

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estimativas Ótimas para certos Teoremas Generalizados
de Borsuk-Ulam e Ljusternik-Schnirelmann**

Fabíolo Moraes Amaral

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática da
UFSCar como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

São Carlos - SP

Julho de 2005

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

A485eo

Amaral, Fabíolo Moraes.

Estimativas ótimas para certos teoremas generalizados de Borsuk-Ulam e Ljusternik-Schnirelmann/ Fabíolo Moraes Amaral. -- São Carlos : UFSCar, 2005.

83 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Topologia algébrica. 2. Gênis de um Z_p -espaço. 3. Aplicações equivariantes. 4. Teorema de Ljusternik-Schnirelmann. I. Título.

CDD: 514.2 (20^a)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me concedido sabedoria, saúde e força necessárias para a realização deste trabalho e principalmente por ter colocado pessoas tão especiais em meu caminho, as quais agradeço:

Ao meu orientador, Prof. Tomas Edson Barros, que conduziu-me passo a passo com toda atenção, segurança e paciência, sempre respeitando meus limites.

Aos meus pais Orlando e Relma, que não só agradeço mas também dedico este trabalho, pois me proporcionaram todo apoio, incentivo e segurança principalmente nos momentos mais difíceis.

Aos meus irmãos Fabíola e Thiago, que amo muito.

Aos meus avôs e avós, a todos os meus tios em especial Riedelma e Lenilton, e aos meus primos.

Aos professores do Departamento de Matemática desta Instituição, Pedro Pergher, Pedro Malagutti, Dirceu Penteado, César Kondo, Ivo Machado e aos meus professores do Departamento de Ciências Exatas-UESC que me proporcionaram base e incentivo.

Ao Prof. Emerson Leal pela colaboração neste trabalho.

As minhas queridas afilhadas Jennifer e Giovanna e a sua mãe Dulcinéia.

Aos colegas do Departamento Gustavo, Paulo, Ana Cláudia, Eliza,

Márcio entre os quais destaco Eduardo Palmeira pela amizade desde a graduação.

Agradeço também aos meus amigos Gildson, Neto, Darlan, Lizandro, Eduardo Botelho, que sempre me apoiaram, pois acreditaram em mim.

À Célia e Irma (secretárias) que sempre nos tratam com carinho, fazendo sempre mais que seu trabalho.

E não poderia deixar de agradecer à uma pessoa especial que muito amo, por todo carinho que dedica a mim e principalmente por ter compreendido minhas ausências tão necessárias para a realização deste trabalho. Obrigado, Renata.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

“ O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”

Resumo

Os conhecidos Teoremas de Borsuk-Ulam e de Ljusternik-Schnirelmann possuem diversas generalizações, dentre elas destacam-se aquelas dadas por C. Schupp [12] e H. Steinlein [14]. Schupp generaliza o Teorema de Borsuk-Ulam, substituindo a ação livre de \mathbb{Z}_2 na esfera S^n por uma ação livre de \mathbb{Z}_p , sendo p um número primo qualquer. Na generalização do Teorema de Ljusternik-Schnirelmann feita por Steinlein, a esfera S^n é substituída por um espaço normal M onde \mathbb{Z}_p atua livremente. Exploramos nesta Dissertação os resultados posteriores de H. Steinlein [15] no qual são provados que as estimativas do Teorema de Schupp são as melhores possíveis e que as estimativas para o Teorema de Steinlein podem ser melhoradas para certas situações e além disso vale uma espécie de recíproca do Teorema de Steinlein. O conceito de gênero de um \mathbb{Z}_p -espaço é fundamental para estes teoremas, sendo que o gênero da esfera n -dimensional é igual a $n + 1$, independentemente do primo p e da \mathbb{Z}_p ação livre em S^n . Percebemos que os métodos empregados para a demonstração desse resultado pode ser usado para estimar um majorante para o gênero de uma n -variedade topológica que admite uma \mathbb{Z}_p -ação livre.

Abstract

The classic Theorems of Borsuk-Ulam and Ljusternik-Schnirelmann have many generalizations, among which we point out that given by C. Schupp [12] and H. Steinlein [14]. Schupp generalizes the Borsuk-Ulam Theorem by replacing the \mathbb{Z}_2 -free action on the n -sphere by a \mathbb{Z}_p -free action, where p is any prime number. In the generalization of the Ljusternik-Schnirelmann Theorem maden by Steinlein, the n -sphere is replaced by a normal space M on which \mathbb{Z}_p acts freely. We explore in this dissertation the subsequent results of Steinlein [15] in which is proved that the estimates of the Schupp's Theorem are the best possible and the estimates for the Steinlein's Theorem can be improved in certain cases, furthermore a sort of converse of the Steinlein Theorem is valid. The concept of genus of a \mathbb{Z}_p -space is fundamental for these theorems and the genus of the n -sphere is $n + 1$ independently of the prime number and the \mathbb{Z}_p -free action on S^n . We realize that the method employed in the proof on this result can be used to estimate an upper bound for the genus of a topological n -manifold that admits a \mathbb{Z}_p -free action.

Sumário

1	Preliminares	9
1.1	Homotopia	10
1.2	Grau de uma aplicação entre esferas de mesma dimensão	11
1.3	Ação de um grupo topológico	12
1.4	Extensão de aplicações contínuas	17
1.5	Dimensão topológica	20
1.6	Categoria de um espaço	21
1.7	Fibrados e Fibrados Principais	22
2	Uma boa estimativa do teorema de Borsuk-Ulam	29
3	O gênero de um \mathbb{Z}_p-espaço	40
3.1	Definições e exemplos	40
3.2	O gênero e aplicações equivariantes	46
4	A categoria do espaço S^n/f	62
5	A propriedade $K_{m,p}$	67
5.1	O Teorema de Ljusternik-Schnirelmann	67
5.2	O gênero e a propriedade $K_{m,7}$	70
	Referências Bibliográficas	82

Introdução

Esta dissertação tem dentre os seus objetivos o estudo dos teoremas de Borsuk-Ulam generalizado devido a C. Schupp [12] e de Ljusternik-Schnirelmann generalizado, devido a Steinlein [14]. O primeiro teorema diz que se a esfera S^n admite uma \mathbb{Z}_p -ação livre gerada por $f : S^n \rightarrow S^n$, sendo p um primo, e $n \geq (m-1)(p-1) + 1$ então para qualquer função contínua $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existe $x \in S^n$ tal que $h(x) = h(f(x))$. Já o Teorema de Steinlein diz que se M é um espaço normal que admite uma \mathbb{Z}_p -ação livre para algum primo p , gerada por $f : M \rightarrow M$ e M é coberta por m fechados F_1, F_2, \dots, F_m tais que $F_i \cap f(F_i) = \emptyset \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$ então

$$g(M, f) \leq \begin{cases} (m-3)\frac{(p-1)}{2} + 1 & \text{se } p = 3 \\ (m-3)\frac{(p-1)}{2} + 2 & \text{se } p > 3 \end{cases} \quad (1)$$

sendo $g(M, f)$ o gênero do \mathbb{Z}_p -espaço (M, f) , o qual é definido por A. S. Švarc em [17].

Em 1984 Steinlein [15] mostrou que a estimativa dada por Schupp é a melhor possível, no entanto a estimativa dada em (1) não é a melhor possível em certos casos. O estudo destas estimativas conduz a uma certa recíproca do Teorema de Steinlein.

Nosso interesse foi estudar estas estimativas e as propriedades do gênero de um \mathbb{Z}_p -espaço.

O trabalho é organizado como segue. O capítulo 1 será dedicado aos conceitos preliminares, que envolvem noções de homotopia, grau de uma aplicação entre esferas de mesma dimensão, ação de um grupo topológico, extensão de aplicações contínuas, dimensão topológica, categoria de um espaço e fibrados, necessários para o bom entendimento desta dissertação.

No capítulo 2 exibimos a demonstração de que a estimativa do Teorema de Schupp é a melhor possível.

No capítulo 3 é definido o gênero de um espaço de Hausdorff de duas maneiras e demonstramos que estas definições coincidem se o espaço em questão for normal. O resultado mais importante deste capítulo relaciona o gênero n de um \mathbb{Z}_p -espaço M com a existência de aplicações equivariantes $P : M \rightarrow F_{n,p}$, sendo $F_{n,p}$ uma classe especial de \mathbb{Z}_p -espaço.

No capítulo 4, com auxílio de um resultado devido a Krasnosel'skiĭ [5], mostramos que o gênero da esfera n -dimensional S^n é igual a $n + 1$, independentemente do primo p e da \mathbb{Z}_p -ação livre em S^n . Percebemos que nesta demonstração se pode majorar o gênero de uma \mathbb{Z}_p -variedade n -dimensional por $n + 1$.

No último capítulo verificamos que vale de um certo modo a recíproca do teorema de Ljusternik-Schnirelmann generalizado e que a estimativa do gênero para um espaço com uma \mathbb{Z}_7 -ação livre que tem base enumerável e uma propriedade $K_{m,7}$, propriedade essa que equivale às hipóteses do Teorema de Steinlein enunciado acima, pode ser melhorada.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como finalidade definir os conceitos básicos que serão usados no presente trabalho. Iniciaremos com a definição de homotopia, na seção posterior definiremos grau de uma aplicação entre esferas de mesma dimensão e listaremos algumas de suas propriedades. O grau que definimos aqui é bastante conhecido na literatura como o grau de Brower. Definiremos também grupos topológicos e ação de tais grupos em um espaço topológico, é a partir dessa definição e de alguns resultados inerentes ao grau que veremos que o grupo topológico $(\mathbb{Z}_2, +)$ é o único grupo não trivial que pode atuar livremente na esfera n -dimensional S^n se n é par, e isto vai ser de grande utilidade no nosso trabalho. A seção 1.4 é dedicada a extensão de aplicações contínuas, nela veremos algumas consequências do teorema de extensão de H. Tietze. Nas três últimas seções daremos ênfase aos conceitos de dimensão topológica, categoria de um espaço e fibrados, respectivamente.

Ao leitor familiarizado com tais definições fica a seu critério dispensar ou não a leitura deste primeiro capítulo, retornando ao mesmo conforme a necessidade.

Para maiores detalhes sobre os assuntos mencionados neste capítulo

ver [1], [2], [3], [4], [6], [8], [9], [10], [11] e [20].

1.1 Homotopia

Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas, dizemos que f é **homotópica à** g quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ (sendo I o intervalo fechado $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$) tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

A aplicação H é uma **homotopia** entre f e g e, é denotada por $f \stackrel{H}{\simeq} g$ ou simplesmente $f \simeq g$.

Exemplo 1.1.1 *Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo então todas as aplicações contínuas de X em Y são homotópicas, pois sejam $f, g : X \rightarrow Y$ então basta definirmos $H : X \times I \rightarrow Y$ por $H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x)$.*

Observemos também que, a relação de homotopia é compatível com composição de funções, ou seja, dadas as aplicações contínuas $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$ tais que $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Definição 1.1.1 *Dizemos que dois espaços topológicos X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia se existem aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que:*

$$f \circ g \simeq id_Y \quad e \quad g \circ f \simeq id_X$$

sendo id_X e id_Y as aplicações identidade de X e Y , respectivamente.

A aplicação f é chamada **equivalência homotópica** e denotamos os espaços topológicos com mesmo tipo de homotopia por $X \simeq Y$.

Exemplo 1.1.2 *Se X e Y são homeomorfos então possuem o mesmo tipo de homotopia.*

Exemplo 1.1.3 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e S^{n-1} possuem o mesmo tipo de homotopia. De fato, consideremos $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ a inclusão e $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Assim, $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$ e $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.

Definição 1.1.2 Um espaço topológico X é **contrátil** se a aplicação identidade $id_X : X \rightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante.

Observação 1.1.1 Um espaço X tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto se e somente se X é contrátil.

1.2 Grau de uma aplicação entre esferas de mesma dimensão

Definição 1.2.1 Sejam S^n a esfera unitária n -dimensional, $f : S^n \rightarrow S^n$ uma aplicação contínua, $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ o homomorfismo induzido de f na n -ésima homologia de S^n e $\alpha \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ um gerador.

O **grau** de f é definido como sendo o único inteiro $\text{grau}(f) \in \mathbb{Z}$ tal que $f_*(\alpha) = \text{grau}(f) \cdot \alpha$.

Propriedades:

- (1) Se $f : S^n \rightarrow S^n$ é homeomorfismo, então $\text{grau}(f) = \pm 1$.
- (2) $\text{grau}(id_{S^n}) = 1$, sendo $id_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ a aplicação identidade.
- (3) Se $f, g : S^n \rightarrow S^n$ são contínuas e homotópicas, então $\text{grau}(f) = \text{grau}(g)$.
- (4) Se $f, g : S^n \rightarrow S^n$ são contínuas, então $\text{grau}(g \circ f) = \text{grau}(g) \cdot \text{grau}(f)$.
- (5) $\text{grau}(A) = (-1)^{n+1}$, sendo $A : S^n \rightarrow S^n$ a aplicação antípoda dada por $A(x) = -x$.

Lema 1.2.1 *Sejam $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ aplicações contínuas tais que $\text{grau}(f) + (-1)^n \cdot \text{grau}(g) \neq 0$. Então $\exists x \in S^n$ tal que $f(x) = g(x)$.*

Demonstração: Suponhamos que $f(x) \neq g(x) \forall x \in S^n$, então o segmento de reta ligando $f(x)$ a $-g(x)$ não passa pela origem, sendo assim podemos definir a aplicação contínua $F : S^n \times [0, 1] \longrightarrow S^n$ dada por $F(x, t) = \frac{(1-t)f(x) - tg(x)}{\|(1-t)f(x) - tg(x)\|}$. Observe que F é uma homotopia entre f e aplicação $A \circ g$ sendo $A : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $A(x) = -x$. Portanto, segue de (3), (4) e (5) que $\text{grau}(f) = \text{grau}(A \circ g) = \text{grau}(A) \cdot \text{grau}(g) = (-1)^{n+1} \text{grau}(g)$, ou seja, $\text{grau}(f) + (-1)^n \text{grau}(g) = 0$, o que é um absurdo. \square

Lema 1.2.2 *Seja $f : S^{2n} \longrightarrow S^{2n}$ uma aplicação contínua tal que $\text{grau}(f) \geq 0$. Então $\exists x \in S^{2n}$ tal que $f(x) = x$.*

Demonstração: Seja $id_{S^{2n}} : S^{2n} \longrightarrow S^{2n}$ a aplicação identidade. Como o $\text{grau}(id_{S^{2n}}) = 1$ temos que $\text{grau}(f) + (-1)^{2n} \text{grau}(id_{S^{2n}}) = \text{grau}(f) + 1 \neq 0$. Usando o Lema acima podemos afirmar que $\exists x \in S^{2n}$ tal que $f(x) = id_{S^{2n}}(x) = x$, ou seja, f tem ponto fixo. \square

1.3 Ação de um grupo topológico

Definição 1.3.1 *Um grupo topológico $(G, *)$ é um grupo que também é espaço topológico, satisfazendo as propriedades abaixo:*

(i) *A operação $* : G \times G \longrightarrow G$ do grupo G é uma aplicação contínua.*

(ii) *A aplicação $G \longrightarrow G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ é uma aplicação contínua.*

Exemplo 1.3.1 *O grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo topológico, sendo \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros.*

Exemplo 1.3.2 (S^1, \cdot) é um grupo topológico, sendo S^1 o espaço de todos os números complexos z tal que $\|z\| = 1$.

Definição 1.3.2 Uma **ação à esquerda (direita)** de um grupo topológico $(G, *)$ em um espaço topológico X é uma aplicação contínua $G \times X \longrightarrow X$ (usualmente denotada por $(g, x) \mapsto gx$ ($(g, x) \mapsto xg$)) que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $e_G x = x$ ($x e_G = x$) $\forall x \in X$, sendo e_G o elemento neutro do grupo G .

(ii) $(g_1 * g_2)x = g_1(g_2x)$ ($x(g_1 * g_2) = (xg_1)g_2$) $\forall x \in X$ e $g_1, g_2 \in G$.

Quando uma tal ação é dada dizemos que G atua no espaço X pela esquerda (direita) .

As observações, definições e teoremas abaixo serão dados considerando-se ações à esquerda, no entanto tudo permanece válido para as correspondentes ações à direita.

Observação 1.3.1 Se a ação definida acima satisfaz a seguinte propriedade abaixo:

$$gx = x \text{ para algum } x \in X \implies g = e_G$$

então dizemos que a ação é **livre**, ou que G **atua livremente** no espaço X , e neste caso dizemos que X é um **G -espaço**.

Uma ação $G \times X \longrightarrow X$ é dita ser **propriamente descontínua** se para todo $x \in X$ existe $U \subseteq X$ aberto tal que $x \in U$ e $U \cap gU = \emptyset$ $\forall g \in G, g \neq e_G$, sendo $gU = \{gy \in X ; y \in U\}$.

Lema 1.3.1 Se X é um espaço de Hausdorff e G é um grupo finito então toda ação livre de G em X é propriamente descontínua.

Prova: Seja $G = \{e_G, g_1, \dots, g_k\}$. Dado $x \in X$, como a ação é livre devemos ter $x \neq g_j x$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Como X é um espaço de Hausdorff existem abertos U_j e V_j de X tais que $x \in U_j$, $g_j x \in V_j$ e $U_j \cap V_j = \emptyset$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Seja $U = \bigcap_{j=1}^k [U_j \cap (g_j^{-1} V_j)]$, temos então que U é aberto e $x \in U$. Além disso, $U \cap g_j U = \emptyset \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$, pois se existisse $y \in U \cap g_j U$ então $y \in U_j$ e $y \in g_j U \subseteq g_j (g_j^{-1} V_j) = V_j$ o que é um absurdo. \square

Pode ser demonstrado sem dificuldades o seguinte teorema:

Teorema 1.3.1 *Seja $(G, *)$ um grupo topológico atuando em um espaço topológico X .*

- (i) *A relação em X definida por $x \sim y \iff gx = y$ para algum $g \in G$ é uma relação de equivalência.*
- (ii) *Para cada $x \in X$, $G_x = \{g \in G ; gx = x\}$ é um subgrupo de G , chamado **subgrupo de isotropia** de $x \in G$.*

Teorema 1.3.2 *Se um grupo topológico $(G, *)$ atua no espaço topológico X , então esta ação induz um homomorfismo $(G, *) \longrightarrow (\text{Homeo}(X), \circ)$, sendo $(\text{Homeo}(X), \circ)$ o grupo de todos os homeomorfismos de X em X munido da operação de composição.*

Demonstração: Seja $g \in G$, a aplicação $\tau_g : X \longrightarrow X$ dada por $\tau_g(x) = gx$ é uma bijeção, onde $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$. Além disso, τ_g é contínua, pois é a composição da aplicação contínua $\lambda : X \longrightarrow G \times X$ dada por $\lambda(x) = (g, x)$ com aplicação $G \times X \longrightarrow X$ dada por $(g, x) \mapsto gx$, o mesmo ocorre com $\tau_{g^{-1}}$. O conjunto $\text{Bij}(X, X)$ das bijeções de X em X é um grupo com a operação composição e $\text{Homeo}(X) = \{h : X \longrightarrow X; h \text{ é homeomorfismo}\}$ é um subgrupo do grupo $\text{Bij}(X, X)$. Considere agora a aplicação $\phi : G \longrightarrow \text{Homeo}(X)$ dada por

$\phi(g) = \tau_g$ e note que $\phi(g_1 * g_2) = \tau_{g_1 * g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$, logo ϕ é um homomorfismo como queríamos. \square

Observação 1.3.2 *Se ação é livre o homomorfismo ϕ do teorema acima é injetor, além disso para cada elemento $g \neq e_G$ o homeomorfismo correspondente τ_g não fixa ponto.*

Definição 1.3.3 *A órbita de $x \in X$, $\bar{x} = \{gx ; g \in G\}$ é a classe de equivalência de x da relação de equivalência definida acima.*

*Denotamos por X/G ao conjunto de todas as órbitas \bar{x} da ação G sobre X , o qual é munido da topologia quociente induzida pela aplicação $p : X \longrightarrow X/G$ que associa cada $x \in X$ sua órbita \bar{x} . O conjunto X/G munido dessa topologia é chamado **espaço de órbitas** da ação $G \times X \longrightarrow X$.*

Teorema 1.3.3 *Se um grupo topológico G atua no espaço topológico X , então o cardinal da órbita de $x \in X$ é o índice $[G : G_x]$.*

Demonstração: Sejam $g, h \in G$. Como

$$gx = hx \iff (g^{-1} * h)x = x \iff g^{-1} * h \in G_x \iff h * G_x = g * G_x$$

segue que a aplicação $g * G_x \mapsto gx$ é uma bijeção bem definida de G/G_x em $\bar{x} = \{gx ; g \in G\}$. \square

Observação 1.3.3 *Dada uma aplicação $f : M \longrightarrow M$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $f^n : M \longrightarrow M$ como sendo $f^0 = id_M$ e $f^n = f \circ f^{(n-1)}$ se $n > 0$.*

Teorema 1.3.4 *Seja $G = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ o grupo dos inteiros módulo p sendo p um número primo, seja M um espaço topológico e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua tal que $f^p = id_M$ e $f(x) \neq x \forall x \in M$, então G atua livremente em M .*

Demonstração: Definamos a seguinte aplicação $\psi : G \times M \longrightarrow M$ dada por $\psi(\bar{k}, x) = f^k(x) \forall x \in M$. Não é difícil verificar que a aplicação ψ satisfaz as propriedades da definição 1.3.2; basta então mostrar que essa ação é livre. Pelo teorema de Lagrange, temos que $|G| = [G : G_x] \cdot |G_x| \forall x \in M$ ($|G|$ denota o cardinal de G), mas pelo teorema 1.3.3 temos que $p = |\bar{x}| \cdot |G_x|$, daí segue que $|\bar{x}| = 1$ e $|G_x| = p$ ou $|\bar{x}| = p$ e $|G_x| = 1$. Como a órbita de $x \in M$ é dada por $\bar{x} = \{f^k(x) ; \bar{k} \in G\}$ e $f(x) \neq x \forall x \in M$ podemos afirmar que $|\bar{x}|$ é no mínimo 2. Portanto, necessariamente devemos ter $|\bar{x}| = p$ e $|G_x| = 1$, ou seja, $G_x = \{\bar{0}\}$ e conseqüentemente ψ é uma ação livre. \square

Definição 1.3.4 Quando uma aplicação $f : M \longrightarrow M$ satisfaz às hipóteses do teorema acima, então dizemos que f gera uma \mathbb{Z}_p -ação livre em M .

Exemplo 1.3.3 Seja $M = S^n$ a esfera n -dimensional e $A : S^n \longrightarrow S^n$ a aplicação antípoda dada por $A(x) = -x$, observe que A é contínua, $A^2 = id_{S^n}$ e $A(x) \neq x \forall x \in S^n$, logo A gera uma \mathbb{Z}_2 -ação livre em S^n , $\psi : \mathbb{Z}_2 \times S^n \longrightarrow S^n$ dada por $\psi(\bar{0}, x) = x$ e $\psi(\bar{1}, x) = -x$.

