UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EDGAR HELIODORO VENDRAMELLI DIAS

O ESTUDO EM GRUPOS PARA A 2ª FASE DA OBMEP 2013 E RESOLUÇÕES DE QUESTÕES EM VIDEO

SÃO CARLOS

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EDGAR HELIODORO VENDRAMELLI DIAS

O ESTUDO EM GRUPOS PARA A 2ª FASE DA OBMEP 2013 E RESOLUÇÕES DE QUESTÕES EM VIDEO

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

SÃO CARLOS

2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

D541eg

Dias, Edgar Heliodoro Vendramelli.
O estudo em grupos para a 2ª fase da OBMEP 2013 e resoluções de questões em vídeo / Edgar Heliodoro Vendramelli Dias. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
137 f.

Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. OBMEP. 3. Grupos de estudos. 4. DVD educativo. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM – UFSCar

Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa
ICTE - UFTM

Prof. Dr. José Antonio Salvador
DM - UFSCar

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade oferecida e por ter me dado saúde para que eu me dedicasse a esse trabalho**.**

Agradeço à minha mãe por dar-me muita força, pois se não fosse por ela eu não estaria aqui, ela sempre acreditou que esse sonho sempre iria realizar-se e não me deixou desanimar nunca.

Agradeço ao meu grande amor, Paula, por toda a força que me deu nesses dois anos de muita luta, por incentivar e motivar-me a continuar, mesmo nas horas mais difíceis, abrindo mão de finais de semana e viagens em virtude de meus estudos.

Agradeço à minha filha Leandra, que entrou em minha vida juntamente com o mestrado e foi de vital importância para ensinar-me o quão valioso são nossos familiares.

Agradeço ao Prof. Dr. Pedro Malagutti pela orientação e comprometimento com meu trabalho e pelas intervenções que fez.

Em especial, aos amigos Alisson e Carol, que além de toda amizade, carinho e apoio, ainda me hospedaram em sua casa durante grande parte do curso.

Aos companheiros de viagem, Eric e Fábio, com os quais passei momentos de muita sabedoria, apreensão e alegria com as vitórias.

Agradeço aos professores do PROFMAT, que me ensinaram muito, abrindo muitas opções para meu futuro profissional.

Aos colegas do PROFMAT, que tanto batalharam para conseguir chegar até o fim do curso e me ajudaram muito nisso, em especial aos amigos Ronan, Denise, Carol e Luís.

À direção da EMEF Valdomiro Casagrande, em nome da diretora e amiga Vera, por ceder o espaço da escola e cooperar para que o resultado fosse o melhor possível.

Aos amigos professores Leonel e Meire, pelo empenho com seus alunos na OBMEP 2013 e pelo compartilhamento de experiências vividas durante o ano todo em sala de aula e fora dela.

Ao professor Daniel, que além de grande amigo, ainda ajudou na edição dos DVDs, organizando e colocando legendas para que os mesmo ficassem bem finalizados.

Agradeço à professora Luzia que me ajudou na finalização desse trabalho.

Agradeço com grande carinho aos alunos Ana Lívia Dias, Ana Lívia Médice, Ângelo Augusto Minatel, Gabriela Coradi, Guilherme Correa, Isabela Cristine da Silva, Jaqueline Maiara Moura, Jhonatas Alexandre da Silva, João Pedro Parella, Kaylane Celina Freitas, Kevin dos Santos, Laura Minatel, Leticia Xavier, Marcela Tais Bregadioli, Maria Manuela Pereira, Murillo Limoni Roma, Nicole Araújo Mello, Talia Fernanda de Alencar, que participaram das duas fases da OBMEP 2013, com ótimos resultados e que também contribuíram de forma grandiosa nesse trabalho.

Resumo

Essa dissertação apresenta o estudo feito na escola municipal Professor Valdomiro Casagrande da cidade de Dois Córregos-SP sobre as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP 2013); trabalhando com grupos de estudos que buscavam uma melhor preparação dos alunos para as provas da 2ª fase no ano de 2013. A Dissertação foi desenvolvida utilizando a Engenharia Didática, passou pelas etapas de análises prévias, concepções a priori, aplicação da experiência e análises *a posteriori*. O presente trabalho apresenta os resultados obtidos com esses grupos de estudo, na questão das premiações conquistadas pelos alunos no ano de 2013 e também os resultados obtidos na questão motivacional tão necessária para a educação matemática. Ainda nesse, são feitas análises criticas de questões das provas da OBMEP 2010. OBMEP 2011, OBMEP 2012 e OBMEP 2013 (1ª e 2ª fases), com comentários dos alunos e dos professores sobre o conteúdo abordados nas provas e com a teoria matemática apresentada em cada uma. O trabalho apresenta ainda a confecção de um DVD educativo, elaborado pelos alunos participantes da 2ª fase e pelo professor Mediador da Escola, sem fins lucrativos, com resoluções de questões da OBMEP 2013 (2ª fase), material esse que será exposto no BLOG da escola e servirá para divulgação da OBMEP 2014 instituição e no município.

Palavras chave: OBMEP, Matemática, Grupo de estudo, DVD educativo.

Abstract.

This dissertation presents the study done on Municipal School Professor Valdomiro Casagrande, town of Dois Córregos – SP – about the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP 2013), working with study groups who sought a better preparation of students for the proof of the second phase in 2013. The dissertation was developed using Didactic Engineering, passing through the steps of previous analyses, a priori concepts, application of experience and a posteriori analyses. This work presents the results obtained with these study groups, awards won by students in 2013 and also the results obtained in the motivational issue much required for mathematic education. Still on the work, are made critical analysis of issues of proof of OBMEP 2010, OBMEP 2011, OBMEP 2012 and OBMEP 2013 (first and second phases), with students and teachers feedback about the content addressed in evidence and with the mathematical theory that each one presented. The work presents the making of an educational DVD, non-profit, with resolutions of issues of OBMEP 2013 (second phase) elaborated by the participating students of the second phase and by the school Mediator, DVD which will be exposed in the Blog of the school and Will serve as material for dissemination of OBMEP 2014 at school and in the municipality.

Keywords: OBMEP, Mathematic, study group, educational DVD.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..10

1.1 Histórico pessoal e profissional..10

1.2 Histórico e regulamento da OBMEP...13

1.3 Descrição da EMEF professor Valdomiro Casagrande......................................14

1.4 Metodologia...15

1.5 O tema..17

1.6 Capítulos apresentados..19

2 ANÁLISES PRÉVIAS..21

2.1 Nível epistemológico...21

2.2 Nível didático..22

2.3 Nível cognitivo...24

3 HIPÓTESES...25

4 EXPERIMENTAÇÃO...27

4.1 Primeira etapa do trabalho..27

4.2 Segunda etapa do trabalho...54

5 ANÁLISES A POSTERIORI...118

6 VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA..121

6.1 Validação da aprendizagem dos alunos..121

6.2 Comentários gerais dos alunos..122

6.3 Validação da aprendizagem do professor..123

6.4 Comentários do professor-mediador sobre a OBMEP...............................123

6.5 Validação sobre a metodologia engenharia didática...................................124

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS...125

8 REFERÊNCIAS...126

9 ANEXOS...128

1 INTRODUÇÃO

1.1. Histórico pessoal e profissional.

Nasci no dia 08 de Abril de 1982, na cidade de São Paulo. Três anos depois, fui morar no interior do estado, na cidade de Tatuí. Lá, fiz os estudos iniciais e com o exemplo de excelentes professoras, me apaixonei e comecei investir na carreira que hoje tenho. O gosto pela matemática surgiu também nessa época e foi se aprimorando nos anos seguintes.

O sonho de ser professor nunca se apagou, mesmo com todas as dificuldades que a carreira enfrenta há anos, na verdade isso elevou ainda mais o conceito desses profissionais; Em um país que tão pouca importância dá à educação, há ainda assim muitos profissionais que nunca abandonaram a luta pelo ensino e honraram a profissão.

Ingressei no ano de 2005 na UFSCar (Universidade Federal de São Carlos), foram anos de muita luta e dificuldades nas disciplinas, mesmo amando Matemática, passei por muitos problemas de aprendizagem, mas em 2009 consegui concluir, alcançar a sonhada formação e ter o diploma.

Já no ano de 2006 iniciei minha atividade docente na escola CAASO (Centro Acadêmico Armando Salles de Oliveira, colégio e cursinho preparatório para o vestibular ligado à USP- Campus de São Carlos), onde fiquei até o fim de 2011 e onde me tornei professor, ministrando aulas em cursinho, ensino médio, além das valiosas monitorias.

Participo da OBMEP desde 2005 como aplicador da 2ª fase, tal condição durou até 2009. Em 2010, como professor da rede pública, comecei participar da 1ª fase na escola e acompanhar os alunos no dia de aplicação da 2ª fase.

Em 2010, iniciei minha carreira no ensino público, ingressei na prefeitura de Dois Córregos, na Escola Valdomiro Casagrande e em 2011, na rede estadual na escola Benedito dos Santos Guerreiro, na mesma cidade.

Foi através dos desafios que a rede pública nos propicia, que decidi fazer projetos envolvendo o ensino de matemática e através da OBMEP, que esses desafios se concretizaram.

Embora o ensino na cidade de Dois Córregos seja considerado muito bom, em 2010 a escola Valdomiro Casagrande iniciou as atividades com alunos de 6º ao 9º ano, devido à municipalização do ensino ocorrida em 2009.

Essa mudança causou revoluções na escola: aumentou o número de salas, o número de alunos e toda a demanda que o ciclo II do Ensino Fundamental necessita. Nesse momento tiveram inicio as atividades com a OBMEP, sendo que naquele ano 140 alunos participaram da 1ª fase e uma menção honrosa foi conquistada na 2ª fase pelo aluno João Pedro Parella.

Em 2013 tivemos um total de 320 alunos na 1ª fase, com duas medalhas (ouro e bronze) com a aluna Marcela Tais e Murillo Limoni, além de cinco menções honrosas, com os alunos Jhonatas Alexandre, João Pedro, Isabella Cristine, Laura Minatel e Nicole Emanuele.

Os desafios aumentavam a cada ano e conquista, porém os resultados motivaram ainda mais os trabalhos, um deles está prestes a ser realizado em 2014 - o Clube de Matemática da escola – este fará com que alunos se preparem para as Olimpíadas de Matemática e também aprimorem os estudos realizados diariamente em sala de aula.

O desafio maior encontra-se na escola estadual, onde há muitas barreiras para superar, devido a resistência por parte dos alunos e principalmente da coordenação da escola – para eles a OBMEP é algo fora da realidade – colocação não aceita por mim. Entretanto, por possuir um mínimo de aulas nesta unidade, sou superado pelos demais. O objetivo é mudar o paradigma em 2014 ao assumir a coordenação da OBMEP dentro dessa unidade e iniciar as atividades de preparação dos alunos que se classificarem para a 2ª fase. Acredito que para um trabalho ser realizado com sucesso, ele deve ter um início.

O intuito desses projetos é melhorar o desempenho das escolas na disciplina de matemática, visto que muitas vezes os índices de provas como o SARESP e PROVA BRASIL avaliam outros aspectos (índices de reprovação, evasão escolar e estrutura física da escola - algo fora da competência discente) e não consideram o empenho e conhecimento de cada um. Assim sendo, o Clube de Matemática busca direcionar os alunos para a continuidade de estudos e transformação destes em um hábito saudável autor de melhorias (reais) na formação de todos. Dessa forma as avaliações futuras serão superadas de forma natural.

A educação no Estado de São Paulo precisa de melhorias. Trabalhar com projetos ligados a OBMEP pode colaborar significativamente e colocar nossos alunos em posição de destaque no cenário nacional e internacional.

Falando agora sobre a minha Pós-Graduação:

O PROFMAT entrou em minha vida em 2012 e mudou-a. Foram dois anos de estudos e de muita dedicação, nesse tempo, pude mudar muitas concepções sobre o estudo e ensino de matemática. Tal condição fez com que me preparasse melhor e de forma mais prática para a OBMEP.

Fazer o PROFMAT não foi fácil, abri mão de finais de semana, de horas de sono, de lazer, e principalmente, do convívio com a família, mas tudo isso valeu a pena, já que agora me sinto pronto para trabalhar com a continuidade do projeto da OBMEP em minhas escolas e no município.

Os desafios não serão poucos e o tempo para colheita dos resultados será longo, todavia, com a continuidade, esses se tornarão permanentes. Provavelmente teremos outros ainda mais interessantes.

1.2. Histórico e regulamento da OBMEP.

A OBMEP (Olimpíadas de Matemática das escolas públicas) teve início em 2005, com 31031 escolas, 10520831 alunos e 93,5% dos municípios participando da 1ª fase (Fonte: site: www.obmep.org.br).

Ano a ano, o número de participantes e premiações aumentaram, motivando cada vez mais alunos e professores.

Já em 2013, 47144 escolas, 18762859 alunos e 99,3% dos municípios participando da 1ª fase (Fonte: site: www.obmep.org.br).

Os alunos melhores classificados em cada escola (cerca de 5% do total de inscritos de cada unidade) na 1ª fase se classificam para a 2ª fase e posteriormente, os melhores alunos na 2ª fase recebem medalhas (ouro, prata e bronze) e menções honrosas, além de todos os que fizeram as provas da 2ª fase, receberem certificados de participação.

As provas da 1ª fase são compostas por vinte questões de múltipla escolha, realizadas nas escolas e aplicadas pelos professores. Na 2ª fase, são seis questões dissertativas (compostas de três ou quatro itens) realizadas em uma escola escolhida pela organização e aplicada por fiscais contratados (pela OBMEP).

Para os alunos medalhistas é reservado o direito de participação no PIC (Programa de Iniciação Cientifica), o qual visa o aprimoramento dos estudos em matemática e participações em outras Olimpíadas. O programa PIC fornece auxílio aos alunos participantes, com aulas aos sábados e tutorias on-line.

1.3. Descrição da EMEF Professor Valdomiro Casagrande.

Situada na cidade de Dois Córregos, interior do estado de São Paulo, a escola foi municipalizada no ano de 2009, iniciando suas atividades com alunos do Ensino Fundamental II no ano de 2010, com duas turmas de 6º ano e duas de 7º ano.

Até o ano de 2009, a escola possuía oito turmas do 2º ao 5º ano. Em 2010, a escola passou a contar com doze turmas (do 2º ao 7º ano), chegando a dezoito (do 1º ao 9º ano) em 2013, totalizando 630 alunos. Com a construção de mais salas em 2014, a escola contará com vinte e duas turmas e 700 alunos.

A escola está situada em um bairro industrial e conta com vários bairros residenciais ao seu redor, um dos fatores que a torna referência para boa parcela da cidade.

A unidade possui quadra poliesportiva coberta, um espaço destinado ao atletismo, salas de estudos e preparação de aulas, um laboratório de informática com aproximadamente quinze computadores em funcionamento, além de duas lousas digitais com material multimídia disponível para todo o corpo docente.

Dirigida pela professora Vera Lucia Franzin Terrabuio, que fornece grandes condições de trabalho aos professores e controle das situações de aprendizagem para os alunos, conta com 47 profissionais, entre professores e funcionários.

Cada sala possui em média 36 alunos, número ainda muito elevado para melhores condições de ensino-aprendizagem.

A cidade de Dois Córregos possui cinco escolas de Ensino Fundamental II (duas estaduais e três municipais), sendo que todas participam da 1ª e 2ª fases da OBMEP.

A jornada semanal de cada professor (municipal) é composta por trinta horas/aula, sendo vinte com a presença de alunos e cinco de estudo e preparação dentro da escola, duas de trabalho pedagógico coletivo e três de estudo e preparação livres (fora da unidade)

1.4. Metodologia.

No presente trabalho foi empregada a Engenharia Didática. Segundo Carneiro (2005, p.90), Engenharia Didática é uma opção metodológica que apresenta um duplo sentido na medida em que prevê produções para o ensino, as quais têm origem em resultados de pesquisa, mas também é uma metodologia de pesquisa que se baseia em experiências de sala de aula.

Carneiro observa que a teoria de Engenharia Didática tem sua origem na preocupação com certa “ideologia da inovação” inerente à educação; dessa maneira cria-se a possibilidade para “qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação teórica” (2005, p.89).

De acordo com Carneiro (2005, p.91) a Engenharia Didática é composta por níveis de organização ou fases:

1- Análises prévias;
2- Concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática;
3- Implantação da experiência;
4- Análise a posteriori e validação da experiência;

O termo Engenharia Didática (ARTIGUE, 1994, 1996), criado na área de Didática das Matemáticas, na França (década de 80), tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, como também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia – momentos em que é preciso construir soluções.

A origem desta teoria está na preocupação com certa “ideologia de inovação” presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência em sala de aula, descolada de fundamentação científica.

Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino.

Nesta perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da realização didática em sala de aula como prática de investigação.

A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões:

a) Das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino;

b) Do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa.

É uma expressão com duplo sentido, designa produções para o ensino, derivadas de resultados e pesquisa, e também designa uma especifica metodologia de pesquisa baseada em experiências em sala de aula.

Nessa linha, a prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento básico.

1.5. O tema: **O estudo em grupos para a 2ª fase da OBMEP 2013 e resoluções em vídeo.**

Desde o ano de 2010, quando a escola iniciou suas atividades nas Olimpíadas de Matemática, houve a necessidade de estudos específicos para a realização da 2ª fase. Em vista disso, formou-se, a partir do mês de agosto de 2013, três pequenos grupos de estudos compostos por alunos dos níveis 1 (6º e 7º ano) e 2 (8º e 9º ano), em horários opostos aos das aulas.

Tais encontros duraram em média uma hora e meia e consistiram na resolução e discussão das questões da 2ª fase de provas anteriores (2010/ 2011/ 2012).

Toda semana os alunos trabalharam com a prova da 2ª fase do nível de referência (Nível 1 ou Nível 2), essas provas foram entregues aos 19 alunos que se classificaram para essa fase. Os alunos tinham que tentar resolver e dividir suas resoluções e dúvidas com os integrantes de cada grupo, essa discussão era feita com a exposição da questão por parte do professor, análise de cada exemplo e questionamento feito em cada item, do mais fácil ao mais difícil.

Alguns alunos se arriscavam a resolver alguns itens na lousa para expor suas ideias aos colegas, foi a partir desse acontecimento que surgiu a vontade de confeccionar um DVD com resoluções feitas pelos próprios alunos como forma de motivar os colegas e divulgar o trabalho feito na escola na internet através do BLOG da escola.

Em todas as semanas de agosto e nas duas semanas do mês de setembro que antecederam as provas da 2ª fase, os grupos se reuniram e fizeram as resoluções de três provas de 2ª fase (2010/ 2011/ 2012). Os alunos foram divididos em grupos de acordo com o nível (1 ou 2) e disponibilidade de cada um.

Os três grupos foram formados, mas nem todos puderam participar dos estudos, pois não possuíam disponibilidade. Para esses alunos, as provas foram disponibilizadas e as resoluções feitas em grupo, eram repassadas a cada um deles, desta forma, todos participaram da preparação.

O grupo 1 foi composto por quatro alunos do nível 1 (Marcela, Isabella, Jhonatas e Gabriela), o grupo 2 foi composto por três alunos do nível 2 (João Pedro, Laura e Talia) e o grupo 3 foi composto por três alunos do nível 1 (Nicole, Ana Lívia e Kevin), os outros nove alunos não puderam participar das aulas em grupo e desta forma, fizeram seus estudos em casa e obtiveram as resoluções através de seus colegas e com auxílio de seus professores.

Na escola classificaram-se vinte alunos para a 2ª fase, porém um deles foi transferido de nas férias e não houve tempo para mudança de aluno. Então ficamos com dezenove alunos, dos quais doze não haviam participado da 2ª fase e esse foi mais um desafio a ser superado. Antes do estudo, teríamos que indicar as diferenças entre as provas da 1ª e 2ª fases, pois na 2ª fase, as provas são dissertativas e os alunos deveriam se acostumar com a forma de escrita de cada item. Eles precisavam tomar ciência que cada raciocínio é considerado e que respostas sem resolução não são consideradas. Desta forma, o trabalho iniciava-se com o treino da escrita e do raciocínio transposto para o papel.

Para essa etapa foram realizadas algumas resoluções na lousa e a forma de escrita em cada item exposta. O tempo também foi observado, pois os alunos tem um tempo determinado para a realização da prova e os alunos devem se acostumar com isso para não correrem o risco de deixar questões sem resolução antes de se encerrarem às três horas de prova.

Em cada questão, foram treinadas técnicas de resolução, como por exemplo, iniciar a questão fazendo e entendendo um dos exemplos e tentando trabalhar o primeiro item - que em geral busca visualizar se o aluno entendeu a questão - através disso, o aluno ganha confiança para itens subsequentes. Desta forma, os alunos realizaram os estudos seguindo as orientações.

1.6. Capítulos apresentados.

No presente capítulo é apresentada a trajetória de vida do professor mediador, assim como a metodologia baseada na Engenharia Didática juntamente com o tema do trabalho tratado - a OBMEP 2013. Nesse capítulo, também serão apresentados o histórico da OBMEP e a descrição da escola na qual o projeto foi aplicado.

No capítulo 2 são feitas as análises prévias que mostram quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos com relação a OBMEP; qual é a visão dos alunos com relação às duas fases da OBMEP. Apresentam-se também as análises epistemológica, didática e cognitiva do tema.

No capítulo 3 são apresentadas as hipóteses do trabalho, sendo as mesmas norteadas por duas questões envolvendo os benefícios do trabalho em grupo e a exposição didática de resoluções para desenvolvimento técnicas de solução.

No capítulo 4 são apresentadas as experimentações realizadas, as atividades em grupos para análise, resolução e discussão de cada item. Também são apresentadas as resoluções comentadas pelos alunos e professores; A partir do momento dessa análise, surge o desejo de confeccionar um DVD didático com resoluções das questões da 2ª fase da OBMEP 2013.

No capítulo 5 são apresentadas as análises à posteriori da experimentação, mostrando os resultados obtidos pelos alunos na OBMEP 2013 e os benefícios trazidos pelo estudo em grupos.

No capítulo 6 apresenta-se a validação das experiências e metodologia utilizada com o relato do professor mediador e dos alunos sobre o trabalho, as dificuldades e os resultados positivos conquistados.

O capítulo 7 apresenta as considerações finais sobre o trabalho alcançando respostas para as questões do capítulo de hipóteses, também apresenta os sentimentos do professor mediador sobre a experiência vivida.

2 ANÁLISES PRÉVIAS

A partir das dificuldades e dos desafios enfrentados na escola desde a implantação da OBMEP no ano de 2010, surge o desejo de melhorias no desempenho dos alunos em participações da OBMEP tanto na 1ª fase, quanto na 2ª fase.

Desde o início do trabalho, a dificuldade de aceitação da OBMEP ,por grande parte dos alunos, criou o estigma de que a OBMEP representa algo quase "impossível", devido ao seu grau elevado de dificuldade.

Surge então, a oportunidade oriunda da necessidade de melhorias na prática de resolução de problemas de Olimpíadas do conhecimento, tal situação faz com que os alunos participem das fases da OBMEP de forma efetiva, ou seja, que façam a prova realmente usando seus conhecimentos e coloquem à prova todas as habilidades existentes em cada um.

Com esse incentivo e estudo, busca-se também diminuir a quantidade de questões feitas no "chute" - muitos alunos preferem escolher uma alternativa de forma aleatória ao invés de insistir um pouco mais em sua resolução.

Nas escolas públicas, o ensino apresenta níveis de qualidade muito abaixo com relação ao ideal, principalmente na área de Matemática; A OBMEP tem como um de seus objetivos a melhoria dessa qualidade.

2.1. Nível epistemológico: o estudo em grupo e a exposição do conhecimento do aluno.

O estudo em grupo é uma grande ferramenta para o ensino. Ele possibilita a diversificação de ideias e faz com que os alunos busquem aprimorar seus conhecimentos para expor e discutir com os colegas suas resoluções e dúvidas.

Observa-se a partir do momento que o aluno começa a estudar em grupos a ocorrência de um diálogo mais próximo, com uma linguagem mais clara e eficaz entre eles, sem o discurso técnico utilizado pelo professor em sala de aula.

A comunicação em grupo é melhor, uma vez que os alunos sentem-se mais à vontade para discutir e expor suas dúvidas e anseios, tornando o momento mais prazeroso e eficaz a todos. Existe a questão de que o aluno também aprende mais quando passa adiante seu conhecimento, as discussões geram dúvidas e entendimentos não existentes anteriormente.

Quando o aluno é colocado para expor aos colegas tudo o que aprendeu ou, simplesmente, para compartilhar a resolução de exercícios, ele precisa preparar-se para o momento e essa preparação exige um estudo mais aprofundado. Tal estudo origina dúvidas e visualizações do problema que em estudos anteriores e solitários não foram possíveis.

O norte da carreira de um professor deve ser o de ensinar mais para aprender mais, pois na profissão temos condições de realizar nossa formação diariamente nos aprofundando em teorias e práticas didáticas as quais levam à melhoria de nosso produto educacional.

Tal ideia é aplicada a esse trabalho, pois incentivando o aluno a expor o que sabe, ou aquilo que tem dúvida, forma-se a ideia de melhorar a cada questionamento o seu próprio raciocínio, tornando mais profunda a visualização do problema, eliminando a lógica de desistir do problema quando ele apresenta um grau de dificuldade maior.

Sabemos que todos têm tendência a desistir quando o desafio do problema é muito grande, porém a partir do momento que o aluno conhece pessoas que se encontram diante dos mesmos desafios, a competição saudável que existe entre eles, faz com que todos se empenhem mais e assim, muitos problemas passam a ser resolvidos e as ideias são compartilhadas entre todos.

2.2. Nível didático: funcionamento do sistema de ensino.

A OBMEP é aplicada em escolas de Ensino Fundamental e Médio desde 2005, sendo a 1ª fase realizada na própria escola, com a participação de todos os alunos do 6ª ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. A 2ª fase ocorre fora da escola, sendo aplicada em uma escola neutra, com a participação de 5% do total de alunos inscritos em cada escola.

Mesmo com toda essa mobilização, nota-se ainda um despreparo muito grande dos alunos com relação ao grau de dificuldade que a prova apresenta. Tal despreparo se dá por diversos motivos, entre eles se destacam: falta de comprometimento de alguns alunos com o estudo; Falta de perspectiva com relação aos benefícios que o estudo pode trazer para cada um de nós; Despreparo dos professores para preparar os alunos de acordo com a metodologia aplicada na OBMEP; Falta de tempo e espaço nas escolas para reuniões e estudos em grupo.

Visualizamos que tudo o que é cobrado na OBMEP, com relação à questão de conteúdos, é coerente com cada um dos níveis; Entretanto a forma como as questões são cobradas não fazem parte do cotidiano escolar, uma vez que os fatores apresentados acima não permitem um estudo com nível mais elevado em sala de aula, principalmente pela diferença de níveis de aprendizagem que se tem em nossas escolas hoje em dia. Sendo assim, o professor necessita trabalhar com pequenos grupos, para que exista proximidade maior entre todos destes grupos.

É baseado nos estudo em grupos, que realizamos esse trabalho na Escola Municipal Professor Valdomiro Casagrande, as dificuldades para trabalhar em sala de aula eram imensas devido a todas as turmas possuírem mais de 36 alunos e nem todos estarem no mesmo nível de ensino e de comprometimento.

Analisamos, em vários anos de aplicação da OBMEP, a dificuldade dos alunos em entender o que é cobrado em cada item; Dificuldade esta, que muitas vezes está na interpretação do problema; Como o exemplo foi resolvido; Como ele pode iniciar a resolução; Enfim, todos esses fatores fazem parte do cotidiano escolar, considerando ser a resolução de problemas um grande desafio a vencer no ensino básico.

Tal dificuldade será diminuída com treinos e estudos específicos, sendo assim, esse trabalho se baseia no estudo em grupos, na resolução de provas de anos anteriores, na elaboração da escrita e raciocínio lógico de cada problema, além da exposição de cada resolução para os grupos.

Na escola Valdomiro Casagrande, nota-se discrepâncias enormes com relação à aceitação e à importância da OBMEP. Existe uma grande resistência, até mesmo no sentido de "serve para que?"; Algo precisa ser mudado e colocado aos envolvidos: a necessidade de se trabalhar com objetivos bem definidos e claros a todos.

Existe na unidade escolar, falta de comprometimento dos alunos na resolução das provas, muitos nem chegam a ler a questão, marcando qualquer resposta sem nenhuma análise prévia e vontade de entender. Não são raros os casos de alunos que deixam a prova em branco e somente passam a resposta para o gabarito. Vários itens apresentam questões de operações básicas, e isso se constatou nas resoluções em sala, quando muitos alunos não sabiam nem sequer o que a questão cobrava.

2.3. Nível cognitivo: o público ao qual se dirige.

As provas das Olimpíadas de Matemática são aplicadas desde o 6º ano do Ensino Fundamental de nove anos até o 3º ano do ensino médio. São sete anos seguidos que o aluno tem contato com as provas da 1ª fase e em alguns casos (alunos classificados) também da 2ª fase.

