UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Conceito de n-Varifold e EDP

Fernanda Gonçalves de Paula

São Carlos - SP

2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Conceito de n-Varifold e EDP [1]

Fernanda Gonçalves de Paula

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

Março - 2006

[1]Projeto realizado com apoio da FAPESP processo 03/10690-2

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Paula, Fernanda Gonçalves de.
P324cn	O conceito de n-varifold e EDP / Fernanda Gonçalves de Paula. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
	101 p.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.
	1. Análise matemática. 2. Teoria geométrica da medida. 3. Conceito de n-varifold. 4. Equações diferenciais parciais. I. Título.
	CDD: 515 (20ª)

Aos meus pais Hilda e Antônio

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela dádiva da vida.

Ao meu orientador Arnaldo, pelo presente que foi este projeto. Pela confiança, amizade, bom humor e pela preocupação que sempre demonstrou por mim.

Aos meus pais Hilda e Antonio, meus verdadeiros mestres, sem os quais eu não conseguiria chegar até aqui.

Às minhas irmãs Fabiana, Patrícia e Aline, pela amizade, alegria, compreensão e todo o amor.

Aos meus avós Hamilta e Belarmino e à minha tia Iracy, por todo o apoio e por sempre acreditarem em mim.

Ao meu namorado David, meu amor, meu presente dos céus, que mesmo longe sempre se fez tão presente. Por toda a força que me dá, todo o amor, enfim, pelo simples fato de fazer parte da minha vida.

À minha irmãzinha Lala e aos meus queridos Fabíolo, Gildson e Eduardo pela amizade especial.

Aos meus queridos Kenneth, Thais, Danu e Danilo, talvez as pessoas mais especiais que tive o prazer de conhecer em São Carlos, pelos momentos inesquecíveis que compartilhamos e por toda a sinceridade de nossa amizade.

Às minhas tão adoradas amigas Fer Tomé, Caiá, Glau e Karol, que desde a graduação me acompanham e que continuarão a fazer parte de minha história.

Aos amigos Eliza, Ricardo, Cris, Marcela, Márcio e Taísa por todo o companheirismo durante estes dois anos.

Aos professores Waldemar Donizete Bastos por me iniciar na matemática de maneira tão agradável, Neuza Kakuta por todo o incentivo e João Tomazela pela amizade e pelas boas ridadas.

À secretária Irma, por me aguentar e me atender sempre tão prontamente.

À FAPESP, orgão que financiou este projeto.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo detalhado de alguns tópicos da Teoria Geométrica da Medida, dando atenção especial ao conceito de n-varifold e ilustrando seu uso no comportamento assintótico de pontos críticos do funcional energia da teoria de transição de fases de van der Waals-Cahn-Hilliard.

Abstract

The goal of this work is the detailed study of some topics of Geometric Measure Theory, giving special attention to the n-varifold concept and illustrating its use in the asymptotic behavior of critical points of the energy functional for the van der Waals-Cahn-Hilliard theory of phase transitions.

Introdução

O objetivo principal desta dissertação de mestrado consiste no estudo do conceito de n-varifold e a ilustração do uso deste conceito no estudo do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais elíticas.

O conceito de n-varifold faz parte de uma coleção de idéias e resultados matemáticos conhecida como *Teoria Geométrica da Medida*. Esta teoria foi desenvolvida para tentar sanar problemas no cálculo das variações em dimensões e codimensões altas. Trata-se de uma teoria muito geral de superfícies k-dimensionais no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, sem restrições quanto a singularidades ou tipo topológico. A teoria geométrica da medida usa a teoria da medida para generalizar a geometria diferencial.

Este campo tem um "período clássico"de cerca de 1900 até 1960 e um "período moderno"de cerca de 1960 até os dias atuais.

O período clássico foi devotado ao desenvolvimento de uma teoria de integração para conjuntos k-dimensionais em espaços n-dimensionais (k não excede n), especialmente quando estes conjuntos possuírem singularidades essenciais. Este desenvolvimento é indispensável na análise geométrica moderna. Desta maneira que os conjuntos k-retificáveis ficaram bem estabelecidos como domínios naturais de integração usando-se a medida de Hausdorff k-dimensional $\mathcal{H}^k$. Essencialmente, tudo o que é verdade na integração de Lebesgue em espaços euclidianos permanece válido se usarmos a medida de Hausdorff em conjuntos retificáveis. De fato, basta termos em mente as Fórmulas da Área (uma fórmula geral de mudança de variáveis) e da Co-Área (uma forma curvilinear do teorema de Fubini). Não podemos deixar de citar também o importante teorema de estrutura para conjuntos de medida de Hausdorff finita.

Foi no período moderno, entretanto (em particular com os trabalhos de De Giorgi, Federer, Fleming e Reinfenberg) que as novas idéias começaram a ser introduzidas com grande sucesso em dimensões altas. Por este motivo, o ano de 1960 é frequentemente tomado como ponto decisivo da Teoria Geométrica da Medida.

O conceito de n-varifold foi introduzido em 1965 por Fred Almgren em [8]. Estes novos objetos foram denominados varifolds tendo em vista que são substitutos para as variedades (do termo inglês *manifold*) do cálculo variacional (do termo inglês *variational calculus*). Um varifold V tem uma distribuição δV chamada *primeira variação* que reflete, em algum sentido, a curvatura e a fronteira de objetos geométricos bem gerais. Quando este varifold corresponder a uma subvariedade, esta curvatura coincidirá com a curvatura clássica da subvariedade.

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira: no capítulo 1 são feitas algumas preliminares necessárias ao bom desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 2 estuda-se a classe das funções de variação limitada. No capítulo 3 é discutido o conceito de subvariedade e alguns de seus principais resultados para então no capítulo 4 estes resultados serem generalizados agora para conjuntos simplesmente retificáveis. No capítulo 5 é definido o conceito de n-varifold e são discutidas algumas de suas principais propriedades e resultados e finalmente no capítulo 6 é feita uma ilustração do uso deste novo conceito para caracterizar a interface dos pontos críticos do funcional energia na teoria de transição de fases de van der Waals-Cahn-Hilliard.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão estudados alguns tópicos preliminares necessários para o bom desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Noções Básicas

Seja (X, d) um espaço métrico com métrica d.

Definição 1.1 *Uma **medida exterior** é uma função monótona e subaditiva*

$$\mu : 2^X \to [0, \infty]$$

com $\mu(\phi) = 0$.

Será adotada a noção de mensurabilidade de Caratheodory:

Definição 1.2 *Um subconjunto* $A \subset X$ *é dito* μ***- mensurável*** *se:*

$$\mu(S) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A),$$

para todo $S \subset X$.

É claro, pela subaditividade de μ, que para garantir a mensurabilidade de um conjunto é preciso apenas checar a seguinte desigualdade:

$$\mu(S) \geq \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) \qquad (1.1)$$

para todo $S \subset X$ com $\mu(S) < \infty$.

Definição 1.3 *Uma coleção M de subconjuntos de X forma uma σ-**álgebra** se M satisfaz:*

1. $\emptyset, X \in M$;
2. Se $A_1, A_2, ... \in M$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in M$;
3. Se $A \in M$ então $X \setminus A \in M$.

É fácil ver que a coleção S de subconjuntos μ-mensuráveis forma uma σ-álgebra. Além disso, todos os conjuntos de μ-medida nula são trivialmente μ-mensuráveis.

Proposição 1.1 1. *Se $A_1, A_2, ...,$ são subconjuntos μ-mensuráveis de X, disjuntos dois a dois, então:*

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

2. *Se $A_1 \subset A_2 \subset ...,$ são subconjuntos μ-mensuráveis de X, então:*

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$$

3. *Se $A_1 \supset A_2 \supset ...,$ são subconjuntos μ-mensuráveis de X e $\mu(A_1) < \infty$ então:*

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)$$

Definição 1.4 *Uma medida μ é chamada de **regular** se, para cada subconjunto $A \subset X$, existir um subconjunto μ-mensurável $B \supset A$ tal que $\mu(B) = \mu(A)$.*

Para uma medida regular μ, prova-se que a relação

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$$

é válida desde que $A_i \subset A_{i+1}, \forall\, i$, mesmo se os conjuntos A_i não forem μ-mensuráveis.

Definição 1.5 *Uma medida μ em X é dita **Borel-regular** se todos os conjuntos de Borel forem μ-mensuráveis e se, para cada subconjunto $A \subset X$, existir um conjunto de Borel $B \supset A$ tal que $\mu(B) = \mu(A)$.*

Observação 1.1 *Note que a definição acima não implica que* $\mu(B \setminus A) = 0$*, a menos que* A *seja* μ*-mensurável!*

Definição 1.6 *Dado qualquer subconjunto* $A \subset X$ *e qualquer medida* μ *em* X*, define-se uma nova medida* $\mu\lfloor A$ *em* X *por:*

$$(\mu\lfloor A)(Z) \equiv \mu(A \cap Z), \forall\, Z \subset X.$$

É fácil ver que todo subconjunto μ-mensurável é também $\mu\lfloor A$-mensurável, mesmo que A não seja μ-mensurável.

É também fácil ver que $\mu\lfloor A$ é Borel-regular desde que μ seja Borel-regular e A seja μ-mensurável.

O seguinte teorema é particularmente muito usado. Nele, é usada a seguinte notação:

$$d(A, B) \equiv dist(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$$

Teorema 1.1 (Critério de Caratheodory) *Se* μ *é uma medida em* X *tal que*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

sempre que A *e* B *forem subconjuntos de* X *com* $d(A, B) > 0$*, então todos os conjuntos de Borel são* μ*-mensuráveis.*

Demonstração:

Como os conjuntos mensuráveis formam uma σ-álgebra, é suficiente provar que os conjuntos fechados são μ-mensuráveis, ou seja, por (1.1), apenas checar que, se F for fechado, então:

$$\mu(S) \geq \mu(S \setminus F) + \mu(S \cap F) \qquad (1.2)$$

para todo $S \subset X$ com $\mu(S) < \infty$.

Seja então F um conjunto fechado.

Seja $F_j = \left\{ x \in X; dist(x, F_j) < \frac{1}{j} \right\}$. Então,

$$d(S \setminus F_j, S \cap F) > 0$$

e daí

$$\mu(S) \geq \mu((S \setminus F_j) \cup (S \cap F)) = \mu(S \setminus F_j) + \mu(S \cap F)$$

Note que para garantir que (1.2) acontece, basta mostrar que:

$$\lim_{j \to \infty} \mu(S \setminus F_j) = \mu(S \setminus F).$$

Para checar isto, como F é fechado, podemos escrever:

$$S \setminus F = (S \setminus F_j) \cup \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} R_k \right)$$

sendo

$$R_k = \left\{ x \in S; \frac{1}{k+1} < d(x, F) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Mas então, pela subaditividade de μ, tem-se:

$$\mu(S \setminus F_j) \leq \mu(S \setminus F) \leq \mu(S \setminus F_j) + \sum_{k=j}^{\infty} \mu(R_k)$$

e daí tem-se:

$$\lim_{j \to \infty} \mu(S \setminus F_j) = \mu(S \setminus F),$$

apenas do fato que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) < \infty$. Para verificar isto, note que $d(R_i, R_j) > 0$ se $j \geq i + 2$ e daí por hipótese do teorema e por indução sobre N tem-se, para cada inteiro $N \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k} \right) \leq \mu(S) < \infty$$

e

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k-1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k-1} \right) \leq \mu(S) < \infty$$

As seguintes propriedades básicas de regularidade de medidas Borel-regular são grande importância:

Teorema 1.2 *Suponhamos que μ seja uma medida Borel-regular em X e que $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, sendo $\mu(V_j) < \infty$ com V_j aberto para cada $j = 1, 2, ...$ Então:*

(1) $\mu(A) = \inf\{\mu(U);\ U$ é *aberto*$, U \supset A\}$, para cada subconjunto $A \subset X$ e

(2) $\mu(A) = \sup\{\mu(F);\ F$ é *fechado*$, F \subset A\}$, para cada subconjunto $A \subset X$ μ-mensurável.

Demonstração: Note inicialmente que (2) segue de (1). Para provar (1) assuma que $\mu(X) < \infty$. Pela regularidade de Borel da medida μ, é suficiente mostrar (1) para o caso em que A é um conjunto de Borel.

Seja então $\mathcal{A}$= {conjuntos de Borel A tais que (1) acontece}. Trivialmente, $\mathcal{A}$ contém todos os conjuntos abertos e é fácil checar que $\mathcal{A}$ é fechado sobre uniões e interseções contáveis, em particular, $\mathcal{A}$ deve conter também os conjuntos fechados, já que qualquer conjunto fechado em X pode ser escrito como uma interseção contável de conjuntos abertos.

Daí, se $\tilde{A} = \{A \in \mathcal{A}; X \setminus A \in \mathcal{A}\}$, então $\tilde{A}$ é uma σ-álgebra contendo todos os conjuntos de Borel. Então $\mathcal{A}$ contém todos os conjuntos de Borel e (1) está provado no caso em que $\mu(X) < \infty$.

No caso geral em que $\mu(X) \leq \infty$, é ainda suficiente provar (1) quando A é um conjunto de Borel.

Para cada $j = 1, 2, ...$ basta aplicar o caso anterior a cada medida $\mu\lfloor V_j$. Daí, para cada $\epsilon > 0$, é possível selecionar um aberto $U_j \supset A$ tal que :

$$\mu\big([U_j \cap V_j] \setminus [A \cap V_j]\big) < \frac{\epsilon}{2^j}$$

e daí

$$\mu\big([U_j \cap V_j] \setminus A\big) < \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Somando em j, obtêm-se:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \cap V_j) \setminus A) < \epsilon.$$

Como $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(U_j \cap V_j)$ é um aberto e contém $\mathcal{A}$, a prova do teorema está completa.

Observação 1.2 *No caso em que o espaço métrico X for localmente compacto e separável, a condição $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j$ com V_j aberto e $\mu(V_j) < \infty$ é automaticamente satisfeita, já que $\mu(K) < \infty$ para cada compacto K. Além disso, neste caso:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K); K \ \text{ é } \ compacto, K \subset A\}$$

para cada subconjunto $A \subset X$, μ-mensurável com $\mu(A) < \infty$, já que sobre as condições dadas acima em X , qualquer conjunto fechado F pode ser escrito como união de compactos $F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Por fim, serão enunciados dois resultados clássicos da teoria da medida:

Lema 1.1 ***(Lema de Fatou)****Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções integráveis não negativas. Então:*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Demonstração: Ver [2], pág 19.

Teorema 1.3 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)****Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções mensuráveis tais que $|f_n| \leq g$, sendo g integrável e $f \equiv$ $\lim f_n$ qtp. Então, f é integrável e*

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Demonstração: Ver [2], pág. 20.

1.2 Teoremas de Cobertura

Nesta seção, serão enunciados dois importantes teoremas de cobertura: o Teorema da Cobertura de Besicovitch e o Teorema da Cobertura de Vitali. O primeiro vai se mostrar mais poderoso na prática que o segundo, já que pode ser aplicado a qualquer medida de Borel finita.

NOTAÇÃO: Seja B uma bola fechada em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\hat{B}$ a bola concêntrica a B e com raio 5 vezes o raio de B.

Definição 1.7 ***1.*** *Uma coleção $\mathcal{B}$ de bolas fechadas em $\mathbb{R}^n$ é uma **cobertura** de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se:*

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B;$$

2. *$\mathcal{B}$ é uma **cobertura fina** de A se para cada $x \in A$ e cada $\epsilon > 0$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $diamB < \epsilon$.*

Teorema 1.4 ***Teorema da Cobertura de Vitali*** *Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de bolas fechadas não degeneradas em X com*

$$R \equiv \sup\{diamB; B \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

Então, existe uma subcoleção $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ de elementos disjuntos 2 a 2 tais que:

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \hat{B},$$

ou seja, para cada $B \in \mathcal{B}$, $\exists\, S \in \mathcal{B}'$ tal que $S \cap B \neq \emptyset$ e $B \subset \hat{S}$.

Demonstração:

Para cada $j = 1, 2, 3, ...$, defina o conjunto:

$$\mathcal{B}_j = \left\{ B \in \mathcal{B}; \frac{R}{2^j} < diamB < \frac{R}{2^{j-1}} \right\}.$$

Definimos $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{B}_j$ da seguinte maneira:

(a) Seja $\mathcal{S}_1$ qualquer coleção maximal de bolas disjuntas em $\mathcal{B}_1$.

(b) Assumindo que $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_{k-1}$ foram escolhidos, escolha $\mathcal{S}_k$ como sendo qualquer coleção maximal disjunta de:

$$\left\{ B \in \mathcal{B}_k \mid B \cap B' = \emptyset \, para\ todo\ B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} S_j \right\}.$$

Finalmente defina $\mathcal{B}' \equiv \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{S}_j$. Claramente $\mathcal{B}'$ é uma coleção de bolas disjuntas e $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Agora fixe $B \in \mathcal{B}$. Então existe um índice j tal que $B \in \mathcal{B}_j$. Pela maximalidade de $\mathcal{S}_j$, existe uma bola $B' \in \bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{S}_k$ com $B \cap B' \neq \emptyset$.

Mas

$$diam B' \geq \frac{D}{2^j}$$

e

$$diam B \leq \frac{D}{2^{j-1}}$$

e portanto $diam B \leq 2 diam B'$.

Assim, $B \subset \hat{B}'$, o que conclui a prova do teorema.

Corolário 1.1 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ como no teorema anterior e $A \subset X$ coberto de modo fino por $\mathcal{B}$. Então:*

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}' \setminus (\bigcup_{j=1}^{N} B_j)} \hat{B}$$

para qualquer subcoleção finita $\{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ de $\mathcal{B}'$.

Demonstração:

Seja $\{B_1, B_2, \ldots, B_N\} \subset \mathcal{B}'$ e $x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j$. Como $\mathcal{B}$ cobre A de modo fino e $X \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j$ é aberto, é possível encontrar $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap (\bigcup_{j=1}^{N} B_j) = \emptyset$ e $x \in B$. Para este $B \in \mathcal{B}$, pelo teorema anterior pode-se escolher $S \in \mathcal{B}'$ com $S \cap B \neq \emptyset$ e $B \subset \hat{S}$.

Claramente $S \cap B_j = \emptyset$, para todo $j = 1, 2, \ldots, N$ e portanto

$$x \in \bigcup_{S \in \mathcal{B}' \setminus (\bigcup_{j=1}^{N}) B_j} \hat{S}$$

.

Corolário 1.2 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\delta > 0$. Então existe uma família de bolas fechadas $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$, disjuntas duas a duas tais que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset U$, $diam B_j < \delta$, $\forall\, j$ e $\mathcal{L}^n(U \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = 0$.*

Demonstração:

1. Fixe $1-\dfrac{1}{5^n}<\theta<1$.

   Suponha inicialmente $\mathcal{L}^n(U)<\infty$.

2. *Afirmação:* Existe uma coleção finita $\{B_i\}_{i=1}^{M_1}$ de bolas fechadas e disjuntas em U tais que $diam B_i<\delta$, $i=1,\ldots,M_1$ e

$$\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{i=1}^{M_1}B_i\right)\leq\theta\mathcal{L}^n(U). \qquad (*)$$

   Prova da Afirmação: Seja $\mathcal{B}_1\equiv\{B;B\subset U\; e\; diam B<\delta\}$. Pelo Teorema 1.4 da Cobertura de Vitali, existe uma coleção contável e disjunta $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{B}_1$ tal que:

$$U\subset\bigcup_{B\in\mathcal{S}_1}\hat{B}.$$

   Então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(U)&\leq\sum_{B\in\mathcal{S}_1}\mathcal{L}^n(\hat{B})\\ &=5^n\sum_{B\in\mathcal{S}_1}\mathcal{L}^n(B)\\ &5^n\mathcal{L}^n(\bigcup_{B\in\mathcal{S}_1}B).\end{aligned}$$

   Então

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{B\in\mathcal{S}_1}B\right)\geq\frac{1}{5^n}\mathcal{L}^n(U),$$

   e daí

$$\mathcal{L}^n\left(U\setminus\bigcup_{B\in\mathcal{S}_1}B\right)\leq\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\mathcal{L}^n(U)$$

   Como $\mathcal{S}_1$ é contável, existem bolas $B_1,\ldots,B_{M_1}$ em $\mathcal{S}_1$ satisfazendo $(*)$.

3. Agora sejam:

$$U_2\equiv U\setminus\bigcup_{i=1}^{M_1}B_i,$$

$$\mathcal{B}_2 \equiv \{B; B \subset U_2 \; e \; diamB < \delta\},$$

e como acima, acha-se uma quantidade finita de bolas disjuntas $B_{M_1+1}, \ldots, B_{M_2}$ em $\mathcal{B}_2$ tais que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n\Big(U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i\Big) &= \mathcal{L}^n\Big(U_2 \setminus \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i\Big)\\ &\leq \theta \mathcal{L}^n(U_2)\\ &\leq \theta^2 \mathcal{L}^n(U).\end{aligned}$$

4. Continuando este processo até obter uma coleção de bolas disjuntas tais que

$$\mathcal{L}^n(U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_k} B_i) \leq \theta^k \mathcal{L}^n(U) \; (k = 1, \ldots).$$

Como $\theta^k \to 0$, o corolário está provado se $\mathcal{L}^n(U) < \infty$. Se $\mathcal{L}^n(U) = \infty$, o argumento acima aplicado aos conjuntos:

$$U_m \equiv \{x \in U \text{ tais que } \; m < |x| < m+1\} \; (m = 0, 1, \ldots)$$

garante o resultado desejado.

Teorema 1.5 ***Teorema da Cobertura de Besicovich*** *Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de bolas fechadas em $\mathbb{R}^n$, A o conjunto dos centros de $\mathcal{B}$ e suponha que o conjunto de todos os raios de bolas de $\mathcal{B}$ é um conjunto limitado. Então, existem subcoleções $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N \subset \mathcal{B}$, $(N = N(n))$ tais que cada $\mathcal{B}_j$ é uma coleção de elementos disjuntos 2 a 2 (ou vazia) e a união $\bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{B}_j$ ainda cobre A:*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} \Big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} B \Big).$$

Demonstração: Ver [2], página 30.

É importante reforçar que N é uma constante fixa que depende apenas de n.

