UNIVERSIDADE FEDERAL DE SAO CARLOS
CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Vetores Gevrey em Estruturas Localmente Integráveis do Tipo Tubo

Igor Ambo Ferra

São Carlos - SP
Janeiro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SAO CARLOS
CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Vetores Gevrey em Estruturas Localmente Integráveis do Tipo Tubo

Igor Ambo Ferra

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para obtencão do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi

São Carlos - SP
2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

F368vg

Ferra, Igor Ambo.
Vetors Gevrey em estruturas localmente integráveis do tipo tubo / Igor Ambo Ferra. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
118 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Equações diferenciais parciais lineares. 2. Regularidade global Gevrey. 3. Estruturas do tipo tubo. 4. Estruturas localmente integráveis. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi
DM- UFSCar

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
DM- UFSCar

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
FFCL-USP Ribeirão Preto

Agradecimentos

A minha família pelo apoio e suporte e aos amigos que tornaram os dias menos difíceis.

Ao professor Rafael, não apenas pela orientação e dedicação neste trabalho, mas também pela sua influência em minha formação ao longo desses anos.

Ao professor Gerson pela sua grande contribuição no desenvolvimento desse trabalho.

À Tatiane pela sua paciência e pela companhia nos momentos necessários.

Aos professores Daniel Octaviano e José Carlos Martinez, responsáveis pelos meus primeiros passos na matemática.

Resumo

Seja $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ função analítica definida em vizinhança de uma bola $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ centrada na origem tomando valores em $\mathbb{R}^m$ e considere os campos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

que geram uma estrutura do tipo tubo em $\mathbb{R}^m \times \Theta$. Este trabalho traz um estudo de regularidade Gevrey para os vetores Gevrey do sistema $\mathfrak{L}$, ou seja, sobre algumas hipóteses de Φ, podemos garantir que se u é um s-vetor Gevrey para $\mathfrak{L}$, então u é uma função Gevrey de ordem s', sendo $s' \geq s$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Se P é um operador diferencial linear analítico de ordem m em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $s \geq 1$, dizemos que $u \in D'(\Omega)$ é um s-vetor Gevrey para P quando $P^k u \in L^2_{loc}(\Omega)$ para todo $k = 0, 1, \ldots$ e para todo $K \subset \Omega$ compacto, existe $C > 0$ tal que

$$\left\|P^k u\right\|_{L^2(K)} \leq C^{k+1} k!^{ms}, k = 0, 1, \ldots.$$

Diversas referências, como por exemplo [7], [16], [10] e [4], estudam propriedades de tais objetos. Uma das questões investigadas é a regularidade Gevrey dos s-vetores Gevrey para P, ou seja, se u é um s-vetor Gevrey para P, existe $s' \geq 1$ tal que u é função Gevrey de ordem s. Algumas hipóteses sobre P (elipticidade, por exemplo) nos dão uma resposta afirmativa com $s' = s$.

Neste trabalho, introduziremos o conceito (presente em [8]) de vetores Gevrey para um sistema $\mathfrak{L}$ de campos lineares de primeira ordem que geram uma estrutura do tipo tubo. Mais precisamente, iremos considerar Φ uma função analítica em uma vizinhança de uma bola $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ centrada na origem que toma valores em $\mathbb{R}^m$ e tal que $\Phi(0) = 0$. Os campos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x_k}, j = 1, \ldots, n,$$

geram uma estrutura involutiva do tipo tubo (nome dado pela não dependência de x da função Φ) de posto n em $\mathbb{R}^m \times \Theta$ (ϕ_k são as coordenadas de Φ). O ortogonal de tal estrutura é gerado pelos diferenciais de

$$Z_k(x,t) = x_k + i\phi_k(t), k = 1, \ldots, m.$$

Se $\Omega = U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \Theta$ é um aberto, dizemos que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é um s-vetor Gevrey para $\mathfrak{L}$ quando $L^\alpha u \in L^\infty_{loc}(V, L^1_{loc}(U))$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, sendo $L^\alpha = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n}$ se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, e dado $K = K_1 \times K_2$ compacto, existe $C = C_K > 0$ de modo que

$$\|L^\alpha u\|_{L^\infty(K_2, L^1(K_1))} \leq C_K^{|\alpha|+1} \alpha!^s, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+.$$

O conjunto dos s-vetores Gevrey para $\mathfrak{L}$ é denotado por $G^s(\Omega; \mathfrak{L})$. O caso $s = 1$ também é tratado como o caso analítico. Assim como no caso em que $n = 1$, estamos interessados em estudar inclusões $G^s(\Omega; \mathfrak{L}) \subset G^{s'}(\Omega)$, com $1 \leq s, s'$, ou seja, obter regularidade Gevrey dos vetores Gevrey para $\mathfrak{L}$.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar de forma detalhada os resultados obtidos em [8] sobre regularidade Gevrey dos vetores Gevrey para o sistema $\mathfrak{L}$. Quando colocamos mais algumas hipóteses sobre Φ, as referências [2] e [5] nos mostram que o estudo de hipoelipticidade analítica em vizinhança de 0 de soluções de $L_j u = 0, j = 1, \dots n$ está relacionada com o fato dos funcionais $t \longrightarrow \Phi(t) \cdot \xi$ não terem mínimo em $t = 0$ quando $\xi \neq 0$. Isso nos motivará a supor que tais funcionais são aplicações abertas.

Sob essas condições, a referência [8] demonstra que todo vetor analítico para $\mathfrak{L}$ é uma função analítica. No entanto, mesmo nessas hipóteses, se $m = n = 2$ podemos encontrar um s-vetor Gevrey que não é função de classe $\mathcal{C}^1$, enquanto que se $m = 1$, conseguimos garantir que todo s-vetor Gevrey é uma função Gevrey de ordem s', sendo que s' depende tanto de s quanto do expoente de Lojasiewicz da função Φ. Todos esses resultados serão detalhados no último capítulo deste trabalho.

Capítulo 2

Espaços Gevrey

Neste capítulo introduziremos e desenvolveremos as ferramentas sobre as funções Gevrey, com as quais trabalharemos nos principais resultados deste trabalho. Tais funções surgem naturalmente no estudo do operador do calor $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ em R^{n+1} nas variáveis $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Uma exposição mais detalhada pode ser vista em [17].

2.1 Notações e desigualdades

Antes de tudo, fixaremos algumas notações ao longo desta seção e mostraremos algumas desigualdades que nos serão úteis.

Um N-multi-índice é uma N-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ formada por inteiros não negativos. Dado um multi-índice α, denotamos

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha 1} \partial_{x_2}^{\alpha 2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N},$$

sendo que $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$ indica a derivada parcial com relação à variável x_j. Denotamos também

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_N}^{\alpha_N},$$

sendo $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$.

Dados dois multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, escrevemos $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_j \leq \alpha_j$, para todo $j = 1, \ldots N$. Definimos também o módulo de um multi-índice α e seu fatorial respectivamente por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$$

e

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_N!. \tag{2.1}$$

O coeficiente binominal entre dois multi-índices α e β é definido quando $\beta \leq \alpha$ e dado por

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}. \tag{2.2}$$

Dados $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e um multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, denotamos também

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N}. \tag{2.3}$$

Se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, então uma indução sobre $|\alpha|$ nos mostra que vale a fórmula de Leibniz

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \cdot \partial^\beta g. \tag{2.4}$$

Além disso, a série de Taylor de uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ em torno de $x_0 \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, é definida por

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha. \tag{2.5}$$

Uma função é dita analítica em Ω quando todo ponto $x_0 \in \Omega$ possui uma vizinhança V que o contém e na qual f é dada por sua série de Taylor. O conjunto das funções analíticas de Ω será denotado por $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$.

As desigualdades que aqui serão obtidas seguem basicamente do Binômio de Newton generalizado e da série de Taylor da função exponencial em torno de 0. Quanto ao primeiro, dados $t_1, \ldots, t_n$ números reais e $N > 0$ um inteiro positivo, vale

$$(t_1 + \ldots + t_n)^N = \sum_{|\alpha| = N} \frac{N!}{\alpha!} t^\alpha, \tag{2.6}$$

onde a soma é feita com $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Se escolhermos $t_j = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$, temos

$$n^N = \sum_{|\alpha| = N} \frac{N!}{\alpha!}. \tag{2.7}$$

Em particular, se fixarmos $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $N = |\alpha|$, obtemos

$$n^{|\alpha|} = \sum_{|\beta|=|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\beta!}.$$

Um dos termos da soma do lado direito é $\frac{|\alpha|!}{\alpha!}$, o que nos dá

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!. \tag{2.8}$$

Se considerarmos $n = 2$ na Equação (2.7), isto é, se trabalharos com índices duplos, concluímos que

$$2^N = \sum_{j+k=N} \frac{N!}{j!k!}, \tag{2.9}$$

uma vez que $|(j,k)| = j + k$. Além disso, a equação (2.8) nos mostra que

$$(j+k)! \leq 2^{j+k} j!k!. \tag{2.10}$$

Da Equação (2.9), segue que

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}. \tag{2.11}$$

De fato, se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$, então

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = \sum_{j+k=\alpha} \frac{\alpha!}{j!k!} = 2^\alpha.$$

Para o caso geral, suponha $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} &= \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \\
&= \sum_{\beta_i \leq \alpha_i,\ i=1,\ldots N} \left[\frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\beta_1)!\beta_1!} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_N!}{(\alpha_N-\beta_N)!\beta_N!} \right] \\
&= \sum_{\beta_1 \leq \alpha_1} \left[\frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\beta_1)!\beta_1!} \right] \cdot \ldots \cdot \sum_{\beta_N \leq \alpha_N} \left[\frac{\alpha_N!}{(\alpha_N-\beta_N)!\beta_N!} \right] \\
&= 2^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot 2^{\alpha_N} \\
&= 2^{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

$\square$

Em particular, para todo $\beta \leq \alpha$, vale

$$\binom{\alpha}{\beta} \leq 2^{|\alpha|}. \tag{2.12}$$

Agora, analisemos a série de Taylor da função exponencial:

$$e^t = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{t^N}{N!}. \tag{2.13}$$

Observe que se $t > 0$ e N é um inteiro não negativo, temos

$$t^N \leq N! e^t. \tag{2.14}$$

Como $N! \leq N^N$, $\forall N = 1, 2, 3, \ldots$, segue que

$$t^N \leq N^N e^t. \tag{2.15}$$

Podemos melhorar a última desigualdade:

$$t^d \leq d^d e^{t-d}, \forall t, d > 0. \tag{2.16}$$

De fato, tomando o logaritmo, a desigualdade acima equivale a

$$d \log t \leq d \log d + (t - d).$$

Fixe $d > 0$ e defina $f(t) = d \log d + (t - d) - d \log t$. Derivando,

$$f'(t) = 1 - \frac{d}{t}.$$

Assim, $f'(t) > 0$ se $t > d$ e $f'(t) < 0$ se $t < d$. Como $f(d) = 0$, segue a desigualdade (2.16). Em particular, se $d > 0$, temos $e^d > 1$, e portanto

$$t^d e^{-t} \leq d^d, \forall t, d > 0. \tag{2.17}$$

$\square$

As seguintes desigualdades também serão úteis:

$$\alpha! \leq |\alpha|!, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{2.18}$$

De fato, vamos fazer indução sobre $|\alpha| = k$. Se $k = 0$, vale a igualdade. Podemos supor que $\alpha_1 > 0$ e definir $\alpha' = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$. Então $|\alpha'| = n$ e

$$\alpha'! \leq |\alpha'|!,$$

ou seja

$$(\alpha_1 - 1)!\alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_N! \leq (\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)!.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \alpha! &= \alpha_1(\alpha_1 - 1)!\alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_N! \\ &\leq \alpha_1(\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)! \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\alpha|! &= (\alpha_1 + \ldots + \alpha_N) \cdot (\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)! \\ &\geq \alpha_1(\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)!, \end{aligned}$$

o que demonstra (2.18). □

$$|\alpha|! \leq |\alpha|^{|\alpha|}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{2.19}$$

Esta segue pois $|\alpha|!$ possui $|\alpha|$ fatores, os quais são sempre menores do que ou iguais à $|\alpha|$. □

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}|\alpha|!, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{2.20}$$

Tal desigualdade segue diretamente da desigualdade (2.14), se considerarmos $t = N = |\alpha|$. □

$$(\alpha - \beta)! \leq \alpha!\beta!^{-1}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N, \beta \leq \alpha. \tag{2.21}$$

Basta observar que

$$1 \leq \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

□

$$\alpha!\beta! \leq (\alpha+\beta)!, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{2.22}$$

Defina $\gamma = \alpha + \beta$. Então $\alpha \leq \gamma$ e, de (2.21), segue que

$$(\gamma - \alpha)!\alpha! \leq \gamma!,$$

ou seja

$$\beta!\alpha! \leq (\alpha+\beta)!.$$

□

$$\binom{\alpha}{\beta} \leq \binom{|\alpha|}{|\beta|}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{2.23}$$

A igualdade vale trivialmente no caso em que $N = 1$. Observe que, uma vez provado o caso $N = 2$, o caso geral segue por indução em N. Já para o caso $N = 2$, fazemos indução sobre $|\alpha|$. Se $|\alpha| = 0$, então devemos estudar apenas o caso $\beta = \alpha = 0$, no qual vale a igualdade. O caso $|\alpha| = 1$ também segue sem maiores dificuldades. Supondo válido para $|\alpha| = k$, vamos considerar $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $|\alpha| = k+1$, com $k \geq 1$. Neste caso, (2.23) se escreve como

$$\frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\beta_1)!\beta_1!}\frac{\alpha_2!}{(\alpha_2-\beta_2)!\beta_2!} \leq \frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)!\,(\beta_1+\beta_2)!}.$$

Assim, podemos supor também que $0 < \beta_1 < \alpha_1$ e $0 < \beta_2 < \alpha_2$. Observe que $\alpha_2\beta_1 \leq \alpha_1\beta_2$ ou $\alpha_1\beta_2 \leq \alpha_2\beta_1$. Se $\alpha_2\beta_1 \leq \alpha_1\beta_2$, definimos $\alpha' = \alpha - e_1$, e obtemos $|\alpha'| = k$ e $\beta \leq \alpha'$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\beta_1)!\beta_1!}\frac{\alpha_2!}{(\alpha_2-\beta_2)!\beta_2!} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1-\beta_1}\binom{\alpha'}{\beta} \\
&\leq \frac{\alpha_1}{\alpha_1-\beta_1}\binom{|\alpha'|}{|\beta|} \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1-\beta_1}\frac{(\alpha_1+\alpha_2-1)!}{(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1)!\,(\beta_1+\beta_2)!}.
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\beta_1}\frac{(\alpha_1+\alpha_2-1)!}{(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1)!\,(\beta_1+\beta_2)!}\leq\frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)!\,(\beta_1+\beta_2)!}$$

equivale a dizer que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\beta_1}\leq\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2},$$

e essa desigualdade segue da nossa hipótese $\alpha_2\beta_1 \leq \alpha_1\beta_2$. O caso $\alpha_1\beta_2 \leq \alpha_2\beta_1$ é feito de maneira análoga, definindo $\alpha' = \alpha - e_2$. □

2.2 Espaços Gevrey

Introduziremos agora as funções Gevrey e deduziremos algumas de suas propriedades.

Definição 2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $s \geq 1$ um número real. O espaço das funções Gevrey de ordem s, o qual será denotado por $G^s(\Omega)$, é o subespaço das funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ de Ω tais que para cada compacto $K \subset \Omega$, existe um constante $C = C(K) > 0$ que satisfaz*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s, \tag{2.24}$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ e $x \in K$.

Observe que $G^s(\Omega) \subset G^{s'}(\Omega)$ quando $s \leq s'$. Além disso, a estimativa (2.24) é equivalente às seguintes estimativas (mudando a constante se necessário):

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq RC^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \text{ para algum } R > 0. \tag{2.25}$$

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(|\alpha!|)^s. \tag{2.26}$$

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(|\alpha|)^{s|\alpha|}. \tag{2.27}$$

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}((|\alpha|+A)!)^s, \text{ para } A \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.28}$$

De fato, se (2.24) vale, basta definir $R = C$ para obter (2.25). Reciprocamente, defina $M = \max\{R, C\}$ para obter

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq RC^{|\alpha|}(\alpha!)^s \leq M^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s,$$

obtendo portanto, (2.24). Segue de (2.18) que $1 \leq \alpha! \leq |\alpha|!$ e portanto, (2.24) nos dá (2.26) facilmente. Reciprocamente, se (2.26) vale, usamos (2.8) para obter

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq N^{s|\alpha|} C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s \leq (N^s C)^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s.$$

Se (2.24) vale, basta usar (2.18) e (2.19) para obter (2.27). Reciprocamente, suponha que (2.27) seja válido. De (2.20), segue que

$$C^{|\alpha|+1} (|\alpha|)^{s|\alpha|} \leq C^{|\alpha|+1} (e^{|\alpha|} |\alpha|!)^s \leq (e^s C)^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s.$$

Obtemos então (2.26). Como $1 \leq \alpha! \leq (|\alpha| + A)!$,para todo $A \in \mathbb{Z}_+$, (2.24) implica (2.28). Agora, se (2.28) é valido, usando (2.10), obtemos

$$((|\alpha| + A)!)^s \leq (2^s)^{|\alpha|} (2^s)^A (A!)^s (|\alpha|!)^s.$$

Escrevendo $C' = (2^s)^A (A!)^s$, obtemos

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq (C2^s)^{|\alpha|} CC' (|\alpha|!)^s.$$

Definindo $M = \max\{C2^s, CC'\}$, segue que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq M^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s.$$

Proposição 2.2 *O conjunto $G^1(\Omega)$ coincide com o conjunto $C^\omega(\Omega)$.*

Demonstração. Comecemos com $f \in C^\omega(\Omega)$ e considere $K \subset \Omega$ compacto. Defina $r = \frac{d(K, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)}{2} > 0$ e considere $U \subset \mathbb{C}^N$ tal que $U \cap \mathbb{R}^N = \Omega$ e f admite uma extensão holomorfa $\tilde{f}$ em U (ver [9, p. 209]). Segue que para todo $x = (x_1, \ldots, x_N) \in K$, o polidisco

$$\Delta(x, r) = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_j - x_j| < r, j = 1, \ldots, N \right\}$$

está contido em U. Como $\partial_x^\alpha f(x) = \partial_z^\alpha \tilde{f}(x + iy)\Big|_{y=0}$, usamos a fórmula integral de Cauchy para polidiscos e obtemos

$$\partial_x^\alpha f(x) = \frac{\alpha!}{(2\pi)^N} \int_{|z_1 - x_1| = r} \cdots \int_{|z_N - x_N| = r} \frac{\tilde{f}(z_1, \ldots, z_N) dz_1 \ldots dz_N}{(z_1 - x_1)^{\alpha_1 + 1} \ldots (z_N - x_N)^{\alpha_N + 1}}.$$

Dessa forma, se $R = \sup_{z \in \Delta(x,r), x \in K} |f(z)|$, então

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha f(x)| &\leq R \frac{\alpha!}{(2\pi)^N} \frac{(2\pi)^N r^N}{r^{|\alpha|+N}} \\ &\leq R\left(r^{-1}\right)^{|\alpha|} \alpha!, \end{aligned}$$

o que mostra, por (2.25), que $f \in G^1(\Omega)$.

Reciprocamente, suponha que $f \in G^1(\Omega)$ e considere $x_0 \in \Omega$. Segue da Fórmula de Taylor que

$$f(x_0 + x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f(x_0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} + r_k(x), \tag{2.29}$$

sendo

$$r_k(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \theta x), \tag{2.30}$$

$0 < \theta < 1$, $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$ tal que $[x_0, x] \in \Omega$. Considere $r > 0$ tal que $B = \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$. Como $f \in G^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha f(y)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s, \forall y \in B, \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Assim, se $|x| < \min\left\{\frac{1}{2NC}, r\right\}$, então $x_0 + \theta x \in B$ e segue que

$$\begin{aligned} |r_k(x)| &\leq \frac{C}{(k+1)!} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} C^{k+1} |x|^{k+1} \alpha! \\ &\leq C(NC)^{k+1} |x|^{k+1} \\ &\leq C\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Isso mostra que a série de Taylor de f converge para f em uma vizinhança de x_0, o que mostra sua analiticidade. $\square$

O próximo passo é construir funções corte em G^s para $s > 1$, ou seja, funções de classe G^s com suporte compacto que valem 1 em um compacto dado. Pelo o que acabamos de demonstrar, não é possível obter tais funções no caso $s = 1$, pois a única função analítica com suporte compacto é a função nula.

Exemplo 2.3 *Uma das ideias clássicas para se construir funções de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ com* *suporte compacto consiste em construir uma tal função no caso unidimensional e depois utilizar translações, homotetias e produto de funções do mesmo tipo para obter no caso geral. Já para conseguir tal função em* $\mathbb{R}$*, construímos uma função de classe* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *que se anula se* $x < 0$*. A estratégia que seguiremos é a mesma, porém para obter função de classe* G^s *o trabalho é um pouco mais árduo. Para* $s > 1$*, considere* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t^{\frac{1}{s-1}}} & se \quad t > 0 \\ 0 & se \quad t \leq 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Como $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t^\alpha e^{-1/t^\beta} = 0$ *quando* $\beta > 0$*, temos que* $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$*. Vamos mostrar que existe* $C > 0$ *tal que*

$$|g^{(k)}(t)| \leq C^k (k!)^s, \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Afirmamos que existe $\rho = \rho(s) > 0$ *tal que se* $t > 0$ *e se*

$$z \in \gamma_p(t) = \left\{ t(1 + \rho e^{i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

então

$$\operatorname{Re}\left(1/z^{\frac{1}{s-1}}\right) > 1/2t^{\frac{1}{s-1}}. \tag{2.32}$$

De fato, primeiro note que se $z = t(1 + \rho e^{i\theta})$*, então*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(1/z^{\frac{1}{s-1}}\right) &= \frac{\operatorname{Re}\left[\left(t\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)\right)^{\frac{1}{s-1}}\right]}{\left|\left(t\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)\right)^{\frac{1}{s-1}}\right|^2} \\ &= 1/t^{\frac{1}{s-1}} \frac{\operatorname{Re}\left[\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right]}{\left|\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right|^2}. \end{aligned}$$

Considere a função contínua

$$\psi(\rho) = \frac{\min\left\{ \operatorname{Re}\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{s-1}} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}}{\max\left\{ \left|\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right|^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}}.$$

Como $\psi(0) = 1$*, para* $\epsilon = \frac{1}{2}$ *existe* $0 < \delta < 1$ *tal que se* $\rho < \delta$*, então* $\frac{1}{2} < \psi(\rho) < \frac{3}{2}$*. Logo, se* $\rho = \frac{\delta}{2}$*, vale (2.32) para todo* $z \in \gamma_\rho(t)$*, qualquer que seja* $t > 0$*. Na região do plano* *complexa definida por* $\operatorname{Re} z > 0$ *podemos complexificar a variável* t*, ou seja, considerar* $z = t + iy$ *e, utilizando a Fórmula de Cauchy e* (2.32)*, obter*

$$\begin{aligned} \left|g^{(k)}(t)\right| &= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(t)} \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}}dz\right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi}\frac{1}{(\rho t)^{k+1}} \sup_{z\in\gamma_\rho(t)} \left|e^{-1/z^{\frac{1}{s-1}}}\right| 2\pi\rho t \\ &\leq k!\rho^{-k}\frac{e^{-1/2t^{\frac{1}{s-1}}}}{t^k}, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$*. Da desigualdade* (2.16) *obtemos* $e^{-t} \leq t^{-d}d^d e^{-d}$*, para* $t, d > 0$*. Escolhemos* $t = 1/2t^{\frac{1}{s-1}}$ *e* $d = (s-1)k$ *para concluir que*

$$\begin{aligned} \frac{e^{-1/2t^{\frac{1}{s-1}}}}{t^k} &= \frac{e^{-1/2t^{\frac{1}{s-1}}}}{\left(t^{\frac{1}{s-1}}\right)^{(s-1)k}} \\ &\leq \frac{\left(1/2t^{\frac{1}{s-1}}\right)^{-(s-1)k}\left[(s-1)\,k\right]^{(s-1)k} e^{-(s-1)k}}{\left(t^{\frac{1}{s-1}}\right)^{(s-1)k}} \\ &\leq 2^{(s-1)k}\left[(s-1)\,k\right]^{(s-1)k} e^{-(s-1)k} \\ &= \left[\frac{e}{2\,(s-1)}\right]^{-(s-1)k}\left(k^k\right)^{s-1} \\ &\leq \left[\frac{e}{2\,(s-1)}\right]^{-(s-1)k}\left(k!e^k\right)^{s-1} \\ &= \left[\frac{1}{2\,(s-1)}\right]^{-(s-1)k}(k!)^{s-1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $t > 0$*,*

$$\begin{aligned} \left|g^{(k)}(t)\right| &\leq \frac{k!}{\rho^k}\left[\frac{1}{2\,(s-1)}\right]^{-(s-1)k}(k!)^{s-1} \\ &= C^k\,(k!)^s, \end{aligned}$$

sendo $C = \left[\frac{1}{2(s-1)}\right]^{-(s-1)}\frac{1}{\rho}$*, o que termina a demonstração.*

$\square$

Proposição 2.4 *Dados $s \geq 1$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, o conjunto $G^s(\Omega)$ é espaço vetorial e anel com as operações usuais no espaço de funções.*

Demonstração. Mostraremos apenas que se $f, g \in G^s(\Omega)$, então $fg \in G^s(\Omega)$. Dado $K \subset \Omega$ compacto, podemos escolher $C > 0$ tal que $|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s$ e $|\partial^\alpha g(x)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s$, para todo $x \in K$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Assim, se $x \in K$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, temos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (f \cdot g)(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^{\alpha-\beta} f(x)\right| \left|\partial^\beta g(x)\right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C^{|\alpha|-|\beta|+1} [(\alpha-\beta)!]^s C^{|\beta|+1} (\beta!)^s . \end{aligned}$$

Usando (2.21) e (2.11), obtemos

$$|\partial^\alpha (f \cdot g)(x)| \leq C^{|\alpha|+2} (\alpha!)^s 2^{|\alpha|}.$$

Se definirmos $C' = \max\{2C, C^2\}$, obtemos

$$|\partial^\alpha (f \cdot g)(x)| \leq C'^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s, \forall x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

□ Usando a notação do Exemplo 2.3, obtemos da Proposição 2.4 que se $s > 1$, então a

função

$$\psi(x) = \prod_{j=1}^N g(r + x_j) g(r - x_j), x = (x_1, \ldots, x_N),$$

é uma função não negativa de classe G^s que possui suporte compacto contido na bola $\overline{B(x;r)}$ (na norma do máximo). Consequentemente, se $G_0^s(\Omega)$ é formado pelas funções $f \in G^s(\Omega)$ que possuem suporte compacto, então $G_0^s(\Omega) \neq \{0\}$ quando $s > 1$.

Proposição 2.5 *Sejam $\varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^N)$, $s > 1$, tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{B(0;1)}$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx = 1$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Defina, para $\epsilon > 0$,*

$$f_\epsilon(x) = \int f(x - \epsilon y) \varphi(y) dy = \epsilon^{-N} \int f(y) \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy.$$

Então $f_\epsilon \in G^s(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Observe que se $\varphi^{(\epsilon)}(x) = \epsilon^{-N}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, então $\varphi^{(\epsilon)} \in G_0^s(\mathbb{R}^N)$ e $f_\epsilon = f * \varphi^{(\epsilon)}$. Utilizando o Teorema da Convergência Dominada e derivando sob o sinal de integração, obtemos que $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Considere agora $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e defina $K' = K - \overline{B(0;\epsilon)}$, o qual ainda é compacto. Observe que se $x \in K$, então

$$\operatorname{supp} \varphi \left(\frac{x - \cdot}{\epsilon}\right) \subset K'.$$

Como $\varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^N)$, existe $C > 0$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, vale

$$|\partial^\alpha \varphi(y)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s .$$

Assim, se $x \in K$, temos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha f_\epsilon(x)| &\leq \epsilon^{-N-|\alpha|} \int_{K'} |f(y)| \left|\partial^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right| dy \\ &\leq \epsilon^{-N-|\alpha|} C^{|\alpha|+1} \|f\|_{L^1(K')} (\alpha!)^s \\ &= C'^{|\alpha|+1} R\, (\alpha!)^s , \end{aligned}$$

sendo que definimos $C' = \frac{C}{\epsilon}$ e $R = \epsilon^{-N} C \|f\|_{L^1(K')}$. □

Observação 2.6 *Segue da Proposição 2.5 que se $s > 1$, então dado um compacto $K \subset \Omega$, existe $\varphi \in G_0^s(\Omega)$ tal que $\varphi = 1$ em K e $0 \leq \varphi \leq 1$ (ver [13, p. 7]).*

2.3 Regularidade e Microrregularidade Gevrey

O objetivo desta seção é obter informações sobre a regularidade G^s de uma distribuição estudando a sua transformada de Fourier. Ou seja, daremos condições necessárias e suficientes para dizer quando uma distribuição é uma função de classe G^s. Começaremos a seção com alguns lemas iniciais para deduzir algumas desigualdades que uma função em $G_0^s(\Omega)$ satisfaz.

Lema 2.7 *Seja f uma função limitada definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e considere $s \geq 1$. As segintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existem constantes C_1 e ϵ positivas tais que*

$$|f(\xi)| \leq C_1 e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}; \tag{2.33}$$

2. *Existe $C_2 > 0$ que não depende de n tal que*

$$|f(\xi)| \leq C_2^{n+1} n! \, |\xi|^{-n/s}, \forall n = 1, 2, \ldots; \tag{2.34}$$

Existe $C_3 > 0$ que não depende de n tal que

$$|f(\xi)| \leq C_3^n \left(\frac{C_3 n}{|\xi|^{1/s}} \right)^n, \forall n = 1, 2, \ldots. \tag{2.35}$$

Demonstração. Se (2.33) é valido, então

$$|f(\xi)| \, e^{\epsilon|\xi|^{1/s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(\xi)| \, \epsilon^n \, |\xi|^{1/s}}{n!} \leq C_1.$$

Logo, para todo $n = 1, 2, \ldots$ obtemos

$$|f(\xi)| \leq C_1 \epsilon^{-n} n! \, |\xi|^{-n/s},$$

de onde obtemos (2.34) se definirmos $C_2 = \max\{C_1, \epsilon^{-1}\}$. Reciprocamente, suponha que vale (2.34) e defina $C_1 = \max\{C_2, \sup|f|\}$. Segue que

$$|f(\xi)| \, C_2 {-} nn!^{-1} \, |\xi|^{n/s} \leq C_1, \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Se $\epsilon = \frac{1}{2C_2}$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(\xi)| \, \epsilon^n \, |\xi|^{n/s}}{n!} \leq C_1,$$

o que nos dá (2.33). A equivalência entre (2.34) e (2.35) segue de (2.14). $\square$

Lema 2.8 *Considere $p > 0$ um número real, $s \geq 1$ e $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que* $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, *sendo $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto. Seja $M \geq 1$ o menor inteiro tal que $p/s \leq M$ e suponha* *que exista $C > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C^{|\alpha|+1} M^{s|\alpha|}, \forall\, |\alpha| \leq M, \forall x. \tag{2.36}$$

Então

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C' \left(C' p\right)^p |\xi|^{-p/s}, \forall \xi, \tag{2.37}$$

sendo que $C' > 0$ não depende de p e nem de φ, mas depende de C e do compacto K.

