UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS DE HARDY

Victor Hugo Falcão Francheto

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

São Carlos-SP
13 de Março de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS DE HARDY

Victor Hugo Falcão Francheto

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
13 de Março de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

F816oL

Francheto, Victor Hugo Falcão.
Operadores lineares em espaços de Hardy / Victor Hugo Falcão Francheto. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
106 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Análise. 2. Hardy, Espaços de. 3. Teorema da decomposição. 4. Operadores lineares. 5. Fórmula de Calderón. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Victor Hugo Falcão Francheto, realizada em 13/03/2015:

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
UFSCar

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
FFCLRP/USP

“*All Glory is Fleeting*”

Agradecimentos

Agradeço à Deus por sempre estar junto de mim nos momentos mais difíceis de minha vida e pelas bênçãos recebidas.

Ao professor Dr. Gustavo Hoepfner, pela sábia escolha do tema o qual desenvolvi na minha dissertação, pela paciência a qual teve no decorrer deste trabalho e por toda ajuda a mim dedicada.

Aos meus pais e aos meus irmãos Igor e Larissa que de modo indireto sempre me deram forças para seguir em frente sem fraquejar.

Aos meus amigos que mesmo longe sempre se fazem presentes.

Gostaria de agradecer também aos professores de matemática da UFSCar, que me ajudaram com a minha formação durante o mestrado. E por fim, mas não menos importante, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro. Obrigado a todos!

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um exemplo de um funcional linear definido em um subespaço denso do espaço de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$, o qual apesar de ser uniformemente limitado sobre todos os átomos tal funcional não se estende limitadamente sobre o espaço $H^1(\mathbb{R}^n)$. Este exemplo foi publicado por Bownik, M.B [2].

Por conseguinte, isto mostra que, em geral, não é suficiente verificar que um operador ou funcional limitado em átomos, para concluir que tal funcional ou operador se estende limitadamente ao espaço todo. A construção é baseada em Y. Meyer [1] que afirma que as semi-normas correspondente a decomposição atômica finita e a decomposição atômica infinita em $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leqslant 1$ não são equivalentes.

Por outro lado, daremos uma condição necessária e suficiente de quando um operador linear T definido em um subespaço denso do espaço de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \in (0, 1]$ pode ser estendido limitadamente. Tais condições foram publicadas por D. Yang e Y. Zhou [3].

Abstract

The present work aims to present an example of linear a functional defined on a dense subspace of the Hardy space $H^1(\mathbb{R}^n)$ to be built, with the intention of showing that despite the fact that this functional is uniformly bounded on all atoms, it does not extend to a bounded functional on the whole $H^1(\mathbb{R}^n)$. This example was published by Bownik, M.B [2].

Therefore, this shows that in general is not enough to verify that an operator or a functional is bounded on atoms to conclude that it extends boundedly to the whole space. The construction is based on the fact due to Y. Meyer [1] which states that quasi-norms corresponding to finite and infinite atomic decomposition in $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leqslant 1$ are not equivalent.

On the other hand it will be given a necessary and sufficient condition for when and operator T defined in a dense Hardy subspace $H^p(\mathbb{R}^n)$ for $0 < p \leqslant 1$ is bounded extended. Such conditions were published by D. Yang and Y. Zhou [3].

Sumário

Capítulo 1

Teoria Básica

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos os quais nos auxiliará no decorrer de nossos estudos. Alguns conceitos aqui apresentados serão tratados de forma simples devido ao foco deste trabalho.

Considerações Iniciais

Um elemento $\alpha \in \mathbb{N}^n$ é uma n-upla de inteiros não negativos, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Tal n-upla será chamada de *multi-índice* e denotaremos sua norma e seu fatorial respectivamente por

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \quad \text{e} \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

Além disso, se $x \in \mathbb{R}^n$ escrevemos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Devemos ressaltar que denotaremos $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ onde $i = \sqrt{-1}$ e analogamente $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ escrevemos

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Para α e β nas condições anteriores temos que a Regra de Leibniz é escrita como

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta g),$$

sendo que $\partial^\alpha = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

Observação 1.0.1 *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $B(a, r) \subset \Omega$. Se f é de classe $\mathcal{C}^{m+1}$, então a Fórmula de Taylor de f de ordem m em torno de a se escreve como*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + R_{m+1}(x-a), \quad |x-a| < r,$$

em que R_{m+1} é o resto de Lagrange dado por

$$R_{m+1}(x-a) = \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{\partial^\alpha f(\theta_x)}{\alpha!}(x-a)^\alpha,$$

para algum $\theta_x \in B(a, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-a| < x\}$.

Observação 1.0.2 *O conjunto das funções diferenciáveis k-vezes no aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{C}$ será denotado por $\mathcal{C}^k(\Omega)$. E o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em Ω será denotado por $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Devemos ressaltar que o conjunto das funções contínuas em Ω com valores em $\mathbb{C}$ será denotado por $\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}^0(\Omega)$.*

1.1 O Espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ e Algumas Propriedades

Nesta seção, e ao longo do texto, usaremos a integral de Lebesgue e Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ fixado.

Definição 1.1.1 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leqslant p < \infty$. Definamos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classe de equivalência de) funções mensuráveis em Ω tal que $\int_\Omega |f|^p\, dx < \infty$, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \int_\Omega |f|^p\, dx < \infty\}.$$

Quando $p = \infty$ o espaço $L^\infty(\Omega)$ é definido como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \sup_{\Omega} |f| < \infty\},$$

sendo o supremo tomado sobre Ω o supremo essencial.

Observação 1.1.1 *Devemos ressaltar que não faremos distinção entre as seguintes notações:*
(i) $\displaystyle\int_\Omega |f|^p\,dx$ *e* $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p\,dx$*;*
(ii) $\displaystyle\sup_\Omega |f|$ *e* $\displaystyle\sup_{x\in\Omega} |f(x)|$*.*

Quando se tornar necessário expressar de forma precisa em relação a qual variável estaremos integrando e respectivamente tomando o supremo usaremos a segunda notação de (i) e (ii).

A seguir apresentaremos alguns fatos conhecidos da Análise Matemática. As demonstrações serão omitidas em nosso texto.

Observação 1.1.2 *Se $1 \leqslant p \leqslant \infty$ diremos que q é expoente de p quando*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Se $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e q é expoente conjugado de p, então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f \cdot g|\,dx \leqslant \Big(\int_\Omega |f|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int_\Omega |g|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Vide a referência [11], Teorema 3.5. ■

Nas mesmas condições do Teorema 1.1.1 os espaços L^p e L^∞ são espaços vetoriais normados e suas respectivas normas são dadas por

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|,$$

sendo que o supremo é o supremo essencial.

Devemos ressaltar que a norma $\|\cdot\|_p$ faz com que L^p seja um espaço de Banach, tal fato pode ser consultado na referência [11], Teorema 3.11.

Observação 1.1.3 *$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j| < \infty\}$ é um espaço de Banach munido pela norma $\|\cdot\|_\infty$. Vide referência [11].*

Definição 1.1.2 (Funções Localmente Integráveis) *Sejam $1 \leqslant p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Diremos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$ se esta for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$ tem-se*

$$\int_K |f|^p \, dx < \infty.$$

O conjunto das funções localmente integráveis será denotado por $L^p_{loc}(\Omega)$.

Vejamos que $L^\infty(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ para qualquer que seja $1 \leqslant p < \infty$. De fato, se $f \in L^\infty(\Omega)$, então

$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f| < \infty.$$

Mas, para todo compacto $K \subset \Omega$ temos que

$$\int_K |f|^p \, dx \leqslant \int_K \sup_\Omega |f|^p \, dx = \|f\|^p_\infty \cdot |K| < \infty. \tag{1.1}$$

Portanto, pela desigualdade (1.1) segue que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, demonstrando assim que $L^\infty(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

Proposição 1.1.1 *Seja $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$. Então $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $1 \leqslant q < p < \infty$. Seja $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, então dado K compacto temos que

$$\int_K |f|^p \, dx < \infty.$$

Assim, se considerarmos os expoentes conjugados $\frac{p}{q}$ e $\frac{p}{p-q}$ temos pelo Teorema 1.1.1 que

$$\int_K |f|^q \, dx \leqslant \left(\int_K |f|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \cdot |K|^{\frac{p-q}{p}} < \infty.$$

Agora, se $p = \infty$ temos que $q = 1$, assim $\sup_K |f| < \infty$. Disto segue que

$$\int_K |f|^q \, dx \leqslant \sup_K |f|^q \cdot |K| < \infty.$$

Portanto, para $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$ implica que $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega)$. ∎

Teorema 1.1.2 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções mensuráveis definidas no aberto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *com valores em* $\mathbb{C}$ *tais que*

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$$

exista para todo $x \in \Omega$. *Se existe* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_j| \leqslant g$, *para todo* $j = 1, 2, \ldots,$ *e* $x \in \Omega$. *Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \, dx = \int_\Omega f \, dx.$$

Demonstração. Vide referência [11], Teorema 1.34. ∎

Definição 1.1.3 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Uma função* $\chi_\Omega : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ *é dita função característica de* Ω *se* $\chi_\Omega(x) = 1$ *se* $x \in \Omega$ *e* $\chi_\Omega(x) = 0$ *se* $x \notin \Omega$.

Definição 1.1.4 *Uma função simples em* X *é uma combinação linear finita de funções características, isto é,* $\phi : X \to \mathbb{C}$ *é simples se* $\phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$ *com* $\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Proposição 1.1.2 *Seja* $(X, \mathcal{M}, \sigma)$ *um espaço mensurável.*

(i) Se $f : X \to [0, \infty]$ *é mensurável, então existe uma sequência* $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *de funções simples tais que* $0 \leqslant \phi_1 \leqslant \phi_2 \leqslant \ldots \leqslant f$, *ou seja,* $\phi_j \to f$ *pontualmente e* $\phi_j \to f$ *uniformemente sobre conjuntos nos quais* f *é limitada.*

(ii) Se $f : X \to \mathbb{C}$ *é mensurável, então existe uma sequência* $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *nas mesmas condições tal que* $0 \leqslant |\phi_1| \leqslant |\phi_2| \leqslant \ldots \leqslant |f|$.

Demonstração. Vide referência [17], Proposição 2.11. ∎

A seguir enunciaremos o Teorema de Fubini-Tonelli de modo mais geral em relação aos apresentados no contexto de Análise Real. Antes de apresentarmos tal teorema devemos introduzir algumas notações.

Definição 1.1.5 *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *sejam espaços de medida. Se* $\Omega \subset X \times Y$ *então para cada* $x \in X$ *definamos a* x*-seção por*

$$\Omega_x = \{y \in Y : (x, y) \in \Omega\}.$$

Analogamente, para cada $y \in Y$ *definamos a* y*-seção por*

$$\Omega^y = \{x \in X : (x, y) \in \Omega\}.$$

Ainda, se f *for uma função definida em* $X \times Y$*, definamos a* x*-seção* f_x *por* $f_x(y) = f(x, y)$ *e, para* $y \in Y$ *definamos a* y*-seção* f^y *por* $f^y(x) = f(x, y)$.

Observação 1.1.4 *Denotaremos o espaço de todas as funções definidas em* X *a valores reais positivos por* $L^+(X)$.

Teorema 1.1.3 (Fubini-Tonelli) *Suponha que* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *sejam espaços de medida* σ*-finitos.*
(i) Se $f \in L^+(X \times Y)$ *então as funções*

$$g(x) = \int f_x(y)\, d\nu(y) \quad e \quad h(y) = \int f^y(x)\, d\mu(y)$$

estão em $L^+(X)$ *e* $L^+(Y)$ *respectivamente e vale*

$$\begin{aligned} \int f(x, y)\, d(\mu \times \nu) &= \int \Big[\int f(x, y)\, d\mu(x) \Big]\, d\nu(y) \\ &= \int \Big[\int f(x, y)\, d\nu(y) \Big]\, d\mu(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

(ii) Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$ *então as funções* f_x *e* f_y *são integráveis q.t.p* x *e q.t.p* y *respectivamente. E ainda as funções* g *e* h *tão em* $L^1(\mu)$ *e* $L^1(\nu)$ *e vale* (1.2).

Demonstração. Vide referência [17], Teorema 2.37. ∎

Teorema 1.1.4 *Suponha que* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|\, dx$ *seja finita. Então,* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *converge q.t.p para uma função em* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{\infty} f_j\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j\, dx$.

Demonstração. Vide referência [17], Teorema 2.25. ∎

1.2 Funções Teste

Antes de iniciarmos o conceito central desta seção apresentaremos o conceito sobre *suporte* de funções.

Definição 1.2.1 (Suporte) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definamos o suporte da função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ como sendo o conjunto*

$$supp\ f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Sejam f e g funções definidas em Ω e contínuas com f diferenciável. Então, pela Definição 1.2.1 segue de imediato as seguintes propriedades:

(i) supp $f' \subseteq$ supp f;

(ii) supp $fg =$ supp $f \cap$ supp g;

(iii) supp $f + g \subseteq$ supp $f \cup$ supp g.

Diremos que f está suportada no aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se a Definição 1.2.1 for satisfeita. Além disso, se o suporte de f for compacto diremos que f possui suporte compacto.

Definição 1.2.2 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Denotamos por $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ o conjunto de todas as funções testes em Ω, isto é, o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω. Em símbolos*

$$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : supp\ f \Subset \Omega \ \ e \ \ f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\}.$$

Vejamos que dado qualquer aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o conjunto $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \neq \emptyset$. De fato, definamos

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}}, & \text{se} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Não é difícil de verificar que supp $f = \overline{B(0,1)}$ e que f é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. De modo mais geral, nem sempre teremos $0 \in \Omega$, porém basta tomarmos $x_0 \in \Omega$ arbitrário, e sendo Ω aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset \Omega$ e definamos

$$g(x) = \begin{cases} e^{(|x-x_0|^2-\delta^2)^{-1}}, & \text{se} \quad x \in B(x_0,\delta), \\ 0, & \text{se} \quad x \notin B(x_0,\delta). \end{cases}$$

Assim, temos que $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Segue das conclusões obtidas que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \neq \emptyset$ para qualquer aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Observemos que, dado $x_0 \in \Omega$ arbitrário e $0 < r < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$ caso $\partial\Omega \neq \emptyset$ e $0 < r < 1$ se $\partial\Omega = \emptyset$ definamos $g_0(x) = g\Big(\frac{x-x_0}{r}\Big)$ e não é dificíl verificar que $g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Multiplicando g_0 por e^{-1} temos que:

(i) $\widetilde{g}_0(x) = e^{-1}g_0(x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $\widetilde{g}_0(x_0) = 1$.

A construção apresentada acima é mais geral, e tal generalização é apresentada nos resultados a seguir.

Teorema 1.2.1 *Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$;

(ii) *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\phi \geqslant 0$ e supp $\phi \subseteq \overline{B(0,1)}$.*

Dado $\varepsilon > 0$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definamos

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\phi(y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\,dy. \tag{1.3}$$

Então, a família $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ cumpre as seguintes condições:

(i) $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) *Se $f(x) = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado $\mathcal{A}$, supp $f_\varepsilon \subseteq \mathcal{A} + \overline{B(0,\varepsilon)}$;*

(iii) *Se f é contínua e supp ϕ é compacto, então quando $\varepsilon \to 0^+$ tem-se $f_\varepsilon \to f$ uniformemente.*

Demonstração. Vide referência [13], Teorema I.2.1. ∎

Corolário 1.2.1 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f_ε é definida como em (1.3) para $\varepsilon > 0$. Então, $\|f_\varepsilon\|_1 \leqslant \|f\|_1$. Além disso $\|f_\varepsilon - f\|_1 \to 0$ quando $\varepsilon \to 0^+$.*

Demonstração. Vide referência [13], Corolário I.2.1. ∎

Corolário 1.2.2 *Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Então existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ e $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de K.*

Demonstração. Vide referência [13], Teorema I.2.2. ∎

Definição 1.2.3 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Uma sequência $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ de funções em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ converge para zero em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ se:*

(i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que supp $\phi_j \subseteq K$ para todo $j = 1, 2, \ldots$;

(ii) Para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente para zero quando $j \to \infty$.

1.3 As Distribuições

Os conceitos de distribuições que estaremos tratando nesta seção será de caráter introdutório, pois um estudo aprofundado sobre este tópico nos submete a uma abordagem diferente a qual estamos interessados em apresentar neste trabalho.

Definição 1.3.1 (Distribuição) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Um funcional linear contínuo $u : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é uma distribuição em Ω se este satisfaz as seguintes condições:*

(i) $u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2)$, para toda $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;

(ii) Se $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $u(\phi_j) \to u(0)$ quando $j \to \infty$.

Denotaremos o espaço das distribuições em Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $u(f) = \langle u, f\rangle$.

As operações de soma de distribuições e produto de uma distribuição por um escalar são definidas de maneira óbvia. Dadas $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ definamos:

(i) $\langle u_1 + u_2, \phi\rangle = \langle u_1, \phi\rangle + \langle u_2, \phi\rangle$;

(ii) $\langle \lambda u_1, \phi\rangle = \lambda\langle u_1, \phi\rangle$.

Exemplo 1.3.1 *Sejam* $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ *e* $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$. *Então* δ *é uma distribuição, chamada delta de Dirac.*

De fato, $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $\phi_j \to 0$ *uniformemente quando* $j \to \infty$ *e seja* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Mostremos inicialmente a linearidade de* δ. *De fato,*

$$\begin{aligned}\langle \delta, \phi_1 + \lambda\phi_2 \rangle &= (\phi_1 + \lambda\phi_2)(0) \\ &= \phi_1(0) + \lambda\phi_2(0) = \langle \delta, \phi_1 \rangle + \lambda\langle \delta, \phi_2 \rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, é evidente que $\langle \delta, \phi_j \rangle = \phi_j(0) \to 0 = \langle \delta, 0 \rangle$ *quando* $j \to \infty$. *Portanto,* δ *é uma distribuição.*

Definição 1.3.2 (Operador Contínuo) *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *uma sequência e* $L : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *um operador linear. Dizemos que* L *é contínuo se* $L\phi_j \to 0$ *em* $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *sempre que* $\phi_j \to 0$ *em* $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Definição 1.3.3 (Transposto Formal) *Sejam* L *e* L^t *operadores lineares contínuos como os da Definição 1.3.2. Dizemos que* L *é o transposto formal de* L^t *(e vice-versa) quando*

$$\int_\Omega (L\phi_1)\phi_2 \, dx = \int_\Omega \phi_1 (L^t\phi_2) \, dx, \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{1.4}$$

Observemos que na Definição 1.3.3 temos $\phi_1, L\phi_1, \phi_2, L^t\phi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, então a expressão (1.4) está bem definida.

Exemplo 1.3.2 *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *e definamos a aplicação* $L_f : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *por* $(L_f\phi)(x) = f(x)\phi(x)$. *Então o transposto formal de* L_f *é ele mesmo e* L_f *é um operador linear contínuo.*

Sejam $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. *Então*

$$\begin{aligned}\int_\Omega (L_f\phi_1)(x)\phi_2(x) \, dx &= \int_\Omega f(x)\phi_2(x)\phi_1(x) \, dx \\ &= \int_\Omega \phi_1(x) L_f(\phi_2)(x) \, dx.\end{aligned}$$

Logo, $L_f = L^t$. Por outro lado, dados $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned} L_f(\phi_1 + \lambda\phi_2)(x) &= f(x)(\phi_1(x) + \lambda\phi_2(x)) \\ &= f(x)\phi_1(x) + \lambda f(x)\phi_2(x) = L_f(\phi_1)(x) + \lambda L_f(\phi_2)(x). \end{aligned}$$

Agora, veja que se $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é uma sequência tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ então pela definição de L temos que $L_f\phi_j = f\phi_j \to 0$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Definição 1.3.4 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. A multiplicação de f pela distribuição u é definida por $\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle$, para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.*

Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos e $\psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ um difeomorfismo, isto é, uma bijeção de Ω_1 sobre Ω_2 tal que ψ e ψ^{-1} são de classe $\mathcal{C}^\infty$. Definamos $L\phi = \phi \circ \psi$, para qualquer que seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_2)$. Não é difícil ver que L é um operador linear contínuo de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_2)$ para $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_1)$, e além disso supp $(\phi \circ \psi) = \psi^{-1}(\text{supp } \phi)$. De fato,

$$\begin{aligned} x \notin \text{supp } (\phi \circ \psi) &\iff (\phi \circ \psi) \equiv 0 \iff \phi(\psi) \equiv 0 \text{ numa vizinhança de } x \\ &\iff \psi(x) \notin \text{supp } \phi \iff x \notin \psi^{-1}(\text{supp } \phi). \end{aligned}$$

Usando o fato de que supp $(\phi \circ \psi) = \psi^{-1}(\text{supp } \phi)$ segue que $\phi \circ \psi$ possui suporte compacto em Ω_1 e, além disso, temos $L\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_1)$ pela Regra da Cadeia.

Dada g uma função teste em Ω_2, pelo Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos

$$\int_{\Omega_2} \phi(\psi(y))g(y)\, dy = \int_{\Omega_1} \phi(x)g(\psi^{-1}(x))|\Delta\psi^{-1}(x)|\, dx,$$

no qual $|\Delta\psi^{-1}(x)|$ denota o valor absoluto do determinante da matriz jacobinana de ψ^{-1}. Portanto, somos levados a definir

$$L^t g = |\Delta\psi^{-1}| g \circ \psi^{-1}.$$

Devido as conclusões obtidas, temos a seguinte definição.

Definição 1.3.5 (Mudança de Variável) *Sejam* $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *abertos, e consideremos* $\psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *um difeomorfismo e* $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$*. Definamos*

$$\langle u \circ \psi, g \rangle = \langle u, g \circ \psi^{-1} |\Delta \psi^{-1}| \rangle. \tag{1.5}$$

Definição 1.3.6 (Translação) *Sejam* $a \in \mathbb{R}^n$ *e* $\sigma_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação definida por* $\sigma_a(x) = x - a$*. A translação de* $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é definida como sendo a função* $\phi_a = \phi \circ \sigma_a$*. Agora, se* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *definamos a translação de* u *por*

$$\langle u_a, \phi \rangle = \langle u \circ \sigma_a, \phi \rangle. \tag{1.6}$$

Observemos que as expressões (1.5) e (1.6) apresentadas nas Definições 1.3.5 e 1.3.6 respectivamente nos permite escrever

$$\begin{aligned} \langle u_a, \phi \rangle &= \langle u \circ \sigma_a, \phi \rangle = \langle u, \phi \circ \sigma_a^{-1} \rangle \\ &= \langle u, \phi \circ \sigma_{-a} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, a translação da distribuição u é dada por $\langle u_a, \phi \rangle = \langle u, \phi \circ \sigma_{-a} \rangle$.

Definição 1.3.7 (Reflexão) *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto simétrico em relação a origem e* $\psi : \Omega \to \Omega$ *uma aplicação definida por* $\psi(x) = -x$*. A reflexão de* $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *é definida como sendo a função* $\check{\phi}(x) = (\phi \circ \psi)(x) = \phi(-x)$*. Agora, se* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *definamos sua reflexão por*

$$\begin{aligned} \langle \check{u}, \phi \rangle &= \langle u \circ \psi, \phi \rangle = \langle u, \phi \circ \psi^{-1} \rangle \\ &= \langle u, \phi \circ \psi \rangle = \langle u, \check{\phi} \rangle. \end{aligned}$$

1.4 Suporte de Distribuições

Dadas duas funções contínuas f_1 e f_2 definidas em algum conjunto Ω dizemos que f_1 é igual a f_2 no ponto $x_0 \in \Omega$ se $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Mas, observemos que se f_1 e f_2 fossem distribuições não poderíamos compará-las já que o valor de uma distribuição num ponto não está definida. Esta situação é contornada pela definição a seguir.

Definição 1.4.1 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que u_1 e u_2 são iguais se para toda fução teste ϕ definida em Ω estiver satisfeito $\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle$.*

Antes de apresentarmos um resultado o qual nos fornece uma condição necessária para ocorrer a igualdade de duas distribuições introduziremos o conceito de *partição da unidade* que nos auxiliará na demonstração de tal resultado.

Definição 1.4.2 (Partição da Unidade) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma sequência $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ é chamada uma partição da unidade de Ω se para $j = 1, 2, \ldots$ estiver satisfeita as seguintes condições:*

(i) Se todo $x \in \Omega$ admitir uma vizinhança V_x a qual intercepta apenas um número finito de supp ϕ_j;

(ii) Para todo $x \in \Omega$ tem-se $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \equiv 1$;

(iii) Para todo $x \in \Omega$ e $j = 1, 2, \ldots$ tem-se $0 \leqslant \phi_j \leqslant 1$.

Segue da Definição 1.4.2 que para $x_0 \in \Omega$ fixo e V_{x_0} a vizinhança garantida pela condição (i), temos que a soma $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(y)$ possui um número finito de parcelas não nulas. Disto segue, que localmente a série é uma soma finita e, assim a série é convergente e difirenciável termo a termo.

Definição 1.4.3 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma cobertura aberta de Ω. Diremos que uma partição da unidade $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ está subordinada a $\mathcal{A}$, se para cada $\alpha \in \Gamma$ existe algum j tal que supp $\phi_j \subseteq \mathcal{A}_\alpha$*

Teorema 1.4.1 *Toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ admite uma partição da unidade subordinada à $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Vide referência [15], Teorema 16.1. ∎

Teorema 1.4.2 *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um compacto e* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_l$ *abertos tais que* $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{A}_j$. *Então existem funções* $\phi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{A}_j)$ *para* $j = 1, 2, \ldots, l$ *as quais satisfazem:*

(i) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) \leqslant 1$;

(ii) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) \equiv 1$, *para* x *numa vizinhança de* K;

(iii) Para todo $x \in \mathcal{A}_j$ *tem-se* $0 \leqslant \phi_j \leqslant 1$.

Demonstração. Vide referência [13], Teorema III.1.2. ∎

Teorema 1.4.3 *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Se para cada* $x \in \Omega$ *existir uma vizinhança* V_x *em que* $u_1 = u_2$ *para todo* $y \in V_x$, *então* $u_1 = u_2$ *para todo* $x \in \Omega$.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Existem abertos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_l$ tais que u_1 e u_2 se coincidem e supp $\phi = K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{A}_j$.

Sejam $\phi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{A}_j)$ como no Teorema 1.4.2. Então, podemos escrever

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{l} \phi_j(x)\phi(x).$$

Claramente, temos $\phi_j\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{A}_j)$ pois supp $(\phi_j\phi) \subset$ supp $\phi_j \subset \mathcal{A}_j$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle u_1, \phi\rangle &= \langle u_1, \sum_{j=1}^{l} \phi_j(x)\phi(x)\rangle = \sum_{j=1}^{l} \langle u_1, \phi_j(x)\phi(x)\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{l} \langle u_2, \phi_j(x)\phi(x)\rangle = \langle u_2, \phi\rangle. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 1.4.4 *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Definamos o suporte de* u *como sendo a interseção de todos os fechados de* Ω *fora dos quais* u *se anula. Denotaremos o suporte de* u *por supp* u.

Observemos que, se $F \subset \Omega$ é um fechado, então $\Omega \backslash F$ é um aberto. Assim, dizer que a distribuição u se anula em $\Omega \backslash F$ é equivalente a dizermos que as distribuições $u_1 = u$ e $u_2 \equiv 0$ coincidem em $\Omega \backslash F$. Daí, o Teorema 1.4.3 implica que a união de abertos onde u se anula é um aberto onde u se anula. Disto segue que, existe um maior aberto o qual u se anula e este aberto é precisamente $\Omega \backslash \text{supp } u$. Em particular, temos supp u um conjunto fechado de Ω.

Definição 1.4.5 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definamos o suporte singular de u como sendo a interseção de todos os fechados de Ω com exceção dos fechado o qual u é $\mathcal{C}^\infty$. Denotaremos o suporte singular de u por ssupp u. Assim, a distribuição u é dita ser $\mathcal{C}^\infty$ num aberto $U \subseteq \Omega$ se, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que*

$$\langle u, f \rangle = \int_U f(x)\phi(x)\, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$.