1.3 Medidas de Hausdorff

A medida de Lebesgue n-dimensional $\mathcal{L}^n$ definida em $\mathbb{R}^n$ é classicamente conhecida pela propriedade de ser Borel-regular, invariante por translação e pelo fato da medida do cubo unitário $[0,1]^n$ ser igual a 1. Infelizmente, para subconjuntos "m-dimensionais"de $\mathbb{R}^n$, $(m < n)$ é mais difícil atribuir uma medida m-dimensional. A área m-dimensional de uma aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ é classicamente definida como a integral do Jacobiano $J_m f$ sobre D. Daí, a área de uma subvariedade m-dimensional M de $\mathbb{R}^n$ (ver definição de subvariedade no próximo capítulo) é então definida pelo cálculo das porções parametrizadas de M, provando-se que a área independe da parametrização escolhida.

Em 1918, F. Hausdorff introduziu uma medida m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ que dá a mesma área para subvariedades, mas é definida para todos os conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Esta é a medida básica usada na teoria de integração sobre superfícies m-dimensionais de $\mathbb{R}^n$ que possam ter singularidades.

Além disso, a medida $\mathcal{H}^m$ de uma subvariedade m-dimensional suave de $\mathbb{R}^m$ coincide com qualquer outra definição razoável de m-área (por exemplo a medida de Lebesgue, a medida integralgeométrica, entre outras).

Inicialmente serão definidas as medidas de Hausdorff $\mathcal{H}^m$ em termos dos diâmetros de coberturas convenientes. Em seguida, serão discutidas as propriedades básicas das medidas de Hausdorff e um importante resultado provado nessa primeira etapa é que *em* $\mathbb{R}^n$*, a medida de Hausdorff n-dimensional coincide com a medida de Lebesgue n-dimensional.*

Um fato relevante concernente ao estudo da medida de Hausdorff, reside na sua generalidade no sentido de continuarem válidos os principais resultados relativos a densidades n-dimensionais e o modo no qual estes últimos relatam algumas relações entre medidas quaisquer e medidas de Hausdorff. Este assunto será tratado no próximo tópico.

Além disso, as medidas de Hausdorff têm a vantagem de acompanhar e descrever melhor a geometria dos conjuntos.

Definição 1.8 *Dado um número real m não-negativo, define-se a* ***medida de Hausdorff m-dimensional*** *de* $A \subset X$ *por:*

$$\mathcal{H}^m(A) \equiv \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^m_\delta(A)$$

e para cada $\delta > 0$, $\mathcal{H}^m_\delta(A)$ *é definido por:*

$$\mathcal{H}^m_\delta(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{diam C_j}{2} \right)^m ;\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \ \ e \ \ diam C_j < \delta \right\}.$$

sendo ω_m *o volume da bola unitária em* $\mathbb{R}^m$ *no caso em que m é um inteiro positivo e uma constante positiva conveniente caso contrário.*

O ínfimo é tomado sobre todas as coleções contáveis $C_1, C_2, \ldots$ de subconjuntos de X tais que $diam C_j < \delta$ e $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$.

Afirmação 1.1 $\mathcal{H}^m_\delta(A)$ *é uma função decrescente em* δ.

De fato, dado $\delta > 0$, defina

$$U_\delta = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{diam C_j}{2} \right)^m ;\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \ \ e \ \ diam C_j < \delta \right\}$$

Seja agora $\delta' < \delta$. Então:

$$U_{\delta'} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{diam C_j}{2} \right)^m ;\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \ \ e \ \ diam C_j < \delta' \right\}.$$

Claramente $U_{\delta'} \subset U_\delta$.

Logo, é possível concluir que $\mathcal{H}^m_{\delta'}(A) \geq \mathcal{H}^m_\delta(A)$ e portanto a afirmação é verdadeira.

Esta afirmação garante que o limite na definição acima sempre existe, embora possa ser ∞. Além disso,

$$\mathcal{H}^m(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^m_\delta(A).$$

Então, é possível concluir que:

$$\mathcal{H}^m(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^m_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^m_\delta(A)$$

Observação 1.3 *(1) Como $diam C_j = diam \overline{C_j}$, a hipótese que C_j seja fechado pode ser adicionada na definição acima sem mudar o valor de $\mathcal{H}^m(A)$. De fato, para qualquer $\epsilon > 0$, é possível achar um aberto $U_j \supset C_j$ com $diam U_j < diam C_j + \dfrac{\epsilon}{2^j}$. Também pode-se tomar C_j aberto, exceto no caso $m = 0$.*

(2) Evidentemente $\mathcal{H}^m_\delta(A) < \infty$, $\forall\, m \geq 0$, $\delta > 0$ no caso em que A é um subconjunto totalmente limitado de X.

Segue facilmente da definição de $\mathcal{H}^m_\delta$ que:

$\mathcal{H}^m_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^m_\delta(A) + \mathcal{H}^m_\delta(B)$ se $d(A, B) > 2\delta$,

e daí

$\mathcal{H}^m(A \cup B) = \mathcal{H}^m(A) + \mathcal{H}^m(B)$

sempre que $d(A, B) > 0$.

Então pelo critério de Caratheodory, tem-se que todos os conjuntos de Borel são $\mathcal{H}^m$-mensuráveis.

Segue disso e da observação (1) anterior que cada medida $\mathcal{H}^m$ é Borel-regular.

Em geral, não é verdade que os conjuntos de Borel são $\mathcal{H}^m_\delta$-mensuráveis, para $\delta > 0$. Por exemplo, se $n \geq 2$, então o espaço $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n > 0\}$ não é $\mathcal{H}^1_\delta$-mensurável!

Mais tarde, será mostrado que para cada inteiro $n \geq 1$, $\mathcal{H}^n$ coincide com a definição usual de medida de volume n-dimensional em uma subvariedade $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^{n+k}$, $k \geq 0$.

Inicialmente será provado que $\mathcal{H}^n$ e $\mathcal{L}^n$, a **medida de Lebesgue n-dimensional**, coincidem em $\mathbb{R}^n$.

Lembrando a definição de $\mathcal{L}^n$:

- Se $\mathcal{K}$ denota a coleção de todos os cubos n-dimensionais I da forma:

  $I = (a_1, a_1 + l) \times (a_2, a_2 + l) \times \ldots \times (a_n, a_n + l)$, sendo $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, $l > 0$ e se $|I| =$ volume de $I = l^n$, então:

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \sum_j |I_j|,$$

  sendo o ínfimo tomado sobre todas as coleções contáveis (ou finitas) $\{I_1, I_2, \ldots\} \subset \mathcal{K}$ com $A \subset \bigcup_j I_j$.

  $\mathcal{L}^n$ é unicamente caracterizada dentre as medidas em $\mathbb{R}^n$ pelas propriedades:

- $\mathcal{L}^n(I) = |I|$, $\forall\, I \in \mathcal{K}$;

- $\mathcal{L}^n(A) = \inf\,\{\mathcal{L}^n(U); U \supset A \;\text{ é }\; aberto\}$, $\forall\, A \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.6 $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n_\delta(A),\;\; \forall\, A \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\delta > 0$.

Demonstração:

Mostremos inicialmente que $\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$, $\forall\, \delta > 0,\; A \subset \mathbb{R}^n$.

Seja $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente. Escolha $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \;\; e \;\; \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon.$$

Pelo corolário 1.2 para cada I_k podemos tomar uma coleção de bolas B_j fechadas $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$, disjuntas duas a duas tais que $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \subset A$, $diam B_j < \delta$, $\forall\, j$ e $\mathcal{L}^n(A \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) = 0$.

Como para cada $Z \subset \mathbb{R}^n$, vale:

$$\mathcal{L}^n(Z) = 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^n_\delta(Z) = 0,$$

temos:

$$\mathcal{H}^n_\delta(I_k) = \mathcal{H}^n_\delta\biggl(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\biggr) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n \biggl(\frac{2\rho_j}{2}\biggr)^n = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n (\rho_j)^n =$$

$$= \mathcal{L}^n\biggl(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\biggr) = \mathcal{L}^n(I_k) = |I_k|$$

sendo ρ_j o raio da bola B_j e daí,

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_k I_k\right) \leq \sum_k \mathcal{H}^n_\delta(I_k) \leq \sum_k |I_k| \leq$$

$$\leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon,\ \forall\ \epsilon > 0.$$

Daí, fazendo $\epsilon \to 0$, temos provado que:

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \mathcal{L}^n(A),\ \forall\, \delta > 0,\ A \subset \mathbb{R}^n.$$

Para provarmos a desigualdade contrária, $\mathcal{H}^n_\delta(A) \geq \mathcal{L}^n(A)$, $\forall\, \delta > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$, precisaremos da desigualdade :

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \omega_n \left(\frac{diam(A)}{2}\right)^n$$

conhecida como *desigualdade isodiamétrica* (ver [2], página 69).

Notemos que, $\forall\, \{C_j\}_j$ com $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j$, temos:

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n \left(\frac{diam C_j}{2}\right)^n,$$

e daí, tomando o ínfimo sobre todas as coleções $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ tais que $diam C_j < \delta$ e $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j$, obtemos a desigualdade desejada:

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \geq \mathcal{L}^n(A),\ \forall\, \delta > 0, A \subset \mathbb{R}^n.$$

Daí, podemos concluir que $\mathcal{H}^n_\delta(A) = \mathcal{L}^n(A)$, $\forall\, A \subset \mathbb{R}^n$, $\forall\, \delta > 0$ e finalmente,

$$\mathcal{H}^n(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^n_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A).$$

1.4 Densidades

Neste tópico serão introduzidas as noções de *densidade superior e densidade inferior n-dimensional* de uma medida num conjunto arbitrário, num ponto qualquer. A noção de densidade de medidas atualmente generaliza a noção de densidade de conjuntos.

O intuito principal será, a partir de informações apropriadas sobre a densidade superior n-dimensional de uma medida, conseguir conecções entre esta medida e a medida de Hausdorff n-dimensional.

Inicialmente será introduzida a noção de densidade n-dimensional de uma medida μ em X.

Definição 1.9 *Para qualquer medida μ em X, qualquer subconjunto $A \subset X$ e qualquer ponto $x \in X$, definem-se as* ***densidades n-dimensionais superior e inferior*** *por:*

$$\theta^{*n}(\mu, A, x) \equiv \limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mu(A \cap B_\rho(x))}{\omega_n \rho_n} \ ;$$

$$\theta^{n}_{*}(\mu, A, x) \equiv \liminf_{\rho \to 0^+} \frac{\mu(A \cap B_\rho(x))}{\omega_n \rho_n}$$

sendo $B_\rho(x)$ a bola fechada.

No caso $A = X$, simplesmente escrevemos $\theta^{*n}(\mu, x)$ e $\theta^{n}_{*}(\mu, x)$ e daí

$$\theta^{*n}(\mu, A, x) = \theta^{*n}(\mu \lfloor A, x) \ ,$$

$$\theta^{n}_{*}(\mu, A, x) = \theta^{n}_{*}(\mu \lfloor A, x).$$

Observação 1.4 *É fácil ver que se todos os conjuntos de Borel são μ-mensuráveis, então $\mu(A \cap B_\rho(x)) \geq \limsup_{y \to x} \mu(A \cap B_\rho(y))$ para cada ρ fixo e daí $\mu(A \cap B_\rho(x))$ é uma função Borel mensurável de x, para cada ρ fixo.*

Note que para isto acontecer não é necessário que A seja mensurável.

De fato, para cada ρ fixo e todo $h > 0$, definamos

$$A_h = \{\mu(A \cap B_\rho(y)); 0 \leq |y - x| < h\}.$$

Como $\mu(A \cap B_\rho(x) \in A_h$,$\forall$ $h > 0$, temos:

$$\sup_y A_h \geq \mu(A \cap B_\rho(x)) \text{ ,} \forall \ h > 0$$

e daí

$$\inf_{h>0}\{\sup_y A_h\} \leq \mu(A \cap B_\rho(x)).$$

Assim concluímos que, para cada $\rho > 0$ fixo, vale:

$$\mu(A \cap B_\rho(x)) \geq \limsup_{y \to x} \mu(A \cap B_\rho(y)).$$

Se $\theta^{*n}(\mu, A, x) = \theta^n_*(\mu, A, x)$, então seu valor comum será denotado por $\theta^n(\mu, A, x)$.

Informações apropriadas sobre a densidade superior nos fornece conexões entre μ e $\mathcal{H}^n$. Mais especificamente, temos:

Teorema 1.7 *Seja μ uma medida Borel-regular em X e $t \geq 0$*

(1) Se $A_1 \subset A_2 \subset X$ e $\theta^{*n}(\mu, A_2, x) \geq t$, $\forall$ $x \in A_1$, então:

$$t\mathcal{H}^n(A_1) \leq \mu(A_2);$$

(2) Se $A \subset X$ e $\theta^{*n}(\mu, A, x) \leq t$, $\forall$ $x \in A$, então:

$$\mu(A) \leq 2^n t\mathcal{H}^n(A).$$

Um caso importante de (1) é quando $A_1 = A_2$. Note que não assumimos A_1, A_2 ou A μ-mensuráveis.

Demonstração: (1) Queremos provar que, quando $A_1 \subset A_2 \subset X$ e $\theta^{*n}(\mu, A_2, x) \geq t$, $\forall x \in A_1$, $t \geq 0$, então:

$$t\mathcal{H}^n(A_1) \leq \mu(A_2).$$

Os casos em que $t = 0$ e $\mu(A_2) = \infty$ são triviais. Suponhamos então $t > 0$ e $\mu(A_2) < \infty$. Podemos também supor a desigualdade estrita: $\theta^{*n}(\mu, A_2, x) > t$, $\forall x \in A_1$, já que para obter a conclusão de (1) para t igual a um dado $t_1 > 0$, é claramente suficiente prová-lo para cada $t < t_1$.

Para cada $\delta > 0$, seja $\mathcal{B}$ (dependendo de δ) a coleção:

$$\mathcal{B} = \{B_\rho(x) \ (bolas \ \ fechadas) \ ; \ x \in A_1, \ 0 < \rho < \delta/2 \ \ e \ \ \mu(A_2 \cap B_\rho(x)) \geq t\omega_n\rho^n\}$$

Evidentemente $\mathcal{B}$ cobre A_1 de modo fino e portanto, pelo Teorema da Cobertura de Vitali existe uma subcoleção disjunta $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que para cada $B \in \mathcal{B}$, $\exists\, S \in \mathcal{B}'$ tal que $S \cap B \neq \emptyset$ e $B \subset \hat{S}$.

Como $\mu(A_2 \cap B) > 0$ para cada $B \in \mathcal{B}$ (já que $\mathcal{B}$ cobre A_1 e $A_1 \subset A_2$) e como $\mu(A_2) < \infty$, segue que $\mathcal{B}'$ é uma coleção contável $\{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$ e pelo corolário (1.1) do terorema da cobertura de Vitali, temos:

$$A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j \subset \bigcup_{j=N+1}^{\infty} \hat{B}_j, \quad \forall\, N \geq 1$$

e daí $A_1 \subset (\bigcup_{j=1}^{N} B_j) \cap (\bigcup_{j=N+1}^{\infty} \hat{B}_j)$, $\quad \forall\, N \geq 1$ e pela definição de $\mathcal{H}^n_\delta$, temos:

$$\mathcal{H}^n_{5\delta}(A_1) \leq \sum_{j=1}^{N} \omega_n \rho_j^n + 5^n \sum_{j=N+1}^{\infty} \omega_n \rho_j^n,$$

sendo $\rho_j = \dfrac{diam B_j}{2}$.

Como $B_j \in \mathcal{B}$, $\forall j$, temos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega_n \rho_j^n \leq t^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_2 \cap B_j) = t^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \lfloor A_2)(B_j) =$$

$$= t^{-1}(\mu \lfloor A_2)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq t^{-1}\mu(A_2) < \infty.$$

Fazendo $N \to \infty$, obtemos: $\mathcal{H}^n_{5\delta}(A_1) \leq t^{-1}\mu(A_2)$ e fazendo $\delta \to 0^+$, obtemos:

$$t\mathcal{H}^n(A_1) \leq \mu(A_2)$$

como queríamos mostrar.

(2) Queremos provar que, se $A \subset X$ e $\theta^{*n}(\mu, A, x) \leq t$, $\forall x \in A$, então

$$\mu(A) \leq 2^n t \mathcal{H}^n(A).$$

Podemos assumir que $\theta^{*n}(\mu, A, x) < t$, $\forall x \in A$, já que para provarmos a conclusão de (2) para um dado $t = t_1 > 0$ é claramente suficiente prová-lo para cada $t > t_1$.

Daí, se

$$A_k = \{x \in A; \mu(A \cap B_\rho(x)) \leq t\omega_n \rho^n, \forall\ 0 < \rho < 1/k\},$$

então $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $A_{k+1} \subset A_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots$.

Os $A_k{}'s$ não são necessariamente μ-mensuráveis, mas pela regularidade de μ, temos $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$.

Seja $0 < \delta < 1/2k$ e seja $\{C_1, C_2, \ldots\}$ qualquer cobertura contável de A_k com $diam C_j < \delta$ e $C_j \cap A_k \neq \emptyset$, $\forall\ j$.

Para cada j, podemos escolher $x_j \in A_k$ tal que $B_{2\rho_j}(x_j) \supset C_j$, sendo $\rho_j = \dfrac{diam C_j}{2}$.

Daí, como $2\rho_j < \dfrac{1}{k}$, temos pela definição de A_k:

$$\mu(C_j) \leq \mu(B_{2\rho_j}(x_j)) \leq 2^n t \omega_n \rho_j^n$$

e daí

$$\mu(A_k) \leq 2^n t \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n \rho_j^n = 2^n t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{diam C_j}{2}^n \omega_n.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as coberturas $\{C_j\}$ de A_k, temos $\mu(A_k) \leq 2^n t \mathcal{H}^n_\delta(A_k)$ e fazendo $\delta \to 0^+$, $\mu(A_k) \leq 2^n t \mathcal{H}^n(A_k)$ e como isto vale $\forall\ k \in \mathbb{N}$, fazendo $k \to \infty$, obtemos:

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq 2^n t \mathcal{H}^n(A_k)$$

Como corolário do teorema 1.7 (1) acima, podemos provar o seguinte:

Teorema 1.8 *Se μ é uma medida Borel-regular, se A é um subconjunto μ-mensurável de X e se $\mu(A) < \infty$, então*

$$\theta^{*n}(\mu, A, x) = 0$$

qtp($\mathcal{H}^n$) para $x \in X \setminus A$.

Note a importância do caso $\mu = \mathcal{H}^n$.

Demonstração: Para cada $t > 0$, seja

$$C_t = \{x \in X \setminus A; \theta^{*n}(\mu, A, x) \geq t\}$$

Suponhamos por absurdo que $\mathcal{H}^n(C_t) > 0$. Então podemos achar, pelo teorema 1.2 (2) (já que $\mathcal{H}^n$ é Borel-regular) um conjunto fechado $E \subset A$ tal que:

$$(1) \qquad \mu(A \setminus E) < \frac{t\mathcal{H}^n(C_t)}{\epsilon}$$

Como $X \setminus E$ é aberto e $C_t \subset (X \setminus A) \subset (X \setminus E)$, temos:

$$\theta^{*n}(\mu, A \cap (X \setminus E), x) = \theta^{*n}(\mu, A, x) \geq t, \ \forall\, x \in C_t.$$

Daí, aplicando o teorema 1.7 (1) para $\mu\lfloor A$, C_t e $X \setminus E$ no lugar de μ, A_1 e A_2, obtemos:

$$t\mathcal{H}^n(C_t) \leq (\mu\lfloor A)(X \setminus E) = \mu(A \cap (X \setminus E)) = \mu(A \setminus E)$$

e portanto $\mu(A \setminus E) \geq t\mathcal{H}^n(C_t)$ ($\rightarrow\leftarrow$) absurdo pois contradiz (1).

Logo, $\mathcal{H}^n(C_t) = 0$, $\forall\, t > 0$. Em particular,

$$\mathcal{H}^n(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{1/k}) = 0$$

e daí

$$\theta^{*n}(\mu, A, x) = 0 \ \ qtp(\mathcal{H}^n)$$

para $x \in X \setminus A$.

Temos assim o resultado desejado.

1.5 Medidas de Radon

Aqui, estudamos a teoria básica das *medidas de Radon*. Uma medida é dita de Radon quando a mesma é Borel regular e finita em subconjuntos compactos. A finitude das medidas de Radon em subconjuntos compactos é o que torna possível integrar funções contínuas com suporte compacto. Se o espaço de chegada destas funções for um espaço de Hilbert munido de um produto interno (,) então vale o importante *Teorema da Representação de Riesz*, que nos permite identificar, a cada funcional linear definido no espaço das funções descritas acima, uma medida de Radon.

Além disto, também discutimos um pouco da teoria de diferenciação de medidas e provamos um resultado análogo ao teorema fundamental do cálculo, agora para medidas.

Em toda esta seção admitiremos que X é um espaço métrico localmente compacto e separável.

Definição 1.10 *Diremos que μ é* ***medida de Radon em X*** *se μ for Borel-regular e finita em subconjuntos compactos de X.*

Notemos que tal medida automaticamente possui as seguintes propriedades:

- $\mu(A) = inf\{\mu(U);$ U é aberto e $U \supset A\}$, $\forall A \subset X$;
- $\mu(A) = sup\{\mu(K);$ K é compacto e $K \subset A\}$, $\forall A \subset X$ μ-mensurável.

De fato, se H é um espaço de Hilbert com produto interno (,) e se $\mathcal{C}_c^0(X, H)$ denota o espaço das funções contínuas de Xem H com suporte compacto, então associamos a cada medida de Radon μ e a cada função μ-mensurável $\nu : X \longrightarrow H$, satisfazendo $|\nu| = 1$ qtp(μ), um funcional linear $L : \mathcal{C}_c^0(X, H) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$L(f) = \int_X (f, \nu) d\mu.$$

O seguinte "Teorema da Representação de Riesz"mostra que todo funcional linear $L : \mathcal{C}_c^0(X, H) \longrightarrow \mathbb{R}$ é obtido como acima, desde que

$$(*) \quad sup\{L(f); f \in \mathcal{C}_c^0(X, H), |f| \leq 1, supp(f) \subset K\} < \infty$$

$\forall\ K \subset X$ compacto.