Exemplo 1.3.4 Seja T o toro em \mathbb{R}^3 formado pela rotação do círculo $(x-3)^2 + z^2 = 1$ sobre o eixo- z . Seja $f : T \longrightarrow T$ definida por $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ a reflexão em torno da origem. A aplicação f gera uma \mathbb{Z}_2 -ação livre em T .

Exemplo 1.3.5 Seja $S^{2n-1} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \|z\| = 1\}$, e $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ sendo $k \in \mathbb{N}^*$ os naturais sem o zero. Considere q_1, \dots, q_n números inteiros que são primos relativos com k . Então $f : S^{2n-1} \longrightarrow S^{2n-1}$ dada por $f(z_1, \dots, z_n) = (\epsilon^{q_1} z_1, \dots, \epsilon^{q_n} z_n)$ gera uma \mathbb{Z}_k -ação livre em S^{2n-1} . O espaço de órbitas S^{2n-1}/\mathbb{Z}_k dessa ação é chamado espaço lenticular de tipo

$(k; q_1, q_2, \dots, q_n)$ e denotado por $L(k; q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Teorema 1.3.5 \mathbb{Z}_2 é o único grupo não trivial que pode atuar livremente na esfera n -dimensional S^n se n é par.

Demonstração: Desde que o grau de um homeomorfismo deve ser ± 1 , a ação de um grupo $(G, *)$ em S^n determina uma função $d : G \rightarrow \{\pm 1\}$ dada por $d(g) = \text{grau } \tau_g$, onde $\tau_g : S^n \rightarrow S^n$ é um homeomorfismo e $\{-1, 1\}$ é um grupo com a multiplicação usual. A aplicação d é um homomorfismo, pois $d(g_1 * g_2) = \text{grau } (\tau_{g_1 * g_2}) = \text{grau } (\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}) = \text{grau } (\tau_{g_1}) \cdot \text{grau } (\tau_{g_2}) = d(g_1) \cdot d(g_2)$. Veremos agora que quando n é par o núcleo do homomorfismo d é trivial. Para isso suponha que exista $g \neq e_G$ tal que $g \in \text{Núcleo}(d) = \{g \in G; d(g) = 1\}$, ou seja, o grau $(\tau_g) = 1$. Usando o lema 1.2.2 temos que τ_g tem um ponto fixo, o que é um absurdo, pois a ação é livre. Portanto, quando n é par G é isomorfo a $d(G)$ que é um subgrupo de $\{-1, 1\}$. \square

1.4 Extensão de aplicações contínuas

Um dos problemas mais importantes da topologia é o da extensão de aplicações contínuas. Nesse problema, é dada uma aplicação contínua $f : A \rightarrow Y$, definida num subconjunto fechado A de um espaço topológico X e indaga-se sobre a possibilidade de estender f a X , ou seja, sobre a existência de $\bar{f} : X \rightarrow Y$ contínua tal que a restrição de \bar{f} ao subconjunto A coincida com f , ou seja, $\bar{f}|_A = f$.

Resultados importantes concernentes à extensão de funções contínuas são o famoso teorema de Tietze e suas conseqüências imediatas os quais listamos abaixo.

Teorema 1.4.1 (H. Tietze)([9]) *Seja X um espaço normal e A um subconjunto fechado de X .*

- (a) Qualquer aplicação contínua de A sobre o intervalo fechado $[a, b]$ de \mathbb{R} pode ser estendida a uma aplicação contínua de X sobre $[a, b]$.
- (b) Qualquer aplicação contínua de A sobre \mathbb{R} pode ser estendida a uma aplicação contínua de X sobre \mathbb{R} .

Antes de enunciar algumas consequências básicas do teorema acima, vamos fixar as seguintes notações:

$$I^n = [a, b] \times [a, b] \times \dots \times [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

$$S_+^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n ; x_{n+1} \geq 0\}$$

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \|(x_1, \dots, x_n)\| \leq 1\}$$

Corolário 1.4.1 *Seja X um espaço normal e $A \subset X$ um subconjunto fechado. Seja $f : A \rightarrow I^n$ contínua, então f pode ser estendida continuamente a X .*

Prova: Note que $f = (f_1, \dots, f_n)$ onde $f_i : A \rightarrow [a, b]$ é contínua $\forall i = 1, \dots, n$. Sendo assim pelo teorema acima cada f_i pode ser estendida para uma aplicação contínua $\bar{f}_i : X \rightarrow [a, b]$. Defina $\bar{f} : X \rightarrow I^n$ como sendo $\bar{f}(x) = (\bar{f}_1(x), \dots, \bar{f}_n(x)) \forall x \in X$. Como suas coordenadas são contínuas podemos afirmar que \bar{f} é contínua, além disso dado $a \in A$ temos $\bar{f}(a) = (\bar{f}_1(a), \dots, \bar{f}_n(a)) = (f_1(a), \dots, f_n(a)) = f(a)$. Portanto, \bar{f} é uma extensão contínua de f . □

Corolário 1.4.2 *Seja X um espaço normal e $A \subset X$ um subconjunto fechado. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, então f pode ser estendida continuamente a X .*

Prova: A prova é análoga a do corolário anterior.

Corolário 1.4.3 *Seja X um espaço normal e $A \subseteq X$ um subconjunto fechado de X . Se Y é homeomorfo a \mathbb{R}^n ou a I^n para algum $n \geq 1$, então toda função contínua $f : A \rightarrow Y$ possui extensão contínua $\bar{f} : X \rightarrow Y$.*

Prova: Suponhamos que $h : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um homeomorfismo entre Y e \mathbb{R}^n , então $h \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite uma extensão contínua $\overline{h \circ f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ pelo corolário acima. Defina $\bar{f} = h^{-1} \circ \overline{h \circ f} : X \rightarrow Y$ e observe que \bar{f} é contínua pois é composição de funções contínuas, além disso dado $a \in A$ temos $\bar{f}(a) = (h^{-1} \circ \overline{h \circ f})(a) = h^{-1}((\overline{h \circ f})(a)) = h^{-1}((h \circ f)(a)) = (h^{-1} \circ h)(f(a)) = f(a)$. Portanto, \bar{f} é uma extensão contínua de f . No caso em que Y é homeomorfo a I^n a prova é análoga. \square

Uma vez que,

$$S^n - \{p\} \approx \mathbb{R}^n \quad (p \in S^n)$$

$$D^n \approx I^n$$

$$S_+^n \approx D^n \approx I^n$$

seguem os resultados abaixo, sendo que \approx denota homeomorfismo.

Corolário 1.4.4 *Seja X um espaço normal e $A \subset X$ um subconjunto fechado. Seja $f : A \rightarrow S^n$ contínua e não sobrejetora, então f pode ser estendida continuamente a X .*

Corolário 1.4.5 *Seja X um espaço normal e $A \subset X$ um subconjunto fechado. Seja $f : A \rightarrow D^n$ contínua, então f pode ser estendida continuamente a X .*

Corolário 1.4.6 *Seja X um espaço normal e $A \subset X$ um subconjunto fechado. Seja $f : A \rightarrow S_+^n$ contínua, então f pode ser estendida continuamente a X .*

1.5 Dimensão topológica

Nesta seção definiremos o conceito de dimensão topológica, e a partir daí enunciaremos alguns resultados pertinentes a teoria da dimensão.

Definição 1.5.1 *Uma coleção Γ de subconjuntos de um espaço X é dito ter ordem $m + 1$ se algum ponto de X está em $m + 1$ elementos de Γ , e nenhum ponto de X está em mais do que $m + 1$ elementos de Γ .*

Definição 1.5.2 *Sejam Γ e β coleções de conjuntos, dizemos que β refina Γ se para cada $B \in \beta$, existe $A \in \Gamma$ tal que $B \subseteq A$.*

Definição 1.5.3 *Um espaço X é dito ter **dimensão** finita se existe algum inteiro m tal que para toda cobertura aberta Γ de X , existe uma cobertura aberta β de X que refina Γ e tem ordem menor ou igual a $m + 1$. A dimensão topológica de X é definida como sendo o menor valor de m para que isto ocorra.*

Observação 1.5.1 *A **dimensão topológica** de um espaço X é denotado por $\dim X$.*

Exemplo 1.5.1 *Todo conjunto com a topologia discreta tem dimensão topológica igual a 0.*

Listaremos abaixo alguns resultados que envolvem dimensão topológica.

Definição 1.5.4 *Uma n -variedade topológica é um espaço M de Hausdorff com base enumerável tal que para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança aberta de p que é homeomorfa a um aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n .*

Teorema 1.5.1 ([9]) *Se M é uma n -variedade topológica então $\dim M = n$.*

Segue diretamente das definições de n -variedade topológica e de ação propriamente descontínua o seguinte resultado

Teorema 1.5.2 *Se G é um grupo topológico que atua sobre uma n -variedade topológica M de tal forma que essa ação é propriamente descontínua então o espaço de órbitas M/G é ainda uma n -variedade topológica.*

Corolário 1.5.1 *Se M é uma n -variedade topológica que é um G -espaço sendo G um grupo finito, então o espaço de órbitas M/G é uma n -variedade topológica e portanto $\dim M/G = n = \dim M$.*

Prova: Pelo lema 1.3.1 a ação é propriamente descontínua, logo pelos teoremas 1.5.2 e 1.5.1 acima segue o resultado. \square

1.6 Categoria de um espaço

Em 1930, Ljusternick e Schnirelmann ([8]) introduziram a noção de categoria de uma variedade M . Essa mesma definição se aplica a um espaço topológico arbitrário, além disso a categoria de um espaço X é um invariante homotópico.

Definição 1.6.1 *A categoria de um espaço topológico X é o menor número de conjuntos fechados e contráteis em X que formam uma cobertura de X .*

Observação 1.6.1 *Na definição acima quando dizemos que $F \subseteq X$ é um conjunto fechado "contrátil em X ", queremos dizer que a inclusão $j : F \hookrightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante. Assim, por exemplo S^1 é contrátil em S^2 , embora S^1 não seja contrátil.*

Observação 1.6.2 *Denotaremos a categoria de X por $\text{cat } X$.*

Teorema 1.6.1 *$\text{cat } X = 1$ se e somente se X é contrátil.*

Teorema 1.6.2 *Se X tem o mesmo tipo de homotopia que Y então*

$$\text{cat } X = \text{cat } Y.$$

Prova: Como $X \simeq Y$ então existem aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Note que $Y = \cup_{i=1}^n g^{-1}(A_i)$, sendo cada $g^{-1}(A_i)$ fechado em Y , pois A_i é fechado em X e g é contínua. Verifiquemos que $g^{-1}(A_i)$ é contrátil em Y para $i = 1, \dots, n$. Seja a aplicação $H_i : A_i \times I \rightarrow X$ tal que $H_i(x, 0) = x$ e $H_i(x, 1) = e_x$ sendo e_x um caminho constante. Consideremos agora $F_i : g^{-1}(A_i) \times I \rightarrow Y$ como sendo $F_i(y, t) = (f \circ H_i)(g(y), t)$, assim $F_i(y, 0) = (f \circ H_i)(g(y), 0) = f(g(y)) = (f \circ g)(y)$ e $F_i(y, 1) = (f \circ H_i)(g(y), 1) = f(e_x) = e_y$ sendo e_y um caminho constante. Sendo $G : Y \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre $f \circ g$ e id_Y , então $G|_{g^{-1}(A_i) \times I}$ é uma homotopia entre $f \circ g|_{g^{-1}(A_i)}$ e $i : g^{-1}(A_i) \rightarrow Y$ a inclusão. Portanto $\text{cat } Y \leq \text{cat } X$, e de maneira análoga mostra-se que $\text{cat } X \leq \text{cat } Y$. \square

Exemplo 1.6.1 $\text{cat } S^n = 2, \quad n \geq 0$.

Exemplo 1.6.2 $\text{cat } (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) = \text{cat } (D^{n+1} - \{0\}) = 2$, porque ambos têm o mesmo tipo de homotopia da S^n , sendo que $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\| \leq 1\}$.

Listaremos abaixo outro resultado pertinente a categoria de um espaço (c.f.[4]).

Teorema 1.6.3 *Se X é conexo por caminhos e paracompacto então*

$$\text{cat } X \leq \dim X + 1.$$

1.7 Fibrados e Fibrados Principais

A definição de fibrados que daremos nesta seção pode ser encarada como a generalização de espaços de recobrimento, ou seja, localmente como o

produto do espaço base por sua fibra.

Definição 1.7.1 *Sejam X, B e F espaços (de Hausdorff) e $p : X \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Dizemos que p é uma **fibração localmente trivial** com fibra F se para cada $b \in B$ existe uma vizinhança U tal que $b \in U$ e um homeomorfismo $\phi : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p(\phi(b, y)) = b$ para todo $b \in U$ e $y \in F$.*

Observação 1.7.1 *Observe que em $p^{-1}(U)$, p corresponde à projeção $U \times F \longrightarrow U$. Assim, a aplicação ϕ é chamada de **trivialização local**. Observemos também que se $b \in U$ então a restrição de ϕ a $\{b\} \times F \longrightarrow p^{-1}(b)$ é um homeomorfismo, ou seja, se $p : X \longrightarrow B$ é uma fibração localmente trivial com fibra F , então $F \approx p^{-1}(b) \forall b \in B$.*

Exemplo 1.7.1 *Seja $p : B \times F \longrightarrow B$ dada por $p(x, e) = x$, então p é uma fibração localmente trivial, pois dado $b \in B$ existe $U = B$ tal que $\phi : B \times F \longrightarrow p^{-1}(U) = B \times F$ dada por $\phi(x, e) = (x, e)$ é uma trivialização local.*

Exibiremos agora a definição de fibrado.

Definição 1.7.2 *Seja G um grupo topológico atuando livremente pela direita num espaço (de Hausdorff) F como um grupo de homeomorfismos. Sejam X e B espaços (de Hausdorff). Um **fibrado** ξ sobre um espaço base B , com espaço total X , fibra F e grupo estrutural G , consiste numa fibração localmente trivial $p : X \longrightarrow B$ junto com uma coleção Ω de trivializações locais $\phi : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$, chamadas cartas sobre U , tais que:*

- (i) cada ponto de B possui uma vizinhança sobre a qual existe uma carta em Ω .

(ii) se $\phi : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ está em Ω e $V \subset U$, então a restrição de ϕ à $V \times F$ está em Ω .

(iii) se $\psi, \phi \in \Omega$ são cartas sobre U , então existe uma aplicação $\theta : U \longrightarrow G$ tal que $\psi(u, y) = \phi(u, y\theta(u))$.

(iv) o conjunto Ω é maximal satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Denotamos o fibrado acima por $\xi = (X, p, B, F, G)$. Algumas vezes, o espaço total de um fibrado ξ é denotado por $E(\xi)$ e o espaço base por $B(\xi)$.

Observação 1.7.2 Dadas as cartas ϕ e ψ sobre U , temos que $\phi^{-1}\psi : U \times F \longrightarrow U \times F$ é um homeomorfismo que comuta com a projeção $\pi : U \times F \longrightarrow U$. Assim, segue que $\phi^{-1}\psi(u, y) = (u, \mu(u, y))$, sendo $\mu : U \times F \longrightarrow F$ a aplicação contínua dada por $\mu = \pi_F \phi^{-1}\psi$, com $\pi_F : U \times F \longrightarrow F$ a projeção em F . Definindo $\theta : U \longrightarrow G$ por $y\theta(u) = \mu(u, y)$, temos que θ do item (iii) da definição acima é completamente determinado pelas cartas ϕ e ψ .

Exemplo 1.7.2 O Fibrado Produto $\xi = (B \times F, p, B, F, \{id\})$.

Já vimos que a fibração localmente trivial é a projeção na primeira variável, $\phi = id$ e $U = B$. Observe que o grupo estrutural consiste apenas do elemento neutro ($id : F \longrightarrow F$).

Definição 1.7.3 Dados G -espaços X e Y , dizemos que uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$ é **equivariante** se $f(g \cdot x) = g \cdot f(x) \forall g \in G, x \in X$, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\phi} & X \\ id_G \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times Y & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

comuta, sendo ϕ e ψ as ações de G em X e Y respectivamente.

Teorema 1.7.1 *Considere o fibrado $\xi = (X, p, B, F, K)$, suponha que G atua sobre F pela esquerda e que as ações G e K comutam ($(g(yk)) = (gy)k \forall g \in G, k \in K$ e $y \in F$). Então existe uma única ação de G sobre X tal que $p(gx) = p(x) \forall g \in G$ e $\forall x \in X$ e cada carta $\varphi : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ é equivariante [onde G atua em $U \times F$ por $(g, (u, y)) \mapsto (u, gy)$].*

Prova: A ação é definida pela equivariância das cartas e é suficiente provar que esta independe da escolha das cartas sobre U . Sendo assim, é só mostrar que cada $\varphi^{-1}\psi : U \times F \longrightarrow U \times F$ é equivariante. Mas

$$\begin{aligned} g(\varphi^{-1}\psi(u, y)) &= g(u, y\theta(u)) \\ &= (u, g(y\theta(u))) \\ &= (u, (gy)\theta(u)) \\ &= \varphi^{-1}\psi(u, gy) = \varphi^{-1}\psi(g(u, y)). \end{aligned}$$

□

Definição 1.7.4 *Um fibrado $\xi = (X, p, B, F, G)$ é chamado **G-fibrado principal** se sua fibra F coincide com seu grupo estrutural G e a ação $G \times G \longrightarrow G$ é dada pela multiplicação do grupo.*

Por razões óbvias denotaremos tal fibrado principal por (X, p, B, G) .

Segue imediatamente do teorema 1.7.1 e da definição acima o seguinte corolário

Corolário 1.7.1 *Seja (X, p, B, G) um fibrado principal, então existe uma ação livre de G sobre X tal que $p(gx) = p(x) \forall g \in G$ e $\forall x \in X$. A aplicação*

$p : X \longrightarrow B$ induz um homeomorfismo $X/G \xrightarrow{\approx} B$, sendo X/G o espaço de órbitas da ação.

Reciprocamente, se X é um G -espaço à esquerda então $(X, \pi, X/G, G)$ é um G -fibrado principal, sendo $\pi : X \longrightarrow X/G$ a projeção de X sobre o espaço de órbitas da ação.

Exemplo 1.7.3 Sejam G um grupo topológico, X um espaço topológico e $G \times G \longrightarrow G$ a multiplicação de G então se $p : X \times G \longrightarrow X$ é a projeção natural temos que $(X \times G, p, X, G)$ é um G -fibrado principal, chamado **G -fibrado trivial** sobre X e denotado por $\varepsilon(X, G)$. A ação de G em $X \times G$ é dada por $g(x, h) = (x, gh)$.

Exemplo 1.7.4 $(S^n, \pi, \mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ é um \mathbb{Z}_2 -fibrado principal.

Exemplo 1.7.5 $(S^{2n-1}, \pi, L(p, q_1, \dots, q_n), \mathbb{Z}_p)$ é um \mathbb{Z}_p -fibrado principal (c.f. exemplo 1.3.5).

Exemplo 1.7.6 Se $\xi = (X, p, B, G)$ é um G -fibrado principal e $A \subseteq B$ um subespaço de B então $\xi|_A = (p^{-1}(A), p|_{p^{-1}(A)}, A, G)$ é também um G -fibrado principal chamado **restrição de ξ ao subespaço A** .

Definição 1.7.5 Dados $\xi = (X, p, B, G)$ e $\eta = (Y, q, C, G)$ dois G -fibrados principais, então um **morfismo de G -fibrados principais**, ou um **G -morfismo** de ξ em η é um par $(\hat{f}, f) : \xi \longrightarrow \eta$, sendo $\hat{f} : X \longrightarrow Y$ uma aplicação equivariante, $f : B \longrightarrow C$ contínua tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\hat{f}} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

comuta, isto é, $q \circ \hat{f} = f \circ p$.

Diz-se usualmente que uma aplicação \hat{f} satisfazendo às condições acima é uma aplicação que **cobre** f ou que f é **coberta** por \hat{f} .

Se $\xi = (X, p, B, G)$ e $\eta = (Y, q, B, G)$ são G -fibrados principais sobre um mesmo espaço base B então um **B-morfismo** de ξ em η é um morfismo de fibrados principais da forma (id_B, id_B) .

Dois G -fibrados principais $\xi = (X, p, B, G)$ e $\eta = (Y, q, C, G)$ são isomorfos (*not.* $\xi \cong \eta$) se existe um G -morfismo $(\hat{f}, f) : \xi \rightarrow \eta$ tal que \hat{f} e f são homeomorfismos. Notemos que neste caso $(\hat{f}^{-1}, f^{-1}) : \eta \rightarrow \xi$ é também um G -morfismo.

Teorema 1.7.2 *Todo G -morfismo entre G -fibrados principais sobre o mesmo espaço base B é um isomorfismo.*

Definição 1.7.6 *Sejam $\xi = (X, p, B, G)$ um G -fibrado principal e $f : B_1 \rightarrow B$ uma função contínua. O **fibrado induzido** ou **pull-back** de ξ por f , denotado por $f^*(\xi) = (X_1, p_1, B_1, G)$ é o G -fibrado principal com espaço base B_1 , espaço total $X_1 = \{(b_1, x) \in B_1 \times X ; f(b_1) = p(x)\} \subseteq B_1 \times X$, a ação livre $G \times X_1 \rightarrow X_1$ é dada por $g(b_1, x) = (b_1, gx)$ e $p_1 : X_1 \rightarrow B_1$ é dada por $p_1(b_1, x) = b_1$.*

Observemos que $\hat{f} : X_1 \rightarrow X$ dada por $\hat{f}(b_1, x) = x$ é uma aplicação equivariante e $p \circ \hat{f} = f \circ p_1$, ou seja, $(\hat{f}, f) : f^*(\xi) \rightarrow \xi$ é um G -morfismo de $f^*(\xi)$ em ξ chamado **morfismo canônico** de um fibrado induzido.

Exemplo 1.7.7 *Sejam $\xi = (X, p, B, G)$ um G -fibrado principal e $A \subseteq B$ um subespaço de B . Se $j : A \hookrightarrow B$ é a inclusão então $j^*(\xi) \cong \xi|_A$ sendo $\hat{j} : p^{-1}(A) \rightarrow E(j^*(\xi))$ dada por $\hat{j}(x) = (p(x), x)$.*

Exemplo 1.7.8 *Sejam $\xi = (X, p, B, G)$ um G -fibrado principal e $c : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação constante igual a $x_0 \in B$. Então $c^*(\xi) \cong \varepsilon(B_1, G) = (B_1 \times G, p_1, B_1, G)$, sendo $\hat{c} : B_1 \times G \rightarrow E(c^*(\xi))$ dado por $\hat{c}(b_1, g) = (b_1, \phi(x_0, g))$, sendo $\phi : U \times G \rightarrow p^{-1}(U)$ uma carta sobre uma vizinhança U de x_0 .*

O próximo teorema que vamos enunciar abaixo vai ser de grande utilidade no capítulo 4, a sua demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 1.7.3 *Sejam $f, g : B \rightarrow B'$ duas aplicações homotópicas, sendo B um espaço paracompacto, e seja $\xi = (X, p, B', G)$ um G -fibrado principal sobre B' . Então $f^*(\xi)$ e $g^*(\xi)$ são isomorfos.*

Capítulo 2

Uma boa estimativa do teorema de Borsuk-Ulam

Neste capítulo analisaremos uma generalização do teorema clássico de Borsuk-Ulam. O intuito aqui não é provar o teorema, mas verificar que a sua estimativa não pode ser melhorada. Além disso, enunciaremos e provaremos um resultado que será de grande utilidade no capítulo 5. Sendo assim, comecemos enunciando o

Teorema 2.0.4 (*Borsuk-Ulam*) *Seja*

$$n \geq m \tag{2.1}$$

e $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação contínua. Então existe um* $x \in S^n$ *com* $h(x) = h(A(x))$, *sendo* $A : S^n \rightarrow S^n$ *a aplicação antípoda dada por* $A(x) = -x$.

