UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

OZILDE PETER STEGANI

O TEOREMA DE PITÁGORAS NO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SÃO CARLOS
2014

O TEOREMA DE PITÁGORAS NO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

OZILDE PETER STEGANI

O TEOREMA DE PITÁGORAS NO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Ivo Machado da Costa

SÃO CARLOS
2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

S817tp

Stegani, Ozilde Peter.
O teorema de Pitágoras no oitavo ano do ensino fundamental / Ozilde Peter Stegani. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
206 f.

Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Pitágoras, Teorema de. 3. Ensino fundamental. 4. Sequência didática. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
DM - UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
ICMC- USP

Prof. Dr. Renato José de Moura
DM - UFSCar

Dai-nos sabedoria Senhor,
para decidir a exata medida em ajudar,
permitindo que o outro fortaleça suas próprias pernas,
para no futuro,
decidindo subir em ombros de gigantes
tenha forças e astúcia.
E se cair,
tenha forças
para suportar o impacto.
E caso deseje,
lembrando a queda anterior e reconhecendo suas limitações,
saiba por onde recomeçar.
E quando atingir o topo
tenha olhos de ver quantos dele necessitam.
Pai, dai-lhe força para que, agora crescido,
saiba descer e ajudar outros que por aí vem.

Aos alunos, que momentaneamente Deus me confiou.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela oportunidade em realizar esse trabalho. Ao meu orientador Prof. Dr. Ivo Machado da Costa, pela dedicação e paciência.

Aos professores Márcio de Jesus Soares, Renato José de Moura,Luciene Nogueira Bertoncello, Grazielle Feliciani Barbosa, Ivo Machado da Costa, Roberto Ribeiro Paterlini, Tomas Edson Barros, Paulo Antonio Silvani Caetano, João Carlos Vieira Sampaio e José Antonio Salvador que tanto nos ensinaram.

Aos professores integrantes da Banca Examinadora – Prof.Dr. Ivo Machado da Costa, Prof.Dr. Sérgio Henrique Monari Soares e Prof.Dr. Renato José de Moura – pela atenção e tempo dispendidos para realizar a leitura deste material; pelas valiosas e justas sugestões que contribuíram para enriquecer o texto, tornando-o mais agradável e apresentável.

Aos colegas de jornada que estiveram comigo durante o curso. Levo-os na memória.

Aos alunos do 8ºC e 8ºD por participarem de todas as tarefas. Esse período foi importante para todos.

Especialmente à minha esposa Laura, que tanto amor demonstra por mim e pela vida.

Epígrafe

"... Nenhuma outra proposição teve, em toda a Matemática, uma história tão preeminente. ... Mas tudo em Geometria e, subsequentemente, em Física, derivou-se dessa proposição por generalizações sucessivas. A mais recente dessas generalizações é a teoria da relatividade generalizada."

Bertrand Russel
ABC da Relatividade, 5ªed., Zahar, 1981.

"Ele é a pedra fundamental de muitos outros trabalhos da própria Matemática e de muitas aplicações da Matemática; assim, deveríamos chegar a ele o mais depressa possível."

Ivan Niven
A Geometria pode sobreviver no currículo do curso secundário?.
Aprendendo e ensinando Geometria, M. M. Lindquist

"... a verificação mais simples e mais bela era, sem dúvida, a fornecida pelo célebre teorema ... Que lei matemática tão simples a regular a estrutura duma figura geométrica? Por isso, este teorema foi sempre considerado como a mais brilhante aquisição da escola pitagórica."

Bento de Jesus Caraça
Conceitos Fundamentais da Matemática, 1958.

"O Teorema de Pitágoras é, de fato, uma proposição de importância crucial na Matemática e merece todo o destaque que a ele se possa dar."

Elon Lages Lima
Meu professor de Matemática e outras histórias, SBM.

Resumo

Neste trabalho procuramos refletir sobre um grupo de oito aulas aplicadas no oitavo ano do Ensino Fundamental. Nestas aulas, tratamos do Teorema de Pitágoras, buscando justificar este resultado de modo adequado ao aluno do oitavo ano do Ensino Fundamental. Foi de nosso interesse buscar justificativas com um teor histórico, de modo a resgatar, na medida do possível, uma parte da história do Teorema de Pitágoras. Tomamos o cuidado de buscar uma justificativa matemática para o cada procedimento pedagógico adotado ao desenvolver as atividades. Durante todo o texto fomos pincelando várias sugestões para melhorar o produto final, se bem que o mantivemos quase que totalmente no Apêndice 1. Também entremeamos críticas ao nosso trabalho durante todo o texto, buscando tanto um crescimento pessoal quanto ofertando a oportunidade de uma melhor adequação do produto final a quem este for de interesse. Ao final sugerimos algumas aplicações atuais do Teorema de Pitágoras. Terminamos o trabalho em sala de aula envolvendo a classe com o jogo de dominó, adaptado ao conteúdo estudado, buscando deixar uma melhor impressão final nos alunos. Descrevemos a construção deste objeto pedagógico, a matemática trabalhada durante tal construção e por último sua aplicação com em aula. Confeccionamos quatro apêndices. No primeiro apresentamos o produto final. No segundo buscamos exemplificar os trabalhos dos alunos. No terceiro e quarto trabalhamos a construção de triângulos pitagóricos.

Palavras-chave: Sequência didática. Teorema de Pitágoras. Folha de atividade.

Abstract

In this paper we reflect on a group of eight lessons applied in the eighth year of elementary school. In these classes, we treat the Pythagorean Theorem, seeking to justify this outcome appropriate to the student's eighth grade elementary school mode. We were interested in seeking justifications with historical content, to rescue, to the extent possible, a part of the history of the Pythagorean Theorem. We take care to seek a mathematical justification for each procedure adopted to develop pedagogical activities. Throughout the text brushing been several suggestions for improving the finished product, though it kept almost entirely in Appendix 1. Also critical to our work interweave throughout the text, seeking both personal growth as offering the opportunity for a better match of the final product to whom this is of interest. At the end we suggest some current applications of the Pythagorean Theorem. Finished the job in the classroom involving the class with the game of dominoes, adapted to the content studied, trying to leave a better final impression on the students. We describe the construction of pedagogical object, the math worked during such construction and finally its application in the classroom. We make four appendices. In the first present the final product. In the second we seek to exemplify the student's work. In the third and fourth work building Pythagorean triangles.

Key-words: Didactic sequence. Pythagorean Theorem. Activity sheet.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de símbolos

$\triangle$	Representa a palavra “triângulo” e foi usado só para simplificar a escrita.
$\square$	Representa a palavra “quadrado” e foi usado só para simplificar a escrita.

Sumário

1 Apresentação

Uma primeira pergunta que se coloca é: “o que teria motivado o desenvolvimento desse trabalho?” Uma segunda pergunta, também pertinente: “por que escolher esse tema entre tantos outros possíveis?” As respostas para estas perguntas, no nosso caso, não são outras que não essas duas. Para a primeira, a singular oportunidade de apresentar um Trabalho de Conclusão de Curso ao final do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, trabalho esse também requerido pela Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, instituição associada ao PROFMAT. Tal oportunidade é rara no decorrer da carreira do professor de Ensino Fundamental e Médio, e permite um momento de reflexão sobre a sua prática pedagógica empreendida em sala de aula, resultado tanto em crescimento pessoal quanto profissional, além de benefícios diretos aos alunos, que recebem direta ou indiretamente o resultando de todo o trabalho desenvolvido. A resposta para a segunda pergunta reside em que esse conteúdo é estudado no caderno do aluno, quarto volume, terceira situação de aprendizagem, do oitavo ano[1] do Ensino Fundamental, entre as páginas de número vinte e seis e quarenta e quatro. Deste modo, apresenta-se a oportunidade de unirmos os dois trabalhos mencionados nas respostas acima.

Durante a confecção e aplicação da sequência didática que disponibilizamos no Apêndice 1, tivemos como foco o aluno em situação de aprendizagem, buscando dar-lhe suporte para apropriar-se dos resultados de forma autônoma.

Desenvolvemos o trabalho com os alunos em um total de oito atividade que se desenrolaram em trinta e duas aulas de cinquenta minutos. O tempo e as atividades foram programados para um grupo de jovens e devem sofre adaptações quando for do interesse de alguém utiliza o produto final aqui obtido. Contudo, o leitor deve ter em mente que não foi nossa intenção apresentar um modelo a ser reproduzido em todo e qualquer ambiente de ensino. Buscamos simplesmente desenvolver o Teorema de Pitágoras com um grupo de alunos pelo qual temos muito afeto e rogamos sinceramente a Deus que tenhamos alcançado o nosso objetivo.

Durante o texto, cada aula foi relatada e tivemos o cuidado de justificar nossa atitudes pedagógica do ponto de vista matemático, perseguindo um referencial teórico que acreditamos sólido por vias históricas e lógicas. De modo comparativo, colocamo-nos no ambiente educacional como um pedreiro em uma obra, que cuidadosamente posiciona um tijolo após o outro, tomando as precauções para que todo o conjunto esteja alinhado.

[1] A lei número 9.394, de 20 de dezembro de 1996,conhecida com Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, em seu artigo 32, estabelece o período de 9 anos para o Ensino Fundamental. A transição para o ciclo de 9 anos se faz gradualmente e atualmente, no ano de 2014, se acha em implantação final nas escolas públicas do Estado de São Paulo. Geralmente iremos nos referir às turmas como “oitavo ano”, mas caso haja necessidade, tais turmas serão chamadas por “sétima série”. Por fim, registre-se que o “oitavo ano” é o equivalente à “sétima série”. Para mais detalhes sugerimos os textos oficiais: *Ensino Fundamental de nove anos - orientações gerais*, disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ensfund/noveanorienger.pdf e a lei 9.394, publicada em 20 de dezembro de 1996 e disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ensfund/noveanorienger.pdf, possuindo uma versão para impressão em http://bd.camara.gov.br/bd/bitstream/handle/bdcamara/2762/ldb_5ed.pdf.

Intuitivamente o pedreiro busca na ação da força da gravidade o equilíbrio de seu prumo de modo a alinhar e aperfeiçoar seu trabalho, tornando-o harmonioso. Nos buscamos na Matemática.

Na Atividade A.1 trabalhamos de forma prática para concluir que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma da área dos quadrados construídos sobre os catetos.

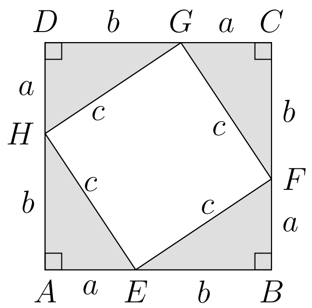
Na Atividade A.2 o aluno é levado a apropriar-se da Figura 1, bem como de suas propriedades.

Definiremos e aplicaremos as translações necessárias sobre os triângulos da Figura 1, transformando-a na Figura 2. Logo após, auxiliados pelas figuras anteriores, bem como uma observação atenta aliada ao procedimento adotado, levaremos o aluno a concluir que a área do quadrado construído com lados iguais a c é igual a soma da área do quadrado com lados iguais ao cateto que mede a mais a área do quadrado com lados iguais ao cateto que mede b, ou seja $c^2 = b^2 + a^2$, finalizando a Atividade A.3.

Na Atividade A.4 desenvolvemos o quadrado da soma, tanto de modo geométrico quanto de forma algébrica. Esse produto notável será necessário ao estudo da Atividade A.5.

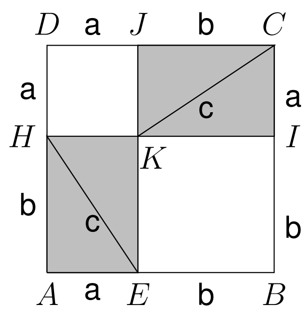
Usando a Figura 1, por meio de decomposição de figura e equivalência de área, o aluno é levado a justificar o Teorema de Pitágoras de outro modo, reforçando o resultado já conhecido e trabalhando outros conceitos, finalizando com a Atividade A.5 uma sequência didática que tem por objetivos conduzir o aluno a justificar o Teorema de Pitágoras.

Figura 1 – Figura inicial.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 2 – Figura Final



Fonte: Produzido pelo autor.

Finalizamos a Atividade A.5 e iniciamos uma sequência que visa aplicar o Teorema de Pitágoras. Primeiro, na Atividade A.6, calculamos a diagonal de um quadrado na conforme nos orienta Barbosa (1993), buscando generalizar o resultado para um quadrado qualquer. Posteriormente, na Atividade A.7, tentamos situar o Teorema de Pitágoras no nosso dia a dia como ferramenta para resolver problemas.

Terminamos o ciclo de aplicações com a Atividade A.8, propondo o desenvolvimento de um jogo de dominó, procurando marcar o aluno com a ajuda do que vem a ser uma atividade lúdica agradável.

Durante todo o texto procuramos tecer críticas ao nosso trabalho, acima de tudo refletindo sobre nossa prática pedagógica durante o tempo que passamos desenvolvendo essa atividades em sala de aula. De modo diferenciado buscamos sair da posição tradicional em que o professor apenas transmite o conhecimento ao aluno. Tentamos uma parceria, cada qual com seu papel para que ao final o aluno passasse a deter o saber estudado de modo funcional. Encerramos elaborando uma breve conclusão sobre os frutos que acreditamos ter conquistado por meio da produção desse trabalho.

Por fim mencionamos que desenvolvemos todo o texto utilizando LaTeX, algo que muito nos agradou, e nos servimos largamente dos modelos abnTeX2 (2013) de Lauro César Araujo. Manifestamos aqui o nosso agradecimento a comunidade LaTeX por todo o serviço prestado. Também buscamos orientações normativas na página da Biblioteca Comunitária-UFSCar visando uma melhor apresentação e confecção do texto final. Somos gratos por estas normas estarem disponibilizadas online.[2]

[2] Documentos disponíveis:
<http://www.bco.ufscar.br/servicos/normalizacao-de-trabalho>.
<http://www.bco.ufscar.br/servicos/arquivos/site_bco_guia_t_academicos_2013>.
<http://www.bco.ufscar.br/servicos/arquivos/guia-de-padronzacao-de-citacoes-2012>.
<http://www.bco.ufscar.br/servicos/arquivos/guia-para-elaboracao-de-referencias-2012>.

2 Situando o ambiente - Pitágoras, de Euclides até nosso dias

2.1 Introdução

Neste capítulo buscamos situar o ambiente no qual se desenvolveu nosso trabalho. Num primeiro momento comentamos brevemente sobre o programa de Mestrado Profissional em Matemática e Rede Nacional - PROFMAT, buscando situá-lo em um patamar mais elevado. Trabalhamos as variáveis que se referem ao ambiente escola, referenciando a posição dos alunos e do professor perante o *conhecimento* que os alunos devem alcançar. Buscamos reler parte acessível da história de Pitágoras, bem como da evolução (ou involução) histórica do enunciado do Teorema de Pitágoras e as consequências para o aluno em seu processo de aprendizagem. Terminamos esse capítulo apresentando a demonstração do Teorema de Pitágoras e de sua recíproca, para tal escolhemos a demostração mais comum, tendo que se encontra na maior parte dos livros didáticos e paradidáticos.

2.1.1 Um pouco sobre o PROFMAT

O programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT, é um curso de pós-graduação stricto sensu semi presencial com duração de dois anos, desenvolvido em quatro semestre regulares, mais dois períodos de verão. Oitenta por cento de suas vagas, destina-se aos que atuam como professores do ensino básico em escola pública, o restante procura atender a uma demanda social, atuante como professor do ensino básico, contudo no setor privado. Segundo o artigo primeiro do Regimento do PROFMAT[1], o curso visa a “qualificação certificada para o *exercício da profissão de professor*[2] de Matemática”, e relembramos, no ensino básico a que se destina.

Na *Avaliação suplementar externa do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*[3] destacamos o trecho

> recomendado pela CAPES em novembro de 2010, o programa está em consonância com a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica definida no Decreto n° 6.755, de 29 de janeiro de 2009 e atende às orientações do Plano Nacional de Pós-Graduação PNPG 2011-2020.

o qual, ao menos em parte, situa legalmente o PROFMAT.

O documento acima citado também coloca os seguintes objetivos:

---

[1] Disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/regimento.[acessado em 4 de janeiro de 2014]

[2] O grifo é meu.

[3] Disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/documentos/relatorios[acessado em 4 de janeiro de 2014.]

> 1. Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis;
> 2.Qualificar professores de Matemática que atuam na Educação Básica em nível de pós-graduação stricto sensu, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo, oferecendo um curso de formação profissional que contemple as necessidades advindas do trabalho cotidiano no espaço da escola;
> 3. Incentivar uma postura crítica acerca das aulas de Matemática nos níveis do Ensino Fundamental e Médio, que enfatize o papel central do conhecimento de matemática frente às exigências da sociedade moderna;
> 4. Buscar a valorização profissional do professor por meio do aprimoramento de sua formação.

No que se refere aos objetivos acima colocados, devemos mencionar, que dentro de nossa visão simples, o primeiro se cumpre, pois, o professor universitário da instituição associada tem a oportunidade de, com base em uma literatura recomendada, que engloba tanto os livros clássicos quanto os atuais, estar em constante contato com um conteúdo aprofundado e historicamente embasados pela Matemática, oportunidade essa que também é dada ao aluno do PROFMAT. Já, no segundo objetivo, encontramos o excerto "oferecendo um curso de formação profissional que contemple as necessidades advindas do *trabalho cotidiano no espaço da escola*[4]" que nos abre a oportunidade de relembrar a união que ora se processa neste trabalho e de início mencionada, ou seja, foi oportuno realizar o trabalho de conclusão de curso com um tema que deve ser articulado em sala de aula segundo o texto *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação*. Por si só o desenvolvimento deste trabalho já traz benefícios a todos envolvidos.

Por fim, já que nos desviamos para um breve relato do que é o PROFMAT, o que é necessário, pois situa este trabalho em um ambiente educacional mais amplo e complexo, também é justo lembrar que o programa oferece, por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, bolsa de estudo aos seus alunos que atuam como professores na escola pública.

2.1.2 Um pouco sobre a escola onde se articularam as aulas.

A tradicional Escola Estadual Dr. Álvaro Guião abriga o Ensino Médio no período matutino e noturno; Ensino Fundamental no período vespertino. Consta com aproximadamente 1500 alunos. Situa-se na Avenida São Carlos, número 2190, na cidade de São Carlos, Estado de São Paulo, tendo a Prof.ª Regina Célia Garcia Ferreira na figura de diretora. A escola possui uma belíssima arquitetura, apropriada para os padrões de requinte da época, sendo oficialmente fundada em fevereiro de 1911. Projetada para ser uma instituição de ensino, consta com salas amplas, ventiladas e bem iluminadas, com exceção da parte inferior, que ao final da política cafeeira, servia de porão; as salas também possuem uma acústica apropriada para o desenvolvimento de aulas teóricas no estilo tradicional da época e que persiste até hoje em muitas escolas. Atualmente, na parte inferior também funcionam salas de aula, pois a crescente demanda assim exige. O prédio que abriga a escola é tombado pelo Conselho de Defesa do Patrimônio Histórico, Arqueológico, Artístico e Turístico - CONDEPHAAT. Sua preservação se deve principalmente da relação dos alunos com a escola, pois são em maior número, sendo que a maioria tem na escola

[4] Grifos meus.

uma referência carinhosa; logicamente, a consciência da preservação é plantada e regada dia a dia pelos professores, os quais atuam diretamente com os alunos. Ficando por último nesta lista, mas sendo a primeira nas linhas de comando, a direção apropria-se seriamente do projeto de conservação do prédio, cobrando que todos atuem neste sentido, aliando a conservação do ambiente ao projeto pedagógico da escola.

Por ser uma escola central, a maioria de sua clientela vem de outros bairros, gerando uma massa heterogênea que é sua luz. Assim como são variados os bairros de origem, também é seriado o padrão econômico das famílias das quais provém os alunos, havendo alunos de classes econômicas simples, bem como de classes econômicas mais elevadas um pouco, não chegando a níveis muito altos. Há um completo domínio das novas tecnologias por parte dos alunos, que tem facilidade de acesso aos equipamentos mais atuais. Em contraposição, a maioria do corpo docente não tem domínio sobre tais equipamentos, apesar do interesse crescente em aprender e utilizá-los em sala de aula. Tudo isso, e muito mais, caracteriza uma diversidade em sala de aula, havendo desde alunos extremamente cooperativos e participativos, até os que se relegam ao escapismo do sono durante a aula. Contudo, uma triste linha liga a maioria dos alunos, uma linha que se caracteriza pela ausência de *hábito de estudos*, um elemento pouco comum em nossa cultura.

2.1.3 As classes: oitavo ano C e oitavo ano D - quebrando o contrato didático

Como já dissemos no final da seção anterior, as classes são compostas por uma diversidade sócio econômica de alunos, o que torna o trabalho mais interessante, pois o desafio é maior. Também já nos referimos ao inexistente hábito de estudo, e não precisamos nos desviar escrevendo mais sobre isso. Tocar em tais assunto novamente, é correr o risco de nos tornarmos repetitivos. Assim, passamos a uma tentativa de situar as classes em outros aspectos, buscando revelar atributos que lhe são próprios.

Em números, as classes são formadas por quarenta alunos aproximadamente e constam com seis aulas semanais de matemática. Por solicitação do professor, as aulas foram distribuídas em três dias, devendo necessariamente serem aulas duplas. Entre os alunos podemos encontrar tanto aqueles que possuem dificuldade no mais básico da matemática, que se resume em trabalhar com as quatro operações de modo algorítmico, quanto aqueles que possuem um excelente rendimento, havendo, entre estes últimos, os que chegaram a conquistar medalhas de ouro em avaliação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Esse desnível gera uma situação que leva o docente a buscar um meio termo para trabalhar, contudo, é fácil errar a dose e tornar corriqueiro o que é fácil ou o contrário, complicando o que não se deve. Assim, atender a toda a clientela é uma tarefa gigantesca que proporciona crescimento ao professor, haja visto o esforço intelectual empregado em pesquisa quando se prepara uma ou outra aula.

Em razão dos temas referidos nos dois parágrafos anteriores, gera-se um expectativa em torno do trabalho, tanto do trabalho do professor, quanto do que devem produzir os alunos. Essa expectativa reforça-se com o transcorrer das aulas. Algumas expectativas vem a tona, tornando-se evidentes, outras permanecem ocultas.

> A relação professor-aluno está subordinada a muitas regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá a sua transgressão. O conjunto de cláusulas que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber constitui o chamado *contrato didático.* (MACHADO e outros., 2002, p.49)

Entre as cláusulas do contrato didático está a usual visão da figura do professor, que no ensino tradicional ocupa a posição central. Neste trabalho procuramos quebrar essa cláusula contratual, relegando ao aluno o papel de buscar o conhecimento por meio da atividade e ao professor o papel de auxiliar diante das necessidades, sendo que as atividades, desenvolvidas durante as aulas, tem como referência leituras realizadas pelo professor, o qual procurou dar um corpo lógico às mesmas e as materializou nas folhas constantes do Apêndice 1; esperamos que o aluno se descida por fazer as atividades, trabalhando seu conteúdo atentamente, interagindo com seu colega de grupo, ou com outros grupos se for o caso, podendo assumir o papel de orador da sala, caso essa deseje, e deste modo dividindo suas descobertas. Ao professor coube organizar e preparar as atividades, o ambiente e todas as condições primárias e secundárias que se fazem necessárias ao aprendizado do aluno. Por meio de uma leitura inicial, realizada no início das atividades, procuramos sintonizar sua presença na sala, que se coloca, o tempo todo que persiste a atividade, à disposição dos que desejarem sua intervenção. Devemos mencionar também que a quebra da cláusula contratual, citada no início do parágrafo, foi previamente antecipada por meio de chamadas verbais sobre o que se desenvolveria e como seriam feitos os trabalhos. Preparamos antes o terreno para que não houvesse problemas com outros componentes do âmbito escolar, bem como em relação a alguns elementos externos, como por exemplo, familiares.

2.2 O Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental

2.2.1 Revisitando brevemente a história de Pitágoras

Pitágoras nasceu em Samos[5] por volta de 570 a.C. Seu nome está ligado principalmente à filosofia, à matemática, à música e à religião. Segundo Marcondes (2001)

> A leitura, interpretação e discussão da filosofia dos pré socráticos envolve, para nós, uma grande dificuldade. Suas obras se perderam n Antiguidade, e só as conhecemos por meios indiretos. Em alguns casos é possível até que não tenha havido obra escrita, já que a tradição filosófica grega em seus primórdios valorizava mais a linguagem falada do que a escrita. A filosofia eva vista essencialmente como uma discussão, debate, e não como texto escrito. (MARCONDES, 2001, p. 30)

> Na verdade, sabemos tão pouca coisa *com certeza* sobre a vida de Pitágoras que é praticamente impossível distinguir suas ideias das de seus discípulos. Devido à inexistência de obras do próprio Pitágoras, só podemos nos basear nas obras dos pitagóricos e críticos posteriores. (STRATHERN, 1998, p.31)

[5] Samos é uma ilha no leste do mar Egeu. Este é um mar interior da bacia do Mediterrâneo, situado entre a Europa e a Ásia. Estende-se da Grécia a oeste, até o Turquia, a leste, na costa da Turquia.

Segundo Strathern (1998, p. 11–59), na busca pelo conhecimento, Pitágoras viajou pelo Egito, Babilônia, mas não há certeza quanto a ter atingido a Índia ou a Pérsia. Seu regresso a Samos se deu durante o governo do tirano Polícrates, provavelmente exercendo papel político contrário ao governante local, haja visto que foi exilado, chegando a Magna Grécia por volta de 529 a.C., estabelecendo sua escola em Crotona.

Para os gregos

> a teoria da música tinha o mesmo *status* que as ciências naturais e a matemática. (JANOS, 2009, p.5)

e para Pitágoras não era diferente. Alguns autores chegam a conjecturar que a crença pitagórica de que **tudo é número** deve-se em grande parte a harmonia musical constatada pelos mesmo. De fato,

> Pitágoras descobriu uma relação quantitativa entre o comprimento de uma corda vibrante e o nível de som que ela produz: *quanto menor a corda, maior o nível.*[6]... [e] que os intervalos entre as notas musicais correspondem a simples relações entre os comprimentos das cordas. Por exemplo, uma oitava corresponde à relação 2:1, uma quinta à relação 3:2, uma quarta à relação 4:3, etc. (JANOS, 2009, p.5)

Segundo Marcondes (2001)

> uma das principais contribuições dos pitagóricos à filosofia e ao desenvolvimento da ciência encontra-se na doutrina segundo a qual o **número** é o elemento básico explicativo da realidade, podendo-se constatar uma *proporção*[7] em todo o cosmo (MARCONDES, 2001, p.33)

deste modo, fica evidente que Pitágoras e os pitagóricos conheciam as frações. Além disso,

> os pitagóricos tiveram grande importância ... no desenvolvimento da matemática grega, sobretudo na geometria. (MARCONDES, 2001, p.33)

Mas qual era a visão de número de Pitágoras? Se **tudo é numero** e o que nossos sentidos captam é o mundo físico, então o número deveria possuir uma dimensão física, mensurável. Com efeito,

> diferentemente dos modernos, com o termo número ele [Pitágoras] não indicava um ente abstrato, puro conteúdo da mente, mas um elemento essencial da realidade. (NICOLA, 2005, p.22)

Da afirmativa **tudo é numero** segue que a música também é composta por números. Mas a música é harmoniosa e, na cultura grega, divina. Assim sendo, os números determinariam uma harmonia no *cosmo*. Palavra que por sua vez, Pitágoras

> também inventou ...,[e] que aplicava ao mundo. (Em grego, *kosmo* significa 'ordem' e Pitágoras usou o termo para designar o mundo por causa de sua 'perfeita harmonia e ordenação.') (STRATHERN, 1998, p.7)

[6] Itálico meu.
[7] Itálico meu.

Harmonia que se quebra quando, provavelmente um dos discípulos de Pitágoras, percebe que o lado e a diagonal de um mesmo quadrado não são comensuráveis. A equação $x^2 = 2$, para x um número positivo como aceito pelos pitagóricos e para a época, se caracteriza, segundo Bento Jesus de Caraça, como um "monstro aritmético" para os padrões vigentes.

A genialidade de Pitágoras era de uma magnitude ímpar e elevada. Mesmo a crise que se instaurou no seio de sua escola não foi suficiente para tira-lhe o mérito de ter seu nome associado à relação entre os lados de um triângulo retângulo, relação essa conhecida como Teorema de Pitágoras.

2.2.2 O enunciado do Teorema de Pitágoras - de Euclides ao livros atuais

A natureza esta em contínua transformação, buscando um único caminho que se resume em evoluir sempre.

A Matemática é fruto do pensamento humano, de sua vivência com a natureza. O homem, inserido na natureza, esta sujeito as suas leis de mudança e evolução. Esse atributo passa para sua obra, de modo que ela esta sempre se modificando. Um quadro pintado na idade média, mesmo que sintonizado no tempo e no espaço, se transforma quando o leitor do tempo presente se coloca a sua frente. Seus olhos cobiçam outros interesses, seus problemas tem outras causas, se bem que o egoísmo pode ser a semente comum de todos os problemas das mais variadas épocas. Fisicamente a obra muda, envelhecendo e passando a apresentar sinais de desgaste.

A origem do que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras se perdeu nas asas do tempo. Quem foi o primeiro a perceber a intrigante relação entre os lados de um triângulo retângulo jaz no esquecimento. Mas pequenas pistas ainda nos restam. Por exemplo, no livro *História da Matemática*, de Carl Benjamin Boyer, podemos encontrar referência a tabela Plimpton 322, que, segundo a tabela cronológica organizada no livro *Introdução à história da matemática*, de Eves, data de aproximadamente 1750 a.C.. Do texto extraímos o trecho:

> Os que construíram a tabela [Plimpton 322][8] evidentemente começaram com dois inteiros sexagesimais regulares,..., então formaram uma tripla de números... Os inteiros assim obtidos formam um triângulo pitagórico, em que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois. Portanto, esses números [constantes da tabela Plimpton 322][9] podem ser usados como dimensões [de][10] um triângulo retângulo. (BOYER, 1994, p.26)

A tabela Plimpton não é o único documento antigo que faz menção ao Teorema de Pitágoras. Em outro documento antigo, o *Chou Pei Suang Ching*, também encontramos referência ao Teorema de Pitágoras. Cronologicamente o *Chou Pei Suang Ching* é mais controverso do que o anterior, havendo menção de que este data de 1105 a.C., segundo tabela cronológica na página 730 de Eves (2004). Por outro lado, Boyer (1994, p. 143) afirma existirem estudiosos que situam o *Chou Pei Suang Ching* nos primeiros séculos de nossa era, e termina achando "razoável" uma data de 300 a.C., justificando-se pela data da publicação de outra obra, o *Chui-Chang Suan-Shu*, composto por volta de 250 a.C..

[8] O colchetes é meu.
[9] O colchete é meu.
[10] O colchete é meu

> Esse livro [*Chui-Chang Suan-Shu*][11] contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades dos triângulos retângulos. (BOYER, 1994, p.143)

Já no *Chou Pei*, segundo Eves (2004), "há, aparentemente, indicações ... do Teorema de Pitágoras, um teorema que os chineses tratavam *algebricamente*[12]", tratamento muito aplicado nos livros didáticos atuais.

Em nenhuma das obras citadas, *História da Matemática* por Boyer e *Introdução à história da matemática* por Eves, há menção de que, nos documentos antigos, houvesse um enunciado ao menos parcial, do que hoje chamamos de Teorema de Pitágoras.

Por volta de 300 a.C., Euclides compila um conjunto de 13 livros, dando corpo aos notáveis *Elementos*. Em seu escopo, mais precisamente no livro I, encontramos a proposição 47, que na tradução do professor Irineu Bicudo tem o seguinte enunciado:

> 47
>
> Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto. (EUCLIDES, 2009, p. 133)

Numa época bem mais recente encontramos o livro *Lições de geometria plana*, de Benedito Castrucci, tendo sua sétima edição publicada em 1977 pela Livraria Nobel. Neste livro há o seguinte enunciado:

> <u>Teorema 84</u> (Teorema de Pitágoras) O quadrado que têm por lado a hipotenusa de um triângulo retângulo é equivalente à soma dos quadrados que têm por lados os catetos. (CASTRUCCI, 1977, p. 62)

Próximo do material apresentado nestas atividades encontramos, no texto *Teorema de Pitágoras e áreas*[13], de Wagner (2009), um enunciado que apara as arestas deixadas pelos anteriores:

> Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. (WAGNER, 2009, p. 4)

Todos esses autores apresentam um visão geométrica dos elementos envolvidos. Em detrimento de uma simplificação do enunciado, bem como numa tentativa didática de facilitar o acesso do aluno ao teorema, essa visão é abandonada por alguns outros autores, que passam a dar um apelo algébrico ao enunciado. Assim, podemos encontrar tanto em livro atuais, quanto em livros mais antigos, o seguinte enunciado:

> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados da medidas dos catetos. (BIANCHINI, 2011, p. 143)

---

[11] O colchetes é meu

[12] O grifo é meu.

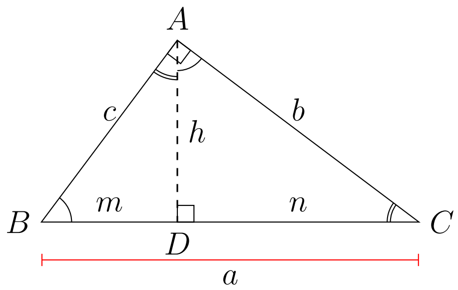
[13] Este material está disponível em http://www.obmep.org.br/prog_ic_2010/apostila2010.html

Este enunciado, ou algo próximo a ele, consta dos livros *Matemática:Bianchini*, por Bianchini (2011, p. 143); *Matemática: Imenes* & *Lellis*, por Imenes e Lellis (2012, p. 240) e *Projeto Teláris: Matemática*, por Dante (2012, p. 180).

De qualquer modo, podemos sintetizar o Teorema de Pitágoras numa implicação, conforme dada abaixo:

Proposição 2.2.1. *Se num triângulo retângulo a hipotenusa mede a e os catetos medem b e c, então $a^2 = b^2 + c^2$.*

Figura 3 – Demonstração por semelhança.



Fonte: Produzido pelo autor.

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC retângulo em $\widehat{A}$. Neste triângulo iremos traçar a altura AD, relativa à hipotenusa BC, de modo que o triângulo inicial, ABC, fique dividido em dois outros triângulos retângulos, DBA e DAC. Identificaremos os lados dos triângulos ABC, DBA e DAC conforme nos mostra a Figura 3. Assim temos os seguintes elementos:

$BC = a$: hipotenusa do triângulo ABC. Note que

$$BC = BD + DC \Rightarrow a = m + n; \tag{2.1}$$

$AB = c$: cateto do triângulo ABC; hipotenusa do triângulo DBA;

$AC = c$: cateto do triângulo ABC; hipotenusa do triângulo DAC;

$BD = m$: projeção ortogonal do cateto AB sobre a hipotenusa BC;

$CD = n$: projeção ortogonal do cateto AC sobre a hipotenusa BC;

$AD = h$: altura relativa à hipotenusa BC.

Com relação aos ângulos temos $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$. O ângulo $\widehat{B}$ é comum aos triângulos ABC e DBA, que são triângulos retângulos, conforme já mencionamos. Logo, $\measuredangle BAD = \widehat{C}$. Do mesmo modo, o ângulo $\widehat{C}$ é comum aos triângulos ABC e DAC, que também são triângulos retângulos. Logo, o ângulo $\measuredangle DAC = \widehat{B}$. Deste modo, os triângulos ABC, DBA e DAC têm os três ângulos ordenadamente congruentes. Bastavam dois ângulos ordenadamente congruentes para garantirmos que os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes.

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \quad (2.2)$$
$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \quad (2.3)$$
$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \quad (2.4)$$

Podemos concluir, pelo exposto acima, que a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo divide este triângulo em dois triângulos retângulos semelhantes ao primeiro.

Com base nas semelhanças obtidas, podemos obter algumas relações que abaixo escrevemos:

- De (2.2) obtemos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (2.5)$$
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \quad (2.6)$$
$$\frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow ch = bm \quad (2.7)$$

- De (2.3) obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \quad (2.8)$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (2.9)$$
$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow bh = cn \quad (2.10)$$

- De (2.4) obtemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow bh = cn \quad (2.11)$$
$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm \quad (2.12)$$
$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad (2.13)$$

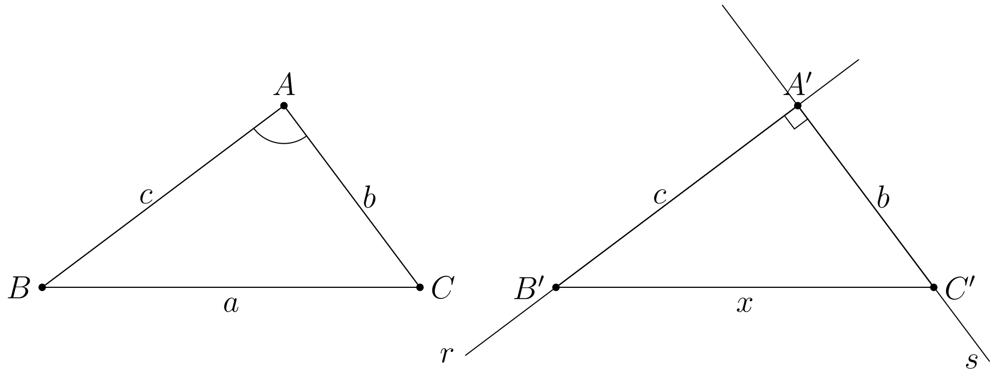
Somando membro a membro as equação (2.6) e (2.8), obtemos $b^2 + c^2 = am + an$. Como $a \neq 0$, podemos colocar a em evidência no segundo membro. Logo, $b^2 + c^2 = a\,(m + n)$, onde substituiremos $m + n$ por a conforme nos permite a equação (2.1). Deste modo podemos escrever $b^2 + c^2 = a.a = a^2$.

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$ conforme queríamos obter. □

A demonstração acima é a que mais se encontra nos livros didáticos atualmente e nos conduz, entre outras coisas, as “relações métricas” no triângulo retângulo. Assim as relações obtida na demonstração acima, excluindo-se as repetidas, podem ser agrupadas conforme o sentido. Por exemplo, podemos agrupar as equações(2.8) e (2.6),

$$b^2 = an \ (2.8); \quad c^2 = am \ (2.6)$$

Figura 4 – O triângulo $A'B'C'$ é retângulo por construção.



Fonte: Produzido pelo autor.

que nos diz: "*cada cateto é a média geométrica entre sua projeção sobre a hipotenusa e a própria hipotenusa.*" Também tem o mesmo sentido as equações (2.11), repetida em (2.10), e (2.12), repetida em (2.7), que seguem abaixo:

$$bh = cn \text{ (2.11)}; \quad ch = bm \text{ (2.12)}$$

ambas nos informando que: "*o produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro cateto sobre a hipotenusa.*" Já a equação $h^2 = mn$ só apareceu em (2.13), e nos diz que: "*a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa*. Por fim, a equação $bc = ah$ é encontrada em (2.5) e (2.9) e nos informa que: "*o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.*

2.2.3 A recíproca

Historicamente, a recíproca do Teorema de Pitágoras tem ligação com os agrimensores egípcios, também nomeados de "esticadores de cordas" em algumas obras. O fato é que para demarcar as terras inundadas pelas águas do rio Nilo durante o período de cheia, os agrimensores, segundo Barbosa (1993, p.21), "usavam uma corda de um certo comprimento com 13 nós e 12 intervalos iguais." Juntamos o primeiro e décimo terceiro nós com auxílio de uma única estaca, e fixamos uma estaca no quarto e oitavo nós cada um, tudo isso mantendo a corda bem esticada. Deste modo, obtemos o triângulo de lados 3, 4 e 5, o qual os egípcios sabiam possuir um ângulo reto formado pelos lados de medida 3 e 4, ou seja, oposto ao lado de medida 5.

Proposição 2.2.2. *Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.*

Demonstração. Considere um triângulo de vértices A, B e C. Denotaremos a medida do lado AB por c, a medida do lado BC por a e a medida do lado CA por b. Sem perda de generalidade, consideraremos

$$a^2 = b^2 + c^2, \tag{2.14}$$

conforme solicita a hipótese.

Seja A' uma ponto qualquer do plano definido pelo pontos A, B e C. Por A' passa um única reta, r, paralela à reta suporte do lado AB. Com auxílio de um compasso, transferimos o segmento AB, de medida c, para a reta r, determinando um ponto B', tal que $AB \equiv A'B'$, por construção. Com abuso de linguagem, registraremos:

$$A'B' = c \tag{2.15}$$

Por A' passa uma única reta, que denotaremos por s, perpendicular à reta r. Tomando o compasso novamente, iremos transferir o segmento BC para a reta s. Para isso basta abrir o compasso da mesma medida de BC, que sabemos ser b; fixamos a ponta seca do compasso em A' e marcamos C'. Por construção $AC \equiv A'C'$. Cometendo o mesmo abuso que antes, escreveremos:

$$A'C' = b \tag{2.16}$$

Ligando os pontos A', B' e C', obtemos o triângulo $A'B'C'$. Notemos que, por construção, o ângulo $\measuredangle\left(B'A'C'\right)$ é reto. Logo, o triângulo $A'B'C'$ é um triângulo retângulo e denotaremos a medida da hipotenusa $B'C'$ por x, de modo que temos

$$B'C' = x \tag{2.17}$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(B'C'\right)^2 = \left(A'B'\right)^2 + \left(A'C'\right)^2 \tag{2.18}$$

Substituindo (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.18), obtemos a seguinte equação:

$$x^2 = b^2 + c^2 \tag{2.19}$$

Comparando (2.14) com (2.19), chegamos em

$$x^2 = a^2 \tag{2.20}$$

Subtraindo a^2 de ambos os membros de (2.20), encontramos:

$$x^2 - a^2 = 0 \tag{2.21}$$

Mas

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \tag{2.22}$$

Substituindo (2.22) em (2.21), ficamos com:

$$(x + a)(x - a) = 0 \tag{2.23}$$

Sabemos que um produto é nulo quando ao menos um de seus fatores for nulo. Logo:

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a \tag{2.24}$$

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a \tag{2.25}$$

Como x representa a medida do lado $B'C'$, a solução dada em (2.25) não convém, pois a é positivo e, por conseguinte, $-a$ é negativo.

Concluímos, deste modo, que valor de x é a, ou seja o lado $B'C'$, hipotenusa do triângulo retângulo $A'B'C'$, tem mesma a medida que o lado BC do triângulo ABC. Assim, temos dois triângulos, ABC e $A'B'C'$, que tem os três lados congruentes. Pelo caso de congruência LLL, lado-lado-lado, os triângulos são congruentes. Portanto, o triângulo ABC possui um ângulo reto, o correspondente ao ângulo $\measuredangle(B'A'C')$, a saber, $\measuredangle(BAC)$ $\square$

Nos demais capítulos trataremos das aulas que se desenvolveram e da atividades aplicadas.

3 A primeira aula

3.1 Introdução

O estudo que se segue tem por objetivo analisar o produto apresentado ao aluno para que o mesmo desenvolvesse seus trabalhos. Para realizarmos esse propósito, faremos uso das resposta fornecidas pelos alunos. De fato, as devolutivas dadas pelos mesmos em cada atividade, revelam como e de que modo o aluno foi atingido. As críticas devem referir-se sempre ao produto tendo por intenção a sua análise. Esperamos com isso, estarmos cooperando com aqueles que no futuro possam tomar esse material como consulta, já que, se não for possível ser um modelo, que sirva ao menos de contra-exemplo, e deste modo já nos daremos por satisfeito.

3.2 Primeira aula

Apliquei a Atividade A.1 nas classes 8ºC e 8ºD no dia 06 de novembro de 2013 em aulas duplas consecutivas. Os alunos realizaram os trabalhos em duplas que foram formadas livremente. Todos os materiais necessários ao desenvolvimento desta e das demais atividades, foram fornecidos pelo professor. Veja na foto abaixo o ambiente de trabalho.

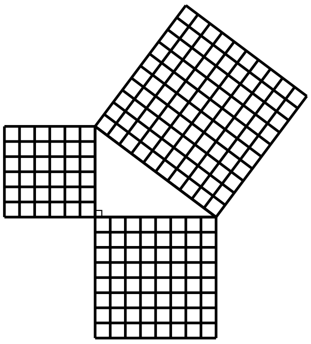
Figura 5 – Evidencia o ambiente de trabalho.

Fonte:Foto tirada pela coordenadora Vera do Ensino Fundamental.

3.3 Por que esta atividade foi proposta?

Em vários livros didáticos e paradidáticos esta atividade é mencionada, direta ou indiretamente, logo no início do livro ou do capítulo que trata sobre o Teorema de Pitágoras. A menção direta desta atividade se faz tanto na teoria quanto na forma de exercícios a serem desenvolvidos pelos alunos, enquanto a menção indireta se faz por meio da Figura 6, ou uma outra equivalente a esta.

Figura 6 – Quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo de hipotenusa 10, catetos 6 e 8. O quadriculado deixa claro a relação entre as áreas, dada por $6^2 + 8^2 = 10^2$

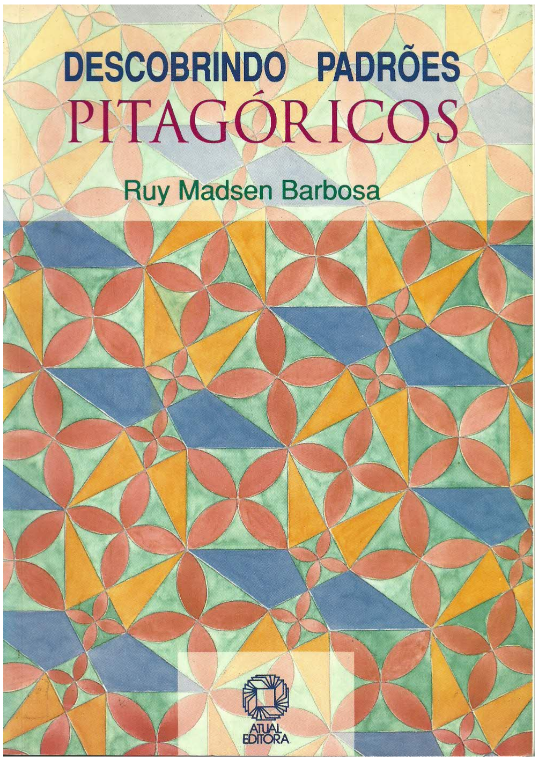


Fonte: Produzido pelo autor.

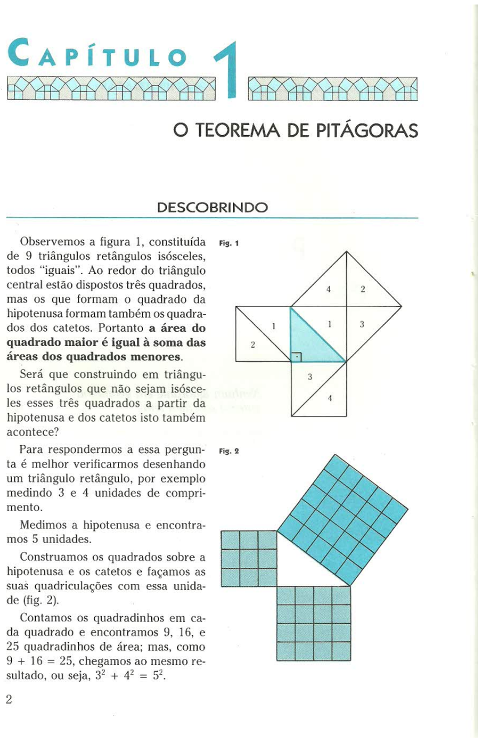
Por exemplo, no livro *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*, de Barbosa (1993, p. 2), encontramos menção indireta a essa atividade.

Figura 7 – *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*, de Barbosa (1993)

(a) Capa do livro



(b) Página mencionada



CAPÍTULO 1

O TEOREMA DE PITÁGORAS

DESCOBRINDO

Observemos a figura 1, constituída de 9 triângulos retângulos isósceles, todos "iguais". Ao redor do triângulo central estão dispostos três quadrados, mas os que formam o quadrado da hipotenusa formam também os quadrados dos catetos. Portanto **a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores**.

Será que construindo em triângulos retângulos que não sejam isósceles esses três quadrados a partir da hipotenusa e dos catetos isto também acontece?

Para respondermos a essa pergunta é melhor verificarmos desenhando um triângulo retângulo, por exemplo medindo 3 e 4 unidades de comprimento.

Medimos a hipotenusa e encontramos 5 unidades.

Construamos os quadrados sobre a hipotenusa e os catetos e façamos as suas quadriculações com essa unidade (fig. 2).

Contamos os quadradinhos em cada quadrado e encontramos 9, 16, e 25 quadradinhos de área; mas, como 9 + 16 = 25, chegamos ao mesmo resultado, ou seja, $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Fig. 1

1 1 2 2 3 3 4 4

Fig. 2

2

Fonte: Barbosa (1993, capa, p. 2).

No livro *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*, cuja capa é exibida na Figura 7, o autor inicia levantando a seguinte questão: dado um triângulo retângulo isósceles, o qual será adotado como unidade de medida de área, e construindo sobre a hipotenusa um quadrado de lado congruente à hipotenusa, e ao lado de cada cateto um quadrado de lado congruente aos mesmos catetos. Nestas condições, Ruy Madsen Barbosa leva o leitor a concluir que:

> a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores. (BARBOSA, 1993, p. 2)

Logo em seguida o autor pergunta sobre a validade da conclusão acima para triângulos retângulos que não sejam isósceles. Para responder a questão proposta o autor diz ao leitor de seu livro, que:

> *é melhor verificarmos desenhando*[1]um triângulo retângulo, por exemplo medindo 3 e 4 unidades de comprimento[2].
>
> Medimos[3] a hipotenusa [com auxílio de uma régua][4] e encontramos 5 unidades. (BARBOSA, 1993, p. 2)

Estando de posse do triângulo retângulo, pois conhecemos a medida de seus lados, o que é suficiente, bem como dos quadrados construídos sobre os lados do referido triângulo, passa-se a quadricular essas figuras e finaliza-se com a comparação entre as áreas, obtida por meio da igualdade $3^2 + 4^2 = 5^3$.

A intenção do autor é levar o leitor a refletir sobre a relação entre a área dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Posteriormente, Barbosa (1993) brinda o leitor com a prova do Teorema de Pitágoras, e inicia dizendo que

> até agora é apenas *plausível*[5] aceitarmos a proposição[6] como verdadeira (BARBOSA, 1993, p. 4)

e justifica:

> pois a verificação da validade em *casos particulares*[7] só a tornou credível. (BARBOSA, 1993, p. 4)

.

Barbosa ainda alerta que:

> mais casos particulares aumentariam sua credibilidade...; no entanto, *uma só verificação em contrário*[8]...bastaria para afirmarmos a não validade da proposição. (BARBOSA, 1993, p. 4)

Barbosa apresenta oito provas do Teorema de Pitágoras, as quais, em seu livro *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*, são intituladas:

[1] Grifo meu
[2] O quais sabemos ser os catetos.
[3] Observe que a hipotenusa esta sendo obtida.
[4] A expressão entre colchetes é minha.
[5] Grifo meu.
[6] “A área do quadrado maior é igual á soma das áreas dos quadrados menores.
[7] Grifo meu.
[8] Grifo meu.

1. “Uma prova experimental”;

2. “Prova tradicional”;

3. “Mais duas provas fáceis”:

    a) “De Bhaskara”[9];

    b) “De Garfield”[10];

4. “Prova de um ex-aluno”[11];

5. Por equicomposição e decomposição em polígonos:

    a) “Decomposição em 7 polígonos”;

    b) “Decomposição em 5 polígonos”:

        i. “De Ozanan”[12];

        ii. “De Périgal”[13]

A leitura de algumas destas páginas serviram de inspiração para a primeira A.1, segunda A.2, terceira A.3, quinta A.5 e sexta A.6 atividades.

Já Imenes (1992) no livro *Descobrindo o Teorema de Pitágoras*, após propor a construção de um quebra cabeça[14], isso feito da página 8 até 15, e concluir que **a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos**, propõe que para:

> compreender melhor essa afirmação, pegue seu desenho base[15], apague as linhas tracejadas e divida os três quadrados em quadradinhos de $1cm$ de lado. (IMENES, 1992, p. 15)

[9] Nota de Barbosa (1993, p. 7): Bhaskara(1114-1185), matemático hindu, ensinou no maior centro do país, em Ujjain, e seu mais célebre trabalho foi o manuscrito *Lilavati*... é conhecido principalmente pela resolução da equação do segundo grau. Não ofereceu para a sua figura qualquer explicação além de uma palavra de significado “Veja” ou “Contemple”, talvez sugerindo que no seu diagrama a disposição induzia uma bela prova do Teorema de Pitágoras.

[10] Nota de Barbosa (1993, p. 8): James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos (apenas por quatro meses) assassinado em 1881. A prova foi publicada em 1882, no *Mathematics Magazine*.

[11] O nome do ex-aluno consta em nota de rodapé, na página 8, do livro *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*, de Barbosa (1993).

[12] Nota de Barbosa (1993, p. 11): J. Ozanan nasceu em Bouligneux(1640) e morreu em Paris(1717).

[13] (01 de abril de 1801 - 6 de junho de 1898) era um corretor britânico e matemático amador, conhecido por sua prova baseada em dissecação do Teorema de Pitágoras e por sua crença não ortodoxa de que a Lua não gira. [Fonte:http://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Perigal]

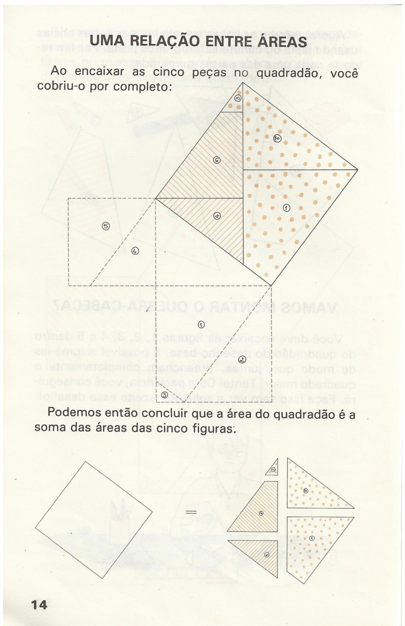
[14] Observe o desenho base e o quebra cabeça já resolvido na Figura 8b.

[15] Observe o desenho base e o quebra cabeça já resolvido na Figura 8b.

Figura 8 – *Descobrindo o Teorema de Pitágoras* de Imenes (1992).

(a) Capa do livro

(b) Um quebra cabeça–p. 14



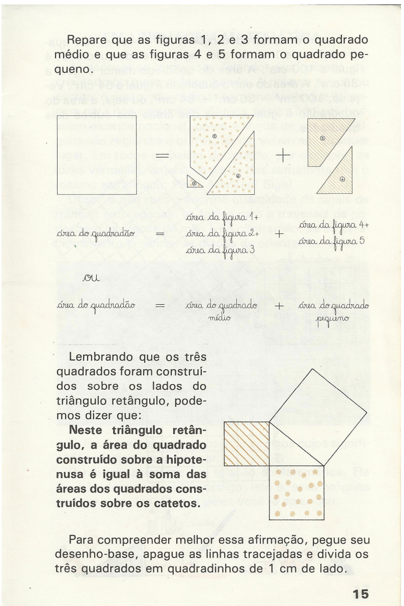
UMA RELAÇÃO ENTRE ÁREAS

Ao encaixar as cinco peças no quadradão, você cobriu-o por completo:

Podemos então concluir que a área do quadradão é a soma das áreas das cinco figuras.

14

(c) Um quebra cabeça–p. 15



Repare que as figuras 1, 2 e 3 formam o quadrado médio e que as figuras 4 e 5 formam o quadrado pequeno.

área do quadradão = área da figura 1 + área da figura 2 + área da figura 3 + área da figura 4 + área da figura 5

ou

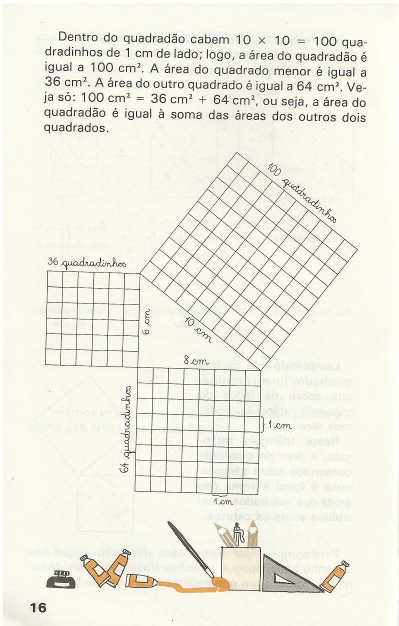
área do quadradão = área do quadrado médio + área do quadrado pequeno

Lembrando que os três quadrados foram construídos sobre os lados do triângulo retângulo, podemos dizer que:
Neste triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Para compreender melhor essa afirmação, pegue seu desenho-base, apague as linhas tracejadas e divida os três quadrados em quadradinhos de 1 cm de lado.