Pela faixa etária a qual a OBMEP se dirige (de 10 anos em diante), temos a oportunidade de explorar o máximo da capacidade e da facilidade de raciocínio que os alunos possuem e fazer com que questões de alto grau de dificuldade sejam possíveis de obter uma resolução. Isso devido à grande facilidade que os estudantes dessa faixa etária possuem em resolver problemas, com resoluções criativas e de raciocínio lógico de grande qualidade.

3 HIPÓTESES

Baseado na experiência docente em sala de aula e também na aplicação e realização da OBMEP, o trabalho em grupo dentro da escola pode trazer muitos benefícios para o ensino-aprendizagem, pois possibilita a diversificação de ideias e a socialização dos alunos. Acreditamos ainda que o trabalho em grupo faz com que a cooperação entre os alunos aumente, pois a linguagem entre eles está mais próxima e as formas técnicas, muitas vezes aplicadas pelos docentes em resoluções são deixadas de lado, fazendo com que as respostas sejam elaboradas de forma ainda mais lógica.

Com relação ao uso do vídeo em sala de aula, nesse caso, acreditamos que pode ser um grande incentivo para os demais alunos, pois a divulgação dos vídeos com as resoluções da 2ª fase podem estar ao alcance de todos, isso faz o título de “impossível”- recebido pelas provas por grande parte dos alunos- não transformar-se em uma verdade universal.

Acreditamos que a OBMEP é um grande incentivo para o ensino da matemática, e que isso precisa aumentar, começando pela efetiva participação dos alunos na 1ª fase. É necessário fazer com que o nível aumente bastante e mesmo seguindo o regulamento, o qual diz que apenas 5% do total de inscritos são classificados para a 2ª fase, necessitamos de um alto nível (cognitivo) entre os classificados, o que tornaria a resolução da 2ª fase algo mais natural.

O treino preparatório para a 2ª fase deve ser estendido também para a 1ª fase, pois possibilita ao aluno, conhecer o sistema avaliativo antes de realizar sua prova. Essa ideia, entretanto, ainda está distante de ocorrer, pois o conteúdo hoje aplicado no ensino básico não permite intervenções longas de conteúdos extras e a solução para isso seria, a priori, anexar o estudo da OBMEP no plano escolar anual. Mesmo assim, os problemas ocorreriam com relação ao conteúdo e na cobrança que os professores têm em cumprir um currículo pré-definido.

Aulas preparatórias em período inverso seriam a melhor saída para estimular os alunos, pois com o passar do tempo, isso se tornaria algo incorporado ao estudo de todos. Vemos com exemplos de outras escolas pelo Brasil, que a partir do momento que os alunos começam a se dedicar ao estudo de Matemática, como é o caso da OBMEP, a tendência natural foi de se criar hábitos cada vez mais amplos de estudos, fazendo com que o aluno chegasse ao final do ciclo básico (3º ano do ensino médio) preparado para o grande desafio dos vestibulares. O estudo da OBMEP irá prepará-los para a maratona de estudos que o vestibular exige.

Em nosso entendimento, o que os alunos precisam para obter sucesso em seus estudos é ganhar hábitos de estudos fora da sala de aula, acostumando-se com uma rotina que será eficaz para seu futuro.

As questões norteadoras desse trabalho são:

1- **O estudo em grupo pode trazer melhorias para os resultados dos alunos na 2ª fase da OBMEP?**

2- **A resolução da prova feita pelos próprios alunos pode estimular aos demais alunos?**

4 EXPERIMENTAÇÃO

4.1. Primeira etapa do trabalho:

No presente trabalho será apresentada a experimentação com alunos trabalhando em grupos para treinamento e resolução de provas da OBMEP, o intuito sempre foi o de preparação e desmitificação das provas que envolvem as Olimpíadas. Para isso, os alunos desenvolveram resoluções individualmente, ou em pequenos grupos para que todos pudessem compartilhar suas experiências, aprimorar seus conhecimentos e sanar suas dúvidas.

O trabalho com os alunos e professores tinha o objetivo de envolver todos os alunos classificados para a 2ª fase da OBMEP e professores que lecionam na EMEF Professor Valdomiro Casagrande, mas em razão de empecilhos com horários e disponibilidades, tal trabalho teve que ser separado em três pequenos grupos e com a participação de apenas um professor.

A formação dos grupos teve início em agosto, pouco mais de um mês antes de ocorrer a 2ª fase. As aulas ocorreram no período da tarde, sendo assim, os alunos da manhã puderam participar em maior número e os alunos da tarde, que estavam em aulas livres, também, porém foram prejudicados nesse quesito.

Foram formados três grupos de trabalho que resolviam questões dissertativas de provas de anos anteriores. Essas questões foram selecionadas pelo professor e cada aluno tinha a tarefa de resolver quatro questões e seus itens toda semana. Esse trabalho era feito em casa e as resoluções e dúvidas apresentadas na aula presencial com duração de noventa minutos. Nessa aula as questões eram expostas pelo professor e os exemplos resolvidos na sequência.

A partir desse momento, cada item que compunha a questão era lido e feito o desafio ou convite para algum aluno resolver. A intenção era estimular o aluno a resolver a questão e compartilhar suas dúvidas e seus raciocínios com os colegas, essa forma de estudo faz os alunos se empenharem mais em escrever melhor suas resoluções, pois ele deve se fazer entendido e para isso uma boa resolução ajuda bastante.

Os alunos, em geral, iam muito bem nessa etapa. Alguns perdiam a timidez, realizavam as resoluções para o grupo, conseguiram explicar aos colegas seu raciocínio e também quais eram as dificuldades de cada item, isto fazia uma socialização importante e estreitava os laços entre os grupos, ato responsável por criar boa relação entre eles.

Nesses momentos, o professor serviu como mediador entre os alunos, principalmente no início, momento no qual nem todos estavam à vontade com a metodologia. O professor buscou explorar as ideias que cada um apresentou em suas resoluções e a partir do momento que os alunos começaram a desenvolver com mais calma as resoluções e discussões, ele passou a um papel de locutor e corretor de cada um dos itens apenas.

Algumas questões exigiram intermediações maiores por parte do professor, visto que, vez ou outra, nenhum aluno obteve sucesso ao resolvê-las.

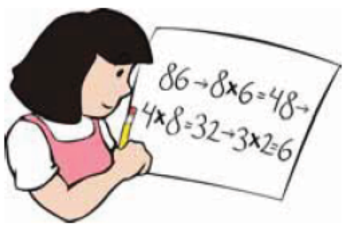
Cada questão, após sua leitura foi caracterizada como fácil, médio ou difícil, segundo o nível de dificuldade de acordo com a opinião dos próprios alunos. Nesse momento observou-se que algumas questões, a priori, foram classificadas como difíceis, mas após a resolução da mesma, essa opinião mudava constantemente, devido ao esclarecimento de ideias.

As provas utilizadas como material de estudos foram as da 2ª fase de 2010, 2011 e 2012, sendo analisadas em Nível 1 e Nível 2, dependendo do grupo.

As análises de cada questão foram apresentadas abaixo:

Prova da 2ª fase 2010, Nível 1.

1. Daniela gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, multiplica seus algarismos e repete o procedimento, se necessário, até chegar a um número com um único algarismo, que ela chama de *número-parada* do número escolhido. Por exemplo, o número-parada de 32 é 6, pois $32 \rightarrow 3 \times 2 = 6$ e o número-parada de 236 é 8, pois $236 \rightarrow 2 \times 3 \times 6 = 36 \rightarrow 3 \times 6 = 18 \rightarrow 1 \times 8 = 8$.



a) Qual é o número-parada de 93?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Ache um número de quatro algarismos, sem o algarismo 1, cujo número-parada seja 6.

Classificação dos alunos: Médio.

c) Quais são os números de dois algarismos cujo número-parada é 2?

Classificação dos alunos: Difícil.

2. Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

Classificação dos alunos: Difícil.

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

Classificação dos alunos: Difícil.

3. A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro-negro, todas com área igual a 108 cm^2.

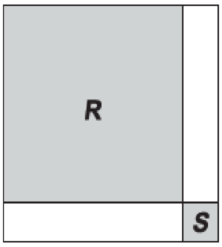
a) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12 cm. Qual é o perímetro desse retângulo?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinza de área igual a 36 cm², como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?

Classificação dos alunos: Fácil.

c) A terceira figura é um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinza *R* e *S*, como na figura. O perímetro de um dos retângulos é igual a três vezes o perímetro do quadrado *S*. Qual é a área do quadrado *R*?



Classificação dos alunos: Médio.

4. Dois números naturais formam um *casal* quando eles têm o mesmo número de algarismos e em sua soma aparece apenas o algarismo 9. Por exemplo, 225 e 774 formam um casal, pois ambos têm três algarismos e $225 + 774 = 999$.

---

a) Qual é o número que forma um casal com 2010?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Quantos são os casais formados por números de dois algarismos?

Classificação dos alunos: Médio.

Casais especiais são casais em que os dois números têm os mesmos algarismos e, em cada número, os algarismos são distintos. Por exemplo, 36 e 63 formam um casal especial, mas 277 e 722 não.

---

c) Dê um exemplo de um casal especial com números de quatro algarismos.

Classificação dos alunos: Difícil.

d) Explique por que não existem casais especiais com números de três algarismos.

Classificação dos alunos: Difícil.

5. Marcelo cortou um quadrado de 6 cm de lado em duas partes, como na figura 1. O corte foi feito em formato de escada, com segmentos de 1 cm paralelos aos lados do quadrado.

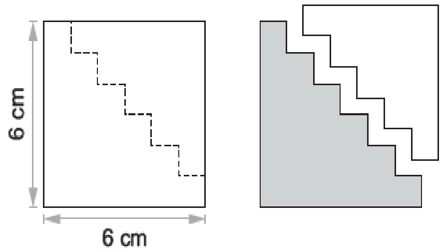


Figura 1

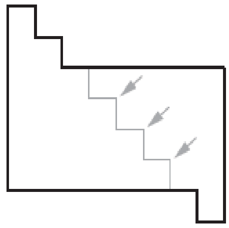


Figura 2

a) Calcule o perímetro e a área da parte cinza na figura 1.

Classificação dos alunos: Fácil.

b) A figura 2 foi montada por Marcelo encaixando completamente três degraus (indicados com flechas) de uma das partes na outra parte. Calcule o perímetro e a área dessa figura.

Classificação dos alunos: Médio.

c) Marcelo cortou da mesma maneira um quadrado de 87 cm de lado e montou uma figura encaixando 39 degraus de uma das partes na outra. Calcule o perímetro dessa nova figura.

Classificação dos alunos: Médio.

6. Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5+8+2=15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9+7+8=24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

Classificação dos alunos: Médio.

c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

Classificação dos alunos: Difícil.

Prova da 2ª fase 2010, Nível 2.

1. Um “matemágico” faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: “Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu.”

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Mariazinha disse “Setenta e seis” para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

Classificação dos alunos: Difícil.

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse “Sessenta e um” e o matemágico respondeu “Você errou alguma conta”. Explique como o matemágico pôde saber isso.

Classificação dos alunos: Difícil.

2. Catarina tem 210 cartões numerados de 1 a 210.

a) Quantos desses cartões têm um número que é múltiplo de 3?

Classificação dos alunos: Fácil.

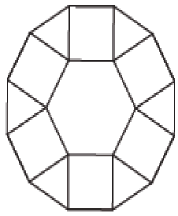
b) Quantos desses cartões têm um número par que não é múltiplo de 3?

Classificação dos alunos: Médio.

c) Qual é o menor número de cartões que Catarina deve pegar, ao acaso, para ter certeza de que 2 ou 3 seja divisor comum dos números escritos em pelo menos dois dos cartões selecionados?

Classificação dos alunos: Difícil.

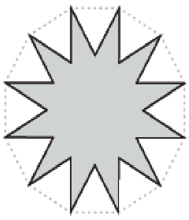
3. A figura mostra um dodecágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros, seis quadrados e um hexágono regular, todos com lados de mesma medida.



a) Se cada triângulo da figura tem área igual a 1 cm^2, qual é a área do **hexágono**?

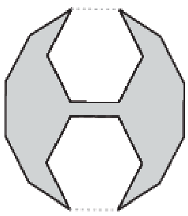
Classificação dos alunos: Médio.

b) A figura abaixo foi obtida retirando doze triângulos equiláteros de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm. Qual é a área dessa figura?



Classificação dos alunos: Difícil.

c) A figura abaixo foi obtida retirando dois hexágonos regulares de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm. Qual é a área dessa figura?



Classificação dos alunos: Difícil.

4. Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5+8+2=15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9+7+8=24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

Classificação dos alunos: Médio.

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

Classificação dos alunos: Difícil.

c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

Classificação dos alunos: Difícil.

5. Juliana quer dar a cada uma das 26 letras *A, B, C, D,..., W, X, Y, Z* do alfabeto um valor numérico diferente de zero, de tal modo que $A \times C = B$, $B \times D = C$, $C \times E = D$, e assim por diante, até $X \times Z = Y$.

a) Se Juliana der a *A* e *B* os valores 5 e 7, respectivamente, quais serão os valores de *C*, *D* e *E*?

Classificação dos alunos: Fácil.

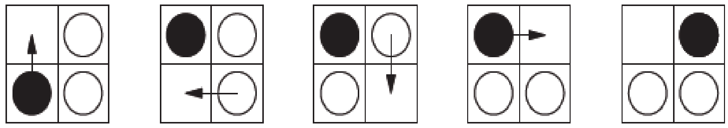
b) Mostre que $G = A$, quaisquer que sejam os valores que Juliana der para *A* e *B*.

Classificação dos alunos: Médio.

c) Se Juliana der valores para A e B tais que $A \times B = 2010$, qual será o valor do produto $A \times B \times C \times D \times \ldots \times W \times X \times Y \times Z$?

Classificação dos alunos: Difícil.

6. No jogo *Arrasta Um* usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um *movimento* consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o *Arrasta Um* em quatro movimentos em um tabuleiro 2×2.

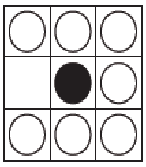


posição inicial **posição final**

Esta sequência de movimentos pode ser descrita por (↑, ←,↓,→).

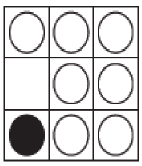
---

a) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em seis movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



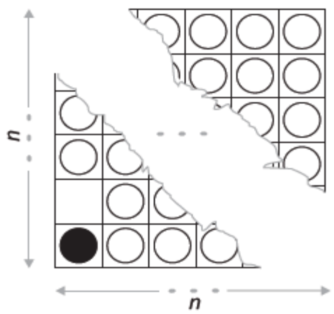
Classificação dos alunos: Fácil.

b) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em dez movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



Classificação dos alunos: Médio.

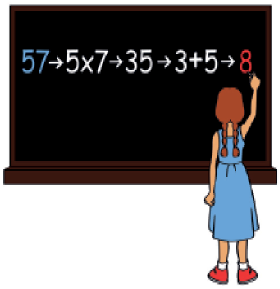
c) Mostre que em um tabuleiro $n \times n$, como na figura, é possível terminar o *Arrasta Um* em $6n - 8$ movimentos.



Classificação dos alunos: Difícil.

Prova da 2ª fase 2011, Nível 1.

1. Cláudia gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, multiplica seus algarismos e, caso o produto tenha mais de um algarismo, ela os soma. Ela chama o resultado final de *transformado* do número escolhido. Por exemplo, o transformado de 187 é 11, pois $1\times8\times7=56$ e $5+6=11$; já o transformado de 23 é 6, pois $2\times3=6$.



a) Qual é o transformado de 79?

Classificação dos alunos: Fácil.

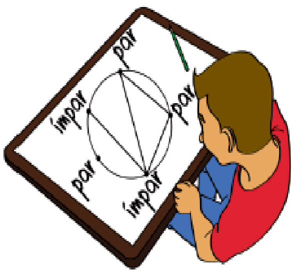
b) Quais são os números de dois algarismos cujo transformado é 3?

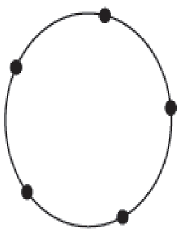
Classificação dos alunos: Médio.

c) Quantos são os números de três algarismos cujo transformado é 0?

Classificação dos alunos: Difícil.

2. Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e traça segmentos ligando alguns desses pontos. Ele chama um ponto de *ponto-ímpar* quando este está ligado a um número ímpar de pontos, e de *ponto-par* caso contrário. Por exemplo, na ilustração ao lado, ele escolheu cinco pontos e fez quatro ligações.





a) Juquinha marcou cinco pontos sobre uma circunferência e traçou todas as ligações possíveis, exceto uma. Quantos pontos-ímpares foram obtidos?

Classificação dos alunos: Médio.

b) Juquinha marcou seis pontos em cada uma das circunferências a seguir. Em cada caso, mostre como obter o número de pontos-ímpares indicado com exatamente cinco ligações.

Faça seu rascunho aqui			
			
0 pontos-ímpares	2 pontos-ímpares	4 pontos-ímpares	6 pontos-ímpares

Coloque sua resposta aqui			
			
0 pontos-ímpares	2 pontos-ímpares	4 pontos-ímpares	6 pontos-ímpares

Classificação dos alunos: Difícil.

c) Explique por que Juquinha sempre encontrará um número par de pontos-ímpares, quaisquer que sejam o número de pontos que ele marcar e o número de ligações que ele traçar.

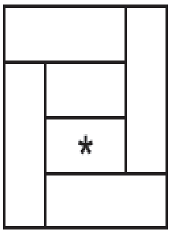
Classificação dos alunos: Difícil.

3. Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

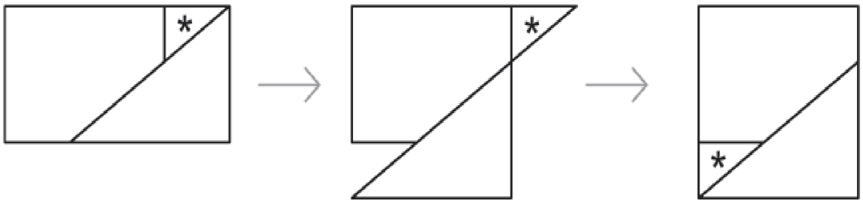
Classificação dos alunos: Fácil.

b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm² de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.



Classificação dos alunos: Médio.

c) As medidas da terceira tira eram 4,5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?



Classificação dos alunos: Difícil.

4. Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.

a) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?

Classificação dos alunos: Médio.

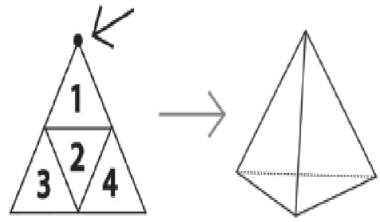
b) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?

Classificação dos alunos: Difícil.

c) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

Classificação dos alunos: Difícil.

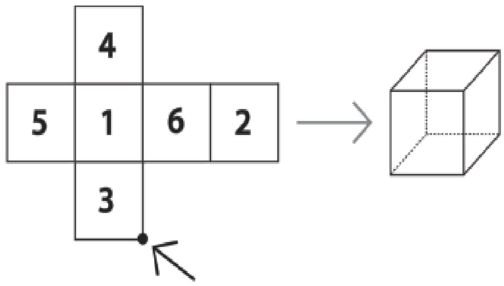
5. As figuras mostram planificações de sólidos com faces numeradas. Após montados esses sólidos, dizemos que o *valor de um vértice* é a soma dos números escritos nas faces que contêm esse vértice. Por exemplo, a figura ao lado mostra a planificação de uma pirâmide; quando essa pirâmide é montada, o valor do vértice correspondente ao ponto indicado na figura é $1+3+4=8$.



a) Qual é o maior valor de um vértice da pirâmide acima?

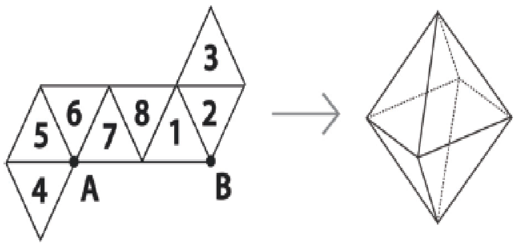
Classificação dos alunos: Fácil.

b) A figura mostra a planificação de um cubo. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto indicado?



Classificação dos alunos: Médio.

c) A figura mostra a planificação de um sólido chamado *octaedro*. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto A?



Classificação dos alunos: Médio.

d) Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto B na planificação do item anterior?

Classificação dos alunos: Difícil.

6. Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar.*

---

a) Escreva a sequência que começa com 37.

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

Classificação dos alunos: Fácil.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

Classificação dos alunos: Difícil.

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Classificação dos alunos: Difícil.

Prova da 2ª fase 2011, Nível 2.

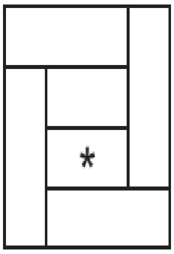
1. Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

---

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm² de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

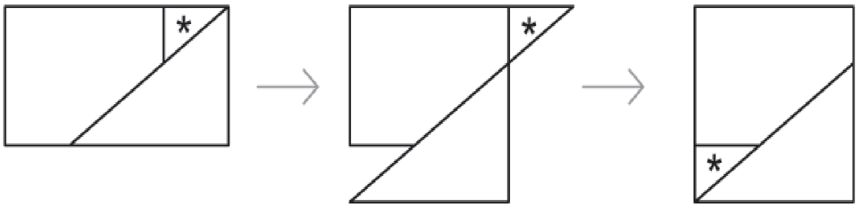
Classificação dos alunos: Fácil.

b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.



Classificação dos alunos: Médio.

c) As medidas da terceira tira eram 4,5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?



Classificação dos alunos: Difícil.

2. Otávio mostrou para Gabriela um truque com três dados, cujas faces estão numeradas de 1 a 6. Ele fica de costas, pede a ela que jogue um dado de cada vez e que, em seguida:

- dobre o número obtido no primeiro dado, some 3 e multiplique por 5;
- some ao resultado encontrado o número obtido no segundo dado e multiplique por 10;
- some ao último resultado o número obtido no terceiro dado;
- anuncie o resultado final.

Otávio então dirá, em ordem, quais foram os números obtidos nos dados.

a) Se Gabriela obtiver os números 4, 6 e 1, nessa ordem, qual resultado ela anunciará?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Se Gabriela anunciar o resultado 273, o que Otávio vai dizer?

classificação dos alunos: Difícil.

c) Explique por que Gabriela não pode anunciar o resultado 432.

Classificação dos alunos: Difícil.

3. O *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

Um número natural é divisível por 3 se e somente se a soma de seus algarismos é divisível por 3; e é divisível por 9 se e somente se a soma de seus algarismos é divisível por 9.

---

a) Qual é o múltiplo irado de 20?

Classificação dos alunos: Fácil

b) Qual é o múltiplo irado de 9?

Classificação dos alunos: Fácil.

c) Qual é o múltiplo irado de 45?

Classificação dos alunos: Médio.

d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Classificação dos alunos: Difícil.

4. Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar.*

---

a) Escreva a sequência que começa com 37.

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

Classificação dos alunos: Fácil.

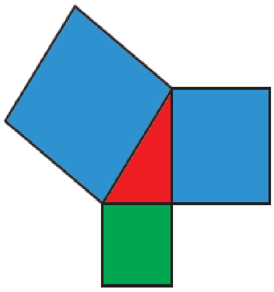
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

Classificação dos alunos: Difícil.

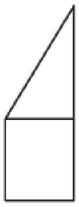
d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Classificação dos alunos: Difícil.

5. João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Em cada um dos itens abaixo, determine de quantas maneiras João pode pintar a figura correspondente.

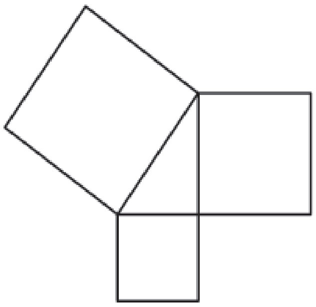


a)



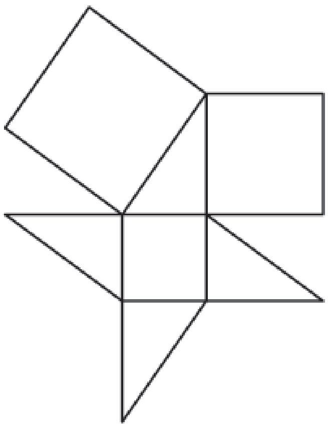
Classificação dos alunos: Fácil.

b)



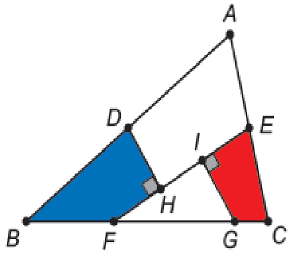
Classificação dos alunos: Médio.

c)



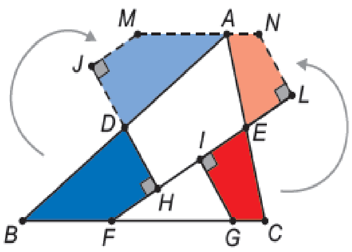
Classificação dos alunos: Difícil.

6. Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo *ABC* dividido em quatro partes; nesses triângulos, *D* é ponto médio de *AB*, *E* é ponto médio de *AC* e *FG* mede $\frac{1}{2}BC$.



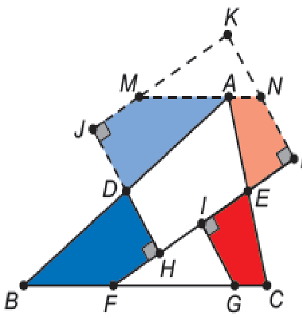
---

a) Os quadriláteros *DJMA* e *ELNA* são obtidos girando de 180º os quadriláteros *DHFB* e *EIGC* em torno de *D* e *E*, respectivamente. Explique por que os pontos *M, A* e *N* estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a 180º.



Classificação dos alunos: Fácil.

b) Na figura, o ponto *K* é a interseção das retas *JM* e *LN*. Explique por que os triângulos *FGI* e *MNK* são congruentes.



Classificação dos alunos: Médio.

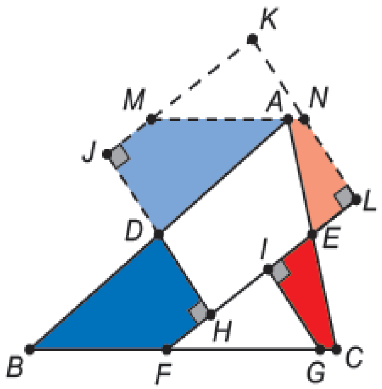
Os itens acima mostram que *HJKL* é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo *ABC* foi dividido.

---

c) Mostre que $LH = EF$.

Classificação dos alunos: Difícil.

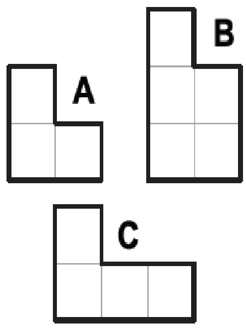
d) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.

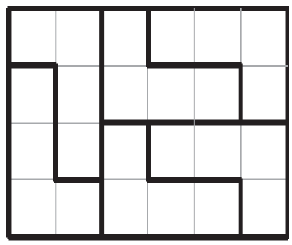


Classificação dos alunos: Difícil.

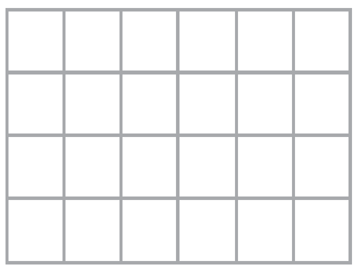
Prova da 2ª fase 2012, Nível 1.

1. Pedro brinca com um tabuleiro quadriculado 4×6 e com peças dos tipos A, B e C. Ele tenta cobrir inteiramente o tabuleiro com as peças, encaixando-as sem que nenhuma fique sobre outra. Por exemplo, usando somente peças do tipo C, ele consegue cobrir o tabuleiro, como indicado na figura.

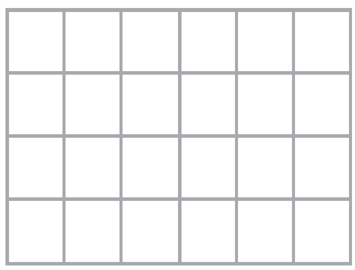




a) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A.



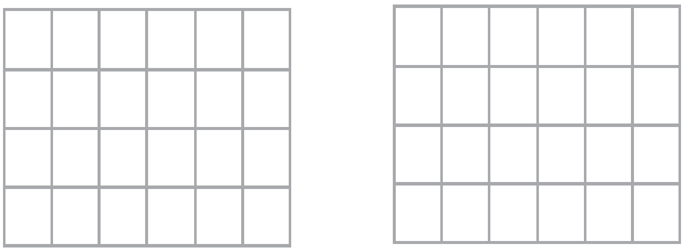
Faça seu rascunho aqui



Coloque sua resposta aqui

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, usando uma ou mais peças do tipo B.