Observação 1.4.1 *Denotaremos por $\mathcal{E}'(\Omega)$ com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.*

Teorema 1.4.4 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ o qual cumpre as seguintes condições:*

(i) $\langle u, f \rangle = \langle \tilde{u}, f \rangle$, para toda $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $\langle \tilde{u}, f \rangle = 0$ se $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e supp $f \cap$ supp $u = \emptyset$.

Demonstração. Seja ψ dada pelo Corolário 1.2.2 a qual $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \equiv 1$ numa vizinhança do compacto supp u. Se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então podemos reescrevê-la como

$$\phi = \phi\psi + (1-\psi)\phi \doteq \phi_1 + \phi_2. \tag{1.7}$$

sendo que $\phi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e supp $\phi_2 \cap$ supp $u = \emptyset$. De fato, se

$$\begin{aligned} x \in \text{supp } \phi_2 &\iff x \in \text{supp } ((1-\psi)\phi) \iff x \in \text{supp } (1-\psi) \cap \text{supp } \phi \\ &\implies x \in \text{supp } (1-\psi) \implies x \in \Omega \setminus \{x \in \Omega : \psi(x) = 1\} \implies x \notin \text{supp } u, \end{aligned}$$

pois $\psi(x) = 1$ se $x \in \text{supp}\ u$.

Para demonstrarmos a existência pedida pelo teorema, consideremos $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e definamos $\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle$, onde $\phi = \phi_1 + \phi_2$ é qualquer decomposição de ϕ com $\phi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}\ \phi_2 \cap \text{supp}\ u = \emptyset$. Claramente tal decomposição existe devido a (1.7). Agora, se $\phi = \phi_1' + \phi_2'$ é outra decomposição de ϕ tal que $\phi_1' \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}\ \phi_2' \cap \text{supp}\ u = \emptyset$, segue que $\phi_1 - \phi_1' = \phi_2' - \phi_2$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{supp}\ (\phi_1 - \phi_1') \cap \text{supp}\ u &= \text{supp}\ (\phi_2' - \phi_2) \cap \text{supp}\ u \\ &\subset (\text{supp}\ \phi_2' \cap \text{supp}\ \phi_2) \cap \text{supp}\ u = \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\phi_1 - \phi_1' \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ está suportada num aberto onde u se anula, ou seja, $u(\phi_1 - \phi_1') = 0$ e, portanto $\langle u, \phi_1 \rangle = \langle u, \phi_1' \rangle$. Consequentemente $\tilde{u}$ está bem definida.

Seja $\zeta_j = \zeta_j \psi + (1 - \psi)\zeta_j$ para $j = 1, 2$. Note que

$$\zeta_1 + \lambda \zeta_2 = (\zeta_1 + \zeta_2 \lambda)\psi + (1 - \psi)(\zeta_1 + \lambda \zeta_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}, \zeta_1 + \lambda \zeta_2 \rangle &= \langle u, (\zeta_1 + \lambda \zeta_2)\psi \rangle = \langle u, \zeta_1 \psi \rangle + \langle u, \zeta_2 \psi \rangle \\ &= \langle u, \zeta_1 \rangle + \lambda \langle u, \zeta_2 \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{u}$ é um funcional linear. Vejamos agora que $\tilde{u}$ cumpre as condições impostas pelo teorema. De fato, se $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ então $\langle \tilde{u}, \zeta \rangle = \langle \tilde{u}, \zeta + 0 \rangle = \langle u, \zeta \rangle$. Por outro lado, se $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}\ \zeta \cap \text{supp}\ u = \emptyset$ então $\langle \tilde{u}, \zeta \rangle = \langle \tilde{u}, 0 + \zeta \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$.

Para demonstrarmos a unicidade, suponhamos que existem $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ funcionais lineares satisfazendo as condições impostas pelo teorema. Assim, se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos pelo início da demonstração que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_1, \phi \rangle &= \langle \tilde{u}_1, \phi_1 \rangle + \langle \tilde{u}_1, \phi_2 \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle + 0 \\ &= \langle \tilde{u}_2, \phi_1 \rangle + \langle \tilde{u}_2, \phi_2 \rangle = \langle \tilde{u}_2, \phi \rangle. \end{aligned}$$

■

Definição 1.4.6 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. A sequência $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge para zero se para todo compacto K e todo inteiro positivo m as derivadas das funções f_j convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.*

Observemos que, se uma sequência $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ converge para zero em $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ então $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge para zero em $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ sendo que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto. De fato, como $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, então existe um compacto $K \subset \Omega$ o qual cumpre as seguintes condições:

(i) supp $\phi_j \subset K$;

(ii) $D^{\alpha}\phi_j \to 0$ uniformemente em K quando $j \to \infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Seja $K' \subset \Omega$ compacto e $\beta \in \mathbb{N}^n$ arbitrário. Como

$$\sup_{K'} |D^{\beta}\phi_j| \leqslant \sup_{K} |D^{\beta}\phi_j| \longrightarrow 0$$

quando $j \to \infty$ temos que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. Em geral a recíproca deste fato é falsa, pois se considerarmos $\Omega = \mathbb{R}^n$ e definirmos $\phi_j(x) = e^{-j}\phi_0(j^{-1}x)$, sendo que supp $\phi_0 \subseteq [-1, 1]$ e $\phi_0(x) = 1$ se $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ temos que

$$|\phi_j^{(m)}(x)| = |2^{-n} j^{-m} \phi_0^{(m)}(j^{-1}m)| \leqslant j^{-m} C 2^{-j} \longrightarrow 0$$

quando $j \to \infty$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Por outro lado, supp $\phi_j(x) \supseteq \Big[-\dfrac{j}{2}, \dfrac{j}{2}\Big]$ pois,

$$\phi_0\Big(\frac{x}{j}\Big) = 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{j} \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{j}{2} \leqslant x \leqslant \frac{j}{2}$$

e, portanto supp ϕ_j não estão contidos num compacto fixo.

Definição 1.4.7 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Diremos que uma sequência $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle$ converge a $\langle u, \phi \rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$.*

E neste caso, escreveremos $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.5 Convoluções

Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções contínuas a qual uma delas possui suporte compacto, a convolução de f e g se define como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,dy. \tag{1.8}$$

Em um âmbito mais geral, temos a seguinte definição.

Definição 1.5.1 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente $\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) e $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$) denotaremos por $*$ a função definida por*

$$u * \phi(a) = \langle u, \check{\phi}_a \rangle,$$

onde $\check{\phi}_a(x) = \phi(a-x)$.

Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $r \in \mathbb{R}$ e consideremos a translação u_r de u, isto é,

$$\langle u_r, \phi \rangle = \langle u, \phi_r \rangle,$$

sendo que $\phi_r(x) = \phi(r+x)$.

Podemos assim, formar o quociente $v_r = (u_r - u)r^{-1}$ o qual é chamado de *quociente de Newton*. E iremos mostrar que $v_r \to \dfrac{d}{dx}u = u'$ quando $r \to 0$. De fato, seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ então

$$\langle v_r, \phi \rangle = \frac{1}{r}(\langle u, \phi_r \rangle - \langle u, \phi \rangle) = \Big\langle u, \frac{\phi_r - \phi}{r} \Big\rangle.$$

Seja $\{r_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $r_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Então, $\phi_j = (\phi_{r_j} - \phi)r_j^{-1}$ converge a $-\phi'$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ quando $j \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{r \to 0} \langle v_r, \phi \rangle = \langle u, -\phi' \rangle - \langle u', \phi \rangle.$$

Pela demonstração acima, temos que a derivada de distribuições é ainda o limite do quociente de Newton.

Teorema 1.5.1 *Sejam* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(i) *A função* $u * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e suas derivadas são dadas por*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * D^\alpha \phi; \tag{1.9}$$

(ii) $\sup(u * \phi) \subseteq$ *supp* $u +$ *supp* ϕ.

Demonstração. (i). Seja $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência tal que $a_j \to a$ quando $j \to \infty$. É claro que $\phi(a_j - x) \to \phi(a - x)$, pois $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} u * \phi(a) &= \langle u, \check{\phi}_a \rangle = \langle u, \phi(a - x) \rangle = \langle u, \lim_{j\to\infty} \phi(a_j - x) \rangle \\ &= \lim_{j\to\infty} \langle u, \phi(a_j - x) \rangle = \lim_{j\to\infty} u * \phi(a_j), \end{aligned}$$

ou seja, a convolução $u * \phi$ é contínua. Agora mostremos (1.9). Inicialmente consideremos $\alpha = (1, 0, 0, \dots, 0)$ e seja $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Segue do quociente de Newton que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(u * \phi(a + re_1) - u * \phi(a)) &= \frac{1}{r}\Big[\langle u, \phi(a + re_1 - x) \rangle - \langle u, \phi(a - x) \rangle\Big] \\ &= \Big\langle \frac{u}{r}, \phi(a + re_1 - x) - \phi(a - x) \Big\rangle. \end{aligned}$$

Mas devido a nossa conversação no início desta seção $r^{-1}(u_{re_1} - u) \to \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$. Em particular, $\dfrac{\partial}{\partial x_1} u * \phi(a) = \Big\langle \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \phi(a - x) \Big\rangle$. Como o membro do lado direito é uma função contínua na variável a segue que $u * \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Devido ao fato dos cálculos feitos valerem de modo análago para $e_2, e_3, \dots, e_n$ temos que $u * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} u * \phi &= \Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi(a - x) \Big\rangle = -\Big\langle u, \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(a - x) \Big\rangle \\ &= \Big\langle u, \frac{\partial}{\partial a_j} \phi(a - x) \Big\rangle = u * \frac{\partial}{\partial a_j} \phi \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.
(ii). Suponhamos que $x_0 \notin$ supp $u +$ supp ϕ, então supp $u \cap$ supp $\check{\phi}_a = \emptyset$ e

$\langle u, \check{\phi}_a \rangle = 0$. Como $u * \phi$ se anula fora de supp $u +$ supp ϕ temos a inclusão $\sup(u * \phi) \subseteq$ supp $u +$ supp f. ■

De modo análago ao Teorema 1.5.1, temos que $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ também cumprem as condições do teorema.

Teorema 1.5.2 *Se $\phi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, então $(u*\phi)*\psi = u*(\phi*\psi)$.*

Demonstração. Vide referência [14], Teorema 4.12. ■

Teorema 1.5.3 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dx = 1$ e $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(x\varepsilon^{-1})$. Então, $u * \phi_\varepsilon \to u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0^+$.*

Demonstração. Denotando por $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$ podemos escrever $\langle u, \psi \rangle = u * \check{\psi}(0)$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle u * \phi_\varepsilon, \psi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (u * \phi_\varepsilon) * \check{\psi}(0) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} u * (\phi_\varepsilon * \check{\psi}(0)) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle u, (\phi_\varepsilon * \check{\psi})\check{} \rangle \\ &= \langle u, \psi \rangle. \end{aligned} \tag{1.10}$$

A igualdade em (1.10) segue do fato que $\phi_\varepsilon * \check{\psi} \to \check{\psi}$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, decorrência do Teorema 1.2.1. ■

Corolário 1.5.1 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Então $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado consiste em mostrar que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Seja ϕ_ε como no Teorema 1.5.3 e $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pelo Teorema 1.5.1 temos supp $(u * \phi_\varepsilon) \subseteq$ supp $u +$ supp ϕ_ε para ε suficientemente pequeno. Assim, $u * \phi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e quando $\varepsilon \to 0^+$ temos $u * \phi_\varepsilon \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

No Corolário 1.5.1 vimos que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}'(\Omega)$, mas isto é equivalente ao que tal resultado propõe, pois seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e definamos $K_j = \{x \in \Omega : |x| \leqslant j \text{ e } \mathrm{dist}(x, \Omega^c) \leqslant j^{-1}\}$. Seja $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j(x) = 1$ numa vizinhança de K_j. Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a sequência $u_j = \phi_j u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Portanto, toda distribuição é limite de distribuições com suporte compacto.

Suponhamos que $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $u_j(\phi)$ seja convergente para cada $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Se denotarmos $u(\phi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\phi)$ é claro que u é funcional linear e consequentemente u é contínuo em $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Logo, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Observação 1.5.1 *No próximo teorema denotaremos T_h o operador translação $T_h(u)(x) = u(x-h)$.*

Teorema 1.5.4 *Seja $U : \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ um operador contínuo o qual comuta com todas as translações T_h, para $h \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma única $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\phi = u * \phi$, sendo que $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Devido a hipótese de que U ser um operador contínuo temos $\phi \mapsto (U\check{\phi})(0)$ um funcional linear contínuo.

Definamos $\langle u, \phi\rangle = (U\check{\phi})(0)$ e devido a hipótese da comutatividade temos $UT_h = T_hU$ e, portanto

$$\begin{aligned}(U\phi)(h) = T_{-h}U\phi(0) = U(T_{-h}\phi)(0) &= \langle u, (T_{-h}\phi)\check{}\rangle \\ &= \langle u, \phi(h-x)\rangle = u * \phi(h).\end{aligned}$$

A unicidade é evidente. ∎

Teorema 1.5.5 (Desigualdade de Young) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, então $f*g$ existe e $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ q.t.p x e $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p$*

Demonstração. Vide referência [17], página 240. ∎

1.6 A Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e Algumas Aplicações

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de f se define por

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

Eventualmente para não carregarmos a notação denotaremos $\mathcal{F}[f](\xi)$ por $\hat{f}(\xi)$. Devemos ressaltar que $i = \sqrt{-1}$ e $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$.

Definição 1.6.1 *Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Em símbolos temos que*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \big\{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < C_{\alpha,\beta}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\big\},$$

sendo $C_{\alpha,\beta}$ uma constante positiva dependendo de α e β.

Definição 1.6.2 *Diremos que uma sequência $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tem-se $x^\alpha D^\beta \phi(x) \to 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^n$.*

Em outras palavras a Definição 1.6.2 nos diz que, tanto as funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quanto suas respectivas derivadas decrescem mais rapidamente que qualquer potência de x.

Teorema 1.6.1 *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz as seguintes condições:*
(i) $\mathcal{F}[D^\alpha \phi](\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}[\phi](\xi)$, para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
(ii) $\mathcal{F}[x^\alpha \phi(x)](\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}[\phi](\xi)$, para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
(iii) $\mathcal{F}[\phi * \psi] = \mathcal{F}[\phi]\mathcal{F}[\psi]$, para todas $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[\phi]\psi\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\mathcal{F}[\psi]\, d\xi$, para todas $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. (i) Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então se derivarmos a expressão (1.11) sob o sinal de integração, obtemos

$$D^\alpha \mathcal{F}[\phi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} x^\alpha \phi(x)\, dx. \tag{1.12}$$

Agora, integrando (1.12) extamatemente $|\alpha|$-vezes obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathcal{F}[\phi](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} x^\alpha \phi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha(e^{-ix\xi})\phi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha e^{-ix\xi} \phi(x)\, dx = \xi^\alpha \mathcal{F}[\phi](\xi). \end{aligned}$$

O termos não integrando da integração por partes é nulo, pois ϕ possui todas as suas derivadas iguais a zero no infinito.

(ii) Note que, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^\alpha \phi(x)](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} x^\alpha \phi(x)\, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha (e^{-ix\xi}) \phi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}[\phi](\xi).\end{aligned}$$

Finalmente, vejamos que a transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária, então por propriedade de supremos $|x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < C_{\alpha,\beta}$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Combinando (i) e (ii) obtemos

$$\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}[\phi](\xi) = (-1)^{|\beta|} \mathcal{F}[D_x^\alpha (x^\beta \phi(x))](\xi). \tag{1.13}$$

Da expressão (1.12) segue que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}[\phi](\xi)| \leqslant \|D_x^\alpha (x^\beta \phi(x)\|_1 < \infty. \tag{1.14}$$

Portanto, se $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ da estimativa (1.14) obtemos

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}[\phi_j](\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha (x^\beta \phi_j(x))|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D_x^\alpha (x^\beta \phi_j(x))|\, dx \\ &\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|)^{n+1} D_x^\alpha (x^\beta \phi_j(x))| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx = c_j.\end{aligned}$$

Como $c_j \to 0$ segue que $\mathcal{F}[\phi_j] \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to \infty$.

(iii) Usando as expressões (1.8) e (1.11) obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\phi * \psi](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \phi(x-y)\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x+y)\xi} \phi(x)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-iy\xi} \phi(x)\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-iy\xi} \mathcal{F}[\phi](\xi)\, dy = (\mathcal{F}[\phi]\mathcal{F}[\psi])(\xi).\end{aligned}$$

(iv) Usando a expressão (1.11) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}[\phi]\psi)(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \phi(x)\psi(\xi)\, dx\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \mathcal{F}[\psi])(x)\, dx. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 1.6.1 *Calcule a transformada de Fourier da função* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Solução. Para o cálculo de tal transformada faremos um caminho indireto, isto é, não usaremos de imediato a fórmula (1.11).

Note que, a função ϕ é solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \phi'(x) + x\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ aplicando $\mathcal{F}$ em (1.15) e usando as propriedades de $\mathcal{F}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\phi'(x)] + \mathcal{F}[x\phi(x)] = 0 &\Longleftrightarrow \xi\mathcal{F}[\phi](\xi) - \frac{d}{d\xi}\mathcal{F}[\phi](\xi) = 0 \\ &\Longleftrightarrow i\xi\mathcal{F}[\phi](\xi) - \frac{1}{i}\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}[\phi](\xi) = 0 \\ &\Longleftrightarrow i\Big(\xi\mathcal{F}[\phi](\xi) + \frac{d}{d\xi}\mathcal{F}[\phi](\xi)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier também satisfaz o problema de valor inicial (1.15). Logo, $\mathcal{F}[\phi] = c\,\phi$. Tomando em particular $\xi = 0$ temos $c = \mathcal{F}[\phi](0)$ e, assim

$$\mathcal{F}[\phi](\xi) = \mathcal{F}[\phi(0)]\phi(\xi) = \phi(\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}}\sqrt{2\pi}. \qquad \blacksquare$$

Agora, se estivermos interessados em calcular a transformada de Fourier de $\phi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ em $\mathbb{R}^n$ escrevemos a integral da transformada de Fourier como produto de integrais unidimensionais, assim obtendo

$$\mathcal{F}[\phi](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\phi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{\frac{-|\xi|^2}{2}}. \tag{1.16}$$

Teorema 1.6.2 (Fórmula de Inversão) *A transformada de Fourier é continuamente invertível de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\phi(\xi)\,d\xi, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\hat{\phi}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}\phi(y)\,dy\,d\xi. \tag{1.17}$$

Observemos que não podemos inverter a ordem de integração em (1.17), pois $e^{-i(x-y)\xi}\phi(y)$ não possui módulo integrável em ξ. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{i(x-y)\xi}\phi(y)|\,d\xi = \phi(y)|\mathbb{R}^n| = \infty,$$

ou seja, $e^{-i(x-y)\xi}\phi(y)$ não é integrável para $\phi \neq 0$. Para contornarmos este fato, definamos $\psi_\varepsilon(x) = \psi_1(\varepsilon x)$ sendo que $\psi_1(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Pela fórmula (1.16) obtemos $\mathcal{F}[\psi_1] = \psi_1(2\pi)^{\frac{n}{2}}$. Além disso, se fizermos a mudança $w = \varepsilon x$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\psi_\varepsilon](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\psi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{w}{\varepsilon}\xi}\varepsilon^{-n}\psi_\varepsilon\big(\frac{w}{\varepsilon}\big)\,dw \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw\frac{\xi}{\varepsilon}}\psi_\varepsilon\big(\frac{w}{\varepsilon}\big)\,dw = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw\frac{\xi}{\varepsilon}}\psi_1(w)\,dw = \varepsilon^{-n}\mathcal{F}[\psi_1]\big(\frac{\xi}{\varepsilon}\big).
\end{aligned}$$

Agora observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\xi}\hat{\phi}(\xi)\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}\phi(y)\,dy\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\hat{\psi}_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x+y)\hat{\psi}_\varepsilon(y)\,dy \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x+y)\varepsilon^{-n}\psi_1\big(\frac{y}{\varepsilon}\big)\,dy \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x+\varepsilon z)\psi_1(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Se fizermos $\varepsilon \to 0^+$ teremos $\phi(x+\varepsilon z) \to \phi(x)$ e $\psi_\varepsilon(z) \to 1$. Portanto, pelo teorema da Convergência Dominada temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{\phi}(\xi)\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\xi}\hat{\phi}(\xi)\,d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix\xi}\hat{\phi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x+\varepsilon z)\psi_1(z)\,dz \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\psi_1(z)\,dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi_1(z)\,dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi(x)(2\pi)^{\frac{n}{2}} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi(x).\end{aligned}$$

O caso em que $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1} = \mathbf{I_d}$ segue de modo análago. Para demonstrarmos a continuidade da transformada de Fourier note que $|\phi| \leqslant M$ para alguma constante $M > 0$ e $|e^{-i\eta x}\phi(x) - e^{-ix\xi}\phi(x)| \leqslant 2|\phi(x)|$. Assim, pelo teorema da Convergência Dominada $\mathcal{F}[\phi](\eta) - \mathcal{F}[\phi](\xi) \to 0$ quando $\eta \to \xi$ o que implica em $\mathcal{F}$ ser contínua. ∎

Teorema 1.6.3 *Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\phi\,\overline{\psi}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}\,\overline{\hat{\psi}}.$

Demonstração. Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\overline{\psi}](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\overline{\psi}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\overline{ix\xi}}\overline{\psi}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\hat{\psi}}.\end{aligned}$$

Agora, segue do item (iv) do Teorema 1.6.1 que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\phi\,\overline{\psi}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}\,\overline{\hat{\psi}}.$ ∎

1.7 Transformação de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Um funcional linear contínuo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com valores em $\mathbb{C}$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas será denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Note que, se u for uma distribuição temperada, então a restrição de u a funções teste é uma distribuição e, além disso $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vide referência [14], Lema 7.18 . A seguir apresentaremos uma caracterização para a continuidade em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.7.1 *Seja u um funcional linear em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) u é contínuo;

(ii) Existem $M, m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant M \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_x |(|1 + |x|^2)^m D^\alpha \phi(x)|, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Vide referência [13], Teorema V.1.4. ∎

Definição 1.7.1 *Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definamos a transformada de Fourier $\hat{u}$ de u por*

$$\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.7.2 *(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f como distribuição temperada coincide com a transformada de f dada por (1.11);*

(ii) Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\hat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\xi} \rangle$;

(iii) Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$, $\widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}$ e $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$;

(iv) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2$.

Demonstração. (i) Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então as duas definições da transformada de Fourier de ψ coincidem em virtude da propriedade (iv) do Teorema 1.6.1. Quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ basta tomar $\psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_j \to f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ para obter

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f] \psi \, dx &= \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[\psi_j] \psi \, dx \\
&= \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_j \mathcal{F}[\psi] \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f \mathcal{F}[\psi] \, dx, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

(ii) Sejam ϕ e ϕ_ε como no Teorema 1.5.3 e definamos $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$ com $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $u_\varepsilon \to u$ em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e, em particular $u_\varepsilon \to u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

consequentemente $\hat{u}_\varepsilon \to \hat{u}$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Como $\hat{u}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ decorre de (i) que

$$\hat{u}_\varepsilon(\xi) = \langle u * \phi_\varepsilon, e^{-ix\xi} \rangle = \langle u, \check{\phi}_\varepsilon * e^{-ix\xi} \rangle = \hat{\phi}(\varepsilon\xi)\langle u, e^{-ix\xi} \rangle.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ segue que $\hat{\phi}(\varepsilon\xi) \to 1$ em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u}_\varepsilon(\xi) \to \langle u, e^{-ix\xi} \rangle$ em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em particular $\hat{u}_\varepsilon \to \langle u, e^{-ix\xi} \rangle$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e pela unicidade do limite segue a fórmula em (ii).

(iii) As primeitras fórmulas segue de imediato devido ao Teorema 1.6.1 e a Definição 1.7.1. A última fórmula decorre do Teorema 1.6.2.

(iv) Seja $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\psi_j \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Note que

$$\begin{aligned}\|\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k)\overline{(\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k)} \, dx \\ &= (2\pi)^n \|\psi_j - \psi_k\|_2^2.\end{aligned}$$

Portanto, $\{\hat{\psi}_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, como $L^2(\mathbb{R}^n)$ é completo, segue que $\hat{\psi}_j \to \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle = \langle f, \hat{\phi} \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \psi_j, \hat{\phi} \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \hat{\psi}_j, \phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$$

o que mostra $\hat{f} = \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado,

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \lim_{j\to\infty} \|\hat{\psi}_j\|_2^2 = (2\pi)^n \lim_{j\to\infty} \|\psi_j\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2. \qquad \blacksquare$$

A fórmula apresentada no item (iv) do Teorema 1.7.2 é chamada *Identidade de Plancherel*.

Capítulo

2

Caracterização de $H^p(\mathbb{R}^n)$

O estudo dos espaços de Hardy teve início durante os anos 1910 e 1920 no contexto de séries de Fourier e análise complexa em uma variável, e com o decorrer do tempo se transformou numa teoria rica e com desdobramentos em vários tópicos, fornecendo um importante material para o estudo de funções maximais, integrais singulares, e para a teoria dos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Um dos aspectos importantes desta teoria se refere ao fato de que os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ são equivalentes aos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $p > 1$, mas quando $p = 1$, esses espaços são melhores para o tratamento de questões ligadas a análise harmônica, do que os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ (vide as referências [18] e [19]).

2.1 Funções Maximais

Se f é uma distribuição temperada e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f * \phi$ é uma função bem definida e de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 1.5.1 (de crescimento polinomial no infinito). Denotaremos por $\mathbb{R}^{n+1}_+$ o semi-plano superior composto de todos os pontos $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

A conexão dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ com as funções harmônicas definidas no semi-plano superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$ pode ser feita considerando-se o produto convolução $f * P_t$, com P_t definido por $P_t(x) = t^{-n}P(\frac{x}{t})$ com $t > 0$ e P sendo o núcleo de Poisson de $\mathbb{R}^{n+1}_+$ dado por

$$P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad c_n = C(n).$$

O produto de convolução $f * P_t$ não está bem definido para distribuições arbitrárias, pois P não pertence ao espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, a teoria dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ exige uma restrição natural na classe das distribuições. Por esse motivo torna-se necessário trabalhar-se na classe das distribuições limitadas, ou seja, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $f * \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ qualquer que seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De agora em diante distribuição significará distribuição temperada.

Note que, se f é uma distribuição limitada e $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $f * h$ pode ser definida como uma distribuição. De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Podemos definir

$$\langle f * h, \phi \rangle = \langle f * \check{\phi}, \check{h} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * \check{\phi})(x)\check{h}(x)\, dx,$$

em que $\check{f}(x) = f(-x)$. Além disso, $f * h$ também é uma distribuição limitada e, ainda $f * (h_1 * h_2) = (f * h_1) * h_2$ se $h_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $j = 1, 2$.

Assim, se $P \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue que $f * P_t$ está bem definida para toda distribuição limitada f. Note que, para cada t fixado $f * P_t$ é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e limitada.

Observação 2.1.1 *O espaço das distribuições limitadas será denotado por $\mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 2.1.1 (Função Maximal) *Sejam $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A função maximal de Hardy-Littlewood associada a f é definida por*

$$\mathrm{M}_\phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)|.$$

Consideremos a coleção de semi-normas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definidas por $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(f) = \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty$ com $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $N \in \mathbb{Z}_+$ fixado (a ser escolhido). Definamos

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\phi) \leqslant 1,\ |\alpha|, |\beta| \leqslant N\}.$$

Definamos a grande função maximal de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ associada a família $\mathcal{F}$ por

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\phi \in \mathcal{F}} \mathrm{M}_\phi f(x).$$

Finalmente, se f é uma distribuição limitada, definamos $u(x,t) = f * P_t(x)$ a integral de Poisson de f, definida no semi-plano superior. Seja

$$u^*(x) = \sup_{|x-y| \leqslant t} |u(y,t)|$$

a função maximal não-tangencial de u e

$$u^{\perp}(x) = \sup_{t>0} |u(x,t)|$$

a função maximal radial de u.