Já vimos no Exemplo 1.3.3 que $A : S^n \rightarrow S^n$ gera uma \mathbb{Z}_2 -ação livre em S^n , sendo assim é natural substituímos a aplicação A por uma aplicação $f : S^n \rightarrow S^n$ gerando um Z_p -ação livre em S^n e perguntarmos se para toda aplicação contínua $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existe um $x \in S^n$ com $h(x) = h(f(x))$.

Essa questão tem sido extensivamente estudada não somente para as esferas, mas para espaços mais gerais. Para as esferas temos o seguinte resultado:

Teorema 2.0.5 (*Borsuk-Ulam generalizado*)(c.f. [7], [12]) *Sejam p um número primo, $m, n \in \mathbb{N}$ com*

$$n \geq (m - 1)(p - 1) + 1 \quad (2.2)$$

e seja $f : S^n \rightarrow S^n$ gerando uma \mathbb{Z}_p -ação livre em S^n . Então para cada aplicação contínua $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, existe um $x \in S^n$ com $h(x) = h(f(x))$.

Observação 2.0.3 *Para $p = 2$ a estimativa (2.2) é a melhor possível, pois neste caso se considerarmos $n < (m - 1)(p - 1) + 1$, teremos $n < m$, logo basta tomarmos $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como sendo a inclusão que é uma aplicação contínua e além disso tem-se que $h(f(x)) \neq h(x) \forall x \in S^n$.*

O que faremos agora é verificar que a estimativa (2.2) no teorema de Borsuk-Ulam generalizado também não pode ser melhorada para $p \geq 3$ sendo p um número primo.

Teorema 2.0.6 *Sejam $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $p \geq 3$ um número primo,*

$$L := \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^{m-1})^p ; \sum_{i=1}^p x_i = 0 \in \mathbb{R}^{m-1}\}$$

$$S := S^{(m-1)p-1} \cap L$$

e $\varphi : S \rightarrow S$ dada por $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, \dots, x_p, x_1)$. Então existe uma aplicação contínua $h : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $h(x) \neq h(\varphi(x)) \forall x \in S$.

Prova: Seja $h_1 : S \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ dada por $h_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = x_1$. Como h_1 é a primeira projeção temos que h_1 é contínua. Considere também $d : S \rightarrow \mathbb{R}$ a

aplicação contínua definida por

$$\begin{aligned} d(x) &= \|(h_1(\varphi(x)) - h_1(x), h_1(\varphi^2(x)) - h_1(\varphi(x)), \dots, h_1(\varphi^p(x)) - h_1(\varphi^{p-1}(x)))\| \\ &= \|(x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_1 - x_p)\| \end{aligned}$$

sendo $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^{m-1})^p \rightarrow \mathbb{R}$ a norma euclidiana. Desde que $(x_1, x_2, \dots, x_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$ e $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0$ temos que $d(x) \neq 0 \forall x \in S$. Observe também que pela definição de d e φ temos $d(x) = d(\varphi(x)) \forall x \in S$. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação contínua com $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(t) = 0 \forall t \geq \frac{\sqrt{p}}{p}$.

Seja $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sum_{i=0}^{p-2} \prod_{j=0}^i \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right)$$

Observe que g é uma aplicação contínua, pois é soma, produto e composição de funções contínuas. Seja $h : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação contínua dada por $h(x) = (h_1(x), g(x))$. Provaremos que $h(x) \neq h(\varphi(x)) \forall x \in S$. De fato: se $h_1(x) \neq h_1(\varphi(x)) \forall x \in S$, então a aplicação h tem a propriedade desejada. Suponhamos então que exista $x \in S$ tal que $h_1(x) = h_1(\varphi(x))$. Pela definição de d e α deve existir $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ com

$$\alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) = 0$$

pois, se $\forall j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tivermos $\alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \neq 0$, então

$$\alpha\left(\frac{\|x_1 - x_p\|}{d(x)}\right) \neq 0, \alpha\left(\frac{\|x_p - x_{p-1}\|}{d(x)}\right) \neq 0, \dots, \alpha\left(\frac{\|x_2 - x_1\|}{d(x)}\right) \neq 0$$

e daí, pela definição de α teremos

$$\frac{\|x_1 - x_p\|}{d(x)} < \frac{\sqrt{p}}{p}, \frac{\|x_p - x_{p-1}\|}{d(x)} < \frac{\sqrt{p}}{p}, \dots, \frac{\|x_2 - x_1\|}{d(x)} < \frac{\sqrt{p}}{p}.$$

Como a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ é crescente temos

$$\frac{\|x_1 - x_p\|^2}{(d(x))^2} + \frac{\|x_p - x_{p-1}\|^2}{(d(x))^2} + \dots + \frac{\|x_2 - x_1\|^2}{(d(x))^2} < \left(\frac{\sqrt{p}}{p}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{p}}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{p}}{p}\right)^2 = 1.$$

Mas por outro lado, como $d(x) = \|(x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_1 - x_p)\|$ e $x_i \in \mathbb{R}^{m-1}$

$\forall i = 1, \dots, p$ então

$$\frac{\|x_1 - x_p\|^2}{(d(x))^2} + \frac{\|x_p - x_{p-1}\|^2}{(d(x))^2} + \dots + \frac{\|x_2 - x_1\|^2}{(d(x))^2} = \frac{\|x_1 - x_p\|^2 + \|x_p - x_{p-1}\|^2 + \dots + \|x_2 - x_1\|^2}{(d(x))^2} = 1$$

ou seja, $1 < 1$ o que é um absurdo. Sendo assim, para esse $x \in S$ com

$h_1(\varphi(x)) = h_1(x)$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{j=0}^{p-1} \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \\ &= \prod_{j=0}^{p-2} \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \cdot \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-(p-1)}(x)) - h_1(\varphi^{p-(p-1)-1}(x))\|}{d(x)}\right) \\ &= \prod_{j=0}^{p-2} \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \cdot \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi(x)) - h_1(x)\|}{d(x)}\right) \\ &= \prod_{j=0}^{p-2} \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \cdot \alpha(0) \\ &= \prod_{j=0}^{p-2} \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \end{aligned}$$

Ainda supondo que $h_1(x) = h_1(\varphi(x))$ temos que

$$\begin{aligned} g(\varphi(x)) &= \sum_{i=0}^{p-2} \prod_{j=0}^i \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j+1}(x)) - h_1(\varphi^{p-j}(x))\|}{d(\varphi(x))}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{p-2} \prod_{j=0}^i \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j+1}(x)) - h_1(\varphi^{p-j}(x))\|}{d(x)}\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} 1 + \sum_{i=0}^{p-3} \prod_{j=0}^i \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) + 0 \\ &\stackrel{(*)}{=} 1 + \sum_{i=0}^{p-3} \prod_{j=0}^i B_j + \prod_{j=0}^{p-2} \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{p-2} \prod_{j=0}^i \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right) \\ &= 1 + g(x) \end{aligned}$$

em particular $g(\varphi(x)) \neq g(x)$. Portanto, se existe $x \in S$ com $h_1(x) = h_1(\varphi(x))$

o que acabamos de ver acima nos garante que para esse $x \in S$ teremos

$h(x) \neq h(\varphi(x))$, o que finaliza a prova do teorema. \square

(*) Seja $A_j = \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j+1}(x)) - h_1(\varphi^{p-j}(x))\|}{d(x)}\right)$ e $B_j = \alpha\left(\frac{\|h_1(\varphi^{p-j}(x)) - h_1(\varphi^{p-j-1}(x))\|}{d(x)}\right)$

Note que, $B_j = A_{j+1} \forall j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ e além disso para $h_1(x) = h_1(\varphi(x))$

temos $A_0 = \alpha(0) = 1$, daí segue que

$$\sum_{i=1}^{p-2} \prod_{j=0}^i A_j = \prod_{j=0}^1 A_j + \prod_{j=0}^2 A_j + \prod_{j=0}^3 A_j + \dots + \prod_{j=0}^{p-2} A_j = A_0 \cdot A_1 + A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 + \dots + A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \dots A_{p-2} = A_1 + A_1 \cdot A_2 + \dots + A_1 \cdot A_2 \dots A_{p-3} \cdot A_{p-2}.$$

Por outro lado temos que

$$\sum_{i=0}^{p-3} \prod_{j=0}^i B_j = \prod_{j=0}^0 B_j + \prod_{j=0}^1 B_j + \prod_{j=0}^2 B_j + \dots + \prod_{j=0}^{p-3} B_j = B_0 + B_0 \cdot B_1 + B_0 \cdot B_1 \cdot B_2 + \dots + B_0 \cdot B_1 \dots B_{p-4} \cdot B_{p-3} = A_1 + A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + \dots + A_1 \cdot A_2 \dots A_{p-3} \cdot A_{p-2}$$

As próximas duas afirmações abaixo vão nos permitir tirar conclusões sobre a estimativa (2.2) do teorema de Borsuk-Ulam generalizado.

Afirmção 2.0.1 *S é uma esfera $((m-1)(p-1)-1)$ -dimensional contida em $S^{(m-1)p-1}$.*

Prova: Para $m \geq 2$ e p um número primo temos que $(m-1)(p-1) \leq (m-1)p-1$. Considere $T : (\mathbb{R}^{m-1})^p \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ dada por $T(x_1, x_2, \dots, x_p) = x_1 + x_2 + \dots + x_p$. Não é difícil verificar que T é uma transformação linear sobrejetora. Como o $\text{Ker } T = L$, o teorema do núcleo e da imagem nos garante que $\dim L = (m-1)(p-1)$, ou seja, L é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^{m-1})^p$ com dimensão $(m-1)(p-1)$. Logo podemos afirmar que $S := S^{(m-1)p-1} \cap L$ é uma esfera $((m-1)(p-1)-1)$ -dimensional. \square

Afirmção 2.0.2 *A aplicação φ gera uma \mathbb{Z}_p -ação livre em S.*

Prova: Usando a definição da aplicação φ temos que $\varphi^p(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2, \dots, x_p) \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in S$. Além disso, φ não tem ponto fixo,

pois se existir $x \in S$ tal que $\varphi(x) = x$ teremos:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2, \dots, x_p) &\implies (x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_1) \implies x_1 = \\ x_2 = \dots = x_p &\text{ o que é um absurdo, pois } x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0 \text{ e } (x_1, x_2, \dots, x_p) \neq \\ (0, 0, \dots, 0). & \quad \square \end{aligned}$$

Observação 2.0.4 *Se assumirmos que $p \geq 3$, então o número $(m-1)(p-1)$ é par para qualquer $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Portanto pelo Teorema 1.3.5 não existe \mathbb{Z}_p -ação livre na $S^{(m-1)(p-1)}$ para $p \geq 3$.*

Juntando o teorema 2.0.6, as duas afirmações acima e a observação que acabamos de fazer podemos afirmar que para $p \geq 3$ o número $n = (m-1)(p-1) + 1$ da estimativa (2.2) do teorema de Borsuk-Ulam generalizado é o menor possível, pois se $n < (m-1)(p-1) + 1$ podemos encontrar uma \mathbb{Z}_p -ação livre $\varphi : S^{(m-1)(p-1)-1} \longrightarrow S^{(m-1)(p-1)-1}$ e $h : S^{(m-1)(p-1)-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua tal que $h(x) \neq h(\varphi(x)) \quad \forall x \in S^{(m-1)(p-1)-1}$.

O próximo teorema que vamos enunciar e provar nos garante que dada a \mathbb{Z}_p -ação livre $\varphi : S^{(m-1)(p-1)-1} \longrightarrow S^{(m-1)(p-1)-1}$ como no teorema 2.0.6 existe uma cobertura da $S^{(m-1)(p-1)-1}$ por fechados U_1, \dots, U_{4m} com $U_i \cap \varphi(U_i) = \emptyset$ para $i = 1, \dots, 4m$.

Teorema 2.0.7 *Seja M um espaço normal, p um número primo, e seja $f : M \longrightarrow M$ gerando uma \mathbb{Z}_p -ação livre em M . Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que existe uma aplicação contínua $h : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ com $h(x) \neq h(f(x)) \quad \forall x \in M$. Então existem conjuntos fechados $U_1, \dots, U_{4m} \subset M$ com $\cup_{j=1}^{4m} U_j = M$ e $U_j \cap f(U_j) = \emptyset$ para $j = 1, \dots, 4m$.*

Demonstração: Seja $g : M \longrightarrow S^{m-1}$ definida por

$$g(x) = \frac{h(f(x)) - h(x)}{\|h(f(x)) - h(x)\|} = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) .$$

Para cada $l \in \{1, \dots, m\}$ definamos os seguintes conjuntos

$$R_l = \{x \in M; |g_l(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{m}}\}$$

$$W_l^+ = \{x \in M; g_l(x) \geq 0\}$$

$$W_l^- = \{x \in M; g_l(x) \leq 0\}$$

e

$$R_l^\pm = R_l \cap W_l^\pm .$$

Cada subconjunto definido acima é fechado em M . Fixemos $l \in \{1, \dots, m\}$ e consideremos primeiramente R_l^+ e W_l^- .

Seja $x \in M$ com $f(x) \in R_l^+$. Então para algum $j \in \{0, \dots, p-1\}$ devemos ter

$$(h(f^{p-j+1}(x)) - h(f^{p-j}(x)))_l \leq 0$$

sendo $(h(f^{p-j+1}(x)) - h(f^{p-j}(x)))_l$ a l -ésima coordenada de $g(f^{p-j}(x))$ multiplicado por $\|h(f^{p-j+1}(x)) - h(f^{p-j}(x))\|$. De fato:

Como $f(x) \in R_l^+$, então

$$g_l(f(x)) = \left(\frac{h(f^2(x)) - h(f(x))}{\|h(f^2(x)) - h(f(x))\|} \right)_l \geq \frac{1}{\sqrt{m}}$$

ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \|h(f^2(x)) - h(f(x))\| \leq (h(f^2(x)) - h(f(x)))_l$$

Suponha que $(h(f^{p-j+1}(x)) - h(f^{p-j}(x)))_l = (h(f^{p-j+1}(x)))_l - (h(f^{p-j}(x)))_l >$

$0 \forall j \in \{0, \dots, p-1\}$. Daí segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \|h(f^2(x)) - h(f(x))\| &\leq (h(f^2(x)) - h(f(x)))_l = (h(f^2(x)))_l - (h(f(x)))_l < \\ &(h(f^3(x)))_l - (h(x))_l < (h(f^4(x)))_l - (h(x))_l < \dots < (h(f^{p-1}(x)))_l - (h(x))_l < \\ &(h(x))_l - (h(x))_l = 0, \text{ o que é um absurdo.} \end{aligned}$$

Como R_l^+ e W_l^- são fechados disjuntos, pelo Lema de Urysohn existe uma aplicação contínua $a_+ : M \longrightarrow [0, 1]$ com $a_+|_{R_l^+} = 1$ e $a_+|_{W_l^-} = 0$. Sendo

assim, pelo que acabamos de ver acima, se $x \in M$ com $f(x) \in R_l^+$ temos que $(g(f^{p-j}(x)))_l \leq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, p-1\}$, isto é, $f^{p-j}(x) \in W_l^-$. Daí segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{j=0}^{p-1} a_+(f^{p-j}(x)) = \prod_{j=0}^{p-2} a_+(f^{p-j}(x)) a_+(f^{p-(p-1)}(x)) \\ &= \prod_{j=0}^{p-2} a_+(f^{p-j}(x)) \cdot a_+(f(x)) = \prod_{j=0}^{p-2} a_+(f^{p-j}(x)) \cdot 1 \\ &= \prod_{j=0}^{p-2} a_+(f^{p-j}(x)) \end{aligned}$$

Defina a aplicação contínua $b_+ : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $b_+(x) = \sum_{k=0}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j}(x))$. Provaremos agora que se $x \in M$ com $f(x) \in R_l^+$, então $b_+(f(x)) - b_+(x) = 1$.

De fato:

$$\begin{aligned} b_+(f(x)) - b_+(x) &= \sum_{k=0}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j+1}(x)) - \sum_{k=0}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j}(x)) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j+1}(x)) - \sum_{k=0}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j}(x)) \\ &\stackrel{(**)}{=} 1 + \sum_{k=1}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j+1}(x)) - \sum_{k=0}^{p-3} \prod_{j=0}^k B_j - \prod_{j=0}^{p-2} B_j \\ &\stackrel{(**)}{=} 1 + \sum_{k=1}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j+1}(x)) - \sum_{k=0}^{p-3} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j}(x)) - 0 \\ &\stackrel{(**)}{=} 1 + \sum_{k=0}^{p-3} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j}(x)) - \sum_{k=0}^{p-3} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j}(x)) \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(**) Seja $A_j = a_+(f^{p-j+1}(x))$ e $B_j = a_+(f^{p-j}(x))$, note que $A_0 = 1$ e $B_j =$

$A_{j+1} \forall j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, logo temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j+1}(x)) &= \sum_{k=1}^{p-2} \prod_{j=0}^k A_j = \prod_{j=0}^1 A_j + \prod_{j=0}^2 A_j + \dots + \prod_{j=0}^{p-2} A_j = A_0 \cdot A_1 + \\ A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 + \dots + A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \dots A_{p-2} &= A_1 + A_1 \cdot A_2 + \dots + A_1 \cdot A_2 \dots A_{p-2}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\sum_{k=0}^{p-3} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j}(x)) = \sum_{k=0}^{p-3} \prod_{j=0}^k B_j = \prod_{j=0}^0 B_j + \prod_{j=0}^1 B_j + \dots + \prod_{j=0}^{p-3} B_j = B_0 + B_0.B_1 + \dots + B_0.B_1 \dots B_{p-3} = A_1 + A_1.A_2 + \dots + A_1.A_2 \dots A_{p-2}.$$

Defina $c_+ : M \rightarrow S^1$ por $c_+(x) = e^{b_+(x)\pi i}$ e os seguintes conjuntos

$$D_1 = \{e^{2\pi it}; 0 \leq t \leq \frac{1}{3}\}$$

$$D_2 = \{e^{2\pi it}; \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\}$$

$$D_3 = \{e^{2\pi it}; \frac{2}{3} \leq t \leq 1\}$$

Além disso defina também $G_{d,l}^+ = R_l^+ \cap c_+^{-1}(D_d)$ para $d \in \{1, 2, 3\}$ e $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Como c_+ é contínua temos que $G_{d,l}^+$ é fechado em M para cada d .

Da mesma maneira que foi feito anteriormente podemos definir uma função

$a_- : M \rightarrow [0, 1]$ com $a_-|_{R_l^-} = 1$ e $a_-|_{W_l^+} = 0$, obtendo-se ainda uma

função $b_- : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $b_-(x) = \sum_{k=0}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_-(f^{p-j}(x))$, tal que $\forall x \in M$

com $f(x) \in R_l^-$ tem-se $b_-(f(x)) - b_-(x) = 1$. Além disso podemos definir

$c_- : M \rightarrow S^1$ por $c_- = e^{b_-(x)\pi i}$ e os conjuntos fechados $G_{d,l}^- = R_l^- \cap c_-^{-1}(D_d)$

para $d = 1, 2, 3$. Sendo assim, defina os seguintes conjuntos $H_{1,l} = G_{1,l}^+ \cup G_{1,l}^-$,

$H_{2,l} = G_{2,l}^+$, $H_{3,l} = G_{2,l}^-$ e $H_{4,l} = G_{3,l}^+ \cup G_{3,l}^-$. É obvio que os conjuntos $H_{i,l}$ são

fechados em M para $i = 1, 2, 3, 4$, e além disso é fácil ver que $R_l = \cup_{i=1}^4 H_{i,l}$

sendo $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Já sabemos que se $x \in M$ com $f(x) \in R_l^+$ teremos

$b_+(f(x)) = b_+(x) + 1$. Daí segue que $b_+(f(x)).\pi i = b_+(x).\pi i + \pi i$. Logo

$c_+(f(x)) = e^{b_+(f(x)).\pi i} = e^{b_+(x).\pi i} . e^{\pi i} = e^{b_+(x).\pi i} . (-1) = -e^{b_+(x).\pi i} = -c_+(x)$, ou

seja, não existe $d \in \{1, 2, 3\}$ com $c_+(x), c_+(f(x)) \in D_d$ simultaneamente.

Afirmção 2.0.3 $H_{i,l} \cap f(H_{i,l}) = \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $l \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Prova: A prova desta afirmação será dividida em dois casos:

Caso 1: $G_{d,l}^+ \cap f(G_{d,l}^+) = \emptyset \quad \forall d \in \{1, 2, 3\}$ e $l \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Suponha que exista $x \in G_{d,l}^+ \cap f(G_{d,l}^+)$. Isso implica que $x \in G_{d,l}^+ = R_l^+ \cap c_+^{-1}(D_d)$

e $x \in f(G_{d,l}^+)$, ou seja, $x = f(y)$ onde $y \in G_{d,l}^+$. Como $c_+(x) = c_+(f(y)) \in D_d$ e $c_+(y) \in D_d$, a discussão acima nos garante que isso é um absurdo. Portanto, $G_{d,l}^+ \cap f(G_{d,l}^+) = \emptyset$, e de maneira análoga mostra-se que $G_{d,l}^- \cap f(G_{d,l}^-) = \emptyset$ $\forall d \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2: $G_{d,l}^+ \cap f(G_{d,l}^-) = \emptyset \forall d \in \{1, 3\}$ e $l \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Suponha que $x \in G_{d,l}^+ \cap f(G_{d,l}^-)$. Isso implica que $x = f(y)$ onde $y \in G_{d,l}^- = R_l^- \cap c_-^{-1}(D_d) \subset R_l^- \subset W_l^-$ e $x \in G_{d,l}^+ = R_l^+ \cap c_+^{-1}(D_d)$. Usando a definição da aplicação a_+ temos $a_+(f(y)) = 1$ e $a_+(y) = 0$. Assim para $1 \leq k \leq p-2$ temos que

$$\prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j+1}(y)) = a_+(f(y)) \cdot a_+(y) \cdot a_+(f^{p-1}(y)) \dots a_+(f^{p-k+1}(y)) = 0$$

Logo, $b_+(f(y)) = \sum_{k=0}^{p-2} \prod_{j=0}^k a_+(f^{p-j+1}(y)) = a_+(f(y)) = 1$ e conseqüentemente $c_+(f(y)) = e^{b_+(f(y))\pi i} = e^{\pi i} \in D_2 \setminus D_1 \cup D_3$, ou seja, $f(y) \in G_{2,l}^+ \setminus G_{1,l}^+ \cup G_{3,l}^+$. Portanto, $G_{d,l}^+ \cap f(G_{d,l}^-) = \emptyset$ e analogamente mostra-se que $G_{d,l}^- \cap f(G_{d,l}^+) = \emptyset$ $\forall d \in \{1, 3\}$. \square

Afirmção 2.0.4 $M = \cup_{l=1}^m R_l$

Prova: Basta mostrar que $M \subset \cup_{l=1}^m R_l$. Para isso seja $x \in M$. Como $g : M \longrightarrow S^{m-1}$ temos que $g(x) = (g_1(x), \dots, g_l(x), \dots, g_m(x))$. Sendo assim para algum $l \in \{1, \dots, m\}$ temos que $g_l(x) \leq \frac{-1}{\sqrt{m}}$ ou $g_l(x) \geq \frac{1}{\sqrt{m}}$. Isso implica que $x \in R_l$ para algum l , ou seja, $x \in \cup_{l=1}^m R_l$. \square

Portanto, pela afirmação acima $M = \cup_{l=1}^m R_l = \cup_{l=1}^m (\cup_{i=1}^4 H_{i,l}) = \cup_{(i,l) \in A} H_{i,l}$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, \dots, m\}$. Como a cardinalidade de A é $4m$ o teorema é verdadeiro.