Faça seu rascunho aqui

Coloque sua resposta aqui

Classificação dos alunos: Fácil.

---

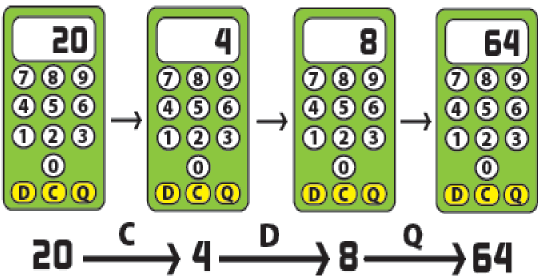
c) Explique por que não é possível cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo B.

Classificação dos alunos: Médio.

2. A calculadora de Raquel é um pouco diferente. Além das 10 teclas numéricas de 0 a 9, ela só tem três teclas de operações:

- a tecla Q, que multiplica o número do visor por ele mesmo;
- a tecla D, que multiplica o número do visor por 2;
- a tecla C, que divide o número do visor por 5.

Raquel se diverte colocando um número inteiro no visor e produzindo novos números usando apenas as teclas de operações. Por exemplo, começando com o número 20 e usando a sequência de teclas CDQ, Raquel obteve o número 64, como se pode ver na figura.



---

a) Raquel começou com 15 e obteve 18 apertando três teclas de operações. Qual foi a sequência de teclas que ela usou?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Usando a sequência de teclas DCQC, Raquel obteve o número 7,2. Com qual número ela começou?

Classificação dos alunos: Médio.

c) Apresente uma maneira de Raquel obter o número 0,08 em sua calculadora, indicando o número inicial e a sequência de teclas de operações.

Classificação dos alunos: Difícil.

3. Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.

a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?

Classificação dos alunos: Fácil.

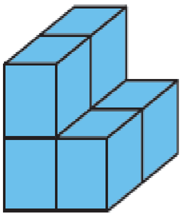
b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas? Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?

Classificação dos alunos: Médio.

c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

Classificação dos alunos: Médio.

4. Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta 1 cm. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido ao lado ela usou 7 pingos de cola.



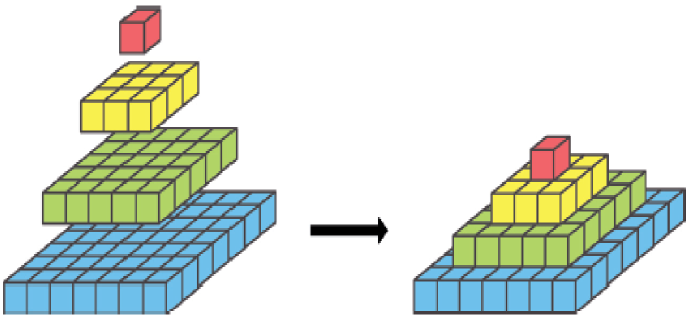
a) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 2 cm?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 3 cm?

Classificação dos alunos: Médio.

c) Cláudia montou o sólido ao lado, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?



Classificação dos alunos: Difícil.

5. Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

a) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Classificação dos alunos: Médio.

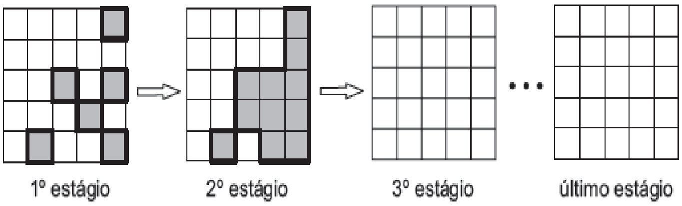
c) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Classificação dos alunos: Difícil.

6. Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



Correção Regional

Correção Nacional

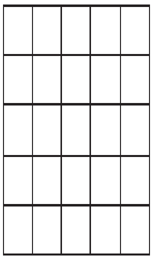
Classificação dos alunos: Fácil.

O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item **a**.

b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item **a**.

Classificação dos alunos: Fácil.

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



Classificação dos alunos: Médio.

d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

Classificação dos alunos: Difícil.

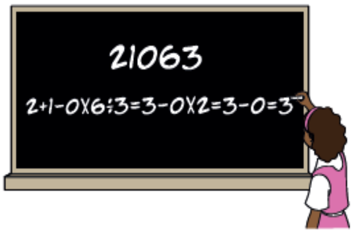
---

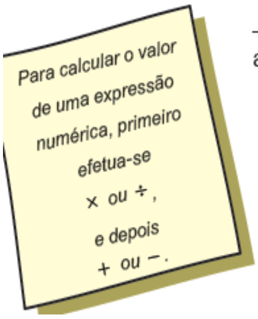
e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Classificação dos alunos: Difícil.

Prova da 2ª fase 2012, Nível 2.

1. Mônica listou todos os números naturais de cinco algarismos que não terminam com 0. Em cada um deles, ela colocou os sinais de $+, -, \times,$ e $\div$ entre os algarismos, nesta ordem, e calculou o valor da expressão obtida. Por exemplo, a partir do número 26384 ela obteve $2+6-3\times 8\div 4=2$ e com o número 15765 ela obteve $1+5-7\times 6\div 5=-2{,}4$.





a) Qual foi o resultado obtido a partir do número 92653?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Qual foi o maior resultado obtido por Mônica?

Classificação dos alunos: Médio.

c) A partir de qual número Mônica obteve o menor resultado? Qual foi esse resultado?

Classificação dos alunos: Difícil.

2. Uma folha de papel quadrada de área 16 cm^2, branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado ao lado. O ponto *O* é o centro do quadrado e *M* é o ponto médio do segmento *AB*.

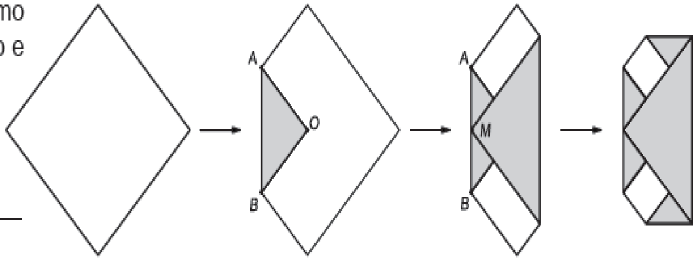


Figura I Figura II Figura III

a) Qual é a área da região branca na Figura I?

Classificação dos alunos: Fácil.

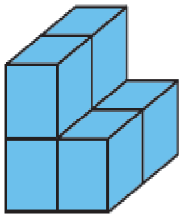
b) Qual é a área da região branca na Figura II?

Classificação dos alunos: Médio.

c) Qual é a área da região branca na Figura III?

Classificação dos alunos: Médio.

3. Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta 1 cm. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido ao lado ela usou 7 pingos de cola.



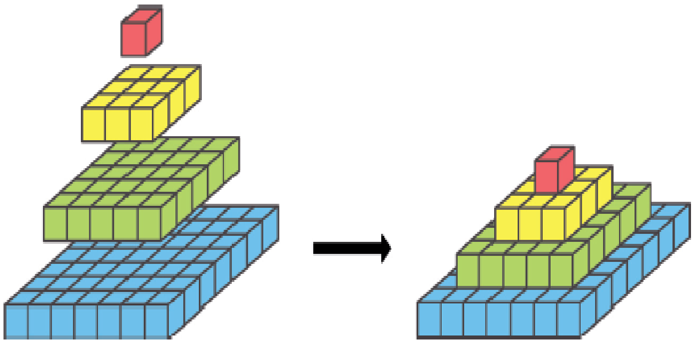
a) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 2 cm?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 3 cm?

Classificação dos alunos: Fácil.

c) Cláudia montou o sólido ao lado, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?



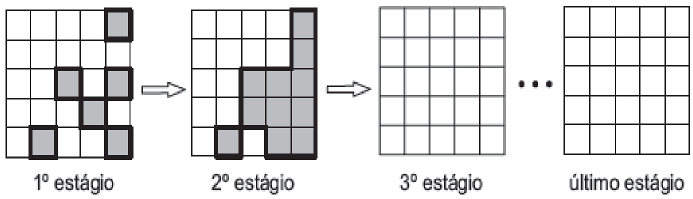
Classificação dos alunos: Difícil.

4. Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

---

a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



Classificação dos alunos: Fácil.

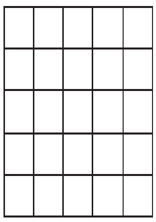
O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item **a**.

---

b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item **a**.

Classificação dos alunos: Fácil.

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



Classificação dos alunos: Médio.

d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

Classificação dos alunos: Difícil.

e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Classificação dos alunos: Difícil.

5. Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \times 2 \times 2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

Classificação dos alunos: Médio.

c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

Classificação dos alunos: Difícil.

d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Classificação dos alunos: Difícil.

6. A professora de Matemática organizou a seguinte brincadeira em sala de aula: colocou os alunos em fila e pediu para o primeiro falar três números inteiros e positivos. A seguir, pediu para o segundo aluno somar dois a dois os números falados pelo primeiro aluno e falar os três resultados em voz alta. A brincadeira prosseguiu com cada aluno falando as somas, dois a dois, dos três números falados pelo aluno anterior.

a) Se os números falados pelo primeiro aluno da fila foram 2, 5 e 6, quais foram os números falados pelo terceiro aluno?

Classificação dos alunos: Fácil.

b) Em outra vez que fizeram a brincadeira, os números falados pelo terceiro aluno da fila foram 13, 14 e 21. Quais foram os números falados pelo primeiro aluno?

Classificação dos alunos: Médio.

c) Ao fazerem a brincadeira mais uma vez, dois dos números falados pelo quarto aluno foram 48 e 61. Qual foi o terceiro número que ele falou?

Classificação dos alunos: Difícil.

Cada questão foi analisada em grupos e os resultados obtidos e apresentados seguem a opinião da maioria e não de forma individual. As análises foram realizadas antes das questões serem resolvidas, ou seja, foram avaliadas pelos alunos e com o que estudaram previamente em casa.

Algumas opiniões mudaram após a resolução de cada um dos itens, isso mostrou que certas questões, muitas vezes, apresentam um grau de dificuldade individual e este não se reflete nas opiniões em grupo, pois são vários alunos pensando e dividindo opiniões.

A primeira etapa do trabalho consistiu em encontros semanais realizados seis vezes até o dia da prova da 2ª fase (14 de Setembro). Em cada encontro foram resolvidas e discutidas três questões e seus itens.

As aulas foram de participação voluntária, tanto por parte dos alunos como do professor. Tudo foi de grande proveito porque trouxe mais tranquilidade aos alunos para a realização da avaliação. Isso ficou claro no depoimento dos alunos sobre a preparação e discussões sobre a OBMEP.

Os resultados dessa etapa somente foram conhecidos no final do ano, mais exatamente no dia 29 de Novembro, quando foram divulgadas as premiações OBMEP 2013 e a escola obteve sete premiações, sendo duas medalhas (ouro e bronze), e cinco menções honrosas. O resultado mostrou que os alunos conseguiram explorar seus conhecimentos, suas habilidades aprimoradas com o trabalho em grupo.

4.2. Segunda etapa do trabalho:

Após a aplicação das provas da 2ª fase da OBMEP, os alunos tiveram um período de descanso e no final do mês de Outubro, os grupos retornaram. Neste momento, os alunos novamente se reuniram em grupos semanais, desta vez com o intuito de resolver e divulgar as resoluções da 2ª fase da OBMEP 2013, o objetivo era o de confeccionar um DVD com as resoluções de todas as questões - resolvidas pelo professor e principalmente pelos alunos.

Essa etapa consistiu em três encontros semanais para a discussão e comentários sobre a 2ª fase e fez com que todos pudessem dividir com os colegas o que haviam feito no dia da prova.

Como nesse caso, todos os envolvidos nos grupos já tinham feito as provas, o trabalho foi mais intenso, diante disso as discussões fluíram com mais propriedade por parte dos alunos. Algo comum foi o fato de alguns alunos mostraram mais de uma forma de resolução para uma mesma questão, o que enriqueceu a discussão.

Durante essas conversas os alunos tiveram uma percepção maior das questões como também da elaboração da 2ª fase. A motivação dos estudantes, a vontade de resolver cada questão e também das várias ausências que ocorrem, foram alguns temas levantados por eles. Alguns ainda reclamaram do tempo para resolver a prova e da dificuldade de escrever algo que possa ser entendido por outrem. Todos esses aspectos foram observados por todos aqueles que realizaram a prova.

Todas as questões foram resolvidas nas aulas. Nesse momento, as provas dos dois níveis foram resolvidas juntas, por conseguinte os alunos que estavam no final do Nível 1 já se preparariam para o início do Nível 2 , vale ressaltar que várias questões são comuns às duas provas.

O grau de dificuldade foi avaliado pelos alunos e está apresentado na tabela abaixo com as questões em anexo. Como as questões da 1ª fase também foram analisadas em outro momento, esses dados serão apresentados juntos.

Primeiramente estão apresentadas as opiniões dos alunos do Nível 1 na 1ª e 2ª fases:

NÍVEL 1									
1ª FASE					2ª FASE				
QUESTÃO	FÁCIL	MÉDIO	DIFÍCIL	TOTAL	QUESTÃO	FÁCIL	MÉDIO	DIFÍCIL	TOTAL
1	11	0	0	11	**1A**	8	3	0	11
2	9	2	0	11	**1B**	8	2	1	11
3	6	5	0	11	**1C**	2	7	2	11
4	5	4	2	11	**2A**	7	3	1	11
5	7	4	0	11	**2B**	3	6	2	11
6	8	3	0	11	**2C**	3	5	3	11
7	4	6	1	11	**3A**	6	4	1	11
8	7	4	0	11	**3B**	3	5	3	11
9	7	2	2	11	**3C**	0	8	3	11
10	4	5	2	11	**4A**	6	4	1	11
11	8	3	0	11	**4B**	5	5	1	11
12	3	6	2	11	**4C**	5	4	2	11
13	6	4	1	11	**4D**	2	8	1	11
14	4	4	3	11	**5A**	9	1	1	11
15	2	6	3	11	**5B**	8	2	1	11
16	3	6	2	11	**5C**	7	3	1	11
17	7	2	2	11	**5D**	4	5	2	11
18	4	4	3	11	**6A**	6	2	3	11
19	6	4	1	11	**6B**	2	2	7	11
20	3	6	2	11	**6C**	0	5	6	11
					6D	0	3	8	11

Finalmente estão apresentadas as opiniões dos alunos do Nível 2 na 1ª e 2ª fases:

NÍVEL 2									
1ª FASE					2ª FASE				
QUESTÃO	FÁCIL	MÉDIO	DIFÍCIL	TOTAL	QUESTÃO	FÁCIL	MÉDIO	DIFÍCIL	TOTAL
1	7	0	0	7	**1A**	7	0	0	7
2	5	2	0	7	**1B**	3	3	1	7
3	7	0	0	7	**1C**	2	3	2	7
4	0	6	1	7	**2A**	4	2	1	7
5	4	3	0	7	**2B**	3	2	2	7
6	1	5	1	7	**2C**	3	3	1	7
7	3	4	0	7	**3A**	4	3	0	7
8	2	5	0	7	**3B**	3	3	1	7
9	1	6	0	7	**3C**	2	2	3	7
10	4	2	1	7	**3D**	4	3	0	7
11	3	2	2	7	**4A**	5	2	0	7
12	4	2	1	7	**4B**	2	4	1	7
13	3	4	0	7	**4C**	1	4	2	7
14	0	6	1	7	**5A**	4	3	0	7
15	3	3	1	7	**5B**	1	5	1	7
16	3	4	0	7	**5C**	3	0	4	7
17	4	3	0	7	**5D**	1	1	5	7
18	5	2	0	7	**6A**	3	3	1	7
19	3	4	0	7	**6B**	3	2	2	7
20	2	3	2	7	**6C**	2	2	3	7

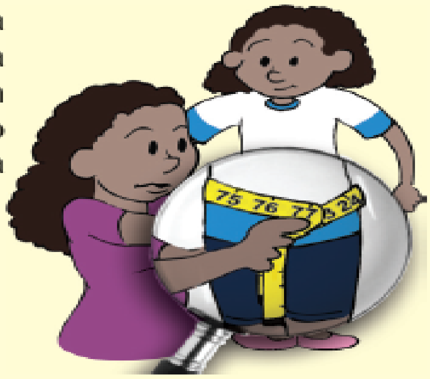
Esta pesquisa foi feita com todos os alunos da escola que realizaram a 2ª fase: doze alunos do Nível 1, entre eles cinco premiados e sete alunos do nível 2, entre eles dois premiados.

Abaixo segue a análise do grupo de alunos sobre cada questão da 1ª fase dos níveis 1 e 2. Os comentários sobre o grau de dificuldade levam em conta a opinião da maioria dos alunos, ou seja, se a questão conta com a classificação de fácil da maioria do grupo, essa foi sua classificação. As opiniões colocadas em cada questão formam um conjunto de ideias elaboradas pelos alunos (presencialmente ou por questionário) e dos professores da escola (Edgar, Leonel e Meire).

Os comentários da 1ª fase da OBMEP 2013, nível 1, seguem abaixo:

1. Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?

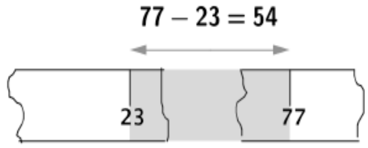
A) 23 cm
B) 50 cm
C) 54 cm
D) 77 cm
E) 100 cm



Questão de nível fácil, pois envolvia uma ideia simples de subtração, todos do grupo acetaram esta questão. Bastava realizar a diferença entre 77 e 23.

Resolução oficial:

QUESTÃO 1
ALTERNATIVA C
Quando abrir a fita métrica, Dona Célia verá o trecho da fita representado na figura; a mancha cinzenta corresponde à porção da fita que estava em volta da cintura de Marta. A medida da cintura de Marta é a distância entre os pontos marcados com 77 e 23, ou seja, é $77 - 23 = 54$ cm.



2. Joãozinho subtraiu o menor número de três algarismos diferentes do maior número de três algarismos diferentes. Que resultado ele obteve?

A) 882
B) 883
C) 885
D) 886
E) 888

Questão de nivel fácil, envolvia a formação de número com três algarismos, porém o fato desse numero ser de 3 algarismos distintos, fez com que alguns alunos não se atentassem ao critério e errassem a questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA C
O maior número de três algarismos diferentes é 987 e o menor número de três algarismos diferentes é 102 (observamos que o algarismo 0 não pode aparecer na casa das centenas). A diferença entre esses números é $987 - 102 = 885$.

3. Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um número atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os números são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o número atrás do cartão com a letra M?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Questão de nível médio, utlizava a ideia de lógica, pois através da análise dos 2 quadrinhos, o aluno conseguia eliminar algumas hipóteses e chegava à solução correta.

Resolução oficial:

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA D
A única maneira de somar três números distintos entre 1, 2, 3, 4, e 5 e obter o resultado 6 é $1+2+3=6$. Logo os cartões com as letras O, B e E têm, em seu verso, os números 1, 2 ou 3 (não necessariamente nessa ordem). Ao olhar para o verso dos cartões com as letras O e P, Caetano vê no verso do cartão O um dos números 1, 2 e 3. Observando as somas $1+7=8$, $2+6=8$ e $3+5=8$, e lembrando que o número no verso do cartão P é no máximo 5, vemos que os números no verso dos cartões O e P são, respectivamente, 3 e 5. Resta o número 4, que é o que está no verso do cartão M.

4. Na tabela há um número escondido na casa azul e a soma dos números da primeira linha é igual à soma dos números da segunda linha. Qual é o número escondido?

A) 1995
B) 1997
C) 1999
D) 2001
E) 2005

1	3	5	7	9	11	13	15	17	2013
3	5	7	9	11	13	15	17	19	

Questão de nível médio, alguns alunos se complicaram com a sequência, porém bastava realizar a soma de todos os termos da 1ª linha e subtrair a soma dos elementos da 2ª linha já conhecidos, nem todos entenderam a lógica do problema.

Resolução oficial:

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA A

Em cada uma das nove primeiras colunas da tabela, o número da primeira linha é sempre duas unidades maior que o da segunda linha. Logo, nessas colunas, a segunda linha supera a primeira por um total de 18 unidades. Portanto, para que a soma das duas linhas seja igual, o número a ser colocado na casa azul deve ser $2013 - 18 = 1995$.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	2013
3	5	7	9	11	13	15	17	19	

Outra solução equivalente é notar que os números de 3 a 17 estão repetidos nas duas linhas; a diferença entre elas é então $2013 + 1 - 19 = 1995$, que é número que está escondido.

5. A professora perguntou a seus alunos: "Quantos anos vocês acham que eu tenho?". Ana respondeu 22, Beatriz, 25 e Celina, 30. A professora disse: "Uma de vocês errou minha idade em 2 anos, outra errou em 3 e outra em 5 anos". Qual é a idade da professora?

A) 26
B) 27
C) 28
D) 29
E) 30

Questão de nível fácil, muitos alunos conseguiram visualizar uma tabela para organização dos dados e das dicas, eliminaram as possibilidades e chegaram à resposta correta.

Resolução oficial:

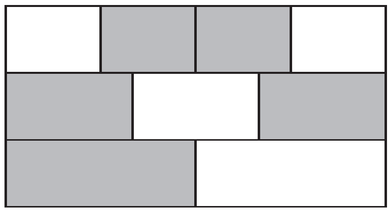
QUESTÃO 5
ALTERNATIVA B
A tabela abaixo mostra as possíveis idades da professora, calculadas a partir da resposta de cada menina e dos erros 2, 3 e 5 anos para mais ou para menos:

	Errou em 2	Errou em 3	Errou em 5
Ana	20, 24	19, 25	17, 27
Beatriz	23, 27	22, 28	20, 30
Celina	28, 32	27, 33	25, 35

O único número que aparece nas três linhas e nas três colunas é 27; logo, essa é a idade da professora.

6. A figura representa um retângulo de área 36 m², dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?

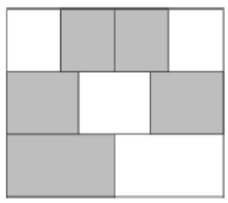
A) 18 m²
B) 20 m²
C) 22 m²
D) 24 m²
E) 26 m²



Questão de nível fácil, pois ao usar conhecimentos de área de figura plana(retângulo), os alunos chegaram ao cálculo da área sombreada, repartindo a figura em linhas e em pedaços iguais em cada uma delas(linhas).

Resolução oficial:

QUESTÃO 6
ALTERNATIVA B
Como as faixas são retângulos de mesmas dimensões, elas têm a mesma área, que é $36 \div 3 = 12\,m^2$. Segue que:



- na faixa inferior, a área de cada parte é $12 \div 2 = 6\,m^2$; essa é a área da parte cinza;
- na faixa do meio, a área de cada parte é $12 \div 3 = 4$; as duas partes cinzas têm então área total igual a $2 \times 4 = 8\,m^2$;
- na faixa do cima, a área de cada parte é $12 \div 4 = 3$; as três partes cinzas têm então área total igual a $2 \times 3 = 6\,m^2$.

A área total da região colorida de cinza é, portanto, $6 + 8 + 6 = 20\,m^2$.

7. Um grupo de meninos está sentado em volta de uma mesa retangular. Dois meninos estão sentados à frente de Abelardo, no lado oposto da mesa. Um menino está sentado à frente de Beto, quatro à frente de Carlos e cinco à frente de Daniel. Quantos meninos estão sentados à mesa?

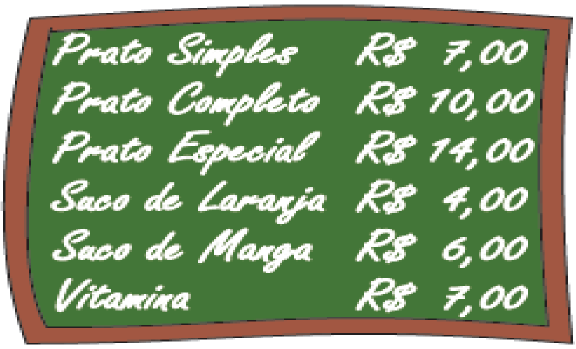
A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15

Questão de nível médio. Nessa questão o grande desafio era expor a situação em um desenho(retângulo), usar as informações fornecidas no enunciado e chegar à conclusão do número de meninos sentados à mesa. Vale ressaltar que não existe uma única solução para o exercício.

Resolução oficial:

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA B
Como Abelardo tinha exatamente dois amigos à sua frente, o lado da mesa oposto a ele tinha exatamente duas pessoas. Como Beto tinha um único amigo à sua frente, o lado da mesa oposto a ele tinha exatamente uma pessoa. Carlos tinha quatro amigos à sua frente, logo o lado da mesa oposto a ele tinha exatamente quatro pessoas e Daniel tinha cinco amigos à sua frente, de modo que o lado da mesa oposto a ele tinha cinco pessoas. Como a mesa tem exatamente quatro lados, pode-se concluir que o número de meninos à mesa era $1+2+4+5=12$.

8. Beatriz e André foram almoçar juntos em um restaurante e cada um escolheu um prato e uma bebida. André gastou R$ 9,00 a mais do que Beatriz. Qual foi o almoço de André?



A) prato completo e suco de manga
B) prato simples e vitamina
C) prato especial e suco de laranja
D) prato simples e suco de laranja
E) prato especial e suco de manga

Questão de nível fácil. Nessa questão os alunos montaram uma árvore de possibilidades, combinaram e calcularam cada refeição completa, dessa forma, foi possível enxergar a diferença de R$ 9,00 entre duas refeições completas. A maior parte acertou essa questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA E

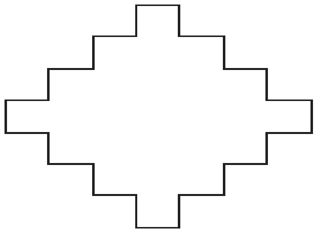
A tabela abaixo mostra, em reais, o preço de todas as refeições possíveis:

	Prato Simples	Prato Completo	Prato Especial
Suco de laranja	11	14	18
Suco de manga	13	16	20
Vitamina	14	17	21

Os únicos valores nessa tabela que diferem por R$9,00 são R$20,00 e R$11,00 (assinalados em vermelho). Logo o almoço de Beatriz foi um prato simples e suco de laranja, enquanto André pediu um prato especial e suco de manga.

9. A figura representa um polígono em que todos os lados são horizontais ou verticais e têm o mesmo comprimento. O perímetro desse polígono é 56 cm. Qual é sua área?

A) 25 cm^2
B) 50 cm^2
C) 75 cm^2
D) 100 cm^2
E) 125 cm^2

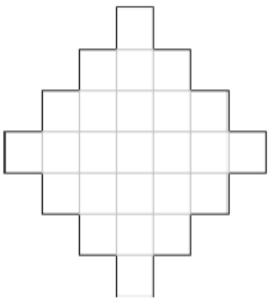


Questão de nível fácil. Bastava que os alunos traçassem linhas parelelas na horizontal e vertical a fim de completar os quadradinhos e encontrar o lado de cada quadrado, assim obtinha-se à área total do poligono. Grande parte dos alunos acertou essa questão.

Resolução oficial:

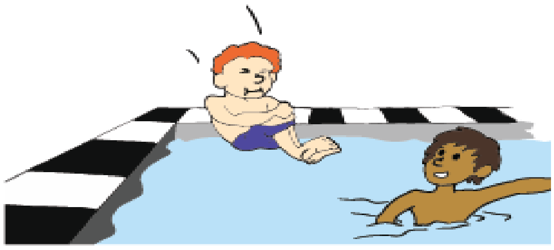
QUESTÃO 9
ALTERNATIVA D

O polígono tem 14 lados que são segmentos verticais e 14 que são segmentos horizontais. Seu perímetro é a soma dos comprimentos desses 28 segmentos; logo, o comprimento de cada segmento é $56 \div 28 = 2$ cm. Podemos agora decompor o polígono em 25 quadrados de 2 cm de lado, como na figura ao lado. A área de cada quadrado é $2 \times 2 = 4\ cm^2$ e a do polígono é então $25 \times 4 = 100\ cm^2$.



10. Uma piscina quadrada tem a borda formada por pedras quadradas brancas e pretas alternadas, como na figura. Em um dos lados da piscina há 40 pedras pretas e 39 pedras brancas. Quantas pedras pretas foram usadas na borda?

A) 156
B) 157
C) 158
D) 159
E) 160



Questão de nível médio. Alguns alunos se complicaram ao contar as pedras pretas e brancas com o mesmo raciocinio, sem levar em conta que os cantos possuíam apenas pedras pretas, o que ocasiona uma diferença no número de pedras dos dois tipos. Alguns alunos tivereram dificuldades nessa questão.