2.2 Operador Maximal de Hardy-Littlewood

Definição 2.2.1 (Operador Maximal) *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *O operador maximal de Hardy-Littlewood é definido por*

$$\mathcal{M} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

Em alguns contextos define-se o operador maximal da Definição 2.2.1 sobre cubos ao invés de bolas. Se $\mathcal{Q}_r$ é o cubo $[-r,r]^n$ define-se

$$\mathcal{M}' f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{\mathcal{Q}_r} |f(x-y)|\, dy.$$

É claro que se $n=1$ temos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ coincidem. Agora se $n>1$ existem constantes c_n e C_n ambas dependente de n tais que

$$c_n \mathcal{M}' f(x) \leqslant \mathcal{M} f(x) \leqslant C_n \mathcal{M}' f(x). \tag{2.1}$$

Por causa de (2.1) os dois operadores $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são equivalentes.

Definição 2.2.2 (Função Distribuição) *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função Lebesgue mensurável e $|\cdot|$ a medida de Lebesgue definida em $\mathbb{R}^n$. A função $\lambda_f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definida por*

$$\lambda_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}|$$

é chamada função distribuição de f e denotada por λ_f.

Proposição 2.2.1 *(i) λ_f é decrescente e contínua à direita;*
(ii) Se $|f| \leqslant |g|$, então $\lambda_f \leqslant \lambda_g$;
(iii) Se $|f_j|$ é crescente para $|f|$, então λ_{f_j} é crescente para λ_f;
(iv) Se $f = g + h$, então $\lambda_f(\alpha) \leqslant \lambda_g(\frac{1}{2}\alpha) + \lambda_h(\frac{1}{2}\alpha)$.

Demonstração. Vide referência [17], Proposição 6.22, página 197. ∎

Proposição 2.2.2 *Se $0 < p < \infty$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha.$$

Demonstração. Vide referência [17], Proposição 6.24, página 198. ∎

Observação 2.2.1 *Seja f uma função mensurável definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{C}$ e $0 < p < \infty$. Definamos $[f]_p = (\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha))^{\frac{1}{p}}$.*

Definição 2.2.3 *O espaço $L^p_{fraco}(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis sobre um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que $[f]_p < \infty$.*

Proposição 2.2.3 $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{fraco}(\Omega)$.

Demonstração. Definamos $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\alpha^p \lambda_f(\alpha) &= \alpha^p |\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}| = \alpha^p \int_{\mathcal{A}} dx \\ &\leqslant \alpha^p \int_{\mathcal{A}} \alpha^{-p} |f(x)|^p \, dx = \int_{\mathcal{A}} |f(x)|^p \, dx \leqslant \int_\Omega |f(x)|^p \, dx = \|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Portanto, $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{fraco}(\Omega)$. ∎

Proposição 2.2.4 (Desigualdade de Tchebyshev) *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então, para todo* $\alpha > 0$ *tem-se* $\lambda_f(\alpha) \leqslant \dfrac{\|f\|_1}{\alpha}$.

Demonstração. Definamos como anteriormente $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}$. Então, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx \geqslant \int_{\mathcal{A}} |f|\,dx \geqslant \int_{\mathcal{A}} \alpha\,dx = \alpha|\mathcal{A}|. \qquad \blacksquare$$

Lema 2.2.1 (Recobrimento de Vitali) *Seja E um conjunto mensurável de* $\mathbb{R}^n$ *o qual é coberto por uma família de bolas* $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ *de diâmetro limitado. Então podemos selecionar uma subsequência disjunta de bolas* $B_1, B_2, \ldots$ *(finita ou infinita) tal que* $\sum_k |B_k| \geqslant 5^{-n}|E|$.

Demonstração. Vide referência [18], página 9. $\blacksquare$

Teorema 2.2.1 *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Existe uma constante* $C = C(n) > 0$ *tal que para todo* $\alpha > 0$ *tem-se*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}f(x)| > \alpha\}| \leqslant \frac{C}{\alpha}\|f\|_1. \tag{2.2}$$

Demonstração. Seja $\alpha > 0$ fixado. Definamos $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \alpha\}$ e mostremos que E_α é um conjunto mensurável. De fato,

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy = \sup_{r\in\mathbb{Q}, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy.$$

Sendo a aplicação $r \mapsto \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$ mensurável pois é contínua e $\mathbb{Q}$ mensurável e denso em $\mathbb{R}$, segue que $\mathcal{M}f$ é mensurável. Além disso $E_\alpha = (\mathcal{M}f)^{-1}((\alpha,\infty))$ e, portanto E_α é mensurável. Agora, se $x \in E_\alpha$ temos que $\mathcal{M}f(x) > \alpha$, portanto existe $r_x > 0$ tal que, pondo $B(x, r_x) = B_x$ temos que

$$\mathcal{M}f(x) - \varepsilon < \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)|\,dy.$$

Tomando em particular $\varepsilon = \mathcal{M}f(x) - \alpha > 0$ obtemos que

$$\int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha |B_x| \Longrightarrow |B_x| < \alpha^{-1} \|f\|_1. \tag{2.3}$$

É claro que $E_\alpha \subset \bigcup\limits_{x \in E_\alpha} B_x$ e o $\operatorname{diam}(B_x)$ é uniformemente limitado devido a (2.3). Pelo Lema 2.2.1 existe $\{(B_x)_j\}_{j \in J \subset \mathbb{N}} \subset \{B_x\}_{x \in E_\alpha}$ tal que os $(B_x)_j$'s são disjuntos e $\sum\limits_{j \in J} |(B_x)_j| \geqslant 5^{-n} |E_\alpha|$. Combinando (2.3) com a última estimativa segue que

$$\begin{aligned}\|f\|_1 \geqslant \int_{\bigcup\limits_{j \in J} (B_x)_j} |f(y)|\, dy &= \sum_{j \in J} \int_{(B_x)_j} |f(y)|\, dy \\ &\geqslant \sum_{j \in J} \alpha |(B_x)_j| \geqslant \alpha 5^{-n} |E_\alpha|.\end{aligned}$$

Portanto, tomando $C = 5^n$ temos que $|E_\alpha| \leqslant \frac{C}{\alpha} \|f\|_1$. ■

Observação 2.2.2 *A desigualdade 2.2 é chamada desigualdade fraca do tipo* $(1,1)$ *e* $\mathcal{M}$ *operador do tipo fraco* $(1,1)$.

Teorema 2.2.2 *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
(i) *Se* $1 < p \leqslant \infty$ *então* $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Além disso,* $\|\mathcal{M}f\|_p \leqslant A(n,p)\|f\|_p$;
(ii) *Se* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *então* $\mathcal{M}f < \infty$ *q.t.p* $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. (i) Se $p = \infty$ então temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \leqslant \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \sup_{y \in B(x,r)} |f(y)|\, dy \\ &= \sup_{y \in B(x,r)} |f(y)| \leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)|.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto, segue da estimativa (2.4) que $\|\mathcal{M}f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ e consequentemente $\mathcal{M}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Agora, suponhamos que $1 < p < \infty$. Para $\alpha > 0$ fixado, definamos

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2} \\ 0, & |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

e mostremos que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}\}$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1|\, dx &= \int_{\mathcal{A}} |f|^p |f|^{1-p}\, dx \\ &\leqslant \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dx \\ &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \|f\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

Agora, mostremos que $|f(x)| \leqslant |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $|f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}$ temos que $|f(x)| = |f_1(x)| \leqslant |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $|f(x)| < \frac{\alpha}{2}$ então $|f(x)| < 0 + \frac{\alpha}{2} = |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \\ &\leqslant \sup_{r>0} \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f_1(y)| + \frac{\alpha}{2}\, dy \\ &\leqslant \frac{\alpha}{2} + \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f_1(y)|\, dy,\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{M}f(x) \leqslant \mathcal{M}f_1(x) + \frac{\alpha}{2}$. Em particular, se tivermos $\mathcal{M}f_1(x) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ então $\mathcal{M}f(x) \leqslant \alpha$. Logo,

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \alpha\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f_1(x) > \frac{\alpha}{2}\}.$$

Pelo Teorema 2.2.1 temos que

$$\begin{aligned}|E_\alpha| &\leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f_1(x) > \frac{\alpha}{2}\}| \\ &\leqslant \frac{2}{\alpha} 5^n \int_{\mathbb{R}^n} |f_1|\, dx \\ &= \frac{2 \cdot 5^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1|\, dx \\ &= \frac{2 \cdot 5^n}{\alpha} \int_{\mathcal{A}} |f|\, dx.\end{aligned}$$

Definamos $g = \mathcal{M}f$ e seja λ_g sua função distribuição. Então combinando a Proposição 2.2.2 e o Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}f(x)|^p\, dx &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)\, d\alpha = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}|E_\alpha|\, dx\\
&\leqslant p\int_0^\infty \frac{5^n 2}{\alpha}\alpha^{p-1}\int_{\mathcal{A}} |f(x)|\, dx\, d\alpha\\
&= 5^n 2p\int_0^\infty \int_{\mathcal{A}} \alpha^{p-2}|f(x)|\, dx\, d\alpha\\
&= 5^n 2p\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2}|f(x)|\, d\alpha\, dx\\
&= \frac{5^n 2^p p}{(p-1)}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\\
&= \frac{5^n 2^p p}{(p-1)}\|f\|_p^p < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $A_p = 2\sqrt[p]{\frac{5^n p}{p-1}}$ temos que $\|\mathcal{M}f\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$.

(ii) Façamos inicialmente o caso em que $p = 1$. Para este caso inicial, seja $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) < \infty\}$. Daí, usando as propriedades da medida de Lebesgue temos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}^c| &= \left|\left\{\bigcup_{k=1}^\infty \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) < k\right\}\right\}^c\right|\\
&= \left|\bigcap_{k=1}^\infty \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) \geqslant k\right\}\right|\\
&\leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) \geqslant k\}|\\
&\leqslant \frac{C}{k}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx, \quad \forall\, k\\
&= \frac{C}{k}\|f\|_1 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$. Portanto, $\mathcal{M}f < \infty$ q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$.

Agora, se $p = \infty$, segue que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f| < \infty$, portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy\\
&\leqslant \|f\|_\infty < \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente, se $1 < p < \infty$ pelo item (i) temos $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e não temos nada o que demonstrar, pois já o demonstramos anteriormente. ∎

Observação 2.2.3 *A desigualdade (i) do Teorema 2.2.2 é chamada desigualdade forte do tipo (p,p) e $\mathcal{M}$ recebe o nome de operador do tipo forte (p,p).*

Teorema 2.2.3 *O conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto denotado por $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Vide referência [20], Teorema 4.12. ∎

Corolário 2.2.1 (Diferenciação de Lebesgue) *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x)$$

q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Vejamos inicialmente que se demonstrarmos o corolário para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então consequentemente teremos demonstrado para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$ tome $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $x \in B(0,j)$.

Definamos $\phi = \chi_{B(0,j)} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, para quase todo $x \in B(0,j)$ temos que

$$\begin{aligned}
\phi(x) = \chi_{B(0,j)} f(x) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_{B(0,j)}(y) f(y)\, dy \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \phi(y)\, dy
\end{aligned}$$

sendo assim, podemos considerar sem perda de generalidade $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Usando o Teorema 2.2.3, segue que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\phi = \phi_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - \phi\|_1 < k^{-1}$.

Fixemos $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e definamos $\phi_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \phi(y)\, dy$. Como ϕ é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\phi(y) - \phi(x)| < \varepsilon$ sempre que $|y - x| < \delta$.

Se tomarmos $r < \delta$, temos

$$\begin{aligned}|\phi_r(x) - \phi(x)| &= \Big|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \phi(y) - \phi(x)\, dy\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |\phi(y) - \phi(x)|\, dy \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Definamos $f_r(x) = \dfrac{1}{|B(x,r)|}\displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)\, dy$. Então,

$$\limsup_{r\to 0} |f_r(x) - f(x)| \leqslant \limsup_{r\to 0}\{|f_r(x) - \phi_r(x)| + |\phi_r(x) - \phi(x)| + |\phi(x) - f(x)|\}.$$

Segue da expressão acima que

$$\begin{aligned}\Big|\Big\{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} |f_r(y) - f(y)| > \alpha\Big\}\Big| &\leqslant \Big|\Big\{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} |\phi_r(y) - \phi(y)| > \frac{\alpha}{3}\Big\}\Big| \\ &+ \Big|\Big\{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} |f_r(y) - \phi_r(y)| > \frac{\alpha}{3}\Big\}\Big| \\ &+ \Big|\Big\{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} |\phi(y) - f(y)| > \frac{\alpha}{3}\Big\}\Big| \\ &= \Big|\Big\{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} |f_r(y) - \phi_r(y)| > \frac{\alpha}{3}\Big\}\Big| \\ &+ \Big|\Big\{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} |\phi(y) - f(y)| > \frac{\alpha}{3}\Big\}\Big|.\end{aligned}$$

Mas, por outro lado temos que

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} |f_r(y) - \phi_r(y)| &= \limsup_{r\to 0}\Big\{\Big|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(z) - \phi(z)\, dz\Big|\Big\} \\ &\leqslant \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(z) - \phi(z)|\, dz \\ &\leqslant \mathcal{M}(f - \phi)(y).\end{aligned}$$

Agora, se definirmos $\mathcal{A} = \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{\alpha}|f(y) - \phi(y)| > 1\}$ e usarmos o fato do operador $\mathcal{M}$ ser fraco do tipo $(1,1)$ temos que

$$\begin{aligned}\Big|\Big\{y\in\mathbb{R}^n:\limsup_{r\to 0}|f_r(y)-f(y)|>\alpha\Big\}\Big| &\leqslant \Big|\Big\{y\in\mathbb{R}^n:\mathcal{M}(f-\phi)(y)>\frac{\alpha}{3}\Big\}\Big|\\ &\quad+\Big|\Big\{y\in\mathbb{R}^n:|f(y)-\phi(y)|>\frac{\alpha}{3}\Big\}\Big|\\ &=\int_{\mathcal{A}}1\,dx+\Big|\Big\{y\in\mathbb{R}^n:\mathcal{M}(f-\phi)(y)>\frac{\alpha}{3}\Big\}\Big|\\ &\leqslant\frac{3A}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)-\phi(y)|\,dy+\frac{3}{\alpha}\|f-\phi\|_1\\ &\leqslant C\|f-\phi\|_1<Ck^{-1}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

quando $k\to\infty$. Como $\alpha>0$ é arbitrário, segue que $\lim\limits_{r\to 0}|f_r-f|=0$ q.t.p e, consequentemente $\lim\limits_{r\to 0}|f_r-f|=0$ q.t.p. ∎

Observação 2.2.4 *A desigualdade do tipo forte (p,p) nos diz que o operador $\mathcal{M}:L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ é limitado para $1<p\leqslant\infty$. Por outro lado, da desigualdade fraca do tipo $(1,1)$ conclui-se que $\mathcal{M}:L^1(\mathbb{R}^n)\to L^1_{fraco}(\mathbb{R}^n)$ é limitado.*

Proposição 2.2.5 *Se $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f\neq 0$, então $\mathcal{M}f\notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Vejamos que se $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f\neq 0$ q.t.p, então existe uma constante $C>0$ tal que

$$\mathcal{M}f(x)\geqslant\frac{C}{|x|^n}\|f\|_1,\quad\forall\,|x|\geqslant 1.$$

De fato, seja $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $r>0$, então $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{B(0,r)}|f|\,dx=\|f\|_1$. Daí, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\Big|\int_{B(0,r)}|f|\,dx-\|f\|_1\Big|<\frac{1}{2}\|f\|_1,\quad\forall\,r\geqslant k_0.$$

Seja $k=\max\{1,k_0\}$. Então,

$$\int_{B(0,k)}|f|\,dx>\frac{1}{2}\|f\|_1.$$

Seja $|x| \geqslant 1$. Claramente $B(x, 2|x|k) \supset B(0,k)$, façamos $r_0 = 2|x|k$ e note que $|B(x,r_0)| = c_n(2|x|k)^n = c'|x|^n$. Daí,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f|\,dx \geqslant \frac{1}{|B(x,r_0)|}\int_{B(x,r_0)} |f|\,dx \\ &\geqslant \frac{1}{c'|x|^n}\|f\|_1 = \frac{C}{|x|^n}\|f\|_1.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\mathcal{M}f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. ∎

Agora, considerando a coleção $\mathcal{F}$ e as funções $u^\perp$ e u^* definidas anteriormente podemos enunciar o teorema central deste capítulo o qual caracteriza uma classe de funções.

Teorema 2.2.4 (Caracterização Maximal de $H^p(\mathbb{R}^n)$) *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $0 < p \leqslant \infty$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi\,dx \neq 0$ tal que $\mathrm{M}_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(ii) Existe uma coleção $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}_\mathcal{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(iii) A distribuição $f \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^n)$ e $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Vide referência [19], Teorema 1. ∎

Se uma distribuição f cumprir qualquer uma das condições do Teorema da Caracterização Maximal 2.2.4 e, portanto todas, diremos que f pertence a $H^p(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos isto por $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.2.4 (Espaço de Hardy) *Se $0 < p \leqslant \infty$ o espaço de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ é definido como sendo o espaço das distribuições temperadas de $\mathbb{R}^n$ as quais a função maximal pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Em símbolos*

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathrm{M}_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

E ainda, no espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ definimos $\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = \|\mathrm{M}_\phi f\|_p$. É claro que $\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ é somente norma se $p \geqslant 1$, caso $p < 1$ temos $\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ subaditiva.

2.3 Algumas Propriedades de $H^p(\mathbb{R}^n)$

Algumas propriedades válidas em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p > 1$ também são válidas para os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ com sutis modificações. Tais propriedades estão listadas abaixo:

(i) *Completude:* $H^p(\mathbb{R}^n)$ é completo com a métrica $\rho(f,g) = \|f-g\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}$;

(ii) *Completude Fraca na Bola Unitária:* Se $f_j \in H^p(\mathbb{R}^n)$ com $\|f_j\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant A$, então existe $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ e uma subsequência f_{j_k} tal que $f_{j_k} \to f$ no sentido das distribuiçõs;

(iii) *Aproximações em Norma:* Seja $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, e seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dx = 1$. Então, $\|f * \phi_t\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ e $f * \phi_t \to f$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ em "norma" para $t \to 0$;

(iv) *Definibilidade:* Para cada $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, existe uma função $f_0(x)$, definida q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$, tal que para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dx = 1$, tem-se $(f * \phi_t)(x) \to f_0(x)$ q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$, para $t \to 0$;

(v) Se $p \leqslant 1$ e $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ e

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant A|\xi|^{n(1/p-1)}\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ainda nas condições anteriores, temos que próximo da origem

$$\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{n(1/p-1)}} \to 0, \quad \xi \to 0.$$

As propriedades listadas acima, estão intimamente ligadas com o fato de que $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p > 1$. Neste capítulo, apresentaremos a demonstração deste fato, assim como outras propriedades associados aos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.1 *Seja $F : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{C}$ uma função Borel mensurável definida por $F(x,t) = f * \phi_t(x)$, com $f \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{R}^n)$. Definamos $F^*(x) = \sup\limits_{|x-y|<t} |F(y,t)|$.*

Proposição 2.3.1 *A função F^* é semi-contínua inferiormente, isto é, para todo $\alpha \geqslant 0$ o conjunto $\mathcal{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : F^*(x) > \alpha\}$ é aberto.*

Demonstração. Seja $\alpha \geqslant 0$ fixado e seja $x_0 \in \mathcal{A}_\alpha$ arbitrário. Então, devido a definição do conjunto $\mathcal{A}_\alpha$ temos que $F^*(x_0) > \alpha$.

Defina $\Gamma(x_0) = \{(y,t) : |x_0 - y| < t\}$. Assim, existe $(y_0, t_0) \in \Gamma(x_0)$ tal que $|F(y_0,t_0)| > \alpha$. Tomando $\delta = t_0 - |x_0 - y_0|$ mostraremos que $B(x_0, \delta) \subset \mathcal{A}_\alpha$. De fato, se $x_1 \in B(x_0, \delta)$ então $|x_1 - y_0| \leqslant |x_1 - x_0| + |x_0 - y_0| < \delta + |x_0 - y_0| = t_0$ o que implica em $(y_0, t_0) \in \Gamma(x_1)$. Portanto, $F^*(x_1) \geqslant |F(y_0, t_0)| > \alpha$. ∎

Agora fixemos $a > 0$ e definamos $F_a^*(x) = \sup\limits_{|x-y| \leqslant at} |F(y,t)|$. É claro que se $0 < a \leqslant b$, então $F_a^*(x) \leqslant F_b^*(x)$ e consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} F_b^*(x)\, dx. \tag{2.5}$$

No entanto, uma pergunta natural é saber em que condições a desigualdade (2.5) é válida no sentido contrário. Nosso objetivo no presente momento é responder a tal pergunta.

Definição 2.3.2 *Seja $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $0 < \gamma < 1$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto de densidade global de $\mathcal{G}$ se*

$$\gamma \leqslant \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{G}|}{|B(x,r)|}, \quad \forall\, r > 0.$$

Proposição 2.3.2 *O conjunto $\mathcal{G}^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é ponto de } \gamma \text{ densidade global de } \mathcal{G}\}$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Seja $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{G}^*$ uma sequência tal que $x_j \to x$ quando $j \to \infty$. Como os x_j's são pontos de γ-densidade global de $\mathcal{G}$ temos por definição que

$$\gamma \leqslant \frac{|B(x_j,r) \cap \mathcal{G}|}{|B(x_j,r)|} = \frac{1}{c_n r^n} \int_{\mathcal{G}} \chi_{B(x_j,r)}\, dy.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada podemos concluir que

$$\gamma \leqslant \frac{1}{|B(x_j,r)|} \int_{\mathcal{G}} \chi_{B(x_j,r)}\, dy \longrightarrow \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{G}|}{|B(x,r)|}, \quad \forall\, r > 0.$$

É claro que $\chi_{B(x_j,r)} \to \chi_{B(x,r)}$ e $\int_{\mathcal{G}} \chi_{B(x,r)}\, dy \leqslant |B(x,r)|$. Portanto, provamos que x é ponto de γ-densidade global de $\mathcal{G}$, isto é, $x \in \mathcal{G}^*$ e, consequentemente $\mathcal{G}^*$ é fechado. ∎

Observemos que, como $\mathcal{G}$ é fechado por definição temos $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ pois, se existe $x_0 \in \mathcal{G}^*$ tal que $x_0 \notin \mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}$, então existe $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, r_0) \cap \mathcal{G} = \emptyset$, ou seja, o ponto x_0 não é ponto de γ-densidade de $\mathcal{G}$ o que é um absurdo.

Agora definamos $\mathcal{A} = \mathcal{G}^c$ e $\mathcal{A}^* = (\mathcal{G}^*)^c$. Pela observação acima, segue que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.

Lema 2.3.1 *Existe uma constante $C = C_\gamma > 0$ tal que $|\mathcal{A}^*| \leqslant C_\gamma |\mathcal{A}|$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que

$$x \in \mathcal{A}^* \Longleftrightarrow \exists\, r > 0 : \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{G}|}{|B(x,r)|} < \gamma \Longleftrightarrow \exists\, r > 0 : \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{A}|}{|B(x,r)|} > 1 - \gamma,$$

pois sendo $\mathcal{G} \cup \mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, temos $|B(x,r) \cap \mathcal{G}| = |B(x,r)| - |B(x,r) \cap \mathcal{A}|$. Daí,

$$\gamma > \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{G}|}{|B(x,r)|} = 1 - \frac{|B(x,r) \cap \mathcal{A}|}{|B(x,r)|},$$

ou seja, $\dfrac{|B(x,r) \cap \mathcal{A}|}{|B(x,r)|} > 1 - \gamma$. Similarmente, podemos escrever esta última desigualdade como

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_{\mathcal{A}}(y)\, dy > 1 - \gamma \Rightarrow \mathcal{M}\chi_{\mathcal{A}}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_{\mathcal{A}}(y)\, dy \geqslant 1 - \gamma.$$

Portanto, usando a definição de $\mathcal{A}^*$ obtemos que

$$|\mathcal{A}^*| \leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}\chi_{\mathcal{A}}(x) \geqslant 1 - \gamma\}|.$$

Mas o operador de Hardy-Littlewood como sabemos é fraco do tipo $(1,1)$, isto é, o operador satisfaz a desigualdade (2.2). Assim, podemos escrever

$$|\mathcal{A}^*| \leqslant \frac{A(n,p)}{1-\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{A}}(y)\, dy = \frac{A(n,p)}{1-\gamma} |\mathcal{A}|.$$

Portanto, tomando $C_\gamma = \dfrac{A(n,p)}{1-\gamma}$ terminamos a demonstração do lema. ∎

Lema 2.3.2 *Para algum $0 < \gamma < 1$ tem-se $\{x \in \mathbb{R}^n : F_b^*(x) > \alpha\} \subseteq \mathcal{A}^*$ com $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : F_a^*(x) > \alpha\} = \mathcal{G}^c$, $\mathcal{G}^* = \{x \in \mathbb{R}^n : F_a^*(x) \leqslant a\}^*$, $\mathcal{A}^* = (\mathcal{G}^*)^c$ onde $*$ denota o conjunto dos pontos de γ-densidade do conjunto.*

Demonstração. Seja $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : F_b^*(x) > \alpha\}$. Então, então por definição $\sup_{|y-x|<bt} |F(y,t)| > \alpha$ e, existe $(y_1, t_1) \in \Gamma_b(x)$ tal que $|F(y_1,t_1)| > \alpha$. Vamos mostrar que $x \in \mathcal{A} = (\mathcal{G}^*)^c$ e, consequentemente x não será ponto de γ-densidade de $\mathcal{G}$. De fato, temos $B(y_1, at_1) \subset \mathcal{A}$, pois se $x \in B(y_1, at_1)$ temos $|x - y_1| < at_1$, daí $F_a^*(x) = \sup_{|x-y_1|<at_1} |F(y_1,t_1)| > \alpha$ e, portanto $x \in \mathcal{A}$.

Afirmamos que $B(y_1, at_1) \subset B(x, (a+b)t_1)$. De fato, para $z \in B(y_1, at_1)$ temos $|z - y_1| < at_1$ e, portanto

$$|z - x| \leqslant |z - y_1| + |y_1 - x| < at_1 + bt_1 = (a+b)t_1$$

mostrando assim que $z \in B(x, (a+b)t_1)$. Logo, $B(y_1, at_1) \subset B(x, (a+b)t_1) \cap \mathcal{A}$ e, portanto

$$\frac{|B(x,(a+b)t_1) \cap \mathcal{A}|}{|B(x,(a+b)t_1)|} \geqslant \frac{|B(y_1, at_1)|}{|B(x,(a+b)t_1)|} = \frac{a^n}{(a+b)^n}.$$

Agora, como já fizemos anteriormente temos que

$$\frac{|B(x,(a+b)t_1) \cap \mathcal{G}|}{|B(x,(a+b)t_1)|} \leqslant 1 - \frac{a^n}{(a+b)^n} < 1.$$

Portanto, basta tomar γ tal que $1 - \frac{a^n}{(a+b)^n} < \gamma < 1$. Com tal γ o elemento x não é ponto de γ-densidade global de $\mathcal{G}$, ou seja, $x \in (\mathcal{G}^*)^c$. ∎

Combinando os Lemas 2.3.1 e 2.3.2 obtemos

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : F_b^*(x) > \alpha\}| \leqslant C_\gamma |\{x \in \mathbb{R}^n : F_a^*(x) > \alpha\}|.$$

Proposição 2.3.3 *Existe uma constante $C = C(a,b,n) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_b^*(x)\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)\,dx.$$

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 2.2.2. ∎

Portanto, pelos resultados apresentados, podemos concluir que a integral em $L^p(\mathbb{R}^n)$ não depende da abertura a do cone $\Gamma(x) = \{(y,t) : |x-y| < at\}$, isto é, $F_b^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente, se $F_a^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Assim, podemos tomar em particular $b = 1$ e escolher $C = (1+a)^n$.

O lema nos da uma útil estimativa pontual da função maximal de Hardy-Littlewood em termos do operador maximal.