Demonstração. Se $|\alpha| = M$ e $|K|$ indica a medida de K, segue de (2.36) que

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| &= |(D^\alpha \varphi)\hat{}(\xi)| \\ &\leq \int_K |\partial^\alpha \varphi(x)|\, dx \\ &\leq C_1^{M+1} M^{sM}, \end{aligned}$$

sendo $C_1 = \max\{C, C\,|K|\}$. Afirmamos que existe $C_2 > 0$ que não depende de p nem de φ tal que

$$|\xi|^{p/s} |\hat{\varphi}(\xi)| \leq C_2^{M+1} M^{sM}. \tag{2.38}$$

De fato, podemos supor que $C > 1$. Assim, se $|\xi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |\xi|^{p/s} |\hat{\varphi}(\xi)| &\leq |K|\, C \\ &\leq |K|\, C^M M^{sM}. \end{aligned}$$

Se $|\xi| \geq 1$, escrevemos $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ e vamos supor que $|\xi_1| = \max_{1 \leq j \leq N} |\xi_j|$. Se definirmos $\alpha = M e_1$, sendo e_1 o vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$, então $|\xi|^M \leq N^{M/2} |\xi^\alpha|$. Logo,

$$|\xi|^{p/s} |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \left(N^{1/2} C_1\right)^M C_1 M^{sM}.$$

Obtemos (2.38) se definirmos $C_2 = \max\left\{N^{1/2} C_1, C_1, |K|, C\right\}$. Da definição de M, temos $M - 1 < p/s$, o que no dá $sM < s + p$. Assim, $M^{sM} \leq (p+s)^{p+s}$, e portanto

$$|\xi|^{p/s} |\hat{\varphi}(\xi)| \leq C_2^{p+s} C_2 (p+s)^{p+s}. \tag{2.39}$$

Observe que a função $f(x) = (x+s)^{x+s}e^{-x}x^{-x}$ possui um máximo em $(0,\infty)$, o qual denotaremos por A. De (2.39), obtemos

$$|\xi|^{p/s}\,|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C_2^{p+s}C_2\,(ep)^p$$

e o resultado fica demonstrado se definirmos $C' = \max\left\{C_2^{s+1}, eC_2\right\}$. □

Com esses lemas, obtemos desigualdades importantes para funções em $G_0^s(\Omega)$. Mais precisamente, temos a

Proposição 2.9 *Se $\varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^N)$, então existem constantes C e ϵ positivas tais que*

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq Ce^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}. \tag{2.40}$$

Demonstração. Como $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, se $K = \operatorname{supp}\varphi$, exite $C > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha\varphi(x)| \leq C^{|\alpha|+1}\,|\alpha|^{s|\alpha|}\,, \forall x.$$

Com as mesmas notações do Lema 2.8, se $p = n \in \mathbb{Z}_+$ e $|\alpha| \leq M$, então

$$|\partial^\alpha\varphi(x)| \leq C^{|\alpha|+1}M^{s|\alpha|}, \forall x.$$

O Lema 2.8 nos garante que existe $C' > 0$ tal que

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C'(C'n)^n\,|\xi|^{-n/s}\,,$$

sendo que C' não depende de n. O resultado segue do Lema 2.7. □

Observação 2.10 *Ao longo do texto também usaremos que se $\varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^N)$, então existe $C > 0$ tal que*

$$|\xi|^n\,|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C^{n+1}n!^s, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

O argumento é o mesmo da proposição 2.9 se utilizarmos $p = ns$ e $n^n \leq e^n n!$. Além disso, dado $j \in \mathbb{Z}_+$, podemos considerar $A > 0$ tal que

$$(1+|\xi|)^{n+j}\,|\hat{\varphi}(\xi)| \leq A^{n+1}n!^s, n = 1, 2, \ldots.$$

Para justificar isso, vamos supor que $C > 1$ para obter

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|)^{n+j}\,|\hat{\varphi}(\xi)| &\leq \sum_{k=0}^{n+j}\binom{n+j}{k}|\xi|^{n+j-k}\,|\hat{\varphi}(\xi)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n+j}\binom{n+j}{k}C^{n+j-k+1}\,(n+j-k)!^s \\
&\leq C^{n+j+1}(n+j)!^s\sum_{k=0}^{n+j}\binom{n+j}{k} \\
&\leq (2C)^{n+j}C(2^s)^{n+j}j!^s n!^s.
\end{aligned}$$

Assim, é suficiente definir $A = \max\{(2^{s+1}C)^j, 2^{s+1}Cj!^s\}$.

O próximo lema, feito em [17], nos ajudará a fazer tais caracterizações e também será usado ao longo do trabalho.

Lema 2.11 *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e fixe $r > 0$ real e $n > 0$ inteiro. Existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi = 1$ em K, $\varphi(x) = 0$ se $d(x;K) > r$, $0 \leq \varphi \leq 1$, e se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|\beta| \leq n$, então*

$$\left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(x)\right| \leq C_\alpha r^{-|\alpha|}\left(\frac{Cn}{r}\right)^{|\beta|}, \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.41}$$

sendo que C depende apenas da dimensão N e C_α depende apenas da dimensão N e de α.

Demonstração. Considere $\phi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{supp}\phi_0 \subset \overline{B(0;1/4)}$, $0 \leq \phi_0$ e $\int \phi_0 = 1$. Defina

$$C_\alpha = \int |\partial^\alpha \phi_0(x)|\,dx, \quad C = \max_{|\alpha|=1} C_\alpha \quad \text{e} \quad u = \chi_{K_{r/2}},$$

sendo que se $a > 0$, então $K_a = K + \overline{B(0;a)}$ e χ_X é a função característica do conjunto X. Dado $\epsilon > 0$, definimos $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-N}\phi_0(x/\epsilon)$ e consideramos

$$\varphi = u * \phi_r * \phi_{r/n} * \ldots * \phi_{r/n}, \tag{2.42}$$

sendo que o lado direito da igualdade contém n fatores do tipo $\phi_{r/n}$. Como $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, temos $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e observe que

$$\operatorname{supp}\phi_r * \phi_{r/n} * \ldots * \phi_{r/n} \subset \overline{B(0,r/2)}.$$

Assim, se $g = \phi_r * \phi_{r/n} * \ldots * \phi_{r/n}$, temos

$$\varphi(x) = \int_{\overline{B(0,r/2)}} u(x-y)g(y)dy.$$

Assim, $\phi(x) = 0$ se $d(x;K) > r$. Além disso, se $x \in K$, então para $|y| \leq r/2$ temos $x - y \in K_{r/2}$, o que nos dá $u(x-y) = 1$. Como $\int \varphi_a = 1, \forall a > 0$, temos $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi(x) = 1$ se $x \in K$. Resta apenas verificar (2.41). Escreva $\beta = \beta_1' + \ldots + \beta_n'$, com $|\beta_j'| = 1$ ou 0 (lembre que $|\beta| \leq n$) e obtemos

$$\left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(x)\right| \leq$$

$$\left|\int \ldots \int u(x - x_1 - \ldots - x_{n+1})\partial^\alpha \phi_r(x_1)\partial^{\beta_1'}\phi_{r/n}(x_2)\ldots\partial^{\beta_n'}\phi_{r/n}(x_{n+1})dx_1 \ldots dx_{n+1}\right|.$$

Dessa forma,

$$\left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(x)\right| \leq \int \left|\partial^\alpha \phi_r(x_1)\right| dx_1 \int \left|\partial^{\beta_1'}\phi_{r/n}(x_2)\right| dx_2 \cdot \ldots \cdot \int \left|\partial^{\beta_N'}\phi_{r/n}(x_{N+1})\right| dx_{N+1}.$$

Se $|\beta_j'| = 1$, então

$$\int \left|\partial^{\beta_j'}\phi_{r/n}(x)\right| dx = n/r \int \left|\partial^{\beta_j'}\phi(x)\right| dx \leq \frac{nC}{r},$$

enquanto que se $|\beta_j'| = 0$, então

$$\int \left|\partial^{\beta_j'}\phi_{r/n}(x)\right| dx = 1.$$

Como $|\beta_j'| = 1$ para exatamente $|\beta|$ multi-índices e

$$\int \left|\partial^\alpha \phi_r(x)\right| dx = r^{-|\alpha|}C_\alpha,$$

segue que

$$\left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(x)\right| \leq C_\alpha r^{-|\alpha|}\left(\frac{Cn}{r}\right)^{|\beta|}.$$

□

Corolário 2.12 *Seja Ω uma vizinhança de x_0 em $\mathbb{R}^N$. Dado $V \subset \Omega$ aberto tal que*

$x_0 \in V$, $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset \Omega$, existe uma sequência $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq 1$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, cada φ_n vale 1 em V e que cumpre

$$\left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi_n(x)\right| \leq C_\alpha \left(Cn\right)^{|\beta|}, n = 1, 2, 3, \ldots, |\beta| \leq n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{2.43}$$

sendo que as constantes C_α não dependem de n e de β e a constante C não depende de n, de β e de α.

Proposição 2.13 *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ que satisfazem (2.43). Então o produto fg também satisfaz (2.43) com novas constantes B_α e B.*

Demonstração. Considere $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ tal que $|\beta| \leq n$. Podemos supor que $C_\alpha \geq 1$ para todo α e obtemos

$$\left|D^{\alpha+\beta}(fg)(x)\right| \leq \sum_{\gamma \leq \alpha+\beta} \binom{\alpha+\beta}{\gamma} \left|D^\gamma f(x)\right| \left|D^{\alpha+\beta-\gamma} g(x)\right|.$$

Fazendo a mudança $\gamma - \alpha = \gamma'$ na soma acima (e ainda escrevendo γ ao invés de γ'), temos

$$\begin{aligned}
\left|D^{\alpha+\beta}(fg)(x)\right| &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma} \left|D^{\alpha+\gamma} f(x)\right| \left|D^{\beta-\gamma} g(x)\right| \\
&\leq \sum_{\gamma \leq \beta} 2^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha \left(Cn\right)^{|\gamma|} C_0 \left(Cn\right)^{|\beta|-|\gamma|} \\
&\leq 2^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha C_0 \sum_{\gamma \leq \beta} \left(Cn\right)^{|\beta|} \\
&\leq 2^{|\alpha|+|\beta|} C_\alpha C_0 \left(Cn\right)^{|\beta|} \left(2^N\right)^{|\beta|} \\
&= 2^{|\alpha|} C_\alpha C_0 \left(2^{N+1} Cn\right)^{|\beta|}.
\end{aligned}$$

É suficiente definirmos $B_\alpha = 2^{|\alpha|} C_\alpha C_0$ e $B = 2^{N+1} C$ para concluir a demonstração. $\square$

Proposição 2.14 *Suponha que $V_1, \ldots, V_l \subset \mathbb{R}^N$ são abertos e que $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} V_j$ é um compacto. Então para cada $n > 0$ inteiro, existem funções $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(V_j)$ que satisfazem (2.43) e*

1. $\sum_{j=1}^{l} \varphi_j(x) \leq 1, \forall x;$

2. $\sum_{j=1}^{l} \varphi_j(x) = 1$ *em uma vizinhança de* K_j;

3. $0 \leq \varphi_j \leq 1, j = 1, \ldots, l$.

Demonstração. Para cada $j = 1, \ldots, l$, existe compacto $K_j \subset V_j$ de modo que $K = \bigcup_{j=1}^{l} K_j$. Considere $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(V_j)$ que vale 1 em vizinhança de K, $0 \leq \psi_j \leq 1$ e satisfaz (2.41). Definimos

$$\varphi_1 = \psi_1;$$
$$\varphi_j = \psi_j (1 - \psi_1) \ldots (1 - \psi_{j-1}), 2 \leq j \leq l \text{ (se } 2 \leq l).$$

O resultado segue da Proposição 2.13 e de

$$\sum_{j=1}^{l} \varphi_j = 1 - (1 - \psi_1) \ldots (1 - \psi_l).$$

□

Lema 2.15 *Se* $\{u_n\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ *é um sequência limitada (na topologia fraca), então existem* $C > 0$ *e* $M \in \mathbb{Z}_+$ *tais que*

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C (1 + |\xi|)^M, \forall \xi. \tag{2.44}$$

Demonstração. Como o conjunto $H = \{u_n : n = 1, 2, \ldots\}$ é fracamente limitado, segue do Teorema A.4 que existe uma vizinhança de 0, a qual denotaremos por U, no espaço $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $H \subset U^0$ (o polar de U). Como a topologia de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é dada por uma família de seminormas (ver Apêndice A), existem $C > 0$, $M \in \mathbb{Z}_+$ e $K \subset \Omega$ compacto tais que

$$C^{-1} U_{\|\cdot\|_{M,K}} \subset U,$$

sendo que $U_{\|\cdot\|_{M,K}}$ é a semibola unitária fechada da seminorma

$$\|f\|_{M,K} = \sup_{\alpha \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|, f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Logo,

$$H \subset U^0 \subset C \left(U_{\|\cdot\|_{M,K}} \right)^0.$$

Isso significa que para todo $n = 1, 2, \ldots$, vale

$$|\langle u_n, \varphi \rangle| \leq C, \forall \varphi \in U_{\|\cdot\|_{m,K}}.$$

Fixado $\xi \in \mathbb{R}^N$, defina

$$\varphi_\xi(x) = \frac{e^{-ix\cdot\xi}}{(1+|\xi|)^M}.$$

Observe que

$$\|\varphi_\xi\|_{M,K} = \sup_{\alpha \leq M} \sup_{x \in K} \left| \frac{(-i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|)^M} \right| \leq 1,$$

de onde concluímos o resultado, já que $\left|\left\langle u, \frac{e^{-ix\cdot\xi}}{(1+|\xi|)^M} \right\rangle\right| \leq C$. □

Teorema 2.16 *Sejam $s \geq 1$, $x_0 \in \Omega$ e $u \in D'(\Omega)$. Então $u \in G^s$ em vizinhança de x_0 se, e somente se, existem vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0 e uma sequência limitada $\{u_n\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ que coincide com u em U e que satisfaz*

$$|\hat{u}_n(\xi)| \leq C \left(\frac{CL_n}{|\xi|} \right)^n, n = 1, 2, \ldots, \tag{2.45}$$

sendo $C > 0$ uma constante que não depende de n e $L_n = (n+1)^s$.

Demonstração. Suponha que u é função de classe G^s em uma vizinhança $W \subset \Omega$ de x_0. Considere $r > 0$ tal que $\overline{B(x_0; 3r)} \subset W$ e uma sequência $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega')$, sendo $\Omega' = B(x_0; 2r)$, tal que $\varphi_n = 1$ em $U = B(x_0; r)$ e vale (2.43). Definimos $u_n = \varphi_n u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Mostraremos primeiro que a sequência é limitada em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Como $u \in D'(\Omega)$, para o compacto $K = \overline{B(x_0; 2r)}$, existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{\alpha \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K).$$

Dada $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, definimos $M_1 = \max_{|\alpha| \leq m} C_\alpha$ e $M_2 = \max_{j \leq m} \|\varphi\|_{j,K}$. Como $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(K), n = 1, 2, \ldots$, segue que

$$\begin{aligned} |\langle u_n, \varphi \rangle| &\leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (\varphi_n \varphi)(x)| \\ &\leq C 2^m M_1 M_2, \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

o que prova a afirmação. Observe que se $|\beta| \leq n$, então

$$\left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right| \leq (C_0 n)^{|\beta|}, \forall x.$$

Seja $C_K \geq 1$ tal que

$$|D^{\alpha}u(x)| \leq C_K^{|\alpha|+1} |\alpha|^{s|\alpha|}, \forall x \in K.$$

Assim, se $|\alpha| = n$ e se $x \in K$, obtemos

$$\begin{aligned} |D^{\alpha}u_n(x)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right| \left|D^{\alpha-\beta}u(x)\right| \\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (C_0 n)^{|\beta|} C_K^{|\alpha|-|\beta|+1} (|\alpha| - |\beta|)^{s(|\alpha|-|\beta|)}. \end{aligned}$$

Usando que $n \leq L_n$ e $(|\alpha| - |\beta|)^s \leq L_n$, obtemos

$$\begin{aligned} |D^{\alpha}u_n(x)| &\leq C_K \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_0^{|\beta|} C_K^{|\alpha|-|\beta|} L_n^{|\beta|} L_n^{|\alpha|-|\beta|} \\ &= C_K L_n^n (C_0 + C_K)^n. \end{aligned}$$

Logo, se $|\alpha| = n$ e $C' = \max\{|K| C_K, (C_0 + C_K)\}$, temos

$$|\xi^{\alpha}\hat{u}_n(\xi)| \leq C'^{n+1} L_n^n.$$

Fixado $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ e supondo que $\max\limits_{1\leq i\leq N} |\xi_i| = |\xi_1|$, temos $|\xi|^n \leq N^{n/2} |\xi^{\alpha}|$, com $\alpha = ne_1$ (em particular, $|\alpha| = n$). Segue que

$$|\xi|^n |\hat{u}_n(\xi)| \leq N^{n/2} C'^{n+1} L_n^n.$$

Portanto, se definirmos $C = \max\left\{N^{1/2}C', C'\right\}$, obtemos

$$|\hat{u}_n(\xi)| \leq C \left(\frac{C L_n}{|\xi|}\right)^n, n = 1, 2, \ldots.$$

Reciprocamente, suponha que exista tais vizinhança U e sequência $\{u_n\}$ como no enunciado. Observe que dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, se escolhermos $n = |\alpha| + N + 1$, então

$$\int |\xi^\alpha \hat{u}_n(\xi)|\, d\xi < \infty,$$

pois $\hat{u}_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{|\xi|>1} |\xi^\alpha \hat{u}_n(\xi)| \leq C(CL_n)^n \int_{|\xi|>1} |\xi|^{-N-1} < \infty.$$

Logo, podemos usar a fórmula da transformada de Fourier inversa e, como $u = u_n$ em U, temos que se $x \in U$, então para $n = |\alpha| + N + 1$, vale

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-N} \int e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \hat{u}_n(\xi) d\xi.$$

Pelo Lema 2.15, aumentado C se necessário, existe $M \in \mathbb{Z}_+$, o qual podemos supor ≥ 1 tal que

$$|\hat{u}_n(\xi)| \leq C\,(1 + |\xi|)^M, \forall \xi.$$

Escrevemos agora

$$(2\pi)^N |D^\alpha u(x)| \leq \int_{|\xi|\leq L_n} |\xi^\alpha|\, |\hat{u}_n(\xi)|\, d\xi + \int_{|\xi|>L_n} |\xi^\alpha|\, |\hat{u}_n(\xi)|\, d\xi$$

e vamos estimar cada uma das integrais acima. Utilizamos que o volume da bola N-dimensional de raio $r > 0$ é Ar^N, com $A > 0$ que depende apenas de N e $1 \leq L_n$ para obter

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq L_n} |\xi^\alpha|\, |\hat{u}_n(\xi)|\, d\xi &\leq C \int_{|\xi|\leq L_n} L_n^{|\alpha|} (1 + L_n)^M\, d\xi \\
&\leq 2^M A C L_n^{|\alpha|+M+N} \\
&= C_1 L_n^{|\alpha|+M+N}.
\end{aligned}$$

Usando agora a nossa hipótese, a escolha de n e $1 \leq M$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|>L_n} |\xi^\alpha| \, |\hat{u}_n(\xi)| \, d\xi &\leq \int_{|\xi|>L_n} |\xi|^{|\alpha|-n} \, C \, (CL_n)^n \, d\xi \\ &\leq C \, (CL_n)^n \int_{|\xi|>1} |\xi|^{-N-1} \, d\xi \\ &\leq C_2 (C_2 L_n)^{|\alpha|+N+M}.\end{aligned}$$

De $1 \leq L_n$, concluímos que existe $C_3 > 0$ que satisfaz

$$|D^\alpha u(x)| \leq C_3^{n+1} L_n^{n+M},$$

e portanto, como $1 \leq M$, temos

$$|D^\alpha u(x)| \leq C_3^{n+1} \left[(n+M)^s\right]^{n+M}.$$

Da desigualdade $(n+M)^{n+M} \leq e^{n+M}(n+M)!$, segue que

$$|D^\alpha u(x)| \leq C_3^{|\alpha|+N+M+2} e^{s(|\alpha|+N+1+M)} \, (|\alpha|+N+M+1)!^s,$$

o que conclui a demonstração do teorema por (1.28). □

Vamos denotar por $\operatorname{suppsing}_s(u)$ o complementar do maior aberto em que uma distribuição u é de classe G^s. Introduzimos o conceito de vizinhança cônica: um cone é um subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ tal que se $\lambda\xi \in \Gamma$ sempre que $\lambda > 0$ e $\xi \in \Gamma$. Assim, toda vizinhança Γ de ξ que também é um cone é chamado de vizinhança cônica de ξ. O teorema anterior nos motiva a dar a

Definição 2.17 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, $s \geq 1$ e $u \in D'(\Omega)$, denotamos por $\mathrm{WF}_s(u)$ o complementar em $\Omega \times \left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ dos pontos (x_0, ξ_0) tais que existem vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0, vizinhança cônica Γ de ξ_0 e uma sequência limitada $\{u_n\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ que coincide com u em U e que satisfaz*

$$|\hat{u}_n(\xi)| \leq C \left(\frac{CL_n}{|\xi|}\right)^n, n = 1, 2, \ldots, \forall \xi \in \Gamma \setminus \{0\}, \tag{2.46}$$

para algum $C > 0$ que não depende de n.

Observe que podemos trocar, na definição acima, L_n^n por $n!^s$. O conjunto $\mathrm{WF}_1(u)$ também será usado para denotar $\mathrm{WF}_a(u)$, o qual chamamos de conjunto frente de onda analítico da distribuição u. De modo geral, o conjunto $\mathrm{WF}_s(u)$ é chamado de conjunto frente de onda Gevrey de ordem s da distribuição u. O nosso próximo resultado mostra algo natural: a projeção na primeira variável de $\mathrm{WF}_s(u)$ coincide com $\operatorname{suppsing}_s(u)$. Para prová-lo, utilizaremos o

Lema 2.18 *Sejam $s \geq 1$, $u \in D'(\Omega)$, $K \subset \Omega$ compacto e $F \subset \mathbb{R}^N$ um cone fechado tais que $\mathrm{WF}_s(u) \cap (K \times F) = \varnothing$. Se $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(K)$ satisfaz*

$$\left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi_n(x)\right| \leq A_\alpha \left(An\right)^{|\beta|}, n = 1, 2, 3, \ldots, |\beta| \leq n, \tag{2.47}$$

então

$$\left|\widehat{(\varphi_n u)}(\xi)\right| \leq C\left(\frac{CL_n}{|\xi|}\right)^n, n = 1, 2, \ldots, \xi \in F \setminus \{0\}, \tag{2.48}$$

sendo $C > 0$ uma constante que não depende de n.

Demonstração. Considere $(x_0, \xi_0) \in K \times F$, com $\xi_0 \neq 0$. Como $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_s(u)$, existem U, Γ e $\{u_n\}$ como na Definição 2.17. Mostraremos primeiro que (2.48) vale para todo n tal que $\operatorname{supp} u_n \subset U$ e para todo cone Γ_1 que contém ξ_0 e que satisfaz $\overline{\Gamma_1} \subset \Gamma$. Considere $0 < c < \min\left\{1, d\left(\overline{\Gamma_1} \cap S^{N-1}, \Gamma^c\right)\right\}$. Observe que se $\xi \in \Gamma_1$, $\xi \neq 0$ e se $|\eta - \xi| < c$, então $|\xi/|\xi| - \eta/|\xi|| < c$, o que nos garante que $\eta/|\xi| \in \Gamma$ e portanto, $\eta \in \Gamma$. Como $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, se $\operatorname{supp}\varphi_n \subset U$, então $\varphi_n u_n = \varphi_n u$ e temos

$$(2\pi)^N \left|\widehat{(\varphi_n u)}(\xi)\right| \leq \int_{|\eta|<c|\xi|} |\hat{\varphi}_n(\eta)| \left|\hat{u}_n\left(\xi - \eta\right)\right| d\eta + \int_{c|\xi|<|\eta|} |\hat{\varphi}_n(\eta)| \left|\hat{u}_n\left(\xi - \eta\right)\right| d\eta.$$

Como vale (2.46) e existe $B > 0$ tal que $\|\hat{\varphi}_n\|_{L_1} \leq B, \forall n = 1, 2, \ldots$, pois

$$\|\hat{\varphi}_n\|_{L_1} \leq \int_K |\varphi_n(x)|\, dx \leq A_0|K|,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|\eta|<c|\xi|} |\hat{\varphi}_n(\eta)|\,|\hat{u}_n(\xi-\eta)|\,d\eta &\leq \sup_{|\eta|<c|\xi|} |\hat{u}_n(\xi-\eta)|\,\|\hat{\varphi}_n\|_{L^1} \\ &\leq B \sup_{|\eta-\xi|<c|\xi|} |\hat{u}_n(\eta)| \\ &\leq B \sup_{|\eta-\xi|<c|\xi|} C_1 \left(\frac{C_1 L_n}{|\eta|}\right)^n .\end{aligned}$$

Como $|\eta-\xi| < c\,|\xi|$ nos dá $(1-c)\,|\xi| < |\eta|$, temos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{|\eta|<c|\xi|} |\hat{\varphi}_n(\eta)|\,|\hat{u}_n(\xi-\eta)|\,d\eta \leq C_2 \left(\frac{C_2 L_n}{|\xi|}\right)^n . \tag{2.49}$$

Sejam $C_3 > 0$ e $M \in \mathbb{Z}_+$ tais que $|\hat{u}_n(\xi)| \leq C_3\,(1+|\xi|)^M$ para todo ξ. Se $c\,|\xi| < |\eta|$, então $|\xi-\eta| < (1+c^{-1})\,|\eta|$ e portanto, $(1+|\xi-\eta|)^M \leq (1+c^{-1})^M\,(1+|\eta|)^M$. Segue que

$$\int_{c|\xi|<|\eta|} |\hat{\varphi}_n(\eta)|\,|\hat{u}_n(\xi-\eta)|\,d\eta \leq C_3 \left(1+c^{-1}\right)^M \int_{c|\xi|<|\eta|} |\hat{\varphi}_n(\eta)|\,(1+|\eta|)^M\,d\eta.$$

Precisamos majorar agora o termo $|\hat{\varphi}_n(\eta)|\,(1+|\eta|)^M$. Defina

$$D = \max\left\{A_\alpha, A : |\alpha| \leq N+M+1\right\}.$$

Se $0 \leq j \leq N+M+1$, $|\alpha| = j$ e $|\beta| = n$, então

$$\left|\eta^{\alpha+\beta}\hat{\varphi}_n(\eta)\right| \leq |K|\,D\,(DL_n)^n .$$

Logo, se $D_1 = \max\{|K|\,D, D\}$, temos

$$\left|\xi^{\alpha+\beta}\hat{\varphi}_n(\eta)\right| \leq D_1^{n+1} L_n^n,$$

de onde concluímos que existe $D_2 > 0$ tal que

$$|\eta|^j\,|\eta|^n\,|\hat{\varphi}_n(\eta)| \leq D_2^{n+1} L_n^n, 0 \leq j \leq N+M+1.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} (1+|\eta|)^{N+M+1}|\eta|^n|\hat{\varphi}_n(\eta)| &= \sum_{j=0}^{N+M+1}\binom{N+M+1}{j}|\eta|^j|\eta|^n|\hat{\varphi}_n(\xi)| \\ &\leq D_2^{n+1}L_n^n\sum_{j=0}^{N+M+1}\binom{N+M+1}{j} \\ &= D_2^{n+1}2^{N+M+1}L_n^n. \end{aligned}$$

Se definirmos $C_4 = \max\left\{2^{N+M+1}D_2, D_2\right\}$, obtemos

$$|\hat{\varphi}_n(\eta)| \leq C_4^{n+1}\left(\frac{L_n}{|\eta|}\right)^n(1+|\eta|)^{-N-M-1}, n = 1, 2, \ldots.$$

Assim,

$$\int_{c|\xi|<|\eta|}|\hat{\varphi}_n(\eta)|\,|\hat{u}_n(\xi-\eta)|\,d\eta \leq C_3C_4^{n+1}\left(1+c^{-1}\right)^M L_n^n\int_{c|\xi|<|\eta|}|\eta|^{-n}(1+|\eta|)^{-N-1}.$$

Logo, usando $|\eta|^{-n} \leq (c^{-1})^n|\xi|^{-n}$, existe $C_5 > 0$ que não depende de n tal que

$$\int_{c|\xi|<|\eta|}|\widehat{\varphi}_n(\eta)|\,|\hat{u}_n(\xi-\eta)|\,d\eta \leq C_5^{n+1}\left(\frac{L_n}{|\xi|}\right)^n. \tag{2.50}$$

De (2.49) e (2.50), existe $C > 0$ tal que se $\operatorname{supp}\varphi_n \subset U$, então

$$\left|\widehat{(\varphi_n u)}(\xi)\right| \leq C\left(\frac{CL_n}{|\xi|}\right)^n, n = 1, 2, \ldots, \xi \in \Gamma_1. \tag{2.51}$$

Para cara $\xi_0 \in F \cap S^{N-1}$, obtemos uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$, um aberto U_{ξ_0} que contém x_0 e um cone Γ que contem ξ_0 (todos dependendo de ξ_0) tais que vale (2.51) se $\operatorname{supp}\varphi_n \subset U$, sendo que a constante C depende dos coeficientes A_α e A que majoram as derivadas da sequência $\{\varphi_n\}$, das constante C_1, C_3 e M que majoram $\hat{u}_n$ e de Γ_1. Podemos escolher vizinhanças $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ que cobrem $F \cap S^{N-1}$ e, portanto, cobrem F. Se U é a interseção das respectivas vizinhanças U_{ξ_0}, então (2.51) vale para todo $\xi \in F$, sendo que C depende das constantes A_α e A (fixamos agora um número finito de cones Γ_1 e de sequências $\{u_n\}$). Concluímos que para cada $x_0 \in K$, existe $U \subset \Omega$ aberto que contém x_0 tal que se $\operatorname{supp}\varphi_n \subset U$, então (2.51) é valido para todo $\xi \in F$. Como K é compacto, podemos cobrir K com aberto $U_1, \ldots, U_J$ com essa propriedade. Usamos agora a Proposição 2.14 para obter funções $\varphi_{n,j}$, para cada $n = 1, 2, \ldots$ e cada $j = 1, \ldots, J$ como na proposição. Fixado j, a Proposição 2.13 nos mostra que a sequência $\{\varphi_n \varphi_{n,j}\}$ também satisfaz (2.47) com novas constantes. Logo, aumentado C se necessário, obtemos que vale (2.48) para $\varphi_n \varphi_{n,j}$, para cada $j = 1, \ldots, L$, uma vez que $\varphi_{n,j}\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(K) \cap \mathcal{C}_0^\infty(U)$. Como $\sum_{j=1}^{J} \varphi_n \varphi_{n,j} = \varphi_n, \forall n = 1, 2, \ldots$, após uma mudança da constante C, garantimos que vale (2.48). $\square$

Teorema 2.19 *A projeção de* $\mathrm{WF}_s(u)$ *em* Ω *coincide com* $\operatorname{suppsing}_s(u)$.

Demonstração. Seja X a projeção de $WF_s(u)$ na primeira coordenada. Se $u \in G^s$ em vizinhança de um ponto $x_0 \in \Omega$, então o Teorema 2.16 nos mostra que $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_s(u)$ para todo $\xi_0 \neq 0$. Ou seja, $X \subset \operatorname{suppsing}_s(u)$. Reciprocamente, vamos mostrar que se $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_s(u)$ para todo $\xi_0 \neq 0$ então $x_0 \notin \operatorname{suppsing}_s(u)$, ou seja, u é de classe G^s em vizinhança de x_0. Para cada $\xi_0 \in S^{N-1}$ existem vizinhança $U_{\xi_0} \subset \Omega$ de x_0 sequência limitada $\{u_{n,\xi_0}\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ que coincide com u em U_{ξ_0} e vizinhança cônica Γ_{ξ_0} de ξ_0 tal que vale (2.46) em Γ_{ξ_0}. Existem finitos ξ_0^j, $j = 1, 2 \ldots m$ tais que podemos cobrir S^{N-1} pela união $\Gamma_{\xi_0^1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\xi_0^m}$. Considere $r > 0$ tal que $\overline{B(x_0; r)} \subset U_{\xi_0^j}, j = 1, \ldots m$. Defina $K = \overline{B(x_0; r)}$ e $F = \mathbb{R}^N$. Afirmamos que $\mathrm{WF}_s(u) \cap (K \times F) = \varnothing$. De fato, suponha que $(x, \xi) \in K \times F$ e $\xi \neq 0$. Existe $j = 1, \ldots, m$ tal que $\xi \in \Gamma_{\xi_0^j}$. A sequência limitada $\left\{u_{n,\xi_0^j}\right\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ coincide com u na vizinhança $U_{\xi_0^j}$ de x e vale (2.46) em $\Gamma_{\xi_0^j}$, ou seja $(x, \xi) \notin \mathrm{WF}_s(u)$. Considere uma sequência $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(K)$ como no Corolário 2.12 que vale 1 se $|x - x_0| \leq r/2$ e defina $u_n = \varphi_n u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. O mesmo argumento do Teorema 2.16 mostra que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Segue do Lema 2.18 e do Teorema 2.16 que u é de classe G^s em $B(x_0; r/2)$, o que termina a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Estruturas Localmente Integráveis do Tipo Tubo

O objetivo principal desde capítulo é obter geradores locais apropriados para estruturas localmente integráveis do tipo tubo, sobre as quais trabalharemos na última parte deste trabalho. Começamos revisando alguns conceitos de variedades, assim como vetores tangentes, campos de vetores e formas diferenciais, e a principal referência a ser seguida é [6].

3.1 Campos vetoriais complexos em variedades

Vamos inicialmente lembrar a definição de variedade suave de dimensão N.

Definição 3.1 *Considere um espaço topológico Ω de Hausdorff com base enumerável. Uma estrutura diferenciável de dimensão N sobre Ω é uma família de pares $\mathcal{F} = \{(U, \mathbf{x})\}$, sendo $U \subset \Omega$ um aberto, $\mathbf{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^N$ que satisfaz:*

1. $\displaystyle\bigcup_{(U,\mathbf{x})\in\mathcal{F}} U = \Omega$;

2. *Dados dois pares $(U, \mathbf{x})$ e $(U', \mathbf{x}')$ em $\mathcal{F}$, se $U \cap U' \neq \emptyset$, então $\mathbf{x}' \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U \cap U') \longrightarrow \mathbf{x}'(U \cap U')$ é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

3. *Suponha que $V \subset \Omega$ é um aberto não vazio e $\mathbf{y} : V \longrightarrow \mathbf{y}(V)$ é um homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^N$. Se para todo par $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{F}$ que cumpre $V \cap U \neq \emptyset$, as*

funções $\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}:\mathbf{x}(U\cap V)\longrightarrow\mathbf{y}(U\cap V)$ *e* $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}^{-1}:\mathbf{y}(U\cap V)\longrightarrow\mathbf{x}(U\cap V)$ *forem de classe* $\mathcal{C}^\infty$*, então* $(V,\mathbf{y})\in\mathcal{F}$*. Em outras palavras, dizemos que* $\mathcal{F}$ *é maximal com respeito às propriedades 1 e 2 acima.*

Na prática, a propriedade 3 da Definição 3.1 é muito difícil de ser verificada, uma vez que precisaríamos conhecer todos os homeomorfismos de um aberto de Ω sobre um aberto de $\mathbb{R}^N$. O que geralmente se faz é dar uma família $\mathcal{F}^*=\{(U,\mathbf{x})\}$ que satisfaz as propriedades 1 e 2 acima e considerar $\mathcal{F}=\{(V,\mathbf{y})\}$ como sendo a família de todos os pares $(V,\mathbf{y})$ que satisfazem 3. Não é difícil ver que $\mathcal{F}$ é a única estrutura diferenciável maximal que contém $\mathcal{F}^*$.