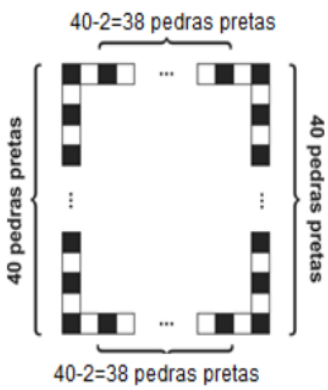
Resolução oficial:

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA A

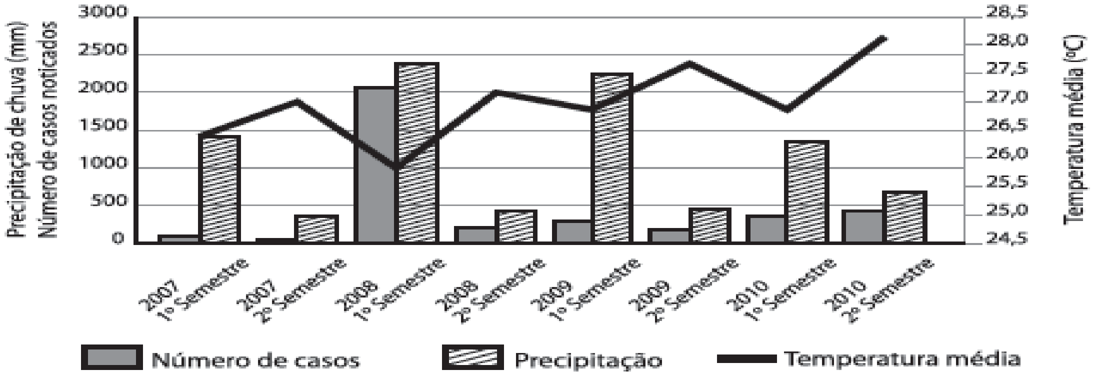
Como há alternância de pedras pretas e brancas e mais pedras pretas do que brancas, as quatro pedras dos cantos da piscina devem ser pretas. Observando a figura ao lado, vemos que o total de pedras pretas é

$$40+(40-2)+40+(40-2)=40+38+40+38=156.$$

Alternativamente, podemos somar o número de pedras pretas em cada lado, obtendo $40+40+40+40=160$ e depois notar que as pedras pretas nos cantos da piscina foram contadas duas vezes. Isso introduz um erro de 4 na contagem anterior; a contagem correta é então $160-4=156$ pedras pretas.



11. O gráfico mostra o número de casos notificados de dengue, a precipitação de chuva e a temperatura média, por semestre, dos anos de 2007 a 2010 em uma cidade brasileira. Podemos afirmar que:



Fonte: adaptado de http://sic2011.com/sic/arq/81903267457118190326745.pdf

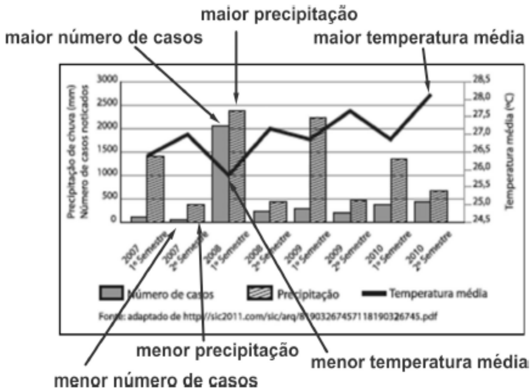
A) O período de maior precipitação foi o de maior temperatura média e com o maior número de casos de dengue notificados.
B) O período com menor número de casos de dengue notificados também foi o de maior temperatura média.
C) O período de maior temperatura média foi também o de maior precipitação.
D) O período de maior precipitação não foi o de maior temperatura média e teve o maior número de casos de dengue notificados.
E) Quanto maior a precipitação em um período, maior o número de casos de dengue notificados.

Questão de nível fácil. Ao trabalhar com análise de gráficos, neste caso, bastava elacionar as informações (número de casos, precipitação e temperatura média) e concluir, por exclusão, qual alternativa se encaixava de forma mais adequada.

Resolução oficial:

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA D

Vamos analisar as afirmativas **uma a uma**, de acordo com a figura ao lado.



a) **falsa:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) teve o maior número de casos notificados de dengue, mas não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010).
b) **falsa:** o período com menor número de casos notificados de dengue (2º semestre 2007) não foi o de maior temperatura média (2º semestre 2010).
c) **falsa:** o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) não foi o de maior precipitação (1º semestre 2008).
d) **verdadeira:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) e teve o maior número de casos notificados de dengue.
e) **falsa:** basta comparar o 1º semestre de 2007 com o 2º semestre de 2009: no primeiro a precipitação é maior do que no segundo, mas o seu número de casos de dengue é menor.

12. Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777\ldots777}_{\text{setenta e sete setes}} ?$$

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Questão de nível médio. Mesmo envolvendo a noção de soma de parcelas, o aluno precisaria de uma noção da sequência em seus primeiros elementos, para saber como a sequência se comporta na casa dos algarismos, das dezenas e assim por diante. Nesta questão muitos alunos tiveram dificuldade em visualizar essa adição de várias parcelas, isto um grande índice de erros.

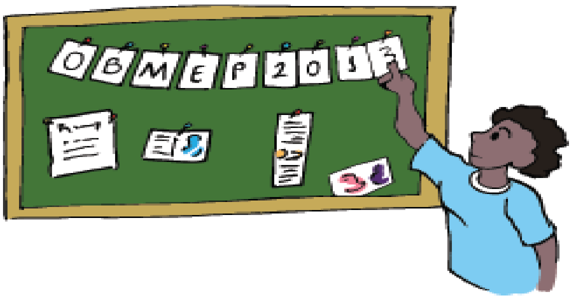
Resolução oficial:

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA A

Ao somar os algarismos das unidades, encontramos $77 \times 7 = 539$. Logo, o algarismo das unidades da soma é 9 e 53 deve ser adicionado à casa das dezenas. A soma dos algarismos 7 que aparecem nas dezenas é $76 \times 7 = 532$, que somada a 53 dá 585. Logo, o algarismo das dezenas é 5.

Alternativamente, podemos observar que os algarismos das dezenas e unidades da soma só dependem da soma dos algarismos das unidades e das dezenas das parcelas, ou seja, são os mesmos que os algarismos correspondentes da soma $7 + \underbrace{77 + 77 + \ldots + 77}_{76\ vezes} = 7 + 76 \times 77 = 5859$;

logo, o algarismo das dezenas da soma indicada é 9 e o das dezenas é 5.



13. Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

A) 2
B) 3
C) 6
D) 7
E) 12

Questão de nível médio. Embora tenha uma ideia simples de combinação, os alunos acharam o enunciado um pouco confuso, o que aumentou o índice de erros da questão. Cabe ressaltar que análise combinatória sempre é um desafio aos alunos.

Resolução oficial:

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA B

Carlinhos pode pintar P de verde ou amarelo. Se ele pintar o P de verde, ele poderá pintar o 2 de azul ou de amarelo; se ele pintar o P de amarelo, ele só poderá pintar o 2 de azul. No total, ele pode pintar o 2 e o P de $2+1=3$ maneiras diferentes. Isso feito, as outras letras e os outros algarismos só podem ser pintados de uma única cor, ou seja, Carlinhos pode pintar o letreiro de 3 maneiras diferentes. Indicando amarelo por A, azul por Z e verde por V, essas maneiras são **VAVAVZAZA, VAVAVAZAZ** e **AVAVAZAZA** (as letras sublinhadas indicam as cores de P e de 2).

14. A quantidade de água de uma melancia corresponde a 95% de seu peso. Joaquim retirou água dessa melancia até que a quantidade de água correspondesse a 90% de seu peso, que passou a ser 6 kg. Qual era o peso original da melancia?

A) 6,5 kg
B) 7 kg
C) 8,5 kg
D) 10 kg
E) 12 kg

Questão de nível médio. Com a ideia de porcentagem, o aluno precisava trabalhar com proporção, no caso a regra de três simples, para descobrir o peso inicial, muitos alunos não entenderam que a parte sólida não mudou, apenas retirou-se água, desta forma, muitos não obtiveram sucesso na questão.

Resolução oficial:

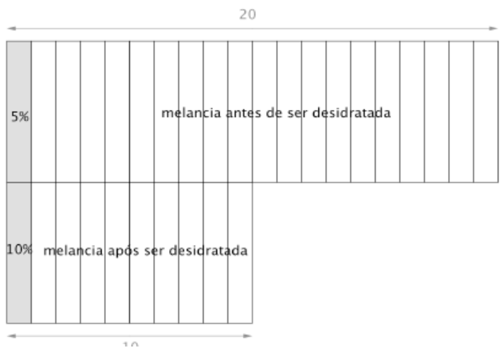
QUESTÃO 14
ALTERNATIVA E

Aqui usaremos os termos *peso* e *massa* como sinônimos, para tornar o texto mais próximo da linguagem coloquial.

Uma melancia é constituída de duas partes: água e componentes sólidos (fibras, açúcares, etc.). Durante a desidratação somente ocorre perda de água; o peso dos demais componentes, antes e depois da desidratação, permanece o mesmo.

O enunciado diz que, após ser desidratada, a melancia pesa 6 kg, dos quais 90% correspondem a água; os 10% restantes, cujo peso é $\frac{1}{10} \times 6 = \frac{6}{10} = 0{,}6$ kg, correspondem aos componentes sólidos. Por outro lado, antes de ser desidratada, a melancia tinha 95% de água, logo ela continha 5% de componentes sólidos; como o peso desses componentes não muda, vemos que 5% do peso original da melancia era 0,6 kg. Portanto 10%, ou seja, a décima parte, do peso original da melancia era igual a 1,2 kg; logo, o peso original da melancia era $10 \times 1{,}2 = 12$ kg.

A solução acima pode ser visualizada na figura a seguir, que consiste de dois retângulos que representam o peso da melancia antes e depois de ser desidratada; em ambos, o retângulo sombreado representa o peso dos componentes sólidos. No primeiro retângulo, o pequeno retângulo sombreado corresponde a 5% do peso da melancia, que corresponde então a 20 desses retângulos, pois $20 \times 5\% = 100\%$. Já no segundo retângulo, o pequeno retângulo sombreado corresponde a 10% do peso da melancia, que corresponde então a 10 desses retângulos, pois $10 \times 10\% = 100\%$. Logo o peso da melancia antes de ser desidratada (correspondente a 20 retângulos), era igual a duas vezes o peso da melancia após a desidratação (correspondente a 10 retângulos), ou seja, era 12 kg.



15. Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$ L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$ L de água?

A) $\frac{7}{12}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{5}{6}$

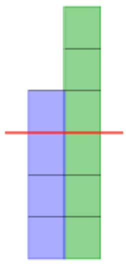
E) $\frac{4}{3}$

Questão de nível médio. Muitos alunos analisaram a questão como difícil, pois envolvia operações de números racionais, na forma decimal ou fracionária. Muitos erraram essa questão por confundirem a sua resolução.

Resolução oficial:

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA C

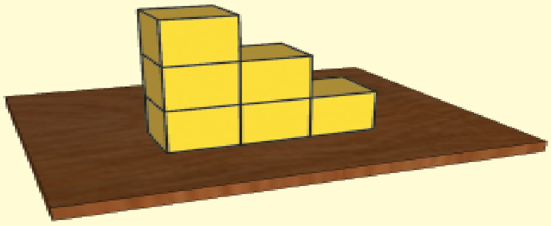
Como $\frac{2}{3}$L de água enche uma caneca, segue que $3\times\frac{2}{3}=2$ L de água enchem $3\times1=3$ canecas. Logo, $\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$L de água encherá $\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{4}$ de uma caneca.



Outra solução pode ser obtida considerando a figura ao lado. A coluna da direita, em verde, representa 1L de água; cada quadradinho corresponde a $\frac{1}{6}$L . A coluna da esquerda, em azul, representa a capacidade da caneca, que é de $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$L; observamos que cada quadradinho azul corresponde a $\frac{1}{4}$ da capacidade da caneca. Dividindo a figura ao meio pela linha vermelha, vemos que três quadrados verdes ($\frac{1}{2}$L de água) correspondem a três quadrados azuis ($\frac{3}{4}$ da capacidade da caneca). Logo, $\frac{1}{2}$L de água enche $\frac{3}{4}$ da caneca.

16. Elisa empilha seis dados em uma mesa, como na ilustração, e depois anota a soma dos números de todas as faces que ela consegue ver quando dá uma volta ao redor da mesa. As faces de cada dado são numeradas de 1 a 6 e a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Qual é a maior soma que Elisa pode obter?

A) 89
B) 95
C) 97
D) 100
E) 108

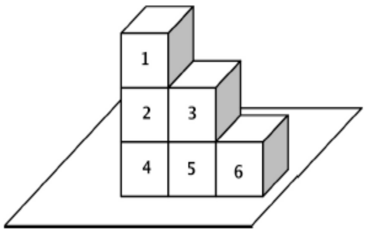


Questão de nível difícil. O aluno precisava analisar, a priori, que o valor exposto nas faces deve ser o maior possível para que a soma seja máxima. Poucos alunos conseguiram organizar essa idéia. No segundo momento, analisar que alguns cubos tinham a mesma característica, diminuindo o trabalho. Nessa questão houve um grande número de erros.

Resolução oficial:

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA A

A soma de todas as faces de um cubo é $1+2+3+4+5+6+7=21$. A soma das faces visíveis é então igual a $6\times 21=126-(\textit{a soma das faces escondidas})$. Logo, para que a soma das faces visíveis seja máxima, devemos posicionar os cubos de modo que a soma dos números das faces escondidas seja mínima. Vamos minimizar essa soma considerando um cubo de cada vez, de acordo com a numeração da figura ao lado.



- *Cubo 1:* há apenas uma face escondida, que deve ser a de número 1.
- *Cubos 2 e 4:* em cada um há três faces escondidas. Dessas faces, duas são opostas e somam 7; a terceira face deve ser a de número 1. A soma dessas faces é $2\times(1+7)=16$.
- *Cubos3 e 6:* em cada um há duas faces vizinhas escondidas, que devem ser as de número 1 e 2 (como esses números não somam 7, as faces correspondentes não são opostas, logo são adjacentes). Essas faces somam $2\times(1+2)=6$.
- *Cubo 5:* há dois pares de faces opostas escondidas, que somam 14.

Logo, a soma máxima possível é $126-(1+16+6+14)=126-37=89$.

17. Todos os 40 alunos de uma turma responderam *sim* ou *não* a duas perguntas: “Você gosta de Português?” e “Você gosta de Matemática?” Responderam *sim* à primeira pergunta 28 alunos, responderam *sim* à segunda pergunta 22 alunos, enquanto 5 alunos responderam *não* às duas perguntas. Quantos alunos responderam *sim* às duas perguntas?

A) 5
B) 7
C) 13
D) 15
E) 25

Questão de nível fácil. Porém alguns alunos não entenderam a lógica de que não podemos ter mais do que 40 alunos na soma total, devido a isso, alguns erraram a resolução e o raciocínio. A ideia de excluir da soma total os alunos que responderam NÃO às duas questões era fundamental na resolução.

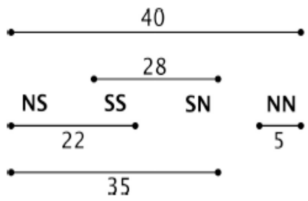
Resolução oficial:

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA D

Os 40 alunos da sala podem ser divididos em quatro grupos disjuntos:

- SS: responderam *sim* às duas perguntas;
- SN: responderam *sim* à primeira pergunta e *não* à segunda;
- NS: responderam *sim* à primeira pergunta e *não* à segunda;
- NN: responderam *não* às duas perguntas.

Na figura ao lado, representamos esquematicamente as informações do enunciado:



- os grupos, juntos, formam a turma, que tem 40 alunos;
- SS e SN, juntos, têm 28 alunos;
- NS e SS, juntos, têm 22 alunos;
- NN tem 5 alunos.

Como NN tem 5 alunos, os grupos NS, SS e SN têm, juntos, $40-5=35$ alunos. O diagrama mostra que, se somarmos o número de alunos dos grupos NS e SN com duas vezes o número de alunos do grupo SS, o total será $22+28=50$. Como o número total de alunos desses três grupos é 35, segue que o número de alunos do grupo SS é $50-35=15$.

18. Joãozinho derrubou suco em seu caderno e quatro algarismos da sentença que ele estava escrevendo ficaram borrados.

Comprei 18 livros; cada um custou R$[redacted],93 e o total foi R$ 3[redacted]2,7[redacted]

Qual é a soma dos algarismos borrados?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

Questão de nível médio. Mesmo envolvendo a ideia básica de multiplicação de decimais, os alunos precisavam usar o raciocínio de valores posicionais, o que complicou alguns na resolução, houve um grande índice de erro.

Resolução oficial:

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA E

Comprei 18 livros; cada um custou R$[redacted],93 e o total foi R$ 3[redacted]2,7[redacted]

O enunciado pode ser expresso, em centavos, na forma $AB93 \times 18 = 3C27D$, onde A, B, C e D representam os algarismos que foram apagados. O algarismo D é o algarismo das unidades de $3 \times 8 = 24$, ou seja, é 4; o resultado da multiplicação é então $3C274$. Observamos que o resultado, por ser múltiplo de 18, também é múltiplo de 9; logo, a soma de seus algarismos deve ser também um múltiplo de 9. Como $3+2+7+4=16$, o único valor possível para C é 2, ou seja, o resultado é 32274. Como $32274 \div 18 = 1793$, concluímos que A corresponde a 1 e B corresponde a 7. A soma dos algarismos apagados é então $1+7+2+4=14$.

19. Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: “De quem são os celulares que tocaram?” Guto disse: “O meu

não tocou”, Carlos disse: “O meu tocou” e Bernardo disse: “O de Guto não tocou”. Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

A) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
B) Bernardo mentiu.
C) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
D) Carlos mentiu.
E) Guto falou a verdade.

Questão de nível médio. Ao usar a lógica matemática, o aluno conseguiria montar a tabela de organização, eliminando as hipóteses falsas, ainda assim, a questão apresentava um bom grau de dificuldade e por ser a questão do final da prova. Muitos alunos erraram por desatenção ou devido ao cansaço.

Resolução oficial:

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA B
Na tabela abaixo mostramos como analisar as informações do enunciado. Na primeira linha, supomos que Bernardo disse a verdade; na segunda, que Guto disse a verdade e na terceira, que Carlos disse a verdade.

	Guto *Não foi o meu*	**logo**	**Carlos** *Foi o meu*	**logo**	**Bernardo** *Não foi o de Guto*	**logo**
1	mentiu	**O celular de Guto tocou**	mentiu	O celular de Carlos não tocou	disse a verdade	**O celular de Guto não tocou**
2	disse a verdade	**O celular de Guto não tocou**	mentiu	O celular de Carlos não tocou	mentiu	**O celular de Guto tocou**
3	mentiu	O celular de Guto tocou	disse a verdade	O celular de Carlos tocou	mentiu	O celular de Guto tocou

Nas duas primeiras linhas, chega-se à conclusão de que o celular de Guto tanto tocou quanto não tocou (em vermelho). Essa contradição mostra que o único caso possível é o da terceira linha, ou seja, Carlos disse a verdade e os celulares de Guto e Carlos tocaram.

20. Mário gosta de escrever dois números de cinco algarismos usando todos os algarismos de 0 a 9 e depois subtrair o menor do maior. Por exemplo, ele escreveu os números 78012 e 39654 e calculou sua diferença $78012 - 39654 = 38358$. Qual é a menor diferença que ele pode obter?

A) 237
B) 239
C) 247
D) 249
E) 269

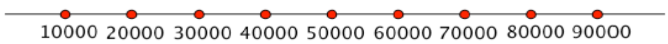
Questão de nível médio. A diferença mínima não ocorria somente entre dois únicos valores, neste caso, o aluno precisava visualizar que o maior valor deveria começar com algarismos acima de 5 e terminar com algarismo abaixo de 5, e no caso do subtraendo, o número precisava começar com valores abaixo de 5 e terminar com valores acima de 5, isso tornou a questão de nível de dificuldade elevada. Muitos alunos erraram a questão.

Resolução oficial:

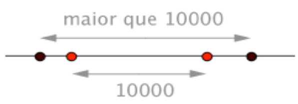
QUESTÃO 20
ALTERNATIVA C

Para que a diferença seja mínima, os algarismos das dezenas de milhares devem ser consecutivos. Além disso, o número formado pelos quatro últimos algarismos do maior número deve ser o menor possível, enquanto o formado pelos quatro últimos algarismos do menor deve ser o maior possível. Com quatro algarismos distintos, o maior número que podemos formar é 9876 e o menor é 0123 (note que aqui podemos usar o 0, pois não estamos trabalhando com a primeira posição à esquerda). Assim, os algarismos consecutivos a serem usados para as dezenas de milhares são 4 e 5. Os dois números são, portanto, 50123 e 49876, cuja diferença é $50123 - 49876 = 247$.

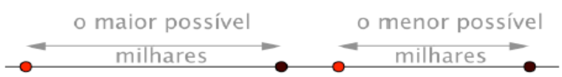
Podemos enxergar o argumento acima na reta numérica, da seguinte maneira. A figura a seguir mostra os pontos (em vermelho) que correspondem a dezenas de milhares.



Observamos que se dois números quaisquer (em preto na figura abaixo) correspondem a números cujos algarismos na casa das dezenas de milhares não são consecutivos, sua diferença é maior que 10000.



Como é possível escrever dois números de cinco algarismos usando todos os algarismos de 0 a 9 cuja diferença é menor que 10000 (por exemplo, $40926 - 35781 = 5145$), segue que os dois desses números cuja diferença é mínima devem ter algarismos das dezenas de unidade consecutivos. Uma vez escolhidos esses dois algarismos, a figura abaixo mostra como devemos posicionar os números (em preto) na reta.



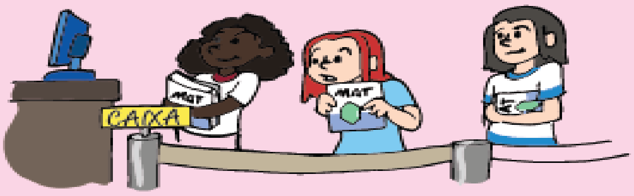
Finalmente, observamos que a escolha de 4 e 5 para a casa das dezenas de unidade de nossos números permite escolher, para os milhares do menor número, o maior número possível (9876) e, para os milhares do maior número, o menor número possível (0123). Logo nossos números são 49876 e 50123, cuja diferença é $50123 - 49876 = 247$.

Vale ressaltar que as análises feitas são baseadas na opinião dos alunos e dos professores, podem, porém não refletirem a opinião da maioria que prestou a 1ª fase.

Abaixo seguem os comentários sobre a 1ª fase da OBMEP 2013 do nível 2:

1. As colegas de sala Ana, Alice e Aurora foram comprar seus livros de Matemática. Alice percebeu que havia esquecido sua carteira. Ana e Aurora pagaram pelos três livros; Ana contribuiu com R$43,00 e Aurora com R$68,00. Quanto Alice deve pagar para Ana e para Aurora, respectivamente?

A) R$18,50 e R$18,50
B) R$0,00 e R$37,00
C) R$25,00 e R$37,00
D) R$12,00 e R$25,00
E) R$6,00 e R$31,00



Questão de nível fácil. Bastava utilizar a subtração entre valores financeiros e concluir a questão. Todos os alunos do grupo acertaram essa questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 1
ALTERNATIVA E

Como Ana contribuiu com 43 reais e Aurora com 68 reais, os três livros juntos custaram $43+68=111$ reais; desse modo, cada livro custou $111 \div 3 = 37$ reais, que é o que cada uma das três colegas deveria ter pago. Logo, Ana deve receber de Alice a quantia de $43-37=6$ reais e Aurora deve receber de Alice $68-37=31$ reais. Observamos que Ana vai pagar a Alice e Aurora, no total, a quantia de $6+31=37$ reais.

2. Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um algarismo atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os algarismos são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o algarismo atrás do cartão com a letra M?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

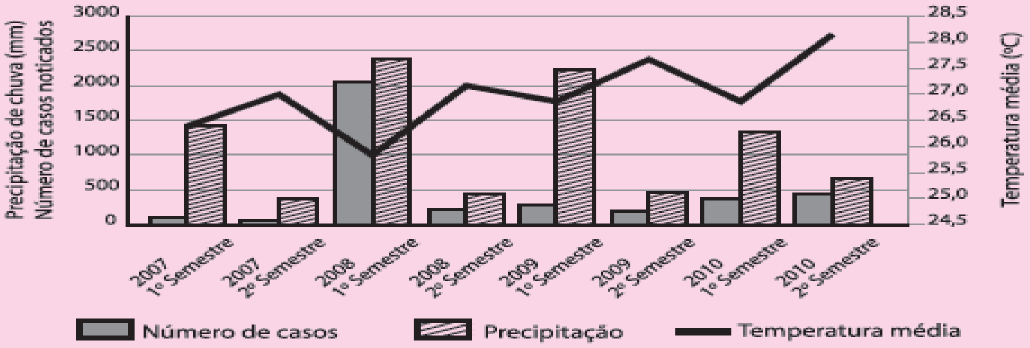
Questão de nível fácil. Os alunos entenderam a ideia de trabalhar com a lógica e eliminar as possobilidades, trabalhando com as informações dos 2 quadrinhos. A maioria do grupo acertou a questão. Bastava analisar, a priori, que as letras O, B e E somadas resultavam em 6, ou seja, só podiam ter os números 1, 2 e 3, desta forma, o 2º quadrinho indicava quem era a letra P, descobrindo assim qual número era a letra M.

Resolução oficial:

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA D

A única maneira de somar três números distintos entre 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e obter o resultado 6 é $1+2+3=6$. Logo os cartões com as letras O, B e E têm, em seu verso, os números 1, 2 ou 3 (não necessariamente nessa ordem). Ao olhar para o verso dos cartões com as letras O e P, Caetano vê no verso do cartão O um dos números 1, 2 e 3. Observando as somas $1+7=8$, $2+6=8$ e $3+5=8$, e lembrando que o número no verso do cartão P é no máximo 5, vemos que os números no verso dos cartões O e P são, respectivamente, 3 e 5. Resta o número 4, que é o que está no verso do cartão M.

3. O gráfico mostra o número de casos notificados de dengue, a precipitação de chuva e a temperatura média, por semestre, dos anos de 2007 a 2010 em uma cidade brasileira. Podemos afirmar que:



Fonte: adaptado de http://sic2011.com/sic/arq/81903267457118190326745.pdf

A) O período de maior precipitação foi o de maior temperatura média e com o maior número de casos de dengue notificados.

B) O período com menor número de casos de dengue notificados também foi o de maior temperatura média.

C) O período de maior temperatura média foi também o de maior precipitação.

D) O período de maior precipitação não foi o de maior temperatura média e teve o maior número de casos de dengue notificados.

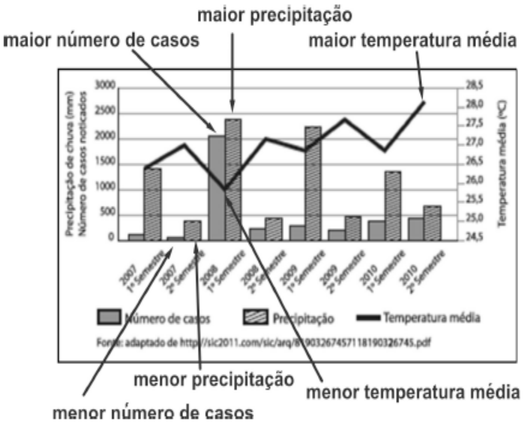
E) Quanto maior a precipitação em um período, maior o número de casos de dengue notificados.

Questão de nível fácil. A análise do gráfico, para os alunos do nível 1, bastava para excluir as alternativas incorretas, todos desse grupo acertaram a questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA D

Vamos analisar as afirmativas uma a uma, de acordo com a figura ao lado.



a) **falsa:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) teve o maior número de casos notificados de dengue, mas não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010).

b) **falsa:** o período com menor número de casos notificados de dengue (2º semestre 2007) não foi o de maior temperatura média (2º semestre 2010).

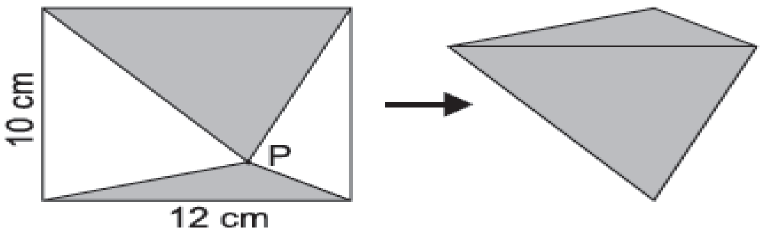
c) **falsa:** o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) não foi o de maior precipitação (1º semestre 2008).

d) **verdadeira:** o período de maior precipitação (1º semestre 2008) não foi o período de maior temperatura média (2º semestre 2010) e teve o maior número de casos notificados de dengue.

e) **falsa:** basta comparar o 1º semestre de 2007 com o 2º semestre de 2009: no primeiro a precipitação é maior do que no segundo, mas o seu número de casos de dengue é menor.

4. Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto *P* no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com esses triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?

A) 58 cm^2
B) 60 cm^2
C) 64 cm^2
D) 66 cm^2
E) 70 cm^2

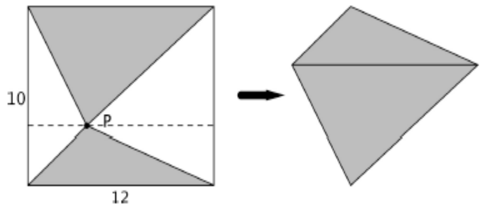


Questão de nível médio. O aluno precisava trabalhar com o recorte que ocorre da figura 1 para a figura 2 e para isso trabalhar com a largura e o comprimento do retângulo eram fundamentais, desta forma, muitos alunos se perderam na questão, o que aumentou muito o índice de erros.

Resolução oficial:

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA B

A área do quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos. Traçando por *P* uma paralela a um dos lados do retângulo, como na figura, este fica dividido em dois retângulos menores. A área de cada um dos triângulos é igual à metade da área do retângulo menor correspondente; como a soma das áreas dos retângulos menores é igual à área do retângulo maior, segue que a soma das áreas dos triângulos é igual à metade da área do retângulo maior, ou seja, é igual a $\frac{1}{2}\times 10\times 12 = 60\text{ cm}^2$; essa é a área do quadrilátero.



5. Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777\ldots777}_{\text{setenta e sete setes}}\ ?$$

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Questão de nível médio. Como analisado com os alunos de nível 1, a questão necessitava, por parte do aluno, de uma análise geral sobre soma de parcelas, desenvolvendo um raciocínio para as casas dos algarimos, das dezenas e assim por diante, nesse grupo ocorreram falhas nesse raciocínio e erros de resolução.

Resolução oficial:

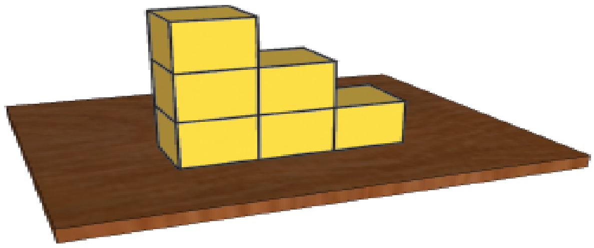
QUESTÃO 5
ALTERNATIVA A

Ao somar os algarismos das unidades, encontramos $77\times 7 = 539$.Logo, o algarismo das unidades da soma é 9 e 53 deve ser adicionado à casa das dezenas. A soma dos algarismos 7 que aparecem nas dezenas é $76\times 7 = 532$, que somada a 53 dá 585. Logo, o algarismo das dezenas é 5.

Alternativamente, podemos observar que os algarismos das dezenas e unidades da soma só dependem da soma dos algarismos das unidades e das dezenas das parcelas, ou seja, são os mesmos que os algarismos correspondentes da soma $7+\underbrace{77+77+\ldots+77}_{76\ vezes} = 7+76\times 77 = 5859$; logo, o algarismo das dezenas da soma indicada é 9 e o das dezenas é 5.

6. Elisa empilha seis dados em uma mesa, como na ilustração, e depois anota a soma dos números de todas as faces que ela consegue ver quando dá uma volta ao redor da mesa. As faces de cada dado são numeradas de 1 a 6 e a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Qual é a maior soma que Elisa pode obter?

A) 89
B) 95
C) 97
D) 100
E) 108

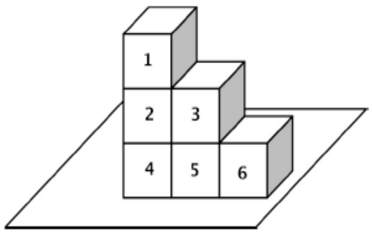


Questão de nivel médio, pois a questão da soma ser máxima, exigia do aluno a visualização de sempre expor a face com maiores valores possíveis, tornando essa soma máxima aparente. Alguns relataram não conseguir visualizar cubos que possuíam a mesma característica, aumentando o tempo de resolução. Alguns alunos desse grupo erraram a questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 6
ALTERNATIVA A

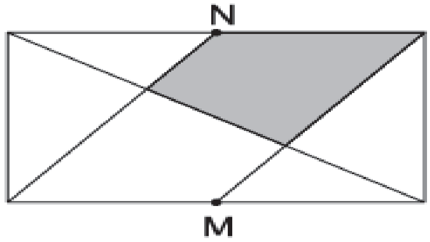
A soma de todas as faces de um cubo é $1+2+3+4+5+6=21$. A soma das faces visíveis é então igual a $6\times 21=126-(\textit{a soma das faces escondidas})$. Logo, para que a soma das faces visíveis seja máxima, devemos posicionar os cubos de modo que a soma dos números das faces escondidas seja mínima. Vamos minimizar essa soma considerando um cubo de cada vez, de acordo com a numeração da figura ao lado.



- *Cubo 1:* há apenas uma face escondida, que deve ser a de número 1.
- *Cubos 2 e 4:* em cada um há três faces escondidas. Dessas faces, duas são opostas e somam 7; a terceira face deve ser a de número 1. A soma dessas faces é $2\times(1+7)=16$.
- *Cubos3 e 6:* em cada um há duas faces vizinhas escondidas, que devem ser as de número 1 e 2 (como esses números não somam 7, as faces correspondentes não são opostas, logo são adjacentes). Essas faces somam $2\times(1+2)=6$.
- *Cubo 5:* há dois pares de faces opostas escondidas, que somam 14.

Logo, a soma máxima possível é $126-(1+16+6+14)=126-37=89$.

7. A figura representa um retângulo de 120 m² de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



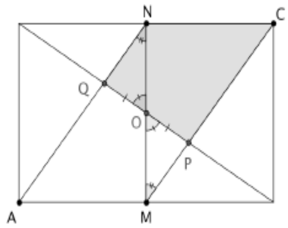
A) 20 m²
B) 24 m²
C) 30 m²
D) 36 m²
E) 40 m²

Questão de nível médio. Nessa questão os alunos precisavam trabalhar com a diagonal do retângulo e a noção de ponto médio apresentada no enunciado, para chegar à área da região sombreada. A questão tinha bom grau de dificuldade gerador de dúvidas interessantes e discussões, houve erros de resolução.

Resolução oficial:

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA C

Na figura ao lado o quadrilátero *AMCN* é um paralelogramo, pois tem os lados *AM* e *NC* paralelos e iguais. Em particular, *AN* e *MC* são paralelos; logo, os ângulos assinalados em *M* e *N* têm a mesma medida. Além disso, os ângulos assinalados em *O* são iguais, pois são opostos pelo vértice; além disso temos $OP = OQ$, pois *O* é o centro do retângulo. Segue pelo critério ALA que os triângulos *OMP* e *ONQ* são congruentes. A área do quadrilátero *CPQN* é então igual à área do triângulo *CMN*, que por sua vez é igual a $\frac{1}{4}$ da área do retângulo, ou seja, igual a $\frac{1}{4} \times 120 = 30\ m^2$.



8. Lucas pensou em um número, dividiu-o por 285 e obteve resto 77. Se ele dividir o número em que pensou por 57, qual é o resto que ele vai encontrar?

A) 0
B) 20
C) 40
D) 54
E) 56

Questão de nível médio. O uso do algorítmo da divisão nessa questão era fundamental, trabalhar com o resto e o dividendo tornanavam o raciocínio mais direcionado à resolução, entretanto a maioria errou a questão, que apresentava um alto nível de dificuldade.

Resolução oficial:

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA B
Seja n o número que Lucas pensou. O enunciado diz que $n = 285q + 77$, onde q é um número inteiro. Como $285 = 57 \times 5$, podemos reescrever essa expressão como

$$n = 57 \times (5q) + 57 + 20 = 57 \times (5q + 1) + 20 .$$

Logo o resto da divisão de n por 57 é 20.

9. Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?

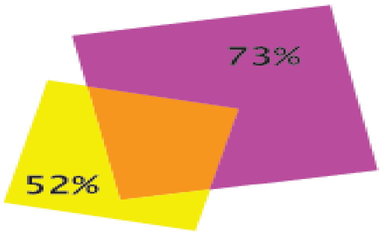
A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{4}{7}$

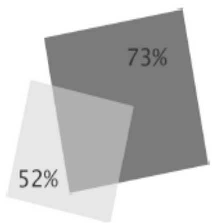
E) $\frac{4}{5}$



Questão de nível médio. Muitos alunos, entretanto, erraram, pois a sobreposição das figuras causou confusões. Essa questão gerou muitas dúvidas inclusive no professor, a discussão sobre a resolução foi bem longa.

Resolução oficial:

QUESTÃO 9
ALTERNATIVA A
Vamos chamar de ℓ e L, respectivamente, os lados do quadrado menor e do quadrado maior, e de Q a área comum aos dois quadrados. Então Q corresponde a $100 - 52 = 48\%$ da área do quadrado menor e a $100 - 73 = 27\%$ da área do quadrado maior. Segue que $\frac{48}{100}\ell^2 = \frac{27}{100}L^2$; logo $\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$, ou seja, $\frac{\ell}{L} = \frac{3}{4}$.



10. Duas formiguinhas caminham uma ao encontro da outra sobre a reta numerada. Cada uma delas caminha com velocidade constante. Em um certo instante elas estavam sobre os pontos indicados na figura 1 e, exatamente um segundo depois, estavam nos pontos indicados na figura 2. Elas vão se encontrar entre os pontos:

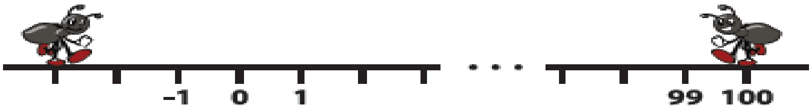


Figura 1

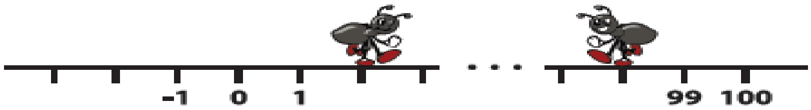


Figura 2

A) 66 e 67
B) 68 e 69
C) 69 e 70
D) 70 e 71
E) 72 e 73

Questão de nível fácil. Ao trabalhar números inteiros na reta numérica, os alunos teriam um melhor entendimento na resolução do problema. Considerada fácil, a questão foi muito bem elaborada e exigia bom racicocínio.

Resolução oficial:

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA D

Vamos chamar de **A** a formiguinha da esquerda e de **B** a formiguinha da direita. Na figura 1, **A** está duas unidades à esquerda do número -1, ou seja, sobre o número -3; na figura 2, ela está sobre o número 2. Na figura 1, **B** está sobre o número 100 e, na figura 2, sobre o número 98. Desse modo, em um segundo, **A** anda $2-(-3)=5$ unidades e **B** anda $100-98=2$ unidades. Assim, as posições de **A** e **B** são, respectivamente, dadas (em unidades) por $a=-3+5t$ e $b=100-2t$, onde t é o tempo medido em segundos. As formiguinhas se encontrarão quando $a=b$, ou seja, no tempo t tal que $-3+5t=100-2t$. Temos então $7t=103$, ou seja, $t=\frac{103}{7}$. A posição de **B** (e de **A**) nesse instante é $100-2\times\frac{103}{7}=\frac{494}{7}$, que é aproximadamente 70,6. Logo as formiguinhas se encontrarão entre os pontos 70 e 71.

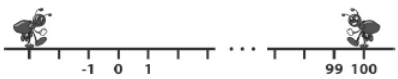


Figura 1

Figura 2

Outra solução é a seguinte. Já calculamos as velocidades das formiguinhas: **A** se desloca a 5 unidades por segundo e **B** a 2 unidades por segundo. Como elas andam em sentido contrário, a distância entre elas diminui 7 unidades por segundo. A distância inicial entre **A** e **B** é $100-(-3)=103$ unidades; como $103=14\times7+5$, concluímos que após 14 segundos a distância entre as formiguinhas será 5 unidades; nesse instante, **A** estará no ponto $-3+5\times14=67$ e **B** no ponto $100-2\times14=72$. Dividimos a distância 5 em 7 partes iguais; as formiguinhas se encontrarão quando **A** tiver percorrido 5 dessas partes e **B** tiver percorrido 2 dessas partes. Logo o ponto de encontro será o ponto $67+5\times\frac{5}{7}=\frac{494}{7}$, que é aproximadamente 70,6.

11. Um número de três algarismos tem as seguintes propriedades:

- quando trocamos o algarismo das unidades com o das dezenas, ele aumenta em 18 unidades;
- quando trocamos o algarismo das dezenas com o das centenas, ele aumenta em 180 unidades.

Quantas unidades aumentará esse número se trocarmos o algarismo das unidades com o das centenas?

A) 162
B) 198
C) 256
D) 360
E) 396

Questão de nível difícil. São muitas informações no enunciado do problema e o raciocínio é bem avançado, pois trabalha com permutação entre os algarismos de um número (grande nível de dificuldade), praticamente todos erraram essa questão e a resolução em sala de aula foi de difícil entendimento dos alunos e do professor.

Resolução oficial:

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA E

Escrevemos o número como *cdu*, onde *c*, *d* e *u* denotam, respectivamente, o algarismo das centenas, dezenas e unidades; isso quer dizer que o número é $100c+10d+u$. O número obtido trocando o algarismo das unidades com o das dezenas é *cud*, ou seja, $100c+10u+d$; o enunciado nos diz que

$$18=(100c+10u+d)-(100c+10d+u)=10(u-d)+(d-u)=9(u-d)$$

e segue que $u-d=2$. O número obtido trocando o algarismo das dezenas com o das centenas é *dcu*; do enunciado segue, como acima, que

$$180=(100d+10c+u)-(100c+10d+u)=100(d-c)+10(c-d)=9(d-c)$$

e temos $d-c=2$. Logo $u-c=(u-d)+(d-c)=4$. O problema pede para calcular a diferença entre o número original *cdu* e aquele obtido trocando os algarismos das unidades com o das centenas, que é *udc*. Essa diferença é então

$$(100u+10d+c)-(100c+10d+u)=100(u-c)+(c-u)=99(u-c)=99\times 4=396$$

12. Uma piscina com fundo e paredes retangulares está totalmente revestida com azulejos quadrados iguais, todos inteiros. O fundo da piscina tem 231 azulejos e as quatro paredes têm um total de 1024 azulejos. Qual é, em número de azulejos, a profundidade da piscina?

A) 15
B) 16
C) 18
D) 20
E) 21

Questão de nível médio (alunos), difícil (professor). Durante as discussões, ocorreu uma grande dificuldade em entender o raciocínio necessário, a maioria errou a questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA B

Vamos chamar de *a*, *b* e *h*, respectivamente, o comprimento, a largura e a profundidade da piscina, em número de azulejos. Em geral, o comprimento de uma piscina é maior do que a sua largura; vamos então supor que $a \geq b$. As duas paredes retangulares no comprimento da piscina têm um total de $2ah$ azulejos e as duas paredes retangulares na largura da piscina têm um total de $2bh$ azulejos. Como essas quatro paredes juntas têm 1024 azulejos, segue que $(2a+2b)h = 1024$, ou seja, $(a+b)h = 512$; em particular, $a+b$ é um divisor de 512. Por outro lado, temos $ab = 231$; como $231 = 3 \times 7 \times 11$, as possibilidades para *a* e *b* são (21,11), (33,7), (77,3) e (231,1). Dessas, a única que nos dá uma soma $a+b$ que divide 512 é (21,11); logo $h = 512 \div (a+b) = 512 \div 32 = 16$ azulejos.

Notamos que essa questão admite (acidentalmente) uma solução por teste de alternativas, como segue. De $(a+b)h = 512$ segue que *h* divide $512 = 2^9$, ou seja, *h* (assim como $a+b$) deve ser uma potência de 2. Como 15, 18, 20 e 21 não são potências de 2, a única possibilidade é $h = 16$. Deve-se então verificar se o problema é consistente; para isso, determinamos $a = 21$ e $b = 11$ como acima, e essa tripla de valores de *a, b* e *h* satisfaz as condições do enunciado.

13. Joãozinho tem duas caixas com o mesmo número de bolas. As bolas podem ser azuis, pesando cinco quilos cada uma, ou amarelas, pesando dois quilos cada uma. Na primeira caixa, $\frac{1}{15}$ das bolas são azuis. O peso total das bolas da segunda caixa é o dobro do peso total das bolas da primeira caixa. Qual é a fração de bolas azuis na segunda caixa?

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{7}{8}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{2}{15}$

E) $\frac{1}{2}$

Questão de nível médio. Utilizava o conteúdo de frações e principalmente de sistema de equações, embora seja um conteúdo muito trabalhado em sala de aula, quando apresentado em uma avaliação ou questão, causa dificuldade para resolver, como foi o caso dessa questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA A

Seja n o número comum de bolas nas caixas. O número de bolas azuis na primeira caixa é $\frac{1}{15}n$ e o número de bolas amarelas é $n-\frac{1}{15}n=\frac{14}{15}n$. Logo, o peso das bolas da primeira caixa é $5\times\frac{1}{15}n+2\times\frac{14}{15}n=\frac{33}{15}n$ kg. Seja agora x o número de bolas azuis na segunda caixa; o número de bolas amarelas nessa caixa é então $n-x$ e o peso das bolas nessa caixa é $5x+2(n-x)=3x+2n$. Segue que $3x+2n=2\times\frac{33}{15}n=\frac{66}{15}n$, o que nos dá $x=\frac{1}{3}\left(\frac{66}{15}-2\right)n=\frac{4}{5}n$.

Logo a fração de bolas azuis na segunda caixa é $\frac{4}{5}$.

14. No primeiro estágio de um jogo, Pedro escreve o número 3 em um triângulo e o número 2 em um quadrado. Em cada estágio seguinte, Pedro escreve no triângulo a soma dos números do estágio anterior e no quadrado a diferença entre o maior e o menor desses números. Qual é o número escrito no triângulo do 56º estágio?

A) 3×2^{26}
B) 5×2^{28}
C) 5×2^{56}
D) 3×2^{28}
E) 5×2^{27}

Q

Questão de nível difícil. Exigia raciocínio do aluno, pois precisavam analisar a forma como os estágios se desenvolviam. Nesta questão, muitos alunos tiveram dificuldade de acordo com o nível da questão. Na hora das discussões, algumas dúvidas foram sanadas, porém todos concordaram com o nível da questão.

Resolução oficial:

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA E
A tabela ao lado apresenta alguns estágios do jogo. O padrão da coluna dos triângulos é evidente: no estágio $2k$, o valor que aparece é $5 \times 2^{k-1}$. Logo, o número que aparece no 56º triângulo é 5×2^{27}.

Estágio	Triângulo	Quadrado
1	3	2
2	5	1
3	$6 = 3 \times 2$	4
4	$10 = 5 \times 2$	2
5	$12 = 3 \times 2^2$	8
6	$20 = 5 \times 2^2$	4
7	$24 = 3 \times 2^3$	16
8	$40 = 5 \times 2^3$	8

15. Sofia nasceu antes do ano 2000, no mês de janeiro. Em fevereiro de 2013 sua idade era igual à soma dos algarismos do ano de seu nascimento. Qual é o algarismo das unidades do ano de nascimento de Sofia?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

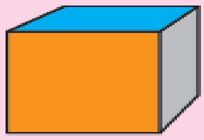
Questão de nível médio. Nesta questão, deveriam analisar que o século de nascimento era 1900, preocupando-se "apenas" com os dois últimos algarismos, isso não quer dizer que a questão foi fácil, pelo contrário, ela gerou boas discussões entre todos na resolução e apresentou um alto índice de erros.

Resolução oficial:

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA C
Sejam *a* e *b*, respectivamente, os algarismos das dezenas e das unidades do ano em que Sofia nasceu; isto quer dizer que Sofia nasceu em $19ab = 1900 + 10a + b$. A idade de Sofia em fevereiro de 2013 era $2013 - 19ab = 2013 - (1900 + 10a + b) = 113 - 10a - b$. Segue do enunciado que $113 - 10a - b = 1 + 9 + a + b = 10 + a + b$, o que nos dá $103 = 11a + 2b$. Como *a* e *b* são algarismos, ou seja, são ambos menores ou iguais a 9, a única possibilidade é $a = 9$ e $b = 2$; observamos que se $a = 8$, a equação $2b = 15$ não tem solução inteira e que se $a \leq 7$ então $2b = 103 - 11a \geq 103 - 77 = 26$, o que não pode acontecer pois $b \leq 9$.

16. Heloísa tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode escrever os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, um em cada face, de modo que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7?

A) 6
B) 24
C) 48
D) 120
E) 720



Questão de nível médio. O conteúdo de combinatória envolvido na questão sempre causa dificuldade entre participantes (alunos) de qualquer avaliação. Nesse caso, a questão ofereceu a informação de que as faces opostas tem soma igual a 7, diminuindo os casos possíveis.

Resolução oficial:

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA C

Para escrever o número 1, Heloísa pode escolher uma dentre seis faces e o número 6 deve ser escrito na face oposta à escolhida. Para escrever o número 2, ela pode escolher uma entre as quatro faces restantes e o número 5 deve ser escrito na face oposta. Finalmente, restam duas faces para escrever o número 3, e o 4 deve ser escrito na face oposta. Assim, Heloísa pode escrever os números no cubo de $6 \times 4 \times 2 = 48$ maneiras diferentes.

17. Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: “De quem são os celulares que tocaram?”

Guto disse: “O meu não tocou”, Carlos disse: “O meu tocou” e Bernardo disse: “O de Guto não tocou”. Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

A) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
B) Bernardo mentiu.
C) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
D) Carlos mentiu.
E) Guto falou a verdade.

Questão de nível médio. Neste caso, os alunos tiveram dificuldade com a montagem de todas as situações possíveis para eliminar as falsas e chegar ao resultado correto. Alguns acertaram e na exposição da resolução, montaram tabelas de organização para compreender melhor

Resolução oficial:

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA B
Na tabela abaixo mostramos como analisar as informações do enunciado. Na primeira linha, supomos que Bernardo disse a verdade; na segunda, que Guto disse a verdade e na terceira, que Carlos disse a verdade.

	Guto *Não foi o meu*	**logo**	**Carlos** *Foi o meu*	**logo**	**Bernardo** *Não foi o de Guto*	**logo**
1	mentiu	**O celular de Guto tocou**	mentiu	O celular de Carlos não tocou	disse a verdade	**O celular de Guto não tocou**
2	disse a verdade	**O celular de Guto não tocou**	mentiu	O celular de Carlos não tocou	mentiu	**O celular de Guto tocou**
3	mentiu	O celular de Guto tocou	disse a verdade	O celular de Carlos tocou	mentiu	O celular de Guto tocou

Nas duas primeiras linhas, chega-se à conclusão de que o celular de Guto tanto tocou quanto não tocou (em vermelho). Essa contradição mostra que o único caso possível é o da terceira linha, ou seja, Carlos disse a verdade e os celulares de Guto e Carlos tocaram.

18. Maria viajou de Quixajuba a Pirajuba, fazendo uma parada quando tinha percorrido exatamente um terço do caminho. O rendimento de seu carro foi de 12 km por litro de combustível antes da parada e de 16 km por litro no restante do trajeto. Qual foi o rendimento do carro na viagem completa?

A) 13,3 km/L
B) 14 km/L
C) 14,4 km/L
D) 14,7 km/L
E) 15 km/L

Questão de nível fácil. Apresentava a ideia de média ponderada, temos que ressaltar, no eentanto, que alguns se confundiram e trabalharam com a média simples, não levaram em consideração a divisão desigual dos trajetos, o que levou a erros na resolução de alguns alunos.

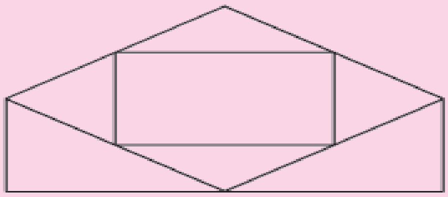
Resolução oficial:

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA C

Lembramos que $rendimento = \frac{distância\ percorrida}{consumo}$, ou seja, $consumo = \frac{distância\ percorrida}{rendimento}$. Seja d a distância entre Quixajuba e Pirajuba. Antes da parada Cláudia percorreu $\frac{1}{3}d$ km; como o rendimento de seu carro nessa parte da viagem foi de 12 km/l, ela gastou $\frac{\frac{1}{3}d}{12} = \frac{1}{36}d$ litros de gasolina até a parada. Analogamente, ela gastou $\frac{\frac{2}{3}d}{16} = \frac{1}{24}d$ litros de gasolina após a parada. No total, ela gastou $\frac{1}{36}d + \frac{1}{24}d = \frac{5}{72}d$ litros de gasolina na viagem; o rendimento de seu carro ao longo da viagem completa foi então de $\frac{d}{\frac{5}{72}d} = \frac{72}{5} = 14{,}4$ km/l.

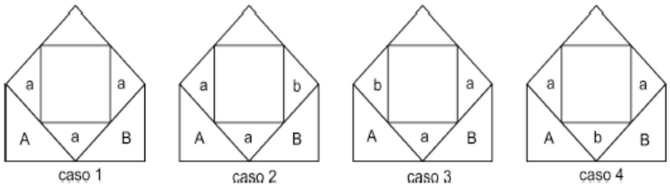
19. De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

A) 68
B) 96
C) 108
D) 120
E) 150



Questão de nível médio. Envolvia, novamente, análise combinatória, porém como há algumas restrições, o nível da questão se elevou demais e aumentou o índice de erros. **Resolução oficial:**

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA C



Primeiro pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de $3 \times 2 = 6$ maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura. As letras minúsculas *a* e *b* indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras maiúsculas *A* e *B* servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.

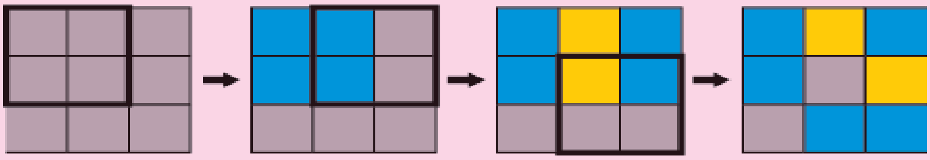
- *Caso 1:* temos duas escolhas para *a;* uma vez feita essa escolha, podemos pintar *A* com duas cores, bem como *B*. Isso pode ser feito de $2 \times 2 \times 2 = 8$ maneiras diferentes.
- *Caso 2:* temos duas escolhas para *a* e uma para *b*; feitas essas escolhas, podemos pintar *A* com duas cores e *B* com apenas uma. Isso pode ser feito de $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$ maneiras diferentes.
- *Caso 3:* esse caso é idêntico ao caso 2.
- *Caso 4:* temos duas escolhas para *a* e uma para *b*; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar *A* e *B*. Isso pode ser feito de $2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$ maneiras diferentes.

No total, temos $6 \times (8 + 4 + 4 + 2) = 6 \times 18 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura.

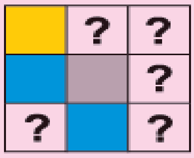
20. Adão gosta de construir sequências de quadriculados 3x3, de acordo com as seguintes regras:

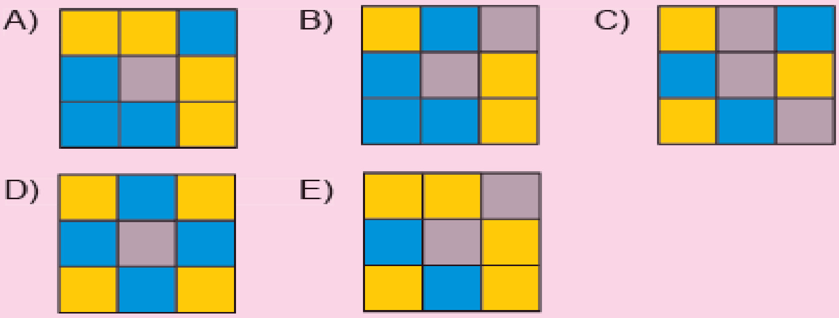
- o primeiro quadriculado tem todos seus quadradinhos pintados de cinza;
- para passar ao quadriculado 3x3 seguinte, escolhe-se um quadriculado 2x2 e, neste quadriculado, os quadradinhos cinza passam a ser azuis, os azuis passam a ser amarelos e os amarelos passam a ser cinza.

Veja um exemplo de uma das sequências do Adão, na qual os quadriculados 2x2 escolhidos aparecem em destaque.



Um dia, ao construir uma sequência, Adão foi interrompido e o quadriculado que ele estava pintando ficou incompleto, conforme a figura. Os pontos de interrogação indicam os quadradinhos que Adão não teve tempo de pintar. Qual das alternativas abaixo representa o preenchimento correto desse quadriculado?