Lema 2.3.3 *Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Existe uma constante $C = C(\phi)$ tal que $\mathrm{M}_\phi f \leqslant C\mathcal{M}f$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{B_j}$ seja uma função simples em que $B_j = B(x, r_j)$ com a_j não todos identicamente nulos e, ainda que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dx = 1$, ou seja, $\sum_{j=1}^n a_j |B_j| = 1$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
|f * \phi_t(x)| &= \Big|\frac{1}{t^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi\Big(\frac{y}{t}\Big) f(x-y)\, dy\Big| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^k a_j \frac{c_n r_j^n}{c_n (r_j t)^n} \int_{B(0,r_j t)} |f(x-y)|\, dy \\
&\leqslant \Big(\sum_{j=1}^k a_j |B_j|\Big)\mathcal{M}f(x).
\end{aligned}$$

Portanto, pela definição da função maximal de Hardy-Littlewood temos que $\mathrm{M}_\phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)| \leqslant \mathcal{M}f(x)$.

Suponhamos $0 \leqslant \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ radial e decrescente, isto é, $\phi(x) = \varphi(|x|)$ com $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ decrescente. Nesse caso podemos aproximar ϕ por funções simples e, portanto devido ao caso anterior temos que $|f * \phi_t(x)| \leqslant C(\phi)\mathcal{M}f(x)$, com $C(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dy$.

Finalmente, para o caso geral temos $|f * \phi_t(x)| \leqslant ||f| * |\phi_t|(x)|$. Mas, $|x^\alpha \partial^\beta \phi| \leqslant C_{\alpha,\beta}$, pois $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, $(1+|x|)^{n+1}|\phi| \leqslant C_n$ o que implica em $|\phi| \leqslant \frac{C_n}{(1+|x|)^{n+1}}$. Se $\psi(x) = \frac{C_n}{(1+|x|)^{n+1}}$ então ψ satisfaz o caso anterior, assim aplicando o argumento anterior para a função ψ temos que

$$\begin{aligned}
|f * \psi(x)| &\leqslant ||f| * |\psi_t|(x)| \\
&\leqslant |f| * \psi_t(x) \leqslant C_n \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{-n-1}\, dy\, \mathcal{M}f(x).
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\mathrm{M}_\phi f(x) \leqslant C\mathcal{M}f(x)$. ∎

Teorema 2.3.1 *Se $1 < p < \infty$ então $L^p(\mathbb{R}^n) = H^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pelo Lema 2.3.3 temos $\mathrm{M}_\phi f(x) \leqslant C\mathcal{M}f(x)$ e, ainda $\|\mathrm{M}_\phi f\|_p \leqslant C\|\mathcal{M}f\|_p \leqslant \widetilde{C}\|f\|_p$, pois $\mathcal{M}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Logo, $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Para demonstrarmos a inclusão contrária, seja $f \in H^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, definamos $f_\varepsilon = \phi_\varepsilon * f$ a qual satisfaz $\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \|\mathrm{M}_\phi f\|_p = c < \infty$. Consideremos uma sequência $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ a qual converge a zero quando $j \to \infty$. Daí, $\{f_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^\infty \subset \overline{B_{L^p}(0,c)}$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu (vide referência [12]), existem $\{f_{\varepsilon_{j_k}}\}_{k=1}^\infty$ uma subsequência e $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_{\varepsilon_{j_k}} \to F$ em $\sigma(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$ fracamente, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon_{j_k}}\psi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} F\psi, \quad \forall\, \psi \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Mas, por outro lado, $f_{\varepsilon_{j_k}} \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon_{j_k}}\psi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f\psi, \quad \forall\, \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n).$$

Segue da unicidade do limite que $f = F$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, assim $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Portanto, temos para $p > 1$ que $L^p(\mathbb{R}^n) = H^p(\mathbb{R}^n)$. ∎

Observação 2.3.1 *Se $p = 1$, então $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. A inclusão contrária não é válida em geral, para comprovar este fato assim como a demonstração da inclusão previamente dita, vide a referência [19], página* 112.

Capítulo 3

Decomposição Atômica do Espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$

Iniciaremos este capítulo apresentando duas decomposições as quais vão nos auxiliar na demonstração da chamada decomposição atômica de $H^p(\mathbb{R}^n)$, que será o foco principal deste capítulo. A decomposição de Whitney que apresentaremos a seguir, nos diz que dado um conjunto não vazio e fechado $F \subsetneq \mathbb{R}^n$ seu complementar é união de cubos $\mathcal{Q}_j$, cujos os interiores são dois a dois disjuntos e os diâmetros de tais cubos são comparáveis à distância deles ao conjunto F.

Devemos ressaltar que a partir deste momento quando nos referirmos a cubos estaremos nos referindo a cubos fechados cujas as faces são paralelas aos planos coordenados e diremos que dois cubos são disjuntos se seus interiores forem disjuntos. Além disso, se $C > 0$ for uma constante independente dos parâmetros envolvidos na discussão e $f \leqslant Cg$ denotaremos este fato por $f \lesssim g$. Analogamente, se $f = Cg$, então denotaremos este fato por $f \cong g$.

Teorema 3.0.2 (Decomposição de Whitney) *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Então existe uma coleção de cubos $\mathcal{V} = \{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots\}$ com interiores dois a dois disjuntos tais que*

(i) $\Omega = F^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{Q}_j$;

(ii) $c_1 diam(\mathcal{Q}_j) \leqslant d(\mathcal{Q}_j, F) \leqslant c_2 diam(\mathcal{Q}_j)$.

Se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ como em (ii), diremos que $diam(\mathcal{Q}_j)$ e $d(\mathcal{Q}_j, F)$ são comparáveis e, denotaremos tal fato por $diam(\mathcal{Q}_j) \approx d(\mathcal{Q}_j, F)$.

Demonstração. Definamos $\Omega_j = \{x \in \Omega : 2^{-j}c \leqslant d(x, F) \leqslant 2^{-j+1}c\}$ com $c > 0$ a escolher. Note que para $F \neq \emptyset$ temos que $\Omega_j \neq \emptyset$ para j suficientemente grande. Sejam $\mathfrak{M}_0$ o conjunto de todos os cubos unitários e de faces paralelas aos planos coordenados e $\mathfrak{M}_j$ o conjunto de todos os cubos de arestas 2^{-j} e paralelas aos planos coordenados.

Definamos $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{Q} \in \mathfrak{M}_j : \mathcal{Q} \cap \Omega_j \neq \emptyset, j \in \mathbb{Z}\}$. Dado $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_0$, sejam $x \in \Omega_j \cap \mathcal{Q}$ e $y \in \mathcal{Q}$. Então,

$$d(x, F) \leqslant d(x, y) + d(y, F) \leqslant \mathrm{diam}(\mathcal{Q}) + d(\mathcal{Q}, F). \tag{3.1}$$

Segue de (3.1) que

$$\begin{aligned} d(\mathcal{Q}, F) \geqslant d(x, F) - \mathrm{diam}(\mathcal{Q}) &\geqslant 2^{-j}c - 2^{-j}\sqrt[n]{2} \\ &= 2^{-j}(c - \sqrt[n]{2}) \geqslant 2^{-j}c_1\sqrt[n]{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d(\mathcal{Q}, F) \leqslant d(x, F) \leqslant 2^{-j+1}c \leqslant 2^{-j}c_2\sqrt[n]{2}.$$

Agora, precisamos escolher c, c_1 e c_2 tais que as estimativas acima se verifiquem. Tome $c = 2\sqrt[n]{2}$, $c_1 = 1$ e, então tome $c_2 = 4$. Para concluirmos a demonstração do teorema, basta usarmos o axioma da escolha para obtermos cubos dois a dois disjuntos. ■

Proposição 3.0.4 *Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, r))$ tal que $|D^\alpha \phi| \leqslant r^{-n-|\alpha|}$ para todo $|\alpha| \leqslant N$ (N da definição da família $\mathcal{F}$). Então, para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*

$$|\langle f, \phi \rangle| \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x_0).$$

Uma função ϕ que cumpre a condição acima é chamada de concentrada em $B(x_0, r)$.

Demonstração. Seja $\psi(x) = r^n\phi(rx - x_0)$. Então, segue da hipótese que $|D^\alpha\psi(x)| = r^{n+|\alpha|}|D^\alpha\phi(rx - x_0)| \leqslant 1$ para todo $|\alpha| \leqslant N$. Portanto, para todo β e para todo $|\alpha| \leqslant N$ temos que $\psi \in \mathcal{F}$, pois

$$\|x^\beta D^\alpha\psi\|_{L^\infty(B(0,1))} \leqslant \|D^\alpha\psi\|_\infty \leqslant 1.$$

Assim, temos que $|(f * \psi_t)(x_0)| \leqslant \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x_0)$, para todo $t > 0$. Tomando em particular $t = r$ temos que $\psi_r(z) = \phi(z - x_0) \doteq \breve{\phi}(x_0) \doteq (T_{x_0}\breve{\phi})(z)$, daí

$$\begin{aligned} f * \psi_r(x_0) = f * T_{x_0}\breve{\phi}(x_0) &= T(f * \breve{\phi})(x_0) \\ &= f * \breve{\phi}(x_0 - x_0) = f * \breve{\phi}(0) = \langle f, \phi\rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto, de (3.2) segue que $|\langle f, \phi\rangle| \leqslant \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x_0)$. ∎

Teorema 3.0.3 (Decomposição de Calderón-Zygmund Generalizada) *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$ fixado. Então, existe uma decomposição $f = g + b$ com $b = \sum_{j=1}^\infty b_j$ e uma coleção de cubos $\mathcal{Q}_j^s$ tais que cumpre as seguintes condições:*

(i) $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $|g| \leqslant C\,\lambda$;

(ii) supp $b_j \subset \mathcal{Q}_j^s$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} [\mathrm{M}_\phi(b_j)(x)]^p\,dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{M}_\mathcal{F}(f)(x)]^p\,dx$;

(iii) $\{\mathcal{Q}_j^s\}_{j=1}^\infty$ é uma coleção a qual tem a propriedade da interseção limitada e $\bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{Q}_j^s = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\mathcal{F}(f)(x) > \lambda\}$.

Demonstração. Observemos que $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) > \lambda\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, pois sabemos que $\mathcal{M}_\mathcal{F} f$ é semi-contínua inferiormente.

Demonstremos inicialmente (*iii*). De fato, pela decomposição de Whitney podemos escrever

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) > \lambda\} = \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{Q}_j, \quad \mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}(x_j, \ell_j)$$

com $\ell_j \approx d(\mathcal{Q}_j, F)$, em que $F = \Omega^c$. Para $0 < a < s$ fixos, definamos os cubos $\mathcal{Q}_j^a = \mathcal{Q}(x_j, (1 + a)\ell_j)$ e $\mathcal{Q}_j^s = \mathcal{Q}(x_j, (1 + s)\ell_j)$. É claro que $\mathcal{Q}_j \subset \mathcal{Q}_j^a \subset \mathcal{Q}_j^s$ e, ainda se s for suficientemente pequeno, todo ponto de Ω pertence a no máximo

$N \doteq 2^n$ cubos $\{\mathcal{Q}_j^s\}_{j=1}^\infty$, isto é, $\{\mathcal{Q}_j^s\}_{j=1}^\infty$ possui a propriedade da interseção limitada e, além disso $\bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{Q}_j^s = \Omega$ o que demonstra (iii).

Agora, vamos provar (i). Sejam $y \notin \mathcal{Q}_j^s$ e $x \in \mathcal{Q}_j^a$, então existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 < \frac{|y-x_j|}{|x-y|} \leqslant c_2$, pois $(x,y) \mapsto (x,y) \in \mathcal{Q}_j^a \times (\mathcal{Q}_j^s)^c$ é limitado e possui ínfimo maior do que zero. Podemos observar que, quando y se afasta de x_j o quociente $\frac{|y-x_j|}{|x-y|}$ se aproxima de 1.

Seja $0 \leqslant \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Q}(0, 1+a))$ com $\psi \equiv 1$ em $\mathcal{Q}(0,1)$ de definamos $\psi_j = \psi\big(\frac{x-x_j}{\ell_j}\big) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Não é difícil ver que supp $\psi_j \subset \mathcal{Q}_j^a$, pois $|x-x_j| \geqslant (1+a)\ell_j$, isto é, $\frac{|x-x_j|}{\ell_j} \geqslant (1+a)$ daí, $\psi\big(\frac{x-x_j}{\ell_j}\big) = 0$. Assim,

$$1 \geqslant \psi(x) \doteq \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Portanto, as funções $\eta_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^\infty \psi_k(x)} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Q}_j^a)$ formam uma partição da unidade de Ω, subordinada à cobertura $\{\mathcal{Q}_j^s\}_{j=1}^\infty$ logo, $\sum_{j=1}^\infty \eta_j(x) = 1$. Afirmamos que η_j satisfaz a desigualdade

$$|D^\alpha \eta_j(x)| \leqslant c_\alpha \ell_j^{-|\alpha|}, \quad \text{com } c_\alpha \text{ independente de } j$$

De fato, suponhamos inicialmente que $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$. Para este α temos que

$$|\partial_1 \eta_j(x)| \leqslant \Big|\frac{\partial_1 \psi_j(x)}{\psi(x)}\Big| + \Big|\psi_j \frac{\partial_1 \psi(x)}{\psi^2(x)}\Big| \leqslant \widetilde{c}\ell_j^{-1} + cN\ell_j^{-1} = c_1 \ell_j^{-1}.$$

O caso em que α é qualquer, basta aplicarmos o processo de indução e obtermos

$$|D^\alpha \eta_j(x)| \leqslant \|\partial^\alpha \psi\|_\infty \ell_j^{-|\alpha|}.$$

Além disso, existem $\overline{x}_j \in F = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > \lambda\}^c$ e $c > 0$ independente de j tais que $B(\overline{x}_j, c\,\ell_j) \supset \mathcal{Q}_j^a \supset$ supp η_j devido a decomposição de Whitney e note que $\eta_j / c\,\ell_j^n$ está concentrada em $B(\overline{x}_j, c\,\ell_j)$. Logo, usando a proposição 3.0.4 temos que

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}_j|}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\eta_j\,dx\right| = c\left|\left\langle f, \frac{\eta_j}{c\,\ell_j^n}\right\rangle\right| \leqslant c'\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(\overline{x}) \leqslant c_1\lambda. \tag{3.3}$$

Finalmente, podemos construir as funções g e b_j. Definamos $b_j = (f - c_j)\eta_j$ sendo que

$$c_j = \frac{\int_{\mathcal{Q}_j^s} f\eta_j\,dx}{\int_{\mathcal{Q}_j^s} \eta_j\,dx}.$$

Então, $\int_{\mathbb{R}^n} b_j\,dx = 0$ e supp $b_j \subset \mathcal{Q}_j^a \subset \mathcal{Q}_j^s$. Além disso, afirmamos que $|c_j| \leqslant c\,\lambda$. De fato, note que $\int_{\mathcal{Q}_j^s} \eta_j\,dx \approx \ell_j^n$, isto é, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\ell_j^n \leqslant \int_{\mathcal{Q}_j^s} \eta_j\,dx \leqslant c_2\ell_j^n,$$

pois

$$\int_{\mathcal{Q}_j^s} \eta_j\,dx \leqslant |\mathcal{Q}_j^a| = (1+a)^n\ell_j^n.$$

Usando o fato de que $\eta_j\big|_{\mathcal{Q}_j} = \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^\infty \psi_k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^\infty \psi_k} \geqslant \frac{1}{N}$ segue que

$$\int_{\mathcal{Q}_j^a} \eta_j\,dx \geqslant \int_{\mathcal{Q}_j} \eta_j\,dx \geqslant \frac{1}{N}\ell_j^n.$$

Combinando (3.3) com o fato de que $\int_{\mathcal{Q}_j^s} \eta_j\,dx \approx \ell_j^n$ obtemos

$$|c_j| \leqslant c'\left|\frac{\int_{\mathcal{Q}_j^s} f\eta_j\,dx}{\ell_j^n}\right| \leqslant c\lambda,$$

com $|\mathcal{Q}_j^a| \approx \ell_j^n$. Agora, definamos

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin \Omega \\ \sum_{j=1}^\infty c_j\eta_j(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Claramente $g + b = f$. Se $x \notin \Omega$, então $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) \leqslant \lambda$ o que implica em $\mathrm{M}_\phi f(x) \leqslant c\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}f(x)$. Portanto, $|(\phi_t * f)(x)| \leqslant \mathrm{M}_\phi f(x) \leqslant c\,\lambda$, para todo $t > 0$.

Fazendo $t \to 0$, $|(\phi_t * f)(x)| \to |g(x)| = |f(x)|$ q.t.p x e consequentemente $|g(x)| \leqslant c\lambda$. Por outro lado, se $x \in \Omega$ pela afirmação anterior temos que $|g| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|\eta_j \leqslant c\lambda \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = c\lambda$. Finalmente, para demonstrarmos (ii) devemos demonstrar que:

(a) $\mathrm{M}_\phi b_j(x) \leqslant c\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)$, se $x \in \mathcal{Q}_j^s$;

(b) $\mathrm{M}_\phi b_j(x) \leqslant c\,\lambda \dfrac{\ell_j^{n+1}}{|x-x_j|^{n+1}}$, se $x \notin \mathcal{Q}_j^s$.

Suponhamos por um momento que (a) e (b) estejam demonstrados. Então, para $x \in \mathcal{Q}_j^s$ a estimativa (ii) segue imediatamente. Se $x \notin \mathcal{Q}_j^s$ para $p > \frac{n}{n+1}$, teremos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_j^s} [\mathrm{M}_\phi b_j(x)]^p dx &\leqslant c^p \lambda^p \ell_j^{p(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_j^s} |x-x_j|^{-p(n+1)}\, dx \\
&\leqslant c^\lambda \lambda^p \ell_j^{p(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B\left(0,\frac{\ell_j}{2}\right)} |x|^{-p(n+1)} dx \\
&= c^p \lambda^p \ell_j^{p(n+1)} \int_{\frac{\ell_j}{2}}^{\infty} r^{-p(n+1)} r^{n-1} dr \\
&= c^p \lambda^p \ell_j \\
&= c^p \lambda^p \int_{\mathcal{Q}_j} dx \\
&= c^p \int_{\mathcal{Q}_s^j} \lambda^p \lambda dx \\
&\leqslant c^p \int_{\mathcal{Q}_j^s} [\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)]^p dx.
\end{aligned}
$$

Observemos que $B\left(0,\frac{\ell_j}{2}\right)^c \supset \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_j^s$ se, e somente, se $B\left(0,\frac{\ell_j}{2}\right) \subset \mathcal{Q}_j^s = \mathcal{Q}(x_j,(1+b)\ell_j)$ e $-p(n+1)+n-1 < -1$ se, e somente, se $p > \frac{n}{n+1}$. Portanto, concluíremos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_j^s} [\mathrm{M}_\phi b_j(x)]^p dx &\leqslant \int_{\mathcal{Q}_j^s} [\mathrm{M}_\phi b_j(x)]^p dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_j^s} [\mathrm{M}_\phi b_j(x)]^p dx \\
&\leqslant C \int_{\mathcal{Q}_j^s} [\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)]^p dx + C \int_{\mathcal{Q}_j^s} [\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)]^p dx \\
&\leqslant C' \int_{\mathcal{Q}_j^s} [\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)]^p dx.
\end{aligned}
$$

Combinando a estimativa acima com (a), temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}[\mathrm{M}_\phi b_j(x)]^p dx &\leqslant \int_{\mathcal{Q}_j^s}[\mathrm{M}_\phi b_j(x)]^p dx+\int_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{Q}_j^s}[\mathrm{M}_\phi b_j(x)]^p\,dx\\ &\leqslant C\int_{\mathcal{Q}_j^s}[\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)]^p dx+C\int_{\mathcal{Q}_j^s}[\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)]^p dx\\ &\leqslant C'\int_{\mathcal{Q}_j^s}[\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)]^p dx.\end{aligned}$$

Portanto, se demonstrarmos (a) e (b) a demonstração do teorema estará completa para $p>\frac{n}{n+1}$. Para demonstrarmos (a), seja $x\in\mathcal{Q}_j^s$. Como $b_j=f\eta_j-c_j\eta_j$, temos que $\mathrm{M}_\phi b_j(x)\leqslant \mathrm{M}_\phi(f\eta_j)(x)+\mathrm{M}_\phi(c_j\eta_j)(x)$. Mas,

$$\mathrm{M}_\phi(c_j\eta_j)(x)\leqslant |c_j|\mathrm{M}_\phi(\eta_j)(x)\leqslant c\,\lambda\sup_{t>0}|(\phi_t*\eta_j)(x)|\leqslant c\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x).$$

Por outro lado, se $t\leqslant \ell_j$, então

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_\phi(f\eta_j)(x)&=\sup_{t>0}|[\phi_t*(f\eta_j)](x)|=\sup_{t>0}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\eta_j(y)f(y)\,dy\Big|\\ &=\sup_{t>0}|\langle f,\varphi\rangle|\end{aligned}$$

com $\varphi(y)=t^{-n}\phi\big(\frac{x-y}{t}\big)\eta_j(y)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e supp $\varphi\subset B(x,t)$. Afirmemos que $c^{-1}\varphi$ está concentrada em $B(x,t)$, isto é, $|D^\alpha(c^{-1}\varphi)|\leqslant t^{-n-|\alpha|}$ com c constante a ser escolhida. De fato,

- Se $|\alpha|=0$, então $|\varphi|\leqslant c\,t^{-n}$;
- Se $|\alpha|=1$, então $|\partial_k\varphi|\leqslant \dfrac{c}{t^{n+1}}+\dfrac{c}{t^n}|\partial\eta_j|\leqslant\dfrac{c}{t^{n+1}}+\dfrac{c}{t^n}\dfrac{c}{\ell_j}\leqslant\dfrac{c'}{t^{n+1}}$;
- Se $|\alpha|=k$, então para $\beta+\gamma=\alpha$, temos que

$$|D^\alpha\varphi(y)|=t^{-n}\Big|D^\beta\Big[\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\Big]D^\gamma\eta_j(y)\Big|\leqslant\frac{c_\beta}{t^{n+|\beta|}}\frac{c_\gamma}{t^{|\gamma|}}=\frac{c_\alpha}{t^{n+|\alpha|}}.$$

A última afirmação segue pela Regra de Leibniz. Portanto, para $t\leqslant\ell_j$ temos, pela Proposição 3.0.4, que

$$|(\phi_t*f)(x)|=|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant c\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x).$$

Para $t > \ell_j$ e supp $\varphi \subset B(x, \sqrt{n}(1+a)\ell_j)$ de modo análago mostra-se que $c^{-1}\varphi$ está concentrada em $B(x, \sqrt{n}(1+a)\ell_j)$ e obtemos a mesma estimativa. Assim, podemos concluir que

$$\mathrm{M}_\phi b_j(x) \leqslant c\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)$$

e, portanto (a) está demonstrado. Agora, demonstremos (b), isto é, se $x \notin \mathcal{Q}_j^s$, então

$$\mathrm{M}_\phi b_j(x) \leqslant c\,\lambda\,\frac{\ell_j^{n+1}}{|x-x_j|^{n+1}}.$$

Temos para $y \in \mathcal{Q}_j^a$ e $x \notin \mathcal{Q}_j^s$ que

$$\begin{aligned}
|(\phi_t * b_j)(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big) b_j(y)\,dy\Big| \\
&= \frac{1}{t^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)-\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\Big] b_j(y)\,dy\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{t^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)-\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\Big] f(y)\eta_j(y)\,dy\Big| \\
&+ \frac{1}{t^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)-\phi\Big(\frac{x-x_j}{t}\Big)\Big] c_j\eta_j(y)\,dy\Big| \\
&\doteq J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Lembremos que supp $b_j \subset \mathcal{Q}_j^a$, $\phi(x-y) = 0$ se $\frac{|x-y|}{t} > 1$ e, ainda $|x-y| \geqslant c\,|x-y|$. Logo, basta considerarmos valores $t > c|x-x_j| > c'\ell_j$. Pondo $J_1 = \langle f, \varphi\rangle$, com $\varphi(y) = [\phi_t(x-y) - \phi_t(x-x_j)]\eta_j(y)$ temos que

- Se $\alpha = 0$, então $|\varphi| \leqslant \dfrac{c|y-x_j|}{t^{n+1}} \leqslant \dfrac{c\,\ell_j}{|x-x_j|^{n+1}}$;

- Se $|\alpha| = 1$, então pela desigualdade do Valor Médio

$$\begin{aligned}
|\partial_j\varphi| &\leqslant \frac{1}{t^{n+1}}\Big|\partial_j\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big) - \partial_j\phi\Big(\frac{x-x_j}{t}\Big)\Big|\,|\eta_j| + c\frac{|y-x_j|}{t^{n+1}\ell_j} \\
&\leqslant \frac{c}{t^{n+1}} \leqslant \frac{c}{|x-x_j|^{n+1}}.
\end{aligned}$$

• Se $|\alpha| = k$, então para $\beta + \gamma = \alpha$ temos que

$$|\partial^\alpha \varphi| \leqslant \frac{c_\alpha\, \ell_j^{1-|\alpha|}}{|x - x_j|^{n+1}} \quad \text{e} \quad \text{supp}\, \varphi \subset \mathcal{Q}_j^a \subset B(\overline{x}_j, c\,\ell_j).$$

Além disso, a função $\psi = \frac{|x-x_j|^{n+1}}{\ell_j^{n+1}}\varphi$ está concentrada em $B(\overline{x}_j, c\,\ell_j)$ e, portanto pela Proposição 3.0.4 temos $|\langle f, \psi\rangle| \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(\overline{x})$. Finalmente,

$$\begin{aligned} |J_1| = |\langle f, \varphi\rangle| &= c\frac{\ell_j^{n+1}}{|x - x_j|^{n+1}}|\langle f, \psi\rangle| \\ &\leqslant c\frac{\ell_j^{n+1}}{|x - x_j|^{n+1}}\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(\overline{x}) \\ &\leqslant c\,\lambda\frac{\ell_j^{n+1}}{|x - x_j|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Para J_2, lembremos que $|c_j| \leqslant c\,\lambda$ e $|D^\alpha \eta_j| \leqslant c\frac{\lambda}{\ell_j^{|\alpha|}}$. Pela desigualdade do Valor Médio, obtemos que

$$\begin{aligned} |J_2| &\leqslant \int_{\mathcal{Q}_j^s} |\phi_t(x-y) - \phi(x - x_j)|\, |c_j|\, |\eta_j(y)|\, dy \\ &\leqslant \lambda\, c\,\ell_j \frac{|y - x_j|}{t^{n+1}} \leqslant \lambda\, c\frac{\ell_j^{n+1}}{|x - x_j|^{n+1}} \end{aligned}$$

com $t \geqslant c\,|x - x_j|$ e, portanto a demonstração está terminada para o caso em que $\frac{n}{n+1} < p \leqslant 1$.