Definição 3.2 *Uma variedade diferenciável (ou suave) de dimensão* N *é um espaço topológico de Hausdorff e com base enumerável* Ω *munido de uma estrutura diferenciável* $\mathcal{F}$ *de dimensão* N *. Cada elemento* $(U,\mathbf{x})\in\mathcal{F}$ *é chamado de carta local ou sistema de coordenadas locais. Se escrevermos* $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N)$*, então para cada* $p\in U$*, o ponto* $(\mathbf{x}_1(p),\ldots,\mathbf{x}_N(p))$ *é chamado de coordenadas locais do ponto* p *com relação ao sistema de coordenadas locais* $(U,\mathbf{x})$*.*

Se considerarmos funções reais analíticas ao invés de funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ nos itens 2 e 3 da Definição 3.1, podemos definir variedades reais analíticas de dimensão N.

Definição 3.3 *Dada uma variedade* Ω *suave de dimensão* N*, dizemos que uma função* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ *é de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *(ou suave) se para todo par* $(U,\mathbf{x})\in\mathcal{F}$*, a composição* $f\circ\mathbf{x}^{-1}$ *for uma função suave em* $\mathbf{x}(U)$*.*

O conjunto das funções suaves de uma variedade Ω tomando valores em um subconjunto $A\subset\mathbb{C}$ será denotado por $\mathcal{C}^\infty(\Omega;A)$. Quando o conjunto A estiver claro pelo contexto (ou muitas vezes quando $A=\mathbb{C}$), denotaremos apenas por $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. A estrutura de corpo conhecida em $\mathbb{C}$ nos permite definir uma estrutura de álgebra no conjunto $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e podemos introduzir o conceito de campos vetoriais complexos.

Definição 3.4 *Um campo vetorial complexo suave sobre uma variedade* Ω *de dimensão* N *é uma aplicação* $\mathbb{C}$*-linear*

$$L:\mathcal{C}^\infty(\Omega)\longrightarrow\mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$L(fg)=fL(g)+gL(f),\forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}(\Omega)$ o conjunto de todos os campos de vetores sobre uma variedade Ω. Em $\mathbb{R}^N$, a restrição de um campo de vetores em um subconjunto aberto define-se facilmente utilizando a composição com a inclusão. No caso de variedades, isso requer um esforço maior. Para isso, temos a

Proposição 3.5 *Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e f é constante, então $L(f) = 0$. Além disso, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, temos* $\operatorname{supp} Lf \subset \operatorname{supp} f$.

Isso nos permite restringir um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ a um aberto $W \subset \Omega$. Mais precisamente, podemos definir

$$\pi : \mathfrak{X}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{X}(W)$$

dado por $\pi(L) = L|_W$, sendo que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(W)$, consideramos uma extensão $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de f e definimos $L|_W(f)(p) = L(g)(p)$. A não dependência da escolha de g, que é garantida pela Proposição 3.5, nos dá que $L|_W(f) \in \mathcal{C}^\infty$ e que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\Omega) & \xrightarrow{L} & \mathcal{C}^\infty(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^\infty(W) & \xrightarrow{L|_W} & \mathcal{C}^\infty(W) \end{array}$$

é comutativo (as linhas verticais são as restrições).

Podemos definir em $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma estrutura de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-módulo com a operação

$$(gL)(f) = g \cdot L(f).$$

Dada uma carta local $(U, \mathbf{x})$, podemos obter uma base (local) para $\mathfrak{X}(\Omega)$. Os elementos da base são dados pela

Definição 3.6 *A aplicação $\mathbb{C}$-linear $\mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ definida por*

$$f \longrightarrow \frac{\partial f^*}{\partial x_j} \circ \mathbf{x} \tag{3.1}$$

*define um elemento em $\mathfrak{X}(U)$ e será denotado por $\frac{\partial}{\partial x_j}$, sendo $f^* = f \circ$
$mathbf x^{-1}$.*

O conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$ é base para o $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo $\mathfrak{X}(U)$.

3.2 Estruturas formalmente integráveis

Fixado um ponto $p \in \Omega$, denotamos por $\mathcal{B}_p$ o conjunto de todos os pares (V, f) formados por um aberto V que contem p e $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Definimos em $\mathcal{B}_p$ a relação de equivalência dada por

$$(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2) \text{ se } \exists\, V \subset\ V_1 \cap V_2 \text{ aberto tal que } f_1 = f_2 \text{ em } V. \tag{3.2}$$

Definição 3.7 *Um germe de função $\mathcal{C}^\infty$ em p é um elemento do espaço quociente $\mathcal{C}^\infty(p)$ definido por $\mathcal{B}_p/\sim$.*

Assim como o conjunto $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, o conjunto $\mathcal{C}^\infty(p)$ admite uma estrutura natural de $\mathbb{C}$-álgebra.

Definição 3.8 *Seja $p \in \Omega$. Um vetor tangente à Ω em p é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear*

$$v : \mathcal{C}^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que cumpre

$$v(\underline{f} \cdot \underline{g}) = f(p)v(\underline{g}) + g(p)v(\underline{f}). \tag{3.3}$$

O conjunto de todos os vetores tangentes à Ω no ponto p será denotado por $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$ e recebe o nome de espaço tangente complexo à Ω em p. O corpo $\mathbb{C}$ induz uma estrutura natural de $\mathbb{C}$-espaço vetorial no conjunto $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$. Além disso, um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ define um vetor tangente em cada $p \in \Omega$ dado por

$$L_p(\underline{f}) = L(f)(p). \tag{3.4}$$

A linearidade de L, assim como a Regra de Leibniz e a Proposição 3.5, garante que $L_p \in \mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega, \forall p \in \Omega$. Assim como fizemos para campos vetoriais, podemos encontrar uma base para $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$. Considere $(U,$
$mathbf x)$ uma carta local tal que $p \in U$. O conjunto $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)_p \right\}$ é uma base de $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$ para cada $p \in \Omega$.

Proposição 3.9 *Fixado $p \in \Omega$, temos $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega = \{L_p : L \in \mathfrak{X}(\Omega)\}$*

Demonstração. Considere $(U,$
$mathbf x)$ uma carta local tal que $p \in U$. Dado $v \in \mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$, escreva $v = \displaystyle\sum_{j=1}^N a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$,

com $a_j \in \mathbb{C}$ e defina $L' = \sum_{j=1}^{N} a_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U)$ (aqui a_j representa a função constante). Considere $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $L = L'$ em vizinhança de p. Segue que

$$L_p = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = v.$$

□

A união disjunta $\bigcup_{p\in\Omega} \mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$ é chamada de fibrado vetorial tangente de Ω e denotado por $\mathbb{C}\mathrm{T}\Omega$. Podemos introduzir o principal objeto dessa seção.

Definição 3.10 *Um subfibrado vetorial tangente complexo de $\mathbb{C}\mathrm{T}\Omega$ de posto n e co-posto $m = N - n$ é uma união disjunta*

$$\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}\mathrm{T}\Omega$$

que satisfaz:

1. *Para cada $p \in \Omega$, $\mathcal{V}_p$ é um subespaço de $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$ de dimensão n;*
2. *Dado $p_0 \in \Omega$, existe um aberto U_0 contendo p_0 e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}(U_0)$ tais que $(L_1)_p, \ldots, (L_n)_p$ formam uma base de $\mathcal{V}_p$ para cada $p \in U_0$.*

Cada espaço $\mathcal{V}_p$ é chamado de fibra de $\mathcal{V}$ em p e os campos L_j que geral $\mathcal{V}$ em U_0 são chamados de *geradores locais da estrutura* $\mathcal{V}$. Uma seção de um subfibrado $\mathcal{V}$ sobre um aberto $W \subset \Omega$ é um elemento $L \in \mathfrak{X}(W)$ tal que $L_p \in \mathcal{V}_p, \forall p \in W$. Observe que a escrita de um campo $L = \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ em um aberto U nos permite investigar as soluções de um sistema de equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem. Suponha que são dados r campos vetoriais e que procuramos por uma função u definida em Ω que resolve o problema homogêneo $L_j u = 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Se definirmos $[L, M](f) = L(M(f)) - M(L(f)), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, sendo $M, L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, então teremos que $[L, M] \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $[L_j, L_k]u = 0, \forall j, k = 1, 2, \ldots, r$. Ou seja, uma condição necessária para que u seja solução do sistema homogêneo é $[L_j, L_k]u = 0, \forall j, k = 1, 2, \ldots, r$. O campo vetorial $[X, Y]$ é chamado de colchete de Lie (ou comutador) de X e Y e essa nova operação em $\mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{X}(\Omega)$, que associa cada par (X, Y) ao seu colchete de Lie, torna $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$.

Definição 3.11 *Uma estrutura formalmente integrável sobre Ω é um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$ satisfazendo a condição de involutividade de Frobenius: se $W \subset \Omega$ é um aberto e $L, V \in \mathfrak{X}(W)$ são seções de $\mathcal{V}$ sobre W, então $[L, V]$ também é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W.*

Observação 3.12 *O posto e o co-posto do subfibrado $\mathcal{V}$ será também chamado de posto ou co-posto da estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ respectivamente. Suponha que $(U,$ $mathbfx)$ é uma carta local e que existam campos $L_1, \dots, L_n$, os quais geram $\mathcal{V}_q$ qualquer que seja $q \in U$. Seja L uma seção de $\mathcal{V}$ em U. Então para cada $q \in U$ temos*

$$L_q = \sum_{j=1}^{n} a_j^q \left(L_j\right)_q, a_j^q \in \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

Isso define funções $f_j : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f_j(q) = a_j^q, j = 1, 2, \dots, n$. Além disso, existem funções $a_{jk}, b_k, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, N$ suaves tais que $L_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ e $L = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} b_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Assim, temos

$$L_q = \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(q) a_{jk}(q)\right] \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_q \tag{3.6}$$

e portanto

$$b_k(q) = \sum_{j=1}^{n} f_j(q) a_{jk}(q), \forall q \in U, k = 1, \dots, N. \tag{3.7}$$

Como o conjunto $\left\{\left(L_1\right)_q, \dots, \left(L_n\right)_q\right\}$ é linearmente independente para cada $q \in U$, segue que a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11}(q) & \dots & a_{1N}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(q) & \dots & a_{nN}(q) \end{bmatrix}$$

possui posto máximo em cada $q \in U$. Renomeando as colunas se necessário, podemos supor que a matriz $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é inversível em p. Após uma possível contração em U, podemos supor que isso vale para todo $q \in U$. Fazendo a mesma troca de linhas (do mesmo modo que fizemos nas linhas de (a_{ji}), que possui ordem $N \times n$) no vetor coluna

(b_j), utilizando (3.7) podemos escrever

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{Nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Em particular,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

e invertendo a matriz $(a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ obtemos que $f_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Ou seja, $L = \sum_{j=1}^{n} f_j L_j$, com $f_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Um caso particular é quando $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável e $L = [L_j, L_k]$: neste caso, existem funções $c^\nu_{j,k} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tais que

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^{n} c^\nu_{j,k} L_\nu. \tag{3.8}$$

Definição 3.13 *Uma solução clássica para uma estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ sobre Ω é uma função u de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω tal que $Lu = 0$, para toda seção L de $\mathcal{V}$ sobre algum aberto de Ω.*

3.3 Formas diferenciais

O espaço dual do $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-módulo $\mathfrak{X}(\Omega)$ será denotado por $\mathfrak{N}(\Omega)$ e seus elementos serão chamados de formas diferenciais de grau 1 ou 1-formas diferenciais. O primeiro passo que demos ao definir campo de vetores foi definir sua restrição a um aberto $W \subset \Omega$. Para realizar isso, tivemos que estender funções definidas em abertos de Ω para toda a variedade Ω. O mesmo pode ser feito com campos vetoriais: considere um aberto $W \subset \Omega$, $L \in \mathfrak{X}(W)$ e $p \in W$. Então existe $L' \in \mathfrak{X}(\Omega)$ que coincide com L em uma vizinhança de p. De fato, basta considerar uma função $h \in \mathcal{C}^\infty(W)$ que vale 1 em p e se anula fora de um fechado contido em W. Definimos $L_1 = hL \in \mathfrak{X}(W)$ e, para $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$,

$$L'(f)(q) = \begin{cases} L_1\left(f|_W\right)(q), & \text{se } q \in W \\ 0, & \text{se } q \notin W. \end{cases}$$

Para definir a restrição de uma 1-forma $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, precisamos de um resultado análogo ao feito na Proposição 3.5.

Proposição 3.14 *Se um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ se anula em um aberto $W \subset \Omega$, então $\omega(L)$ se anula em W.*

Dessa forma, se $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ e $W \subset \Omega$ é um aberto, podemos definir $\omega|_W$ da seguinte forma: dado $L \in \mathfrak{X}(W)$ e $p \in W$, fixe $L' \in \mathfrak{X}(\Omega)$ que coincide com L em vizinha de p e defina $\omega|_W(L)(p) = \omega(L')(p)$. Segue que $\omega|_W \in \mathfrak{X}(W)$ e além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}(\Omega) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \mathcal{C}^\infty(\Omega) \arrow[d] \\ \mathfrak{X}(W) \arrow[r, "\omega|_W"] & \mathcal{C}^\infty(W) \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

é comutativo, sendo que as linhas verticais são as restrições. Para fazer um resultado análogo ao que temos na Proposição 3.9, precisamos do seguinte

Lema 3.15 *Seja $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e suponha que $L_p = 0$, para algum $p \in \Omega$. Então $\omega(L)(p) = 0$.*

Vamos detonar o dual de $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$ por $\mathbb{C}\mathrm{T_p^*}\Omega$. Assim como fizemos para campos vetoriais, se $p \in \Omega$ e $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, o Lema 3.15 nos permite definir $\omega_p \in \mathbb{C}\mathrm{T_p^*}\Omega$ por

$$\omega_p(v) = \omega(L)(p), \tag{3.10}$$

onde $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ satisfaz $L_p = v$ (usamos a Proposição 3.9).

Proposição 3.16 *Fixado $p \in \Omega$, temos $\mathbb{C}\mathrm{T_p^*}\Omega = \{\omega_p : \omega \in \mathfrak{N}(\Omega)\}$.*

Definição 3.17 *Dada uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, definimos $df \in \mathfrak{N}(\Omega)$ por*

$$df(L) = L(f). \tag{3.11}$$

Chamamos de subfibrado complexo cotangente a união disjunta

$$\bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}\mathrm{T_p^*}\Omega,$$

a qual será denotada por $\mathbb{C}\mathrm{T}^*\Omega$. De modo análogo ao que fizemos para $\mathbb{C}\mathrm{T}\Omega$, podemos introduzir a noção de subfibrado complexo cotangente de posto m como sendo uma união disjunta

$$\mathcal{W} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{W}_p,$$

sendo que cada $\mathcal{W}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}\mathrm{T}_\mathrm{p}^*\Omega$ de dimensão m que satisfaz: Dado $p_0 \in \Omega$, existe um aberto U_0 contendo p_0 e 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathfrak{N}(U_0)$ tais que $(\omega_1)_p, \ldots, (\omega_m)_p$ geram $\mathcal{W}_p$ para cada $p \in U_0$. Os espaços $\mathcal{W}_p$ são chamados de fibra de $\mathcal{W}$ no ponto p.

Proposição 3.18 *Seja* $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ *um subfibrado tangente de* $\mathbb{C}\mathrm{T}\Omega$. *Defina, para cada* $p \in \Omega$,

$$\mathcal{V}_p^\perp = \left\{\eta \in \mathbb{C}\mathrm{T}_\mathrm{p}^*\Omega : \eta = 0 \ \textit{em}\ \mathcal{V}_p\right\}. \tag{3.12}$$

Então $\mathcal{V}^\perp = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p^\perp$ *é um subfibrado cotangente de* $\mathbb{C}\mathrm{T}^*\Omega$ *de posto* $m = N - n$.

Observação 3.19 *Podemos provar também que se* $\mathcal{V}^\perp$ *é um subfibrado cotangente de posto* $m = N - n$, *então* $\mathcal{V}$ *é um subfibrado tangente de posto* n. *A partir de agora, se* $\mathcal{V}$ *for uma estrutura formalmente integrável, denotaremos o subfibrado cotangente* $\mathcal{V}^\perp$ *por* T'. *Além disso,* n *sempre denotará o posto de* $\mathcal{V}$ *e* $m = N - n$ *o posto de* T'.

Usaremos as seguintes notações

$$\mathrm{T}_\mathrm{p}\Omega = \{v \in \mathbb{C}\mathrm{T}_\mathrm{p}\Omega : v \text{ é real}\},$$

sendo que v é real quando seus coeficientes na base usual são reais, ou equivalentemente se $v(\underline{f})$ é real sempre que $\underline{f}$ for um germe de função real.

$$\mathrm{T}_\mathrm{p}^*\Omega = \left\{\xi \in \mathbb{C}\mathrm{T}_\mathrm{p}^*\Omega : \xi \text{ é real}\right\};$$

$$\mathrm{T}\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} \mathrm{T}_\mathrm{p}\Omega;$$

$$\mathrm{T}^*\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} \mathrm{T}_\mathrm{p}^*\Omega;$$

Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, definimos seu complexo conjugado $\overline{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ por $\overline{L}(f) = \overline{L\left(\overline{f}\right)}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Observe que podemos falar de parte real e parte imaginária de um campo: $\operatorname{Re} L = \frac{L+\overline{L}}{2}$

e $\operatorname{Im} L = \frac{L-\overline{L}}{2i}$, $L = \operatorname{Re} L + i \operatorname{Im} L$ e se $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, então $\operatorname{Re} L(f)$ e $\operatorname{Im} L(f)$ são funções reais. Um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ será dito real quando $L(f) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sempre que $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Duas maneiras equivalentes e úteis de dizer o mesmo são: $L = \overline{L}$ ou que os coeficientes de L em uma base local $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}$ são funções reais. Podemos fazer o mesmo para elementos de $\mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$, ou seja, dado $\nu \in \mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$, definimos $\overline{\nu}\left(f\right) = \overline{\nu\left(\overline{f}\right)}$. Além de definições e propriedades análogas ao que fizemos para campos serem válidas, se dado um subespaço $\mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}\mathrm{T_p}\Omega$, podemos definir o seguinte subespaço

$$\overline{\mathcal{V}}_p = \{\overline{v} : v \in \mathcal{V}_p\}.$$

Se $\mathcal{V}$ é um subfibrado tangente de $\mathbb{C}\mathrm{T}\Omega$, então o mesmo vale para $\overline{\mathcal{V}} = \bigcup_{p \in \Omega} \overline{\mathcal{V}}_p$. Podemos dar definições análogas para $\mathbb{C}\mathrm{T}^*\Omega$ e $\mathbb{C}\mathrm{T}^*_\mathrm{p}\Omega$, sendo que para todo subfibrado tangente $\mathcal{V}$ se $\mathbb{C}\mathrm{T}\Omega$ vale

$$\overline{\mathcal{V}}^\perp = \overline{\mathcal{V}^\perp}.$$

3.4 O conjunto característico

Vamos começar recordando a definição em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Considere P um operador diferencial linear de ordem n em Ω, ou seja

$$P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

sendo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ e $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Definimos o símbolo principal de P, e o denotamos por P_n, como sendo

$$P_n(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = n} a_\alpha(x) \xi^\alpha, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N \text{ e } \xi \neq 0.$$

O conjunto característico de P, denotado por $\operatorname{char} P$, é formado pelos pontos (x, ξ) tais que $P_n(x, \xi) = 0$. Lembremos ainda que P é dito elíptico quando $\operatorname{char} P = \varnothing$. O objetivo dessa seção é definir o conjunto característico em uma variedade Ω qualquer. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável sobre a variedade Ω. Defina (o que também chamaremos de conjunto característico de $\mathcal{V}$)

$$T^0 = T' \cap \mathrm{T}^*\Omega, \tag{3.13}$$

ou seja, se $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}$, então $\xi \in T^0$ se existe $p \in \Omega$ tal que $\xi \in V_p^{\perp}$ e ξ é real. Fixado $p \in \Omega$, definimos também $T_p^0 = T_p' \cap \mathrm{T}_{\mathrm{p}}^*\Omega$. Dado um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, definimos o símbolo de L como sendo a aplicação

$$\sigma : \mathrm{T}^*\Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(L)(\xi) = \xi(L_p), \text{ se } \xi \in \mathrm{T}_{\mathrm{p}}^*\Omega\,. \tag{3.14}$$

Observe que $\xi \in T_p^0$ se, e somente se, $\sigma(L)(\xi) = 0$, para toda seção L de $\mathcal{V}$. Considere agora uma carta local $(U,$
$mathbf x)$, $\xi \in \mathrm{T}_{\mathrm{p}}^*\Omega$, $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e escreva

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \left(dx_j\right)_p, \xi_j \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, a_j \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Segue então que

$$\sigma(L)(\xi) = \xi(L_p) = \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j. \tag{3.15}$$

Note que a definição de símbolo principal para um operador diferencial linear de primeira ordem em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ coincide com a definição dada para uma variedade qualquer se olharmos para (3.15) e se identificarmos os vetores $\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j e_j \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\xi} = \sum_{j=1}^{N} \xi_j (dx_j)_p \in T_x\Omega$, sendo $e_1, \ldots, e_N$ a base canônica de $\mathbb{R}^N$. Dessa forma, o conjunto característico também coincide quando olhamos para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Além disso, (3.15) nos mostra que se $L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, j = 1, \ldots, n$ é um conjunto de geradores locais de $\mathcal{V}$, então $T^0 \cap T^*U$ é descrito pelo sistema

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(p)\xi_k = 0, \quad p \in U, \xi_k \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

3.5 Estruturas localmente integráveis

Nesta seção iremos definir o principal objeto de estudo do capítulo e fornecer um conjunto de geradores adequados para o mesmo. Começamos com dois lemas.

Lema 3.20 *Seja V um subespaço complexo de $\mathbb{C}^N$ de dimensão m. Defina $V_0 = V \cap \mathbb{R}^N$, $d = \dim_{\mathbb{R}} V_0$ e $\nu = m - d$. Considere ainda $V_1 \subset \mathbb{C}^N$ tal que $(V_0 \oplus iV_0) \oplus V_1 = V$, $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\}$ uma base para V_1 e $\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ uma base real para V_0. Se escrevermos $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j, j = 1, \ldots, \nu$, então*

$$\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\} \quad \text{é uma base de } V; \tag{3.17}$$

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_\nu\} \quad \text{é linearmente independente sobre } \mathbb{R}; \tag{3.18}$$

$$\nu + m \leq N. \tag{3.19}$$

Lema 3.21 *Seja $U \subset \Omega$ um aberto e $p \in U$. Se $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ são funções reais suaves em U e se $\left\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_N)_p\right\}$ é linearmente independente, então $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$ e U (após uma possível contração) definem uma carta local.*

Definição 3.22 *Dizemos que um subfibrado complexo tangente $\mathcal{V}$ de posto n define uma estrutura localmente integrável se dado $p_0 \in \Omega$, existir uma vizinhança U_0 de p_0 e funções $z_1, \ldots, z_m \in \mathcal{C}^\infty(U_0)$, com $m = N - n$ tais que $\mathcal{V}_p^\perp$ é gerado por $\left\{(dz_1)_p, \ldots, (dz_m)_p\right\}$.*

Observe que toda estrutura localmente integrável é uma estrutura localmente integrável. A Definição 3.22 para uma estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ equivale a dizer que os diferenciais das funções suaves z_j são linearmente independentes em cada ponto de U_0 e anulam todos os geradores locais de $\mathcal{V}$. Assim, temos a

Proposição 3.23 *Uma estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ é localmente integrável se, e somente se, dados $p_0 \in \Omega$ e campos $L_1, \ldots, L_n$ que geram $\mathcal{V}$ em uma vizinhança U_0 de p_0, existe vizinhança $V_0 \subset U_0$ de p_0 e funções $z_1, \ldots, z_m \in \mathcal{C}^\infty(V_0)$ tais que*

1. *$dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m \neq 0$ em V_0;*

2. *$L_j(z_k) = 0, j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m.$*

Em outras palavras, procuramos por um número maximal de soluções linearmente independentes do sistema linear homogêneo definido pelos campos que geram $\mathcal{V}$ localmente. Iremos agora construir geradores locais apropriados para estruturas localmente integráveis $\mathcal{V}$. Fixe $p \in \Omega$ e considere funções suaves $G_1, \ldots, G_m$ definidas em vizinhança de p tais que $dG_1, \ldots, dG_m$ geram T'. Usamos agora as notações do Lema 3.20 com $V = T'_p$ e $V_0 = T^0_p$. Existe uma matriz complexa inversível (c_{ij}) de ordem m tal que

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \left(dG_k\right)_p, j = 1, \ldots, \nu, \tag{3.20}$$

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \left(dG_k\right)_p, j = \nu + 1, \ldots, m. \tag{3.21}$$

Defina as funções

$$Z_j = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}(G_k - G_k(p)), j = 1 \ldots, \nu;$$

$$W_l = \sum_{k=1}^{m} c_{\nu+l,k}(G_k - G_k(p)), l = 1, \ldots d.$$

Então Z_j e W_l se anulam em p e por (3.20) e (3.21), temos que $dZ_1, \ldots, dZ_\nu, dW_1, \ldots, dW_d$ geram T' em vizinhança de p (que ainda denotaremos por V). Se definirmos $x_j = \operatorname{Re} Z_j$, $y_j = \operatorname{Im} Z_j$ para $j = 1, \ldots, \nu$ e $s_l = \operatorname{Re} W_l$ para $l = 1, \ldots, d$, então o Lema 3.20 e as equações (3.20) e (3.21) nos garantem que o conjunto $\{(dx_j)_p, (dy_j)_p, (ds_l)_p\} \subset \mathrm{T}^*_\mathrm{p}\Omega$ é linearmente independente sobre $\mathbb{R}$. Podemos admitir que existe um sistema de coordenadas $(V, \tilde{\mathbf{x}})$, com $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{N})$ que se anula em p. Portanto existem n' funções da forma $\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{j}$, as quais denotaremos por t_k, tais que o conjunto $\{(dx_j)_p, (dy_j)_p, (ds_l)_p, (dt_k)_p\}$ é uma base de $\mathrm{T}^*_\mathrm{p}\Omega$ e, por conseguinte base de $\mathbb{C}\mathrm{T}^*_\mathrm{p}\Omega$. Utilizando o Lema 3.21 e escrevendo $W_l = s_l + i\phi_l$, demonstramos o

Teorema 3.24 *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável, $p \in \Omega$ e considere d como sendo a dimensão real de T^0_p. Então existe um sistema de coordenadas que se anula em p*

$$x_1, \ldots, x_\nu, y_1, \ldots, y_\nu, s_1, \ldots, s_d, t_1, \ldots, t_{n'}$$

e funções reais suaves $\phi_1, \ldots, \phi_d$ definidas em uma vizinhança V do ponto p que satisfazem

$$\phi_k(p) = 0, \quad \left(d\phi_k\right)_p = 0, k = 1, \ldots d,$$

tais que os diferenciais das funções

$$Z_j = z_j = x_j + iy_j, j = 1, \ldots, \nu, \tag{3.22}$$

$$W_k = s_k + i\phi_k, k = 1, \ldots, d \tag{3.23}$$

geram T' em V. Em particular, $\nu + d = m$, $\nu + n' = n$ e T_p^0 é gerado por $(ds_1)_p, \ldots, (ds_d)_p$.

Usando as notações do teorema anterior, como $(d\phi_k)_p = 0$, temos que $\frac{\partial W_k}{\partial s_{k'}}(p) = \delta_{kk'}$. Logo, a matriz $\left(\frac{\partial W_i}{\partial s_j}\right)$ de ordem d é a matriz identidade em p. Diminuindo o aberto V se necessário, podemos supor que essa matriz é inversível em V e dessa forma podemos introduzir os campos $M_k = \displaystyle\sum_{k'=1}^{d} \mu_{k,k'} \frac{\partial}{\partial s_{k'}}, k = 1, \ldots, d$ tais que

$$M_k W_{k'} = \delta_{kk'}.$$

Os coeficientes $\mu_{k,k'}$ são dados pela transposta da inversa da matriz cujos coeficientes são $\left(\frac{\partial W_i}{\partial s_j}\right)$. Assim, não é difícil ver que os campos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - i \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial \bar{z}_j} M_k, j = 1, \ldots, \nu, \tag{3.24}$$

$$\tilde{L}_l = \frac{\partial}{\partial t_l} - i \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_l} M_k, l = 1, \ldots, n' \tag{3.25}$$

são linearmente independentes e satisfazem

$$L_j(Z_{j'}) = \tilde{L}_l(Z_{j'}) = L_j(W_k) = \tilde{L}_l(W_k) = 0, \tag{3.26}$$

para todos $j, j' = 1, \ldots, \nu, l = 1, \ldots, n'$ e $k = 1, \ldots d$. Como $\nu + n' = n$ e dZ_j, dW_k geram $\mathcal{V}^\perp$ em vizinhança de p, segue que

$$L_1, \ldots L_\nu, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{n'} \text{ geram } \mathcal{V} \text{ em vizinhança de } p. \tag{3.27}$$

Além disso, temos que as 1-formas

$$dz_1, \ldots, dz_\nu, d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_\nu, dW_1, \ldots, dW_d, dt_1, \ldots, dt_{n'} \tag{3.28}$$

são linearmente independentes em p e, portanto geram $\mathbb{C}\mathrm{T}^*\Omega$ em vizinhança de p. Um cálculo direto mostra que (3.28) é a base dual de

$$L_1', \ldots, L_\nu', L_1, \ldots, L_\nu, M_1, \ldots, M_d, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{n'}, \tag{3.29}$$

sendo que

$$L_j' = \frac{\partial}{\partial z_j} - i \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial z_j} M_k, j = 1, \ldots, \nu. \tag{3.30}$$

Se P e Q são dois campos vetoriais de (3.29) e se F é alguma das funções $Z_j, \overline{Z}_j, W_k t_l$, então como (3.28) é a base dual de (3.29), temos $dF(P)$ e $dF(Q)$ são constantes. Segue da Proposição 3.5 que $dF([P,Q]) = 0$, de onde concluímos que $[P,Q] = 0$ e portanto os campos vetoriais escritos em (3.29) comutam entre si.

3.6 Estruturas do tipo tubo

Nesta seção definiremos um caso particular de uma estrutura localmente integrável, as estruturas do tipo tubo, que são objetos de grande importância para este trabalho. Não são necessárias todas as informações do Teorema 3.24 para encontrar geradores locais adequados para as estruturas do tipo tubo. Assim, começaremos enunciando um resultado mais fraco que é corolário imediato do Teorema 3.24:

Proposição 3.25 *Nas hipóteses do Teorema 3.24, existe um sistema de coordenadas que se anula em p (o qual identificaremos com 0)*

$$x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n$$

e funções reais suaves $\phi_1 \ldots, \phi_m$ definidas em vizinhança de 0 tais que

$$\phi_k(p) = 0, \quad d_x\phi_k(0,0) = 0$$

e os diferenciais de

$$Z_k(x,t) = x_k + i\phi_k(x,t), k = 1, \ldots, m$$

geram T' em vizinhança da origem.

Demonstração. A demonstração é apenas uma identificação com as coordenadas

$$x'_1, \ldots, x'_\nu, y'_1, \ldots, y'_\nu, s'_1, \ldots, s'_d, t'_1, \ldots, t'_{n'}$$

que obtivemos no Teorema 3.24. A identificação que fizemos de p com a origem de $\mathbb{R}^N$ é feita via carta local e isso nos permite fazer considerações do tipo $d_x\phi_k$, já que agora podemos falar de coordenadas. As primeiras ν funções x_j não alteramos, enquanto que definimos $x_{\nu+j} = s'_j, j = 1, \ldots d$, $t_l = y'_l, l = 1, \ldots, \nu$ e $t_{\nu+k} = t'_k, k = 1, \ldots n'$. Para que os diferenciais de $Z_k(x,t) = x_k + i\phi_k(x,t), k = 1, \ldots, m$ sejam geradoras de T' em vizinhança da origem é suficiente considerar $\phi_k = y'_k, k = 1, \ldots, \nu$ e $\phi_{\nu+k} = \phi'_k, k = 1, \ldots, n'$. Denotando esse sistema de coordenadas por
$mathbf{x}$, vemos que ϕ_k não depende de x, de onde concluímos que $d_x\phi_k(0,0) = 0$. □

As considerações feitas após o Teorema 3.24 podem ser refeitas para a Proposição 3.25 e se tornam mais simples. Primeiro, notamos que $\frac{\partial Z_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}, k = 1, \ldots, n$ e $l = 1, \ldots m$ em 0. Podemos introduzir então, na vizinhança da origem de $\mathbb{R}^N$, campos vetoriais

$$M_k = \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_l} \tag{3.31}$$

tais que

$$M_k(Z_l) = \delta_{kl}.$$

Dessa forma, se definirmos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(x,t)M_k, j = 1, \ldots, n, \tag{3.32}$$

então como antes temos:

1. Os campos L_j são linearmente independentes e satisfazem $L_j(Z_k) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

2. $L_1, \ldots, L_n$ geram $\mathcal{V}$ em vizinhança da origem.