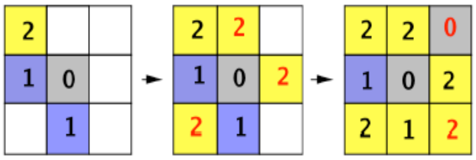
Questão de nivel médio. Envolvia muito raciocínio para entender a sequência e desenvolver os estágios e apresentar uma resolução correta. Muitos alunos reclamaram do tamanho do enunciado e por ser a última questão, alguns estavam cansados e não resolveram corretamente o exercício.

Resolução oficial:

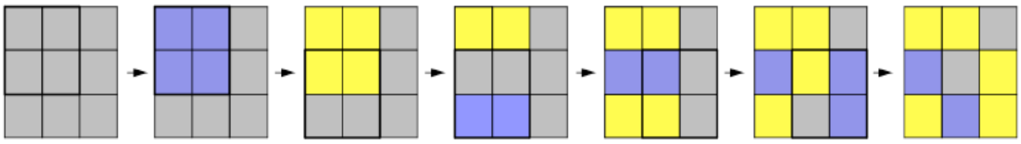
QUESTÃO 20
ALTERNATIVA E

Observamos inicialmente que em qualquer quadradinho, quando o número de trocas de cor é um múltiplo de 3, voltamos à cor original. Assim, para saber, em qualquer momento, qual a cor de um quadradinho, basta conhecer o resto na divisão por 3 do número de trocas de cor. Para isso, identificamos cada quadradinho cinza com o número 0 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 0 na divisão por 3, ou seja, a cor pode não ter sido trocada ou foi trocada em um número múltiplo de 3); identificamos um quadradinho azul com o número 1 (o que significa que o número de trocas de cor tem resto 1 na divisão por 3); e, finalmente, identificamos um quadradinho amarelo com o número 2 (o número de trocas de cor tem resto 2 na divisão por 3).

Observamos agora que, sempre que trocamos a cor de um quadradinho da primeira ou da terceira coluna, trocamos também a cor do quadradinho a seu lado na coluna do meio. Portanto, a soma do número de trocas de cor dos quadradinhos de uma mesma linha, que estão na primeira e terceira colunas, é igual ao número de trocas de cor do quadradinho da coluna do meio que está nesta mesma linha. Em particular, o resto da divisão do número de trocas de um quadradinho da coluna do meio por 3 é igual ao resto da divisão por 3 da soma dos restos das divisões por 3 do número de trocas de cores dos quadradinhos vizinhos que estão na primeira e na terceira coluna da mesma linha. Comentário análogo vale para os quadradinhos da linha do meio. Essas observações nos permitem reconstruir o quadriculado completo, conforme a figura abaixo.



O problema não acaba aqui, pois ainda não mostramos que esse quadriculado pode, de fato, ser obtido por uma sequência de Adão. Que isso de fato acontece pode ser visto abaixo.

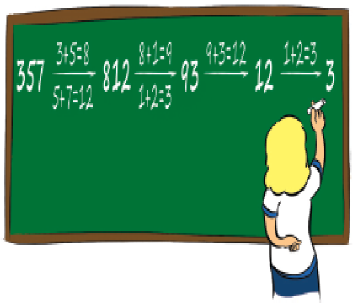


Após a passagem das provas da 2ª fase da OBMEP 2013, mais precisamente no mês de outubro, os alunos reuniram-se novamente para a discussão e correção da prova aplicada no dia 14 de Setembro de 2013.

Abaixo estão as análises feitas pelo grupo de alunos e pelos professores da escola, lembrando que o nível de dificuldade (fácil, médio, ou difícil) é baseado na opinião dos alunos, que de forma presencial ou através de questionários, atribuíram ao trabalho.

Prova da 2ª fase OBMEP 2013 nivel 1.

1. Ariadne brinca com números de dois ou mais algarismos. Ela soma, aos pares, os algarismos do número, da esquerda para a direita, e escreve os resultados em ordem; em seguida, ela repete a brincadeira com o novo número e assim por diante. Se ela chegar a um número com um único algarismo, a brincadeira acaba.



Por exemplo, de 294 ela obtém 1113, pois $2+9=11$, $9+4=13$. Depois, de 1113 ela obtém 224, pois $1+1=2$, $1+1=2$ e $1+3=4$, e assim por diante. Essa brincadeira acaba com 1, como mostra a sequência abaixo:

$$294 \xrightarrow[9+4=13]{2+9=11} 1113 \xrightarrow[1+3=4]{1+1=2,\ 1+1=2} 224 \xrightarrow[2+4=6]{2+2=4} 46 \xrightarrow{4+6=10} 10 \xrightarrow{1+0=1} 1$$

a) Escreva a sequência que começa com 4125.

Nível fácil. Bastava seguir o exemplo dado acima e desenvolver a sequência pedida. Todos entenderam bem o item e apresentaram a solução necessária.

Resolução oficial:

a) A sequência é $4125 \to 537 \to 810 \to 91 \to 10 \to 1$

b) Escreva os seis primeiros números da sequência que começa com 995.

Nível fácil de dificuldade, porém nesse caso, o aluno poderia encurtar a resolução, ao entender a lógica de que ela forma um ciclo de dois elementos distintos apenas. Todos conseguiram resolver a questão com facilidade.

Resolução oficial:

b) Os seis primeiros termos são $995 \to 1814 \to 995 \to 1814 \to 995 \to 1814$

c) Qual é o 103º número da sequência que começa com 33333?

Esse item apresentava um nível de dificuldade médio, pois o aluno precisava entender que o ciclo composto por três números distintos na sequência, se repetia infinitamente e utilizando o algorítmo da divisão por 3, obtemos a sequência analisando o resto da divisão, neste caso, 103 deixa resto 1 na divisão por três, logo o número que ocupa essa posição é o 33333, alguns alunos tiveram dificuldade nessa questão, não visualizando essa linha de raciocínio.

Resolução oficial:

c) Os primeiros termos da sequência são

$$33333 \to 6666 \to 121212 \to 33333 \to 6666 \to \ldots$$

e vemos que os termos se repetem de três em três. Como $103 = 3 \times 34 + 1$, segue que o 103º termo dessa sequência é 33333.

2. Um hotel tem 15 andares com 25 quartos cada um. As chaves dos quartos são identificadas por um número de três ou quatro algarismos indicando o andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Por exemplo, a chave 106 é a do quarto número 06 do 1º andar e a chave 1315 é a do quarto número 15 do 13º andar.

a) Quantos são os quartos do 10º andar para cima?

Esse item é bem simples e os alunos resolveram com facilidade, multiplicar o número de andares (6 no caso) e multiplicar pelo número de quartos por andar. Alguns alunos quase se complicaram na resolução, por entender que era pra contar do 10º em diante, não incluindo esse andar.

Resolução oficial:

a) Do 10º andar até o 15º andar há 6 andares, cada um com 25 quartos. Logo o número de quartos do 10º andar para cima é $6 \times 25 = 150$.

b) Quantas chaves têm número em que aparece o algarismo 1?

Item de nível médio, muitos alunos tiveram dificuldade em organizar a ideia central e trabalhar a relação entre quartos e andares que continham o número um na chave, e excluir as intersecções existentes. Nem todos obtiveram êxito nesse item.

Resolução oficial:

b) O número de uma chave é formado pelo número do andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Podemos dividir as chaves em quatro casos, como segue:

1. andar com 1, quarto sem 1
2. andar sem 1, quarto com 1
3. andar e quarto com 1
4. andar e quarto sem 1

Observamos os andares cujos números têm o algarismo 1 são 1, 10, 11, 12, 13, 14 e 15, num total de 7; segue que os andares sem 1 são em número de $15-7=8$. Os quartos com 1 são 01, 10, 11,... , 19 e 21, num total de 12; os quartos sem 1 são então em número de $25-12=13$. O princípio fundamental da contagem nos permite saber quantas chaves aparecem em cada um dos grupos:

1. andar com 1, quarto sem 1: $7\times 13=91$
2. andar sem 1, quarto com 1: $8\times 12=96$
3. andar e quarto com 1: $7\times 12=84$
4. andar e quarto sem 1: $8\times 13=104$

Os três primeiros grupos consistem das chaves com 1, que são em número de $7\times 13+8\times 12+7\times 12=271$.

Podemos também proceder, observando que para obter o número de chaves com 1 basta retirar, do total de chaves, as chaves do grupo 4 acima. Como o número total de chaves é 15×25, isso nos leva à conta $15\times 25-8\times 13=271$.

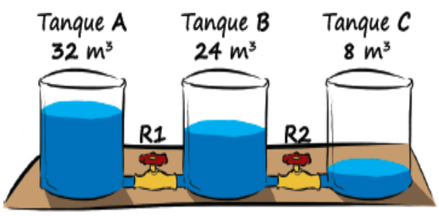
c) Dionísio não aceita ficar em um quarto em cuja chave aparece o algarismo 1 seguido de 1 ou de 3. Em quantos quartos do hotel ele pode se hospedar?

Esse item é de nivel dificil, pois ao analisar vários casos separadamente, o aluno corria o risco de contar ou deixar de contar casos que aparecem nas interseções na relação entre quarto e andar. Poucos alunos acertaram o item, isso mostrou o grau de dificuldade exigido.

Resolução oficial:

c) O número total de chaves é $15\times 25=375$. Para obter o número de chaves procurado, primeiro eliminamos as chaves de quartos nos andares 11 e 13, que são em número de $2\times 25=50$. Restam 13 andares a considerar; devemos eliminar também as chaves dos quartos 11 ou 13 desses andares, o que nos dá $13\times 2=26$ chaves. Finalmente, devemos considerar as chaves do andar 1 e, neste andar, de quartos cujo dígito das dezenas seja também 1. Como já eliminamos os quartos 11 e 13 de todos os andares, os números possíveis para esses quartos são 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18 e 19, ou seja, devemos ainda eliminar 8 chaves. Desse modo, o número de chaves em que não aparecem as sequências 11 ou 13 é $375-50-26-8=291$.

3. Três tanques iguais contêm, inicialmente, 32, 24 e 8 metros cúbicos de água e estão ligados por registros, como na figura. Estes registros servem para deixar a água passar de um tanque (mais cheio) para o outro (menos cheio) até que ambos fiquem com o mesmo volume de água. Só se pode abrir um registro de cada vez, e ele é fechado assim que os tanques que ele liga fiquem com o mesmo volume de água.



Por exemplo, ao abrir o registro **R2** na situação inicial, os tanques **A**, **B** e **C** ficarão, respectivamente, com 32, 16 e 16 metros cúbicos. A seguir, ao fechar **R2** e abrir **R1** os tanques **A**, **B** e **C** ficarão, respectivamente, com 24, 24 e 16 metros cúbicos. Representamos essa sequência por

$$(32;24;8) \xrightarrow{R2} (32;16;16) \xrightarrow{R1} (24;24;16)$$

---

a) A partir da situação inicial, qual será o volume de água nos tanques **A** e **B** após abrirmos o registro **R1**?

Nível fácil, muitos alunos gostaram dele, pois a apartir do exemplo, o item era facilmente resolvido, bastava abrir o registro R1 e calcular a média aritmética. Alguns alunos, porém, apresentaram resoluções por tentativa e erro: tiravam do tanque A e passavam para o tanque B de forma contínua.

Resolução oficial:

Quando dois tanques são equalizados, o volume total de água desses tanques é a soma dos volumes antes da equalização; logo, ao final de uma equalização, o volume de água de cada um dos tanques é a média aritmética dos volumes iniciais. Em particular, quando dois tanques são equalizados, o tanque com mais água fica com menos e o com menos fica com mais. Isso mostra que o volume de água do tanque **A** será sempre maior ou igual ao de **B**, que por sua vez será sempre maior ou igual ao de **C**; em particular, vemos que o volume de água de **A** sempre será maior ou igual ao volume de água dos outros tanques e que o volume de água em **C** nunca diminui.

a) Ao abrir **R1**, os tanques **A** e **B** ficarão com $\frac{32+24}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ m}^3$ de água cada; com a notação do enunciado, temos $(32;24;8) \xrightarrow{R1} (28;28;8)$.

b) A partir da situação inicial, exiba uma sequência de aberturas de registros de modo que o tanque **C** fique com exatamente 21 metros cúbicos de água.

Item de nível médio, Alguns alunos não conseguiram associar a ideia de média a essa questão e tiveram dificuldade para resolver uma sequência de aberturas. Boa parte dos alunos resolveu o item corretamente, mas todos tentaram usar o registro R1 (sem sucesso), percebiam assim que apenas o início pelo registro R2 tornava possível alcançar com sucesso o objetivo do enunciado.

Resolução oficial:

b) Observamos que há apenas duas sequências possíveis: a que começa com **R1** e a que começa com **R2**. A segunda delas é a sequência procurada:

$$(32;24;8) \xrightarrow{R2} (32;16;16) \xrightarrow{R1} (24;24;16) \xrightarrow{R2} (24;20;20)$$
$$\xrightarrow{R1} (22;22;20) \xrightarrow{R2} (22;21;21)$$

c) Explique por que o tanque **A** sempre vai ficar com mais de 21 metros cúbicos de água, qualquer que seja a sequência de abertura de registros a partir da situação inicial.

A questão, a priori, não tem uma resolução complexa. Foi classificada como média devido a muitos alunos terem dificuldade para escrever seu raciocínio e explicar algo que conseguiram identificar - a média entre os três tanques, o valor sempre maior que 21, mostava, então, que o tanque A nunca poderia ficar com esse valor ou menos do que isso.

Resolução oficial:

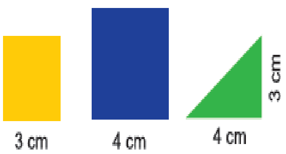
c) Mostramos a seguir os termos iniciais das sequências que começam com **R1** e **R2**:

$$(32;24;8) \xrightarrow{R2} (32;16;16) \xrightarrow{R1} (24;24;16) \xrightarrow{R2} (24;20;20)$$
$$\xrightarrow{R1} (22;22;20) \xrightarrow{R2} (22;21;21) \quad \xrightarrow{R1} (21,5;21,5;21)$$

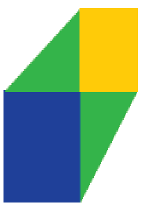
$$(32;24;8) \xrightarrow{R1} (28;28;8) \xrightarrow{R2} (28;18;18) \xrightarrow{R1} (23;23;18)$$
$$\xrightarrow{R2} (23;20,5;20,5) \xrightarrow{R1} (21,75;21,75;20,5)$$

Como o volume de água de **A** é sempre maior ou igual que o de **C** e o volume de **C** não diminui, segue que, o volume de água em **A** será sempre maior que 21 m^3.

Podemos também argumentar que como a média aritmética de um conjunto de números é menor ou igual que o maior desses números, o volume de água em **A** será sempre maior ou igual à média aritmética do volume total de água dos três tanques; essa média é $\frac{32+24+8}{3} = \frac{64}{3} = 21 + \frac{1}{3}\,m^3$, que é maior que $21m^3$.



4. Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado à esquerda. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono à direita.



a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

Esse item foi classificado como fácil. Os alunos precisavam calcular as áreas de cada uma das figuras planas e completar o mosaico para chegar à área total do polígono apresentado. Todos os alunos acertaram esse item.

Resolução oficial:

Cada uma das peças amarelas tem área $3 \times 3 = 9$ cm^2, as azuis têm $4 \times 4 = 16$ cm^2 e as verdes têm $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ cm^2.

a) O hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2 \times 6 + 9 + 16 = 37$ cm^2.

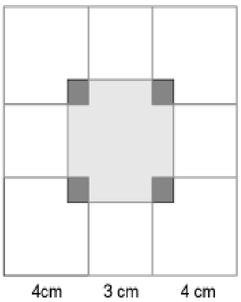
b) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?

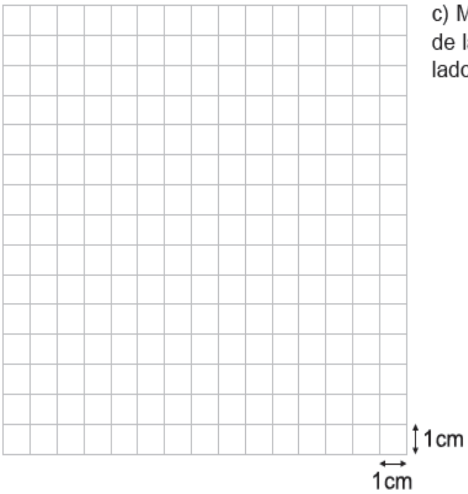
Esse item também foi classificado como fácil, porém alguns alunos tiveram dificuldade em resolver o item, pois para calcular a área centrar era necessário e subtrair a área de cada uma das figuras já conhecidas (compunham o quadrado maior). O aluno chegava ao valor da área do "buraco" na figura. Boa parte acertou o item, mas com algumas dificuldades aos demais.

Resolução oficial:

b) A figura construída forma um quadrado de lado $4 + 3 + 4 = 11$ cm, cuja área é $11 \times 11 = 121$ cm^2. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4 \times 9 + 4 \times 16 = 100$ cm^2. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121 - 100 = 21$ cm^2.

Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então $5 \times 5 - 4 \times 1 \times 1 = 21$ cm^2.



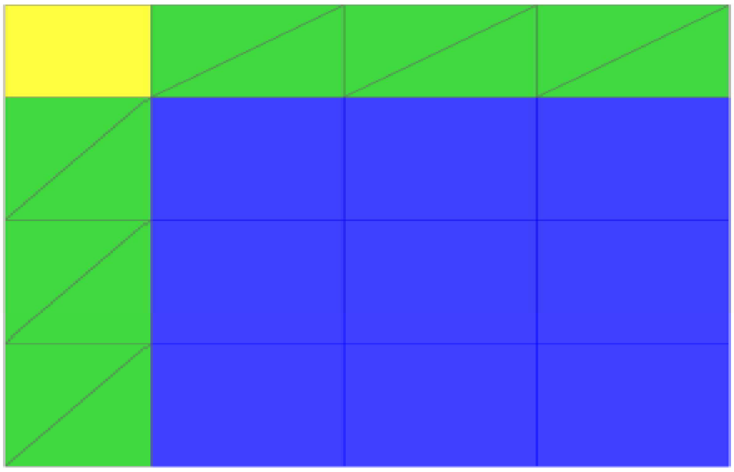


c) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.

Nível médio. Embora o quadriculado sirva como referência para a resolução, o raciocínio de posicionar o quadrado de lado 3cm é essencial para a resolução. Além disso o posicionamento dos triângulos formando um retângulo ajuda a completar a questão, ou deixa espaço exato para a colocação dos quadrados de lado 4cm. Esse item apresentou um grande índice de erros, pois o raciocínio foi confuso e feito de forma errada por parte do grupo.

Resolução oficial:

c) Uma possível maneira de preencher o quadrado 15×15, como pedido, é mostrado na figura ao lado.



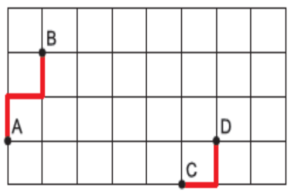
d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

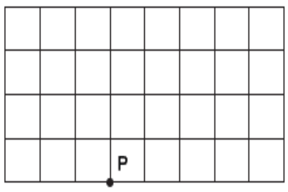
Nível difícil, pois o aluno precisava trabalhar com a ideia de múltiplos de 9 (área do quadrado de lado 3cm), múltiplos de 6 (área do triangulo) e múltiplos de 16 (área do quadrado de lado 4cm). Para trabalhar com o valor de 225 (área do quadrado de lado 15cm), mostrando que 225 é apenas múltiplo de 9, sendo assim, sem essa peça ser utilizada não conseguiremos “encaixar” todas as peças corretamente.

Resolução oficial:

d) Um quadrado de lado 15 cm tem $15 \times 15 = 225$ cm^2; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2, ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

5. No quadriculado ao lado, as linhas horizontais e verticais representam ruas. Os pontos onde as ruas se cortam são as esquinas e a distância entre duas esquinas consecutivas quaisquer é 100 metros. No quadriculado estão indicadas quatro esquinas **A**, **B**, **C** e **D**. Qualquer caminho ligando as esquinas **A** e **B** tem, no mínimo, 300 metros; dizemos então que a *distância* entre **A** e **B** é 300 metros. Do mesmo modo, a distância entre as esquinas **C** e **D** é 200 metros.

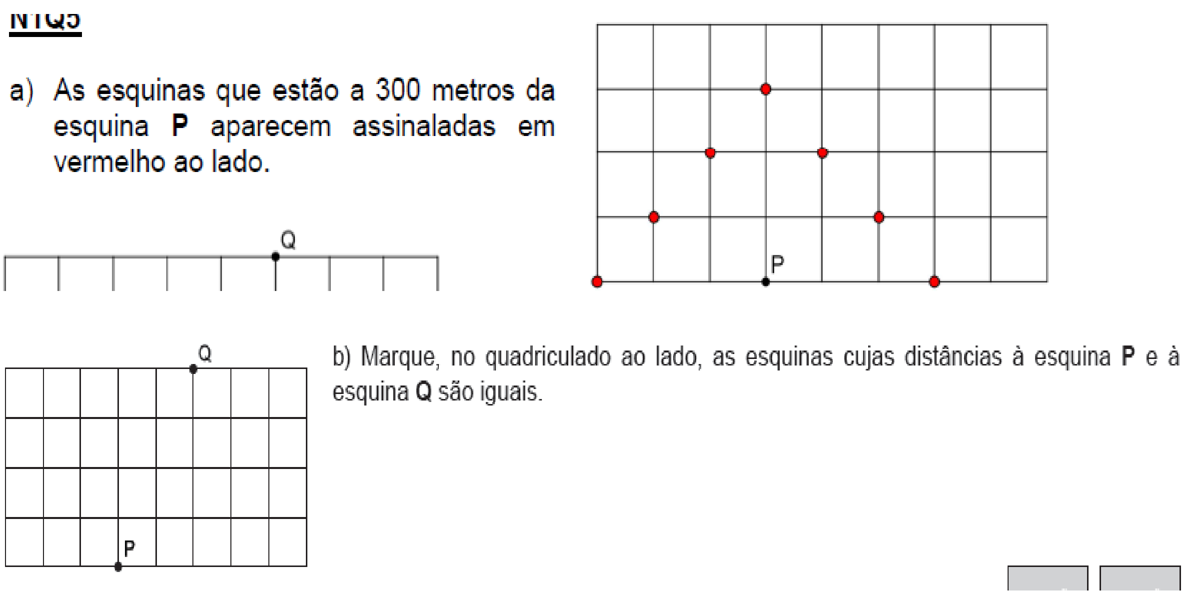




a) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas que estão a 300 metros da esquina **P**.

Esse item foi classificado como fácil. Ao seguir o exemplo dado e fazer as ligações no quadriculado, todos conseguiram chegar às posições dos pontos que contemplam a condição de estarem a 300m do ponto P; Cabe ressaltar que existe mais de um ponto nessa condição, algo levantado pelos alunos.

Resolução oficial:



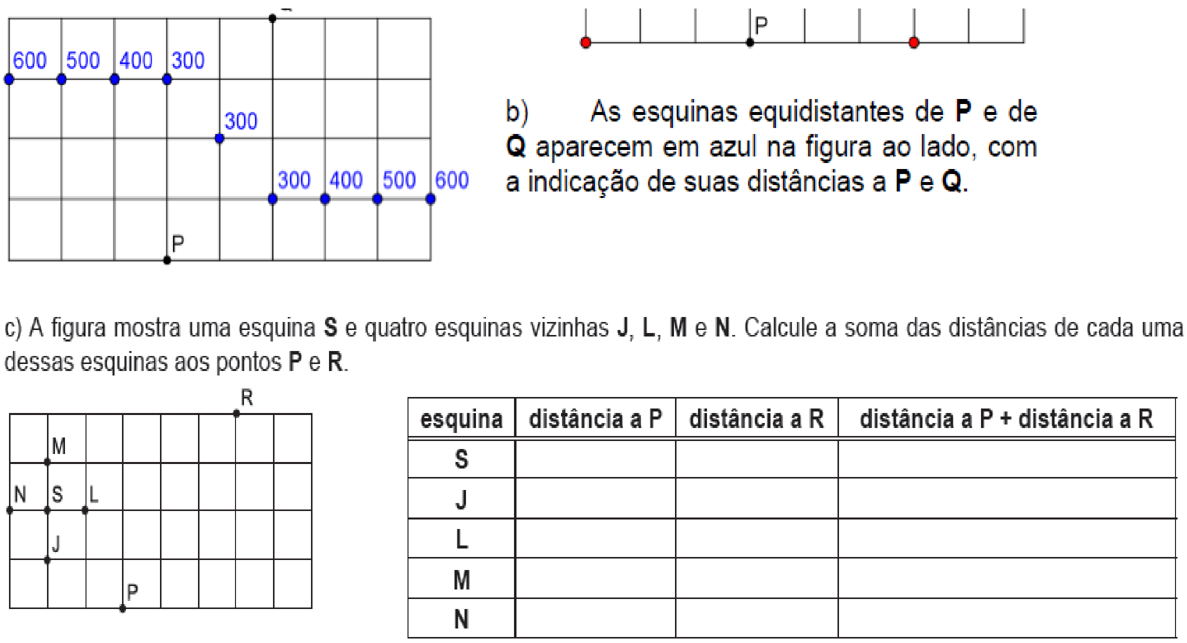
NTQ5

a) As esquinas que estão a 300 metros da esquina **P** aparecem assinaladas em vermelho ao lado.

b) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas cujas distâncias à esquina **P** e à esquina **Q** são iguais.

Esse item foi classsificado como fácil, porém os alunos ressaltaram a importância de visualizar a existência de mais de um ponto nessas condições. Alguns marcaram alguns pontos, mas somente aqueles que estavam a 300m de distância dos pontos P e Q, deixando outros pontos sem apresentação no quadriculado.

Resolução oficial:



b) As esquinas equidistantes de **P** e de **Q** aparecem em azul na figura ao lado, com a indicação de suas distâncias a **P** e **Q**.

c) A figura mostra uma esquina **S** e quatro esquinas vizinhas **J**, **L**, **M** e **N**. Calcule a soma das distâncias de cada uma dessas esquinas aos pontos **P** e **R**.

esquina	distância a P	distância a R	distância a P + distância a R
S			
J			
L			
M			
N			

Classificado como fácil, bastava calcular as distância pedidas e em seguida tabular essas informações. Todos acertaram esse item.

Resolução oficial:

c) A tabela preenchida aparece a seguir.

Ponto	Distância a P	Distância a R	Soma das distâncias a P e a R
S	400	700	1100
J	300	800	1100
L	300	600	900
M	500	600	1100
N	500	800	1300

d) Explique por que não há esquinas cujas distâncias às esquinas **P** e **R**, do item anterior, sejam iguais.

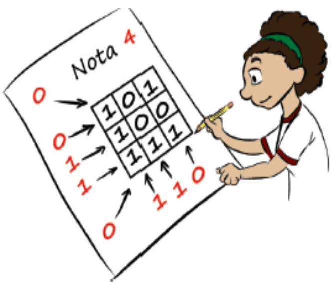
Nível médio. Para explicar a não existência de pontos nas condições exigidas pelo enunciado, o aluno precisava entender que pelo fato dos pontos estarem sempre a uma distância que era múltiplo de 100, a média entre 700m (distância entre os pontos P e Q) não formava um número múltiplo de 100, impossibilitanto a existência de pontos equidistantes entre P e Q.

Resolução oficial:

d) O item anterior mostra que, ao passar de uma esquina qualquer para uma de suas vizinhas, a soma das distâncias a **P** e a **R** muda por um múltiplo de 200. Como em **S** essa soma não é um múltiplo de 200 e podemos chegar a qualquer esquina a partir de **S** passando de vizinha a vizinha, segue que essa soma não é um múltiplo de 200 em todas as esquinas. Logo não há esquina equidistante de **P** e **R**, pois em uma tal esquina a soma de suas distâncias a **P** e a **R** seria um múltiplo de 200.

6. Helena brinca com tabuleiros 3×3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu.



Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é $0+0+1+1+0+1+1+0=4$.

a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

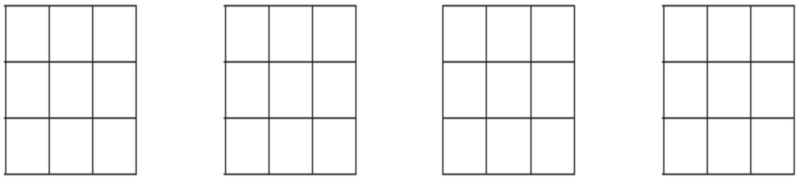
0	0	1
1	1	1
0	0	0

Nível fácil diante do exemplo, o aluno chegava às somas das 8 posições, concluindo a NOTA 5. Todos acertaram esse item.

Resolução oficial:

a) No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5.

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.