Teorema 1.9 ***(Teorema da Representação de Riesz)*** *Seja L um funcional linear qualquer em $\mathcal{C}_c^0(X,H)$ satisfazendo (*) acima. Então, existe uma medida μ em X e uma função μ-mensurável $\nu : X \longrightarrow H$ tais que $|\nu(x)| = 1$ qtp(μ) para $x \in X$ e*

$$L(f) = \int_X (f,\nu)d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(X,H)$$

Observação 1.5 *1. Notemos que:*

$$sup\{L(f); f \in \mathcal{C}_c^0(X,H), |f| \leq 1, supp(f) \subset V\} = \mu(V),$$

*$\forall\ V \subset X$ aberto. Por esta razão, a medida μ é chamada de **medida variação total** associada ao funcional L.*

2. Note que no caso $H = \mathbb{R}$, o teorema garante que o funcional lineal L pode ser representado por:

$$L(f) = \int_X f\nu d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(X,H)$$

com $\nu(x) = \pm 1$ qtp(μ) para $x \in X$. No caso especial em que L é não-negativo, isto é, $L(f) \geq 0$ se $f \geq 0$, então $\nu \equiv 1$ e daí o teorema garante que neste caso:

$$L(f) = \int_X f d\mu.$$

Assim, podemos identificar uma medida de Radon em X com um funcional linear não negativo em $\mathcal{C}_c^0(X,\mathbb{R})$.

Agora se $U \subset X$ é um aberto e $\overline{U}$ é compacto, denotaremos por L_U^+ o conjunto dos funcionais lineares limitados com valores em $\mathbb{R}$ definidos em $\mathcal{C}_U(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas com $supp(f) \subset U\}$, os quais são não-negativos em $\mathcal{C}_U^+(X) = \{f \in \mathcal{C}_U(X); f \geq 0\}$.

O teorema de Banach-Alaoglu nos diz que $\{\lambda \in L_U^+; ||\lambda|| < 1\}$ é fracamente compacto, isto é, dada uma sequência $\{\lambda_k\} \subset L_U^+$ com $\sup\limits_{k\geq 1} ||\lambda_k|| < \infty$, podemos achar uma subsequência $\{\lambda_{k'}\}$ e $\lambda \in L_U^+$ tais que $\lim \lambda_{k'}(f) = \lambda(f)$ para cada $f \in \mathcal{C}_U^+(X)$ fixa. Usando o teorema da Representação de Riesz (e em particular a observação (2)) junto com uma representação de X por uma sequência crescente de abertos $\{U_i\}$ com $\overline{U_i}$ compacto para todo i, evidentemente isto implicará no seguinte resultado a respeito de sequências de medidas de Radon em X:

Teorema 1.10 *Suponha $\{\mu_k\}$ uma sequência de medidas de Radon em X com $\sup_{k\geq 1} \mu_k(U) < \infty$, $\forall\, U \subset X$ aberto com $\overline{U}$ compacto. Então, existe uma subsequência $\{\mu_{k'}\}$ que converge para uma medida de Radon μ em X no seguinte sentido: $\lim \mu_{k'}(f) = \mu(f)$ para cada $f \in \mathcal{C}^0_c(X)$, sendo $\mathcal{C}^0_c(X) = \{f; f$ é uma função contínua tomando valores reais e com suporte compacto em X $\}$. Aqui, estamos usando a notação $\mu(f) = \int_X f d\mu$.*

Agora seja μ uma medida de Radon em X qualquer. Dizemos que X tem a **propriedade simétrica de Vitali com relação a** μ se para toda coleção $\mathcal{B}$ de bolas que cubra seu conjunto de centros $A = \{x; B_\rho(x) \in \mathcal{B}$ para algum $\rho > 0\}$ de modo fino, exista uma subcoleção contável de elementos disjuntos dois a dois $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ cobrindo A qtp(μ), desde que $\mu(A) < \infty$.

Observação 1.6 1. *Pelo corolário 1.1 vemos que um espaço métrico X localmente compacto e separável tem essa propriedade, já que*

$$\mu(B_{5\rho}(x)) \geq c\mu(B_\rho(x)),$$

sempre que $B_\rho(x) \subset X$, sendo c uma constante independente de x e ρ.

2. *O caso especial em que $X = \mathbb{R}^n$ é muito importante e mostra-se, usando o Teorema da Cobertura de Besicovich 1.5 que $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade simétrica de Vitali com relação a qualquer medida μ de Radon.*

Teorema 1.11 ***Teorema de Diferenciação de Medidas*** *Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Radon em X, sendo que X tem a propriedade simétrica de Vitali com relação a μ_1. Então:*

$$D_{\mu_1}\mu_2(x) \equiv \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mu_2(B_\rho(x))}{\mu_1(B_\rho(x))}$$

existe qtp(μ_1) e é μ_1-mensurável. Além disso, para qualquer conjunto de Borel $A \subset X$,

$$\mu_2(A) = \int_A D_{\mu_1}\mu_2 d\mu_1 \quad + \quad \mu_2^*(A) \tag{1.1}$$

sendo $\mu_2^*(A) = \mu_2 \lfloor Z$ e Z é um conjunto de Borel de medida μ_1-nula (Z independe de A). No caso que X também tem a propriedade de Vitali com relação a μ_2, então $D_{\mu_1}\mu_2$ também existe qtp(μ_2) e

$$\mu_2^* = \mu_2 \lfloor \{x; D_{\mu_1}\mu_2(x) = \infty\} \tag{1.2}$$

(isto é, podemos tomar $Z = \{x; D_{\mu_1}\mu_2(x) = \infty\}$ neste caso).

Demonstração: Ver [1], pág 25.

Observação 1.7 ***(1)*** *É claro da observação 1.6 (2) que 1.11(2) sempre acontece quando $X = \mathbb{R}^n$.*

(2) *μ_2^* é chamada* ***parte singular de*** *μ_2* ***com relação a*** *μ_1. É fácil checar que $\mu_2^* = 0$ se e somente se todos os conjuntos de medida μ_1-nula também têm medida μ_2-nula. Neste caso dizemos que μ_2 é* ***absolutamente contínua com relação a*** *μ_1.*

Então, 1.11(1) simplesmente diz que :

$$(*) \quad \mu_2(A) = \int_A (D_{\mu_1}\mu_2) d\mu_1 \ , \ \forall \ A \subset X, \ A: \text{ boreliano}$$

Teorema 1.12 ***(Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch)***
Seja μ uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Então:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f d\mu = f(x) \ \ qtp(\mu) x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Ver [2], pág. 43.

Capítulo 2

Funções de Variação Limitada

Aqui é feito um estudo detalhado das *funções de variação limitada*, dando um relevo muito especial à sua definição em dimensões superiores. Inicialmente será introduzido o conceito de *variação limitada na reta*.

A noção clássica de variação limitada para funções reais de variável real está intimamente ligada à ordenação de $\mathbb{R}$, razão pela qual não é diretamente generalizada para dimensões mais altas. Logo, com o intuito de estender essa teoria a dimensões superiores, será introduzido o conceito de *variação essencial (limitada)*, conceito este que preserva muitas das boas propriedades da definição clássica em dimensão 1. Além disso, a variação essencial não é afetada por mudanças no valor da função em conjuntos de medida nula, o que não é verdade na definição clássica.

O conjunto das funções de variação limitada será munido de uma norma sob a qual esse tem uma estrutura de espaço de Banach. Serão provados resultados importantes de compacidade e aproximação por funções deriváveis.

Em particular, em dimensão maior que 1 uma função de variação limitada não é necessariamente limitada. Este fato constitui uma das perdas significativas quando se passa para dimensão superior, mas é atenuado por se poder provar que o espaço das funções de variação limitada em $\mathbb{R}^n$ é mergulhável em algum L^p, em que p depende apenas da dimensão n.

Será apresentada também uma definição de *perímetro* de um conjunto enquanto variação da sua função característica. Também serão definidos os conceitos de fronteira reduzida de um conjunto e fronteira no sentido da teoria da medida. Por fim, enunciaremos o importante teorema de Gauss-Green generalizado.

2.1 Funções na Reta

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre funções de variação limitada em dimensão um, classe esta intimamente relacionada com a classe das funções monótonas.

Definição 2.1 *Seja f uma função real de variável real e $a < b$ dois números reais. Chama-se **variação de f no intervalo [a,b]** o seguinte núnero real:*

$$var_a^b(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|; \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$$

*Uma função f diz-se de **variação limitada** se existir alguma constante $C > 0$ tal que*

$$var_a^b(f) \leq C,$$

*quaisquer que sejam $a < b$. Definimos a **variação** de f como:*

$$var(f) = \sup\{var_a^b(f); a < b \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição 2.1 *Seja f uma função de variação limitada em $[a, b]$. Então f é limitada em $[a, b]$.*

Demonstração: Como $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq var_a^b(f)$, temos:

$$|f(x)| \leq |f(a)| + var_a^b(f),$$

para todo x em qualquer partição de [a,b] e isto mostra que f é limitada em $[a, b]$.

O seguinte exemplo mostra que não vale a recíproca desta proposição, ou seja, uma função limitada num intervalo não tem necessariamente variação limitada neste intervalo:

Exemplo 2.1 *A função f definida por $f(x) = xsen(1/x)$ se $0 < x \leq 2\pi$ e $f(0) = 0$ é limitada mas não tem variação limitada neste intervalo.*

De fato, basta tomarmos a sucessão $x_n = 1/(n+1/2)\pi$. Então:

$$f(x_n) = \frac{(-1)^n}{(n+1/2)\pi}$$

e daí

$$var_0^{2\pi}(f) > \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n\pi} \to \infty$$

São de verificação imediata os seguintes fatos:

1. Se f for uma função monótona no intervalo $[a, b]$, então f tem variação limitada em $[a, b]$, sendo
$$var_a^b(f) \leq |f(a) - f(b)|;$$

2. Se f for lipschitziana no intervalo $[a, b]$, então f tem variação limitada em $[a, b]$, tendo-se:
$$var_a^b(f) \leq Lip(f)|a - b|.$$

O seguinte resultado nos dá uma importante caracterização das funções de variação limitada na reta:

Teorema 2.1 *Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$. Então, f tem variação limitada se, e somente se pode ser escrita como diferença de duas funções crescentes.*

Demonstração: Começamos por observar que, se f se escreve como diferença de duas funções crescentes, então f tem variação limitada.

Então, seja f com variação limitada em $[a, b]$. Sejam

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(var_a^x(f)\ +\ f(x)\right)$$

e

$$q(x) = \frac{1}{2}\left(var_a^x(f)\ -\ f(x)\right)$$

As funções p e q são monótonas crescentes e $f\ =\ p\ -\ q$

É claro que modificando o valor de uma função, mesmo que só num ponto, a sua variação pode ser afetada. A definição de função de variação limitada aqui apresentada, bem conhecida e útil quando se estudam funções reais de variável real, torna-se algo desajustada se pensarmos que muitas aplicações envolvem sobretudo conceitos que se mantêm inalterados quando se alteram valores da função em estudo em conjuntos de medida nula. Estas limitações da definição "clássica"são ultrapassadas introduzindo uma nova definição de variação em dimensão um: a variação essencial, que não é afetada por mudanças no valor de f em conjuntos de medida nula e cuja generalização a dimensão superior é equivalente à definição que introduziremos na seção seguinte.

A noção de variação essencial, entretanto, depende de um outro conceito, o de continuidade aproximada. A continuidade aproximada não é afetada por mudanças nos valores de f em conjuntos de medida nula.

Definição 2.2 *Uma função f é* ***aproximadamente contínua*** *num ponto x_0 se, para qualquer $\delta > 0$, o conjunto $X = f^{-1}\{y; |y - f(x_0)| > \delta\}$ tiver densidade nula em x_0, ou seja:*

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(X \cap \{x; |x - x_0| < r\})}{m(\{x; |x - x_0| < r\})} = \lim_{r \to 0} \frac{m(X \cap B_r(x_o))}{m(B_r(x_0))} = 0$$

Definição 2.3 *Seja f uma função real integrável em $[a, b]$. A* ***variação essencial*** *de f no intervalo $[a, b]$ é definida por:*

$$varess_a^b(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|;\ a < t_0 < \ldots < t_n < b\right\}$$

sendo cada t_i um ponto de descontinuidade aproximada de f. Uma função f diz-se de ***variação essencial limitada*** *se existir uma constante $C > 0$ tal que $varess_a^b \leq C$ quaisquer que sejam $a < b$. Definimos então a* ***variação essencial*** *de f como*

$$varess(f) = \sup\{varess_a^b(f); a < b \in \mathbb{R}\}$$

Resulta imediatamente destas definições que se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada então f tem variação essencial limitada. No entanto, a recíproca não é verdadeira:

Exemplo 2.2 *A função $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tem variação essencial limitada mas não tem variação limitada.*

A variação essencial é uma noção válida *qtp*, ou seja, uma função pode tomar valor infinito em alguns pontos e, mesmo assim, ser limitada no sentido que iremos explicar:

Definição 2.4 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Chamaremos de* ***supremo essencial*** *de f em $[a,b]$ ao número:*

$$\inf\{\alpha \; ; \; f(x) \leq \alpha \;\; qtp \quad em \quad [a,b]\}$$

e denotaremos por $supess_a^b(f)$.

Definição 2.5 *Uma função f diz-se* ***essencialmente limitada*** *se*

$$supess_a^b|f| < \infty, \quad \forall a < b \in \mathbb{R}$$

É trivial observar que função essencialmente limitada não implica função com variação essencial limitada (função limitada já não implicava variação limitada!)

Podemos, entretanto, provar um resultado análogo à proposição 2.1 para o caso "essencial".

Proposição 2.2 *Seja f uma função de variação essencial limitada em $[a,b]$. Então, f é essencialmente limitada em $[a,b]$.*

Demonstração: Este resultado é análogo a 2.1. As conclusões que se tiraram aí para todos os pontos de um intervalo $[a,b]$ continuam válidos se excluímos alguns pontos (que formam um conjunto de medida nula).

2.2 Generalização para dimensão superior

Nesta seção, introduziremos a noção de função de variação limitada em dimensão superior a 1. Começamos por definir variação essencial limitada e daremos outras definições de função de variação limitada, provando a equivalência com a definição usada. São generalizados alguns resultados interessantes acerca da variação de funções de dimensão 1. Provaremos resultados de aproximação e semicontinuidade inferior para funções de variação limitada. Muniremos o espaço das funções de variação limitada com uma norma que o torna espaço de Banach e provaremos algumas propriedades desse espaço, nomeadamente resultados de compacidade e a possibilidade de mergulho num espaço L^p, em que p depende apenas da dimensão n.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para cada $k = 1, \ldots, n$, denotaremos por

$$\hat{x}_k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Sendo $t \in \mathbb{R}$ e escrevendo $f_k(\hat{x}_k, t) \equiv f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ denotaremos por $varess(f_k)$ a variação essencial de f_k como função da variável $t \in [a, b]$ para cada $\hat{x}_k$ fixo.

Definiremos o supremo essencial de uma função definida em $\mathbb{R}^n$ de modo análogo ao que foi feito para o caso unidimensional:

Definição 2.6 *Uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tem **variação essencial limitada** se, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, a variação essencial de $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ como função de t for integrável em ordem $\hat{x}_k$ em $\mathbb{R}^n$.*

Esta é a generalização natural a dimensão superior da definição de variação essencial (limitada) dada na seção anterior. Como veremos, esta noção de variação é equivalente à definição de variação que apresentaremos na próxima definição.

Observação 2.1 *Em dimensão superior, ao contrário do que se passa em dimensão 1, uma função de variação essencial limitada não tem que ser essencialmente limitada. Por exemplo, veja a função $f(x, y) = \dfrac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$.*

Finalmente definiremos a noção de função de variação limitada em $\mathbb{R}^n$:

Definição 2.7 *Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in \mathrm{L}^1(U)$, definimos a **variação** de f como:*

$$var_U(f) = \sup\left\{ \int_U f divg d\mathcal{L}^n; g \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n) e \|g\|_0 \leq 1 \right\}.$$

*Diremos que f tem **variação limitada** se $var_U(f) < \infty$*

Denotaremos o espaço das funções de variação limitada por **BV(U)**.

$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ denotará o gradiente de f.

Teorema 2.2 *Se f é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^n$ então f tem variação limitada e*

$$var_U(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |Df| d\mathcal{L}^n$$

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Para toda função $g \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$ tem-se, integrando por partes :

$$\int f divg d\mathcal{L}^n = \int f \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n = -\sum_{i=1}^n \int \frac{\partial f}{\partial x_i} g d\mathcal{L}^n$$

Como $g \equiv 0$ fora de um compacto e $\|g\|_0 = 1$, deduzimos que

$$\int \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \right| d\mathcal{L}^n \leq \int \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{x_i} \right| d\mathcal{L}^n \leq \int |Df| d\mathcal{L}^n$$

Por passagem ao supremo sobre tais funções g obtemos a igualdade pretendida.

Definição 2.8 *Uma função $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(U)$ tem **variação localmente limitada** em U se, para cada conjunto aberto $V \subset\subset U$:*

$$\sup\left\{ \int_U f divg d\mathcal{L}^n; g \in \mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n) \;\; e \;\; ||g||_0 \leq 1 \right\} < \infty.$$

Escrevemos

$$BV_{loc}(U)$$

para denotar o espaço de tais funções.

Teorema 2.3 *(Teorema de Estrutura para funções* $BV_{loc}(U)$*) Seja* $f \in BV_{loc}(U)$*. Então existem uma medida de Radon* μ *em* U *e uma função* μ*-mensurável* $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tais que:*

1. $|\sigma(x)| = 1$ *qtp*(μ) *e*

2. $\displaystyle\int_U f div\phi dx = -\int_U \phi \cdot \sigma d\mu$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Este teorema diz que as primeiras derivadas fracas de uma função BV são medidas de Radon.

Demonstração: Vamos definir o funcional linear

$$L : \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

por:

$$L(\phi) \equiv -\int_U f div\phi dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Como $f \in BV_{loc}(U)$, temos:

$$sup\{L(\phi); \phi \in \mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1\} \equiv C(V) < \infty$$

para cada conjunto aberto $V \subset\subset U$, e daí:

$$|L(\phi)| \leq C(V)\|\phi\|_{L^\infty} \qquad (*)$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n)$. Fixemos um compacto qualquer $K \subset U$ e vamos escolher um aberto V tal que $K \subset V \subset\subset U$. Para cada $\phi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n)$ com $supp\phi \subset K$, escolhemos $\phi_k \in \mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de modo que $\phi_k \to \phi$ uniformemente em V. Defina

$$\bar{L}(\phi) \equiv \lim_{k\to\infty} L(\phi_k);$$

Por $(*)$ este limite existe e independe da escolha da sequência $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ convergindo para ϕ. Então, L se extende unicamente a um funcional linear

$$\bar{L} : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

e

$$sup\{\bar{L}(\phi); \phi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1, supp\phi \ \subset K\} < \infty$$

para cada conjunto compacto $K \subset U$. Pelo Teorema da Representação de Riesz 1.9 existe uma única medida μ e uma função σ que satisfazem (1) e (2). Isto conclui a demonstração do teorema.

NOTAÇÃO Se $f \in BV_{loc}(U)$, então denotaremos por

$$\|Df\|$$

a medida μ. Assim o item (ii) no teorema 2.3 fica:

$$\int_U f div\phi dx = -\int_U \phi \cdot \sigma d\|Df\|.$$

Observação 2.2 *1. $\|Df\|$ é chamada **medida variação** de f;*

2. Se $f \in BV_{loc}(U) \cap \mathrm{L}^1(U)$ então $f \in BV(U)$ se e somente se $\|Df\|(U) < \infty$.

3. Da prova do teorema da Representação de Riesz, podemos ver que

$$\|Df\|(V) = \sup\left\{\int_V f div\phi dx; \phi \in \mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1\right\}$$

para cada $V \subset\subset U$.

4. Claramente temos $\|Df\|(U) = var_U(f)$.

Agora apresentaremos um teorema importante sobre funções de variação limitada: a semicontinuidade inferior.

Teorema 2.4 ***(Semicontinuidade inferior da medida variação)*** *Seja $f_k \in BV(U)$ $(k = 1, 2, \ldots,)$ e $f_k \to f$ em $\mathrm{L}^1_{loc}(U)$. Então:*

$$||Df||(U) \leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U).$$

Demonstração: Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1$. Então:

$$\int_U f div\phi dx = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k div\phi dx$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\int_U \phi\cdot\sigma_k d\|Df_k\| \leq \liminf_{k\to\infty}\|Df_k\|(U).$$

Então:

$$\|Df\|(U) = sup\left\{\int_U f div\phi dx; \phi\in\mathcal{C}_c^1(U,\mathrm{I\!R}^n), |\phi|\leq 1\right\}$$
$$\leq \liminf_{k\to\infty}\|Df_k\|(U).$$

Agora um outro teorema também importante: a aproximação por funções suaves.

Teorema 2.5 ***(Aproximação Local por Funções Suaves)*** *Dada $f\in BV(U)$, então existe uma sequência de funções $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset BV(U)\cap\mathcal{C}^{\infty}(U)$ tal que:*

$$f_k \to f \quad em\mathrm{L}^1(U)$$

e

$$\|Df_k\|(U)\to\|Df(U)\| \quad quando \quad k\to\infty.$$

Demonstração: Ver [2], pág. 172.

Definiremos agora uma norma para BV(U) que o tornará espaço de Banach.

Definição 2.9 *Dada $f\in BV(U)$, definimos*

$$\|f\|_{BV(U)}\equiv\|f\|_{\mathrm{L}^1}+\|Df\|(U).$$

Sem a parcela $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{BV(U)}$ não seria uma norma, já que uma função que não seja a identicamente nula pode ter variação nula (por exemplo qualquer função constante diferente de zero).

Proposição 2.3 $(BV(U),\|\cdot\|_{BV(U)})$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Resulta facilmente da definição de variação limitada que $BV(U)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo $\mathrm{I\!R}$. Vamos agora mostrar que com a norma $\|\cdot\|_{BV(U)}$ ele é completo.