3. $L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m$ comutam entre si e geram $\mathbb{C}T\mathbb{R}^N$ em vizinhança da origem de $\mathbb{R}^N$.

A Observação 3.19 nos diz que se $f_1, \ldots, f_m$ são funções suaves tais que seus diferenciais são linearmente independentes em um aberto W, então podemos considerar a estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}^{\perp}$ é gerada por $df_1, \ldots, df_m$. Segue que $\mathcal{V}$ é localmente integrável.

Definição 3.26 (Estrutura do tipo tubo) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\phi : U \longrightarrow R^m$ uma função suave, sendo $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t))$. Uma estrutura do tipo tubo em $\Omega = \mathbb{R}^m \times U$ é a estrutura localmente integrável $\mathcal{V}$ em Ω tal que T' é gerado pelos diferenciais das funções*

$$Z_k = x_k + i\phi_k(t), k = 1, \ldots, m, \tag{3.33}$$

ou seja,

$$Z_k(x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n) = x_k + i\phi_k(t_1, \ldots, t_n).$$

Observe que neste caso é fácil explicitar quem são os campos M_k definidos em (3.31) uma vez que $Z_x(x,t) = Id_{m\times m}$ em todo $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times U$. Neste caso, temos $\mu_{kl}(x,t) = \delta_{kl}, \forall (x,t) \in \mathbb{R}^m \times U$ e portanto os campos vetoriais (3.32) ficam

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(t)\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{3.34}$$

Note ainda que tais campos geram $\mathcal{V}$ em $\mathbb{R}^m \times U$.

Capítulo 4

Vetores Gevrey em Estruturas do tipo Tubo

4.1 Introdução

Demonstraremos neste capítulo os principais resultados deste trabalho, os quais estão presentes em [8]. Trataremos de vetores Gevrey para um sistema de operadores que geram uma estrutura do tipo tubo. Começamos o capítulo com algumas definições iniciais.

Definição 4.1 *Sejam $s \geq 1$ e $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ um operador diferencial parcial analítico linear de ordem $m \geq 1$ no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é um s-vetor Gevrey para P (ou vetor analítico para P se $s = 1$) quando $P^k u \in L^2_{loc}(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ e para todo $K \subset \Omega$ compacto, existe $C > 0$ tal que*

$$\left\| P^k u \right\|_{L^2(K)} \leq C^{k+1} k!^{ms}, k = 0, 1, 2, \dots. \tag{4.1}$$

O espaço dos s-vetores Gevrey para um operador P como na definição acima será denotado por $G^s(\Omega; P)$. Afirmamos que

$$\left\{ u \in L^2_{loc}(\Omega) : Pu \in G^s(\Omega) \right\} \subset G^s(\Omega; P).$$

Para justificar tal inclusão é suficiente verificarmos que $G^s(\Omega) \subset G^s(\Omega; P)$, que por sua vez segue da

Proposição 4.2 *Seja $f \in G^s(\Omega)$, com $s \geq 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Existe constante $C > 0$ tal que*

$$\left\|D^\alpha P^k f\right\|_{L^2(K)} \leq C^{|\alpha|+k+1} \left(|\alpha| + mk\right)!^s, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, k = 0, 1, \ldots. \tag{4.2}$$

Demonstração. Dado $K \subset \Omega$ compacto, se $f \in G^s(\Omega)$, existe $A > 1$ tal que

$$\left|\partial^\alpha f(x)\right| \leq A^{|\alpha|+1} |\alpha|!^s, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, x \in K.$$

Além disso, como cada a_γ é analítica, podemos encontrar $B > 1$ tal que

$$\left|\partial^\alpha a_\gamma(x)\right| \leq B^{|\alpha|+1} \alpha!, \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^N, |\gamma| \leq m, x \in K.$$

Afirmamos que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\left\|D^\alpha P^k f\right\|_{L^2(K)} \leq C_1^{|\alpha|} C_2^{k+1} \left(|\alpha| + mk\right)!^s, \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

e o resultado segue se definirmos $C = \max\{C_1, C_2\}$. Considere $C_1 = \max\{A, B + 1\}$,

$$C_2 = \max\left\{A\,|K|^{1/2}, B\,|K|^{1/2} (m+1)(N+1)^m C_1^m \left(\frac{C_1}{C_1 - B}\right)^N\right\}$$

e vamos demonstrar a afirmação por indução em k. Se $k = 0$, a afirmação vale pois $|K|^{1/2} A^{|\alpha|+1} \leq C_1^{|\alpha|} C_2$. Vamos supor que vale para k e mostrar que vale para $k+1$. Primeiro, observe que

$$D^\alpha P^{k+1} f(x) = \sum_{|\gamma| \leq m} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a_\gamma(x) D^{\alpha-\beta+\gamma} P^k u(x),$$

o que nos mostra que se $x \in K$, então

$$\left|D^\alpha P^{k+1} f(x)\right| \leq \sum_{|\gamma| \leq m} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} B^{|\beta|+1} \beta! C_1^{|\alpha|-|\beta|+|\gamma|} C_2^{k+1} \left(|\alpha| - |\beta| + |\gamma| + mk\right)!^s.$$

Usando (2.23), obtemos

$$\left\|D^\alpha P^{k+1} f\right\|_{L^2(K)} \leq |K|^{1/2} \sum_{|\gamma| \leq m} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{|\alpha|}{|\beta|}^s B^{|\beta|+1} |\beta|!^s C_1^{|\alpha|-|\beta|+|\gamma|} C_2^{k+1} \left(|\alpha| - |\beta| + |\gamma| + mk\right)^s. \tag{4.3}$$

Dessa forma, se

$$M = \sum_{|\gamma|\leq m}\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{|\alpha|}{|\beta|}^s |\beta|!^s \, |K|^{1/2} \frac{(|\alpha|-|\beta|+m+mk)^s}{(|\alpha|+m+mk)!^s} B\left(\frac{B}{C_1}\right)^{|\beta|} C_1^m C_2^{-1},$$

concluímos de (4.3) que

$$\left\|D^\alpha P^{k+1} f\right\|_{L^2(K)} \leq C_1^{|\alpha|} C_2^{k+2} \left(|\alpha|+m(k+1)\right)!^s M$$

e o resultado fica demonstrado se mostrarmos que $M \leq 1$. Como

$$\binom{|\alpha|}{|\beta|} |\beta|! \frac{(|\alpha|-|\beta|+m+mk)!}{(|\alpha|+m+mk)!} \leq 1$$

e o número de multi-índices $\gamma \in \mathbb{Z}_+^N$ tais que $|\gamma| \leq m$, é menor que $\sum_{p=0}^{m} (N+1)^p$ (ver [17, p.11]), é suficiente verificar que

$$B\,|K|^{1/2}\,(m+1)(N+1)^m C_1^m C_2^{-1} \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\frac{B}{C_1}\right)^{|\beta|} \leq 1. \tag{4.4}$$

Como $C_1 > B$, temos

$$\sum_{\beta\leq\alpha} \left(\frac{B}{C_1}\right)^{|\beta|} \leq \left(\frac{C_1}{C_1 - B}\right)^N,$$

de onde concluímos que

$$B\,|K|^{1/2}\,(m{+}1)(N{+}1)^m C_1^m C_2^{-1} \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\frac{B}{C}\right)^{|\beta|} \leq B\,|K|^{1/2}\,(m{+}1)(N{+}1)^m C_1^m C_2^{-1} \left(\frac{C_1}{C_1 - B}\right)^N$$

e obtemos (4.4) pela escolha de C_2. □

A inclusão $G^s(\Omega) \subset G^s(\Omega; P)$ segue de (4.2) com $\alpha = 0$ após aplicarmos (2.10) diversas vezes. Isso nos leva a estudar as inclusões $G^s(\Omega; P) \subset G^s(\Omega)$ e vários resultados foram obtidos ao longo dos anos. Quando P é elíptico, todo vetor Gevrey para P é uma função Gevrey. Reciprocamente, se existe $s > 1$ tal que $G^s(\Omega) \subset G^s(\Omega; P)$, então P é elíptico (veja, por exemplo, [16, teo.1]).

4.2 Vetores Gevrey em Estruturas do tipo Tubo

Denotaremos por Θ uma bola aberta centrada na origem de $\mathbb{R}^n$ e Φ uma função analítica definida em vizinhança de $\overline{\Theta}$ tomando valores em $\mathbb{R}^m$. Escrevemos $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$, supomos que $\Phi(0) = 0$ e consideraremos a estrutura do tipo tubo definida em $\mathbb{R}^m \times \Theta$ assim como na definição (3.26). Ou seja, os campos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{4.5}$$

definem uma estrutura localmente integrável de posto n, cujo ortogonal é gerado pelos diferenciais das funções

$$Z_k(x,t) = x_k + i\phi_k(t), k = 1, \ldots, m. \tag{4.6}$$

Observe ainda que os campos L_j e $\frac{\partial}{\partial x_k}$, além de comutarem entre si, satisfazem

$$\mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \Theta) = \operatorname{span}\left\{ L_1, \ldots, L_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}. \tag{4.7}$$

Dados $s \geq 1$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, vamos denotar $L^\alpha = L_1^{\alpha_1} \ldots L_n^{\alpha_n}$ e podemos introduzir o principal objeto deste trabalho:

Definição 4.3 *Sejam $\Omega = U \times V$ um aberto de $\mathbb{R}^m \times \Theta$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que u é um s-vetor Gevrey ($s \geq 1$) para $\mathfrak{L}$ se $L^\alpha u \in L^\infty_{loc}(V, L^1_{loc}(U))$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e, para cada $K = K_1 \times K_2 \subset \Omega$ compacto, existe $C_K > 0$ tal que*

$$\|L^\alpha u\|_{L^\infty(K_2, L^1(K_1))} \leq C_K^{|\alpha|+1} \alpha!^s, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{4.8}$$

O conjunto de todos os s-vetores Gevrey para $\mathfrak{L}$ será denotado por $G^s(\Omega; \mathfrak{L})$. Um 1-vetor Gevrey para $\mathfrak{L}$ também será chamado de vetor analítico para $\mathfrak{L}$.

O próximo resultado nos dá uma caracterização bastante útil das funções Gevrey:

Proposição 4.4 *Uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é uma função Gevrey de ordem $s \geq 1$ se, e somente se, dado compacto $K = K_1 \times K_2$, existe $C > 0$ tal que*

$$\left\| L^\alpha \partial_x^\beta f \right\|_{L^\infty(K)} \leq C^{|\alpha|+|\beta|+1} |\alpha|!^s \, |\beta|!^s \tag{4.9}$$

Demonstração. Vamos demonstrar que a estimativa (4.9) é suficiente para garantir que $f \in G^s(\Omega)$. Dado um compacto $K \subset \Omega$, obtemos um número finito de compactos da forma $K_1 \times K_2 \subset U \times V$que cobrem K. Logo, podemos supor, sem perda de generalidade, que K é da forma $K = K_1 \times K_2$. Para tal compacto K, como $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ é analítica, existe $D > 0$ tal que

$$\|\partial_t^\gamma \phi_k\|_{L^\infty(K_2)} \leq D^{|\gamma|+1} |\gamma|!, \forall \gamma \in \mathbb{Z}_+^n, k = 1, \ldots, m. \tag{4.10}$$

Afirmamos que existem $C_1, C_2, C_3, R, > 0$ tais que

$$\left\|\partial_t^\gamma L^\alpha \partial_x^\beta f\right\|_{L^\infty(K)} \leq C_1^{|\alpha|} C_2^{|\beta|} C_3^{|\gamma|} R \left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|\right)!^s, \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^m. \tag{4.11}$$

Uma vez provada a afirmação, o resultado segue se considerarmos $\alpha = 0$ e (2.10). A demonstração será feita por indução em $|\gamma|$. Se $\gamma = 0$, então obtemos (4.11) de (4.9) desde que $C < C_1, C_2, R$. Suponha válido para $|\gamma| = k$ e mostremos que vale quando $|\gamma| = k + 1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma - e_n \geq 0$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\partial_t^\gamma L^\alpha \partial_x^\beta f &= \partial_t^{\gamma - e_n} \partial_t^{e_n} L^\alpha \partial_x^\beta f \\
&= \partial_t^{\gamma - e_n} \left(L_n + i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial t_n} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) L^\alpha \partial_x^\beta f \\
&= \partial_t^{\gamma - e_n} L^{\alpha + e_n} \partial_x^\beta f + i \sum_{k=1}^m \sum_{\sigma \leq \gamma - e_n} \binom{\gamma - e_n}{\sigma} \partial_t^{\sigma + e_n} \phi_k \cdot \left(\partial_t^{\gamma - e_n - \sigma} L^\alpha \partial_x^{\beta + e_k} \right) f.
\end{aligned}$$

Usamos a hipótese de indução e (4.10) para concluir que

$$\left\|\partial_t^\gamma L^\alpha \partial_x^\beta f\right\|_{L^\infty(K)} \leq C_1^{|\alpha|+1} C_2^{|\beta|} C_3^{|\gamma|-1} R \left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|\right)!^s +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sum_{\sigma \leq \gamma - e_n} \binom{\gamma - e_n}{\sigma} D^{|\sigma|+2} \left(|\sigma| + 1\right)! C_1^{|\alpha|} C_2^{|\beta|+1} C_3^{|\gamma|-1-|\sigma|} R \left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| - |\sigma|\right)!^s.$$

Logo, temos

$$\left\|\partial_t^\gamma L^\alpha \partial_x^\beta f\right\|_{L^\infty(K)} \leq C_1^{|\alpha|} C_2^{|\beta|} C_3^{|\gamma|} R \left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|\right)!^s \cdot M,$$

sendo

$$M = C_1 C_3^{-1} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\sigma \leq \gamma - e_n} \binom{\gamma - e_n}{\sigma} D^{|\sigma|+2} (|\sigma|+1)! C_2 C_3^{-1-|\sigma|} \frac{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|-|\sigma|)!^s}{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)!^s}.$$

Dessa forma, o resultado fica demonstrado se garantirmos que $M \leq 1$. Escolhemos primeiro C_3 tal que $C_1 \leq C_3/2$ e então é suficiente termos

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\sigma \leq \gamma - e_n} \binom{\gamma - e_n}{\sigma} D^{|\sigma|+2} (|\sigma|+1)! C_2 C_3^{-1-|\sigma|} \frac{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|-|\sigma|)!^s}{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)!^s} \leq \frac{1}{2}.$$

Observe que

$$\binom{|\gamma - e_n|}{|\sigma|} |\sigma|! \frac{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|-|\sigma|)!}{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)!} \leq 1.$$

Como $(|\sigma|+1)! \leq 2^{|\sigma|+1} |\sigma|!$ e $\binom{\gamma-e_n}{\sigma} \leq \binom{|\gamma-e_n|}{|\sigma|}^s$, o nosso trabalho se reduz a demonstrar que

$$4D^2 C_2 C_3^{-1} m \sum_{\sigma \leq \gamma - e_n} \left(\frac{2D}{C_3}\right)^{|\sigma|} \leq 1. \tag{4.12}$$

Se $2D < C_3$, então

$$\sum_{\sigma \leq \gamma - e_n} \left(\frac{D}{C_3}\right)^{|\sigma|} \leq \left(\frac{C_3}{C_3 - 2D}\right)^n.$$

Logo, para obter (4.12) é suficiente garantir

$$4D^2 C_2 m \left(\frac{C_3}{C_3 - 2D}\right)^n \leq C_3, \tag{4.13}$$

que é verdade para C_3 suficientemente grande. Ou seja, basta considerarmos C_1, C_2, R de modo que $C_1, C_2, R > C$ e C_3 suficientemente grande de modo que $C_3 > 2D$, $C_3 > 2C_1$ e que satisfaz (4.13).

Para a recíproca, o argumento é análogo: suponha que exista $C > 0$ tal que

$$\left\|\partial_t^\gamma \partial_x^\beta f\right\|_{L^\infty(K)} \leq C^{|\alpha|+|\beta|+1} |\alpha|!^s |\beta|!^s.$$

Mostramos por indução em $|\gamma|$ que

$$\left\|L^\alpha \partial_t^\gamma \partial_x^\beta\right\|_{L^\infty(K)} \leq B_1^{|\alpha|} B_2^{|\beta|} B_3^{|\gamma|} R' (|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)!^s,$$

para constantes $B_1, B_2, B_3, R' > 0$. □

Corolário 4.5 *Se $u \in L^{\infty}_{loc}(V, L^1_{loc}(U))$ e $L_j u \in G^s(\Omega)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então $u \in G^s(\Omega; \mathfrak{L})$.*

Demonstração. Segue da hipótese e de (4.9) com $\beta = 0$ que se $K = K_1 \times K_2 \subset \Omega$ é compacto, então existe $A > 0$ tal que

$$\|L^\alpha L_j u\|_{L^\infty(K_1 \times K_2)} \leq A^{|\alpha|+1} \alpha!^s, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, j = 1, \ldots, n.$$

Se $|\alpha| \geq 1$, supondo sem perda de generalidade que $\alpha_1 > 0$, temos

$$\begin{aligned} \|L^\alpha u\|_{L^\infty(K_2, L^1(K_1))} &= \operatorname{supess}_{t \in K_2} \int_{K_1} |L^\alpha u(x,t)|\, dx \\ &\leq |K_1| \left\|L^{\alpha - e_1} L_1 u\right\|_{L^\infty(K_1 \times K_2)} \\ &\leq |K_1|\, A^{|\alpha|} \alpha!^s. \end{aligned}$$

Logo, se $C_K = \max\left\{|K_1|, A, \|u\|_{L^\infty(K_2, L^1(K_1))}\right\}$, obtemos (4.8). □

Se u é um s-vetor Gevrey para $\mathfrak{L}$, então u é um s-vetor Gevrey para cada L_j e temos que o conjunto característico de L_j contém $WF_s(u)$ (ver [7, p.9]). Assim como na Seção 3.4, o conjunto característico de $\mathfrak{L}$ sobre Ω (denotado por $\mathcal{C}(\mathfrak{L})\mid_\Omega$) é a interseção dos conjuntos característicos de cada L_j, $1 \leq j \leq n$. Como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathfrak{L})\mid_\Omega &\doteq \bigcap_{j=1}^{n} \left\{(x,t,\xi,\tau) \in \Omega \times \left[\left(\mathbb{R}^{m+n}\right) \setminus \{0\}\right] : \sigma(L_j)(x,t,\xi,\tau) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,t,\xi,0) : x \in U, t \in V, \xi \neq 0, {}^t D\Phi(t) \cdot \xi = 0\right\}, \end{aligned}$$

temos a

Proposição 4.6 *Se $u \in G^s(\Omega; \mathfrak{L})$, então o conjunto frente de onda Gevrey de ordem s de u está contido no conjunto*

$$\left\{(x,t,\xi,0) : x \in U, t \in V, \xi \neq 0, {}^t D\Phi(t) \cdot \xi = 0\right\}.$$

Corolário 4.7 *Se $\mathfrak{L}$ é elíptico e $s \geq 1$, então $G^s(\Omega; \mathfrak{L}) = G^s(\Omega)$.*

Corolário 4.8 *Sejam $u \in G^s(\Omega;\mathfrak{L})$ e $s' \geq s$ qualquer, sendo $\Omega = U \times V$ aberto em $\mathbb{R}^m \times \Theta$. Assuma que dados $x_0 \in U$ e $K_2 \subset V$ compacto, existe sequência $\{\psi_N\} \subset C_0^\infty(U)$ tal que ψ_N vale 1 em vizinhança de x_0, $\|\psi_N\|_{L^\infty} \leq M$, para algum $M > 0$ e existe $C > 0$ tal que*

$$\left|\widehat{(\psi_N u)}(\xi,t)\right| \leq C^{N+1}\frac{N!^{s'}}{|\xi|^N}, \forall t \in K_2, N \in \mathbb{Z}_+,$$

sendo que $\widehat{(\psi_N u)}(\xi,t)$ representa a transformada parcial de Fourier na variável x. Então $u \in G^{s'}(\Omega)$.

Demonstração. Usando o Teorema 2.19 e a Proposição 4.6, é suficiente demonstrarmos que dados $(x_0,t_0) \in \Omega$ e $\xi_0 \neq 0$, então $(x_0,t_0,\xi_0,0) \notin WF_{s'}(u)$. Considere $\chi \in C_0^\infty(V)$ que vale 1 em vizinhança de t_0 e satisfaz $0 \leq \chi \leq 1$ e uma sequência ψ_N como no enunciado, sendo $K_2 = \operatorname{supp}\chi$. Como $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, segue que a sequência $(\psi_N \otimes \chi)\, u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ é limitada. Observe agora que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}\left[(\psi_N \otimes \chi)\, u\right](\xi,\tau)\,| &\leq \int_{K_2}\left|\int e^{-ix\cdot\xi}\psi_N(x)u(x,t)dx\right|dt \\
&\leq |K_2| \sup_{t\in K_2}\left|\widehat{(\psi_N u)}(\xi,t)\right| \\
&\leq |K_2|\, C^{N+1}\frac{N!^{s'}}{|\xi|^N}.
\end{aligned}$$

Seja $\Gamma = \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{m+n} \setminus \{0\} : |\tau| < |\xi|\}$, que é um cone aberto. Observe que $(\xi_0,0) \in \Gamma$ e, em Γ, temos $|(\xi,\tau)| \leq \sqrt{2}\,|\xi|$. Logo, se $C_1 = \max\left\{C2^{1/2}, C\,|K_2|\right\}$, segue que

$$|\mathcal{F}\left[(\psi_N \otimes \chi)\, u\right](\xi,\tau)| \leq C_1^{N+1}\frac{N!^{s'}}{|(\xi,\tau)|^N}, N = 1,2\ldots,(\xi,\tau) \in \Gamma,$$

o que termina a demonstração. □

Para o caso em que $\mathfrak{L}$ não é elíptico e $s > 1$, temos a

Proposição 4.9 *Se $\mathfrak{L}$ não é elíptico e s e s' são números reais tais que*

$$1 < s \leq s' < 2s - 1, \tag{4.14}$$

então existe um s-vetor Gevrey para $\mathfrak{L}$ que não é uma função Gevrey de ordem s'.

Demonstração. Por hipótese, $\mathcal{C}(\mathfrak{L})\,|_{\Omega} \neq \varnothing$, ou seja, existem $t_0 \in \Theta$ e $\xi_0 \neq 0$ tais que ${}^tD\Phi(t_0) \cdot \xi_0 = 0$. Observe que se considerarmos $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t + t_0) - \Phi(t_0)$, então podemos supor que $t_0 = 0$. Além disso, pela linearidade da diferencial, vamos considerar $|\xi_0| = 1$. Defina agora o funcional $f : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = \Phi(t) \cdot \xi_0$. Se $\eta \in \mathbb{R}^n$, então nossa hipótese garante que

$$df(0) \cdot \eta = \langle \xi_0, D\Phi(0) \cdot \eta \rangle = 0.$$

Como $f(0) = 0$, segue da Fórmula de Taylor que, após uma possível contração de Θ, existe $C > 0$ tal que

$$|\Phi(t) \cdot \xi_0| \leq C\, |t|^2, \forall t \in \Theta. \tag{4.15}$$

Escolha $0 < \alpha < 1$ de modo que $\frac{1}{2s-1} < \alpha < \frac{1}{s'}$ e defina $\sigma = s - \frac{1-\alpha}{2\alpha}$. Como $\alpha(2s-1) > 1$, temos $2\alpha s + \alpha - 1 > 2\alpha$, o que nos garante que $1 < \sigma$. Denote por r o raio de Θ e considere $0 < \rho < \min\left\{r, C^{-1/2}\right\}$ e $\zeta \in G_0^{\sigma}(B(0,\rho))$ tal que $\zeta(0) = 1$. Definimos

$$u(x,t) = \int_1^{\infty} e^{i\lambda Z(x,t)\cdot\xi_0 - \lambda^{\alpha}} \zeta\left(\lambda^{(1-\alpha)/2} t\right) d\lambda, (x,t) \in \mathbb{R}^m \times \Theta, \tag{4.16}$$

lembrando que $Z_k(x,t) = x_k + i\Phi_k(t)$. Observe que se $\lambda \geq 1$ e $\lambda^{(1-\alpha)/2} t \in \operatorname{supp} \zeta$, então $\lambda |t|^2 \leq \rho^2 \lambda^{\alpha}$, e portanto $\lambda\, |\Phi(t) \cdot \xi_0| \leq C\rho^2\lambda^{\alpha}$. Fixe $M > 0$ tal que

$$|\partial^{\beta}\zeta(t)| \leq M^{|\beta|+1}\beta!^{\sigma}, \forall t \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Denotando por $g(x,t,\lambda)$ o integrando na equação (4.16) segue que

$$\int_1^{\infty} |g(x,t,\lambda)|\, d\lambda \leq M \int_{(1,+\infty)\cap\{\lambda|t|^2 \leq \rho^2\lambda^{\alpha}\}} e^{-\lambda\Phi(t)\cdot\xi_0 - \lambda^{\alpha}} d\lambda < \infty,$$

pois $-\lambda\Phi(t) \cdot \xi_0 - \lambda^{\alpha} \leq (C\rho^2 - 1)\lambda^{\alpha}$ e $C\rho^2 - 1 < 0$. Isso nos mostra que u está bem definida e estimativas análogas nos mostram que u é de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ em $\mathbb{R}^m \times \Theta$. Note que

$$u(x,0) = \int_1^{\infty} e^{i\lambda x\cdot\xi_0 - \lambda^{\alpha}} d\lambda.$$

Se $\xi_0 \cdot D_x$ denota o operador $\frac{1}{i}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$, sendo ξ_k as coordenadas de ξ_0, obtemos

$$\left[(\xi_0 \cdot D_x)\, u\right](x,0) = \int_1^{\infty} \lambda |\xi_0|^2 e^{i\lambda x\cdot\xi_0 - \lambda^{\alpha}} d\lambda = \int_1^{\infty} \lambda e^{i\lambda x\cdot\xi_0 - \lambda^{\alpha}} d\lambda.$$

Utilizando um argumento de indução e fazendo $x = 0$, concluímos que

$$\left[(\xi_0 \cdot D_x)^k u\right](0,0) = \int_1^\infty \lambda^k e^{-\lambda^\alpha} d\lambda, k = 0, 1, \ldots. \tag{4.17}$$

A mudança de variável $u = \lambda^\alpha$ nos mostra que

$$\int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda^\alpha} d\lambda = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right), k = 0, 2, \ldots,$$

e segue de (4.17) que

$$\left[(\xi_0 \cdot D_x)^k u\right](0,0) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) - \int_0^1 \lambda^k e^{-\lambda^\alpha} d\lambda, k = 0, 1, \ldots. \tag{4.18}$$

Suponha que u seja uma função Gevrey de ordem τ, com $\tau < \frac{1}{\alpha}$. Então existe $C_1 > 0$ tal que

$$|\partial_x^\gamma u(0,0)| \leq C_1^{|\gamma|+1} \gamma!^\tau, \ \forall \ \gamma \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left|\left[(\xi_0 \cdot D_x)^k u\right](0,0)\right| &= \left|\sum_{j_1=1}^m \cdots \sum_{j_k=1}^m \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \ldots x_{j_k}}(0,0)\right| \\
&\leq \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} |\xi_0|^{|\gamma|} |\partial_x^\gamma u(0,0)| \\
&\leq \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} C^{k+1} \gamma!^\tau \\
&\leq (mC)^{k+1} k!^\tau.
\end{aligned}$$

Podemos supor ainda que $C > 1$ e $\int_0^1 \lambda^k e^{-\lambda^\alpha} d\lambda \leq C_1$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$. Segue de (4.18) que existe $A > 1$ tal que

$$\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) \leq A^{k+1} k!^\tau. \tag{4.19}$$

Usamos agora que existem constantes $0 < B$ e $0 < \theta < 1$ tais que $\Gamma(x) = Bx^{x-1/2}e^{-x+\theta x^{-1}}$ para $x > 0$ (ver [19, p.253]), $\Gamma(k+1) = k!$ e escrevemos $j = k+1$ para obter, após redefinir A,

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{j}{\alpha}\right)^{\frac{j}{\alpha}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{j}{\alpha}+\theta\frac{\alpha}{j}} \leq A^{j+1} j^{\tau j-\frac{\tau}{2}} e^{-\tau j+\frac{\theta\tau}{j}}.$$

Esta última desigualdade pode ser reescrita como

$$\left(A\alpha^{1/\alpha}e^{1/\alpha}e^{-\tau}\right)^{-j} j^{(\tau-1)/2} j^{(1/\alpha-\tau)j} e^{\theta(\alpha-\tau)/j} \leq \alpha^{1/2}A,$$

o que é uma contradição, pois já que $1/\alpha - \tau > 0$, vale

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \left(A\alpha^{1/\alpha}e^{1/\alpha}e^{-\tau}\right)^{-j} j^{(\tau-1)/2} j^{(1/\alpha-\tau)j} e^{\theta(\alpha-\tau)/j} = \infty.$$

Isso mostra que u não é função Gevrey de ordem τ em vizinhança de 0 quando $\tau < 1/\alpha$. Observe que se $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, usando que $L_j Z_k = 0$ para todo $j = 1, \dots n$ e $k = 1, \dots, m$ e derivando sob o sinal de integração, obtemos

$$L^\beta u(x,t) = \int_1^\infty \lambda^{(1-\alpha)|\beta|/2} e^{i\lambda Z(x,t)\cdot\xi_0 - \lambda^\alpha} \partial_t^\beta \zeta\left(\lambda^{(1-\alpha)/2}t\right) d\lambda,$$

o que nos mostra que

$$\left|L^\beta u(x,t)\right| \leq M^{|\beta|+1}\beta!^\sigma \int_1^\infty \lambda^{(1-\alpha)|\beta|/2} e^{-\left(1-C\rho^2\right)\lambda^\alpha} d\lambda. \tag{4.20}$$

Denote por η o número real positivo $1 - C\rho^2$. Se realizarmos a mudança de variável $x = \eta\lambda^\alpha$, concluímos que para algum $C > 1 > 1$, vale

$$\left|L^\beta u(x,t)\right| \leq C_1^{|\beta|+1} \int_0^\infty x^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}(|\beta|+2)} e^{-x} dx \beta!^\sigma.$$

Afirmamos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_0^\infty x^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}(|\beta|+2)} e^{-x} dx \leq C_2^{|\beta|+3} \left(|\beta|+1\right)!^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}, \forall\beta \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{4.21}$$

ou seja

$$\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(|\beta|+2\right)+1\right) \leq C_2^{|\beta|+3}\Gamma\left(|\beta|+2\right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}.$$

Se escrevermos $|\beta|+2=j$ e $c=\frac{1-\alpha}{2\alpha}$, devemos demonstrar que

$$\Gamma\left(cj+1\right)\leq C_2^{j+1}\Gamma\left(j\right)^c.$$

Como $\Gamma\left(cj+1\right)=cj\Gamma\left(cj\right)$, é suficiente mostramos que existe $C_2>0$ de modo que

$$\Gamma\left(cj\right)\leq C_2^{j+1}\Gamma\left(j\right)^c, j=1,2,\ldots.$$

Esta última desigualdade equivale a

$$\left(cj\right)^{cj-1/2}e^{-cj+\theta/cj}\leq C_2^{j+1}j^{cj-c/2}e^{-cj+c\theta/j}, j=1,2,\ldots.$$

Logo, basta termos

$$c^{cj}j^{\frac{c-1}{2}}e^{\frac{\theta}{cj}}\leq C_2^{j+1}.$$

Como $h(x)=e^{\frac{\theta}{cx}}$ é limitada em $[1,+\infty)$ e $k\leq e^k$, se considerarmos C_2 tal que $C_2=c^ce^{\frac{c-1}{2}}$ e $h(x)\leq C_2$, então para todo $x\geq 1$ as equações (4.20) e (4.21) nos mostram que

$$\left|L^\beta u(x,t)\right|\leq M^{|\beta|+1}\beta!^\sigma C_2^{|\beta|+3}\left(|\beta|+1\right)!^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}.$$

Da definição de σ, segue que existe $C_4>0$ tal que

$$\left|L^\beta u(x,t)\right|\leq C_4^{|\beta|+1}\beta!^s, \forall (x,t)\in\mathbb{R}^m\times\Theta, \beta\in\mathbb{Z}_+^n.$$

Logo, $u\in G^s\left(\mathbb{R}^m\times\Theta;\mathfrak{L}\right)\setminus G^{s'}\left(\mathbb{R}^m\times\Theta\right)$. □

4.3 Vetores Analíticos para $\mathcal{L}$

Enunciaremos agora um resultado (ver [5] e [2, teo 2]) que nos motivará a considerar uma hipótese adicional para a nossa função Φ.

Suponha que h é uma solução de $L_jh=0, j=1,\ldots,n$ definida em vizinhança da origem. Fixado $\xi_0\neq 0$ em $\mathbb{R}^m$, temos que o funcional $\zeta_{\xi_0}:\Theta\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por $\zeta_{\xi_0}=\Phi(t)\cdot\xi_0$ não tem um mínimo local na origem se, e somente se, $(0,\xi_0)\notin WF_a\left(h(\cdot,0)\right)$.