A demonstração para o caso em que $p \leqslant \frac{n}{n+1}$ pode ser consultada na referência [19], páginas 101 à 105. ■

Observação 3.0.2 *A demonstração para no caso* $p \leqslant \frac{n}{n+1}$ *do Teorema 3.0.3, precisamos de uma estimativa melhor para*

$$\mathrm{M}_\phi b_j \leqslant \frac{c\lambda\ell_j^{n+1}}{|x - x_j|},\ x \notin Q_j^s. \tag{3.4}$$

Para melhorarmos a estimativa (3.4) *precisamos modificar a construção das funções* b_j*'s de modo que elas satisfaçam* $\int b_j(y)P(y)\,dy = 0$*, para todo polinômio* P *tal que* $deg(P) \leqslant d$ *com* d *a escolher. Apresentaremos a seguir* *como obter tais* c_j*'s e* b_j*'s, o método de como obter tais funções também será usado na demonstração do Teorema da Decomposição Atômica de* $H^p(\mathbb{R}^n)$ *a qual veremos mais adiante.*

Se $p \leqslant \frac{n}{n+1}$*, existe* $d \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{n}{n+d} < p \leqslant \frac{n}{d+n-1}$*. Seja* d *fixo e queremos encontrar a estimativa*

$$\mathrm{M}_\phi b_j \leqslant \frac{c\lambda \ell_j^{n+d}}{|x - x_j|^{n+d}},\ x \notin Q_j^s. \tag{3.5}$$

Se vale $\int b_j(y)P(y)\,dy = 0$*, usamos o polinômio de Taylor de grau* d *da função* $y \mapsto \varphi(y) = \psi_t(x-y)$ *em torno de* x_j *e obtemos a estimativa* (3.5)*. Fixemos* j *e consideremos* $L^2(Q_j^a)$ *munido com o produto interno*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|Q_j^a|}\int_{Q_j^a} f\,\overline{g}\,\widetilde{\eta}_j\,dy$$

com $\widetilde{\eta}_j = \frac{\eta_j}{\int \eta_j}$*.*

Sejam $\mathcal{P}_d = \{\text{polinômios}\, P\ \text{em}\, \mathbb{R}^n : deg(P) \leqslant d\}$*,* $\mathcal{P}_{d,j} = \mathcal{P}_d\Big|_{Q_j^a} \subseteq L^2(Q_j^a)$ *e a sua projeção ortogonal* $\mathcal{P}_j : L^2(Q_j^a) \to \mathcal{P}_{d,j}$*.*

Queremos construir os novos $c_j = c_j(x)$*'s e* b_j*'s de modo que esses novos* c_j*'s substituam as constantes* c_j*'s usadas anteriormente por polinômios* $c_j(x) \in \mathcal{P}_d$*. Então, definamos* $c_j = \mathcal{P}_j(f)$*, portanto* $f - c_j \perp \mathcal{P}_{d,j}$*, isto é,*

$$\langle f - c_j, P\rangle = \frac{1}{|Q_j^a|}\int_{Q_j^a} (f - c_j)\widetilde{\eta}_j\ P\,dy = 0, \quad \forall\, P \in \mathcal{P}_{d,j}.$$

Portanto, basta definirmos $b_j = (f - c_j)\widetilde{\eta}_j$*.*

3.1 Teorema da Decomposição Atômica do Espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$

Antes de apresentarmos a decomposição atômica de $H^p(\mathbb{R}^n)$ lembremos que, para $p > 1$ temos que $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Então, estaremos interessados em analisar as propriedades que o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ possui no caso em que $0 < p \leqslant 1$. Dada $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ sabemos, pelo Teorema da Caracterização

Maximal, que a função maximal associada a f pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Mesmo com várias equivalências o Teorema da Caracterização Maximal nos fornece pouca informação sobre o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$. Em virtude deste fato, apresentaremos a propriedade mais importante a qual o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ possui.

Definição 3.1.1 (p-Átomo) *Uma função $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ diz-se um p-átomo se satisfaz as seguintes condições:*

(i) supp $a \subset B(x_0, r)$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$;

(ii) $\|a\|_\infty \leqslant |B(x_0, r)|^{-\frac{1}{p}}$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a(x)\, dx = 0$, para todo $|\alpha| \leqslant k$, onde $k = \lfloor n(1/p - 1)\rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $n(1/p - 1)$.

De maneira mais geral, para $q \geqslant 1$, definamos os (p, q, s)-átomos de modo análago à Definição 3.1.1, substituindo as condições (ii) e (iii) por $\|a\|_q \leqslant |B(x_0, r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a(x)\, dx = 0$, para todo $|\alpha| \leqslant s$ e $s \geqslant \lfloor n(1/p - 1)\rfloor$ respectivamente. Além, disso impomos a condição de que $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$. O átomo da Definição 3.1.1 é um (p, ∞, s)-átomo, mas por simplicidade diremos apenas que tal átomo é um p-átomo.

Observação 3.1.1 *É imediato da Definição 3.1.1 as seguintes afirmações:*

(i) Na Definição 3.1.1 se ao invés de considerarmos bolas abertas considerarmos cubos com lados paralelos aos eixos coordenados teríamos uma definição equivalente;

(ii) Se $\frac{n}{n+1} < p \leqslant 1$, a propriedade (iii) da Definição 3.1.1 vale apenas para $\alpha = 0$;

(iii) Pelas propriedades (i) e (ii) apresentadas na Definição 3.1.1 obtemos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)|^p\, dx \leqslant 1$, pois

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)|^p\, dx &= \int_{B(x_0,r)} |a(x)|^p\, dx \\ &\leqslant \|a\|_\infty^p |B(x_0, r)| \\ &\leqslant |B(x_0, r)|^{-1} |B(x_0, r)| = 1.\end{aligned}$$

O resultado a seguir nos diz que um p-átomo é de fato um elemento de $H^p(\mathbb{R}^n)$ e que a "norma" em $H^p(\mathbb{R}^n)$ de tais átomos são uniformemente limitadas (em particular, elas são independentes das bolas onde o átomo a está suportado).

Proposição 3.1.1 *Seja a um p-átomo. Então existe uma constante C dependendo de n e p que denotaremos por $C = C(n,p)$ tal que*

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = \|\mathrm{M}_\phi a\|_p \leqslant C$$

com $0 \leqslant \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1$ *e supp* $\phi \subset B(0,1)$.

Demonstração. Seja a um p-átomo e ϕ como nas hipóteses da proposição e definamos $B^* = B(x_0, 2r)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{M}_\phi a(x)|^p dx = \int_{B^*} |\mathrm{M}_\phi a(x)|^p dx + \int_{(B^*)^c} |\mathrm{M}_\phi a(x)|^p dx.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} |(\phi_t * a)(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y) a(x-y)\, dy \Big| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(y)|\, |a(x-y)|\, dy \\ &\leqslant \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)\, dy \\ &\leqslant |B(x_0,r)|^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{M}_\phi a(x) = \sup\limits_{t>0} |(\phi_t * a)(x)| \leqslant |B(x_0,r)|^{-\frac{1}{p}}$. Disto segue que

$$\begin{aligned} \int_{B^*} |\mathrm{M}_\phi(x)|^p dx &\leqslant |B(x_0,r)|^{-1} \int_{B^*} dx \\ &= |B(x_0,r)|^{-1} |B^*| = |B(x_0,r)|^{-1} |B(x_0,r)| 2^n \\ &= C_1(n). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$(\phi_t * a)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x-y) a(y)\, dy = \int_{B(x_0,r)} \phi(x-y) a(y)\, dy \tag{3.6}$$

com $x \notin B^*$. Como $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, usando a expansão de Taylor para a função $y \mapsto \phi_t(x-y)$ temos que

$$\phi_t(x-y) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} \frac{\partial_y^\alpha(\phi_t(x-x_0))(x_0-y)^\alpha}{\alpha!} + R_{d+1}(t,x,x_0,y)$$

com $|R_{d+1}| \leqslant \frac{C|x_0-y|^{d+1}}{t^{n+d+1}}$ e $d = \lfloor n(1/p-1) \rfloor$. Substituindo isto em (3.6) temos que

$$|(\phi_t * a)(x)| \leqslant C \int_{B(x_0,r)} \frac{|a(y)|\,|x_0-y|^{d+1}}{t^{n+d+1}}\,dy \tag{3.7}$$

Como $y \in B(x_0,r)$, $x \notin B^*$ e $|x-y| \leqslant t$, temos $|x_0-y| \leqslant r$, $|x-x_0| \geqslant 2r$ e consequentemente $|y-x_0| \leqslant r \leqslant \frac{|x-x_0|}{2}$. Logo,

$$t \geqslant |x-y| \geqslant |x-x_0| - |x_0-y| \geqslant \frac{|x-x_0|}{2},$$

ou seja, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{2}{|x-x_0|}$. Usando este fato em (3.7) obtemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\phi a(x) &\lesssim |B(x_0,r)|^{-\frac{1}{p}} \int_{B(x_0,r)} \frac{|x_0-y|^{d+1}}{|x_0-x|^{n+d+1}} dy \\ &\cong \frac{|B(x_0,r)|^{-\frac{1}{p}}}{|x_0-x|^{n+d+1}} \int_{B(x_0,r)} \lambda^{d+1+n-1}\,d\lambda \\ &\cong \frac{|B(x_0,r)|^{-\frac{1}{p}} r^{n+d+1}}{|x-x_0|^{n+d+1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{(B^*)^c} (\mathrm{M}_\phi a(x))^p dx &\lesssim |B(x_0,r)|^{-1} r^{p(n+d+1)} \int_{(B^*)^c} |x-x_0|^{-p(n+d+1)} dx \\ &\lesssim |B(x_0,r)|^{-1} r^{p(n+d+1)} \int_{2r}^{\infty} \lambda^{-p(n+d+1)+n-1}\,d\lambda \\ &= C_2(n,p). \end{aligned}$$

Note que a integral imprópria acima converge, pois $-p(n+d+1)+n-1 < 0$ com $d = \lfloor n(1/p-1) \rfloor$. Portanto, segue a demonstração. ∎

Lema 3.1.1 *O espaço $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < \infty$.*

Demonstração. Vide referência [19], página 109. ∎

Proposição 3.1.2 *Seja $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H^p(\mathbb{R}^n)$. Se $f_j \to 0$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$, então $f_j \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definamos $\varphi_r(x) = \varphi(x-r) \doteq T_r\varphi(x)$, para $|r| \leqslant 1$. Claramente $\{T_r\varphi\}_{|r|\leqslant 1}$ é um conjunto limitado de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Daí, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\{T_r\varphi\}_{|r|\leqslant 1} \subset \mathcal{F}$ e

$$\begin{aligned} |\langle f_j, \varphi\rangle| &= |\langle f_j, T_{-r}T_r\varphi\rangle| = |\langle T_r f_j, T_r\varphi\rangle| \\ &= |[(T_r f_j) * (T_r\check{\varphi})](0)| = |[f_j * T_r\check{\varphi}](-r)| \leqslant \varepsilon^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f_j(-r). \end{aligned}$$

Segue da expressão acima que

$$|\langle f_j, \varphi\rangle|^p \lesssim \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)} [\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f_j(-r)]^p \, dr \lesssim \|f_j\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$$

quando $j \to \infty$. Portanto, $f_j \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

Teorema 3.1.1 (Decomposição Atômica de H^p) *Se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, então*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$$

com $\lambda_j \in \ell^p$, a_j's todos p-átomos e $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \leqslant C\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}$.

Demonstração. Faremos a demonstração deste teorema inicialmente para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ e $p > \frac{n}{n+1}$. Pelo Lema 3.1.1 segue que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Dado $\lambda = 2^k$, para $k \in \mathbb{Z}$, seja $f^k = g^k - b^k$ a decomposição de Calderón-Zygmund de f, isto é,

(i) $\|g^k\|_\infty \leqslant C\, 2^k$;

(ii) $b^k = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^k$, supp $b_j^k \subset {}^*\mathcal{Q}_j^k$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha b_j^k(x)\, dx = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|\alpha| \leqslant \lfloor n(1/p - 1)\rfloor$;

(iii) $b_j^k = (f - c_j^k)\eta_j^k$, sendo c_j^k um polinômio tal que $deg(c_j^k) \leqslant d \doteq \lfloor n(1/p-1) \rfloor$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} {}^*\mathcal{Q}_j^k = \Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) > 2^j\}$.

É claro que, $\Omega^{k+1} \subset \Omega^k$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) = \infty\}$. Mas, sabemos que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $|\bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega^k| = 0$. Combinado o fato anterior com (i) e (ii) acima, temos que

$$\begin{aligned}
\|f - g^k\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \|b^k\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j^k\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathrm{M}_\phi b_j^k\|_p^p \\
&\leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\|_{L^p({}^*\mathcal{Q}_j^k)} \\
&\leqslant C' \|\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f\|_{L^p(\Omega^k)}^p \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$ pelo Teorema da Convergência Dominada.

Pela Proposição 3.1.2 segue que $g^k \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $k \to \infty$. De (i) temos que $|g^k| \leqslant C\, 2^k$, portanto $g^k \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uniformemente quando $k \to -\infty$. Lembremos que

$$g^k = \begin{cases} f, & \text{em } (\Omega^k)^c \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j^k \eta_j^k, & \text{em } \Omega^k. \end{cases}$$

Logo,

$$g^{N+1} - g^N = \sum_{k=-N}^{N} g^{k+1} - g^k \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

quando $N \to \infty$. Disto segue que, $f = \sum_{k=1}^{\infty} (g^{k+1} - g^k)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$f = \sum_{k,j} (g^{k+1} - g^k)\eta_j^k. \tag{3.8}$$

Note que, sendo $g^{k+1}+b^{k+1}=f=g^k+b^k$, temos que $g^{k+1}-g^k=b^k-b^{k+1}$ está suportada em Ω^k e, ainda a função $\varphi=(g^{k+1}-g^k)\eta_j^k$ está suportada numa bola B_j^k (a escolher) a qual contém ${}^*\mathcal{Q}_j^k$. Como φ não possui integral de momentos nulos, precisamos encontrar uma decomposição melhor para f, para isto usaremos a projeção a qual surge na demonstração do Teorema da Decomposição de Calderón-Zygmund (vide referência [19], página 104).

Seja $\mathcal{P}_j=\mathcal{P}_j^k$ a projeção dita anteriormente. Temos $c_j^k=\mathcal{P}_j^k(f)$ e, ainda $c_l^{k+1}=\mathcal{P}_l^{k+1}(f)$. Consideremos, $c_{j,l}^k=\mathcal{P}_l^{k+1}[(f-c_l^{k+1})\eta_j^k]$ o polinômio de grau menor ou igual a d, com $\mathcal{P}_l^{k+1}:L^2({}^*\mathcal{Q}_l^{k+1})\to\mathcal{P}_d\big|_{\mathcal{Q}_l^{k+1}}$. Os $c_{j,l}^k$'s cumprem as seguintes condições:

(iv) Se ${}^*\mathcal{Q}_j^k\cap{}^*\mathcal{Q}_l^{k+1}=\emptyset$, então $c_{j,l}^k\equiv 0$;

(v) $|c_{j,l}^k\,\eta_l^{k+1}|\leqslant C\,2^k$.

Observemos que se j e l são tais que ${}^*\mathcal{Q}_j^k\cap{}^*\mathcal{Q}_l^{k+1}\neq\emptyset$, então vale que $\operatorname{diam}({}^*\mathcal{Q}_j^k)\geqslant C\operatorname{diam}({}^*\mathcal{Q}_l^{k+1})$, pois $\Omega^{k+1}\subset\Omega^k$. Por outro lado temos que $|c_{j,l}^k\,\eta_l^{k+1}|\leqslant C\,2^j$ (vide referência [19], página 108). Voltando para a decomposição (3.8) temos que

$$\begin{aligned}f=\sum_{k=1}^{\infty}(b^k-b^{k+1})&=\sum_{k=1}^{\infty}[\sum_{j=1}^{\infty}(f-c_j^k)\eta_j^k-\sum_l(f-c_j^{k+1})\eta_l^{k+1}]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_j^k\end{aligned}$$

sendo que

$$A_j^k=(f-c_j^k)\eta_j^k-\sum_l(f-c_l^{k+1})\eta_l^{k+1}\eta_j^k+\sum_l c_{j,l}^k\eta_l^{k+1}$$

e $c_{j,l}^k=\mathcal{P}_l^{k+1}[(f-c_l^{k+1})\eta_j^k]$ e $|c_{j,l}^k\,\eta_j^k|\leqslant C\,2^k$. Note que $\sum_l c_{j,l}^k\eta_l^{k+1}$ faz sentido somente se ${}^*\mathcal{Q}_j^k\cap{}^*\mathcal{Q}_l^{k+1}\neq\emptyset$. Mas, para que tal interseção é não vazia basta demonstrarmos que $\sum_l c_{j,l}^k\,\eta_l^{k+1}=0$ e isto segue do fato de que $\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j^k=1$ no suporte de η_j^k, $\Omega^{k+1}\subset\Omega^k$ e $[\mathcal{P}_l^{k+1}(f)]^2=\mathcal{P}_l^{k+1}(f)$. A seguir listaremos propriedades as quais a função A_j^k satisfaz:

(vi) supp $A_j^k\subset B_j^k$ a qual contém ${}^*\mathcal{Q}_j^k$ e todos os cubos ${}^*\mathcal{Q}_l^k$ os quais possuem interseção não vazia com ${}^*\mathcal{Q}_l^{k+1}$.

Daí, $\operatorname{diam}({}^*\mathcal{Q}_l^k) \leqslant C\operatorname{diam}({}^*\mathcal{Q}_j^k)$ e $|B_j^k| \cong |{}^*\mathcal{Q}_j^k|$;

(vii) $|A_j^k| \leqslant C\,2^k$;

$(viii)$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha A_j^k(x)\,dx = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|\alpha| \leqslant d$.

Para demonstrar os itens acima vide referência [19], página 109. Pondo $\lambda_{k,j} = C2^k|B_j^k|^{-\frac{1}{p}}$ e $a_{k,j} = |\lambda_{k,j}|^{-1}A_j^k$, temos que

$$f = \sum_{k,j} A_k^j = \sum_{k,j} \lambda_{k,j} a_{k,j}$$

com $a_{k,j}$ cumprindo as condições da definição de p-átomo. Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j} |\lambda_{k,j}|^p &= \sum_{k,j} 2^{pk}|B_j^k|C \\
&\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty} 2^{pk} \sum_{j=1}^{\infty} |B_j^k| \\
&= C\sum_{k=1}^{\infty} 2^{pk}|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) > 2^k\}|.
\end{aligned}$$

Sabemos que dada $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p dx = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)\,d\alpha$$

com λ_g a função distribuição de g. Pondo $g = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}f$ e $h(\alpha) = \alpha^{p-1}\lambda_g(\alpha)$ temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j} |\lambda_{k,j}|^p &= C\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-1)}|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) > 2^k\}|2^k \\
&= C\sum_{k=1}^{\infty} h(2^k)2^k \quad \text{soma de Riemann de } h \\
&\leqslant C'\int_0^\infty \alpha^{p-1}|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) > \alpha\}|\,d\alpha \\
&= C'\int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x)]^p\,dx \\
&\cong \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p.
\end{aligned}$$

Portanto, a função f possui a decomposição atômica desejada desde que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$. Agora, mostremos que a decomposição é válida para $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, podemos encontrar uma sequência $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_i \to f$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_{i+1} - f_i\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant 2^{-i-1}\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}$. Logo, $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i+1} - f_i$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a decomposição atômica para cada $f_{i+1} - f_i$ temos que

$$f = \sum_{i,k,j} \lambda^i_{k,j} a^i_{k,j}$$

com $\sum_{i,k,j} |\lambda^i_{k,j}|^p \leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)} \cong \|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ o que conclui a demonstração do teorema. ∎

Capítulo

4

Caracterização de Operadores Lineares Limitados em Espaços de Hardy

Apresentaremos um exemplo de um átomo em $H^p(\mathbb{R}^n)$ o qual a sua norma não é alcançada por qualquer decomposição atômica finita. O primeiro exemplo deste tipo para $H^1(\mathbb{R})$ foi exibido por Y. Meyer vide referência [1]. Com base nas ideias obtidas para $H^1(\mathbb{R}^n)$ apenas adaptamos para um caso mais geral em $H^p(\mathbb{R}^n)$ com $0 < p \leqslant 1$ seguindo as ideias de [2]. Iniciaremos este capítulo definindo alguns espaços de interesse.

Seja $\Theta^k(\mathbb{R}^n)$ com $k \geqslant \lfloor (1/p - 1)n \rfloor$ o espaço de todas as combinações lineares finitas de p-átomos, isto é,

$$\Theta^k(\mathbb{R}^n) = \text{span}\Big\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \text{ é limitado e} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) = 0 \text{ para } |\alpha| \leqslant k \Big\}.$$

Sabemos que $\Theta^k(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leqslant 1$ e $k \geqslant \lfloor (1/p - 1)n \rfloor$. Além disso, o espaço $\Theta^k(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ também é um subespaço denso em $H^p(\mathbb{R}^n)$.

No espaço $\Theta^k(\mathbb{R}^n)$ consideraremos duas semi-normas definidas por:

$$\|f\|_{H^p,\infty} = \inf\Big\{ \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j,\ a_j \text{ é um } p\text{-átomo}, \ j \in \mathbb{N} \Big\};$$

$$\|f\|_{H^p,<\infty} = \inf\Big\{ \Big(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j,\ a_j \text{ é um } p\text{-átomo}, \ 1 \leqslant j \leqslant N \Big\}.$$

Observação 4.0.2 *Para as próximas demonstrações que faremos, será necessário comutar somas com integral. Para que fique claro o motivo pelo qual podemos fazer tal operação, vide o Teorema 1.1.4.*

Devemos ressaltar que a notação $\mathcal{I}(x_0, r)$ denota o intervalo aberto de centro x_0 e de tamanho $r > 0$, isto é, $\mathcal{I}(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Teorema 4.0.2 *Para todo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $f \in \Theta^0(\mathbb{R})$ tal que*

$$\|f\|_{H^1,\infty} < \varepsilon \quad e \quad \|f\|_{H^1,<\infty} = 1.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, considere $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma enumeração dos racionais de $(0,1)$ e $\varepsilon_j = \dfrac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Seja $\{q_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência definida da seguinte forma:

• Seja $q_{j_1} = q_1$, então existe $r_1 < \varepsilon_1 : \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}(q_1, r_1) \subset (0,1)$. Em seguida, descarte todos os racionais pertencentes a $\overline{\mathcal{I}}_1$;

• Seja $q_{j_2} =$ o próximo racional da enumeração diferente de q_{j_1} o qual não foi descartado, então existe $r_2 < \varepsilon_2 : \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}(q_{j_2}, r_2) \subset (0,1)\backslash \mathcal{I}_1$. Em seguida, descarte todos os racionais pertencentes a $\overline{\mathcal{I}}_2$;

• Seja $q_{j_3} =$ o próximo racional da enumeração diferente de q_{j_2} o qual não foi descartado nos passos anteriores, então existe $r_3 < \varepsilon_3 : \mathcal{I}_3 = \mathcal{I}(q_{j_3}, r_3) \subset (0,1)\backslash \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. Em seguida, descarte todos os racionais pertencentes a $\overline{\mathcal{I}}_3$.

Proceda desta forma indutivamente, assim todo racional ou é centro de algum intervalo $\mathcal{I}_j$ ou pertence algum intervalo $\overline{\mathcal{I}}_j$. Então, devido a construção os intervalos $\mathcal{I}_j$ são disjuntos. Além disso, se $\mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_j$, então

$$|\mathcal{U}| = \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| = \sum_{j=1}^{\infty} r_j < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

O conjunto $\mathcal{U}$ é denso em $[0,1]$, pois $[0,1] \subset \overline{\mathcal{U}}$. Definamos

$$a_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{I}_j|}, & \text{se } x \in \mathcal{I}_j^e \\ -\frac{1}{|\mathcal{I}_j|}, & \text{se } x \in \mathcal{I}_j^d \end{cases}$$

onde $\mathcal{I}_j^d$ e $\mathcal{I}_j^e$ denotam a metade direita e a metade esquerda do intervalo $\mathcal{I}_j$ respectivamente.

Mostremos que a_j é 1-átomo. Note que, devido a definição de a_j temos que a_j está suportado em $\mathcal{I}_j$ o que conclui a condição (i) da definição de átomo. Também é claro que, a condição (ii) da definição de átomo é satisfeita, pois $\|a_j\|_\infty \leqslant |\mathcal{I}_j|^{-1}$.

Finalmente, para demonstrarmos a condição (iii) usando as notações $\mathcal{I}_j^d$ e $\mathcal{I}_j^e$ definidas acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} a_j(x)\,dx &= \int_{\mathcal{I}_j^e} a_j(x)\,dx + \int_{\mathcal{I}_j^d} a_j(x)\,dx \\ &= \int_{\mathcal{I}_j^e} \frac{1}{|\mathcal{I}_j|}\,dx + \int_{\mathcal{I}_j^d} \frac{-1}{|\mathcal{I}_j|}\,dx \\ &= \frac{1}{|\mathcal{I}_j|}(|\mathcal{I}_j^e| - |\mathcal{I}_j^d|) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que a_j é 1-átomo. Definamos a função $f = \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| a_j$. Note que, a função f é 1-átomo, pois supp $f \subset [0,1]$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ e devido ao fato de que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| \int_{\mathbb{R}} |a_j(x)|\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| \int_{\mathcal{I}_j} \|a_j\|_\infty\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| < \varepsilon,$$

e temos pelo Teorema 1.1.4 que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| a_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| \int_{\mathbb{R}} a_j(x)\,dx = 0.$$

Claramente $|f(x)| = 1$ q.t.p $x \in \mathcal{U}$, pois $\mathcal{I}_l \cap \mathcal{I}_k = \emptyset$ se $l \neq k$. Além disso,

$$\|f\|_{H^1,\infty} = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| : f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j \right\} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{I}_j| < \varepsilon.$$

Para demonstrarmos que $\|f\|_{H^1,<\infty} = 1$, consideremos uma decomposição atômica finita $f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j b_j$ onde cada átomo b_j está suportado em um intervalo $\mathcal{J}_j$, com $\mathcal{J}_j \cap \mathcal{J}_k$ se $k \neq j$ (note que existe pelo menos uma decomposição atômica finita $f = 1 \cdot f$). Então, se $\chi_{\mathcal{U}}$ é a função característica de $\mathcal{U}$, isto é, $\chi_{\mathcal{U}}(x) = 1$ se $x \in \mathcal{U}$ e $\chi_{\mathcal{U}}(x) = 0$ se $x \notin \mathcal{U}$, então

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{U}}(x) = |f(x)| &\leqslant \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j||b_j(x)|\chi_{\widetilde{\mathcal{J}_j}}(x) \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|\|b_j\|_\infty \chi_{\widetilde{\mathcal{J}_j}}(x) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j||\widetilde{\mathcal{J}_j}|^{-1}\chi_{\widetilde{\mathcal{J}_j}}(x) =: g(x).
\end{aligned}$$

Note que g é contínua q.t.p (possivelmente com a exceção $\bigcup_{j=1}^{N} \partial(\mathcal{J}_j)$) e como $\mathcal{U}$ é denso em $[0,1]$. temos que $g(x) \geqslant 1$ q.t.p $x \in [0,1]$, e integrando g sobre $[0,1]$ obtemos que

$$\begin{aligned}
1 \leqslant \int_{[0,1]} g(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j||\mathcal{J}_j|^{-1} \int_{[0,1]} \chi_{\mathcal{J}_j}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j||\mathcal{J}_j|^{-1} \int_{\mathcal{J}_j} dx = \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|.
\end{aligned}$$

Portanto, pela estimativa acima segue que $\|f\|_{H^1,<\infty} \geqslant 1$ o que conclui a demonstração. ∎

Observação 4.0.3 *Uma partição de um conjunto X é qualquer coleção $\mathcal{P}$ finita de subconjuntos não vazios de X dotada da propriedade de que todo* *elemento de X pertence a um e apenas um dos elementos de $\mathcal{P}$. Dizemos que cada elemento de $\mathcal{P}$ é um bloco da partição.*

Teorema 4.0.3 *Sejam $0 < p \leqslant 1$ e $k \geqslant \lfloor (1/p - 1)n \rfloor$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $f \in \Theta^k(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|f\|_{H^p,\infty} < \varepsilon \quad e \quad \|f\|_{H^p,<\infty} = 1. \tag{4.1}$$

Demonstração. Construiremos inicialmente um p-átomo a suportado na bola unitária $B(0,1)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a(x)\ dx = 0, \quad \forall\, |\alpha| \leqslant k \tag{4.2}$$

e

$$|a(x)| \geqslant c\,|B(0,1)|^{-\frac{1}{p}} \quad \text{q.t.p } x \in B(0,1). \tag{4.3}$$

Para isto, definamos K como sendo a cardinalidade da coleção de multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leqslant k$, isto é,

$$K = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n-1+j \\ j \end{pmatrix}.$$

Seja $\{E_j\}_{j=1}^m$ uma partição da bola $B(0,1)$ com $m > K$. Assim, os vetores

$$v_j = \Big(\int_{E_j} x^\alpha\, dx\Big)_{|\alpha|\leqslant k} \in \mathbb{R}^K, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.4}$$

são linearmente dependentes, pois a quantidade de vetores é maior do que K. Logo, existem escalares não todos identicamente nulos tais que $\sum_{j=1}^m \beta_j v_j = 0$. Disto segue que, podemos redefinir os coeficientes e agora não nulos, tais que $\sum_{j=1}^m c_j v_j = 0$ e, ainda $\sup_{1\leqslant j\leqslant m} |c_j| \leqslant |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}}$.

