n-1,1}$. Mas, como a abelinização de $B_m(\mathbb{S}^2)$ é isomorfa ao grupo cíclico de ordem $2(m-1)$, tem-se $\sigma^{r_{n-1,n}} = \sigma^{r_{1,n}}$, o que por sua vez nos dá a igualdade:

$$p_3 \circ \widehat{s}_*(\alpha_0) = \sigma^{\frac{m(m-1)}{n-2}}. \quad (3.31)$$

Agora, vamos voltar nossas atenções para o elemento $p_2 \circ p_1 \circ s_*(\alpha_0)$. Desde que s_* é uma secção para p_* , o elemento $s_*(\alpha_0)$ tem ordem $2n$. Com isso, $s_*(\alpha_0)$ é um elemento de torção de $B_{n+m}(\mathbb{S}^2)$. Da igualdade $\pi \circ p_* = \pi$, concluí-se que $\pi \circ s_* = \pi$ e assim, a permutação $\pi(s_*(\alpha_0))$ contém o n -ciclo $(1 \ n \ n-1 \ \dots \ 3 \ 2)$. Utilizando a descrição dos possíveis tipos de ciclo de um elemento de torção dada na Proposição 3.2.3, mais o fato de que existe um $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que n divide $m-i$, concluímos que o tipo de ciclo de $s_*(\alpha_0)$ é da forma $(n, \underbrace{n, \dots, n}_{\frac{m-i}{n} \text{ vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_i)$. Consequentemente, o tipo de ciclo da permutação $\pi(p_1 \circ s_*(\alpha_0))$ é $(\underbrace{n, \dots, n}_{\frac{m-i}{n} \text{ vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_i)$.

Como $s_*(\alpha_0)$ possui ordem $2n$, tem-se $s_*(\alpha_0)^n = \Delta_{n+m}$. Logo $\Delta_m = p_1(\Delta_{n+m}) = p_1(s_*(\alpha_0)^n) = (p_1 \circ s_*(\alpha_0))^n$ e assim $(p_1 \circ s_*(\alpha_0))^{2n} = 1$. Olhando para o tipo de ciclo da permutação associada à m -trança $p_1 \circ s_*(\alpha_0)$, verificamos que $(p_1 \circ s_*(\alpha_0))^k \neq 1$ se $k \in \{1, \dots, n-1\}$, ou seja, $p_1 \circ s_*(\alpha_0)$ tem ordem $2n$.

Agora, sejam $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ os elementos de $B_m(\mathbb{S}^2)$ descritos no Teorema de Murasugi. Então, $p_1 \circ s_*(\alpha_0)$ é conjugado ao elemento β_i^k , onde o índice i é o mesmo do parágrafo anterior e k é um inteiro arbitrário. Como $\beta_i^{2nk} = 1$, tem-se $2nk = \underbrace{2(m-i)}_{o(\beta_i)} r$ para algum $r \in \mathbb{Z}$, ou seja, $k = \frac{2(m-i)}{2n} r$. Em suma, concluímos que $p_1 \circ s_*(\alpha_0)$ é conjugado a algum elemento do subgrupo $\langle \beta_i^{\frac{2(m-i)}{2n}} \rangle$, cuja ordem é $2n$. Obviamente, todo elemento conjugado a $p_1 \circ s_*(\alpha_0)$ tem ordem $2n$, assim, a menos de conjugação, deve-se ter:

$$p_1 \circ s_*(\alpha_0) = \beta_i^{\frac{m-i}{n} q},$$

onde $\text{mdc}(q, 2n) = 1$. Logo,

$$p_2 \circ p_1 \circ s_*(\alpha_0) = \sigma^{\frac{r_i(m-i)}{n}},$$

onde $r_i = m-1$ se $i = 0, 2$ e $r_1 = m$. Desde que $B_m(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(B_m(\mathbb{S}^2))$ é isomorfo ao grupo

cíclico de ordem $2(m-1)$, da equação (3.31) e da igualdade acima, concluí-se que

$$\frac{r_i q(m-i)}{n} - \frac{m(m-1)}{n-2} \equiv 0 \pmod{2(m-1)}.$$

Primeiramente, se $i = 0, 1$ então $r_i(m-i) = m(m-1)$, e assim $2(m-1)$ divide o número

$$\frac{qm(m-1)}{n} - \frac{m(m-1)}{n-2} = 2(m-1) \left[\frac{m(q(n-2) - n)}{2n(n-2)} \right].$$

Assim, $\frac{m(q(n-2)-n)}{2n(n-2)} \in \mathbb{Z}$. Logo, do Lema 1.4.1 tem-se que $n(n-2)$ divide m , ou seja, $m = \lambda n(n-2)$ para algum $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Agora, seja $i = 2$. Então $2(m-1)$ divide o número

$$\begin{aligned} \frac{q(m-1)(m-2)}{n} - \frac{m(m-1)}{n-2} &= 2(m-1) \left[\frac{q(m-2)(n-2) - mn}{2n(n-2)} \right] \\ &= 2(m-1) \left[\frac{nm(q-1) - 2q(m+n-2)}{2n(n-2)} \right]. \end{aligned}$$

Novamente, da igualdade acima concluímos que $\frac{nm(q-1) - 2q(m+n-2)}{2n(n-2)} \in \mathbb{Z}$. Mas

$$\frac{nm(q-1) - 2q(m+n-2)}{2n(n-2)} = \left(\frac{m}{n-2} \right) \left(\frac{q-1}{2} \right) - \frac{q(m+n-2)}{n(n-2)}.$$