A partir de agora, iremos trabalhar com a seguinte hipótese:

$$(*) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}\,, \zeta_\xi \text{ é uma aplicação aberta.}$$

Demonstramos agora o principal resultado sobre regularidade analítica de [8]:

Teorema 4.10 *Se $\Omega = U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \Theta$ é aberto e $\mathfrak{L}$ satisfaz $(*)$, então $G^1(\Omega;\mathfrak{L}) \subset C^\omega(\Omega)$.*

Demonstração. Considere $U' \times V'$ um aberto tal que $\overline{U'} \times \overline{V'} \subset U \times V$. Segue que $L^\alpha u \in L^\infty(V', L^1(U'))$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e existe $C > 0$ tal que

$$\|L^\alpha u\|_{L^\infty(V',L^1(U'))} \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{4.22}$$

Seja $0 < r < C^{-1}/4$. Observe que

$$\sum_\alpha \left\| \frac{L^\alpha u}{\alpha!} r^{|\alpha|} \right\|_{L^\infty(V',L^1(U'))} \leq C \sum_\alpha (Cr)^{|\alpha|} < \infty.$$

Logo, como $L^\infty(V', L^1(U'))$ é um espaço de Banach, temos que $f : D = B(0;r) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow L^\infty(V', L^1(U'))$ dada por

$$f(y) = \sum_\alpha \frac{L^\alpha u}{\alpha!}(-iy)^\alpha \tag{4.23}$$

define uma função analítica real (ver [9, p.203]). Assim, se definirmos $\mathcal{U} = U' \times D \times V'$ e

$$v(x,y,t) = \sum_\alpha \frac{L^\alpha u(x,t)}{\alpha!}(-iy)^\alpha, (x,y,t) \in \mathcal{U},$$

obtemos que $v \in L^1(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{U})$. Além disso

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_y^\beta v(\cdot,y,\cdot)\right\|_{L^\infty(V',L^1(U'))} &= \left\|\partial^\beta f(y)\right\|_{L^\infty(V',L^1(U'))}\\
&\leq \sum_{\alpha\geq\beta}\left\|\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}\frac{L^\alpha u}{\alpha!}(-iy)^{\alpha-\beta}\right\|_{L^\infty(V',L^1(U'))}\\
&\leq \sum_{\alpha\geq\beta}\frac{1}{(\alpha-\beta)!}\left\|L^\alpha u\right\|_{L^\infty(V',L^1(U'))} r^{|\alpha-\beta|}\\
&\leq C\left(r^{-1}\right)^{|\beta|}\beta!\sum_{\alpha\geq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(Cr)^{|\alpha|}\\
&\leq C\left(r^{-1}\right)^{|\beta|}\beta!\sum_{\alpha\geq\beta}2^{|\alpha|}(Cr)^{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Logo, existe $A > 0$ tal que

$$\left\|\partial_y^\beta v(\cdot,y,\cdot)\right\|_{L^\infty(V',L^1(U'))} \leq A^{|\beta|+1}\beta!, \forall\beta\in\mathbb{Z}_+^n, y\in D. \tag{4.24}$$

Vamos denotar as coordenadas duais de (x, y, t) por (ξ, η, τ). Afirmamos que

$$\mathrm{WF}_a(v) \subset \mathcal{U}\times\left\{(\xi,0,\tau) : (\xi,\tau)\neq 0\right\}. \tag{4.25}$$

Fixe $(x_0, y_0, t_0) \in U$ e $(\xi_0, \eta_0, \tau_0) \in \mathbb{R}^{m+2n}\setminus\{0\}$ tal que $\eta_0 \neq 0$. Consideramos $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(U' \times V')$ que vale 1 em vizinhança de (x_0, t_0), $0 \leq \chi \leq 1$ e uma sequência $\{\psi_N\} \subset C_0^\infty(D)$ que vale 1 em vizinhança de y_0 e que satisfaz (2.43) com constantes C_α e C_1. Definimos a sequência limitada $v_N(x, y, t) = \chi(x, t)\psi_N(y)v(x, y, t) \in \mathcal{E}'(\Omega)$ que coincide com v em vizinhança de (x_0, y_0, t_0). Observe que se $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ e $|\beta| = N$,

$$\begin{aligned}
\left|\eta^\beta\mathcal{F}\left(\chi(x,t)\psi_N(y)v\right)(\xi,\eta,\tau)\right| &\leq \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\int_D\int_{V'}\int_{U'}\left|D^{\beta-\gamma}\psi_N(y)\right|\left|D_y^\gamma v(x,t,y)\right|dydtdx\\
&\leq \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\int_D\int_{V'}\int_{U'}(C_1N)^{|\beta-\gamma|}\left|D_y^\gamma v(x,t,y)\right|dydtdx\\
&\leq |D|\,|V'|\,A\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}(C_1N)^{|\beta-\gamma|}A^{|\gamma|}|\gamma|^{|\gamma|}
\end{aligned}$$

Usamos agora que $|\beta| = N$, $|\gamma| \leq |\beta|$ e (2.19) para concluir que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\left|\eta^\beta \mathcal{F}\left(\chi(x,t)\psi_N(y)v\right)(\xi,\eta,\tau)\right| \leq C_2^{N+1} N^N.$$

Como $|\eta|^N \leq n^{N/2}|\eta^\beta|$, com $|\beta| = N$, trocando C_2 por $(n^{1/2}C_2)$, temos

$$\left|\mathcal{F}\left(\chi(x,t)\psi_N(y)v\right)(\xi,\eta,\tau)\right| \leq C_2^{N+1} \frac{N^N}{|\eta|^N}. \tag{4.26}$$

Considere o cone aberto $\Gamma = \{(\xi,\eta,\tau) \in \mathbb{R}^{m+2n} \setminus \{0\} : |\xi| + |\tau| < \rho\,|\eta|\}$, sendo $\rho > 0$ tal que $\frac{|\xi_0|+|\tau_0|}{|\eta_0|} < \rho$. Assim, $(\xi_0,\eta_0,\tau_0) \in \Gamma$ e, se $(\xi,\eta,\tau) \in \Gamma$, então

$$\begin{aligned}
|(\xi,\eta,\tau)| &= |(\xi,0,0) + (0,\eta,0) + (0,0,\tau)| \\
&\leq |(\xi,0,0)| + |(0,\eta,0)| + |(0,0,\tau)| \\
&\leq (1+\rho)\,|\eta|\,.
\end{aligned}$$

Portanto, de (4.26), redefinindo C_2, temos

$$\left|\mathcal{F}\left(\chi(x,t)\psi_N(y)v\right)(\xi,\eta,\tau)\right| \leq C_2^{N+1} \frac{N^N}{|(\xi,\eta,\tau)|^N}, \forall\,(\xi,\eta,\tau) \in \Gamma,$$

de onde concluímos que $(\xi_0,\eta_0,\tau_0) \notin \mathrm{WF}_a(v)$, obtendo (4.25). Vamos introduzir agora uma nova estrutura do tipo tubo. Consideramos $\tilde{\Phi} : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ dada por

$$\tilde{\Phi}(t) = (\Phi_1(t),\ldots,\Phi_m(t),t_1,\ldots,t_n), \forall t = (t_1,\ldots,t_n) \in \Theta.$$

Os campos agoram são dados por $\tilde{L}_j = L_j - i\frac{\partial}{\partial y_j}, j = 1,\ldots,n$ e temos que para todo $j = 1,\ldots,n$, vale

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_j v &= \sum_\alpha \frac{L^{\alpha+e_j}u}{\alpha!}(-iy)^\alpha - \sum_{\alpha \geq e_j}(\alpha - e_j)\frac{L^\alpha u}{\alpha!}(-iy)^{\alpha-e_j} \\
&= \sum_\alpha \frac{L^{\alpha+e_j}u}{\alpha!}(-iy)^\alpha - \sum_\beta \frac{L^{\beta+e_j}u}{\beta!}(-iy)^\beta = 0.
\end{aligned}$$

Segue (ver Apêndice B) que todo ponto em $\mathcal{U}$ admite uma vizinhança na qual v é da forma

$$v = \Delta^q_{(x,y)} v',$$

sendo v' uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em tal vizinhança, $L_j v' = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, $\Delta_{(x,y)}$ representa o Laplaciano nas variáveis x e y e q é um inteiro não negativo. Logo, é suficiente mostrarmos que v' é uma função analítica, pois nesse caso teremos que v é analítica e, como $v(x, 0, t) = u(x, t)$, teremos o resultado desejado. Observe ainda que $v' \in G^1(\Omega; \mathfrak{L})$, já que v é de classe $\mathcal{C}^1$ e também é solução do problema homogêneo. O conjunto característico de $\tilde{\mathcal{L}}$, $\mathcal{C}(\mathfrak{L}) \mid_{\Omega}$, está contido em $\mathcal{U} \times \{(\xi, \eta, \tau) : \tau = 0, \eta +^t \Phi'(t) \cdot \xi = 0\}$ (Proposição 4.6), e portanto $\mathrm{WF}_a(v')$ também está contido em tal conjunto.

Afirmamos que fixado $t \in V'$, a função $v'_t = v'(\cdot, \cdot, t)$ definida em $U' \times D$ é analítica. Defina $f : U' \times D \longrightarrow U' \times D \times V'$ por $f(x, y) = (x, y, t)$, a qual é analítica. Observe que $N_f = \{(x, y, t, 0, 0, \tau) : (x, y) \in U' \times D\}$, lembrando que

$$N_f = \left\{(f(x, y), \xi, \eta, \tau) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{m+2n} :^t f'(x, y) \cdot (\xi, \eta, \tau) = 0\right\}.$$

Dessa forma, temos $N_f \cap \mathrm{WF}_a(v') = \varnothing$. Vamos fixar

$$\Gamma = \mathcal{U} \times \left\{(\xi, \eta, \tau) : \tau = 0, \eta +^t \Phi'(t) \cdot \xi = 0\right\}$$

e usar as notações de [12, p. 262,p. 263,p. 296]. Seja $v'_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$ tal que $v'_n \longrightarrow v'$ em $\mathcal{D}'_\Gamma(\mathcal{U})$. Como v'_j é de classe $\mathcal{C}^\infty$, segue que $f^* v'_j = v'_j \circ f$. Já que $f^* v'_j \longrightarrow f^* v'$ em $\mathcal{D}'(U' \times D)$, se mostrarmos que $v'_j \circ f \longrightarrow v' \circ f$ em $\mathcal{D}'(U' \times D)$, teremos $f^* v' = v' \circ f = v'_t$. Dada $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U' \times D)$, uma vez que vale

$$\left|\left\langle v'_j \circ f - v' \circ f, \varphi\right\rangle\right| \leq \int_{\operatorname{supp}\varphi} \left|v'_j(x, y, t) - v'(x, y, t)\right| |\varphi(x, y)| \, dxdy,$$

é suficiente mostrarmos que $v'_j \longrightarrow v'$ uniformemente sobre compactos $K \subset \mathcal{U}$. Para verificar isso, vamos explicitar quem são v'_j:

Considere K_j uma sequência de compactos em $\mathcal{U}$ tal que $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$, $\mathcal{U} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ e dado $K \subset \mathcal{U}$ compacto, existe j tal que $K \subset K_j$. Definimos uma sequência $\chi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\operatorname{int} K_{j+1})$ que vale 1 em $\mathcal{K}_j$ e uma outra sequência $\varphi_j \in \mathbb{R}^{m+2n}$ de modo que $\int \varphi_j = 1$ para todo $j = 1, 2, \ldots$ e $\operatorname{supp} \varphi_j = \overline{B(0; \epsilon_j)}$, sendo que ϵ_j é uma sequência que decresce a zero e que satisfaz

$$K_j + \overline{B(0; \epsilon_j)} \subset \mathcal{U}, \forall j = 1, 2, \ldots.$$

A sequência v'_j é dada por

$$v'_j = (v'\chi_j) * \varphi_j.$$

Sejam $K \subset \mathcal{U}$ compacto e $\epsilon > 0$ dados. Considere $r > 0$ tal que $K + \overline{B(0;r)} \subset \mathcal{U}$. Existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K + \overline{B(0;r)} \subset K_{j_0}$ e $\epsilon_{j_0} < r$.
Como v' é uniformemente contínua em $K + \overline{B(0;r)}$, existe $\delta > 0$ tal que $|v'(x) - v(z)| < \epsilon$ sempre que $x, z \in K'$ e $|x - z| < \delta$. Seja $j_1 \in \mathbb{N}$ que satisfaz $\epsilon_{j_1} < \min\{\delta, r\}$. Observe que

$$\begin{aligned} \left|v'_j(x) - v'(x)\right| &= \left|\int_{|y|<\epsilon_j} \left[\left(v'\chi_j\right)(x-y) - v'(x)\right]\varphi_j(y)dy\right| \\ &\leq \sup_{|y|<\epsilon_j} \left|\left(v'\chi_j\right)(x-y) - v'(x)\right|. \end{aligned}$$

Suponha que $j > j_0$ e $x \in K$. Segue que que se $|y| < \epsilon_j$, então $x - y \in K + \overline{B(0;\epsilon_{j_0})} \subset K + \overline{B(0;r)}$. Como $K_{j_0} \subset K_j$ e $K + \overline{B(0;r)} \subset K_{j_0}$, concluímos que se $j > j_0$, $x \in K$ e $|y| < \epsilon_j$, então $\chi_j(x-y) = 1$. Por outro lado, se $j > j_1$, então para $x \in K$ e $|y| < \epsilon_{j_1}$, temos $x - y \in K + \overline{B(0;j_1)} \subset K + \overline{B(0;r)}$ e $|x - (x-y)| < \delta$, podendo concluir que $|v'(x-y) - v'(x)| < \epsilon$. Ou seja, se $j > \max\{j_0, j_1\}$ então

$$\left|v'_j(x) - v(x)\right| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Dessa forma, temos

$$\mathrm{WF}_a(v'_t) \subset f^* \,\mathrm{WF}_a(v') \doteq \left\{\left(x, y, {}^t f'(x,y)\cdot(\xi,\eta,\tau)\right) : (x,y,t,\xi,\eta,\tau) \in \mathrm{WF}_a(v')\right\}. \quad (4.27)$$

Observe que neste caso

$$f^* \,\mathrm{WF}_a(v') = \left\{(x,y,\xi,\eta) : (x,y,t,\xi,\eta,\tau) \in \mathrm{WF}_a(v')\right\}.$$

Se definirmos $P = \Delta^q_{(x,y)}$, temos que se $(\xi,\eta,\tau) \in \operatorname{char} P$, então $\eta = 0$. De (4.25) e $\mathrm{WF}_a\, v' \subset \operatorname{char} P \cup \mathrm{WF}_a(v)$, temos que

$$\mathrm{WF}_a(v') \subset \mathcal{U} \times \left\{(\xi, 0, \tau) : (\xi,\tau) \neq 0\right\}.$$

Segue de (4.27) que se $\eta \neq 0$, então $(x,y,\xi,\eta) \notin \mathrm{WF}_a(v'_t)$. Por outro lado, se $\eta = 0$, temos que $\tilde{\Phi}(t)\cdot(\xi,0) = \Phi(t)\cdot\xi$, a qual estamos supondo que é aberta, e portanto não possui mínimo local sempre que $\xi \neq 0$. Segue que $(x,y,\xi,0) \notin WF_a(v'_t)$. Concluímos que

$WF_a(v'_t) = \varnothing$ e do Teorema 2.19 segue que v'_t é analítica para todo $t \in V'$ fixado.

Usamos agora os teoremas de Cauchy-Kovalevski e Hölmgren para concluir a analiticidade de v' em vizinhança de cada $(x,y,t) \in \mathcal{U}$: fixe $t_0 = (t_1^0, \ldots, t_n^0) \in V'$. O sistema

$$\begin{cases} \tilde{L}_1 u & = & 0 \\ u_1(x,y,t_1^0,t_2,\ldots,t_n) & = & v'(x,y,t_0) \end{cases}$$

admite uma solução analítica u_1 em vizinhança da hipersuperfície $t_1 = t_1^0$ em $\mathcal{U}$. A função $v_1(x,y,t) = v'(x,y,t_1,t_2^0,\ldots,t_n^0)$ de classe $\mathcal{C}^1$ também é solução de tal sistema. Pelo Teorema de Hölmgren, segue que v_1 é analítica em um vizinhança de $t_1 = t_1^0$ em $\mathcal{U}$. Consideramos agora o sistema

$$\begin{cases} \tilde{L}_2 u & = & 0 \\ u_1(x,y,t_1,t_2^0,\ldots,t_n) & = & v'(x,y,t_1,t_2^0,\ldots,t_n). \end{cases}$$

Aplicamos o mesmo argumento com $v_2(x,y,t) = v'(x,y,t_1,t_2,\ldots,t_n^0)$ e, utilizando os mesmos passos sucessivamente, concluímos que v' é analítica. □

Observação 4.11 *É possível demonstrar o Teorema 4.10 sem passar pelo resultado presente no Apêndice B. Faremos alguns comentários sobre isso, uma vez que o argumento utilizado será importante posteriormente. Verificamos que a função v satisfaz $L_j v = 0$ para todo $j = 1,\ldots,n$ e $v \in L^\infty(V'; L^1(U'))$. Em particular temos que*

$$L^\alpha v \in L^\infty(V'; L^1(U')),\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Afirmamos que

$$v \in \mathcal{C}^\infty(V'; \mathcal{D}'(U')).$$

Para verificar isso, recordamos que os espaços de Sobolev $H^{p,-m}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, $m \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, são formados pelas distribuições $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ que se escrevem como uma soma finita de derivadas de ordem até m de funções em $L^p(\Omega)$. Tais espaços são espaços de Banach (podemos introduzir uma norma como feito em [18, p.326]) e contém o espaço L^p. Assim, segue que

$$v(t), (L_j v)(t) \in L^1(U').$$

Como

$$\partial_{t_j} v = (L_j v) + i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} \frac{\partial u}{\partial x_k},$$

obtemos que

$$v, \ \partial_{t_j} v \in L^\infty(V'; H^{1,-1}(U')), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Isso nos permite concluir que

$$v \in \mathcal{C}^1(V'; H^{1,-2}(U')).$$

Um argumento de indução e as inclusões $H^{1,-m}(U') \subset \mathcal{D}'(U')$ para todo m nos permite concluir a afirmação.

Uma vez mostrado que o traço $v(\cdot, \cdot, t)$ é analítico para cada $t \in V'$ fixado, utilizamos a seguinte versão do Teorema de Holmgren, a qual pode ser vista em [11, p. 125]:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $P = P(x, D)$ um operador diferencial parcial analítico de ordem m. Suponha que $P_m(x_0, \nabla\varphi(x_0)) \neq 0$ para $x_0 \in \Omega$, sendo P_m o símbolo principal de P. Então existe uma vizinhança $\Omega' \subset \Omega$ de x_0 tal que se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é uma distribuição que satisfaz $Pu = 0$ e u se anula no conjunto

$$\{x :\in \Omega : \varphi(x) > \varphi(x_0)\},$$

então u se anula em Ω'.

A conclusão do teorema segue de modo análogo ao que fizemos anteriormente: fixe (x_0, y_0, t_0) qualquer e considere primeiro $P = \tilde{L_1}$ e $\varphi(x, y, t) = -t_1$. Denote $t_0 = (t_1^0, \ldots, t_n^0)$. O problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{L_1} u & = & 0 \\ u_1(x, y, t_1^0, t_2, \ldots, t_n) & = & v'(x, y, t_0) \end{array} \right.$$

admite uma solução analítica u_1. Se $v_1(x, y, t) = v(x, y, t_1, t_2^0, \ldots, t_n^0) - u_1(x, y, t)$, então $v_1(x, y, t_1^0, t_2, \ldots, t_n) = 0$. Além disso, $\tilde{L_1} v_1 = 0$. Se definirmos $V_1(x, y, t) = H(t - t_1^0)v(x, y, t)$, sendo que H denota a função de Heaviside, então ainda temos $L_1 V_1 = 0$ e agora $V_1 = 0$ para $t_1 < t_1^0$. Segue do teorema que $v_1 = h_1$ em vizinhança de (x_0, y_0, t_0). Prosseguindo com esse argumento e trocando tanto o sinal de φ quanto o sinal do argumento da função Heaviside, concluímos que v é analítica em vizinhança de (x_0, y_0, t_0) e obtemos o resultado.

Mesmo com a nossa hipótese $(*)$, fenômenos como o da Proposição 4.9 ainda ocorrem e para demonstrar essa afirmação, necessitamos de alguns resultados preliminares. Denotaremos por $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, $0 \leq k \leq \infty$ o subconjunto das funções de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ tais que todas suas derivadas de ordem menor ou igual a k admitem uma extensão contínua em $\overline{\Omega}$. De modo análogo, trocamos $\mathcal{C}^k$ por G^s e definimos o conjunto $G^s(\overline{\Omega})$.

Lema 4.12 *Consideremos $m = n = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \Theta$ um aberto, $s > 1$ e $\Omega' \subset \Omega$ outro conjunto aberto. Suponha que se $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $L_j u \in G^s(\overline{\Omega})$ para $j = 1, 2$, então $u|_{\Omega'} \in \mathcal{C}^1(\Omega')$. Então dados $h > 0$ e $K \subset \Omega'$ compacto, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{|\alpha|=1} \sup_K |\partial_x^\alpha u| \leq C \left[\sup_\Omega |u| + \sum_{k=1}^{2} \sup_{(\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^2\times\mathbb{Z}_+^2} \sup_\Omega \frac{\left|L^\beta \partial_x^\gamma L_k u\right|}{h^{|\beta|+|\gamma|}\beta!^s\gamma!^s} \right]. \tag{4.28}$$

Demonstração. Para cada $h > 0$, denote por $G^{s,h}(\overline{\Omega})$ o subespaço de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ das funções que satisfazem

$$\|u\|_{s,h} \doteq \sup_{(\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^2\times\mathbb{Z}_+^2} \sup_\Omega \frac{\left|L^\beta \partial_x^\gamma u\right|}{h^{|\beta|+|\gamma|}\beta!^s\gamma!^s} < \infty.$$

Afirmamos que $\left(G^{s,h}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{s,h}\right)$ é um espaço de Banach. De fato, suponha que $\{u_n\} \subset G^{s,h}(\overline{\Omega})$ seja uma sequência de Cauchy, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{(\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^2\times\mathbb{Z}_+^2} \sup_\Omega \frac{\left|L^\beta \partial_x^\gamma (u_n - u_m)\right|}{h^{|\beta|+|\gamma|}\beta!^s\gamma!^s} < \epsilon, \forall m, n \geq n_0. \tag{4.29}$$

Por um argumento indutivo, temos que, para cada β e cada γ, vale

$$\partial_t^\beta \partial_x^\gamma (u_n - u_m) \longrightarrow 0$$

uniformemente em Ω quando $m, n \longrightarrow \infty$. Em particular, existe $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que tanto u_n quanto suas derivadas convergem para u e suas respectivas derivadas uniformemente em Ω. A equação (4.29) nos mostra que $u \in G^{s,h}(\overline{\Omega})$. Assim, podemos considerar o espaço de Banach $E \doteq \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \times G^{s,h}(\overline{\Omega}) \times G^{s,h}(\overline{\Omega})$ com a norma da soma e seu subespaço F formado por $(u, f_1, f_2) \in E$ tal que $L_k u = f_k$ para $k = 1, 2$ em Ω (no sentido das distribuições). Como $u_n \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ implica que $\partial^\alpha u_n \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ qualquer que seja o multi-índice α, temos que F é fechado (e portanto é um espaço de Banach). Definimos agora

$$f : F \longrightarrow \mathcal{C}^1(\Omega')$$

por $f(u, f_1, f_2) = u|_{\Omega'}$. Vamos demonstrar que f é contínua usando o Teorema do Gráfico Fechado para F-espaços (ver [18, p. 173]): suponha que uma sequência $(u_n, f_{1,n}, f_{2,n}, v_n) \in$ graf f convirja para $(u, f_1, f_2, v) \in F \times \mathcal{C}^1(\Omega')$. Então $v_n = u_n|_{\Omega'}$, $u_n \longrightarrow u$ uniformemente em Ω e $v_n \longrightarrow v$ uniformemente sobre compactos de Ω', o que nos mostra que $v = u|_{\Omega'}$. Segue que (ver [18, p. 64]) para tais $h > 0$ e $K \subset \Omega'$ compacto, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} \sup_K |\partial_x^\alpha u| \leq C \left[\sup_\Omega |u| + \sum_{k=1}^{2} \sup_{(\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^2\times\mathbb{Z}_+^2} \sup_\Omega \frac{|L^\beta \partial_x^\gamma L_k u|}{h^{|\beta|+|\gamma|}\beta!^s\gamma!^s} \right].$$

Em particular, obtemos (4.28). □

O próximo resultado irá nos garantir que existe função $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \setminus \mathcal{C}^1(\Omega')$ tal que $L_j u \in G^s(\overline{\Omega})$ para $j = 1, 2$. Antes de enunciá-lo, faremos algumas considerações que serão úteis na demonstração deste fato.

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 3x + acx^4$, sendo a um parâmetro real que satisfaz $|a| \leq R_0$, com $R_0 > 0$ fixado e $c > 0$ um número real pequeno. Os fatos que serão demonstrador abaixo também vale para $\alpha = 0$, mas demonstrações mais simples do que o caso $\alpha \neq 0$ podem ser dadas. Assim, vamos supor também que $\alpha \neq 0$. Realizaremos um estudo sobre as raízes não nulas do polinômio p, ou seja, as raízes de $p_1(x) = x^2 - 3 + acx^3$. Se definirmos $q(x, y) = x^2 - 3 + yx^3$, então $p_1(x) = q(x, ac)$ e $q(\pm\sqrt{3}, 0) = 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existem funções analíticas ρ_+ e ρ_- definidas em vizinhança de 0 tais que $\rho_\pm(0) = \pm\sqrt{3}$ e $q(\rho(y), y) = 0$. Em particular, para todo c pequeno vale

$$q(\rho_\pm(ac), ac) = 0. \tag{4.30}$$

Agora definimos as funções analíticas em vizinhança de 0, $h_\pm(y) = \rho_\pm(y) \mp \sqrt{3}$, que satisfazem $h_\pm(0) = 0$. Segue de (4.30) que duas raízes não nulas de p são da forma

$$\rho_\pm = \pm\sqrt{3} + h_\pm(ac), \tag{4.31}$$

sendo $h_\pm$ analítica em vizinhança de 0 e $h_\pm(0) = 0$. Seja ρ_0 a terceira raiz não nula de p. Comparando

$$(x - \rho_+)(x - \rho_-)(x - \rho_0) = x^3 - (\rho_+ + \rho_- + \rho_0)x^2 + (\rho_+\rho_- + \rho_+\rho_0 + \rho_-\rho_+)x - \rho_+\rho_-\rho_0 = 0$$

com

$$ac\left(x^3+\frac{1}{ac}x^2-\frac{3}{ac}\right)=0$$

concluímos que

$$\rho_0=-\frac{1}{ac}+h(ac), \tag{4.32}$$

sendo $h(ac)=-h_+(ac)-h_-(ac)$, ou seja, h é analítica em vizinhança de 0 e $h(0)=0$. Note que ρ_0 tende a infinito quando c tende a zero.

Fazemos a mesma análise com a derivada $p'(x)=3x^2-3+4acx^3$. Duas das raízes de p', as quais denotamos por r_+ e r_- satisfazem, de modo análogo ao que ocorre em (4.31),

$$r_\pm=\pm 1+\phi_\pm(ac), \tag{4.33}$$

sendo $\phi_\pm$ analítica em vizinhança de 0 e $\phi_\pm(0)=0$. A terceira raiz r_0 de p' satisfaz

$$r_0=-\frac{3}{4ac}+\phi(ac), \tag{4.34}$$

sendo ϕ analítica em vizinhança de 0 e $\phi(0)=0$.

Teorema 4.13 *Existe uma vizinhança da origem $\Omega\subset\mathbb{R}^4$ que satisfaz: dada qualquer vizinhança da origem $\Omega'\subset\Omega$ e qualquer $s\geq 4$, existe $u\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que $L_ju\in G^s(\overline{\Omega})$ para $j=1,2$ mas $u\notin\mathcal{C}^1(\Omega')$.*

Demonstração. Se para toda u como nas condições do enunciado tivermos $u\in\mathcal{C}^1(\Omega')$, então podemos aplicar o Lema 4.12. A demonsração do teorema consiste em mostrar que para qualquer Ω', existem $h>0$ e $K\subset\Omega$ tais que a estimativa (4.28) nem sempre é válida. Vamos considerar

$$Z_1(x,t)=x_1-3it_1 \quad \text{e} \quad Z_2(x,t)=x_2+i(t_1t_2+1)t_1^3,$$

ou seja, $\Phi(t)=(-3t_1,(t_1t_2+1)t_1^3)$ para $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$. Defina

$$u(x,t)=g(t_1)e^{iZ(x,t)\cdot\xi}, \tag{4.35}$$

sendo $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$ dado por $\xi_1=c^2\rho$, $\xi_2=\rho$, ρ e c números positivos a serem definidos e $g(t_1)=g_0(t_1/c)$, sendo $g_0\in G_0^\sigma(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{supp} g_0\subset[-3/2,3]$, g_0 vale 1 em

$[-1,2]$, $0 \leq g_0 \leq 1$ e σ será escolhido posteriormente. De (4.35) segue que

$$|u(x,t)| = g(t_1)e^{-\phi(t)\cdot\xi} = g(t_1)e^{-\rho Q(t_1,t_2,c)}, \tag{4.36}$$

com $Q(\tau,a,c) = \tau^3 + a\tau^4 - 3c^2\tau$. Note que $c^{-3}Q(c\tau,a,c) = \tau^3 - 3\tau + ac\tau^4$, que coincide com $p(\tau)$, sendo p o polinômio introduzido acima. Vamos definir agora nosso aberto Ω: fixe $R_0 > 0$ arbitrário e considere B_0 uma bola centrada na origem de $\mathbb{R}^2$ qualquer. Definimos

$$\Omega = B_0 \times (-R_0, R_0) \times (-R_0, R_0).$$

Dado $\Omega' \subset \Omega$, existe $R_1 > 0$ de modo que o compacto

$$K' = \{(0,0,t_1,0) : |t_1| \leq R_1\}$$

está contido em Ω'. Faremos a primeira restrição na escolha de c: $c \leq R_1$, o que nos permite dizer que $(0,0,c,0) \in K$.

Nossa primeira afirmação é: existe $d_0 > 0$ tal que

$$Q(c\tau,a,c) \geq d_0c^3, \tau \in \operatorname{supp} g_0', |a| \leq R_0, \ c \text{ pequeno}. \tag{4.37}$$

A desigualdade (4.37) equivale a dizer que existe $d_0 >$ tal que $c^{-3}Q(c\tau,a,c) = \tau^3 - 3\tau + ac\tau^4 \geq d_0$ para todo $|a| \leq R_0$, $\tau \in [-3/2,-1] \cup [2,3]$ e c pequeno. Iremos justificar no caso em que $-R_0 < a < 0$ e $\tau \in [2,3]$, sendo os demais casos análogos. De (4.31), (4.32), (4.33) e (4.34), existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < c < \delta$, vale

$$r_+ < \rho_+ < 2 < 3 < r_0 < \rho_0, \forall - R_0 < a < 0.$$

Como $p'(x) > 0$ em (r_+, r_0) e $p(\rho_+) = 0$, temos que $p(2) \leq Q(c\tau,a,c)$ e obtemos o resultado após uma possível diminuição de δ considerando que $p(2)$ tende a 2 quando c se aproxima de 0. Passamos a considerar a restrição $0 < c < \delta$.

Afirmamos agora que

$$\sup_K \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| = \rho e^{2c^3\rho}. \tag{4.38}$$

De fato, para todo $t_1 \in \operatorname{supp} g$, vale

$$Q(t_1,0,c) \geq Q(c,0,c) = -2c^3. \tag{4.39}$$

Para verificar (4.39), note que se $t_1 \in \operatorname{supp} g$, então $-3c/2 \leq t_1 \leq 3c$ e (4.39) equivale a

$$0 \leq t_1^3 - 3c^2 t_1 + 2c^3.$$

Esta última desigualdade é válida em $[-3c/2, 2c]$: defina $f(t) = t^3 - 3c^2 t + 2c^3$ e note que $f'(x) = 0$ apenas para $x = \pm c$ e $f'(x) > 0$ se, e somente se, $|x| > c$. Como c é raiz de multiplicidade 2 para f, temos $f(x) > 0$ sempre que $x > \alpha$, sendo $\alpha < 0$ a outra raiz de f. A afirmação fica provada se $f(-3c/2) > 0$, que é verificado por um cálculo direto. Além disso, se $(x,t) = (x_1, x_2, t_1, t_2) \in K$, temos $x_1 = x_2 = t_2 = 0$ e

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x,t) \right| = \rho g(t_1) e^{-\rho Q(t_1, 0, c)}.$$

Como $g_0(1) = 1$ e $(0,0,c,0) \in K$, (4.38) segue de (4.39).

Nossa última afirmação que envolve o estudo do polinômio p é:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq e^{\rho\left(2c^3 + O\left(c^4\right)\right)}, \tag{4.40}$$

sendo que $f(c) = O(c^l)$ quando existem $M > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que $|f(c)| \leq M\,|c|^l$ sempre que $|c| < \delta_1$. Para obter (4.40) podemos nos restringir a $t_1 \in \operatorname{supp} g$, ou seja, $-3/2 \leq t_1/c \leq 3$ e $|t_2| < R_0$. Além disso, usando (4.36) e escrevendo $c^{-3}Q(t_1, t_2, c) = c^{-3}Q(ct_1/c, t_2, c)$, devemos estudar o mínimo de p no intervalo (ρ_-, ρ_+). Tal mínimo, que denotaremos por $-\mu$ ocorre na raiz positiva r_+ de p'. Assim,

$$\mu = -r_+^3 + 3r_+ - acr_+^4.$$

Como $-\rho Q(t_1, t_2, c) \leq \rho c^3 \mu$, é suficiente mostrarmos que $\mu = 2 + O(c)$. Segue de (4.33) que

$$\begin{aligned} \mu &= 3\left(1 + \phi_+(ac)\right) - \left(1 + \phi_+(ac)\right)^3 - ac\left(1 + \phi_+(ac)\right)^4 \\ &= 2 + Q_1(\phi(ac)) - ac - acQ_2(\phi(ac)), \end{aligned}$$

sendo Q_1 e Q_2 dois polinômios que se anulam em 0. O resultado segue pois ϕ_+ é analítica e também se anula na origem.