Corolário 2.0.2 *Sejam m, p e S como no teorema 2.0.6. Então existem conjuntos fechados $U_1, \dots, U_{4m} \subset S$ com $U_j \cap \varphi(U_j) = \emptyset \forall j = 1, \dots, 4m$ e $S = \cup_{j=1}^{4m} U_j$.*

Capítulo 3

O gênero de um \mathbb{Z}_p -espaço

Neste capítulo introduzimos duas noções de gênero de um espaço com uma \mathbb{Z}_p -ação livre. Exploraremos algumas propriedades dessas noções e a relação entre ambas, bem como uma relação entre o gênero de um \mathbb{Z}_p -espaço e a existência de aplicações \mathbb{Z}_p -equivariantes.

3.1 Definições e exemplos

Nesta seção daremos duas definições de gênero, e demonstraremos dois lemas que relacionam as duas definições. Para finalizar a seção veremos alguns exemplos que permitem entender melhor a definição de gênero.

Definição 3.1.1 *Seja p um número primo, então definimos*

$$H_p = \{(M, f) ; M \text{ é Hausdorff e } f : M \longrightarrow M \text{ gera uma } \mathbb{Z}_p\text{-ação livre em } M\}$$

$$N_p = \{(M, f) \in H_p ; M \text{ é normal}\}$$

Vamos definir abaixo o primeiro conceito de gênero:

Definição 3.1.2 *Seja $(M, f) \in H_p$ então definimos*

$L(M, f) = \{ G \subset M ; \text{ existem fechados disjuntos } G_0, \dots, G_{p-1} \subset M \text{ com}$

$$G = \cup_{i=0}^{p-1} G_i \text{ e } f^i(G_0) = G_i \quad \forall i = 1, \dots, p-1 \}$$

$S(M, f) = \{ \mathfrak{S} \subset L(M, f) ; M = \bigcup_{G \in \mathfrak{S}} G \}$

e o **gênius** $g(M, f)$ é definido por

$$g(M, f) = \min\{\text{card } \mathfrak{S} ; \mathfrak{S} \in S(M, f)\}.$$

Observação 3.1.1 *Se $g(M, f) = 1$, então existe $\tau \in S(M, f)$ tal que $\text{card } \tau = 1$, logo $\tau = \{M\}$, mas como $\tau \subset L(M, f)$ existem $G_0, \dots, G_{p-1} \subset M$ fechados disjuntos com $M = \cup_{i=0}^{p-1} G_i$. Portanto, M é desconexo.*

Observação 3.1.2 *Seja $(M, f) \in H_p$ e $\bar{x} = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ a órbita de x . Considere $\tau = \{\bar{x}\}_{x \in M}$. Como $\bar{x} \in L(M, f)$ para cada $x \in M$, temos que $\tau \in S(M, f)$ e conseqüentemente $g(M, f) \leq \text{card } \tau \leq \text{card } M$.*

Antes de definirmos o segundo conceito de gênero, precisaremos antes definir o que é uma cobertura admissível.

Definição 3.1.3 *Seja M um espaço de Hausdorff. Dizemos que $\mathcal{U} \subset 2^M$ é uma cobertura admissível de M se*

(a) \mathcal{U} é uma cobertura aberta de M

(b) existe uma família $(t_U)_{U \in \mathcal{U}}$ de aplicações contínuas $t_U : M \rightarrow [0, 1]$ tal que

(i) $t_U|_{M-U} = 0$

(ii) para todo $x \in M$ existe um $U \in \mathcal{U}$ com $t_U(x) = 1$

Seja \mathcal{H} o conjunto dos números cardinais e ∞ um objeto que não pertence a \mathcal{H} . Seja $\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H} \cup \{\infty\}$ com a ordem induzida da boa ordenação de \mathcal{H} junto com $\alpha < \infty, \forall \alpha \in \mathcal{H}$.

Definição 3.1.4 *Seja p um número primo e $(M, f) \in H_p$. Então definimos $X_{M,f} = \{\alpha \in \mathcal{H} ; \alpha \text{ é o cardinal de uma cobertura admissível } \mathcal{U} \subset 2^M \text{ tal que para todo } U \in \mathcal{U} \text{ existem abertos disjuntos } U_0, \dots, U_{p-1} \subset M \text{ com } \cup_{i=0}^{p-1} U_i = U \text{ e } f^i(U_0) = U_i \forall i = 1, \dots, p-1\}$ se tal cobertura admissível \mathcal{U} existe, e $X_{M,f} = \{\infty\}$ caso contrário.*

Como $X_{M,f} \subset \mathcal{H}^\infty$ é não vazio e \mathcal{H}^∞ é um conjunto bem ordenado, podemos afirmar que $X_{M,f}$ possui um elemento mínimo, sendo assim considere a definição abaixo.

Definição 3.1.5 *Seja p um número primo e $(M, f) \in H_p$. Então o **gênius** $\bar{g}(M, f)$ é definido por*

$$\bar{g}(M, f) = \min X_{M,f}$$

Observação 3.1.3 *Se $\bar{g}(M, f) = 1$ então M é desconexo.*

Os próximos dois lemas que vamos enunciar e provar vão nos dizer qual a relação entre os dois gênius definidos acima. Além disso, os lemas serão fundamentais para provar outros resultados neste e nos próximos capítulos.

Lema 3.1.1 *Seja $(M, f) \in H_p$, então $g(M, f) \leq \bar{g}(M, f)$.*

Prova: Se $\bar{g}(M, f) = \infty$ o resultado é óbvio. Suponha $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ cobertura admissível de M tal que $\forall \lambda \in \Omega$ existem abertos disjuntos $D_{\lambda_0}, D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_{p-1}}$ tais que $D_\lambda = D_{\lambda_0} \cup D_{\lambda_1} \cup \dots \cup D_{\lambda_{p-1}}$ e $D_{\lambda_i} = f^i(D_{\lambda_0})$ para $i = 1, \dots, p-1$. Defina $\Lambda = \{\lambda \in \Omega ; t_{D_\lambda}(x) = 1 \text{ para algum } x \in M\}$. Seja $x \in M$. Como $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ é cobertura admissível de M , existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $t_{D_\lambda}(x) = 1$. Além

disso, como $t_{D_\lambda}(M - D_\lambda) = 0$, podemos afirmar que $x \in D_\lambda$. Mas sabendo que $D_\lambda = D_{\lambda_0} \cup D_{\lambda_1} \cup \dots \cup D_{\lambda_{p-1}}$ podemos supor (reindexando se necessário) que $x \in D_{\lambda_0}$. Seja C_x a componente conexa de x em D_λ . Logo $C_x \subset D_{\lambda_0}$. Como $t_{D_\lambda} : M \rightarrow [0, 1]$ é contínua então $t_{D_\lambda}(C_x)$ é conexo em $[0, 1]$, logo $t_{D_\lambda}(C_x)$ é um intervalo em $[0, 1]$, em outras palavras existe $0 \leq \varepsilon_x \leq 1$ tal que $t_{D_\lambda}(C_x) = (\varepsilon_x, 1]$ ou $t_{D_\lambda}(C_x) = [\varepsilon_x, 1]$. Seja $\delta_x = \frac{\varepsilon_x + 1}{2}$. Então $[\delta_x, 1] \subset t_{D_\lambda}(C_x)$. Definamos agora o seguinte conjunto:

$$F_{\lambda_0} = t_{D_\lambda}^{-1}([\delta_x, 1]) \cap (M - (D_{\lambda_1} \cup D_{\lambda_2} \cup \dots \cup D_{\lambda_{p-1}}))$$

Desde que t_{D_λ} é uma aplicação contínua e $[\delta_x, 1]$ é fechado em $[0, 1]$ podemos afirmar que F_{λ_0} é um conjunto fechado em M .

Afirmção 3.1.1 $F_{\lambda_0} \subset D_{\lambda_0}$

Prova: Seja $y \in F_{\lambda_0}$. Então $t_{D_\lambda}(y) \in [\delta_x, 1]$ e $y \in M - (D_{\lambda_1} \cup D_{\lambda_2} \cup \dots \cup D_{\lambda_{p-1}})$. Como $\delta_x > 0$ então $t_{D_\lambda}(y) > 0$, ou seja, $y \in D_\lambda$, pois se $y \notin D_\lambda$ teríamos que $t_{D_\lambda}(y) = 0$. Mas também $y \notin D_{\lambda_1} \cup D_{\lambda_2} \cup \dots \cup D_{\lambda_{p-1}}$. Logo podemos afirmar que $y \in D_{\lambda_0}$, como queríamos. \square

Defina os seguintes conjuntos: $F_{\lambda_i} = f^i(F_{\lambda_0})$ $i = 1, 2, \dots, p-1$. Como f é um homeomorfismo e F_{λ_0} é fechado em M podemos afirmar que F_{λ_i} é fechado em M , $\forall i = 1, 2, \dots, p-1$.

Afirmção 3.1.2 $F_{\lambda_i} \subset D_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, p-1$.

Prova: Como $F_{\lambda_0} \subset D_{\lambda_0}$ e $D_{\lambda_i} = f^i(D_{\lambda_0})$ podemos afirmar que $F_{\lambda_i} = f^i(F_{\lambda_0}) \subset f^i(D_{\lambda_0}) = D_{\lambda_i}$, ou seja, $F_{\lambda_i} \subset D_{\lambda_i}$, $\forall i = 1, \dots, p-1$. \square

Logo, pelas afirmações acima temos que $F_\lambda = \bigcup_{i=0}^{p-1} F_{\lambda_i} \subset \bigcup_{i=0}^{p-1} D_{\lambda_i} = D_\lambda$. Portanto, para todo $x \in M$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in F_\lambda$, ou seja, $M =$

$\cup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. Pela Definição 3.1.2 podemos afirmar que $g(M, f) \leq \text{card } \Lambda \leq \text{card } \Omega = \bar{g}(M, f)$, o que acaba a prova do lema .

Lema 3.1.2 *Seja $(M, f) \in N_p$, então $\bar{g}(M, f) = g(M, f)$.*

Prova: Basta mostrar que $\bar{g}(M, f) \leq g(M, f)$. Para isso suponha $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ cobertura fechada de M tal que para todo $\lambda \in \Omega$ existam fechados disjuntos $U_{\lambda_0}, U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{p-1}}$ tais que $U_\lambda = U_{\lambda_0} \cup U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_{p-1}}$ e $U_{\lambda_i} = f^i(U_{\lambda_0})$, $i = 1, \dots, p-1$. Desde que M é normal, existem abertos $V_{\lambda_0}, V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_{p-1}}$ tais que $U_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ $i = 0, \dots, p-1$ e $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Defina o seguinte conjunto,

$$B_{\lambda_0} = V_{\lambda_0} \cap f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cap (f^2)^{-1}(V_{\lambda_2}) \cap \dots \cap (f^{p-1})^{-1}(V_{\lambda_{p-1}})$$

Como f^i é homeomorfismo $\forall i = 1, \dots, p-1$, cada V_{λ_i} é aberto e como a intersecção é finita podemos afirmar que B_{λ_0} é um conjunto aberto. Além disso, $U_{\lambda_0} \subset B_{\lambda_0}$ pois, desde que $f^i(U_{\lambda_0}) = U_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ temos que $U_{\lambda_0} \subset (f^i)^{-1}(V_{\lambda_i})$ $\forall i = 1, \dots, p-1$. Defina $B_{\lambda_i} = f^i(B_{\lambda_0})$ $\forall i = 1, \dots, p-1$. Como f^i é homeomorfismo temos que cada B_{λ_i} é aberto em M .

Afirmção 3.1.3 $U_{\lambda_i} \subset B_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, p-1$.

Prova: Como $U_{\lambda_0} \subset B_{\lambda_0}$ e $U_{\lambda_i} = f^i(U_{\lambda_0})$ podemos afirmar que $U_{\lambda_i} = f^i(U_{\lambda_0}) \subset f^i(B_{\lambda_0}) = B_{\lambda_i}$, ou seja, $U_{\lambda_i} \subset B_{\lambda_i}$ $\forall i = 1, \dots, p-1$. \square

Logo, pela afirmação acima temos que $U_\lambda = \cup_{i=0}^{p-1} U_{\lambda_i} \subset \cup_{i=0}^{p-1} B_{\lambda_i} = B_\lambda$ e conseqüentemente $M \subset \cup_{\lambda \in \Omega} U_\lambda \subset \cup_{\lambda \in \Omega} B_\lambda$. Como M é normal e os conjuntos U_λ e $M - B_\lambda$ são fechados disjuntos em M $\forall \lambda \in \Omega$, segue pelo lema de Uryshon que existem aplicações contínuas $t_{B_\lambda} : M \rightarrow [0, 1]$ tais que $t_{B_\lambda}(U_\lambda) = 1$ e $t_{B_\lambda}(M - B_\lambda) = 0$. Portanto, $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ é uma cobertura admissível de M , sendo assim $\bar{g}(M, f) \leq \text{card } \Omega = g(M, f)$, e o lema está provado.

Exemplo 3.1.1 Seja $p \geq 2$ primo e identifiquemos S^1 como sendo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} ; \|z\| = 1\}$. Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(z) = ze^{\frac{2\pi i}{p}}$. Já vimos pelo Exemplo 1.3.5 que f gera uma Z_p -ação livre em S^1 . Mostraremos que $\bar{g}(S^1, f) = 2$. Para isso basta mostrar que $g(S^1, f) = 2$, pois S^1 é um espaço normal. Considere os seguintes conjuntos

$$G_j^{(1)} = \{z \in S^1 ; \frac{2\pi j}{p} \leq \arg z \leq \frac{\pi(2j+1)}{p}\}, \quad j = 0, \dots, p-1$$

e

$$G_j^{(2)} = \{z \in S^1 ; \frac{\pi(2j+1)}{p} \leq \arg z \leq \frac{2\pi(j+1)}{p}\}, \quad j = 0, \dots, p-1.$$

Temos que $G_j^{(1)}$ e $G_j^{(2)}$ são fechados em S^1 . Além disso $G_j^{(k)} \cap G_i^{(k)} = \emptyset$ $j \neq i$, $k = 1, 2$, $f^j(G_0^{(1)}) = G_j^{(1)}$ e $f^j(G_0^{(2)}) = G_j^{(2)}$, $\forall j = 0, \dots, p-1$. Portanto, tomando $G^{(1)} = \cup_{j=0}^{p-1} G_j^{(1)}$ e $G^{(2)} = \cup_{j=0}^{p-1} G_j^{(2)}$ temos que $\tau = \{G^{(1)}, G^{(2)}\} \in S(S^1, f)$ e consequentemente $g(S^1, f) \leq 2$. Por outro lado como S^1 é conexo a Observação 3.1.1 nos garante que $g(S^1, f) > 1$. Portanto, $g(S^1, f) = 2$.

Exemplo 3.1.2 Seja $f : T \rightarrow T$ como no Exemplo 1.3.4, então $g(T, f) \geq 2$, pois T é conexo e $T \neq \emptyset$. Para verificar que $g(T, f) \leq 2$ considere os conjuntos abaixo

$$G_0^{(1)} = \{(x, y, z) \in T ; y \geq 0 \text{ e } x \leq 0\}$$

$$G_1^{(1)} = \{(x, y, z) \in T ; y \leq 0 \text{ e } x \geq 0\}$$

$$G_0^{(2)} = \{(x, y, z) \in T ; y \leq 0 \text{ e } x \leq 0\}$$

$$G_1^{(2)} = \{(x, y, z) \in T ; y \geq 0 \text{ e } x \geq 0\}$$

Observe que cada $G_j^{(k)}$ é fechado em T , $\forall k = 1, 2$ e $\forall j = 0, 1$. Além disso $f(G_0^{(k)}) = G_1^{(k)}$ $k = 1, 2$. Portanto, $\tau = \{G^{(1)}, G^{(2)}\} \in S(T, f)$ sendo $G^{(1)} = G_0^{(1)} \cup G_1^{(1)}$ e $G^{(2)} = G_0^{(2)} \cup G_1^{(2)}$, e consequentemente $g(T, f) \leq 2$. Portanto, $g(T, f) = 2$.

Observação 3.1.4 *O próximo exemplo que vamos colocar abaixo vai ser de grande utilidade no último capítulo.*

Exemplo 3.1.3 *Seja $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $\varphi(z) = z \cdot e^{\frac{8\pi i}{7}}$. Já vimos pelo Exemplo 1.3.5 que φ gera uma Z_7 -ação livre em S^1 . Mostraremos agora que $\bar{g}(S^1, \varphi) = g(S^1, \varphi) = 2$. Como pelo mesmo argumento do exemplo anterior temos que $g(S^1, \varphi) \geq 2$ basta mostrar que $g(S^1, \varphi) \leq 2$. Para isso considere os seguintes conjuntos:*

$$G^{(1)} = \cup_{j=0}^6 G_j^{(1)} \text{ sendo } G_j^{(1)} = \{z \in S^1 ; \frac{8\pi j}{7} \leq \arg z \leq \frac{(8j+1)\pi}{7}\}$$

$$G^{(2)} = \cup_{j=0}^6 G_j^{(2)} \text{ sendo } G_j^{(2)} = \{z \in S^1 ; \frac{(8j+1)\pi}{7} \leq \arg z \leq \frac{8(j+2)\pi}{7}\}$$

Temos que cada $G_j^{(1)}$ e $G_j^{(2)}$ são fechados em S^1 . Além disso, $S^1 = G^{(1)} \cup G^{(2)}$.

Veremos agora que $G_j^{(1)} \cap G_i^{(1)} = \emptyset$ para $i, j = 0, \dots, 6$ e $i \neq j$. De fato:

Sem perda de generalidade podemos supor que $i < j$. Logo teremos que $\frac{(8i+1)\pi}{7} < \frac{8\pi j}{7}$, pois como $i < j$ e i, j são números inteiros positivos temos

que $j - i > \frac{1}{8}$, ou seja, $8j - 8i > 1$ e isso implica que $\frac{(8i+1)\pi}{7} < \frac{8\pi j}{7}$. Portanto, se $z \in G_j^{(1)} \cap G_i^{(1)}$ então $\arg z \leq \frac{(8i+1)\pi}{7}$ e $\arg z > \frac{(8i+1)\pi}{7}$ o que é um absurdo.

De maneira análoga mostra-se que $G_j^{(2)} \cap G_i^{(2)} = \emptyset$ para $i, j = 0, \dots, 6$ e $i \neq j$.

Para concluirmos que $g(S^1, \varphi) \leq 2$ só nos resta provar que $\varphi(G_j^{(1)}) = G_{j+1}^{(1)}$ e $\varphi(G_j^{(2)}) = G_{j+1}^{(2)}$. Mas isto segue direto da definição dos conjuntos $G_j^{(1)}$ e $G_j^{(2)}$

$\forall j = 0, \dots, 6$.

Observação 3.1.5 *No próximo capítulo veremos que se $(S^n, f) \in N_p$, então $\bar{g}(S^n, f) = n + 1$.*

3.2 O gênero e aplicações equivariantes

A partir do Teorema 1.3.4 podemos reformular a definição 1.7.3 de aplicação equivariante entre \mathbb{Z}_p -espaços da seguinte forma:

Definição 3.2.1 *Seja p um número primo e $(M_1, f_1), (M_2, f_2) \in H_p$. Dizemos que $P : (M_1, f_1) \longrightarrow (M_2, f_2)$ é uma aplicação equivariante, se $P : M_1 \longrightarrow M_2$ é contínua e $P \circ f_1 = f_2 \circ P$, ou seja o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{P} & M_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ M_1 & \xrightarrow{P} & M_2 \end{array}$$

comuta.

Verifica-se facilmente que se p é primo, $(M_1, f_1), (M_2, f_2) \in H_p$ e $P : (M_1, f_1) \longrightarrow (M_2, f_2)$ é uma aplicação equivariante, então $P \circ f_1^k = f_2^k \circ P$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Lema 3.2.1 *Seja p um número primo e $(M_1, f_1), (M_2, f_2) \in H_p$. Seja $P : (M_1, f_1) \longrightarrow (M_2, f_2)$ uma aplicação equivariante. Então, $\bar{g}(M_1, f_1) \leq \bar{g}(M_2, f_2)$.*

Prova: Se $\bar{g}(M_2, f_2) = \infty$ é óbvio que $\bar{g}(M_1, f_1) \leq \bar{g}(M_2, f_2)$. Suponha então que $D = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ seja cobertura admissível de M_2 tal que $\forall \lambda \in \Omega$ existem abertos disjuntos $D_{\lambda_0}, D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_{p-1}}$ tais que $D_\lambda = D_{\lambda_0} \cup D_{\lambda_1} \cup \dots \cup D_{\lambda_{p-1}}$ e $D_{\lambda_i} = f_2^i(D_{\lambda_0})$ $i = 1, \dots, p-1$.

Afirmção 3.2.1 $\mathcal{U} = \{P^{-1}(D_\lambda)\}_{\lambda \in \Omega}$ é uma cobertura aberta de M_1 .