Desde que $\text{mdc}(q, 2n) = 1$, q é um número ímpar e $n-2$ divide m pela Proposição 3.2.3, o primeiro fator do lado direito da igualdade acima é um número inteiro. Mais ainda, $n-2$ divide $m+n-2$, assim, como $i = 2$, n divide $m-2$, e com isso, divide $m+n-2$. Logo, $\text{mmc}(n, n-2)$ divide $m+n-2$. Afirmamos que $n(n-2)$ divide $m+n-2$. A fim de provar o afirmado, vamos considerar dois casos:

- (i) n é ímpar. Neste caso, $\text{mdc}(n, n-2) = 1$ e assim $\text{mmc}(n, n-2) = n(n-2)$.
- (ii) n é par. Então, $\text{mdc}(n, n-2) = 2$ e assim $\text{mmc}(n, n-2) = n(n-2)/2$. Das observação que fizemos no parágrafo acima, temos:

$$\frac{q(m+n-2)}{n(n-2)} = \frac{q(m+n-2)}{2\left(\frac{n(n-2)}{2}\right)}.$$

Sendo q um número ímpar, todo denominador deve dividir $m+n-2$, e isto completa a prova do afirmado.

A afirmação acima implica que existe um $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $m = \lambda n(n-2) - (n-2)$. \square

Teorema 3.2.4. *Sejam $n \geq 4$ e $m \geq 1$. Se a fibração $p : D_{n,m}(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_n(\mathbb{S}^2)$ admite uma secção algébrica então*

$$m \equiv \varepsilon_1(n-1)(n-2) - \varepsilon_2 n(n-2) \pmod{n(n-1)(n-2)}$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$.

Demonstração. Da proposição 3.2.5 sabemos que m é divisível por $n(n-2)$ ou m tem a forma $\lambda n(n-2) - (n-2)$. Escrevendo $-(n-2) = (n-1)(n-2) - n(n-2)$, vemos que m é da forma

$$ln(n-2) + \varepsilon_1(n-1)(n-2)$$

onde $l \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}$. Vamos aplicar a Proposição 3.2.3 para obter mais informações sobre l . Da expressão acima fica claro que $n-2$ divide m , ou seja, a condição (ii) não traz nenhuma informação relevante. Sabemos que $n-1$ divide m ou $m-1$, assim, $n-1$ divide $ln(n-2)$ ou $ln(n-2)-1$. Escrevendo $ln(n-2)$ como $ln(n-1) - l(n-1) - l$, vemos que $n-1$ divide l ou $l+1$. Consequentemente, l pode ser escrito como $k(n-1) - \varepsilon_2$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $\varepsilon_2 \in \{0, 1\}$. Reunindo todas as informações até aqui obtidas, temos

$$m = kn(n-1)(n-2) + \varepsilon_1(n-1)(n-2) - \varepsilon_2 n(n-2)$$

onde k é um número inteiro e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$. Portanto

$$m \equiv \varepsilon_1(n-1)(n-2) - \varepsilon_2 n(n-2) \pmod{n(n-1)(n-2)}$$

como queríamos demonstrar. \square

Referências Bibliográficas

- [1] J. S. Birman, *Braids, links and mapping class groups*, *Ann. Math. Stud.* **82**, Princeton University Press, 1974.
- [2] van Buskirk, James, Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order. *Trans. Amer. Math. Soc.* **122** 1966 81–97.
- [3] Cohen, F. R.; Gitler, S. On loop spaces of configuration spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), no. 5, 1705–1748.
- [4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn & Bacon, 1966.
- [5] E. Fadell, Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac, *Duke Math. J.* **29** (1962) 231–242.
- [6] E. Fadell and J. Van Buskirk, The braid groups of \mathbb{E}^3 and \mathbb{S}^2 , *Duke Math. J.* **29** (1962) 243–257.
- [7] E. Fadell and L. Neuwirth, Configuration spaces, *Math. Scandinavica* **10** (1962), 111–118.
- [8] C. H. Goldberg, *An exact sequence of braid groups*, *Math. Scand.* **33** (1973) 69–82.
- [9] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, The roots of the full twist for surface braid groups, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **137** (2004) 307–320.

- [10] D. L. Gonçalves & J. Guaschi, The braid group $B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$ and a generalisation of the Fadell-Neuwirth short exact sequence, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), no. 3, 375–403.
- [11] V. L. Hansen, Braids and Coverings: Selected topics, *London Math. Society Student Text* **18**, Cambridge University Press, 1989.
- [12] T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 73 (Springer-Verlag, 1980).
- [13] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [14] D. L. Johnson, *Presentation of Groups*, London Mathematical Society Notes Series, Vol. 22 (Cambridge University Press, 1976).
- [15] V. C. Lass, *Grupos de Tranças do Espaço Projetivo*, Dissertação de Mestrado, ICMC, USP, 2011.
- [16] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [17] F. P. Maringolo, *Grupo de Tranças e Espaços de Configurações*, Dissertação de Mestrado, PPGM, UFSCar, 2007.
- [18] K. Murasugi, Seifert fibre spaces and braid groups, *Proc. London Math. Soc.* **44** (1982) 71-84.
- [19] E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966(reprinted by Springer-Verlag).