Note agora que como $L_jZ_k = 0$ para $j, k = 1, 2$, segue que

$$L_1u(x,t) = g'(t_1)e^{iZ(x,t)\cdot\xi} \quad e \tag{4.41}$$

$$L_2u(x,t) = 0. \tag{4.42}$$

Fixado $s \geq 4$, vamos supor $1 < \sigma \leq 4$. De (4.41) e (4.42), concluímos que $u|_{\Omega'} \in \mathcal{C}^1(\Omega')$ e pelo Lema 4.12, fixado $h > 0$ (que explicitaremos abaixo), existe $C > 0$ tal que vale (4.28). Dessa forma, usando (4.28), (4.38), (4.40) e (4.42) obtemos

$$\rho \leq C\left[e^{\rho d_1 c^4} + e^{-2c^3\rho}\left\|L_1u\right\|_{s,h}\right] \tag{4.43}$$

para alguma constante $d_1 > 0$. Iremos estimar agora o termo $\|L_1u\|_{s,h}$. Escrevemos $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ e observe que se $\beta_2 \neq 0$, então $L^\beta\partial_x^\gamma L_1u = 0$. Por outro lado, se $\beta_2 = 0$, então

$$\left(L^\beta\partial_x^\gamma L_1u\right)(x,t) = (i\xi)^\gamma\, c^{-\beta_1-1}g_0^{(\beta_1+1)}\,(t_1/c)\,e^{iZ(x,t)\cdot\xi}$$

e as estimativas serão feitas para $(x,t) \in A \doteq B_0 \times \operatorname{supp} g' \times [-R_0, R_0]$. Segue das escolhas de $\xi = \rho(c^2, 1)$ e g_0 que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left|L^\beta\partial_x^\gamma L_1u(x,t)\right| \leq \rho^{|\gamma|}c^{2\gamma_1-\beta_1-1}C_1^{\beta_1+1}(\beta_1+1)!^\sigma e^{-\rho Q(t_1,t_2,c)}. \tag{4.44}$$

Escrevemos $t_1 = ct_1/c$ e usamos (4.37) e (4.44) para obter

$$\left|L^\beta\partial_x^\gamma L_1u(x,t)\right| \leq \rho^{|\gamma|}c^{2\gamma_1-\beta_1-1}C_1^{\beta_1+1}(\beta_1+1)!^\sigma e^{-\rho d_0 c^3}, (x,t) \in A. \tag{4.45}$$

Escolhemos agora $\rho = 1/c^4$ e denotamos $\lambda = 1/c$. Dessa forma, após um reajuste de C_1, temos que (4.45) é reescrito como

$$\left|L^\beta\partial_x^\gamma L_1u(x,t)\right| \leq C_1^{\beta_1+1}\beta_1!^\sigma\lambda^{4|\gamma|+|\beta|+1}e^{-d_0\lambda}, (x,t) \in A. \tag{4.46}$$

Usamos $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} te^{-\frac{d_0}{3}\frac{t}{4}} = 0$ para estimar o termo $\lambda^{4|\gamma|}e^{-\frac{d_0}{3}\lambda}$ e concluir que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\lambda^{4|\gamma|}e^{-d_0\lambda} \leq C_2^{4|\gamma|}\left|\gamma\right|^{4|\gamma|}. \tag{4.47}$$

Argumentando de modo análogo para os termos $\lambda^{|\beta|}e^{-\frac{d_0}{3}\lambda}$ e $\lambda e^{-\frac{d_0}{3}\lambda}$, de (4.46) e (4.47) concluímos que para algum $C_3 > 0$ vale

$$\left|L^\beta \partial_x^\gamma L_1 u(x,t)\right| \leq C_3^{|\beta|+|\gamma|+1}\beta!^{\sigma+1}\gamma!^4, (x,t) \in A. \tag{4.48}$$

Escolhendo $h = C_3$ e $1 < \sigma \leq 3$. Observe que

$$\begin{aligned}
\|L_1 u\|_{s,h} &= \sup_{(\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^2\times\mathbb{Z}_+^2} \sup_{\Omega} \frac{\left|L^\beta\partial_x^\gamma L_1 u\right|}{h^{|\beta|+|\gamma|}\beta!^s\gamma!^s} \\
&\leq \sup_{(\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^2\times\mathbb{Z}_+^2} \sup_{A} \frac{C_3^{|\beta|+|\gamma|+1}\beta!^{\sigma+1}\gamma!^4}{C_3^{|\beta|+|\gamma|}\beta!^s\gamma!^s} \\
&\leq C_3 \sup_{(\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^2\times\mathbb{Z}_+^2} \beta!^{\sigma+1-s}\gamma!^{4-s} \\
&\leq C_3.
\end{aligned}$$

De (4.43) segue que

$$\lambda^4 \leq C\left(e^{d_1} + C_3 e^{-2\lambda}\right),$$

o que gera uma contradição quando fazemos $\lambda \longrightarrow \infty$. $\square$

Ao contrário do que ocorre no Teorema 4.13, quando consideramos o caso $m = 1$, toda distribuição que satisfaz $L_j u \in G^s(\Omega)$ é uma função de classe G^s. Esse é o enunciado do segundo grande resultado de [8], o qual será tratado com detalhes na próxima seção.

4.4 Estruturas do tipo tubo de co-posto 1

Ao longo desta seção, vamos supor que $m = 1$. Assim, Φ agora é uma função que assume valores reais, $\Phi(0) = 0$ e nossos campos (4.5) agora se tornam

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\frac{\partial\Phi}{\partial t_j}(t)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.49}$$

O ortogonal da nossa estrutura do tipo tubo agora é gerado pelo diferencial de uma única função:

$$Z(x,t) = x + i\Phi(t)$$

e a hipótese $(*)$ agora equivale a dizer que Φ é uma aplicação aberta. O caso $m = 1$ se difere dos demais casos pois podemos fazer uso da **Desigualdade de Lojasiewicz** (ver [14]): após uma contração de Θ, podemos supor que existe $c \in [0, 1)$ e $C > 0$ tal que

$$|\phi(t)|^c \leq C\,|\nabla\Phi(t)|\,. \tag{4.50}$$

O **expoente de Lojasiewicz** é o ínfimo dos números $c > 0$ que satisfazem (4.50) para alguma constante $C > 0$ e será denotado por θ. Observe que se $\nabla\Phi \neq 0$, então estamos no caso elíptico pela Proposição 4.6 e vale $\theta = 0$. Caso contrário, temos necessariamente $\theta \in [1/2, 1)$ e, após uma possível contração de Θ, vale (4.50) para $c = \theta$. Feita tais considerações, podemos enunciar o

Teorema 4.14 *Suponha que $m = 1$, $s \geq 1$ e que $\mathfrak{L}$ satisfaça a propriedade $(*)$. Então $\mathcal{L}$ é G^s-hipoelíptico, ou seja, se $\Omega \subset \mathbb{R}\times\Theta$ é aberto, então $u \in G^s(\Omega)$ sempre que $L_j u \in G^s(\Omega)$ para todo $j = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. A demonstração desse teorema será dividida em várias etapas. Primeiro, enunciamos alguns fatos já provados: segue de [2] que o resultado vale quando $s = 1$ (caso analítico) sob a hipótese $(*)$. Além disso, $\mathfrak{L}$ também é $\mathcal{C}^\infty$-hipoelíptico nessas condições (ver [15] ou [1, p. 39]). Dessa forma, o teorema preenche o caso $1 < s < \infty$.

Vamos assumir que $s > 1$, considerar $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $L_j u \in G^s(\Omega)$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Assim, podemos supor que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. É suficiente mostrar que fixado $(x_0, t_0) \in \Omega$, a função u é de classe G^s em vizinhança de (x_0, t_0). Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $(t_0, x_0) = (0, 0)$ e, após uma contração de Θ que $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{J}\times\overline{\Theta})$ e $L_j u \in G^s(J \times \Theta)$, sendo $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto centrado na origem. Nosso objetivo é verificar que u satisfaz as hipóteses do Corolário 4.8. Nossa hipótese e o Corolário 4.5 já garantem que $u \in G^s(\Omega; \mathfrak{L})$.

Preliminares: Considere o conjunto fechado em Θ

$$\Sigma = \{t \in \Theta : \nabla\Phi(t) = 0\}$$

e defina

$$F : \Theta \setminus \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = -\frac{\nabla\Phi(t)}{|\nabla\Phi(t)|}.$$

Resolvemos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_t}{d\tau}(\tau) & = & F(\alpha_t(\tau)) \\ \alpha_t(0) & = & t \end{cases} \tag{4.51}$$

e consideramos α_t solução definida em $[0, \delta(t))$ (sendo $\delta(t)$ o extremo maximal superior de definição do problema (4.51)). Para cada $t \in \Theta \setminus \Sigma$, considere $h_t = \Phi \circ \alpha_t$ definido em $[0, \delta(t))$ e observe que

$$h_t'(\tau) = - |\nabla \Phi(\alpha_t(\tau)| \leq -C^{-1} |h_t(\tau)|^{\theta}. \tag{4.52}$$

A primeira desigualdade nos mostra que h_t é decrescente, ou seja, Φ decresce ao longo das trajetórias das curvas α_t. Afirmamos que existe $M > 0$ tal que se $\sigma = (1-\theta)^{-1}$, então

$$\Phi(\alpha_t(\tau_1)) - \Phi(\alpha_t(\tau_2)) \geq M(\tau_2 - \tau_1)^{\sigma}, \forall\ 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < \delta(t), t \in \Theta \setminus \Sigma. \tag{4.53}$$

Como o sistema (4.51) é autônomo, segue que

$$\alpha_{\alpha_t(\tau_1)}(\tau_2 - \tau_1) = \alpha_t(\tau_2),$$

o que nos mostra que é suficiente verificar que

$$\Phi(t) - \Phi(\alpha_t(\tau)) \geq M\tau^{\sigma}, \forall\ 0 \leq \tau < \delta(t), t \in \Theta \setminus \Sigma. \tag{4.54}$$

Vamos considerar inicialmente que $h_t(0) \leq 0$. Segue que $h_t(\tau) < 0$ para todo $0 < \tau < \delta(t)$ e (4.52) nos mostra que

$$C^{-1} \leq \frac{-h_t'(\tau)}{(-h_t(\tau))^{\theta}}.$$

Observe que $\frac{d\left(-h_t^{1-\theta}\right)}{d\tau} = \frac{-h_t'}{(-h_t)^{\theta}}$. Como $1-\theta > 0$, integrando de 0 até τ obtemos

$$C^{-1}\tau \leq \left[(-h_t(\tau))^{1-\theta} - (-h_t(0))^{1-\theta}\right].$$

Fixados $x > 0$ e $\rho > 1$ como a derivada da função $f(y) = \frac{(x-y)^{\rho}}{x^{\rho} - y^{\rho}}$ para $0 \leq x < y$ e $f(x) = 0$ é negativa, temos que $(x-y)^{\rho} \leq x^{\rho} - y^{\rho}$ sempre que $0 \leq y \leq x$. Dessa forma, obtemos (4.54) para este caso. O caso restante é estudado de maneira análoga (ver [1]).

Em particular, como Φ é limitada em Θ, segue que $\sup_{t\in\Theta\setminus\Sigma} \delta(t) < \infty$, o que nos mostra que existe

$$\lim_{\tau\longrightarrow\delta(t)} \alpha_t(\tau) \doteq l(t),\ \forall t \in \Theta \setminus \Sigma. \tag{4.55}$$

Podemos introduzir agora as curvas γ_t sobre as quais iremos integrar as funções $L_j u$. Observe que ou $l(t) \in \partial\Theta$ ou $l(t) \in \Sigma$. No primeiro caso, definimos $\gamma_t = \alpha_t$. No segundo caso, pela Desigualdade de Lojasiewicz segue que $\Phi(l(t)) = 0$, e (4.54) nos mostra que $\Phi(t) > 0$. Por continuidade, podemos encontrar uma bola B contida em Θ e centrada em $l(t)$ tal que $\Phi < \Phi(t)$ em B. Pela condição $(*)$, existe t_0 arbitrariamente próximo de $l(t)$ tal que $\Phi(t_0) < 0$. Em suma, encontramos t_0 próximo de $l(t)$ de modo que $\Phi(t_0) < 0$ e $\Phi < \Phi(t)$ no segmento $[l(t), t_0]$. Pela análise feita para t, temos que $l_{t_0} \in \Sigma$. Neste caso, definimos $\gamma_t = \alpha_t * [l(t), t_0] * \alpha_{t_0}$.

Vamos destacar algumas propriedades das nossas curvas γ_t.

$$\Phi(t) - \Phi(s) > 0, \quad s \in \gamma_t, s \neq t. \tag{4.56}$$

Para $\gamma_t = \alpha_t$, essa desigualdade é imediata de (4.54). Para o caso $l(t) \in \Sigma$, utilizamos a validade da mesma para α_t e a nossa escolha de t_0.

$$\text{Se } C \doteq \max\{\text{diam}(\Theta), 1\} \quad \text{então } |\gamma_t'(s)| \leq C, \forall t \in \Theta \setminus \Sigma, s \in \gamma_t. \tag{4.57}$$

Basta notar que que em $|\alpha_t'(\tau)| \leq 1$, pois α_t é solução de (4.51) e em $[l(t), t_0]$, temos $|\gamma_t'| \leq \text{diam}(\Theta)$.

A última propriedade segue do fato que F é limitada e contínua em $\Theta \setminus \Sigma$, o que nos garante que se $\Theta' \subset \Theta$, o intervalo maximal da solução de (4.54) contém um intervalo do tipo $(-\epsilon, \epsilon)$ para todo $t \in \Theta' \setminus \Theta$: se denotarmos por $t_\#$ o ponto final de γ_t, então existe $d > 0$ tal que

$$\Phi(t) - \Phi(t_\#) \geq d,\ \forall t \in \Theta' \setminus \Sigma. \tag{4.58}$$

Integrando sobre as curvas γ_t: dada uma função v de classe $\mathcal{C}^\infty$, vamos escrever

$$\mathbb{L}v = \sum_{j=1}^{n} (L_j v) dt_j$$

e também

$$\widehat{\left(\sum_{j=1}^{n} v_j dt_j\right)} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{v_j} dt_j,$$

sendo que usaremos $\hat{v}$ ou $\mathcal{F}v$ para denotar a transformada de Fourier na variável x (quando a Transformada estiver bem definida). Para todo $j = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{L_j v} &= \mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial t_j} - i\frac{\partial \phi}{\partial t_j}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial t_j} + \xi \frac{\partial \phi}{\partial t_j}\hat{v}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $e^{\Phi(t)\xi}$ temos

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\left(e^{\Phi(t)\xi}\hat{v}\right) = e^{\phi(t)\xi}\widehat{L_j v}, j = 1, \ldots, n,$$

ou seja,

$$e^{\Phi(t)\xi}\widehat{\mathbb{L}(v)} = d_t\left(e^{\xi\Phi(t)}\hat{v}\right). \tag{4.59}$$

Observe que podemos trocar o compacto K_2 do Corolário 4.8 por $\Theta' \Subset \Theta$ e considerar $x_0 = 0$. Começamos fixando $\psi \in G_0^s(I)$ tal que $0 \le \psi \le 1$ e ψ vale 1 em um intervalo $J_1 \subset I$ centrado na origem e considerando ainda $\chi \in G_0^s(J_1)$ que vale 1 em vizinhança da origem. Utilizamos (4.59) com $v = \psi u$ e o Teorema de Stokes para obter

$$\widehat{(\psi u)}(\xi, t) = \widehat{(\psi u)}(\xi, t_\#)e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)} - \int_{\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s))}\widehat{\mathbb{L}(\psi u)}(\xi, s)ds,\ \forall t \in \Theta \setminus \Sigma \tag{4.60}$$

Denotamos a função Heaviside por H e fazendo convolução na primeira variável, segue de (4.60) que

$$\hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\widehat{(\psi u)}(\xi, t)\right\} = \hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\widehat{(\psi u)}(\xi, t_\#)e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}\right\}$$

$$-\hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\int_{\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s))}\widehat{\mathbb{L}(\psi u)}(\xi, s)ds\right\}.$$

Usando agora que $\chi\psi = \chi$ e escrevendo $H(\xi) = (H(\xi) - 1) + 1$, obtemos

$$\hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\widehat{(\psi u)}(\xi, t)\right\} = 2\pi\widehat{(\chi u)}(\xi, t) + \hat{\chi}(\xi) * \left\{(H(\xi) - 1)\widehat{(\psi u)}(\xi, t)\right\}. \tag{4.61}$$

As duas últimas igualdades obtidas e a Regra de Leibniz nos dão

$$\begin{aligned}
2\pi\widehat{(\chi u)}(\xi,t) &= \hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\widehat{(\psi u)}(\xi,t_\#)e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}\right\} \\
&+ \hat{\chi}(\xi) * \left\{(1-H(\xi))\,\widehat{(\psi u)}(\xi,t)\right\} \\
&- \hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\int_{\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s))}\widehat{\psi\mathbb{L}(u)}(\xi,s)ds\right\} \\
&- \hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\int_{\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s))}\widehat{u\mathbb{L}(\psi)}(\xi,s)ds\right\} \\
&\doteq F_1(\xi,t)+F_2(\xi,t)+F_3(\xi,t)+F_4(\xi,t).
\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é conseguir estimar cada um dos termos $F_j(\xi,t)$ para $t \in \Theta' \setminus \Sigma$. Vamos supor inicialmente que $\xi > 0$.

Estimativa de $F_1(\xi,t) = \hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\widehat{(\psi u)}(\xi,t_\#)e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}\right\}$**:**
Primeiro note que

$$\begin{aligned}
|F_1(\xi,t)| &\leq \int \left|\hat{\chi}(\xi-\eta)H(\eta)\widehat{(\psi u)}(\eta,t_\#)e^{-\eta d}\right| d\eta \\
&= \int \left|\hat{\chi}(\xi-\eta)H(\eta)\left(\int e^{-ix\xi}\psi(x)u(x,t_\#)dx\right)e^{-\eta d}\right| d\eta \\
&\leq \left(\int \left|\hat{\chi}(\xi-\eta)H(\eta)e^{-\eta d}\right| d\eta\right)\|u\|_{L^\infty(\Theta,L_1(J))}.
\end{aligned}$$

Usando que $\xi \leq 2(\xi-\eta)$ se $0 \leq \eta \leq \xi/2$ e $\xi \leq \eta$ caso contrário e escrevendo

$$\xi^N |F_1(\xi,t)| \leq \left(\xi^N \int_0^{\xi/2} |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\, e^{-\eta d}d\eta + \xi^N \int_{\xi/2}^{\infty} |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\, e^{-\eta d}d\eta\right)\|u\|_{L^\infty(\Theta,L_1(J))},$$

obtemos

$$\xi^N |F_1(\xi,t)| \leq$$

$$\left\{\int_0^\infty (2|\xi-\eta|)^N |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\, e^{-\eta d}d\eta + \int_0^\infty (2\eta)^N |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\, e^{-\eta d}d\eta\right\}\|u\|_{L^\infty(\Theta,L_1(J))}.$$

Para a primeira integral do lado direito da desigualdade, usamos a Observação 2.10 que nos fornece $A > 0$ tal que

$$|\xi|^N |\hat{\chi}(\xi)| \leq A^{N+1}N!^s.$$

Para a segunda integral, um cálculo do máximo global em $[0,\infty)$ da função $f(x) = (2x)^N e^{-dx}$ nos mostra que

$$(2\eta)^N e^{-d\eta} \leq \left(\frac{2N}{ed}\right)^N, \forall \eta \geq 0.$$

Concluímos assim que existe $A_1 > 0$ tal que

$$\xi^N |F_1(\xi,t)| \leq A_1^{N+1} N!^s \|u\|_{L^\infty(\Theta, L_1(J))}, \ \forall\ t \in \Theta' \setminus \Sigma, \xi > 0. \tag{4.62}$$

Estimativa de $F_2(\xi,t) = \hat{\chi}(\xi) * \left\{(1 - H(\xi))\,\widehat{(\psi u)}(\xi,t)\right\}$**:**

Observe que

$$\begin{aligned} |F_2(\xi,t)| &\leq \int \left|\hat{\chi}(\xi-\eta)\,(1-H(\eta))\,\widehat{(\psi u)}(\eta,t)\right| d\eta \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\, d\eta\, \|u\|_{L^\infty(\Theta,L_1(J))}. \end{aligned}$$

Novamente da Observação 2.10 temos que existe $B > 0$ tal que

$$(1+|\xi|)^{N+2} |\hat{\chi}(\xi)| \leq B^{N+1} N!^s.$$

Como $\eta < 0$ nos dá $\xi^n \leq (\xi-\eta)^N$ para $\xi > 0$, temos

$$\begin{aligned} \xi^N |F_2(\xi,t)| &\leq \int_{-\infty}^{0} (1+|\xi-\eta|)^N |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\, d\eta\, \|u\|_{L^\infty(\Theta,L_1(J))} \\ &\leq B^{N+1} N!^s \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\eta|)^2} d\eta\, \|u\|_{L^\infty(\Theta,L_1(J))}, \end{aligned}$$

ou seja, existe $A_2 > 0$ tal que

$$\xi^N |F_2(\xi,t)| \leq A_2^{N+1} N!^s \|u\|_{L^\infty(\Theta, L_1(J))}, \ \forall\ t \in \Theta' \setminus \Sigma, \xi > 0. \tag{4.63}$$

Estimativa de $F_3(\xi,t) = -\hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\int_{\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s))}\widehat{\psi\mathbb{L}(u)}(\xi,s)ds\right\}$**:**

Se escrevermos

$$R(\xi,t) = \int_{\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s))}\widehat{\psi\mathbb{L}(u)}(\xi,s)ds,$$

então
$$|F_3(\xi,t)| \leq \int_0^\infty |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\,|R(\eta,t)|\,d\eta.$$

Defina $f_j = (\psi L_j u)$ para cada $j = 1,\ldots,n$ e $f = \sum_{j=1}^{n} f_j dt_j$. Temos por hipótese que cada $f_j \in G^s(J\times\Theta)$ tem suporte compacto na variável x. Usando os mesmos argumentos do Lema 2.8, da Proposição 2.9 e da Observação 2.10, existe $C' > 0$ tal que

$$\xi^N \left|\hat{f}_j(\xi,t)\right| \leq C'^{N+1} N!^s,\ \forall t \in \Theta'.$$

Usamos agora (4.56), (4.57) e o fato de $\delta(t)$ ser limitado quando $t \in \Theta$ para concluir que existe $A_3 > 0$ tal que

$$\xi^N |R(\xi,t)| \leq A_3^{N+1} N!^s,\ \forall t \in \Theta' \setminus \Sigma. \tag{4.64}$$

Assim como fizemos para estimar F_1, podemos concluir que

$$\xi^N |F_3(\xi,t)| \leq 2^N \int_0^{\xi/2} |\xi-\eta|^N |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\,|R(\eta,t)|\,d\eta + 2^N \int_{\xi/2}^\infty \eta^N |\hat{\chi}(\xi-\eta)|\,|R(\eta,t)|\,d\eta.$$

Para a primeira integral do lado direito, utilizamos (4.64) com $N = 0$ e a escolha de B na estimativa de F_2. Já para a segunda integral, utilizamos novamente (4.64) e concluímos que existe $A_4 > 0$ tal que

$$\xi^N |F_3(\xi,t)| \leq A_4^{N+1} N!^s \|u\|_{L^\infty(\Theta,L_1(J))},\ \forall\ t \in \Theta' \setminus \Sigma, \xi > 0. \tag{4.65}$$

Estimativa de $F_4(\xi,t) = -\hat{\chi}(\xi) * \left\{H(\xi)\int_{\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s))}\widehat{u\mathbb{L}(\psi)}(\xi,s)ds\right\}$**:**

Note que como ψ não depende de t, e estamos fazendo a Transformada de Fourier apenas na variável x, então

$$\widehat{u\mathbb{L}(\psi)} = -i\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial t_j}\widehat{(\psi' u)}dt_j = -i\widehat{(\psi' u)}d_t\Phi.$$

Assim, podemos reescrever

$$F_4(\xi,t) = i\int_0^\infty \int_{\gamma_t}\left(\int_J \hat{\chi}(\xi-\eta)e^{-\eta(\Phi(t)-\Phi(s))-i\eta y}u(y,s)\psi'(y)dy\right)d_t\Phi(s)dsd\eta.$$

Defina, para $(\eta,\tau,y)\in X\doteq(0,+\infty)\times[0,\delta(t)]\times J$,

$$H(\eta,\tau,y)=\hat{\chi}(\xi-\eta)e^{-\eta(\Phi(t)-\Phi(\gamma_t(\tau)))-i\eta y}u(y,\gamma_t(\tau))\psi'(y)\nabla\Phi(\gamma_t(\tau))\cdot\gamma_t'(\tau),$$

sendo que ξ e t são vistos como parâmetros. Segue que

$$F_4(\xi,t)=\int_0^\infty\int_0^{\delta(t)}\int_J H(\eta,\tau,y)dyd\tau d\eta.$$

Não é difícil ver que $H\in L^1(X)$. Assim, se definirmos $H_\epsilon(\eta,\tau,y)=H(\eta,\tau,y)e^{-\epsilon\eta^2}$, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$F_4(\xi,t)=i\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_0^\infty F_\epsilon(\eta)d\eta, \tag{4.66}$$

sendo

$$F_\epsilon(\eta)=\int_0^{\delta(t)}\int_J\hat{\chi}(\xi-\eta)e^{-\eta(\Phi(t)-\Phi(\gamma_t(\tau)))-i\eta y-\epsilon\eta^2}u(y,\gamma_t(\tau))\psi'(y)\nabla\Phi(\gamma_t(\tau))\cdot\gamma_t'(\tau)dyd\tau.$$

Observe que todas as funções envolvidas na expressão de F_ϵ que dependem de η admitem uma extensão holomorfa em $\mathbb{C}$. Podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e derivar sob o sinal de integração para considerar uma extensão holomorfa de F_ϵ na variável complexa $\eta=x_1+ix_2$. A vantagem de termos introduzido o termo $-\epsilon\eta^2$ é que agora podemos deslocar o caminho de integração na variável η: se

$$\alpha_R^\pm(t)=R+i\frac{tR}{2},t\in[0,1],$$

então

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{\alpha_R^\pm(t)}F_\epsilon(z)dz=0,\ \forall\ \epsilon>0.$$

Isso nos permite fazer a integral (4.66) sobre os caminhos $\alpha_+(\eta)=\eta+i\frac{\eta}{2}$ e $\alpha_-(\eta)=\eta-i\frac{\eta}{2}$ para $\eta>0$. Observe ainda que como ψ vale 1 em vizinhança de 0, a integral na variável y é feita para $|y|\geq\delta$, sendo $\delta>0$. Assim, temos

$$F_4(\xi,t)=i\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_0^\infty F_\epsilon\left(\left(1\pm\frac{i}{2}\right)\eta\right)d\eta. \tag{4.67}$$

A escolha do sinal no limite acima depende do sinal de y. Escrevemos $J^+ = J \cap (0, +\infty)$ e $J^- = J \cap (-\infty, 0)$ e a integral em J é dada pela somas das integrais em J^+ e J^-. Em J^+ realizamos a mudança $\eta \longrightarrow \left(1 - \frac{i}{2}\right)\eta$ e em J^- realizamos $\eta \longrightarrow \left(1 + \frac{i}{2}\right)\eta$. Observe que nos dois casos podemos escrever $\eta \longrightarrow \left(1 - \frac{iy}{2|y|}\right)\eta$. A parte real do expoente de $F_\epsilon\left(\left(1 - \frac{iy}{2|y|}\right)\eta\right)$ é dada por

$$\eta(\phi(t) - \phi(s)) - \frac{\eta\,|y|^2}{2\,|y|} - \frac{3\epsilon}{4} \leq -\frac{\eta\delta}{2}.$$

Consequentemente, obtemos que existe constante $A_5 > 0$ tal que

$$\xi^N\,|F_4(\xi,t)| \leq A_5 \left\{\xi^N \max_{\omega=\pm\frac{1}{2}} \int_0^\infty |\hat{\chi}(\xi - \eta + i\omega\eta)|\, e^{-\delta\eta/2} d\eta\right\} \|u\|_{L^\infty(\Theta, L_1(J))}\,. \tag{4.68}$$

Agora recordamos o Teorema de Paley-Wiener-Schwartz para funções de classe G^s (ver [17]):

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e ϕ uma função inteira em $\mathbb{C}^n$. Então ϕ é a Transformada de Fourier de uma função $\varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ se, e somente se, existem $C, h > 0$ tai que

$$|\phi(\zeta)| \leq Ce^{-h|\zeta|^{1/s} + H_K(\operatorname{Im}\zeta)}, \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

sendo

$$H_K(\eta) = \sup_{x \in K} x \cdot \eta, \eta \in \mathbb{R}.$$

Se escrevermos $J_1 = (-a, a)$, temos $a \leq \delta$ e podemos usar o Teorema de Paley-Wiener-Schwartz para $K = [-a, a]$ e χ. Neste caso, existem $C, h > 0$ tais que

$$|\hat{\chi}(\xi + i\eta)| \leq Ce^{-h|\xi + i\eta|^{1/s} + \frac{a|\eta|}{2}},\ \forall\ \xi, \eta \in \mathbb{R}. \tag{4.69}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\xi^N \int_0^\infty |\hat{\chi}(\xi - \eta + i\omega\eta)|\, e^{-\delta\eta/2} d\eta \ &\leq\ 2^N \int_0^\infty |\xi - \eta|^N\, |\hat{\chi}(\xi - \eta + i\omega\eta)|\, e^{-\delta\eta/2} d\eta \\
&+\ 2^N \int_0^\infty \eta^N\, |\hat{\chi}(\xi - \eta + i\omega\eta)|\, e^{-\delta\eta/2} d\eta
\end{aligned}$$

e vamos majorar as duas integrais do lado direito da desigualdade. Para a primeira, utilizamos (4.69) e obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\xi-\eta|^N |\hat{\chi}(\xi-\eta+i\omega\eta)| e^{-\delta\eta/2} d\eta &\leq C\int_0^\infty |\xi-\eta|^N e^{-h|\xi-\eta|^{1/s}} e^{-\delta\eta/4} d\eta \\ &\leq C_1 \sup_{t\geq 0}\left\{t^N e^{-ht^{1/s}}\right\}.\end{aligned}$$

Se definirmos $g(t) = t^N e^{-ht^{1/s}}$ para $t \geq 0$ temos que o máximo (global) de g ocorre em $t_0 = \left(\frac{sN}{h}\right)^s$. Como $f(t_0) = \left(\frac{sN}{eh}\right)^s$ segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_0^\infty |\xi-\eta|^N |\hat{\chi}(\xi-\eta+i\omega\eta)| e^{-\delta\eta/2} d\eta \leq C_2^{N+1} N!^s.$$

De modo análogo, para a segunda integral temos

$$\int_0^\infty \eta^N |\hat{\chi}(\xi-\eta+i\omega\eta)| e^{-\delta\eta/2} d\eta \leq \int_0^{+\infty} \eta^N e^{-h|\xi-\eta|^{1/s}} e^{-\mu\eta} d\eta,$$

com $\mu = (2\delta - a)/4 > 0$. Logo,

$$\int_0^\infty \eta^N |\hat{\chi}(\xi-\eta+i\omega\eta)| e^{-\delta\eta/2} d\eta \leq \sup_{t\geq 0}\left\{t^N e^{-\mu t}\right\} \int_{\mathbb{R}} e^{-h|\eta|} d\eta.$$

Como $\sup_{t\geq 0}\left\{t^N e^{-\mu t}\right\} \leq \left(\frac{N}{e(a-2\delta)}\right)^N$ concluímos que existe $C_3 > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \eta^N |\hat{\chi}(\xi-\eta+i\omega\eta)| e^{-\delta\eta/2} d\eta \leq C_3^{N+1} N!^s.$$

Com essas informações, concluímos que existe $A_6 > 0$ tal que

$$\xi^N |F_4(\xi,t)| \leq A_4^{N+1} N!^s \|u\|_{L^\infty(\Theta, L_1(J))}, \ \forall\ t \in \Theta' \setminus \Sigma, \xi > 0. \tag{4.70}$$

Para realizar estimativas com $\xi < 0$, devemos integrar sobre outras curvas γ_t. Essas novas curvas são obtidas resolvendo o problema (4.51) trocando a função F por $-F$. Além disso, ao invés de trabalharmos com a função Heaviside $H(\xi)$ em (4.61), passamos a trabalhar com a função $1 - H(\xi)$. Concluímos que existe $A_7 > 0$ tal que

$$|\xi|^N \left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| \leq A_7^{N+1} N!^s, \ \forall\ \xi \neq 0, t \in \Theta' \setminus \Sigma. \tag{4.71}$$

Pelas nossas hipóteses sobre Φ, Σ tem interior vazio. Por continuidade podemos trocar $t \in \Theta' \setminus \Sigma$ por $t \in \Theta'$ em (4.71), terminando a demonstração. $\square$