Prova: Como P é contínua temos que $P^{-1}(D_\lambda)$ é aberto em M_1 , $\forall \lambda \in \Omega$. Seja $x \in M_1$. Então $P(x) \in M_2$ e como $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ é uma cobertura aberta de M_2 temos que $P(x) \in D_\lambda$ para algum $\lambda \in \Omega$. Daí segue que $x \in P^{-1}(D_\lambda)$. \square

Afirmção 3.2.2 *Existe uma família $(t_{P^{-1}(D_\lambda)})_{P^{-1}(D_\lambda) \in \mathcal{U}}$ de aplicações contínuas $t_{P^{-1}(D_\lambda)} : M_1 \longrightarrow [0, 1]$ tais que $t_{P^{-1}(D_\lambda)}|_{M_1 - P^{-1}(D_\lambda)} = 0$ e $\forall x \in M_1$, $\exists P^{-1}(D_\lambda) \in \mathcal{U}$ tal que $t_{P^{-1}(D_\lambda)}(x) = 1$.*

Prova: Como $D = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ é uma cobertura admissível de M_2 existe uma família $(t_{D_\lambda})_{D_\lambda \in D}$ de aplicações contínuas $t_{D_\lambda} : M_2 \longrightarrow [0, 1]$ com $t_{D_\lambda}|_{M_2 - D_\lambda} = 0$ e $\forall x \in M_2, \exists D_\lambda \in D$ com $t_{D_\lambda}(x) = 1$. Sendo assim, considere $t_{P^{-1}(D_\lambda)} = t_{D_\lambda} \circ P : M_1 \longrightarrow [0, 1]$ e note que se $x \in M_1 - P^{-1}(D_\lambda)$ então $P(x) \notin D_\lambda$, e daí segue que $t_{P^{-1}(D_\lambda)}(x) = (t_{D_\lambda} \circ P)(x) = t_{D_\lambda}(P(x)) = 0$, ou seja, $t_{P^{-1}(D_\lambda)}(x) = 0 \forall x \in M_1 - P^{-1}(D_\lambda)$. Note também que, se $x \in M_1$ e portanto $x \in M_2$ então existe $D_\lambda \in D$ tal que $t_{D_\lambda}(P(x)) = 1$, ou seja, existe $P^{-1}(D_\lambda) \in \mathcal{U}$ tal que $t_{P^{-1}(D_\lambda)}(x) = (t_{D_\lambda} \circ P)(x) = t_{D_\lambda}(P(x)) = 1$. \square

Como $D_\lambda = D_{\lambda_0} \cup D_{\lambda_1} \cup \dots \cup D_{\lambda_{p-1}}$ com $D_{\lambda_i} \cap D_{\lambda_j} = \emptyset \forall i \neq j$, temos que $P^{-1}(D_\lambda) = P^{-1}(D_{\lambda_0}) \cup P^{-1}(D_{\lambda_1}) \cup \dots \cup P^{-1}(D_{\lambda_{p-1}})$ com $P^{-1}(D_{\lambda_i}) \cap P^{-1}(D_{\lambda_j}) = \emptyset, \forall i \neq j$. Sendo assim, para finalizar a prova do lema basta mostrar que $P^{-1}(D_{\lambda_i}) = f_1^i(P^{-1}(D_{\lambda_0})) \ i = 1, \dots, p-1$. De fato:

$$\begin{aligned} P^{-1}(D_{\lambda_i}) &= P^{-1}(f_2^i(D_{\lambda_0})) = ((f_2^i)^{-1} \circ P)^{-1}(D_{\lambda_0}) = \\ &= (f_2^{p-i} \circ P)^{-1}(D_{\lambda_0}) = (P \circ f_1^{p-i})^{-1}(D_{\lambda_0}) = \\ &= (P \circ (f_1^i)^{-1})^{-1}(D_{\lambda_0}) = f_1^i(P^{-1}(D_{\lambda_0})) \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{g}(M_1, f_1) \leq \text{card } \Omega = \bar{g}(M_2, f_2)$, e o lema está provado.

Definiremos a seguir um conjunto especial denotado por $F_{n,p}$ (onde p é primo e $n \in \mathbb{N}$), e uma \mathbb{Z}_p -ação livre $\varphi_{n,p} : F_{n,p} \longrightarrow F_{n,p}$. A partir daí exibiremos algumas propriedades desse conjunto e mostraremos que $\bar{g}(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq n$. Além disso, dado $(M, f) \in N_p$ relacionaremos o gênero $\bar{g}(M, f)$ com a existência de uma aplicação equivariante $P : (M, f) \longrightarrow (F_{n,p}, \varphi_{n,p})$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.2.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e p um número primo. Seja*

$$l_2 = \left\{ z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}; \sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2 < \infty \right\}$$

com a norma usual do espaço de Hilbert. Defina

$$F_{n,p} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } n = 0 \\ \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, \dots) \in l_2; \|z\| = 1\} & \text{se } n \in \{2, 4, 6, \dots\} \\ \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{(n+1)}{2}}, 0, \dots) \in l_2; \|z\| = 1, z_{\frac{(n+1)}{2}} = |z_{\frac{(n+1)}{2}}| e^{(\frac{k}{p})2\pi i} \\ \text{para algum } k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}, & \text{se } n \in \{1, 3, 5, \dots\} \end{cases}$$

e $\varphi_{n,p} : F_{n,p} \longrightarrow F_{n,p}$ dada por $\varphi_{n,p}(z) = (z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \dots)$.

Propriedades:

(1) Se n é par $F_{n,p}$ é a esfera S^{n-1} , independentemente do número primo p .

(2) $F_{1,p} = \{1, e^{\frac{2\pi i}{p}}, e^{\frac{4\pi i}{p}}, \dots, e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}}\} \subset S^1$

(3) Se $n > 1$ é ímpar, temos que $F_{n,p} \subset S^n$ e $F_{n,p} = X^0 \cup X^1 \cup \dots \cup X^{p-1}$

sendo que $X^0 = S_+^{n-1}$ e $X^k \approx S_+^{n-1}$ para $k = 1, \dots, p-1$, sendo o conjunto

$$S_+^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}.$$

Seja $X^k = \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{(n+1)}{2}}, 0, \dots) \in l_2; \|z\| = 1, z_{\frac{(n+1)}{2}} = |z_{\frac{(n+1)}{2}}| e^{(\frac{k}{p})2\pi i}\}$

sendo $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Sendo assim é fácil ver que $X^0 = S_+^{n-1}$.

Para $k = 1, \dots, p-1$ considere a seguinte aplicação $h_k : X^k \longrightarrow S^{n-1}$

dada por $h_k(z_1, \dots, z_{\frac{(n-1)}{2}}, z_{\frac{(n+1)}{2}}, 0, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, |z_{\frac{(n+1)}{2}}|)$

sendo que $z_1 = x_1 + ix_2, \dots, z_{\frac{(n-1)}{2}} = x_{n-2} + ix_{n-1}$. Observe que h_k

é contínua, pois suas coordenadas são contínuas. Considere agora a

aplicação $h_k^{-1} : S_+^{n-1} \longrightarrow X^k$ dada por

$h_k^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (z_1, \dots, z_{\frac{(n-1)}{2}}, \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)} e^{\frac{2k\pi i}{p}}, 0, \dots)$ e

$z_1 = x_1 + ix_2, \dots, z_{\frac{(n-1)}{2}} = x_{n-2} + ix_{n-1}$. Como h_k^{-1} é uma aplicação

contínua e $h_k \circ h_k^{-1} = id_{S_+^{n-1}}$ e $h_k^{-1} \circ h_k = id_{X^k}$ podemos afirmar que h_k

é homeomorfismo para $k = 1, \dots, p-1$.

(4) $X^k \cap X^s = S^{n-2}$ para $k, s = 0, \dots, p-1$ e $k \neq s$, sendo X^k e X^s definidos

como no item anterior.

Seja $z = (z_1, \dots, z_{\frac{(n-1)}{2}}, z_{\frac{(n+1)}{2}}, 0, \dots) \in X^k \cap X^s$. Então $z_{\frac{(n+1)}{2}} = |z_{\frac{(n+1)}{2}}| e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ e $z_{\frac{(n+1)}{2}} = |z_{\frac{(n+1)}{2}}| e^{\frac{2s\pi i}{p}}$. Como $e^{\frac{2k\pi i}{p}} \neq e^{\frac{2s\pi i}{p}}$ temos que $|z_{\frac{(n+1)}{2}}| = 0$, isto é, $z_{\frac{(n+1)}{2}} = 0$ e conseqüentemente $X^k \cap X^s = \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{(n-1)}{2}}, 0, \dots) \in l_2 ; \|z\| = 1\} = S^{n-2}$.

(5) Se $n \leq s$ então $F_{n,p} \subseteq F_{s,p}$, além disso $\varphi_{s,p}|_{F_{n,p}} = \varphi_{n,p}$.

(6) $F_{n,p}$ é um espaço normal.

Desde que $F_{n,p} \subset l_2$ e l_2 é um espaço métrico, temos que $F_{n,p}$ é um espaço métrico com a métrica induzida de l_2 . Logo $F_{n,p}$ é um espaço normal.

(7) $\varphi_{n,p}$ é uma aplicação contínua.

Basta observar que suas coordenadas são aplicações contínuas.

(8) $\varphi_{n,p}^p(z) = z, \forall z = (z_1, \dots, z_j, 0, \dots) \in F_{n,p}$.

Segue direto da definição de $\varphi_{n,p}$.

(9) $\varphi_{n,p}(z) \neq z, \forall z = (z_1, \dots, z_j, 0, \dots) \in F_{n,p}$.

Suponha que exista $z = (z_1, \dots, z_j, 0, \dots) \in F_{n,p}$ tal que $\varphi_{n,p}(z) = z$, isto é, $(z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \dots, z_j e^{\frac{2\pi i}{p}}, 0, \dots) = (z_1, \dots, z_j, 0, \dots)$. Como $(z_1, \dots, z_j, 0, \dots) \neq (0, \dots, 0, 0, \dots)$ então existe algum $z_j \neq 0$ tal que $z_j e^{\frac{2\pi i}{p}} = z_j$. Isso implica que $e^{\frac{2\pi i}{p}} - 1 = 0$, ou seja, $\frac{2\pi}{p} = 2\pi k$ onde k é inteiro. Daí segue que $p = \frac{1}{k}$ o que é um absurdo, pois $p \geq 2$ é um número primo.

Definição 3.2.3 *Seja $(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \in N_p$ como acima e $k = 1, \dots, n$. Então definimos os seguintes conjuntos:*

$$F_j^{(k)} = \left\{ z \in F_{n,p} ; |z_{\frac{(k+1)}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}, \frac{2\pi j}{p} \leq \arg z_{\frac{(k+1)}{2}} \leq \frac{(2j+1)\pi}{p} \right\}$$

se k é ímpar e

$$F_j^{(k)} = \left\{ z \in F_{n,p} ; |z_{\frac{k}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}, \frac{(2j+1)\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{k}{2}} \leq \frac{2(j+1)\pi}{p} \right\}$$

se k é par, e

$$F^{(k)} = \cup_{j=0}^{p-1} F_j^{(k)}$$

Afirmção 3.2.3 $F_{n,p} = \cup_{k=1}^n F^{(k)}$.

Prova: Mostraremos para n um número par. No caso em que n é um número ímpar a prova é análoga. Note que $\cup_{k=1}^n F^{(k)} \subset F_{n,p}$. Basta então mostrar que $F_{n,p} \subset \cup_{k=1}^n F^{(k)}$. De fato:

Seja $z = (z_1, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, \dots) \in F_{n,p}$. Então $|z_1|^2 + \dots + |z_{\frac{n}{2}}|^2 = 1$. Daí segue que $|z_l|^2 \geq \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n}$ para algum $l = 1, \dots, \frac{n}{2}$. Além disso temos que $\frac{2\pi j}{p} \leq \arg z_l \leq \frac{(2j+1)\pi}{p}$ ou $\frac{(2j+1)\pi}{p} \leq \arg z_l \leq \frac{2(j+1)\pi}{p}$ para algum $j = 0, \dots, p-1$. Portanto como $\frac{2}{n} > \frac{2}{n+1}$ temos que $z = (z_1, \dots, z_l, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, \dots) \in F_j^{(2l)}$ ou $z = (z_1, \dots, z_l, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, \dots) \in F_j^{(2l-1)}$ para algum $j = 0, \dots, p-1$. Em ambos os casos temos que $z = (z_1, \dots, z_l, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, \dots) \in F_j^{(k)} \subset F^{(k)}$ para algum $k = 1, \dots, l, \dots, 2l-1, 2l, \dots, n$. \square

Afirmção 3.2.4 $F_j^{(k)} \cap F_i^{(k)} = \emptyset \forall i, j = 0, \dots, p-1$ com $i \neq j$.

Prova: Mostraremos para k um número par. No caso em que k é um número ímpar a prova é análoga. Suponha que $z = (z_1, \dots, z_l, 0, \dots) \in F_j^{(k)} \cap F_i^{(k)}$. Daí segue que $|z_{\frac{k}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}$, $\frac{(2j+1)\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{k}{2}} \leq \frac{2(j+1)\pi}{p}$ e $\frac{2(i+1)\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{k}{2}} \leq \frac{2(i+1)\pi}{p}$. Como $i \neq j$ podemos supor sem perda de generalidade que $i < j$, logo teremos que $\frac{2(i+1)\pi}{p} < \frac{2(j+1)\pi}{p}$, pois como $i < j$ e i, j são números inteiros positivos temos que $j - i > \frac{1}{2}$, ou seja, $2j - 2i > 1$ e isso implica que $2(i+1) = 2i + 2 < 2j + 1$. Conseqüentemente $\frac{2(i+1)\pi}{p} < \frac{2(j+1)\pi}{p}$. Portanto, $\arg z_{\frac{k}{2}} \leq \frac{2(i+1)\pi}{p}$ e $\arg z_{\frac{k}{2}} > \frac{2(i+1)\pi}{p}$ o que é um absurdo. \square

Afirmção 3.2.5 $\varphi_{n,p}(F_j^{(k)}) = F_{j+1}^{(k)} \forall k = 1, \dots, n$ e $\forall j = 0, \dots, p-1$.

Prova: Mostraremos para k um número par. No caso em que k é um número ímpar a prova é análoga. Seja $z \in \varphi_{n,p}(F_j^{(k)})$. Daí segue que $z =$

$\varphi_{n,p}(z_1, \dots, z_l, 0, \dots)$ tal que $(z_1, \dots, z_l, 0, \dots) \in F_j^{(k)}$. Sendo assim $|z_{\frac{k}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}$ e $\frac{(2j+1)\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{k}{2}} \leq \frac{2(j+1)\pi}{p}$. Observe que $z = \varphi_{n,p}(z_1, \dots, z_l, 0, \dots) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i}{p}} z_l, 0, \dots) \in F_{n,p}$ e $|e^{\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}}|^2 = |e^{\frac{2\pi i}{p}}|^2 |z_{\frac{k}{2}}|^2 = |z_{\frac{k}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}$. Além disso $\arg (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}})$ é dado por

$$\frac{(2j+1)\pi}{p} + \frac{2\pi}{p} \leq \arg (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}}) \leq \frac{2(j+1)\pi}{p} + \frac{2\pi}{p}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{(2j+3)\pi}{p} \leq \arg (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}}) \leq \frac{2(j+2)\pi}{p}$$

Portanto, $z = \varphi_{n,p}(z_1, \dots, z_l, 0, \dots) \in F_{j+1}^{(k)} = \{z \in F_{n,p} ; |z_{\frac{k}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}, \frac{(2j+3)\pi}{p} \leq \arg (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}}) \leq \frac{2(j+2)\pi}{p}\}$ e conseqüentemente $\varphi_{n,p}(F_j^{(k)}) \subset F_{j+1}^{(k)}$. Por outro lado, seja $z = (z_1, \dots, z_l, 0, \dots) \in F_{j+1}^{(k)}$. Daí segue que $z = (z_1, \dots, z_l, 0, \dots) \in F_{n,p}$ tal que $|z_{\frac{k}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}$ e $\frac{(2j+3)\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{k}{2}} \leq \frac{2(j+2)\pi}{p}$. Sendo assim, tomemos $w = (z_1 e^{-\frac{2\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{k}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{n}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{p}}, 0, \dots) \in F_{n,p}$ se n é par e $w = (z_1 e^{-\frac{2\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{k}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{p}}, \dots, |z_{\frac{(n+1)}{2}}| e^{\frac{2(s-1)\pi i}{p}}, 0, \dots) \in F_{n,p}$ para $s \in \{0, \dots, p-1\}$ se n é ímpar. Observe que $|e^{-\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}}|^2 = |z_{\frac{k}{2}}|^2 \geq \frac{2}{n+1}$ e $\frac{(2j+3)\pi}{p} - \frac{2\pi}{p} \leq \arg (e^{-\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}}) \leq \frac{2(j+2)\pi}{p} - \frac{2\pi}{p}$, ou seja, $\frac{(2j+1)\pi}{p} \leq \arg (e^{-\frac{2\pi i}{p}} z_{\frac{k}{2}}) \leq \frac{2(j+1)\pi}{p}$ e conseqüentemente $w \in F_j^{(k)}$. Portanto, $\varphi_{n,p}(w) = (z_1, \dots, z_{\frac{k}{2}}, \dots, z_{\frac{n}{2}}, 0, \dots) = z$ se n é par e $\varphi_{n,p}(w) = (z_1, \dots, z_{\frac{k}{2}}, \dots, |z_{\frac{(n+1)}{2}}| e^{\frac{2s\pi i}{p}}, 0, \dots) = z$ se n é ímpar, logo podemos afirmar que $F_{j+1}^{(k)} \subset \varphi_{n,p}(F_j^{(k)})$. \square

Lema 3.2.2 *Seja $\varphi_{n,p} : F_{n,p} \longrightarrow F_{n,p}$ dada por $\varphi_{n,p}(z) = (z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \dots)$.*

Então $\bar{g}(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = g(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq n$.

Prova: Como $F_{n,p}$ é normal já sabemos que $\bar{g}(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) = g(F_{n,p}, \varphi_{n,p})$. Basta então mostrar que $g(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq n$. Mas pelo fato que $F_j^{(k)}$ é fechado em $F_{n,p}$ $\forall j = 0, \dots, p-1$ e $\forall k = 1, \dots, n$, sendo os $F_j^{(k)}$ definidos como acima, temos pelas três afirmações anteriores que $g(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq n$. \square

Lema 3.2.3 *Seja p um número primo e $(M, f) \in N_p$. Se $s = g(M, f)$ é finito, então s é o menor número tal que existe uma aplicação equivariante $P : (M, f) \longrightarrow (F_{s,p}, \varphi_{s,p})$.*

Prova: Como $s = g(M, f)$ temos que $M = \cup_{j=1}^s G^{(j)}$ sendo cada $G^{(j)} = G_0^{(j)} \cup \dots \cup G_{p-1}^{(j)}$ e $G_t^{(j)}$ são subconjuntos fechados disjuntos de $M \ \forall t = 0, \dots, p-1$. Além disso $f^t(G_0^{(j)}) = G_t^{(j)}$. Mostraremos que para cada $j \in \{1, \dots, s\}$ existem aplicações $P_j : \cup_{i=1}^j G^{(i)} \longrightarrow F_{j,p}$ com $P_j \circ f|_{\cup_{i=1}^j G^{(i)}} = \varphi_{j,p} \circ P_j$. Observe que se isto ocorrer teremos $P = P_s$, pois $M = \cup_{i=1}^s G^{(i)}$. Considere os passos abaixo:

Passo 1: Para $j = 1$ considere a aplicação contínua $P_1 : G^{(1)} \longrightarrow F_{1,p}$ dada por $P_1(x) = e^{\frac{2t\pi i}{p}}$ se $x \in G_t^{(1)}$ onde $t = 0, \dots, p-1$. Note que P_1 é uma aplicação equivariante pois, se $x \in G_t^{(1)}$ então $f(x) \in f(G_t^{(1)}) = f(f^t(G_0^{(1)})) = f^{t+1}(G_0^{(1)}) = G_{t+1}^{(1)}$. Logo $(P_1 \circ f)(x) = P_1(f(x)) = e^{\frac{2(t+1)\pi i}{p}}$. Mas por outro lado, temos que $(\varphi_{1,p} \circ P_1)(x) = \varphi_{1,p}(P_1(x)) = \varphi_{1,p}(e^{\frac{2t\pi i}{p}}) = e^{\frac{2t\pi i}{p}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{p}} = e^{\frac{2(t+1)\pi i}{p}}$.

Passo 2: Suponhamos que para $j \in \{1, \dots, s-1\}$ existam aplicações contínuas $P_j : \cup_{i=1}^j G^{(i)} \longrightarrow F_{j,p}$ com $P_j \circ f|_{\cup_{i=1}^j G^{(i)}} = \varphi_{j,p} \circ P_j$. Mostraremos que existe $P_{j+1} : \cup_{i=1}^{j+1} G^{(i)} \longrightarrow F_{j+1,p}$ com $P_{j+1} \circ f|_{\cup_{i=1}^{j+1} G^{(i)}} = \varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1}$. Note que, ainda para $j \in \{1, \dots, s-1\}$ temos que $\cup_{i=1}^j G^{(i)} \subset \cup_{i=1}^j G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)}$ e além disso $\cup_{i=1}^j G^{(i)}$ é fechado em $\cup_{i=1}^j G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)}$ que é normal.

Passo 3: Se $j \in \{1, \dots, s-1\}$ é ímpar já vimos que $F_{j,p} \subset S^j = F_{j+1,p}$. Logo pelo Corolário 1.4.4 podemos estender continuamente a aplicação $P_j : \cup_{i=1}^j G^{(i)} \longrightarrow F_{j,p} \subset S^j$ para uma aplicação contínua $\bar{P}_{j+1} : \cup_{i=1}^j G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)} \longrightarrow S^j = F_{j+1,p}$.

Passo 4: Se $j \in \{1, \dots, s-1\}$ é par já vimos que $F_{j,p} = S^{j-1} \subset S_+^j \subset F_{j+1,p}$. Logo pelo Corolário 1.4.6 podemos estender continuamente a aplicação $P_j : \cup_{i=1}^j G^{(i)} \longrightarrow F_{j,p} \subset S_+^j$ para uma aplicação contínua

$$\bar{P}_{j+1} : \cup_{i=1}^j G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)} \longrightarrow S_+^j \subset F_{j+1,p}.$$

Passo 5: Defina $P_{j+1} : \cup_{i=1}^{j+1} G^{(i)} \longrightarrow F_{j+1,p}$ como sendo

$$P_{j+1} = \begin{cases} \bar{P}_{j+1}(x), & \text{se } x \in \cup_{i=1}^j G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)} \\ \varphi_{j+1,p}^l(\bar{P}_{j+1}(f^{p-l}(x))), & \text{se } x \in G_l^{(j+1)} (l = 1, \dots, p-1) \end{cases}$$

(1) Se $x \in G_l^{(j+1)}$ para $l = 1, \dots, p-1$ temos que $f^{p-l}(x) \in f^{p-l}(G_l^{(j+1)}) = f^{p-l}(f^l(G_0^{(j+1)})) = f^p(G_0^{(j+1)}) = G_0^{(j+1)}$. Portanto faz sentido $\bar{P}_{j+1}(f^{p-l}(x))$, e conseqüentemente $\varphi_{j+1,p}^l(\bar{P}_{j+1}(f^{p-l}(x)))$.