Seja f uma função de variação limitada em U.

$$\|f\|_{BV(U)} = 0 \Leftrightarrow \|f\|_1 = \|Df\|(U) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

É trivial verificar $\|\alpha f\|_{BV(U)} = |\alpha| \|f\|_{BV(U)}$ para qualquer α real e que $\|f+g\|_{BV(U)} \leq \|f\|_{BV(U)} + \|g\|_{BV(U)}$, o que prova que de fato $\|\cdot\|_{BV(U)}$ é uma norma.

Para provar a completude, tomemos uma sequência de Cauchy $\{f_k\} \subset BV(U)$. Pela definição de $\|\cdot\|_{BV(U)}$, esta sequência também é de Cauchy no espaço métrico completo $\mathrm{L}^1(U)$. Então existe uma função $f \in \mathrm{L}^1(U)$ tal que $f_k \to f$ na norma de $\mathrm{L}^1(U)$. Sendo $\{f_k\}$ uma sequência de Cauchy em $BV(U)$, a sequência $\|f_k\|_{BV(U)}$ é limitada. Consequentemente, $\{\|Df_k\|\}$ é limitada e pelo teorema 2.4 temos que $f \in BV(U)$. Como $f_k \to f$ em $\mathrm{L}^1(U)$, falta apenas provar que $||D(f_k - f)|| \to 0$ quando $k \to \infty$ para concluirmos que $f_k \to f$ em $BV(U)$.

Seja $\epsilon > 0$. Então, existe um inteiro L tal que:

$$j, k \geq L \Rightarrow \|f_j - f_k\|_{BV(U)} < \epsilon \Rightarrow \|D(f_j - f_k)\|(U) < \epsilon.$$

Como $f_k \to f$ em $\mathrm{L}^1(U)$, $f_k - f_j \to f_j - f$ em $\mathrm{L}^1(U)$ e, novamente pelo teorema 2.4:

$$\|D(f_j - f)\| \leq \liminf_k \|D(f_j - f_k)\| \leq \epsilon.$$

Concluimos que $f_k \to f$ em $BV(U)$ e, consequentemente, que
$(BV(U), \|\cdot\|_{BV(U)})$ é um espaço de Banach.

O próximo resultado garante que o espaço $BV(U)$ pode ser mergulhado num espaço L^p em que p depende apenas da dimensão d.

Teorema 2.6 ***(Desigualdade de Sobolev)*** *Seja $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\|f\|_p \leq C\|Df\|(\mathbb{R}^n)$$

sendo $p = \dfrac{n}{n-1}$ e c depende apenas da dimensão n.

Demonstração: Ver [2], pág 189.

A seguir provaremos um importante resultado de compacidade em $BV(U)$.

Teorema 2.7 *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\mathcal{C}^1$. Se $\{f_k\}_k$ for uma sequência de funções com $\|\cdot\|_{BV(U)}$ uniformemente limitada, então $\{f_k\}_k$ possui uma subsequência convergente em $\mathrm{L}^1(U)$ para uma função de $BV(U)$.*

Demonstração: Seja $\{f_k\}_k$ uma sequência de funções em $BV(U)$ com $\|f_k\|_{BV(U)} \leq L$ para algum L. Para cada k, o teorema 2.5 de aproximação por funções suaves nos permite escolher $\bar{f}_k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que:

$$\int_U |\bar{f}_k - f_k| d\mathcal{L}^n < \frac{1}{n} \tag{2.1}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \|D\bar{f}_k\|(U) = \|Df_k\|(U) \tag{2.2}$$

De (2.2), podemos deduzir que $\sup \|D\bar{f}_k\|(U) < \infty$. Pelo teorema de Rellich, a sequência $\{\bar{f}_k\}_k$ é relativamente compacta em L^1, isto é, $\{\bar{f}_k\}_k$ tem uma subsequência $\{\bar{f}_{n_k}\}$ que converge em L^1 para uma função $f \in \mathrm{L}^1(U)$.

Pelo teorema 2.4,

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{k\to\infty} \|D\bar{f}_{n_k}\|(U) < \infty.$$

Consequentemente, o limite da subsequência extraída de $\{\bar{f}_k\}_k$ está em $BV(U)$.

2.3 Conjuntos de Perímetro Finito

A variação da função característica de um conjunto E mede o "tamanho" da fronteira de E, isto é, para conjuntos com fronteira suficientemente regular (por exemplo bolas e retângulos) a variação da característica é igual ao perímetro do conjunto no sentido tradicional. Esta seção é dedicada ao estudo do perímetro de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ enquanto variação de sua função característica. Definiremos a fronteira reduzida de um conjunto e enunciaremos o Teorema de Gauss-Green generalizado.

Definição 2.10 *Sejam E um boreliano e U um aberto de* $\mathbb{R}^n$*. Definimos o* ***perímetro de E em U*** *como:*

$$per_U(E) = var_U(\chi_E)$$

Definição 2.11 *Um subconjunto* $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$*-mensurável têm* ***perímetro finito*** *em U se* $\chi_E \in BV(U)$.

Seria interessante definirmos uma versão local deste conceito:

Definição 2.12 *Um subconjunto* $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$*-mensurável têm* ***perímetro localmente finito*** *em U se* $\chi_E \in BV_{loc}(U)$.

Suponhamos que E é um conjunto de perímetro localmente finito em U. Logo, pela definição, $\chi_E \in BV_{loc}(U)$. Denotaremos por

$$\|\partial E\|$$

a medida dada pelo Teorema 2.3 de Estrutura para funções em $BV_{loc}(U)$ e por

$$\nu_E = -\sigma.$$

Da prova do Teorema da Representação de Riesz 1.9, vemos que:

$$\|\partial E\|(V) = sup\left\{ \int_E div\phi dx; \phi \in \mathcal{C}_c^1(V, \mathbb{R}^n); |\phi| \leq 1 \right\}$$

para cada $V \subset\subset U$.

Chamaremos a medida $\|\partial E\|$ de *medida perímetro de E*; notemos que neste caso, o perímetro de E em U fica: $per_U(E) = var_U(\chi_E) = \|\partial E\|(U)$.

Consequentemente, o item (2) do teorema 2.3 fica:

$$\int_E div\phi dx = \int_U \phi \cdot \nu_E d\|\partial E\|$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Introduziremos agora a noção de fronteira reduzida de um conjunto.

Definição 2.13 *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que $x \in \partial^* E$, a **fronteira reduzida** de E se:*

1. $\|\partial E\|(B(x,r)) > 0$ *para todo* $r > 0$;
2. $\lim_{r \to 0} \frac{1}{\|\partial E\|(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \nu_E d\|\partial E\| = \nu_E(x)$ *e*
3. $|\nu_E(x)| = 1$.

Observação 2.3 *Notemos que pelo teorema 1.12, temos:*

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0.$$

Como anteriormente, continuamos assumindo que E é um conjunto de perímetro localmente finito em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.14 *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x está na **fronteira no sentido da teoria da medida** $\partial_* E$ se:*

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap E)}{r^n} > 0$$

e

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \setminus E)}{r^n} > 0.$$

Lema 2.1
- $\partial^* E \subset \partial_* E$;
- $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.

O próximo teorema diz que se E é um conjunto de perímetro localmente finito, então a usual fórmula de Gauss-Green continua válida se considerarmos agora a fronteira de E no sentido da teoria da medida.

Teorema 2.8 ***(Teorema de Gauss-Green-Generalizado)*** *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de perímetro localmente finito. Então:*

1. $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap K) < \infty$ *para cada compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$.

2. *Mais ainda, para cada* $x \in \partial_* E$ *qtp*$(\mathcal{H}^{n-1})$*, existe uma única normal exterior unitária* $\nu_E(x)$ *tal que:*

$$\int_E div\phi dx = \int_{\partial_* E} \phi \cdot \nu_E d\mathcal{H}^{n-1}$$

   para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [2], pág. 209.

Capítulo 3

Subvariedades de $\mathbb{R}^{n+k}$

Aqui, foram apresentados os fatos básicos concernentes à *subvariedades C^k do espaço euclidiano.* Na verdade, essa noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$.

O exemplo mais acessível de variedade é uma superfície regular do $\mathbb{R}^3$; intuitivamente, uma superfície regular é uma reunião de abertos do $\mathbb{R}^2$ organizados de tal modo que quando dois abertos se interceptam, a transição de um para o outro se faz de maneira diferenciável. Como consequência, faz sentido falar de funções diferenciáveis nestas superfícies e aplicar os métodos do Cálculo Diferencial.

Embora a necessidade de uma idéia abstrata de superfície tenha surgido desde Gauss, foi necessário quase um século para que tal idéia atingisse a forma definitiva que vamos apresentar. Uma das razões desta demora é que o papel fundamental de mudança de parâmetros não era bem compreendido.

Pois bem, definida uma *subvariedade diferenciável n-dimensional no* $\mathbb{R}^{n+k}$, partimos para generalizar várias noções já conhecidas do Cálculo Diferencial, tais como espaço tangente, derivada direcional, curvatura média, entre outras. Sob certas condições, conseguimos também provar o *Teorema da Divergência* para campos que não necessariamente tomam valores no espaço tangente de uma subvariedade diferenciável.

Vimos a Fórmula da Área, que estabelece que , se $m \geq n$, então a medida n-dimensional de f(A) pode ser calculada integrando-se o jacobiano de f sobre A. A

Fórmula da Co-Área nos diz que a medida (n-m)-dimensional dos conjuntos de nível de f é computada pela integração do jacobiano da f, embora aqui tenhamos $m \leq n$. Na última seção mostramos as Fórmulas da Primeira e Segunda Variação da Área de uma subvariedade.

3.1 Fatos Básicos

Nesta seção, apresentaremos as primeiras definições relativas a subvariedades $\mathcal{C}^k$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+k}$. Sejam $k \geq 0$ e $r \geq 1$.

Definição 3.1 *Diremos que M é uma $\mathcal{C}^r$-**subvariedade n-dimensional de** $\mathbb{R}^{n+k}$ se para cada $y \in M$ existirem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ com $y \in U$, $0 \in V$ e um $\mathcal{C}^r$-difeomorfismo $\phi : U \to V$ tais que $\phi(y) = 0$ e $\phi(M \cap U) = W = V \cap \mathbb{R}^n$.*

Aqui e subsequentemente identificaremos $\mathbb{R}^n$ com o subespaço de $\mathbb{R}^{n+k}$ consistindo de todos os pontos $x = (x_1, \ldots, x_{n+k})$ tais que $x_j = 0$, para todo $j = n+1, \ldots, n+k$.

Em particular, temos *representações locais*:

$$\psi : W \to \mathbb{R}^{n+k} \ , \ \psi(W) = M \cap U \ , \ \psi(0) = y$$

tais que: $\dfrac{\partial \psi(0)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \psi(0)}{\partial x_n}$ são vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^{n+k}$.
(Por exemplo podemos tomar $\psi = \phi^{-1}\big|_W$.)

Definição 3.2 *Definimos o **Espaço Tangente Aproximado** T_yM **de M em y** como sendo o subespaço de $\mathbb{R}^{n+k}$ consistindo dos pontos $\tau \in \mathbb{R}^{n+k}$ tais que: $\tau = \dot{\gamma}(0)$ para alguma curva $\gamma \in \mathcal{C}^1$, $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^{n+k}$, $\gamma(-1, 1) \subset M$ e $\gamma(0) = y$.*

T_yM tem uma base $\left\{ \dfrac{\partial \psi(0)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \psi(0)}{\partial x_n} \right\}$ para uma representação local ψ como acima.

Diremos que uma função $f : M \to \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$ é $\mathcal{C}^l$ em M $(l \leq r)$ se f for a restrição a M de uma função $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^l$ sendo U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+k}$ tal que $M \subset U$.

Definição 3.3 *Dado $\tau \in T_yM$, definimos a **derivada direcional** $D_\tau f$ por:*

$$D_\tau f = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$$

para qualquer curva $\gamma : (-1,1) \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $\gamma(0) = y$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$.

Como esta definição independe da particular curva γ que escolhermos para representar τ, somos induzidos a definir a **aplicação linear**

$$df_y : T_yM \to \mathbb{R}^N$$

por $df_y(\tau) = D_\tau f$.

Definição 3.4 *Se f for uma função real (N=1), podemos definir o **gradiente** $\nabla^M f$ de f por:*

$$\nabla^M f(y) = \sum_{j=1}^{n} (D_{\tau_j} f)(\tau_j), \quad y \in T_yM$$

sendo $\tau_1, \ldots, \tau_n$ qualquer base ortonormal para T_yM.

Se fizermos $\nabla_j^M f(y) \equiv e_j \cdot \nabla^M f$, sendo e_j o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{n+k}$, $j = 1, \ldots, n+k$, então

$$\nabla^M f(y) = \sum_{j=1}^{n+k} \nabla_j^M f(y) \cdot e_j$$

Se f for a restrição a M de uma função $\bar{f} \in \mathcal{C}^1(U)$, sendo $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto e $M \subset U$, então:

$$\nabla^M f(y) = (D\bar{f}(y))^\top, \quad y \in M$$

sendo $D\bar{f}$ o gradiente usual de f em U e $(\ )^\top$ significa a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^{n+k}$ em T_yM.

Definição 3.5 *Dado um campo vetorial $X = (X_1, \ldots, X_{n+k}) : M \to \mathbb{R}^{n+k}$, com $X_j \in \mathcal{C}^1(M)$, $j = 1, \ldots, n+k$, definimos:*

$$div_M X = \sum_{j=1}^{n+k} \nabla_j^M X_j$$

em M.

Note que não exigimos que $X_y \in T_yM$. Ou seja, definimos o divergente de um campo vetorial numa subvariedade sem necessariamente o campo morar no plano tangente da subvariedade.

Notemos também que, para cada $y \in M$, temos:

$$div_M X = \sum_{j=1}^{n+k} \nabla_j^M X_j = \sum_{j=1}^{n+k} e_j \cdot \nabla^M X_j = \sum_{j=1}^{n+k} e_j \cdot \big(\sum_{i=1}^{n} (D_{\tau_i} X_j)\tau_i \big) = \sum_{i=1}^{n} (D_{\tau_i} X) \cdot \tau_i \ ,$$

sendo $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ qualquer base ortonormal para T_yM.

Teorema 3.1 ***(Teorema da Divergência)*** *Se o fecho $\overline{M}$ de M for uma variedade suave e compacta com fronteira $\partial M = \overline{M} \setminus M$, então*

$$\int_M div_M X d\mathcal{H}^n = -\int_{\partial M} X \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1}$$

sendo η a co-normal interior unitária à ∂M, ou seja, $|\eta| = 1$, η é normal à ∂M, tangente a M e aponta para M em cada ponto de ∂M.

Observação 3.1 *1. Note que no teorema acima M não precisa ser orientável;*

2. Em geral, o fecho $\overline{M}$ de M não será uma ***subvariedade com fronteira suave****; de fato, pode acontecer $\mathcal{H}^n(\overline{M} \setminus M) > 0$.*

Por exemplo, considere o caso

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{x^2}{k} \right\} \setminus \{0\}.$$

M é uma $\mathcal{C}^r$-subvariedade 1-dimensional de $\mathbb{R}^2$ para todo $r \geq 1$, mas $\overline{M} \setminus M$ é todo o eixo coordenado dos x.

Entretanto, neste caso geral ainda temos $\displaystyle\int_M div_M X = 0$ se $supp(X) \cap M$ for um subconjunto compacto de M e $X_y \in T_yM$, $\forall\ y \in M$.

Definição 3.6 *Se M for uma subvariedade pelo menos $\mathcal{C}^2$, definimos a* ***segunda forma fundamental de M em y*** *como sendo a forma bilinear*
$B_y : T_yM \times T_yM \to (T_yM)^\perp$ dada por:

$$B_y(\tau, \eta) = -\sum_{\alpha=1}^{k} (\eta \cdot D_\tau \nu_\alpha)\nu_\alpha\big|_y \ ,$$

com $\nu, \tau \in T_yM$ e sendo $\nu_1, \ldots, \nu_k$ (definidos numa vizinhança de y) campos vetoriais satisfazendo $\nu_\alpha(z) \cdot \nu_\beta(z) = \delta_{\alpha\beta}$ e $\nu_\alpha(z) \in (T_zM)^\perp$ para todo z numa vizinhança de y.

O significado geométrico de B é o seguinte: se $\tau \in T_yM$ com $|\tau| = 1$ e $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^{n+k}$ é uma curva $\mathcal{C}^2$ com $\gamma(0) = y$, $\gamma((-1, 1)) \subset M$ e $\dot{\gamma}(0) = \tau$, então $B_y(\tau, \tau) = (\ddot{\gamma}(0))^\perp$, que é justamente a componente normal (relativa a M) da curvatura de γ em 0, sendo que aqui γ é considerada um espaço curva ordinário em $\mathbb{R}^{n+k}$ (assim, $B_y(\tau, \tau)$ mede a "curvatura normal"de M na direção τ). De fato, isto é facilmente visto pelo seguinte:

$$\nu_\alpha(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0, \ \forall\, t, \ \ |t| < 1,$$

já que $\dot{\gamma}(t) \in T_yM$ e $\nu_\alpha(\gamma(t)) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp$.
Derivando esta igualdade com relação a t, após fazer $t = 0$ obtemos:

$$D_\tau\nu_\alpha \cdot \tau \ + \ \nu_\alpha(y) \cdot \ddot{\gamma}(0) = 0 \ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ \nu_\alpha(y) \cdot \ddot{\gamma}(0) = -D_\tau\nu_\alpha \cdot \tau$$

Daí, multiplicando por $\nu_\alpha(y)$ e somando em α, obtemos:

$$(\ddot{\gamma}(0))^\perp = -\sum_{\alpha=1}^{k} (\tau \cdot D_\alpha\nu_\alpha) \cdot \nu_\alpha(y) = B_y(\tau, \tau),$$

como queríamos.

Note que o parâmetro t não precisa ser um comprimento de arco para γ; é suficiente que $\dot{\gamma}(0) = \tau$, $|\tau| = 1$.

Mais geralmente, por um argumento similar, se $\tau, \eta \in T_yM$ e se $\phi(0, 0) = y$, $\phi(U) \subset M$, $\dfrac{\partial\phi(0,0)}{\partial x_1} = \tau$ e $\dfrac{\partial\phi(0,0)}{\partial x_2} = \eta$, então $B_y(\tau, \eta) = \left(\dfrac{\partial^2\phi(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^\perp$.

Em particular, $B_y(\tau, \eta) = B_y(\eta, \tau)$, ou seja, B_y é uma **forma bilinear simétrica** com valores em $(T_yM)^\perp$.

Definição 3.7 *Definimos o* ***vetor curvatura média $\underline{\underline{H}}$ de M em y*** *como sendo o traço de B_y. Então:*

$$\underline{\underline{H}}(y) = \sum_{i=1}^{n} B_y(\tau_i, \tau_i) \ \ \in (T_yM)^\perp \tag{3.1}$$

sendo $\tau_1, \ldots, \tau_n$ uma base ortonormal qualquer para T_yM.

Note que, se $\nu_1, \ldots, \nu_k$ são como na definição 3.6, então:

$$\underline{\underline{H}}(y) = -\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\tau_i \cdot D_{\tau_i}\nu_\alpha)\nu_\alpha(y)$$

e daí, numa vizinhança de y

$$\underline{\underline{H}} = -\sum_{\alpha=1}^{k}(div_M \nu_\alpha)\nu_\alpha \tag{3.2}$$

Suponhamos agora que $\overline{M}$ é uma $\mathcal{C}^2$-subvariedade compacta, com fronteira $\partial M = \overline{M} \setminus M$ (n-1)-dimensional suave. Seria interessante computarmos

$$\int_M div_M X$$

no caso em que a condição $X_y \in T_y M$ não é satisfeita. Para tanto, vamos decompor X em duas partes

$$X = X^\top + X^\perp,$$

sendo $X^\top$ sua parte tangente e $X^\perp$ sua parte normal sendo também que pelo menos localmente,

$$X^\perp = \sum_{\alpha=1}^{k}(\nu_\alpha \cdot X)\nu_\alpha.$$

Daí, numa vizinhança de y,

$$div_M X^\perp = \sum_{\alpha=1}^{k}(\nu_\alpha \cdot X) div \nu_\alpha$$

e então por (3.2)

$$div_M X^\perp = -X \cdot \underline{\underline{H}} \tag{3.3}$$

em cada ponto de M.

Por outro lado, pelo Teorema da Divergência 3.1 temos:

$$\int_M div_M X^\top = -\int_{\partial M} X \cdot \eta$$

e daí, como $div_M X = div_M X^\top + div_M X^\perp$, obtemos:

$$\int_M div_M X d\mathcal{H}^n = -\int_M X \cdot \underline{\underline{H}} d\mathcal{H}^n - \int_{\partial M} X \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{3.4}$$

3.2 Fórmula da Área

Inicialmente, estudamos as propriedades diferenciáveis das *funções Lipschitz* e enunciamos o *Teorema de Rademacher* que estabelece que uma função localmente lipschitz $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável $qtp(L^n)$. Posteriormente, discutimos aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ e introduzimos a noção de Jacobiano.

Feito isto, tivemos condições de enunciar a *Fórmula da Área* que estabelece que, se $m \leq n$ então a medida n-dimensional de $f(A)$, contando as multiplicidades, pode ser calculada pela integração do Jacobiano de f sobre A. Como consequência da Fórmula da Área, provamos a *Fórmula da Mudança de Variáveis* .

Definição 3.8 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é chamada **lipschitz** se existe $L < \infty$ tal que:*

$$(*) \quad |f(x) - f(y)| \leq L.d(x, y), \quad \forall\, x, y \in X$$

sendo d a métrica em X.