O próximo resultado garante regularidade de vetores Gevrey. A ideia da demonstração anterior será usada agora, porém iremos trabalhar com iteradas do operador $\mathbb{L}$. Dessa forma, faremos algumas considerações iniciais. Considere $\Omega \subset \mathbb{R} \times \Theta$ um conjunto aberto e $N \in \mathbb{Z}_+$. Se $E(\Omega)$ é um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$, vamos denotar por $E(\Omega)^{(N)}$ o conjunto dos tensores do tipo $(0, N)$ da forma

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_N} dt_{i_1} \otimes \ldots \otimes dt_{i_N}, \; f_{i_1,\ldots,i_N} \in E(\Omega). \tag{4.72}$$

Estaremos mais interessados nos espaços de Banach $L^\infty(\Theta, L^1(J))^{(N)}$, sendo $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))} = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} \|f_{i_1,\ldots,i_N}\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}. \tag{4.73}$$

Definimos dois operadores lineares

$$D_t, \mathbb{L} : \mathcal{C}^\infty(\Omega)^{(N)} \longrightarrow C^\infty(\Omega)^{(N+1)}$$

dados por

$$D_t f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_j} \otimes dt_j = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_N}}{\partial t_j}(x,t) dt_{1_1} \otimes \ldots \otimes dt_{1_N} \otimes dt_j \tag{4.74}$$

e

$$\mathbb{L} f = \sum_{j=1}^{n} L_j f \otimes dt_j = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_j(f_{i_1,\ldots,i_N})(x,t) dt_{1_1} \otimes \ldots \otimes dt_{1_N} \otimes dt_j. \tag{4.75}$$

Note que (4.74) e (4.75) juntas fornecem

$$\begin{aligned} \mathbb{L} f &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial t_j} - i \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \otimes dt_j \\ &= D_t f - i \frac{\partial f}{\partial x} \otimes D_t \Phi. \end{aligned}$$

Podemos ainda definir a integral de tensores da seguinte forma: se

$$F(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_N} dt_{i_1} \otimes \ldots \otimes dt_{i_N},$$

identificamos F com uma 1-forma cujos coeficientes são tensores do tipo $(0, N-1)$:

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} F_{\{j\}} dt_j,$$

sendo

$$F_{\{j\}} = \sum_{i_1,\ldots,i_{N-1}=1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{N-1}} dt_{i_1} \ldots \otimes dt_{i_{N-1}}$$

e para uma curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Theta$, definimos

$$\int_\gamma F \doteq \sum_{i_1,\ldots,i_{N-1}=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_{i_1,\ldots,i_{N-1},j}(\gamma(s))\gamma_j'(s)ds \right\} .dt_{i_1} \otimes \ldots \otimes dt_{i_{N-1}}.$$

Assim, se G é um tensor do tipo $(0, N-1)$ de classe $\mathcal{C}^1$ em Θ, então

$$\int_\gamma D_t G = G(b) - G(a). \tag{4.76}$$

Assumindo que $f \in \mathcal{C}^\infty(\Theta, \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}))^{(N)}$, (4.59) pode ser reescrito como

$$e^{\xi\Phi(t)} \widehat{\mathbb{L}f}(\xi, t) = D_t \left\{ e^{\xi\phi} \hat{f} \right\}. \tag{4.77}$$

Utilizaremos as curvas γ_t definidas na demonstração do Teorema 4.14. Se $s \in \gamma_t$, com $t \in \Theta \setminus \Sigma$, vamos denotar por $\gamma_{t,s}$ a "porção" de γ_t que liga o ponto s ao ponto $t_\# \in \partial\Theta$ ainda na parametrização de γ_t. Observe que se $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Theta}, \mathcal{E}'(J))$, então

$$e^{\xi\Phi(t_\#)} \hat{u}(\xi, t_\#) - e^{\xi\Phi(t)} \hat{u}(\xi, t) = \int_{s_1 \in \gamma_t} e^{\xi\Phi(s_1)} \widehat{(\mathbb{L}u)}(\xi, s_1),$$

e portanto

$$\hat{u}(\xi, t) = -\int_{s_1 \in \gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \widehat{(\mathbb{L}u)}(\xi, s_1) + e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(t_\#))} \widehat{u}(\xi, t_\#). \tag{4.78}$$

Ou seja, quando $\gamma_t = \alpha_t$, obtemos

$$\hat{u}(\xi,t) = -\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\delta(t)} e^{-\xi[\Phi(t)-\Phi(\gamma_t(\tau_1))]}L_j u(\xi,\gamma_t(\tau_1))d\tau_1 + e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(t_\#))}\widehat{u}(\xi,t_\#).$$

Trocando u por $\mathbb{L}u$ no argumento acima, obtemos

$$\widehat{(\mathbb{L}u)}(\xi,s_1) = -\int_{s_2\in\gamma_{t,s_1}} e^{-\xi(\Phi(s_1)-\Phi(s_2))}\widehat{(\mathbb{L}^2u)}(\xi,s_2) + e^{-\xi(\Phi(s_1)-\Phi(t_\#))}\widehat{(\mathbb{L}u)}(\xi,t_\#),$$

concluindo que

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t) &= \int_{s_1\in\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))}\int_{s_2\in\gamma_{t,s_1}} e^{-\xi(\Phi(s_1)-\Phi(s_2))}\widehat{(\mathbb{L}^2u)}(\xi,s_2)\\ &- e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(t_\#))}\int_{s_1\in\gamma_t}\widehat{(\mathbb{L}u)}(\xi,t_\#) + e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}\hat{u}(\xi,t_\#).\end{aligned}$$

Para entender melhor esta última escrita, observe primeiro que $\widehat{(\mathbb{L}^2u)}$ é uma forma do tipo $(0,2)$, e portanto o termo $I_2(s_1) \doteq \int_{s_2\in\gamma_{t,s_1}} e^{-\xi(\Phi(s_1)-\Phi(s_2))}\widehat{(\mathbb{L}^2u)}(\xi,s_2)$ é uma forma do tipo $(0,1)$. Se ρ_1 é o único número em $[0,\delta(t))$ tal que $\gamma_t(\rho_1) = s_1$ e se denotarmos por $\gamma_{t,j}$, $j = 1,\ldots,n$, as coordenadas de γ_t, então podemos escrever

$$I_2(s_1) = \sum_{i_1=1}^{n}\left(\sum_{i_2=1}^{n}\int_{\rho_1}^{\delta(t)} e^{-\xi[\Phi(\gamma_t(\rho_1))-\Phi(\gamma_t(\tau_2))]}L_{i_1}L_{i_2}u(\xi,\gamma_t(\tau_2))\gamma'_{t,i_2}(\tau_2)d\tau_2\right)dt_{i_1}.$$

Consequentemente, o termo

$$\int_{s_1\in\gamma_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))}\int_{s_2\in\gamma_{t,s_1}} e^{-\xi(\Phi(s_1)-\Phi(s_2))}\widehat{(\mathbb{L}^2u)}(\xi,s_2)$$

pode ser escrito como

$$\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\int_0^{\delta(t)} e^{-\xi[\Phi(t)-\Phi(\gamma_t(\tau_1)]}\left[\int_{\tau_1}^{\delta(t)} e^{-\xi[\Phi(\gamma_t(\tau_1))-\Phi(\gamma_t(\tau_2))]}L_{i_1}L_{i_2}u(\xi,\gamma_t(\tau_2))\gamma'_{t,i_2}(\tau_2)d\tau_2\right]\gamma'_{t,i_1}(\tau_1)d\tau_1,$$

enquanto que o termo

$$e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(t_\#))}\int_{s_1\in\gamma_t}\widehat{(\mathbb{L}u)}(\xi,t_\#)$$

fica simplesmente

$$e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(t_{\#}))}\sum_{j=1}^{n}\widehat{L_j u}(\xi,t_{\#})\int_0^{\delta(t)}\gamma'_{t,j}(\tau)d\tau.$$

De modo geral, podemos obter

$$\hat{u}(\xi,t)=K_N(\mathbb{L}^N u)+e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_{\#})\right)}\left\{\hat{u}(\xi,t_{\#})+\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\int_{s_1\in\gamma_t}\cdots\int_{s_k\in\gamma_{t,s_{k-1}}}\widehat{\mathbb{L}^k u}(\xi,t_{\#})\right\}, \tag{4.79}$$

sendo

$$K_N(g)=(-1)^N\int_{s_1\in\gamma_t}e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))}\cdots\int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}}e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}\hat{g}(\xi,s_N).$$

De modo análogo ao que fizemos para o caso $N=2$, quando $\gamma_t=\alpha_t$, o termo $K_N(\mathbb{L}^N u)$ é dado por

$$(-1)^N\sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n}\int_0^{\delta(t)}e^{-\xi[\Phi(t)-\Phi(\gamma_t(\tau_1))]}\int_{\tau_1}^{\delta(t)}e^{-\xi[\Phi(\gamma_t(\tau_1))-\Phi(\gamma_t(\tau_2))]}\cdots\int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)}e^{-\xi[\Phi(\gamma_t(\tau_{N-1})-\Phi(\gamma_t(\tau_N))]}$$

$$L_{i_1}\cdot\ldots\cdot L_{i_N}u(\gamma_t(\tau_N))\gamma'_{t,i_N}(\tau_N)\ldots\gamma'_{t,i_1}(\tau_1)d\tau_N\ldots d\tau_1.$$

Lema 4.15 *Usando as mesmas notações do Teorema* (4.14)*, defina*

$$R_N(\eta,t)=\int_0^{\delta(t)}e^{-\eta\tau_1^\sigma}\int_{\tau_1}^{\delta(t)}e^{-c\eta(\tau_2-\tau_1)^\sigma}\cdots\int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)}e^{-c\eta(\tau_N-\tau_{N-1})^\sigma}d\tau_N\ldots d\tau_1$$

para cada N inteiro positivo. Então existe $C_1>0$ que não depende de N e que satisfaz

$$R_N(\eta,t)\leq\frac{C_1^N}{N!},\eta>0,t\in\Theta\setminus\Sigma \tag{4.80}$$

e

$$\eta^{N/\sigma}R_N(\eta,t)\leq C_1^N. \tag{4.81}$$

Demonstração. Como $\delta(t)$ é limitado em $\Theta\setminus\Sigma$, a desigualdade (4.80) fica demonstrada se mostrarmos que

$$\int_0^{\delta(t)}\int_{\tau_1}^{\delta(t)}\cdots\int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)}d\tau_N\ldots d\tau_1=\frac{\delta(t)^N}{N!},$$

já que $e^{-c\eta(\tau_j-\tau_{j-1})^\sigma} \leq 1$ se $\tau_{j-1} \leq \tau_j$ e $\eta \geq 0$. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ considere

$$f_k(x) = \int_x^{\delta(t)} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j y^j \delta(t)^{k-j}}{j!(k-j)!} dy$$

e

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j x^j \delta(t)^{k+1-j}}{j!(k+1-j)!}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{j(-1)^j x^{j-1} \delta(t)^{k+1-j}}{j!(k+1-j)!} \\ &= -\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j x^j \delta(t)^{k-j}}{j!(k-j)!} = f_k'(x). \end{aligned}$$

Como

$$g_k(\delta(t)) = \frac{\delta(t)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j = 0.,$$

obtemos $g(x) = f_k(x)$. Assim,

$$\int_0^{\delta(t)} \int_{\tau_1}^{\delta(t)} \cdots \int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)} d\tau_N \ldots d\tau_1 = \int_0^{\delta(t)} \int_{\tau_1}^{\delta(t)} \cdots \int_{\tau_{N-2}}^{\delta(t)} (\delta(t) - \tau_{N-1})\, d\tau_{N-1} \ldots d\tau_1$$

Um argumento de indução nos mostra que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta(t)}\int_{\tau_1}^{\delta(t)}\dots\int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)} d\tau_N \dots d\tau_1 &= \int_0^{\delta(t)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(-1)^j\tau_1^j\delta(t)^{N-1-j}}{j!(N-1-j)!}d\tau_1\\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(-1)^j\tau_1^{j+1}\delta(t)^{N-1-j}}{(j+1)!(N-1-j)!}\Bigg|_{\tau_1=0}^{\tau_1=\delta(t)}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j-1}\tau_1^{j}\delta(t)^{N-j}}{j!(N-j)!}\Bigg|_{\tau_1=0}^{\tau_1=\delta(t)}\\
&= \frac{\delta(t)^N}{N!}-\frac{\delta(t)^N}{N!}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(-1)^j\\
&= \frac{\delta(t)^N}{N!}
\end{aligned}$$

Considere agora a mudança de variável $s_N=(\tau_N-\tau_{N-1})(c\eta)^{1/\sigma}$. Então

$$\eta^{N/\sigma}R_N(\eta,t)\le c^{-1/\sigma}\eta^{(N-1)/\sigma}\int_0^{\delta(t)}e^{-\eta\tau_1^\sigma}\dots\int_{\tau_{N-2}}^{\delta(t)}e^{-c\eta(\tau_{N-1}-\tau_{N-2})^\sigma}\int_0^\infty e^{-s_N}ds_N.$$

Repetindo o mesmo argumento para as demais integrais, obtemos (4.81). $\square$

Podemos então enunciar e demonstrar o último grande resultado sobre regularidade de vetores Gevrey de [8].

Teorema 4.16 *Se $s\ge 1$ e $\Omega=J\times V$, sendo $J\subset\mathbb{R}$ e $\Theta\subset\mathbb{R}^n$ abertos, então $G^s(\Omega;\mathfrak{L})\subset G^{s'}(\Omega)$, com $s'=s/(1-\theta)$, sendo θ o expoente de Lojasiewicz de Φ.*

Demonstração. Podemos supor $\theta>0$, uma vez que o caso $\theta=0$ em que o operador é elíptico já foi resolvido. Vamos considerar ainda $\Theta'\Subset\Theta$ outra bola centrada na origem para utilizar o Corolário 4.8 (mas ainda denotaremos a bola por Θ por simplicidade). Assim como no Teorema 4.14, vamos supor que J é um intervalo centrado na origem de $\mathbb{R}$ e considerar $u\in\mathcal{D}'(J\times\Theta)$ tal que $L^\alpha u\in L^\infty(\Theta,L^1(J))$ para todo $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$. Assim como na Observação 4.11, obtemos que $u\in C^\infty(\overline{\Theta},\mathcal{D}'(J))$. Seja $\chi\in G_0^\tau(J)$, com $\tau>1$ a ser escolhido, que vale 1 em vizinhança da origem e $\psi\in G_0^\tau(J)$, $0\le\psi\le 1$ que vale 1 em $\operatorname{supp}\chi$. Dessa forma, $\psi\chi=\chi$. De (4.79), para cada $N\in\mathbb{N}$ podemos escrever

$$\widehat{(\psi u)}(\xi,t)=K_N(\mathbb{L}^N(\psi u))+ \tag{4.82}$$

$$+e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}\left\{\widehat{(\psi u)}(\xi,t_\#)+\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\int_{s_1\in\gamma_t}\cdots\int_{s_k\in\gamma_{t,s_{k-1}}}\widehat{\mathbb{L}^k(\psi u)}(\xi,t_\#)\right\}.$$

Assim, se H denota a função Heaviside e se fizermos convolução na variável ξ, obtemos

$$\hat{\chi}(\xi)*\left\{H(\xi)\widehat{(\psi u)}(\xi,t)\right\}=\hat{\chi}(\xi)*\left\{H(\xi)K_N(\mathbb{L}^N(\psi u))(\xi,t)\right\}+$$

$$\hat{\chi}(\xi)*\left\{e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}H(\xi)\left[\widehat{(\psi u)}(\xi,t_\#)+\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\int_{s_1\in\gamma_t}\cdots\int_{s_k\in\gamma_{t,s_{k-1}}}\widehat{\mathbb{L}(\psi u)}(\xi,t_\#)\right]\right\}.$$

Se escrevermos $\mathbb{L}^N(\psi u)=\psi\mathbb{L}u+u_N$ (lembre que L_j satisfaz a Regra de Leibniz) e

$$\hat{\chi}(\xi)*\left\{H(\xi)\widehat{(\psi u)}(\xi,t)\right\}=2\pi\widehat{\chi u}(\xi,t)+\hat{\chi}(\xi)*\left\{(H(\xi)-1)\widehat{(\psi u)}(\xi,t)\right\},$$

então para todo $t\in\Theta\setminus\Sigma$ obtemos

$$2\pi\widehat{(\chi u)}(\xi,t)=\hat{\chi}(\xi)*\left\{(1-H(\xi))\widehat{(\psi u)}(\xi,t)\right\}+\tag{4.83}$$

$$+\hat{\chi}(\xi)*\left\{e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}H(\xi)\left[\widehat{(\psi u)}(\xi,t_\#)+\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\int_{s_1\in\gamma_t}\cdots\int_{s_k\in\gamma_{t,s_{k-1}}}\widehat{\mathbb{L}(\psi u)}(\xi,t_\#)\right]\right\}+$$

$$+\hat{\chi}(\xi)*\left\{H(\xi)K_N(\psi\mathbb{L}^N(u))(\xi,t)\right\}+\hat{\chi}(\xi)*\left\{H(\xi)K_N(u_N)(\xi,t)\right\}\doteq$$

$$\doteq F_1(\xi,t)+F_{2,N}(\xi,t)+F_{3,N}(\xi,t)+F_{4,N}(\xi,t).$$

Assim como Teorema 4.14, vamos estimar cada um dos termos separadamente. O termo F_1 já foi estimado em (4.63), ou seja, existe $A_1>0$ tal que

$$\xi^N|F_1(\xi,t)|\leq A_1^{N+1}N!^\tau\left\|u\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J)}, \xi>0, t\in\Theta\setminus\Sigma.\tag{4.84}$$

Estimativa de $F_{2,N}(\xi,t)$:

$$\hat{\chi}(\xi)*\left\{e^{-\xi\left(\Phi(t)-\Phi(t_\#)\right)}H(\xi)\left[\widehat{(\psi u)}(\xi,t_\#)+\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\int_{s_1\in\gamma_t}\cdots\int_{s_k\in\gamma_{t,s_{k-1}}}\widehat{\mathbb{L}^k(\psi u)}(\xi,t_\#)\right]\right\}.$$

Como $\left|\widehat{\mathbb{L}^k(\psi u)}(\xi,t)\right| \leq \left\|\mathbb{L}^k(\psi u)(\cdot,t)\right\|_{L^1(J)}$, utilizamos o que foi demonstrado no Lema 4.15 para concluir que (quando $\gamma_t = \alpha_t$)

$$\left|\widehat{(\psi u)}(\xi,t_\#) + \sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k \int_{s_1\in\gamma_t} \cdots \int_{s_k\in\gamma_{t,s_{k-1}}} \widehat{\mathbb{L}(\psi u)}(\xi,t_\#)\right| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{C_1^j}{j!} \left\|\mathbb{L}^j(\psi u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}.$$

Segue que

$$F_{2,N}(\xi,t) \leq \left(\int \left|\hat{\chi}(\xi-\eta)H(\eta)e^{-d\eta}\right| d\eta\right) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{C_1^j}{j!} \left\|\mathbb{L}^j(\psi u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}.$$

Com o mesmo argumento usado para obter (4.62), concluímos que existe $A_2 > 0$ tal que para todo $\xi > 0$ e todo $t \in \Theta \setminus \Sigma$, vale

$$\begin{aligned}
\xi^N \left|F_{2,N}(\xi,t)\right| &\leq A_2^{N+1} N!^\tau \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \sum_{i_1,\ldots,i_j=1}^{n} \left\|L_{i_1} \cdot \ldots \cdot L_{i_j}(\psi u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))} \\
&= A_2^{N+1} N!^\tau \sum_{|\alpha|\leq N-1} \frac{1}{|\alpha|} \left\|L^\alpha(\psi u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))} \\
&\leq A_2^{N+1} N!^\tau \sum_{|\alpha|\leq N-1} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{1}{\beta!\gamma!} \left\|L^\beta(\psi)\, L^\gamma(u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}
\end{aligned}$$

Da nossa escolha de ψ, após redefinirmos A_2, obtemos

$$\xi^N \left|F_{2,N}(\xi,t)\right| \leq A_2^{N+1} N!^{2\tau-1} \sum_{|\alpha|\leq N-1} \sum_{\gamma\leq\alpha} \frac{1}{\gamma!} \left\|L^\gamma(u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}.$$

Observe que a soma do lado direito da última desigualdade ainda percorre todos os multi-índices $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ tais que $|\gamma| \leq N-1$, porém os termos podem aparecer repetidas vezes. Apenas o termo $\gamma = 0$ aparece em cada uma das somas $\sum_{\gamma\leq\alpha} \frac{1}{\gamma!} \left\|L^\gamma(u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}$. Assim se M_0 é a quantidade de multi-índices em $\mathbb{Z}_+^n$ de módulo no máximo $N-1$, então

$$\xi^N \left|F_{2,N}(\xi,t)\right| \leq A_2^{N+1} N!^{2\tau-1} \sum_{|\alpha|\leq N-1} \frac{M_0}{\alpha!} \left\|L^\alpha(u)\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}.$$

Dessa forma, redefinindo A_2, obtemos

$$\xi^N |F_{2,N}(\xi,t)| \leq A_2^{N+1} N!^{2\tau-1} \sum_{|\alpha|\leq N-1} \frac{1}{\alpha!} \|L^\alpha(u)\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}. \tag{4.85}$$

O argumento para a estimativa quando $\gamma_t \neq \alpha_t$ é o mesmo que utilizaremos para a estimativa de F_{3N}.

Estimativa de $F_{4,N}(\xi,t) = \hat{\chi}(\xi) * \{H(\xi)K_N(u_N)(\xi,t)\}$**:** Vamos denotar

$$u_N = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} g_{i_1,\ldots,i_N}(x,t) dt_{i_1} \otimes \ldots \otimes dt_{i_N}.$$

Como $\mathbb{L}^N(\psi u) = \psi \mathbb{L} u + u_N$, temos que cada $g_{i_1,\ldots,i_N}(x,t)$ é um produto da forma

$$\left(L_{i_1} \cdot \ldots \cdot L_{i_j}\psi\right)\left(L_{i_{j+1}} \cdot \ldots \cdot L_N u\right), 1 \leq j \leq N.$$

Em particular, cada $g_{i_1,\ldots,i_N}(x,t)$ contém um fator que é uma derivada de ordem $j \geq 1$ de ψ. Com a notação introduzida, quando $\gamma_t = \alpha_t$, obtemos

$$K_N(u_N)(\xi,t) =$$

$$(-1)^N \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} \int_0^{\delta(t)} \ldots \int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)} e^{-\xi[\Phi(t)-\Phi(\gamma_t(\tau_N))]} \widehat{g_{i_1,\ldots,i_N}}(\xi,\gamma_t(\tau_N)) \gamma'_{t,i_1}(\tau_1) \ldots \gamma'_{t,i_N}(\tau_N) d\tau_N \ldots d\tau_1.$$

Dessa forma, se escrevermos

$$G_N(\eta,y,\tau_1,\ldots,\tau_N) = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} e^{-\eta[\Phi(t)-\Phi(\gamma_t(\tau_N))]-i\eta y} g_{i_1,\ldots,i_N}(y,\gamma_t(\tau_N)) \gamma'_{t,i_1}(\tau_1) \ldots \gamma'_{t,i_N}(\tau_N),$$

temos

$$F_{4,N}(\xi,t) = \int_0^\infty \int_0^{\delta(t)} \ldots \int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)} \int_J G_N(\eta,y,\tau_1,\ldots,\tau_N) d\tau_N \ldots d\tau_1 d\eta.$$

E de modo análogo ao que fizemos em (4.66), com auxílio do Lema 4.15, podemos escrever

$$F_{4,N}(\xi,t) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0^+} \int_0^\infty \int_0^{\delta(t)} \ldots \int_{\tau_{N-1}}^{\delta(t)} \int_J G_N(\eta,y,\tau_1,\ldots,\tau_N) e^{-\epsilon\eta^2} d\tau_N \ldots d\tau_1 d\eta.$$

Assim como fizemos para obter (4.68) e (4.70), e utilizando também (4.80), obtemos que existe $D > 0$ tal que

$$\xi^N \left| F_{4,N}(\xi, t) \right| \leq D^{N+1} N!^{\tau - 1} \left\| u_N \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\| u_N \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))} &= \left\| \mathbb{L}^N(\psi u) - \psi \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))} \\
&= \sum_{i_1, \ldots, i_N = 1}^{n} \left\| L_{i_1} \cdot \ldots \cdot L_{i_N}(\psi u) - \psi L_{i_1} \ldots L_{i_N} u \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))} \\
&= \sum_{|\alpha| = N} \frac{N!}{\alpha!} \left\| L^\alpha(\psi u) - \psi L^\alpha u \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))} \\
&\leq n^N \sum_{|\alpha| = N} \sum_{\substack{\beta + \gamma = \alpha \\ \gamma \neq \alpha}}^{N} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} \left\| L^\beta \psi L^\gamma u \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))},
\end{aligned}$$

podemos concluir que existe $A_4 > 0$ tal que

$$\xi^N \left| F_{4,N}(\xi, t) \right| \leq A_4^{N+1} N!^{2\tau - 1} \sum_{|\gamma| \leq N-1} \frac{1}{\gamma!} \left\| L^\gamma u \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))}, \xi > 0, t \in \Theta \setminus \Sigma, N \in \mathbb{N}, \quad (4.86)$$

sendo que a estimativa para o caso $\gamma_t \neq \alpha_t$ também segue de modo análogo ao que faremos no póximo caso.

Estimativa de $F_{3,N}(\xi, t) = \hat{\chi}(\xi) * \left\{ H(\xi) K_N(\psi \mathbb{L}^N(u))(\xi, t) \right\}$:

Observe que

$$\left| F_{3,N}(\xi, t) \right| \leq \int_0^\infty \left| \hat{\chi}(\xi - \eta) \right| \left| K_N(\psi \mathbb{L}^N u)(\eta, t) \right| d\eta.$$

Assumiremos primeiro que $\gamma_t = \alpha_t$. Usando as notações do Lema 4.15 e (4.53), segue que

$$\left| K_N(\psi \mathbb{L}^N u)(\eta, t) \right| \leq R_N(\eta, t) \left\| \mathbb{L}^N u \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))}.$$

Assim, usando os mesmos argumentos realizados para obter (4.62), concluímos que

$$\xi^{N/\sigma} \left| F_{3,N}(\xi, t) \right| \leq$$

$$2^{N/\sigma}\int_0^{\xi/2}(\xi-\eta)^{N/\sigma}\left|\hat{\chi}(\xi-\eta)\right|R_N(\eta,t)d\eta\left\|\mathbb{L}^N u\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}+$$

$$+2^{N/\sigma}\int_{\xi/2}^{\infty}\eta^{N/\sigma}\left|\hat{\chi}(\xi-\eta)\right|R_N(\eta,t)d\eta\left\|\mathbb{L}^N u\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}\leq$$

$$2^{N/\sigma}\left\{\frac{\delta(t)}{N!}\int_{-\infty}^{\infty}|\eta|^{N/\sigma}\left|\hat{\chi}(\eta)\right|d\eta+\int_{\xi/2}^{\infty}\eta^{N/\sigma}\left|\hat{\chi}(\xi-\eta)\right|R_N(\eta,t)d\eta\right\}\left\|\mathbb{L}^N u\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}.$$

De (4.69) obtemos que para algumas constantes C_2 e h positivas vale

$$|\eta|^{N/\sigma}\left|\hat{\chi}(\eta)\right|\leq C_2\sup_{w>0}\left\{w^{N/\sigma}e^{-hw^{1/\tau}}\right\}e^{-h|\eta|^{1/\tau}}\leq\left(\frac{\tau N}{h\sigma}\right)^{\tau N/\sigma}e^{-h|\eta|^{1/\tau}},$$

de onde podemos concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\eta|^{N/\sigma}\left|\hat{\chi}(\eta)\right|d\eta\leq C_2\left(\frac{\tau N}{h\sigma}\right)^{\tau N/\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h|\eta|^{1/\tau}}d\eta.$$

Se escolhermos $1<\tau\leq\sigma=\frac{1}{1-\theta}$, então

$$\left(\frac{\tau N}{h\sigma}\right)^{\tau N/\sigma}\leq\left(C^{-\tau/\sigma}\right)^N N^{N\tau/\sigma}\leq M_1^N N!,$$

sendo $M_1>0$ constante que não depende de N. Já de (4.81), concluímos que existe $M_2>0$ tal que

$$\int_{\xi/2}^{\infty}\eta^{N/\sigma}\left|\hat{\chi}(\xi-\eta)\right|R_N(\eta,t)d\eta\leq M_2^{N+1}.$$

Ou seja, no caso em que $\gamma_t=\alpha_t$, existe $A_3>0$ tal que

$$\xi^{N(1-\theta)}\left|F_{3,N}(\xi,t)\right|\leq A_3^{N+1}\left\|\mathbb{L}^N u\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))},\ t\in\Theta\setminus\Sigma,\xi>0. \tag{4.87}$$

É importante notar que tal A_3 não depende de $t\in\Theta\setminus\Sigma$. Suponha agora que $\gamma_t=\alpha_t*[l(t),t_0]*\alpha_{t_0}$. Se $s\in\gamma_t$, então

$$\gamma_{t,s}=\begin{cases}\alpha_{t,s}*[l(t),t_0]*\alpha_{t_0}, & \text{se}\quad s\in\alpha_t;\\ [s,t_0]*\alpha_{t_0}, & \text{se}\quad s\in[l(t),t_0];\\ \alpha_{t_0,s}, & \text{se}\quad s\in\alpha_{t_0}.\end{cases} \tag{4.88}$$

Note que podemos escrever

$$K_N(u_N)(\xi,t) =$$
$$(-1)^N \int_{s_1\in\alpha_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \dots \int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}} e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}(\widehat{\psi\mathbb{L}^N u})(\xi,s_N)+$$
$$+(-1)^N \int_{s_1\in[l(t),t_0]} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \dots \int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}} e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}(\widehat{\psi\mathbb{L}^N u})(\xi,s_N)+$$
$$+(-1)^N \int_{s_1\in\alpha_{t_0}} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \dots \int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}} e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}(\widehat{\psi\mathbb{L}^N u})(\xi,s_N).$$

Denote por $Q_1(\xi,t)$ a última parcela da soma do lado direito da igualdade e vamos escrever $A \sim B$ quando $A - B = O(|l(t)-t_0|)$. Como

$$(-1)^N \int_{s_1\in[l(t),t_0]} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \dots \int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}} e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}(\widehat{\psi\mathbb{L}^N u})(\xi,s_N) = O(|l(t)-t_0|),$$

segue que

$$K_N(\mathbb{L}^N(u_N)) \sim Q_1(\xi,t)+$$
$$+(-1)^N \int_{s_1\in\alpha_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \dots \int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}} e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}(\widehat{\psi\mathbb{L}^N u})(\xi,s_N).$$

Quando $s_1 \in \alpha_t$, usamos a decomposição dada em (4.88) para escrever $\gamma_{t,s_1} = \alpha_{t,s_1} * [l(t),t_0] * \alpha_{t_0}$ e concluímos que se

$$Q_2(\xi,t) =$$
$$(-1)^N \int_{s_1\in\alpha_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \int_{s_2\in\alpha_{t_0,s_1}} e^{-\xi(\Phi(s_1)-\Phi(s_2))} \dots \int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}} e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}(\widehat{\psi\mathbb{L}^N u})(\xi,s_N),$$

então

$$K_N(\mathbb{L}^N(u_N)) \sim Q_1(\xi,t) + Q_2(\xi,t)+$$
$$+(-1)^N \int_{s_1\in\alpha_t} e^{-\xi(\Phi(t)-\Phi(s_1))} \int_{s_2\in\alpha_{t,s_1}} e^{-\xi(\Phi(s_1)-\Phi(s_2))} \dots \int_{s_N\in\gamma_{t,s_{N-1}}} e^{-\xi(\Phi(s_{N-1})-\Phi(s_N))}(\widehat{\psi\mathbb{L}^N u})(\xi,s_N).$$

Definindo $Q_j(\xi,t)$ para j até N de maneira análoga ao que fizemos para Q_1 e Q_2, concluímos que

$$K_N(\psi\mathbb{L}^N u) \sim Q_1(\xi,t) + \ldots + Q_N(\xi,t).$$

Afirmamos que, aumentando A_3 se necessário, vale

$$\xi^{N(1-\theta)} \left|\left[\hat{\chi} * (H(\cdot)Q_j(\cdot,t))\right](\xi,t)\right| \le A_3^{N+1} \left\|\mathbb{L}^N u\right\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))}, j = 1,\ldots,N \tag{4.89}$$

e a constante A_3 não depende da escolha que fizemos de t_0. De fato, para $j=1$ segue do fato de A_3 não depender de $t \in \Theta \setminus \Sigma$, enquanto que se fixarmos $1 < j \leq N$, temos

$$\begin{aligned} \xi^{N(1-\theta)} \left| [\chi * (H(\cdot) Q_j(\cdot,t))](\xi,t) \right| &\leq \int_0^\infty |\hat{\chi}(\xi-\eta)| \, |Q_j(\eta,t)| \, d\eta \\ &\leq \int_0^\infty |\hat{\chi}(\xi-\eta)| \, R_j(\eta,t) R_{N-j}(\eta,t) d\eta \left\| \mathbb{L}^N u \right\|_{L^\infty(\Theta, L^1(J))}, \end{aligned}$$

sendo que usamos $e^{-\eta(\Phi(s_j)-\Phi(s_{j+1}))} \leq e^{-\eta(\Phi(t_0)-\Phi(s_{j+1}))}$ quando $j = 1, \ldots, N-1$. Para concluir que vale (4.89) basta utilizar as desigualdades

$$R_j(\eta,t) R_{N-j}(\eta,t) \leq \frac{C_1^j}{j!} \frac{C_1^{N-j}}{(N-j)!} \leq \frac{(2C_1)^N}{N!} \quad \text{e}$$

$$\eta^{N/\sigma} R_j(\eta,t) R_{N-j}(\eta,t) \leq C_1^N.$$

Concluímos que

$$\xi^{N(1-\theta)} \left| \hat{\chi} * \left\{ \left[H(\cdot) \left(K_N(\mathbb{L}^N(u_N)) - Q_1(\cdot,t) + \ldots + Q_N(\cdot,t) \right) \right] \right\} (\xi,t) \right| = O(|l(t) - t_0|).$$