15

(d) Relação entre áreas–p. 16



Dentro do quadradão cabem 10 × 10 = 100 quadradinhos de 1 cm de lado; logo, a área do quadradão é igual a 100 cm². A área do quadrado menor é igual a 36 cm². A área do outro quadrado é igual a 64 cm². Veja só: 100 cm² = 36 cm² + 64 cm², ou seja, a área do quadradão é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados.

16

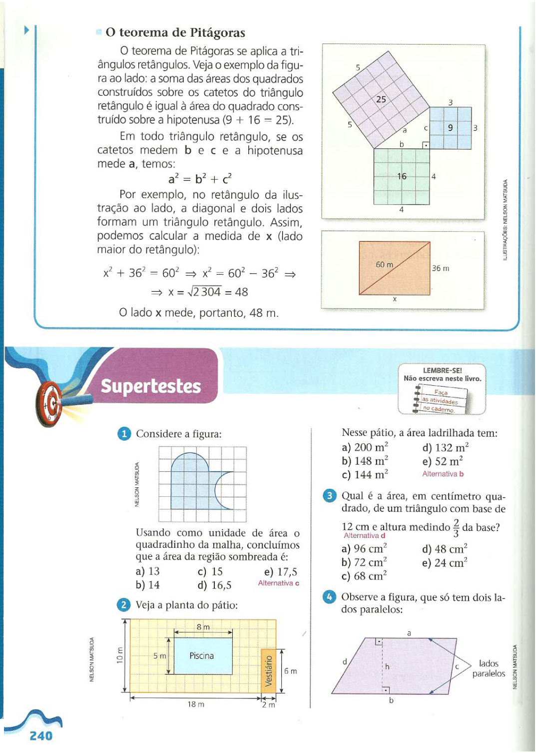
Fonte: Imenes (1992, capa, p. 14-16).

O livro *Descobrindo o Teorema de Pitágoras*, de Imenes (1992), é de leitura fácil e agradável, destinando-se a alunos do oitavo ano em diante. Mesmo destinando-se a um público mais inexperiente, o autor, Luiz Márcio Imenes, se preocupa em apresentar duas demonstrações do Teorema de Pitágoras, essas realizadas entre as páginas 32 e 35, sob o título “Usando o método dedutivo”; entre as páginas 36 e 38 com a demonstração realizada por Bhaskara, a qual é apresentada com duas visões deferentes.

Figura 9 – *"Matemática: Imenes & Lellis"*, de Imenes e Lellis (2012).

(a) Capa do livro

(b) Página mencionada



O teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras se aplica a triângulos retângulos. Veja o exemplo da figura ao lado: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa (9 + 16 = 25).

Em todo triângulo retângulo, se os catetos medem **b** e **c** e a hipotenusa mede **a**, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Por exemplo, no retângulo da ilustração ao lado, a diagonal e dois lados formam um triângulo retângulo. Assim, podemos calcular a medida de **x** (lado maior do retângulo):

$$x^2 + 36^2 = 60^2 \Rightarrow x^2 = 60^2 - 36^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{2\,304} = 48$$

O lado **x** mede, portanto, 48 m.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Supertestes

LEMBRE-SE! Não escreva neste livro. Faça as atividades no caderno.

1 Considere a figura:

Usando como unidade de área o quadradinho da malha, concluímos que a área da região sombreada é:

a) 13 c) 15 e) 17,5
b) 14 d) 16,5

Alternativa c

2 Veja a planta do pátio:

Nesse pátio, a área ladrilhada tem:

a) $200\ m^2$ d) $132\ m^2$
b) $148\ m^2$ e) $52\ m^2$
c) $144\ m^2$

Alternativa b

3 Qual é a área, em centímetro quadrado, de um triângulo com base de 12 cm e altura medindo $\frac{2}{3}$ da base?

Alternativa d

a) $96\ cm^2$ d) $48\ cm^2$
b) $72\ cm^2$ e) $24\ cm^2$
c) $68\ cm^2$

4 Observe a figura, que só tem dois lados paralelos:

240

Fonte: Imenes e Lellis (2012, capa, p. 240).

Os dois livros acima citados são classificados como paradidático. A seguir, vamos citar algum exemplo de livro didático.

Por exemplo, no livro didática*"Matemática: Imenes & Lellis"*, de Imenes e Lellis (2012), destinado aos alunos do 8º ano, na página 240, podemos constatar uma referência indireta à Atividade A.1, conforme nos mostra a Figura 9.

Por último, no livro *"Transformando a prática das aulas de Matemática"*, de Campos (2001), no capítulo intitulado "Meta 6", que se desenvolve da página 65 até 78, encontramos um grupo de seis atividades que tratam, segundo tema, do "Teorema de Pitágoras e outras relações métricas no triângulo retângulo". A "Atividade 2" do texto citado neste parágrafo também foi fonte inspiradora para o desenvolvimento da "primeira aula", na qual trabalhamos a Atividade A.1, além de ser mais um suporte para justificar a presença da Atividade A.1. Segue, na Figura 10, a capa do livro e a primeira folha da atividade citada.

Figura 10 – *“Transformando a prática das aulas de Matemática”*, de Campos (2001)

(a) Capa do livro (b) Página mencionada

Fonte: Campos (2001, capa, p. 68)

A variedade de fontes nas quais há menção direta ou indireta da Atividade A.1 apontam para algo importante ou didático.

3.4 Um ponto fraco dos triângulos pitagóricos que não tira seu brilho didático

Um ponto fraco da Atividade A.1 reside no fato de que a mesma se desenvolve apenas com números naturais não nulos, mais especificamente, em triângulos pitagóricos.

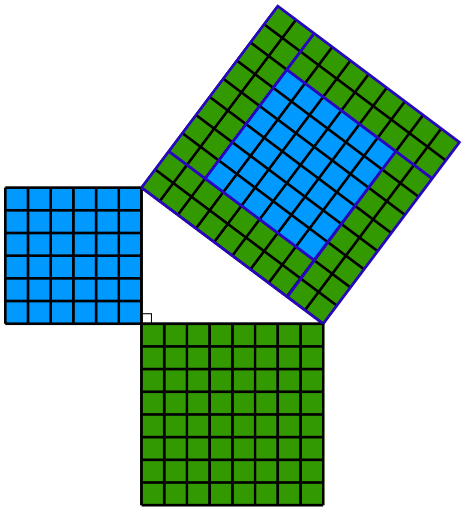
Um aluno com o senso crítico mais apurado perceberia a ausência de outros tipos numéricos. Contudo, um aluno mais desatento pode tomar tais casos como gerais e associar a validade do Teorema de Pitágoras a triângulos retângulos cujos lados sejam naturais não nulos. Em alguns casos essa situação pode ser retificada por meio de comentários orais, escritos ou até mesmo por meio de exercícios envolvendo decimais, frações, raízes, etc.

3.5 Mais sobre a Atividade A.1

A atividade inicia-se solicitando que o aluno construa a figura abaixo[16]:

[16] Há outras soluções possíveis.

Figura 11 – Por meio dos quadriculados o aluno deve perceber que $6^2 + 8^2 = 10^2$.

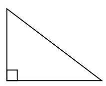
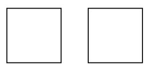
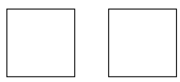


Fonte: Produzido pelo autor.

Para isso ele deve desenhar, cortar e colar conforme instruções destacadas na Figura 12.

Figura 12 – Instruções passadas aos alunos

No papel quadriculado desenhe as seguintes figuras:

• Um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm (pinte de vermelho).	
• Dois quadrados de lado 6 cm (pinte de azul).	
• Dois quadrados de lado 8 cm (pinte de verde).	

✂ Corte o triângulo e cole no centro da última folha.

✂ Corte os quadrados.

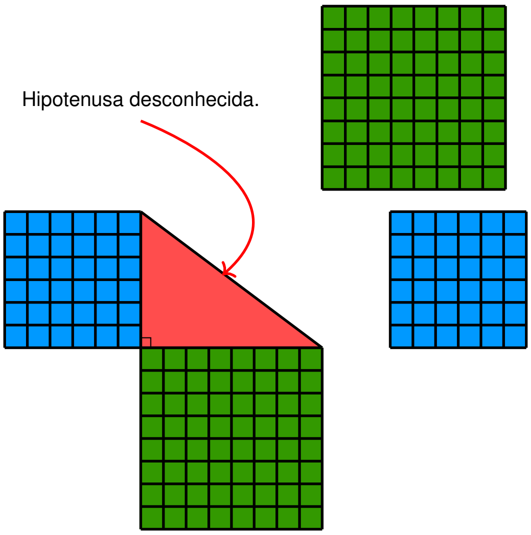
✂ Cole um dos quadrados de lado 6 cm ao lado do cateto de mesma medida.

✂ Cole um dos quadrados de lado 8 cm ao lado do cateto de mesma medida.

Fonte: Produzido pelo autor.

O resultado esperado é apresentado na figura abaixo:

Figura 13 – Neste estágio a hipotenusa é desconhecida.



Fonte: Produzido pelo autor.

A hipotenusa, desconhecida até o momento, é determinada diretamente por medição e o resultado anotado em lugar conveniente, conforme mostramos na Figura 14.

Figura 14 – O valor a ser anotado é obtido com auxílio da régua.

☺ Com auxílio da régua determine a medida da hipotenusa do triângulo retângulo colado. Não esqueça a unidade.

✸ | Resposta: | ...$10cm$... |
|---|---|

Fonte: Produzido pelo autor.

Logo em seguida, o aluno deve construir um quadrado sobre a hipotenusa, de tal modo que a hipotenusa do triângulo retângulo coincida com o lado do quadrado.

Figura 15 – Instrução passada ao aluno para construir um quadrado sobre a hipotenusa.

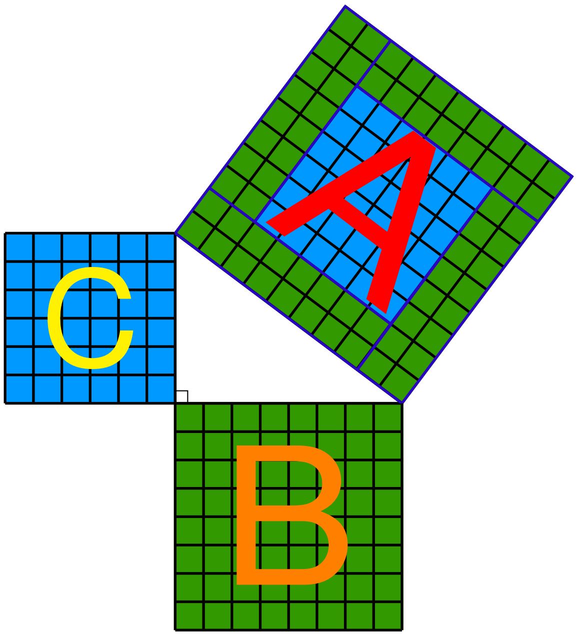
☺ Agora você vai montar um quebra cabeça. **CUIDADOSAMENTE, corte os dois quadrados que sobraram** e tente construir, sobre a hipotenusa, um quadrado cujo lado tem a mesma medida da hipotenusa.

Fonte: Produzido pelo autor.

De posse da medida da hipotenusa, $10cm$, obtida por meio de medição direta, e tendo em vista a instrução destacada na Figura 15 , só resta ao aluno concluir que deve construir um quadrado de lado $10cm$.

Após concluir a construção, o aluno obtém a Figura 11 e passa dar nomes aos quadrados, podendo chegar a algo semelhante ao que é apresentado abaixo.

Figura 16 – Uma das possíveis figuras que o aluno pode obter.



Fonte: Produzido pelo autor.

Os nomes foram fixados no trecho que segue:

Figura 17 – Os nomes são fixados para os quadrados.

- O quadrado ao lado do cateto de medida 6 cm será representado pela letra C;
- O quadrado ao lado do cateto de medida 8 cm será representado pela letra B;
- O quadrado construído sobre a hipotenusa será representado pela letra A.

Fonte: Produzido pelo autor.

Em continuidade, o aluno deve calcular a área dos quadrados construídos sobre a hipotenusa e sobre os catetos. Como o aluno está diante de quadrados que foram quadriculados, pois anteriormente solicitou-se ao aluno que desenhasse os quadrados em papel quadriculado, conforme Figura 12, um modo de calcular a área dos quadrados é contando a quantidade de quadrados unitários. Outro modo é, lembrar-se que para um quadrado de lado l, sua área é dada por l^2, e calcular cada uma das áreas desejadas, pois o lado de cada quadrado é dado.

Figura 18 – Cálculo da área de cada quadrado.

Área do quadrado **A** Construído sobre a hipotenusa	Área do quadrado **B** **(verde)** Construído ao lado do cateto	Área do quadrado **C** **(azul)** Construído ao lado do cateto
$10^2 = 10.10 = 100cm^2$	$8^2 = 8.8 = 64cm^2$	$6^2 = 6.6 = 36cm^2$
É possível o aluno responder que obteve a área de $100cm^2$ contando os quadradinhos unitários de um em um.	É possível o aluno responder que obteve a área de $64cm^2$ contando os quadradinhos unitários de um em um.	É possível o aluno responder que obteve a área de $36cm^2$ contando os quadradinhos unitários de um em um.

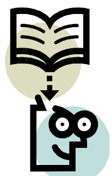
Fonte: Produzido pelo autor.

Por fim, o aluno deve concluir a lição, para isso é só escrever a relação entre as áreas calculadas, conforme nos mostra a figura abaixo:

Figura 19 – Relação final entre as áreas.

Para concluir a lição

☺ Pense e responda: você percebeu alguma relação entre as áreas calculadas acima? Escreva esta relação.



Resposta na Tabela 1.

Fonte: <http://office.microsoft.com/pt-br/images>

Tabela 1 – Tabela com algumas resposta para a Atividade A.1

	Resposta
Tipo 1	“A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma da área dos quadrados construídos sobre os catetos.”
Tipo 2	“A área do quadrado A é igual a área do quadrado B mais a área do quadrado C.”
Tipo 3	$100 = 64 + 36$
Tipo 4	$10^2 = 8^2 + 6^2$

Fonte: Produzido pelo autor.

Ao final da atividade encontramos o tópico “Avalie essa atividade”, que tem por objetivo verificar o grau de aceitação do aluno em relação a atividade proposta. Veja a figura abaixo:

Figura 20 – As questões procuram avaliar o grau de aceitação.

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

Fonte: Produzido pelo autor.

3.6 Aceitação por parte dos alunos

Tabela 2 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.1.

O grupo gostou dessa atividade ?			
	Não gostaram	Gostaram um pouco	Gostaram
Número de duplas	3	12	16
Como o grupo classifica essa atividade ?			
	Média	Fácil	Difícil
Número de duplas	15	15	1
Total de alunos = 62			

Fonte: Produzido pelo autor.

Da Tabela 2 acima, concluímos que a atividade foi acessível aos alunos, já que apenas três duplas declararam que “não gostaram” da atividade; além disso, apenas uma dupla considerou a atividade “difícil”.

4 A segunda aula

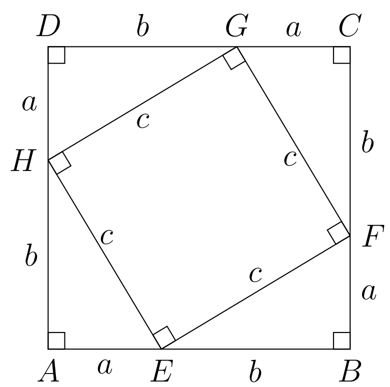
4.1 Introdução

A Atividade A.2 foi aplicada em 08 de novembro de 2013. As aulas ocorreram nas mesmas salas, 8ºC e 8ºD, e também ocorreram em aulas duplas consecutivas. Os alunos formaram duplas por livre escolha.

4.2 Por que esta atividade foi proposta?

Existem várias demonstrações do Teorema de Pitágoras. Por exemplo, no livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, publicado pelo National Council of Teachers of mathematics, consta um total de 370 provas. Esse número certamente deve ter sofrido algum acréscimo desde a primeira edição do livro. Nesta aula iremos nos preparar para estudar duas demonstrações, que serão apresentadas nas próximas aulas. Para isso iremos construir e estudar, ao nível do alunos de oitavo ano, a Figura 21 abaixo.

Figura 21 – Uma figura importante para algumas demonstrações.



Fonte: Produzido pelo autor

Assim, justifica-se a segunda atividade, ao menos parcialmente, como tendo em vista o melhor aproveitamento da Atividade A.3 e da Atividade A.5.

4.3 O uso do papel quadriculado

O uso do papel quadriculado para realização desta e de outras atividades, tem como objetivo auxiliar o aluno na construção das figuras para que seja mais fácil a percepção das propriedades e regularidades.

4.4 A construção

A construção da Figura 21 ocorreu em diversas etapas, nas quais os alunos são direcionados passo a passo, de modo a perceber propriedades importantes da figura. Essas propriedades estão intrinsecamente relacionadas à construção da figura citada no início.

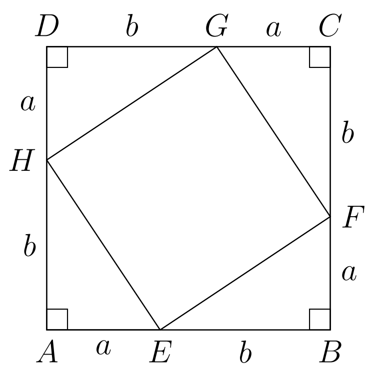
As etapas da construção são:

1. Com auxílio do papel quadriculado, e usando régua, desenhe um quadrado ABCD;
2. Marcar os segmentos AE, BF, CG e DH:
   a) No segmento AB, a partir de A, marque o ponto E;
   b) No segmento BC, a partir de B, marque o ponto F;
   c) No segmento CD, a partir de C, marque o ponto G;
   d) No segmento DA, a partir de D, marque o ponto H
3. Ligar os pontos H e E; E e F; F e G; G e H.

Após a construção acima descrita, obtemos os triângulos retângulos HAE, EBF, FCG e GDH, que são todos congruentes, e o quadrilátero $HEFG$, que é um quadrado. Para uma demonstração destas afirmações, veja a seção 4.5.

4.5 O quadrilátero *EFGH* é um quadrado ?

Figura 22 – Quadrado de lado $a + b$



Fonte: Produzido pelo autor

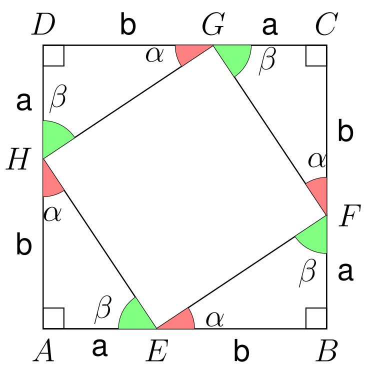
Considere um quadrado de lado $a + b$. Convenientemente tomamos $AB = AE + EB$, onde $AE = a$ e $EB = b$; $BC = BF + FC$, onde $BF = a$ e $FC = b$; $CD = CG + GD$, onde $CG = a$ e $GD = b$; $DA = DH + HA$, onde $DH = a$ e $HA = b$. Ligamos os pontos E, F, G e H, obtendo um quadrilátero.

Proposição 4.5.1. *O quadrilátero $EFGH$ é uma quadrado.*

Demonstração. Inicialmente vamos verificar que os triângulos HAE, EBF, FCG e GDH são congruentes entre si.

De fato, todos são triângulos retângulos, e temos $AE \equiv BF \equiv CG \equiv DH$, pois todos tem medida a por construção. Analogamente, $EB \equiv FC \equiv GD \equiv HA$, pois todos tem medida b por construção. Logo, pelo caso LAL aplicado aos triângulos acima mencionados, temos $HAE \equiv EBF \equiv FCG \equiv GDH$.

Figura 23 – Triângulos congruentes



Fonte: Produzido pelo autor

Prosseguiremos verificando que os ângulo $\measuredangle HEF$, $\measuredangle EFG$, $\measuredangle FGH$ e $\measuredangle GHE$ medem $90°$.

De fato, como consequência das congruências obtidas, temos $\measuredangle FEB \equiv \measuredangle GFC \equiv \measuredangle DGH \equiv \measuredangle AHE$, cuja medida representaremos por α; além disso, $\measuredangle HEA \equiv \measuredangle EFB \equiv \measuredangle FGC \equiv \measuredangle GHD$, cuja medida representaremos por β.Como os triângulos HAE, EBF, FCG e GDH são triângulos retângulos, temos:

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Além disso, os pontos E, F, G e H, foram tomado «entre»[1] A e B, B e C, C e D, D e A,

[1] Essa nota de rodapé é confeccionada a título de curiosidade! No livro *Fundamentos da Geometria*, David Hilbert define a noção de um ponto estar «entre» dois pontos. São palavras do próprio Hilbert:

O II grupo de axiomas: axiomas de ordem

Os axiomas deste grupo definem a noção «entre» e tornam possível, com base nesta noção, o ordenação dos pontos sobre uma reta, num plano e no espaço.
DEFINIÇÃO. Os pontos duma reta dispõem-se com certas relações entre si, para cuja descrição nos serve, em particular, a palavra «entre».
II 1.*Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C, então A, B, C são três pontos distintos duma reta, e B está também entre C e A.*
II 2.*Para cada dois ponto A e C há sempre, pelo menos, um ponto B sobre a reta AC tal que C está entre A e B.*
II 3.*Dados três pontos quaisquer duma reta, não há mais do que um que está entre os outros dois.*
DEFINIÇÃO Consideremos sobre uma reta a dois pontos A e B; chamemos ao sistema dos dois pontos A e B, um *segmento* e representamo-lo por AB ou BA. Os pontos entre A e B chamam-se pontos do segmento AB, ou também *interiores* ao segmento AB; os pontos A e B chamam-se pontos *extremos* do segmento AB. Todos os restantes pontos da reta a dizem-se exteriores ao segmento AB.

respectivamente, de modo que:

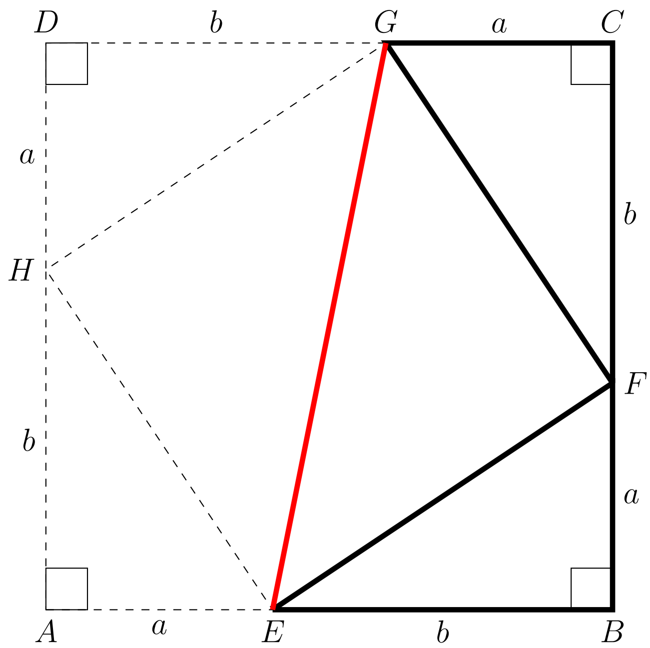
$$\beta + \measuredangle HEF + \alpha = 180°;$$
$$\beta + \measuredangle EFG + \alpha = 180°;$$
$$\beta + \measuredangle FGH + \alpha = 180°;$$
$$\beta + \measuredangle GHE + \alpha = 180°.$$

Deste modo, os ângulos $\measuredangle HEF, \measuredangle EFG, \measuredangle FGH$ e $\measuredangle GHE$ medem $90°$. Portanto, o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado. □

4.6 Uma figura versátil!

Vamos considerar a Figura 21, a qual imaginaremos construída em papel, ou qualquer outro material que possa ser riscado, cortado ou dobrado. Partindo da figura citada no início do parágrafo, podemos obter outras disposições ou figuras, as quais foram utilizadas na demostração do Teorema de Pitágoras. Por exemplo, cortando a Figura 21 segundo o segmento EG (ou HF), obtemos a Figura 24 usada por Garfield.

Figura 24 – Trapézio $EBCG$ usado por Garfield



Fonte: Produzido pelo autor

Certamente Garfield não procedeu deste modo, conforme evidencia o trecho do livro de Loomis (1940) na Figura 25.

II 4.*Sejam A, B, C três pontos que não estão em linha reta e a uma reta no plano ABC, que não encontra nenhum dos ponto A, B, C; se a reta a passa por um ponto do segmento AB, então, seguramente, passa também ou por um ponto do segmento AC ou por um ponto do segmento BC.* (HILBERT, 2003, p. 3–4)

Figura 25 – Demonstração de Garfield apresentada no livro *The Pythagorean proposition* de Loomis (1940)

Two Hundred Thirty-One

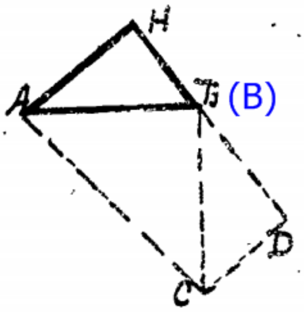


Fig. 330

In fig. 330, extend HB to D making BD = AH, through D draw DC par. to AH and equal to BH, and draw CB and CA.

Area of trap. CDHA = area of ACB + 2 area of ABH.

$\therefore \frac{1}{2}(AH + CD)HD = \frac{1}{2}AB^2 + 2 \times \frac{1}{2}AH \times HB$ or $(AH + HB)^2 = AB^2 + 2AH \times HB$, whence $AB^2 = BH^2 + AH^2$.

$\therefore$ sq. upon AB = sq. upon BH + sq. upon AH. $\therefore h^2 = a^2 + b^2$.

a. This is the "Garfield Demonstration,"--hit upon by the General in a mathematical discussion with other M.C.'s about 1876. See Jour. of Ed'n, Vol. III, 1876, p. 161; The Math. Magazine, Vol. I, 1882, p. 7; The School Visitor, Vol. IX, 1888, p. 5, proof III; Hopkins' Plane Geom., 1891, p. 91, fig. VII; Edwards' Geom., 1895, p. 156, fig. (11); Heath's Math. Monographs, No. 1, 1900, p. 25, proof X; Fourrey, p. 95; School Visitor, Vol. 20, p. 167; Dr. Leitzmann, p. 23, fig. 28a, and also fig. 28b for a variation.

b. For extension of any triangle, see V. Jelinek, Casopis, 28 (1899) 79--; Fschr. Math. (1899) 456.

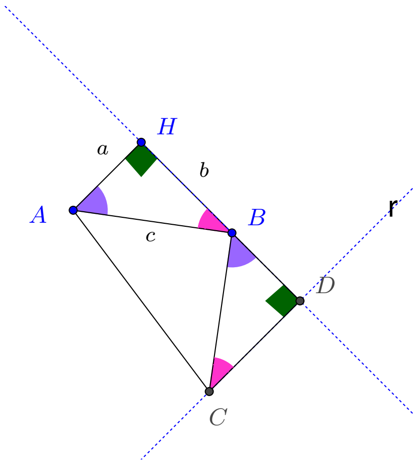
c. See No. 219, fig. 318.

Fonte: Loomis (1940, p. 231)

4.6.1 A prova de Garfield

Apesar da qualidade tipográfica que revela a Figura 25, podemos perceber que Loomis apresenta a demonstração de Garfield e logo em seguida, para dar credibilidade a personalidade que a desenvolveu, Loomis apresenta possíveis fontes nas quais foram publicadas esta demonstração. Em linhas gerais e numa linguagem mais atual, a demonstração de Garfield segue os passos:

Figura 26 – Trapézio divido em três triângulos



Fonte: Produzido pelo autor

Demonstração. Prolongue HB, determinando sobre a semirreta HB um ponto D, de modo que $AH = BD$. Por D considere a reta r paralela à reta AH. A reta HD divide o plano em dois semiplanos, estando o ponto A em um deles. Determine o ponto C, pertencente à r, no mesmo semiplano que A pertence, e de modo que $CD = HB$. Obtemos um trapézio, pois o quadrilátero $ACDH$ tem os lados AH e CD opostos e paralelos por construção. Ligando C com A e com B temos dois outros triângulos, CDB e CBA. Por construção temos $CD \equiv BH$, $BD \equiv AH$ e $\measuredangle BDC \equiv \measuredangle AHB$, logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos $\triangle AHB \equiv \triangle BDC$[2]. Em consequência $AB \equiv CB$. Além disso, como $\measuredangle HAB + \measuredangle ABH = 90^o$, já que o triângulo AHB é retângulo em H, e sendo $\measuredangle HAB = \measuredangle CBD$, pois ângulos congruentes tem mesma medida, resulta $\measuredangle CBD + \measuredangle ABH = 90^o$. Logo $\measuredangle CBA = 90^o$. Do exposto acima temos que os três triângulos AHB, ABC e BDC são triângulos retângulos. Para o trapézio podemos escrever

$$\acute{A}rea\ do\ trap\acute{e}zio ACHD = \acute{A}rea\ do\ \triangle ABC + 2\acute{A}rea\ do\ \triangle AHB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(CD + AH).(DB + BH)}{2} = \frac{AB.CB}{2} + 2.\frac{AH.HB}{2} \tag{4.1}$$

Fazendo $AH = a, HB = b$ e $AB = c$, também ficamos com $DB = a, CD = b$ e $CB = c$. Substituindo em (4.1) , obtemos:

$$\frac{(b + a).(a + b)}{2} = \frac{c.c}{2} + 2.\frac{a.b}{2} \tag{4.2}$$

Desenvolvendo a equação (4.2), ficamos com:

$$\frac{ba + b^2 + a^2 + ab}{2} = \frac{c^2 + 2.ab}{2} \tag{4.3}$$

Simplificando (4.3), resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{4.4}$$

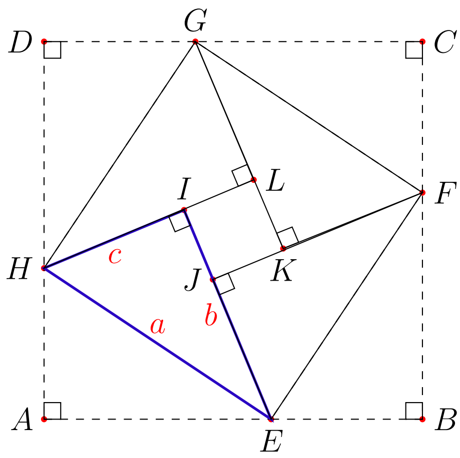
que é a relação procurada. □

[2] Leia-se: “o triângulo AHB é congruente ao triângulo BDC”

4.6.2 Obtendo a figura usada por Bhaskara

Dobrando a Figura 21 sobre as retas HG, HE, EF e FG, obtemos a figura credita a Bhaskara, conforme nos relata Barbosa (1993) em seu livro *Descobrindo padrões pitagóricos*.

Figura 27 – Os triângulos pontilhados foram dobrados



Fonte: Produzido pelo autor

Na Figura 27 temos:

$$HE = EF = FG = GH = a \tag{4.5}$$
$$HI = JE = FK = LG = c \tag{4.6}$$
$$IJ = JF = KG = LH = b \tag{4.7}$$

Podemos escrever a área do quadrado $HEFG$ de duas formas, obtendo a equação:

$$Área\ do\ quadradoEFGH = 4.Área\ do\ \triangle HIE + Área\ do\ quadradoIJKL \tag{4.8}$$

Logo,

$$a^2 = 4.\frac{cb}{2} + (b-c)^2 \tag{4.9}$$

Desenvolvendo a equação (4.9) obtemos:

$$a^2 = 2cb + b^2 - 2cb + c^2 \tag{4.10}$$

Simplificando a equação (4.10)

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{4.11}$$

que estabelece a relação desejada.□

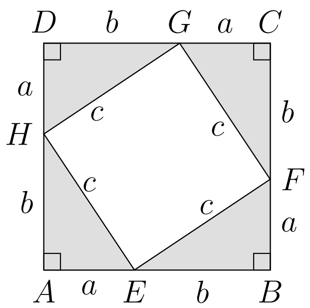
4.6.3 Observe! A mais bela prova

O título "A mais bela prova" aparece na "Revista do professor de Matemática", número dois, sendo dado a uma demonstração que Euclides Rosa apresenta no artigo "Mania de Pitágoras", no qual Rosa levanta a possibilidade desta demonstração ter sido desenvolvida por Pitágoras, como consta do trecho abaixo:

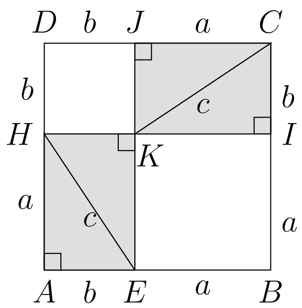
> Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo "geométrico", isto é, *baseada na comparação de áreas*[3]. Não foi a que se encontra nos "Elementos" de Euclides, e que é ainda hoje muito encontrada nos livros de Geometria[4], pois tal demonstração parece ter sido concebida pelo próprio Euclides. *A demonstração de Pitágoras pode muito bem ter sido a que decorre das figuras abaixo*[5]: (ROSA, 1983, p. 15)

Figura 28 – Observe!

(a) Figura inicial



(b) Figura final



Fonte: Produzido pelo autor

Note que a Figura 28a corresponde a Figura 21, tendo os triângulos retângulos destacados. Veremos, na Atividade A.3, que a Figura 28a inicial (ou Figura 21) pode ser transformada na Figura 28b final por meio do movimento rígido de translação dos triângulos. Por hora, contentamo-nos em constatar que da Figura 28a (ou 21) podemos obter a Figura 28b, o que já é suficiente, pois estamos discutindo a importância da Figura 21, dado que essa se transforma em outras, utilizadas em várias outras demonstrações.

4.7 Aceitação por parte dos alunos

O objetivo da atividade era apenas levar o aluno a familiarizar-se com a Figura 21, a qual será usada em atividades futuras. A apropriação da Figura 21 foi proposta por meio da construção da mesma. Essa construção, apesar de simples, e realizada com auxílio do papel quadriculado, o que possibilita o aluno ser mais caprichoso, bem como contando com o auxílio das orientações dada na folha da Atividade A.2, teve seu momento

[3] Itálico meu.
[4] Essa demonstração foi abolida dos textos do Ensino Médio e do Ensino Fundamental.
[5] Itálico meu.

de ser avaliada quanto a sua aceitação, pelos alunos. A tabela abaixo transcreve os dados tabulados:

Tabela 3 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.2.

O grupo gostou dessa atividade ?			
	Não gostaram	Gostaram um pouco	Gostaram
Número de duplas	2	4	27
Como o grupo classifica essa atividade ?			
	Média	Fácil	Difícil
Número de duplas	4	29	0
Total de alunos = 66			

Fonte: Produzido pelo autor.

Da Tabela 3, concluímos que a atividade foi muito bem aceita pelos alunos, atingindo o objetivo de ser agradável aos mesmos, bem como funcionalmente didática.

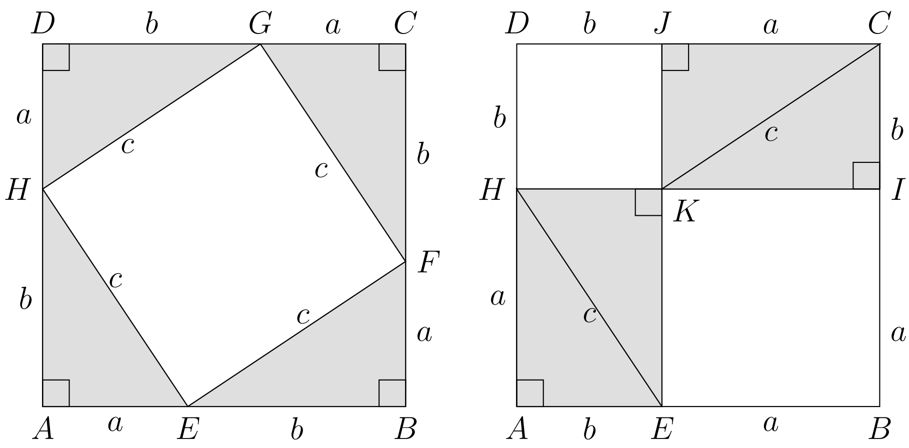
5 A terceira aula

5.1 Introdução

O objetivo desta atividade é levar o aluno a justificar o Teorema de Pitágoras. Para isso iremos dar um tratamento por meio de translação à demonstração apresentada no artigo escrito por Euclides Rosa, publicado na Revista do Professor de Matemática, número dois - RPM 02 -, cujo título dado é “Mania de Pitágoras”; o artigo localiza-se na seção “As Coisas que Ensinamos” da citada revista, a qual já tivemos oportunidade de citar no capítulo 3, na subseção 4.6.3. A demonstração apresentada no artigo recebe por título “A mais bela prova” e é creditada a Pitágoras[1] segundo o professor Euclides Rosa. Essa demonstração baseia-se na observação da Figura 29:

Figura 29 – Observe!

(a) Figura inicial (b) Figura final



Fonte: Produzido pelo autor.

O professor Eduardo Wagner (2009), em seu livro *Teorema de Pitágoras e áreas*, disponível no site da OBMEP[2],no capítulo 1, na seção “A demonstração clássica”, também menciona a demonstração acima evidenciada pela Figura 29. Conforme nos revela o trecho abaixo, o crédito desta demonstração muito provavelmente deve ser dado aos pitagóricos[3].

> Esta simples e engenhosa demonstração *pode*[4] ter sido a que os pitagóricos imaginaram. (WAGNER, 2009, p. 6).

[1] Era costume creditar-se a autoria dos trabalhos ao representante central do grupo, no caso em questão, a autoria é dada a Pitágoras, mas certamente algum elemento de sua escola deve ter realizado tal demonstração, pois aparentemente Pitágoras nada escreveu.

[2] http://www.obmep.org.br/prog_ic_2010/apostila2010.html

[3] Já mencionamos no Capítulo 2 que a ausência de documentos escrito resulta em uma dificuldade para dar corpo a história de Pitágoras e dos pitagóricos.

[4] Grifo meu.

Ambos, Wagner e Rosa, explicam a Figura 29 do mesmo modo. Dado um triângulo retângulo de catetos a e b, bem como hipotenusa c, temos que:

> Do quadrado que tem $a + b$ como lado[5], retiremos 4 triângulos iguais ao [triângulo][6] dado. Se fizermos isto como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado c. Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita restarão dois quadrados, de lados a e b respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b. (WAGNER, 2009, p. 6)

A ideia que iremos utilizar nesta atividade é a de “retirar” os quatro triângulos retângulos, tal qual os dois autores acima citados operaram. Contudo, entre a Figura 29a e a Figura 29b há um “lacuna” que tentaremos preencher de maneira que, para o aluno, fique mais transparente a transição de uma para a outra. Para completar os pontilhados desta “lacuna” iremos fazer uso das *translações* no plano. Ao final, recorreremos a ideia de “retirar” acima discutida e apresentada pelos professores Wagner e Rosa.

Uma questão que surge é: “uma translação preserva o triângulo retângulo?” Na prática é possível constatar que sim, pois ao recortarmos um triângulo retângulo em cartolina, por exemplo, e dispormos esse triângulo sobre uma mesa, ou qualquer superfície lisa que “represente” um plano, podemos move-lo sem deformação em qualquer direção, que o mesmo continuará sendo um triângulo retângulo. Também é possível percebermos que ao rotacionar o mesmo triângulo retângulo, este continuará sendo um triângulo retângulo. Em ambos, translação e rotação, não ocorre deformação das partes do triângulo retângulo, ou seja, tomando-se dois pontos quaisquer, A e B, do interior do triângulo retângulo recortado na cartolina, determinando-se a posição destes pontos em relação aos catetos do triângulo retângulo, posteriormente executando uma translação, ou rotação, ou ambos, os pontos A e B preservam, simultaneamente, sua posição em relação aos catetos, ou seja, preserva-se a distância de A e B, em relação aos catetos do triângulo retângulo. Mas para colocar essas ideias de modo um pouco mais formal, iremos falar um pouco sobre isometria.

5.2 Distância num plano Π

Inicialmente iremos definir distância. Do livro “Espaços Métricos”, de Lima (1977, p. 1), pinçamos:

Definição 5.2.1. *Uma distância num plano Π é uma função $d : \Pi \times \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $P, Q \in \Pi$ um número real $d(P, Q)$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $P, Q, R \in \Pi$:*

$$d1)\ \ d(P, P) = 0; \tag{5.1}$$

$$d2)\ \ Se\ P \neq Q\ então\ d(P, Q) > 0; \tag{5.2}$$

$$d3)\ \ d(P, Q) = d(Q, P); \tag{5.3}$$

$$d4)\ \ d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R). \tag{5.4}$$

[5] Ver figura 29
[6] O colchetes é meu.

Definição 5.2.2. *Sejam P e Q dois pontos distintos do plano Π. Ao conjunto formado pelos pontos P e Q, bem como todos os pontos R do plano Π que estejam «entre» P e Q, chamamos segmento e representamo-lo por PQ ou QP. Os pontos «entre» P e Q chamam-se pontos do segmento PQ, ou interiores ao segmento PQ e satisfazem a igualdade em* (5.4)*; os pontos P e Q chamam-se pontos extremos do segmento PQ. Todos os demais pontos do plano Π dizem-se exteriores ao segmento PQ e satisfazem a desigualdade em* (5.4).

Proposição 5.2.1. *Sejam P e Q pontos do plano Π; temos que $d(P, Q) = 0$ se, e somente se $P = Q$, ou seja, P e Q são coincidentes.*

Demonstração. De fato, se $P = Q$, temos que $d(P, Q) = d(P, P) = 0$ pelo item (5.1) da definição (5.2.1). Por outro lado, sendo a hipótese dada por $d(P, Q) = 0$ verdadeira, desejamos verificar que a tese, $P = Q$, é verdadeira. De fato, se assim não fosse, teríamos que a diferença $P \neq Q$ deveria ser verdade, o que nos levaria, pelo item (5.2) da definição (5.2.1), a concluir que $d(P, Q) > 0$, o que será uma contradição.

Portanto, $d(P, Q) = 0$ se, e somente se $P = Q$. □

Já inspirados pelo livro "Coordenadas no Plano" de Lima e Carvalho (2011, p. 135–160), desenvolvemos a seção 5.3 abaixo.

5.3 Isometria no plano

Definição 5.3.1. *Uma isometria no plano Π é uma transformação T:$\Pi \longrightarrow \Pi$ que preserva distâncias. Mais precisamente, T é uma isometria quando se tem*

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos P, Q no plano Π.

Proposição 5.3.1. *Toda isometria T:$\Pi \longrightarrow \Pi$ é injetiva.*

Demonstração. Com efeito, sejam P e Q pontos quaisquer de Π, para os quais assumimos que $T(P) = T(Q)$, logo, pela proposição (5.2.1):

$$d(T(P), T(Q)) = 0 \tag{5.5}$$

Devemos verificar que P e Q são coincidentes. Como T é uma isometria, pela definição (5.3.1) temos:

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) \tag{5.6}$$

Das igualdades (5.5) e (5.6) segue $d(P, Q) = 0$, que implica, pela proposição (5.2.1), $P = Q$, conforme desejado. Portanto, a isometria $T : \Pi \longrightarrow \Pi$ é injetiva. □

Proposição 5.3.2. *Seja $T : \Pi \longrightarrow \Pi$ uma isometria. Além disso, para P e Q, pontos distintos de Π os quais definem um segmento PQ, sejam $T(P) = P_1$ e $T(Q) = Q_1$. Nesta condições, T transforma todo ponto R do segmento PQ num ponto R_1 do segmento P_1Q_1.*

Demonstração. Seja R um ponto qualquer interior ao segmento PQ. Pela definição (5.2.2) temos

$$d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q). \tag{5.7}$$

Como T é uma isometria temos

$$d(P,Q) = d(T(P),T(Q)) = d(P_1,Q_1); \tag{5.8}$$
$$d(P,R) = d(T(P),T(R)) = d(P_1,R_1); \tag{5.9}$$
$$d(R,Q) = d(T(R),T(Q)) = d(R_1,Q_1). \tag{5.10}$$

Substituindo (5.8), (5.9) e (5.10) em (5.7), obtendo

$$d(P_1,Q_1) = d(P_1,R_1) + d(R_1,Q_1). \tag{5.11}$$

A igualdade (5.11) nos diz, pela definição (5.2.2), que R_1 é um ponto interior ao segmento P_1R_1. □

Pelo que demonstramos acima, (5.3.2), podemos concluir que uma isometria é uma transformação que preserva a colinearidade, ou seja, leva pontos colineares em pontos colineares; preserva também a ordenação destes pontos. Como consequência temos a proposição abaixo.

Proposição 5.3.3. *Sejam T :* $\Pi \longrightarrow \Pi$ *uma isometria;* A*,* B *e* C *pontos não colineares do plano* Π*. Então,* $T(A)$*,* $T(B)$ *e* $T(C)$ *não são colineares.*

Demonstração. Suponhamos que $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$ sejam colineares. Sem perda de generalidade adotaremos $T(B)$ «entre» $T(A)$ e $T(C)$. Então

$$d(T(A),T(B)) + d(T(B),T(C)) = d(T(A),T(C)). \tag{5.12}$$

Por hipótese T é uma isometria. Temos

$$d(T(A),T(B)) = d(A,B); \tag{5.13}$$
$$d(T(B),T(C)) = d(B,C); \tag{5.14}$$
$$d(T(A),T(C)) = d(A,C). \tag{5.15}$$

Substituindo (5.13), (5.14) e (5.15) em (5.12), obtemos

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C), \tag{5.16}$$

que contraria o fato dos pontos A, B e C não serem colineares, pois nesta situação, os pontos A, B e C formam um triângulo e, pela condição de existência de um triângulo, a igualdade (5.16) não pode ocorrer. Logo, é um absurdo supor que os pontos $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$ sejam colineares.

Portanto, $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$, não são colineares. □

Do exposto acima, concluímos que uma isometria T leva um triângulo ABC em outro, denotado por $T(A)T(B)T(C)$. Como uma isometria preserva a distância, é natural questionarmos se os triângulos ABC e $T(A)T(B)T(C)$ são congruentes. Verificaremos que realmente os triângulos mencionados satisfazem tal propriedade.

Proposição 5.3.4. *Sejam T :* $\Pi \longrightarrow \Pi$ *uma isometria e* ABC *um triângulo qualquer contido em* Π*. Nesta condições, os triângulos* ABC *e* $T(A)T(B)T(C)$ *são congruentes.*

Demonstração. De fato, como T é uma isometria, temos como verdadeira as igualdades: $d(A,B) = d(T(A),T(B))$, $d(B,C) = d(T(B),T(C))$; $d(C,A) = d(T(C),T(A))$. Por conseguinte, os lados AB e $T(A)T(B)$ são congruentes; os lados BC e $T(B)T(C)$ são congruentes; os lados CA e $T(C)T(A)$ são congruentes. Logo, pelo caso de congruência LLL (lado, lado, lado), concluímos que os triângulo ABC e $T(A)T(B)T(C)$ são congruentes. □

É de nosso interesse explorar a propriedade acima para retas, permitindo ter maior liberdade ao realizar uma *ação*[7] sobre um triângulo. Para isso necessitaremos da definição de *imagem direta* de um subconjunto $X \in A$ por meio de uma função $f : A \longrightarrow B$, a qual daremos abaixo.

Definição 5.3.2. *Dada uma função* $f : A \longrightarrow B$ *e um subconjunto* $X \subset A$*. Chama-se "imagem direta de* X *pela função* f*" ao conjunto* $f(X)$ *formado pelos valores* $f(x)$ *que* f *assume nos pontos* $x \in X$*. Assim:*

$$f(X) = \{f(x); x \in X\} = \{y \in B; y = f(x)\ para\ algum\ x\ \in X\}$$

Proposição 5.3.5. *Se r é uma reta do plano* Π *e* $T : \Pi \longrightarrow \Pi$ *é uma isometria, então T(r) é uma reta.* [8]

Demonstração. Pela definição (5.3.2) aplicada à reta $r \subset \Pi$ e a isometria (função) $T : \Pi \longrightarrow \Pi$, podemos constituir o conjunto:

$$T(r) = \{T(X); X \in r\}$$

o qual é a imagem direta de r pela isometria T.

Sejam P e Q pontos de r, distintos e $P_1 = T(P),\ Q_1 = T(Q)$.

Como P e Q foram tomados distintos entre si e lembrando que toda isometria é injetiva, conforme verificamos em (5.3.1), temos em consequência que $T(P) = P_1$ e $T(Q) = Q_1$ são distintos. Denotemos por r_1 a única reta que passa por $P_1 = T(P)$ e $Q_1 = T(Q)$.

Afirmamos que $T(r)$ *está contido em* r_1. Com efeito, seja R_1 um elemento qualquer de $T(r)$. Logo, pela definição (5.3.2), existe algum $R \in r$, tal que $R_1 = T(R)$. Como T é injetiva R é único. Separando em casos podemos ter

1. se R coincidir com P, então, como T é função, $R_1 = T(R) = T(P) = P_1 \in r_1$;

[7] Essa ação será uma translação, mas por agora não usamos essa palavra por não termos provado que uma translação é uma isometria, e, até o momento, o texto só se referiu a isometria.

[8] Usaremos como tática o seguinte raciocínio: uma reta é um conjunto de pontos, logo r é um subconjunto do plano Π; além disso T é uma função com domínio em Π e contradomínio em Π. Assim $T(r)$ é a *imagem direta* da reta r, a qual desejamos verificar que é uma reta. Para tal intento iremos considerar dois pontos arbitrários de r, denotados por P e Q. Aplicaremos T nestes pontos obtendo a imagem de P e a imagem de Q, isto é, obteremos P_1 e Q_1, tais que $P_1 = T(P)$ e $Q_1 = T(Q)$; neste instante será importante lembrarmos que uma isometria é injetiva, o que nos permitirá garantir que $P_1 \neq Q_1$, logo determinam uma única reta no plano Π. Por fim faremos um esforço para provar que $T(r)$ é igual a reta que passa por P_1 e Q_1, a qual chamaremos por r_1.

2. se R coincidir com Q, então, como T é função, $R_1 = T(R) = T(Q) = Q_1 \in r_1$;

3. se $R \neq P$ e $R \neq Q$, podemos ter três casos:

   a) se R está «entre» P e Q, ou seja $R \in PQ$, pela proposição (5.3.2) $R_1 = T(R)$ pertence ao segmento P_1Q_1, cuja reta suporte é r_1. Logo R_1 pertence à reta r_1 que liga P_1 e Q_1;

   b) se Q está «entre» P e R, ou seja $Q \in PR$, pela proposição (5.3.2) $Q_1 = T(Q)$ pertence ao segmento P_1R_1. Logo R_1 pertence à reta r_1 que liga P_1 e Q_1;

   c) se P está «entre» Q e R, ou seja $P \in QR$, pela proposição (5.3.2) $P_1 = T(P)$ pertence ao segmento Q_1R_1. Logo R_1 pertence à reta r_1 que liga P_1 e Q_1.

De qualquer modo, R_1 pertence à reta r_1 que liga P_1 e Q_1.

Deste modo, concluímos que

$$T(r) \subset r_1, \tag{5.17}$$

conforme afirmamos acima.

Por outro lado, também temos que r_1 está contido em $T(r)$. Com efeito, seja R_1 um elemento qualquer de r_1, reta que liga P_1 e Q_1. Separando em casos temos:

1. se R_1 coincidir com $P_1 = T(P)$, para $P \in r$, então $R_1 \in T(r)$;

2. se R_1 coincidir com $Q_1 = T(Q)$, para $Q \in r$, então $R_1 \in T(r)$;

3. se $R_1 \neq P_1$ e $R_1 \neq Q_1$, podemos ter:

   a) se R_1 pertence ao segmento P_1Q_1, então existe R, $R \neq P$ e $R \neq Q$, pois T é injetiva, que pertence ao segmento PQ, tal que $R_1 = T(R) \in T(r)$;

   b) se P_1 está «entre» R_1 e Q_1, ou seja P_1 pertence ao segmento de reta R_1Q_1. Seja R o ponto da reta r, situado à esquerda do segmento PQ e tal que $d(R, Q) = d(R_1, Q_1)$. Então $T(R)$ é o ponto de r_1, à esquerda do segmento P_1Q_1 e tal que $d(T(R), Q_1) = d(R_1, Q_1)$, logo $R_1 = T(R) \in T(r)$;

   c) se Q_1 está «entre» R_1 e P_1, ou seja Q_1 pertence ao segmento de reta R_1P_1. Seja R o ponto da reta r, situado à esquerda do segmento PQ e tal que $d(R, P) = d(R_1, P_1)$. Então $T(R)$ é o ponto de r_1, à esquerda do segmento P_1Q_1 e tal que $d(T(R), P_1) = d(R_1, P_1)$, logo $R_1 = T(R) \in T(r)$

De qualquer modo foi possível exibir $R \in r$, tal que $R_1 = T(R)$, o que implica que $R_1 \in T(r)$. Concluímos, deste modo, que

$$r_1 \subset T(r), \tag{5.18}$$

conforme esperado.

Por (5.17) e (5.18) temos, $r_1 \subset T(r)$ e $T(r) \subset r_1$, o que implica $T(r) = r_1$, sendo r_1 uma reta. Portanto, $T(r)$ é uma reta, ou seja, uma isometria transforma uma reta em uma reta. □

Pelo que exploramos até o momento podemos concluir que uma isometria é uma transformação que preserva a linearidade, ou seja, transforma uma reta ou segmento de reta em reta e segmento de reta respectivamente, isso feito de modo a preservar a distância. Duas questões naturais surgem. Qual a ação de uma isometria sobre retas paralelas? Qual a ação de uma isometria sobre retas perpendiculares? Esperamos, ao menos intuitivamente, que essas propriedades se preservem. É precisamente isso que iremos tratar abaixo.

Proposição 5.3.6. *Se $T : \Pi \longrightarrow \Pi$ é uma isometria e as retas r e s do plano Π são paralelas, então as retas $r_1 = T(r)$ e $s_1 = T(s)$ são paralelas.*

Demonstração. Vamos supor que $r_1 = T(r)$ e $s_1 = T(s)$ não são paralelas. Logo, existe um ponto P_1 pertencente à reta r_1 e à reta s_1 simultaneamente. Assim temos, $P_1 = T(P)$, com $P \in r$ e $P_1 = T(Q)$, com $Q \in s$. Como T é injetiva, devemos ter $P = Q$, que implica serem concorrente as retas r e s, o que contradiz o fato de serem retas paralelas.

Portanto, uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas. □

Proposição 5.3.7. *Uma isometria transforma um triângulo retângulo em outro triângulo retângulo.*

Demonstração. Sejam $T : \Pi \longrightarrow \Pi$ uma isometria e ABC um triângulo retângulo em A. Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$[d(B, C)]^2 = [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2. \tag{5.19}$$

Pela definição (5.3.1) temos que:

$$d(B, C) = d(T(B), T(C)); \tag{5.20}$$
$$d(A, B) = d(T(A), T(B)); \tag{5.21}$$
$$d(A, C) = d(T(A), T(C)). \tag{5.22}$$

Substituindo (5.20), (5.21) e (5.22) em (5.19), ficamos com:

$$[d(T(B), T(C))]^2 = [d(T(A), T(B))]^2 + [d(T(A), T(C))]^2 \tag{5.23}$$

Pela proposição (5.3.3), $T(A), T(B)$ e $T(C)$ são os vértices de um triângulo após aplicamos T. Além disso temos como válida a igualdade (5.23). Então, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, (2.2.2), concluímos que o triângulo de vértices $T(A), T(B)$ e $T(C)$ é retângulo, estando o ângulo reto em $T(A)$. □

Dizendo de modo mais geral, uma isometria transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares, e portanto preserva o ângulo reto.

5.4 Translação

Chegamos num ponto em que caracterizamos o comportamento das transformações isométricas, no que diz respeito as retas paralelas e ao ângulo reto. Para não nos desviarmos muito do nosso foco, passaremos a tratar das translações em específico. Iniciaremos com a definição abaixo.