Denotaremos por $Lip(f)$ a menor constante L tal que (*) acontece, ou seja,

$$Lip(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)};\ x, y \in X, \ \ x \neq y \right\}$$

Temos o seguinte teorema de extensão para funções lipschitz:

Teorema 3.2 *Se $A \subset X$ e $f : A \to \mathbb{R}$ é lipschitz então existe $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ lipschitz com $Lip(f) = Lip(\bar{f})$ e $f = \bar{f}\big|_A$.*

Enunciaremos agora o Teorema de Rademacher sobre diferenciabilidade de funções lipschitz em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3 ***(Teorema de Rademacher)*** *Se f é uma função lipschitz em $\mathbb{R}^n$ então f é diferenciável $qtp(\mathcal{L}^n)$, ou seja, $grad(f(x)) = (D_1 f(x), D_2 f(x), \ldots, D_n f(x))$ existe e*

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - grad(f(x)).(y - x)}{|y - x|} = 0 \ \ qtp(\mathcal{L}^n) x \in \mathbb{R}^n.$$

Também enunciaremos os seguintes teoremas:

Teorema 3.4 ***(Teorema da Extensão de Whitney)*** *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ fechado, $h : A \to \mathbb{R}$ e $\nu : A \to \mathbb{R}^n$ contínuas. Suponha que para quaisquer $x_0, y_0 \in A$,*

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0,} R(x,y) = 0,$$

sendo $x, y \in A$, $x \neq y$ e

$$R(x,y) = \frac{h(y) - h(x) - \nu(x).(y-x)}{|y-x|}.$$

Então, existe uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $g\big|_A = h$ e $Dg\big|_A = \nu$ (lembrando que Dg denota o gradiente usual de g).

O seguinte teorema é uma consequência do Teorema da Extensão de Whitney:

Teorema 3.5 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função lipschitz. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe uma função g de classe $\mathcal{C}^1$ com*

$$\mathcal{L}^n(\{x;\ f(x) \neq g(x)\} \cup \{x;\ Df(x) \neq Dg(x)\}) < \epsilon$$

Recordemos que, se $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear e $A \subset \mathbb{R}^n$, então

$$\mathcal{L}^n(\lambda(A)) = |det\lambda|\mathcal{L}^n(A).$$

Em geral, se $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, com $N \geq n$, então existe um subespaço n-dimensional F de $\mathbb{R}^N$ tal que $\lambda(\mathbb{R}^n) \subset F$. Escolhemos uma transformação ortogonal q de $\mathbb{R}^N$ tal que $q(F) = \mathbb{R}^n$. Logo, $q\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e portanto

$$\mathcal{L}^n(q\lambda(A)) = |det(q\lambda)|\mathcal{L}^n(A),\ \ \forall A \subset \mathbb{R}^n$$

Além disso, como q é ortogonal, temos

$$|det(q\lambda)| = \sqrt{det(\lambda^* \circ \lambda)},$$

sendo $\lambda^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ o adjunto de λ.

Como $\mathcal{H}^n(q(B)) = \mathcal{H}^n(B)$, $\forall\ B \subset \mathbb{R}^n$ e pelo teorema 1.6 temos:

$$\mathcal{L}^n(q\lambda(A)) = \mathcal{H}^n(q\lambda(A)) = \mathcal{H}^n(\lambda(A))$$

Assim, obtemos a Fórmula da Área para uma aplicação linear $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, $n \leq N$:

$$\mathcal{H}^n(\lambda(A)) = \sqrt{det(\lambda^* \circ \lambda)}\mathcal{H}^n(A), \ \forall \ A \subset \mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

Seja Jf o **jacobiano de f**, definido por:

$$Jf(y) = \sqrt{det(df_y)^* \circ (df_y)} \tag{3.6}$$

e $df_y : T_yM \to \mathbb{R}^N$ a aplicação linear induzida descrita anteriormente e $(df_y)^* : \mathbb{R}^N \to T_yM$ denota a transformação adjunta.

Teorema 3.6 ***(Fórmula da Área)*** *Dada uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ $f : M \to \mathbb{R}^N$ 1:1 (M é uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$), temos:*

$$\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A Jf d\mathcal{H}^n$$

para todo conjunto $A \subset M$ $\mathcal{H}^n$-mensurável.

A demonstração da fórmula da área enunciada acima é provada com um argumento baseado na aproximação do caso linear 3.5 (ver [12] ou [13] para detalhes).

Se f não é 1:1, temos a **Fórmula da Área Geral** (que segue de 3.6)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(f^{-1}(y) \cap A) d\mathcal{H}^N(y) = \int_A Jf d\mathcal{H}^n \ , \tag{3.7}$$

$\forall \ A \subset M$ $\mathcal{H}^n$- mensurável sendo $\mathcal{H}^0$ a medida de Hausdorff 0-dimensional, ou seja, a "medida contagem".

Mais geralmente ainda, se g é uma função $\mathcal{H}^n$-mensurável em M e não negativa, então temos a **Fórmula Geral da Mudança de Variáveis**:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^0 d\mathcal{H}^n(y) = \int_M (Jf) g d\mathcal{H}^n \tag{3.8}$$

Isto segue diretamente de 3.7 simplesmente aproximando g por funções simples.

3.3 A Fórmula da Co-Área

A *Fórmula da Co-área* estabelece que a medida $(n-m)$-dimensional dos conjuntos de nível de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, (com $m \leq n$) é computada pela integração do Jacobiano. Notamos que a Fórmula da Co-área é um tipo de generalização curvilinear do Teorema de Fubini.
Além disso, entre outros resultados, vimos que aplicando a Fórmula da Co-área ao conjunto dos pontos que anulam o jacobiano de f, obtemos uma versão fraca do *Teorema de Morse-Sard.*

Assim como na discussão da Fórmula da Área, começaremos olhando para aplicações lineares $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ assumindo, entretanto, $N < n$. Olhemos inicialmente para o caso especial que λ é uma projeção ortogonal p de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^N$. (Como antes, identificamos $\mathbb{R}^N$ com o subespaço de $\mathbb{R}^n$ consistindo de todos os pontos $(x_1, \ldots, x_n)$ com $x_j = 0$ para $j = n - N + 1, \ldots, n$.) A projeção ortogonal p tem a seguinte propriedade: para cada $y \in \mathbb{R}^N$, $p^{-1}(y)$ é um espaço afim (n-N)-dimensional (isto é, para quaisquer $x, x' \in p^{-1}(y)$, $x \neq x'$, a linha determinada por x e x' está contida em $p^{-1}(y)$).Cada um desses espaços é uma translação do subespaço (N-n)-dimensional $p^{-1}(0)$. Logo, as imagens inversas $p^{-1}(y)$ decompoem todo o $\mathbb{R}^n$ em **"pedaços"** paralelos (n-N)-dimensionais e daí, pelo Teorema de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(p^{-1}(y) \cap A)dy = \mathcal{H}^n(A) \tag{3.9}$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-mensurável.

Esta fórmula (que nós enfatizamos novamente, é simplesmente o Teorema de Fubini) é um caso especial de uma fórmula mais geral conhecida como fórmula da co-área.

Suponhamos agora $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, $N < n$, com $rank\lambda = N$. Seja $F = \lambda^{-1}(0)$. Então, para cada $y \in \mathbb{R}^N$, $\lambda^{-1}(y)$ é um espaço afim (n-N)-dimensional que é uma translação de F. Logo, os conjuntos $\lambda^{-1}(y)$ decompoem todo o $\mathbb{R}^n$ em pedaços paralelos (n-N)-dimensionais. Tomemos uma transformação ortogonal q :

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $q(F) = \mathbb{R}^{n-N}$ e $q(F^\perp) = \mathbb{R}^N$. Assim, λ pode ser representada da forma $\lambda = \sigma \circ p \circ q$, sendo p a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^N$ e σ é uma transformação não-singular de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$. Daí, por 3.9, para qualquer $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^n$-mensurável,

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(q(A)) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(p^{-1}(y) \cap q(A)) d\mathcal{L}^N(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(q^{-1}(p^{-1}(y)) \cap A) d\mathcal{L}^N(y).$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = \sigma(y)$ $(dy = |det\sigma|^{-1}dz)$, obtemos:

$$|det\sigma|\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(q^{-1}(p^{-1}(\sigma^{-1}(z))) \cap A) d\mathcal{L}^N(z)$$

$$\equiv \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(\lambda^{-1}(z) \cap A) d\mathcal{L}^N(z)$$

Além disso, como $q^* \circ q = 1_{\mathbb{R}^n}$ e $p \circ p^* = 1_{\mathbb{R}^N}$, temos $\lambda \circ \lambda^* = \sigma \circ \sigma^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e portanto $|det\sigma| = \sqrt{det\lambda \circ \lambda^*}$.

Assim, finalmente temos a **Fórmula da Co-Área para aplicações lineares**:

$$\sqrt{det\lambda \circ \lambda^*} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(\lambda^{-1}(z) \cap A) d\mathcal{L}^N(z) \tag{3.10}$$

Note que se $rank\lambda < N$, então $A \cap \lambda^{-1}(z) = \emptyset$ e daí $\mathcal{H}^{n-N}(\lambda^{-1}(z) \cap A)$ $qtp(\mathcal{L}^N)$ $z \in \mathbb{R}$.

Além disso,

$$rank(\lambda) < N \Rightarrow dim(\sigma(\mathbb{R}^n)) < N \Rightarrow |det\sigma| = 0$$

e portanto a igualdade permanece válida no caso que $rank\lambda < N$ com ambos os lados da igualdade sendo zero.

Mais geralmente, dada uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}^N$de classe $\mathcal{C}^1$ sendo M uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$, definimos

$$J^*f(x) = \sqrt{det(df_x) \circ (df_x)^*}$$

sendo, como já vimos, $df_x : T_xM \to \mathbb{R}^N$ a aplicação linear induzida. Então, temos condições de enunciar:

Teorema 3.7 ***Fórmula da Co-Área*** *Seja $f : M \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ e M uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$. Então, para qualquer conjunto de Borel $A \subset M$,*

$$\int_A J^* f d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^N(y)$$

A demonstração envolve um argumento baseado no caso linear 3.10 (ver [12] ou [13] para detalhes).

Uma importante consequência de (3.10) é que, se

$$C = \{x \in M; J^* f(x) = 0\}$$

então fazendo $A = C$ em (3.10), obtemos:

$$\mathcal{H}^{n-N}(A \cap f^{-1}(y)) = 0 \ \ qtp(\mathcal{L}^N) \ \ y \in \mathbb{R}^N.$$

Se $J^* f(x) \neq 0$ precisamente quando df_x tiver rank igual a N, é claro do teorema da função implícita que se $x \in f^{-1}(y) \setminus C$ então existirá vizinhança V de x tal que $V \cap f^{-1}(y)$ é uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade (n-N)-dimensional. Em resumo temos o seguinte teorema:

Teorema 3.8 ***(Teorema $\mathcal{C}^1$ de Sard)*** *Suponha $f : M \to \mathbb{R}^N$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ com $N < n$. Então, para quase todo ($\mathcal{L}^N$) $y \in f(M)$, temos:*

$$f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \setminus C) \cup (f^{-1}(y) \cap C),$$

sendo $C = \{x \in M; J^* f(x) = 0\} (\equiv \{x \in M; df_x \text{ tem rank} < N\})$, $\mathcal{H}^{n-N}(f^{-1}(y) \cap C) = 0$ qtp($\mathcal{L}^N$) $y \in \mathbb{R}^N$ e $(f^{-1}(y) \setminus C)$ é uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade (n-N)-dimensional.

Observação 3.2 *Se f e M são de classe $\mathcal{C}^{n-N+1}$, o teorema de Sard garante um resultado mais forte, que de fato $f^{-1}(y) \cap C = \emptyset$ qtp($\mathcal{L}^N$) $y \in \mathbb{R}^N$ e daí $f^{-1}(y)$ é uma $\mathcal{C}^{n-N+1}$-subvariedade (n-N)-dimensional qtp($\mathcal{L}^N$) $y \in \mathbb{R}^N$.*

Uma generalização de 3.7 bastante usada é a seguinte:
Se g é uma função não-negativa e $\mathcal{H}^n$-mensurável em M, então:

$$\int_M J^* f g d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^{n-N} \right) d\mathcal{L}^N(y) \tag{3.11}$$

3.4 Fórmulas da Primeira e Segunda Variação da Área de uma Subvariedade

Seja M uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$ e seja $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um aberto tal que $U \cap M \neq \emptyset$ e $\mathcal{H}^n(K \cap M) < \infty$ para cada compacto $K \subset U$.
Além disso, seja $\{\phi_t\}_{-1<t<1}$ uma família de difeomorfismos de $U \to U$ tal que:

$$\begin{cases} (1) \quad \phi(t,x) \equiv \phi_t(x) \text{ é uma aplicação } \mathcal{C}^2 \text{ de } (-1,1) \times U \to U; \\ (2) \quad \phi_0(x) \equiv x, \ \forall\, x \in U; \\ (3) \quad \phi_t(x) \equiv x \ \forall\, t \in (-1,1), \ \ x \in U \setminus K, \end{cases} \tag{3.12}$$

sendo $K \subset U$ um subconjunto compacto de U. Sejam também X e Z os vetores velocidade inicial e aceleração para ϕ_t; então:

$$X_x = \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} \ , \ \ Z_x = \frac{\partial^2 \phi(t,x)}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$$

Daí,

$$\phi_t(x) = \ x \ + \ tX_x \ + \frac{t^2}{2} Z_x \ + \ o(t^3) \tag{3.13}$$

e X e Z têm suportes que são subconjuntos compactos de U. Seja $M_t = \phi_t(M \cap K)$, sendo $K \subset U$ um subconjunto compacto; então, $\{M_t\}$ é uma família de variedades tal que:

- $M_0 = M \cap K$;
- M_t coincide com M fora de algum subconjunto compacto de U.

Queremos computar $\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(M_t)\big|_{t=0}$ e $\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\big|_{t=0}$, ou seja, **a primeira e a segunda variação da área de M**.

Aqui a fórmula da área (teorema 3.6) é particularmente usada pois no dá:

$$\mathcal{H}^n(\phi_t(M \cap K)) = \int_{M \cap K} J\psi_t d\mathcal{H}^n,$$

sendo $\psi_t = \phi_t\big|_{M \cap U}$ e $K \subset U$ um subconjunto compacto como em 3.12 (3). Logo, para computarmos a primeira e a segunda variação, podemos diferenciar sob o sinal da integral. Então, o computo se reduz ao cálculo de

$$\frac{\partial}{\partial t} J\psi_t\big|_{t=0} \ \ e \ \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} J\psi_t\big|_{t=0}$$

Para realizar este cálculo iremos primeiramente obter uma expressão mais manejável para $J\psi_t$. Notemos que para cada t fixo e $\tau \in T_xM$,

$$d(\psi_t)_x(\tau) \equiv D_\tau(\psi_t) = \tau + tD_\tau X + \frac{t^2}{2}D_\tau Z + o(t^3)$$

Daí, relativo as bases $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ para T_xM e $\{e_1, \ldots, e_{n+k}\}$ para $\mathbb{R}^{n+k}$, a aplicação $d(\psi_t)_x : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ tem matriz:

$$a_{il} \equiv \tau_i^l + tD_{\tau_i}X^l + \frac{t^2}{2}D_{\tau_i}Z^l + o(t^3)$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $l = 1, \ldots, n+k$.
Então, $(d\psi_t\big|_x)^* \circ (d\psi_t\big|_x)$ tem matriz $\left(\sum_{l=1}^{n+k} a_{li}a_{lj}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = (b_{ij})$, sendo

$$b_{ij} = \delta_{ij} + t(\tau_i D_{\tau_i}X + \tau_j D_{\tau_i}X) + t^2(1/2(\tau_i D_{\tau_j}Z + \tau_j D_{\tau_i}Z) + (D_{\tau_i}X)(D_{\tau_j}X)) + o(t^3)$$

e daí, usando a fórmula geral

$$det(I + tA + t^2B) = 1 + t\cdot\text{traço}(A) + t^2(\text{ traço}(B) + 1/2(\text{traço}(A))^2 - 1/2(\text{traço}(A^2))) + o(t^3),$$

obtemos:

$$det\Big(\,(\,d\psi_t\big|_x)^* \,\circ\, (\,d\psi_t\big|_x)\Big) \;=\; 1 \;+\; t\Big(\sum_{i=1}^n \tau_i D_{\tau_i}X \;+\; \sum_{j=1}^n \tau_j D_{\tau_j}X\Big) \;+$$

$$+\,t^2\bigg[\,\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n \tau_i D_{\tau_i}Z \;+\; \sum_{j=1}^n \tau_j D_{\tau_j}Z\Big) \;+\; \sum_{i=1}^n |D_{\tau_i}X|^2 \;+$$

$$+\,\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n \tau_i D_{\tau_i}X \;+\; \sum_{j=1}^n \tau_j D_{\tau_j}X\Big)^2 \;-\; \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\tau_i D_{\tau_j}X \;+\; \tau_j D_{\tau_i}X)^2\,\bigg] \;+\; o(t^3) \;=$$

$$=\; 1 \;+\; t\big(2div_MX\big) \;+\; t^2\bigg[1/2(2div_mZ) \;+\; \sum_{i=1}^n |D_{\tau_i}X|^2 \;+\; 1/2(2div_mX)^2 \;-$$

$$-\,\frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j=1}^n (\tau_i D_{\tau_j}X)^2 \;+\; 2\sum_{i,j=1}^n (\tau_i D_{\tau_j}X)(\tau_j D_{\tau_i}X) \;+\; \sum_{i,j=1}^n (\tau_j D_{\tau_i}X)^2\Big)\,\bigg] \;+\; o(t^3) =$$

$$1 \;+\; 2tdiv_MX \;+\; t^2\bigg[div_MZ \;+\; 2(div_MX)^2 \;+\; \sum_{i=1}^n |D_{\tau_i}X|^2 \;-\; \sum_{i,j=1}^n (\tau_i D_{\tau_j}X)^2 \;-$$

$$-\,\sum_{i,j=1}^n (\tau_i D_{\tau_j}X)(\tau_j D_{\tau_i}X)\,\bigg] \;+\; o(t^3) \quad (*)$$

Seja

$$(D_{\tau_i}X)^{\perp} \equiv (\text{ parte normal de } D_{\tau_i}X\ ) \equiv D_{\tau_i}X \ - \ \sum_{j=1}^{n}(\tau_j D_{\tau_i}X)\tau_j.$$

Logo,

$$D_{\tau_i}X = (D_{\tau_i}X)^{\perp} + \sum_{j=1}^{n}(\tau_j D_{\tau_i}X)\tau_j \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D_{\tau_i}X)^2 = ((D_{\tau_i}X)^{\perp})^2 + \sum_{j=1}^{n}(\tau_j D_{\tau_i}X)^2|\tau_j|^2$$

já que $(D_{\tau_i}X)^{\perp}$ tem a propriedade de ser perpendicular a todos os vetores da base $\{\tau_j\}_{j=1}^{n}$. Agora, somando em i e observando que $|\tau_j|^2 = 1$, para todo j, já que a base é ortonormal, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}|D_{\tau_i}X|^2 \ = \ \sum_{i=1}^{n}|(D_{\tau_i}X)^{\perp}|^2 \ + \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\tau_j D_{\tau_i}X)^2.$$

Voltando em $(*)$, obtemos:

$$det\big(\ (\ d\psi_t\big|_x)^* \circ (\ d\psi_t\big|_x)\big) \ = \ 1 + 2t div_M X + t^2\big[div_M Z + 2(div_M X)^2 + \sum_{i=1}^{n}|(D_{\tau_i}X)^{\perp}|^2 -$$

$$- \ \sum_{i,j=1}^{n}(\tau_i D_{\tau_j}X)(\tau_j D_{\tau_i}X) \ \big] \ + \ o(t^3)$$

Usando a fórmula $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$ na igualdade acima, finalmente concluímos que:

$$J\psi_t = \sqrt{det\big(\ (\ d\psi_t\big|_x)^* \ \circ \ (\ d\psi_t\big|_x)\big)} = 1 + t div_M X + \frac{t^2}{2}\Big(div_M Z + (div_M X)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}|(D_{\tau_i}X)^{\perp}|^2 - \sum_{i,j=1}^{n}(\tau_i D_{\tau_j}X)(\tau_j D_{\tau_i}X)\Big) + o(t^3)$$

Com esta expressão para $J\psi_t$, a Fórmula da Área nos fornece imediatamente as **Fórmulas da Primeira e Segunda Variação da Área de M** :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(M_t)\big|_{t=0} = \int_M div_m X d\mathcal{H}^n \tag{3.14}$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\big|_{t=0} = \int_M \big(div_M Z + (div_M X)^2 + \sum_{i=1}^{n}|(D_{\tau_i}X)^{\perp}|^2 - \sum_{i,j=1}^{n}(\tau_i D_{\tau_j}X)(\tau_j D_{\tau_i}X)\big) \tag{3.15}$$

Definição 3.9 *Diremos que M é **estacionária** em U se* $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$ *para cada compacto* $K \subset U$ *e se* $\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(M_t)\big|_{t=0} = 0$, *sendo* $M_t = \phi_t(M \cap K)$, *K e* ϕ_t *como em (3.12).*

Logo, tendo em vista a fórmula 3.14, vemos que M é estacionária em U se e somente se $\int_M div_M X d\mathcal{H}^n = 0$, sendo X de classe $\mathcal{C}^1$ em U com $supp(X)$ subconjunto compacto de U.

O seguinte lema é uma simples consequência de 3.4.

Lema 3.1

1. *Se M é uma* $\mathcal{C}^2$*-subvariedade de* $\mathbb{R}^{n+k}$ *e* $\bar{M}$ *é também uma* $\mathcal{C}^2$*-subvariedade com fronteira suave* $(n-1)$*-dimensional* $\partial M = \bar{M} \setminus M$, *então M é estacionária em U se e somente se* $\underline{\underline{H}} \equiv 0$ *em* $M \cap U$ *e* $\partial M \cap U = \emptyset$

2. *Mais geralmente, se M é uma* $\mathcal{C}^2$*-subvariedade de* $\mathbb{R}^{n+k}$ *arbitrária e* $\bar{U} \cap M$ *é um subconjunto compacto de M, então M é estacionária em U se e só se* $\underline{\underline{H}} \equiv 0$ *em* $M \cap U$.

Faremos agora uma importante modificação na idéia de estacionariedade de uma subvariedade.