Item de nível médio. Os alunos deveriam visualizar que para a NOTA ser 8, todas as somas deveriam resultar em número impar, pois sendo 8 somas e todas com o número 1,eles deveriam encontrar formas de essas somas serem ímpares. Trabalhar com o tabuleiro inteiramnete preenchido com 1 foi a primeira forma encontrada e trabalhando com as diagonais alguns concluíram mais formas. Entretanto a última forma de resolução foi a mais difícil de ser encontrada, pois os alunos deveriam formar “uma cruz” no tabuleiro formada com o número 1, resultando em 8 somas iguais a 1 e concluindo as possibilidades para a NOTA 8.

Resolução oficial:

b) Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros com nota 8; deixamos isso como exercício.

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

Nível difícil, eles conseguiram através de um exemplo encontrar a mudança de NOTA, a explicação do porquê isso ocorre foi muito trabalhosa. Alguns apresentaram apenas os exemplos, mas sem uma justificativa; outros até conseguiram justificar algumas relações, mas foi necessária a discussão em grupo e a escrita por parte do professor para explicar a mudança de um número ímpar de somas e que a relação de diferença entre um número ímpar e outro, resulta em um número par.

Resolução oficial:

c) Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de da linha, da coluna e da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:

- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
- se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
- se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
- se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

Nível difícil (parte final da prova). O conteúdo de combinatória aplicada ao item, serviu para mostrar a quantidade de possibilidades de preenchimento, precisou de raciocínio bem elaborado, ainda mais pra analisar que metade das somas seriam ímpares e a outra metade seria par, praticamente todos deixaram esse item sem resolução alguma.

Resolução oficial:

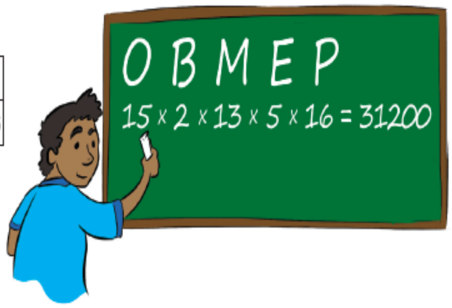
d) Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^8=256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256.

Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é $\frac{2^9}{2}=2^8$.

Prova da 2ª fase OBMEP 2013 nivel 2.

1. Cirilo associa a cada palavra um número, da seguinte maneira: ele troca cada letra por um número, usando a tabela abaixo e, em seguida, multiplica esses números.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26



Por exemplo, o número associado à palavra MAR é $13\times1\times18=234$.

a) Qual é o número associado à palavra CABIDE?

Considerado fácil pelos alunos, bastava associar a cada letra um número e realizar a multiplicação entre eles resultou num produto de valor mais elevado. Todos acertaram esse item.

Resolução oficial:

a) Temos da tabela $C\rightarrow3$, $A\rightarrow1$, $B\rightarrow2$, $I\rightarrow9$, $D\rightarrow4$ e $E\rightarrow5$. O número da palavra CABIDE é então $3\times1\times2\times9\times4\times5=1080$.

b) Escreva uma palavra com quatro letras cujo número associado seja 455.

Nível médio, a maioria visualizou a necessidade da decomposição em fatores primos de 455, porém, alguns não se atentaram para a existência do elemento neutro da multiplicação (número 1) para a formação da 4ª letra, podia-se formar palavras como GEMA, MEGA.

Resolução oficial:

b) A decomposição de 455 em fatores primos é $455 = 5 \times 7 \times 13$; as letras correspondentes a 5, 7 e 13 são, respectivamente, E, G e M. Como A corresponde a 1, qualquer palavra formada pelas letras A, E, G e M é uma solução do problema; por exemplo, GEMA.

c) Explique por que não existe uma palavra cujo número associado seja 2013.

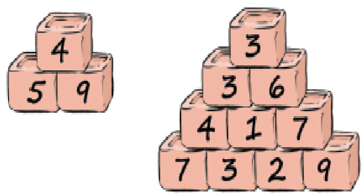
Para quem resolveu o item b, esse item foi considerado fácil, pois bastava fazer a decomposição em fatores primos de 2013. Verificava-se a existência de um fator primo que não estava associado a nenhuma letra, era, então, impossível formar uma palavra associada ao 2013. Neste caso, os alunos que alcançaram a resolução do item b, também acertaram o item c.

Resolução oficial:

c) A fatoração de 2013 em fatores primos é $2013 = 3 \times 11 \times 61$. Isso mostra que em qualquer produto cujo resultado seja 2013 aparece um fator que é múltiplo de 61. Como o maior número associado a uma letra é 26, concluímos que não é possível escrever uma palavra cujo número associado seja 2013.

2. Uma *pilha numerada* é formada por tijolos com números de 1 a 9 empilhados em camadas, como nas figuras, de modo que o número em um tijolo é a diferença entre o maior e o menor dos números dos tijolos nos quais ele se apoia.

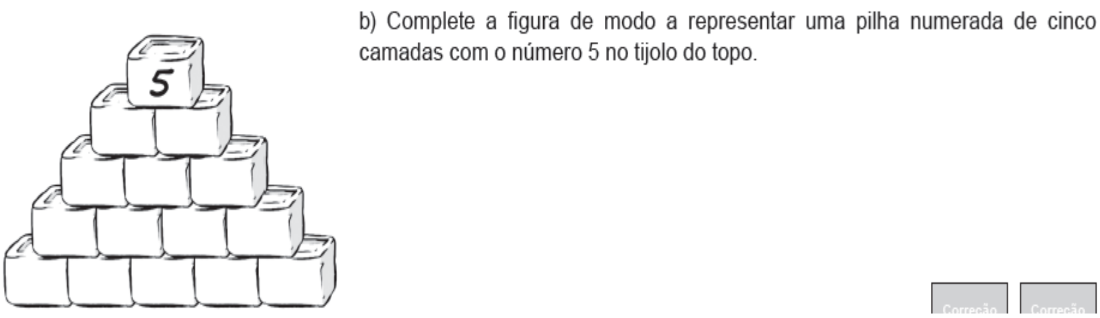
A ilustração mostra duas pilhas numeradas, uma com duas camadas e outra com quatro camadas.



a) Complete a figura de modo a representar uma pilha numerada de quatro camadas com o número 2 no tijolo do topo.

Níivel fácil; Contava apenas com quatro camadas e começava com um valor baixo, o que facilitava o complemento dos tijolos abaixo, ainda assim, alguns tiveram dificuldade em trabalhar com o valor absoluto das diferenças.

Resolução oficial:



Nível médio; O maior número de camadas e o fato do tijolo mais alto ser um número maior, dificultou a colocação dos demais tijolos. Muitos, entretanto, conseguiram fazer montagens após algumas tentativas, chegaram a conclusão de que no mínimo o tijolo de baixo aumenta uma unidade com relação ao que está em cima.

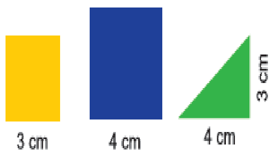
Resolução oficial:

c) Explique por que não é possível construir uma pilha numerada com seis camadas que tenha o número 5 no tijolo do topo.

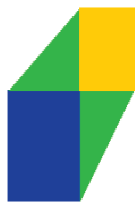
Nível médio; Apresentava a dificuldade da escrita, uma vez que o aluno deveria justificar sua conclusão. Mesmo usando a resolução do item b, muitos tiveram dificuldade em escrever suas ideias e mostrar que por não termos a disposição o ZERO e nenhum número com dois algarimos, não teríamos número para posicionar na 6ª camada e nas demais abaixo dela.

Resolução oficial:

c) Se o número n aparece em uma linha de uma pilha, na linha imediatamente abaixo deve aparecer pelo menos um número maior que n, pois não é possível escrever n como a diferença de dois números menores ou iguais a n. Assim, se o 5 aparece no topo de uma pilha, na linha inferior deve aparecer algum algarismo maior do que 5, na linha seguinte algum algarismo maior que 6 e assim por diante. Como o maior algarismo é 9, segue que uma pilha com o 5 no topo terá no máximo cinco linhas; mais geralmente, uma pilha com o algarismo n no topo terá no máximo $9-(n-1)$ linhas.



3. Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado à esquerda. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono à direita.



a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

Nível fácil; Muitos alunos gostaram dele. A partir do exemplo fornecido, o item era facilmente resolvido, bastava abrir o registro R1 e calcular a mádia aritmética, embora alguns alunos apresentasse. resoluções por tentativa e erro, tiravam do tanque A e passavam para o tanque B de forma continua.

Resolução oficial:

Cada uma das peças amarelas tem área $3\times 3=9\ cm^2$, as azuis têm $4\times 4=16\ cm^2$ e as verdes têm $\frac{3\times 4}{2}=6\ cm^2$.

a) O hexágono montado por Dafne é composto por duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2\times 6+9+16=37\ cm^2$.

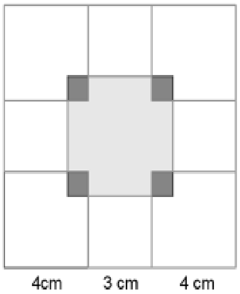
b) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?

Esse item também foi classificado como fácil, porém alguns alunos tiveram dificuldade em resolver o item, já que o calculo da área total era necessário ser feito e subtraindo a área de cada uma das figuras já conhecidas que compunham o quadrado maior, o aluno chegava ao valor da área do “buraco” na figura. Boa parte acertou o item, mas com algumas dificuldades aos demais.

Resolução oficial:

b) A figura construída forma um quadrado de lado $4+3+4=11$ cm, cuja área é $11\times11=121$ cm^2. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4\times9+4\times16=100$ cm^2. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121-100=21$ cm^2.

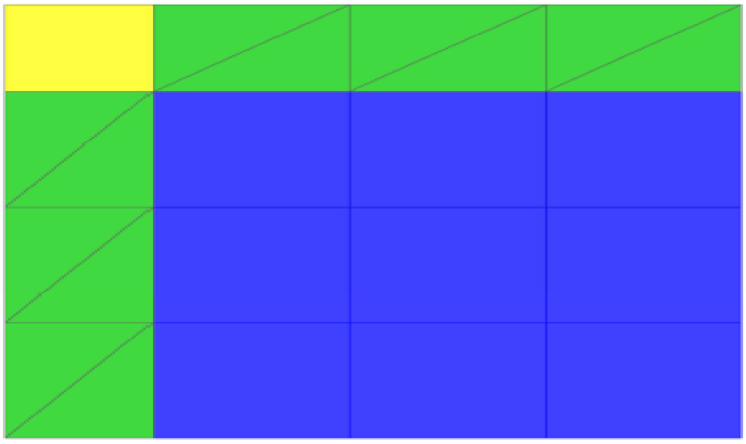
Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então $5\times5-4\times1\times1=21$ cm^2.



c) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.

Nível médio; Embora o quadriculado sirva como referência para a resolução, o raciocínio de posicionar o quadrado de lado 3cm é essencial para a resolução. Além disso o posicionamento dos triângulos formando um retângulo, ajuda a completar a questão ou deixa espaço exato para a colocação dos quadrados de lado 4cm. Esse item apresentou um grande índice de erros, pois o raciocínio foi confuso e feito de forma errada por parte do grupo.

Resolução oficial:



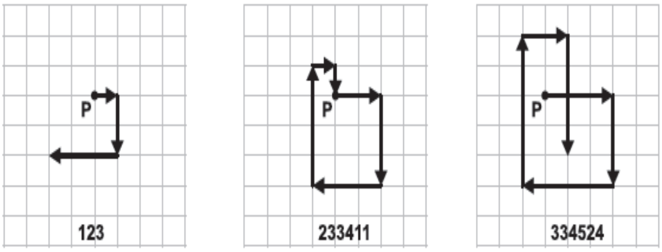
d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

Nível difícil, pois o aluno precisava trabalhar com a ideia de múltiplos de 9 (área do quadrado de lado 3cm), múltiplos de 6 (área do triângulo) e múltiplos de 16 (área do quadrado de lado 4cm) para trabalhar com o valor de 225 (área do quadrado de lado 15cm), mostrando que 225 é apenas multiplo de 9, sendo assim, sem essa peça sendo utilizada não conseguiremos “encaixar” todas as peças de forma correta.

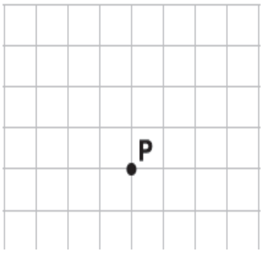
Resolução oficial:

d) Um quadrado de lado 15 cm tem $15 \times 15 = 225$ cm^2; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2, ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

4. A *assinatura geométrica* de um número natural formado por algarismos diferentes de 0 é uma sequência de segmentos traçados sobre um quadriculado cujos quadradinhos têm 1 cm de lado. Os segmentos são traçados a partir de um ponto fixo **P**, para a direita, para baixo, para a esquerda, para cima, para a direita e assim por diante. O tamanho dos segmentos depende dos algarismos do número, como exemplificado a seguir.



Para obter a assinatura geométrica do número 334524, traça-se um segmento de 3 cm para a direita a partir de **P**, outro de 3 cm para baixo, outro de 4 cm para a esquerda, outro de 5 cm para cima, outro de 2 cm para a direita e outro de 4 cm para baixo. Na figura, vemos as assinaturas geométricas dos números 123, 233411 e 334524.

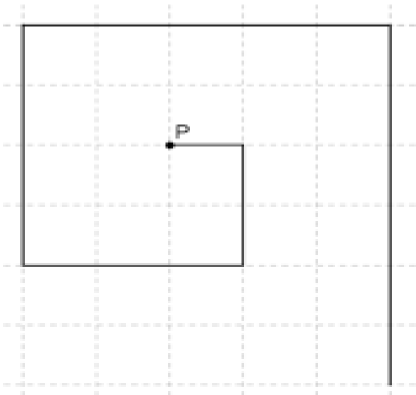


a) Trace no quadriculado a assinatura geométrica do número 123456.

Correção Regional | Correção Nacional

Item de nível fácil, que bastava seguir o exemplo para facilitar a resolução deste item. Alguns tiveram dúvidas se podiam seguir inicialmente qualquer direção, mesmo assim, todos acertaram o exercício.

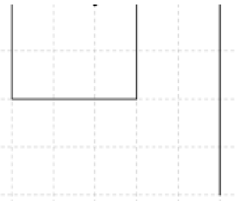
Resolução oficial:



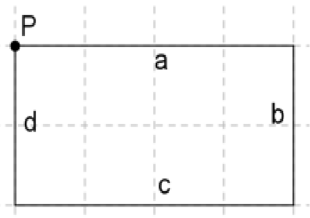
b) Quantos são os números de quatro algarismos que têm assinatura geométrica fechada, isto é, começando e terminando em **P**?

Nível difícil; Mesmo o aluno propondo uma situação modelo, o uso da análise combinatória trouxe um grau de dificuldade muito grande para o item e quase ninguém conseguiu uma linha de raciocínio para a resolução.

Resolução oficial:



b) Seja *abcd* um número com quatro algarismos *a*, *b*, *c* e *d* não nulos. A assinatura geométrica de *abcd* possui quatro segmentos consecutivos de comprimentos *a*, *b*, *c* e *d*, traçados de acordo com o enunciado. Ela será fechada se e somente se esses traços formarem um retângulo, ou seja, se e somente se $a = c$ e $b = d$. Temos as escolhas de 1 a 9 para $a = c$ e também para $b = d$, num total de $9 \times 9 = 81$ escolhas; segue que temos 81 números de quatro algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.

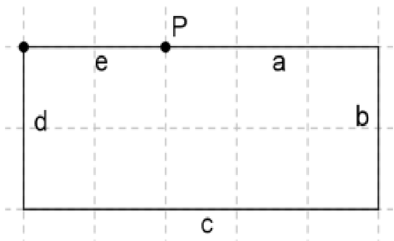


c) Quantos são os números de cinco algarismos que têm assinatura geométrica fechada?

Nível difícil; Assim como o item b, este necessitava de uma situação modelo e além de usar análise combinatória, ainda precisava analisar casos excepcionais. A questão não foi feita por nenhum aluno.

Resolução oficial:

c) Seja *abcde* um número com cinco algarismos *a*, *b*, *c*, *d* e *e* não nulos. Como no item anterior, a assinatura geométrica de *abcde* será fechada se e somente os segmentos de comprimento *a*, *b*, *c*, *d* e *e* formarem um retângulo como na figura ao lado, ou seja, se e somente se $a + e = c$ e $b = d$. Como no item anterior, temos as escolhas de 1 a 9 para $b = d$.

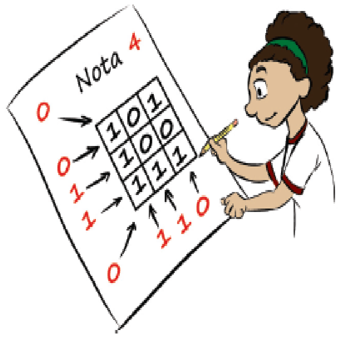


Vamos agora contar de quantas maneiras é possível escolher *a*, *c* e *e* de modo que $a + e = c$. Exceto para o caso $c = 1$, quando não há valores possíveis para *a* e *e*, podemos escolher valores de 1 até $c - 1$ para *a* e, em cada caso, o valor de *e* fica determinado como $c - a$. Em outras palavras, para cada *c* é possível escolher *a* e *e* tais que $a + e = c$ de $c - 1$ maneiras diferentes (notamos que no caso $c = 1$ temos $c - 1 = 0$). Como *c* varia de 1 a 9, o número de escolhas possíveis para *a* e *e* é $0+1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$.

Finalmente, segue do princípio multiplicativo que temos $9 \times 36 = 324$ números de cinco algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.

5. Helena brinca com tabuleiros 3×3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu.



Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é $0+0+1+1+0+1+1+0=4$.

a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

0	0	1
1	1	1
0	0	0

Esse item foi considerado de nivel fácil seguindo o exemplo, o aluno chegava às somas das 8 posições, concluindo a NOTA 5. Todos acertaram esse item.

Resolução oficial:

a) No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5.

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.

Item de nivel médio, pois os alunos deveriam visualizar que para a NOTA ser 8, todas as somas deveriam resultar em numero impar, pois sendo 8 somas e todas com o numero 1,eles deveriam encontrar formas dessas somas seriam impar. Trabalhar com o tabuleiro inteiramnete preenchido com 1 foi a primeira forma encontrada e trabalhando com as diagonais alguns concluiram mais formas, porém a ultima forma de resolução foi a mais dificil de ser encontrada, pois os alunos deveriam formar “uma cruz” no tabuleiro formada com o numero 1, resultando em 8 somas iguais a 1 e concluindo as possibilidades para a NOTA 8.

Resolução oficial:

b) Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros com nota 8; deixamos isso como exercício.

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

Item de grau de dificuldade dificil, pois e embora eles conseguiram atraves de um exemplo encontrar a mudança de NOTA, a explicação do porquê isso ocorre foi muito trabalhosa para eles. Alguns apresentaram apenas os exemplos, mas sem uma justificativa, alguns até conseguiram justificar algumas relações, mas foi necessária a discussão em grupo e a escrita por parte do professor para explicar a mudança de um numero impar de somas e que a relação de diferença entre um numero impar e outro, resulta em um numero par.

Resolução oficial:

c) Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de da linha, da coluna e da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:

- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
- se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
- se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
- se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

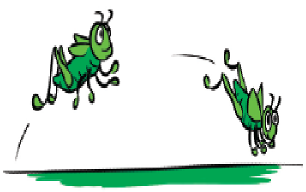
Item de nivel dificil, ainda mais por estar na parte final da prova, o que já a torna cansativa. O conteudo de combinatória aplicada ao item, serviu para mostrar a quantidade de possibilidades de preenchimento, mas para isso o raciocinio precisou ser bem elaborado, ainda mais pra analisar que metade das somas seria impar e a outra metade seria par, praticamente todos deixaram esse item sem resolução alguma.

Resolução oficial:

d) Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^8=256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256.

Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é $\frac{2^9}{2}=2^8$.

6. Dois grilos, Adonis e Basílio, pulam sempre para a frente; Adonis só dá pulos de 1 cm ou 8 cm e Basílio só dá pulos de 1 cm ou 7 cm. Eles percorrem qualquer distância com o menor número de pulos possível. Por exemplo, Adonis percorre 16 cm com apenas dois pulos de 8 cm cada, enquanto Basílio precisa de quatro pulos, sendo dois de 7 cm e outros dois de 1 cm. Por outro lado, para percorrer 15 cm, Adonis precisa de oito pulos, sendo um de 8 cm e sete de 1 cm, enquanto Basílio precisa de apenas três pulos, sendo dois de 7 cm e um de 1 cm.



Indicando por $A(d)$ e $B(d)$, respectivamente, o número de pulos que Adonis e Basílio dão para percorrer d centímetros, temos $A(15) = 8$, $B(15) = 3$, $A(16) = 2$ e $B(16) = 4$.

a) Complete a tabela abaixo.

d: distância em cm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A(d): número de pulos de Adonis	1	2													8	2
B(d): número de pulos de Basílio	1	2													3	4

Nível fácil; Bastava completar a tabela, levando em consideração o fato de que os grilos A e B pulam de formas distintas e que se busca o menor número de saltos. Os alunos usaram o exemplo para descobrir os últimos valores da tabela. Todos acertaram a questão.

Resolução oficial:

a) Seja n a distância a ser percorrida por Adonis e Basílio. O algoritmo da divisão de Euclides nos permite escrever $n = 8a + r = 7b + s$ onde $0 \leq r \leq 7$ e $0 \leq s \leq 6$; segue que $A(n) = a + r$ e $B(n) = b + s$. Por exemplo, $14 = 8 \times 1 + 6 = 7 \times 2 + 0$, donde $A(14) = 1 + 6 = 7$ e $B(14) = 2 + 0 = 2$. O restante da tabela pode ser preenchido analogamente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A(n)$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	2
$B(n)$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4

b) Encontre um número d entre 200 e 240 tal que $B(d) < A(d)$ (isto é, encontre uma distância entre 200 cm e 240 cm tal que, para percorrê-la, Basílio dá menos pulos do que Adonis).

Nível difícil devido ao raciocínio empregado, com a noção de MMC e a confecção de várias tentativas para chegar aos 3 valores em comum, como pede o enunciado, desta forma, a maioria não conseguiu iniciar ou chegar em uma das 3 respostas possíveis.

Resolução oficial:

b) Para achar um desses números, basta fazer uma tabela como a do item anterior para valores de n entre 200 e 240.

n	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213
$A(n)$	25	26	27	28	29	30	31	32	26	27	28	29	30	31
$B(n)$	32	33	34	29	30	31	32	33	34	35	30	31	32	33

n	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
$A(n)$	32	33	27	28	29	30	31	32	33	34	28	29	30	31
$B(n)$	34	35	36	31	32	33	34	35	36	37	32	33	34	35

n	228		229	230	**231**	232	233	234	235	236	237	**238**	**239**	240
$A(n)$	32		33	34	**35**	29	30	31	32	33	34	**35**	**36**	30
$B(n)$	36		37	38	**33**	34	35	36	37	38	39	**34**	**35**	36

Essa tabela mostra que 231, 238 e 239 são os valores de n entre 200 e 240 tais que $A(n) > B(n)$. Observamos que a feitura dessa tabela não é tão trabalhosa como parece, pois o padrão dos valores de $A(n)$ e $B(n)$ é claro; por exemplo, basta calcular $A(n)$ para os múltiplos de 8 e a linha correspondente a $A(n)$ é preenchida como segue:

n	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$	$8(k+1)$
$A(n)$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$	$k+6$	$k+7$	$k+1$

Observação análoga vale para a linha correspondente a $B(n)$.

c) Encontre o maior número d tal que $B(d) = A(d)$.

Essa questão foi considerada a mais difícil da prova pelos alunos. Além de todo o raciocínio usado no item anterior, os alunos teriam que visualizar que a partir de um certo ponto, eles nunca mais dariam o mesmo número de saltos. Isso dava-se pela apresentação de várias sequências para experimentação. Nesse item nenhum aluno alcançou a resposta que era 343.

Resolução oficial:

c) Das expressões $n=8a+r=7b+s$ temos $A(n)=a+r=\dfrac{n-r}{8}+r=\dfrac{n+7r}{8}$ e $B(n)=b+s=\dfrac{n-s}{7}+s=\dfrac{n+6s}{7}$. Desse modo, $A(n)=B(n)$ se escreve como $\dfrac{n+7r}{8}=\dfrac{n+6s}{7}$; simplificando essa expressão chegamos a $n=49r-48s$. O maior valor possível para $49r-48s$ é obtido colocando $r=7$ e $s=0$, ou seja, o número procurado é $d=49\times 7=343$.

Fica como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que $A(n)<B(n)$ para $n>343$.

Ressaltamos que as resoluções feitas pelos alunos e citadas aqui, foram feitas em encontros de grupos de alunos nos meses de outubro e novembro, para a resolução e comentários da prova e posteriormente para a gravação do DVD educacional.

Todas as opiniões partiram dos alunos e professores que ajudaram no presente trabalho e a opinião sobre o nível de dificuldade deu-se antes dos comentários dos alunos, sendo assim, alguns consideravam a questão fácil, a priori, depois tinham dificuldade na resolução e tal constatação também foi observada.

5 ANÁLISES A POSTERIORI

Com a realização das experiências com os alunos, conseguimos observar grandes melhorias e benefícios para todos - aumento no número de premiados, incentivo aos demais alunos e professores da escola - tanto que o planejamento de 2014 prevê a formação do Clube de Matemática dentro da escola, apoiado pela direção e com a tutela dos professores Edgar e Leonel, com turmas pela manhã e tarde.

Com relação à experiência do trabalho em grupo, podemos visualizar melhorias no aspecto de estudo e principalmente nas premiações dos alunos, pois nesse ano a escola obteve dois alunos medalhistas e cinco alunos premiados com menção honrosa (maioria nível 1). No ano anterior a escola teve um medalhista e cinco menções honrosas, sendo a maioria de alunos do nível 2 (alguns já deixaram a escola). Os resultados podem melhorar ainda mais no decorrer dos anos, desde que o trabalho seja mantido com o foco na aprendizagem e no estímulo do estudo de matemática.

O trabalho em grupo mostrou aos professores a capacidade dos alunos em lidar com conteúdos aprofundados de matemática do uso da linguagem lógica e simples que possuem em resoluções de exercícios. Analisaram-se melhorias na questão de resolução de problemas, pois ao fazer as análises em grupo, todos investigaram e entenderam cada um dos exercícios e desafios apresentados.

O grupo unido desde agosto de 2013, no dia de aplicação da 2ª fase, mostrou-se muito tranquilo com a realização da mesma, passou tranquilidade aos demais e faz com que todos pudessem explorar o seu melhor, fazendo a prova com a calma e tempo adequados.

Vale ressaltar a importância valiosa do PIC na formação e premiação da aluna Marcela Tais, que durante o ano de 2013 participou das aulas quinzenais aos sábados. A formação realizou um trabalho de extrema importância para sua formação e mostrou a todos (professores e alunos) a necessidade de se aderir ao programa de iniciação científica. Isso colaborou para o PIC 2014, que, com o relato de experiência da aluna nas reuniões, os demais (premiados) procuraram inscrever-se e aguardar sua convocação para o programa.

Esperamos nos próximos anos aumentar a participação efetiva e principalmente o número de alunos premiados, não pela premiação, todavia para que mais alunos tenham sua trajetória modificada com a OBMEP, tornando-se estudantes brilhantes e dando a importância devida à educação e quem sabe, sendo os próximos professores estimuladores e desbravadores da OBMEP.

Com relação ao 2º experimento, percebemos que os alunos de início tiveram muita dificuldade em expor suas resoluções na lousa para os demais colegas, ainda mais com uma câmera para gravá-los. Essa dificuldade inicial foi vencida com as primeiras gravações e mostrou a todos que por mais difícil que fosse expor-se em frente a uma câmera, aquilo serviria para melhorar a visão que os alunos tinham da OBMEP e para incentivar mais alunos a participar. Acima de tudo, mostrar a importância de testar seus limites. Os vídeos estarão disponíveis no BLOG da escola, cujo endereço é: e**mefvaldomirocasagrande.blogspot.com.br.**

Lembramos que a ideia de realizar a gravação surgiu no decorrer dos trabalhos em grupo, todos concordaram que isso ajudaria no entendimento de cada item, bem como incentivar a formação do tão sonhado Clube de Matemática, o qual servirá como um grande motivador dos conhecimentos matemáticos.

Embora o DVD levou certo um tempo para ser concluído (edições e legendas), os alunos tiveram acesso ao material bruto. Na conclusão do trabalho foi disponibilizado a cada um, cópia do DVD, além de todas as resoluções postadas no BLOG da escola (**emefvaldomirocasagrande.blogspot.com.br)** o que de material de divulgação do Clube dentro da unidade.

Os próprios alunos pediram a formação desse clube, tal a mobilização em torno dos estudos e do impacto que as premiações tiveram em todos do grupo escolar. Lembramos que o Clube não servirá somente para estudos da OBMEP, faremos outras preparações para provas internas e externas, como Vestibulares e concursos de Bolsas de Estudo.