Definição 5.4.1. *Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ no plano Π. A translação $T_{\overrightarrow{v}} : \Pi \longrightarrow \Pi$, determinada pelo vetor $\overrightarrow{v}$, é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_{\overrightarrow{v}}(P) = P + \overrightarrow{v}$*

Proposição 5.4.1. *Toda translação é uma isometria.*

Demonstração. Para uma translação $T_{\overrightarrow{v}} : \Pi \longrightarrow \Pi$ qualquer, a imagem dos ponto A e B são os pontos

$$T_{\overrightarrow{v}}(A) = A + \overrightarrow{v} \tag{5.24}$$

$$T_{\overrightarrow{v}}(B) = B + \overrightarrow{v} \tag{5.25}$$

respectivamente, cuja distância é $d(T_{\overrightarrow{v}}(A), T_{\overrightarrow{v}}(B))$.

Uma forma de pensar a distância entre dois pontos é como a norma do vetor determinado por esses dois pontos. Logo

$$d(T_{\overrightarrow{v}}(A), T_{\overrightarrow{v}}(B)) = \parallel \overrightarrow{T_{\overrightarrow{v}}(A)T_{\overrightarrow{v}}(B)} \parallel . \tag{5.26}$$

Substituindo (5.24) e (5.25) em (5.26) temos

$$d(T_{\overrightarrow{v}}(A), T_{\overrightarrow{v}}(B)) = \parallel (B + \overrightarrow{v}) - (A + \overrightarrow{v}) \parallel . \tag{5.27}$$

Simplificando (5.27) obtemos

$$d(T_{\overrightarrow{v}}(A), T_{\overrightarrow{v}}(B)) = \parallel B - A \parallel . \tag{5.28}$$

Onde $B - A = \overrightarrow{AB}$. Logo, a equação (5.28) fica

$$d(T_{\overrightarrow{v}}(A), T_{\overrightarrow{v}}(B)) = \parallel \overrightarrow{AB} \parallel . \tag{5.29}$$

Mas $\parallel \overrightarrow{AB} \parallel = d(A, B)$, que trocaremos em (5.29), obtendo

$$d(T_{\overrightarrow{v}}(A), T_{\overrightarrow{v}}(B)) = d(A, B). \tag{5.30}$$

A igualdade (5.30) nos informa que a distância é preservada, ou seja, a translação $T_{\overrightarrow{v}} : \Pi \longrightarrow \Pi$ é uma isometria. $\square$

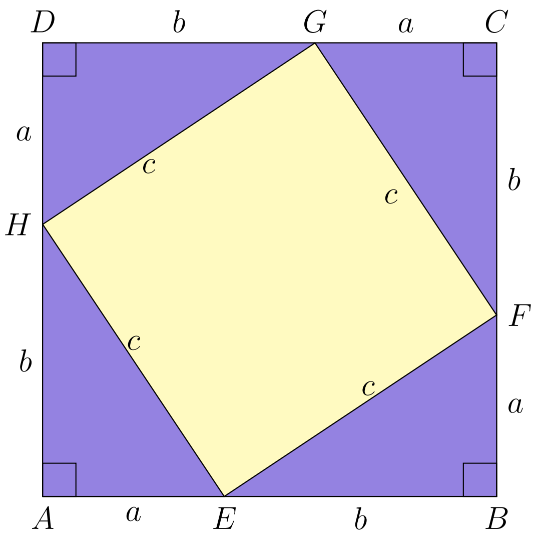
Proposição 5.4.2. *Uma translação preserva um triângulo retângulo.*

Esse resultado é consequência imediata da proposição (5.3.7), além disso, pelas proposições anteriores, temos como certo que uma translação, ao atuar sobre um triângulo retângulo, não o deforma.

5.5 A atividade aplicada na terceira aula

Inicialmente distribuímos todo o material necessário: as folhas de atividades contendo orientações[9] e dois pedaços de cartolina colorida, um azul e outro amarelo.

Figura 30 – Disposição inicial



Fonte: Produzido pelo autor.

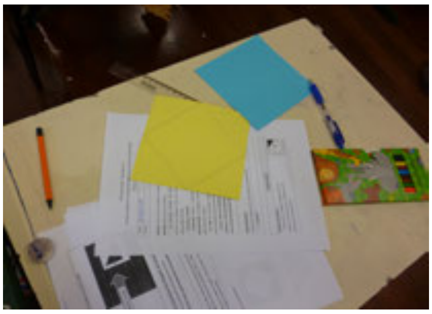
Solicitamos que os grupos desenhassem e recortassem dois quadrados cujos lados tem mesma medida, contudo de cores diferentes. Um deles deveria permanecer intacto e seria usado como base. Do outro seria retirado, de cada canto contendo um ângulo reto, um triângulo retângulo, tomando-se o cuidado de todos serem congruentes, conforme a construção feita na atividade anterior 4.

Dispõe-se, deste modo, de uma base e quatro triângulos retângulos que serão cuidadosamente colocados sobre a base, formando a Figura 30.

[9] Essas folhas encontram-se no Apêndice A.3

Figura 31 – Aluno desenvolvendo os trabalhos da Atividade A.3.

(a) O material distribuído



(b) Configurando a figura

(c) Disposição final de um grupo X

(d) Disposição final de um grupo Y

Fonte: Produzido pelo autor.

Diante da Figura 30, o aluno tem sua primeira tarefa: observar a disposição inicialmente apresentada com atenção. Para provocar esta observação, o aluno se depara com a pergunta apresentada na Figura 32:

Figura 32 – Observando a área do quadrado EFGH.

Primeira pergunta

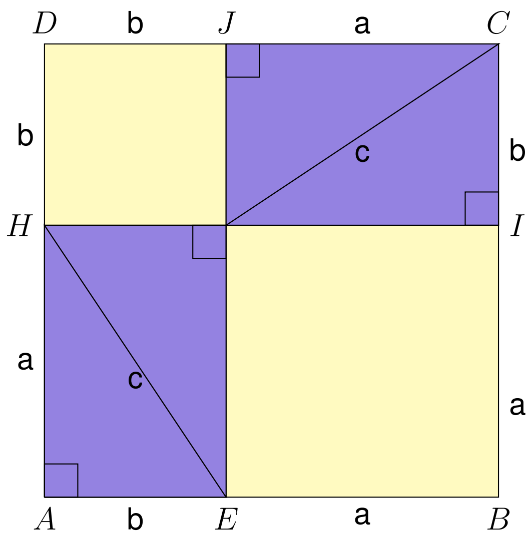
Olhando para a figura acima, qual a área do quadrado EFGH?

✐ **Resposta:** A área do quadrado é c^2, pois seu lado tem medida c.

Fonte: Produzido pelo autor.

Logo em seguida o aluno é conduzido a preencher as lacunas entre a disposição inicial, apresentada pela Figura 30, e a disposição final, apresentada pela Figura 33. Esse distanciamento entre a situação inicial e final é preenchido quando o aluno executa os três movimentos de translação com auxílio do material preparado no início da aula. Os três movimentos são apresentados a seguir.

Figura 33 – Disposição final.



Fonte: Produzido pelo autor.

5.5.1 Os três movimentos

5.5.1.1 A primeira translação

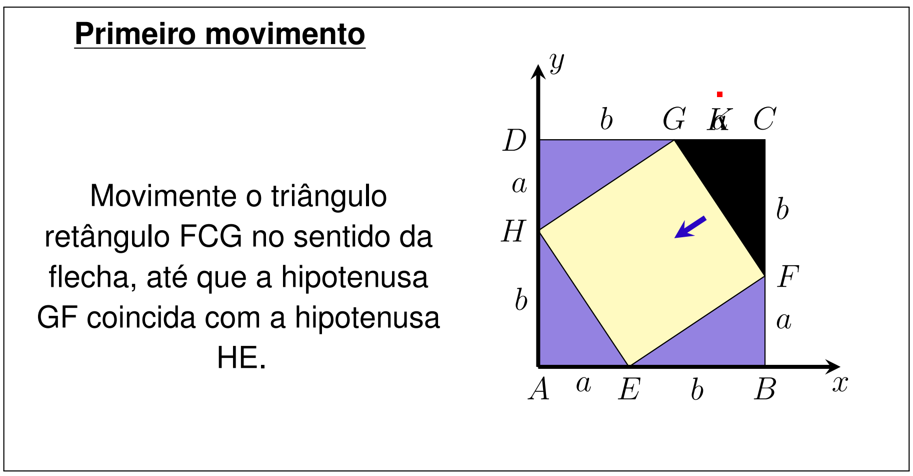
Para caracterizar esta translação iremos adotar um sistema de eixos cartesianos de modo que a origem do sistema coincida com o ponto A do quadrado; o eixo das abscissas coincidirá com a reta definida pelos pontos A e B; e o eixo das ordenadas será adotado como a reta que passa pelos pontos A e D.

Em relação ao sistema adotado, os ponto E e F tem coordenadas:

$$E = (a, 0); \tag{5.31}$$

$$F = (a + b, a). \tag{5.32}$$

Figura 34 – A translação ocorre na direção de FE



Fonte: Produzido pelo autor.

Da instrução passada na Figura 34, segue que um vetor que caracteriza a translação é:

$$\vec{v} = \overrightarrow{FE}. \tag{5.33}$$

Utilizando as coordenadas apresentadas em (5.31) e (5.32), temos:

$$\vec{v} = (a - (a+b), 0 - a) \Rightarrow \vec{v} = (-b, -a)$$

Deste modo, sobre os pontos P, pertencentes ao interior e a fronteira do triângulo retângulo FCG, aplicaremos a translação dada por:

$$T_{\vec{v}}(P) = P + (-b, -a) \tag{5.34}$$

Por exemplo, aplicando (5.34) no ponto $C = (a+b, a+b)$:

$$T_{\vec{v}}(C) = C + (-b, -a) = (a+b, a+b) + (-b, -a) = (a, b)$$

que corresponde o ponto K apresentado na Figura 34. Já aplicando (5.34) no ponto $F = (a+b, a)$ temos:

$$T_{\vec{v}}(F) = F + (-b, -a) = (a+b, a) + (-b, -a) = (a, 0)$$

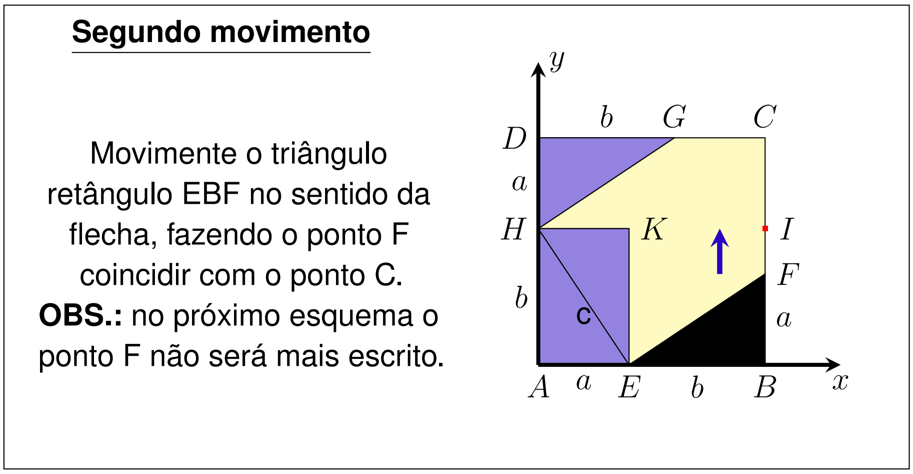
que corresponde ao ponto E apresentado na Figura 34. Por fim, aplicando (5.34) no ponto $G = (b, a+b)$, encontramos:

$$T_{\vec{v}}(G) = G + (-b, -a) = (b, a+b) + (-b, -a) = (0, b)$$

que corresponde ao ponto H, conforme é possível constatar pela Figura 34. Portanto, o triângulo retângulo FCG é transportado sobre o triângulo retângulo EKH.

5.5.1.2 A segunda translação

Figura 35 – A translação ocorre paralela ao lado BC



Fonte: Produzido pelo autor.

Mantendo o sistema de referência utilizados na subseção 5.5.1.1 as coordenadas dos pontos C e F são:

$$C = (a + b, a + b) \tag{5.35}$$
$$F = (a + b, a). \tag{5.36}$$

Um vetor que caracteriza a translação, neste segundo caso, é

$$\vec{w} = \overrightarrow{FC} \tag{5.37}$$

Com as coordenadas apresentadas em (5.35) e (5.36) o vetor $\vec{w}$ fica determinado como segue

$$\vec{w} = ((a + b) - (a + b), (a + b) - a) = (0, b).$$

Deste modo, a translação que estamos procurando é:

$$T_{\vec{w}}(P) = P + (0, b), \tag{5.38}$$

onde P é um ponto do triângulo EBF.

Com auxílio da Figura 35, percebemos que $E = (a, 0)$ será levado em $K = (a, b)$ e $B = (a + b, 0)$ será levado em $I = (a + b, b)$. Já, na instrução passada aos alunos, afirmamos que $F = (a + b, a)$ é levado em $C = (a + b, a + b)$. Com efeito, aplicando (5.38) em E

$$T_{\vec{w}}(E) = E + (0, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) = K,$$

conforme previsto. Já, aplicando (5.38) em B obtemos

$$T_{\vec{w}}(B) = B + (0, b) = (a + b, 0) + (0, b) = (a + b, b) = I,$$

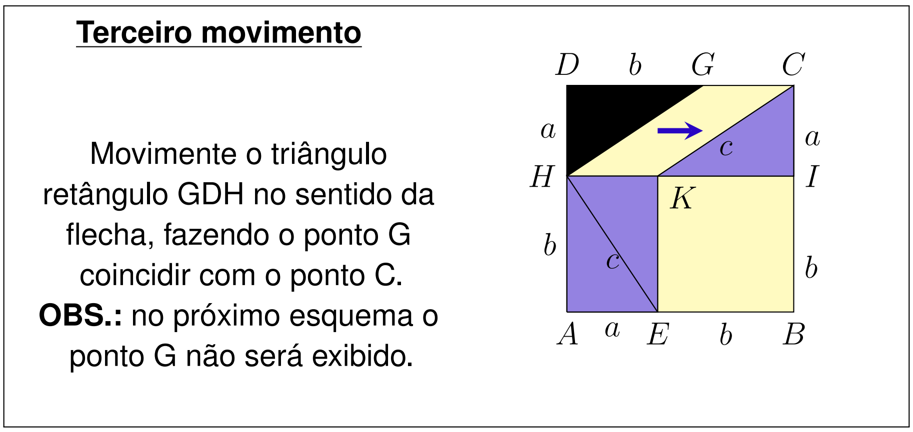
estando I presente na Figura 35. Aplicando $T_{\vec{w}}$ no ponto F:

$$T_{\vec{w}}(F) = F + (0, b) = (a + b, a) + (0, b) = (a + b, a + b) = C,$$

conforme desejado. Portanto, o triângulo retângulo EBF é transladado no triângulo retângulo KIC.

5.5.1.3 A terceira translação

Figura 36 – A translação ocorre paralela ao lado DC



Fonte: Produzido pelo autor.

Neste último caso, um vetor de translação é determinado pelos pontos:

$$G = (b, a+b); \tag{5.39}$$
$$C = (a+b, a+b), \tag{5.40}$$

e será:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{GC}. \tag{5.41}$$

Substituindo (5.39) e (5.40) em (5.41), obtemos:

$$\overrightarrow{u} = ((a+b) - b, (a+b) - (a+b)) = (a, 0).$$

Logo, a translação é

$$T_{\overrightarrow{u}}(P) = P + (a, 0). \tag{5.42}$$

Para terminar, iremos aplicar $T_{\overrightarrow{u}}$ em $G = (b, a+b)$, $D = (0, a+b)$ e $H = (0, b)$ para constatar que o triângulo GDH é transladado para CJK, onde $J = (a, a+b)$ aparece na Figura 33, que representa a disposição final dos triângulos retângulos.

- Para o ponto G

  $$T_{\overrightarrow{u}}(G) = G + (a, 0) = (b, a+b) + (a, 0) = (a+b, a+b).$$

  Logo, o ponto G é levado em C.

- Para o ponto D

  $$T_{\overrightarrow{u}}(D) = D + (a, 0) = (0, a+b) + (a, 0) = (a, a+b).$$

  Logo, o ponto D é levado em J, conforme representado na Figura 33.

- Para o ponto H

  $$T_{\overrightarrow{u}}(H) = H + (a, 0) = (0, b) + (a, 0) = (a, b).$$

  Logo, o ponto H é transladado em K.

Portanto, $T_{\overrightarrow{u}}$ translada o triângulo GDH em CJK; como o triângulo GDH é retângulo, segundo (5.4.2), CJK é um triângulo retângulo. Além disso, como $T_{\overrightarrow{u}}$ é uma isometria, conforme (5.4.1), logo esses triângulos são congruentes.

5.5.2 Comparando as figuras

Após o trabalho **intuitivo** que o aluno desenvolve com a translação dos triângulos, descrito na seção 5.5, ele deverá comparar a figura que representa a disposição inicial, Figura 30, com a figura que representa a disposição final, Figura 33. Como o quadrado $ABCD$ permanece inalterado em toda a atividade [10], não ocorrendo deformação

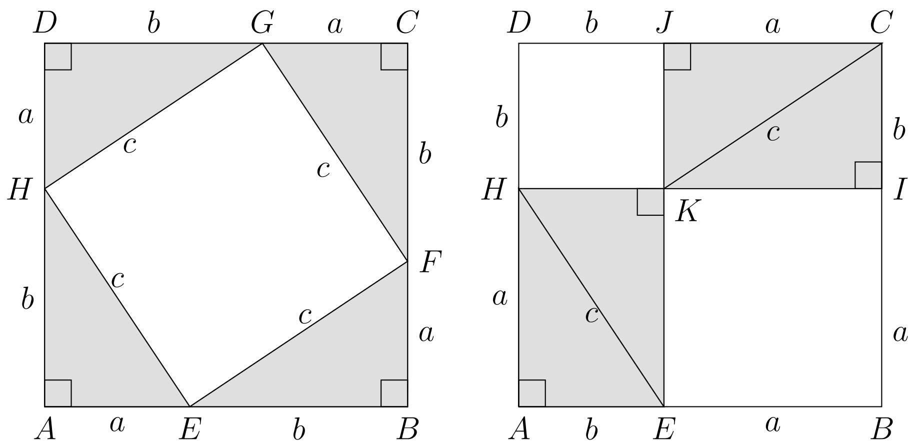
[10] Nas imagens da Figura 31, o quadrado $ABCD$ representa a base em cartolina amarela.

do mesmo e, além disso, as translações dos triângulos HAE, EBF, FCG e GDH ocorrem sempre no interior do quadrado $ABCD$ de forma tal que não se sobreponham, ou seja, são sempre figuras disjuntas, então a região não coberta pelos quatro triângulos retângulos citados terá sempre a mesma área. De fato, desde que os triângulos não se sobreponham um ao outro, a região não coberta pelos quatro triângulos terá área dada por:

$$\acute{A}rea_{(DaRegi\tilde{a}oN\tilde{a}oCoberta)} = \acute{A}rea_{(\Box ABCD)} - \left(\acute{A}rea_{\triangle 1} + \acute{A}rea_{\triangle 2} + \acute{A}rea_{\triangle 3} + \acute{A}rea_{\triangle 4}\right). \tag{5.43}$$

Figura 37 – Observe!

(a) Figura inicial (b) Figura final



Fonte: Produzido pelo autor.

Com auxílio da Figura 37, notamos que:

1. na Figura 37a:
   a) o quadrado $EFGH$ é a região não coberta;
   b) os triângulos são [11]:

$$\triangle 1 \ \acute{e} \ o \ \triangle HAE; \tag{5.44}$$
$$\triangle 2 \ \acute{e} \ o \ \triangle EBF; \tag{5.45}$$
$$\triangle 3 \ \acute{e} \ o \ \triangle FCG; \tag{5.46}$$
$$\triangle 4 \ \acute{e} \ o \ \triangle GDH; \tag{5.47}$$

cujas áreas são iguais, pois já sabemos que são triângulos congruentes.Então

$$\begin{aligned} \acute{A}rea_{\triangle 1} + \acute{A}rea_{\triangle 2} + \acute{A}rea_{\triangle 3} + \acute{A}rea_{\triangle 4} &= \\ \acute{A}rea_{\triangle HAE} + \acute{A}rea_{\triangle EBF} + \acute{A}rea_{\triangle FCG} + \acute{A}rea_{\triangle GDH} &= \\ 4.\acute{A}rea_{(DoTri\hat{a}nguloRet\hat{a}nguloDeCatetos\ a\ e\ b)} &= \\ 4.\frac{a.b}{2} &= 2ab \end{aligned} \tag{5.48}$$

[11] O símbolo $\triangle$ representa a palavra “triângulo” e foi usado só para ficar condizente com a equação (5.43)

Logo, a equação (5.43) fica

$$\acute{A}rea_{(\square EFGH)} = \acute{A}rea_{(\square ABCD)} - 2ab. \tag{5.49}$$

2. na Figura 37b

   a) os quadrados $EBIK$ e $JDHK$ compõem a região não coberta;

   b) os triângulos são

$$\triangle 1 \text{ é o } \triangle HAE; \tag{5.50}$$
$$\triangle 2 \text{ é o } \triangle HKE; \tag{5.51}$$
$$\triangle 3 \text{ é o } \triangle KIC; \tag{5.52}$$
$$\triangle 4 \text{ é o } \triangle CJK; \tag{5.53}$$

Então, para a disposição apresentada na Figura 37b, temos

$$\begin{aligned} \acute{A}rea_{\triangle 1} + \acute{A}rea_{\triangle 2} + \acute{A}rea_{\triangle 3} + \acute{A}rea_{\triangle 4} &= \\ \acute{A}rea_{\triangle HAE} + \acute{A}rea_{\triangle HKE} + \acute{A}rea_{\triangle KIC} + \acute{A}rea_{\triangle CJK} &= \\ 4.\acute{A}rea_{(DoTri\hat{a}nguloRet\hat{a}nguloDeCatetos\ a\ e\ b)} &= \\ 4.\frac{a.b}{2} &= 2ab \end{aligned} \tag{5.54}$$

Logo, a equação (5.43) tem o seguinte aspecto

$$\acute{A}rea_{(\square EBIK)} + \acute{A}rea_{(\square HKJD)} = \acute{A}rea_{(\square ABCD)} - 2ab. \tag{5.55}$$

Das equações obtidas em (5.49) e (5.55) resulta que:

$$\acute{A}rea_{(\square EFGH)} = \acute{A}rea_{(\square EBIK)} + \acute{A}rea_{(\square HKJD)} \tag{5.56}$$

conforme afirmamos acima.

Por outro lado, conforme evidencia a Figura 37, o quadrado $EFGH$ tem lado c, enquanto os quadrados $EBIK$ e $HKJD$ tem lado b e a, respectivamente. Assim, a equação (5.56) pode ser resumida como abaixo:

$$c^2 = b^2 + a^2 \tag{5.57}$$

estabelecendo a relação de Pitágoras para um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c.

O aluno, por sua vez, tinha o oportunidade de ir direto para a equação (5.57). Para isso deveria seguir atentamente as instruções passadas na folha de atividade e observar com atenção a Figura 37, registrando sua resposta na tabela que consta do final da Atividade A.3. Abaixo, temos a tabela com uma possível resposta:

Tabela 4 – Tabela a ser preenchida pelo aluno ao final da Atividade A.3, bem como possível resposta.

Escreva abaixo a relação entre as áreas.		
Área do quadrado EFGH $c.c = c^2$	Área do quadrado HKJD $a.a = a^2$	Área do quadrado EBIK $b.b = b^2$
A relação entre as áreas é $c^2 = a^2 + b^2$		

Fonte: Produzido pelo autor.

5.6 Aceitação por parte dos alunos

Apesar de recorrermos à isometria e à translação para tentar preencher a “lacuna” entre a figura inicial, apresentada pela Figura 37a, e a figura final, Figura 37b, o trabalho que relegamos ao aluno não era de todo árduo, segundo o ponto de vista do professor. Deste modo, é conveniente registrar a aceitação desta atividade por parte dos alunos, como fizemos nos capítulos anteriores. A tabela abaixo procura descrever essa informação.

Tabela 5 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.3.

O grupo gostou dessa atividade ?			
	Não gostaram	Gostaram um pouco	Gostaram
Número de duplas	4	10	16
Como o grupo classifica essa atividade ?			
	Média	Fácil	Difícil
Número de duplas	13	14	3
Total de alunos = 60			

Fonte: Produzido pelo autor.

É possível perceber pela Tabela 5, que houve uma boa aceitação da atividade, agradando a maioria dos alunos, já que 26 duplas responderam que “gostaram um pouco” ou “gostaram” da atividade.

6 A quarta aula

6.1 Introdução

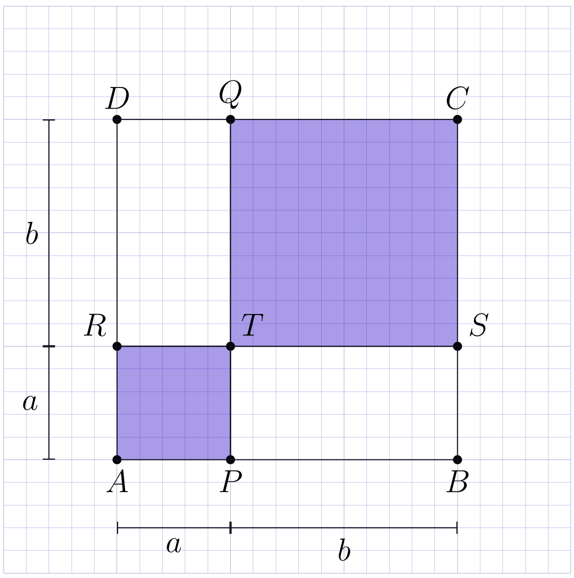
A Atividade A.4 tem como objetivo:

1. relembrar e fixar o desenvolvimento do quadrado da soma, $(a+b)^2$, para os alunos que já tiveram contato com esse produto notável;

2. apresentar dois modos diferentes de desenvolver o quadrado da soma, de forma que os alunos que não tem conhecimento deste produto notável escolham o que mais se sentirem confortáveis para desenvolver.

A Atividade A.4 justifica-se pelo fato de que na próxima aula desenvolveremos a Atividade A.5, na qual o aluno fará uso do quadrado da soma para obter a relação conhecida como Teorema de Pitágoras. Além disso, a experiência mostra que esse é um daqueles resultados, entre tantos outros conhecidos por nós, que é aconselhável lembrar-se imediatamente quando de sua necessidade, atitude essa que facilita muitíssimo o entendimento e a resolução dos mais variados resultados e exercícios.

Figura 38 – Quadrado de lado medindo $(a+b)$ dividido em dois quadrados, um de lado a, outro de lado b, além de dois retângulos de dimensões a e b; quatro partes disjuntas



Fonte: Produzido pelo autor.

No Ensino Fundamental, esse conteúdo é tratado durante o segundo bimestre do oitavo ano e, costumeiramente aparece no capítulo de título *Produtos notáveis*. No Ensino Médio, esse conteúdo é generalizado pela fórmula do binômio de Newton, onde procura-se desenvolver $(a+b)^n$, para $n \in \mathbb{N}$. No material oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, são passadas as seguintes orientações:

> É importante que o aluno entenda que a igualdade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ é uma forma simplificada de se calcular o produto $(a+b)(a+b)$ *sem ter que fazer o seu desenvolvimento completo*[1]. Contudo, a simples memorização dessas expressões, desprovida de significado, não constituiu o melhor caminho para a compreensão da álgebra pelos alunos. Nesse sentido, propomos que o professor explore o significado geométrico dos produtos notáveis e sua relação com o trinômio quadrado perfeito. (MACHADO e outros., 2009, p.19)

6.2 Sobre a aula

A Atividade A.4 foi aplicada no dia 13 de novembro de 2013 no 8ºano C e 8ºD. Iniciamos a aula organizando o ambiente, formando as duplas, já definidas pelos alunos. Logo em seguida, as folhas de atividade foram distribuídas, ocorrendo a leitura coletiva do material. Seguiram-se alguns minutos para que os alunos colocassem suas dúvidas em relação ao texto. Não havendo manifestações por parte dos grupos, foi dado continuidade a atividade com o trabalho dos alunos.

6.3 Sobre a atividade

6.3.1 Visão geométrica de $(a+b)^2$

Na folha de atividade do aluno consta uma tabela composta por quatro figuras. Uma delas é um quadrado de lado $(a+b)$ onde a e b são números reais positivos. Representamos esse quadrado na primeira coluna. Com auxílio de retas paralelas aos lados, dividimos esse quadrado nas figuras abaixo:

(1) um quadrado de lado a, desenhado na segunda coluna;

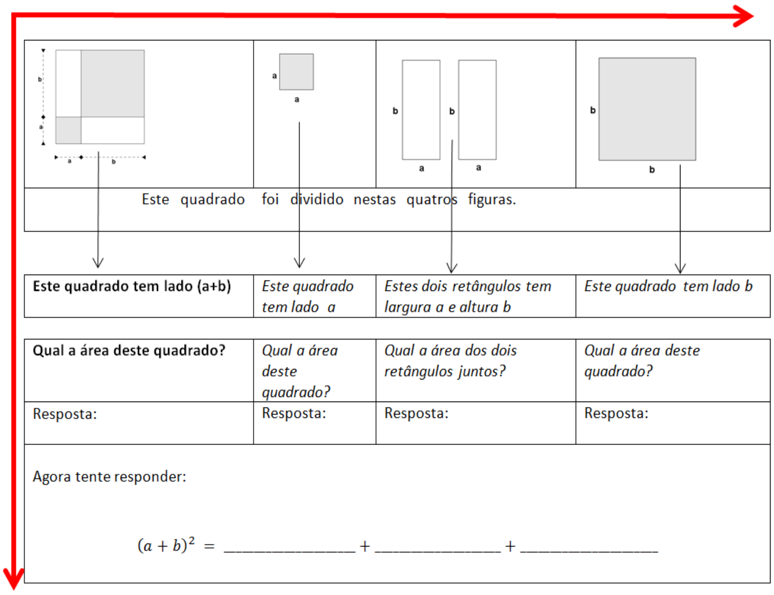
(2) dois retângulos de lado a e b, desenhados na terceira coluna;

(3) um quadrado de lado b, desenhado na quarta coluna;

onde, as figuras mencionadas em (1), (2) e (3) são duas a duas disjuntas e podem ser visualizadas na Figura 38.

[1] Grifo meu.

Figura 39 – Imagem da tabela trabalhada na Atividade A.4. As setas vermelhas indicam o sentido de leitura da tabela.



Este quadrado foi dividido nestas quatros figuras.

Este quadrado tem lado (a+b)	*Este quadrado tem lado a*	*Estes dois retângulos tem largura a e altura b*	*Este quadrado tem lado b*

Qual a área deste quadrado?	*Qual a área deste quadrado?*	*Qual a área dos dois retângulos juntos?*	*Qual a área deste quadrado?*
Resposta:	Resposta:	Resposta:	Resposta:
Agora tente responder: $(a+b)^2 =$ ____________ + ____________ + ____________			

Fonte: Produzido pelo autor.

Para desenvolver a atividade, o aluno devia ler a tabela tanto na horizontal, quanto na vertical. Horizontalmente percebe-se a divisão do quadrado de lado $(a+b)$ na figuras mencionadas acima nos itens (1), (2) e (3) acima. Verticalmente, em cada coluna é definida exatamente qual é a figura e solicitado o cálculo de sua área. Deste modo, as respostas esperadas são

Tabela 6 – Tabela contendo as resposta para a primeira parte da Atividade A.4.

Este quadrado tem lado $(a+b)$	Este quadrado tem lado a	Estes dois retângulos tem largura a e altura b	Este quadrado tem lado b

Qual a área deste quadrado?	Qual a área deste quadrado?	Qual a área dos dois retângulos juntos?	Qual a área deste quadrado?
Resposta: $(a+b)^2$	Resposta: a^2	Resposta: $2ab$	Resposta: b^2
Agora tente responder: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$			

Tabela 7 – Tabela informando o número de acerto e erros relativa à visão geométrica

	Resposta correta	Resposta errada
Número de duplas	24	11

6.3.2 Uma leitura diferente de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Nossa leitura textual ocorre da esquerda para a direita, facilitando o nosso entendimento de determinadas relações matemáticas de um modo e escondendo outras interpretações. Por exemplo, o quadrado da soma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{6.1}$$

costumeiramente é escrito como apresentado na equação (6.1), facilitando ser pensada como a expansão de $(a+b)^2$ no trinômio $a^2 + 2ab + b^2$. Mas, a igualdade nos permite um outro olhar, como o que escrevemos abaixo:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2. \tag{6.2}$$

De fato, a relação de igualdade, simbolicamente representada por $=$, é uma relação de equivalência, ou seja, obedece as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva escritas a seguir:

$$1)\ \forall \alpha,\ \alpha = \alpha; \tag{6.3}$$

$$2)\ \forall \alpha,\ \beta;\ \alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha; \tag{6.4}$$

$$3)\ \forall \alpha, \beta, \theta; \alpha = \beta\ e\ \beta = \theta \Rightarrow \alpha = \theta. \tag{6.5}$$

A ideia transmitida na igualdade (6.2), condizente com a Figura 38, é a de montar quadrado. Tomando-se um quadrado de área a^2, dois retângulos de área ab e um quadrado de área b^2, podemos montar um quadrado de área $a^2 + 2ab + b^2$, apenas organizando estas áreas conforme apresentado a Figura 38. Este novo quadrado terá lado $a+b$, logo, área $(a+b)^2$. A ideia de montar quadrado é largamente explorada no estudo da equações quadráticas, contudo, como o tempo de aprendizagem do aluno não está no mesmo compasso do tempo cronológico, não houve oportunidade para trabalhar tal conceito ficando apenas registrada aqui.

6.4 Visão algébrica de $(a+b)^2$

A segunda forma de desenvolver $(a+b)^2$ tem forte apelo algébrico. Inicialmente o aluno deve entender o significado do expoente 2, intimamente ligado à definição abaixo.

Definição 6.4.1. *Seja a um número real, e n um natural. Se:*

a) $n = 0$ *e* $a \neq 0$, *então* $a^n = a^0 = 1$;

b) $n \neq 0$, *então* $a^n = \underbrace{a.a.a \cdots a}_{n \text{ fatores iguais}}$

Diante do significado dado pela definição (6.4.1), vem o significante, assim escrevemos:

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) \tag{6.6}$$

Aplicando a distributiva em (6.6), obtemos:

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = (a+b).a + (a+b).b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cada visão sobre $(a+b)^2$ tem seu valor particular, ao mesmo tempo que se completam. Contudo, a visão algébrica possui um caráter simples, só importando que os elementos a e b estejam imersos em um corpo. Por exemplo, na seção 6.5, fizemos uso desta particularidade para obter alguns triângulos pitagóricos. A Tabela 8 mostra o número de acertos e erros relativos à visão algébrica.

Tabela 8 – Tabela informando o número de acertos e erros relativa à visão algébrica

	Resposta correta	Resposta errada
Número de duplas	29	6

Entre a Tabela 7 e a Tabela 8 percebemos uma flutuação de cinco duplas, que migraram do grupo com resposta errada para o grupo com resposta correta. Num universo de 35 duplas, essa fluatação é aceitável e não indica nada de especial em relação à parte da atividade que trabalha a visão algébrica. Para terminar, devemos lembrar que a visão algébrica aparece em segundo plano, o que pode ter facilitado para essas cinco duplas que perceberiam facilmente o que estava ocorrendo.

6.5 Aplicação - outros triângulos pitagóricos

Uma aplicação do quadrado da soma é apresentada abaixo, onde buscamos uma regra para obter triângulos pitagóricos. Segundo Loomis (1940, p.17), o processo abaixo se deve Dr. Antemas Martin (1835-1918), tendo sido publicado pela revista *The Mathematical Magazine*, 1891, Vol. II, Nº5, na página 69. Outra fonte digna de nota, segundo Loomis (1940, p.17), encontra-se no artigo de Leonard E. Dickson (1874-1954), publicado pela revista *The American Mathematical Monthly*, 1894, Vol. I, Nº1, na página 6.

O objetivo é buscar dois quadrados perfeitos, cuja soma resulta também num quadrado perfeito, deste modo, podemos obter outros triângulos cujos lados são três inteiros positivos que obedecem a relação de Pitágoras, conhecidos como triângulos pitagóricos. Abaixo damos uma visão do processo descrito por Loomis (1940, p. 17–20) e atribuído ao Dr. Martin.

6.5.1 Regra atribuída ao Dr. Antemas Martin

[2]

Vamos considerar a e b dois números positivos. Para estes temos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Somando e subtraindo $2ab$ ao segundo membro desta igualdade, obtemos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ab - 2ab$$

[2] No livro *The Pythagorean Proposition*, escrito por Loomis (1940), podemos encontrar essa e outras regras singulares, atribuídas a muitas personalidades históricas.

Logo,

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \tag{6.7}$$

Necessitamos que $4ab$ seja um quadrado perfeito. Para isso é conveniente termos $a = mx^2$ e $b = my^2$, onde x e y são inteiros positivos, $m \neq 0$, com $x > y$, os quais substituiremos em (6.7):

$$\left(mx^2 + my^2\right)^2 = \left(mx^2 - my^2\right)^2 + 4.mx^2.my^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2\left(x^2 + y^2\right)^2 = m^2\left(x^2 - y^2\right)^2 + 4.m^2.x^2.y^2 \tag{6.8}$$

Dividindo ambos os membros em (6.8) por m^2:

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 4.x^2.y^2 \tag{6.9}$$

Fazendo $A = (x^2 + y^2)$, $B = (x^2 - y^2)$ e $C = 2.x.y$, temos que $A^2 = B^2 + C^2$. Além disso, A, B e C formam um triângulo. De fato, consideremos os itens abaixo:

1. temos $x > y$, que multiplicaremos por $2x > 0$, pois $x > 0$. Obtemos $2x^2 > 2xy$. Somando e subtraindo y^2 do primeiro, ficamos com $2x^2 + y^2 - y^2 > 2xy$. Logo, $x^2 + y^2 + x^2 - y^2 > 2xy$. Segue que $C < A + B$;
2. de $y < x$ e sendo $y > 0$, segue $2y^2 < 2xy$. Logo $y^2 < -y^2 + 2xy$. Somando x^2 em ambos os membros, obtemos $x^2 + y^2 < x^2 - y^2 + 2xy$. Segue que $A < B + C$;
3. x e y são positivos. Logo $x + y$ é positivo. Multiplicando $x + y > 0$ por $2y$, obtemos $2y\,(x + y) > 0$, ou seja $2xy + 2y^2 > 0$. Segue que $2xy + y^2 > -y^2$. Somando x^2 em ambos os membros ficamos com $2xy + y^2 + x^2 > x^2 - y^2$. Ou seja, $B < A + C$.

Assim, pelos itens (1), (2) e (3) acima, A, B e C formam um triângulo, para o qual sabemos ser verdade que $A^2 = B^2 + C^2$. Logo, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, o triângulo de lados A, B e C constitui um triângulo retângulo. Por exemplo, para $x = 2$ e $y = 1$, temos $A = 2^2 + 1^2 = 5$, $B = 2^2 - 1^2 = 3$ e $C = 2.2.1 = 4$, correspondendo ao triângulo 3, 4 e 5 já conhecido. No Apêndice C apresentamos mais alguns valores para A, B e C.

Loomis (1940) também nos apresenta outras regras para obter valores numéricos inteiros e positivos que obedecem a igualdade

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{6.10}$$

Entre as personalidades podemos citar Pitágoras, Platão, Euclides, o matemático inglês Francis Maseres (1731-1824) e Dickson.

6.5.2 Regra de Pitágoras

Proposição 6.5.1 (Regra de Pitágoras segundo Loomis (1940))**.** *Seja n um número ímpar. Os números n, $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$ satisfazem* (6.10).

Demonstração. De fato

$$
\begin{aligned}
n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 &= n^2 + \frac{n^4-2n^2+1}{4} = \frac{4n^2+n^4-2n^2+1}{4} \\
&= \frac{n^4+2n^2+1}{4} = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

□

Notemos que para $n = 1$ encontramos a terna $n = 1$, $\frac{n^2-1}{2} = 0$ e $\frac{n^2+1}{2} = 1$, que satisfaz a relação (6.10). Contudo, claramente a terna 1, 0, 1 não formam um triângulo. Somos levados a nos questionar, quando os números n, $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$ formam um triângulo? A resposta para essa pergunta é obtida da condição de existência de um triângulo, que quando analisada nos informa ser necessário impor $n > 1$. Em outras palavras, os números n, $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$ formam um triângulo pitagórico desde que n seja ímpar e $n > 1$. De fato:

1. $n > 1 \Rightarrow n < n^2 = \frac{2n^2}{2} \Rightarrow n < \frac{2n^2+1-1}{2} = \frac{n^2+1+n^2-1}{2} \Rightarrow n < \frac{n^2+1}{2} + \frac{n^2-1}{2}$;
2. $n > 1 \Rightarrow 2 < 2n \Rightarrow n^2 + 2 < n^2 + 2n \Rightarrow n^2 + 1 < 2n + n^2 - 1 \Rightarrow \frac{n^2+1}{2} < \frac{2n+n^2-1}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{n^2-1}{2} \Rightarrow \frac{n^2+1}{2} < n + \frac{n^2-1}{2}$;
3. $n > 1 > -1 \Rightarrow 0 < n+1 \Rightarrow 0 < 2n+2 \Rightarrow n^2 < n^2+2n+2 \Rightarrow n^2-1 < n^2+2n+1 \Rightarrow \frac{n^2-1}{2} < \frac{2n+n^2+1}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{n^2+1}{2} \Rightarrow \frac{n^2-1}{2} < n + \frac{n^2+1}{2}$.

Além disso, como $n > 1$ é ímpar temos que n, $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$ são inteiros, o que garante serem os triângulos pitagóricos.

Portanto, para n ímpar, $n > 1$, os itens (1), (2) e (3) acima nos informam que os números da forma n, $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$ formam um triângulo; além disso, como essas ternas obedecem a relação (6.10), pela recíproca do Teorema de Pitágoras, proposição (2.2.2), esse triângulo é retângulo.

6.5.3 A regra de Pitágoras é um caso particular da regra atribuída ao Dr. Antemas Martin

Consideremos a equação (6.9) atribuída ao Dr. Martin. Substituindo x por n e y por 1, onde continuaremos adotando a restrição $n > 1$ e n ímpar, obtemos:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 + 4.x^2.y^2 \Rightarrow \left(n^2+1^2\right)^2 = \left(n^2-1^2\right)^2 + 4.n^2.1^2$$

Dividindo ambos os membros por 4 e simplificando, chegamos em:

$$\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 + n^2$$

que é a regra de Pitágoras.

No Apêndice D, podemos encontrar mais alguns valores calculados segundo a regra de Pitágoras, bem como um outro fato curioso.

6.6 Aceitação por parte dos alunos

Tabela 9 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.4.

O grupo gostou dessa atividade ?			
	Não gostaram	Gostaram um pouco	Gostaram
Número de duplas	12	11	12
Como o grupo classifica essa atividade ?			
	Média	Fácil	Difícil
Número de duplas	18	11	6
Total de alunos = 70			

Fonte: Produzido pelo autor.

Segundo a opinião dos alunos, a atividade é pelo menos média, pois 18 duplas responderam que atividade é “média” e 11 acharam-na “fácil”. O número de duplas que gostaram pelo menos um pouco da atividade, continuou semelhante ao das aulas anteriores.

7 A quinta aula

7.1 Introdução

A Atividade A.5 foi aplicada no dia 13 de novembro de 2013 nas classes 8ºC e 8ºD. O trabalho ocorreu em duplas, formadas pelos próprios alunos. A atividade foi realizada logo após o termino da anterior e teve início com a distribuição do material, que consistiu basicamente da folha de atividade, umas poucas réguas para quem necessitasse e lápis de cor para quem não tivesse. Logo após, fizemos uma leitura coletiva de todas as folhas, de modo a anteceder algum erros no texto. Não houve nenhuma manifestação de dúvidas por parte dos alunos, mesmo o professor tendo solicitado que colocassem suas observações.

Com esta aula encerramos um grupo de atividades que tinham um objetivo em comum: justificar, ao menos de forma intuitiva, o Teorema de Pitágoras. Conforme já apresentamos no Capítulo 3, este grupo de atividades adota como referencial alguns livros didáticos e paradidáticos do quais destacamos o livro *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos* de Barbosa (1993); o trabalho de Campos (2001), *Transformando a prática das aulas de matemática* e o livro *Descobrindo o Teorema de Pitágoras* de Imenes (1992). Tal qual os autores citados, que tentam atingir o mais amplo público possível, o professor também espera atingir o maior número de alunos. Certamente a totalidade é utopia. Desta forma, a opção foi por manter as atividades apresentadas nos livros, adaptando-as às necessidades conjuntas tanto das classes, quanto do trabalho que devemos desenvolver para o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos.

7.2 Da atividade

Essa atividade está dividida em 4 partes:

1. apresentação;
2. atividade em si;
3. fechamento;
4. avaliação sobre a aceitação.

7.2.0.1 Apresentação

Na apresentação da Atividade A.5, um pequeno texto procura resgatar o que foi desenvolvido:

> ...você realizou [três][1] atividades de modo a estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo retângulo ... (seção A.5)

[1] No texto original está:"...você realizou uma atividade de modo a estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo retângulo ..."

e situar o aluno no que faremos.

> Nesta aula, você irá obter tal relação algebricamente e de um modo mais rápido. (seção A.5)

Sugerindo que o aluno:

> ...deve seguir os passos ... atentamente. (seção A.5)

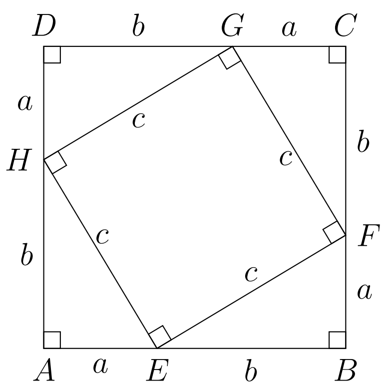
Num primeiro instante, o texto de apresentação abre a oportunidade para relembrar a Atividade A.1 e a Atividade A.3, que também trataram da justificativa do Teorema de Pitágoras e deixaram evidente que há mais de uma forma para justificar este resultado. Também foi a ocasião oportuna para deixar claro aos alunos que o Teorema de Pitágoras só se aplica ao triângulos retângulos.

7.2.0.2 A atividade propriamente dita

7.2.0.2.1 Primeira parte:

Nesta primeira parte, o aluno deve desenhar a Figura 40 em uma folha de papel sulfite. A mudança do papel quadriculado, usado tanto na Atividade A.1 quanto na Atividade A.2, para o papel sulfite, faz com que os alunos tenham certo desconforto, já que construir um quadrado, apenas com régua, mesmo que graduada, é uma tarefa que pode ser mais trabalhosa do que parece[2]. Mas este desconforto gera o benefício de forçar o aluno buscar uma maior riqueza de detalhes ou propriedades da Figura 40.

Figura 40



Fonte: Produzido pelo autor.

7.2.0.2.2 Segunda parte:

Os detalhes ou propriedades, ao menos os necessários para o desenvolvimento da Atividade A.5 e apresentado na Figura 40, foram estudados também na Atividade A.2 e evidenciadas no Capítulo 3, sendo reforçados na segunda parte da Atividade A.5 por meio das instruções que se seguem.

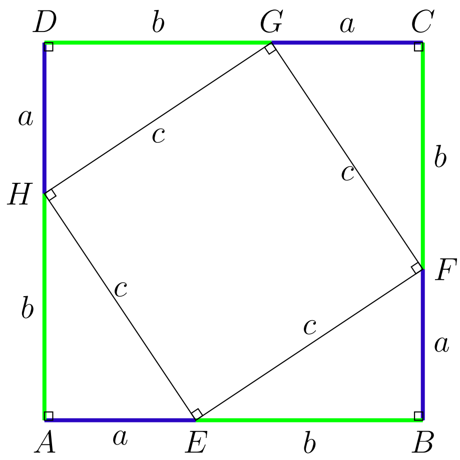
2 Uma opção é usar a linha imaginária que limita a folha como referência.

Instruções da segunda parte da Atividade A.5 - Na Tabela 10 encontramos as instruções passadas aos alunos, as quais buscam chamar a atenção para as propriedades apresentadas na Figura 41.

Tabela 10 – Tabela contendo as instruções da segunda parte da Atividade A.5

Localizar visualmente o lado AB;
O lado AB está dividido em duas partes: AE e EB. Pinte AE de azul. Pinte EB de verde.
Localizar visualmente o lado BC;
O lado BC está dividido em duas partes: BF e FC. Pinte BF de azul. Pinte FC de verde.
Localizar visualmente o lado CD;
O lado CD está dividido em duas partes: CG e GD. Pinte CG de azul. Pinte GD de verde.
Localizar visualmente o lado DA;
O lado DA está dividido em duas partes: DH e HA. Pinte DH de azul. Pinte HA de verde.

Figura 41 – Resposta orientada pela instruções passadas na segunda parte da Atividade A.5

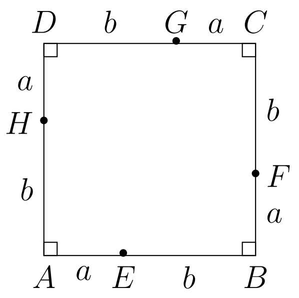


Fonte: Produzido pelo autor.

Após a releitura da já conhecida Figura 41, de imediato o aluno conclui que o quadrilátero $ABCD$ tem os lados medindo $a + b$. Além disso, nas folhas da Atividade A.5, passadas aos alunos, evidenciamos que os ângulos $\measuredangle DAB$, $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$ e $\measuredangle CDA$ são retos, facilitando a conclusão de que o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado. Ao final, solicitamos ao aluno que escreva a medida do lado AB e a área do quadrado $ABCD$.

Figura 42 – Figura mostrando o final da segunda parte

Após a tarefa acima, responda:

Qual o lado do quadrado ABCD? Escreva a resposta aqui: $a + b$	

Agora que você identificou o lado do quadrado ABCD, calcule sua área. (Obs.: recorde-se do quadrado da soma.)

Área_do_quadrado_ABCD = $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Fonte: Produzido pelo autor.

De outro modo, a atividade também procura orientar os alunos segundo o caso de congruência lado, ângulo, lado (LAL), já que é possível ao aluno notar, explicitamente, que todos os triângulos, HAE, EBF, FCG e GDH têm lados congruentes, como escrevemos a seguir: $AE \equiv BR \equiv CG \equiv DH$ e $HA \equiv EB \equiv FC \equiv GD$. Implicitamente, como os triângulos foram desenhados no "cantos" do quadrado, de modo que os vértices A, B, C e D sejam, ao mesmo tempo, vértices do quadrado $ABCD$ e dos triângulos HAE, EBF, FCG e GDH respectivamente. Isto é, intuitivamente o aluno "lê", nos triângulos, os ângulos $\measuredangle HAE, \measuredangle EBF, \measuredangle FCG$ e $\measuredangle GDH$, concluindo, ingenuamente, que todos esses ângulos possuem medida igual à 90°.

7.2.0.2.3 Terceira parte:

Na "terceira parte" da Atividade A.5 o aluno passa a identifica as figuras envolvidas por nomes dados aos vértices.

Figura 43 – Ocorre a divisão mental da Figura 41

O quadrado ABCD está dividido em 5 figuras menores. Identifique-as pelas letras dos vértices. (Por exemplo, quadrado maior ABCD.)

- Triângulo retângulo: HAE
- Triângulo retângulo: EBF
- Triângulo retângulo: FCG
- Triângulo retângulo: GDH
- Quadrado menor: EFGH

Fonte: Produzido pelo autor.

A identificação mental iniciada com auxílio da Figura 43 prossegue com a pintura das figuras, conforme mostrado abaixo.

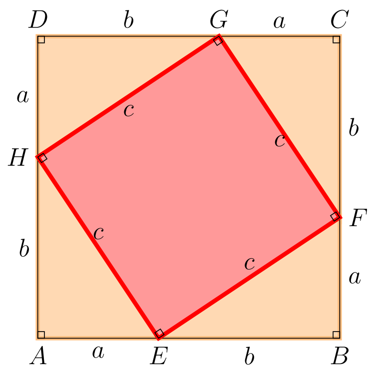
Figura 44 – A Figura 41 dividida com auxílio de cores, procurando mostrar os triângulos congruentes e o quadrado central, cujo lado coincide com a hipotenusa dos triângulos.

Agora, na figura abaixo, pinte:

✏ A hipotenusa de cada triângulo retângulo de **vermelho escuro;**

✏ O interior de cada triângulo de **laranja;**

✏ O interior do quadrado EFGH de **vermelho claro.**



Fonte: Produzido pelo autor.

Na "terceira parte", o aluno é levado a calcular a área de um triângulo, em particular o triângulo AEH, bem como a dizer, explicitamente, se os triângulos EBF, FCG e GDH tem área igual ao triângulo AEH.

Figura 45 – Figura contendo o cálculo da área dos triângulos.

Calcule a área do triângulo retângulo **AEH**. Para isso:

Diga qual é a base, escrevendo-a aqui:$AE = a$ (ou $AH = b$);

Diga qual é a altura do triângulo, escrevendo-a aqui:$AH = b$ (ou $AE = a$).

Complete a conta:

$$\acute{A}rea_{tri\hat{a}ngulo\,AEH} = \frac{base.altura}{2} = \frac{a.b}{2}$$

Responda: Os outros três triângulos, a saber: EBF, FCG e GDH tem área igual ao triângulo AEH?
(X) Sim ( ) Não

Fonte: Produzido pelo autor.

7.2.0.2.4 Quarta parte:

Por fim, a Figura 40 é dividida e suas parte separadas. Cuidadosamente, observando cada figura e associando com a equação abaixo iniciada, o aluno deve completar as contas, de modo a chegar no Teorema de Pitágoras. Para isso o aluno já deverá ter notado que:

1. o quadrado $ABCD$ tem lado medindo $a + b$;

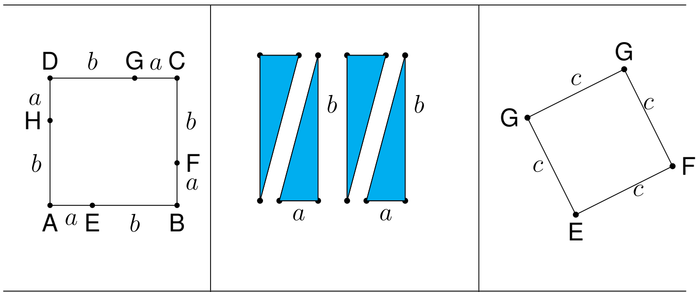
2. o quadrado $ABCD$ está dividido em cinco partes, sendo:

   a) quatro triângulos retângulos, de catetos a e b e hipotenusa c;

   b) um quadrado $EFGH$, cujos lados coincide com a hipotenusa dos triângulos HAE, EBF, FCG e GDH

   c) todos os triângulos HAE, EBF, FCG e GDH são congruentes, as hipotenusas $HA, EF, FGeGH$ possuem a mesma medida

Figura 46 – Após passar pelas etapas anteriores, o aluno deve tentar desenvolver a equação que resultará no Teorema de Pitágoras.



Esse é o quadrado ABCD.	Esses são os 4 triângulos retângulos (que formam dois retângulos).	Esse é o quadrado EFGH.

Complete a conta abaixo para obter a relação entre os lados do triângulo retângulo.

$$\overbrace{\acute{A}rea_{do\ quadrado\ ABCD}} = \overbrace{4.\acute{A}rea_{de\ um\ tri\hat{a}ngulo}} + \overbrace{\acute{A}rea_{do\ quadrado\ EFGH}}$$

$\Rightarrow\ (a+b)^2 = 4.\frac{a.b}{2} + c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$, como já esperavamos.

Fonte: Produzido pelo autor.

7.2.1 Fechamento

Durante a leitura das folhas da Atividade, conforme descrevemos na seção 7.1, tivemos a oportunidade de relembrar as atividades anteriores e, principalmente, chamar a atenção dos alunos sobre o fato de aplicarmos o teoremas de Pitágoras apenas em triângulos retângulos. Nenhuma menção a generalizações envolvendo a lei dos cossenos foi feita, já que isso extrapolaria em muito o nível que as classes se encontravam.