Definição 3.10 *Seja N uma* $\mathcal{C}^2$*-subvariedade* $(n + k_1)$*-dimensional de* $\mathbb{R}^{n+k}$, *sendo* $0 \leq k_1 \leq k$ *e suponha U um subconjunto aberto de N com* $M \subset N$. *Diremos que M é **estacionária em U** se (3.14) acontece sempre que* $X_y \in T_y M$, $\forall y \in M$

Esta definição é evidentemente equivalente à exigência

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(\phi_t(M \cap K))\big|_{t=0} = 0$$

sempre que ϕ_t satisfizer as condições (3.12) (tendo sempre em mente que agora U é uma aberto da subvariedade N, antes de ser um aberto de $\mathbb{R}^{n+k}$ como anteriormente).

De fato, basta usarmos que

$$\int_M div_M X d\mathcal{H}^n = -\int_{\partial M} X \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1}$$

e que $supp(X)$ é compacto e portanto $supp(X) \cap M$ é subconjunto compacto de M.

Se tivermos uma família ortonormal $\nu^1, \ldots, \nu^k$ (definida perto de um ponto $y \in M$) de campos vetoriais normais a M tais que $\nu^1, \ldots, \nu^{k_1}$ são tangentes a N e $\nu^{k_1+1}, \ldots, \nu_k$ são normais a N, então para qualquer campo vetorial X em M, podemos escrever

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} ,$$

sendo

$$X_z^{(1)} \in T_z N \;\; e \;\; X^{(2)} = \sum_{j=k_1+1}^{k} (\nu_j \cdot X)\nu_j \text{ (}\equiv \text{parte normal a N de X).}$$

Logo, se $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ é qualquer base ortonomal para $T_y M$, temos:

$$\begin{aligned}
div_M X &= div_M X^{(1)} + \sum_{j=k_1+1}^{k} (\nu_j \cdot X) div_M \nu_j \\
&= div_M X^{(1)} + \sum_{j=k_1+1}^{k} (\nu_j \cdot X) \sum_{i=1}^{n} (D_{\tau_i}\nu_j) \cdot \tau_i \\
&= div_M X^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=k_1+1}^{k} (\tau_i \cdot D_{\tau_i}\nu_j \cdot \nu_j)\nu_j \big) \cdot X \\
&= div_M X^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} (-\bar{B}_y(\tau_i, \tau_i)) \cdot X \\
&= div_M X^{(1)} - \sum_{i=1}^{n} X \cdot \bar{B}_y(\tau_i, \tau_i)
\end{aligned}$$

sendo $\bar{B}_y$ a segunda forma fundamental de N em y, $-\sum_{i=1}^{n} X \cdot \bar{B}_y(\tau_i, \tau_i) \in (T_y M)^\perp$.

Logo, podemos concluir o seguinte:

Lema 3.2 *Se N é uma subvariedade $(n+k_1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$, $M \subset N$ e U é um subconjunto aberto de N tal que $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$ sempre que K for um subconjunto compacto de U, então M é estacionária em U se e somente se*

$$\int_M div_M X = -\int_M \underline{\underline{\bar{H}}}_M \cdot X$$

para cada campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1$ com suporte compacto contido em U; aqui, $\underline{\underline{\bar{H}}}_M\big|_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{B}_y(\tau_i, \tau_i)$, $y \in M$, sendo que $\bar{B}_y$ denota a segunda forma fundamental de N em y e $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ é qualquer base ortonormal de $T_y M$.

Finalmente temos o seguinte lema sobre a fórmula da segunda variação:

Lema 3.3 *Se M é uma subvariedade $\mathcal{C}^2$ estacionária em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$, com $(\bar{M} \setminus M) \cap U = \emptyset$ e se X como em (3.15) tem suporte compacto em U com $X_y \in (T_yM)^\perp$, $\forall y \in M$, então:*

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \left(\sum_{i=1}^n |(D_{\tau_i}X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^n (X \cdot B(\tau_i, \tau_j))^2 \right) d\mathcal{H}^n.$$

Demonstração: Como X é de classe $\mathcal{C}^2$, segue que Z é de classe $\mathcal{C}^1$ e como M é estacionária em U segue que :

$$\int_M div_M Z = 0.$$

X é normal a M, ou seja, $X = X^\perp$ e daí, por 3.3,

$$div_M X = -X \cdot \underline{\underline{H}}.$$

Pelo lema 3.1 (2), $\underline{\underline{H}} = 0$ e portanto $div_M X = 0$. Por (3.6) e do fato de X ser normal a M, segue que

$$\tau_i \cdot D_{\tau_j} X = X \cdot B(\tau_i, \tau_j).$$

Logo,

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \left(div_M Z + (div_M X)^2 + \sum_{i=1}^n |(D_{\tau_i}X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^n (\tau_i D_{\tau_j} X)(\tau_j D_{\tau_i} X) \right) =$$

$$= \int_M \left(\sum_{i=1}^n |(D_{\tau_i}X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^n (\tau_i D_{\tau_j} X)(\tau_j D_{\tau_i} X) \right) =$$

$$= \int_M \left(\sum_{i=1}^n |(D_{\tau_i}X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^n (X \cdot B(\tau_i, \tau_j))(X \cdot B(\tau_j, \tau_i)) \right) =$$

$$= \int_M \left(\sum_{i=1}^n |(D_{\tau_i}X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^n (X \cdot B(\tau_i, \tau_j))^2 \right) d\mathcal{H}^n$$

já que B é bilinear.

Assim, concluímos o resultado.

Capítulo 4

Conjuntos Contavelmente n-Retificáveis

Neste capítulo, introduziremos a noção de conjuntos contavelmente n-retificáveis, que são as “superfícies m-dimensionais”da teoria geométrica da medida.

A teoria dos conjuntos contavelmente n-retificáveis nos dará uma noção apropriada de “superfícies generalizadas”; estes são os conjuntos nos quais residem os varifolds retificáveis (como veremos mais tarde). As funções relevantes neste contexto não são mais suaves, como na geometria diferencial, mas apenas lipschitz.

Na primeira seção deste capítulo, daremos algumas definições básicas e provaremos um importante resultado que estabelece que conjuntos contavelmente n-retificáveis são essencialmente caracterizados pela propriedade de ter um apropriado “espaço tangente aproximado”em quase todo ponto.

Nas seções posteriores, mostraremos que a fórmula da área e da co-área se estendem naturalmente para o caso em que M é simplesmente um conjunto n-retificável ao invés de uma $\mathcal{C}^1$- subvariedade.

Faremos ainda um breve comentário a respeito do teorema de estrutura de Federer.

4.1 Noções Básicas e Propriedades Tangentes

Nesta seção, introduziremos a definição de conjuntos contavelmente n-retificáveis. Definiremos também o espaço tangente aproximado de um conjunto contavelmente n-retificável e provaremos um importante resultado que caracteriza estes conjuntos em termos de seu espaço tangente aproximado.

Definição 4.1 *Diremos que um conjunto $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ é **contavelmente n-retificável** se*

$$M \subset M_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j(\mathbb{R}^n) \right),$$

sendo $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ e $F_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ são funções lipschitzianas para $j = 1, 2, \ldots$.

Notemos que pelo teorema de extensão para funções lipschitz (teorema 3.2) esta definição é equivalente a dizermos que:

$$M = M_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j(A_j) \right),$$

sendo $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ e $F_j : A_j \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ lipschitziana para todo j com $A_j \subset \mathbb{R}^n$.

Temos agora um importante lema de caracterização:

Lema 4.1 *M é contavelmente n-retificável se, e somente se $M \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$, sendo $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$ e para cada $j \geq 1$, N_j é uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Segue direto da definição.

($\Leftarrow$) Pelo teorema 3.5, podemos escolher funções $\mathcal{C}^1$ $g_1^{(j)}$, $g_2^{(j)}$, ... tais que, se F_j são funções lipschitz como na definição acima de conjuntos contavelmente n-retificáveis, então:

$$F_j(\mathbb{R}^n) \subset E_j \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{(j)}(\mathbb{R}^n) \right), \ j = 1, 2, \ldots$$

sendo $\mathcal{H}^n(E_j) = 0$. Então, fazemos:

$$N_0 = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_j \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{(j)}(C_{ij}) \right),$$

sendo $C_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n; Jg_i^{(j)}(x) = 0\}$ e $Jg_i^{(j)}$ denota o jacobiano de $g_i^{(j)}$. Pela Fórmula da Área, temos:

$$\mathcal{H}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{(j)}(C_{ij})\right) = 0$$

e daí $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$.

Agora, para cada $x \in \mathbb{R}^n \backslash C_{ij}$, seja $U_{ij}(x)$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \backslash C_{ij}$ contendo x e tal que $g_i^{(j)}\Big|_{C_{ij}}$ é 1:1. Tais $U_{ij}(x)$ existem pelo teorema da função inversa, que também garante que $g_i^{(j)}(U_{ij}(x)) \equiv N_{ij}(x)$ é uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$. Assim, podemos evidentemente escolher uma coleção contável $x_1, x_2, \ldots$ de pontos de $\mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$ tais que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{ij}(x_k) = \mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$$

e daí

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N_{ij}(x_k) \supset g_i^{(j)}(\mathbb{R}^n \setminus C_{ij})$$

e portanto temos:

$$F_j(\mathbb{R}^n) \setminus N_0 \subset \bigcup_{i,k=1}^{\infty} N_{ij}(x_k)$$

para cada j. Assim, temos provado o resultado.

Nosso intuito agora será dar uma importante caracterização para os conjuntos contavelmente n-retificáveis em termos do espaço tangente aproximado, definido logo abaixo:

Definição 4.2 *Seja M um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+k}$, $\mathcal{H}^n$-mensurável com $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$, para todo compacto K. Então um subespaço n-dimensional P de $\mathbb{R}^{n+k}$ será chamado de* ***espaço tangente aproximado para M em x*** *(x um ponto de R^{n+k} dado) se:*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_P f(y) d\mathcal{H}^n(y),$$

$\forall\, f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n+k})$, sendo $\eta_{x,\lambda} : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ definida por $\eta_{x,\lambda}(y) = \lambda^{-1}(y - x)$, $y, x \in \mathbb{R}^{n+k}$, $\lambda > 0$.

Caso exista, o espaço tangente aproximado para M em x será denotado por T_xM.

Seria conveniente enfraquecermos a condição $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$, $\forall K$ compacto na definição 4.2. Podemos, de fato, definir T_xM no caso em que assumimos simplesmente a existência de uma função positiva θ localmente $\mathcal{H}^n$-integrável em M. A existência de tal função θ é equivalente à exigência que M possa ser representado por uma união contável de conjuntos $\mathcal{H}^n$-mensuráveis com medida localmente $\mathcal{H}^n$-finita.

Definição 4.3 *Se M é um subconjunto $\mathcal{H}^n$-mensurável de $\mathbb{R}^{n+k}$ e θ é uma função positiva localmente $\mathcal{H}^n$-integrável em M, diremos que um dado subespaço n-dimensional P de $\mathbb{R}^{n+k}$ é o* ***espaço tangente aproximado para M em x com relação a*** *θ se:*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y)\theta(x+\lambda y)d\mathcal{H}^n(y) = \theta(x) \int_P f(y)d\mathcal{H}^n(y),$$

$\forall\, f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n+k})$

Pela mudança de variáveis $z = x + \lambda y$, a igualdade acima é equivalente a :

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-n} \int_M f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)d\mathcal{H}^n(z) = \theta(x) \int_P f(y)d\mathcal{H}^n(y),$$

$\forall\, f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n+k})$.

Observação 4.1 *Notemos que, se $\mu = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$ e se $M_\eta = \{x \in M; \theta(x) > \eta\}$, então $\mathcal{H}^n(M_\eta \cap K) < \infty$ para cada compacto K e $\theta^{*n}(\mu, M \setminus M_\eta, x) = 0$ qtp($\mathcal{H}^n$) $x \in M_\eta$ (pelo teorema (1.7)). Daí, para quase todo ($\mathcal{H}^n$) $x \in M_\eta$, o espaço tangente aproximado para M com relação a θ coincide com T_xM_η (como definido em 4.2) se este último existir. Segue que o espaço tangente aproximado de M com relação a duas diferentes funções θ e $\overline{\theta}$ coincidem qtp($\mathcal{H}^n$) em M. Por esta razão, também denotaremos o espaço tangente aproximado na definição 4.3 por T_xM (sem indicação da dependência de θ).*

O seguinte teorema nos dá uma importante caracterização dos conjuntos contavelmente n-retificáveis em termos da existência dos espaços tangentes aproximados.

Teorema 4.1 *Seja M um conjunto $\mathcal{H}^n$-mensurável. Entao M é contavelmente n-retificável se, e somente se, existir uma função θ positiva e localmente $\mathcal{H}^n$-integrável em M com relação a qual o espaço tangente aproximado T_xM exista qtp($\mathcal{H}^n$) $x \in M$.*

Observação 4.2 *Se M é $\mathcal{H}^n$-mensurável e contavelmente n-retificável, então podemos escrever M como uma união disjunta $\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$, sendo $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, M_j é $\mathcal{H}^n$-mensurável e $M_j \subset N_j$ para $j \geq 1$, sendo N_j uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$.*

De fato, para verificarmos esta observação, basta definirmos indutivamente $M_j = (M \cap N_j) \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} M_i$, $j \geq 1$, sendo cada N_j uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade e $M_0 \equiv M \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ tendo medida nula. Tais N_j existem pelo lema 4.1. Mostraremos logo em seguida que $T_xM = T_xN_j$ qtp($\mathcal{H}^n$) $x \in M_j$. Este é um fato bastante usado.

Demonstração: **(Teorema (4.1))** ($\Rightarrow$) Suponhamos então que M é um conjunto contavelmente n-retificável. Então, como descrito na observação acima, podemos escrever M como uma união disjunta $\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$, sendo $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, $M_j \subset N_j$, $j \geq 1$, N_j é uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional e M_j é $\mathcal{H}^n$-mensurável. Seja $\mu = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$, sendo θ qualquer função positiva localmente $\mathcal{H}^n$-integrável em M. Pelo teorema 1.7

(1) $\theta^{*n}(\mu, M \setminus M_j, x) = 0$ *qtp* ($\mathcal{H}^n$) $x \in M_j$.

Além disso, como N_j é $\mathcal{C}^1$, temos, pelo teorema de diferenciação 1.11

(2) $\theta^n(\mu, M_j, x) = \lim_{\rho \to 0^+} \dfrac{\mu(B_\rho(x) \cap M_j)}{\mathcal{H}^n(B_\rho(x) \cap N_j)} = \theta(x)$ *qtp* ($\mathcal{H}^n$) $x \in M_j$.

De (1), (2) e do fato de N_j ser $\mathcal{C}^1$, segue facilmente que o espaço tangente aproximado para M com relação a θ existe *qtp* ($\mathcal{H}^n$) $x \in M_j$ e coincide com T_xN_j.

Ao invés de apenas a volta do teorema anterior, vale um resultado muito mais geral: (a volta do teorema corresponde ao caso em que $\mu = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$ no resultado abaixo; veja observação em seguida)

Teorema 4.2 *Seja μ uma medida de Radon em $\mathbb{R}^{n+k}$ e para cada $x \in \mathbb{R}^{n+k}$ e $\lambda > 0$, seja $\mu_{x,\lambda}(A) = \lambda^{-n}\mu(x + \lambda A)$. Suponha que para quase todo x (μ), existam $\theta(x) \in (0, \infty)$ e um subespaço n-dimensional $P \subset \mathbb{R}^{n+k}$ tais que:*

$$(*) \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \int f(y) d\mu_{x,\lambda}(y) = \theta(x) \int_P f(y) d\mathcal{H}^n(y).$$

(P é chamado ***espaço tangente aproximado para*** μ ***em x*** *e* $\theta(x)$ *é chamada* ***multiplicidade****). Seja* $M = \{x; (*)$ *acontece para algum* P *e algum* $\theta(x) \in (0, \infty)\}$ *e defina* $\theta(x) = 0$ *para* $x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus M$*.*

Então, M é contavelmente n-retificável, θ *é* $\mathcal{H}^n$*-mensurável em* $\mathbb{R}^{n+k}$ *e* $\mu = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$*.*

Observação 4.3 *Note que no caso* $\mu = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$*, sendo* θ *uma função positiva e localmente* $\mathcal{H}^n$*-integrável em* $\mathbb{R}^{n+k}$*, temos:*

$$\int f d\mu_{x,\lambda} = \int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y)\theta(x + \lambda y) d\mathcal{H}^n(y) ,$$

sendo $M = \{x; \theta(x) > 0\}$ *e daí o espaço tangente para* μ *em* x *é justamente o espaço tangente aproximado* $T_x M$ *com relação a* θ *(no sentido de 4.3). Daí, temos a volta do teorema 4.1 nesse caso especial.*

4.2 Gradientes, Jacobianos, Área e Co-Área

Generalizaremos as noções de gradiente e jacobiano num conjunto contavelmente n-retificável. Feito isto, mostraremos que neste contexto continuam válidas as Fórmulas da Área e da Co-Área.

Em toda esta seção, M denotará um conjunto $\mathcal{H}^n-$mensurável e contavelmente n-retificável; assim, podemos expressar M como uma união disjunta $\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$, sendo $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, $M_j \subset N_j$, $j \geq 1$, N_j é uma $\mathcal{C}^1$-subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$ e M_j é $\mathcal{H}^n$-mensurável.

Definição 4.4 *Seja f uma função localmente lipschitz em um aberto* $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *com* $M \subset U$*. Definimos o* ***gradiente de f*** $\nabla^M f$ *qtp(*$\mathcal{H}^n$*) em M por:*

$$\nabla^M f(x) = \nabla^{N_j} f(x),$$

sempre que $x \in M_j$ *e* $f\big|_{N_j}$ *for diferenciável (o que é verdade qtp(*$\mathcal{H}^n$*)* $x \in M_j$ *em virtude do teorema de Rademacher 3.3 junto com a hipótese de* N_j *ser* $\mathcal{C}^1$*)*

Observação 4.4 *Notemos que, pela observação 4.2,* $\nabla^M f(x) \in T_xM$ *qtp(*$\mathcal{H}^n$*)* $x \in M$ *e, a menos de um conjunto de medida nula, independe da particular decomposição* $\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ *usada na definição; isto é,* $\nabla^M f$ *está bem definido. (De fato, como* $T_xN_j = T_xM$ *qtp(*$\mathcal{H}^n$*)* $x \in M_j$ *e como* T_xM *independe da particular decomposição* $\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$*, podemos deduzir que* $\nabla^M f$ *também independe da decomposição, a menos de um conjunto de medida nula).*

Tendo definido $\nabla^M f$, podemos agora definir a **aplicação linear induzida por f** $d^M f_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ em todos os pontos para os quais T_xM e $\nabla^M f(x)$ existam, por:

$$d^M f_x(\tau) = <\tau, \nabla^M f(x)>, \quad \tau \in T_xM$$

Se $f = (f^1, \ldots, f^N)$ toma valores em $\mathbb{R}^N$ (cada f^j localmente lipschitz em U, $j = 1, \ldots, N$), definimos $d^M f_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por:

$$d^M f_x(\tau) = \sum_{j=1}^{N} <\tau, \nabla^M f^j(x)> e_j \tag{4.1}$$

No caso em que $N \geq n$, definimos o **jacobiano** $J_M f(x)$ $qtp(\mathcal{H}^n)$ $x \in M$ por:

$$J_M f(x) = \sqrt{det(d^M f_x)^* \circ (d^M f_x)}$$

como no caso suave 3.6, sendo $(d^M f_x)^* : \mathbb{R}^N \longrightarrow T_xM$ a adjunta de $d^M f_x$.

Agora temos condições de generalizar a fórmula da área:

Teorema 4.3 ***(Fórmula Geral da Área)****Se* $f = (f^1, \ldots, f^N)$*,* $N \geq n$*, então:*

$$\int_A J_M f d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y)$$

para qualquer conjunto $A \subset M$ $\mathcal{H}^n$*-mensurável.*

Demonstração: Suponhamos (após uma possível decomposição de "quase todo" ($\mathcal{H}^n$) M_j em uma união contável e usando o teorema de aproximação $\mathcal{C}^1$ (2.4)) que

$f\big|_{M_j} = g_j\big|_{M_j}$, sendo g_j de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^{n+k}$, $j \geq 1$. Tendo em vista as definições 4.4 e 4.1, temos:

$$J_M f(x) = J_{N_j} g_j(x) \quad qtp(\mathcal{H}^n) \quad x \in M_j.$$

Então, $J_M f$ é $\mathcal{H}^n$-mensurável e pelo caso suave da fórmula da área (teorema 3.6 com N_j no lugar de M, $A \cap M_j$ no lugar de A e g_j no lugar de f), temos:

$$\int_{A \cap M_j} J_M f d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap M_j \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y).$$

Agora, somando em $j \geq 1$ e usando o fato que se $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é localmente lipschitz e B tem medida nula então $\mathcal{H}^n(\psi(B)) = 0$, concluímos a demonstração do teorema.

Notemos também que, se g é qualquer função não-negativa $\mathcal{H}^n$-mensurável em M, então aproximando g por funções simples, o teorema anterior implica a fórmula mais geral:

$$\int_M g J_M f d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^0 \Big) d\mathcal{H}^N(y).$$

No caso em que f é 1:1 em M, isto se torna:

$$\int_M g J_M f d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} g \circ f^{-1} d\mathcal{H}^N. \tag{4.2}$$

Iremos agora generalizar a fórmula da co-área para o caso em que M é simplesmente $\mathcal{H}^n$-mensurável e contavelmente n-retificável e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é localmente lipschitz com $N < n$ (U: aberto e $M \subset U$ como antes). De fato, podemos definir, (como no caso suave descrito na seção 2.3)

$$J_M^* = \sqrt{det(d^M f_x) \circ (d^M f_x)^*}$$

com $d^M f_x$ como em 4.1 e $(d^M f_x)^* =$ *adjunta de* $d^M f_x$.

Então, vale:

Teorema 4.4 ***(Fórmula Geral da Co-Área)*** *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ localmente lipschitz com $N < n$ e M $\mathcal{H}^n$-mensurável e contavelmente n-retificável. Então, para todo conjunto $\mathcal{H}^n$-mensurável $A \subset M$, vale:*

$$\int_A J_M^* f d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y)$$

Isto segue do caso $\mathcal{C}^1$ da fórmula da co-área (teorema 3.7) usando a decomposição $M = \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ e o teorema de aproximação (2.4) da mesma maneira que foi feito na discussão acima da fórmula da área.