(2) Se $x \in (\cup_{i=1}^j G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)}) \cap G_l^{(j+1)} = (\cup_{i=1}^j G^{(i)}) \cap G_l^{(j+1)}$ para $l = 1, \dots, p-1$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1,p}^l(\bar{P}_{j+1}(f^{p-l}(x))) &= {}^1\varphi_{j,p}^l(P_j(f^{p-l}(x))) = {}^2P_j(f^l(f^{p-l}(x))) = P_j(f^p(x)) = \\ &P_j(x) = \bar{P}_{j+1}(x) \end{aligned}$$

Juntando os itens (1) e (2) acima podemos afirmar que a aplicação $P_{j+1} : \cup_{i=1}^{j+1} G^{(i)} \longrightarrow F_{j+1,p}$ está bem definida e, além disso, pelo lema da colagem P_{j+1} é contínua. Sendo assim, veremos agora que $P_{j+1} \circ f|_{\cup_{i=1}^{j+1} G^{(i)}} = \varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1}$. Para isso analisemos os três casos abaixo:

Caso 1: Se $x \in \cup_{i=1}^j G^{(i)}$ é fácil ver que $f(x) \in \cup_{i=1}^j G^{(i)}$. Daí segue que

$$\begin{aligned} (P_{j+1} \circ f)(x) &= P_{j+1}(f(x)) = \bar{P}_{j+1}(f(x)) = P_j(f(x)) = (P_j \circ f)(x) = \\ &= (\varphi_{j,p} \circ P_j)(x) = \varphi_{j,p}(P_j(x)) = \varphi_{j+1,p}(P_j(x)) = \\ &= \varphi_{j+1,p}(\bar{P}_{j+1}(x)) = (\varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1})(x) \end{aligned}$$

¹Se $x \in \cup_{i=1}^j G^{(i)}$ então $f^{p-l}(x) \in \cup_{i=1}^j G^{(i)}$

²Desde que $P_j \circ f|_{\cup_{i=1}^j G^{(i)}} = \varphi_{j,p} \circ P_j$ então $P_j \circ f^l|_{\cup_{i=1}^j G^{(i)}} = \varphi_{j,p}^l \circ P_j$

Caso 2: Se $x \in G_l^{(j+1)}$ ($l = 0, \dots, p-2$), $f(x) \in f(G_l^{(j+1)}) = f(f^l(G_0^{(j+1)})) = f^{l+1}(G_0^{(j+1)})$ sendo $l+1 \in \{1, \dots, p-1\}$. Daí segue que

$$\begin{aligned} (P_{j+1} \circ f)(x) &= P_{j+1}(f(x)) = \varphi_{j+1,p}^{l+1}(\bar{P}_{j+1}(f^{p-(l+1)}(f(x)))) = \\ &= \varphi_{j+1,p}(\varphi_{j+1,p}^l(\bar{P}_{j+1}(f^{p-l}(x)))) = \\ &= \varphi_{j+1,p}(P_{j+1}(x)) = (\varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1})(x) \end{aligned}$$

Caso 3: Se $x \in G_{p-1}^{(j+1)}$, $f(x) \in f(G_{p-1}^{(j+1)}) = f(f^{p-1}(G_0^{(j+1)})) = f^p(G_0^{(j+1)}) = G_0^{(j+1)}$. Daí segue que

$$\begin{aligned} (P_{j+1} \circ f)(x) &= P_{j+1}(f(x)) = \bar{P}_{j+1}(f(x)) = \\ &= \varphi_{j+1,p}(\varphi_{j+1,p}^{p-1}(\bar{P}_{j+1}(f^{p-(p-1)}(x)))) = \\ &= \varphi_{j+1,p}(P_{j+1}(x)) = (\varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1})(x) \end{aligned}$$

Portanto, existe $P = P_s : M \longrightarrow F_{s,p}$ equivariante. Para finalizar a prova basta mostrar que $s = g(M, f) = \bar{g}(M, f)$ é o menor número tal que existe essa aplicação P . Para isso, suponha que $n < s$ e que exista $P : M \longrightarrow F_{n,p}$ equivariante. Pelo Lema 3.2.1 e sabendo que $g(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq n$ temos que $s = g(M, f) \leq g(F_{n,p}, \varphi_{n,p}) \leq n$, o que é um absurdo. \square

Definiremos abaixo quando um espaço topológico M é n -conexo para $n \geq 0$ e logo após veremos em que condições dado $(M, f) \in H_p$ existe uma aplicação equivariante $P : (F_{n+2,p}, \varphi_{n+2,p}) \longrightarrow M$.

Definição 3.2.4 *Um espaço topológico M é dito ser n -conexo $n \geq 0$, se toda função contínua $f : S^j \longrightarrow M$ com $j \leq n$ admite uma extensão contínua $\bar{f} : D^{j+1} \longrightarrow M$.*

Exemplo 3.2.1 *A esfera S^{n+1} é n -conexa.*

Lema 3.2.4 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e p um número primo. Seja $(M, f) \in H_p$ com M não-vazio e n -conexo. Então existe uma aplicação $P : (F_{n+2,p}, \varphi_{n+2,p}) \longrightarrow (M, f)$ equivariante.*

Prova: Mostraremos que para $m \in \{1, \dots, n+2\}$ existem aplicações $P_m : F_{m,p} \longrightarrow M$ equivariante. Observe que se isto ocorrer, teremos encontrado $P = P_{n+2} : F_{n+2,p} \longrightarrow M$ equivariante. Considere os passos abaixo:

Passo 1: Desde que M é não-vazio existe $x \in M$. Sendo assim defina $P_1 : F_{1,p} \longrightarrow M$ como sendo $P_1(e^{\frac{2k\pi i}{p}}) = f^k(x) \forall k = 0, \dots, p-1$. Notemos que $(P_1 \circ \varphi_{1,p})(e^{\frac{2k\pi i}{p}}) = P_1(\varphi_{1,p}(e^{\frac{2k\pi i}{p}})) = P_1(e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{p}}) = P_1(e^{\frac{2(k+1)\pi i}{p}}) = f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(P_1(e^{\frac{2k\pi i}{p}})) = (f \circ P_1)(e^{\frac{2k\pi i}{p}})$

Portanto, $P_1 : (F_{1,p}, \varphi_{1,p}) \longrightarrow (M, f)$ é uma aplicação equivariante.

Passo 2: Suponha que para $1 \leq m \leq n+1$ exista $P_m : F_{m,p} \longrightarrow M$ equivariante. Mostraremos que existe $P_{m+1} : F_{m+1,p} \longrightarrow M$ tal que $P_{m+1} \circ \varphi_{m+1,p} = f \circ P_{m+1}$. Para isso considere os itens (a) e (b) abaixo:

- (a) Se m é um número par temos que $S_+^m \subset F_{m+1,p}$. Além disso, sabemos que, existe um homeomorfismo $h_m : S_+^m \longrightarrow D^m$ tal que $h_m(F_{m,p}) = S^{m-1}$, onde $F_{m,p} = S^{m-1} \subset S_+^m$. Como por hipótese de indução $m-1 \leq n$ e M é n -conexo, a definição 3.2.4 nos garante que a aplicação $P_m \circ h_m^{-1} : S^{m-1} \longrightarrow M$ admite uma extensão contínua $\phi_m : D^m \longrightarrow M$. Sendo assim, defina a aplicação $P_{m+1} : F_{m+1,p} \longrightarrow M$ como sendo $P_{m+1}(z) = (f^k \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z) \forall z = (z_1, \dots, z_{\frac{m}{2}}, |z_{\frac{(m+2)}{2}}| e^{\frac{2k\pi i}{p}}, 0, \dots) \in F_{m+1,p}$ onde $k = 0, \dots, p-1$. Para vermos que P_{m+1} está bem definida observe a afirmação abaixo:

Afirmação 3.2.6 $\varphi_{m+1,p}^{p-k}(F_{m+1,p}) \subset S_+^m$ para $k = 0, \dots, p-1$, sendo $\varphi_{m+1,p} : F_{m+1,p} \rightarrow F_{m+1,p}$ como na definição 3.2.2.

Prova: Dado $z = (z_1, \dots, z_{\frac{m}{2}}, |z_{\frac{(m+2)}{2}}| e^{\frac{2k\pi i}{p}}, 0, \dots) \in F_{m+1,p}$ então pela definição de $\varphi_{m+1,p}$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1,p}^{p-k}(z) &= (z_1 e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{m}{2}} e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}}, |z_{\frac{m+2}{2}}| e^{\frac{2(p-k+k)\pi i}{p}}, 0, \dots) \\ &= (z_1 e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{m}{2}} e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}}, |z_{\frac{m+2}{2}}|, 0, \dots) \end{aligned}$$

Como $|z_{\frac{m+2}{2}}| \geq 0$ podemos afirmar que $\varphi_{m+1,p}^{p-k}(z) \in S_+^m$. \square

Afirmação 3.2.7 P_{m+1} é uma aplicação contínua. Além disso P_{m+1} é uma aplicação equivariante.

Prova: Como P_{m+1} é composição de aplicações contínuas, logo é contínua. Seja $z = (z_1, \dots, z_{\frac{m}{2}}, |z_{\frac{(m+2)}{2}}| e^{\frac{2k\pi i}{p}}, 0, \dots) \in F_{m+1,p}$. Então pela definição de $\varphi_{m+1,p}$ temos que $\varphi_{m+1,p}(z) = (z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{m}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}}, |z_{\frac{(m+2)}{2}}| e^{\frac{2(k+1)\pi i}{p}}, 0, \dots)$ sendo $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Por outro lado pela definição de P_{m+1} temos que

$$\begin{aligned} (P_{m+1} \circ \varphi_{m+1,p})(z) &= (f^{k+1} \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k-1})(\varphi_{m+1,p}(z)) = \\ &= (f^{k+1} \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z) = \\ &= (f \circ f^k \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z) = \\ &= f((f^k \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z)) = \\ &= f(P_{m+1}(z)) = (f \circ P_{m+1})(z) \end{aligned}$$

(b) Seja m um número ímpar, então $F_{m+1,p} = \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in l_2; \|z\| = 1\}$. Seja $0 \leq s < 1$ e k um número natural. Defina o seguinte conjunto:

$$S_{k,s} = \{z = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots) \in l_2; \|z\| = 1, 0 \leq \arg z_k \leq 2\pi s\}.$$

Daí segue que

$$S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} = \{z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in F_{m+1, p} ; 0 \leq \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} \leq \frac{2\pi}{p}\}$$

Sabemos que o argumento do número complexo $z = 0$ não está bem definido, mas aqui assumimos que os elementos $z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in F_{m+1, p}$ também pertencem ao conjunto $S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}}$.

Afirmção 3.2.8 $S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}} = S_+^m$.

Prova : Seja $z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}}$. Então $z_{\frac{(m+1)}{2}} = |z_{\frac{(m+1)}{2}}|e^{i\theta}$ sendo $0 \leq \theta \leq \pi$. Como $\text{sen } \theta \geq 0 \forall \theta \in [0, \pi]$, temos que $z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, |z_{\frac{(m+1)}{2}}|\cos \theta, |z_{\frac{(m+1)}{2}}|\text{sen } \theta, 0, \dots) \in S_+^m$. Logo $S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}} \subset S_+^m$. Por outro lado, seja $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in S_+^m$. Considere $z_1 = x_1 + ix_2, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}} = x_{m-2} + ix_{m-1}, z_{\frac{(m+1)}{2}} = x_m + ix_{m+1}$. Como $x_{m+1} \geq 0$ temos que $\arg z_{\frac{(m+1)}{2}} \in [0, \pi]$. Daí segue que $(z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}}$. Portanto, $S_+^m \subset S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}}$. \square

Afirmção 3.2.9 A aplicação $h_m : S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \longrightarrow D^m$ dada por

$$h(z) = (\text{Re } z_1, \text{Im } z_1, \dots, \text{Re } z_{\frac{(m-1)}{2}}, \text{Im } z_{\frac{(m-1)}{2}}, |z_{\frac{(m+1)}{2}}|\cos(\frac{p}{2} \arg z_{\frac{(m+1)}{2}}))$$

é um homeomorfismo.

Prova: Seja $g_m : S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \longrightarrow S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}}$ dada por $g_m(z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) = (z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, |z_{\frac{(m+1)}{2}}|e^{i\frac{p}{2}\arg z_{\frac{(m+1)}{2}}}, 0, \dots)$. Observe que g_m é contínua, pois suas coordenadas são contínuas. Além disso $g_m^{-1} : S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}} \longrightarrow S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}}$ dada por $g_m^{-1}(z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) = (z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, |z_{\frac{(m+1)}{2}}|e^{i\frac{2}{p}\arg z_{\frac{(m+1)}{2}}}, 0, \dots)$ é uma aplicação contínua. Como $g_m \circ g_m^{-1} = \text{id}_{S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{2}}}$ e $g_m^{-1} \circ g_m = \text{id}_{S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}}}$ temos que g_m é um homeomorfismo. Sabendo que $f : S_+^m \longrightarrow D^m$ definida por $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = (x_1, \dots, x_m)$ é um homeomorfismo, pela afirmação 3.2.8

podemos compor $f \circ g_m$, logo $h_m = f \circ g_m : S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \longrightarrow D^m$ dada por $h_m(z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) = (z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, |z_{\frac{(m+1)}{2}}| \cos(\frac{p}{2} \arg z_{\frac{(m+1)}{2}}))$ é um homeomorfismo. \square

Afirmção 3.2.10 *Seja $h_m : S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \longrightarrow D^m$ dada como na afirmação anterior. Então*

$$h_m(S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \cap F_{m,p}) = h_m(\{z \in S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \mid \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} = 0 \text{ ou } \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} = \frac{2\pi}{p}\}) = S^{m-1}.$$

Prova: Seja $z = h_m(w)$ onde $w = (z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \cap F_{m,p}$. Então $h_m(w) = (Re z_1, Im z_1, Re z_2, Im z_2, \dots, Re z_{\frac{(m-1)}{2}}, Im z_{\frac{(m-1)}{2}}, \pm |z_{\frac{(m+1)}{2}}|) \in S^{m-1}$, logo $h_m(S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \cap F_{m,p}) \subset S^{m-1}$. Por outro lado, seja $(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in S^{m-1}$. Então considere $z = x_1 + ix_2, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}} = x_{m-2} + ix_{m-1}$ e $z_{\frac{(m+1)}{2}} = x_m$ se $x_m \geq 0$ ou $z_{\frac{(m+1)}{2}} = x_m e^{\frac{(2-p)\pi i}{p}}$ se $x_m < 0$. Daí segue que $z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \cap F_{m,p}$, e $h_m(z) = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$. Portanto, $S^{m-1} \subset h_m(S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \cap F_{m,p})$. \square

Pela afirmação acima faz sentido compormos a aplicação $P_m : F_{m,p} \longrightarrow M$ com $h_m^{-1} : S^{m-1} \longrightarrow S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \cap F_{m,p} \subset F_{m,p}$. Sendo assim $P_m \circ h_m^{-1} : S^{m-1} \longrightarrow M$ é uma aplicação contínua. Mas como por hipótese de indução $m-1 \leq n$ e M é n -conexo, a definição 3.2.4 nos garante que a aplicação $P_m \circ h_m^{-1} : S^{m-1} \longrightarrow M$ admite uma extensão contínua $\phi_m : D^m \longrightarrow M$. Defina a aplicação $P_{m+1} : F_{m+1,p} \longrightarrow M$ como sendo $P_{m+1}(z) = (f^k \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z)$ sabendo que $\frac{2k\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} < \frac{2(k+1)\pi}{p}$, $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Para vermos que P_{m+1} está bem definida observe a afirmação abaixo:

Afirmção 3.2.11 *Seja $\varphi_{m+1,p} : F_{m+1,p} \longrightarrow F_{m+1,p}$ como na definição 3.2.2, então*

$$\varphi_{m+1,p}^{p-k}(F_{m+1,p}) \subset S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}} \quad \forall k = 0, \dots, p-1.$$

Prova : Dado $z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m-1)}{2}}, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in F_{m+1,p}$ temos que

$\varphi_{m+1,p}^{p-k}(z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) = (z_1 e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}} e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}}, 0, \dots)$. Sabendo que

$\frac{2k\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} < \frac{2(k+1)\pi}{p}$ para algum $k \in \{0, \dots, p-1\}$, isso implica que

$\frac{2k\pi}{p} + \frac{2(p-k)\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}} < \frac{2(k+1)\pi}{p} + \frac{2(p-k)\pi}{p}$. Sendo assim podemos

afirmar que $0 \leq \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} e^{\frac{2(p-k)\pi i}{p}} < \frac{2\pi}{p}$. Portanto, $\varphi_{m+1,p}^{p-k}(z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \subset$

$S_{\frac{(m+1)}{2}, \frac{1}{p}}$. □

Afirmação 3.2.12 P_{m+1} é uma aplicação equivariante.

Prova: Como P_{m+1} é composição de aplicações contínuas, logo é contínua.

Seja $z = (z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) \in F_{m+1,p}$. Então $\varphi_{m+1,p}(z_1, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}}, 0, \dots) =$

$(z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \dots, z_{\frac{(m+1)}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}}, 0, \dots)$. Além disso temos que

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2k\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}} < \frac{2(k+1)\pi}{p} + \frac{2\pi}{p}$$

ou equivalentemente

$$\frac{2(k+1)\pi}{p} \leq \arg z_{\frac{(m+1)}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}} < \frac{2[(k+1)+1]\pi}{p}$$

para $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Logo pela definição de P_{m+1} temos que

$$\begin{aligned} (P_{m+1} \circ \varphi_{m+1,p})(z) &= (f^{k+1} \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k-1})(\varphi_{m+1,p}(z)) = \\ &= (f^{k+1} \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z) = \\ &= (f \circ f^k \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z) = \\ &= f((f^k \circ \phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z)) = \\ &= f(P_{m+1}(z)) = (f \circ P_{m+1})(z) \end{aligned}$$

Portanto, existe $P = P_{n+2} : F_{n+2,p} \longrightarrow M$ equivariante, o que finaliza a prova do lema.

O próximo resultado é uma simples consequência dos dois últimos lemas.

Lema 3.2.5 *Seja $m \geq 2$ inteiro e p um número primo. Seja (S, φ) como no Teorema 2.0.6 e $(M, f) \in N_p$. Então $\bar{g}(M, f) \leq (m-1)(p-1)$ se, e somente se, existe uma aplicação equivariante $P : (M, f) \longrightarrow (S, \varphi)$.*

Prova: (\implies) Se $n = \bar{g}(M, f) \leq (m-1)(p-1)$, então pelo Lema 3.2.3 n é o menor número tal que existe uma aplicação equivariante $P_1 : (M, f) \longrightarrow (F_{n,p}, \varphi_{n,p})$. Como $n \leq (m-1)(p-1)$ e sabendo que $F_{n,p} \subseteq F_{(m-1)(p-1),p}$ podemos considerar a inclusão $j : F_{n,p} \longrightarrow F_{(m-1)(p-1),p}$ que é uma aplicação equivariante, isto é, $j \circ \varphi_{n,p} = \varphi_{(m-1)(p-1),p} \circ j$. Além disso como S é uma esfera $((m-1)(p-1) - 1)$ -dimensional então temos que S é $((m-1)(p-1) - 2)$ -conexo. Daí pelo Lema 3.2.4 existe uma aplicação equivariante $P_2 : (F_{(m-1)(p-1),p}, \varphi_{(m-1)(p-1),p}) \longrightarrow (S, \varphi)$. Usando a propriedade equivariante de P_1 , P_2 e j mostraremos que $P = P_2 \circ j \circ P_1 : (M, f) \longrightarrow (S, \varphi)$ é uma aplicação equivariante. De fato:

P é contínua, pois é composição de aplicações contínuas. Além disso,

$$\begin{aligned} P \circ f &= P_2 \circ j \circ P_1 \circ f = P_2 \circ j \circ \varphi_{n,p} \circ P_1 = \\ &= P_2 \circ \varphi_{(m-1)(p-1),p} \circ j \circ P_1 = \\ &= \varphi \circ P_2 \circ j \circ P_1 = \varphi \circ P. \end{aligned}$$

Portanto, se $\bar{g}(M, f) \leq (m-1)(p-1)$ existe $P : (M, f) \longrightarrow (S, \varphi)$ equivariante.

(\impliedby) Suponha que exista uma aplicação equivariante $P : (M, f) \longrightarrow (S, \varphi)$.

Então pelo Lema 3.2.1 e pela Observação 3.1.5 temos que $\bar{g}(M, f) \leq \bar{g}(S, \varphi) = (m-1)(p-1)$. □

Capítulo 4

A categoria do espaço S^n/f

Seja $f : S^n \longrightarrow S^n$ contínua, gerando uma \mathbb{Z}_p -ação livre sobre S^n . Baseado num resultado de Krasnosel'skiï [5] será mostrado neste capítulo que se S^n/f é o espaço de órbitas dessa ação então a categoria de Ljusternik-Schnirelmann de S^n/f , $cat(S^n/f)$ é igual a $n+1$, e como consequência desse resultado será mostrado que $g(S^n, f) = n+1$ qualquer que seja a aplicação $f : S^n \longrightarrow S^n$ gerando \mathbb{Z}_p -ação livre em S^n . A técnica usada nos permitirá obter um majorante para o gênero de uma classe ampla de \mathbb{Z}_p -espaço.