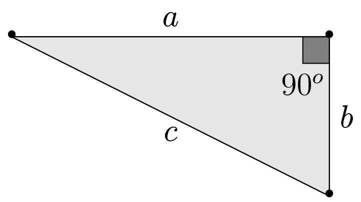
Na subseção 7.2.0.2 procuramos passar em revista ao que foi desenvolvido e tentamos justificar a atitude adotada na atividade por meio do caso congruência lado, ângulo, lado (LAL). Mais que isso, tentamos organizar a atividade de modo a seguir uma justificativa para a seguintes questões: os triângulos HAE, EBF, FCG e GDH são congruentes? O quadrilátero $EFGH$ é um quadrado? Já sabemos que as respostas para estas perguntas são afirmativas, tendo discutido esses pontos na seção 4.5. De uma maneira informal procuramos reunir o conhecimento de modo estruturado, para que o aluno tivesse uma atividade que o induzisse a justificar o Teorema de Pitágoras, não uma prova formal, mas uma ideia simples dos passos que deveria seguir. Pecamos em deixar pouco espaço para o aluno trabalhar determinados pontos de modo escrito. Por outro lado, a atividade cobrou (ou treinou) a competência leitora do aluno, mas cabe uma adaptação de modo a forçar o aluno a escrever mais. Contudo, é muito fácil passar do ponto didático ao fazer isso. Em nossos dias, é difícil para a maioria dos alunos justificar, mesmo que informalmente, o fato de que os ângulos internos do quadrilátero $EFGH$, são todos retos. Preparar uma atividade que tente justificar, ao menos, e não apenas mecanizar uma resultado matemático, tem se tornado um desafio de proporções gigantescas. Muitos autores de livros didáticos já decidiram não seguir por esse caminho, bem como uma grande maioria dos professores de matemática também adotaram atitude semelhante. Saindo desta linha de raciocínio, voltamos para o fechamento da atividade, que tem por objetivo limpar todo o percurso.

Assim, o aluno apenas deveria escrever o resultado final apresentado na Figura 47 no lugar adequado, objetivando fixar bem a relação entre os lados de um triângulo retângulo.

Figura 47 – Figura evidenciando o fechamento da Atividade.

Vamos recordar o objetivo:

Obter uma relação entre os lados do triângulo retângulo.



Essa relação é conhecida como Teorema de Pitágoras.

Se tudo ocorreu bem até aqui, o resultado da última conta que você fez é a relação procurada. Escreva-o dentro do retângulo abaixo:

Teorema de Pitágoras	$a^2 + b^2 = c^2$

Fonte: Produzido pelo autor.

7.3 Aceitação por parte dos alunos

Tabela 11 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.5.

O grupo gostou dessa atividade ?			
Número de duplas	Não gostaram 12	Gostaram um pouco 10	Gostaram 7
Como o grupo classifica essa atividade ?			
Número de duplas	Média 12	Fácil 5	Difícil 12
Total de alunos = 58			

Fonte: Produzido pelo autor.

Nesta atividade houve um aumento considerável de duplas que classificaram-na como difícil. Contudo, somando o número de duplas que assinalaram “gostaram” com o número de duplas que “gostaram um pouco” da atividade, temos o total de 17 duplas. Em partes, isso se deve ao fato de estarem realizando uma atividade em grupo, o que lhes é agradável, principalmente quando escolhem o parceiro, já que procuram os colegas com os quais podem conversar e se possível, realizar a atividade.

8 Sexta aula

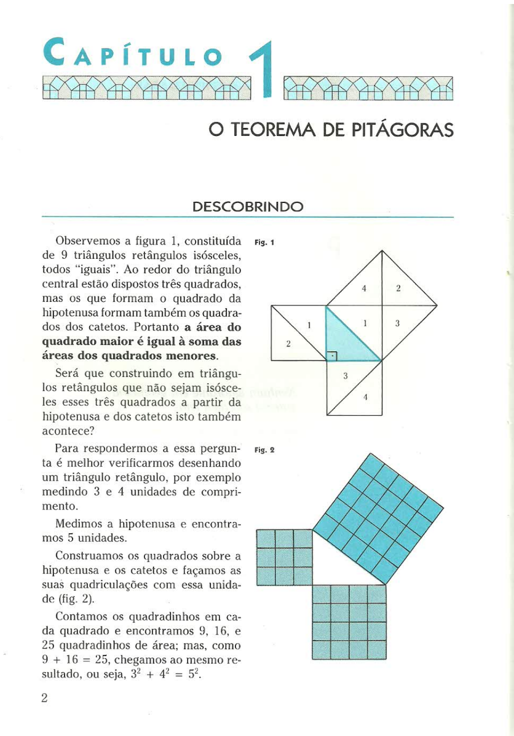
8.1 Introdução

Com a Atividade A.5, encerramos o ciclo no qual tentamos justificar o Teorema de Pitágoras. As aulas seguintes destinam-se a aplicar o resultado final obtido, ou seja, o Teorema de Pitágoras.

Iniciamos a Atividade A.6 lentamente, a princípio retomando a ideia trabalhada na Atividade A.1. Prosseguimos mais rapidamente, adotando o modo mais simples de trabalhar com o Teorema de Pitágoras sem contudo pagar o preço de abandonar a visão geométrica do teorema, a qual já faz parte do arsenal de conhecimento do aluno, ao menos intuitivamente.

A Atividade A.6 foi aplicada no dia 18 de novembro de 2013, nos oitavos anos C e D, durante um período de duas aulas para cada classe. Como todas as atividades passadas, também iniciei a aula organizando a classe em filas composta por duas carteiras, de modo a comportar as duplas e deixar livre o espaço para a circulação, quando da necessidade de atender algum aluno ou grupo. Logo após foram distribuídas as folhas que compõem a Atividade e que constam do Apêndice A.6, bem como algumas folhas de papel quadriculado e uma ou outra régua que os alunos necessitassem.

Figura 48 – O livro *Descobrindo padrões pitagóricos* tem uma leitura agradável e inspiradora.



CAPÍTULO 1

O TEOREMA DE PITÁGORAS

DESCOBRINDO

Observemos a figura 1, constituída de 9 triângulos retângulos isósceles, todos "iguais". Ao redor do triângulo central estão dispostos três quadrados, mas os que formam o quadrado da hipotenusa formam também os quadrados dos catetos. Portanto **a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores**.

Será que construindo em triângulos retângulos que não sejam isósceles esses três quadrados a partir da hipotenusa e dos catetos isto também acontece?

Para respondermos a essa pergunta é melhor verificarmos desenhando um triângulo retângulo, por exemplo medindo 3 e 4 unidades de comprimento.

Medimos a hipotenusa e encontramos 5 unidades.

Construamos os quadrados sobre a hipotenusa e os catetos e façamos as suas quadriculações com essa unidade (fig. 2).

Contamos os quadradinhos em cada quadrado e encontramos 9, 16, e 25 quadradinhos de área; mas, como $9 + 16 = 25$, chegamos ao mesmo resultado, ou seja, $3^2 + 4^2 = 5^2$.

2

Fonte: Barbosa (1993, p. 2)

8.2 Objetivo

Esta Atividade teve por objetivo calcular a diagonal de uma quadrado, trabalhando inicialmente casos específicos, já que trata do quadrado de lado $3cm$, na primeira parte, dos quadrados de lados $5cm$ e $7cm$, na segunda parte, e finaliza com o cálculo da diagonal de um quadrado de lado l.

Para cumprir o objetivo acima exposto, na primeira parte, adotamos a mesma visão geométrica trabalhada na Atividade A.1 e apresentada no livro *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos* de Barbosa (1993), cuja página que serviu de inspiração apresentamos na Figura 48. Na segunda parte da atividade incentivamos o aluno a tentar realizar os cálculos de uma forma mais rápida e tradicional.

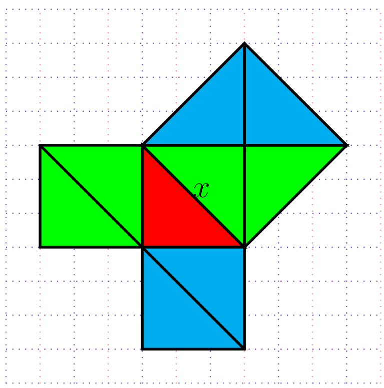
8.3 Primeira parte da Atividade A.6

Na primeira parte da Atividade A.6, propomos ao aluno que:

> calcule a diagonal de um quadrado de lados medindo $3cm$. (seção A.6)

Para realizar essa atividade, sugerimos que inicialmente sejam desenhados cinco quadrados de lados $3cm$. Estes quadrados serão identificados pelas cores verde, azul e vermelho, devendo o aluno pintar dois quadrados de verde, dois quadrados de azul e um de vermelho. Em cada quadrado será desenhada uma diagonal que o aluno chamará por x. Já é possível perceber o uso do Teorema de Pitágoras para calcular o valor de x, pois cada quadrado se encontra dividido em dois triângulos retângulos, os quais são separados com auxílio de uma tesoura sem ponta.

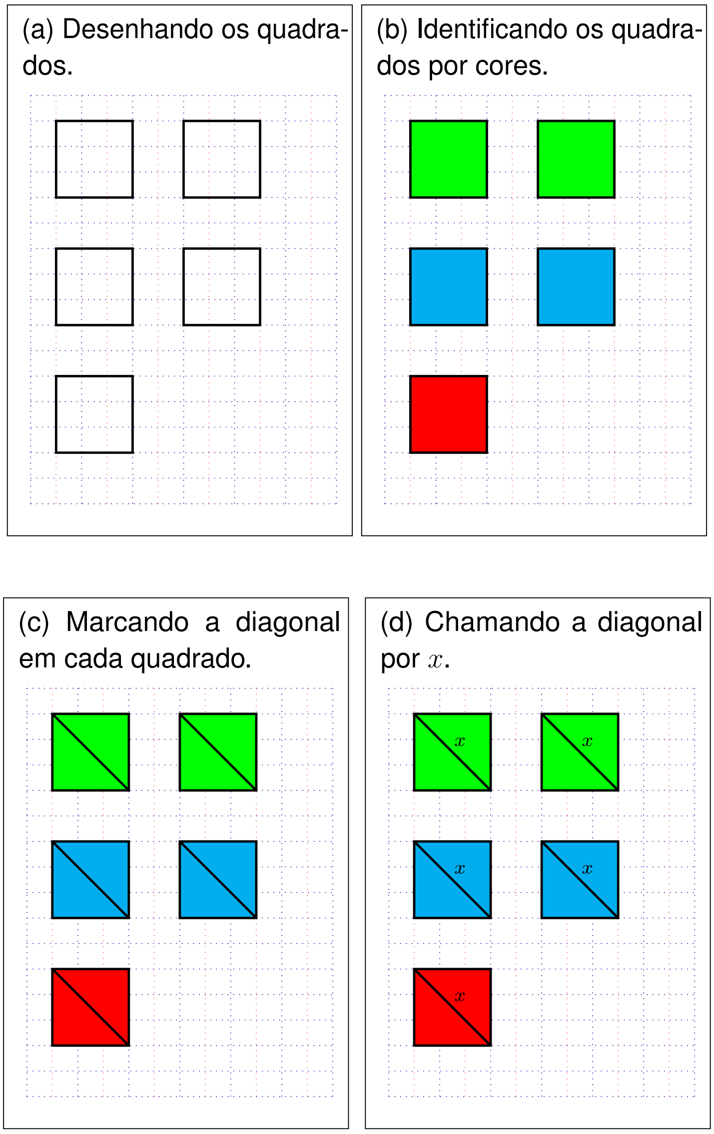
Figura 49 – Inicialmente o aluno deve construir esta figura, onde x é a diagonal a ser calculada.



Fonte: Produzido pelo autor.

Após cortar os quadrados, ficamos com dez triângulos retângulos isósceles. Destes, escolhemos um que tenha cor vermelha para colar no centro de uma folha sulfite em branco. Construiremos um quadrado ao lado de cada cateto do triângulo retângulo vermelho, sendo um identificado pela cor verde e outro pela cor azul; bem como um quadrado sobre a hipotenusa, sendo este quadrado composto por dois triângulos retângulos isósceles azuis e dois verdes. Concluída a colagem, obtemos a Figura 49, a qual passamos a utilizar para calcular o valor de x, conforme solicitado no início da atividade.

Figura 50 – A figura procura mostrar os primeiros passos trabalhados pelo alunos na Atividade A.6 (a) Os cinco quadrados são desenhados no papel quadriculado. (b) Os quadrados são identificados por cores. (c) Uma diagonal é desenhada em cada quadrado. De imediato é possível notar os triângulos retângulos, os quais sugerem o uso do Teorema de Pitágoras. (c) Identifica-se a incógnita x.



Fonte: Produzido pelo autor.

Para terminar a primeira parte da Atividade A.6, o aluno, auxiliado pela Figura 49, determina a área dos quadrados, preenchendo a tabela:

Tabela 12 – Tabela contendo o cálculo da área dos quadrados construídos sobre a hipotenusa e sobre os catetos, conforme mostra Figura 49.

Área do quadrado sobre a hipotenusa. (Lembre-se, chamamos a hipotenusa por x).	Área do quadrado (verde) sobre um dos catetos.	Área do quadrado (azul) sobre o outro cateto
Identificados os lados como x, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é x^2.	Identificado a medida dos lados como sendo $3cm$, a área do quadrado construído ao lado do cateto é $3^2 = 9cm^2$.	Identificado a medida dos lados como sendo $3cm$, a área do quadrado construído ao lado do cateto é $3^2 = 9cm^2$.

Observando o padrão de cores presentes na Figura 49 e lembrando da Atividade A.1, relatada no Capítulo 3, determinamos a área do quadrado sobre a hipotenusa como sendo $18cm^2$, estabelecendo a igualdade $9cm^2 + 9cm^2 = 18cm^2$, onde $9cm^2$ é a área dos quadrados construído sobre os catetos, conforme mostra a Figura 49. Para calcular o comprimento da diagonal do quadrado, conforme pedido no início, devemos ir além, olhando o quadrado construído sobre a hipotenusa como tendo um lado desconhecido, a priori representado pela incógnita x. Por meio deste olhar obtemos que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é x^2. Deste modo temos a equação: $x^2 = 18cm^2$. Desta equação, e lembrando que x é a medida de um segmento, ou seja, $x > 0$, resulta $x = \sqrt{18}cm$. Fatorando o radicando em $18 = 2.3^2$, e substituindo na igualdade anterior, ficamos com $x = \sqrt{2.3^2}cm$, que simplificando nos dá $x = 3\sqrt{2}cm$. Na folha entregue ao aluno, que está disponível no Apêndice A.6, este é convidado a desenvolver os cálculos acima, conforme nos mostra a figura abaixo:

Figura 51 – Espaço para o aluno registrar o cálculo de x.

➢ Calcule o valor de X, continuando a conta abaixo:

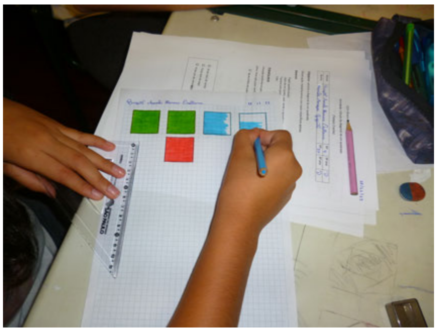
$x^2 = 3^2 + 3^2$	
$x^2 = 9 + 9$	
$x^2 = 18$	
$x = \sqrt{18}$	
$x = \sqrt{2.3^2}$	
$x = 3.\sqrt{2}$	

Fonte: Produzido pelo autor.

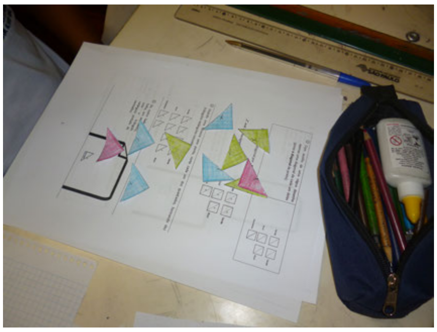
8.3.1 O trabalho em sala de aula

Figura 52 – A figura mostra o trabalho dos alunos na Atividade A.6 (a) Nesta imagem o aluno está pintando os quadrados. (b) Os quadrados foram recortados compondo os triângulos retângulos. (c) Aluno tentando montar a Figura 49. (d) A montagem da Figura 49 é concluída.

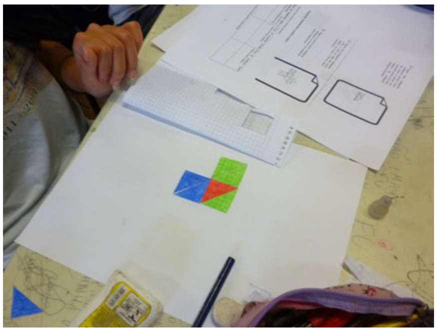
(a) Pintando.



(b) Os quadrados cortados.



(c) Montando a Figura 49



(d) A Figura 49 finalizada

Fonte: Produzido pelo autor.

8.4 Segunda parte da Atividade A.6

Ao iniciar a segunda parte da Atividade A.6, o aluno tem a oportunidade de conferir o valor de x calculado na primeira parte e exposto no quadro da Figura 51. Essa oportunidade é revelada no trecho abaixo:

> Na primeira parte desta atividade, calculamos a diagonal de um quadrado de lado 3, obtendo o valor $3\sqrt{2}$. (seção A.6)

A maior parte dos alunos calcula x como tendo valor $\sqrt{18}$, o que não permite perceber o resultado exposto na proposição (8.4.1). Por tal motivo, ao revelarmos que $x = 3\sqrt{2}$, desejamos que o aluno tente chegar a este resultado simplificado, obtendo um padrão de respostas. Essa regularidade será intuída durante os cálculos propostos na segunda parte da Atividade A.6.

Proposição 8.4.1. *A diagonal de um quadrado de lados medindo l tem medida dada por $l\sqrt{2}$.*

Demonstração. De fato, ao tomarmos a diagonal de um quadrado de lado l, este fica dividido em dois triângulos retângulos isósceles. Chamando a diagonal por d e levantando um quadrado sobre a hipotenusa, bem como sobre os catetos, pelo exposto na Atividade A.1, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma da área dos quadrados construídos sobre os catetos.Como os quadrados construídos sobre os catetos tem lados medindo l, e o quadrado construído sobre a hipotenusa tem lados medindo d, temos

$$d^2 = l^2 + l^2. \tag{8.1}$$

Somando os termos semelhantes

$$d^2 = 2l^2. \tag{8.2}$$

Como d representa o comprimento da diagonal de um quadrado, consideraremos apenas $d > 0$. Logo

$$d = \sqrt{2l^2}, \tag{8.3}$$

que resulta

$$d = |l|\sqrt{2}. \tag{8.4}$$

Mas $l > 0$, pois l é a medida dos catetos dos triângulos, o que nos dá $|l| = l$. Por conseguinte, a equação (8.4) toma o aspecto

$$d = l\sqrt{2}, \tag{8.5}$$

como queríamos. □

A equação (8.5) no permite notar que para cada l considerado, ou seja, para cada quadrado de lados medindo l, faz-se corresponder um valor para d, sendo o seu cálculo regido pela igualdade (8.5). Além disso, não há possibilidade de um quadrado de lados l ter dois ou mais valores para a diagonal d. Em resumo, a diagonal de uma quadrado é função de seu lado, sendo o domínio $L = \{l \in \mathbb{R}; l > 0\}$; o contradomínio dado pelo conjunto $D = \{d \in \mathbb{R}; d > 0\}$; a lei de associação dada por $d(l) = l\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} d\colon L = \{l \in \mathbb{R}; l > 0\} &\longrightarrow D = \{d \in \mathbb{R}; d > 0\} \\ l &\longrightarrow d(l) = l\sqrt{2} \end{aligned} \tag{8.6}$$

Para o aluno do oitavo ano do Ensino Fundamental, convenientemente colocamos a seguinte afirmação:

> Podemos mudar o lado do quadrado, em consequência a diagonal terá outro valor. Seguindo os passos acima você pode obter o valor da diagonal de outros quadrados. (seção A.6)

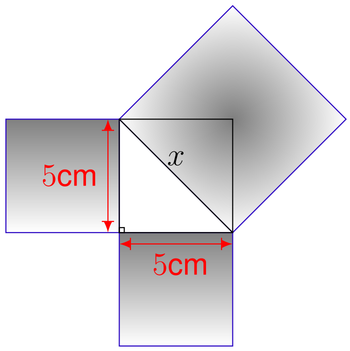
Onde a expressão "...mudar o lado do quadrado..." tem o sentido de variar seu valor em $L = \{l \in \mathbb{R}; l > 0\}$; a expressão "... a diagonal terá outro valor. ..." tem o sentido de obter um valor em $D = \{d \in \mathbb{R}; d > 0\}$, sendo que a relação entre o lado l do quadrado e sua diagonal d é dada pela lei de associação da função definida em (8.6).

Era tarefa do aluno resumir o processo trabalhado na primeira parte da Atividade A.6, ou seja, o aluno devia ...

> ... *imaginar* a sequência anterior e calcular a diagonal dos quadrados indicados abaixo de um modo mais rápido. (seção A.6)

Não havia necessidade de abandonar o pensamento geométrico trabalhado nas atividades anteriores, principalmente na Atividade A.1, ficando só com a parte algébrica do Teorema de Pitágoras. Assim, o aluno tinha como trabalho, estruturar o caminho para resolver um exercício de modo econômico, já que ele paga o preço maior.

Figura 53 – A figura nos dá a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras aplicado ao cálculo da diagonal de um quadrado de lado $5cm$.



Fonte: Produzido pelo autor.

8.4.1 Os exercícios da segunda parte da Atividade A.6

São tratados dois casos particulares, o primeiro para um quadrado de lado $l = 5cm$ e o segundo para um quadrado de lado medindo $l = 7cm$. A atividade é finalizada com o caso genérico, um quadrado de lado l, com l um número real positivo.

8.4.1.1 Primeiro exercício proposto na segunda parte da Atividade A.6

O primeiro exercício pede para: “calcular a diagonal de um quadrado de lado 5 cm”.

Solução: Notemos que a diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos congruentes, cujos catetos medem $5cm$, e a hipotenusa mede x, valor a ser calculado. Ao lado de cada cateto iremos construir um quadrado, cujo lado tem a mesma medida do catetos, isto é, $5cm$. Logo, a área de cada um será $25cm^2$. Sobre a hipotenusa também levantamos um quadrado, cujo lado tem mesma a medida desta hipotenusa, já que são coincidentes. A área deste quadrado é, portanto, x^2. Pelo Teorema de Pitágoras temos $x^2 = 25 + 25$, que nos leva a igualdade $x^2 = 25.2$. Como $x > 0$, pois é a medida da diagonal, segue $x = \sqrt{25.2}$, que implica $x = 5\sqrt{2}$, como esperávamos obter.

Portanto, a diagonal do quadrado cujos lado mede $5cm$ é dada por $5\sqrt{2}\,cm$.

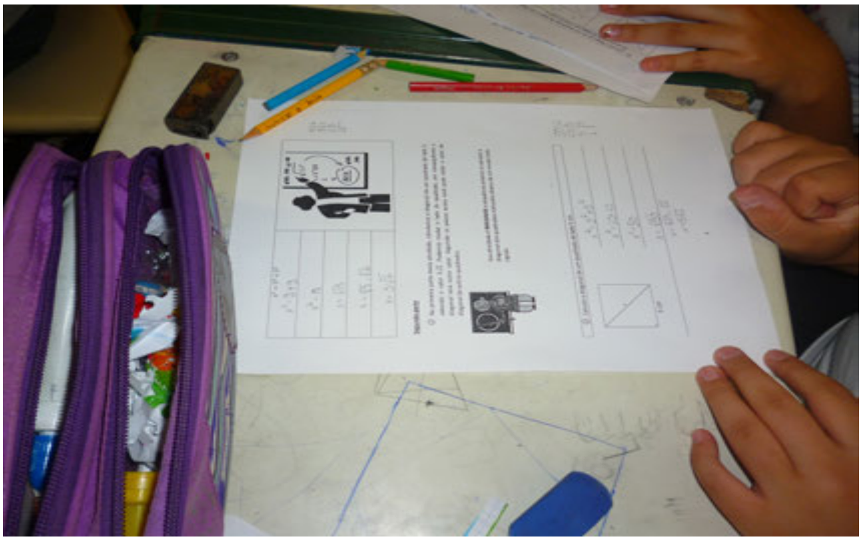
Uma solução mais ansiada pelos alunos é a que apresentamos a seguir.

Uma solução mais rápida: Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo não hachurado, temos:

$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 2.25 \Rightarrow x = \sqrt{2.25},\ já\ que\ x > 0 \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$$

Portanto, a diagonal do quadrado mede $5\sqrt{2}\,cm$.

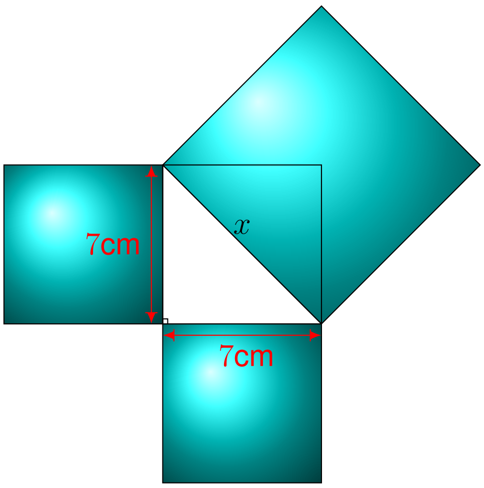
Figura 54 – Imagem mostrando aluno desenvolvendo os cálculos para a diagonal do quadrado de lado $3cm$, no final da primeira parte da Atividade A.6; os cálculos para a diagonal do quadrado de lado $5cm$, no início da segunda parte da Atividade A.6



Fonte: Produzido pelo autor.

8.4.1.2 Segundo exercício proposto na segunda parte da Atividade A.6

Figura 55 – O quadrado que tem por lado a hipotenusa do triângulo retângulo tem área igual à soma da área dos quadrados que tem por lado os catetos.



Fonte: Produzido pelo autor.

O segundo exercício proposto pede que o aluno calcule a diagonal do quadrado de lado medindo $7cm$. Este exercício tem como objetivo permitir ao aluno fixar as ideias trabalhadas nos exercícios anteriores, além de forçar o aluno a notar a fórmula para o cálculo da diagonal, dada pela lei de associação da função, definida em (8.6). De modo semelhante ao que ocorreu na primeira parte desta Atividade, A.6, o aluno deve perceber que a diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos congruentes, já que os catetos são congruentes, além do que a hipotenusa, diagonal do quadrado, é comum a ambos os triângulos.

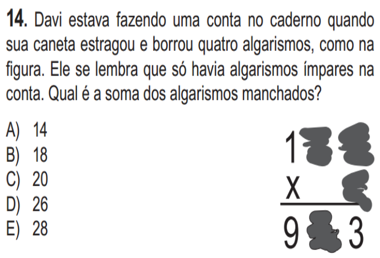
Adotando qualquer um deles para prosseguir com o cálculo da diagonal x, aplicamos o Teorema de Pitágoras, o qual nos informa que o quadrado que tem por lado a hipotenusa do triângulo retângulo tem área igual à soma da área dos quadrados que tem por lado os catetos, obtendo $x^2 = 7^2 + 7^2$. Logo, $x^2 = 2.49$; lembrando que $x > 0$, pois é a medida da hipotenusa, resulta $x = \sqrt{2.49}$, que implica $x = 7\sqrt{2}$.

Portanto, a diagonal do quadrado cujo lado mede $7cm$ é dada por $7\sqrt{2}\,cm$, conforme já era esperado.

8.4.1.3 Terceiro exercício proposto na segunda parte da Atividade A.6

Figura 56 – Em todos esses exercícios, algum elemento é "escondido", devendo ser calculado para posteriormente resolver-se o teste. (a) Neste exercício foram escondidos os algarismos. Pede-se a soma dos mesmos. (b) Neste exercício também foram escondidos alguns algarismos representados pelo símbolo ♣. (c) Neste exercício, acidentalmente foram escondidos os símbolos das operações e um algarismo. Pede-se para descobrir o algarismos borrado. (d) De modo acidental, o personagem Joãozinho derruba suco sobre o caderno e oculta quatro algarismos. Pede-se para determinar a soma dos algarismos borrados.

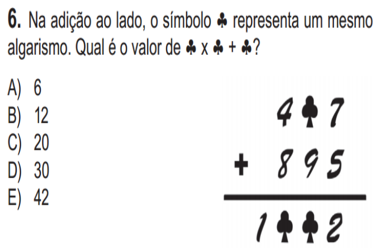
(a) OBMEP 2009 nível 1.



14. Davi estava fazendo uma conta no caderno quando sua caneta estragou e borrou quatro algarismos, como na figura. Ele se lembra que só havia algarismos ímpares na conta. Qual é a soma dos algarismos manchados?

A) 14
B) 18
C) 20
D) 26
E) 28

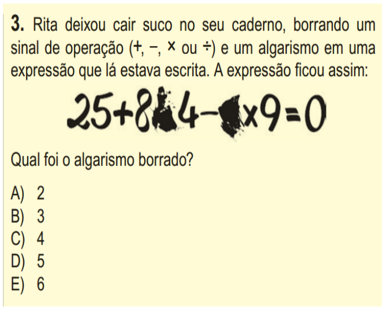
(b) OBMEP 2010 nível 1.



6. Na adição ao lado, o símbolo ♣ representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de ♣ x ♣ + ♣?

A) 6
B) 12
C) 20
D) 30
E) 42

(c) OBMEP 2012 nível 1.

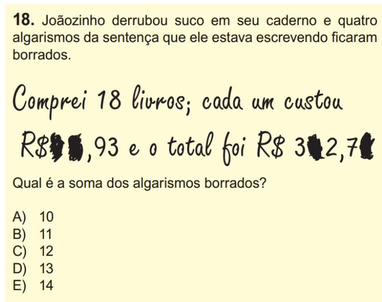


3. Rita deixou cair suco no seu caderno, borrando um sinal de operação (+, −, × ou ÷) e um algarismo em uma expressão que lá estava escrita. A expressão ficou assim:

Qual foi o algarismo borrado?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

(d) OBMEP 2013 nível 1.



18. Joãozinho derrubou suco em seu caderno e quatro algarismos da sentença que ele estava escrevendo ficaram borrados.

Comprei 18 livros; cada um custou R$ [illegible],93 e o total foi R$ 3[illegible]2,7[illegible]

Qual é a soma dos algarismos borrados?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

Fonte: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>

Neste último exercício, aplicado na segunda parte da Atividade A.6, não temos a pretensão que o aluno do oitavo ano do Ensino Fundamental, nos dias atuais, venha a demonstrar a proposição 8.4.1, sequer olhamos este exercício como aqueles que se apresentam em um livro didático, mas, antes de mais nada, este exercício é uma tentativa de generalizar o cálculo da diagonal de um quadrado, realizado anteriormente para os casos em que o lado do quadrado tem medida dada por $3cm$, $5cm$ e $7cm$.

Neste exercício, procuramos dar oportunidade ao aluno para raciocinar passagem por passagem e para isso nos inspiramos em alguns exercícios específicos da Olimpíada Brasileira de Matemática do Ensino Público - OBMEP. Na Figura 56 mostramos alguns desses exercícios.

Seguindo a ideia dos exercícios expostos na Figura 56, no cálculo da diagonal de um quadrado de lado l, omitimos algumas passagens, as quais devem ser preenchidas pelos alunos. Para que não haja dúvida do que desejamos, desenvolvemos um pequeno texto explicando o procedimento.

> Para ajudar você, foram deixadas algumas pistas. A dica é sempre tentar completar o pontilhado, para isso observe a próxima linha. Por exemplo, para você iniciar a conta, você deve observar a segunda e a terceira linha; para completar a segunda linha, você pode observar a terceira. Acho que você já entendeu. (seção A.6)

Diante do texto explicativo acima espera-se que o aluno complete os trechos apresentados na Figura 57 e que faltam para o cálculo da diagonal de um quadrado de lado medindo L.

Chamando por T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 os trechos que faltando nas igualdades da Figura 57.

Figura 57

$$
\begin{aligned}
\underline{T_1} &= \underline{T_2} + L^2 && (8.7)\\
\underline{T_3} &= 2L^2 && (8.8)\\
x &= \sqrt{\underline{T_4}} && (8.9)\\
x &= \underline{T_5}\sqrt{2} && (8.10)
\end{aligned}
$$

Fonte: Produzido pelo autor.

Vamos determinar T_i, para $i = 1, 2, 3, 4$ e 5, ou seja, na linguagem mais próxima dos alunos, os "trechos escondidos". Por exemplo, para obter T_2, observamos o segundo membro das equações (8.8) e (8.7). Desejamos, por meio de operações elementares, transformar o segundo membro de (8.7), $T_2 + L^2$, em $2L^2$, segundo membro de (8.8). Desta forma, desejamos escrever $T_2 + L^2 = 2L^2$. Mas isso é possível desde que tenhamos

$T_2 = L^2$. Com efeito

$$T_2 + L^2 = 2L^2 \Leftrightarrow T_2 = 2L^2 - L^2 \Leftrightarrow T_2 = L^2$$
$$\therefore T_2 = L^2 \tag{8.11}$$

Observando o segundo membro da equação (8.8) e da equação (8.9), notamos a presença de uma raiz quadrada em (8.9) e a ausência da mesma em (8.8). Assim, antes de tentarmos igualar o segundo membro da cada equação sitada neste parágrafo, iremos nos “livrar” da raiz quadrada. Para tal, basta elevar ambos os membros da equação (8.9) ao quadrado, revelando que

$$x^2 = T_4 \tag{8.12}$$

A equação (8.12) nos revela uma passagem omitida no cálculo da diagonal x. Comparando membro a membro as equações (8.8) e (8.12), concluímos que $T_4 = 2L^2$ e $T_3 = x^2$. Por conseguinte, voltando a igualdade (8.7) e comparando com o primeiro membro de (8.8), concluímos que $T_1 = T_3$, isto é, $T_1 = x^2$. Por fim, sabemos que

$$x = \sqrt{2L^2} \Leftrightarrow x = L\sqrt{2}\,,\ com\ L > 0 \tag{8.13}$$

Mas, desejamos obter a equivalência

$$(8.9) \Leftrightarrow (8.10) \tag{8.14}$$

Comparando o que sabemos de (8.13) com o que desejamos obter, (8.14), chegamos a conclusão que $T_5 = L$. Em resumo

$$T_1 = x^2; T_2 = L^2; T_3 = x^2; T_4 = 2L^2; T_5 = L,$$

completando os cálculos desejados.

8.5 Aceitação por parte dos alunos

Tabela 13 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.6.

O grupo gostou dessa atividade ?			
	Não gostaram	Gostaram um pouco	Gostaram
Número de duplas	9	11	10
Como o grupo classifica essa atividade ?			
	Média	Fácil	Difícil
Número de duplas	18	5	7
Total de alunos = 60			

Fonte: Produzido pelo autor.

A Tabela 13 procura mostrar a aceitação da Atividade A.6, por parte do aluno. Somente 5 duplas classificaram a atividade como “fácil”; a grande maioria colocou a atividade entre as categorias “média” ou “difícil”. Apesar disso, 21 duplas se colocaram como “gostando” ou “gostando um pouco” da atividade. Logo, podemos concluir que os alunos tiveram uma receptividade razoável com relação a atividade, mas não a acharam fácil.

9 Sétima aula

9.1 Introdução

Relembrando a sequência de atividades desenvolvidas nos capítulos anteriores, constatamos a necessidade de uma atividade envolvendo problemas e exercícios que utilizam o Teorema de Pitágoras como ferramenta para obter a solução. Neste capítulo e no próximo procuramos trabalhar situações problemas tendo em foco a aprendizagem, ou seja, como uma situação de aprendizagem.

9.2 Objetivo

Nesta aula o aluno irá resolver três problemas, sendo os dois primeiros exemplos das muitas aplicações do Teorema de Pitágoras; o terceiro toca superficialmente na Espiral de Teodoro de Cirene ou pitagórica, praticamente apenas apresentando este tema ao aluno.

Trabalhar com problemas pode ser, na medida pessoal de cada aluno, uma atividade estimulante ou enfadonha. Estimulante no sentido de que os problemas desafiam o aluno levando-o a pensar.Mas problemas não corriqueiros e inteligentes exigem mais do que uma aplicação mecânica de uma ou outra técnica, cobrando a competência leitora, por exemplo; a organização de um plano o qual pode depender de um ou vários pré requisitos; a competência escritora, tanto na linguagem materna, quanto na linguagem matemática, só para citar algumas. Já, problemas triviais, muito simples, os quais geralmente são apresentados em grande quantidade, podem fazer com que o aluno se canse, desinteressando-se pelo trabalho. Assim, propor problemas adequados é um desafio para nós, que procuramos mediar e apresentar tais problemas no tempo adequado. De imediato, problemas mais rotineiros, que treinem algum algoritmo, parecem ser os mais adequados, devendo ser oportunamente substituídos por problemas mais elaborados um pouco.

Não temos a intenção de adotar a metodologia da “resolução de problemas”, a qual propõe, segundo a visão mais atual, desenvolver um tema através de problemas, partindo de situações bem conhecidas dos alunos, do seu dia a dia, e conduzindo-os aos níveis mais gerais possíveis. Nossa intenção é simplesmente propor um treino, de modo que o aluno sinta que o Teorema de Pitágoras possui aplicações, tanto no mundo real quanto no âmbito dos casos puramente matemático.

9.3 A Atividade A.7

A Atividade A.7 foi aplicada no oitavo ano C e D, no dia 20 de novembro de 2013, em aula dupla. Inicialmente dispusemos as carteiras de modo a acomodar as duplas, em seguida distribuímos as folhas de atividade. Após organizar o ambiente, houve um tempo para a leitura de todo o material, abrindo oportunidade para que os alunos levantassem suas dúvidas quanto ao enunciado ou algum outro ponto. Cumprido esse ritual inicial, os

Figura 58 – Alunos trabalhando com a Atividade A.7. (a) Iniciando o primeiro exercício da primeira folha da atividade. (b) Aluno terminando a atividade.

(a) Primeira folha da atividade (b) Segunda folha da atividade

Fonte: Produzido pelo autor

grupos passaram a trabalhar por conta própria, permitindo ao professor circular entre os alunos para registrar o trabalho da classe.

Nos dois primeiros problemas procuramos inserir o Teorema de Pitágoras dentro de um contexto relacionado ao trabalho de um eletricista e ao dia a dia de um carpinteiro, em particular tratando do problema de calcular o comprimento de um fio condutor de energia e de uma viga de madeira utilizada na construção do madeiramento de um telhado.

9.3.1 O primeiro problema

No primeiro problema deseja-se calcular o comprimento de um fio condutor de energia que liga o topo de um poste de energia com a “caixa de entrada” de energia da residência do Sr. Antônio, personagem do problema. Por si só a imagem gerada pela palavra “poste” já transmite a ideia de verticalidade, contudo no enunciado não se afirmava que o poste estava na vertical, somente observando a imagem fornecida junto com o enunciado é que se torna possível ao aluno notar que o poste forma, ao menos no plano registrado pelo desenho, um ângulo reto com a linha representada pelo chão. Outro ponto importante diz respeito a posição da “caixa de entrada”, a qual esta localizada no nível do chão. Com essas observações forma-se um quadro contendo um triângulo retângulo, no qual um cateto é o poste, de $12m$ de altura; outro cateto é determinado pelo comprimento que vai do pé do poste até a “caixa de entrada” em linha reta, sendo de $16m$; a hipotenusa é representada pelo fio que desejamos calcular o comprimento, nomeado por x. Por meio deste quadro é possível constatar que x será calculado com auxílio do Teorema de Pitágoras , conforme abaixo:

$$x^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow x^2 = 144 + 256 \Rightarrow x^2 = 400$$

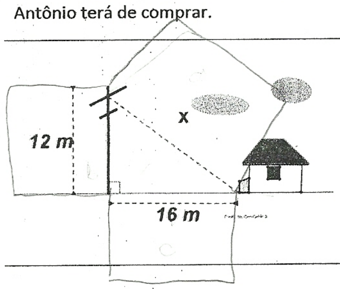
Como x é o comprimento do fio, consideramos apenas $x > 0$. Logo,

$$x = \sqrt{400} \Rightarrow x = 20$$

Portanto, o Sr. Antônio deverá comprar $20m$ de fio para realizar a ligação.

Entre as trinta e três duplas que fizeram este exercício, trinta e uma duplas obtiveram o resultado correto e apenas duas erraram o exercício. O exito se deve a dois fatores: ao realizarem atividades em grupo, os alunos tem maior trânsito na classe, de modo que constantemente trocam ideias, o que é produtivo pelo lado de se auxiliarem mutuamente, e negativo pelo ponto de vista individual. Temos, portanto, constatado um ponto negativo de todo esse trabalho, ou seja, a ausência de algumas situações de aprendizagem individuais entremeadas às atividades em grupo[1].Outro fator que contribuiu para o número expressivo citado no início do parágrafo, é a escolha de um problema padrão para compor a atividade. Contudo, devemos lembrar que os alunos estavam inseridos num contexto de aprendizagem, logo, justifica-se esse problema, já que em "doses" pequenas pode elevar a autoestima dos alunos, e fixa um resultado.Abaixo a Figura 59 ilustra o trabalho de uma dupla[2].

Figura 59 – Na solução apresentada pelas alunas, os quadrados nos remetem às atividades anteriores, nas quais é marcante a interpretação geométrica.



Nome	marillia	Nº 27	8º ano	D
Nome	Raiany	Nº 32	8º ano	D

1) Um eletricista foi chamado para fazer uma ligação de luz na casa do Sr. Antônio. Após observar em volta da casa, o eletricista disse ao Sr. Antônio que poderia fazer a ligação a partir de uma caixa que estava localizada a 16 metros do poste. O Sr. Antônio perguntou qual a quantidade de fio que ele gastaria e o eletricista disse que, para dar essa informação, precisaria saber, antes, a altura do poste. Sabendo que a altura do poste é de 12 metros e a caixa de entrada se encontra ao nível do chão, determinar a quantidade de fio que o Sr. Antônio terá de comprar.

Solução

$x^2 = 12^2 + 16^2$

$x^2 = 144 + 256$

$x = \sqrt{400}$

$x = 20$

Fonte: Produzido pelo autor

Na solução apresentada na Figura 59, a dupla "rabiscou" o que representariam pequenos quadrado construídos sobre os catetos e sobre a hipotenusa, recuperando o conteúdo trabalhado na Atividade A.1, obtendo um solução mais próxima do que retrata a frase:"a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma da área dos quadrados construídos sobre os catetos".

9.3.2 O segundo problema

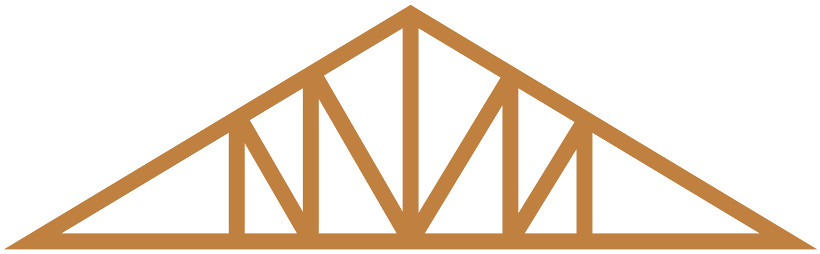
O segundo problema desenha seu quadro logo de início, conforme nos revela o trecho:

[1] No caso destas atividades, os grupos foram formados pelos alunos e constituíam duplas.
[2] Os nomes foram parcialmente borrados para preservar as alunas.

> Na construção do telhado de uma casa, ... os carpinteiros... precisam confeccionar as vigas do telhado...[calculando][3] o comprimento dessas vigas. (seção A.7)

Deste modo procuramos uma contextualização do problemas de maneira simples e despreocupada. Contudo, necessitamos recorrer à Figura 60 para mostrar a estrutura de madeira, ou algo próximo do que ela vem a ser no mundo real.

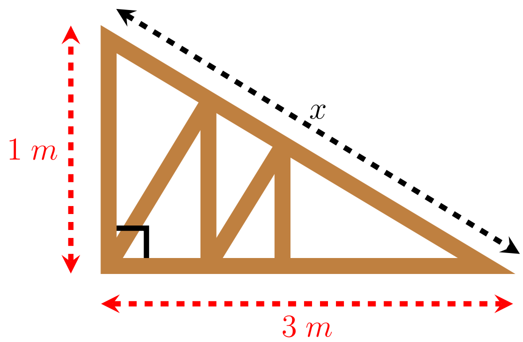
Figura 60 – Imagem representando parte da estrutura de madeira de um telhado. Figura utilizada na Atividade A.7.



Fonte: Produzido pelo autor

Observando a estrutura apresentada na Figura 60 o aluno começa a levantar hipóteses, de modo consciente ou não. De fato, a presença de elementos, vigas, verticais e horizontais conduzem ao perpendicularismo entre retas; aliado a isso há uma excessiva quantidade de triângulo. Deste modo, o aluno é levado, pela Figura 60, a induzir triângulos retângulos na estrutura de madeira. Contudo, somente no momento que solicitamos o cálculo da incógnita x, representando o comprimento de uma viga, revelamos realmente a presença de pelo menos um triângulo retângulo, conforme nos mostra a Figura 61.

Figura 61 – Parte da estrutura de madeira, destacando um triângulo retângulo.



Fonte: Produzido pelo autor

[3] A expressão “calculando” não está no texto original.

Para iniciar seus cálculos, o aluno deve “ler” na Figura 61 que x corresponde a hipotenusa do triângulo retângulo, bem como as vigas de medidas $1m$ e $3m$ correspondem aos catetos. De posse deste elementos, e diante do Teorema de Pitágoras ele pode escrever:

$$x^2 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 1 + 9 \Rightarrow x^2 = 10.$$

Como x representa o comprimento de uma viga, considera-se $x > 0$. Logo:

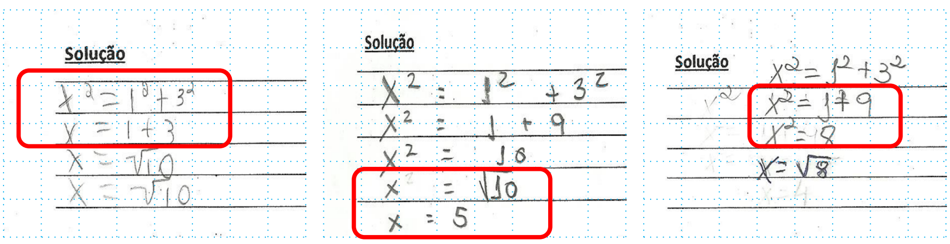
$$x = \sqrt{10}.$$

Com uso de uma calculadora, conforme sugere o enunciado, podemos aproximar x para $3,16$. Portanto, o comprimento da viga é de aproximadamente $3,16m$.

Neste exercício houve oito duplas que apresentaram uma solução indevida total ou parcialmente, o restante, vinte cinco duplas de trinta e três que compareceram à aula durante este dia, apresentaram a solução correta. Comparativamente com o primeiro exercício, constatamos que possuem o mesmo grau de dificuldade, pois ambas as soluções requerem habilidades idênticas. Além disso, o segundo exercício solicita que o aluno faça uso de uma calculadora para determinar o valor aproximado de x. Mas tal uso só se faz necessário ao final. Pelo exposto acima só poderíamos concluir pela falta de atenção ou algo parecido, contudo, algumas respostas revelam que alguns conceitos não estão bem sedimentados e necessitam de um treino maior por parte do aluno.

Figura 62 – A imagem procura ilustrar alguns erro cometidos durante a resolução do exercício 2 da Atividade A.7. (a) O quadrado não foi desenvolvido, ao menos registrado em papel, podendo o cálculo ter sido feito mentalmente, já que na terceira linha registra-se $\sqrt{10}$ (b) Um erro conceitual comum (c) Muito provavelmente um descuido.

(a) (b) (c)



Fonte: Produzido pelo autor

9.3.2.1 Raiz quadrada

Antes de passarmos aos comentários sobre a 62, definiremos a raiz quadrada como no texto de Iaci Malta, Pesco e Lopes (2012, p. 72).

Definição 9.3.1. *Se $b \geq 0$, a raiz quadrada de b, denotada por $\sqrt{b}$, é a solução não negativa da equação $x^2 = b$.*

Segundo comentários da professora Iaci Malta, Pesco e Lopes (2012)

> um erro muito frequentemente é acometido pelos alunos. É muito comum os alunos dizerem que $\sqrt{4} = \pm 2$, o que não faz sentido. Isso decorre de uma confusão com" as soluções da equação $x^2 = b$. (MALTA; PESCO; LOPES, 2012, p. 210–211)

Assim, segundo Malta, Pesco e Lopes (2012)

> o símbolo $\sqrt{x}$ é uma forma compacta de nos referimos ao *único número não negativo que quando elevado ao quadrado resulta no número real x.*[4] (MALTA; PESCO; LOPES, 2012, p. 210–211)

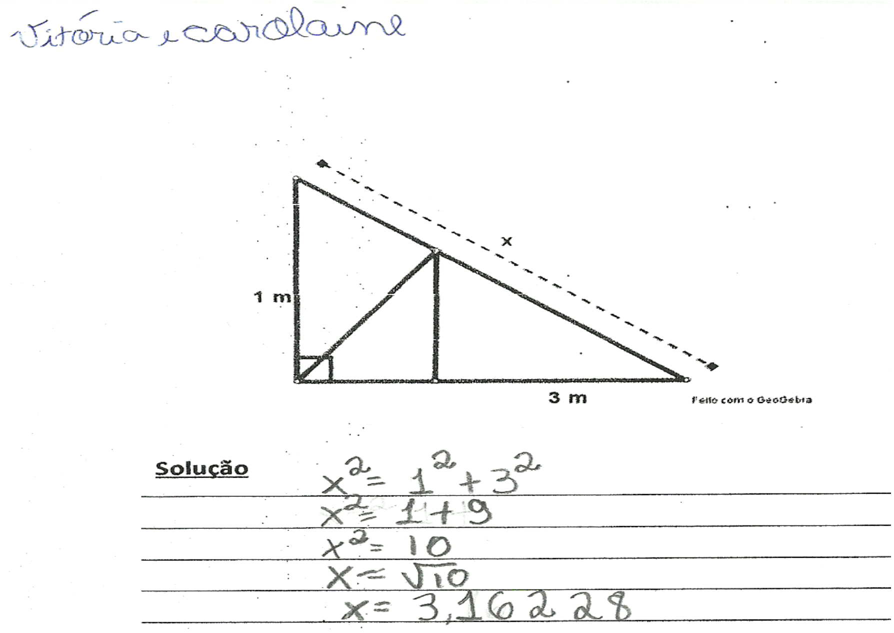
9.4 Voltando à discussão dos erros apresentados na Figura 62

Em todos os casos apresentados na Figura 62, o aluno inicia a resolução do problema corretamente, escrevendo $x^2 = 1^2 + 3^2$. Na imagem apresentada na Figura 62a, aparentemente há um descuido, já que há a possibilidade de ter ocorrido um cálculo mental para o desenvolvimento de 1^2 e 3^2, contudo, registra-se o resultado errado na segunda linha, na qual esta grafado $x = 1 + 3$, sendo que o correto é $x^2 = 1 + 9$. Essa ideia é reforçada pela terceira linha, onde aparece explícito o valor $\sqrt{10}$ e sabemos ser 10 o resultado de $1^2 + 3^2$. No caso apresentado na Figura 62b, há uma busca ilógica pelo valor de $\sqrt{10}$, que se enquadra em uma categoria numérica mais refinada, os irracionais, pois, diferentemente do número 400, que ocorre durante o processo de solução do exercício 1 da Atividade A.7, 10 não é um quadrado perfeito.Com efeito, 10 tem seu desenvolvimento em fatores primos dado por $2^1.5^1$, onde os expoentes ímpares nos dizem que 10 não é um quadrado perfeito.Por outro lado, 400 tem sua expansão em fatores primos dada por $400 = 2^4.5^2$, onde os expoentes pares nos dizem que 400 é um quadrado perfeito. Sendo mais simples, basta observar que $400 = 20^2$. Na busca pelo valor de $\sqrt{10}$, o aluno se esqueceu de que podia verificar sua resposta, já que, para um certo valor $\alpha \in \mathbb{R}_+$[5], temos que x, tomado como positivo por definição, é a raiz quadrada de α se, e somente se, $x^2 = \alpha$. Assim, bastaria tomar o resultado "incorreto" 5, apresentado na última linha, e calcular 5^2, observando que $5^2 = 25 \neq 10$, sendo 10 o radicando. Disto conclui-se, pelo menos, que 5 não é o valor da raiz quadrada de dez. Por estas considerações finais, fica evidente que o erro é conceitual. Já, na solução apresentada na Figura 62c, parece ter ocorrido um engano que podia ter sido evitado com o hábito de rever a solução a qual será entregue ao final da atividade. A seguir a Figura 63 apresenta um exemplo de uma solução adequada ao problema.

[4] O itálico é da autora Iaci.

[5] $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$

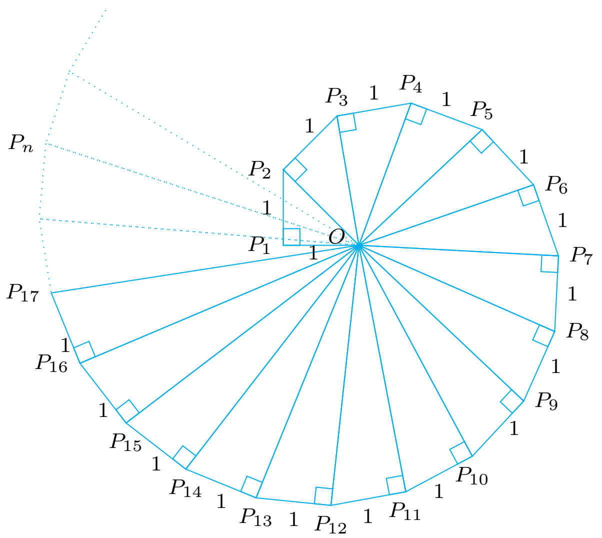
Figura 63 – Uma solução para o exercício 2 da Atividade A.7



Fonte: Produzido pelo autor

9.4.1 O terceiro problema

Figura 64 – Espiral de Teodoro de Cirene também conhecida como Espiral pitagórica



Fonte: Produzido pelo autor

Neste problema o aluno tem como tarefa calcular o comprimento do segmento OP_5[6] mostrado na Figura 64.

6 No Apêndice B.7 encontramos a folha original passada aos alunos. Note que na figura apresentada em B.7, o ponto H ocupa a posição do ponto P_5 na Figura 64.Assim, por comodidade iremos nos referir ao ponto P_5, aproveitando a imagem explícita na Figura 64.

Antes de tudo, uma menção sobre o nome da Figura 64. Em muitos textos a Figura 64 é conhecida como "Espiral de Teodoro". Contudo, é possível encontrar trabalhos que se referem a essa figura como "Espiral de Pitágoras". Talvez essa menção à Pitágoras se deva ao fato de utilizarmos insistentemente o Teorema de Pitágoras nos cálculos do comprimento dos segmentos $OP_i, i = 1, 2, 3, ..., n$. Só para registrar, em o livro *Introdução à história da Matemática*, de Eves (2004), o autor atribui a Figura 64 à Teodoro de Cirene, conforme nos revela o trecho abaixo:

> Tem-se *sugerido*[7] que Teodoro também obteve $\sqrt{n}$ $(2 \leq n \leq 7)$ construindo uma figura em forma de espiral formada de uma sequência de triângulos retângulos com um vértice comum, em que o primeiro triângulo da sequência é o triângulo retângulo isósceles de cateto 1 e ainda em cada triângulo retângulo sucessivo um cateto é a hipotenusa do triângulo anterior da sequência e o outro cateto (oposto ao vértice comum) tem comprimento 1.(EVES, 2004, p. 126)

Contudo, no excerto acima, é "sugerido" a autoria e o uso, gerando uma incerteza. Ainda em o livro *Introdução à história da Matemática* de Eves (2004), o autor nos dá a importância da Figura 64 em outro trecho que abaixo reproduzimos:

> Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único irracional conhecido[8] Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene(c. 425 a.C) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais. (EVES, 2004, p. 107)

.

Observamos que a Figura 64 estava no centro de um turbilhão envolvendo os matemáticos e a Matemática da época. Mais tarde, conta-nos Eves (2004, p. 107) que o problemas "fora resolvido por Eudoxo, um brilhante discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, através de uma nova definição de proporção."

9.4.2 Quem foi Teodoro de Cirene ?

Teodoro de Cirene foi um matemático e filósofo que nasceu em Cirene, uma antiga cidade grega na atual Líbia, um país no norte da África, banhado pelo mar Mediterrâneo ao norte. Viveu entre 465 e 398 a.C. [aproximadamente], conforme nos relata The MacTutor History of Mathematics archive[9]. Nesta fonte, é descrito que Teodoro foi membro da sociedade pitagórica. Lembremos que era costume atribuir ao fundador da escola filosófica a autoria dos trabalhos desenvolvidos por seus membros. Muito provavelmente, na época de Teodoro esse hábito ainda persistia entre as pessoas. Assim, seguindo os costumes, a Figura 64 utilizada por Teodoro tem sua autoria atribuída ao mentor Pitágoras. De certo modo, desvendar um "pouco" quem foi Teodoro de Cirene nos leva a entender a

[7] Grifo meu.