Assim como para o caso suave, aproximando uma dada função não-negativa g por funções simples, deduzimos do teorema 4.4 uma fórmula mais geral :

$$\int_A g J_M^* d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{f^{-1}(y) \cap M} g d\mathcal{H}^{n-N} \Big) d\mathcal{L}^N(y). \tag{4.3}$$

4.3 Teorema da Estrutura

Este impressionante teorema descreve a estrutura de subconjuntos arbitrários de $\mathbb{R}^{n+k}$. Provado para subconjuntos 1-dimensional de $\mathbb{R}^2$ por Besicovitch em 1939, foi generalizado para dimensões superiores por Federer em 1947.

Inicialmente introduziremos a noção de conjuntos puramente não n-retificáveis:

Definição 4.5 *Seja P um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+k}$. Diremos que P é* ***puramente não n-retificável*** *se "quase todas"($\mathcal{H}^n$) as suas projeções em subespaços n-dimensionais de $\mathbb{R}^{n+k}$ têm medida nula.*

Ou seja, podemos dizer que um conjunto puramente não n-retificável P é invisível em quase todas ($\mathcal{H}^n$) direções.

O teorema, de prova não trivial, diz o seguinte:

Teorema 4.5 ***(Teorema da Estrutura)*** *Seja E um subconjunto arbitrário qualquer de $\mathbb{R}^{n+k}$ com $\mathcal{H}^n(E) < \infty$. Então, E pode ser decomposto em dois subconjuntos disjuntos $E = R \cup P$, com R contavelmente n-retificável e P puramente não n-retificável.*

Como consequência imediata deste teorema, juntamente com a definição 4.5, temos o seguinte resultado de retificabilidade de um conjunto:

Teorema 4.6 ***(Teorema de Retificabilidade)*** *Se* $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *é um subconjunto arbitrário qualquer que pode ser escrito como uma união contável* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ *com* $\mathcal{H}^n(A_j) < \infty, \forall j$ *e se qualquer subconjunto* $B \subset A$ *com medida* $\mathcal{H}^n$*-positiva tiver a propriedade* $\mathcal{H}^n(p(B)) > 0$ *para qualquer projeção n-dimensional, então* A *é contavelmente n-retificável.*

Capítulo 5

O conceito de n-varifold

Neste capítulo, desenvolveremos a teoria dos n-varifolds nos concentrando particularmente nos n-varifolds estacionários, que generalizam a noção clássica de subvariedades mínimas de $\mathbb{R}^{n+k}$. Naturalmente injetado no espaço dos n-varifolds em uma subvariedade M são os subconjuntos k-retificáveis de M, que inclui as subvariedades k-dimensionais bem como superfícies k-dimensionais mais gerais em M.

Um varifold k-dimensional em uma subvariedade M é dito *retificável (integral)* se ele pode ser fortemente aproximado por uma combinação linear positiva real (inteira) de varifolds correspondentes a subvariedades k-dimensionais continuamente diferenciáveis de M. A qualquer objeto geométrico clássico k-dimensional em M corresponde um varifold integral k-dimensional em M.

Se V é qualquer varifold em M, então definiremos um funcional linear δV no espaço vetorial dos campos vetoriais suaves em M com suporte compacto. Chamaremos δV de *primeira variação de V*. Diremos que V é *estacionário* se $\delta V = 0$. No caso em que V corresponder a uma subvariedade M, representaremos δV em termos da curvatura média da subvariedade e da normal exterior à fronteira da subvariedade, que é tangente a subvariedade. Reciprocamente, δV determina a curvatura média e a normal exterior. Então, para qualquer varifold V, *a primeira variação δV é em algum sentido a curvatura média de V junto com a fronteira de V.*

5.1 Definições Básicas e Propriedades

Nesta seção, será definido o conceito de n-varifold retificável encontrado em [1]. Veremos mais tarde que esta definição é essencialmente equivalente à noção de varifold retificável dada por Allard em [4].

Definição 5.1 *Sejam M um conjunto contavelmente n-retificável e $\mathcal{H}^n$-mensurável e θ uma função em M positiva e localmente $\mathcal{H}^n$-integrável. Correspondente a tal par (M, θ), definimos o* ***n-varifold retificável*** *$\underline{\underline{v}}(M, \theta)$ como sendo simplesmente a classe de equivalência de todos os pares $(\bar{M}, \bar{\theta})$, sendo $\bar{M}$ contavelmente n-retificável com*
$\mathcal{H}^n((M \setminus \bar{M}) \cup (\bar{M} \setminus M)) = 0$ e $\bar{\theta} = \theta$ qtp($\mathcal{H}^n$) em $M \cap \bar{M}$.

θ é chamada **função multiplicidade** de $\underline{\underline{v}}(M, \theta)$. Se a função multiplicidade tomar valores inteiros qtp($\mathcal{H}^n$), $\underline{\underline{v}}(M, \theta)$ será chamado de **n-varifold retificável de multiplicidade inteira** (ou simplesmente **n-varifold inteiro**).

Definição 5.2 *Associado a um n-varifold retificável $V = \underline{\underline{v}}(M, \theta)$, existe uma medida de Radon μ_V, chamada* ***medida peso de V*** *definida por:*

$$\mu_V \equiv \mathcal{H}^n \lfloor \theta,$$

sendo que convencionamos desde já $\theta = 0$ em $\mathbb{R}^{n+k} \setminus M$.

Ou seja, para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ $\mathcal{H}^n$-mensurável, temos:

$$\mu_V(A) = \int_{A \cap M} \theta d\mathcal{H}^n.$$

Definição 5.3 *A* ***massa*** *(ou peso) de V é definida por:*

$$\underline{\underline{M}}(V) = \mu_V(\mathbb{R}^{n+k}).$$

Notemos que, em virtude do teorema 4.2, uma medida abstrata de Radon μ é, atualmente, μ_V para algum n-varifold retificável V se, e somente se, μ tem um espaço tangente aproximado T_x com multiplicidade $\theta(x) \in (0, \infty)$ qtp (μ) $x \in \mathbb{R}^{n+k}$. Neste caso, $V = \underline{\underline{v}}(M, \theta)$, sendo $M = \{x; \theta^{*n}(\mu, x) > 0\}$.

Definição 5.4 *Dado um n-varifold retificável* $V = \underline{\underline{v}}(M, \theta)$*, definimos o* ***espaço tangente*** T_xV *como sendo o espaço tangente aproximado de* μ_V *(definido no teorema 4.2 caso este exista.*

Então:

$$T_xV = T_xM \ \textit{qtp} \ (\mathcal{H}^n) \ x \in M,$$

sendo T_xM o espaço tangente aproximado de M com relação a função multiplicidade θ (ver teorema 4.3 e observação (3.1)).

Ainda para $V = \underline{\underline{v}}(M, \theta)$, definimos o **suporte de V**, denotado **supp (V)** por:

$$supp(V) \equiv supp(\mu_V).$$

Definição 5.5 *Para qualquer subconjunto* $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$*,* $\mathcal{H}^n$*-mensurável,* $\boldsymbol{V} \lfloor \boldsymbol{A}$ *é o n-varifold retificável definido por:*

$$V \lfloor A = \underline{\underline{v}}(M \cap A, \theta | (M \cap A)).$$

Definição 5.6 *Dado* $V = \underline{\underline{v}}(M, \theta)$ *e uma sequência* $V_k = \underline{\underline{v}}(M_k, \theta_k)$ *de n-varifolds retificáveis, diremos que* V_k ***converge*** *para* V *e escreveremos* $V_k \longrightarrow V$*, se* $\mu_{V_k} \longrightarrow \mu_V$ *no sentido usual das medidas de Radon.*

Queremos agora discutir a noção de aplicação de um n-varifold retificável por uma aplicação Lipschitz.

Definição 5.7 *Seja* $V = \underline{\underline{v}}(M, \theta)$*, sendo* $M \subset U$*,* $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *aberto e* $W \subset \mathbb{R}^{n+k_1}$ *também um aberto. Seja* $f : (suppV) \cap U \longrightarrow W$ *uma função lipschitz 1:1 e própria (isto é,* $f^{-1}(K) \cap supp(V)$ *é compacto,* $\forall K \subset W$ *compacto). Definimos o* ***varifold imagem*** $f_\sharp V$ *por:*

$$f_\sharp V \equiv \underline{\underline{v}}(f(M), \theta \circ f^{-1}).$$

Mais geralmente, se f satisfaz as condições acima, exceto que f não seja necessariamente 1:1, então definimos

$$f_\sharp V \equiv \underline{\underline{v}}(f(M), \tilde{\theta}),$$

sendo $\tilde{\theta}$ definida em $f(M)$ por:

$$\sum_{x \in f^{-1}(y) \cap M} \theta(x) \Big(\equiv \int_{f^{-1}(y) \cap M} \theta d\mathcal{H}^0 \Big).$$

Note que $\tilde{\theta}$ é localmente $\mathcal{H}^n$-integrável em W em virtude da *Fórmula da Área* (seção 3.2) e de fato

$$\underline{\underline{M}}(f_\sharp V) = \int_{f(M)} \tilde{\theta} d\mathcal{H}^n = \int_M J_M f \theta d\mathcal{H}^n, \tag{5.1}$$

sendo $J_M f$ o jacobiano de f relativo a M, ou seja:

$$J_M f = \sqrt{det(d^M f_x)^* \circ (d^M f_x)}$$

e $d^M f_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k_1}$ é a aplicação linear induzida por f.

5.2 A Primeira Variação de um n-Varifold

Suponhamos $\{\phi_t\}_{-\epsilon<t<\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$ uma família de difeomorfismos em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ satisfazendo:

$$\begin{cases} (1)\ \phi_0 = \underline{\underline{1}}_U \quad \exists \text{ compacto } K \subset U \text{ tal que } \phi_t|_{U \setminus K} = \underline{\underline{1}}_{U \setminus K}\ ,\ \forall\, t\ \in (-\epsilon, \epsilon); \\ (2)\ (x,t) \longmapsto \phi_t(x) \text{ é uma aplicação suave de } U \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U. \end{cases} \tag{5.2}$$

Então, se $V = \underline{\underline{v}}(M, \theta)$ é um n-varifold retificável e se $K \subset U$ é um compacto como em (5.2) acima, então temos, de acordo com (5.1):

$$\underline{\underline{M}}(\phi_{t\sharp}(V \lfloor K)) = \int_{M \cap K} J_M \phi_t \theta d\mathcal{H}^n$$

e daí, nós podemos calcular a **primeira variação** $\frac{d}{dt}\underline{\underline{M}}(\phi_{t\sharp}(V\lfloor K))\big|_{t=0}$ exatamente como na seção (2.4). Nós então deduzimos:

$$\frac{d}{dt}\underline{\underline{M}}(\phi_{t\sharp}(V\lfloor K)\big|_{t=0} = \int_M div_M X d\mu_V, \tag{5.3}$$

sendo $X|_x = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)\big|_{t=0}$ o vetor velocidade inicial para a família $\{\phi_t\}$ e sendo $div_M X$ como no capítulo 2:

$$div_M X = \nabla_j^M X^j (\equiv e_j \cdot (\nabla^M X^j))$$

($\nabla^M X^j$ como na seção (3.2)).

Podemos agora enunciar as seguintes definições:

Definição 5.8 *Diremos que um n-varifold retificável $V = \underline{\underline{v}}(M,\theta)$ é **estacionário em U** se $\int div_M X d\mu_V = 0$ para qualquer campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1$ em U com suporte compacto em U.*

Mais geralmente, se N é uma subvariedade $(n+k_1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$, $(k_1 \leq k)$, U é um subconjunto aberto de N, $M \subset N$ e se a família $\{\phi_t\}$ é como em (5.2), então é razoável definirmos os seguintes conceitos (nos quais $\bar{B}$ é a segunda forma fundamental de N):

Definição 5.9 *Se $U \subset N$ é um aberto e $M \subset N$ é como acima, então diremos que $V = \underline{\underline{v}}(M,\theta)$ é **estacionário em U** se:*

$$\int_U div_M X d\mu_V = -\int_U X \cdot \underline{\underline{\overline{H}}}_M d\mu_V$$

para todo campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1$ em U com suporte compacto em U, sendo $\underline{\underline{\overline{H}}}_M = \sum_{i=1}^{n} \overline{B}_x(\tau_i,\tau_i)$, e $\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$ é qualquer base ortonormal para o espaço tangente aproximado T_xM de M em x.

Notemos que por (5.3), o qual permanece válido se $U \subset N$, isto é equivalente a $\frac{d}{dt}\underline{\underline{M}}(\phi_{t\sharp}(V\lfloor K))\big|_{t=0} = 0$ sempre que $\{\phi_t\}$ for como em (5.2), com $U \subset N$.

Será conveniente generalizarmos estas noções de varifold estacionário do seguinte modo:

Definição 5.10 *Seja* $V = \underline{\underline{v}}(M,\theta)$ *um n-varifold retificável. Suponhamos* $\underline{\underline{H}}$ *uma função localmente* μ_V*-integrável em* $M \cap U$ *com valores em* $\mathbb{R}^{n+k}$*. Diremos que V tem* ***curvatura média generalizada*** $\underline{\underline{H}}$ *em U* ($U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *aberto) se:*

$$\int_U div_M X d\mu_V = -\int_U X \cdot \underline{\underline{H}} d\mu_V$$

para todo campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1$ *em U com suporte compacto em U.*

Observação 5.1

1. *No caso que M é suave, com* $(\overline{M} \setminus M) \cap U = \emptyset$ *e quando* $\theta \equiv 1$*, a curvatura média genteralizada de V é exatamente a curvatura média ordinária de M como descrita no capítulo 2.*

2. *V é estacionário em U* ($U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *aberto) no sentido da definição 5.8 precisamente quando tem curvatura média generalizada igual a zero em U e V é estacionário em U (U aberto em N) no sentido da definição 5.9 precisamente quando possui curvatura média generalizada* $\overline{\underline{\underline{H}}}_M$*.*

5.3 Varifolds Gerais

Definiremos agora a noção de n-varifold geral, seguindo essencialmente o trabalho de W.K. Allard [4], mostrando como aplicar uma função suave em um varifold.

Introduziremos o espaço tangente a um varifold geral num ponto. A classe mais importante de varifolds é a dos varifolds retificáveis e a dos varifolds integrais, que também serão definidos nesta seção.

A questão de quando um n-varifold geral atualmente corresponde a um varifold n-retificável (no sentido da seção (4.1))será também respondida nesta seção.

Mostraremos como os conjuntos contavelmente retificáveis são naturalmente inseridos no conjunto dos varifolds retificáveis.

Seja $G(n+k,n)$ a coleção de todos os subespaços n-dimensionais de $\mathbb{R}^{n+k}$, equipado com a métrica $\rho(S,T) = |\rho_S - \rho_T| = (\sum(\rho_S^{ij} - \rho_T^{ij})^2)^{\frac{1}{2}}$, sendo ρ_S, ρ_T as projeções ortogonais de $\mathbb{R}^{n+k}$ em S, T respectivamente e $\rho_S^{ij} = e_i \cdot \rho_S(e_j)$, $\rho_T^{ij} = e_i \cdot \rho_T(e_j)$ são as correspondentes matrizes com relação a base ortonormal padrão $\{e_1, \ldots, e_{n+k}\}$ para $\mathbb{R}^{n+k}$.

Para um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$, definimos $G_n(A) = A \times G(n+k,n)$ equipado com a métrica produto. É claro então que $G_n(K)$ é compacto para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

Definição 5.11 *Um **n-varifold geral** é uma medida de Radon V em $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ e um **n-varifold geral em U** é uma medida de Radon V em $G_n(U)$.*

Denotaremos por $V_n(U)$ o espaço de todos os n-varifolds gerais em U.

Definição 5.12 *Dado um n-varifold geral $V \in V_n(U)$, definimos a correspondente medida de Radon $||V||$, chamada **peso de V** por:*

$$||V||(A) \equiv V(\{(x,S); x \in A \ \ e \ \ S \in G(n,n+k)\})$$

para cada conjunto de Borel $A \subset U$.

Para qualquer subconjunto de Borel $A \subset U$, a usual terminologia $V\lfloor G_n(A)$ denotará a restrição de V a $G_n(A)$, ou seja :

$$(V\lfloor G_n(A))(B) \equiv V(B \cap G_n(A)),\ B \subset G_n(U).$$

Agora mostraremos como associar, a cada subconjunto n-retificável de U, um n-varifold. Seja M um subconjunto n-retificável de U. Então, definimos **v(M)**$\in V_n(U)$ por:

$$v(M)(E) = \mathcal{H}^n(\{x \in U\ ;\ (x, T_xM) \in E\})$$

para cada conjunto de Borel $E \in G_nM$, sendo T_xM o espaço tangente aproximado a M em x e que portanto existe $qtp(\mathcal{H}^n)\ x \in M$. Claramente v(M) é um n-varifold.

Definição 5.13 *Diremos que $V \in V_n(U)$ é um **n-varifold geral retificável** se existirem números positivos $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ e conjuntos n-retificáveis $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ tais que:*

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v(M_k).$$

*Se os c_i's forem inteiros positivos, diremos que V é um **n-varifold integral**.*

Para um n-varifold retificável, definimos a **densidade** de V como sendo a função θ dada por:

$$\theta(x) = \sum \{c_k; x \in M_k\}.$$

Mostremos agora que a definição de n-varifold retificável dada na seção (4.1) é essencialmente equivalente à definição que acabamos de enunciar.

Dado um n-varifold retificável $\underline{\underline{v}}(M, \theta)$ em U (no sentido da seção 4.1), existe um n-varifold geral V correspondente (também denotado por $\underline{\underline{v}}(M, \theta)$ ou simplesmente $\underline{\underline{v}}(M)$ no caso $\theta \equiv 1$ em M) definido por:

$$V(A) = \mu_V(\pi(TM \cap A)), \; A \subset G_n(U)$$

sendo $||V|| = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$ e $TM = \{(x, T_x M); x \in M_*\}$ com $M_* = \{x \in M;$ M tem espaço tangente aproximado com relação a θ em x no sentido da definição (4.3) $\}$. Aqui e daqui pra frente, π denotará a projeção $(x, S) \longrightarrow x$ de $G_n(U)$ em U.

Evidentemente V assim definido tem medida peso $||V|| = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$.

A questão de quando um n-varifold geral atualmente corresponde a um varifold n-retificável é satisfatoriamente respondida no próximo teorema. Antes, porém, precisaremos da seguinte definição e lema técnico:

Definição 5.14 *Dado $T \in G(n+k, n)$, $x \in U$ e $\theta \in (0, \infty)$, diremos que um n-varifold V em U tem **espaço tangente T com multiplicidade** θ **em x** se:*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} V_{x,\lambda} = \theta \underline{\underline{v}}(T), \qquad (*)$$

sendo o limite no sentido usual das medidas de Radon em $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Em $(*)$ usamos a notação $V_{x,\lambda}$ para o n-varifold definido por:

$$V_{x,\lambda}(A) = \lambda^{-n} V(\{(\lambda y + x, S); (y, S) \in A\} \cap G_n(U)),$$

para $A \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Observação 5.2 *Note que pela definição 5.14* $(*)$ *implica que a medida peso* $||V||$ *tem espaço tangente aproximado* T *com multiplicidade* θ *em* x*, no sentido do teorema 4.2.*

Lema 5.1 *Seja* V *um n-varifold em* U*. Então, existe uma medida de Radon* $\eta_V^{(x)}$ *em* $G(n+k,n)$ *qtp*$(\|V\|)$ $x \in U$ *tal que, para qualquer* β *contínua em* $G(n+k,n)$*,*

$$\int_{G(n+k,n)} \beta(S)d\eta_V^{(x)}(S) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{G_n(B_\rho(x))} \beta(S)dV(y,S)}{\|V\|(B_\rho(x))}.$$

Além do mais, para cada conjunto de Borel $A \subset U$*,*

$$\int_{G_n(A)} \beta(S)dV(x,S) = \int_A \int_{G(n+k,n)} \beta(S)d\eta_V^{(x)}(S)d\|V\|(x)$$

se $\beta \geq 0$.

Demonstração: Ver [1].

Finalmente temos o teorema que diz quando um n-varifold é retificável:

Teorema 5.1 ***(Primeiro Teorema de Retificabilidade)*** *Seja* V *um n-varifold geral em* U *que possui espaço tangente* T_x *com multiplicidade* $\theta(x) \in (0,\infty)$ *qtp*$(||V||)$ $x \in U$.

Então, V *é n-retificável. De fato,* $M \equiv \{x \in U; T_x, \theta(x) \text{ existem}\}$ *é* $\mathcal{H}^n$*-mensurável, contavelmente n-retificável,* θ *é localmente* $\mathcal{H}^n$*-integrável em* M *e* $V = \underline{\underline{v}}(M,\theta)$.

Demonstração: Como mencionamos na observação 5.2, $\|V\|$ possui espaço tangente aproximado T_x com multiplicidade $\theta(x)$ no sentido do teorema 4.2 *qtp*$(\|V\|)$ $x \in U$. Daí, pelo teorema 4.2, temos que M é $\mathcal{H}^n$-mensurável, contavelmente n-retificável e θ é localmente $\mathcal{H}^n$-integrável em M e de fato $\|V\| = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$ em U (se fizermos $\theta = 0$ em $U \setminus M$).

Agora, se $x \in M$ é um dos pontos para os quais $\eta_V^{(x)}$ existe e se β é uma função contínua e não negativa em $G(n+k,n)$, então evidentemente

$$\eta_V^{(x)}(\beta) = \theta(x)\beta(T_x)$$

e pela segunda parte do lema 5.1, temos:

$$\int_{G_n(A)} \beta(S) dV(x,S) = \int_{M\cap A} \beta(T_x) d\|V\|(x)$$

para todo conjunto de Borel $A \subset U$. Pela arbitrariedade de A e β segue facilmente que

$$\int_{G_n(U)} f(x,S) dV(x,S) = \int_{M} f(x,T_x) d\|V\|(x)$$

para toda $f \in \mathcal{C}_c(G_n(U))$ e daí temos mostrado que $V = \underline{\underline{v}}(M,\theta)$ como queríamos (já que $\|V\| = \mathcal{H}^n \lfloor \theta$ como havíamos mencionado anteriormente).