No final do período letivo de 2013, todos os alunos (do 5º ano 9º ano) participaram de uma palestra de divulgação dos resultados e das ideias que cercam a escola com relação à OBMEP. Nessa palestra, além da entrega simbólica da premiação e homenagem aos alunos premiados, foi feita a exibição do documentário da OBMEP, onde é contada a trajetória de alguns alunos após alcançaram premiação em edições passadas. Isso despertou em cada aluno e também no professor que acompanhou o vídeo uma reflexão sobre o que chamamos de dificuldades na vida. Vemos que muitos professores e alunos possuem condições mínimas para se ensinar e aprender e ainda assim, conseguem explorar toda a sua capacidade. As histórias de superação apresentadas no documentário são provas que por mais complicada a situação social de uma pessoa, a educação pode mudar uma história de vida.

Essa experiência com a palestra mostrou a todos que existe uma necessidade em se aprimorar os estudos para a OBMEP, e a criação do Clube de Matemática será o fator de maior estimulação nesse novo ano.

A ideia inicial é de que o Clube seja para alunos da escola, mas com a participação e empenho de outros professores e escolas, esse projeto se espalhe para a cidade de Dois Córregos, tornando-a uma referência no ensino de matemática.

6 VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA

A partir da análise a posteriori realizada, dos resultados obtidos na OBMEP 2013, na confecção do DVD educacional e da opinião de alunos e professor-aplicador, faremos a validação da engenharia didática utilizada.

6.1. Validação da aprendizagem dos alunos.

A atividade em grupo foi aplicada com alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental participantes da 2ª fase da OBMEP 2013. Nessa atividade pudemos analisar grande evolução no que diz respeito ao desenvolvimento de estudos coletivos, mostrando que o raciocínio de cada aluno, quando compartilhado entre várias pessoas, torna-se cada vez mais valioso e "encorpado", pois adquirem técnicas e habilidades fundamentais para o desenvolvimento do ensino-aprendizado de matemática.

Verificou-se ganho para todos, pois os alunos a partir de um conhecimento prévio do sistema avaliativo da OBMEP obtiveram melhores resultados, conquistaram medalhas e menções honrosas e aumentaram o incentivo ao estudo matemático, com intenções de prolongar esses estudos através do PIC (Programa de Iniciação Cientifica).

O estudo em grupos, também trouxe mais confiança e tranquilidade entre os participantes, fato verificado no dia 14 de setembro, dia da 2ª fase. Naquele instante, foi visível a cooperação entre eles e a calma de todos antes do início da avaliação, o que ajudou-os a explorar seus limites.

Quanto ao fato de confeccionar um DVD, foi algo estimulado ao longo dos estudos em grupos e consolidado após as resoluções e discussões nos meses de outubro e novembro. Isso fez a maioria dos alunos indicar a intenção de realizar uma resolução, pelo menos, gravada em vídeo e utilizá-las como material para futuras edições da OBMEP, além de servir como incentivo para a formação do Clube de Matemática, divulgado no BLOG da escola (**emefvaldomirocasagrande.blogspot.com.br)**.

Os alunos ficaram tão motivados pelas resoluções e entenderam que essas gravações mostrariam aos demais, que não davam importância ou se amedrontam em questões desse nível, que a OBMEP está ao alcance de todos, desde que haja vontade de aprender e fazer. Foi notório o envolvimento dos alunos nas atividades, isso se refletiu sobre os demais alunos, pois após o anúncio dos premiados e da divulgação de um vídeo institucional da OBMEP, muitos alunos declararam o desejo de participar do Clube da Matemática comandado pelos professores Edgar e Leonel, poi professora Meire foi transferida.

As aulas estão com data marcada e serão oferecidas em dois períodos (manhã e tarde) para que todos tenham horário á disposição para suas tirarem dúvidas e aprofundarem os estudos.

A motivação dos alunos ficou evidente em nossos encontros e a ideia de gravar algumas aulas, aumentou essa motivação. Alguns revelaram desejo na profissão docente, o que deu ainda mais importância a esse estudo.

6.2 Comentários gerais dos alunos.

Durante e após a aplicação das atividades, a opinião dos alunos com relação, principalmente, ao nível de dificuldade da 2ª fase da OBMEP mudou. Muitos alunos aproveitaram as discussões em grupo para analisarem as questões com um olhar mais técnico e crítico, eliminaram assim dúvidas incômodas durante a realização da prova no mês de setembro. O aluno João Pedro, por exemplo, conseguiu resolver questões em grupo o qual não havia conseguido resolver no dia da prova. Ele relatou que em grupo as ideias se multiplicam e isso o motiva para, após quatro menções honrosas seguidas, conseguir sua primeira medalha, agora no ensino médio.

A aluna Isabella nos relatou que após o estudo para gravar a questão escolhida, conseguiu visualizar a resolução de várias formas, chegando ao mesmo resultado. Ela ressaltou a importância de expor seus conhecimentos para aprimorá-los, o que na verdade norteia a profissão de professor, onde todos devem aprender a cada dia mais em sua are docente.

A aluna Marcela (medalhista de ouro) enalteceu a importância de um ano inteiro como bolsista do PIC, no qual, segundo ela mesma, aprimorou o raciocínio de muitos problemas antes “impossíveis”, mas que hoje já não “assustam” tanto, pois todos tem uma lógica a ser desvendada e seguida.

6.3 Validação da aprendizagem do professor.

Os estudos em grupos fizeram com que todos ganhassem na questão do ensino-aprendizagem. No caso dos professores, que de alguma forma participaram desse projeto, os ganhos foram inestimáveis, devido à motivação que os estudos determinaram na escola, não apenas pelos alunos, mas principalmente pelos professores, aumentando a necessidade de estudos em sala e em horários livres.

A cobrança feita pelos alunos para estudar com ênfase questões da OBMEP, tornou necessária a melhor preparação dos docentes e uma análise mais ampla de cada questão, a fim de mediar discussões e sanar eventuais dúvidas.

Com o desenvolvimento do projeto, o professor mediador aprofundou seus estudos, realizou resoluções de provas anteriores e buscou formas didáticas e bem simples de se resolver as considerações e particularidades que cada item apresentava.

A importância da OBMEP também foi modificada, percebeu-se a necessidade de alunos cada vez mais preparados e com disposição de seguirem seus estudos na área e possivelmente seguirem a carreira docente.

O desafio encontrado na arte de aprender e ensinar tornou-se muito evidente no projeto, pois a noção de que se aprende mais quando se ensina, tornou-se clara para todos os envolvidos.

6.4 Comentários do professor-mediador sobre a OBMEP.

As conquistas alcançadas no decorrer do projeto mostraram ao professor a necessidade de se incluir o estudo sobre a OBMEP no cotidiano, pois embora, os alunos apresentem dificuldade elevada com a resolução de problemas e de alguns conteúdos matemáticos, com o passar do tempo e trabalho contínuo, essa realidade pode mudar.

A própria experiência de vida do professor, torna a visão sobre a importância da educação na mudança de vida de uma pessoa evidente.

Passou-se a entender, que o conhecimento dos alunos tem fundamental importância na formação de didáticas para a resolução de problemas, pois eles possuem a habilidade de facilitar uma resolução e de tornar o exercício mais simples, fugindo da característica técnica que os professores dão às suas resoluções.

6.5 Validação sobre a metodologia engenharia didática.

Sobre a Engenharia Didática, é uma metodologia aplicada, principalmente, a pesquisas em Educação Matemática, desde a sua elaboração até a sua análise e conclusão. Tem como foco a prática da sala de aula, por meio de uma sequência didática experimental, a construção do saber matemático a uma prática investigativa apoiada na reflexão. É por tudo isso que a engenharia didática permite desenvolver produtos para o ensino, gerados no próprio ensino aliado ao conhecimento teórico.

No caso da presente pesquisa, a engenharia didática forneceu base para a organização e aplicação de todo o projeto, pois norteou as etapas que deveriam ser seguidas e mediadas pelo professor responsável pelos estudos em grupos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo sabendo que a realidade da OBMEP ainda não é a de uma avaliação realizada efetivamente por todos os alunos, ou seja, que nem todos os alunos fazem a prova de forma consciente e demonstrando conhecimento do que está sendo feito, o presente trabalho, mostra que a mobilização de pequenos grupos de alunos e professores pode dar início a uma mudança.

A partir do momento em que o aluno deixa de ver a OBMEP como um "fantasma" e passa a fazer parte ou a conhecer alunos premiados, tudo se torna mais próximo de sua realidade, passa a motivação adiante e agrega cada vez mais valor às Olimpíadas. Cabe ressaltar que a motivação deve partir dos pais, dos gestores e de toda a população, pois é a partir dessa valorização que não teremos apenas a melhoria do ensino de matemática como também a valorização da educação como um todo.

Pudemos avaliar que o trabalho em grupo ajudou a todos os alunos que participaram da 2ª fase da OBMEP, não somente no caso dos alunos premiados, e sim todos. Pelo relato de experiência dos demais alunos participantes, todos ressaltaram a importância da preparação e da socialização que os grupos de estudos proporcionaram, fazendo com que esses alunos pudessem resolver a prova com conhecimento prévio do nível de dificuldade e com a instrução de resoluções de questões dissertativas.

O trabalho em vídeo proporcionou a todos (alunos e professores) um grande momento de interação, pois os alunos ao resolverem as questões durante as gravações puderam, mais uma vez, dividir com o grupo seus raciocínios e suas indagações, além de que, os vídeos servirão de objeto de motivação do grupo escolar como um todo e fará com os outros alunos sintam-se mais próximos da realidade da OBMEP. Todos esses vídeos estarão disponíveis no BLOG da escola: **emefvaldomirocasagrande.blogspot.com.br.**

8 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A.; COUTINHO, C de Q. e S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT – 19/ ANDEP**. REVEMAT. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008. Disponívelem:<http:www.journal.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/13031q12137>Acesso em jan.2014.

BIBLIOTECA COMUNITÁRIA. **Guia para apresentação do trabalho acadêmico**: de acordo com NBR 14724/2011. São Carlos (SP): UFSCAR, 2011.

BIBLIOTECA COMUNITÁRIA. **Guia para elaboração de Referências**: de acordo com NBR 6023/2002. São Carlos (SP): UFSCAR, 2012.

BIBILOTECA COMUNITÁRIA. **Guia para padronização de Citações**: de acordo com NBR 10520/2002. São Carlos (SP): UFSCAR, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.148p.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia, **Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetiké, Campinas-UNICAMP, v.13, n.23, 2005, p.85-118. Disponivel em http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=67. Acesso em jan.2014.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Traduzido por Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998. P.351.

ROSA NETO, E. **Didática da Matemática**, 9.ed. Série Educação. São Paulo: Ática. 1996.

RIBEIRO, A. B. M. **As Frações que o Ladrilhamento Revela**. São Carlos: PROFMAT-UFSCar, 2013.

MATTA, A. A. **Uma Análise Critica das Provas da Primeira Fase da OBMEP-Nível 2**. Rio de PROMAT-IMPA, 2013.

PINHEIRO, T. A. **Soluções não Clássicas para Problemas da OBMEP**. Santa Maria: PROFMAT-UFSM, 2013.

CARVALHO, A. L. L. **MATERIAL MULTIMIDIA: Resolução Comentada de Algumas Questões do Nível 3 da OBMEP sobre Geometria**. Belém: PROMAT-UFPA, 2013.

SILVA, M. H. **MATERIAL MULTIMIDIA: Resolução Comentada de Algumas Questões do Nível 2 da OBMEP sobre Geometria**. Belém: PROFMAT-UFPA, 2013.

CGEE. **Avaliação do Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)**. Brasilia: MEC, 2011.

SITE da OBMEP: www.obmep.org.br

BLOG da ESCOLA: emefvaldomirocasagrande.blogspot.com.br.

9 ANEXOS

QUESTIONÁRIO SOBRE A OBMEP 2013 PARA OS ALUNOS QUE PARTICIPARAM DA 2ª FASE.

01- FOI A PRIMEIRA VEZ QUE VOCÊ PARTICIPOU DA 2ª FASE DA OBMEP?

A.L.M.: Sim, pois este ano me esforcei muito para conseguir, em minha casa e também na escola.

A.L.D.: Sim.

A.A.M.: Não, pois já participei em 2012.

G.C.: Sim.

G.C.P.: Não, pois a primeira vez que participei foi em 2012.

I.C.: Sim.

J.M.: Não, já participei no ano de 2012.

J.A.: Sim.

J.P.: Não, já participei 4 vezes.

K.C.: Sim.

L.M.: Não, já é a terceira vez.

L.X.: Sim.

M.B.: Não, já participei em 2012.

M.M.: Sim.

M.L.: Sim.

N.E.: Sim, pois estou no 6º ano apenas.

T.A.: Não, já participei em 2012.

02- EM QUAL NIVEL VOCÊ ESTÁ (NÍVEL 1 OU NÍVEL 2)?

A.L.M.: Nível 1.

A.L.D.: Nível 2.

A.A.M.: Nível 2.

G.C.: Nível 1.

G.C.P.: Nível 2.

I.C.: Nível 1.

J.M.: Nível 1.

J.A.: Nível 1.

J.P.: Nível 2.

K.C.: Nível 1.

L.M.: Nível 2.

L.X.: Nível 1.

M.B.: Nível 1.

M.M.: Nível 2.

M.L.: Nível 1.

N.E.: Nível 1.

T.A.: Nível 2.

03- O QUE VOCÊ ACHA DA OBMEP?

A.L.M.: Muito boa, pois a prova exige conhecimentos que vão nos ajudar também para outras provas e o estudo ajuda no ensino.

A.L.D.: Uma boa avaliação para todos os alunos classificados, com questões parecidas com as da 1ª fase.

A.A.M.: É uma prova muito boa para avaliar a capacidade de resolução de problemas.

G.C.: É uma prova que avalia bem os alunos.

G.C.P.: Acho a avaliação difícil, mas compensadora.

I.C.: São muito boas, pois avaliam muito bem os alunos.

J.M.: A OBMEP traz oportunidade gratificante a todos que conseguem fazer a 2ª fase e ter a oportunidade de novas experiências.

J.A.: Acho interessante, pois incentiva os estudantes a gostarem de matemática.

J.P.: É uma prova muito legal e que ajuda os estudantes a estudar e ainda ganhar premiações.

K.C.: Uma prova difícil que exige muita sabedoria.

L.M.: Eu acho bom testar nossos conhecimentos e nos fazer evoluir e aprender cada vez mais.

L.X.: Eu acho muito boa, pois foi por ela que descobri que gostava um pouco mais de matemática.

M.B.: Bom, pois assim nós temos oportunidades de participar de provas com que veremos nossa capacidade comparada com alunos do Brasil todo.

M.M.: Muito importante, pois não avalia somente o aluno, mas também o professor, pois através do professor que conseguimos realizar os estudos.

M.L.: Eu acho uma prova muito boa, que nos faz trabalhar os conteúdos trabalhados no 6º e 7º anos.

N.E.: Ótima, pois incentiva os alunos a estudarem mais e se prepararem para outras avaliações importantes como essa.

T.A.: Acho importante, pois avalia e testa o conhecimento do aluno.

04- PARA VOCE, QUAL É A IMPORTÂNCIA DA OBMEP?

A.L.M.: Com as provas da OBMEP aprendi mais conteúdos, os estudos preparatórios foram bons para mim e meus colegas.

A.L.D.: Melhora o desenvolvimento de questões de raciocínio lógico.

A.A.M.: Além de avaliar, ela nos ensina novas formas de iniciar e resolver exercícios.

G.C.: Ela melhora o ensino de matemática.

G.C.P.: Penso que deveria ser oferecido mais bolsas de estudos, para que mais alunos tivessem a oportunidade de melhorar seus estudos.

I.C.: Testar-me, saber até onde posso ir.

J.M.: Ajudam a ter novos conhecimentos e novas experiências, independentemente de ganhar ou não medalhas.

J.A.: É um teste para ver o que você aprendeu no ano, além de estimular o estudo de matemática.

J.P.: Faz os estudantes quererem estudar matemática poderem ganhar prêmios.

K.C.: A OBMEP procura ensinar coisas que você já aprendeu, mas de um jeito diferente e mais gostoso.

L.M.: Ela é importante para fazer com que as pessoas, cada vez mais se interessem pela matemática e mostrar que existe o raciocínio e não apenas cálculos.

L.X.: Acho que incentiva os alunos a participar mais dos estudos de matemática.

M.B.: A oportunidade de participar de provas desse tipo e se preparar para o futuro.

M.M.: Saber como estão meus conhecimentos, pois se passei para a 2ª fase, é porque estou melhorando meus conhecimentos.

M.L.: É mais uma prova que faz com que o aluno teste seus conhecimentos e possa melhorar com seus erros.

N.E.: A importância da OBMEP é a de preparar o aluno para o futuro e incentiva-lo ainda mais.

T.A.: Incentiva o aluno a se interessar mais nos estudos e também ajuda para que o aluno busque um futuro melhor.

05- VOCÊ SE PREPARA PARA AS PROVAS DA OBMEP EM SUA ESCOLA?

Sim.

A.L.M.: Nesse ano não pude participar de aulas extras para fazer um treino.

A.L.D.: Sim, na minha escola e em minha casa.

A.A.M.: Nesse ano não pude participar de aulas extras para fazer um treino.

G.C.: Sim, o professor fazia grupos de estudos.

G.C.P.: Sim, nos grupos de estudo.

I.C.: Sim, com questões em simulados.

J.M.: Sim, os professores procuram dar atividades que explorem o raciocínio lógico.

J.A.: Sim, os professores passaram algumas questões.

J.P.: Sim, na escola e também em casa.

K.C.: Sim.

L.M.: Sim, eu faço alguns simulados com provas de anos anteriores.

L.X.: Sim, algumas vezes nos reunimos para estudar e resolver questões.

M.B.: Sim, com exercícios nas aulas preparatórias.

M.M.: Sim, pois a matéria que aprendemos na escola cai na prova da OBMEP.

M.L.: Sim, com meus professores e amigos.

N.E.: Sim, o professor passa prova de anos anteriores e nos ajuda na resolução.

T.A.: Sim, fazemos algumas provas anteriores.

06- VOCÊ CONHECE O MATERIAL COM QUESTÕES PREPARATÓRIAS?

A.L.M.: Sim, o professor apresenta questões do livro e de provas anteriores.

A.L.D.: Sim.

A.A.M.: Sim, estudei algumas no ano de 2012.

G.C.: Sim, vi algumas questões de provas anteriores.

G.C.P.: Sim, o professor apresenta questões do livro e de provas anteriores.

I.C.: Sim.

J.M.: Não.

J.A.: Sim.

J.P.: Sim, todos os anos eu estudo questões de provas anteriores.

K.C.: Sim.

L.M.: Sim.

L.X.: Sim.

M.B.: Sim, e também conheço o material do PIC.

M.M.: Sim, o professor apresentou provas de anos anteriores.

M.L.: Não.

N.E.: Sim.

T.A.: Sim.

07- DEPOIS DE SE CLASSIFICAR PARA A 2ª FASE, QUAIS OS MOTIVOS QUE O LEVARAM A FAZER A PROVA DA 2ª FASE?

A.L.M.: Para que eu pudesse aprender mais e melhorar meus estudos.

A.L.D.: Testar meus conhecimentos matemáticos e também o gosto pela matemática.

A.A.M.: Me senti com a obrigação de fazer e dar o melhor de mim.

G.C.: Me senti orgulhosa e com a obrigação moral de fazer uma boa prova.

G.C.P.: Testar meus conhecimentos e ganhar uma bolsa de estudos.

I.C.: Saber do que eu era capaz de fazer.

J.M.: Pelo compromisso e responsabilidade e também para testar o que estou aprendendo e se estou aprendendo.

J.A.: As premiações.

J.P.: Vontade de ver como a prova é e usa-la como um desafio a ser feito.

K.C.: Queria muito ganhar uma medalha.

L.M.: Por ser boa para testar conhecimentos e tentar descobrir novos horizontes.

L.X.: Foi a motivação que recebi.

M.B.: Tive vontade de participar, para medir meus conhecimentos com alunos do país todo.

M.M.: O gosto por matemática e para orgulhar minha mãe.

M.L.: Passar para a 2ª fase me incentivou a estudar mais, pois fiquei muito orgulhoso de mim.

N.E.: Pela dedicação aos estudos e também tentar ganhar uma medalha.

T.A.: Testar meus conhecimentos e também aprender mais.

08- NA SUA ESCOLA, VOCÊ É OBRIGADO A PARTICIPAR DA 2ª FASE DA OBMEP?

A.L.M.: Não, primeiramente o professor perguntou se eu queria fazer a 2ª fase, já que havia me classificado.

A.L.D.: Não, sempre que classificados, vamos de forma voluntária.

A.A.M.: Eles não obrigam, mas orientam a ir e telefonam em casa caso a gente se atrase, para ver se aconteceu algo.

G.C.: Não, eles apenas orientam a ir.

G.C.P.: Não, eu fui por vontade própria.

I.C.: Não, apenas somos incentivados.

J.M.: Não, os professores nos orientam a não faltar, mas não nos obrigam.

J.A.: Não, mas todos gostam quando a gente participa.

J.P.: Não, o professor apenas nos incentiva.

K.C.: Não, o professor incentivou a gente a participar.

L.M.: Não, após de classificar para a 2ª fase, o professor me orientou e incentivou a participar.

L.X.: Não, todos foram de livre escolha.

M.B.: Não, cada aluno participa se quiser, mas o professor incentiva.

M.M.: Não, ele apenas nos orienta para fazer a prova e incentiva a todos.

M.L.: Não, mas os professores nos orientam a fazer a prova.

N.E.: Não, após de classificar para a 2ª fase, o professor me orientou e incentivou a participar.

T.A.: Não, mas os professores cobram para que a gente represente a escola.

09- EMBORA AS PROVAS DA 1ª FASE SEJAM DE QUESTÕES DE MULTIPLA ESCOLHA E AS PROVAS DA 2ª FASE SEJA DE QUESTÕES DISSERTATIVAS, QUAIS AS PRINCIPAIS DIFERENÇAS, CASO EXISTAM, VOCÊ PERCEBE ENTRE AS DUAS FASES?

A.L.M.: Para mim, as questões da 1ª fase são mais fáceis que as da 2ª fase.

A.L.D.: As provas da 2ª fase possuem questões que aumentam o nível de dificuldade a cada item, fazendo o raciocínio ficando mais trabalhoso.

A.A.M.: A 1ª fase é mais fácil.

G.C.: A 1ª fase é mais fácil.

G.C.P.: A 1ª fase é mais fácil, pois na duvida temos as alternativas para testar, na 2ª fase exige mais do raciocínio, sem poder testar resposta.

I.C.: Questões da 2ª fase são bem mais difíceis.

J.M.: Na 1ª fase as questões são mais fáceis, já 2ª fase elas são bem mais difíceis e levam mais tempo para serem resolvidas.

J.A.: Na 1ª fase com questões de múltipla escolha, podemos eliminar respostas até chegar à resposta certa, na 2ª fase temos que escrever todas as respostas.

J.P.: Na primeira fase, as questões são mais fáceis, já que temos alternativas para conferir as respostas, já na segunda fase, as questões escritas não podem ser conferidas.

K.C.: As duas provas começam com questões fáceis que vão se tornando mais difíceis, mas na 2ª fase o nível é mais difícil.

L.M.: A 2ª fase é mais complicada, aumenta o nível do raciocínio lógico com relação à 1ª fase.

L.X.: Na 2ª fase, as questões são mais elaboradas para que a gente possa raciocinar mais.

M.B.: Acho a 1ª fase bem mais fácil que a 2ª fase.

M.M.: Para mim, a diferença é apenas nas questões não serem de múltipla escolha.

M.L.: Na 1ª fase as questões são mais fáceis e na 2ª fase, as questões são bem mais complicadas.

N.E.: Achei as questões da 2ª fase mais complicadas e desafiadoras.

T.A.: As provas da 2ª fase exigem um raciocínio mais aprofundado.

10- QUAL É A SUA PERCEPÇÃO COM AS PROVAS DA OBMEP?

A.L.M.: Que eu possa ganhar prêmios e se tornar mais experiente.

A.L.D.: São avaliações que medem o conhecimento de cada um, fazendo com que o raciocínio lógico seja muito explorado.

A.A.M.: Acho que poderia ter mais fases, assim, mais gente se classificaria e ia aumentar a motivação.

G.C.: Acho que não é uma prova que todo mundo faça todas as questões com facilidade.

G.C.P.: Que o meu desempenho melhora a cada ano.

I.C.: Não Respondeu.

J.M.: Acho as questões bem feitas, mas são muito teóricas.

J.A.: As perguntas são muito bem elaboradas.

J.P.: Que é uma prova simples, mas que pode confundir em algumas questões.

K.C.: Difícil, mas bem gostosa de fazer.

L.M.: Acho que as perguntas são claras e objetivas.

L.X.: Elas ajudam não somente os professores, mas também os alunos a perceberem que possuem talento neste ramo e assim começarem a se interessar mais pela matemática.

M.B.: Que muitas pessoas vão para a 2ª fase, mas poucas são premiadas.

M.M.: Eu acho que consegui ir bem, consegui desenvolver bem a prova.

M.L.: Acho uma prova gostosa de fazer, mas que exige muito do aluno.

N.E.: Acho que não é uma prova que todos consigam fazer, precisa gostar de matemática.

T.A.: Exigem bastante dedicação e vontade de aprender do aluno.

11- VOCE SABE O QUE ACONTECE COM OS ALUNOS PREMIADOS NA OBMEP?

A.L.M.: Sim eles ganham medalhas e bolsas.

A.L.D.: Os premiados ganham medalhas e bolsas de estudos.

A.A.M.: Ganham prêmios e também novos cursos.

G.C.: Ganham prêmios e também novos cursos.

G.C.P.: Eles ganham medalhas e podem ganhar bolsas de estudos na faculdade, além de certificados de menção honrosa.

I.C.: Sim, na minha sala tem uma aluna premiada.

J.M.: Não.

J.A.: Sim, eles ganham uma bolsa de estudos para melhorar seus estudos.

J.P.: Sei, em partes, já ganhei menções honrosas, mas ainda tento ganhar uma medalha e ver como funcionam as bolsas de estudos para os alunos medalhistas.

K.C.: Os premiados ganham medalhas e bolsas de estudos.

L.M.: Os alunos ganham medalhas e certificados, eu mesma já ganhei 2 menções honrosas.

L.X.: Não muito bem ainda.

M.B.: Sim, eles ganham medalhas e bolsas para o PIC, que nos ajuda para o futuro, com aula para aprimorarmos nossos conhecimentos.

M.M.: Não.

M.L.: Sim, sei que além de medalhas, alguns ganham bolsas de estudo.

N.E.: Eu sei que eles podem ganhar medalhas, além de certificados.

T.A.: Sim, eles ganham medalhas e certificados.

12- PARTICIPAR DOS ESTUDOS PREPARATÓRIOS DA OBMEP, AJUDARAM EM SEU DESEMPENHO NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA?

A.L.M.: Eu sempre gostei de matemática, mas estudar para a 2ª fase da OBMEP me ajudou a melhorar muito minhas notas.

A.L.D.: Com o estudo vamos melhorando também em sala de aula, pois criamos hábitos de estudo.

A.A.M.: Desde novo sempre gostei de matemática, mas quando me classifiquei para a 2ª fase, vi que posso gostar e me dedicar a algo que envolva matemática.

G.C.: Desde que uma aluna da minha turma ganhou medalha de bronze, me dediquei mais para a OBMEP e isso melhorou minhas notas em matemática.

G.C.P.: Sempre fui muito bem na disciplina, mas como estou prestando provas de Vestibulinho, acho que isso tem me ajudado nos estudos.

I.C.: Eu tinha tentado passar para a 2ª fase em 2012, mas não consegui, me empenhei mais esse ano e melhorei muito.

J.M.: Eu comecei a melhorar muito na disciplina, quando passei para a 2ª fase no ano passado.

J.A.: Eu continuei muito bem na disciplina.

J.P.: Com a questão de notas, sempre fui bem, mas com os estudos separados eu melhorei desempenho em provas de bolsas e Vestibulinho de escolas técnicas.

K.C.: Melhorei minhas notas quando comecei a me preparar para a 2ª fase, a disciplina ficou mais gostosa.

L.M.: Trabalhar com questões da OBMEP ajuda muito no nosso raciocínio em todas as aulas.

L.X.: Eu passei a entender mais alguns problemas de matemática que o professor trabalha em sala de aula.

M.B.: Eu sempre fui bem, mas me motivei ainda mais depois de ganhar uma medalha de bronze.

M.M.: Sim, pois passei a me dedicar mais e isso fez minhas notas melhorarem.

M.L.: Esse ano, depois de saber que estava classificado para a 2ª fase, eu melhorei meu desempenho nas aulas de matemática.

N.E.: Eu amo estudar matemática, mas quando comecei a estudar para a 2ª fase, vi que precisava estudar muito, pois só amar não ia bastar.

T.A.: Eu melhoro a cada ano com meus estudos em matemática.