De fato, definamos $c_j = \frac{\beta_j}{C\,|B(0,1)|^{\frac{1}{p}}}$ sendo que $C = \sup_{1\leqslant j\leqslant m} |\beta_j|$. É claro que $\sup_{1\leqslant j\leqslant m}|c_j| \leqslant |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}}$ e $\sum_{j=1}^m c_j v_j = 0$. Afirmamos que

$$a(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{4.5}$$

é um p-átomo o qual satisfaz (4.3) com $c = |B(0,1)|^{\frac{1}{p}} \inf_{1\leqslant j\leqslant m}|c_j|$. Mostremos inicialmente que a função em (4.5) é um p-átomo. De fato,

(i) Claramente $\operatorname{supp} a \subset B(0,1)$, pois $\{E_j\}_{j=1}^m$ é uma partição da bola $B(0,1)$;

(ii) Dado $x \in B(0,1)$ existe um único $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_j$, pois $\{E_j\}_{j=1}^m$ é partição da bola $B(0,1)$. Assim, $\|a\|_\infty \leqslant |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}}$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \sum_{j=1}^m c_j\chi_{E_j}(x)\,dx = \Big(\sum_{j=1}^m c_j v_j\Big)_{\pi_\alpha} = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leqslant k$. O símbolo π_α denota a projeção sobre α.

Finalmente, para demonstrarmos que a cumpre (4.3) basta combinarmos a definição do p-átomo a com o fato de que $\{E_j\}_{j=1}^m$ é uma partição da bola $B(0,1)$; dado $x \in B(0,1)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_j$. Assim,

$$\begin{aligned}
|a(x)| = |c_j| \geqslant \inf_{1\leqslant j\leqslant m}|c_j| &= \frac{|B(0,1)|^{\frac{1}{p}}}{|B(0,1)|^{\frac{1}{p}}} \inf_{1\leqslant j\leqslant m}|c_j| \\
&= c\,|B(0,1)|^{-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Agora, construiremos uma coleção de bolas $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ tais que $B_j \subset B(0,1)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $B_j \cap B_k = \emptyset$ se $j \neq k$ e satifazendo

$$\mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \ \text{ é denso em } \ B(0,1) \ \text{ e } \ |\mathcal{U}| = \sum_{j=1}^{\infty} |B_j| < c^p \varepsilon^p. \tag{4.6}$$

Seja $\varepsilon_j = \left(\frac{\varepsilon^p c^p}{2^{j+1} c_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ em que $\varepsilon > 0$ é arbitrário e c_n é uma constante que iremos escolher. Seja $\{q_j\}_{j=1}^\infty$ uma enumeração de $B(0,1) \cap \mathbb{Q}^n$. Procedendo de modo análago a construção apresentada no teorema 4.0.2, podemos reproduzi-la para o caso mais geral, da seguinte forma:

• Seja $q_{j_1} = q_1 \in B(0,1)$, então existe $r_1 < \varepsilon_1$ tal que $B_1 = B(q_{j_1}, r_1) \subset B(0,1)$. Em seguida, descarte todos os pontos com coordenadas racionais de $\overline{B}_1$;

• Seja $q_{j_2} = q_l \in B(0,1)$ com q_l sendo o próximo elemento da enumeração o qual não foi descartado no passo anterior. Então, existe $r_2 < \varepsilon_2$ tal que $B_2 = B(q_{j_2}, r_2) \subset B(0,1) \setminus B_1$. Em seguida, descarte todos os descarte todos os pontos com coordenadas racionais de $\overline{B}_2$;

• Seja $q_{j_3} = q_s \in B(0,1)$ com q_s sendo o próximo elemento da enumeração o qual não foi descartado nos passos anteriores. Então, existe $r_3 < \varepsilon_3$ tal que $B_3 = B(q_{j_3}, r_3) \subset B(0,1) \setminus B_1 \cup B_2$. Em seguida, descarte todos descarte todos os pontos com coordenadas racionais de $\overline{B}_3$.

Proceda desta forma indutivamente e observe que não existirá nenhum racional em $B(0,1)$ o qual não é centro de alguma bola B_j ou pertença alguma bola $\overline{B}_j$. Claramente, temos que $\mathcal{U}$ é denso em $B(0,1)$, pois $B(0,1) \subset \overline{\mathcal{U}}$. Segue também da construção feita que $B_l \cap B_k = \emptyset$ se $l \neq k$, então

$$|\mathcal{U}| = \sum_{j=1}^{\infty} |B_j| = \sum_{j=1}^{\infty} c_n\, r_j^n < c_n \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^n = c_n \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\varepsilon^p c^p}{2^{j+1}\, c_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n < c^p \varepsilon^p.$$

Definamos para cada $j \in \mathbb{N}$ a função $a_j(x) = r_j^{-\frac{n}{p}} a((x - q_j)/r_j)$. Mostremos que a_j é um p-átomo para cada $j \in \mathbb{N}$. De fato,

(i) supp $a_j \subset B_j = B(q_j, r_j)$, pois supp $a \subset B(0,1)$;

(ii) $\|a_j\|_\infty \leqslant r_j^{-\frac{n}{p}} |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}} = \Big(r_j^n |B(0,1)| \Big)^{-\frac{1}{p}} = |B(q_j, r_j)|^{-\frac{1}{p}}$;

(iii) Usando o fato de que a possui integral com momentos nulos e a mudança de variável $u = \frac{x - q_j}{r_j}$ temos que

$$\int_{B(q_j, r_j)} x^\alpha a_j(x)\, dx = 0.$$

Portanto, para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que a_j é um p-átomo. Como consequência de (4.3) segue que

$$\begin{aligned} |a_j(x)| = r_j^{-\frac{n}{p}} \left| a\Big(\frac{x - q_j}{r_j} \Big) \right| &\geqslant c\, r_j^{-\frac{n}{p}} |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}} \\ &= c \left(r_j^n |B(0,1)| \right)^{-\frac{1}{p}} = c\, |B(q_j, r_j)|^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Seja $f(x) = c^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^{\frac{1}{p}} a_j(x)$. Então, é claro que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^{p,\infty}}^{p} &= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p : f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right\} \\
&\leqslant c^{-p} \sum_{j=1}^{\infty} |B_j| \\
&< \frac{c^p}{c^p}\, \varepsilon^p \\
&< \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Portanto, pela estimativa acima temos que $\|f\|_{H^{p,\infty}} < \varepsilon$. Vejamos que $\varphi = c\,|B(0,1)|^{-\frac{1}{p}} f$ é um p-átomo. De fato, note inicialmente que, devido a definição da função f temos que o suporte φ está contido em $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset B(0,1)$, então supp $\varphi \subset B(0,1)$ o que demonstra a condição (i) da definição de p-átomo.

Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &\leqslant |B_j|^{\frac{1}{p}} |a_j(x)| |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}} \\
&\leqslant |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Note que a estimativa acima se verifica uniformemente para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, $\|\varphi\|_{\infty} \leqslant |B(0,1)|^{-\frac{1}{p}}$ o que demonstra a condição (ii).

Para demonstrarmos a condição (iii) definamos $f_j(x) = |B_j|^{\frac{1}{p}} x^{\alpha} a_j(x)$ e mostremos que $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|\, dx < \infty$. De fato, como $|x|^{\alpha} \leqslant 1$, pois pela construção $B_j \subset B(0,1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|\, dx &= \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^{\frac{1}{p}} \int_{B_j} |x^{\alpha} a_j(x)|\, dx \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^{\frac{1}{p}} \int_{B_j} \|a_j(x)\|_{\infty}\, dx \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |B_j| < c^p \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

portanto $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|\, dx < \infty$. Aplicando o Teorema 1.1.4 e o fato de que os átomos a_j's possuem integral com anulamento de momentos temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha c\,|B(0,1)|^{-\frac{1}{p}} f(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha |B(0,1)|^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^{\frac{1}{p}} a_j(x)\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |B(0,1)|^{\frac{1}{p}} |B_j|^{\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a_j(x)\ dx \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função φ é um p-átomo. Além disso, note que $f = \lambda\varphi$ sendo que $\lambda = c^{-1}|B(0,1)|^{\frac{1}{p}}$, ou seja, a função f possui uma decomposição atômica finita e $\|f\|_{H^p,<\infty} \leqslant c^{-1}|B(0,1)|^{\frac{1}{p}}$.

Suponhamos que f tenha uma outra decomposição atômica finita digamos que $f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j b_j$ onde cada b_j é um p-átomo suportado em uma bola $\widetilde{B}_j$ com $\widetilde{B}_j \cap \widetilde{B}_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Seja g um majorante da função f dado por

$$
g = \Big(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p |B_j|^{-1} \chi_{\widetilde{B}_j} \Big)^{\frac{1}{p}}.
$$

Segue da definição da função f que

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{U}}(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j||b_j(x)|\chi_{\widetilde{B}_j}(x) &\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p |b_j(x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \chi_{\widetilde{B}_j}(x) \\
&\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p |\widetilde{B}_j|^{-1} \chi_{\widetilde{B}_j}(x) \Big)^{\frac{1}{p}} =: g(x).
\end{aligned}
$$

Claramente g é contínua q.t.p (possivelmente com a exceção do conjunto $\bigcup_{j=1}^{N} \partial(\widetilde{B}_j)$) e como $\mathcal{U}$ é denso na bola $B(0,1)$ temos que $g(x) \geqslant 1$ q.t.p $x \in B(0,1)$. Portanto, integrando a estimativa anterior, segue que

$$
|B(0,1)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} g^p(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p |\widetilde{B}_j|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\widetilde{B}_j}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p,
$$

ou seja, $|B(0,1)|^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_{H^p,<\infty}$. Portanto,

$$|B(0,1)|^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_{H^p,<\infty} \leqslant c^{-1}|B(0,1)|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.7}$$

Definamos $\widetilde{f} = \frac{f}{\|f\|_{H^p,<\infty}}$. Note que, pela estimativa (4.7) segue que $\|f\|_{H^p,<\infty} \neq 0$, portanto sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário podemos redefini-lo de modo apropriado tal que

$$\|\widetilde{f}\|_{H^p,\infty} = \frac{\|f\|_{H^p,\infty}}{\|f\|_{H^p,<\infty}} < \frac{\varepsilon\|f\|_{H^p,<\infty}}{\|f\|_{H^p,<\infty}} = \varepsilon$$

e

$$\|\widetilde{f}\|_{H^p,<\infty} = \frac{\|f\|_{H^p,<\infty}}{\|f\|_{H^p,<\infty}} = 1.$$

Portanto, a função $\widetilde{f}$ cumpre as condições (4.1) o que conclui a demonstração do teorema. ∎

Teorema 4.0.4 (Hahn-Banach) *Sejam E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (real ou complexo) e $p : E \to [0,\infty)$ uma função satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $x \in E$ e $\lambda > 0$;

(ii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$.

Se $f : Z \to \mathbb{K}$ é um funcional definido no subespaço $Z \subset E$ (E, Z e f sobre o mesmo corpo) com $|f(z)| \leqslant p(z)$, para todo $z \in Z$, então f possui uma extensão linear $F : X \to \mathbb{K}$ tal que $|F(x)| \leqslant p(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração. Vide referência [16], Teorema 10.13. ∎

Teorema 4.0.5 *Existe um funcional l definido em $\Theta^0(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$|l(f)| \leqslant \|f\|_{H^1,<\infty}, \quad \forall\, f \in \Theta^0(\mathbb{R}^n), \tag{4.8}$$

o qual não pode ser estendido para um funcional em $H^1(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\sup_{f \in \Theta^0(\mathbb{R}^n)} |l(f)|/\|f\|_{H^1,\infty} = \infty. \tag{4.9}$$

Demonstração. Seja $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma sequência tal que $B(x_j,1)\cap B(x_i,1)=\emptyset$ para $i\neq j$. Para cada $j\in\mathbb{N}$, seja $a_j\in\Theta^0(\mathbb{R}^n)$ suportado na bola $B(x_j,1)$ e satisfazendo

$$\|a_j\|_{H^1,\infty}<\frac{1}{j}\quad \text{e}\quad \|a_j\|_{H^1,<\infty}=1. \tag{4.10}$$

A expressão (4.10) segue do Teorema 4.0.3. Pela demonstração do Teorema 4.0.3 podemos assumir que

$$|a_j(x)|\geqslant\frac{c}{|B(0,1)|}>0, \tag{4.11}$$

para todo $x\in\mathcal{U}_j$, com $\mathcal{U}_j$ denso em $B(x_j,1)$ e c uma constante a qual não depende de j.

Definamos $V=\operatorname{span}\{a_j(x)\,:\,j\in\mathbb{N}\}\subset\Theta^0(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as combinações lineares finita das funções acima. Para $f=\sum_{j=1}^N c_ja_j\in V$ temos que

$$\|f\|_{H^1,<\infty}=\inf\left\{\sum_{j=1}^N|\lambda_j|:f=\sum_{j=1}^N\lambda_ja_j\right\}\leqslant\sum_{j=1}^N|c_j|.$$

Por outro lado, suponhamos que f possua uma outra decomposição atômica finita, digamos que $f=\sum_{j=1}^N\lambda_jb_j$, onde cada b_j está suportado em uma bola B_j. Pela estimativa (4.11) segue que

$$\begin{aligned}\frac{c}{|B(0,1)|}\sum_{j=1}^N|c_j|\chi_{\mathcal{U}_j}(x)\leqslant\sum_{j=1}^N|c_j||a_j(x)|\chi_{\mathcal{U}_j}(x)=|f(x)|\leqslant\sum_{j=1}^N|\lambda_j|\|b_j\|_\infty\chi_{B_j}(x)\\ \leqslant\sum_{j=1}^N|\lambda_j||B_j|^{-1}\chi_{B_j}(x)=:g(x).\end{aligned}$$

É claro que g é contínua q.t.p (possivelmente com excessão da $\bigcup_{j=1}^N\partial B_j$) e como cada $\mathcal{U}_j$ é denso em $B(x_j,1)$, temos que

$$g(x)\geqslant\frac{c}{|B(0,1)|}\sum_{j=1}^N|c_j|\chi_{\mathcal{U}_j}(x)\quad \text{q.t.p}\,x\in\mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

Portanto, integrando ambos os lados da expressão (4.12) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \geqslant \frac{c}{|B(0,1)|}\sum_{j=1}^{N}|c_j||B(x_j,1)| = c\sum_{j=1}^{N}|c_j|. \tag{4.13}$$

Além disso, usando a definição da função g e a conclusão em (4.13) podemos concluir que

$$c\sum_{j=1}^{N}|c_j| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j||B_j|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{B_j}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|.$$

Portanto,

$$c\sum_{j=1}^{N}|c_j| \leqslant \|f\|_{H^1,<\infty} \leqslant \sum_{j=1}^{N}|c_j|, \quad \forall\, f = \sum_{j=1}^{N}c_j a_j \in V. \tag{4.14}$$

Definamos um funcional linear l em V por

$$l(f) = \sum_{j=1}^{N}c_j \quad \text{para} \quad f = \sum_{j=1}^{N}c_j a_j \in V.$$

Segue de (4.14) segue que l é um funcional linear limitado (bem definido devido a (4.14)) em V o qual é subespaço do espaço vetorial normado $\Theta^0(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\cdot\|_{H^1,<\infty}$. Além disso, é claro que a norma de l é igual a 1 q.t.p sobre átomos.

Portanto, pelo Teorema 4.0.4, o funcional l pode ser estendido para um funcional L definido sobre o espaço $\Theta^0(\mathbb{R}^n)$ tal que (4.8) é satisfeita para a extensão L. Como, $|l(a_j)|/\|a_j\|_{H^1,\infty} \geqslant j$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$ temos (4.9) o que completa a demonstração. ∎

Observação 4.0.4 *A demonstração feita para o Teorema 4.0.5 pode ser facilmente modificada para mostrar a existência de um funcional linear* l *definido sobre um subespaço* $V \subset \Theta^k(\mathbb{R}^n)$, *onde* $k \geqslant \lfloor(1/p-1)\rfloor$, $0 < p \leqslant 1$ *o qual é limitado sobre* V *munido pela semi-norma* $\|\cdot\|_{H^p,<\infty}$, *mas não é limitado em* V *visto como um funcional munido pela semi-norma* $\|\cdot\|_{H^p,\infty}$. *Entretanto, o Teorema de Hanh-Banach 4.0.4 não é válido em geral para* *espaços semi-normados, isto é, não podemos garantir que a extensão de tal operador se mantenha limitada em* $\Theta^k(\mathbb{R}^n)$*. Este resultado foi publicado por Duren, Romberg e Shields em [10] o qual caracterizou o dual clássico do espaço* $H^p(\mathbb{D})$*, para* $0 < p < 1$ *sendo* $\mathbb{D}$ *o disco unitário complexo, e usou isto para provar que o Teorema de Hanh-Banach é falso para esses espaços.*

O Teorema 4.0.5 relaciona-se com o problema de mostrar limitação de operadores em espaços de Hardy via decomposições atômicas. Um argumento típico para o efeito é o seguinte:

Suponha que T é um operador linear definido em algum subespaço denso $\mathcal{D}$ de $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leqslant 1$ para algum espaço semi-Banach X, com a propriedade de que $\|T(a)\|_X \leqslant C < \infty$, para todo p-átomo a e alguma constante $C > 0$ a qual não depende de a. Aqui, implicitamente requerimos que $\Theta^k(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}$, com $k = \lfloor (1/p - 1) \rfloor$ e $\| \cdot \|_X$ satisfazendo

$$\|f + g\|_X^p \leqslant \|f\|_X^p + \|g\|_X^p.$$

Para mostrar que T se estende a um funcional limitado de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para X, considere arbitrariamente $f \in \Theta^k(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema da Decomposição Atmômica 3.1.1, podemos representar $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$, com a_j's p-átomos e $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \leqslant C_0 \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$, para alguma constante $C_0 > 0$ independente de f. Desde que

$$T(f) = T\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T(a_j), \tag{4.15}$$

temos que

$$\|T(f)\|_X^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda_j T(a_j)\|_X^p \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \leqslant C C_0 \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.16}$$

Como f foi escolhida de forma arbitária, temos de (4.16) que T se estende a um operador $T : H^p(\mathbb{R}^n) \to X$.

O principal problema com este argumento é que, em geral, não há garantia que a igualdade em (4.15) seja válida, devido ao fato de que a soma em (4.15) é infinita. O Teorema 4.0.5 mostra que (4.15) pode de fato falhar em certas situações (pelo menos, quando $p = 1$).

O argumento acima também possui uma outra variante, a decomposição atômica em alguns casos pode ser uma soma finita, digamos $f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j$ com a_j's p-átomos e $\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p \leqslant C_0 \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ para alguma constante $C_0 > 0$. Desta vez, o problema está no fato de que a constante C_0 não pode ser escolhida de forma universal para todas $f \in \Theta^k(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, sem dúvidas, temos que em geral, não é suficiente para verificar que um operador ou um funcional é limitado em p-átomos para concluir que tal operador ou funcional se estende limitadamente ao espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leqslant 1$.

Capítulo 5

Um Critério de Limitação via Átomos para Operadores Lineares

Neste capítulo nosso objetivo é apresentar uma condição necessária e suficiente para que um operador linear T possa ser estendido limitadamente a um operador de $H^p(\mathbb{R}^n)$ com valores espaço semi-Banach $\mathcal{B}$, tal resultado foi apresentado por D. Yang., Y. Zhou em [3] . Mais precisamente, um operador T é estendido limitadamente a um operador de $H^p(\mathbb{R}^n)$ com $p \in (0,1]$ se, e somente, se T mapeia todos os $(p,2,s)$-átomos para algum $s \geqslant \lfloor n(1/p-1) \rfloor$ em limitados de $\mathcal{B}$. Assim, comparando com o exemplo de Y. Meyer em [1] e os resultados de Bownik, M.B. em [2] (o qual foi apresentado no Capítulo 4), vemos que existe uma estrutura diferente entre os (p,∞,s)-átomos e os $(p,2,s)$-átomos.

Devemos ressaltar que no decorrer deste capítulo estaremos considerando que $\mathbb{N} \equiv \{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{Z}_+$ os inteiros positivos e $p \in (0,1]$. Denotaremos por $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as funções $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com anulamento de momentos de até a ordem s, isto é, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|\alpha| \leqslant s$, $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\,dx = 0$. Para $s \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in [0,\infty)$ e $f \in \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$ temos que

$\|f\|_{s,\sigma} = \sup\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{\sigma}|f(x)| < \infty$ define uma norma em $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos por $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ o espaço $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$ munido pela norma $\|\cdot\|_{s,\sigma}$.

5.1 Os Espaços Semi-Banach

Uma classe de espaços que estaremos interessados, são os espaços semi-Banach os quais desempenharão um papel importante no decorrer deste capítulo. A definição de tal espaço é apresentada a seguir.

Definição 5.1.1 *Um espaço semi-Banach é um espaço vetorial $\mathcal{B}$ completo munido de uma semi-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ a qual é não negativa, não degenerada (isto é, $\|f\|_{\mathcal{B}} = 0$ se, e somente, se $f = 0$), homogêneo e satisfaz a semi-desigualdade triangular, isto é, existe uma constante $K \geqslant 1$ tal que para quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{B}$ tem-se*

$$\|f+g\|_{\mathcal{B}} \leqslant K(\|f\|_{\mathcal{B}} + \|g\|_{\mathcal{B}}).$$

Definição 5.1.2 *Sejam $p \in (0,1]$, $q \in [1,\infty] \cap (p,\infty]$ e $s \geqslant \lfloor n(1/p-1) \rfloor$. Uma distribuição $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dita estar em $H^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$, se existem $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ e (p,q,s)-átomos $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ tais que $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$.*

Além disso, podemos equipar o espaço $H^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ com a semi-norma $\|f\|_{H^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)} = \inf\{(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^p)^{\frac{1}{p}}\}$, onde o ínfimo é tomado sobre todos os escalares das decomposições de f.

Definição 5.1.3 *Seja $q \in (0,1]$. Um espaço semi-Banach $\mathcal{B}_q$ munido pela semi-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_q}$, é um espaço q-semi-Banach, se $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_q}^q$ satisfaz a desigualdade triangular, isto é, para quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{B}_q$ tem-se*

$$\|f+g\|_{\mathcal{B}_q}^q \leqslant \|f\|_{\mathcal{B}_q}^q + \|g\|_{\mathcal{B}_q}^q.$$

Note que, todo espaço de Banach é um espaço 1-semi-Banach e ℓ^q, $L^q(\mathbb{R}^n)$ e $H^q(\mathbb{R}^n)$ com $q \in (0,1)$ são exemplos de espaços q-semi-Banach. Além disso, se $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}_q$ temos que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} f_j\Big\|_{\mathcal{B}_q} \leqslant \Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{\mathcal{B}_q}^q\Big\}^{\frac{1}{q}}. \tag{5.1}$$

Observação 5.1.1 *Vimos no Capítulo* 4 *que em geral não é possível estender limitadamente um operador linear o qual é limitado uniformemente sobre p-átomos. Como ressaltamos no início deste capítulo, existe uma estrutura diferente entre os* (p, ∞, s)*-átomos e os* $(p, 2, s)$*-átomos.*

Se trocarmos a condição de limitação uniformente sobre p-átomos por limitação uniforme sobre $(p, 2, s)$*-átomos, poderemos dizer quando um operador* T *pode ser estendido. O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo, o qual comprova o argumento anterior.*

Teorema 5.1.1 *Sejam* $p \in (0, 1]$, $q \in [p, 1]$, $\mathcal{B}_q$ *um espaço q-semi-Banach,* $s \geqslant \lfloor n(1/p - 1) \rfloor$ *e* $T : \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}_q$ *um operador linear. Então* T *é estendido para um operador limitado de* $H^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $\mathcal{B}_q$ *se, e somente, se* T *mapeia todos os* $(p, 2, s)$*-átomos de* $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *em elementos uniformemente limitados de* $\mathcal{B}_q$*.*

Corolário 5.1.1 *Sejam* $p \in (0, 1]$, $\gamma \in [1, 2] \cap (p, 2]$, $q \in [p, 1]$, $\mathcal{B}_q$ *um espaço q-semi-Banach,* $s \geqslant \lfloor n(1/p - 1) \rfloor$ *e* $T : \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}_q$ *um operador linear. Então* T *é estendido para um operador limitado de* $H^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $\mathcal{B}_q$ *se, e somente, se* T *mapeia todos os* (p, γ, s)*-átomos de* $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *em elementos uniformemente limitados de* $\mathcal{B}_q$*.*

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 5.1.1 abordaremos alguns conceitos e resultados que nos auxiliará em sua demonstração. A demonstração do Corolário 5.1.1 segue de maneira imediata da demonstração do Teorema 5.1.1.

Observação 5.1.2 *Sejam* $q \in (0, 1]$, $\mathcal{B}_q$ *um espaço q-semi-Banach e* $\mathcal{V}$ *espaço vetorial. Um operador* $T : \mathcal{V} \to \mathcal{B}_q$ *é chamado de* $\mathcal{B}_q$*-sublinear se, para quaisquer* $f, g \in \mathcal{V}$ *e* $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ *o operador* T *cumprir as seguintes condições:*
(i) $\|T(\lambda f + \nu g)\|_{\mathcal{B}_q} \leqslant (|\lambda|^q \|T(f)\|_{\mathcal{B}_q}^q + |\nu|^q \|T(g)\|_{\mathcal{B}_q}^q)^{\frac{1}{q}}$;
(ii) $\|T(f) - T(g)\|_{\mathcal{B}_q} \leqslant \|T(f - g)\|_{\mathcal{B}_q}$.

É claro que se T *é um operador linear, então* T *é* $\mathcal{B}_q$*-sublinear. Além disso, se* $\mathcal{B}_q = L^q(\mathbb{R}^n)$ *e* T *é sublinear, então* T *também é* $\mathcal{B}_q$*-sublinear. Com uma pequena modificação na demonstração do Teorema 5.1.1 e na demonstração do*

Corolário 5.1.1, temos que o Teorema 5.1.1 e o Corolário 5.1.1 também são válidos para operadores os quais são $\mathcal{B}_q$-sublineares.

5.2 Fórmula de Calderón

Para que possamos enunciar e demonstrar a fórmula de Calderón é necessário alguns resultados prévios os quais apresentaremos a seguir.

Proposição 5.2.1 *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função radial, então $\hat{f}$ também é radial.*

Demonstração. Vide referência [8], páginas 155 à 170. ∎

Teorema 5.2.1 (Integração por Partes) *Sejam $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então*

$$\int_\Omega u_{x_j} v\, dx = -\int_\Omega u v_{x_j}\, dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_j \; dS \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Demonstração. Vide referência [7], Apêndice C, Teorema 2. ∎

Teorema 5.2.2 (Fórmulas de Green) *Sejam $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então,*

(i) $\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS$;

(ii) $\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, dx = -\int_\Omega u \Delta v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u\, dS$.

Demonstração. Vide referência [7], Apêndice C, Teorema 3. ∎

Lema 5.2.1 *Fixe $N \in \mathbb{Z}_+$. Então, existe uma função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $supp\, \phi \subset B(0, 1)$;

(ii) ϕ *é radial;*

(iii) $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x)\, dx = 0$, *se* $|\alpha| \leqslant N$ *e* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$;

(v) $\displaystyle\int_0^\infty [\hat{\phi}(t\xi)]^2 \frac{dt}{t} = 1$, *se* $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demonstração. Seja $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função não identicamente nula, radial, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e com suporte compacto em $B(0,1)$. Definamos $h = \Delta^k \theta$ para algum $k > N/2$, onde Δ é o Operador de Laplace e k é um inteiro positivo. É claro que h cumpre as condições (i), (ii) e (iii) devido a escolha de θ. Para demonstrarmos (iv) façamos $u = x^\alpha$ e $v = \Delta^{k-1}\theta$.