Teorema 4.0.1 ([5]) *Seja $(S^n, f) \in N_p$, e sejam $G_j^{(i)} \subset S^n$ $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 0, 1, \dots, p-1$ subconjuntos fechados tais que $S^n = \cup_{i=1}^r G^{(i)}$, $G^{(i)} = \cup_{j=0}^{p-1} G_j^{(i)}$ e $f^j(G_0^{(i)}) = G_j^{(i)} \forall i = 1, \dots, r$ e $\forall j = 0, \dots, p-1$. Então*

$$r \geq n+1.$$

Corolário 4.0.1 *Se $(S^n, f) \in N_p$ então $g(S^n, f) \geq n+1$.*

Corolário 4.0.2 *Se $(S^n, f) \in N_p$ então $cat(S^n/f) = n+1$.*

Prova: Suponha que $cat(S^n/f) = r$. Então existem fechados U_1, U_2, \dots, U_r de S^n/f tais que as inclusões $q_i : U_i \longrightarrow S^n/f$ são homotópicas à uma

aplicação constante $c_i : U_i \longrightarrow S^n/f$ dada por $c_i(x) = y_i \forall i = 1, \dots, r$. Sendo S^n/f conexo por caminhos podemos considerar todos os pontos y_i iguais a um único ponto $y \in S^n/f$. Consideremos o \mathbb{Z}_p -fibrado principal $\xi_n = (S^n, p, S^n/f, \mathbb{Z}_p)$ sendo $p : S^n \longrightarrow S^n/f$ a projeção que leva cada ponto $x \in S^n$ em sua classe. Segue do Teorema 1.5.2 que S^n/f é uma n -variedade topológica, donde S^n/f é paracompacto [18] e como todo subespaço fechado de um espaço paracompacto é paracompacto segue que cada U_i é paracompacto. Sendo $q_i \simeq c_i$ o Teorema 1.7.3 nos garante que $q_i^*(\xi_n)$ é isomorfo a $c_i^*(\xi_n) \forall i = 1, \dots, r$. Mas pelo Exemplo 1.7.7 o \mathbb{Z}_p -fibrado principal $q_i^*(\xi_n)$ é isomorfo ao \mathbb{Z}_p -fibrado principal $\xi|_{U_i} = (X', p', U_i)$ sendo $X' = p^{-1}(U_i)$ e $p' = p|_{p^{-1}(U_i)}$ e pelo Exemplo 1.7.8 o \mathbb{Z}_p -fibrado principal $c_i^*(\xi_n)$ é isomorfo ao \mathbb{Z}_p -fibrado principal produto $\varepsilon(U_i, \mathbb{Z}_p) = (U_i \times \mathbb{Z}_p, p_1, U_i, \mathbb{Z}_p)$. Sendo assim, existe um homeomorfismo $h_i : U_i \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow p^{-1}(U_i) \forall i = 1, \dots, r$ tal que $\bar{s}h_i(x, \bar{k}) = h_i(\bar{s}(x, \bar{k}))$, ou seja, $f^s \circ h_i(x, \bar{k}) = h_i(x, \overline{s + k})$. Notemos que

$$S^n = \cup_{i=1}^r p^{-1}(U_i)$$

e

$$p^{-1}(U_i) = h_i(U_i \times \{\bar{0}\}) \cup h_i(U_i \times \{\bar{1}\}) \cup \dots \cup h_i(U_i \times \{\overline{p-1}\})$$

sendo a união acima disjunta, e $h_i(U_i \times \{\bar{k}\})$ é fechado em $p^{-1}(U_i) \forall k = 0, \dots, p-1$ e $\forall i = 1, \dots, r$, pois h_i é homeomorfismo e $U_i \times \{\bar{k}\}$ é fechado em $U_i \times \mathbb{Z}_p$. Usando a definição das ações e a propriedade equivariante do homeomorfismo h_i temos também que

$$f^k(h_i(U_i \times \{\bar{0}\})) = h_i(U_i \times \{\bar{k}\})$$

$\forall k = 0, \dots, p-1$ e $\forall i = 1, \dots, r$. Sendo assim, definamos:

$$G_k^{(i)} = h_i(U_i \times \{\bar{k}\})$$

$$G^{(i)} = \cup_{k=0}^{p-1} G_k^{(i)}.$$

Como $S^n = \cup_{i=1}^r G^{(i)}$ e $f^k(G_0^{(i)}) = G_k^{(i)} \forall k = 0, \dots, p-1$ temos pelo Teorema 4.0.1 que $r \geq n+1$, ou seja, $\text{cat}(S^n/f) \geq n+1$. Pelo Corolário 1.5.1 e o Teorema 1.6.3 temos que $\text{cat}(S^n/f) \leq n+1$. Assim $\text{cat}(S^n, f) = n+1$. \square

Corolário 4.0.3 *Se $(S^n, f) \in N_p$ então $g(S^n, f) = n+1$.*

Prova: Como $\text{cat}(S^n, f) = n+1$, usando os mesmos argumentos do Corolário 4.0.2 encontramos fechados $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(n+1)} \subset S^n$ tais que $S^n = \cup_{i=1}^{n+1} G^{(i)}$, $G^{(i)} = \cup_{k=0}^{p-1} G_k^{(i)}$ e $f^k(G_0^{(i)}) = G_k^{(i)} \forall k = 0, \dots, p-1$ e $\forall i = 1, \dots, n+1$. Portanto, pela definição do gênero $g(S^n, f)$ podemos afirmar que $g(S^n, f) \leq n+1$. Mas pelo Corolário 4.0.1 temos que $g(S^n, f) \geq n+1$ e conseqüentemente $g(S^n, f) = n+1$. \square

Os argumentos empregados na demonstração do Corolário 4.0.2 nos permitem concluir o seguinte resultado

Teorema 4.0.2 *Sejam M uma n -variedade topológica conexa por caminhos e $f : M \rightarrow M$ gerando uma \mathbb{Z}_p -ação livre em M , então*

$$g(M, f) \leq n+1.$$

Prova: Suponha que $\text{cat}(M/f) = r$. Segue do Teorema 1.6.3 e Corolário 1.5.1 que

$$r = \text{cat}(M/f) \leq \dim(M/f) + 1 = n+1$$

sendo M/f o espaço de órbitas da ação gerada por f . Também existem fechados F_1, F_2, \dots, F_r em M/f tais que as inclusões $q_i : F_i \hookrightarrow M/f$ são homotópicas

à uma aplicação constante $c_i : F_i \longrightarrow M/f$, $c_i(x) = y_i \forall x \in F_i$ e $\forall i = 1, \dots, r$. Como F_i é paracompacto segue do Teorema 1.7.3 que $q_i^*(\xi(M, f)) \cong c_i^*(\xi(M, f))$ sendo $\xi(M, f)$ o \mathbb{Z}_p -fibrado principal $(M, p, M/f, \mathbb{Z}_p)$. Pelos Exemplos 1.7.7 e 1.7.8 temos que os espaços totais $E(q_i^*(\xi(M, f)))$ e $E(c_i^*(\xi(M, f)))$ são respectivamente equivariantemente homeomorfos a $p^{-1}(F_i)$ e $F_i \times \mathbb{Z}_p$. Portanto existem homeomorfismos equivariantes $h_i : F_i \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow p^{-1}(F_i)$ donde

$$p^{-1}(F_i) = \cup_{j=0}^{p-1} h_i(F_i \times \{\bar{j}\})$$

Definindo $G^{(i)} = p^{-1}(F_i)$ e $G_j^{(i)} = h_i(F_i \times \{\bar{j}\})$ temos que

$$M = \cup_{i=1}^r G^{(i)}$$

$$G^{(i)} = \cup_{j=0}^{p-1} G_j^{(i)}$$

$G_j^{(i)}$ são fechados de M

$$G_j^{(i)} \cap G_l^{(i)} = \emptyset \text{ se } j \neq l \quad \forall i = 1, \dots, r$$

$$f^j(G_0^{(i)}) = G_j^{(i)} \quad \forall j = 0, \dots, p-1, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Logo pela definição do gênero $g(M, f)$ temos que $g(M, f) \leq r \leq n+1$. \square

Exemplo 4.0.2 Para a esfera S^n vimos acima que o $g(S^n, f)$ coincide com o majorante $n+1$ dado pelo Teorema 4.0.2 acima, qualquer que seja a ação gerada por f .

Exemplo 4.0.3 Pelo Exemplo 3.1.2 exibimos uma $f : T \longrightarrow T$ gerando uma \mathbb{Z}_2 -ação livre no toro T tal que $g(T, f) = 2 < 2+1$.

Exemplo 4.0.4 A ação do Exemplo 4.0.2 acima foi obtida pela restrição da antípoda $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ no toro. O mesmo procedimento pode ser feito com o bitoro, tritoro, etc., dispostos de maneira conveniente em \mathbb{R}^3 de tal forma que $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ quando restrita a essas superfícies tenham suas imagens ainda

contidas nas respectivas superfícies. Isso fornece exemplos de \mathbb{Z}_2 -ações livres em qualquer superfície compacta orientada bidimensional. Temos pelo Teorema 4.0.2 acima que o gênero dessas superfícies munidas por estas \mathbb{Z}_2 -ações livres ou qualquer outra \mathbb{Z}_p -ação livre que possa existir deve ser menor ou igual a 3.

Capítulo 5

A propriedade $K_{m,p}$

Neste capítulo analisaremos o Teorema de Ljusternik-Schnirelmann generalizado, provado por Steinlein [14]. A partir daí, definiremos quando um espaço com uma \mathbb{Z}_p -ação livre tem a propriedade $K_{m,p}$, sendo p um número primo e m natural, e veremos como melhorar a estimativa do gênero para um par $(M, f) \in N_7$ que tem a propriedade $K_{m,p}$, $\forall m \geq 3$, quando M tem base enumerável.

5.1 O Teorema de Ljusternik-Schnirelmann

Nesta seção abordaremos uma generalização do teorema clássico de Ljusternick-Schinirelmann e veremos que de um certo modo vale a recíproca deste teorema generalizado.

Teorema 5.1.1 (*Ljusternik-Schnirelmann*) *Sejam M_1, \dots, M_m conjuntos fechados da S^n tal que $S^n = \cup_{i=1}^m M_i$ e $M_i \cap A(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, \dots, m$, sendo $A : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $A(x) = -x$. Então*

$$\bar{g}(S^n, A) = n + 1 \leq m - 1.$$

No Teorema acima surge a idéia muito natural de substituímos S^n por um espaço de Hausdorff M , e $A : S^n \rightarrow S^n$ por uma aplicação $f : M \rightarrow M$ gerando uma \mathbb{Z}_p -ação livre e perguntarmos em que condições existe uma cobertura de M por m fechados M_1, \dots, M_m com $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, \dots, m$. Com este intuito considere a seguinte definição:

Definição 5.1.1 *Seja $m \in \mathbb{N}$ e p um número primo. Dizemos que o par $(M, f) \in H_p$ tem a propriedade $K_{m,p}$, se existem $M_1, M_2, \dots, M_m \subset M$ conjuntos fechados tais que $M = \cup_{i=1}^m M_i$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset \forall i = 1, \dots, m$.*

Em [14] temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.2 *(Ljusternik-Schnirelmann generalizado) Sejam m natural, $m \geq 3$ e $(M, f) \in N_p$ tal que (M, f) tem a propriedade $K_{m,p}$. Então*

$$\bar{g}(M, f) \leq \begin{cases} (m-3)\frac{p-1}{2} + 1, & \text{se } p = 3 \\ (m-3)\frac{p-1}{2} + 2, & \text{se } p > 3 \end{cases}$$

Para responder se vale de um certo modo a recíproca do Teorema acima, comecemos definindo os seguintes números:

Definição 5.1.2 *Seja m natural e p um número primo. Defina então*

$$r_1(m, p) = \max\{n \in \mathbb{N} ; \forall (M, f) \in N_p \text{ com } \bar{g}(M, f) \leq n$$

tem a propriedade $K_{m,p}$ \}

$$r_2(m, p) = \max\{n \in \mathbb{N} ; \exists (M, f) \in N_p \text{ com } \bar{g}(M, f) = n \text{ e}$$

(M, f) tem a propriedade $K_{m,p}$ \}

O próximo resultado que vamos enunciar e provar abaixo nos fornece uma relação entre os números $r_1(m, p)$ e $r_2(m, p)$. Além disso, veremos que $r_1(m, p) \geq (\lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1)(p-1)$ para $p \geq 3$ e $m \geq 4$.

Teorema 5.1.3 *Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$ e $p \geq 3$ um número primo. Então,*

$$\left(\left[\frac{m}{4}\right] - 1\right)(p - 1) \leq r_1(m, p) \leq r_2(m, p)$$

sendo $\left[\frac{m}{4}\right] = \max\{n \in \mathbb{Z} ; n \leq \frac{m}{4}\}$.

Prova: Mostraremos inicialmente a primeira desigualdade. Seja $(M, f) \in N_p$ com $\bar{g}(M, f) \leq \left(\left[\frac{m}{4}\right] - 1\right)(p - 1)$ e (S, φ) como no Teorema 2.0.6 com $\left[\frac{m}{4}\right]$ em vez de m . Pelo Lema 3.2.5, existe uma aplicação equivariante $P : (M, f) \longrightarrow (S, \varphi)$. Pelo Corolário 2.0.2 sabemos que S pode ser coberto por $4\left[\frac{m}{4}\right] \leq m$ conjuntos fechados $V_1, \dots, V_{4\left[\frac{m}{4}\right]}$ com $V_i \cap \varphi(V_i) = \emptyset$ para $i = 1, \dots, 4\left[\frac{m}{4}\right]$. Seja $U_i = P^{-1}(V_i)$. Como P é contínua temos que cada U_i é fechado em M . Além disso temos que

$U_i \cap f(U_i) = P^{-1}(V_i) \cap f(P^{-1}(V_i)) \subset {}^1P^{-1}(V_i) \cap P^{-1}(\varphi(V_i)) = P^{-1}(V_i \cap \varphi(V_i)) = P^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, 4\left[\frac{m}{4}\right]$. Como $S = \cup_{j=1}^{4\left[\frac{m}{4}\right]} V_j$ podemos afirmar que $M = \cup_{j=1}^{4\left[\frac{m}{4}\right]} U_j$. Se $4\left[\frac{m}{4}\right] < m$ podemos completar a cobertura $\{U_j\}$ de M com $U_{4\left[\frac{m}{4}\right]+1} = U_{4\left[\frac{m}{4}\right]+2} = \dots = U_m = \emptyset$, e assim concluímos que (M, f) tem a propriedade $K_{m,p}$ donde vale a primeira desigualdade. Para mostrar a outra desigualdade, suponha que $r_2(m, p) < r_1(m, p)$. Daí segue que $\forall (M, f) \in N_p$ com $\bar{g}(M, f) > r_2(m, p)$ não existem conjuntos fechados M_1, \dots, M_m com $M = \cup_{i=1}^m M_i$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset, \forall i = 1, \dots, m$. Em particular para $\bar{g}(M, f) = r_1(m, p)$; o que é um absurdo, pois contraria a definição do número $r_1(m, p)$. Portanto, $r_1(m, p) \leq r_2(m, p)$. □

Segue imediatamente do Teorema acima o seguinte resultado

¹Basta observar que $f(P^{-1}(V_i)) \subset P^{-1}(\varphi(V_i))$. Para tanto, seja $x \in f(P^{-1}(V_i)) \implies \exists y \in P^{-1}(V_i)$ tal que $x = f(y) \implies P(x) = P(f(y)) = \varphi(P(y))$, pois P é equivariante. E como $y \in P^{-1}(V_i)$ segue que $P(y) \in V_i$, ou seja, $P(x) \in \varphi(V_i)$ donde $x \in P^{-1}(\varphi(V_i))$.

Teorema 5.1.4 *Seja $(M, f) \in N_p$ tal que $\bar{g}(M, f) \leq (\lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1)(p - 1)$ sendo $m \geq 4$ e $p \geq 3$ um número primo. Então o par (M, f) tem a propriedade $K_{m,p}$.*

O Teorema acima nos diz que de um certo modo vale a recíproca do teorema 5.1.2.

Corolário 5.1.1 *Se $(M, f) \in N_p$ e M é uma n -variedade topológica com $n \leq (\lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1)(p - 1) - 1$, $m \geq 8$ e $p \geq 3$ um número primo então existem fechados M_1, M_2, \dots, M_m tais que $M = \cup_{i=1}^m M_i$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$.*

Observação 5.1.1 *Algumas estimativas para o número $r_2(m, p)$ também são conhecidas. Em [13] e [19] temos que*

$$r_2(m, 2) \leq m - 1, \quad m \in \mathbb{N}^*$$

e pelo Teorema 5.1.2 temos que para $m \geq 3$

$$r_2(m, p) \leq \begin{cases} (m - 3)^{\frac{p-1}{2}} + 1, & \text{se } p = 3 \\ (m - 3)^{\frac{p-1}{2}} + 2, & \text{se } p > 3 \end{cases}$$

Diante da estimativa acima poderíamos nos perguntar se esta pode ser melhorada. Na próxima seção nos restringiremos a verificar que a estimativa para o número $r_2(m, 7)$ sendo $m \geq 3$ pode ser reduzida considerando que o espaço M dos pares $(M, f) \in N_7$ tem base enumerável.

5.2 O gênero e a propriedade $K_{m,7}$

Nesta seção, nos dedicaremos a mostrar que dado um par $(M, f) \in N_7$ com a propriedade $K_{m,7}$ onde M tem base enumerável, $\bar{g}(M, f) \leq 2(m - 2)$,

$\forall m \geq 3$, e conseqüentemente pela definição do número $r_2(m, 7)$ veremos também que a sua estimativa pode ser reduzida em relação a já existente em [14].

Iniciemos com o seguinte resultado:

Lema 5.2.1 ([12]) *Sejam p primo e $(M, f) \in N_p$. Sejam $A_0, A_1, \dots, A_n \subset M$ subconjuntos fechados com $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = M$, $f(A_i) = A_i$ e $\bar{g}(A_i - A_{i-1}, f)$ finito para $i = 1, \dots, n$. Então $\bar{g}(M, f) \leq \sum_{i=1}^n \bar{g}(A_i - A_{i-1}, f)$.*

Dado o par $(M, f) \in N_p$ com a propriedade $K_{m,p}$, definiremos abaixo conjuntos especiais A_j para $j = 0, \dots, m$ tais que estes conjuntos satisfazem as hipóteses do Lema acima.

Definição 5.2.1 *Seja $(M, f) \in N_p$ com a propriedade $K_{m,p}$. Então para $j = 1, \dots, m$ defina*

$$A_j = \{x \in M; \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\} \subset \cup_{l=1}^j M_l\}$$

e $A_0 = \emptyset$.

Para verificar que os conjuntos A_j definidos acima satisfazem as hipóteses do Lema anterior observe as afirmações abaixo:

Afirmação 5.2.1 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m = M$.

Prova: Suponha que $j < i$ para $i, j = 0, \dots, m$ e considere o conjunto $A_j = \{x \in M; \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\} \subset \cup_{l=1}^j M_l\}$. Como $\cup_{l=1}^j M_l \subset \cup_{l=1}^i M_l$ podemos afirmar que $A_j \subset A_i$. Para ver que o conjunto $A_m = M$ basta observar que $\cup_{l=1}^m M_l = M$. \square

Observação 5.2.1 $A_1 = A_2 = \emptyset$. Para $p \geq 3$, para ver que $A_1 = \emptyset$ basta observar que se existe $x \in A_1$ então, pela definição do próprio A_1 , temos que

$x, f(x) \in M_1$ o que é um absurdo, pois $M_1 \cap f(M_1) = \emptyset$. Para vermos que $A_2 = \emptyset$, observe que se existe $x \in A_2$ então $x \in M_1$ ou $x \in M_2$. Suponha que $x \in M_1$. Como $M_1 \cap f(M_1) = \emptyset$ e $M_2 \cap f(M_2) = \emptyset$ temos que $f^k(x) \in M_1$ para todo k par. Logo pelo fato de que $p \geq 3$ é ímpar teremos $f^{p-1}(x) \in M_1$ o que é um absurdo, pois assim teremos $x \in M_1 \cap f(M_1) = \emptyset$. No caso em que $x \in M_2$ a prova é análoga desde que $M_2 \cap f(M_2) = \emptyset$.

Afirmção 5.2.2 Os conjuntos A_j são fechados em M para $j = 1, \dots, m$.

Prova: Mostraremos que $M - A_j$ é aberto em M para $j = 1, \dots, m$. Para isso considere a aplicação contínua $f^k : M \rightarrow M$ sendo $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Como $\cup_{l=1}^j M_l$ é fechado em M temos que $M - \cup_{l=1}^j M_l$ é aberto em M , logo $\cup_{k=0}^{p-1} (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l)$ é aberto em M . Portanto basta mostrar que $M - A_j = \cup_{k=0}^{p-1} (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l)$. Para isso seja $x \in M - A_j$. Então $x \notin A_j$. Daí existe $k = 0, \dots, p-1$ tal que $f^k(x) \notin \cup_{l=1}^j M_l$, ou seja, $x \in (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l)$ e conseqüentemente $x \in \cup_{k=0}^{p-1} (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l)$. Logo $M - A_j \subset \cup_{k=0}^{p-1} (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l)$.

Por outro lado, tomemos $x \in \cup_{k=0}^{p-1} (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l)$. Então $x \in (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l)$ para algum $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Daí segue que $f^k(x) \in M - \cup_{l=1}^j M_l$, ou seja, $x \notin A_j$ e conseqüentemente $x \in M - A_j$. Logo $\cup_{k=0}^{p-1} (f^k)^{-1}(M - \cup_{l=1}^j M_l) \subset M - A_j$. \square

Afirmção 5.2.3 $f(A_j) = A_j \quad \forall j = 1, \dots, m$.

Prova: Se $x \in f(A_j)$ então $x = f(a)$ sendo $a \in A_j$, ou seja, o conjunto $\{a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\} \subset \cup_{l=1}^j M_l$. Como $x = f(a)$ temos que $f(x) = f^2(a)$, $f^2(x) = f^3(a), \dots, f^{p-1}(x) = f^p(a) = a$. Portanto, $\{f^{p-1}(x), x, \dots, f^{p-2}(x)\} = \{a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\} \subset \cup_{l=1}^j M_l$ e conseqüentemente $x \in A_j$. Logo $f(A_j) \subset A_j$.

Por outro lado, seja $x \in A_j$. Como f é bijeção existe $s \in M$ tal que $x = f(s)$. Basta então mostrar que $s \in A_j$. De fato:

$$s = f^p(s) = f^{p-1}(f(s)) = f^{p-1}(x), \quad f(s) = x, \quad f^2(s) = f(f(s)) = f(x), \dots, \\ f^{p-1}(s) = f^{p-2}(f(s)) = f^{p-2}(x)$$

Como $\{x, f(x), \dots, f^{p-2}(x), f^{p-1}(x)\} \subset \cup_{l=1}^j M_l$ temos que o conjunto $\{s, f(s), \dots, f^{p-1}(s)\} \subset \cup_{l=1}^j M_l$, ou seja, $s \in A_j$ e conseqüentemente o ponto $x = f(s) \in f(A_j)$. Logo $A_j \subset f(A_j)$. \square

Observação 5.2.2 Como f é uma bijeção e $f(A_j) = A_j$, não é difícil ver que $f(A_j - A_{j-1}) = A_j - A_{j-1} \quad \forall j = 1, \dots, m$.

Afirmção 5.2.4 $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f)$ é finito para $j = 1, \dots, m$.

Prova: $\bar{g}(A_1 - A_0, f) = \bar{g}(A_2 - A_1, f) = 0$ pois, $A_0 = A_1 = A_2 = \emptyset$. Seja $(M, f) \in N_p$ com a propriedade $K_{m,p}$. Pelo Teorema 5.1.2 segue que $\bar{g}(M, f)$ é finito se $m \geq 3$. Sendo assim, considere $i : A_j - A_{j-1} \longrightarrow M$ a aplicação inclusão. É fácil ver que i é uma aplicação equivariante. Logo pelo Lema 3.2.1 temos que $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f) \leq \bar{g}(M, f)$. Conseqüentemente $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f)$ é finito $\forall j = 1, \dots, m$. \square

Portanto, pelo lema anterior temos $\bar{g}(M, f) \leq \sum_{j=1}^m \bar{g}(A_j - A_{j-1}, f) = \sum_{j=3}^m \bar{g}(A_j - A_{j-1}, f)$, sendo os conjuntos A_j como na Definição 5.2.1.

O nosso objetivo agora é estimar um majorante para $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f)$ e a partir disso melhorar a estimativa da Observação 5.1.1 para $r_2(m, p)$, $p \geq 3$, $m \geq 3$, supondo que os espaços envolvidos tem base enumerável.

Afirmção 5.2.5 Se $x \in A_j - A_{j-1}$ então $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\} \cap M_j \neq \emptyset$.

Prova : Se $x \in A_j - A_{j-1}$ temos que $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\} \subset \cup_{l=1}^j M_l$, e existe $i = 0, \dots, p-1$ tal que $f^i(x) \in M_j$ pois, caso contrário, se $\forall i = 0, \dots, p-1$

tivermos $f^i(x) \in M_1 \cup \dots \cup M_{j-1}$, então $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\} \subset M_1 \cup \dots \cup M_{j-1}$, isto é, $x \in A_{j-1}$ o que é um absurdo. \square

Fixado $j \in \{3, \dots, m\}$ definiremos abaixo uma subdivisão especial de $A_j - A_{j-1}$.