[8] Em nota de rodapé Eves (2004, p. 107) observa que "é possível que $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$, que é a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, tenha sido um primeiro irracional conhecido". Sobre esse assunto citamos a tese de doutorado de Antonio Miguel, intitulada *Três Estudos sobre História e Educação Matemática*, defendida em 1993 na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas e publicada no livro *História da Matemática em Atividades Didáticas* pela Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Outra fonte belíssima é o livro *Conceitos e Fundamentos da Matemática* de Bento de Jesus Caraça.

[9] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Theodorus.html

razão da autoria da Figura 64 ser atribuída, em alguns textos, ao próprio Teodoro, ao passo que em outros a autoria é dada a Pitágoras e seus seguidores, os pitagóricos.

9.4.3 Cálculo do comprimento do segmento OP_i para $i = 1, 2, 3, ..., n$

De imediato o aluno deve observar atentamente a Figura 64. Nesta, os triângulos chamam a atenção devido à sua quantidade. Além disso, para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$, temos que o ângulo $\measuredangle OP_iP_{i+1}$ é reto. Segue como conclusão imediata que os triângulos $\widehat{OP_iP_{i+1}}$ são triângulos retângulos, para todo $i = 1, 2, 3, 4...n$. Por conseguinte, o comprimento do segmento OP_i é determinado pelo Teorema de Pitágoras. Além disso, o aluno deve notar que a hipotenusa do triângulo retângulo $\widehat{OP_{i-1}P_i}$ é o cateto do retângulo $\widehat{OP_iP_{i+1}}$. Por último e não menos importante, da observação atenta da Figura 64, anotamos que

$$OP_1 = P_iP_{i+1} = 1, \text{ para } i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{9.1}$$

De posse das observações feitas acima o aluno pode calcular todo segmento OP_i que desejar. Em particular, neste problema ele devia calcular o comprimento do segmento OP_5. Para isso ele deverá, antes, calcular o comprimento do segmento OP_4; OP_4 por sua vez pede o cálculo do segmento OP_3; que só será calculado após o segmento OP_2. Como consequência de tudo que registramos no início da subseção 9.4.3 e pelo que deixa evidente a Figura 64, seguem os cálculos de OP_2, OP_3, OP_4 e OP_5, conforme o aluno deveria apresentar.

Cálculo do segmento OP_2:

$$(OP_2)^2 = (OP_1)^2 + (P_1P_2)^2 \Rightarrow (OP_2)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow OP_2 = \sqrt{2};$$

Portanto,

$$OP_2 = \sqrt{2} \tag{9.2}$$

Cálculo do segmento OP_3:

$$(OP_3)^2 = (OP_2)^2 + (P_2P_3)^2 \Rightarrow (OP_3)^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow OP_3 = \sqrt{3}$$

Portanto,

$$OP_3 = \sqrt{3} \tag{9.3}$$

Cálculo do segmento OP_4:

$$(OP_4)^2 = (OP_3)^2 + (P_3P_4)^2 \Rightarrow (OP_3)^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow OP_3 = \sqrt{4} = 2$$

Portanto,

$$OP_4 = \sqrt{4} = 2 \tag{9.4}$$

Cálculo do segmento OP_5:

$$(OP_5)^2 = (OP_4)^2 + (P_4P_5)^2 \Rightarrow (OP_4)^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow OP_5 = \sqrt{5}$$

Portanto,

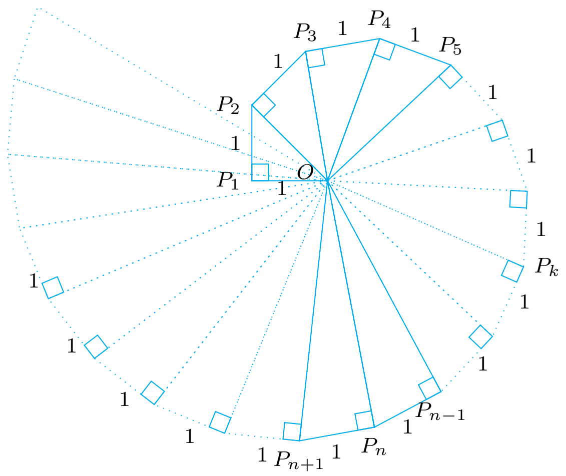
$$OP_5 = \sqrt{5} \tag{9.5}$$

Assim finalizamos o cálculo até o seguimento OP_5.

9.4.4 Por indução

Observando os resultado apresentando em (9.2), (9.3), (9.4) e (9.5), somos levado, e esperamos que o aluno do oitavo ano também tenha sido, mesmo que intuitivamente, a conjecturar que o comprimento do segmento OP_n é igual a $\sqrt{n}$, onde $n \geq 1$.

Figura 65



Fonte: Produzido pelo autor

Com efeito, por construção $OP_1 = 1 = \sqrt{1}$. Logo, é verdade que para $n = 1$ seja $OP_n = \sqrt{n}$. Além disso, em (9.2), (9.3), (9.4) e (9.5) constatamos que $OP_2 = \sqrt{2}$, $OP_3 = \sqrt{3}$, $OP_4 = \sqrt{4}$ e $OP_5 = \sqrt{5}$ corroborando o resultado para $n = 2, 3, 4$ e 5. Suponhamos que exista um natural não nulo n, de modo que para cada natural k, com $1 \leq k \leq n$, seja verdade que OP_k tenha comprimento dado por $\sqrt{k}$. Desejamos verificar que OP_{n+1} tem comprimento dado por $\sqrt{n+1}$. Para isso tomemos o triângulo retângulo $\widehat{OP_nP_{n+1}}$, no qual os catetos são os segmentos OP_n e P_nPn+1, sendo que $OP_n = \sqrt{n}$ por hipótese de indução, e $P_nPn+1 = 1$ por construção. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\widehat{OP_nP_{n+1}}$, temos que

$$(OP_{n+1})^2 = (OP_n)^2 + (P_nP_{n+1})^2 \quad \Rightarrow \quad (OP_{n+1})^2 = \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (OP_{n+1})^2 = n + 1 \quad \Rightarrow \quad OP_{n+1} = \sqrt{n+1}.$$

Logo, o resultado vale para $n + 1$. Portanto, pelo Princípio Forte da Indução Finita[10], o comprimento do segmento OP_n é igual $\sqrt{n}$, para n natural, $n \geq 1$.

9.5 Aceitação por parte dos alunos

Tabela 14 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.7.

O grupo gostou dessa atividade ?			
	Não gostaram	Gostaram um pouco	Gostaram
Número de duplas	9	15	9
Como o grupo classifica essa atividade ?			
	Média	Fácil	Difícil
Número de duplas	9	15	9
Total de alunos = 66			

Fonte: Produzido pelo autor.

Pelo que nos apresenta a Tabela 14, podemos concluir que houve uma boa aceitação da Atividade A.7, já que o número de duplas que "não gostaram" da atividade bem como o número de alunos que qualificaram a atividade como "difícil", é bem inferior a soma dos outros valores.

[10] (Princípio Forte da Indução Finita). Considere n_o um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \leq n_o$ seja dada uma proposição $p(n)$ e que valem as propriedades (a) $p(n_o)$ é verdadeira; (b) se para cada inteiro não negativo k, com $n_0 \leq k \leq n$, temos que $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é também verdadeira. Então, a proposição $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \leq n_o$.

10 A oitava aula

10.1 Introdução

Ao trabalharmos um conteúdo em sala de aula nos vemos diante de um desafio, o de tornar tal conteúdo mais agradável de modo a atingir o maior número possível de alunos proporcionando condições para auxiliá-los na aquisição do conhecimento. Esse desafio não é exclusividade dos docentes. Oradores e personalidades históricas se viram diante da necessidade de cativar seu público ouvinte tendo por objetivo movimentar a massa popular de algum modo. Essa tarefa está intimamente ligada com a situação vivenciada pelos atores da peça, como a cultura de cada integrante do grupo e também o ambiente social que se moldou até o instante do discurso ou da aula. De fato, uma situação de aprendizagem só se completa, ou seja, realiza aquilo para o qual foi planejada, caso haja uma pré disposição em aceitar a própria situação. Logicamente, é mais fácil vender o peixe para quem deseja comprá-lo, o que não impede ao vendedor e ao professor de oferecer a todos, por meio de sua propaganda boca a boca, o produto preparado de antemão. Para facilitar a aceitação do produto, cada profissional faz uso de técnicas específicas de seu ambiente. Por exemplo, o vendedor apela para as propagandas publicitárias, o marketing em geral. O professor, por sua vez, pode buscar ajuda utilizando "jogos" em sala de aula, já que

> todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento, barulho e uma certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis.(SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 10)

Diante do quadro, Smole, Diniz e Milani (2007) observam que

> Essa dimensão não pode ser perdida apenas porque os jogos envolvem conceitos matemáticos. *Ao contrário, ela é determinante para que os alunos sintam-se chamados a participar das atividades com interesse.*[1] (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 10)

10.2 Habilidades trabalhadas

Ao jogarmos, estabelecemos como objetivo vencer o jogo. Para atingir este objetivo usamos todo nosso intelecto, desenvolvendo estratégias que buscam superar os obstáculos colocado pelo adversário e criando dificuldades para os mesmos. Conforme coloca Smole, Diniz e Milani (2007, p. 9), durante uma situação de jogo passamos a "observar, analisar, levantar hipóteses, buscar suposições, refletir, tomar decisões, argumentar e organizar ações", buscando construir uma estratégia que resista o tempo todo que durar o jogo. Assim, os efeitos educativos do trabalho com jogo, quando bem orientado, são evidentes. De certa forma, o jogo nos permite fazer o que solicita a crença popular: "unir o útil ao agradável".

Além do que colocamos no parágrafo acima:

[1] Grifo meu.

> o trabalho com jogos é um dos recursos que favorece o desenvolvimento da linguagem, diferentes processos de raciocínio e de interação entre os alunos (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 9)

que se justifica para Smole, Diniz e Milani (2007), já que:

> durante o jogo cada jogador tem a possibilidade de acompanhar o trabalho de todos os outros, defender ponto de vista e aprender a ser crítico e confiante em si mesmo. (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 9)

sendo esses atributos essenciais para o dia a dia de uma pessoa.

10.3 Tipos de jogos

No livro *Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*, Borin (1995, p. 15) classifica os jogos em dois tipos: jogos de treinamento e jogos de estratégia.

Os jogos de treinamento, como por exemplo o que apresentamos na Atividade A.8, destinam-se, segundo Borin (1995, p.15), a "auxiliar a memorização ou fixação de conceitos, fórmulas e técnicas ligadas a alguns tópicos do conteúdo." Contudo, não devemos simplesmente olhar esse tipo de jogo como uma lista de exercícios camuflada. Com efeito, a situação mental proposta pelo objetivo principal de um jogo que é, criar uma estratégia e executar este procedimento de modo a vencer, destoa desta visão. Mas cabe o alerta

> como esses jogos se caracterizam pela repetição, o professor, ao utilizá-los, deve ter claro os objetivos que quer alcançar, para que não corra o risco de transformá-los em apenas um instrumento de valorização do pensamento mecânico e algorítmico" (BORIN, 1995, p.15).

Os jogos de estratégia, por sua vez, estão sempre ligados a situações que exigem uma investigação maior por parte de quem as confronta. Durante o processo de investigação, que se opera no tempo do jogo, a técnica necessária a solução do problema se sobrepõe à tática para vencer o jogo, assim, é comum dizer que esses jogos são de raciocínio. Como consequência, o objetivo didático de um jogo de estratégia é a busca pela técnica, ou propriedade matemática, que melhor solucione o problema, levando ao desenvolvimento de uma estratégia vencedora. Neste tipo de jogo, na maioria das vezes é necessário um maior número de partidas para que os alunos venham a sentir a propriedade matemática encoberta pelo jogo, cabendo ao professor socializar os resultados ou criar condições para uma discussão sobre as técnicas utilizadas pelos alunos ao jogar e como perceberam esta ou aquela propriedade matemática. Esse momento é importante, já que:

> quando se sai vencedor de um jogo estratégico não há segurança total de a hipótese ser verdadeira para todas as situações, mas quando se perde, tem-se a certeza de que aquela hipótese é [parcial ou totalmente][2] falsa. (BORIN, 1995, p.16)

10.4 O jogo em si

O jogo apresentado na Atividade A.8 é uma adaptação do jogo "Dominó de Racionais" que podemos encontrar em Smole, Diniz e Milani (2007, p. 33–35). Procuramos

[2] O que está entre colchetes é meu.

pré-estabelecer as regras, não permitindo serem modificadas no decorrer de uma rodada, conforme sugestão de Borin (1995, p. 14). Tomamos o cuidado para que haja um vencedor por rodada. Como consequência nos vimos obrigados a aumentar o número de peças, que costumeiramente é de vinte e oito. Como discutimos na seção 10.3, um jogo, por si só já possui atributos que o desprendem do que é mecânico, rotineiro. Assim, esperamos que o aluno atue de modo a criar sua partida, gerindo suas jogadas de modo criativo e decisivo. Apoiados no texto de Smole, Diniz e Milani (2007), buscamos nos orientar de modo que fosse possível para os jogadores, alunos, atuarem dentro das regras.

10.4.1 Um pouco sobre o dominó

O dominó tradicional, mais popular no Brasil, é composto por vinte e oito peças retangulares, também chamadas "pedras". Com um risco ou uma marcação, divide-se cada uma das vinte e oito peças ao meio. Chamaremos cada parte do pequeno paralelepípedo como ponta. Em cada ponta temos um número de zero até seis representados. Por exemplo, uma pedra pode ter marcado em uma ponta o número três, e na outra o número 4, formando a peça três-quatro. As peças quatro-três e três-quatro representam a mesma pedra. É permitido que nas pontas haja o mesmo número, formando o "duplo", como por exemplo, a peça seis-seis, que em algumas regiões é utilizada para dar início à rodada, e conhecida por "bomba" por alguns. Deste modo, para determinar o número de peças basta calcular todas as combinações dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, tomados dois a dois, mais a quantidade de duplos possíveis, ou seja:

$$\text{O número de pedras} = \binom{7}{2} + 7 = \frac{7!}{(7-2)!2!} + 7 = \frac{7.6.5!}{5!.2.1} + 7 = 7.3 + 7 = 21 + 7 = 28.$$

Em outros países podemos ter variância no número de peças, já que são construídos com base em um conjunto numérico maior. Por exemplo, há jogos com 55 pedras que possuem até o duplo nove. Existem jogos com 190 pedras, atingindo o duplo 18. Em teoria, para $n = 0$ podemos confeccionar apenas o duplo zero-zero; para $n = 1$ as peças são os duplos zero-zero, um-um e a pedra zero-um; para $n = 2$ as peças são zero-zero, um-um, dois-dois, zero-um, zero-dois e um-dois. Em resumo, o número de peças, $NP(n)$, do dominó é dados por:

$$NP(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \binom{n+1}{2} + (n+1), & \text{se } n \geq 1. \end{cases} \tag{10.1}$$

As regras do jogo se referem a alguns pontos importantes, como, por exemplo, o número de pedras para cada jogador, o número de jogadores, como iniciar a partida, como dar prosseguimento ao lances, qual é o critério para "pesca", onde deve-se entender o termo "pesca" como o ato de retirar uma ou mais peças entre as pedras que sobraram, como iniciar uma partida, como prosseguir após o primeiro lance, os critérios para decidir o vencedor ou sobre empate e desempate. Esses pontos possuem variações conforme a região dos jogadores. Para ilustrar essa variação, vamos tomar como fonte as regras colocadas no site http://pt.wikipedia.org/wiki/Domino. Segundo essa fonte, a regra para definir o primeiro jogador admitem as seguintes variâncias:

1. o primeiro a jogar é aquele que tem a peça seis-seis;

2. ou aquele que sortear a peça mais alta dará início à primeira partida, as demais partidas se iniciarão no sentido anti horário a partir deste jogador;

3. ou aquele que ganhou a partida anterior, sendo que este pode jogar qualquer peça.

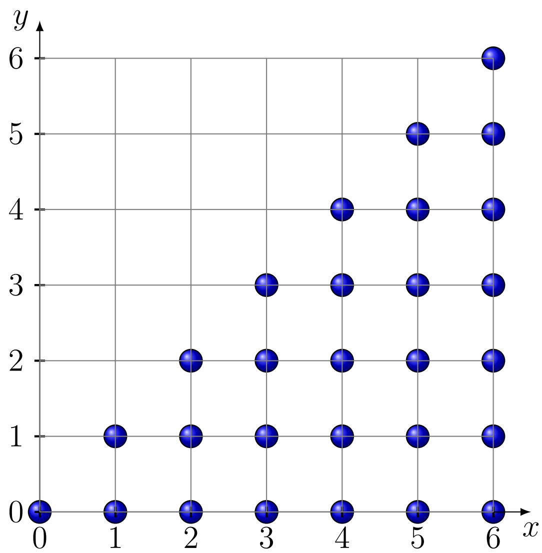
Um ponto especial diz respeito ao número de peças de cada jogador, bem como a quantidade de jogadores, já que, dependo destes números, para valores pequenos de n, não será possível confeccionar um dominó que seja útil para jogar, pois o número de peças não permite que as regras se apliquem parcialmente ou totalmente. Por exemplo, considerando que temos dois jogadores com seis peças cada um, devemos ter no mínimo 12 pedras. Para obter pelo menos 12 pedras devemos tomar $n \geq 4$. De fato, substituindo $n = 3$ em (10.1), obtemos:

$$NP(3) = \binom{4}{2} + 4 = \frac{4!}{2!2!} + 4 = 2.3 + 4 = 10 \text{ peças}.$$

Já, para $n = 4$ a equação (10.1) no dá:

$$NP(4) = \binom{5}{2} + 5 = \frac{5!}{3!2!} + 5 = 5.2 + 5 = 15 \text{ peças}.$$

Figura 66 – Usando o plano cartesiano para obter as pedras no caso $n = 6$



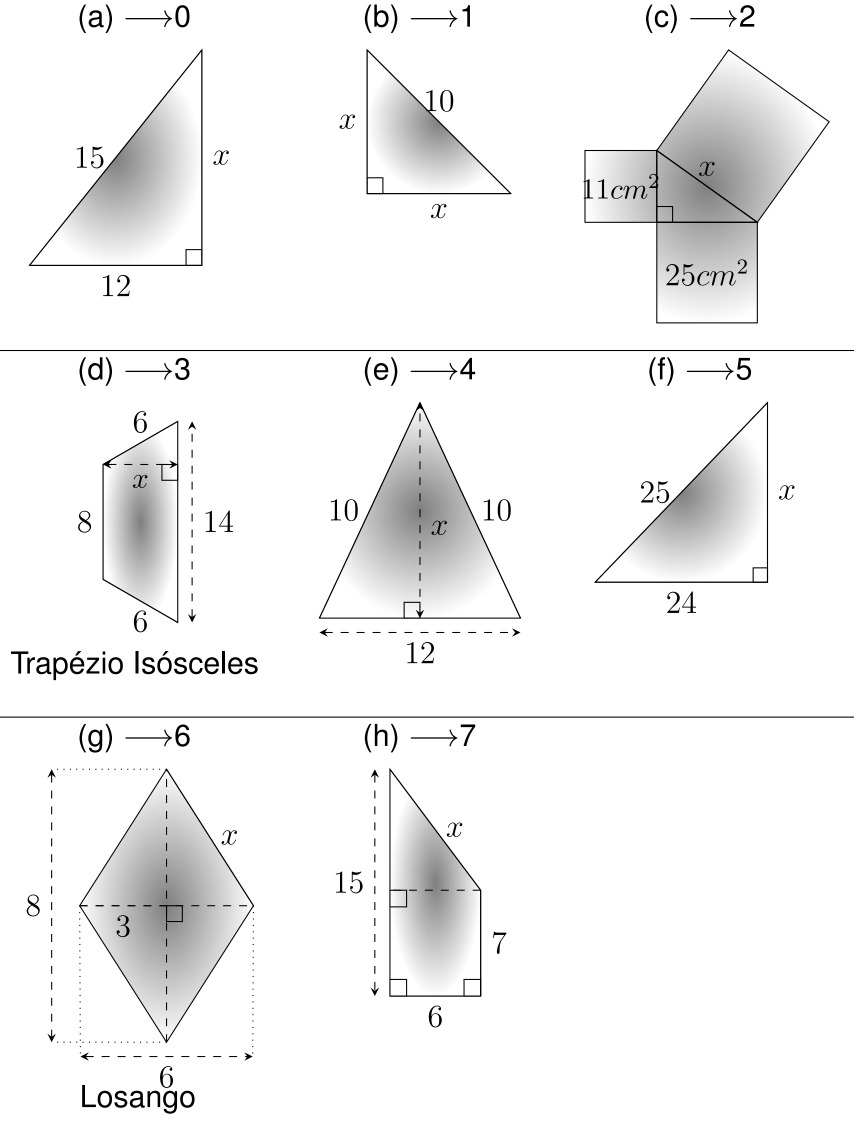
Fonte: Produzido pelo autor.

Superada a questão de determinar o número de pedras, resta-nos obter uma técnica simples para determinar todos os pares de pontas, ou seja, todas as peças. Para isso consideramos os eixos cartesianos, marcando sobre estes os naturais de zero até n. Logo em seguida determinamos todos os pares ordenados (x, y), onde $x = 0, 1, ..., n$ e $y = 0, 1, ..., n$. Geometricamente esses pontos se agrupam lembrando um quadrado. Repartimos esse quadrado segundo a bissetriz dos quadrantes ímpares, isto é, pelos pontos da forma (x, x). O números que devemos escrever nas pontas são aos coordenadas dos pares ordenados (x, y) abaixo e sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, onde $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, com $y \leq x$.

10.4.2 O dominó na sala de aula

Vamos reparar na Figura 67 a seguir. Utilizamos as sub figuras 67a, 67b, 67c, 67d, 67e, 67f, 67g e 67h para confeccionar as peças do dominó.

Figura 67 – Figuras usadas para construir o dominó. Para jogar o aluno deve calcular o valor de x. As figuras abaixo correspondem a uma ponta da peça e o valor calculado para x será a outra ponta. Na Figura 67, também temos um exemplo de uma associação das sub figuras: 67a$\longrightarrow 0$; 67b$\longrightarrow 1$;...;67h$\longrightarrow 7$.



Fonte: Produzido pelo autor.

10.4.2.1 Construindo o dominó da Atividade A.8

Cada pedra do dominó utilizado na Atividade A.8, possui uma das figuras apresentadas na Figura 67 em alguma das pontas; na outra ponta da peças há um número, o qual representa o valor de x de alguma das sub figuras presente na Figura 67.

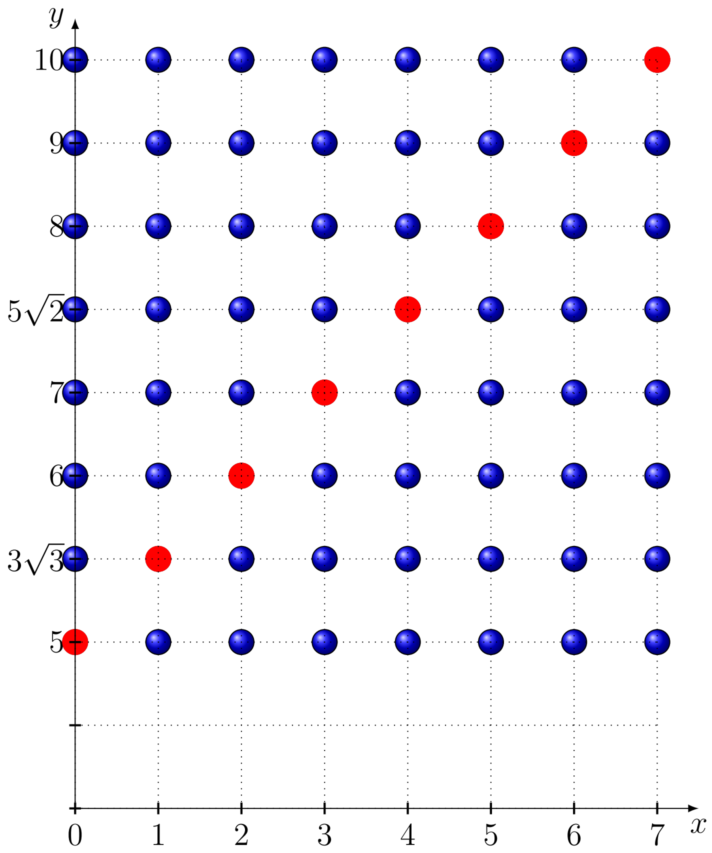
Para construir o conjunto de peças que constituem o dominó, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os naturais pertencentes ao conjunto $\mathbb{A} = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq n \leq 7\}$ e as sub figuras apresentadas na Figura 67, preservando a ordem crescente de x , o qual tem os seguintes valores: $x_{67a} = 9$, $x_{67b} = 5\sqrt{2}$, $x_{67c} = 6$, $x_{67d} = 3\sqrt{3}$, $x_{67e} = 8$, $x_{67f} = 7$, $x_{67g} = 5$ e $x_{67h} = 10$. Colocando os valores de x em ordem crescente, obtemos a sequência $x_{67g} = 5$, $x_{67d} = 3\sqrt{3}$, $x_{67c} = 6$, $x_{67f} = 7$, $x_{67b} = 5\sqrt{2}$, $x_{67e} = 8$, $x_{67a} = 9$ e $x_{67h} = 10$. Podemos estabelecer a seguinte associação entre os elementos de $\mathbb{A}$ e os valores de x, agora ordenados:

$$\begin{array}{lcl} 0 & \longrightarrow 5 & = x_{67g} \\ 1 & \longrightarrow 3\sqrt{3} & = x_{67d} \\ 2 & \longrightarrow 6 & = x_{67c} \\ 3 & \longrightarrow 7 & = x_{67f} \\ 4 & \longrightarrow 5\sqrt{2} & = x_{67b} \\ 5 & \longrightarrow 8 & = x_{67e} \\ 6 & \longrightarrow 9 & = x_{67a} \\ 7 & \longrightarrow 10 & = x_{67h} \end{array} \tag{10.2}$$

Representaremos os naturais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 no eixo das abscissas. Os valores de x, calculados com base nas sub figuras 67a, 67b, ..., 67h são representados no eixo das ordenadas[3]. Deste modo, todos as pedras possíveis de serem construídas e utilizadas na Atividade A.8, correspondem aos pares (x, y), onde $x \in \mathbb{A}$ e y corresponde a uma das sub figuras presente na Figura 67. Foram retirados os pares $(0, 5)$, $\left(1, 3\sqrt{3}\right)$, $(2, 6)$, $(3, 7)$, $\left(4, 5\sqrt{2}\right)$, $(5, 8)$, $(6, 9)$ e $(7, 10)$, onde as abscissas 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 referem-se, segundo a correspondência (10.2), às sub figuras 67g, 67d, 67c, 67f, 67b, 67e, 67a e 67h, respectivamente. Assim, o número de peças que constituem o jogo de dominó da Atividade A.8 é de 56, encontrando-se todas no Apêndice 1, subseção A.8.1.

[3] Com a intenção de facilitar a visualização da Figura 68, representamos os números 5, $3\sqrt{3}$, 6, 7, $5\sqrt{2}$, 8, 9 e 10 de forma igualmente espaçada sobre o eixo das ordenadas.

Figura 68 – Com auxílio do sistema de coordenadas cartesianas construímos as peças do dominó utilizado na Atividade A.8. Veja todas as peças que formam o dominó na subseção A.8.1. As pedras em vermelho são desconsideradas do conjunto de peças. Observação: no eixo y a posição dos números é apenas representativa.



Fonte: Produzido pelo autor.

Antes de prosseguirmos vamos tentar responder algumas perguntas.

1. *Com 8 figuras não devíamos obter um dominó com 36 pedras?*

2. *Por que eliminar a diagonal?*

Certamente que sim para um dominó comum, conforme nos informa o cálculo do número de peças, $NP\,(n)$, dado em (10.1). Contudo, comparando a Figura 66 com a Figura 68, percebemos que na primeira situação, que corresponde ao dominó "comum", temos os mesmos elementos no eixo das abscissas e das ordenadas, ao passo que na segunda situação, que corresponde ao dominó "pedagógico", temos elementos diferentes sendo representados nos eixos coordenados. De fato, no dominó "comum", uma pedra tem as pontas retiradas apenas do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; por outro lado, no dominó "pedagógico", uma ponta é tomada no conjunto da figuras, representadas na Figura 67, e a outra ponta é tomada no conjunto $\{5,\, 3\sqrt{3},\, 6,\, 7,\, 5\sqrt{2},\, 8,\, 9,\, 10\}$, que correspondem aos valores de x. Essa alteração pode gerar o trancamento do jogo, o que não seria desejado. Para evitar esse problema tomamos todas as peças possíveis de serem confeccionadas, com exceção da diagonal vermelha apresentada na Figura 68, pois estas peças tem numa ponta uma das sub figuras retiradas da Figura 67 e na outra ponta o valor de x que é solução para esta figura em específico. Contudo, retirar a diagonal vermelha é opcional, resultando que o dominó só terá mais peças. Alternativamente, uma solução para evitar travamento do jogo, proposta no jogo “Dominó de Equações”, no capítulo dezoito do livro *Jogos de matemática de 6ºa 9ºano* de Smole, Diniz e Milani (2007, p. 92), é colocar algumas pedras “coringas”, que são peças com uma ponta em branco, as quais poderiam ser encaixadas em todas as outras. O uso da peça “coringa”, sugerido pelos autores Smole, Diniz e Milani (2007), é transcrito abaixo:

> 7. A peça branca é a coringa e deve ser usada quando depois de examinar suas peças, o jogador não encontrar nenhuma que possa ser encaixada. As duas partes da peça devem ser preenchidas e a peça colocada sobre a mesa de modo que uma de suas partes possa ser encaixada no jogo em uma das extremidades.
> 8. Se depois de usar o coringa o jogador não encontrar entre suas peças uma que possa ser encaixada no jogo, ele poderá retirar, no máximo, três peças do monte.
> 9. O jogador só poderá passar a sua vez se já usou o coringa (peça branca) e retirou três peças do monte. (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 92)

O uso e regras sobre a pedra “coringa” podem ser criadas e adaptadas conforme o desejo de cada um tornando o jogo mais ou menos desafiador ou complicado. Nós sugerimos que o “coringa” seja misturado ao monte, e o jogador que o retirar do monte deve usá-lo conforme sua necessidade e estratégia pessoal.

Uma outra maneira de construir as peças apresentadas na subseção A.8.1, é por meio de uma tabela de dupla entrada. Abaixo temos a Tabela 15 que se presta à construção dessas peças. Na primeira linha, em azul, marcamos as sub figuras da Figura 67, referenciadas por 67a, 67b, 67c, 67d, 67e, 67f, 67g e 67h. Na primeira coluna, com exceção da célula que ocupa a primeira linha, escrevemos os valores de x. Por exemplo, na segunda linha com a segunda coluna temos a peça 9 (a), onde o número 9 é o valor de x referente a sub figura 67a e (a) refere-se a sub figura 67a, conforme indica o nome da coluna dado acima. Essas peças e todas as outras que formam a diagonal pintada de vermelho foram excluídas conforme já discutimos acima.

Tabela 15 – Usar uma tabela de dupla entrada é outro modo de confeccionar o dominó da subseção A.8.1.

	67a		67b		67c		67d		67e		67f		67g		67h	
9	9	(a)	9	(b)	9	(c)	9	(d)	9	(e)	9	(f)	9	(g)	9	(h)
$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	(a)	$5\sqrt{2}$	(b)	$5\sqrt{2}$	(c)	$5\sqrt{2}$	(d)	$5\sqrt{2}$	(e)	$5\sqrt{2}$	(f)	$5\sqrt{2}$	(g)	$5\sqrt{2}$	(h)
6	6	(a)	6	(b)	6	(c)	6	(d)	6	(e)	6	(f)	6	(g)	6	(h)
$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	(a)	$3\sqrt{3}$	(b)	$3\sqrt{3}$	(c)	$3\sqrt{3}$	(d)	$3\sqrt{3}$	(e)	$3\sqrt{3}$	(f)	$3\sqrt{3}$	(g)	$3\sqrt{3}$	(h)
8	8	(a)	8	(b)	8	(c)	8	(d)	8	(e)	8	(f)	8	(g)	8	(h)
7	7	(a)	7	(b)	7	(c)	7	(d)	7	(e)	7	(f)	7	(g)	7	(h)
5	5	(a)	5	(b)	5	(c)	5	(d)	5	(e)	5	(f)	5	(g)	5	(h)
10	10	(a)	10	(b)	10	(c)	10	(d)	10	(e)	10	(f)	10	(g)	10	(h)

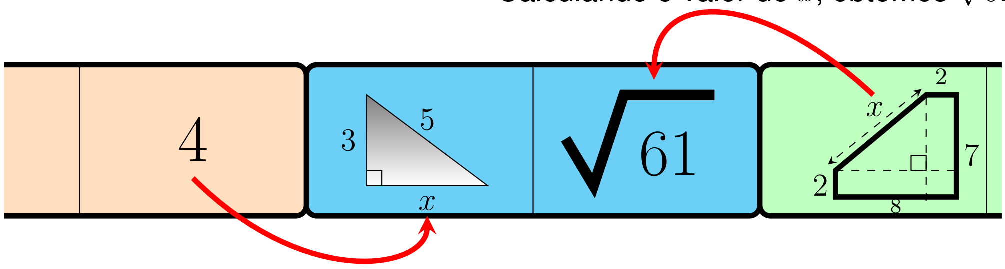
10.4.2.2 As regras do jogo trabalhado na Atividade A.8

As regras para o jogo foram adaptadas, como comentamos no início da seção 10.4, do jogo “Dominó de Racionais” que consta do livro *Jogos de matemática de 6ºe 9º*, de Smole, Diniz e Milani (2007, p. 33–37). Basicamente o procedimento é o seguinte: embaralha-se as peças do dominó, colocando-as viradas sobre a mesa, escondendo o seu conteúdo. Cada aluno retira cinco peças, deixando as demais viradas para futuras retiradas, caso necessário. Os jogadores decidem entre si, de comum acordo, quem dá o primeiro lance.

Uma das diferenças entre o jogo de dominó tradicional e o apresentado na Atividade A.8 reside na maneira como as peças devem ser baixadas à mesa, gerando uma sequência de peças. Nas folhas de atividade entregues aos aluno, parte do texto dedica-se a tentar explicar como se dá o processo de “baixar uma peça à mesa”. Além do texto, uma figura ilustra uma situação imaginária com duas outras figuras que não constam entre as oito figuras apresentadas na Figura 67. Para simples referência, essas folhas podem ser consultadas no Apêndice A.8.

Figura 69 – A imagem exemplifica como baixar uma peça durante o jogo.

Calculando o valor de x, obtemos $\sqrt{61}$.



Quatro é o valor calculado para x.

$$\begin{aligned} 5^2 &= x^2 + 3^2 \\ 25 &= x^2 + 9 \\ x^2 &= 25 - 9 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \sqrt{16} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= (7-2)^2 + (8-2)^2 \\ x^2 &= 5^2 + 6^2 \\ x^2 &= 25 + 36 \\ x^2 &= 61 \\ x &= \sqrt{61} \end{aligned}$$

Fonte: Produzido pelo autor.

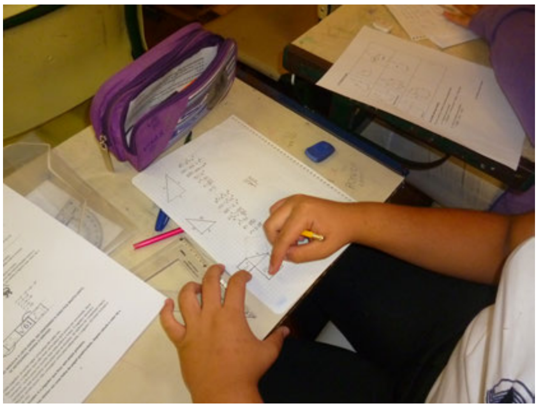
As regras:

> 1. As peças são colocadas sobre a mesa, viradas para baixo e misturadas.
> 2. Cada jogador pega cinco peças enquanto as demais ficam viradas sobre a mesa.
> 3. Decide-se quem começa o jogo.
> 4. O primeiro jogador coloca uma peça virada para cima, sobre a mesa.
> 5. O segundo jogador tenta colocar uma peça, em que uma das extremidades tenha o valor de x da figura constante da peça sobre a mesa, ou tenha a figura cujo valor de x esteja na peça sobre a mesa.
> 6. Só pode jogada uma peça de cada vez.
> 7. Na sua vez, o jogador que não tiver uma peça que possa ser encaixada, deve "comprar" outra peça no monte que esta sobre a mesa. O jogador deverá ir comprando até encontrar uma peça que se encaixe. Se depois de comprar cinco peças ainda assim não conseguir uma peça adequada, o jogador deverá passar a sua vez.
> 8. O vencedor é o primeiro jogador que ficar sem peças.
> (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 36)

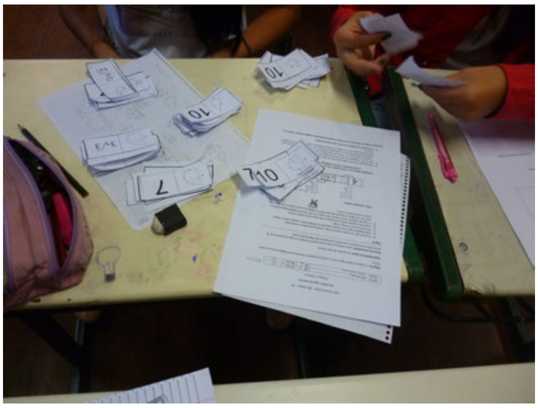
Para entender melhor a Figura 69, imagine dois jogadores, que chamaremos *Alpha* e *Beta*, os quais entraram em acordo de *Alpha* jogar primeiro. *Alpha* baixa sobre a mesa uma peça que tem em uma de suas pontas um triângulo retângulo de catetos 3 e x, bem como hipotenusa 5; em outra ponta encontra-se o número $\sqrt{61}$. Logo após, é a vez de *Beta*. Este procura entre suas pedras, alguma que tenha registrado em uma das pontas apenas o número 4, que é um dos valores obtido ao resolvermos a equação $5^2 = 3^2 + x^2$. Como x corresponde a medida do cateto de um triângulo retângulo, atribuímos a x o valor 4, conforme necessitávamos. Caso *Beta* encontre ao menos uma peça com essa característica, poderá baixá-la à mesa e a vez passa para o outro jogador. Uma outra jogada possível para o jogador/aluno *Beta*, é buscar entre suas peças alguma que contenha uma figura em uma das pontas, sendo que nesta figura há uma incógnita x, cujo cálculo nos leva ao valor $\sqrt{61}$. Em qualquer uma das duas situações acima, *Beta* pode jogar uma peça e o jogo prossegue. Caso o jogador *Beta* não possua entre suas pedras uma que contemple um dos dois caso acima, ele deve dirigir-se ao monte de peças que sobraram na mesa, e que encontram-se viradas com seu conteúdo oculto, procedendo a retirada das pedras do monte, uma por vez, até um máximo de cinco, ou encontrar uma pedra que sirva para realizar uma jogada, conforme descritas acima, valendo o que ocorrer primeiro.Veja o exemplo da Figura 69.

Figura 70 – A figura mostra o trabalho dos alunos na Atividade A.8. (a) Nesta imagem, os alunos estão resolvendo os exercícios. (b) Organizando as peças para jogar. (c) Outro grupo trabalhando os exercícios. (d) Um terceiro grupo já em estágio avançado de jogo.

(a) Trabalhando os exercícios.



(b) As peças cortadas.



(c) Trabalhando os exercícios

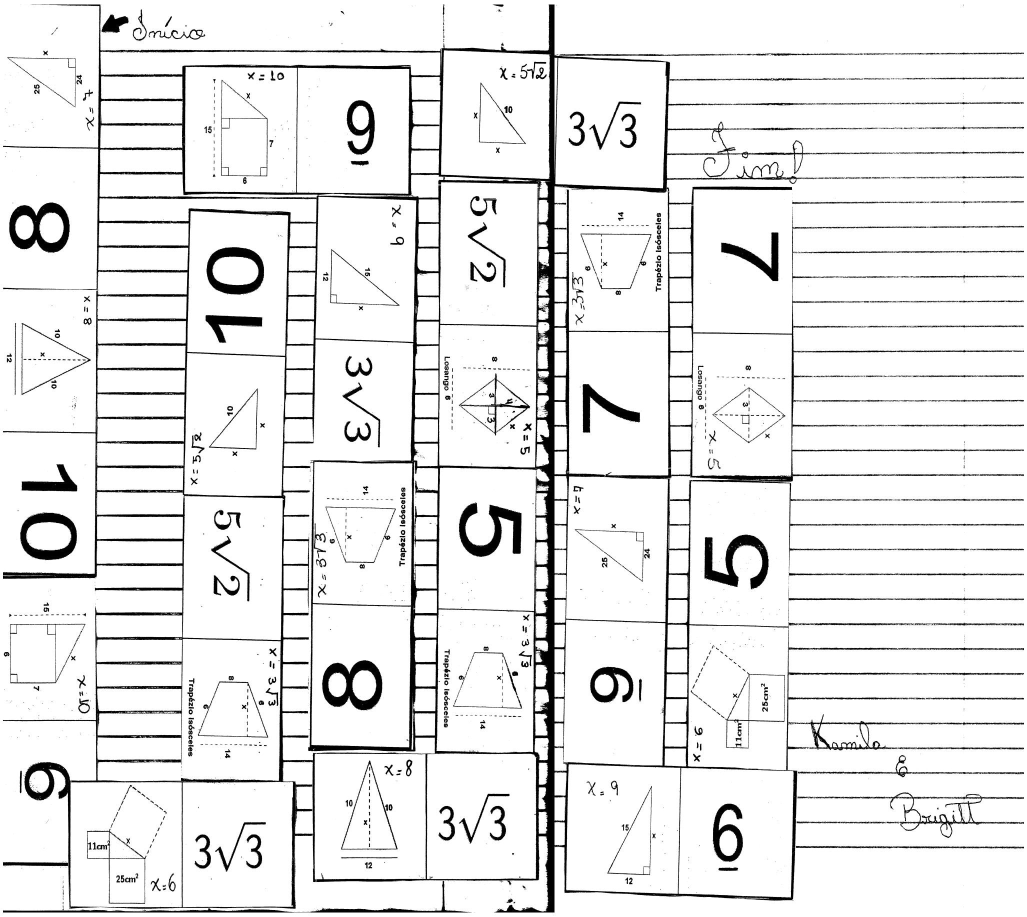
(d) Jogando.

Fonte: Produzido pelo autor.

Em sala de aula, durante a aplicação desta atividade, inicialmente fizemos uma leitura coletiva das folhas, e neste momento houve oportunidade para tirar as dúvidas com relação ao texto, tendo sido fornecida uma explicação parecida com o texto acima. Em particular, o jogo é um pouco lento, pois para baixar as peças há necessidade que sejam resolvidos os exercícios. Logicamente ganha-se ritmo conforme se desenvolve mais e mais jogadas. Assim, sugeriu-se aos alunos que resolvessem todos os exercícios antes. De modo cooperativo algumas duplas sugeriram anotar o valor de x na peças, tornando o jogo mais ágil, conforme notamos na Figura 71.

Como forma de registro foram distribuídas folhas de papel almaço e solicitado que colassem uma sequência de jogadas, registrando o início, o fim, os participantes e caso desejassem, o vencedor.

Figura 71 – Uma sequência de jogadas realizadas por um grupo. Este grupo teve a ideia de registrar os valores de x em cada peça.



Fonte: Produzido pelo autor.

10.5 Aceitação por parte dos alunos

Tabela 16 – Tabela com avaliação das duplas sobre a Atividade A.8.

O grupo gostou dessa atividade ?				
	Não gostaram	Gostaram um pouco	Gostaram	Gostaram muito
Número de duplas	10	8	12	3
Como o grupo classifica essa atividade ?				
	Média	Fácil	Difícil	
Número de duplas	9	15	9	
Total de alunos = 66				

Fonte: Produzido pelo autor.

Ao trabalharmos com jogos em sala de aula devemos estar preparados para um ambiente mais movimentado. Os alunos quase sempre se envolvem e, nas palavras da professora Júlia Borin (1995, p.75), durante o jogo “não existe o medo de errar, pois o *erro é encarado como um degrau necessário para chegar a uma resposta correta*[4]. É assim que o aluno aprende a importância e a necessidade de análise de qualquer que seja o resultado para a construção do conhecimento.”.

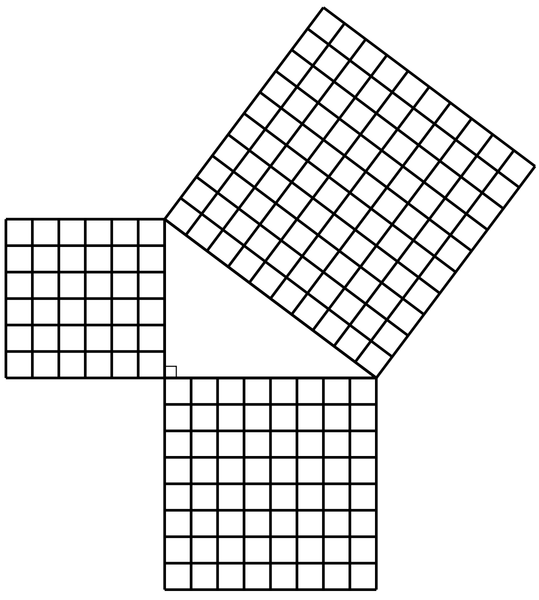
[4] Grifo meu.

11 Conclusão - considerações finais e críticas ao trabalho.

Buscamos, durante todo o processo, justificar os caminhos que escolhemos. De modo semelhante a um incêndio em uma floresta, mesmo após o exaustivo rescaldo, sempre sobra aqui ou ali, uma ou outra brasa que, sobre a ação de um vento adequado, pode gerar um novo incêndio. Temos consciência de que nem todos os focos estão sobre controle, requerendo novas forças para combatê-los.Em todo o texto, procuramos não ficar com o dedo em riste, apontando culpados por esta ou aquela fatalidade que se some ao processo educacional atual. Antes sim, procuramos trabalhar exaustivamente na melhoria do produto que apresentamos no Apêndice 1, pois acreditamos no trabalho e no estudo para o crescimento pessoal e coletivo.

Durante o Capítulo 2 procuramos sintonizar as variáveis que consideramos importantes. Iniciamos sintonizando o presente trabalho em seu contexto social e político. Para isso formos buscar maiores informações sobre o programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT. Adentramos, ligeiramente é verdade, o ambiente da escola onde se desenvolveram os trabalhos. Visitamos as salas de aulas mencionando a quebra do contrato didático, onde o professor foi retirado da posição tradicional e o aluno inserido como protagonista de suas atividades. Revisitamos a história de Pitágoras. Infelizmente não conseguimos elevar a ponta do véu que cobre o ocultismo da vida de Pitágoras e dos pitagóricos. Seguimos o enunciado do Teorema de Pitágoras, confrontando-nos tanto com a visão geométrica quanto com a visão algébrica. Terminamos o capítulo com a demonstração da recíproca, a qual não encontramos tempo para trabalhar.

Figura 72



Fonte: Produzido pelo autor.

Gostaríamos de fazer uma pequena pausa para esclarecer alguns pontos, construindo nossa primeira crítica. Iniciaremos definindo o termo *tempo didático* segundo Machado e outros. (2002, p. 33).

> O *tempo didático*[1] é aquele marcado nos programas escolares e nos livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal. (MACHADO e outros., 2002, p. 33)

Em contraposição ao tom cumulativo e linear exposto acima, temos o *tempo de aprendizagem*, que segundo Machado e outros. (2002, p. 34) se define como:

> O *tempo de aprendizagem*[2] é aquele que está mais vinculado com a ruptura e os conflitos do conhecimento, exigindo uma permanente reorganização de informações, e que caracteriza toda a complexidade do ato de aprender. É o tempo necessário para o aluno superar os bloqueios e atingir uma nova posição de equilíbrio. (MACHADO e outros., 2002, p. 34)

Diante da definição dos termos fica evidente que o professor tem o papel de mediar os dois tempos. Não podemos perder de vista o tempo didático que impõe suas limitações burocráticas quase sempre ligadas a legislação educacional. Contudo, não podemos atropelar o aluno, ignorando seu tempo de aprendizagem. Neste processo de mediação muitas vezes o professor tem de fazer escolhas, e concordamos com Machado e outros. (2002, p. 35) quando nos diz que

> o problema sempre envolve uma relação entre o que já se encontra assimilado pelo sujeito e um novo conhecimento.(MACHADO e outros., 2002, p. 35)

Ou seja, a dialética entre o novo conhecimento e o antigo é que deve pesar quando decidimos a fração que corresponde a cada tempo anteriormente definido. Pois, segundo Machado e outros. (2002, p. 35) "para que ocorra a aprendizagem é preciso a superação das contradições inerentes a essa dialética."

No Capítulo 3 desenvolvemos o estudo da primeira aula que tem por base a montagem da Figura 72, propondo ao aluno verificar, por meio de colagem, que para um triângulo retângulo de catetos medindo 6 e 8, e hipotenusa medindo 10, vale a afirmação que diz: a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e igual a soma da área dos quadrados construídos sobre os catetos. Chamamos a atenção para o grande número de livros que possuem essa atividade, direta ou indiretamente.

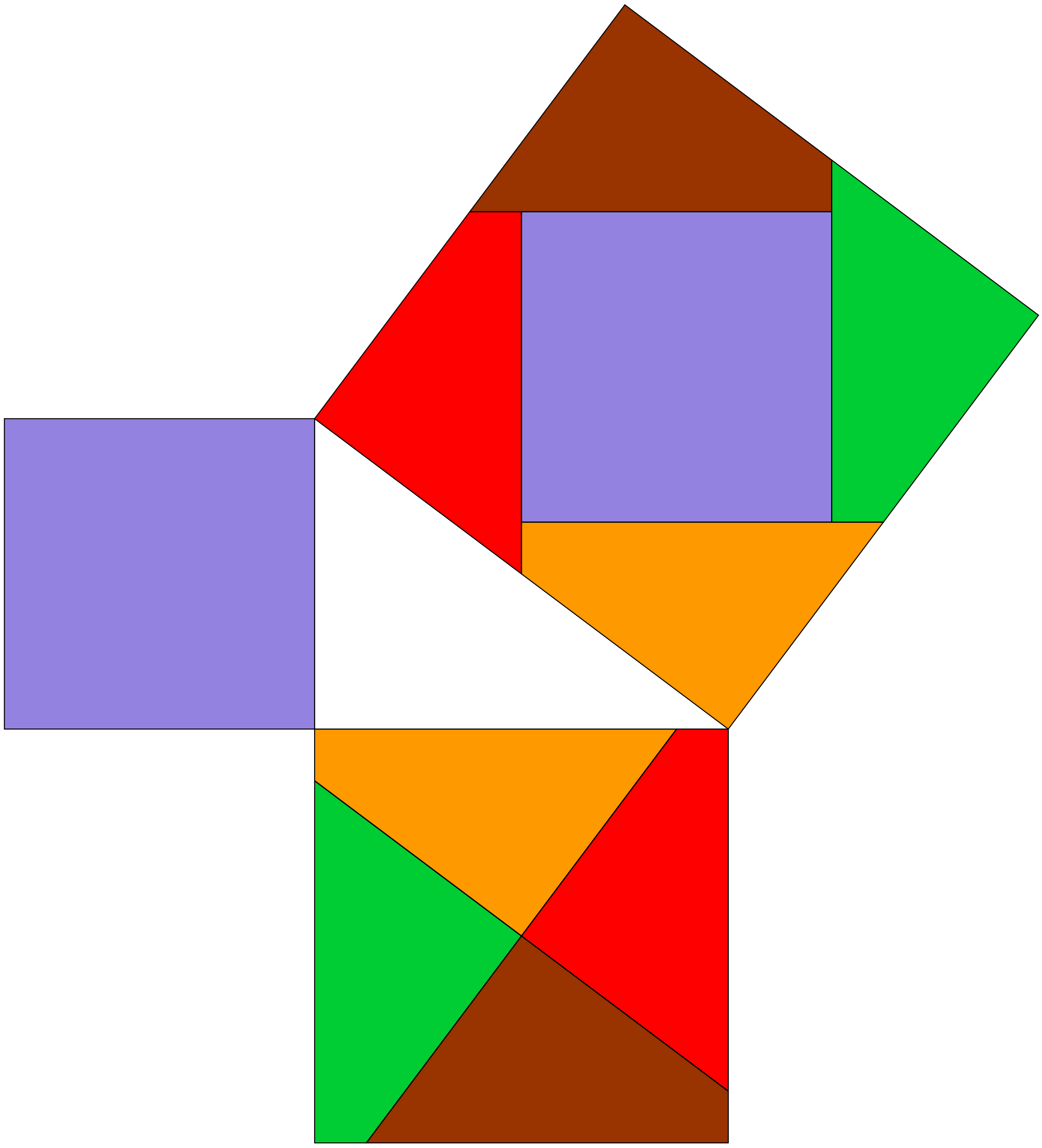
Neste instante podemos apontar a segunda crítica ao nosso trabalho. Nesta atividade sugerimos uma abordagem mais próxima do que nos apresenta o livro *Descobrindo o Teorema de Pitágoras* de Imenes (1992), que também faz uso da Atividade A.1 e propõe um quebra cabeça com uma malha diferente. Tais malhas, que dão origem ao quebra cabeça, são baseadas no trabalho de Henry Perigal e nos permitem fugir do campo numérico inteiro positivo, conforme já apontamos na seção 3.4. No livro *Teorema de Pitágoras e Áreas*, por Wagner (2009, p. 8), encontramos instruções de como construir uma malha e por conseguinte um quebra cabeça.

> Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e

[1] O itálico é de Machado e outros. (2002).
[2] O itálico é de Machado e outros. (2002).

> outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.(WAGNER, 2009, p. 8)

Figura 73 – Quebra cabeça desenvolvido conforme instrução dada por Wagner (2009, p. 8).

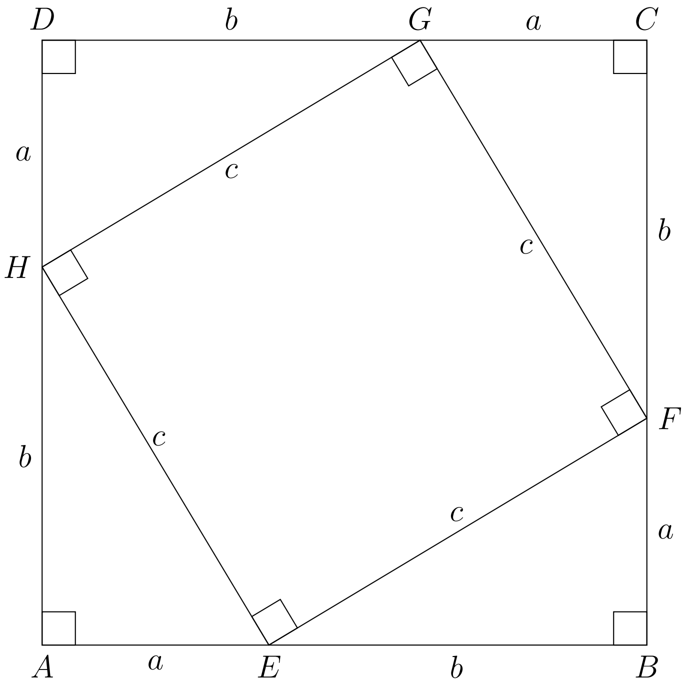


Fonte: Produzido pelo autor.

Evoluímos para o Capítulo 4, onde buscamos resgatar a “intuição geométrica”, uma prática abandonada durante a resolução de problemas de geometria em escolas de

Ensino Fundamental e Médio, com o agravante de que o estudo da Geometria é colocado em segundo plano. Esse resgate se justifica por diversos motivos. Podemos citar o aspecto geométrico do enunciado do Teorema de Pitágoras, o qual foi evidenciado e discutido na subseção 2.2.2. Podemos relembrar o fator histórico que coloca a Geometria em destaque na Matemática desenvolvida por muitos povos. Assim, o abandono que constatamos da Geometria denota uma involução deste conhecimento. Neste sentido, procuramos ir contra essa involução, contudo sem prejudicar o que já conquistamos.