Usando o fato de que supp $h \subset B(0,1)$ e os Teoremas 5.2.2 e 5.2.1 temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \Delta^{(k)}\theta(x)\, dx = \int_{B(0,1)} x^\alpha \Delta^{(k)}\theta(x)\, dx \\
&= -\int_{B(0,1)} \nabla(x^\alpha)\cdot \nabla(\Delta^{(k-1)}\theta(x))\ dx + \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial}{\partial \nu}[\Delta^{(k-1)}\theta(x)]\, x^\alpha\, dS \\
&= -\sum_{j=1}^n \int_{B(0,1)} \frac{\partial}{\partial x_j}(x^\alpha)\, \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta^{(k-1)}\theta(x))\, dx \\
&= -\sum_{j=1}^n \Big[\int_{\partial B(0,1)} \Delta^{(k-1)}\theta(x)\, \frac{\partial}{\partial x_j}(x^\alpha)\, \nu_j\, dS - \int_{B(0,1)} \Delta^{(k-1)}\theta(x)\, \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x^\alpha)\, dx \Big] \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{B(0,1)} \Delta^{(k-1)}\theta(x)\, \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x^\alpha)\, dx.
\end{aligned}
$$

Repetindo o processo acima k-vezes e usando o fato de que $k > N/2$ e $|\alpha| \leqslant N$ temos a condição (iv). Agora, vejamos que a função h satisfaz a propriedade (v). Sendo a transformada de Fourier um isomorfismo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $\hat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto $|\hat{h}(t\xi)| \leqslant \frac{C}{|t\xi|}$. Segue da última estimativa que

$$\int_1^\infty |\hat{h}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \lesssim \int_1^\infty \frac{1}{t^3}\, dt = C(\xi).$$

Por outro lado, pela condição (iv) temos em particular que $\hat{h}(0) = 0$. Fazendo a expansão em série de Taylor de ordem 1 para $\hat{h}$ em torno da origem

$$\hat{h}(t\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \frac{\partial^\alpha \hat{h}(0)}{\alpha!}(t\xi - 0)^\alpha + R_2(t\xi) = R_2(t\xi),$$

com resto de Lagrange

$$R_2(\eta) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha \hat{h}(w_\eta)}{\alpha!}\eta^\alpha = \sum_{|\alpha|=2} T(\eta)\eta^\alpha.$$

Assim, como $\hat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} |R_2(\eta)| &= \Big| \sum_{|\alpha|=2} T(\eta)\,\eta^\alpha| \leqslant \sum_{|\alpha|=2} |T(\eta)\ \eta^\alpha| \\ &\leqslant C \sum_{|\alpha|=2} |\eta|^{|\alpha|} = C|\eta|^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Portanto, segue da estimativa (5.2) que $|\hat{h}(t\xi)| \leqslant C|t\xi|^2$ e, consequentemente

$$\int_0^1 |\hat{h}(t\xi)|^2\,\frac{dt}{t} \leqslant C\int_0^1 |t\xi|^4\frac{dt}{t} \cong |\xi|^4.$$

Portanto, a integral $\int_0^\infty [\hat{h}(t\xi)]^2\,\frac{dt}{t}$ é absolutamente convergente. Devido ao fato de h ser radial temos pela Proposição 5.2.1 que $\hat{h}$ também é radial, mas isto implica que $c^2 = \int_0^\infty [\hat{h}(t\xi)]^2\,\frac{dt}{t}$ depende somente de $|\xi|$, para todo $\xi \neq 0$. De fato, se $|\zeta| = |\xi|$ então $|t\zeta| = |t\xi|$ e usando o fato de que $\hat{h}$ é radial podemos concluir que $\int_0^\infty [\hat{h}(t\zeta)]^2\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty [\hat{h}(t\xi)]^2\,\frac{dt}{t}$. Além disso, a integral $\int_0^\infty [\hat{h}(t\xi)]^2\,\frac{dt}{t}$ é independente do valor de $|\xi|$, pois $\frac{dt}{t}$ é a medida de Haar para o grupo multiplicativo dos números reais positivos. Com efeito, mostremos que tal integral é invariante por homotetia.

Sejam $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ e $s > 0$ tal que $|\xi| = s|\zeta|$. Então,

$$\int_0^\infty [\hat{h}(t\xi)]^2\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty [\hat{h}(ts\zeta)]^2\,\frac{dt}{t}.$$

Façamos $r = ts$, então $dr = sdt$ e como a medida é a medida de Haar temos que $\frac{dt}{t} = \frac{dr}{r}$. Usando a mudança de variável feita anteriormente segue que

$$\int_0^\infty [\hat{h}(t\xi)]^2\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty [\hat{h}(r\zeta)]^2\,\frac{dr}{r}.$$

Portanto, definindo $\phi = c^{-1}h$ temos que ϕ é a função pedida. ∎

Teorema 5.2.3 (Fórmula de Calderón) *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a valores reais e radial satisfazendo a condição (v) do Lema 5.2.1. Então, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ temos*

$$f(x) = \int_0^\infty (\phi_t * \phi_t * f)(x)\, \frac{dt}{t}. \tag{5.3}$$

Observação 5.2.1 *A igualdade em (5.3) deve ser interpretada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ no seguinte sentido: Se $0 < \varepsilon < \delta < \infty$ e*

$$f_{\varepsilon,\delta}(x) = \int_\varepsilon^\delta (\phi_t * \phi_t * f)(x)\, \frac{dt}{t}, \tag{5.4}$$

então $\|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_2 \to 0$ quando $\varepsilon \to 0^+$ e $\delta \to \infty$.

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração, vejamos que a expressão (5.3) é uma consequência imediata da equação (v) do Lema 5.2.1.

Aplicando transformada de Fourier do lado direito de (5.3) temos $\hat{f}(\xi)\int_0^\infty [\hat{\phi}(t\xi)]^2 \frac{dt}{t} = \hat{f}(\xi)\cdot 1$, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\Big[\int_0^\infty (\phi_t * \phi_t * f)(x)\, \frac{dt}{t}\Big](\xi) &= \int_0^\infty \mathcal{F}[(\phi_t * \phi_t * f)(x)](\xi)\, \frac{dt}{t} \\ &= \hat{f}(\xi)\int_0^\infty [\hat{\phi}(t\xi)]^2 \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Note que, devido ao fato de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ não temos a garantia de que $\phi_t * \phi_t * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para que possamos comutar a integral da transformada de Fourier com a integral da expressão (5.3). Assim, a demonstração deste resultado consiste em contornar esse problema e ainda obter a igualdade (5.3).

Suponhamos inicialmente que $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então pela desigualdade de Young combinada com o Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\varepsilon,\delta}(\xi) &= \int_\varepsilon^\delta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}(\phi_t * \phi_t * f)(x)\, dx\, \frac{dt}{t} \\ &= \hat{f}(\xi)\int_\varepsilon^\delta [\hat{\phi}(t\xi)]^2\, \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Observemos que $f_{\varepsilon,\delta} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0^+$ e $\delta \to \infty$. Usando o Princípio de Plancharel obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+,\,\delta\to\infty} \|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_2 &\cong \lim_{\varepsilon\to 0^+,\,\delta\to\infty} \|(f - f_{\varepsilon,\delta})\widehat{}\,\|_2 \\
&\cong \lim_{\varepsilon\to 0^+,\,\delta\to\infty} \|\hat{f} - \hat{f}_{\varepsilon,\delta}\|_2 \\
&\cong \lim_{\varepsilon\to 0^+,\,\delta\to\infty} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \hat{f}(\xi)\Big[1 - \int_\varepsilon^\delta [\hat{\phi}(t\xi)]^2 \frac{dt}{t}\Big]\Big|^2 d\xi \Big\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Mas pela condição (v) do Lema 5.2.1 temos

$$|\hat{f}(\xi)\{1 - \int_\varepsilon^\delta [\hat{\phi}(t\xi)]^2 \frac{dt}{t}\}| \leqslant |\hat{f}(\xi)|.$$

Segue pelo Teorema da Convergência Dominada que $\|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_2 \to 0$ quando $\varepsilon \to 0^+$ e $\delta \to \infty$ o que conclui a demonstração.

Para o caso em que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ basta definirmos uma sequência $f_j = f\chi_{B(0,j)} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ a qual converge para f em $L^2(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to \infty$ e repetir o processo acima para f_j. ∎

5.3 Extensão de Operadores Lineares Limitados em Espaços de Hardy

A partir de agora, a função ϕ é a mesma do Lema 5.2.1. Caso seja necessário impor alguma condição adicional diremos nos enunciados.

Observação 5.3.1 *Para $s \in \mathbb{Z}_+$ denotaremos por $\mathcal{S}_s(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com anulamento de momentos até a ordem s. Em símbolos temos que*

$$\mathcal{S}_s(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\, dx = 0, \forall\, |\alpha| \leqslant s \Big\}.$$

Lema 5.3.1 *Sejam $\phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ e $\sigma \in [0, \infty)$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t \in [0, 1)$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|(\phi_t * f)(x)| \leqslant Ct(1 + |x|)^{-\sigma} \leqslant C(1 + |x|)^{-\sigma}. \tag{5.5}$$

Se $s \in \mathbb{Z}_+$ e $f \in \mathcal{S}_s(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t \in [1, \infty)$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|(\phi_t * f)(x)| \leqslant C t^{-n-s-1}\Big(1 + \frac{|x|}{t}\Big)^{-\sigma}. \tag{5.6}$$

Demonstração. Vide referência [9], Lemas 2 e 4 no Apêndice (III). ∎

Lema 5.3.2 *Sejam $s \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in [0, n+s+1)$ e $\phi \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ com supp $\phi \subset B(0,1)$. Então para toda $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e $L \in (1, \infty)$ tem-se,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{\sigma} \Big(\int_0^{\varepsilon} + \int_L^{\infty} \Big) \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(x-y)||(\phi_t * f)(y)| \, \frac{dy\, dt}{t} \leqslant C(\varepsilon + L^{\sigma-n-s-1}).$$

Demonstração. É claro que se $\gamma \in (0, \infty)$ para $|y| \leqslant \gamma$ e $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário

$$\gamma + |x| \leqslant 2(\gamma + |x-y|). \tag{5.7}$$

De fato, pela desigualdade triangular segue que

$$\begin{aligned} \gamma + |x| &= \gamma + |x - y + y| \\ &\leqslant 2(\gamma + |x-y|). \end{aligned}$$

Seja $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Para $0 < \varepsilon < 1$ segue das estimativas (5.5) e (5.7) com $\gamma = 1$ e do fato que supp $\phi \subset B(0,1)$

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{\sigma} \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(y)||(\phi_t * f)(x-y)| \frac{dy\, dt}{t} \\ &\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{\sigma} \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(y)| C t (1 + |x-y|)^{-\sigma} \frac{dy\, dt}{t} \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_0^{\varepsilon} \int_{|y|<t} |\phi_t(y)|(1+|x|)^{\sigma}(1+|x-y|)^{-\sigma} dy\, dt \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_0^{\varepsilon} \int_{|y|<t} |\phi_t(y)|(1+|x-y|)^{\sigma}(1+|x-y|)^{-\sigma} dy\, dt \\ &\lesssim \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Em (5.8) usamos o fato de ϕ ser uma função radial suportada na $B(0,1)$. Agora, para todo $t \geqslant 1$, e combinando (5.6), (5.7) e supp $\phi \subset B(0,1)$ temos que

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^\sigma \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(y)||(\phi_t * f)(x-y)|\,dy \\
&\quad\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^\sigma \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(y)|Ct^{-n-s-1}\Big(1+\frac{|x-y|}{t}\Big)^{-\sigma}\,dy \\
&\quad\lesssim t^{\sigma-n-s-1}\int_{|y|<t} |\phi_t(y)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^\sigma (t+|x-y|)^{-\sigma}\,dy \\
&\quad\lesssim t^{\sigma-n-s-1}\int_{|y|<t} |\phi_t(y)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(t+|x-y|)^\sigma (t+|x-y|)^{-\sigma}\,dy \\
&\quad\lesssim t^{\sigma-n-s-1}.
\end{aligned}$$

Seja $L > 1$, então

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^\sigma \int_L^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(x-y)||(\phi_t * f)(y)|\frac{dy\,dt}{t} \\
&\quad\lesssim \int_L^\infty t^{\sigma-n-s-1}\frac{dt}{t} \\
&\quad= \frac{t^{\sigma-n-s-1}}{\sigma-n-s-1}\Big|_L^\infty \\
&\quad\lesssim L^{\sigma-n-s-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, combinando as estimativas obtidas, temos a demonstração do lema. ∎

Observação 5.3.2 *Na útima estimativa do Lema 5.3.2 temos a convergência da inetegral imprópria, pois $L > 1$ e por hipótese $\sigma < n+s+1$ e consequentemente $\sigma - n - s - 1 < 0$.*

Lema 5.3.3 *Seja $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,1))$, $\psi_\delta(x) = \delta^{-n}\psi(x/\delta)$ e $\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx = 1$. Se $a_\delta = \psi_\delta * a$, então $a_\delta \to a$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $a \in H^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \in (0,1]$. Além disso, $a_\delta \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Vejamos inicialmente que $a_\delta \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Como ψ e a possuem suporte compacto, temos que supp $a_\delta \subset$ supp $\psi_\delta +$ supp a o qual é compacto, pois a soma de conjuntos compacto é compacto e sendo supp a_δ fechado por definição, segue que supp a_δ é compacto.

Por outro lado, como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos em particular que $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e sendo ψ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ segue que $a_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, usando o fato de que a é p-átomo temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a_\delta(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \psi_\delta(y)a(x-y)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\psi_\delta(y)\int_{\mathbb{R}^n}(x+y)^\alpha a(x)dxdy = 0, \quad \forall\,|\alpha| \leqslant s.\end{aligned}$$

Sejam $d \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+d} < p \leqslant \frac{n}{n+d-1}$ e $a \in H^p(\mathbb{R}^n)$ um p-átomo. Então, supp $a \subset B(x_0, r)$ para algum $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Assim, supp $(a_\delta - a) \subset B(x_0, r+\delta) \subset B(x_0, r+1)$, (para $\delta \leqslant 1$). Se $B^* = B(x_0, 2(r+1))$, então

$$\begin{aligned}\|a_\delta - a\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}[\mathrm{M}_\phi(a_\delta - a)(x)]^p\,dx \\ &= \int_{B^*}[\mathrm{M}_\phi(a_\delta - a)(x)]^p\,dx + \int_{(B^*)^c}[\mathrm{M}_\phi(a_\delta - a)(x)]^p\,dx.\end{aligned}$$

Para concluirmos que $a_\delta \to a$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ devemos encontrar boas estimativas para as integrais acima. Combinando o Lema 2.3.3, a desigualdade de Hölder 1.1.1 e o item (i) do Teorema 2.2.2 temos que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{B^*}[\mathrm{M}_\phi(a_\delta - a)(x)]^p\,dx\Big| &\leqslant \int_{B^*}[\mathrm{M}_\phi(a_\delta - a)(x)]^p\,dx \\ &\leqslant C^p\int_{B^*}[\mathcal{M}(a_\delta - a)(x)]^p\,dx \\ &\leqslant |B^*|C^p\Big(\int_{\mathbb{R}^n}[(\mathcal{M}(a_\delta - a)(x))^p]^{\frac{2}{p}}\Big)^{\frac{p}{2}} \\ &\leqslant |B^*|C^p\|\mathcal{M}(a_\delta - a)\|_2^p \\ &\leqslant |B^*|C^pA_2\|a_\delta - a\|_2^p \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \delta \to 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $x \in (B^*)^c$ e $\varepsilon < \frac{|x-x_0|}{2}$, então $|x-y| \geqslant \varepsilon$, para todo $y \in B(x_0, r+1)$. Como supp $\phi_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$ segue que

$$\phi_\varepsilon * (a_\delta - a)(x) = \int_{B(x_0,r+1)} \phi_\varepsilon(x-y)(a_\delta - a)(y)\, dy = 0.$$

Assim, podemos supor $\varepsilon > \frac{|x-x_0|}{2}$. Fazendo a expansão de Taylor para a função $y \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ de ordem d em torno de x_0 temos que

$$\phi_\varepsilon(x-y) = \sum_{|\alpha|\leqslant d} \frac{\partial_y^\alpha(\phi_\varepsilon)(x-x_0)(x_0-y)^\alpha}{\alpha!} + R_{d+1}(t,x,x_0,y)$$

com $|R_{d+1}| \leqslant \frac{C|y-x_0|^{d+1}}{\varepsilon^{n+d+1}}$. Pela estimativa do resto da expansão e do fato de que $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, dx = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
|\phi_\varepsilon * (a_\delta - a)(x)| &= \Big| \int_{B(x_0,r)} \phi_\varepsilon(x-y)(a_\delta(y) - a(y))\, dy \Big| \\
&\leqslant \int_{B(x_0,r+1)} |\phi_\varepsilon(x-y) - \phi_\varepsilon(x-x_0)||a_\delta(y) - a(y)|\, dy \\
&\leqslant C \int_{B(x_0,r+1)} \frac{|y-x_0|^{d+1}}{\varepsilon^{n+d+1}} |a_\delta(y) - a(y)|\, dy \\
&\leqslant 2^{n+d+1} C \int_{B(x_0,r+1)} \frac{(r+1)^{d+1}}{|x-x_0|^{n+d+1}} |a_\delta(y) - a(y)|\, dy \\
&\leqslant 2^{n+d+1} C \frac{(r+1)^{d+1}}{|x-x_0|^{n+d+1}} \|a_\delta - a\|_1.
\end{aligned}$$

Segue da estimativa acima que

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{(B^*)^c} [\mathrm{M}_\phi(a_\delta - a)(x)]^p\, dx \Big| &\leqslant 2^{p(n+d+1)} C^p \int_{(B^*)^c} \frac{(r+1)^{p(d+1)}}{|x-x_0|^{p(n+d+1)}}\, dx\, \|a_\delta - a\|_1^p \\
&\leqslant 2^{p(n+d+1)} C^p (r+1)^{p(d+1)} \int_{2(r+1)}^\infty \lambda^{-p(n+d+1)+n-1}\, d\lambda\, \|a_\delta - a\|_1.
\end{aligned}$$

Note que a estimativa lado direito converge para zero, pois a integral imprória converge devido a $-p(n+d+1)+n-1 < 0$ e $\|a_\delta - a\|_1 \to 0$ quando $\delta \to 0$. Portanto, $a_\delta \to a$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ quando $\delta \to 0$. ∎

Teorema 5.3.1 *O espaço* $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $H^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $p \in (0,1]$.

Demonstração. Seja $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 3.1.1 temos que $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - g\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$, com $g = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j$. Pelo Lema 5.3.3, para cada a_j existe um a_δ^j tal que $a_\delta^j \to a_j$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Definamos $G_\delta = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_\delta^j$. Claramente $G_\delta \in \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$. Pela subaditividade da norma $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p$ e tomando δ o mínimo entre todos os δ's da definição de convergência $a_\delta^j \to a_j$ segue que

$$\begin{aligned}
\|f - G_\delta\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leqslant \|f - g\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|g - G\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p \|a_\delta^j - a_j\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Note que, como $\|a_\delta^j - a_j\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p < \varepsilon$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, basta redefinir ε na definição da convergência para cada j e obter que $\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p \|a_\delta^j - a_j\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Portanto, $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^p(\mathbb{R}^n)$. ■

Sejam $p \in (0,1]$, $s \geqslant \lfloor n(1/p - 1) \rfloor$ e $\phi \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ uma função radial suportada na $B(0,1)$ tal que a condição (v) do Lema 5.2.1 esteja satisfeita.

Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a função de Lusin (ou função área) $S(f)$ é definida por

$$S(f)(x) = \Big(\int_0^\infty \int_{|x-y|<t} |\phi_t * f(y)|^2 \frac{dy\, dt}{t^{n+1}} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Então para toda $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, segue que $S(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ainda $\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \approx \|S(f)\|_p$. Para consultar a demonstração desta afirmação vide as referências [4], [5], [6] e [19].

No próximo resultado estaremos fazendo uma reprodução do Teorema 3.1.1. Pois vimos que se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, então f possui uma decomposição atômica. Agora, veremos que este fato também é válido para funções no espaço $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, mas para $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ teremos que f possui uma decomposição atômica não em p-átomos mas em $(p, 2, s)$-átomos.

Lema 5.3.4 *Sejam* $p \in (0,1]$, $s \geqslant \lfloor n(1/p-1) \rfloor$ *e* $\sigma \in [0, n+s+1)$. *Então, para toda* $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, *existem escalares* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *e* $(p,2,s)$*-átomos* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *tais que* $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ *em* $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\{\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$, *onde* $C > 0$ *é independente de* f.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n) \subset H^p(\mathbb{R}^n)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definamos $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : S(f)(x) > 2^k\}$ e

$$\mathcal{Q}_k = \left\{ Q \in \mathcal{Q} : |Q \cap \Omega_k| > \frac{|Q|}{2},\, |Q \cap \Omega_{k+1}| \leqslant \frac{|Q|}{2} \right\}$$

onde $\mathcal{Q}$ denota a coleção de todos os cubos diádicos em $\mathbb{R}^n$ cujo os lados medem 2^k com $k \in \mathbb{Z}$.

Afirmação: Para cada $Q \in \mathcal{Q}$, existe um único k tal que $Q \in \mathcal{Q}_k$.

Dado $Q \in \mathcal{Q}$ temos devido a definição de Ω_k que $|Q \cap \Omega_k| \nearrow |Q|$ quando $k \to -\infty$ e $|Q \cap \Omega_k| \searrow 0$ quando $k \to \infty$. Daí, existe $\overline{k}$ tal que $|Q \cap \Omega_{\overline{k}}| > \frac{|Q|}{2}$ e tome $k = \max\{\overline{k}\}$ tal que $\overline{k}$ satisfaça a condição. Não é difícil ver que $|Q \cap \Omega_{k+1}| \leqslant \frac{|Q|}{2}$, pois caso contrário teríamos uma contradição em relação ao máximo k. Suponhamos que $Q \in \mathcal{Q}_{k+1}$, então $|Q \cap \Omega_{k+1}| > \frac{|Q|}{2}$ e $|Q \cap \Omega_{k+2}| \leqslant \frac{|Q|}{2}$. Mas sabemos que $\frac{|Q|}{2} < |Q \cap \Omega_{k+1}| \leqslant \frac{|Q|}{2}$, disto segue que $Q \notin \mathcal{Q}_{k+1}$.

Vejamos que $Q \notin \mathcal{Q}_{k-1}$, pois caso contrário $|Q \cap \Omega_{k-1}| > \frac{|Q|}{2}$ e $|Q \cap \Omega_k| \leqslant \frac{|Q|}{2}$, mas sabemos que $\frac{|Q|}{2} < |Q \cap \Omega_k| \leqslant \frac{|Q|}{2}$ e, portanto $Q \notin \mathcal{Q}_{k-1}$. Novamente por indução temos que $Q \notin \mathcal{Q}_{k-m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Disto segue que existe um único k tal que $Q \in \mathcal{Q}_k$, concluindo assim a afirmação.

Um cubo diádico $Q \in \mathcal{Q}_k$ é dito maximal em $\mathcal{Q}_k$ se para todo $Q' \in \mathcal{Q}_k$ tem-se $Q' \subset Q$ ou $Q' \cap Q = \emptyset$. Para $k \in \mathbb{Z}$ denotemos a coleção de todos os cubos maximais em $\mathcal{Q}_k$ por $\{Q_k^j\}_{j \in J_k}$, onde J_k é algum conjunto de índices podendo eventualmente ser vazio para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $\mathcal{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in J_k} \{Q \in \mathcal{Q}_k : Q \subset Q_k^j\}$. De fato, dado um cubo $Q \in \mathcal{Q}$ sabemos que existe um único k tal que $Q \in \mathcal{Q}_k$, daí existe j tal que $Q \subset Q_k^j$. A inclusão contrária é óbvia, assim temos a igualdade.

Seja $Q \in \mathcal{Q}$ e consideremos o cubo maximal Q_k^j o qual contém Q. Definamos $\widehat{Q} = \{(x,t) : x \in Q,\, \sqrt{n}\,\ell(Q) < t \leqslant 2\sqrt{n}\,\ell(Q)\}$ e $\widetilde{Q}_k^j = \bigcup_{\{Q \in \mathcal{Q}_k : Q \subset Q_k^j\}} \widehat{Q}$.

Devido as contruções anteriores temos que

$$\mathbb{R}^n \times (0,\infty) = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} \widehat{Q} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{j\in J_k} \widetilde{Q}_k^j. \tag{5.9}$$

Seja $\phi \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ cumprindo as condições do Lema 5.2.1. Segue da fórmula (5.3) e da igualdade (5.9) combinadas com o Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty (\phi_t * \phi_t * f)(x)\,\frac{dt}{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \phi_t(x-y)(\phi_t * f)(x)\,dy\,\frac{dt}{t} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in J_k}\int_{\widetilde{Q}_k^j} \phi_t(x-y)(\phi_t * f)(y)\,dy\,\frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Definamos

$$\lambda_{k,j} \equiv |5\sqrt{n}\,Q_k^j|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\Big\{\int_{\widetilde{Q}_k^j} |(\phi_t * f)(y)|^2 \frac{dy\,dt}{t}\Big\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5.11}$$

onde $5\sqrt{n}\,Q_k^j$ denota o cubo de mesmo centro que Q_k^j mas com o lado $5\sqrt{n}$ vezes o lado do cubo Q_k^j. Se tivermos $\lambda_{k,j} \equiv 0$ definamos $a_k^j(x) \equiv 0$ e se $\lambda_{k,j} \neq 0$ definamos

$$a_k^j(x) = (\lambda_{k,j})^{-1}\int_{\widetilde{Q}_k^j} \phi_t(x-y)(\phi_t * f)(y)\,\frac{dy\,dt}{t}. \tag{5.12}$$

Combinando as expressões (5.10), (5.11) e (5.12) podemos escrever

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in J_k} \lambda_{k,j}\, a_k^j(x).$$

Por hipótese $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, então existe $r_0 > 0$ suficientemente grande tal que $\operatorname{supp} f \subset B(0,r_0)$. Seja $N \in \mathbb{N}$, então

$$\bigcup_{t\in[\sqrt{n}\,2^{-N},\sqrt{n}\,2^{N}]} \operatorname{supp}\,\phi_t \subset B(0,\sqrt{n}2^N) + B(0,r_0) = B(0,\sqrt{n}\,2^N). \tag{5.13}$$

De fato, como supp $\phi_t \subset B(0,t)$ temos que $|t^{-1}x| < 1$ se, e somente, se $|x| < t \leqslant \sqrt{n}$ o que implica em (5.13). Combinando a expressão (5.13) e o Teorema 1.5.1 temos que

$$\bigcup_{t\in[\sqrt{n}\,2^{-N},\sqrt{n}\,2^{N}]} \text{supp } (\phi_t * f) \subset B(0, r_0 + \sqrt{n}\,2^N). \tag{5.14}$$

Existe uma quantidade finita de cubos diádicos Q a qual denotaremos por $\mathcal{Q}^N$ tais que $\widehat{Q} \cap (B(0, r_0 + \sqrt{n}\,2^N) \times [\sqrt{n}2^{-N}, \sqrt{n}2^N]) \neq \emptyset$. De fato, devido a definição de $\widehat{Q}$ temos que os cubos diádicos que interceptam $B(0, r_0 + \sqrt{n}\,2^N) \times [\sqrt{n}2^{-N}, \sqrt{n}2^N]$ são cubos Q tais que $2^{-N-1} \leqslant \ell(Q) < 2^N$ e este fato segue de

$$\sqrt{n}\,\ell(Q) < t \leqslant 2\sqrt{n}\,\ell(Q) \quad \text{e} \quad \sqrt{n}\,2^{-N} \leqslant t \leqslant \sqrt{n}\,2^N.$$

A quantidade de cubos diádicos de lados 2^j tal que $-N-1 \leqslant j < N$ é claramente finita, o que conclui a afirmação. Além disso, para todo $Q \in \mathcal{Q}^N$, existe um único cubo maximal Q_k^j com $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in J_k$ tal que $\widehat{Q} \subset \widetilde{Q}_k^j$. Esta afirmação vale em geral, pois dado um cubo diádico Q sabemos que existe um único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $Q \in \mathcal{Q}_k$, assim tomando o maximal Q_k^j tal que $Q \subset Q_k^j$ temos $\widehat{Q} \subset \widetilde{Q}_k^j$ devido a definição de $\widetilde{Q}_k^j$, portanto a inclusão vale em particular para os cubos $Q \in \mathcal{Q}^N$.