Definição 5.2.2 *Seja $N \subset \mathbb{Z}_p$ qualquer subconjunto. Então define*

$$\langle N \rangle = \{x \in A_j - A_{j-1}; f^a(x) \in M_j \iff \bar{a} \in N\}$$

Observação 5.2.3 *Para $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}_p$ escrevemos $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$ em vez de $\langle \{a_1, \dots, a_l\} \rangle$.*

Veremos abaixo algumas propriedades do conjunto $\langle N \rangle$:

$$(1) \langle N \rangle \neq \emptyset \implies \bar{a} \pm \bar{1} \notin N \quad \forall \bar{a} \in N.$$

Prova: Suponha que $\bar{a} + \bar{1} \in N$ para algum $\bar{a} \in N$. Daí se existe $x \in \langle N \rangle$ então $f^a(x) \in M_j$ e $f(f^a(x)) = f^{a+1}(x) \in M_j$. Logo $M_j \cap f(M_j) \neq \emptyset$, o que é um absurdo. O caso em que $\bar{a} - \bar{1} \in N$ é análogo. \square

Observação 5.2.4 *Pela propriedade (1) podemos afirmar que $\langle N \rangle = \emptyset$ se $\text{card } N \geq \frac{p+1}{2}$ sendo $p \geq 3$. Basta observar que $\forall N \subset \mathbb{Z}_p$ com $\text{card } N \geq \frac{p+1}{2}$ vai existir um elemento $\bar{s} \in N$ tal que $\bar{s} = \bar{a} \pm \bar{1}$ para algum $\bar{a} \in N$.*

$$(2) \text{ Seja } \bar{a} \in \mathbb{Z}_p \text{ então } f(\langle \bar{a} + \bar{1} \rangle) = \langle \bar{a} \rangle.$$

Prova: Mostraremos primeiramente que $f(\langle \bar{a} + \bar{1} \rangle) \subseteq \langle \bar{a} \rangle$. Para isso, seja $x \in f(\langle \bar{a} + \bar{1} \rangle)$, então $x = f(y)$ sendo que o elemento y pertence a $\langle \bar{a} + \bar{1} \rangle$, ou seja, $y \in A_j - A_{j-1}$ e $f^{a+1}(y) \in M_j$. Como $f(A_j - A_{j-1}) = A_j - A_{j-1}$ temos que $x \in A_j - A_{j-1}$ e além disso $f^a(x) = f^a(f(y)) = f^{a+1}(y) \in M_j$. Portanto, $x \in \langle \bar{a} \rangle$. Por outro lado, suponha que

$x \in \langle \bar{a} \rangle$. Então $x \in A_j - A_{j-1}$ e $f^a(x) \in M_j$. Queremos mostrar que existe $y \in \langle \bar{a} + \bar{1} \rangle$ tal que $x = f(y)$. Tome $y = f^{p-1}(x)$. Observe que $f^{a+1}(y) = f^{a+1+p-1}(x) = f^a(f^p(x)) = f^a(x) \in M_j$, isto é, $y \in \langle \bar{a} + \bar{1} \rangle$. Portanto, $x = f(y) \in f(\langle \bar{a} + \bar{1} \rangle)$ e conseqüentemente temos que $\langle \bar{a} \rangle \subseteq f(\langle \bar{a} + \bar{1} \rangle)$. \square

$$(3) f^l(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q \rangle) = \langle \overline{p-l+a_1}, \overline{p-l+a_2}, \dots, \overline{p-l+a_q} \rangle.$$

Prova: Mostraremos primeiramente que

$$f^l(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q \rangle) \subseteq \langle \overline{p-l+a_1}, \overline{p-l+a_2}, \dots, \overline{p-l+a_q} \rangle.$$

Para isso, seja $x \in f^l(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q \rangle)$, então $x = f^l(y)$ sendo $y \in \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q \rangle$, ou seja, $y \in A_j - A_{j-1}$ e $f^k(y) \in M_j \iff \bar{k} \in \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q\}$. Como $f(A_j - A_{j-1}) = A_j - A_{j-1}$ temos que $x \in A_j - A_{j-1}$ e além disso $f^{p-l+k}(x) = f^k(y) \in M_j \iff \bar{k} \in \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q\}$, logo $x \in \langle \overline{p-l+a_1}, \overline{p-l+a_2}, \dots, \overline{p-l+a_q} \rangle$.

Por outro lado, suponha que $x \in \langle \overline{p-l+a_1}, \overline{p-l+a_2}, \dots, \overline{p-l+a_q} \rangle$, então $x \in A_j - A_{j-1}$ e $f^{p-l+k}(x) \in M_j \iff \bar{k} \in \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q\}$. Queremos mostrar que existe $y \in \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q \rangle$ tal que $x = f^l(y)$. Tome $y = f^{p-l}(x)$. Observe que $f^k(y) = f^{p-l+k}(x) \in M_j \iff \bar{k} \in \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q\}$. Reciprocamente se $f^k(y) \in M_j$ teremos que $f^{p-l+k}(x) \in M_j$, mas isso implica que $\overline{p-l+k} = \overline{p-l+a_i}$ para algum $i = 1, \dots, q$, logo $\bar{k} = \bar{a}_i$ para algum $i = 1, \dots, q$. Assim $x = f^l(y) \in f^l(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_q \rangle)$. \square

(4) Seja $N \subset \mathbb{Z}_p$ então

$$\bigcup_{N \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_p} \langle V \rangle$$

é fechado em $A_j - A_{j-1}$.

Prova: Sejam $N = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l\} \subset \mathbb{Z}_p$ e o conjunto B dado por $B =$

$(f^{a_1})^{-1}(M_j) \cap (f^{a_2})^{-1}(M_j) \cap \dots \cap (f^{a_l})^{-1}(M_j)$. Mostraremos que

$$B \subset \bigcup_{N \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_p} \langle V \rangle.$$

Para isso seja $x \in B$. Então $f^{a_l}(x) \in M_j \forall a_l \in N$. Seja $V \subseteq \mathbb{Z}_p$ tal que $f^a(x) \in M_j \iff \bar{a} \in V$. Daí segue que $N \subseteq V$ e $x \in \langle V \rangle$, ou seja, $x \in \bigcup_{N \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_p} \langle V \rangle$. Mostraremos agora que

$$\bigcup_{N \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_p} \langle V \rangle \subset B.$$

Para isso seja $x \in \bigcup_{N \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_p} \langle V \rangle$. Então existe $V \supseteq N$ tal que $x \in \langle V \rangle$. Daí segue que $f^a(x) \in M_j, \forall a \in V$, em particular $f^{a_l}(x) \in M_j \forall a_l \in N \subseteq V$. Logo $x \in B$. Concluimos portanto que o conjunto

$$B = \bigcap_{i=1}^l (f^{a_i})^{-1}(M_j) = \bigcup_{N \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_p} \langle V \rangle.$$

Como $f^{a_l} : A_j - A_{j-1} \longrightarrow M$ é contínua para todo $\bar{a}_l \in N$ e M_j é fechado em M , temos que $B = (f^{a_1})^{-1}(M_j) \cap (f^{a_2})^{-1}(M_j) \cap \dots \cap (f^{a_l})^{-1}(M_j)$ é fechado em $A_j - A_{j-1}$. Consequentemente, $\bigcup_{N \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_p} \langle V \rangle$ é fechado em $A_j - A_{j-1}$. \square

O próximo resultado nos dá uma estimativa para o $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f)$ quando $p = 7$.

Teorema 5.2.1 *Se $(M, f) \in N_7$ tem a propriedade $K_{m,7} \forall m \geq 3$ e M tem base enumerável, então $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f) \leq 2$ para $j = 3, \dots, m$, sendo os A_j definidos como na Definição 5.2.1.*

Prova: Definiremos uma aplicação equivariante $P : (A_j - A_{j-1}, f) \longrightarrow (S^1, \varphi)$ sendo $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ a \mathbb{Z}_7 -ação livre definida por $\varphi(z) = z \cdot e^{\frac{8\pi i}{7}}$. Pela Afirmação

5.2.5 e pela propriedade (1) do conjunto $\langle N \rangle$ temos que

$$\begin{aligned}
A_j - A_{j-1} = & \langle \bar{0}, \bar{2}, \bar{4} \rangle \cup \langle \bar{0}, \bar{2} \rangle \cup \langle \bar{0}, \bar{4} \rangle \cup \langle \bar{0} \rangle \cup \\
& \cup \langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1} \rangle \cup \\
& \cup \langle \bar{2}, \bar{4}, \bar{6} \rangle \cup \langle \bar{2}, \bar{4} \rangle \cup \langle \bar{2}, \bar{6} \rangle \cup \langle \bar{2} \rangle \cup \\
& \cup \langle \bar{3}, \bar{5}, \bar{0} \rangle \cup \langle \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{3}, \bar{0} \rangle \cup \langle \bar{3} \rangle \cup \\
& \cup \langle \bar{4}, \bar{6}, \bar{1} \rangle \cup \langle \bar{4}, \bar{6} \rangle \cup \langle \bar{4}, \bar{1} \rangle \cup \langle \bar{4} \rangle \cup \\
& \cup \langle \bar{5}, \bar{0}, \bar{2} \rangle \cup \langle \bar{5}, \bar{0} \rangle \cup \langle \bar{5}, \bar{2} \rangle \cup \langle \bar{5} \rangle \cup \\
& \cup \langle \bar{6}, \bar{1}, \bar{3} \rangle \cup \langle \bar{6}, \bar{1} \rangle \cup \langle \bar{6}, \bar{3} \rangle \cup \langle \bar{6} \rangle
\end{aligned}$$

e pela definição de $\langle N \rangle$ temos que a união acima é disjunta. Pela propriedade (3) do conjunto $\langle N \rangle$ podemos rescrever o conjunto $A_j - A_{j-1}$ como sendo

$$\begin{aligned}
A_j - A_{j-1} = & f(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle) \cup f(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \cup f(\langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) \cup f(\langle \bar{1} \rangle) \cup \\
& \cup \langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1} \rangle \cup \\
& \cup f^6(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle) \cup f^6(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \cup f^6(\langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) \cup f^6(\langle \bar{1} \rangle) \cup \\
& \cup f^5(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle) \cup f^5(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \cup f^5(\langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) \cup f^5(\langle \bar{1} \rangle) \cup \\
& \cup f^4(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle) \cup f^4(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \cup f^4(\langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) \cup f^4(\langle \bar{1} \rangle) \cup \\
& \cup f^3(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle) \cup f^3(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \cup f^3(\langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) \cup f^3(\langle \bar{1} \rangle) \cup \\
& \cup f^2(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle) \cup f^2(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \cup f^2(\langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) \cup f^2(\langle \bar{1} \rangle)
\end{aligned}$$

Seja $N = \{\bar{1}, \bar{5}\} \subseteq \mathbb{Z}_7$. Pela propriedade (4) do conjunto $\langle N \rangle$ temos que

$$\bigcup_{\{\bar{1}, \bar{5}\} \subseteq V \subseteq \mathbb{Z}_7} \langle V \rangle = \langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle$$

é fechado em $A_j - A_{j-1}$. Como $f^l : A_j - A_{j-1} \longrightarrow A_j - A_{j-1}$ é homeomorfismo para $l = 0, \dots, 6$ temos que $f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle)$ é fechado em $A_j - A_{j-1}$, logo $A = \cup_{l=0}^6 f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle)$ é fechado em $A_j - A_{j-1}$. Defina a aplicação $P_1 : A \longrightarrow S^1$ por $P_1(x) = e^{\frac{8\pi i}{7}}$ se $x \in f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle)$.

Mostraremos que P_1 é equivariante. De fato:

P_1 é uma aplicação contínua, pois em cada $x \in f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle)$ $l = 0, \dots, 6$ P_1 é uma aplicação constante e $f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) \cap f^k(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle) = \emptyset \forall k, l = 0, \dots, 6$ com $k \neq l$ pela propriedade (3) e definição do conjunto $\langle N \rangle$. Suponha que $x \in f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle)$ para algum $l \in \{0, 1, \dots, 6\}$, então $f(x) \in f^{l+1}(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle)$. Daí pela definição de P_1 temos que $P_1(f(x)) = e^{\frac{8\pi(l+1)i}{7}}$. Por outro lado, pela definição de φ temos que $\varphi(P_1(x)) = \varphi(e^{\frac{8\pi i}{7}}) = e^{\frac{8\pi i}{7}} \cdot e^{\frac{8\pi i}{7}} = e^{\frac{8\pi(l+1)i}{7}}$. Portanto, $(P_1 \circ f)(x) = (\varphi \circ P_1)(x) \forall x \in A$. O próximo passo é estender P_1 continuamente ao conjunto $A \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle$. Para isso observe que $A \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle$ é um subespaço de M que é regular e tem base enumerável, logo $A \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle$ é um espaço normal. Como A é fechado em $A_j - A_{j-1}$ temos que A é fechado em $A \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle$. Então pelo Teorema de Extensão de Tietze podemos estender continuamente P_1 para uma aplicação $\bar{P}_1 : A \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle \longrightarrow S^1$ tal que $\bar{P}_1(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \subset \{e^{2d\pi i} ; 0 \leq d \leq \frac{1}{7}\}$. Defina então a aplicação $P_2 : \cup_{l=0}^6 f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \longrightarrow S^1$ por:

$$P_2(x) = \begin{cases} \bar{P}_1(x), & \text{se } x \in A \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle \\ \varphi^l(\bar{P}_1(f^{7-l}(x))), & \text{se } x \in f^l(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) (l = 1, \dots, 6) \end{cases}$$

(1) Se $x \in f^l(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle)$ temos que $f^{7-l}(x) \in f^{7-l}(f^l(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle)) = \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle$ para $l = 1, \dots, 6$. Portanto faz sentido $\bar{P}_1(f^{7-l}(x))$, e conseqüentemente, $\varphi^l(\bar{P}_1(f^{7-l}(x)))$.

(2) Se $x \in (A \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) \cap (f^l(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle))$ para $l = 1, \dots, 6$ temos que

$$\varphi^l(\overline{P_1}(f^{7-l}(x))) = {}^2\varphi^l(P_1(f^{7-l}(x))) = {}^3P_1(f^l(f^{7-l}(x))) = P_1(f^7(x)) = \overline{P_1}(x)$$

Juntando os itens (1) e (2) acima podemos afirmar que a aplicação $P_2 : \cup_{l=0}^6 f^l(\langle \overline{1}, \overline{3}, \overline{5} \rangle \cup \langle \overline{1}, \overline{5} \rangle \cup \langle \overline{1}, \overline{3} \rangle) \longrightarrow S^1$ definida como acima está bem definida e além disso, pelo lema da colagem, P_2 é contínua. Sendo assim, veremos agora que $P_2 \circ f|_B = \varphi \circ P_2$ sendo B o seguinte conjunto $B = \cup_{l=0}^6 f^l(\langle \overline{1}, \overline{3}, \overline{5} \rangle \cup \langle \overline{1}, \overline{5} \rangle \cup \langle \overline{1}, \overline{3} \rangle)$. Para isso analisemos os três casos abaixo:

Caso 1: Se $x \in A$

$$\begin{aligned} (P_2 \circ f)(x) &= P_2(f(x)) = \overline{P_1}(f(x)) = P_1(f(x)) = \\ &= (P_1 \circ f)(x) = (\varphi \circ P_1)(x) = \varphi(P_1(x)) = \\ &= \varphi(\overline{P_1}(x)) = \varphi(P_2(x)) = (\varphi \circ P_2)(x) \end{aligned}$$

Caso 2: Se $x \in f^l(\langle \overline{1}, \overline{3} \rangle)$ ($l = 0, \dots, 5$)

$f(x) \in f(f^l(\langle \overline{1}, \overline{3} \rangle)) = f^{l+1}(\langle \overline{1}, \overline{3} \rangle)$ sendo $l+1 \in \{1, \dots, 6\}$. Daí segue que

$$\begin{aligned} (P_2 \circ f)(x) &= P_2(f(x)) = \varphi^{l+1}(\overline{P_1}(f^{7-(l+1)}(f(x)))) = \\ &= \varphi(\varphi^l(\overline{P_1}(f^{7-l}(x)))) = \varphi(P_2(x)) = \\ &= (\varphi \circ P_2)(x) \end{aligned}$$

²Se $x \in f^l(\langle \overline{1}, \overline{3}, \overline{5} \rangle \cup \langle \overline{1}, \overline{5} \rangle)$ então $f^{7-l}(x) \in A$

³ $\varphi^l \circ P_1 = P_1 \circ f^l$

Caso 3: Se $x \in f^6(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle)$

$f(x) \in f(f^6(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle)) = f^7(\langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) = \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle$. Daí segue que

$$\begin{aligned} (P_2 \circ f)(x) &= P_2(f(x)) = \overline{P_1}(f(x)) = \\ &= \varphi(\varphi^6(\overline{P_1}(f^{7-6}(x)))) = \\ &= \varphi(P_2(x)) = (\varphi \circ P_2)(x) \end{aligned}$$

Portanto, P_2 é uma aplicação equivariante. Veremos agora que P_2 pode ser estendida continuamente ao conjunto $B \cup \langle \bar{1} \rangle$. Para isso seja $N = \{\bar{1}, \bar{3}\}$.

Então pela propriedade (4) do conjunto $\langle N \rangle$ temos que

$$\bigcup_{\{\bar{1}, \bar{3}\} \subseteq V \subseteq Z_7} \langle V \rangle = \langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{6} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle$$

é fechado em $A_j - A_{j-1}$. Logo $\cup_{l=0}^6 f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{6} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle)$ é fechado em $A_j - A_{j-1}$, pois f^l é homeomorfismo para $l = 0, \dots, 6$. Como o conjunto B pode ser escrito $B = \cup_{l=0}^6 f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle) = A \cup (\cup_{l=0}^6 f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{6} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle))$ temos que B é fechado em $A_j - A_{j-1}$ e conseqüentemente é fechado em $B \cup \langle \bar{1} \rangle$. Desde que $B \cup \langle \bar{1} \rangle$ é um subespaço normal, pois é regular e enumerável o Teorema de Extensão de Tietze nos garante que P_2 pode ser estendida continuamente para uma aplicação $\overline{P_2} : B \cup \langle \bar{1} \rangle \longrightarrow S^1$ tal que $\overline{P_2}(\langle \bar{1} \rangle) \subset \{e^{2d\pi i} ; 0 \leq d \leq \frac{2}{7}\}$. Defina então $P : \cup_{l=0}^6 f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle \cup \langle \bar{1} \rangle) \longrightarrow S^1$ por:

$$P(x) = \begin{cases} \overline{P_2}(x), & \text{se } x \in B \cup \langle \bar{1} \rangle \\ \varphi^l(\overline{P_2}(f^{7-l}(x))), & \text{se } x \in f^l(\langle \bar{1} \rangle) (l = 1, \dots, 6) \end{cases}$$

De maneira análoga ao que foi feito para a aplicação P_2 , podemos mostrar que P é uma aplicação que está bem definida, contínua e equivariante. Portanto, sabendo que $A_j - A_{j-1} = \cup_{l=0}^6 f^l(\langle \bar{1}, \bar{3}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{5} \rangle \cup \langle \bar{1}, \bar{3} \rangle \cup \langle \bar{1} \rangle)$

acabamos de mostrar que existe uma aplicação $P : (A_j - A_{j-1}, f) \longrightarrow (S^1, \varphi)$ equivariante. Logo pelo Lema 3.2.1 e Exemplo 3.1.3 podemos afirmar que $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f) \leq \bar{g}(S^1, \varphi) = 2$. \square

Corolário 5.2.1 *Se M tem base enumerável então $r_2(m, 7) \leq 2(m - 2)$, $\forall m \geq 3$.*

Prova: Se $m \geq 3$, $r_2(m, 7)$ é o maior número pertencente ao conjunto \mathbb{N} tal que existe um par $(M, f) \in N_7$ com $\bar{g}(M, f) = r_2(m, 7)$ e tem a propriedade $K_{m,7}$. Mas para esse par $(M, f) \in N_7$ podemos definir os conjuntos A_j como na Definição 5.2.1 e, além disso, como M tem base enumerável então pelo Teorema acima temos que

$$r_2(m, 7) = \bar{g}(M, f) \leq \sum_{j=3}^m \bar{g}(A_j - A_{j-1}, f) \leq 2(m - 2)$$

\square

No caso de $p = 5$ o Teorema anterior é demonstrado de maneira análoga, ou seja, se um par $(M, f) \in N_5$ tem a propriedade $K_{m,5}$ e M tem base enumerável então $r_2(m, 5) \leq 2(m - 2)$, $\forall m \geq 3$, mas essa estimativa é igual à dada na Observação 5.1.1 .

No caso de um par $(M, f) \in N_3$ ter a propriedade $K_{m,3}$ e M tem base enumerável, pode se mostrar sem maiores dificuldades que $\bar{g}(A_j - A_{j-1}, f) = 1$, $\forall j = 3, \dots, m$, sendo os A_j como na Definição 5.2.1. Logo para esse par temos que $r_2(m, 3) \leq (m - 2)$, $\forall m \geq 3$, mas essa estimativa também é igual á dada na Observação 5.1.1 . Portanto, para $p = 3$ e $p = 5$ a técnica usada por Steinlein e exposta acima para reduzir a estimativa do número $r_2(m, 7)$ quando M tem base enumerável é insuficiente para reduzir a estimativa dos números $r_2(m, 3)$ e $r_2(m, 5)$.

Referências Bibliográficas

- [1] Bredon, G. E., *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press. Inc. (1972).
- [2] Bredon, G. E., *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [3] Husemoller, D., *Fibre Bundles*, 2nded., Graduate Texts in Mathematics 20, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [4] James, I. M., *On category, in the sense of Ljusternik-Schnirelmann*, Topology 17, 331-348, 1978.
- [5] Krasnosel'skiĭ, M. A., *On special coverings of a finite-dimensional sphere*, Doklady Akad. Nauk SSSR 103 (1955), 961-964 (Russian).
- [6] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1998.
- [7] Lusk, E. L. *The mod p Smith index and a generalized Borsuk-Ulam theorem*, Michigan Math. J. 22 (1975), 151-160.
- [8] Ljusternick, L. and Schnirelmann, L., *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*, Actualités Scientifiques et Industrielles, 188, Paris, Hermann et cie, 1934.

- [9] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1975).
- [10] Nagami, K., *Dimension Theory*, Academic Press, New York and London, 1970.
- [11] Rotman, J. J., *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 119, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [12] Schupp, C., *Verallgemeinerungen des Borsuk-Ulamschen Koinzidenzatzes*, Ph. D. Dissertation, University of Munich, 1981.
- [13] Steinlein, H., *Borsuk-Ulam Sätze und Abbildungen mit Kompakten Iterierten*, Habilitationsschrift, University of Munich, 1976.
- [14] Steinlein, H., *Some abstract generalizations of the Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk covering theorem*, Pacific J. Math. 83 (1979), 285-296.
- [15] Steinlein, H., *On the Theorems of Borsuk-Ulam and Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk*, Canad. Math. Bull. Vol. 27 (2), 1984.
- [16] Švarc, A. S., *Some estimates of the genus of a topological space in the sense of Krasnosel'skii*, Usephi Mat. Nauk 12, 209-214, 1957(Russian).
- [17] Švarc, A. S., *The genus of a fiber space*, English translation in Amer. Math. Soc., Translat, II. Ser. 55 , 49-140, 1966.
- [18] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag, New York, 1983. , 49-140, 1966.

- [19] Yang, Chung-Tao, *On theorems of Borsuk-Ulam*, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson, I. Ann. Math. 60, 262-282, 1954.
- [20] Zacheu, Viviane A., *Nilpotência em Espaços de Classes de Homotopia*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática-UFSCar, São Carlos, 1999.