Figura 74

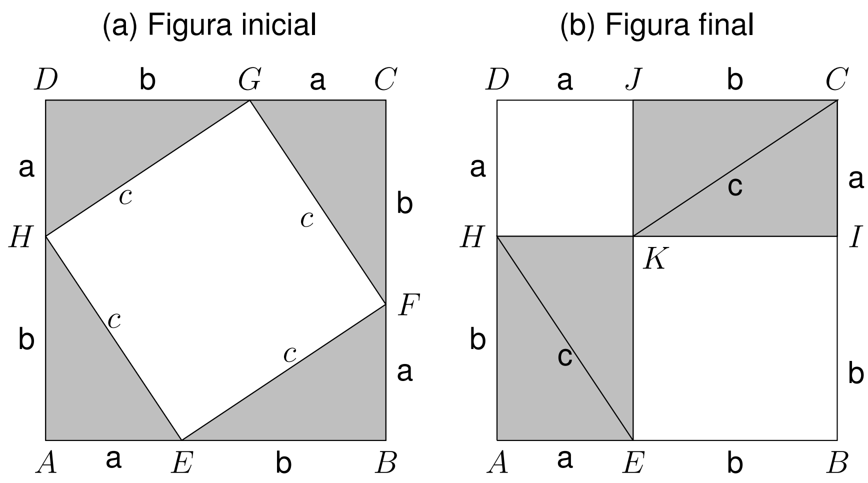


Fonte: Produzido pelo autor.

A "intuição geométrica" procurou centrar-se na idade mental dos alunos de oitavo ano, os quais se acham em fase de transição, do concreto para o abstrato, contudo, prevalecendo a fase concreta. Deste modo, exigimos uma construção detalhada da Figura 74. Aproveitando a versatilidades da Figura 74, concluímos o capítulo transitando por algumas demonstrações ocasionalmente escolhidas do teoremas de Pitágoras.

Novamente nos detemos mais alguns instantes para refletir sobre nossa prática pedagógica no que diz respeito a Figura 74 e todas as demais atividades relacionadas à esta figura. Buscamos orientar o aluno a fim de que o mesmo se apropriasse de um *saber*, o Teorema de Pitágoras. Mas não nos contentamos apenas em apresentar e aplicar o Teorema de Pitágoras. Fomos em busca de uma fundamentação, não uma demonstração nos padrões de rigor dos cursos de Matemática, mas uma que nos servisse de convencimento ao aluno do oitavo ano. Uma justificativa própria de sua idade mental, de seu grau de abstração. Contudo, exageramos ao dirigir em demasia as atividades. Uma das variáveis que nos fez passar do ponto nessa transposição didática, é a condição heterogênea da classe, conforme relatamos na subseção 2.1.3. Não obstante o exagero citado acima, temos a convicção de que as atividades propostas atingiram o objetivo, principalmente, resgatando o aluno mais carente em aprendizagem.

Figura 75 – Observe!



Fonte: Produzido pelo autor.

No Capítulo 5 trabalhamos a demonstração do Teorema de Pitágoras com auxílio da Figura 75. Apesar do imperativo registrado na Figura 75, não nos limitamos a observar, buscamos justificar a situação por meio das isometrias no plano, chegando ao resultado da proposição (5.3.7), o qual afirma que uma isometria transforma um triângulo retângulo em outro triângulo retângulo congruente ao primeiro. Posteriormente, usando translações, um caso particular de isometria, movimentamos os triângulos, passando de uma situação inicial, Figura 75a, para uma situação final, Figura 75b. Por meio de uma álgebra simples, aliada a uma comparação entre áreas, resulta, em (5.57), a relação desejada . Paralelamente registramos nossa impressões sobre a aula desenvolvida neste dia.

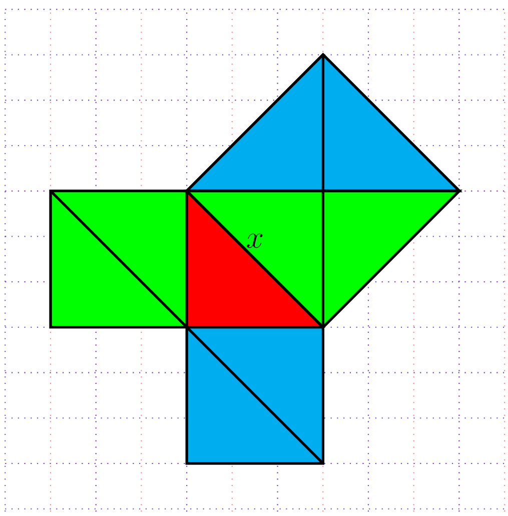
No Capítulo 6 antecipamos um problema que certamente encontraríamos no desenvolver do capítulo seguinte e trabalhamos o quadrado da soma como solução. Seguimos tanto o desenvolvimento algébrico quanto o desenvolvimento geométrico conforme nos sugere Machado e outros. (2009). De posse do quadrado da soma, revisitamos a Figura 74. Em um primeiro momento observamos o todo da Figura 74, isto é, enxergamos o quadrado de lado $(a + b)$; noutro momento foi conveniente observarmos as partes e comparar a área da figuras envolvidas.

Com o Capítulo 7 encerramos um grupo de atividades que tinham um objetivo em comum: justificar, ao menos de forma intuitiva, o Teorema de Pitágoras. Temos agora a oportunidade para refletir a respeito da questão: “por que trabalhar a justificativa (demonstração) do Teorema de Pitágoras de tantas formas diferentes?” Ao nos depararmos com um problema podemos sair em busca de uma resolução que nos leve a solução (caso exista) e diante desta nos darmos por satisfeitos, passando para um outro problema se for de nosso interesse. Não nos questionamos se a solução encontrada é única, ou se é possível resolver o problema de uma forma mais econômica ou mais didática, ou se há outra resolução sequer. Contudo, de nossa vivência com problemas matemáticos, desde os mais elementares aos mais complexos, sabemos que alguns admitem mais de uma resolução. Se prestarmos atenção ao grupo de resoluções de um problema, notaremos que os conceitos envolvidos podem ser completamente diferentes de uma resolução para outra, ou pode ocorrer de encontramos algumas que possuam uma linha transversal ligando-as, ou mesmo um núcleo comum. Essas diferenças e semelhanças nos abrem as portas para introduzir um ou outro conceito matemático de formas totalmente inusitada. Assim, também é importante refletirmos sobre os conceitos utilizados ao resolver um problema, buscando aproveitar ao máximo cada resolução, o que justifica nossa atitude. Entretanto, pagamos um preço. Foram trabalhados poucos problemas que aplicam o Teorema de Pitágoras em situações do dia a dia e em casos específicos da matemática. Este preço é pequeno, haja visto que o Teorema de Pitágoras passa a fazer parte da caixa de ferramentas que o aluno pode utilizar para resolver alguns problemas matemáticos, de forma que não faltarão aplicações. Por outro lado, a justificativa (demonstração), segundo o Currículo do Estado de São Paulo, deve ocorrer no quarto bimestre do oitavo ano do Ensino Fundamental, tornando-se difícil encontrar outra oportunidade para tal. Cabe ao professor, diante de seu planejamento prévio, tecido com base em uma análise *a priori*, estabelecer os objetivos que o grupo de alunos deve atingir, compactando ou expandindo as justificativas apresentadas, buscando outras demonstrações, conforme as necessidades didáticas pedagógicas, bem como o desenvolvimento cognitivos dos alunos. O certo é que não podemos perder a oportunidade para oferecer ao aluno um trabalho que o faça desenvolver-se.

Nos próximos capítulos passamos a aplicar as ideias envolvidas até então. Em particular, no Capítulo 8, tentamos levar o aluno ao cálculo da diagonal de um quadrado. Para isso sugeriu-se a construção da Figura 76, seguida pela aplicação do Teorema de Pitágoras com base na redação apresenta por Wagner (2009, p. 4):

> Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. (WAGNER, 2009, p. 4)

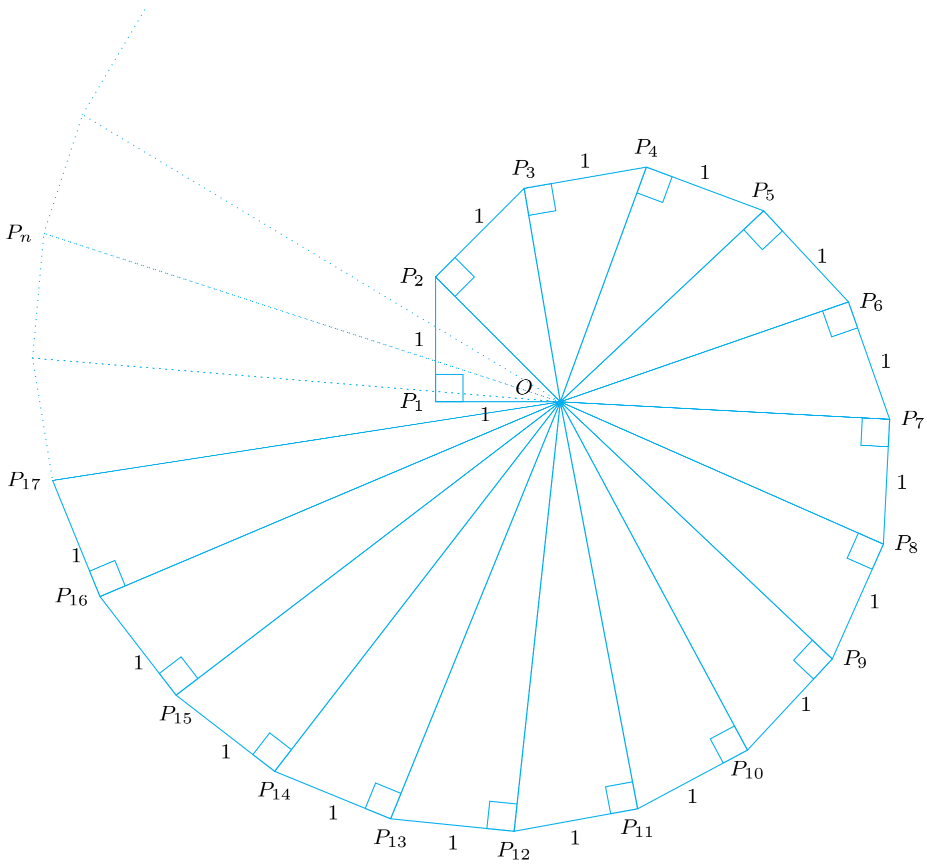
Figura 76



Fonte: Produzido pelo autor.

No Capítulo 9 apresentamos umas poucas aplicações práticas do Teorema de Pitágoras e nos deparamos com a Espiral de Teodoro de Cirene, um pitagórico que viveu ente 465 e 398 a.C. *Hoje*, após concluído todo o processo, em nosso momento pessoal de reflexão, vislumbramos que mais aplicações prática podiam ter sido passadas, ou mesmo melhor exploradas. Por exemplo, na subseção 9.3.1 calculamos o comprimento do cabo de energia colocando a entrada do cabo de força no chão. Essa entrada pode ser modificada para uma altura h acima do chão, de forma que a primeira imagem que se obtém é de um trapézio retângulo, do qual se extraí o triângulo retângulo necessário a solução do exercício. Além disso é oportuno lembrar que o cabo de energia não estará perfeitamente esticado, logo, a resposta é uma aproximação, devendo ocorrer de o Sr. Antônio ter que comprar alguns metros a mais. Como outro exemplo, podemos mencionar que uma viga de madeira tem dimensões que interferem no cálculo do madeiramento de um telhado. Esses dimensões não foram levada em conta no problema da subseção 9.3.2 e certamente exigiriam mais dos alunos e do próprio professor. Quanto a Espiral de Teodoro de Cirene tratada na subseção 9.4.1, cabe uma atividade a parte que explore toda sua beleza histórica. Poderíamos ter questionado o aluno sobre quantos triângulos devemos construir para que ocorra sobreposição, passando para outra volta. Também podemos mencionar a oportunidade de construir essa espiral com régua e compasso e ligá-la aos irracionais, e desafiar o aluno a calcular o comprimento do segmento OP_{2014}, que o conduziria à sequência discutida na subseção 9.4.4.

Figura 77 – Espiral de Teodoro de Cirene também conhecida como Espiral pitagórica.



Fonte: Produzido pelo autor

Nos deparamos com a última aula no Capítulo 10. Tendo o objetivo de apresentar uma atividade lúdica que envolvesse o aluno no processo de aprendizagem, propusemos trabalharem com o jogo dominó pedagógico de maneira que pudessem treinar o Teorema de Pitágoras. Pelo que nos relata Borin (1995) em grande parte de seu trabalho, o jogo traz em seu bojo o treino de características necessárias tanto ao cientista, que dedicará sua vida ao trabalho científico, quanto ao homem comum, que tem o direito de escolher viver longe dos laboratórios de pesquisa, contudo é cobrado pelas exigências da própria sociedade consumista em que se encontra. Deste modo, nossa consciência crítica nos aponta acertadamente para a escolha desta atividade. Não obstante, quantificar o nível de aprendizagem alcançado por meio desta e de outras atividades é um desafio, isto é, medir o quanto o aluno superou, é um problema segundo nos informa Machado e outros. (2002) no trecho abaixo:

> O problema maior é que essa superação *não pode ser medida em termos quantitativos*[3], o que evidencia todas as dificuldades pertinentes à avaliação nesse nível da aprendizagem. (MACHADO e outros., 2002, p. 35)

Como conclusão para nós e para os alunos, muito provavelmente para todos os envolvidos na elaboração deste trabalho, devemos apontar para o crescimento pessoal de cada um em particular. Para desenvolver esse trabalho passamos por diversas etapas, conforme nos sugere Umberto Eco (1977, p. 5). Em cada etapa fomos impelidos a **refletir** sobre nossas necessidades bem como as necessidades do grupo. Assim, a escolha do tema procurou unir o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo com a oportunidade de se escrever um Trabalho de Conclusão de Curso. Posteriormente passamos pela fase de pesquisa sobre o tema escolhido, o que nos levou a rever uma antiga bibliografia, bem como procurar novas fontes para confrontar pensamentos e pontos de vista. Uma vez de posse da documentação bibliográfica, restou-nos a tarefa de organizar estes documentos, tendo em vista que as Instituições tem suas regras próprias para melhor serem administradas. Passamos a dar forma orgânica às Atividades, para isso reexaminamos todos os documentos já precariamente organizados. Empenhamo-nos em elaborar o texto em cada Atividade, sempre tendo em mente a preocupação de que o aluno fosse auto suficiente na realização das tarefas propostas. Após a aplicação das Atividades, algo que também nos cobrou uma certa dose de planejamento, retomamos a fase de análise de documentos, agora buscando justificar nossas atitudes pedagógicas, nossas escolhas didáticas, observando os resultados apresentados pelos alunos em coletivo e individualmente. Decidimo-nos por adotar a Matemática como referencial teórico. Em contraposição escapou-nos um referencial para discutirmos nossos métodos didáticos mais profundamente, de modo mais científico. Percebemos neste ponto uma dificuldade de quem trabalha com Educação Matemática. Cobrir o campo matemático, com seus rigores ou cobrir o campo educacional com suas teorias próprias. Novamente formos levado a nos esforçar para produzir um texto de modo que o leitor possa compreender o que desejamos, tomando o cuidado de documentar as citações para aqueles que desejem confronto direto com a fonte. Nas palavras de Umberto Eco (1977, p. 5), tivemos de "aprender a pôr ordem nas próprias ideias e ordenar os dados", passando por "uma experiência de trabalho metódico", construindo "um "objeto" que, como princípio, possa também *servir aos outros.*[4]"

> Com o tempo, tornamo-nos mais maduros, vamos conhecendo mais coisas, porém o modo como trabalhamos nas que sabemos sempre dependerá da maneira com que estudamos *no início*[5] muitas coisas que ignorávamos. (ECO, 1977, p. 5)

[3] Grifo meu.
[4] Grifo meu.
[5] Grifo meu.

Durante todo o processo de desenvolvimento buscamos dar um toque pessoal a tudo, ou construindo uma figura, ou buscando uma explicação para um fato. O caminho até este último parágrafo foi longo e exigiu uma boa dose de ânimo. Acredito que só cheguei até aqui por inspiração divina que se materializou na forma dos livros que consultei, na figura do orientador, na paciência da companheira que atualmente se encontra ao meu lado. Saio diferente, mas fortalecido na certeza que somos amparados por nosso Pai Criador e Este se encontra principalmente na figura do nosso semelhante. Muito obrigado pela paciência.

Referências

ABNTEX2. **Modelo Canônico de Trabalho Acadêmico com abnTeX2**. [S.l.], 2013. Disponível em: <http://abntex2.googlecode.com/>. Citado na página 3.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos**. São Paulo-SP: Atual Editora, 1993. 93 p. Citado 9 vezes nas páginas 2, 14, 18, 19, 20, 37, 67, 77 e 78.

BIANCHINI, E. **Matemática:Bianchini**. São Paulo-SP: Editora Moderna, 2011. 272 p. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática.** São Paulo-SP: Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM)-IME-USP, 1995. 100 p. Citado 4 vezes nas páginas 102, 103, 113 e 122.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo-SP: Editora Edgard Blucher Ltda, 1994. 488 p. 11ªreimpressão-1994. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

CAMPOS, T. M. M. **Transformando a prática das aulas de Matemática**. São Paulo-SP: Proem Editora Ltda, 2001. 86 p. Citado 4 vezes nas páginas 17, 22, 23 e 67.

CASTRUCCI, B. **Liçoes de geometria plana .** 7ª. ed. [S.l.]: Livraria Nobel S.A., 1977. 137 p. Citado na página 11.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática**. São Paulo-SP: Editora Ática, 2012. 323 p. Citado na página 12.

ECO, U. **Como se faz uma tese**. 11ª. ed. São Paulo-SP: Editora Perspectiva, 1977. (Coleção Estudos). Título do original italiano: *Como se fa una tesi de laurea*. Citado na página 122.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo-SP: Editora UNESP, 2009. 593 p. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Citado na página 11.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas-SP: Editora UNICAMP, 2004. 844 p. Tradução de Hygino H. Domingues. 3ªreimpressão. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 96.

HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Gradiva publicações, Lda, 2003. 338 p. Tradução da 7ª ed. de Grundlagen der Geometrie, de David Hilbert, Estugarda. Citado na página 34.

IMENES, L. M. **Descobrindo o teorema de Pitágoras**. São Paulo-SP: Editora Scipione Ltda, 1992. 47 p. (Vivendo a Matemática). Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 67 e 116.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática: Imenes & Lellis, 8º ano**. 2. ed. São Paulo-SP: Moderna, 2012. 320 p. Citado 3 vezes nas páginas 17, 12 e 22.

JANOS, M. **Matemática e natureza**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 429 p. Citado na página 9.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 1ª. ed. Rio de Janeiro-RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 1977. 299 p. (Projeto Euclides). Citado na página 42.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P. **Coordenadas no plano**. 5ª. ed. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2011. 299 p. (Coleção do Professor de Matemática). Citado na página 43.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**. [S.l.]: National Council for Teachers of Mathematics, 1940. 310 p. Citado 6 vezes nas páginas 17, 34, 35, 63, 64 e 203.

MACHADO, N. J. e outros. **Caderno do professor: Matemática, Ensino Fundamental - 7ª- série, volume 2**. São Paulo-Sp: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2009. 56 p. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 119.

MACHADO, S. D. A. e outros. **Educação Matemática, uma (nova) introdução.** 3ª revisada. ed. São Paulo-SP: EDUC-Editora da PUC-SP, 2002. (Trilhas). Silvia Dias Alcântara Machado org. Citado 3 vezes nas páginas 8, 116 e 122.

MALTA, I.; PESCO, S.; LOPES, H. **Uma introdução ao cálculo**. [S.l.]: Edições Loyola - Editora PUC-Rio, 2012. 478 p. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 94.

MARCONDES, D. **Iniciação à história da filosofia: dos pré-socráticos a Wittgestein**. [S.l.]: Jorge Zahar Editor, 2001. 298 p. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.

NICOLA, U. **Antologia ilustrada de filosofia: das origens à idade moderna**. 1ª. ed. São Paulo-SP: Editora Globo, 2005. 479 p. 7ªreimpressão. Citado na página 9.

ROSA, E. Mania de pitágoras. **Revista do Professor de Matemática**, n. 02, p. 14–17, 1ºsemestre 1983. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM. Citado na página 38.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Jogos de Matemática do 6º a 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007. 104 p. (Cadernos do Mathema-Ensino Fundamental). Citado 7 vezes nas páginas 101, 102, 103, 108, 109, 110 e 161.

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 1998. 82 p. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2009. 94 p. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila3-teorema_de_pitagoras.pdf>. Citado 7 vezes nas páginas 19, 11, 41, 42, 116, 117 e 120.

Apêndices

APÊNDICE A – Folhas das atividades - o produto final

[1]

Estas folhas constituem o produto final de todo o trabalho.

A.1 Primeira atividade

Atividade com triângulos pitagóricos
(Tempo: 2 aulas)

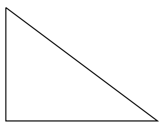
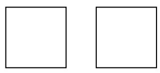
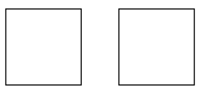
Nome		Nº	8 º ano	
Nome		Nº	8 º ano	

Objetivo: que o aluno perceba a relação existente entre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e a área dos quadrados construídos sobre os catetos.

Material:

- Papel quadriculado;
- Lápis de cor (azul, verde e vermelho);
- Tesoura sem ponta;
- Cola.

No papel quadriculado desenhe as seguintes figuras:

• Um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm (pinte de vermelho).	
• Dois quadrados de lado 6 cm (pinte de azul).	
• Dois quadrados de lado 8 cm (pinte de verde).	

✂ Corte o triângulo e cole no centro da última folha.

[1] As imagens apresentadas nestas folhas ou foram retiradas de http://office.microsoft.com/pt-br/images ou foram produzidas com auxílio do GeoGebra e posteriormente refeitas em LaTeX.

✂ Corte os quadrados.

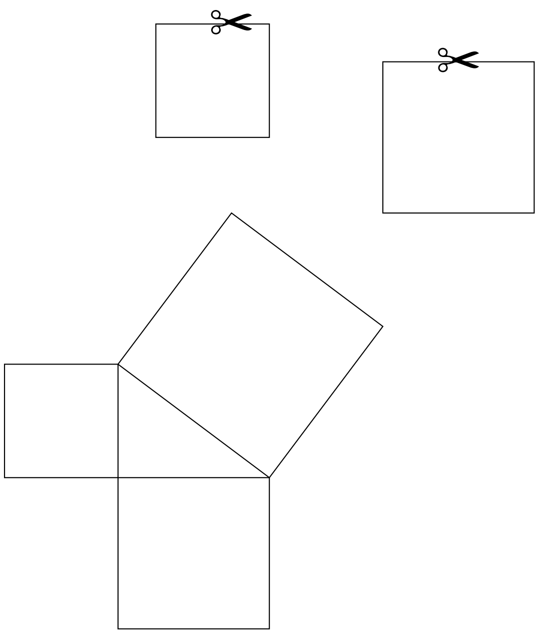
✂ Cole um dos quadrados de lado 6 cm ao lado do cateto de mesma medida.

✂ Cole um dos quadrados de lado 8 cm ao lado do cateto de mesma medida.

☺ Com auxílio da régua determine a medida da hipotenusa do triângulo retângulo colado. Não esqueça a unidade.

✷ | Resposta: | .... |

☺ Agora você vai montar um quebra cabeça. **CUIDADOSAMENTE, corte os dois quadrados que sobraram**, e tente construir, sobre a hipotenusa, um quadrado cujo lado tem a mesma medida da hipotenusa.
(Obs.: a hipotenusa do triângulo retângulo coincidirá com o lado do novo quadrado.)



☺ Vamos dar nomes aos quadrados que você colou na folha anterior:

- O quadrado ao lado do cateto de medida 6 cm será representado pela letra C;
- O quadrado ao lado do cateto de medida 8 cm será representado pela letra B;
- O quadrado construído sobre a hipotenusa será representado pela letra A.

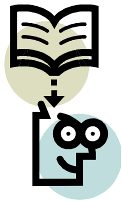
☺ Agora calcule as áreas. Deixe suas contas abaixo, ou indique o modo como obteve este valor.

➢Não se esqueça da unidade de área, no caso, cm^2.

Área do quadrado **A** Construido sobre a hipotenusa	Área do quadrado **B(verde)** Construido ao lado do cateto	Área do quadrado **C(azul)** Construido ao lado do cateto
Escreva suas contas	Escreva suas contas	Escreva suas contas

Para concluir a lição

☺ Pense e responda: você percebeu alguma relação entre as áreas calculadas acima? Escreva esta relação.



....

[2]

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

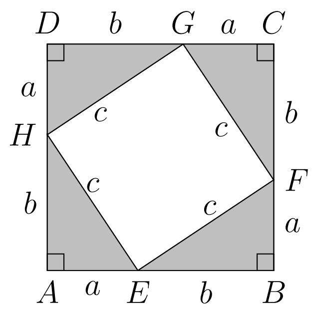
[2] Fonte:http://office.microsoft.com/pt-br/images

A.2 Segunda atividade

Atividade: construção
(Tempo: 2 aulas)

Nome		Nº	8 º ano	
Nome		Nº	8 º ano	

Objetivo: que o aluno se familiarize com a figura ao lado, observando suas regularidades e propriedades.

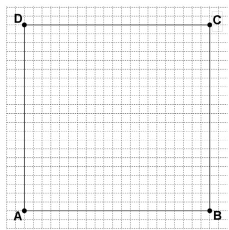


Material:

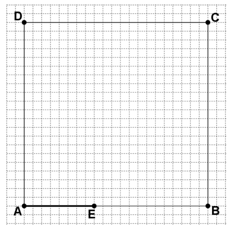
- Papel quadriculado;
- Lápis de cor (azul, verde e vermelho).

Construindo a figura acima

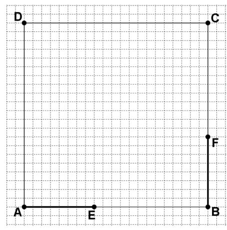
❖ Com auxílio do papel quadriculado, e usando régua, desenhe um quadrado ABCD.



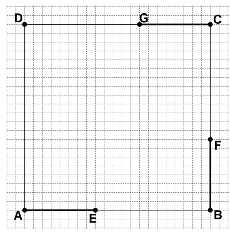
❖ No segmento AB, a partir de A, marque o ponto E.



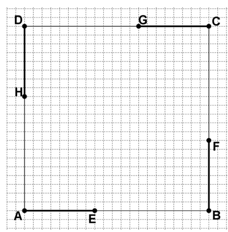
❖ No segmento BC, a partir de B, marque o ponto F.
Atenção:os segmentos **AE** e **BF** devem ter a **MESMA medida**. (Repare na figura auxiliar ao lado).



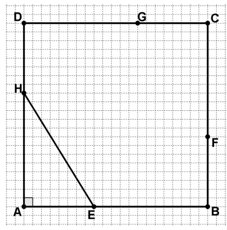
❖ No segmento CD, a partir de C, marque o ponto G.
Atenção: os segmentos **AE**, **BF** e **CG** devem ter a **MESMA medida**. (Repare na figura auxiliar ao lado).



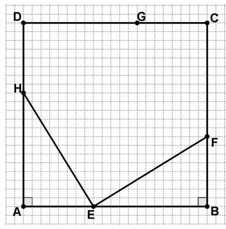
❖ No segmento DA, a partir de D, marque o ponto H.
Atenção: os segmentos **AE**, **BF**, **CG** e **DH** devem ter a **MESMA medida.** (Repare na figura auxiliar ao lado).



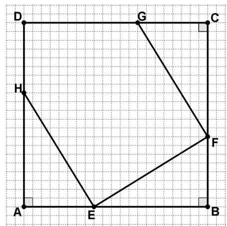
❖ Ligue os pontos H e E, fechando o triângulo retângulo HAE.



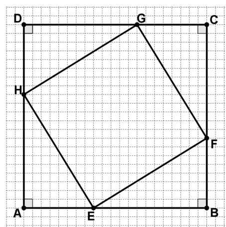
❖ Ligue os pontos E e F. Aparece o triângulo retângulo EBF.



❖ Ligue os pontos F e G, construindo o triângulo retângulo FCG.



❖ Ligue os pontos G e H, completando a figura.



✎ **Antes de prosseguir** dando nomes aos segmentos, **na figura que você construiu, pinte** os quatro triângulos retângulos de azul, e o quadrado **ao centro** de vermelho. **Contorne o quadrado externo** com lápis preto.

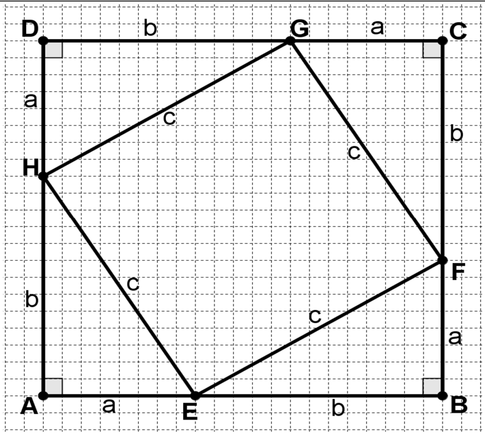
Importante: ao desenhar, pintar, colar, etc, você percebe muitas relações entre os elementos da figura. **Fique atento!**

Vamos dar nome aos segmentos.

♥ Os segmentos AE, BF, CG, e DH (catetos) serão representados pela letra **a**;

♠ Os segmentos EB, FC, GD e HA (catetos) serão representados pela letra **b**;

♣ Os segmentos HE, EF, FG e GH (hipotenusas) serão representados pela letra **c**.



[3]

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

[3] Fonte:http://office.microsoft.com/pt-br/images

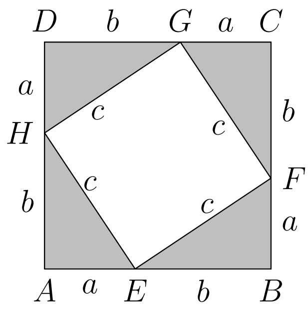
A.3 Terceira atividade

Atividade:justificando o Teorema de Pitágoras por meio de movimento rígido
(Tempo: 2 aulas)

Nome		Nº	8 º ano	
Nome		Nº	8 º ano	

Objetivo: levar o aluno a justificar o Teorema de Pitágoras.
Material: Lápis, caneta e borracha.

Sua atividade consiste em obter o Teorema de Pitágoras. Para isso você irá utilizar a figura ao lado.
O processo é simples!
Inicialmente temos o quadrado EFGH. **Movimentando** os triângulos, este quadrado deixa de existir na figura.
Ao final do movimento aparecem dois outros quadrados que você deverá encontrar.
O ponto chave da atividade consiste em comparar a área do quadrado inicial, EFGH, com as áreas dos quadrados finais.



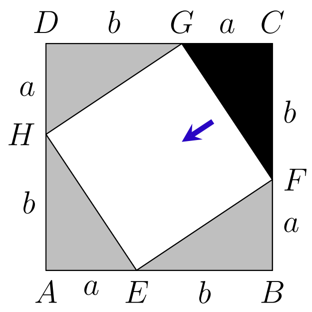
Bom trabalho !

Primeira pergunta
Olhando para a figura acima, qual a área do quadrado EFGH?

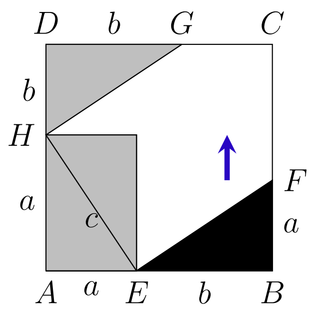
✐ **Resposta:**

A FIGURA INICIAL

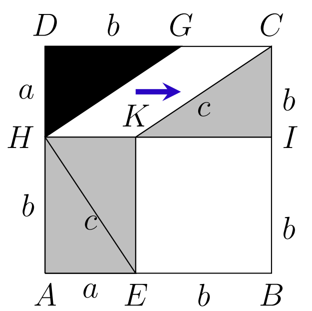
Primeiro movimento
Movimente o triângulo retângulo FCG no sentido da flecha, até que a hipotenusa GF coincida com a hipotenusa HE.



Segundo movimento
Movimente o triângulo retângulo EBF no sentido da flecha, fazendo o ponto F coincidir com o ponto C. **OBS.:** no próximo esquema o ponto F não será mais escrito.

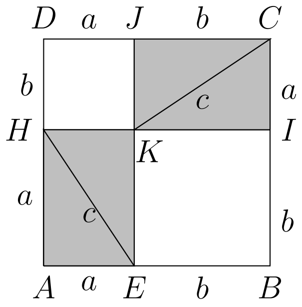


Terceiro movimento Movimente o triângulo retângulo GDH no sentido da flecha, fazendo o ponto G coincidir com o ponto C.
OBS.: no próximo esquema o ponto G não será exibido.



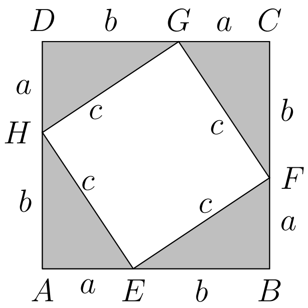
A FIGURA FINAL

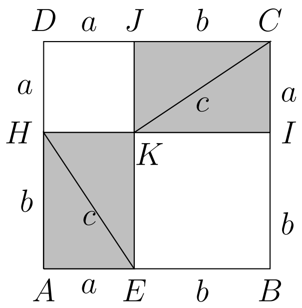
Ao final dos movimentos acima, chega-se na disposição ao lado.



Colocando juntas a figura inicial e final PARA COMPARAR as áreas

Figura Final	**Figura Inicial**





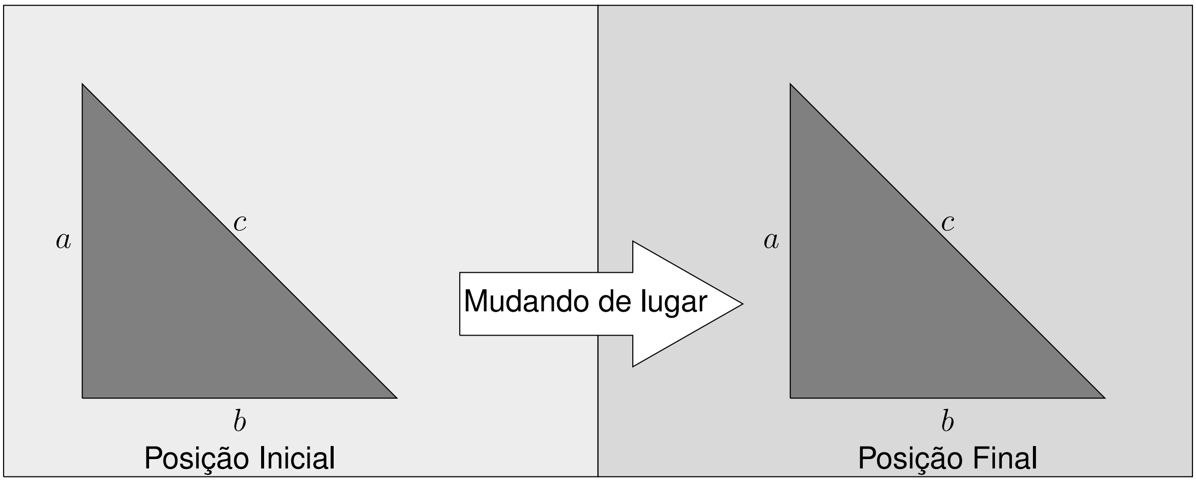
Responda as perguntas a seguir:

a) Durante o processo descrito acima,algum **triângulo** foi dividido, ou teve suas dimensões modificadas?

( ) Não ( )Sim

b) Quando movimentamos uma figura sem amassá-la, sua área muda?

( ) Sim ( ) Não



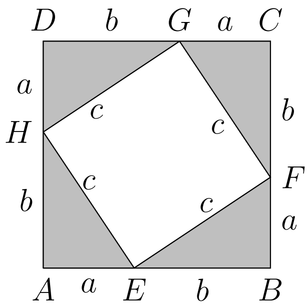
Note que não houve amassamento dos triângulos, nem do quadrado ABCD. Apenas os triângulos foram movimentados de uma posição para outra.
O quadrado inicial EFGH some, aparecendo dois outros quadrados, DHKJ e EBIK.

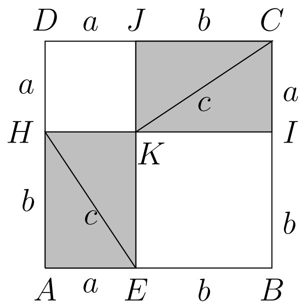
Diante do que foi dito e feito acima pede-se que você relacione a área do quadrado EFGH, da figura inicial, com as áreas dos quadrados DHKJ e EBIK, da figura final.

Fazendo isso na figura a seguir, você vai obter o Teorema de Pitágoras em apenas uma linha, e algumas observações.

Isso é maravilhoso!

Fechamento





Escreva abaixo a relação entre as áreas.

Área do quadrado EFGH	Área do quadrado HKJD	Área do quadrado EBIK

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

A.4 Quarta atividade

Atividade: estudando o quadrado da soma
(Tempo: 1 aula)

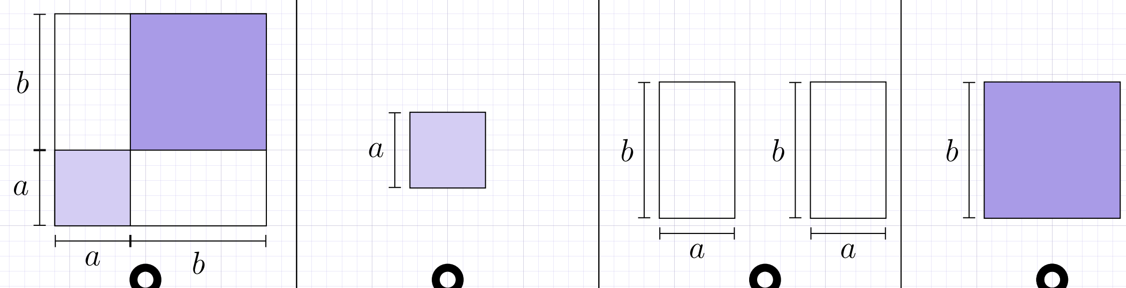
Nome		Nº	8 º ano	
Nome		Nº	8 º ano	

Objetivos: ajudar o aluno a desenvolver o quadrado da soma.

Nesta atividade você irá desenvolver $(a+b)^2$, dito quadrado da soma, de dois modos diferentes, um geométrico e outro algébrico. Entre eles, escolha aquele que mais lhe agradar para o desenvolvimento deste produto notável.

Bom trabalho!

Visão geométrica de $(a+b)^2$



O primeiro quadrado foi dividido nas quatro figuras à sua direita.

Este quadrado tem lado $a+b$.	Este quadrado tem lado a.	Estes dois retângulos tem largura a e altura b.	Este quadrado tem lado b.
Qual é a área deste quadrado?	Qual é a área deste quadrado?	Qual é a área dos dois retângulos juntos?	Qual é a área deste quadrado?
Resposta:	Resposta:	Resposta:	Resposta:

Agora tente responder:

$$(a+b)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Visão algébrica de $(a+b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b).\,(a + b)$$

Complete a distributiva acima. (Lembre-se que $a.a = a^2$)

$(a+b)^2 =$

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

A.5 Quinta atividade

Atividade: justificando[4]o Teorema de Pitágoras
(Tempo: 2 aula)

Nome		Nº	8 º ano	
Nome		Nº	8 º ano	

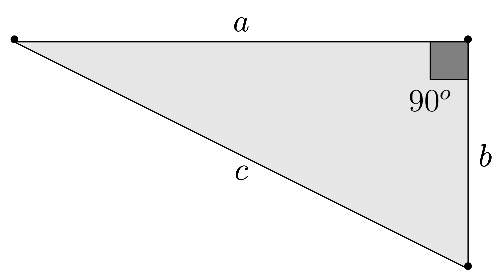
Objetivo: levar o aluno a perceber uma justificativa do teorema de Pitágoras.

Material:

- Lápis, régua e borracha;

- Lápis de cor (diversas cores).

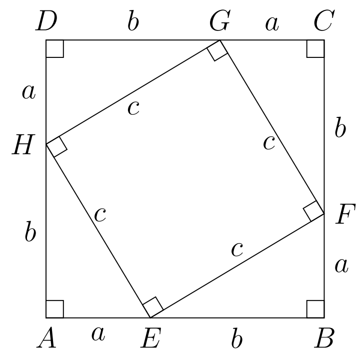
Na aula passada, você realizou três atividade de modo a estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo retângulo como o representado ao lado.
Essa relação é conhecida como Teorema de Pitágoras e tem várias aplicações, por isso se esforce em aprendê-la.
Nesta aula, você irá obter tal relação algebricamente e de um modo mais rápido.
Para isso você deve seguir os passos abaixo atentamente.
Bom trabalho!



4 Justificar significa,no contexto desta atividade, mostrar ou induzir um caminho e não se refere a dar uma prova formal, deste modo, procura-se trabalhar conforme a maturidade dos alunos, procurando ter o cuidado de não passar dos limites, nem para menos, nem para mais.

Primeira parte

Numa folha de papel sulfite desenhe a figura ao lado com CAPRICHO E ATENÇÃO.
Essa etapa é fundamental para que você se familiarize com a figura.
Atenção: não mude o nome dos vértices.



Segunda parte

Na figura abaixo, pede-se para:

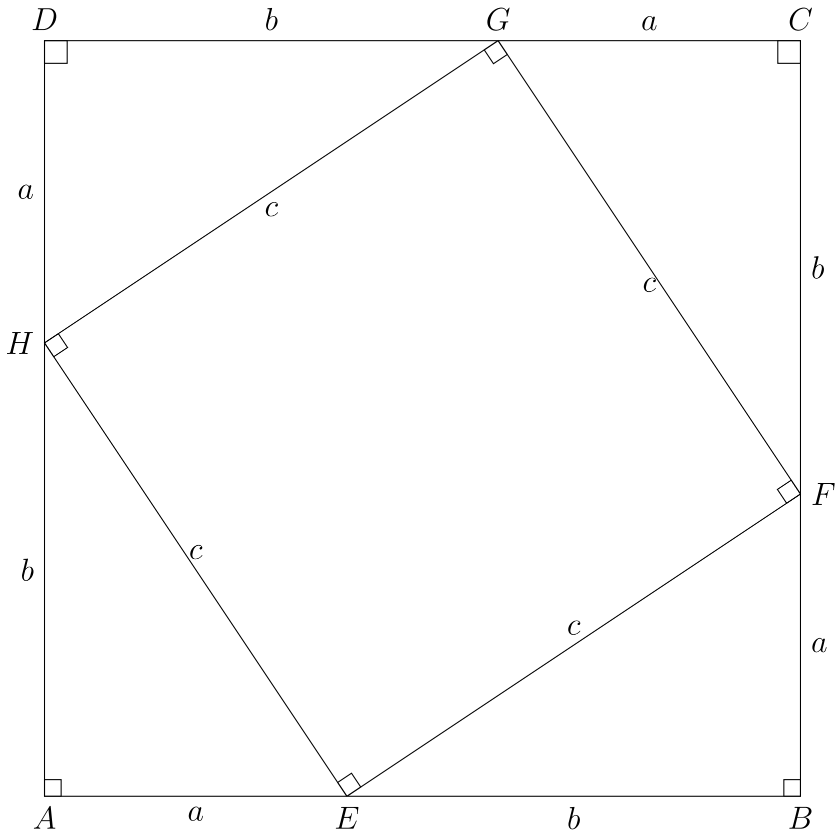
- Localizar visualmente o lado AB;
- O lado AB está dividido em duas partes: AE e EB. Pinte AE de azul. Pinte EB de verde.

OBS.: "Pintar AE de azul" significa passar o lápis de cor azul sobre o segmento AE de modo a destacá-lo.

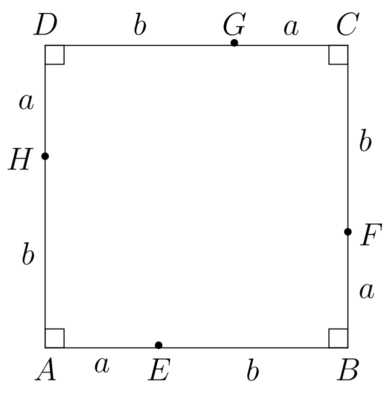
- Localizar visualmente o lado BC;
- O lado BC está dividido em duas partes: BF e FC. Pinte BF de azul. Pinte FC de verde.

- Localizar visualmente o lado CD;
- O lado CD está dividido em duas partes: CG e GD. Pinte CG de azul. Pinte GD de verde.

- Localizar visualmente o lado DA;
- O lado DA está dividido em duas partes: DH e HA. Pinte DH de azul. Pinte HA de verde.



Após a tarefa acima, responda:

Qual o lado do quadrado ABCD? Escreva a resposta aqui:________________	

Agora que você identificou o lado do quadrado ABCD, calcule sua área. (Obs.: recorde-se do quadrado da soma.)

Área_do_quadrado_ABCD =

Terceira parte

O quadrado ABCD está dividido em 5 figuras menores. Identifique-as pelas letras dos vértices. (Por exemplo, quadrado maior ABCD.)

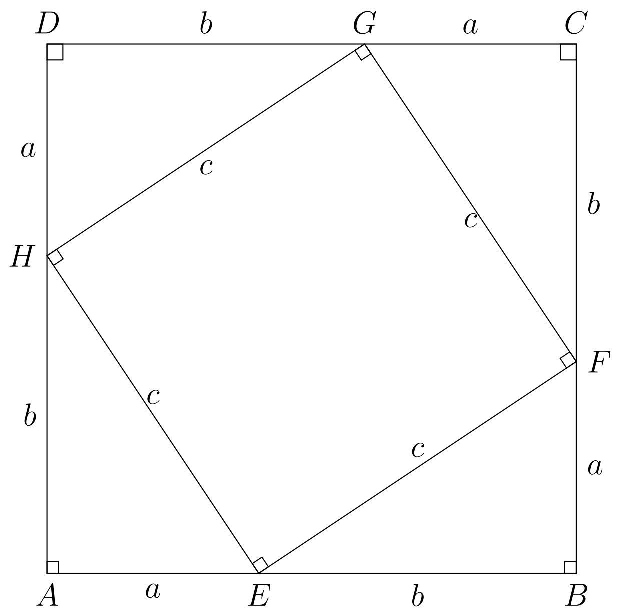
- Triângulo retângulo:______________________________
- Triângulo retângulo:______________________________
- Triângulo retângulo:______________________________
- Triângulo retângulo:______________________________
- Quadrado menor:______________________________

Agora, na figura abaixo, pinte:

✏ A hipotenusa de cada triângulo retângulo de **vermelho escuro;**

✏ O interior de cada triângulo de **laranja;**

✏ O interior do quadrado EFGH de **vermelho claro.**



Calcule a área do triângulo retângulo **AEH**. Para isso:

Diga qual é a base, escrevendo-a aqui:______________________________

Diga qual é a altura do triângulo, escrevendo-a aqui:______________________________

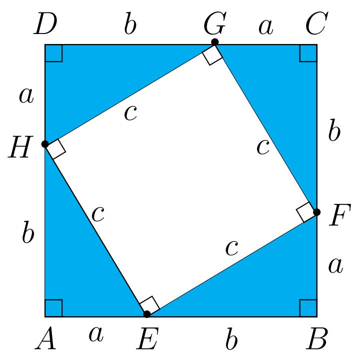
Complete a conta:

$$\acute{A}rea_{triângulo\,AEH} = \frac{base.altura}{2} = \underline{\hspace{3cm}}$$

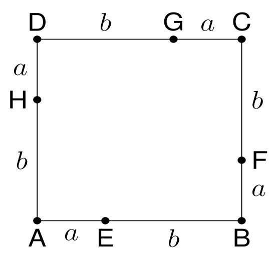
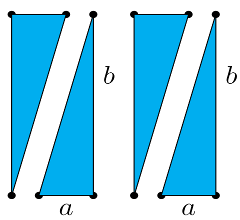
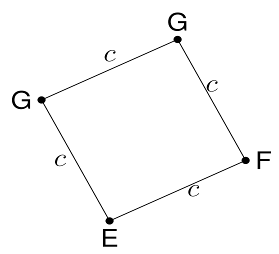
Responda: Os outros três triângulos, a saber: EBF, FCG e GDH tem área igual ao triângulo AEH?
( ) Sim ( ) Não

Quarta parte

Agora, finalize a atividade com auxílio das figuras desenhadas abaixo e ao lado:



O quadrado ABCD será dividido conforme as figuras abaixo.

		
Esse é o quadrado ABCD.	Esses são os 4 triângulos retângulos (que formam dois retângulos).	Esse é o quadrado EFGH.

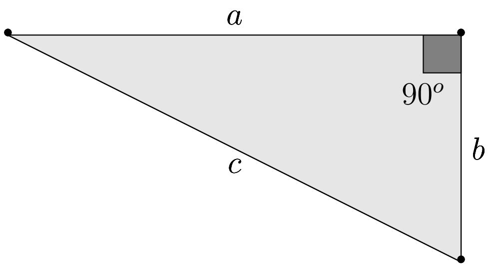
Complete a conta abaixo para obter a relação entre os lados do triângulo retângulo.

$$\overbrace{\acute{A}rea\ do\ quadrado\ ABCD} = \overbrace{4.\acute{A}rea\ de\ um\ triângulo} + \overbrace{\acute{A}rea\ do\ quadrado\ EFGH}$$

Fechamento

Vamos recordar o objetivo:

Obter uma relação entre os lados do triângulo retângulo.



Essa relação é conhecida como Teorema de Pitágoras.

Se tudo ocorreu bem até aqui, o resultado da última conta que você fez é a relação procurada. Escreva-a dentro do retângulo abaixo:

Teorema de Pitágoras	

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

A.6 Sexta atividade

Atividade: Cálculo da diagonal de um quadrado (Tempo: 2 aula)

Nome		Nº	8 º ano	
Nome		Nº	8 º ano	

Objetivos: calcular a diagonal de um quadrado.

Material:

Papel quadriculado;

Lápis de cor (preto, azul, verde e vermelho);

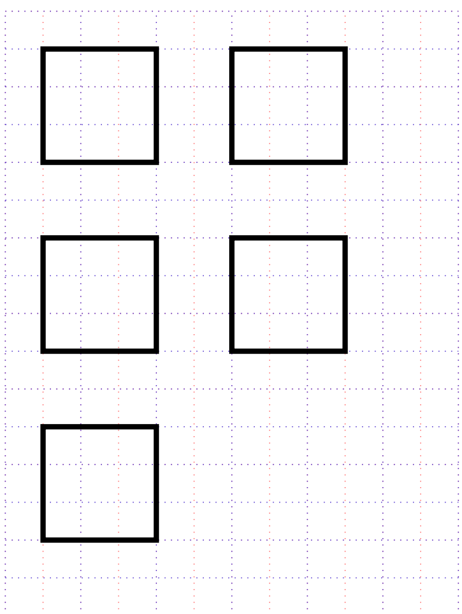
Tesoura sem ponta;

Cola.

Primeira parte

Propõe-se a seguinte atividade: calcule a diagonal de um quadrado de lados medindo $3cm$**.** Para isso, proceda conforme os passos.

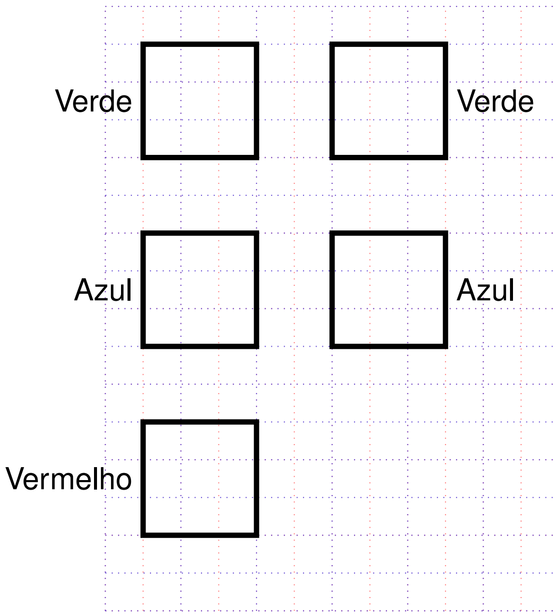
☺ Numa folha de papel quadriculado desenhe cinco quadrado de lado 3 cm;



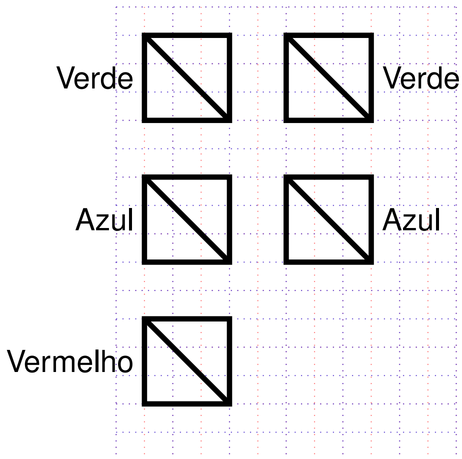
☺ Pinte dois quadrados de verde;

☺ Pinte dois quadrados de azul;

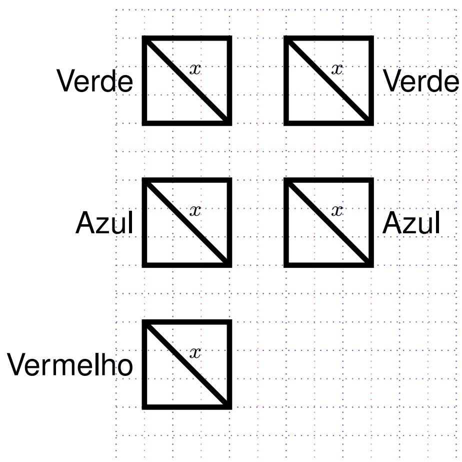
☺ Pinte um quadrado de vermelho;



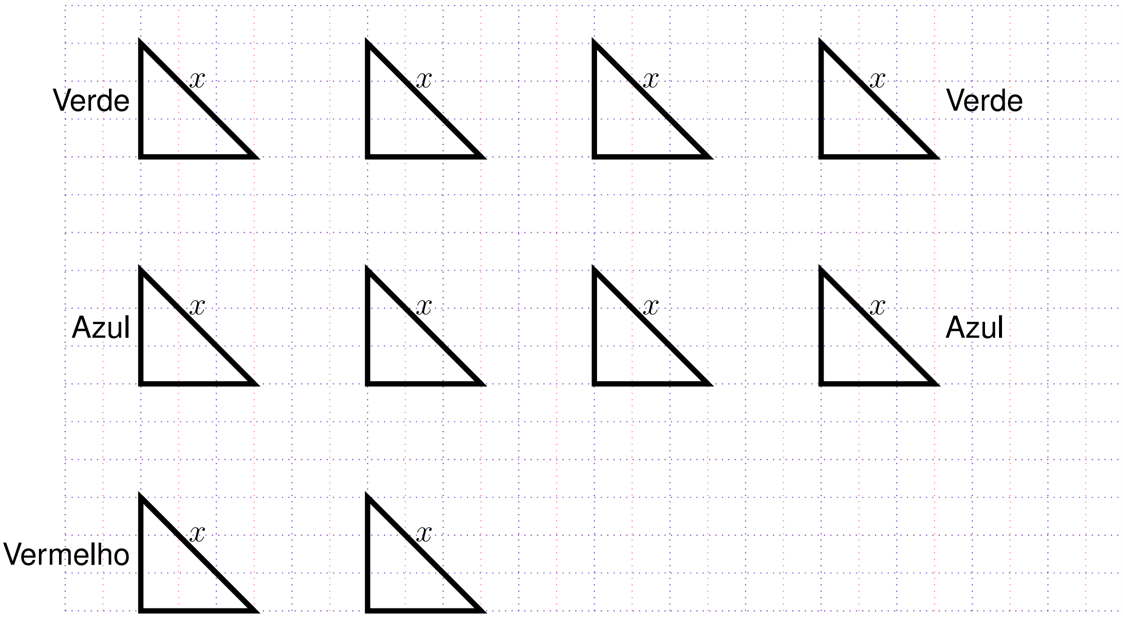
☺ Com auxílio de uma régua desenhe apenas uma diagonal de cada quadrado (pinte[5] **a diagonal** de preto);

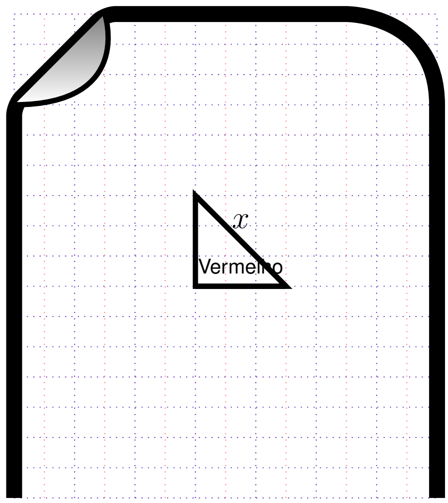


☺ Chame a diagonal por x.
x *será a sua incógnita*!