5.4 Primeira Variação de um Varifold Geral

Podemos agora dar sentido a primeira variação de um n-varifold geral V em U. Primeiramente, precisaremos discutir a noção de aplicação de uma função em um tal varifold geral. Introduziremos a noção de varifold estacionário, que generaliza a noção de subvariedade mínima de $\mathbb{R}^{n+k}$. Por fim definiremos a curvatura média generalizada e a co-normal unitária de tal varifold.

Definição 5.15 *Sejam $U, \tilde{U}$ abertos de $\mathbb{R}^{n+k}$ e $f : U \longrightarrow \tilde{U}$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ com $f|_{(supp\mu_V)\cap U}$ própria. Definimos então o **varifold imagem** $f_\sharp V$ em $\tilde{U}$ por:*

$$f_\sharp V(A) \equiv \int_{F^{-1}(A)} J_s f(x) dV(x,S)$$

com $A \subset G_n(\tilde{U})$ um conjunto de Borel e sendo
$F : G_n^+(U) \longrightarrow G_n(\tilde{U})$ definida por $F(x,S) \equiv (f(x), df_x(S))$
$J_S f(x) = (det((df_x|_S)^* \circ (df_x|_S)))^{\frac{1}{2}}$, $(x,S) \in G_n(U)$ e
$G_n^+(U) = \{(x,S) \in G_n(U); J_S f(x) \neq 0\}$.

Note que esta coincide com nossa prévia definição dada na seção 4.1 no caso em que $V = \underline{\underline{v}}(M,\theta)$.

Definição 5.16 *Dado qualquer n-varifold V em U, definimos a **primeira variação** δV **de V** como sendo o funcional linear em $\mathcal{K}(U, \mathbb{R}^{n+k})$ dado por:*

$$\delta V(X) = \underline{\underline{M}}(\phi_{t_\sharp} V \lfloor G_n(K))\Big|_{t=0},$$

sendo $\{\phi_t\}_{-1<t<1}$ *uma família qualquer de difeomorfismos como em 3.12 e* K *é como em 3.12(3).*

É claro que podemos computar $\delta V(X)$ explicitamente diferenciando-se sob o sinal da integral na definição 5.15.

Isto nos dá, (exatamente como foi feito na seção (2.4)).

$$\delta V(X) = \int_{G_n(U)} div_S X(x) dV(x,S)$$

sendo para qualquer $S \in G(n+k,n)$,

$$div_S X = \sum_{i=1}^{n+k} \nabla_i^S X^i = \sum_{i=1}^{n} < \tau_i, D_{\tau_i} X >,$$

sendo $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ uma base ortonormal para S e $\nabla_i^S = e_i \cdot \nabla^S$, com $\nabla^S f(x) = \rho_S(grad_{\mathbb{R}^{n+k}} f(x))$, $f \in \mathcal{C}^1(U)$ e ρ_S é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^{n+k}$ em S.

De modo análogo ao que definimos na seção 4.2, diremos que V é **estacionário em U** se $\delta V(X) = 0$, $\forall\, X \in \mathcal{K}(U, \mathbb{R}^{n+k})$.

Mais geralmente, V é de **primeira variação limitada em U** se para cada $W \subset\subset U$ existir uma constante $c < \infty$ tal que:

$$|\delta V(X)| < c \cdot sup_U |X|,\ \forall X \in \mathcal{K}(U, \mathbb{R}^{n+k}),\ com\ supp|X| \subset W$$

Evidentemente, pelo teorema geral da Representação de Riesz 1.9 esta exigência é equivalente a existência de uma medida de Radon $||\delta V||$ (a **medida variação total de** δV) em U caracterizada por:

$$||\delta V||(W) = sup\{|\delta V(X)|; X \in \mathcal{K}(U, \mathbb{R}^{n+k}),\ |X| \leq 1,\ supp|X| \subset W\}\ (< \infty),$$

para todo aberto $W \subset\subset U$.

Notemos então que, pelo teorema 1.9, podemos escrever:

$$\delta V(X) = \int_{G_n(U)} div_S X(x) dV(x,S) \equiv -\int_U \nu \cdot X d||\delta V||,$$

sendo ν uma função $||\delta V||$-mensurável com $|\nu| = 1$ qtp($||\delta V||$) em U.

Pela teoria de diferenciação 1.11 sabemos mais, que:

$$D_{\|V\|}\|\delta V\|(x) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\|\delta V\|(B_\rho(x))}{\|V\|(B_\rho(x))}$$

existe qtp($\|V\|$) e que, por 1.11(1.1) (fazendo $\underline{\underline{H}}(x) = D_{\|V\|}\|\delta V\|(x)\nu(x)$):

$$\int_U \nu \cdot X d\|\delta V\| = \int_U \underline{\underline{H}} \cdot X d\|V\| + \int_U \nu \cdot X d\sigma \, ,$$

sendo $\sigma = ||\delta V|| \lfloor Z$ e $Z = \{x \in U, D_{\|V\|}\|\delta V\|(x) = \infty\}$ ($\|V\|(Z) = 0$).

Então, podemos escrever:

$$\delta V(X) = \int_{G_n(U)} div_S X(x) dV(x,S) = -\int_U \underline{\underline{H}} \cdot X d\|V\| - \int_Z \nu \cdot X d\sigma$$

para todo $X \in \mathcal{K}(U, \mathbb{R}^{n+k})$.

Por analogia a identidade clássica 3.4 chamaremos $\underline{\underline{H}}$ de **curvatura média generalizada de V**, Z de **fronteira generalizada de V** e $\nu|_Z$ de **co-normal unitária generalizada de V**.

Capítulo 6

Ilustração do uso de n-varifold no estudo de interfaces na teoria de transição de fases de van der Waals-Cahn-Hilliard

Nosso intuito neste capítulo, é ilustrar o uso do conceito de n-varifold no estudo do comportamento assintótico de pontos críticos de funcionais de energia. Mais precisamente, na teoria de transição de fases de van der Waals-Cahn-Hilliard. Para um estudo detalhado do que será discutido neste capítulo indicamos o artigo [3]. O funcional em questão é

$$E_\epsilon(u) = \int_U \left\{ \epsilon|\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\epsilon} \right\} dx \tag{6.1}$$

definido num espaço de funções adequado e sendo W o potencial de poço duplo com mínimo local estrito em ± 1. Em particular, estamos interessados na caracterização das soluções quando $\epsilon \to 0$.

Os pontos críticos do funcional (6.1) satisfazem:

$$\epsilon \Delta u = \epsilon^{-1} W'(u) - \lambda \,, \tag{6.2}$$

sendo λ o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo da forma $\int_U u = m$.

Para soluções que são mínimos absolutos de energia com o vínculo acima, Modica [5] e Sternberg [6] usaram a técnica de Γ-convergência [10] para mostrar que (passando a uma subsequência) o limite dos mínimos de 6.1 quando $\epsilon \to 0$ é uma funcão com valor ± 1 em quase todo ponto e com interface de área mínima na classe apropriada das funções competidoras. As técnicas empregadas de Γ-convergência dependem essencialmente da minimalidade de energia das soluções.

Em [3], o objetivo é também a caracterização dos pontos críticos de 6.1 mas sem a hipótese de minimalidade de energia, ou seja, as soluções em questão são pontos críticos gerais de energia. Por este motivo as técnicas de Γ-convergência não são aplicáveis neste contexto.

Um bom entendimento de tais soluções é importante no estudo de problemas dinâmicos tais como a equação de Allen-Cahn e a equação de Cahn-Hilliard em domínios limitados. Daí a importância de se conhecer o limite assintótico de tais soluções quando $\epsilon \to 0$.

Nesta generalidade, a "aproximação" apropriada a ser usada é o conceito de n-varifold associado aos conjuntos de nível das soluções. Varifolds neste tipo de problema foram previamente usados por T. Ilmanen [7] no estudo do fluxo gradiente de um funcional semelhante e por Padilla-Tonegawa [11] no estudo do comportamento de pontos críticos do mesmo funcional estudado por Ilmanen, definidos em $U \subset \mathbb{R}^n$, que são mínimos locais de energia para n=3 e estáveis para n=2. O funcional em questão é:

$$F_\epsilon(u) = \int_U \left\{ \epsilon |\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\epsilon} \right\} dx$$

Com esta noção precisa de "aproximação" por varifolds, mostra-se que os conjuntos de nível das soluções convergem (no sentido aproximado) a um varifold (n-1)-retificável com curvatura média constante.

Em [4], prova-se que o suporte de um varifold retificável com curvatura média limitada é uma variedade suave em um subconjunto aberto e denso. Deste fato tem-se então uma caracterização da interface das soluções no sentido aproximado.

Além disso, esta variedade tem curvatura média nula quando o multiplicador de Lagrange não está presente ($\lambda = 0$) e tem curvatura média localmente constante no caso geral.

6.1 Hipóteses e Consequências Imediatas

Ao longo de todo este capítulo, assumiremos as seguintes hipóteses:

A: A função $W : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ é $\mathcal{C}^3$ e $W(\pm 1) = 0$. Para algum $\gamma \in (-1,1)$, $W' < 0$ em $(\gamma, 1)$ e $W' > 0$ em $(-1,\gamma)$. Para algum $\alpha \in (0,1)$ e $k > 0$, $W''(x) \geq k$ para todo $|x| \geq \alpha$.

B: $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado com fronteira Lipschitz ∂U. Seja uma sequência de funções $\{u^i\}_{i=1}^{\infty}$ em $\mathcal{C}^3(U)$ que satisfaz:

$$\epsilon_i \Delta u^i = \epsilon_i^{-1} W'(u^i) - \lambda_i \tag{2.1}$$

em U. Além disso, $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = 0$ e supomos que existem c_0, λ_0 e E_0 tais que $\sup_U |u^i| \leq c_0$, $|\lambda_i| \leq \lambda_0$ e

$$\int_U \left\{ \frac{\epsilon_i |\nabla u^i|^2}{2} + \frac{W(u^i)}{\epsilon_i} \right\} < E_0$$

para todo i.

Discutiremos agora algumas consequências imediatas das suposições.

Seja $\phi(s) = \displaystyle\int_0^s \sqrt{W(s)/2}ds$. Para cada i, definamos novas funções $w^i = \phi \circ u^i$. Estas duas funções w^i e u^i diferem apenas no modo como os conjuntos de nível são parametrizados. Logo, a informação essencial destes conjuntos é preservada. A vantagem de olharmos para w^i ao invés de u^i reside no fato da norma BV de w^i ser uniformemente limitada.

Como $|\nabla w^i| = \sqrt{W(u^i)/2} \cdot |\nabla u^i|$, temos:

$$\int_U |\nabla w^i| \leq \frac{1}{2} \int_U \left\{ \frac{\epsilon_i |\nabla u^i|^2}{2} + \frac{W(u^i)}{\epsilon_i} \right\} \leq \frac{E_0}{2} \tag{6.3}$$

Temos também que $\phi(-c_0) \leq w^i \leq \phi(c_0)$.

Pelo teorema de compacidade para funções de variação limitada (teorema 2.7), existem uma subsequência também denotada por $\{w^i\}$ e um limite pontual w^∞ qtp tais que:

$$\lim_{i\to\infty}\int_U |w^i - w^\infty| = 0 \qquad e \qquad \int_U |Dw^\infty| \leq \liminf_{i\to\infty}\int_U |\nabla w^i|$$

sendo $|Dw^\infty|$ a variação total da medida de Radon de valor vetorial Dw^∞.

Seja ϕ^{-1} a função inversa de ϕ e definamos

$$u^\infty = \phi^{-1}(w^\infty).$$

Então, $u^i \to u^\infty$ qtp e pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\int_U |u^i - u^\infty| \longrightarrow 0.$$

Por definição, temos:

$$\int_U W(u^\infty) = \int_U \liminf_{i\to\infty} W(u^i).$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\int_U \liminf_{i\to\infty} W(u^i) \leq \liminf_{i\to\infty}\int_U W(u^i)$$

e por sua vez

$$\liminf_{i\to\infty}\int_U W(u^i) = 0$$

pois se este limite assumisse qualquer valor positivo,tomando o limite em (6.3) chegaríamos numa contradição quanto a limitação da energia.

Isto mostra que $u^\infty = \pm 1$ qtp em U e os conjuntos $\{u^\infty = \pm 1\}$ têm perímetro finito em U, já que

$$||\partial\{u^\infty = 1\}||(U) = \frac{1}{2}\int_U |Du^\infty| = \frac{1}{\sigma}\int_U |Dw^\infty| \leq \frac{E_0}{2\sigma}$$

sendo

$$\sigma \equiv \int_{-1}^{1} \sqrt{W(s)/2}ds$$

e $||\partial A||$ denota o perímetro de A no sentido da seção (2.3).

Pelo Teorema de Gauss-Green generalizado para conjuntos de perímetro finito (teorema 2.8), existem um conjunto (n-1)-retificável $M^\infty \subset supp\|\partial\{u^\infty = 1\}\|$

e uma função vetorial unitária ν^∞ definida em M^∞ (apontando para $\{u^\infty = 1\}$) tais que:

$$\int_{\{u^\infty=1\}} divg = -\int_{M^\infty} \nu^\infty \cdot gd\mathcal{H}^{n-1}, \quad \forall g \in \mathcal{C}_c^1(U).$$

6.2 Varifolds Associados

Nesta seção, mostraremos como associar a cada solução u^i de (6.2) um varifold V^i (via w^i).

Pelo **Teorema de Sard**, $\{w^i = t\} \subset U$ é uma $\mathcal{C}^3$-hiperfície para quase todo ($\mathcal{L}^1$) t.

Definimos $V^i \in V_{n-1}(U)$ por:

$$V^i(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\{w^i = t\})(A)dt,$$

para cada conjunto de Borel $A \subset G_{n-1}(U)$. Notemos que:

$$||V^i||(A) = \int_a^b \mathcal{H}^{n-1}(\{w^i = t\} \cap A)dt$$

Pela Fórmula da Co-Área 3.7 temos:

$$\int_a^b \mathcal{H}^{n-1}(\{w^i = t\} \cap A)dt = \int_A |\nabla w^i|$$

e portanto

$$||V^i||(A) = \int_A |\nabla w^i|$$

para cada conjunto de Borel $A \subset U$.

Temos assim associado a cada u^i o varifold V^i. Podemos interpretar o varifold V^i como uma média ponderada dos conjuntos de nível de w^i.

6.3 Resultado Principal

Enunciaremos agora o resultado que nos dará a caracterização das soluções de 6.2. A demonstração deste teorema encontra-se em [3] e sua prova consiste no principal resultado provado neste artigo. Não nos preocupamos com sua demonstração já que nosso intuito é simplesmente ilustrar o uso do conceito de varifold neste contexto.

Teorema 6.1 *Seja V^i o varifold associado a u^i (via w^i). Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir:*

$$\lambda_i \to \lambda_\infty, \quad u^i \to u^\infty \; qtp \;\; V^i \to V \, (\textit{no sentido de varifold}).$$

Além do mais,

1. *Para cada $\phi \in \mathcal{C}_c(U)$,*
$$||V||(\phi) = \lim_{i\to\infty} \int \phi \frac{\epsilon_i |\nabla u^i|^2}{2} = \lim_{i\to\infty} \int \phi \frac{W(u^i)}{\epsilon_i} = \lim_{i\to\infty} \int \phi |\nabla w^i|;$$

2. *$supp\|\partial\{u^\infty = 1\}\| \subset supp\|V\|$ e $\{u^i\}$ converge uniformemente localmente para ± 1 em $U \setminus supp\|V\|$;*

3. *Para cada $\tilde{U} \subset\subset U$ e $0 < b < 1$, $\{|u^i| \leq 1 - b\} \cap \tilde{U}$ converge para $\tilde{U} \cap supp\|V\|$ no sentido da distância de Hausdorff;*

4. *O varifold limite V é retificável e o limite normalizado $\sigma^{-1}V$ é um varifold integral. Além do mais, a densidade $\theta(x) = \sigma N(x)$ de V satisfaz:*
$$N(x) = \begin{cases} \textit{ímpar} \;\; qtp(\mathcal{H}^n) x \in M^\infty, \\ \textit{par} \;\; qtp(\mathcal{H}^n) x \in supp\|V\| \setminus M^\infty \end{cases}$$

5. *A curvatura média generalizada H de V é dada por:*
$$H(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_\infty}{\theta(x)} \nu^\infty(x) \;\; qtp(\mathcal{H}^{n-1}) \; x \in M^\infty, \\ 0 \qquad\qquad qtp(\mathcal{H}^{n-1}) \; x \in supp||V|| \setminus M^\infty. \end{cases}$$

sendo ν^∞ a normal interior para M^∞.

O item (1) diz que no limite, a energia é igualmente dividida entre os dois termos do funcional energia 6.1. Ou seja, ocorre uma chamada *equipartição da energia.*

O item (4) garante a retificabilidade do varifold limite. Mais ainda, garante que o limite normalizado $\sigma^{-1}V$ é um varifold integral.

No item (5), fica estabelecido que o vetor curvatura média generalizada H de V é zero em $supp\|V\| \setminus M^\infty$ e é igual a $\dfrac{\lambda_\infty}{\theta(x)}\nu^\infty(x)$ em M^∞.

Dos itens (4) e (5), concluímos que V tem curvatura média limitada em U (já que a densidade de $\|V\|$ é limitada qtp em $supp\|V\|$).

A relação (5) entre o multiplicador de Lagrange λ_∞ (ou o potencial químico no modelo de fluido bifásico) e a curvatura média da interface limite, chamada *relação de Gibbs-Thompson* foi estabelecida por Luckhauss e Modica [9] no caso em que não há perda de energia no limite.

Temos ainda o seguinte resultado, provado por Allard em [4]:

Teorema 6.2 *O suporte de um varifold retificável com curvatura média limitada é uma variedade suave em um subconjunto aberto e denso.*

Logo, combinando este resultado com o teorema principal desta seção, concluímos que o suporte do varifold limite é uma variedade suave em um subconjunto aberto denso $\mathcal{O}$ (já que V é retificável com curvatura média limitada). Mais ainda, a multiplicidade N de V em $\mathcal{O}$ é localmente constante e daí o suporte tem curvatura média localmente constante por (5).

Claramente se nenhum multiplicador de Lagrange estiver presente, o suporte do varifold limite tem curvatura média nula.

Temos assim uma boa caracterização (no sentido aproximado) da interface das soluções no limite. Para soluções que são mínimos absolutos de energia com um dado vínculo, Modica [5] e Sternberg [6] mostraram que $\partial\{u^\infty = 1\}$ é uma hiperfície de área mínima absoluta com um dado vínculo. Neste caso, adicionando a hipótese (**A**), pelo teorema 6.1 acima, item (3) tem-se um resultado concernente a convergência da interface no sentido da medida de Hausdorff.

6.4 Mínimos Locais de Energia

Vamos agora discutir brevemente o caso em que os pontos críticos do funcional 6.1 são mínimos locais de energia.

Para tanto, precisaremos da seguinte

Definição 6.1 *Para $\tilde{U} \subset\subset U$, diremos que $u \in H^1(U)$ é um **mínimo local de energia** para E_ϵ se existir uma constante positiva c tal que $E_\epsilon(u) \leq E_\epsilon(\tilde{u})$ para todo $\tilde{u} \in H^1(U)$ satisfazendo:*

$$\int_U |u - \tilde{u}| < c \;\; e \;\; u - \tilde{u} = 0 \;\; em \;\; U \setminus \tilde{U}.$$

Podemos também (dependendo do problema) impor a condição de vínculo $\int_U (u - \tilde{u}) = 0$.

Com esta definição em mente, em [3] prova-se o seguinte:

Teorema 6.3 *Suponhamos, além das hipóteses (A) e (B), que $\{u^i\}$ é uma sequência de mínimos locais de energia em $\tilde{U} \subset\subset U$ para E_ϵ (com ou sem vínculo).*

Então, $N(x) = 1$ $qtp(\mathcal{H}^{n-1})$ em $\tilde{U} \cap supp\|V\|$. O conjunto $\partial\{u^\infty = 1\}$ em $\tilde{U}$ tem curvatura média constante $\frac{\lambda_\infty}{\sigma}\nu^\infty$ e não há perda de energia em $\tilde{U}$.

Claramente por este teorema e novamente pelo teorema 6.2, concluímos que o suporte do varifold limite (neste caso) é uma variedade suave em um subconjunto aberto denso.

Referências Bibliográficas

[1] SIMON, L., *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proc. Centre Math. Anal.Austral. Nat. Univ., **3** (1983).

[2] EVANS, L.; GARIEPY, R., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, (1992).

[3] HUTCHINSON, J.; TONEGAWA, Y., *Convergence of Phase Interfaces in the Waals-Cahn-Hilliard Theory*, Calculus of Variation and PDE, **10** (2000), 49-84.

[4] ALLARD, W., *On the First Variation of a Varifold*, Annals of Mathematics, **95** (3) (1972), 417-491.

[5] MODICA, L., *Gradient Theory of Phase Transitions and Minimal Interface Criteria*, Arch. Rational Mech. Annal, **98** (2) (1987), 123-142.

[6] STERNBERG, P., *The Effect of a Singular Perturbation on Nonconvex Variational Problems*, Arch. Rational Mech. Annal, **101** (3) (1988), 209-260.

[7] ILMANEN, T. *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brake's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (2) (1993), 417-461.

[8] ALMGREN, E. J., *The Theory of Varifolds*, mimeographed notes, Princeton University, Princeton, N.J., (1965).

[9] LUCKHAUSS, S.; MODICA, L., *The Gibbs-Thompson relation within the gradient theory of phase transitions*, Arch. Rational Mech. Annal, **107** (1) (1989), 71-83.

[10] DE GIORGI, E., *Convergence Problems for Functionals and Operators*, In Proc. Int. Meeting on recent methods in nonlinear analysis, eds. De Giorgi et al. Bolognar Pitagora, (1979), 223-244.

[11] PADILLA, P.; TONEGAWA, Y., *On the Convergence of Stable Phase Transitions*, Comm. Pure Appl. Math., **51** (1998), no.6, 551-579.

[12] HARDT, R., *An Introduction to Geometric Measure Theory*, Lecture Notes, Melbourne University (1979).

[13] FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York (1969).