Portanto, fazendo $t_0 \longrightarrow l(t)$, segue de (4.89) que (4.87) vale de modo geral. Com estimativas análogas para $\xi < 0$, de (4.84), (4.85), (4.86) e (4.87), temos que existe $A > 0$ tal que

$$\left| \widehat{(\chi u)}(\xi,t) \right| \leq \tag{4.90}$$

$$A^{N+1} \left\{ \frac{1}{|\xi|^{N(1-\theta)}} \sum_{|\alpha|=N} \|L^\alpha u\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))} + \frac{N!^{2\tau-1}}{|\xi|^N} \sum_{|\gamma| \leq N-1} \frac{1}{\gamma!} \|L^\gamma u\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))} \right\},$$

para $t \in \Theta'$, $N \in \mathbb{N}$, $\xi \neq 0$ e $1 < \tau \leq \frac{1}{1-\theta}$. Supondo que

$$\|L^\alpha u\|_{L^\infty(\Theta,L^1(J))} \leq C^{|\alpha|+1} \alpha!^s,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| &\leq A^{N+1}\left\{\frac{1}{|\xi|^{N(1-\theta)}}\sum_{|\alpha|=N} C^{|\alpha|+1}\alpha!^{s} + \frac{N!^{2\tau-1}}{|\xi|^{N}}\sum_{|\gamma|\leq N-1} C^{|\gamma|+1}\gamma!^{s-1}\right\}\\ &\leq A'^{N+1}\left\{\frac{N!^{s}}{|\xi|^{N(1-\theta)}} + \frac{N!^{s+2\tau-2}}{|\xi|^{N}}\right\}.\end{aligned}$$

Se escolhermos τ também satisfazendo

$$\tau - 1 \leq \frac{s'-s}{2} = \frac{s\theta}{2(1-\theta)},$$

então

$$s + 2\tau - 2 \leq s'$$

e concluímos que

$$\left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| \leq A'^{N+1}\left\{\left(\frac{N^{s'}}{|\xi|}\right)^{N(1-\theta)} + \left(\frac{N^{s'}}{|\xi|}\right)^{N}\right\}. \tag{4.91}$$

Mostraremos agora que desta última desigualdade podemos obter $B_1 > 0$ tal que

$$\left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| \leq B_1^{N+1}\left(\frac{N^{s'}}{|\xi|}\right)^{N},\ N \in \mathbb{N}, t \in \Theta', \tag{4.92}$$

o que termina a nossa demonstração. Como existe $B > 0$ tal que $\left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| \leq B$ para todo $\xi \neq 0$ e $t \in \Theta'$, (4.92) é satisfeito sempre que $\frac{N^{s'}}{|\xi|} > 1$. Suponha então que $\frac{N^{s'}}{|\xi|} \leq 1$. Afirmamos que para todo $N, p \in \mathbb{N}$, vale

$$\left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| \leq 2A'^{N+p+1}\left\{\frac{(N+p)^{s'}}{|\xi|}\right\}^{(N+p)(1-\theta)}.$$

De fato, se $\frac{(N+p)^{s'}}{|\xi|} \leq 1$ basta usar (4.91). Caso contrário, usamos novamente (4.91) e

$$\frac{N^{s'}}{|\xi|} \leq 1 < \frac{(N+p)^{s'}}{|\xi|}.$$

Logo,

$$\left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| \leq 2A'^{N+p+1}\left(\frac{N+p}{N}\right)^{s'(N+p)(1-\theta)}\left(\frac{N^{s'}}{|\xi|}\right)^{(N+p)(1-\theta)}, \ \forall N,p\in\mathbb{N}.$$

Se considerarmos p tal que

$$N\frac{\theta}{1-\theta} \leq p < \frac{\theta}{1-\theta}N+1,$$

então

$$N \leq (N+p)(1-\theta) \ \text{ e } \ \frac{N+p}{N} < \frac{\theta}{1-\theta}+2$$

e obtemos

$$\left(\frac{N+p}{N}\right)^{s'(N+p)(1-\theta)}\left(\frac{N^{s'}}{|\xi|}\right)^{(N+p)(1-\theta)} \leq \left(2+\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{s'(N+1-\theta)}\left(\frac{N^{s'}}{|\xi|}\right)^{N}.$$

Considerando $A'>1$, obtemos finalmente que

$$\left|\widehat{(\chi u)}(\xi,t)\right| \leq 2A_1^{N+\frac{\theta N}{1-\theta}+2}\left(2+\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{s'(N+1-\theta)}\left(\frac{N^{s'}}{|\xi|}\right)^{N},$$

o que mostra (4.92). □

4.5 Aplicações para sistemas semilineares

A última seção deste trabalho traz algumas aplicações dos teoremas demonstrados na Seção 4.4. Iremos considerar sistemas semilineares assosciados aos campos L_j. Começamos com o

Teorema 4.17 *Assuma que $\mathfrak{L}$ satisfaça a hipótese $(*)$ e considere os campos*

$$L_j' \doteq L_j + g_j(x,t,\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}, j=1,\dots,n,$$

sendo que cada função g_j é analítica para (x,t) em vizinhança da origem e inteira holomorfa em $\zeta\in\mathbb{C}$. Suponha que os campos $\mathcal{L}_j$ comutam entre si. Se u é uma função de *classe $\mathcal{C}^1$ definida em vizinhança da origem de $\mathbb{R}^M \times \Theta$ que satisfaz*

$$L_j u(x,t) = g_j(x,t,u(x,t)), j = 1, \ldots, n,$$

então u é real analítica em vizinhança da origem.

Demonstração. Vamos assumir que $u(0,0) = 0$. Considere H uma solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_j H & = & 0, j = 1, \ldots, n \\ H(x,0,\zeta) & = & \zeta \end{array} \right. ,$$

a qual é uma função holomorfa definida em vizinhança da origem de $\mathbb{C}^{m+n+1}$ (veja [3, p. 110]). Defina

$$v(x,t) = H(x,t,u(x,t))$$

e vamos escrever

$$u = A + iB \quad \text{e} \quad H(x,t,\zeta) = H_1 + iH_2.$$

Se denotarmos a variável complexa $\zeta = \eta_1 + i\eta_2$, então segue que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial H_1}{\partial \eta_1} & = & \frac{\partial H_2}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial H_1}{\partial \eta_2} & = & -\frac{\partial H_2}{\partial \eta_1}. \end{array} \right. \tag{4.93}$$

Utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$L_j v(x,t) = (L_j H)(x,t,u(x,t)) + \frac{\partial H}{\partial \eta_1}(x,t,u(x,t)) \frac{\partial A}{\partial t_j}(x,t) +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial \eta_2}(x,t,u(x,t)) \frac{\partial B}{\partial t_j}(x,t) - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(t) \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_1}(x,t,u(x,t)) \frac{\partial A}{\partial x_k}(x,t) + \frac{\partial H}{\partial \eta_2}(x,t,u(x,t)) \frac{\partial B}{\partial x_k}(x,t) \right)$$

e utlizando a nossa hipótese sobre u e (4.93), obtemos

$$\begin{aligned} L_j v(x,t) &= (L_j H)(x,t,u(x,t)) + \frac{\partial H}{\partial \zeta}(x,t,u(x,t)) g_j(x,t,u(x,t)) \\ &= (\mathcal{L}_j H)(x,t,u(x,t)) = 0. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 4.14 que v é uma função analítica em vizinhança da origem. Defina agora

$$F(x,t,\zeta,w) = H(x,t,\zeta) - w$$

para (x,t,ζ) em vizinhança de 0 de $\mathbb{C}^{m+n+1}$ e $w \in \mathbb{C}$. Observe que

$$F(0,0,0,0) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial \zeta}(0,0,0,0) \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita existe uma função homolorfa G definida em vizinhança U da origem de $\mathbb{C}^{m+n+1}$ tal que para cada $(x,t,w) \in U$, $G(x,t,w)$ é o único valor tal que $F(x,t,G(x,t,w),w) = 0$, ou seja,

$$H(x,t,G(x,t,w)) = w.$$

Assim,

$$u(x,t) = G(x,t,v(x,t))$$

em vizinhança da origem e o resultado fica demonstrado. □

Antes de enunciar o próximo resultado, vamos demonstrar um lema auxiliar.

Lema 4.18 *Fixados $s \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $c > 0$, defina*

$$m_p = \frac{cp!^s}{(p+1)^{n+1}}, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Então existe $c > 0$ tal que

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} m_{|\beta|} m_{|\alpha-\beta|} \leq m_{|\alpha|}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{4.94}$$

Demonstração. Podemos reescrever (4.94) como

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \binom{|\alpha|}{|\beta|}^{-s} \frac{(|\alpha|+1)^{n+1}}{(|\beta|+1)^{n+1}(|\alpha-\beta|+1)^{n+1}} \leq c^{-1}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Logo, é suficiente mostrarmos que a soma

$$S_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{(|\alpha|+1)^{n+1}}{(|\beta|+1)^{n+1}(|\alpha-\beta|+1)^{n+1}} \tag{4.95}$$

é limitada para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \geq 2$. Observe que se $|\alpha| = 2k$, com $k \geq 1$, então

$$S_\alpha \leq 2 \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| \leq k}} \frac{(|\alpha|+1)^{n+1}}{(|\beta|+1)^{n+1}(|\alpha-\beta|+1)^{n+1}},$$

enquanto que se $|\alpha| = 2k+1$, com $k \geq 1$, então

$$S_\alpha \leq 2 \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| \leq k}} \frac{(|\alpha|+1)^{n+1}}{(|\beta|+1)^{n+1}(|\alpha-\beta|+1)^{n+1}} + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| = k}} \frac{(|\alpha|+1)^{n+1}}{(|\beta|+1)^{n+1}(|\alpha-\beta|+1)^{n+1}}.$$

Como o número de multi-índices $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\beta| = k$ é $\binom{k+n-1}{n-1}$ (ver [17, p. 11]), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| = k}} \frac{(|\alpha|+1)^{n+1}}{(|\beta|+1)^{n+1}(|\alpha-\beta|+1)^{n+1}} &= 2^{n+1} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| = k}} \frac{1}{(k+2)^{n+1}} \\ &\leq 2^{n+1} \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!} \frac{1}{(k+2)^{n+1}}, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que tal parcela é limitada em α. Como

$$\frac{|\alpha|+1}{(|\beta|+1)(|\alpha-\beta|+1)} = \frac{1}{|\beta|+1}\left(1 + \frac{|\beta|}{|\alpha|-|\beta|+1}\right)$$

e $\frac{|\beta|}{|\alpha|-|\beta|+1} \leq 1$ se $|\beta| \leq k$ (tanto para $|\alpha| = 2k$ quanto para $|\alpha| = 2k+1$), obtemos o resutado, uma vez que

$$\sum_{\beta_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\beta_n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta_1 + \ldots + \beta_n + 1)^{n+1}} < \infty.$$

$\square$

Considere m_p como no Lema 4.18 com $c > 0$ de modo que vale (4.94). Se definirmos $M_p = m_p/\epsilon^{p-1}$, então

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} M_{|\beta|} M_{|\gamma|} \leq \epsilon M_{|\alpha|}, \ \forall \epsilon > 0. \tag{4.96}$$

Destacaremos duas propriedades de M_p. A primeira segue de

$$\frac{1}{(1+p)^s}\left(\frac{p+2}{p+1}\right)^{n+1} \leq 2 \cdot 2^{n+1}, \forall p \in \mathbb{Z}_+,$$

que garante $m_p \leq 2^{n+2} m_{p+1}$, e portanto

$$M_p \leq 2^{n+2}\epsilon M_{p+1}, \forall p \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.97}$$

A segunda é:

$$A^{p+1} p!^s \leq M_p/2, \quad p \geq 2, \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0. \tag{4.98}$$

Para verificar que isso é possível, note primeiro que (4.98) equivale a

$$\epsilon^{p-1} \leq \frac{A^{-p-1}c}{2(p+1)^{n+1}}.$$

Assim, para um número finito de inteiros p, isso é possível para ϵ_0 suficientemente pequeno. Basta garantir agora que (4.98) seja válido qualquer que seja $p \geq p_0$, para algum $p_0 \in \mathbb{N}$. Outro jeito de escrever a desigualdade (4.98) é

$$A\epsilon \leq \left\{\left[\frac{(cA^{-2})^{1/(n+1)}}{2^{1/(n+1)}(p+1)}\right]^{1/(p-1)}\right\}^{n+1}.$$

Como

$$\lim_{p \longrightarrow \infty}\left[\frac{(cA^{-2})^{1/(n+1)}}{2^{1/(n+1)}(p+1)}\right]^{1/(p-1)} = 1,$$

basta considerarmos ϵ_0 tal que $A\epsilon_0 < 1$.

Iremos trabalhar agora com séries formais. Dadas $f, g \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ vamos escrever $f \ll g$ quando $f^{(\alpha)}(0) \leq g^{(\alpha)}(0)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Definimos $\mathfrak{T} \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ por

$$\mathfrak{T}(X) = \sum_{|\alpha|>0} \frac{M_\alpha}{\alpha!} X^\alpha, X \in \mathbb{R}^n.$$

Note que

$$\mathfrak{T}(X)^2 = \sum_{|\alpha|>1} \left(\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta,\gamma\neq 0}} \frac{M_{|\beta|}M_{|\gamma|}}{\beta!\gamma!} \right) X^\alpha.$$

Segue de (4.96) que

$$\mathfrak{T}(X)^2 \ll \epsilon\mathfrak{T}(X).$$

De modo geral, obtemos

$$\mathfrak{T}(X)^p \ll \epsilon^{p-1}\mathfrak{T}(X), \quad p \geq 1. \tag{4.99}$$

Defina agora, para $\rho > 0$ tal que $\epsilon\rho A < 1$,

$$t_\rho(X) = \sum_{p>0} \rho^p A^p \mathfrak{T}(X)^p \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]].$$

Segue de (4.99) que

$$\begin{aligned} \left(\partial^\alpha t_\rho\right)(0) &= \sum_{p>0} \rho^p A^p \left(\partial^\alpha \left(\mathfrak{T}(X)\right)^p\right)(0) \\ &\leq \sum_{p>0} \rho^p A^p \epsilon^{p-1} (\partial\mathfrak{T})(0) \\ &= \frac{\rho A}{1-\epsilon A\rho} \partial^\alpha \mathfrak{T}(0). \end{aligned}$$

Com essas notações introduzidas, podemos demonstrar a

Proposição 4.19 *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e que $Z_1, \ldots, Z_n$ são campos reais-analíticos definidos em Ω e que comutam entre si. Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ que satisfaz o seguinte sistema semilinear*

$$(Z_j u)(x) = f_j(x, u(x)), x \in \Omega, j = 1, \ldots, n,$$

sendo que as funções $f_j(x, \zeta)$ são de classe G^s na variável $x \in \Omega$ assumindo valores no espaço das funções inteiras na variável $\zeta \in \mathbb{C}$. Então $Z^\alpha u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Além disso, dado um compacto $K \subset \Omega$, existe $C = C(K) > 0$ tal que

$$\|Z^\alpha u\|_{L^\infty(K)} \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|!^s. \tag{4.100}$$

Demonstração. Considere inicialmente $K \subset \Omega$ um compacto. Usando limitações

$$|\partial_x^\alpha f(x,\zeta)| \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s$$

para x e ζ em certos compactos, dos mesmos argumentos utilizados na Proposição 2.2 e na Proposição 4.4 segue que existe $A = A(K) > 0$ tal que

$$\left\| Z^\alpha \partial_\zeta^p f j(x,\zeta) \right\|_{L^\infty(K\times u(K))} \leq A^{|\alpha|+p+1}|\alpha|!^s p!, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, p \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq j \leq n. \tag{4.101}$$

Defina

$$M = \max\left\{1, \frac{1}{c}\sup_K |u|, \frac{2^{n+1}\sup_K |Z_j u|}{c}, \frac{3^{n+1}\sup_K |Z_j Z_k u|}{c2!^s} \quad j,k = 1,\dots n\right\}.$$

Mostraremos por indução sobre $|\alpha|$ que $Z^\alpha u$ é de casse $\mathcal{C}^1$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e que

$$\sup_K |Z^\alpha u| \leq M M_{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{4.102}$$

para algum $0 < \epsilon \leq 1$ (lembre que $M_{|\alpha|}$ depende de $\epsilon > 0$). A nossa hipótese garante que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e como u satisfaz o sistema semilinear, também temos que $Z_j u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ para todo $j = 1,\dots,n$. Além disso, a nossa escolha de M nos mostra que (4.102) é válido se $\alpha = 0$. Como $MM_1 = Mc\epsilon^{-1}2^{-n-1}$, nossa escolha de M nos garante que (4.102) vale para todo $0 < \epsilon \leq 1$, e podemos concluir também para o caso $|\alpha| = 2$. Vamos admitir que (4.102) vale para $|\alpha| = k$ e mostrar para $|\alpha| = k+1$, com $k \geq 2$. Como os campos Z_j comutam entre si, vamos supor que $a_n > 0$ e definir $\beta = \alpha - e_n$. Recordamos aqui a fórmula de Faà di Bruno:

$$\partial_x^\eta \phi(\omega(x)) = \sum C_{q,\gamma}^\eta \phi^{(q)}(w)\partial_x^{\gamma_1} w(x)\dots\partial_x^{\gamma_q} w(x),$$

sendo a soma sobre os multi-índices $\gamma_1,\dots,\gamma_q$ tai que $|\gamma_j| > 0$ e $\gamma_1 + \dots + \gamma_q = \eta$ e as constantes $C_{q,\gamma}^\eta$ são universais. Escrevemos então $Z^\alpha u = Z^\beta f_n(x,u)$ e obtemos $Z^\alpha u(x) = (Z^\beta f_n)(x,u(x)) + H(x)$, com

$$H(x) = \sum_{0\neq\tilde\beta\leq\beta} \binom{\beta}{\tilde\beta} \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_q=\tilde\beta \\ |\gamma_j|>0}} C_{q,\gamma}^{\tilde\beta}\left(\partial_\zeta^q Z^{\beta-\tilde\beta} f_n\right)(x,u(x)) Z^{\gamma_1}u(x)\dots Z^{\gamma_q}u(x).$$

Segue que $Z^\alpha u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e usando (4.98) e (4.101), obtemos

$$\left\|Z^\beta f_n(\cdot,u)\right\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{MM_{|\alpha|}}{2}, \quad \text{se } 0<\epsilon\leq\epsilon_0.$$

Usando novamente (4.98) e a nossa hipótese de indução, concluímos que

$$\begin{aligned}
\sup_K |H(x)| &\leq \sum_{0\neq\tilde\beta\leq\beta} \binom{\beta}{\tilde\beta} A^{|\tilde\beta-\beta|+1}|\beta-\tilde\beta|!^s \sum_{\substack{\gamma_1+\ldots+\gamma_q=\tilde\beta\\|\gamma_j|>0}} C^{\tilde\beta}_{q,\gamma} A^q q! M^q M_{|\gamma_1|}\ldots M_{|\gamma_q|}\\
&= \sum_{0\neq\tilde\beta\leq\beta} \binom{\beta}{\tilde\beta} A^{|\tilde\beta-\beta|+1}|\beta-\tilde\beta|!^s \sum_{\substack{\gamma_1+\ldots+\gamma_q=\tilde\beta\\|\gamma_j|>0}} C^{\tilde\beta}_{q,\gamma} A^q q! M^q (\partial^{\gamma_1}\mathfrak{T})(0)\ldots(\partial^{\gamma_n}\mathfrak{T})(0).
\end{aligned}$$

Usando que as constantes $C^{\tilde\beta}_{q,\gamma}$ são universais, segue que

$$\begin{aligned}
\sup_K |H(x)| &\leq \sum_{0\neq\tilde\beta\leq\beta} \binom{\beta}{\tilde\beta} A^{|\tilde\beta-\beta|+1}|\beta-\tilde\beta|!^s \left(\partial^{\tilde\beta} t_M\right)(0)\\
&\leq \frac{AM}{1-\epsilon AM} \sum_{0\neq\tilde\beta\leq\beta} \binom{\beta}{\tilde\beta} A^{|\beta-\tilde\beta|+1}|\beta-\tilde\beta|!^s M_{|\tilde\beta|}\\
&= \frac{AM}{1-\epsilon AM}\left(AM_{|\beta|} + \sum_{\substack{0\neq\tilde\beta\leq\beta\\ \tilde\beta\neq\beta}} \binom{\beta}{\tilde\beta} A^{|\beta-\tilde\beta|+1}|\beta-\tilde\beta|!^s M_{|\tilde\beta|}\right).
\end{aligned}$$

De (4.98) e (4.96) e usando que $\binom{\beta}{\tilde\beta} \leq \binom{\alpha}{\tilde\beta}$ e que $\left|\alpha-\tilde\beta\right| \geq 2$ quando $0<\tilde\beta<\beta$, obtemos, para $0<\epsilon\leq\epsilon_0$,

$$\begin{aligned}
\sup_K |H(x)| &\leq \frac{AM}{1-\epsilon AM}\left(AM_{|\beta|} + \sum_{\substack{0\neq\tilde\beta\leq\beta\\ \tilde\beta\neq\beta}} \binom{\alpha}{\tilde\beta} \frac{m_{|\alpha-\tilde\beta|} m_{|\tilde\beta|}}{2\epsilon^{|\alpha|-2}}\right)\\
&\leq \frac{AM}{1-\epsilon AM}\left(AM_{|\beta|}+\epsilon M_{|\alpha|}/2\right)\\
&\leq \frac{AM}{1-\epsilon AM}\left(2^{n+1}\epsilon M_{|\alpha|}+\epsilon M_{|\alpha|}/2\right)\\
&= \epsilon AM\left(\frac{2^{n+1}+1/2}{1-\epsilon AM}\right) M_{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Assim, escolhemos ϵ (dependendo de K) suficientemente pequeno para obter $\sup_K |H(x)| \leq MM_{|\alpha|}/2$. □

Juntando os Teorema 4.10, Teorema 4.16 e a Proposição 4.19, podemos enunciar o

Corolário 4.20 *Suponha que $\mathfrak{L}$ satisfaz a propriedade $(*)$ e que u seja uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em vizinhança da origem de $\mathbb{R}^m \times \Theta$ que satisfaz o sistema*

$$(L_j u)(x,t) = g_j(x,t,u(x,t)),$$

sendo que cada g_j é uma função de classe G^s, $s \geq 1$ para (x,t) em vizinhança da origem de $\mathbb{R}^m \times \Theta$ que assume valores no espaço das funções inteiras holomorfas na variável $\zeta \in \mathbb{C}$. Então

1. *para $s = 1$, u é uma função analítica em vizinhança da origem;*
2. *Para $s > 1$ e $m = 1$, u é uma função Gevrey de ordem $s/(1-\theta)$ em vizinhança da origem.*

Apêndice A

Espaços Vetoriais Topológicos

A.1 Principais definições

Nesta parte do trabalho daremos algumas definições e enunciaremos alguns teoremas sobre os espaços vetoriais topológicos, os quais serão úteis ao longo do trabalho. Não forneceremos as respectivas demonstrações, as quais podem ser encontradas em [18].

Definição A.1 *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que E é um espaço vetorial topológico (EVT) se existe uma topologia τ em E tal que a soma em E*

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$

e o produto por escalar

$$+ : E \times \mathbb{C} \longrightarrow E$$

são funções contínuas quando consideramos a topologia produto nos conjuntos $E \times E$ e $E \times \mathbb{C}$, sendo que $\mathbb{C}$ está munido com a topologia usual.

Em um EVT E, a continuidade da soma nos mostra que se $\mathcal{B}$ é uma base para as vizinhanças de 0, então para todo $x \in E$, a família formada por $B + x, B \in \mathcal{B}$ é uma base para as vizinhanças de x. Dessa forma, na maioria das vezes é suficiente apenas dar uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de E que contém o 0 e que satisfaz determinadas propriedades para que E admita uma estrutura de EVT, na qual $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças da origem. Para mais detalhes de quais propriedades $\mathcal{B}$ deve satisfazer, ver [18, p. 21].
Uma das principais maneiras de se obter um ETV é utilizando uma família de seminormas. Uma seminorma em um espaço vetorial E é uma função $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in E$ e $p(0) = 0$;

2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

3. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{C}$.

Observe que se uma seminorma p satisfaz $p(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$, então p é uma norma. Lembremos ainda que um subconjunto $C \subset E$ de um espaço vetorial é dito convexo se $x, y \in C$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ implicar $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$. Uma classe importante de EVT são os localmente convexos, isto é, os EVT que admitem uma base de vizinhança de 0 formada por conjuntos convexos. Uma maneira de construir um EVT localmente convexo é a seguinte:

Dada uma seminorma p em E, definimos a semibola fechada unitária com respeito à norma p como sendo

$$U_p = \{x \in E : p(x) \leq 1\}.$$

Seja $\{p_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família de seminormas em um espaço vetorial E. O conjunto

$$\mathcal{B} = \{\lambda U_{p_\alpha} : \lambda > 0, \alpha \in L\}. \tag{1.1}$$

forma uma base de vizinhanças de 0 em uma topologia de E que define uma estrutura de EVT em E. Neste caso, dizemos que a família de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha \in L}$ define uma estrutura de EVT em E. Reciprocamente, se E é um EVT localmente convexo, então existe uma família de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha \in L}$ em U tal que (1.1) é uma base de vizinhanças da origem.

Um resultado notável é que um EVT E é metrizável se, e somente se, admite uma base enumerável de vizinhanças da origem. Quando E é localmente convexo, podemos melhorar o resultado exibindo uma métrica em função de seminormas. Neste caso, é possível obter uma sequência de seminormas $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ não decrescente e a métrica é dada por

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}.$$

Tanto no caso em que E é localmente convexo quanto no caso em que E é apenas um EVT, conseguimos métricas invariantes por translação. Isso nos motiva a dar a

Definição A.2 *Um espaço de Frechet (ou simplesmente um F-espaço) é um EVT E metrizável, localmente convexo e completo.*

Assim, se uma sequência de seminormas gera um EVT E, então E é um F-espaço se, e somente se, E é completo.

Exemplo A.3 *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e seja $E = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ que admite uma estrutura natural de espaço vetorial. Vamos dar a E uma estrutura de F-espaço. Para cada $K \subset \Omega$ compacto e para $m \in \mathbb{Z}_+$, considere a seminorma*

$$\|f\|_{m,K} = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|\,, f \in E. \tag{1.2}$$

A partir de agora consideramos a estrutura de EVT gerada por essas seminormas em E. Observe que estamos indexando a famílila no conjunto $\mathbb{Z}_+ \times L$, sendo L formado por todos os subconjuntos compactos de Ω, o qual claramente não é enumerável. No entanto é possível exibir uma base enumerável para as vizinhanças de 0 nesta topologia. Consideramos primeiro uma sequência $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de Ω tais que $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ e dado $K \subset \Omega$ compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$. A base desejada é formada pelos conjuntos

$$k^{-1} U_{\|\cdot\|_{m,K_n}}, k, m, n \in \mathbb{N}.$$

Não é difícil ver que uma sequência $\{f_n\} \in E$ converge para $f \in E$ se, e somente se, tanto f_n quanto suas derivadas de qualquer ordem convergem para f uniformemente sobre compactos. Assim, se $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em E, para cara $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, existe f_α tal que $\partial^\alpha f_n$ converge uniformemente para f_α sobre compactos. Em particular $f_0 \in E$, $\partial^\alpha f_0 = f_\alpha$ e f_n converge para f_0 em E. Isso nos mostra que E é um F-espaço.

A.2 O dual topológico de um EVT

Nesta seção E representara um EVT sobre $\mathbb{C}$. Denotaremos por E' o seu dual topológico, ou seja, o conjunto dos funcionais lineares $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuos. Se $x' \in E'$ e $x \in E$, denotaremos por $\langle x', x \rangle$ a ação de x' em x. Dado um conjunto $A \subset E$, definimos o seu polar $A^0 \subset E'$ por

$$A^0 = \left\{ x' \in E' : \sup_{x \in A} |\langle x', x \rangle| \leq 1 \right\}. \tag{1.3}$$

Não é dificíl vetificar as seguintes propriedades:

1. Se $A \subset B$, então $B^0 \subset A^0$;

2. Se $\epsilon > 0$, então $(\epsilon A)^0 = \epsilon^{-1} A^0$.

Com a noção de polar de um subconjunto de E é possível introduzir topologias em E' que o tornam um EVT. Uma importante topologia é chamada de topologia fraca, na qual uma sequência de funcionais $\{x'_n\}$ contínuos converge para um funcional x' contínuo se, e somente se, $\langle x'_n, x \rangle$ converge para $\langle x', x \rangle$ em $\mathbb{C}$ para cada $x \in E$. Além disso, dizemos que uma sequência $\{x'_n\} \subset E'$ é fracamente limitada (ou simplesmente limitada quando não houver risco de confusão) se o conjunto $\{x'_n\}$ for limitado na topologia fraca - um subconjunto $A \subset E$ de um EVT é limitado se dada vizinhança V de 0, existe $c > 0$ tal que $V \subset cV$. Na topologia fraca, uma sequência $\{x'_n\}$ é limitada se, e somente se, dado $x \in E$, existe $c > 0$ tal que $|\langle x'_n, x \rangle| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.4 *Seja E um F-espaço. Uma sequência $\{u_n\} \subset E'$ é limitada se, e somente se, existe $A \subset E$ vizinhança de 0 tal que $\{u_n\} \subset A^0$.*

Este resultado segue do Teorema da Limitação Uniforme. Para a demonstração, veja [18, p. 341,p. 349].

Apêndice B

Um resultado sobre soluções para sistema homogêneo

Utilizaremos o Teorema 4.1 de [5] nas condições presentes neste trabalho. Ou seja, nas notações da Proposição 3.25, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ que contém 0, e os campos

$$M_k = \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_l}, k = 1, \ldots, n$$

satisfazem $M_k(Z_l) = \delta_{kl}$. Introduzimos então o operador

$$\Delta_M = \sum_{k=1}^{n} M_k^2.$$

No caso de uma estrutura do tipo tubo, temos $M_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ e Δ_M se torna o Laplaciano na variável x.

Assim, o Teorema 4.1 de [5] pode ser enunciado da seguinte forma (não precisamos nos restringir a vizinhança da origem):

Se $L_j h = 0$ em Ω, existem $\Omega' \subset \Omega$ aberto que contem 0 e $q \in \mathbb{Z}_+$ e função $f \in \mathcal{C}^1(\Omega')$ tal que

$$L_j f = 0, 1 \leq j \leq n \quad e \quad h = \Delta_x^q f.$$

Nessa versão que acabamos de enunciar, o mesmo resultado pode ser encontrado em [2, p.2].

Referências Bibliográficas

[1] C. H. Asano. Hipoelipticidade de uma classe de sistemas sobredeterminados. Mestrado, Universidade de São Paulo, 1991.

[2] M. S. Baouendi. Extendability of c. r. functions : a microlocal version of bochner's tube theorem. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–5, 1981.

[3] M. S. Baouendi, C. Goulaouic, and F. Treves. Uniqueness in certain first-order nonlinear complex cauchy problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 38(1):109–123, 1985.

[4] M. S. Baouendi and G. Métivier. Analytic vectors of hypoelliptic operators of principal type. *American Journal of Mathematics*, 104(2):287–319, 1982.

[5] M. S. Baouendi and F. Treves. A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields. *Ann. Math. (2)*, 113:387–421, 1981.

[6] S. Berhanu, P.D. Cordaro, and J. Hounie. *An Introduction to Involutive Structures*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2008.

[7] P. Bolley, J. Camus, and C. Mattera. Analyticité microlocale et itères d'opérateurs. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (dit "Goulaouic-Schwartz")*, pages 1–9, 1978-1979.

[8] Jairo E. Castellanos, Paulo D. Cordaro, and Gerson Petronilho. Gevrey vectors in involutive tube structures and gevrey regularity for the solutions of certain classes of semilinear systems. *Journal d'Analyse Mathématique*, 119(1):333–364, 2013.

[9] J. Dieudonne, P.K. Smith, and S. Eilenberg. *Treatise on Analysis*, volume v. 1. Elsevier Science, 1960.

[10] B. Hellfer and C. Mattera. Analyticité et itérés réduits d'un système de champs de vecteurs. *Comm. PDE*, 5(10):1065–1072, 1980.

[11] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1969.

[12] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators: Vol.: 1.: Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer-Verlag, 1983.

[13] J. Hounie. *Teoria elementar das distribuições*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1979.

[14] S. Łojasiewicz. *Ensembles semi-analytiques*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1965.

[15] H. M. Maire. Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations. *Comm. PDE*, 5(4):331–380, 1980.

[16] G. Métivier. Propriété des itérés et ellipticité. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–2, 1978.

[17] L. Rodino. *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces*. World Scientific, 1993.

[18] F. Treves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1967.

[19] E. T. Whittaker and G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1927.