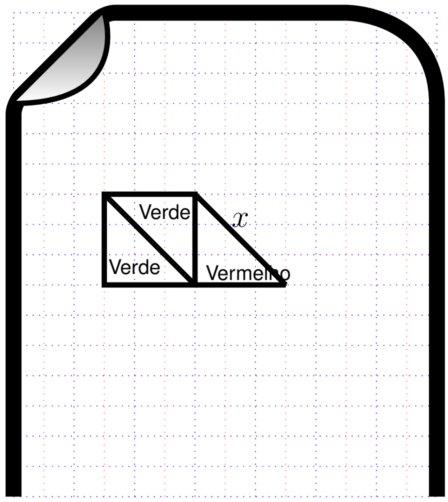


☺ Usando uma tesoura sem ponta, corte cada um dos quadrados, formando dez triângulos retângulos isósceles.

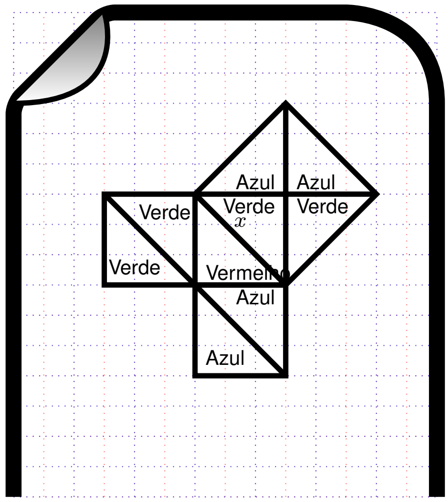


☺ Do outro lado desta folha, ou em outra folha de papel sufite, próximo ao centro da folha, cole o triângulo retângulo pintado de vermelho.	

☺ Pegue dois triângulos retângulos verdes e cole de modo a formar um quadrado junto a um dos catetos do triângulo retângulo vermelho.



☺ Pegue dois triângulos retângulos azuis e cole ao lado do outro cateto, de modo a formar outro quadrado.
☺ Pegue os outros quatro triângulos retângulos e forme um quadrado junto à hipotenusa;

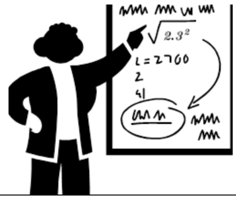


Responda completando o quadro a seguir:

(Deixe suas contas no espaço abaixo).

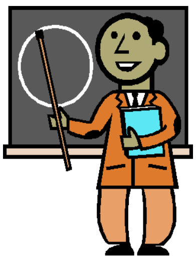
Área do quadrado sobre a hipotenusa. (Lembre-se, chamamos a hipotenusa por x).	Área do quadrado (verde) sobre um dos catetos.	Área do quadrado (azul) sobre o outro cateto

➢ Calcule o valor de X, continuando a conta abaixo:

$x^2 = 3^2 + 3^2$	

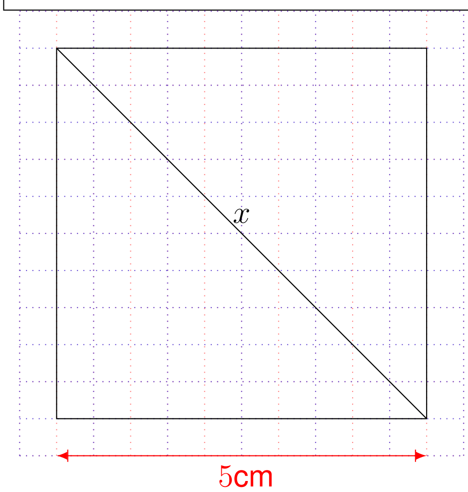
Segunda parte

☺ Na primeira parte desta atividade, calculamos a diagonal de um quadrado de lado 3, obtendo o valor $3\sqrt{2}$. Podemos mudar o lado do quadrado, em consequência a diagonal terá outro valor. Seguindo os passos acima você pode obter o valor da diagonal de outros quadrados.



Sua atividade é **imaginar** a sequência anterior e calcular a diagonal dos quadrados indicados abaixo de um modo mais rápido.

☺ Calcule a diagonal de um quadrado de lados 5 cm.



____

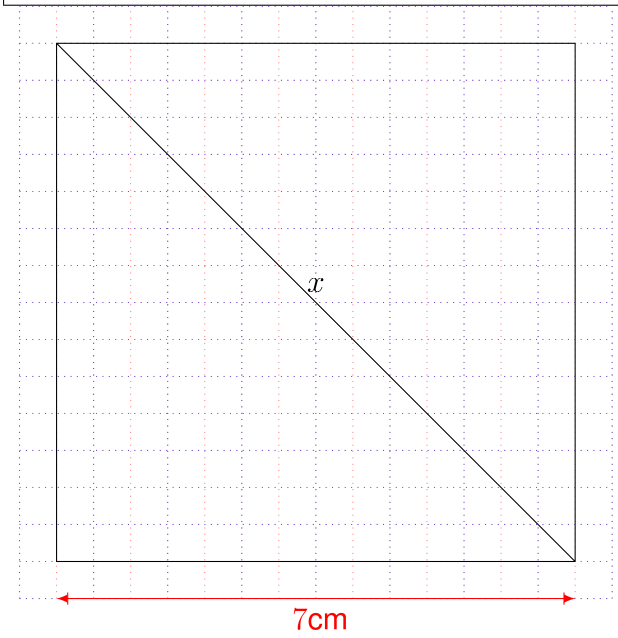
____

____

____

____

☺ Calcule a diagonal de um quadrado de lados 7 cm.



____

____

____

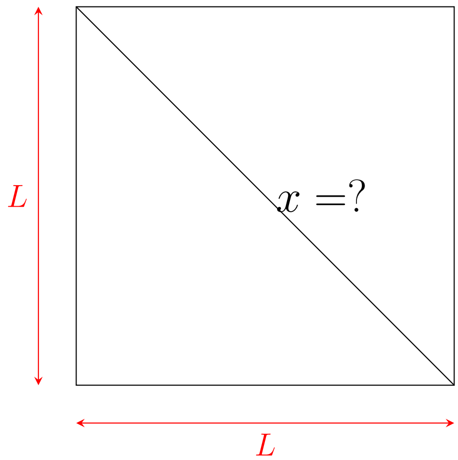
____

____

____

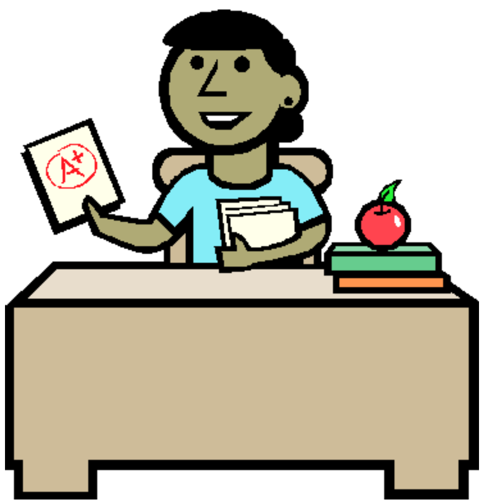
____

✍ Para concluir a atividade, tente calcular a diagonal de um quadrado de lados genérico L.



Para ajudar você, foram deixadas algumas pistas. A dica é sempre tentar completar o pontilhado, para isso observe a próxima linha. Por exemplo, para você iniciar a conta, você deve observar a segunda e a terceira linha; para completar a segunda linha, você pode observar a terceira. Acho que você já entendeu.

Outro modo é pensar em tudo o que foi feito na atividade até aqui. Mas isso é para quem não precisa da ajudinha acima.



Bom trabalho! [6]

$$
\begin{aligned}
\underline{\qquad} &= \underline{\qquad} + L^2 \\
\underline{\qquad} &= 2L^2 \\
x &= \sqrt{\underline{\qquad}} \\
x &= \underline{\quad}\sqrt{2}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

[6] Fonte:http://office.microsoft.com/pt-br/images

Para finalizar avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

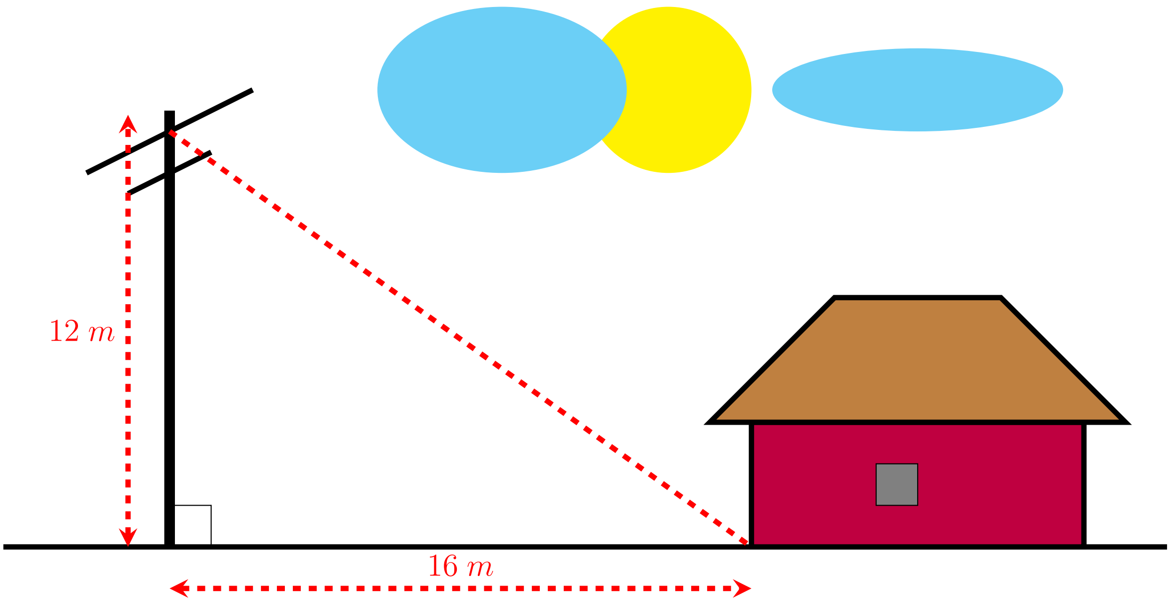
Seu professor agradece! Obrigado.

A.7 Sétima atividade

Atividade: lista de exercícios
(Tempo: 2 aula)

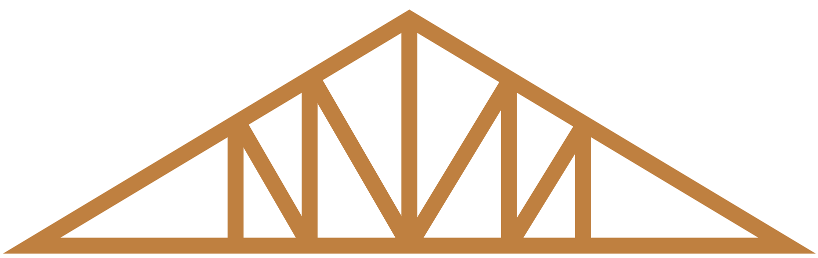
Nome		Nº	8 º ano	
Nome		Nº	8 º ano	

1) Um eletricista foi chamado para fazer uma ligação de luz na casa do Sr. Antônio. Após observar em volta da casa, o eletricista disse ao Sr. Antônio que poderia fazer a ligação a partir de uma caixa que estava localizada a 16 metros do poste. O Sr. Antônio perguntou qual a quantidade de fio que ele gastaria e o eletricista disse que, para dar essa informação, precisaria saber, antes, a altura do poste. Sabendo que a altura do poste é de 12 metros e a caixa de entrada se encontra ao nível do chão, determinar a quantidade de fio que o Sr. Antônio terá de comprar.

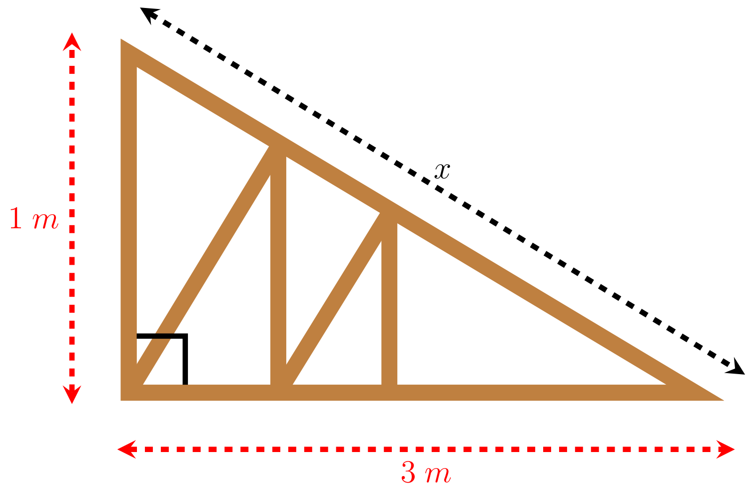


Solução

2) Na construção do telhado de uma casa, é muito comum os carpinteiros fazerem uma estrutura de madeira que tem o seguinte formato:

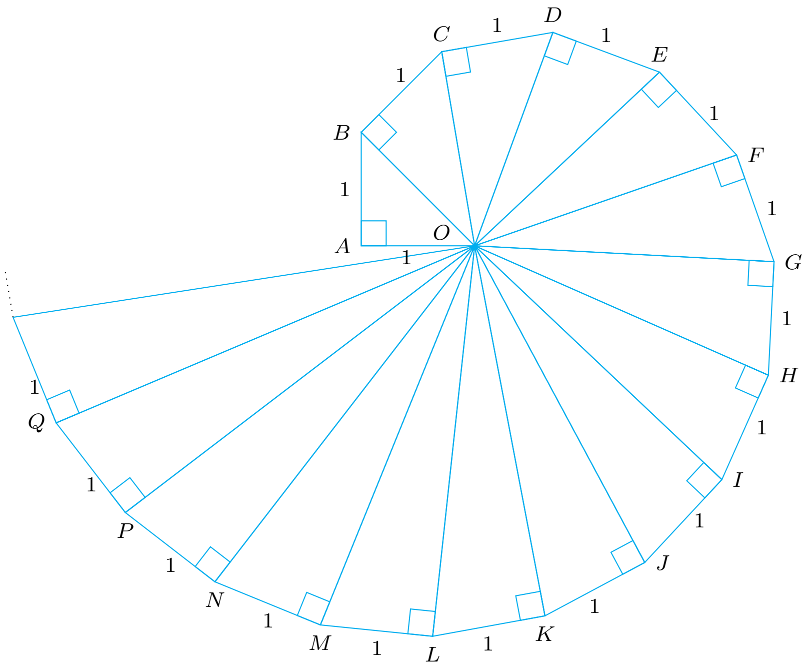


Um carpinteiro precisa confeccionar as vigas do telhado de uma casa. Para executar esse trabalho, ele precisa calcular o comprimento dessas vigas. Usando a calculadora, ajude-o a encontrar a medida indicada abaixo.



Solução

3) A figura abaixo chama-se espiral pitagórica, sendo muito bonita! Calcule a medida do segmento OE, onde O é o centro da figura.



Solução

Para finalizar avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

A.8 Oitava atividade

Atividade: jogo de dominó[7]
(Tempo: 4 aula)

Nome		Nº		8 º ano	
Nome		Nº		8 º ano	

Objetivo: O objetivo deste jogo é levar o aluno a praticar o teorema de Pitágoras de um modo lúdico.

Organização da classe: em grupos de dois alunos.

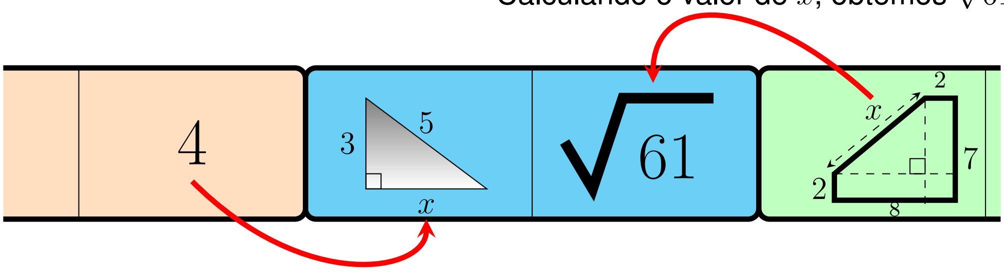
Recursos necessários: para cada grupo de alunos será fornecido um jogo de dominó de 56 peças (não recortadas) e uma folha contendo as oito figuras das peças.

Regras

1. As peças são colocadas sobre a mesa, viradas para baixo e misturadas.
2. Cada jogador pega cinco peças enquanto as demais ficam viradas sobre a mesa.
3. Decide-se quem começa o jogo.
4. O primeiro jogador coloca uma peça virada para cima, sobre a mesa.
5. O segundo jogador tenta colocar uma peça, em que uma das extremidades tenha o valor de x da figura constante da peça sobre a mesa, ou tenha a figura cujo valor de x esteja na peça sobre a mesa.

   Veja o exemplo abaixo.

Calculando o valor de x, obtemos $\sqrt{61}$.



Quatro é o valor calculado para x.

$$5^2 = x^2 + 3^2$$
$$25 = x^2 + 9$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16}$$
$$x = 4$$

$$x^2 = (7-2)^2 + (8-2)^2$$
$$x^2 = 5^2 + 6^2$$
$$x^2 = 25 + 36$$
$$x^2 = 61$$
$$x = \sqrt{61}$$

[7] Baseado no jogo *Dominó de racionais*, apresentado em Smole, Diniz e Milani (2007)

[8]

ATENÇÃO: RESOLVA A LISTA ANTES. DO CONTRÁRIO O JOGO FICA MUITO LENTO.SE NECESSÁRIO, DIVIDA O SERVIÇO.

6. Cada jogador só pode jogar uma peça de cada vez.

7. Na sua vez, o jogador que não tiver uma peça que possa ser encaixada, deve "comprar" outra peça no monte que esta sobre a mesa. O jogador deverá ir comprando até encontrar uma peça que se encaixe. SE DEPOIS DE COMPRAR CINCO PEÇAS, ainda assim não conseguir uma peça adequada, o jogador DEVERÁ PASSAR A SUA VEZ.

8. O vencedor é o jogador que ficar sem peças primeiro.

[8] De fato, para a primeira afirmação

Quatro é o valor calculado para x.

temos:

❒ o triângulo de lados 3, 5 e x é retângulo, sendo 5 a hipotenusa, 3 e x os catetos. Pelo Teorema de Pitágoras, temos $5^2 = x^2 + 3^2$. Então $x^2 = 25 - 9 = 16$, que nos dá $x = \sqrt{16}$. Como x é a medida do lado do triângulo, x é positivo. Deste modo $x = 4$, como afirmamos acima.

Já para a segunda afirmação

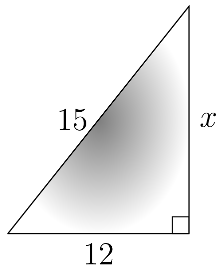
Calculando o valor de x, obtermos $\sqrt{61}$.

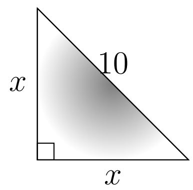
temos:

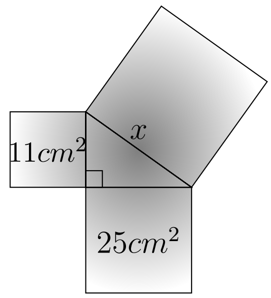
❒ pela figura evidenciada acima, notamos que, dentro do polígono com cinco lados, há um triângulo retângulo, cujos catetos são $7 - 2 = 5$ e $8 - 2 = 6$; além disso, x é a hipotenusa deste triângulo retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $x^2 = 5^2 + 6^2$, ou seja, $x^2 = 25 + 36 = 61$. Novamente, lembramos que x representa da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, ou seja, x é positivo. Então, $x = \sqrt{61}$, de acordo com o que afirmamos acima.

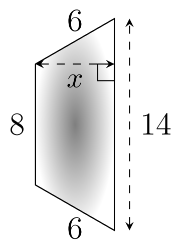
Para terminar esta nota, devemos dizer que a forma apresentada no texto foi escolhida por estar mais próxima da maneira como o aluno escreve.

Desenhe as figuras abaixo em uma folha de papel quadriculado, depois calcule o valor de x em cada figura para jogar.

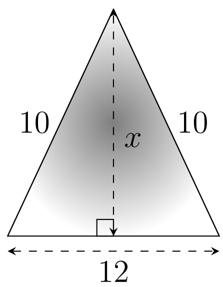


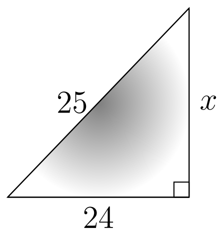


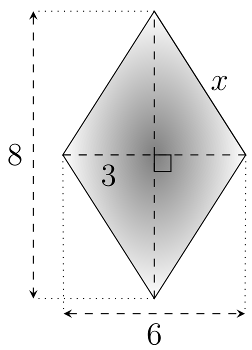




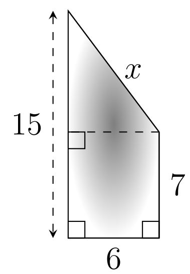
Trapézio Isósceles



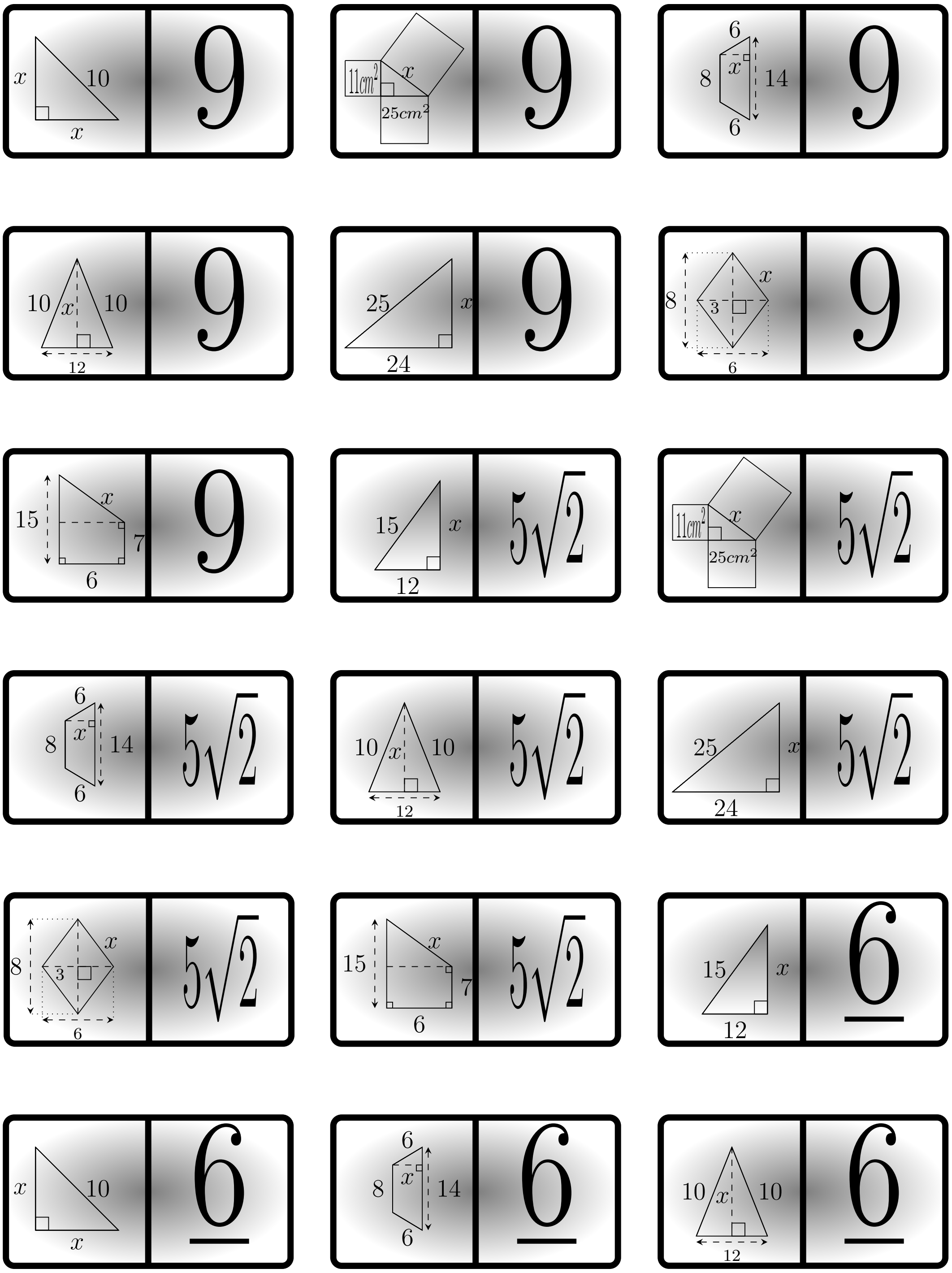


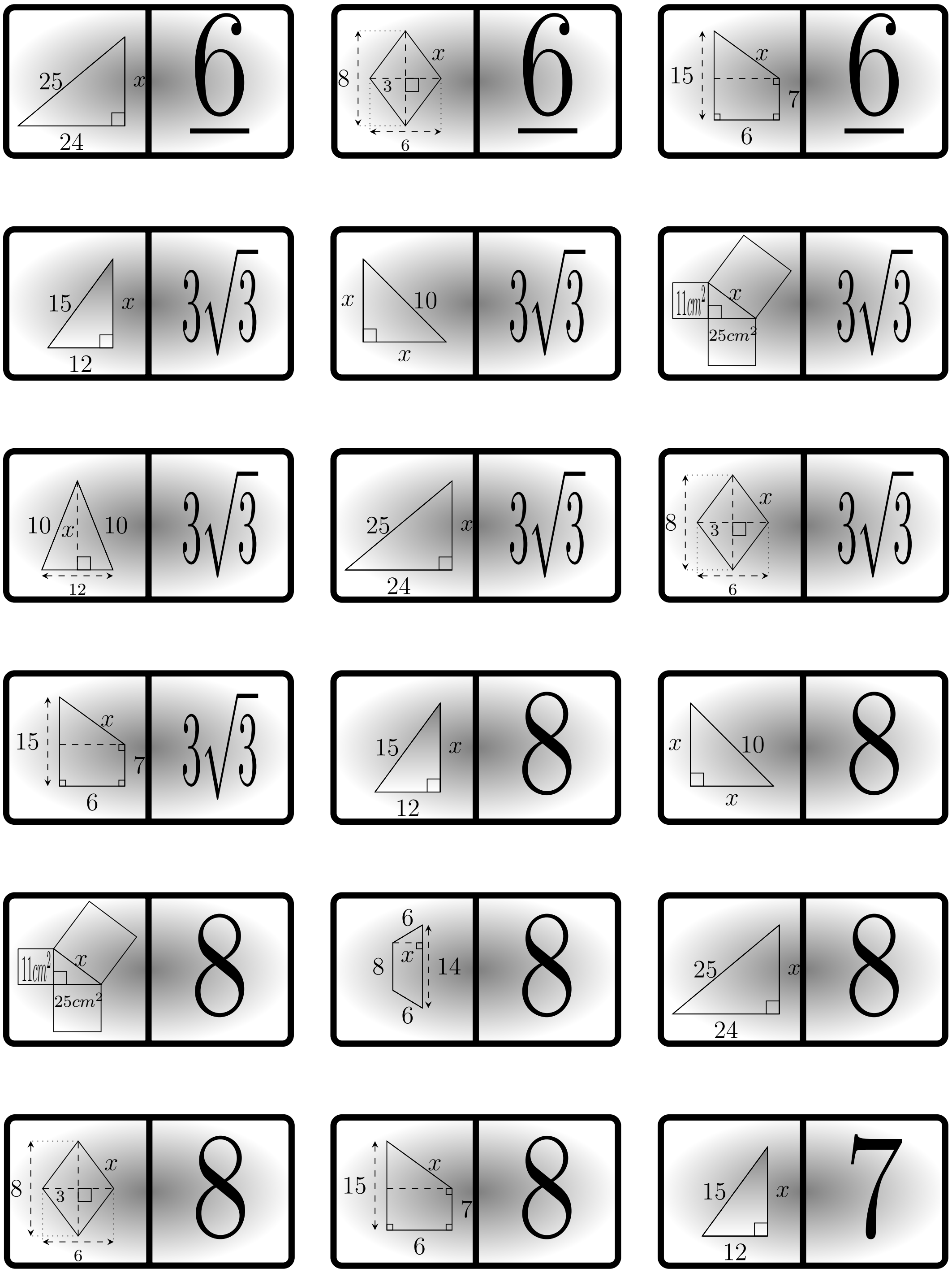


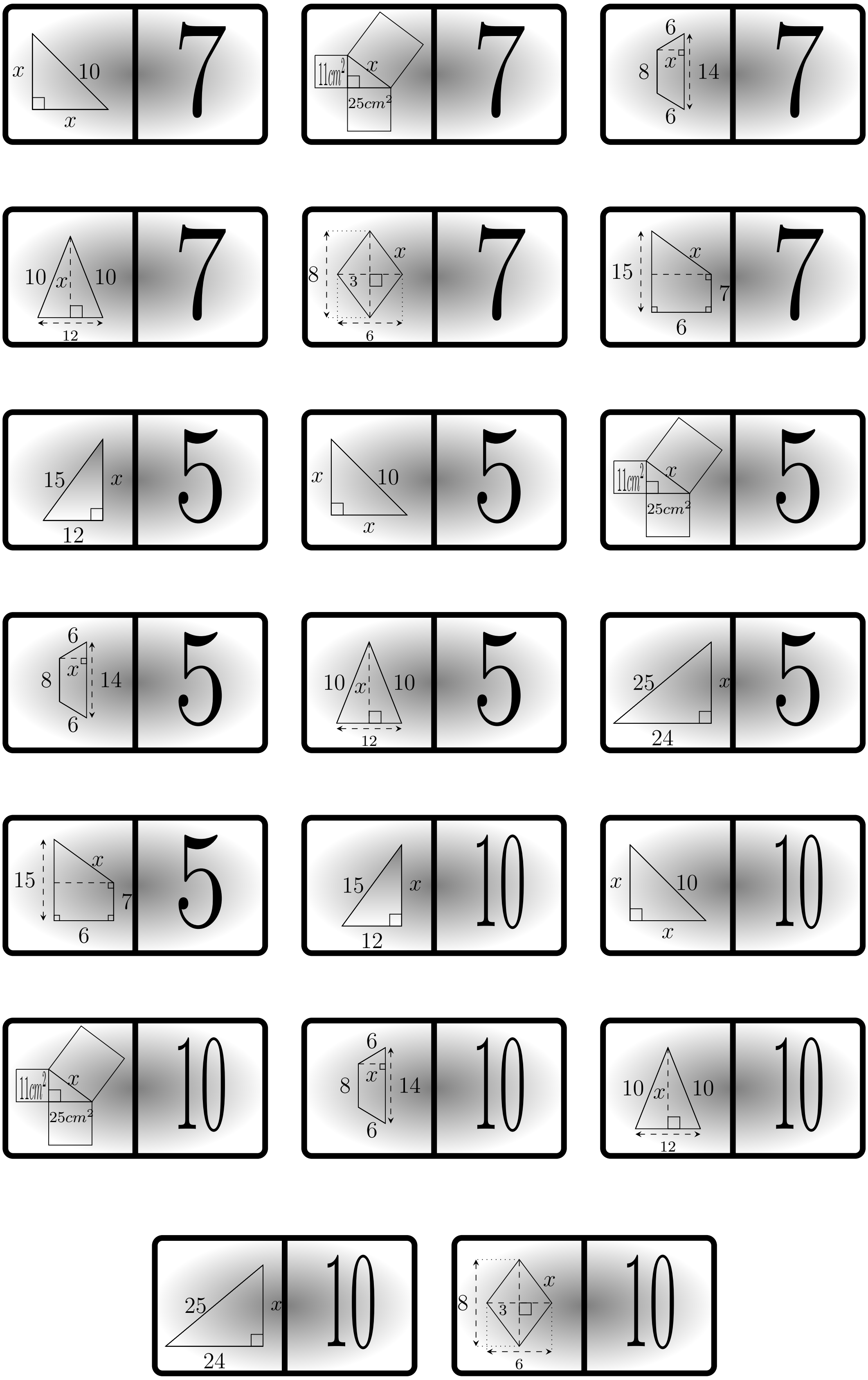
Losango



A.8.1 Peças do dominó




25 x 24 6
8 x 3 6 6
15 x 7 6 6
15 x 12 3√3
x 10 x 3√3
11cm² x 25cm² 3√3
10 10 x 12 3√3
25 x 24 3√3
8 x 3 6 3√3
15 x 7 6 3√3
15 x 12 8
x 10 x 8
11cm² x 25cm² 8
6 8 x 14 6 8
25 x 24 8
8 x 3 6 8
15 x 7 6 8
15 x 12 7



Para finalizar avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco ( )Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

APÊNDICE B – Folhas das atividades aplicadas na escola

Neste apêndice encontram-se as folhas das atividades aplicadas na escola e trabalhadas pelos alunos. A fim de ilustrar a atividade realizado pelas duplas em sala de aula, escolhemos as folhas de um ou outro grupo. Gostaríamos de colocar em evidência todos os trabalhos, contudo as limitações de espaço nos impedem de assim proceder. Deste modo, procuramos exibir o trabalho que melhor revele o que se deu com as classes, mas certamente isso esta longe de fazer justiça e revelar a riqueza de detalhes que se operaram durante os dias que se deram essas atividades. Tomamos o cuidado de preservar a identidade do aluno aplicando um efeito digital em seu nome, contudo deixamos seu número de chamada bem como sua classe.

B.1 Primeira aula

Atividade com triângulos pitagóricos

(Tempo: 2 aulas)

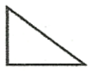
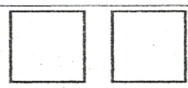
Nome	[redacted]	Nº 20	8 º ano	D
Nome	[redacted]	Nº 4	8 º ano	D

Objetivo: que o aluno perceba a relação existente entre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e a área dos quadrados construídos sobre os catetos.

Material:

Papel quadriculado;
Lápis de cor (azul, verde e vermelho);
Tesoura sem ponta;
Cola.

No papel quadriculado desenhe as seguintes figuras:

• Um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm (pinte de vermelho);	
• Dois quadrados de lado 6 cm (pinte de azul);	
• Dois quadrados de lado 8 cm (pinte de verde)	

✂ Corte o triângulo e cole no centro da última folha.
✂ Corte os quadrados.
✂ **Cole um** dos quadrados de lado 6 cm ao lado do cateto de mesma medida.
✂ **Cole um** dos quadrados de lado 8 cm ao lado do cateto de mesma medida.

☺ Com auxílio da régua determine a medida da hipotenusa do triângulo retângulo colado. Não esqueça a unidade.

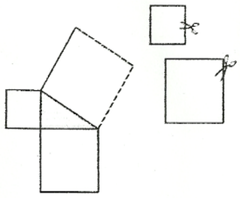
☼ | *Resposta* | 10 cm |

☺ Agora você vai montar um quebra cabeça. **CUIDADOSAMENTE, corte os dois quadrados que sobraram**, e tente construir, sobre a hipotenusa, um quadrado cujo lado tem a mesma medida da hipotenusa.

☺ (Obs.: a hipotenusa do triângulo retângulo coincidirá com o lado do novo quadrado.)

1

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



☺ Vamos dar nomes aos quadrados que você colou na folha anterior:

- *O quadrado ao lado do cateto* de medida 6 cm será representado pela letra C;
- *O quadrado ao lado do cateto* de medida 8 cm será representado pela letra B;
- *O quadrado construído sobre a hipotenusa* será representado pela letra A;

☺ Agora calcule as áreas. Deixe suas contas abaixo, ou indique o modo como obteve este valor.

➢ Não se esqueça da unidade de área, no caso, cm^2.

Área do quadrado **A** Construido sobre a hipotenusa	Área do quadrado **B** (verde) Construido ao lado do cateto	Área do quadrado **C** (azul) Construido ao lado do cateto
Escreva suas contas $64 + 36 = 100\ cm^2$	Escreva suas contas $8 \times 8 = 64\ cm^2$	Escreva suas contas $6 \times 6 = 36\ cm^2$

Para concluir a lição

☺ Pense e responda: você percebeu alguma relação entre as áreas calculadas acima? Escreva esta relação.

Que a soma dos quadrados B e C correspondem ao quadrado A, ou seja, Teorema de Pitágoras

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

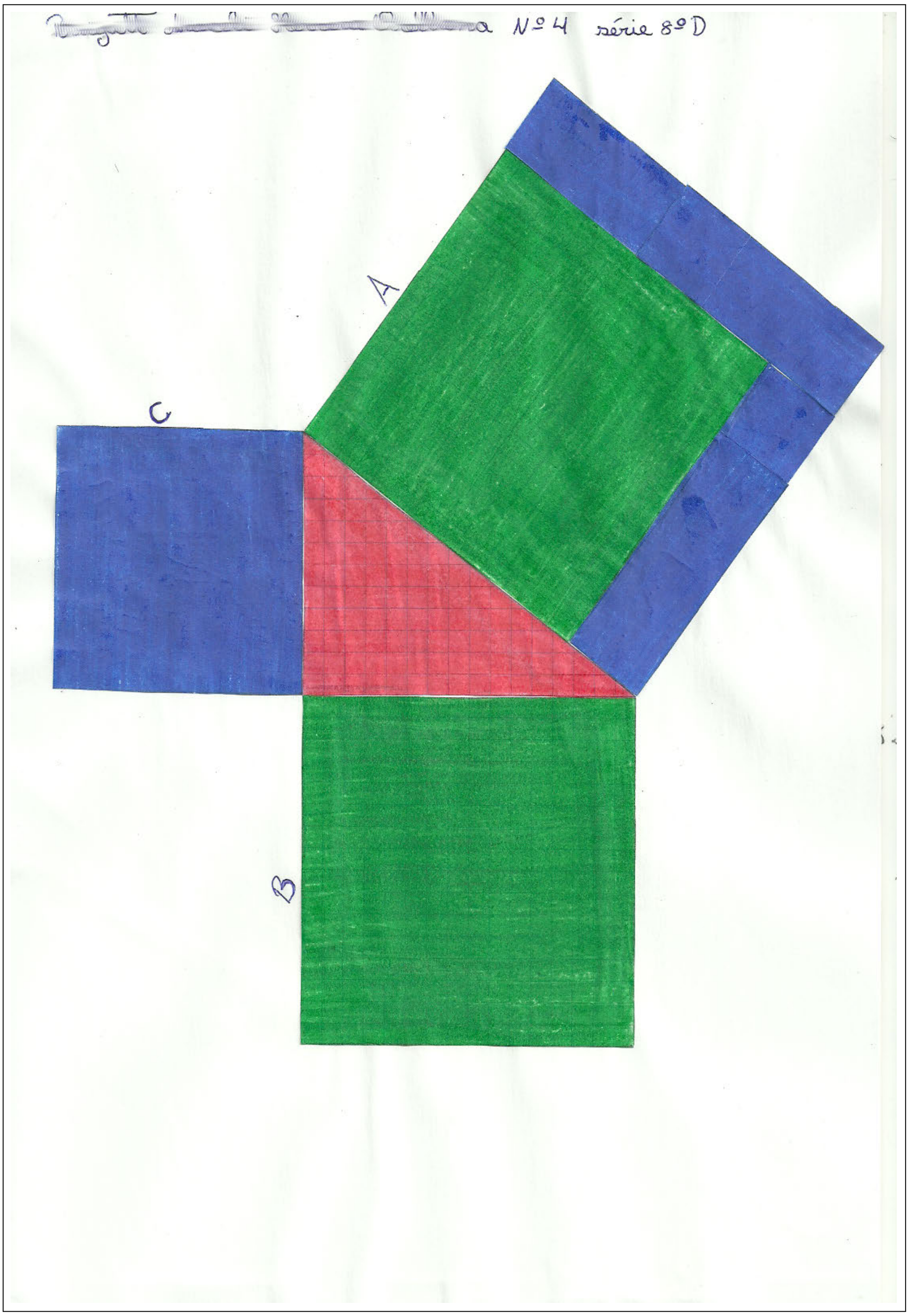
a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco (X) Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média (X) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

2

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula.

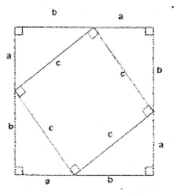
B.2 Segunda aula

Atividade: construção

(Tempo: 2 aulas)

Nome	[redacted]	Nº 2	8º ano	D	8/11/13
Nome	[redacted]	Nº 17	8º ano	D	

Objetivo: que o aluno se familiarize com a figura ao lado, observando suas regularidades e propriedades.

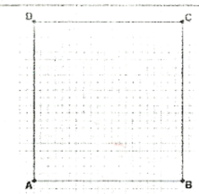


Material:

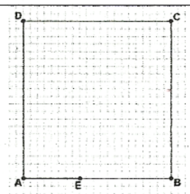
Papel quadriculado;
Lápis de cor (azul, verde e vermelho);

Construindo a figura acima

- Com auxílio do papel quadriculado, e usando régua, desenhe um quadrado ABCD.

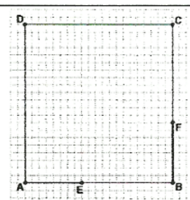


- No segmento AB, a partir de A, marque o ponto E.



- No segmento BC, a partir de B, marque o ponto F.

Atenção: *os segmentos* **AE** *e* **BF** *devem ter a* **MESMA medida.** (Repare na figura auxiliar ao lado).

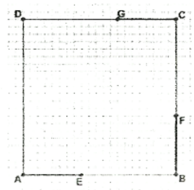


1

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

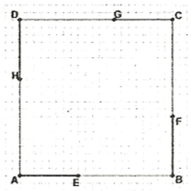
❖ No segmento CD, a partir de C, marque o ponto G.

Atenção: *os segmentos* **AE, BF** *e* **CG** *devem ter a* ***MESMA*** **medida.**
(Repare na figura auxiliar ao lado).

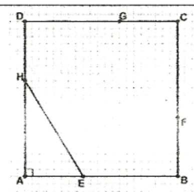


❖ No segmento DA, a partir de D, marque o ponto H.

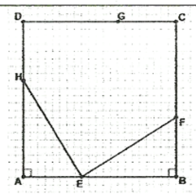
Atenção: *os segmentos* **AE, BF, CG** *e* **DH** *devem ter a* ***MESMA*** **medida.**
(Repare na figura auxiliar ao lado).



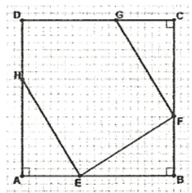
❖ Ligue os pontos H e E, fechando o triângulo retângulo HAE.



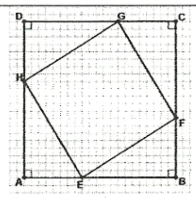
❖ Ligue os pontos E e F.
Aparece o triângulo retângulo EBF.



❖ Ligue os pontos F e G, construindo o triângulo retângulo FCG.



❖ Ligue os pontos G e H, completando a figura.



2

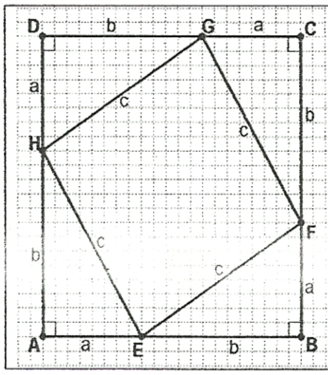
Folha produzida pelo aluno durante a aula.

Antes de prosseguir dando nomes aos segmentos, **na figura que você construiu, pinte** os quatro triângulos retângulos de azul, e o quadrado **ao centro** de vermelho. **Contorne o quadrado externo** com lápis preto.

Importante: ao desenhar, pintar, colar, etc, você percebe muitas relações entre os elementos da figura. ***Fique atento!***

Vamos dar nome aos segmentos.

- ♥ Os segmentos AE, BF, CG, e DH (catetos) serão representados pela letra **a**;
- ♠ Os segmentos EB, FC, GD e HA (catetos) serão representados pela letra **b**;
- ♣ Os segmentos HE, EF, FG e GH (hipotenusas) serão representados pela letra **c**.



Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

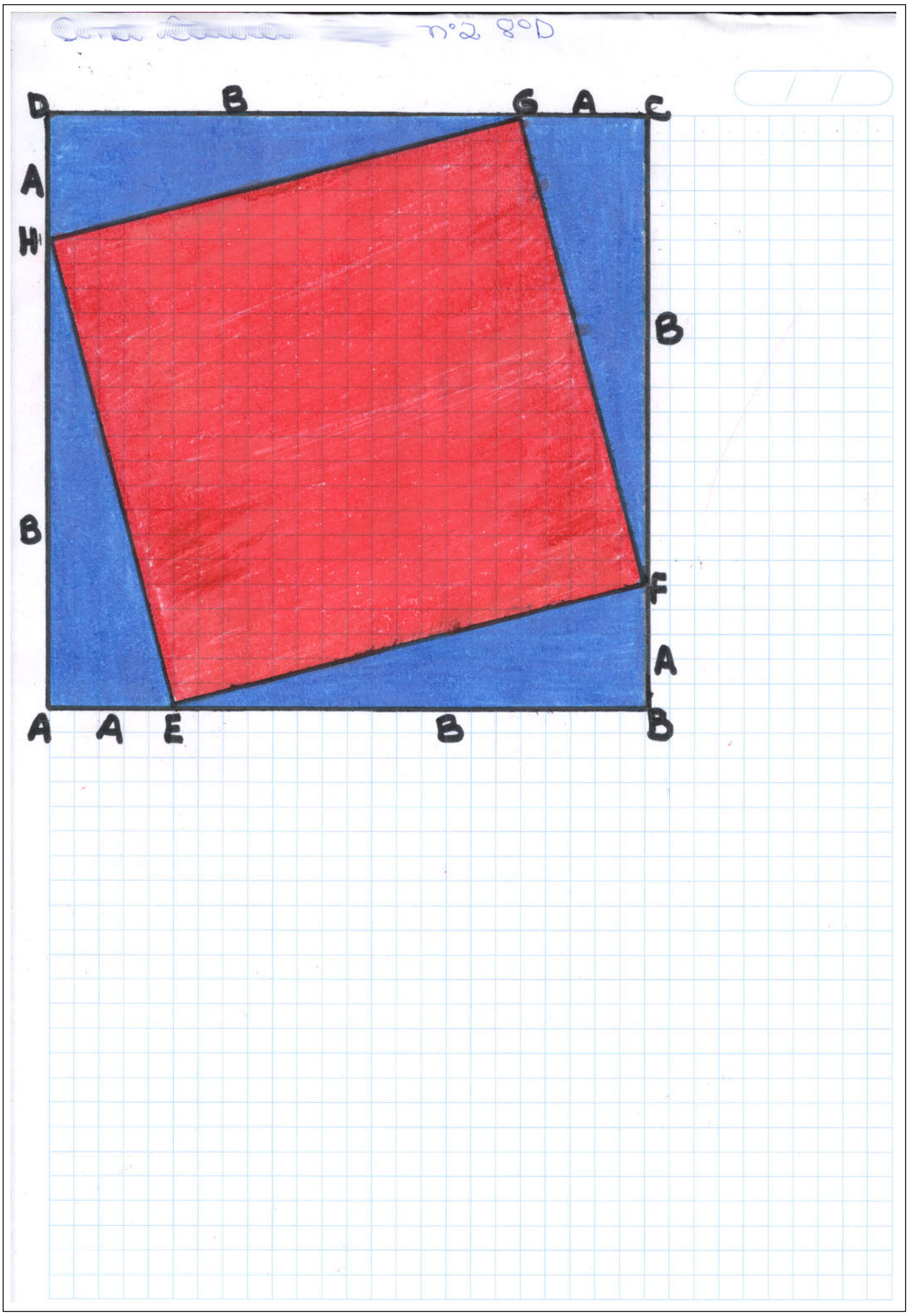
a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco (X)Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média (X) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

3

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula.

B.3 Terceira aula

Atividade: justificando o Teorema de Pitágoras por meio de movimento rígido

(Tempo: 2 aulas)

Nome	[redacted]	Nº 5	8º ano	D
Nome	[redacted]	Nº 37	8º ano	D

Objetivo: levar o aluno a justificar o Teorema de Pitágoras.

Material: Lápis, caneta e borracha.

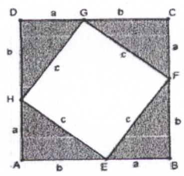
Sua atividade consiste em obter o Teorema de Pitágoras. Para isso você irá utilizar a figura ao lado.

O processo é simples!

Inicialmente temos o quadrado EFGH. **Movimentando** os triângulos, este quadrado deixa de existir na figura.

Ao final do movimento aparecem dois outros quadrados que você deverá encontrar.

O ponto chave da atividade consiste em comparar a área do quadrado inicial, EFGH, **com as áreas dos quadrados finais.**



BOM TRABALHO!

Primeira pergunta

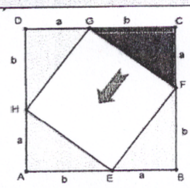
Olhando para a figura acima, qual a área do quadrado EFGH?

Resposta: c^2

A FIGURA INICIAL

Primeiro movimento

Movimente o triângulo retângulo FCG no sentido da flecha, até que a hipotenusa GF coincida com a hipotenusa HE.



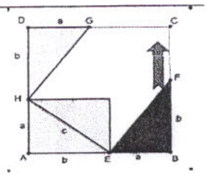
1

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

Segundo movimento

Movimente o triângulo retângulo EBF no sentido da flecha, fazendo o ponto F coincidir com o ponto C.

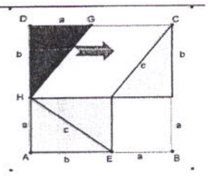
OBS.: *no próximo esquema o ponto F não será mais escrito.*



Terceiro movimento

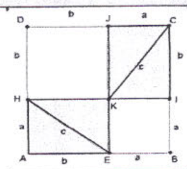
Movimente o triângulo retângulo GDH no sentido da flecha, fazendo o ponto G coincidir com o ponto C.

OBS.: *no próximo esquema o ponto G não será exibido.*



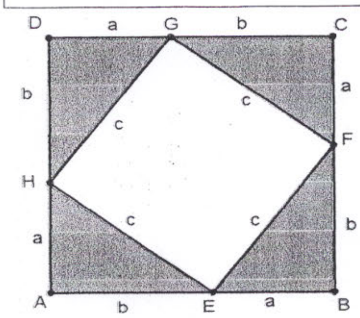
A FIGURA FINAL

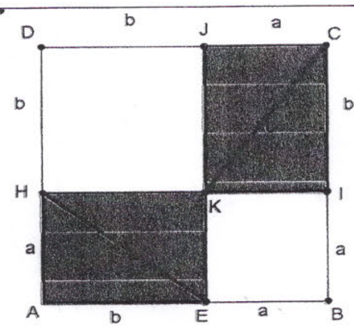
Ao final dos movimentos acima, chega-se na disposição ao lado.



Colocando juntas a figura inicial e a final PARA COMPARAR as áreas

Figura inicial	**Figura final**





Responda as perguntas a seguir:

a) Durante o processo descrito acima,algum **triângulo** foi dividido, ou teve suas dimensões modificadas?

(X) Não ( )Sim

2

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

b) Quando movimentamos uma figura sem amassá-la, sua área muda?

( ) Sim (X) Não

Note que não houve amassamento dos triângulos, nem do quadrado ABCD. *Apenas os triângulos foram movimentados de uma posição para outra.*

O quadrado inicial EFGH some, aparecendo dois outros quadrados, DHKJ e EBIK.

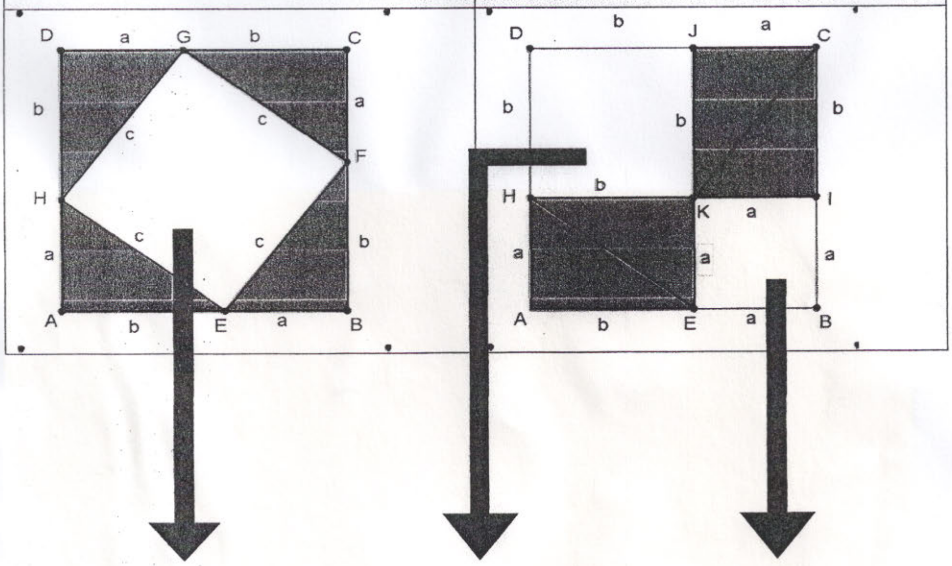
Diante do que foi dito e feito acima pede-se que você relacione a área do quadrado EFGH, **da figura inicial**, com as áreas dos quadrados DHKJ e EBIK, **da figura final**.

Fazendo isso na figura a seguir, você vai obter o Teorema de Pitágoras em apenas uma linha, e algumas observações.

Isso é maravilhoso!