Seja $\widetilde{\mathcal{Q}}^N$ a coleção de todos os cubos maximais diádicos tais que $\widehat{Q} \cap (B(0, r_0 + \sqrt{n}\,2^N) \times [\sqrt{n}2^{-N}, \sqrt{n}2^N]) \neq \emptyset$. Claramente $\widetilde{\mathcal{Q}}^N$ é finito, pois vimos anteriormente que $\mathcal{Q}^N$ é finito. Consideremos $\widetilde{\mathcal{Q}}$ um subconjunto finito de $\{Q_k^j : k \in \mathbb{Z}, j \in J_k\}$ tal que $\widetilde{\mathcal{Q}}^N \subset \widetilde{\mathcal{Q}}$. Combinando (5.14), o fato de que $B(0, r_0 + \sqrt{n}\,2^N) \times [\sqrt{n}\,2^{-N}, \sqrt{n}\,2^N] \subset \bigcup_{Q_k^j \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \widetilde{Q}_k^j$, o Lema 5.3.2 junto com a hipótese de que $\sigma < n + s + 1$, temos a estimativa

$$\begin{aligned}
\Big\| f - \sum_{Q_k^j \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \lambda_{k,j}\, a_k^j \Big\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)} &= \Big\| f - \sum_{Q_k^j \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \int_{\widetilde{Q}_k^j} \phi_t(\cdot - y)(\phi_t * f)(y)\, \frac{dy\,dt}{t} \Big\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^\sigma \Big(\int_0^{\sqrt{n}2^{-N}} + \int_{\sqrt{n}2^N}^\infty \Big) \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(x-y)||(\phi_t * f)(y)| \frac{dy\,dt}{t} \\
&\lesssim 2^{-N} + 2^{N(\sigma - n - s - 1)} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $N \to \infty$. Note que, a convergência acima ocorre em $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Resta demonstrarmos que $\{a_k^j\}_{k\in\mathbb{Z},j\in J_k} \subset \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ são $(p,2,s)$-átomos e $\Big\{\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\in J_k}|\lambda_{k,j}|^p\Big\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$.

Vejamos que a_k^j cumpre a condição (i) da definição de $(p,2,s)$-átomo. De fato, note que supp $\phi_t(x-\cdot) \subset B(x,t)$. Seja $x_0 \notin 5\sqrt{n}\,Q_k^j$, então mostremos que $x_0 \notin$ supp a_k^j. Para mostrarmos que $x_0 \notin$ supp a_k^j, basta que $\phi_t(x-\cdot)=0$ se $x \notin 5\sqrt{n}\,Q_k^j$. Para isto, consideremos $B(x_0,t_0)$ com $t_0 = 2\sqrt{n}\ell(Q_k^j)$, assim supp $\phi_{t_0}(x_0-\cdot) \subset B(x_0,t_0)$ e $B(x_0,t_0)\cap\widetilde{Q}_k^j = \emptyset$ o que implica em $x_0 \notin$ supp a_k^j, pois se $B(x_0,t_0)\cap\widetilde{Q}_k^j \neq \emptyset$, isto implica em $t > 2\sqrt{n}\ell(Q_k^j)$ o que é absurdo, devido a escolha inicial de t_0.

Para verificarmos a condição (ii) de $(p,2,s)$-átomo, basta combinarmos o Teorema da Respresentação de Riesz, desigualdade de Hölder 1.1.1, o item (v) do Lema 5.2.1 e o Princípio de Plancharel para obtermos que

$$\begin{aligned}
\|a_k^j\|_2 &= \sup_{\|b\|_2\leqslant 1}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} a_k^j(x)\,b(x)\,dx\Big| \\
&\leqslant (\lambda_{k,j})^{-1}\sup_{\|b\|_2\leqslant 1}\Big|\int_{\widetilde{Q}_k^j}(\phi_t * f)(y)\,(b*\tilde{\phi}_t)(y)\,\frac{dy\,dt}{t}\Big| \\
&\leqslant |5\sqrt{n}\,Q_k^j|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\sup_{\|b\|_2\leqslant 1}\Big(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|(b*\tilde{\phi}_t)(y)|^2\frac{dy\,dt}{t}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant |5\sqrt{n}\,Q_k^j|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $\tilde{\phi}_t(y) = \phi_t(-y)$. Observe que em (5.15) usamos a igualdade

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|(b*\tilde{\phi}_t)(y)|^2\,dy\Big)\frac{dt}{t} &= \int_0^\infty \|(b*\tilde{\phi}_t)\hat{}\|_2^2\,\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \|\hat{b}\,\hat{\tilde{\phi}}_t\|_2^2\,\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{b}(\xi)|^2|\hat{\tilde{\phi}}_t(\xi)|^2\,\frac{d\xi\,dt}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{b}(\xi)|^2\int_0^\infty|\hat{\tilde{\phi}}_t(\xi)|\frac{dt\,d\xi}{t} \\
&= \|b\|_2^2.
\end{aligned}$$

Para demonstrarmos a condição (iii) observemos que, se $f, \phi \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ implica em $f, \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto, dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ com $|\alpha| \leqslant s$ combinado com o Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a_k^j(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha (\lambda_{k,j})^{-1} \int_{\widetilde{Q}_k^j} \phi_t(x-y)(\phi_t * f)(y)\, \frac{dy\, dt}{t} dx \\
&= (\lambda_{k,j})^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\widetilde{Q}_k^j} x^\alpha \phi_t(x-y)(\phi_t * f)(y)\, \frac{dy\, dt}{t} dx \\
&= (\lambda_{k,j})^{-1} \int_{\widetilde{Q}_k^j} (\phi_t * f)(y) \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi_t(x-y)\, dx \frac{dy\, dt}{t} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para demonstrarmos que $\left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in J_k} |\lambda_{k,j}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$, demonstremos inicialmente

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}_k} \int_{\widehat{Q}} |(\phi_t * f)(y)|^2\, \frac{dy\, dt}{t} \lesssim 2^{2k}|\Omega_k|. \tag{5.16}$$

Definamos $\Omega_k^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}\chi_{\Omega_k}(x) > \frac{1}{2} \right\}$ onde $\mathcal{M}$ denota o operador maximal de Hardy-Littlewood. Mas sabemos que o operador de Hardy-Littlewood é limitado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ para $L^1_{fraco}(\mathbb{R}^n)$. Assim, $|\Omega_k^*| \lesssim \|\chi_{\Omega_k}\|_1 \lesssim |\Omega_k|$. Por outro lado,

$$\int_{\Omega_k^*\setminus\Omega_{k+1}} [S(f)(x)]^2\, dx \leqslant \int_{\Omega_k^*\setminus\Omega_{k+1}} 2^{2k+2}\, dx \lesssim 2^{2k}|\Omega_k^*| \lesssim 2^{2k}|\Omega_k|.$$

Para qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k^*\setminus\Omega_{k+1}} [S(f)(x)]^2\, dx &= \int_{\Omega_k^*\setminus\Omega_{k+1}} \int_0^\infty \int_{|y-x|<t} |(\phi_t * f)(y)|^2\, \frac{dy\, dt}{t^{n+1}} dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |(\phi_t * f)(y)|^2 \chi(x,y,t)\, dx \frac{dy\, dt}{t^{n+1}} \\
&\geqslant \sum_{Q\in\mathcal{Q}_k} \int_{\widehat{Q}} \int_{\mathbb{R}^n} |(\phi_t * f)(y)|^2 \chi(x,y,t)\, dx \frac{dy\, dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

onde χ denota a função característica do conjunto

$$\{(x,y,t) : x \in \Omega_k^* \setminus \Omega_k,\ |y-x| < t\}.$$

É facíl ver que para todo $Q \in \mathcal{Q}_k$ e todo $(y,t) \in \widehat{Q}$ tal que $x \in Q$ implica em $|x-y| < t$, pois $|x-y| < \sqrt{n}\ell(Q) < t$ e consequentemente $\chi(x,y,t) = 1$. Como $Q \in \mathcal{Q}_k$ então $|Q \cap \Omega_k| \geqslant \frac{|Q|}{2}$ e $Q \subset \Omega_k^*$. Assim, para todo $(y,t) \in \widehat{Q}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x,y,t)\,dx \geqslant |Q \cap (\Omega_k^* \setminus \Omega_{k+1})| = |Q| - |Q \cap \Omega_{k+1}| \geqslant \frac{|Q|}{2} \gtrsim t^n$$

o que conclui a afirmação (5.16). Combinando (5.16) com a desigualdade de Hölder para séries e o fato de que $\|S(f)\|_p \approx \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in J_k} |\lambda_{k,j}|^p &\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in J_k} |Q_k^j|^{1-\frac{p}{2}} \Big(\int_{\widetilde{Q}_k^j} |(\phi_t * f)(y)|^2 \,\frac{dy\,dt}{t}\Big)^{\frac{p}{2}} \\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{j\in J_k} |Q_k^j|\Big)^{1-\frac{p}{2}} \Big(\sum_{j\in J_k} \int_{\widetilde{Q}_k^j} |(\phi_t * f)(y)|^2 \,\frac{dy\,dt}{t}\Big)^{\frac{p}{2}} \\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Omega_k|^{1-\frac{p}{2}} (2^{2k}|\Omega_k|)^{\frac{p}{2}} \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp}|\Omega_k| \\
&\cong \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k h(2^k) \lesssim \int_0^\infty h(\alpha)\,d\alpha \\
&\lesssim \|S(f)\|_p^p \\
&\lesssim \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p
\end{aligned}$$

sendo que $h(\alpha) = \alpha^{p-1}|\{x \in \mathbb{R}^n : S(f)(x) > \alpha\}|$. ∎

Lema 5.3.5 *Sejam $s \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (0,1]$, $q \in [p,1]$, $\sigma \in (\max\{n+s, n/p\}, \infty)$, $\mathcal{B}_q$ um espaço q-semi-Banach e $T : \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}_q$ um operador linear. Se existe uma constante $C > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|T(f)\|_{\mathcal{B}_q} \leqslant C[diam(supp\ f)]^{\frac{n}{p}} \|f\|_\infty, \tag{5.17}$$

então $T : \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}_q$ é um operador linear limitado.

Demonstração. Seja $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x) = 1$ se $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ e $\psi(x) = 0$ se $|x| \geqslant 1 - \frac{1}{8}$. Definamos $\phi(x) = \psi(\frac{x}{2}) - \psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, claramente supp $\phi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leqslant |x| < 2\}$.

Note que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ temos que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}x) = 1$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-j_0}x \in$ supp ϕ. Assim,

$$\frac{1}{2} \leqslant 2^{-j_0}|x| < 2 \Longleftrightarrow 2^{j_0-1} \leqslant |x| < 2^{j_0+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}x) &= \sum_{j=j_0-1}^{j_0+1} \phi(2^{-j}x) \\
&= \phi(2^{-j_0+1}x) + \phi(2^{-j_0}x) + \phi(2^{-j_0-1}x) \\
&= \psi(2^{-j_0-2}x) - \psi(2^{-j_0+1}x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Definamos $\Phi_j(x) = \phi(2^{-j}x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $j \in \mathbb{N}$ e $\Phi_0(x) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \phi(2^{-j}x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \Phi_j(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\mathfrak{R}_0 = B(0,2)$ e $\mathfrak{R}_j = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leqslant |x| < 2^{j+1}\}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para $j = 0, 1$ seja $\{\widetilde{\psi}_{j,\alpha} : |\alpha| \leqslant s\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a base dual de $\{x^\alpha : |\alpha| \leqslant s\}$ com peso $\Phi_j|\mathfrak{R}_j|^{-1}$, a saber, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ com $|\alpha| \leqslant s$ e $|\beta| \leqslant s$,

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}_j|} \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta \widetilde{\psi}_{j,\alpha}(x)\Phi_j(x)\, dx = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.18}$$

Fazendo a mudança de variável $y = 2^j x$ na integral em (5.18), segue que $dy = 2^{jn}dx$ e

$$\frac{2^{-j(n+|\beta|)}}{|\mathfrak{R}_j|} \int_{\mathbb{R}^n} y^\beta \widetilde{\psi}_{j,\alpha}(2^{-j}y)\Phi_j(2^{-j}y)\, dy = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.19}$$

Sejam $\psi_{j,\alpha} = |\mathfrak{R}_j|^{-1}\widetilde{\psi}_{j,\alpha}\Phi_j$ para $j = 0, 1$ e $\psi_{j,\alpha}(x) = 2^{-(j-1)(n+|\alpha|)}\psi_{1,\alpha}(2^{-(j-1)}x)$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $j \geqslant 2$. É claro que $\psi_{j,\alpha} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ e supp $\psi_{j,\alpha} \subset \mathfrak{R}_j$. Disto segue que $\|\psi_{0,\alpha}\|_\infty \lesssim 1$. Por outro lado, se $j = 1$ pela igualdade em (5.19) temos que

$$\begin{aligned}\delta_{\alpha,\beta} &= \frac{2^{-(n+|\beta|)}}{|\mathfrak{R}_1|}\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta \widetilde{\psi}_{1,\alpha}(2^{-1}x)\Phi_1(2^{-1}x)\,dx \\ &\leqslant 2^{-(n+|\beta|)}\int_{\mathfrak{R}_1} |x^\beta \psi_{1,\alpha}(2^{-1}x)|\,dx \lesssim 2^{-(n+|\beta|)}.\end{aligned}$$

Pela estimativa acima, para $j \in \mathbb{Z}_+$, $|\alpha| \leqslant s$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\psi_{j,\alpha}(x)| \lesssim 2^{-j(n+|\alpha|)}. \tag{5.20}$$

Seja $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que supp $f \subset B(0, 2^{k_0})$. Para $j \in \mathbb{Z}_+$ definamos $f_j = f\Phi_j$ e

$$\mathcal{P}_j = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \psi_{j,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} f_j(y)y^\alpha\,dy.$$

Então, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ e $|\alpha| \leqslant s$, $f_j - \mathcal{P}_j \in \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$. De fato, é claro que supp $f_j - \mathcal{P}_j$ é compacto, pois supp $\psi_{j,\alpha}$ é compacto e $f_j - \mathcal{P}_j$ é de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ por construção. Dado $\gamma \in \mathbb{Z}_+$ com $|\gamma| \leqslant s$ temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma (f_j(x) - \mathcal{P}_j(x))\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma f_j(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \mathcal{P}_j(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma f_j(x)\,dx - \sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_{\mathbb{R}^n} f_j(y)y^\alpha\,dy \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \psi_{j,\alpha}(x)\,dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Além disso, como $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ implica que $\sum_{\ell=0}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)y^\alpha\,dy = 0$. De fato, note que para todo $y \in B(0, 2^{k_0})$ tem-se $2^{k_0+l}y \notin$ supp ϕ para todo $l \geqslant 2$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)y^\alpha\,dy &= \sum_{\ell=0}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Phi_\ell(y)y^\alpha\,dy\\
&= \sum_{\ell=1}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(2^{-\ell}y)y^\alpha\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Big(1-\sum_{j=1}^{\infty}\phi(2^{-j}y)\Big)y^\alpha\,dy\\
&= \sum_{\ell=1}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(2^{-\ell}y)y^\alpha\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\sum_{j=1}^{\infty}\phi(2^{-j}y)y^\alpha\,dy\\
&= \sum_{\ell=1}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(2^{-\ell}y)y^\alpha\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\sum_{j=1}^{k_0+1}\phi(2^{-j}y)y^\alpha\,dy\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Pela conclusão acima segue que

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{j=0}^{k_0+1}(f_j-\mathcal{P}_j) + \sum_{j=0}^{k_0+1}\mathcal{P}_j\\
&= \sum_{j=0}^{k_0+1}(f_j-\mathcal{P}_j) + \sum_{j=0}^{k_0+1}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\psi_{j,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} f_j(y)y^\alpha\,dy\\
&= \sum_{j=0}^{k_0+1}(f_j-\mathcal{P}_j) + \sum_{|\alpha|\leqslant s}\sum_{j=1}^{k_0+1}\sum_{\ell=j}^{k_0+1}(\psi_{j,\alpha}-\psi_{j-1,\alpha})\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)y^\alpha\,dy.
\end{aligned}
$$

Para obter a última igualdade da expressão acima, foi usado o fato de que

$$
\sum_{|\alpha|\leqslant s}\sum_{j=1}^{k_0+1}\sum_{\ell=j}^{k_0+1}(\psi_{j,\alpha}-\psi_{j-1,\alpha})\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)y^\alpha\,dy = \sum_{j=0}^{k_0+1}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\psi_{j,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} f_j(y)y^\alpha\,dy.
$$

Para demonstrar este fato é preciso abrir de maneira explícita as definições das funções envolvidas e por fim, usar a conclusão de que $\sum_{\ell=0}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)y^\alpha\,dy = 0$. Note que, as somas podem comutar devido ao fato de todas serem somas finitas.

Observe que $\psi_{j,\alpha}-\psi_{j-1,\alpha}\in\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, pois $\psi_{j,\alpha}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi_{j,\alpha}$ possui suporte compacto como ressaltamos anteriormente e para ver que $\psi_{j,\alpha}-\psi_{j-1,\alpha}$ possui integral com momentos nulos para $\gamma \in \mathbb{Z}_+$ com $|\gamma| \leqslant s$ basta proceder de modo análago ao caso feito anteriormente para $f_j - \mathcal{P}_j$.

Sendo T um operador linear e $f_j - \mathcal{P}_j$, $\psi_{j,\alpha} - \psi_{j-1,\alpha} \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned} T(f) &= T\Big(\sum_{j=0}^{k_0+1}(f_j - \mathcal{P}_j) + \sum_{j=0}^{k_0+1}\mathcal{P}_j\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{k_0+1} T(f_j - \mathcal{P}_j) + \sum_{|\alpha|\leqslant s}\sum_{j=1}^{k_0+1}\sum_{\ell=j}^{k_0+1}\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)y^\alpha\, dy\, T(\psi_{j,\alpha} - \psi_{j-1,\alpha}). \end{aligned}$$

Para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ e $|\alpha| \leqslant s$ temos que $\|\Phi_j\|_\infty \leqslant 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}_j} |f_j(y)||y^\alpha|\, dy &\leqslant \int_{\mathfrak{R}_j} |f_j(y)||y|^{|\alpha|}\, dy \\ &\leqslant \int_{\mathfrak{R}_j} |f_j(y)|2^{(j+1)|\alpha|}\, dy \\ &\leqslant \sup_{\mathfrak{R}_j}|f(y)|\cdot|\mathfrak{R}_j|2^{(j+1)|\alpha|} = 2^{(j+1)|\alpha|}(c_1 2^{(j+1)n} - c_2 2^{(j-1)n})\sup_{\mathfrak{R}_j}|f(y)| \\ &\lesssim 2^{j(|\alpha|+n)}\sup_{\mathfrak{R}_j}|f(y)| \cong 2^{j(n+|\alpha|)}\sup_{\mathfrak{R}_j}\frac{(1+|y|)^\sigma}{(1+|y|)^\sigma}|f(y)| \\ &\lesssim 2^{j(n+|\alpha|)}\sup_{\mathfrak{R}_j}\frac{(1+|y|)^\sigma}{|y|^\sigma}|f(y)| \\ &\lesssim 2^{j(n+|\alpha|-\sigma)}\|f\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Combinando (5.20) com (5.21) temos que

$$\begin{aligned} \|f_j - \mathcal{P}_j\|_\infty &\leqslant \|f_j\|_\infty + \|\mathcal{P}_j\|_\infty \\ &\lesssim \|f_j\|_\infty + \sum_{|\alpha|\leqslant s} 2^{-j(n+|\alpha|)}\int_{\mathfrak{R}_j}|f_j(y)||y|^{|\alpha|}\, dy \\ &\lesssim \|f_j\|_\infty + \sum_{|\alpha|\leqslant s} 2^{-j(n+|\alpha|)}\cdot 2^{j(n+|\alpha|-\sigma)}\|f\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim 2^{-j\sigma}\|f\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

e, portanto de (5.17) obtemos que

$$\begin{aligned}\|T(f_j - \mathcal{P}_j)\|_{\mathcal{B}_q} &\lesssim [\mathrm{diam}(\mathrm{supp}\ f_j - \mathcal{P}_j)]^{\frac{n}{p}} \|f_j - \mathcal{P}_j\|_\infty \\ &\lesssim 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma)} \|f\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Por (5.17) e (5.20) segue que

$$\begin{aligned}\|T(\psi_{j,\alpha} - \psi_{j-1,\alpha})\|_{\mathcal{B}_q} &\lesssim 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma)} \|\psi_{j,\alpha} - \psi_{j-1,\alpha}\|_\infty = 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma)} \sup_{\mathbb{R}^n} |\psi_{j,\alpha} - \psi_{j-1,\alpha}| \\ &\lesssim 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma)} (2^{-j(n+|\alpha|)} + 2^{(-j+1)(n+|\alpha|)}) \\ &\lesssim 2^{j(\frac{n}{p}-n-|\alpha|)} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Finalmente, combinando (5.1), (5.21), (5.22), (5.23) e a hipótese de que $\sigma > \max\{n+s, \frac{n}{p}\}$ temos a estimativa

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{\mathcal{B}_q} &\leqslant \Big(\sum_{j=0}^{k_0+1} \|T(f_j - \mathcal{P}_j)\|_{\mathcal{B}_q}^q + \sum_{|\alpha|\leqslant s} \sum_{j=1}^{k_0+1} \sum_{\ell=j}^{k_0+1} \Big\| \int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y) y^\alpha dy\, T(\psi_{j,\alpha} - \psi_{j-1,\alpha}) \Big\|_{\mathcal{B}_q}^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \Big(\sum_{j=0}^{k_0+1} 2^{jq(\frac{n}{p}-\sigma)} + \sum_{|\alpha|\leqslant s} \sum_{j=1}^{k_0+1} \sum_{\ell=j}^{k_0+1} 2^{q\ell(n+|\alpha|-\sigma)}\, 2^{qj(\frac{n}{p}-n-|\alpha|)} \Big)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \Big(\sum_{j=0}^{k_0+1} 2^{jq(\frac{n}{p}-\sigma)} \Big)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do lema. ∎

Finalmente, devido aos resultados apresentados anteriormente podemos demonstrar o resultado central deste capítulo.

Demonstração do Teorema 5.1.1. ($\Rightarrow$) Suponhamos o operador T se estende limitadamente a um operador definido em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{B}_q$. Então para todo $(p,2,s)$-átomo a, temos que $\|T(a)\|_{\mathcal{B}_q} \lesssim \|a\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1$.

($\Leftarrow$) Seja $\sigma \in (\max\{\frac{n}{p}, n+s\}, n+s+1)$, com $p \in (0,1]$. Definamos $\Phi = |B(x_0, \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\ f))|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{-1} f$, com $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, e $x_0 \in \mathrm{supp}\ f$. Então, Φ é um $(p,2,s)$-átomo. De fato, como $f \in \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$ segue que supp Φ é compacto, pois supp $\Phi =$ supp f devido a definição de Φ, e isto demonstra a condição (i) da definição de $(p, 2, s)$-átomo.

Além disso,

$$\|\Phi\|_2 = |B|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{-1} \|f\|_2 \leqslant \frac{\|f\|_\infty |B|^{\frac{1}{2}}}{\|f\|_\infty |B|^{\frac{1}{p}}} = |B|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

sendo que $B = B(x_0, \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\ f))$, concluindo a condição (ii).

Para concluirmos que Φ é $(p, 2, s)$-átomo, basta mostrar que Φ possui anulamento de momentos até a ordem s. De fato, seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ com $|\alpha| \leqslant s$. Usando o fato de que $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ e as notações anteriores temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \Phi(x)\, dx = |B|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\, dx = 0.$$

Claramente $f = \frac{|B|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{-1}}{|B|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{-1}} f$. Então,

$$\|T(f)\|_{\mathcal{B}_q} = |B|^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty \|T(\Phi)\|_{\mathcal{B}_q} \lesssim [\mathrm{diam}(\mathrm{supp}\ f)]^{\frac{n}{p}} \|f\|_\infty. \tag{5.24}$$

Pela expressão (5.24) combinada com o Lema 5.3.5 segue que T é um operador linear limitado de $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{B}_q$.

Note que, pelo Lema 5.3.4, se $f \in \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, então existem escalares $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ e $(p, 2, s)$-átomos $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ tais que $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ em $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ e $\{\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p\}^{\frac{1}{p}} \lesssim \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$. Se combinarmos o Lema 5.3.5 com os fatos ditos anteriormente, obtemos que $T(f) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j T(a_j)$ em $\mathcal{B}_q$, e combinando isto com a expressão (5.1) e a monotonicidade das sequências em ℓ^q implica que $T(f) \in \mathcal{B}_q$ e

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{\mathcal{B}_q} &\leqslant \Big(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^q \|T(a_j)\|_{\mathcal{B}_q}^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \Big(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Portanto, pela última estimativa, T pode ser estendido para um operador linear limitado de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{B}_q$. ∎

Observação 5.3.3 *A conclusão final do Teorema 5.1.1 decorre da densidade do espaço* $\mathcal{D}_{s,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *em* $H^p(\mathbb{R}^n)$ *a qual foi demonstrada no Teorema 5.3.1.*

Referências Bibliográficas

[1] Y. Meyer., M. Taibleson., and G Weiss., *Some Functional Analytic Properties of the Spaces $\mathcal{B}_q$ Generated by Blocks*, Indian Univ. Math. J. 34 (1985), 493-515 MR0794574 (87c:46036).

[2] Bownik, M.B., *Boundedness of Operators on Hardy Spaces via Atomic Decomposition*, Proceedings os the American Mathematical Society, vol 133, Number 12 Pages 3535-3542, 2005.

[3] D. Yang., Y. Zhou., *A Boundedness Criterion via Atoms for Linear Operators in Hardy Spaces*, Constructive Approximation (2009) 29: 207-218, DOI 10.1007/s00365-008-9015-1.

[4] Fefferman, C., Stein, E.M., *H^p Spaces of Several Variables*, Acta Math. 129, 137-193 (1972).

[5] Folland, G.B., Stein, E.M., *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*, Princeton University Press, Princeton (1982).

[6] García-Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L., *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam (1985).

[7] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Univsersity of California Berkeley, Department of Mathematics, Graduate Studies in Mathematics, Vol 19.

[8] Stein, E.M., and Weiss, G., *Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*, Princeton University, Press, Princeton, 1971.

[9] Frazier, M., Jawerth, B., Weiss, G., *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 79, American Mathematical Society, Providence 1991.

[10] P. L. Duren., B.W. Romberg., and A. L. Shields., *Linear Functions in H^p spaces with* $0 < p < 1$, J. Reine Angew. Math. 238 (1969), 32-60. MR0259579(41 : 4217).

[11] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1987.

[12] Rudin W., *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematic, McGraw Hill companies. New York 1991.

[13] Hounie, J.G., *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[14] Homander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, Berlin, Second Edition , 1973.

[15] Treves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, Third Priting 1970, 1967.

[16] Oliveira, César R., *Introdução à Análise Funcional*, IMPA, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, 2010.

[17] Folland, G.B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd Edition, New York: Jhon Wiley e Sons, 1999.

[18] Stein, E.M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton, New Jersew: Princeton University Press, 1970.

[19] Stein, E.M., *Harmonic Analysis: Real-Variables Methods, Orthogonality and Oscilatory Integrals*, Princeton, New Jersew: Princeton University Press, 1993.

[20] Brezis, H., *Functional Analisys, Sobolev Espaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.