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

Fechamento



Escreva abaixo a relação entre as áreas.		
Área do quadrado EFGH	**Área do quadrado HKED**	**Área do quadrado EBIK**
c^2	b^2	a^2
$c^2 = b^2 + a^2$		

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

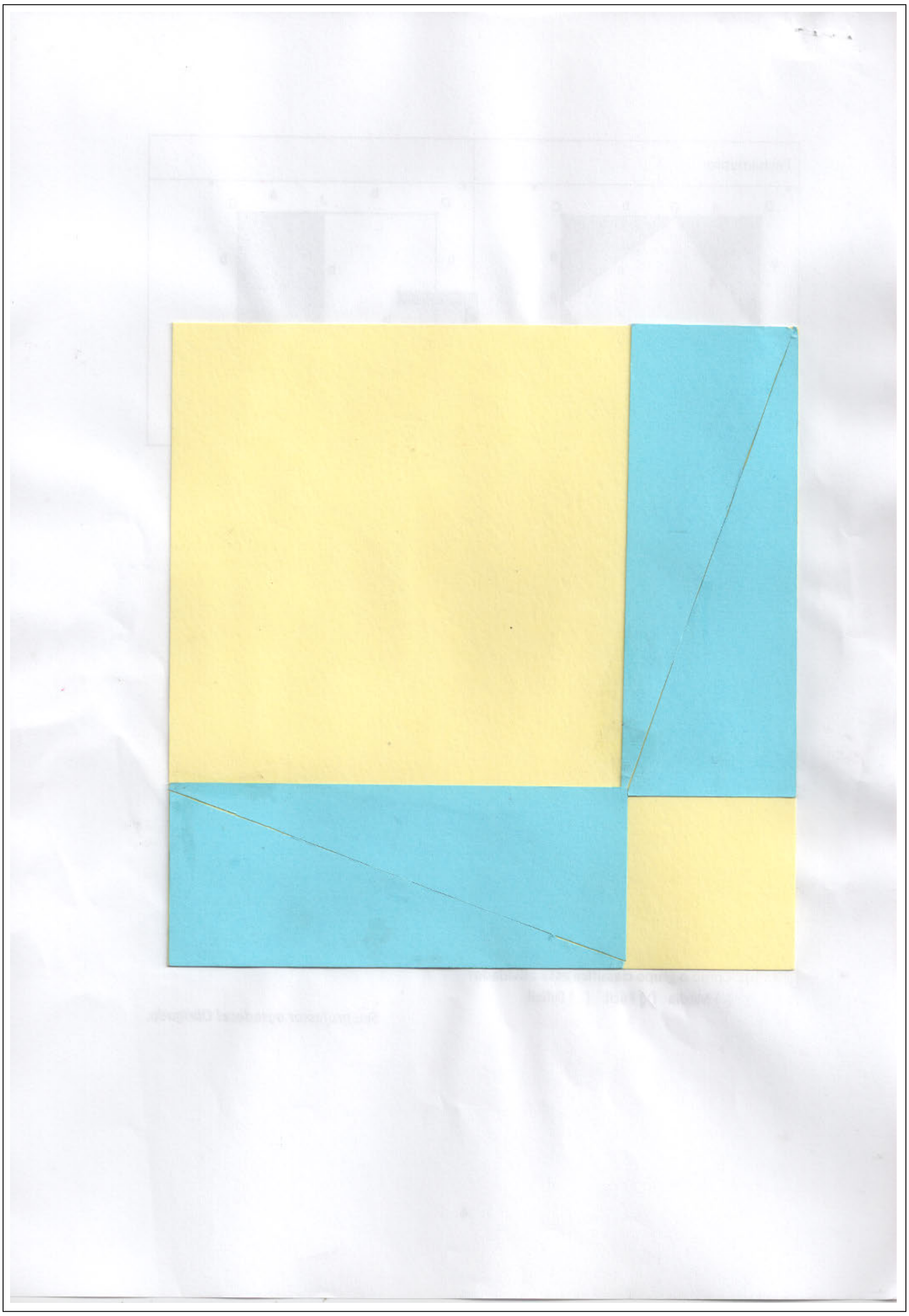
a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco (X)Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média (X) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

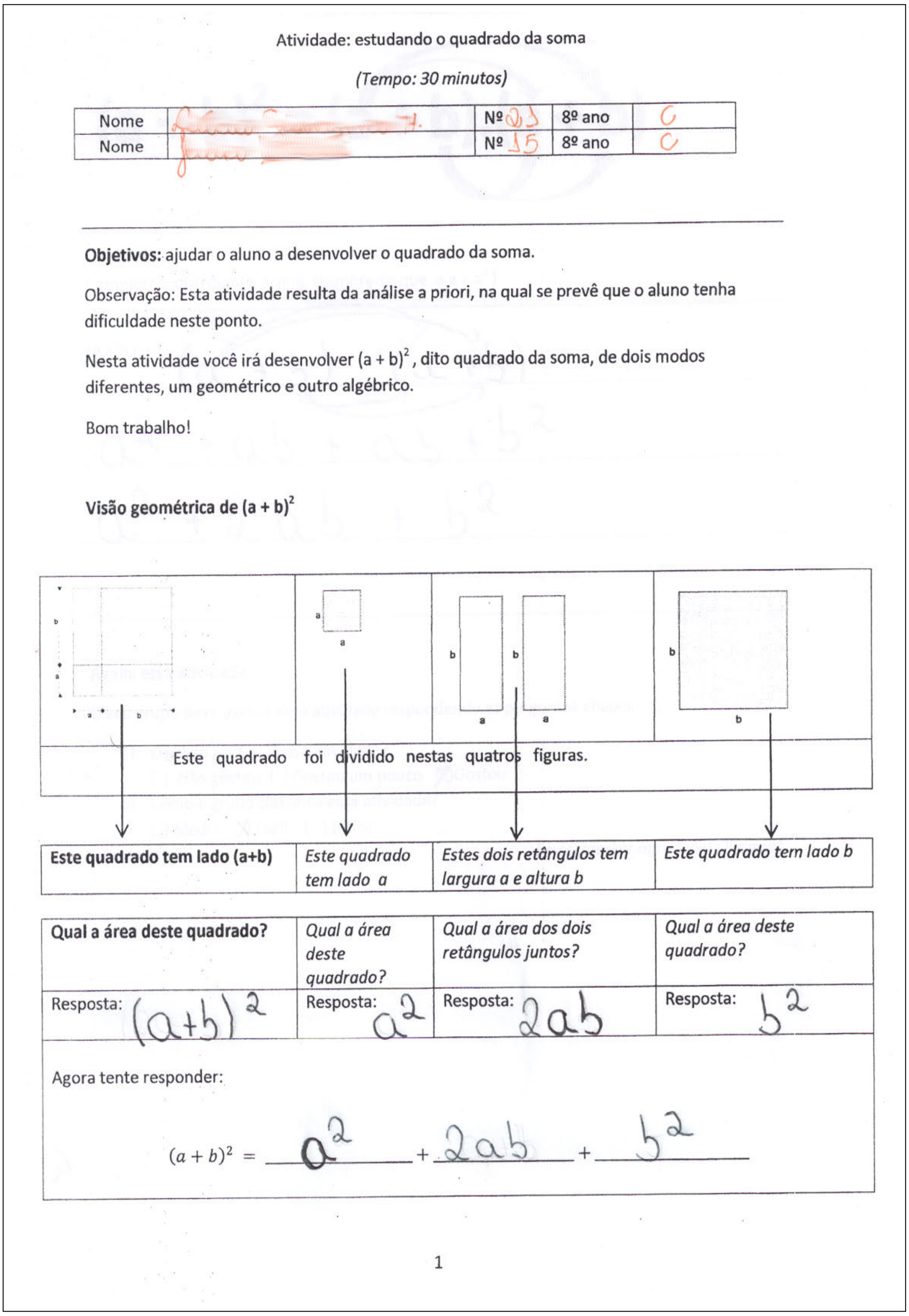
4

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula. Registramos o estágio final das translações.

B.4 Quarta aula



Atividade: estudando o quadrado da soma

(Tempo: 30 minutos)

Nome	[redacted]	Nº 23	8º ano	C
Nome	[redacted]	Nº 15	8º ano	C

Objetivos: ajudar o aluno a desenvolver o quadrado da soma.

Observação: Esta atividade resulta da análise a priori, na qual se prevê que o aluno tenha dificuldade neste ponto.

Nesta atividade você irá desenvolver $(a + b)^2$, dito quadrado da soma, de dois modos diferentes, um geométrico e outro algébrico.

Bom trabalho!

Visão geométrica de $(a + b)^2$

Este quadrado foi dividido nestas quatros figuras.

Este quadrado tem lado (a+b)	*Este quadrado tem lado a*	*Estes dois retângulos tem largura a e altura b*	*Este quadrado tem lado b*
Qual a área deste quadrado?	*Qual a área deste quadrado?*	*Qual a área dos dois retângulos juntos?*	*Qual a área deste quadrado?*
Resposta: $(a+b)^2$	Resposta: a^2	Resposta: $2ab$	Resposta: b^2

Agora tente responder:

$(a + b)^2 =$ a^2 + $2ab$ + b^2

1

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

Algebricamente

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$$

Complete a distributiva acima. (Lembre-se que $a.a = a^2$)

$(a+b)^2 =$ $(a+b).(a+b)$

$a^2 + ab + ab + b^2$

$a^2 + 2ab + b^2$

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco (X) Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média (X) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

2

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

B.5 Quinta aula

Atividade: chegando ao Teorema de Pitágoras

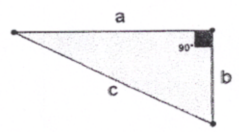
(Tempo: 2 aulas)

Nome	[redacted]	Nº 5	8º ano	D
Nome	[redacted]	Nº 37	8º ano	D

Objetivo: levar o aluno a perceber uma justificativa do teorema de Pitágoras.

Material:

- Lápis, régua e borracha;
- Lápis de cor (diversas cores);

Na aula passada, você realizou uma atividade de modo a estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo retângulo como o representado ao lado. Essa relação é conhecida como Teorema de Pitágoras e tem várias aplicações, por isso se esforce em aprendê-la. Nesta aula, você irá obter tal relação algebricamente e de um modo mais rápido. Para isso você deve seguir os passos abaixo atentamente. Bom trabalho!	

1

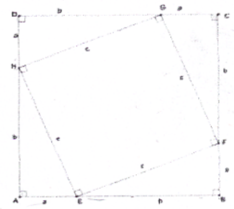
Folha produzida pelo aluno durante a aula.

Primeira parte

Numa folha de papel sulfite desenhe a figura ao lado com CAPRICHO E ATENÇÃO.

Essa etapa é fundamental para que você se familiarize com a figura.

Atenção: não mude o nome dos vértices.



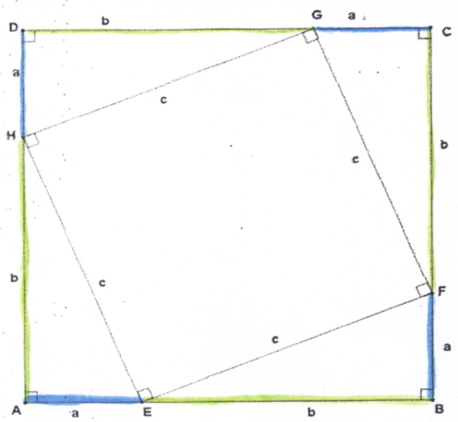
Segunda parte

Na figura abaixo, pede-se para:

- Localizar visualmente o lado AB;
- O lado AB está dividido em duas partes: AE e EB. Pinte AE de azul. Pinte EB de verde.

OBS.: "Pintar AE de azul" significa passar o lápis de cor azul sobre o segmento AE de modo a destaca-lo.

- Localizar visualmente o lado BC;
- O lado BC está dividido em duas partes: BF e FC. Pinte BF de azul. Pinte FC de verde.
- Localizar visualmente o lado CD;
- O lado CD está dividido em duas partes: CG e GD. Pinte CG de azul. Pinte GD de verde.
- Localizar visualmente o lado DA;
- O lado DA está dividido em duas partes: DH e HA. Pinte DH de azul. Pinte HA de verde.

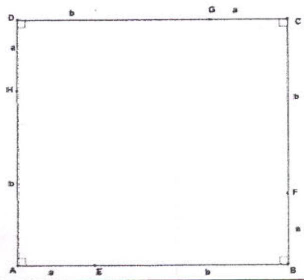


Após as tarefas acima, responda:

2

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

Qual o lado do quadrado ABCD?



Escreva a resposta aqui: $a+b$

Agora que você identificou o lado do quadrado ABCD, calcule sua área. (Obs.: recorde-se do quadrado da soma.)

Área_do_quadrado_ABCD = $(a+b)^2 = a^2 + 2.ab + b^2$

ATENÇÃO: *O resultado obtido aqui deve ser copiado na folha 4.

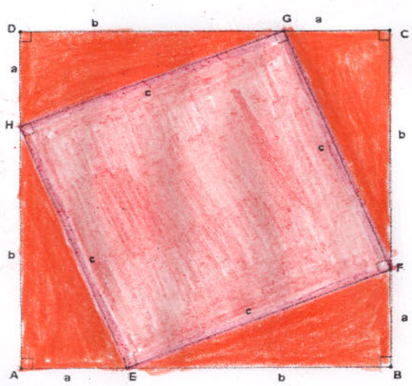
Terceira parte

O quadrado ABCD está dividido em 5 figuras menores. Identifique-as pelas letras dos vértices. (Por exemplo, quadrado maior ABCD.)

- ◣ Triângulo retângulo: AEH
- ◢ Triângulo retângulo: BFE
- ◥ Triângulo retângulo: CFG
- ◤ Triângulo retângulo: DGH
- ◇ Quadrado menor: EFGH

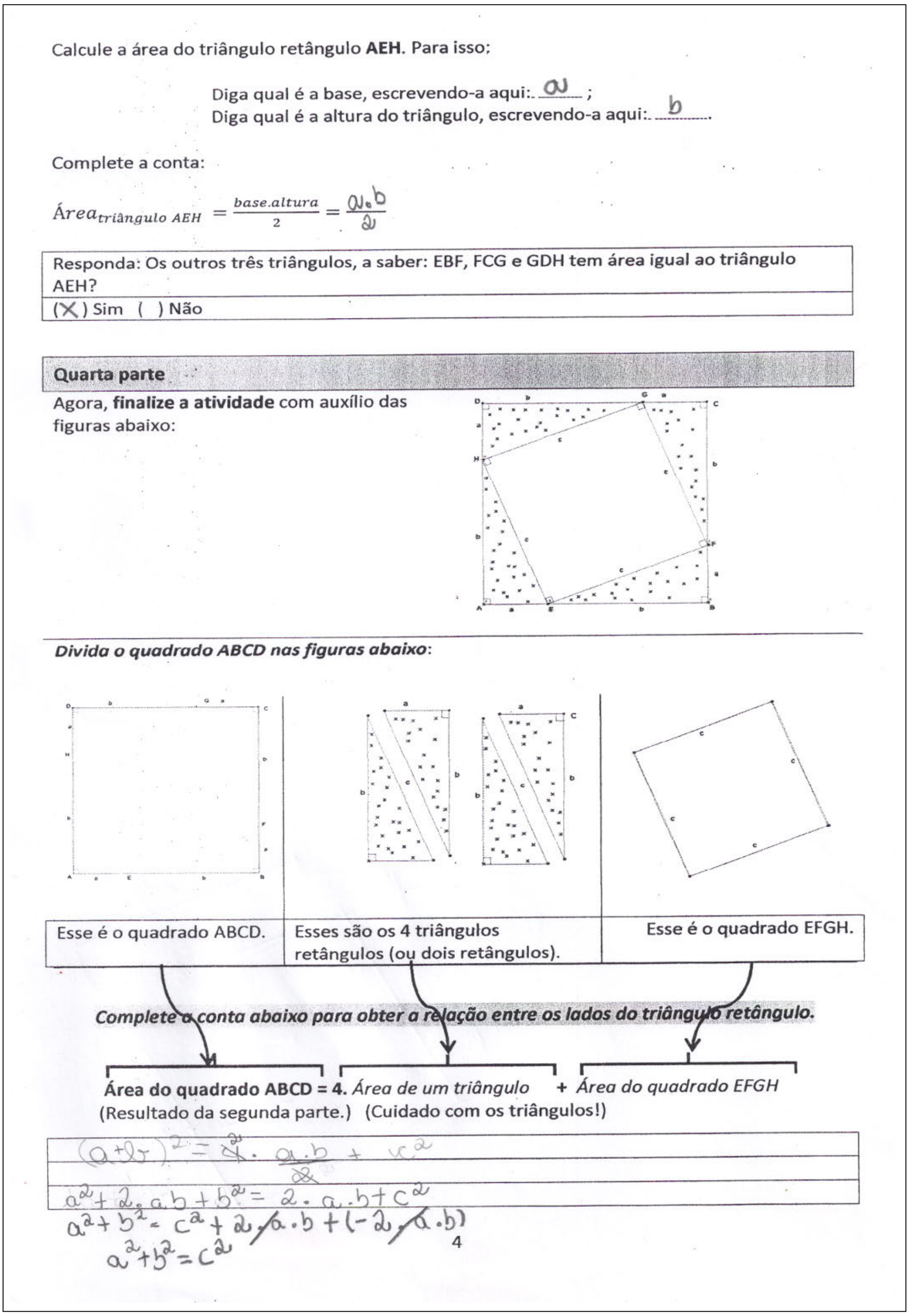
Agora, na figura abaixo, **pinte**:

- A hipotenusa de cada triângulo retângulo de **vermelho escuro;**
- O interior de cada triângulo de **laranja;**
- O interior do quadrado EFGH de **vermelho claro.**



3

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Calcule a área do triângulo retângulo **AEH**. Para isso:

Diga qual é a base, escrevendo-a aqui: a ;
Diga qual é a altura do triângulo, escrevendo-a aqui: b.

Complete a conta:

$$Área_{triângulo\ AEH} = \frac{base.altura}{2} = \frac{a.b}{2}$$

Responda: Os outros três triângulos, a saber: EBF, FCG e GDH tem área igual ao triângulo AEH?
(X) Sim ( ) Não

Quarta parte

Agora, **finalize a atividade** com auxílio das figuras abaixo:

Divida o quadrado ABCD nas figuras abaixo:

Esse é o quadrado ABCD.	Esses são os 4 triângulos retângulos (ou dois retângulos).	Esse é o quadrado EFGH.

Complete a conta abaixo para obter a relação entre os lados do triângulo retângulo.

Área do quadrado ABCD = 4. *Área de um triângulo* **+** *Área do quadrado EFGH*
(Resultado da segunda parte.) (Cuidado com os triângulos!)

$(a+b)^2 = \cancel{4}^{2} . \frac{a.b}{\cancel{2}} + c^2$

$a^2 + 2.a.b + b^2 = 2.a.b + c^2$

$a^2 + b^2 = c^2 + \cancel{2.a.b} + (\cancel{-2.a.b})$

$a^2 + b^2 = c^2$

4

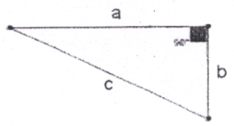
Folha produzida pelo aluno durante a aula.

Fechamento

Vamos recordar o objetivo:

Obter uma relação entre os lados do triângulo retângulo.

Essa relação é conhecida como Teorema de Pitágoras.



Se tudo ocorreu bem até aqui, o resultado da última conta que você fez é a relação procurada. Escreva-o dentro do retângulo abaixo:

Teorema de Pitágoras	$a^2 + b^2 = c^2$

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

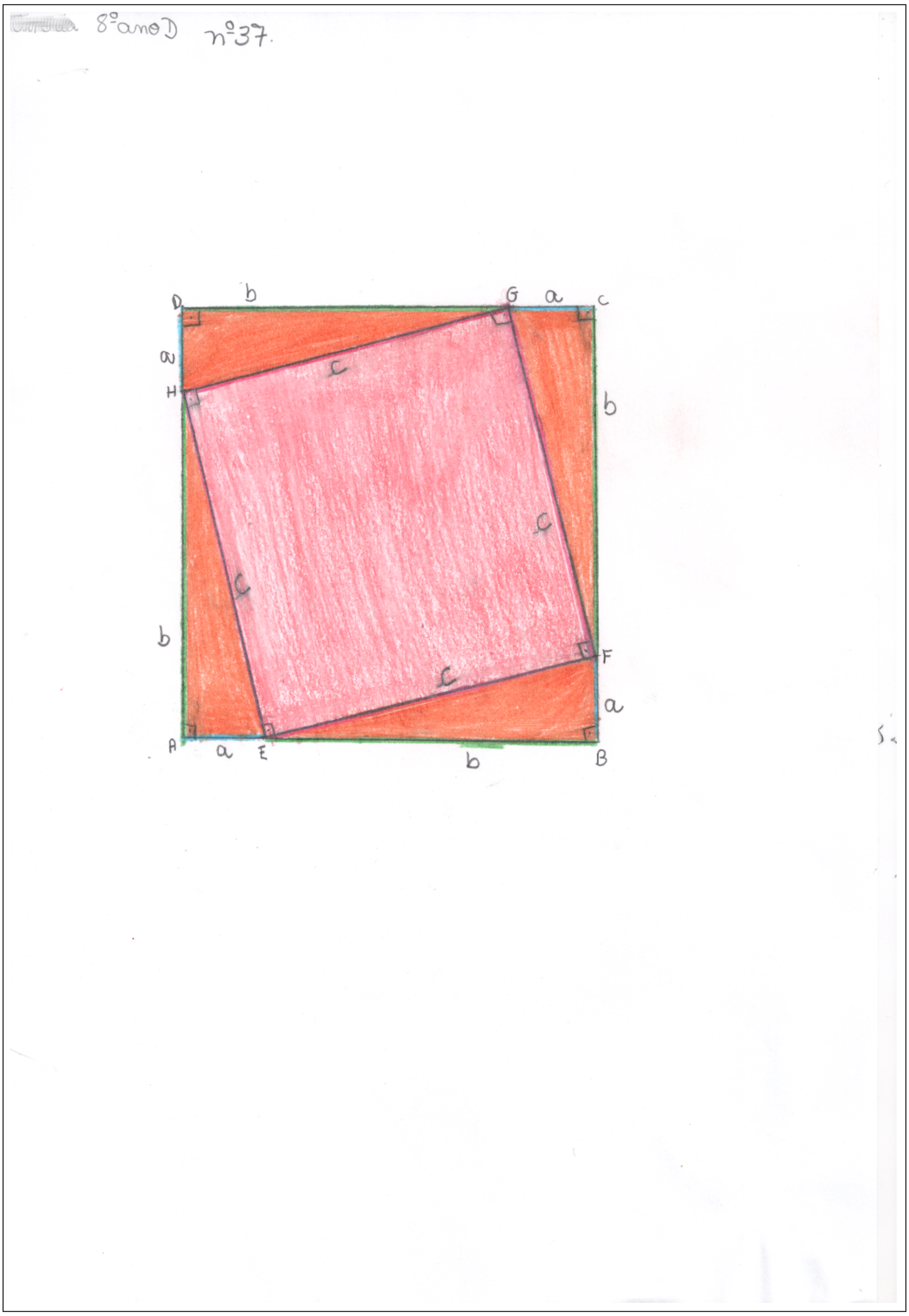
a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou ( ) Gostou um pouco (X)Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média (X) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

5

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula.

B.6 Sexta aula

Atividade: Cálculo da diagonal de um quadrado

(Tempo: 2 aulas)

Nome	[redacted]	Nº 17	8º ano	C
Nome	[redacted]	Nº 28	8º ano	C

Objetivos: calcular a diagonal de um quadrado.

Observação: trabalharemos com casos específicos apenas.

Material:

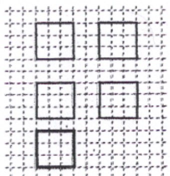
Papel quadriculado;
Lápis de cor (preto, azul, verde e vermelho);
Tesoura sem ponta;
Cola.

Primeira parte

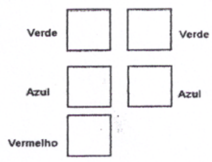
Proceda conforme os passos.

(Dica: Para não pular nenhuma etapa, vá pintando as carinhas alegres.)

☺ Numa folha de papel quadriculado desenhe cinco quadrado de lado 3 cm;



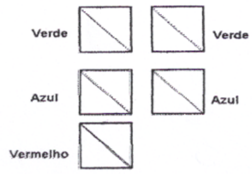
☺ Pinte dois de verde;
☺ Pinte dois de azul;
☺ Pinte um de vermelho;



1

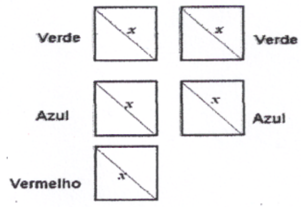
Folha produzida pelo aluno durante a aula.

☺ Com auxílio de uma régua desenhe apenas uma diagonal de cada um deles (pinte **a diagonal** de preto);

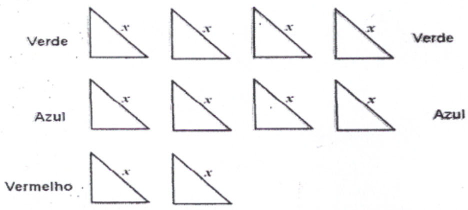


☺ Chame a diagonal por x

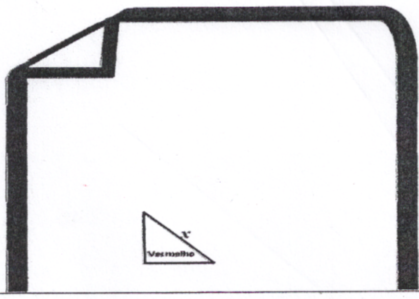
x será sua incógnita!



☺ Usando uma tesoura sem ponta, corte cada um dos quadrados, formando dez triângulos retângulos isósceles;



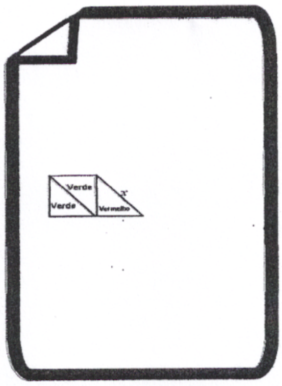
☺ Do outro lado desta folha, em seu centro, cole o triângulo retângulo pintado de vermelho;



2

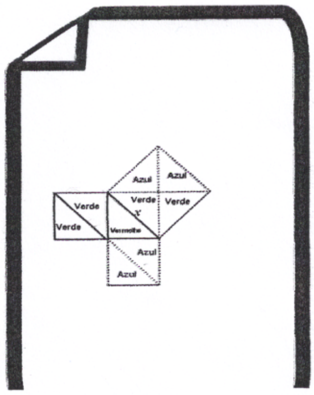
Folha produzida pelo aluno durante a aula.

☺ Pegue dois triângulos retângulos verdes e cole de modo a formar um quadrado junto a um dos catetos do triângulo retângulo vermelho;



☺ Pegue dois triângulos retângulos azuis e cole ao lado do outro cateto, de modo a formar outro quadrado;

☺ Pegue os outros quatro triângulos retângulos e forme um quadrado junto à hipotenusa;



Responda completando o quadro a seguir:

(Deixe suas contas no espaço abaixo).

Área do quadrado sobre a hipotenusa. (Lembre-se, chamamos a hipotenusa por x).	Área do quadrado (verde) sobre um dos catetos	Área do quadrado (azul) sobre o outro cateto
x^2	3^2	3^2

➢ Calcule o valor de X, continuando a conta abaixo:

3

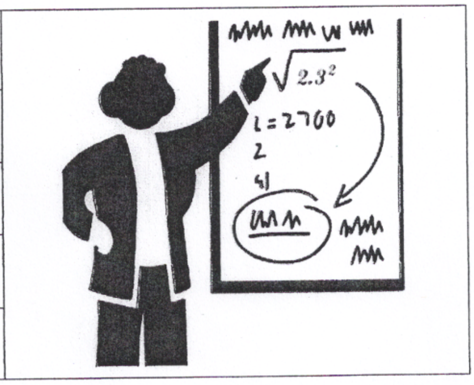
Folha produzida pelo aluno durante a aula.

$$x^2 = 3^2 + 3^2$$

$x^2 = 9 + 9$

$x^2 = 18$

$x = \sqrt{18}$

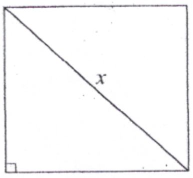


Segunda parte

☺ Na primeira parte desta atividade, calculamos a diagonal de um quadrado de lado 3, obtendo o valor $3\sqrt{2}$. Podemos mudar o lado do quadrado, em consequência a diagonal terá outro valor. Seguindo os passos acima você pode obter o valor da diagonal de outros quadrados.

Sua atividade é **IMAGINAR** a sequência anterior e calcular a diagonal dos quadrados indicados abaixo de um modo mais rápido.

☺ Calcule a diagonal de um quadrado de lado 5 cm.



$x^2 = 5^2 + 5^2$

$x^2 = 25 + 25$

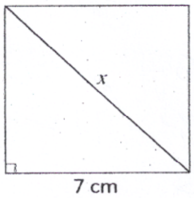
$x^2 = 50$

$x = \sqrt{50}$

4

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

☺ Calcule a diagonal de um quadrado de lado 7 cm. Faça você o desenho representativo do quadrado e da diagonal. Chame-a por x.



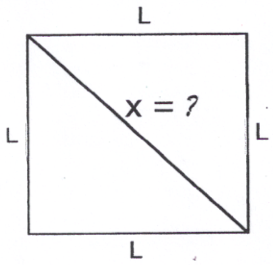
$x^2 = 7^2 + 7^2$

$x^2 = 49 + 49$

$x^2 = 98$

$x = \sqrt{98}$

Para concluir a atividade, tente calcular a diagonal de um quadrado de lado genérico L.



Para ajudar você eu deixei algumas pistas. A dica é sempre tentar completar o pontilhado, para isso olhe nas próximas linhas. Por exemplo, para você iniciar a conta, você deve observar a segunda e a terceira linha; para completar a segunda linha, você pode observar a terceira. Acho que você já entendeu.

Outro modo é pensar em tudo o que foi feito na atividade até aqui. Mas isso é para quem não precisa da ajudinha acima.

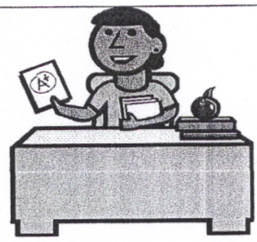
Bom trabalho!

$x^2 = L^2 + L^2$

$x^2 = 2.\,L^2$

$X = \sqrt{2L^2}$

$X = L.\,\sqrt{2}$



Avalie essa atividade.
O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

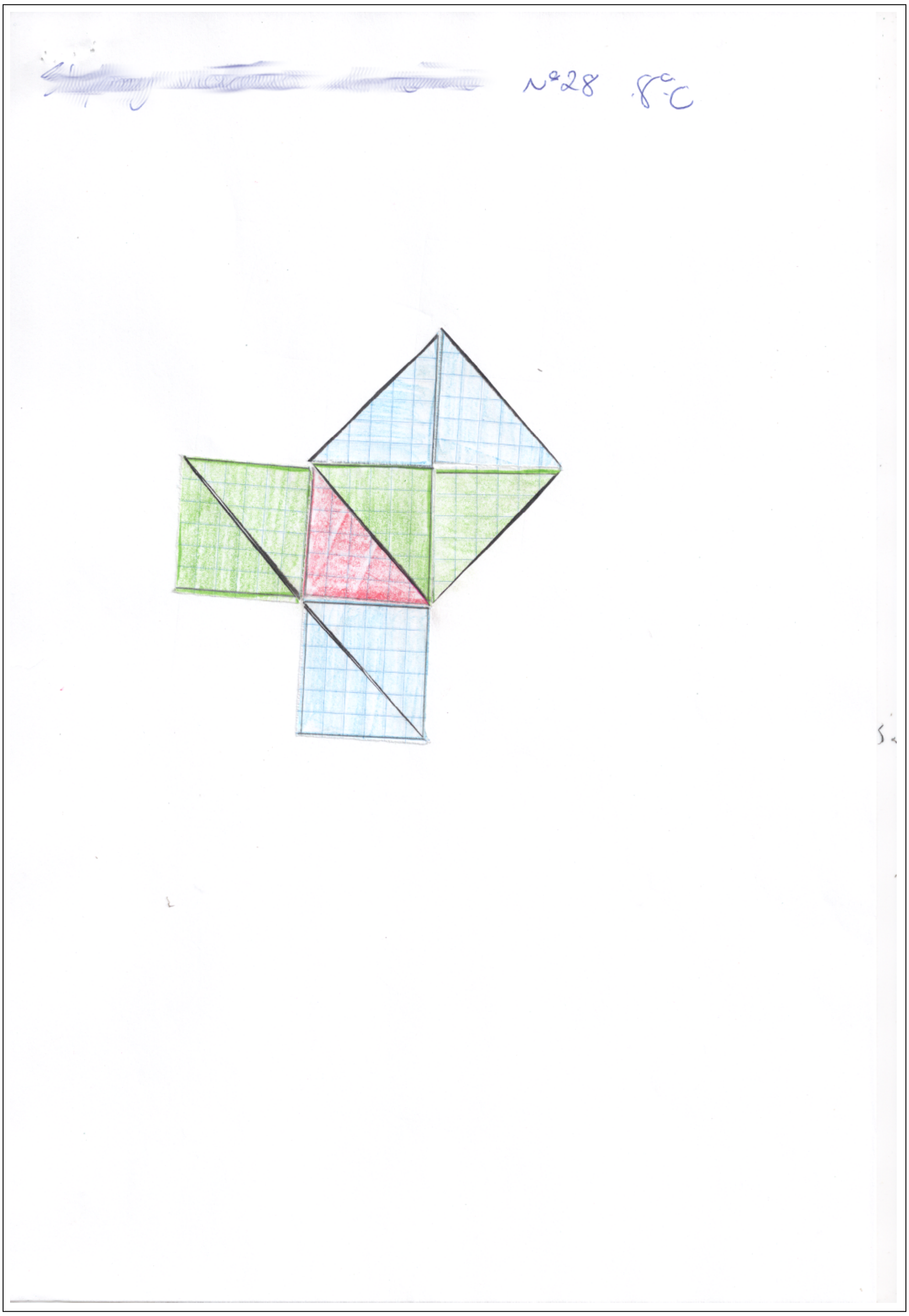
a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou (X) Gostou um pouco
( ) Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
( ) Média (X) Fácil ( ) Difícil

Seu professor agradece! Obrigado.

5

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula.

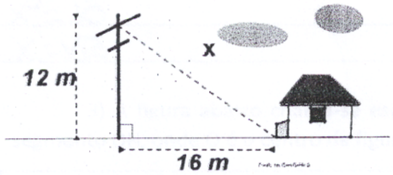
B.7 Sétima aula

Atividade: lista de exercícios

(Tempo: 2 aulas)

Nome	[illegible]	Nº 36	8º ano	C
Nome	[illegible]	Nº 22	8º ano	C

1) Um eletricista foi chamado para fazer uma ligação de luz na casa do Sr. Antônio. Após observar em volta da casa, o eletricista disse ao Sr. Antônio que poderia fazer a ligação a partir de uma caixa que estava localizada a 16 metros do poste. O Sr. Antônio perguntou qual a quantidade de fio que ele gastaria e o eletricista disse que, para dar essa informação, precisaria saber, antes, a altura do poste. Sabendo que a altura do poste é de 12 metros e a caixa de entrada se encontra ao nível do chão, determinar a quantidade de fio que o Sr. Antônio terá de comprar.



Solução

$x^2 = 12^2 + 16^2$

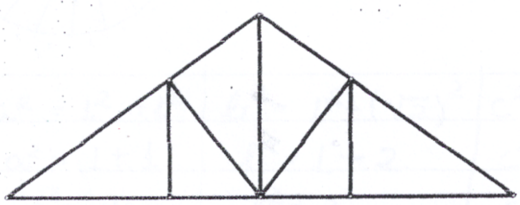
$x^2 = 144 + 256$

$x^2 = 400$

$x = \sqrt{400}$

$x = 20$

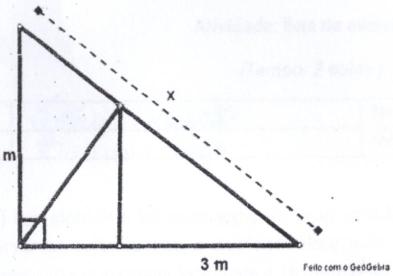
2) Na construção do telhado de uma casa, é muito comum os carpinteiros fazerem uma estrutura de madeira que tem o seguinte formato:



Um carpinteiro precisa confeccionar as vigas do telhado de uma casa. Para executar esse trabalho, ele precisa calcular o comprimento dessas vigas. Usando a calculadora, ajude-o a encontrar a medida indicada abaixo.

1

Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Solução

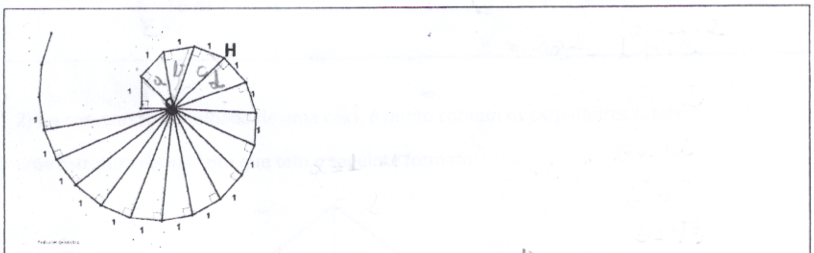
$x^2 = 1^2 + 3^2$ $\quad x = 3,16$

$x^2 = 1 + 9$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10}$

3) A figura abaixo chama-se espiral pitagórica. É muito bonita! Calcule a medida do segmento OH, onde O é o centro da figura.



Solução

$a^2 = 1^2 + 1^2$	$b^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$	$c^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$	$d^2 = 1^2 + 2^2$
$a^2 = 1 + 1$	$b^2 = 1 + 2$	$c^2 = 1 + 3$	$d^2 = 1 + 4$
$a^2 = 2$	$b^2 = 3$	$c^2 = 4$	$d^2 = 5$
$a = \sqrt{2}$	$b = \sqrt{3}$	$c = \sqrt{4}$	$d = \sqrt{5}$
		$c = 2$	

Avalie essa atividade.

O seu grupo deve avaliar essa atividade respondendo as perguntas abaixo.

a) O grupo gostou dessa atividade?
( ) Não gostou (X) Gostou um pouco
( ) Gostou

b) Como o grupo classifica essa atividade?
(X) Média ( ) Fácil ( ) Difícil

(Achei o último exercício mais difícil).

2

Folha produzida pelo aluno durante a aula.

B.8 Oitava aula

Atividade: jogo de dominó

(Tempo: 2 aulas)

Nome	[redacted]	Nº 28	8º ano	C
Nome	[redacted]	Nº 17	8º ano	C

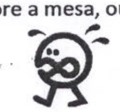
Objetivo: O objetivo deste jogo é levar o aluno a praticar o teorema de Pitágoras de um modo lúdico.

Organização da classe: em grupos de dois alunos.

Recursos necessários: para cada grupo de alunos será fornecido um jogo de dominó de 56 peças (não recortadas) e uma folha contendo as oito figuras das peças.

Regras

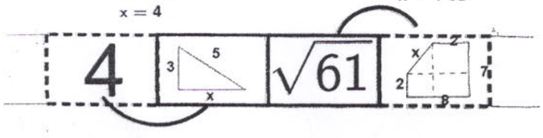
1) As peças são colocadas sobre a mesa, viradas para baixo e misturadas.
2) Cada jogador pega cinco peças enquanto as demais ficam viradas sobre a mesa.
3) Decide-se quem começa o jogo.
4) O primeiro jogador coloca uma peça virada para cima, sobre a mesa.
5) O segundo jogador tenta colocar uma peça, em que uma das extremidades tenha o valor de x da figura constante da peça sobre a mesa, ou tenha a figura cujo valor de x esteja na peça sobre a mesa.



Veja o exemplo abaixo.

$$5^2 = x^2 + 3^2$$
$$25 = x^2 + 9$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16}$$
$$x = 4$$

$$x^2 = (7-2)^2 + (8-2)^2$$
$$x^2 = 5^2 + 6^2$$
$$x^2 = 25 + 36$$
$$x^2 = 61$$
$$x = \sqrt{61}$$



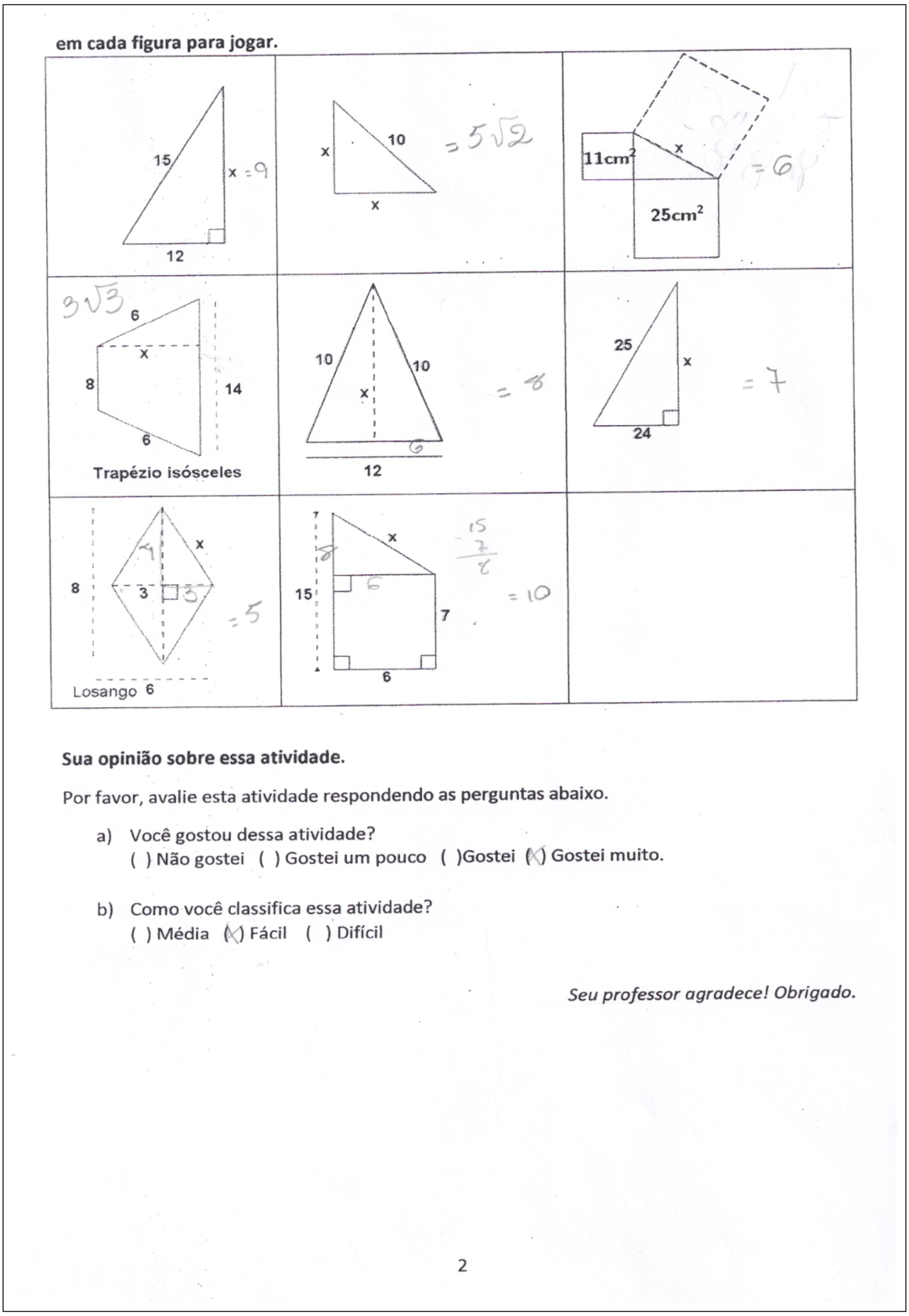
ATENÇÃO: RESOLVA A LISTA ANTES. DO CONTRÁRIO O JOGO FICA MUITO LENTO. SE NECESSÁRIO, DIVIDA O SERVIÇO.

6) Cada jogador só pode jogar uma peça de cada vez.
7) Na sua vez, o jogador que não tiver uma peça que possa ser encaixada, deve "comprar" outra peça no monte que esta sobre a mesa. O jogador deverá ir comprando até encontrar uma peça que se encaixe. SE DEPOIS DE COMPRAR CINCO PEÇAS, ainda assim não conseguir uma peça adequada, o jogador DEVERÁ PASSAR A SUA VEZ.
8) **O vencedor é o jogador que ficar sem peças primeiro.**

Desenhe as figuras abaixo em uma folha de papel quadriculado, depois calcule o valor de x

1

Folha produzida pelo aluno durante a aula.


em cada figura para jogar.

Sua opinião sobre essa atividade.

Por favor, avalie esta atividade respondendo as perguntas abaixo.

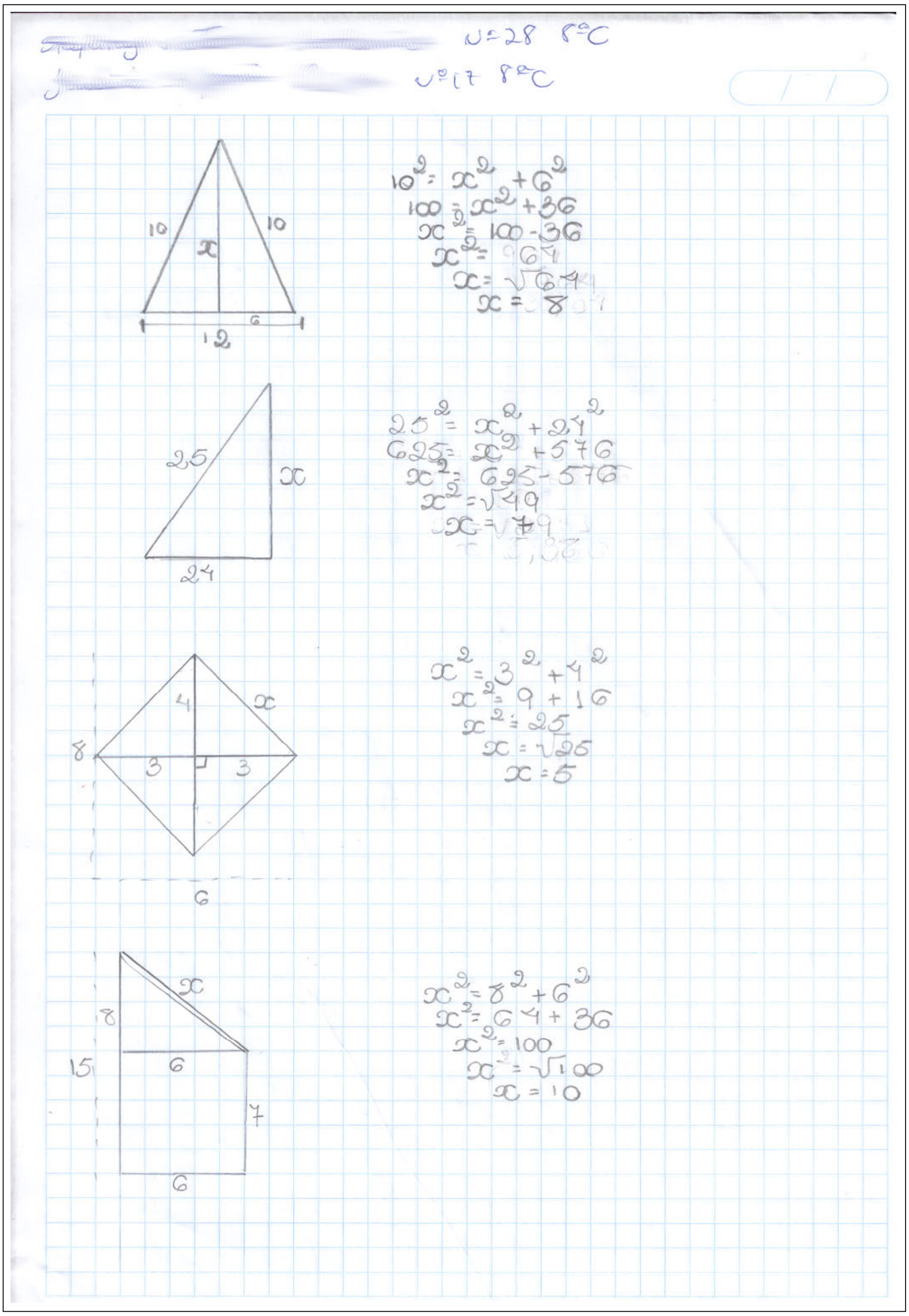
a) Você gostou dessa atividade?
( ) Não gostei ( ) Gostei um pouco ( )Gostei (X) Gostei muito.

b) Como você classifica essa atividade?
( ) Média (X) Fácil ( ) Difícil

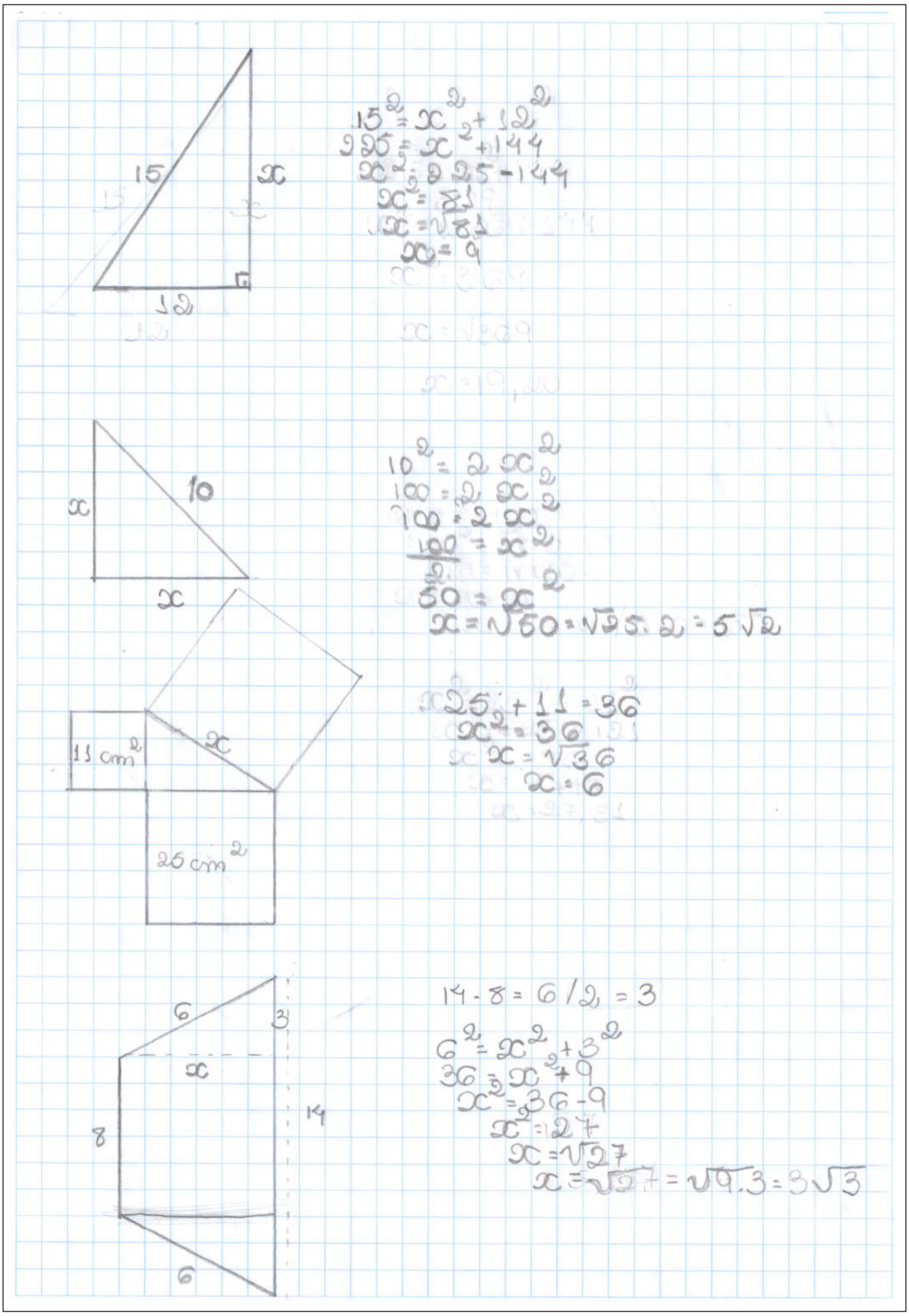
Seu professor agradece! Obrigado.

2

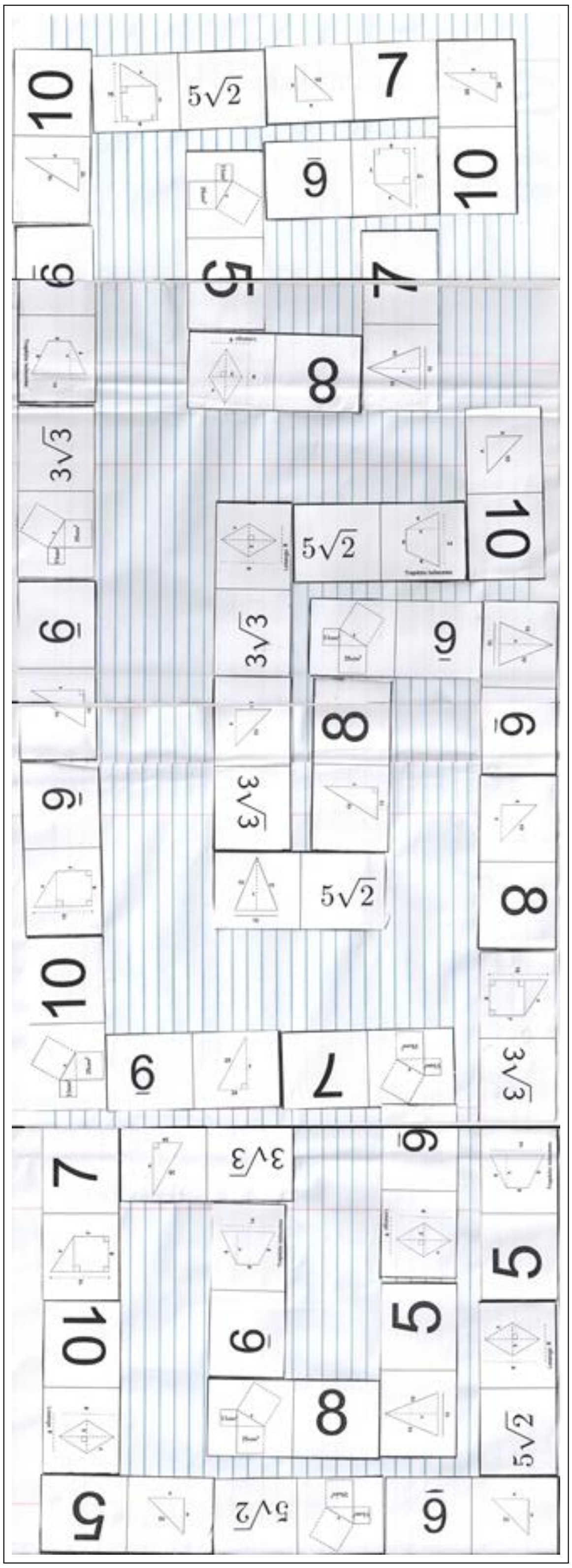
Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula.



Folha produzida pelo aluno durante a aula.

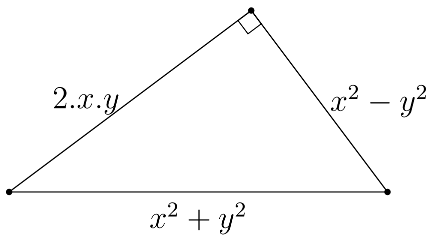
APÊNDICE C – Tabela gerada segundo a regra do Dr. Antemas Martin

Segundo Loomis (1940), Dr. Antemas Martin obtém novos triângulos pitagóricos conforme nos ensina a equação

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right)^2+4.x^2.y^2 \tag{C.1}$$

onde x e y são inteiros positivos, com $x>y$.

Figura 78 – Um triângulo pitagórico



Fonte: Produzidos pelo autor.

Tabela 17 – Tabela contendo alguns exemplos usando a regra de Martin

x	y	x^2+y^2	x^2-y^2	$2xy$	$(x^2+y^2)^2$	$(x^2-y^2)^2$	$(2xy)^2$
2	1	5	3	4	25	9	16
3	2	13	5	12	169	25	144
	1	10	8	6	100	64	36
4	3	25	7	24	625	49	576
	2	20	12	16	400	144	256
	1	17	15	8	289	225	64
5	4	41	9	40	1681	81	1600
	3	34	16	30	1156	256	900
	2	29	21	20	841	441	400
	1	26	24	10	676	576	100
6	5	61	11	60	3721	121	3600
	4	52	20	48	2704	400	2304
	3	45	27	36	2025	729	1296
	2	40	32	24	1600	1024	576
	1	37	35	12	1369	1225	144
7	6	85	13	84	7225	169	7056
	5	74	24	70	5476	576	4900
	4	65	33	56	4225	1089	3136
	3	58	40	42	3364	1600	1764
	2	53	45	28	2809	2025	784
	1	50	48	14	2500	2304	196

Fonte: Produzidos pelo autor.

APÊNDICE D – Tabela gerada segundo a regra de Pitágoras

A regra de Pitágoras segue a equação

$$\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 + n^2, \tag{D.1}$$

onde n, inteiro e positivo, é ímpar; notemos também que só conseguimos um triângulo pitagórico para $n > 1$.

Um fato curioso chama a atenção quando observamos a tabela [18]. $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$ são inteiros consecutivos. De fato, como n é ímpar, podemos escrever $n = 2p+1$, que substituindo nas expressões anteriores nos dão:

1. $\frac{n^2+1}{2} = \frac{(2p+1)^2+1}{2} = \frac{4p^2+4p+2}{2} = 2p^2+2p+1$
2. $\frac{n^2-1}{2} = \frac{(2p+1)^2-1}{2} = \frac{4p^2+4p}{2} = 2p^2+2p$

Por (1) e (2) fica verificado o que constatamos acima.

Tabela 18 – Tabela contendo alguns exemplos aplicando a regra de Pitágoras

n	$\frac{n^2-1}{2}$	$\frac{n^2+1}{2}$	n^2	$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$
1	0	1	1	0	1
3	4	5	9	16	25
5	12	13	25	144	169
7	24	25	49	576	625
9	40	41	81	1600	1681
11	60	61	121	3600	3721
13	84	85	169	7056	7225
15	112	113	225	12544	12769
17	144	145	289	20736	21025
19	180	181	361	32400	32761
21	220	221	441	48400	48841
23	264	265	529	69696	70225
25	312	313	625	97344	97969
27	364	365	729	132496	133225
29	420	421	841	176400	177241

Fonte: Produzidos pelo autor.